PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ERRORES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES.

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

LUZ MILAGROS AZAÑERO TÁVARA

ASESOR DE TESIS:
DR. ULDARICO MALASPINA JURADO

MIEMBROS DEL JURADO:

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR
MG. ELIZABETH MILAGROADVÍNCULA CLEMENTE

Lima – Perú

2013

DEDICATORIA

A Dios, por ser el amigo incondicional, el motor en mi vida y quien me da la fuerza, esperanza y alegría de cada día.

A la Virgen María por serla reina del cielo, mi madre y mi protectora.

A mis queridos padres Aura y José por brindarme su constante apoyo, confianza y amor en todo momento. Por alentarme siempre y hacer posible mi realización personal y profesional.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir la presente investigación, deseo expresar mi agradecimiento a quienes con su apoyo constante, hicieron posible la culminación dela misma.

A mí estimado asesor de tesis el Dr. Uldarico Malaspina por su valiosa orientación y horas dedicadas a la realización de esta tesis.

A la profesora Elizabeth Advincula por su apoyo en la culminación de esta tesis.

A la profesora Cecilia Gaita por brindarme su apoyo en todo momento.

A todos los profesores de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP que contribuyeron en mi formación académica.

A las estudiantes del colegio Parroquial Reina de la Paz que colaboraron con su participación en el desarrollo de la tesis.

RESUMEN

El trabajo de investigación tiene como objetivo identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes al resolver problemas con ecuaciones lineales.

Se llevó a cabo con las estudiantes de Primer Grado de Educación Secundaria del Colegio Parroquial Reina de la Paz de San Isidro. Luego de una prueba de diagnóstico especialmente elaborada, se diseñó una secuencia de actividades con dificultad graduada relacionadas con ecuaciones lineales,usando como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, que permitió estimular tratamientos y conversiones entre los diversos registros de representación semiótica.

De los resultados y conclusiones obtenidos, destacamos, finalmente, que al resolver problemas con ecuaciones lineales, los estudiantes muestran dificultades, de menos a más, en las siguientes transformaciones: tratamientos en el registro algebraico, pues en general resuelven satisfactoriamente ecuaciones lineales; conversiones del registro verbal al algebraico, pues llegan a plantear ecuaciones correspondientes a problemas sencillos enunciados verbalmente;conversiones del registro algebraico al verbal,pues fue una minoría la que logró construir un enunciado verbal correspondiente a una información cuantitativa y con una incógnita, dada en un diagrama de Venn.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación se presentanlos errores más frecuentes que los estudiantes tienen al resolver problemas con ecuaciones lineales.

El marco teórico que sustenta este trabajo es la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, dado que al realizar conversiones de un registro a otro, se logra la comprensión de un objeto matemático, lo que es esencial para resolver problemas en particular con ecuaciones lineales.

Este trabajo de investigación está estructurado en 6 capítulos como se detalla a continuación.

En el capitulo1, se presenta el problema de investigación, los antecedentes, la formulación del problema, los objetivos de la investigación y la hipótesis de trabajo.

En el capítulo 2, se describe el marco teórico sobre la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval.

En el capítulo 3, se presenta la resolución de problemas matemáticos y losprocesos involucrados para resolver problemas matemáticos.

En el capítulo 4, se presenta los procedimientos metodológicos y desarrollo de la investigación;se analiza cómo son tratadas las ecuaciones lineales en el texto escolar usado por los estudiantes; y se presenta el diseño de la secuencia de actividades que se propone y su aplicación correspondiente, incluidas las dos sesiones de aprendizaje.

En el capítulo 5, se presenta el análisis de los resultados de la aplicación de los problemas elaborados y además se explicitan los errores comunes que presentan los estudiantes al resolver problemas con ecuaciones lineales.

Finalmente en el capítulo 6, se presentan las conclusiones relacionadas con los objetivos planteados y las sugerencias para futuras investigaciones.

INDICE

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 9
1.1 Antecedentes de la investigación 9
1.2 Problema de investigación 15
1.3 Objetivos 15
1.4 Hipotesis 15

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO 16
2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica 16

CAPITULO 3. PROBLEMA MATEMÁTICO 23
3.1 Resolución de problemas matemáticos 23
3.2 Procesos para resolver problemas matemáticos 24

CAPÍTULO 4. PROCEDIMIENTOS METODOLOGÍCOS Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN 28
4.1 Metodología 28
4.2 Desarrollo de la Investigación 29
4.2.1 Las ecuaciones lineales en textos de matemáticas 29
4.2.2 Las ecuaciones lineales en el texto escolar empleado por los estudiantes 31
4.2.3 Diseño de la secuencia didáctica 35
4.2.3.1 Elaboración de una prueba de diagnóstico 35
4.2.3.2 Aplicación y resultados de la prueba de diagnóstico. 44
4.2.3.3 Elaboración de problemas relacionados con Ecuaciones Lineales. 46
4.2.3.4 Sesión de aprendizaje N° 1 con los estudiantes. 53
4.2.3.5 Aplicación de los problemas elaborados 65
4.2.3.6 Elaboración de un nuevo problema relacionado con Ecuaciones Lineales. 66
4.2.3.7 Sesión de aprendizaje Nº2 con los estudiantes 69
4.2.3.8Aplicación del nuevo problema elaborado. 76

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS 77
5.1 Resultados de la aplicación de la primera y segunda lista de problemas 77
5.2 Análisis de los resultados de la aplicación de los problemas elaborados. 78
5.3 Análisis de los resultados del nuevo problema elaborado 88
5.4 Errores y dificultades al resolver problemas de ecuaciones lineales 92

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS 96
6.1 Conclusiones 96
6.2 Sugerencias 98

REFERENCIAS 99

APÉNDICE 103

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Los tipos de transformaciones de representaciones semióticas 17
Figura 2. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento 18
Figura 3. Clasificación de diferentes registros en la actividad matemática 20
Figura 4. Resumen de las conversiones y tratamientos entre los registros de representación semiótica 22
Figura 5. Similitudes de los pasos para resolver problemas.. 25
Figura 6. Pasos para resolver problemas y sus tipos de conocimientos 26
Figura 7. Traducción de Expresiones verbales a ecuaciones 32
Figura 8. Representaciones de expresiones verbales.. 32
Figura 9. Problemas modelo de ecuaciones lineales 33
Figura 10. Problemas propuestos de ecuaciones lineales... 33
Figura 11. Respuesta de la estudiante.. 78
Figura 12. Respuesta de la estudiante.. 79
Figura 13. Respuesta de la estudiante.. 80
Figura 14. Respuesta de la estudiante.. 80
Figura 15. Respuesta de la estudiante.. 81
Figura 16. Respuesta de la estudiante.. 81
Figura 17. Respuesta de la estudiante.. 82
Figura 18. Respuesta de la estudiante.. 82
Figura 19. Respuesta de la estudiante.. 83
Figura 20. Respuesta de la estudiante.. 84
Figura 21. Respuesta de la estudiante.. 85
Figura 22. Respuesta de la estudiante.. 85
Figura 23. Respuesta de la estudiante.. 86
Figura 24. Respuesta de la estudiante.. 86
Figura 25. Respuesta de la estudiante.. 87
Figura 26. Respuesta de la estudiante.. 87
Figura 27. Respuesta de la estudiante.. 88
Figura 28. Respuesta de la estudiante.. 89
Figura 29. Respuesta de la estudiante.. 89
Figura 30. Respuesta de la estudiante.. 90
Figura 31. Respuesta de la estudiante.. 91
Figura 32. Respuesta de la estudiante.. 91

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Resultados de la primera lista de problemas 77
Tabla 2. Resultados de la segunda lista de problemas 77

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

La resolución de problemas es una de las actividades matemáticas fundamentales y también uno de los temas primordiales en investigación matemática cuyo interés se centra en las dificultades que presentan los estudiantes para resolver problemas matemáticos, como lo señala Hernández (1996):

> Ahora bien, la resolución de problemas se ha mostrado en todos los niveles como el tópico de mayor dificultad para los alumnos. Esta dificultad puede tener algo inherente a su propia complejidad, pero muchas veces ha sido el resultado de unos planteamientos metodológicos inadecuados, un desconocimiento de los procesos que siguen los alumnoso consecuencia de no haber sido éstos suficientemente motivados. (p. 9).

Por nuestra experiencia sabemos que resolver problemas implica procesos que los estudiantes deben de conocer y como dice Hernández los maestros debemos de estimular a resolución de problemas.

Asimismo la Resolución de problemas favorece el pensamiento matemático como afirma Echenique (2006):

> Más que enseñar a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las "herramientas" que les llevarán a ello.(p.10).

Por ello es necesario considerar la importancia de no solo resolver problemas rutinarios sino aplicar conceptos para la resolución de problemas en diferentes contextos (extramatemáticos).

Por otro lado, elNational Council of Teachers of Mathematics NCTM (2009) subraya que los estudiantes deben tener oportunidades frecuentes para formular y resolver problemas complejos que requieran una cantidad significativa de esfuerzo; deben ser animados a reflexionar sobre su pensamiento ya que la resolución de problemas es una parte integral de todo aprendizaje de matemáticas.

Además, el Programa Internacional de Evaluación para Estudiantes (PISA) propone entre sus competencias la alfabetización matemática, es decir desarrollar la capacidad de los estudiantes de 15 años para aplicar conocimientos y destrezas adquiridas en la escuela a situaciones similares a las que probablemente se enfrentará en la vida cotidiana, y esto se relaciona con la capacidad para analizar, razonar y comunicar los resultados de manera efectiva, tal como se señala enOCDE/PISA (2000):

> La formación matemática es la capacidad del individuo, a la hora de desenvolverse en el mundo, para identificar, comprender, establecer y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida actual y futura de ese individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar. (p. 71).

Todo ello nos lleva a reconocer la importancia de la resolución de problemas y sobre todo que los estudiantes elaboren problemas.Malaspina (2011) afirma que:

> La actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada. (p.237).

Es en este sentido la resolución de problemas y la creación de los mismos son actividades esenciales de las matemáticas. También Santos(2001) manifiesta la trascendencia que tiene el hecho de plantear un problema en especial por parte de los estudiantes;pues considera una manera valiosa de lograr aprendizajes efectivos. Este autor nos dice:

> Lo importante es contribuir a la comprensión del proceso de planteamiento de problema, a la comprensión del proceso que se desarrolla en la interacción pedagógica y que lleva a la formulación de problemas. Este proceso consiste en un ir y venir entre la formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas que esperamos desemboque en un problema matemático. (p. 2).

Por ello, el maestro tiene que aprender a formular preguntas acertadamente y estimular a los estudiantes a responder en forma activa y a su vez a formular preguntas.

Una de las investigaciones referidas al tema de Resolución de Problemas es la tesis doctoral de Ramírez (2007) quien estudia las estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. Ramírez señala que para resolver problemas es necesario seguir los siguientes pasos:

a) La lectura y análisis del problema.
b) La representación mental o gráfica del problema para establecer una relación lógica entre los datos y la incógnita y lograr una traducción simbólica adecuada en el lenguaje matemático.
c) La ejecución de las operaciones indicadas.
d) La determinación y el análisis de la solución.

Además en este trabajo se mencionan que las herramientas estratégicas en la solución de problemas son los diagramas, cuadros de doble entrada, esquemas y tablas.

A su vez Careaga (1992) señala que para desarrollar la comprensión de problemas se debe elaborar guías de trabajo para que los alumnos entiendan el problema. En las cuales se determinará la información útil, la pregunta que debe responder y finalmente la estrategia que le permitiría resolver el problema; el desafío del desarrollo del pensamiento como lo plantea este autor es el más grande trabajo que el docente asume frente a sí mismo y sus estudiantes.

En el 2011 Depaz y Fernández analizan las diferencias que presentan los estudiantes de tercer grado de Educación Primaria de un colegio privado y un colegio estatal de Lima en la resolución de problemas matemáticos de sustracción con el fin de conocer las estrategias aplicadas en la resolución de problemas. Las autoras sostienen que las diferencias que se observaron en los estudiantes fueron en las habilidades de comprensión y resolución en la resolución de problemas a través de indicadores como parafraseo del problema, identificación y representación de datos a través de un gráfico (comprensión) y elegir la operación adecuada y aplicar correctamente los algoritmos de sustracción (resolución).

Sobre resolución de problemas en el Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica Regular (2009) en el área de Matemática se menciona las capacidades para cada grado, las cuales involucra los procesos de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas y se establece que:

> Es necesario que el alumno resuelva problemas de contextos reales o matemáticos, para que tenga la oportunidad de aplicar y adaptar diversas estrategias en diferentes contextos, y para que al controlar el proceso de resolución reflexione sobre éste y sus resultados. La capacidad para plantear y resolver problemas, dado el carácter integrador de este proceso, posibilita la interacción con las demás áreas curriculares

> coadyuvando al desarrollo de otras capacidades; asimismo, posibilita la conexión de las ideas matemáticas con intereses y experiencias del estudiante. (p. 317).

Específicamente en primer grado de secundaria (VI ciclo) una de las capacidades que se desea desarrollar en los estudiantes es resolver problemas de ecuaciones lineales con una incógnita, tal como se indica en el DCN (2009):

> Resuelve problemas de traducción simple y compleja que involucran ecuaciones lineales con una incógnita. (p 320).

Como sabemos las ecuaciones lineales – objeto matemático de la presente investigación – es uno de los temas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas.

Por lo que se refiere al objeto matemático que son las ecuaciones lineales Pozas (2009) manifiesta:

> Los problemas de naturaleza verbal requieren procesar el enunciado para construir una representación matemática de éste, la cual, mediante la utilización de reglas de la aritmética o del álgebra, permita obtener la solución. Es importante ofrecer a los estudiantes espacios en donde la resolución de problemas mediante ecuaciones esté genuinamente al alcance de ellos; y en donde las notaciones y las expresiones espontáneas de los estudiantes se trabajen pacientemente, pues éstas proveen fundamento para el aprendizaje de las estructuras sintácticas del álgebra. (p.60)

La ecuación lineal es un tema del Álgebra que se enseña desde los primeros grados en temas de aplicación como Conjuntos, Proporcionalidad, Segmentos, Áreas, etc. por ello es de vital importancia el presente objeto matemático en la resolución de problemas. Las ecuaciones lineales son aprendidas desde el nivel primario, después se da más énfasis en el nivel secundario y también en el universitario y aun así se observa que los estudiantes tienen dificultades al resolverlas. Caballero (2010) en su tesis sostiene:

> A pesar de que las ecuaciones son estudiadas durante prácticamente toda la vida escolar de los estudiantes, se han documentado dificultades y errores en el aprendizaje de este concepto. El manejo del signo igual, el uso de las propiedades simétricas de la ecuación y el significado de las literales son de los errores más comunes entre los educandos. (p.3).

En nuestra experiencia docente, hemos podido constatar las dificultades de los estudiantes al pasar de la aritmética al álgebra, su dificultad para usar las variables ypara resolver ecuaciones. Tienen dificultades en entender la diferencia entre tratar casos específicos de números concretos, como se hace en la aritmética, y tratar con variables que representan números cualesquiera de un conjunto determinado y en ese sentido, ver el álgebra como una generalización de las relaciones matemáticas aprendidas en la aritmética.

Una de las investigaciones referidas a las ecuaciones lineales es la de Maffey (2006) quien señala:

> El alumno promedio pocas veces logra dominar el empleo de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas concretos y de extender las técnicas de resolución a otros contextos, tales como el manejo de fórmulas en física o química, o bien, la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales; mucho menos aún, visualizar la necesidad de emplear una ecuación para resolver un problema fuera de un contexto escolar, lo que es síntoma de que el trabajo realizado al respecto en los cursos de álgebra no ha sido suficiente para lograr un aprendizaje real del tema. (p.14).

Cabe señalar que en nuestra investigación consideramos los aportes de la teoría de registros de Raymond Duval quien afirma que las dos clases de transformaciones de representaciones denominadas “conversión”y “tratamiento”son esenciales en toda actividad matemática. Duval (2006) hace referencia que en las ecuaciones se presentan estas transformaciones:

> Así; en los problemas de ecuaciones es esencial distinguir dos niveles de conversión diferentes: el relativo a la expresión literal de las cantidades desconocidas que se nombran o describen en el enunciado y el de su organización en una relación de igualdad. Es en este segundo nivel, semánticamente más complejo, donde radican las verdaderas dificultades de traducción en ecuación. Las dificultades de los alumnos para la designación literal de las cantidades desconocidas no son a menudo más que un reflejo. (p 156).

Pensamos que este trabajo de investigación sobre la Resolución de Problemas relacionado con ecuaciones lineales da a conocer los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al resolver problemas,ya queresolver problemas es parte esencial de nuestra vida cotidiana. Debemos lograr, mediante la adecuada motivación y orientación en la resolución de problemas – comenzando por los problemas sencillos relacionados con ecuaciones lineales – que nuestros alumnos desarrollen actitudes positivas hacia el aprendizaje de las matemáticas, así como un pensamiento crítico ysean capaces de proponer nuevos problemas matemáticos. Prestamos especial atención a la creación de problemas en el marco de la conversión del registro algebraico al verbal, puesconsideramos que desarrollar capacidades de resolución y creación de problemas conllevará a formar alumnos analíticos, reflexivos, cuestionadores, que contribuirán a que nuestra sociedad sea cada vez mejor.

1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Por todo lo expuesto anteriormente en la fundamentación sobre resolución de problemas matemáticos con ecuaciones lineales y dada la importancia de este tema en la educación básica, nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Qué errores presentan los estudiantes al resolver problemascon ecuaciones lineales?

1.3 OBJETIVOS

En la presente investigación se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general

Identificar los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas con ecuaciones lineales.

Objetivos específicos

1. Diseñar secuencias de problemas que se resuelven usando ecuaciones lineales, que estimulen tratamientos en los registros algebraico, numérico y verbal.
2. Diseñar secuencias de problemas que se resuelven usando ecuaciones lineales, que estimulen conversiones entre los registros algebraico, numérico y verbal.
3. Identificar y clasificar los errores que los estudiantes presentan al resolver problemas con ecuaciones lineales.

1.4 HIPOTESIS

Las dificultades de los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas relacionados con ecuaciones lineales son mayores al realizar conversiones del registro algebraico al registro verbal.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Para nuestro tema de investigación nos basamos en la teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval.

Duval (2004) establece que:

> Las representaciones semióticas, es decir aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (p.14).

En ese sentido Duval afirma que las representaciones semióticas, estarían subordinadas a las representaciones mentales y por ende cumplirían sobretodo la función de comunicación.En la teoría del autor se expresa que un registro es un sistema semiótico productor de representaciones que permite:

a) Presentar separando algunos aspectos típicos del objeto presentado (el contenido de la representación).
b) Cumplir varias funciones cognitivas: comunicación, objetivación (para sí) y sobre todo tratamiento.
c) Hacer transformaciones internas de contenidos(los tratamientos) que son posibles con las representaciones semióticas.
d) La producción de representaciones semióticas se realiza intencionalmente respetando reglas, mientras que la producción no semiótica es automática.

Duval (2004) enfatiza la importancia de la teoría de registros de representación semiótica en matemática. Establece que es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación semiótica.De acuerdo con el autor, los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción; para ello es indispensable representarlos y desarrollar así el pensamiento matemático. Los objetos matemáticos son abstractos y la manera de entenderlos es mediante representaciones semióticas como gráficos, letras, números, etc.Por ello Duval (2004) señala:

> En primer lugar, en matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. (p.15).

Esta teoría manifiesta que la diversidad de sistemas semióticos permite varias representaciones de un mismo objeto, esto hace posible que se desarrollen las capacidades cognitivas de los personas y por ende las representaciones mentales. A su vez también afirma que los estudiantes al aprender Matemáticas están aprendiendo a discriminar y coordinar los sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación.

Duval (2012) señala que existen dos principios básicos para la observación de la actividad matemática y para el análisis del funcionamiento cognitivo:

- Las transformaciones de las representaciones semióticas, las producciones de dichas representaciones semióticas son los fenómenos observables de la actividad matemática. Es allí que se aprecian las dificultades específicas y recurrentes de incomprensión que bloquean a la mayoría de estudiantes.
- Los registros permiten distinguir y separar en cualquier actividad matemática, dos tipos .de transformaciones diferentes: las conversiones y tratamientos.

Duval (2004) enfatiza que en la actividad matemática hay dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión, como lo vemos en el siguiente cuadro:

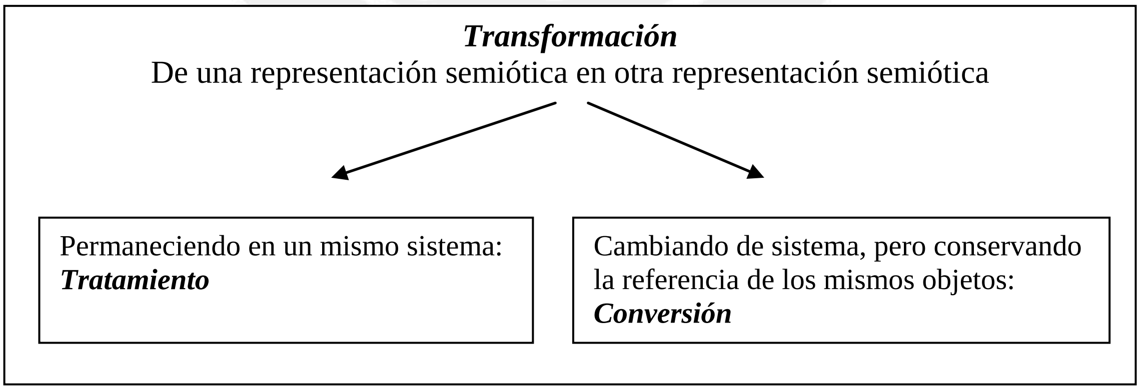


Figura 1. Los tipos de transformaciones de representaciones semióticas

Fuente: Dias (2010, p15)

En el cuadro anterior Duval (2004) afirma que ambas transformaciones se caracterizan por lo siguiente:

- Los tratamientos son transformaciones de representación dentro de un mismo registro: por ejemplo, efectuar un cálculo estrictamente en un mismo sistema de escritura o de representación de números; resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones; completar una figura según los criterios de conexidad y de simetría.
- Las conversiones son transformaciones de representaciones que consisten en cambiar de registros conservando los mismos objetos, por ejemplo: pasar de escritura algebraica de una ecuación a su representación gráfica.

Mediante un ejemplo como el siguiente el investigador establece las dos clases de transformaciones presentes en cualquier actividad matemática:

TRANSFORMACIÓN
de una representación semiótica en otra
Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años de edad.
¿Qué edad tienen?

CONVERSIÓN	**TRATAMIENTO**
Cambiando el sistema semiótico (el registro) usado sin cambiar los objetos indicados.	Manteniendo el mismo sistema semiótico.

$x+(x+3)=23$ $x+(x+3)=23$

$$2x+3=23$$
$$2x=23-3$$
$$2x=20$$
$$x=10$$

Figura 2. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento

Fuente: Duval (2006, p 146)

Mediante este ejemplo Duval (2006) sostiene que el enunciado del problema presentado en un registro verbal se transforma en una ecuación (en el registro algebraico) a eso él denomina “Conversión” y luego se resuelve la ecuación (en el registro algebraico) y a eso se denomina “Tratamiento”

El investigador (2012) menciona que la conversión puede parecer simple. Es por ello que la asimilamos a una codificación (trazar el grafico de una función) o de una traducción (del enunciado de un problema). El grado de complejidad de las conversiones está determinado por tres factores de variación cognitiva:

a) La congruencia o la no congruencia entre dos representaciones de un mismo objeto, es decir dos representaciones son congruentes cuando podemos hacer corresponder término por término las unidades del contenido de una representación con las unidades del contenido de otra.

b) El sentido de la conversión cuando pasamos de un registro a otro, por ejemplo del registro A al registro B y cuando pasamos del registro B al registro A son dos operaciones cognitivamente diferentes. Una puede ser congruente y la otra no congruente.

c) La distancia cognitiva entre los registros de las representaciones de partida y de llegada, por ejemplo pasar de un registro discursivo (lengua) a un registro no discursivo (figuras) esto es pasar de una organización lineal secuencial a una organización bidimensional.

Duval (2004) presenta una clasificación de diferentes registros movilizados en el funcionamiento matemático:

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONALES Los tratamientos no son algorítmicos	Lengua natural Asociaciones verbales (conceptual) Formas de razonar • Argumentación a partir de observaciones, de creencias. • Deducción válida a partir de definiciones o de teoremas.	Figuras geométricas planas o en perspectivas (configuraciones en dimensión 0, 1, 2 o 3). • Aprensión operatoria y no solo perceptiva. • Construcción con instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONALES Los tratamientos son principalmente algorítmicos	Sistema de escritura: • Numéricas (binaria, decimal, fraccionaria) • Algebraicas. • Simbólicas (lenguajes formales) Calculo.	Gráficos cartesianos • Cambios en el sistema de coordenadas. • Interpolación, extrapolación

Figura 3. Clasificación de diferentes registros en la actividad matemática

Fuente: Dias(2010, p14)

En esta clasificación el investigador manifiesta que las representaciones pueden ser de dos tipos: discursiva (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursiva (figuras, gráficos) y ambos se relacionan con dos clases se registros: los multifuncionales (implican diversas funciones cognitivas: la comunicación, imaginación, análisis) y los monofuncionales (implican una sola función cognitiva: el procesamiento matemático es decir los algoritmos).

El empleo de diversos registros de representación semiótica en la adquisición de un objeto matemático hace posible la comprensión del mismo, de modo que los estudiantes al conocer los registros de representaciones semióticas aprenden el objeto matemático. La comprensión de un objeto matemático reposa en la conversión de al menos dos registros de representación semiótica.

Duval (2004) afirma:

> Todo recorrido intelectual, ya se trate de un razonamiento, de una explicación, de una descripción, de un cálculo, de la resolución de un problema, implica la mayoría de las veces que las representaciones semióticas sean convertidas para poder ser tratadas… La conversión de un enunciado de una lengua natural a una lengua formal así como la conversión inversa, constituyen dificultades tales para los alumnos en la enseñanza de las matemáticas que el análisis de la articulación entre lengua natural y lengua formal se impone más allá de toda exigencia teórica" (p.20).

Duval (2012) indica que el primer nivel cognitivo de la comprensión para aprender matemáticas tiene dos puntos de vista:

- Matemáticamente es decir *justificar* (procedimiento, resultado).
- Cognitivamente es decir *reconocer* un mismo objeto en contenidos de representación diferentes. Ello requiere de tres exigencias:
  a) No confundir los objetos y sus múltiples representaciones.
  b) Poder convertir una representación para explorar y efectuar tratamientos en otro registro.
  c) Poder transferir en todas las situaciones.

El segundo nivel cognitivo de la comprensión: los tratamientos o transformaciones semióticas propias a cada registro, esto es el aspecto de la actividad matemática que está siempre puesta en los razonamientos, el cálculo, la utilización heurística de figuras, gráficos, etc.

Una de las investigaciones que se relaciona con el marco teórico es la de Chiroque (2010)que en su trabajo de Registros de Representación semiótica del concepto de funciones presenta el siguiente cuadro en el que resume las tareas que se realizan al transitar entre los registros verbal, numérico, gráfico y algebraico en los estudiantes de humanidades, tal como lo vemos a continuación:

Registros de Representación	Verbal	Tabular o numérico	Gráfica	Analítica o algebraica
Verbal	Tratamiento.	Interpretar y localizar puntos de interés.	Plasmar en el plano la interpretación del problema.	Interpretar el problema mediante una ecuación.
Tabular o numérico	Interpretar y articular los aspectos numéricos.	Tratamiento.	Localizar puntos en el plano.	Localizar puntos que permitan escribir la ecuación.
Gráfica	Describir el comportamiento geométrico.	Transformar los puntos del plano en coordenadas.	Tratamiento.	Transformar los puntos del plano en una ecuación.
Analítica o algebraico	Expresar el origen del fenómeno.	Evaluar la ecuación en los puntos de interés.	Localizar en la ecuación los significados (geométricos) de los parámetros.	Tratamiento.

Figura 4. Resumen de las conversiones y tratamientos entre los registros de representación semiótica

Fuente: Chiroque (2010, p21)

Por lo expuesto anteriormente consideramos la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval como marco teórico de nuestra investigación ya que en la resolución de problemas es indispensable realizar conversiones entre los diferentes registros: verbal, numérico, algebraico y los tratamientos.

CAPITULO 3. PROBLEMA MATEMÁTICO

3.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Un problema matemático es una situación en la cual se debe superar una dificultad estableciendo relaciones a partir de la información dada y no se conoce el camino a seguir. Existen muchos autores que definen el problema desde diferentes puntos de vista, entre ellos tenemos a Polya (1974) quien señala que un problema es la búsqueda consciente, con alguna acción apropiada, para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar.Luceño (1999) define como problema a aquella situación en la que existe un planteamiento inicial y una exigencia. Una perspectiva amplia sobre la definición de un problema y su resolución la da Schoenfeld, citado en Malaspina (2011):

> Unproblema para un individuo en cualquier punto del tiempo es algo que el individuo quiere lograr. Puesto de otra manera, resolver problemas se interpretará como trabajar hacia el logro de un objetivo personal de alta prioridad. (p. 23)

Esta perspectiva nos hace ver la importancia de motivar a los estudiantes para que se motiven fuertemente a la solución de un problema, se apropien de él y den alta prioridad a su solución.

Además, Podall y Comellas (1996) señalan que la resolución de problemas es uno de los puntos necesarios en la enseñanza de las matemáticas. Existe un consenso entre investigadores y profesores sobre la importancia de la resolución de problemas. Hasta la década de los 60 enseñar matemáticas se basaba fuertemente en un modelo algorítmico, esto consistía en memorizar las técnicas para resolver problemas matemáticos. A partir de los 60 se prioriza el razonamiento y la capacidad lógica y se dio importancia a las relaciones y operaciones. A inicios de los 80 se requirió una enseñanza relacionada con la realidad y la resolución de problemas reales y concretos, la NCTM (NationalCouncil of teachers of Mathematics) y la ICMI (International ConferenceforMathematicsInstruction) establecen que la enseñanza debe seguir ese modelo, para que las matemáticas sean útiles, estén al alcance de la mayoría y se puedan aplicar para resolver problemas de la vida cotidiana; dándole la importancia a la comprensión de los conceptos matemáticos.

3.2 PROCESOS PARA RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Con respecto a los procesos para resolver problemas matemáticos a continuación presentamos los más relevantes:

De acuerdo a Polya (1974) un modelo para resolver los problemas es el siguiente:

a) Comprender el problema:entender el enunciado verbal del problema y determinar la incógnita, los datos, la condición.

b) Concebir un plan: relacionar los datos, la incógnita y la condición a través de razonamientos, cálculos, construcciones para encontrar la idea de la solución.

c) Ejecución del plan: llevar a cabo la solución del problema mediante el plan trazado.

d) Examinar la solución obtenida: reconsiderar la solución, volver a examinar el resultado, verificar cada paso que permitió llegar al resultado.

Otro modelo de resolución de problemas es el de Puig y Cerdan (1988), quiénes establecen las siguientes fases:

a) Lectura: consiste en la visualización del enunciado de un problema.

b) Comprensión: es decir interpretar el enunciado del problema.

c) Traducción: es el paso del enunciado verbal a la expresión matemática.

d) Cálculo: se da a través de las destrezas algorítmicas.

e) Solución: consiste en llegar a la respuesta de la pregunta del problema.

f) Revisión: verificar si el resultado es el correcto.

En el siguiente cuadro se muestran la semejanza del modelo de Polya y de Puig y Cerdan:

POLYA	PUIG-CERDAN
1. Comprender el problema	1. Lectura 2. Comprensión
2. Concebir un plan	3. Traducción
3. Ejecutar el plan	4. Cálculo 5. Solución
4. Examinar la solución	6. Revisión y Comprobación

Figura 5.Similitudes de los pasos para resolver problemas

Fuente: Podall (1996, p131)

Luceño (1999) detalla la propuesta de Mayer sobre los procesos a seguir en la resolución de problemas:

Paso 1. La representación del problema:

Se trata de la conversión de un problema verbal en una representación mental interna. Comprende estos dos pasos:

a) Traducción: implica la capacidad de traducir cada proposición del problema a una representación mental interna, expresada en fórmula matemática.

b) Integración de los datos: supone un conocimiento específico de los diversos tipos de problemas, a partir de un esquema adecuado a dicho problema.

Paso 2. Solución del problema:

Se trata de diseñar un plan de solución. Implica los dos pasos siguientes:

a) Planificación: búsqueda de estrategias para la resolución del problema.

b) Ejecución: supone realizar las operaciones/acciones diseñadas. Se trata, de ordinario, de las operaciones de cálculo.

Mayer (1984) distingue 4 tipos de conocimientos que se requieren para resolver problemas:

1. Conocimiento lingüístico: este conocimiento implica la comprensión de los enunciados verbales.
2. Conocimiento esquemático: constituye la representación mental de la estructura semántica que subyace al problema.
3. Conocimiento estratégico: se refiere a la elaboración y seguimiento de los planes de solución.
4. Conocimiento algorítmico: hace alusión al procedimiento exacto necesario para resolver el problema.

Luceño (1999) menciona la propuesta de Mayer (1986) como modelo para resolver problemas, mediante un ejemplo:

Problema: "Juan tiene 1 duro, Pedro tiene 3 pesetas más que Juan ¿Cuántas pesetas tiene Pedro?

PROCESOS Y CONOCIMIENTOS NECESARIOS PARA SU SOLUCIÓN		
Pasos	**Conocimientos**	**Ejemplo**
Representación del problema		
• Traducción	Lingüístico	Pedro tiene tres pesetas más que Juan. Pedro = Juan +3
• Integración	General	Un duro equivale a 5 pesetas.
	Esquemático	Esto es un problema de comparación. Consiste en dos subunidades y una supraunidad.
Solución del problema		
• Planificación	Estratégico	El objetivo es sumar 3+5.
• Ejecución	Algorítmico	Procedimientos para sumar.
La capacidad matemática implica estos pasos y conocimientos.		

Figura 6.Pasos para resolver problemas y sus tipos de conocimientos

Fuente: Luceño (1999, p.93)

Santos (1995) señala que para resolver problemas son necesarios 3 pasos:

a) El primer momento se centra en la parte relacionada con el entendimiento del problema. Es decir, el estudiante debe demostrar que ha entendido el problema. Por ejemplo, se debe enunciar el problema (con palabras propias) o representar el problema usando diversos caminos. El estudiante debe juzgar cuándo las condiciones dadas del problema son razonables y si es posible estimar alguna solución.
b) Un segundo momento se relaciona con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución. Así como para presentar un plan y llevarlo a cabo.
c) Finalmente es importante revisar los aspectos relacionados con lo razonable de la solución y la extensión del problema.

En esta investigación tomaremos en cuenta los componentes propuestos por Santos ya que para la resolución de problemas se requiere entender el problema, desarrollar usando una estrategia y evaluar la solución obtenida.

CAPÍTULO 4. PROCEDIMIENTOS METODOLOGÍCOS Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 METODOLOGÍA

Para cumplir los objetivos propuestos, decidimos trabajar con una muestra ocasional de 29 estudiantes de primer año de secundaria del Colegio Parroquial Reina de la Paz de San Isidro, teniendo en cuenta las facilidades que podíamos disponer para las experiencias didácticas.

Una primera actividad fue revisar algunos libros en los que se trata el tema de ecuaciones lineales, con énfasis en la presentación matemática; luego, se hizo una revisión crítica sobre la forma de presentar este tema en el texto que usan los estudiantes de la muestra.

Con la información obtenida y los criterios recogidos del enfoque cognitivo y didáctico dado por Duval (2004), se procedió a elaborar una prueba de diagnóstico. Con base en los resultados obtenidos, se elaboró una lista de problemas con dificultades graduadas, que se consideró deberían resolver los estudiantes, Una parte inicial fue considerar ítems sobre la conversión específica de registros verbales a algebraicos y viceversa.

Antes de la aplicación de la lista de problemas, se tuvo una sesión de aprendizaje, con el fin de orientar a los estudiantes para las conversiones entre los registros verbal y algebraico, así como para los tratamientos, sobre todo en los registros algebraico y verbal.

Luego de la aplicación de la prueba y del análisis de los resultados, se elaboró una segunda lista de cuestiones, a partir de un problema, poniendo énfasis en la conversión de un registro algebraico al verbal. Antes de proponer la solución de estas cuestiones a los estudiantes, se tuvo otra sesión de aprendizaje, previo diseño, en el que se enfatizó la conversión de un registro algebraico a uno verbal, en el marco de la creación de problemas.

4.2 DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

4.2.1 Las ecuaciones lineales en textos de matemáticas

En general, el tema no es tratado muy ampliamente. Como una muestra del tratamiento más frecuente, exponemos el que hace Leithold (1998) y en esta investigación usaremos la definición de ecuación lineal que él establece:

> Una ecuación lineal en la variable x es una ecuación de la forma:
>
> $$a(x)+b=0$$
>
> donde a y b son números reales y $a \neq 0$
>
> A fin de resolver la ecuación $a(x)+b=0$ para x, se resta b de ambos lados y después se dividen ambos lados entre a, lo cual puede hacerse porque $a \neq 0$. Así se tienen las siguientes ecuaciones equivalentes:
>
> $$a(x)+b=0$$
> $$a(x)+b-b=0-b$$
> $$a(x)=-b$$
> $$\frac{a(x)}{a}=\frac{-b}{a}$$
> $$x=-\frac{b}{a}$$
>
> Se demostrará el teorema siguiente:
>
> "La ecuación lineal $a(x)+b=0$ (donde $a \neq 0$) tiene exactamente una solución, $-\frac{b}{a}$"
>
> Para mostrar la solución de una ecuación lineal $a(x)+b=0$ en una gráfica se define y igual al lado izquierdo y se dibuja la gráfica de esa ecuación.
>
> La gráfica es una línea recta que cruza al eje x en el punto cuya abscisa es $x=-\frac{b}{a}$ la solución de la ecuación.(p.67).

Podemos advertir un tratamiento esencialmente algorítmico y poco motivador para el estudiante.

Consideramos pertinente reproducir el enfoque de Stewart (2008), que contiene también algunos aspectos históricos:

Lo que ahora llamamos la “solución de ecuaciones” en la que hay que encontrar una incógnita a partir de la información apropiada, es casi tan vieja como la aritmética. Hay evidencia indirecta de que los babilonios ya resolvían ecuaciones bastante complicadas en el 2000 A.C. y evidencia directa de soluciones de problemas más sencillos, en forma de tablillas cuneiformes, que se remonta alrededor del 1700 A.C.

La porción que sobrevive de la Tablilla YBC 4652 del periodo babilónico antiguo (1800-1600 A.C.) contiene once problemas para resolver; el texto de la tablilla indica que originalmente había 22 problemas. Una pregunta típica es: “Encontré una piedra, pero no la pesé. Después pesé 6 veces su peso, añadí 2 *gin* y añadí un tercio de un séptimo multiplicado por 24. Lo pese. El resultado era 1 *ma-na* ¿Cuál era el peso original de la piedra?”

Un peso de 1 *ma-na*son 60*gin*

En notación moderna llamaríamos x al peso buscado en *gin.* Entonces la pregunta nos dice que

$$(6x+2)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}\times 24(6x+2)=60$$

Y métodos algebraicos estándar llevan a la respuesta $x=4\frac{1}{3}$*gin.* La tablilla da esta respuesta pero no da una indicación clara de cómo se obtiene. Podemos estar seguros de que no había sido encontrada utilizando métodos simbólicos como los que ahora utilizamos, porque tablillas posteriores prescriben métodos de solución en términos de ejemplos típicos: “tomar la mitad de ese número, sumar el producto de estos dos, tomar la raíz cuadrada…” y así sucesivamente.

Este problema, como los otros en YBC 4652, es lo que ahora llamamos una ecuación lineal, lo que indica que la incógnita x entra solo en su primera potencia. Todas estas ecuaciones pueden reescribirse en la forma

$$ax+b=0$$

Con solución $x = \frac{-b}{a}$ pero en los tiempos antiguos, sin el concepto de números negativos y sin manipulación simbólica, encontrar una solución no era tan simple. Incluso hoy muchos estudiantes tendrían dificultades con los problemas YBC 4652. (p.63)

4.2.2 Las ecuaciones lineales en el texto escolar empleado por los estudiantes

El texto escolar que usamos en las clases de 1ro de secundaria es “TALENTUM” de Máximo de la Cruz de la Editorial Bruño.

Este libro contiene 3 áreas: Aritmética, Álgebra y Geometría. En Álgebra se presenta 6 unidades divididas de la siguiente manera:

Unidad 1. Números Enteros

Unidad 2. Polinomios

Unidad 3. Operaciones con Polinomios.

Unidad 4. Productos y Cocientes Notables.

Unidad 5. Ecuaciones e Inecuaciones lineales.

5.1 Ecuaciones Lineales

5.2 Resolución de Problemas mediante Ecuaciones Lineales.

5.3 Inecuaciones Lineales

5.4 Resolución de Problemas mediante Inecuaciones Lineales.

Unidad 6. Relaciones y Funciones

En este texto, respecto a las ecuaciones lineales se espera que los estudiantes:

- Reconozcan ecuaciones lineales de la forma ax + b = 0
- Apliquen propiedades para resolver ecuaciones lineales.

Y respecto a la resolución de problemas se espera que:

- Traduzcan expresiones verbales a ecuaciones.
- Resuelvan problemas mediante ecuaciones lineales.

A continuación se muestra cómo el libro de texto desarrolla el tema de Resolución de problemas con ecuaciones lineales. En primer lugar explica cómo se traducen expresiones verbales a expresiones algebraicas y luego presentan ejemplos con expresiones verbales que son convertidas a ecuaciones. Por último presenta los pasos que se deben seguir para resolver problemas con ecuaciones lineales, a continuación se muestra algunos ejemplos:

Nº	Expresión Verbal	Ecuación
1	El dinero de Juan es 12 soles.	$x = 12$
2	El triple de un número es 18.	$3n = 18$
3	La mitad de tu edad es 11.	$y/2 = 11$
4	Mi edad disminuida en 3 es 12.	$x - 3 = 12$
5	El cuadrado de un número es 25.	$n^2 = 25$
6	x es a 2 como 3 es a 4.	$\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$
7	"a" es 2 veces "b".	$a = 2b$
8	"a" es 2 veces b aumentado en 2.	$a = 2b + 2$
9	Mi edad dentro de 8 años es 17 años.	$y + 8 = 17$
10	Tu edad hace 5 años fue 7 años.	$x - 5 = 7$

Figura 7. Traducción de Expresiones verbales a ecuaciones

Fuente: De la Cruz (2010, p 201)

Asimismo, el libro presenta una Práctica Dirigida que los estudiantes tienen que resolver con 2 tipos de ejercicios, en la primera parte los alumnos tienen que representar simbólicamente expresiones verbales y en la segunda parte deben representar en forma de ecuación expresiones verbales tal como se presenta a continuación:

1 Representa simbólicamente las siguientes expresiones verbales:

- Un número aumentado en 2.
- El doble de un número disminuido en 3.
- Un número aumentado en su mitad.
- El cuadrado de un número menos 1.
- El cuadrado de un número menos 2.
- El triple de un número más el número.
- Mi edad hace "m" años.
- Mi edad dentro de "n" años.

2 Representa en forma de ecuación las expresiones siguientes:

- El cuadrado de un número es 121.
- Hace 5 años mi edad era 6 años.
- Un número disminuido en 5 es 10.
- El triple de un número disminuido en 1 es 9.
- x es a 4 como 4 es a 16.
- 18 menos 2 veces un número es 4.
- El cuadrado de un número menos el mismo número es 20.

Figura 8. Representaciones de expresiones verbales

Fuente: De la Cruz (2010, p 202)

Seguidamente el texto escolar presenta problemas modelo, de los cuales se muestra en algunas el planteamiento de las ecuaciones de y en el resto de ellos solo se detalla la respuesta, como se aprecia a continuación:

1 El triple de un número aumentado en 17 es 47. Hallar dicho número.

Resolución:

Número: x

Triple del número: $3x$

Ecuación:

$$3x + 17 = 47$$
$$3x = \text{............}$$
$$x = \text{............}$$

Luego, dicho número es ....

2 El cuádruple de un número aumentado en 8 es 32. Halla el número.

6 (R.)

3 El quíntuple de un número disminuido en 4 es 10. Hallar el número.

Resolución:

Número: x

Disminuido en 4: $x - 4$

Ecuación:

$$5(x-4) = 10$$
$$5x - 20 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$5x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Luego, el número es ________

Figura 9. Problemas modelo de ecuaciones lineales

Fuente: De la Cruz (2010, p 203)

Finalmente el libro muestra Problemas Propuestos, de Nivel 1 y Nivel 2, cada uno con alternativas de solución.

Nivel 1

1 La suma de un número con su doble es 18. El número, es:

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 3

2 La diferencia de un número con su triple es –6. El número es:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 5

3 El cuadrado del consecutivo de un número es igual al cuadrado del número, aumentado en 15. El número, es:

A) 3 B) 5 C) 4 D) 8 E) 7

Figura 10. Problemas propuestos de ecuaciones lineales

Fuente: De la Cruz (2010, p 205)

En el texto escolar, en la sección de Práctica Dirigida de la página 202, observamos que el objetivo es que el estudiante solo realice conversiones del registro verbal al algebraico mas no incluye conversiones de lo algebraico a lo verbal. De acuerdo al marco teórico de nuestra investigación, teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval, se establece que el empleo de diferentes registros de representaciones semióticas en la adquisición de un objeto matemático hace posible la comprensión del mismo.

Luego, en la página 203 se muestran algunos problemas con parte de la resolución. El autor plantea enunciados parecidos en el primer y tercer problema,respectivamente, pero al momento de resolverlos, en el primer caso no usa paréntesis y en el segundo sí; y no da una explicación del por qué se resuelve de ese modo, lo que posiblemente confunde a los estudiantes.

De acuerdo a nuestro marco teórico la conversión del registro verbal al algebraico, es una de las dificultades que se observa en la mayoría de los estudiantes. Es de vital importancia que los textos escolares propongan que los alumnos realicen tratamientos y conversiones en los registros verbal y algebraico ya que ello favorece al desarrollo de la capacidad de resolución de problemas.

4.2.3 Diseño de la secuencia didáctica

4.2.3.1 Elaboración de una prueba de diagnóstico.

Se elaboró una secuencia de problemas cuya solución se puede realizar resolviendo una ecuación de primer grado.

Objetivo general de la prueba diagnóstico: detectar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en relación a la resolución de problemas cuya solución se puede realizar empleando ecuaciones de primer grado.

Problema 1

En el juego del SUBE Y BAJA (balancín) participan 4 amigos Ana, Lucia, Martín y Gustavo. En un extremo están Ana y Martín y en el otro extremo Gustavo y Lucía.

Ana dice" Yo peso 35kg"Martín dice" Yo peso 39kg" Gustavo dice" Yo peso 40kg" Lucia dice" Yo no me acuerdo de mi peso"

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
a) Si se sabe que el balancín está en equilibrio. • Representa gráficamente la situación.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes hagan un esquema similar al siguiente 35 39 40 x A M G L

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
• Gustavo dice que el peso de Lucía se puede saber resolviendo una ecuación. ¿Gustavo tiene razón? En caso afirmativo muestra y resuelve tal ecuación.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico y un tratamiento en este último registro.	Se espera que los estudiantes digan que sí se puede hallar el peso de Lucia planteando la ecuación $35+39 = 40 + x$ Luego se obtendrá $x = 34$ El peso de Lucía es 34kg

.

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
b) Si los dos chicos están en un extremo y las dos chicas en el otro. ¿Puedes decir que el balancín esta en equilibrio? ¿Por qué?	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al numérico.	Se espera que los estudiantes digan que no están en equilibrio, porque sumando los pesos se obtienen resultados diferentes. M + G: $39+40 =79$ A + L: $35 + 34 = 69$ $79 \neq 69$

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
• En caso que no estuvieran en equilibrio y quisieran usar una mochila. ¿Cuánto debería pesar la mochila para equilibrar el sube y baja? ¿En qué extremo deberá colocarse?	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro numérico al verbal y un tratamiento en este registro.	Se espera que los estudiantes digan que para que el Sube y Baja esté en equilibrio la mochila debe pesar 10kg y debe colocarse en el extremo en el que están las chicas.

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
c) En un tercer momento Ana y Lucía se retiran y llegan a jugar 2 hermanos gemelos, que tienen igual peso. Si Gustavo y Martín se ubican en un extremo del Sube y Baja y los hermanos gemelos en el otro, el sube y baja queda en equilibrio. Martín dice que puede saber cuánto pesa cada gemelo resolviendo una ecuación. ¿Martín tiene razón? En caso afirmativo muestra y resuelve tal ecuación.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico y un tratamiento en este último registro.	Se espera que los estudiantes digan que el peso de los gemelos es un dato desconocido y como no saben se reemplaza con 2x $M + G = H1 + H2$ $39+40 = x + x$ $79 = 2x$ $x = 39.5$

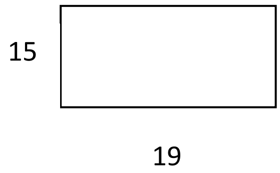
Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
d) Inventa un problema parecido a los anteriores, que se resuelva usando una ecuación.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión de un registro numérico al verbal.	Se espera que los estudiantes entre varias posibilidades inventen y resuelvan un problema empleando una ecuación lineal.

Problema 2

El profesor Pedro pide a sus alumnos que recorten una cartulina para obtener un rectángulo cuya base sea mayor que su altura en 4cm.

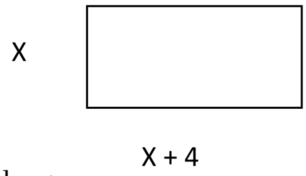
Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
a) Dibuja uno de los rectángulos y usa la variable “x” para indicar sus dimensiones.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes hagan esquemas como los siguientes: X X + 4 X - 4 X

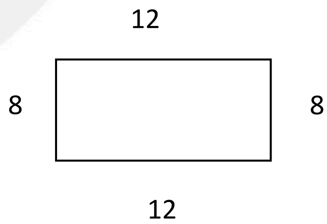
Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
b) Juan ha recortado un rectángulo cuya base mide 26 cm y cuya altura mide 21 cm. ¿Éste cumple la condición establecida por el profesor? ¿Por qué?	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen un tratamiento en el registro verbal.	Se espera que los estudiantes respondan que no cumple con la condición ya que la base es 5cm mayor que su altura. Podrían hacer un esquema como el siguiente: 21 26

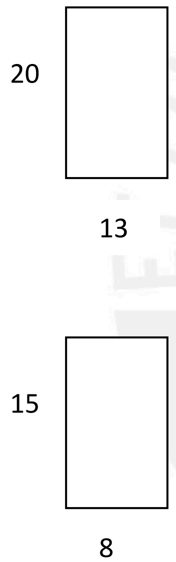
Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
c) Si María quiere obtener un rectángulo cuya base mida 19cm. ¿Cuánto debe medir su altura según las condiciones del profesor Pedro? Representa el rectángulo de María.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al numérico.	Se espera que los estudiantes respondan que María debe tener un rectángulo de 15 cm de altura. 

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
d) Calcula el perímetro que tendrá el rectángulo de María.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al numérico.	Se espera que los estudiantes respondan que el rectángulo de María debe tener 68 cm de perímetro. $15 + 19 + 15 + 19 = 68$

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
e) El profesor Pedro dice que además de que la base sea mayor que su altura en 4cm, los rectángulos deben tener 40 cm de perímetro y se desea conocer las dimensiones de tales rectángulos. • ¿Se puede saber cuánto deben medir la altura y la base? ¿Cuáles serían esas dimensiones?	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen conversiones del registro verbal al numérico (por tanteo) o al algebraico (planteen una ecuación)	Se espera que los estudiantes respondan que sí se puede saber.

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
• Usa la variable x en una representación del rectángulo y plantea una ecuación correspondiente a esta situación.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes hagan un esquema como el siguiente:  Y luego p[illegible] ecuación como la siguiente: $x + (x + 4) + x + (x + 4) = 40$

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
• Resuelve la ecuación que planteaste y dibuja el rectángulo con sus dimensiones correspondientes.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes resuelvan la siguiente ecuación $x + (x + 4) + x + (x + 4) = 40$ $4x + 8 = 40$ $4x = 32$ $x = 8$ Y luego dibujen el rectángulo con las siguientes dimensiones: 

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
f) En otro salón la profesora Miriam pidió también a sus alumnos que recorten rectángulos y a continuación se representan dos de esos rectángulos. ¿Qué condición pidió la profesora para la base y la altura de los rectángulos? 	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro numérico al verbal.	Se espera que los estudiantes respondan que la condición pedida era: la altura es 7cm mayor que la base.

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
g) Inventa un problema parecido al propuesto en (e)	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes entre varias posibilidades planteen y resuelvan un problema empleando una ecuación lineal.

Problema 3

La profesora Luz enseña a sus alumnas el tema de Proporcionalidad y les comenta a sus alumnas que esta foto de sus mascotas tiene ciertas dimensiones mide 3cm x 3.5 cm.

3 cm

3.5 cm

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
a) La maestra quiere hacer un cuadro de la foto ampliada de sus perritos. Si la altura debe ser de 60cm. Plantea y resuelve una ecuación para encontrar la longitud de la base.	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes elaboren la siguiente ecuación: $\frac{3}{3.5}=\frac{60}{x}$ $3x=210$ $x=70$ Y luego respondan que la base de la foto medirá 70 cm.

Pregunta	Objetivo	Respuesta esperada
b) La profesora Luz decide participar en un concurso de gigantogafrías. Las reglas del concurso exigen que las dimensiones sean tales que la suma de la longitud de la base más la longitud	El objetivo de esta situación es que los estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que los estudiantes respondan que la altura y la base de la gigantografia se obtendrán multiplicando las dimensiones 60cm y 70cm por una cantidad constante ya que éstas aumentan en forma proporcional. Es decir,

de la altura sea 780 cm. Halla las dimensiones de la gigantografía que presenta Luz, si mantiene las proporciones de su foto original.		$60x + 70x = 780$ $130x = 780$ $x = 6$ Luego, reemplazando el valor de x obtenemos: Altura: 60(6) = 360cm Base: 70(6) = 420cm

El material utilizado se encuentra en el apéndice.

4.2.3.2 Aplicación y resultados de la prueba de diagnóstico.

La prueba de diagnóstico se realizó con 29 estudiantes de Primer año de secundaria del Colegio Parroquial Reina de la Paz de San Isidro, desarrollándose de la siguiente manera:

Fecha	Horas por sesión
Martes, 18 de octubre de 2011	2 horas
Jueves, 20 de octubre de 2011	1 hora

Durante la aplicación de esta prueba requerimos del apoyo de dos observadores para que analicen el comportamiento de las estudiantes.

Al aplicar la prueba de diagnóstico se encontró que las estudiantes tenían menos dificultades en el tratamiento en el registro algebraico que en las conversiones.

Las dificultades que observamos fueron: la conversión del registro verbal al algebraico y del algebraico al verbal.

Las dificultades encontradas fueron:

En el problema 1:

- Presentaban dificultad de convertir del registro verbal al algebraico y en el tratamiento en el registro verbal.
- La mayoría de las estudiantes no entendían la pregunta.
- No sabían si les pedían plantear la ecuación o resolverla.
- Desconocían cuál era la función de la mochila.
- No podían calcular 79/2.
- Les fue dificultoso formular un problema.

En el problema2:

- Presentaban dificultad de convertir del registro verbal al algebraico y para convertir del registro algebraico al verbal y además en el tratamiento en el registro verbal.
- Algunas estudiantes desconocían los términos base y altura.
- Cuando tenían que usar variables se presentaban dificultades.
- No relacionaban la secuencia de problemas.
- Desconocían el término perímetro.

- Las estudiantes relacionaban la palabra perímetro con la suma de los lados del triángulo.
- Les era difícil inventar un problema.

En el problema 3:

- Presentaban dificultad de convertir del registro verbal al algebraico.
- La mayoría de las estudiantes desconocían el tema de proporcionalidad.
- No entendían la pregunta.
- No podían resolver divisiones entre decimales.

En esta fase de diagnóstico observamos muchas dificultades en las estudiantes al convertir del registro verbal al algebraico y para convertir del registro algebraico al verbal.

Cerca del 95% de los estudiantes no podían plantear y / o resolver los problemas por sí mismos, nos preguntaban constantemente cómo plantear, cómo resolver, qué es lo que se debe hacer, es decir no comprendían los problemas.

En esta parte, también realizamos una sesión de trabajo con las estudiantes para indagar o recoger más información sobre el uso de tratamientos y conversiones con los registros de representación semiótica verbal yalgebraicoal resolver problemas con ecuaciones lineales.Para esta sesión seleccionamos una de las preguntas de la prueba de diagnóstico. (Pregunta 2)

4.2.3.3 Elaboración de problemas relacionados con Ecuaciones Lineales.

Tomando en cuenta los resultados obtenidos en la prueba de diagnóstico, en primer lugar se diseñó una lista de expresiones verbales y simbólicas para iniciarlos en el uso de conversiones al registro algebraico y al registro verbal.

El objetivo en la primera tabla es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.

Expresiones verbales	**Expresiones algebraicas** *Respuestas esperadas*
El triple de la cantidad de juguetes de Ximena.	$3x$
La edad de Luz dentro de 5 años.	$L+5$
El doble de la diferencia de un número y 6.	$2(y-6)$
Los dos tercios de la cantidad de dinero de Freddy.	$\frac{2}{3}x$
El cuadrado de un número, disminuido en 2.	a^2-2

El objetivo en la segunda tabla es que los estudiantes realicen una conversión del registro algebraico al verbal

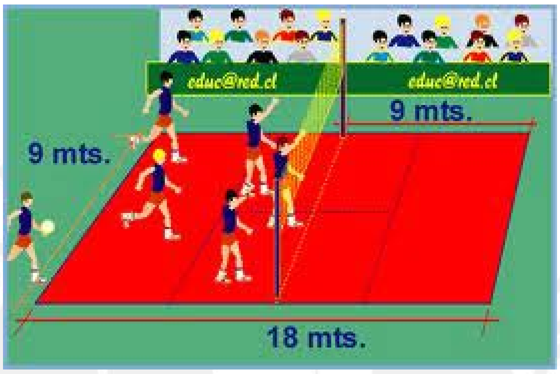
Expresiones simbólicas	**Expresiones verbales** *Posibles Respuestas esperadas*
$4n$	*Cuatro veces un número.*
$p-11$	*Un número disminuido en 11.*
$2(g+5)$	*El doble de un número aumentado en 5.*
$x-\frac{4}{5}x$	*Un número disminuido en sus cuatro quintos.*
$\frac{y}{6}$	*La sexta parte de un número.*

El material utilizado se encuentra en el apéndice.

También se elaboraron dos problemas, cada uno con varios ítems, en los que se presentaban situaciones que estimulen la conversión de un registro semiótico a otro.

1. Las dimensiones oficiales de las canchas de vóley son 18m de largo y 9m de ancho.

Todas las canchas de vóley deben cumplir la condición de ser rectangulares, con la longitud del largo el doble de la longitud del ancho.



a) Si la arquitecta Camila diseña una cancha de vóley cuyo largo mida 14 m ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición dada? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes.

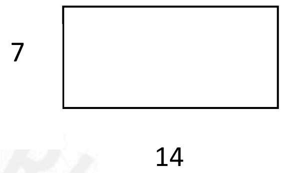
b) Calcula el perímetro de la cancha de vóley que diseña la arquitecta Camila.

c) Dibuja un rectángulo que represente una cancha de vóley que cumple con la condición exigida y usa la variable “x” para indicar sus dimensiones.

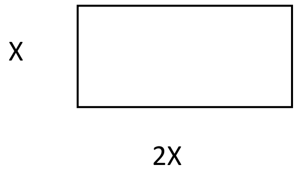
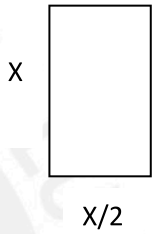
d) Usa lo hecho en la parte (c) y escribe una ecuación que exprese que el perímetro de la cancha de vóley es 48 metros.

e) Resuelve la ecuación planteada en (d) y dibuja el rectángulo que representa la cancha de vóley, con las dimensiones halladas.

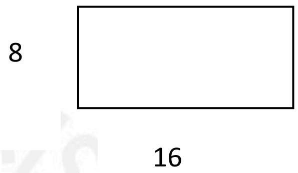
Objetivos y sus respuestas esperadas:

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
a) Si la arquitecta Camila diseña una cancha de vóley cuyo largo mida 14 m ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición dada? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al numérico.	Se espera que las estudiantes puedan responder que siel largo mide 14m y el largo es el doble del ancho según la condición establecida entonces el ancho debe medir 7m y luego realicen un esquema como el siguiente:  $14 = 2(7)$ También se espera que los estudiantes presenten dificultad al momento de establecer las dimensiones, es decir que asuman que el ancho mida 14m y que el largo mida 28m.

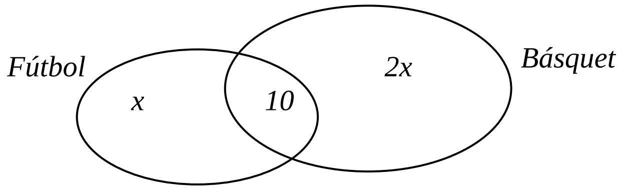
Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
b) Calcula el perímetro de la cancha de vóley que diseña la arquitecta Camila.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al numérico.	Se espera que las estudiantes respondan que como el ancho mide 7m y el largo 14m entonces el perímetro de la cancha de vóley debe medir 42m. Es decir se espera que realicen la siguiente suma. $14+7+14+7=42$ Una dificultad que pueden presentar las estudiantes es que desconozcan el significado de perímetro y no puedan resolver el problema.

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
c) Dibuja un rectángulo que represente una cancha de vóley que cumple con la condición exigida y usa la variable “x” para indicar sus dimensiones.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que las estudiantes puedan responder que si el ancho mide “x” el largo debe medir el doble es decir “2x”. Y luego realicen un esquema tal como se muestra a continuación   También se espera que los estudiantes presenten dificultad al momento de usar la variable “x” es decir, que asuman que el largo mida 2cm y el ancho 1cm y no utilicen la variable “x”

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
d) Usa lo hecho en la parte (c) y escribe una ecuación que exprese que el perímetro de la cancha de vóley es 48 metros.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que las estudiantesplanteen la siguiente ecuación: $x + 2x + x + 2x = 48$ Una dificultad que pueden presentar los estudiantes es que no planteen bien la ecuación y asuman lo siguiente: $x + 2x = 48$

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
e) Resuelve la ecuación planteada en (d) y dibuja el rectángulo que representa la cancha de vóley, con las dimensiones halladas.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen un tratamiento en el registro algebraico.	Se espera que las estudiantes resuelvan la siguiente ecuación: $$x + 2x + x + 2x = 48$$ $$6x = 48$$ $$x = 8$$ Luego, se espera que realicen un esquema como el siguiente:  Una dificultad que se puede dar en las estudiantes es que no logren plantear la ecuación correctamente y asuman que: $$x + 2x = 48$$ $$3x = 48$$ $$x = 16$$ Obteniendo que el ancho mide 16cm y el largo 32cm.

2. Juan preguntó a 40 alumnos si practican básquet o fútbol. Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.



Observando el gráfico,

a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste.

c) Resuelve el problema usando la ecuación.

Objetivos y sus respuestas esperadas:

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro algebraico al verbal.	Se espera que las estudiantes escriban un enunciado como el siguiente: En un salón de clase hay 40 alumnos, de los cuales 10 practican básquet y futbol. Además, se sabe que practican solo básquet el doble de alumnos que practican solo futbol. ¿Cuántos alumnos practican solo futbol y cuantos solo básquet? Una dificultad que se esperan de las estudiantes es que escriban un enunciado en el cual no tomen en cuenta todos los datos que se le brindan.

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que las estudiantesplanteen y resuelvan una ecuación como la siguiente: $$x+10+2x=40$$ Una dificultad que pueden presentar es que no planteen bien la ecuación y asuman lo siguiente: $$x+10=2x$$

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
c) Resuelve el problema usando la ecuación.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen un tratamiento en el registro al algebraico.	Se espera que las y resuelvan la siguiente ecuación $$x+10+2x=40$$ $$3x=30$$ $$x=10$$ Obteniendo que practican solo futbol 10 alumnos y solo básquet 20 alumnos. La dificultad que se puede dar en las estudianteses que no logren plantear correctamente la ecuación y asuman que: $$x+10=2x$$ $$x=10$$ Obteniendo que practican solo fútbol10 alumnos y solo básquet 20alumnos, pero con una ecuación mal planteada.

4.2.3.4 Sesión de aprendizaje N° 1 con los estudiantes.

La sesión de aprendizaje se llevó a cabo el día viernes 18 de noviembre del 2011 con las 29 estudiantes de Primer año de secundaria del Colegio Parroquial Reina de la Paz de San Isidro durante 1 hora pedagógica.

Para esta sesión se elaboró una ficha de trabajo que consta de dos partes. En la primera se presentaba 10 expresiones cuyo objetivo era la conversión de expresiones verbales a algebraicas y luego se mostraba 10 expresiones más y el objetivo era la conversión de expresiones algebraicas a verbales, tal como se aprecia a continuación:

EXPRESIONES VERBALES Y/O ALGEBRAICAS

(PARTE I)

1. En el siguiente cuadro escribimos expresiones algebraicas correspondientes a cada expresión verbal:

Expresiones verbales	Expresiones algebraicas
El doble de la cantidad de dinero que tiene Juan	
Un numero aumentado en 10	
La edad de María hace 3 años	
Tres veces un número, disminuido en 5	
El cuádruple de la suma de un número y siete	
La suma de dos números enteros consecutivos	
Los tres cuartos de la cantidad de cuadernos de Sofía	
El cuadrado de un número, aumentado en 8	
La tercera parte de la suma de dos números	
El producto de dos números	

2. En el siguiente cuadro escribimos expresiones verbales que corresponden a cada expresión algebraica:

Expresiones algebraicas	Expresiones verbales
$5a$	
$b-9$	
$2m+6$	
$3(p-7)$	
n^2-1	
$x+\frac{3}{4}x$	
$4(z-10)$	
$8y+11$	
x^3	
$\frac{c}{d}$	

Se trabajó esta ficha con las estudiantes de tal forma que ellas participen construyendo su propio conocimiento siendo la docente un facilitador. Además en la sesión el objetivo es iniciar a las estudiantes en el uso de las conversiones de expresiones verbales a algebraicas y viceversa.

En dicha sesión se realizaron los siguientes pasos para resolver el ítem 1:

a) Leer la expresión verbal detenidamente.
b) Subrayar la variable desconocida.
c) Asignar una letra a tal variable
d) Relacionar la variable con el enunciado.
e) Escribir la expresión algebraica que corresponda.

En el ítem 2 se realizaron los siguientes pasos:

a) Identificar la variable.
b) Reconocer las operaciones aritméticas presentes en la expresión y la jerarquía entre ellas.
c) Asignar lo que podría representar la variable (número, edad, cantidad de dinero, etc.)
d) Escribir la expresión verbal adecuada.

El material que usamos en esta sesión se encuentra en el apéndice.

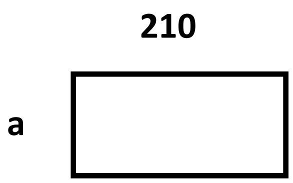
En la segundaparte del material de esta sesión lugar, se propusodos problemas con ecuaciones de primer gradocon situaciones de dificultad graduada, enfatizando la conversión del registro verbal al algebraico y el tratamiento en el registro algebraico, tal como se aprecia a continuación:

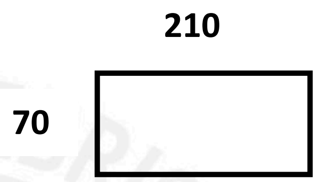
PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES

(PARTE II)

1. Silvia quiere comprar una mesa rectangular cuyo ancho tenga una longitud que sea la tercera parte de la longitud de su largo.

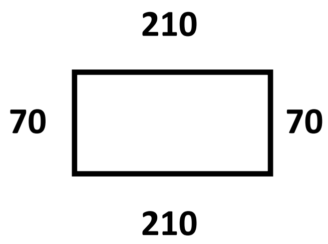
a) Si el carpintero le ofrece una mesa de 210cm de largo ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición de Silvia? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes.

Orientaciones para resolver el problema	***Preguntas orientadoras***	***Respuestas Esperadas***	***Registros de representación***
1. Comprensión			
Lee el enunciado.	*¿De qué se trata el problema?*	*Silvia desea comprar una mesa que tiene forma rectangular y un carpintero le ofrece una mesa de 210cm. Calcula el ancho y dibuja la mesa.*	
Identifica los datos que se brindan.	*¿Qué datos tienes?*	*El largo mide 210cm.*	*Registro Verbal*
Analiza la condición del problema.	*¿Cuál es la condición del problema?*	*El ancho es la tercera parte del largo.*	
Precisa qué es lo que se pide.	*¿Qué es lo que se tiene que hallar?*	*La medida del ancho según la condición de Silvia y dibujar el rectángulo.*	
2. Estrategia			
Haz un dibujo de acuerdo a los datos y condición del problema	*¿Qué estrategia puedes usar para resolver el problema?*	*Graficar un rectángulo con el dato del largo y la incógnita que es el ancho.* 	**Conversión**
Relaciona la condición del problema con los datos.	*¿Qué relación tiene el ancho con el largo?*	*El ancho es la tercera parte del largo y el dato que se da es que el largo es 210 entonces* *ancho = largo :3* *a = 210 :3*	

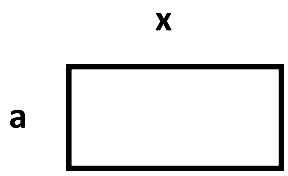
3. Solución			
Divide el largo entre 3. *Establece las longitudes correspondientes del rectángulo.* *Responde a la pregunta.*	*¿Cuánto mide el ancho?* *¿Cuáles son las longitudes del rectángulo?* *¿Cuánto debe medir el ancho según la condición de Silvia? Dibuja el rectángulo.*	*El ancho es igual a 210 :3 = 70* *Las longitudes del rectángulo son:* *largo= 210 cm* *ancho = 70cm* *Según la condición de Silvia el ancho mide 70cm.* 	*Registro Numérico*

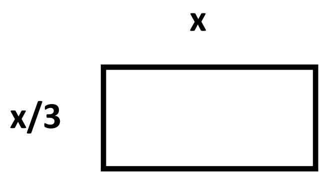
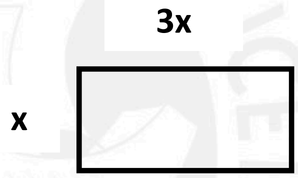
b) Calcula el perímetro de la mesa que escoge Silvia que tiene 210cm de largo.

Orientaciones para resolver el problema	***Preguntas orientadoras***	***Respuestas Esperadas***	***Registros de representación***
1. Comprensión			
Lee el enunciado. *Identifica los datos que se brindan.* *Recuerda qué es perímetro de un rectángulo.* *Precisa que es lo que se pide.*	*¿De qué se trata el problema?* *¿Qué datos tienes?* *¿Qué es perímetro?* *¿Qué es lo que se tiene que hallar?*	*Silvia escoge una mesa de 210cm de largo y se tiene que calcular el perímetro.* *El largo mide 210.* *Perímetro de un rectángulo es la suma de las longitudes de sus cuatro lados.* *El perímetro de la mesa.*	*Registro Verbal* **Conversión**
2. Estrategia			
Utiliza un gráfico para asignar las dimensiones	*¿Qué estrategia puedes usar para resolver el problema?*	*Graficar un rectángulo. El ancho se halló en la pregunta anterior cuyo valor fue 70cm y el largo es 210cm dato que se proporciona.*	

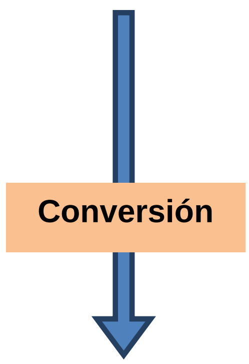
			
3. Solución			
Efectúa la suma de los lados de la mesa.	*¿Cuánto mide el perímetro?*	*P=210cm+70cm+ 210cm +70cm* *P= 560cm*	*Registro Numérico*

c) Dibuja un rectángulo que represente la mesa de Silvia que cumpla con la condición exigida y usa la variable "x" para indicar sus dimensiones.

Orientaciones para resolver el problema	***Preguntas orientadoras***	***Respuestas Esperadas***	***Registros de representación***
1. Comprensión			
Lee el enunciado. *Identifica los datos que se brindan.* *Analiza la condición del problema.* *Precisa que es lo que se pide.*	*¿De qué se trata el problema?* *¿Qué datos tienes?* *¿Cuál es la condición del problema?* *¿Qué es lo que se tiene que hacer?*	*Se tiene que dibujar un rectángulo que represente la mesa usando "x" como variable para expresar sus dimensiones.* *"x" representa una dimensión.* *El ancho es la tercera parte del largo.* *Dibujar un rectángulo y usar la variable "x" para indicar sus dimensiones*	*Registro Verbal* **Conversión**
2. Estrategia			
Haz un dibujo de acuerdo a los datos y condición del problema.	*¿Qué estrategia puedes usar para resolver el problema?*	*Graficar un rectángulo con el dato del largo y el ancho.*  *El ancho es la tercera parte del largo. Si el largo es "x"*	*Registro Algebraico*

Relaciona la condición del problema con el dato.	*¿Qué relación tiene el ancho con el largo?*	*entonces el ancho es:* *a = x/3*	
3. Solución			
Dibuja el rectángulo con sus dimensiones correspondientes.	*¿Cuáles son las longitudes del rectángulo?* *¿Existe otra forma de representar el rectángulo y con sus dimensiones?*	*largo = x* *ancho= x/3*  *Otra posibilidad es que x represente el ancho del rectángulo, en ese caso el largo es 3x y se tiene* *largo = 3x* *ancho= x* 	

d) *Otro carpintero le ofrece una mesa que cumple la condición que exige Silvia y que la suma del largo y del ancho es 320cm. Halla las medidas de tal mesa.*

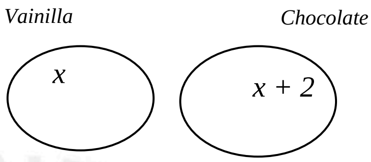
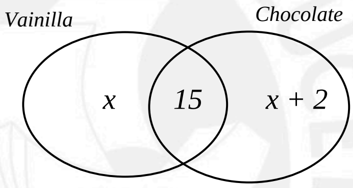
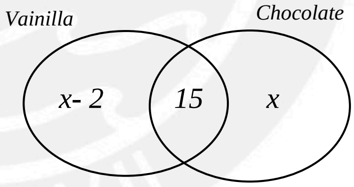
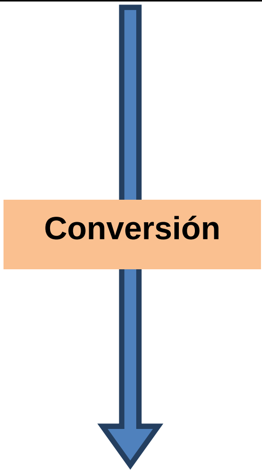
Orientaciones para resolver el problema	***Preguntas orientadoras***	***Respuestas Esperadas***	***Registros de representación***
1. Comprensión			
Lee el enunciado. *Identifica los datos que se brindan.* *Analiza la condición del problema.* *Precisa que es lo que se pide.*	*¿De qué se trata el problema?* *¿Qué datos tienes?* *¿Cuál es la condición del problema?* *¿Qué es lo que se tiene que hallar?*	*Un carpintero le ofrece a Silvia una mesa cuya suma del largo y ancho es 320cm.* *La suma del largo y del ancho es 320.* *El ancho es la tercera parte del largo.* *Hallar las medidas de la mesa.*	*Registro Verbal* 

2. Estrategia			
Examina posibles dimensiones de la mesa y verifica si se cumplen las dos condiciones que se dan (hacer tanteos)	*¿Qué números sumados dan 320? Da 2 posibles respuestas.*	**270** **50** **200** **120**	*Registro numérico* **Conversión**
	¿Qué números sumados dan 320 y que uno de ellos sea le triple del otro?	**240** **80**	*Registro Algebraico*
Plantea una ecuación.	*¿Es la única solución posible? ¿Por qué?*	*Sí, es la única solución posible porque 80 más 240 es 320 y 240 es el triple de 80.*	**Tratamiento**
	Escribe una ecuación utilizando los datos y la condición.	*largo = x* *ancho= x/3* *l + a = 320* $x+\frac{x}{3}=320$	
3. Solución			
Resuelve la ecuación.	*Resuelve la ecuación.*	$x+\frac{x}{3}=320$ $\frac{4x}{3}=320$ $x=240$ *(largo)* $a=\frac{x}{3}=\frac{240}{3}=80$ *(ancho)*	*Registro Algebraico*
	¿Existe otra forma de plantear y resolver la ecuación?	*Si existe otra forma de plantear y resolver la ecuación. Planteamos que :* *largo = 3x* *ancho= x*	

		$x+3x=320$ $4x=320$ $x=80$ *(ancho)* $3x=3(80)=240$ *(largo)*	
Responde a la pregunta.	*Halla las medidas de tal mesa.*	*Las medidas de la mesa son: el largo mide 240 cm y el ancho mide 80cm.*	

2. ***En el aula de 1er año hay 37 alumnas, de las cuales a 15 les gustan los helados de vainilla y chocolate. Si las que les gusta solo el helado de chocolate son dos alumnas más de las que les gusta solo el helado de vainilla. ¿A cuántas les gusta solo el helado de vainilla y a cuántas solo el helado de chocolate?***

Orientaciones para resolver el problema	***Preguntas orientadoras***	***Respuestas Esperadas***	***Registros de representación***
1. Comprensión			
Lee el enunciado. *Identifica los datos que se brindan.* *Analiza la condición del problema.* *Precisa que es lo que se pide.*	*¿De qué se trata el problema?* *¿Qué datos tienes?* *¿Cuál es la condición del problema?* *¿Qué es lo que se tiene que hallar?*	*En un aula hay 37 estudiantes a 15 les gusta los helados de vainilla y chocolate. A las que les gusta solo el helado de chocolate son dos alumnas más de las que les gusta solo el helado de vainilla. Calcula alas que les gusta solo el helado de vainilla y solo el helado de chocolate.* *Total de alumnas 37.* *Les gustan los helados de vainilla y chocolate 15.* *Las que les gusta solo el helado de chocolate son dos alumnas más de las que les gusta solo el helado de vainilla.* *A cuántas les gusta solo el helado de vainilla y a cuántas solo el helado de chocolate.*	*Registro Verbal*

2. Estrategia			
Haz un dibujo de acuerdo a los datos y condición del problema	*¿Qué estrategia puedes usar para resolver el problema?* *¿A cuántos les gusta solo vainilla y solo chocolate?* *¿Pueden ser conjuntos disjuntos?* *¿Qué graficas tendrías que utilizar?*	*Hacer diagramas de Venn* *Solo Vainilla = x* *Solo Chocolate = x+2*  *No pueden ser conjuntos disjuntos porque existen 15 estudiantes que les gustan ambos sabores.*  *O también*  *Mediante estos diagramas de Venn representamos a las que les gusta solo el helado de vainilla, solo el helado de chocolate y a las que les gustan ambos sabores.*	 *Registro Algebraico*
Plantea una ecuación.	*Escribe una ecuación utilizando los datos y la condición.*	*Solo Vainilla = x* *Solo Chocolate = x+2* *Ambos helados =15* $x + 15 + x + 2 = 37$	

3. Solución			
Resuelve la ecuación.	*Resuelve la ecuación.*	$x+15+x+2=37$ $2x+17=37$ $2x=20$ $x=10$ *(solo vainilla)* $x=10+2=12$ *(solo chocolate)*	**Tratamiento** *Registro Algebraico*
	¿Existe otra forma de plantear y resolver la ecuación?	*Si existe otra forma de plantear y resolver la ecuación.* *Planteamos que :* *Solo Vainilla = x – 2* *Solo Chocolate = x* $x-2+15+x=37$ $2x+13=37$ $2x=24$ $x=12$ *(solo chocolate)* $x-2=12-2=10$ *(solo vainilla)*	
Responde a la pregunta.	*¿A cuántas les gusta solo el helado de vainilla y a cuántas solo el helado de chocolate?*	*Les gusta solo el helado de vainilla 10 y solo el helado de chocolate a 12.*	

Se trabajó estos problemas con la participación de las estudiantesa través de sus saberes previos, absolviendo a cada instante cualquier duda.

Para resolver ambos problemas las estudiantes primero debían de comprender el enunciado de cada situación problemática. Para ello las estudiantes debían saber de qué se estaba hablando en el problema, qué es lo que se quería conocer o hallar y cuáles son los datos que se brindaban. Mediante preguntas que planteó el profesor se promovió el aprendizaje, se fomentó la participación y un proceso comunicativo. Esta primera parte fue esencial ya que la comprensión es un elemento básico para resolver problemas. Luego se averiguó la estrategia para encontrar la solución del problema, con los datos y la condición que se tiene y finalmente se realizaron los cálculos necesarios para llegar a la resolución del problema.

La clase se desarrolló interactivamente y el esquema previsto ayudó a formular preguntas orientadoras y a estimular los tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación. Esto contribuyo a la mejor compresión y solución de los problemas.

4.2.3.5 Aplicación de los problemas elaborados.

Durante 1 hora pedagógica las 29 estudiantes desarrollaron los 2 problemas previstos para su trabajo individual a los cuales nos hemos referido en las páginas 48 y 52.

Los problemas que resolvieron enfatizaban:

- La conversión del registro verbal alregistroalgebraico.
- La conversión del registro algebraico al verbal.

En esta sesión de aprendizaje observamos lo siguiente:

- Las estudiantes no hacían preguntas constantes sobre los problemas.
- Trabajaron individualmente resolviendo lo que se les pedía.
- La mayoría de las estudiantes sí entendían la pregunta.
- Sí sabían plantear ecuaciones.
- Algunas estudiantes presentaban dificultad al convertir del registro algebraico al verbal.

4.2.3.6 Elaboración de un nuevo problema relacionado con Ecuaciones Lineales.

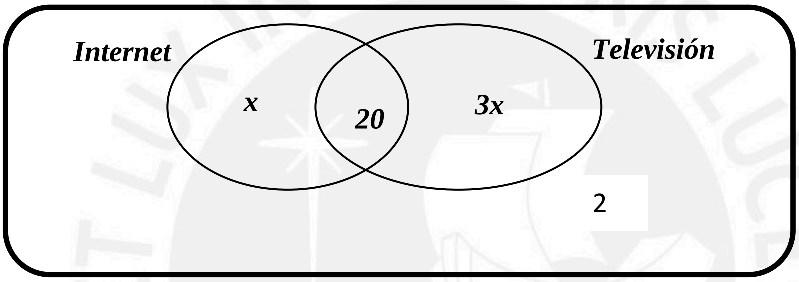
Se tomó la decisión de elaborar un nuevo problema específicamente sobre la conversión del registro algebraico al verbal, ya que se observó que todavía había dificultad en este tipo de conversión.

El material con el que se trabajó se encuentra en el apéndice.

Lee detenidamente cada una de las siguientes situaciones y haz lo que se pide.

1. En otro salón hay 38 alumnos y se les preguntó si en su casa tienen Internet o Televisión.

Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.



Observando el gráfico,

a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

b) Plantea una ecuación para resolver el problema que escribiste en la parte a)

c) Resuelve el problema usando la ecuación y responde ¿Cuántos alumnos tienen solamente Televisión?

A continuación se muestra los objetivos y respuestas esperadas para cada pregunta propuesta.

Objetivos y sus respuestas esperadas:

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro algebraico al verbal.	Se espera que las estudiantes escriban un enunciado como el siguiente : En un salón de clase hay 38 alumnos, se sabe que 20 alumnos tienen en su casa Internet y Televisión, 2 no tienen ninguno de los dos y además el número de alumnos que tienen solo televisión es el triple del número de alumnos que tienen solo internet. ¿Cuántos alumnos tienen solamente televisión? Una dificultad que se espera de las estudiantes es que escriban un enunciado en el cual no tomen en cuenta todos los datos que se les brindan en el esquema.

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
b) Plantea una ecuación para resolver el problema que escribiste en la parte a)	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen una conversión del registro verbal al algebraico.	Se espera que las estudiantes planteen la siguiente ecuación: $x + 20 + 3x + 2 = 38$ Una dificultad que se espera de las estudiantes es que no planteen correctamente la ecuación.

Ítem	Objetivo	Respuesta esperada y comentario
c) Resuelve el problema usando la ecuación y responde ¿Cuántos alumnos tienen solamente Televisión?	El objetivo de esta situación es que las estudiantes realicen un tratamiento en el registro algebraico.	Se espera que las estudiantes resuelvan la siguiente ecuación: $x + 20 + 3x + 2 = 38$ $4x = 16$ $x = 4$ Y respondan que tienen solamente televisión 12 personas. Consideramos altamente probable que las estudiantes resuelvan correctamente una ecuación que no corresponda a la situación planteada.

4.2.3.7 Sesión de aprendizaje Nº2 con los estudiantes

Se llevó a cabo el día viernes 30 de marzo del 2012 con las 29 estudiantes que cursan el Segundo año de secundaria del Colegio Parroquial Reina de la Paz de San Isidro. Se decidió tener una sesión de trabajo con determinados problemas que les permita familiarizarse con la representación verbal y gráfica para situaciones parecidas, durante 1 hora pedagógica.

Objetivo de la sesión: Reforzar en las estudiantes la conversión de registros verbal y algebraico en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado.

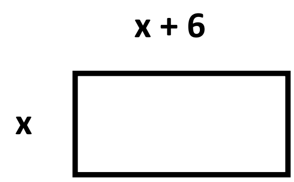
Se propusotres problemas: dos de ellos enfatizando la conversión del registro verbal a los registros gráfico y algebraico y otro enfatizando la conversión del registro algebraico al verbal.

En esta segunda sesión de aprendizaje con las estudiantes se trabajó, con la ayuda de una lista de problemas y con la participación constante de las estudiantes a través de sus saberes previos.

En esta sesión se utilizó el material que se muestra en el apéndice que mostramos a continuación con las orientaciones para resolver los problemas y las respuestas esperadas:

PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES

1. ***En un rectángulo el largo mide 6 metros más que el ancho y el perímetro es 28 m. ¿Cuáles son sus dimensiones?***

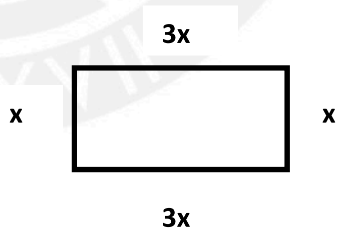
Orientaciones para resolver el problema	***Preguntas orientadoras***	***Respuestas Esperadas***	***Registros de representación***
1. Comprensión			
Lee el enunciado.	*¿De qué se trata el problema?*	*El largo de un rectángulo mide 6m más que el ancho y su perímetro mide 28. Calcula el ancho y el largo del rectángulo.*	
Identifica los datos que se brindan.	*¿Qué datos tienes?*	*Perímetro 28m.*	
Recuerda qué es perímetro de un rectángulo.	*¿Qué es perímetro?*	*Perímetro de un rectángulo es la suma de las longitudes de sus cuatro lados.*	*Registro Verbal*
Analiza la condición del problema.	*¿Cuál es la condición del problema?*	*El largo mide 6 metros más que el ancho.*	
Precisa que es lo que se pide.	*¿Qué es lo que se tiene que hallar?*	*Las dimensiones del rectángulo.*	**Conversión**
2. Estrategia			
Haz un dibujo de acuerdo a los datos y condición del problema.	*¿Qué estrategia puedes usar para resolver el problema?*	*Grafica un rectángulo con el dato del largo y el ancho.* *ancho=x* *largo= x + 6*  	*Registro Algebraico*
Relaciona la condición del problema con los datos.	*¿Qué relación tienen las dimensiones del rectángulo con el perímetro?*	*El perímetro es la suma de 2 veces el ancho que vale "x" más 2 veces al largo que vale "x +6"* $P = 2(x) + 2(x + 6)$	

Plantea una ecuación	*Escribe una ecuación utilizando los datos y la condición.*	*2 (x) + 2 (x + 6) = 28*	
3. Solución			**Tratamiento**
Resuelve la ecuación. *Responde a la pregunta.*	*Resuelve la ecuación.* *¿Existe otra forma de plantear y resolver la ecuación?* *Halla las medidas de tal mesa.*	$2(x)+2(x+6)=28$ $2x+2x+12=28$ $4x=16$ $x=4$ *(ancho)* $x+6=4+6=10$ *(largo)* *Si existe otra forma de plantear y resolver la ecuación.* *Planteamos que :* *ancho= x-6* *largo = x* $2(x-6)+2x=28$ $2x-12+2x=28$ $4x=40$ $x=10$ *(largo)* $x-6=10-6=4$ *(ancho)* *Las dimensiones del rectángulo son ancho 4m y largo 10m.*	*Registro Algebraico*

2. ***María resolvió un problema planteando la siguiente ecuación***

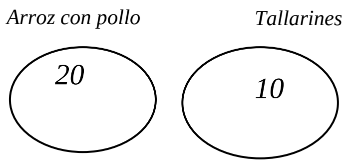
$$x + 3x + x + 3x = 24$$

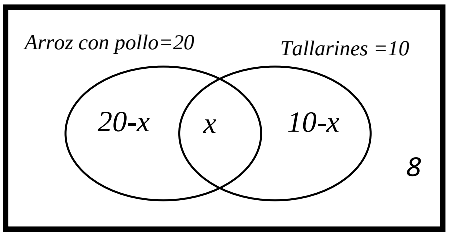
Escribe un problema que tú piensas que resolvió María.

Orientaciones para resolver el problema	**Preguntas orientadoras**	**Respuestas Esperadas**	**Registros de representación**
1. Comprensión			
Interpreta el significado de x y 3x.	*¿Qué puede representar la variable "x"? Escribe 3 posibles respuestas.* *Entonces ¿qué representaría "3x"?*	*x : cantidad de dinero de Juan.* *x: la edad de Ana.* *x:ancho de una figura.* *3x: el triple de la cantidad de dinero de Juan.* *3x: el triple de la edad de María.* *3x: triple del ancho de una figura.*	*Registro Algebraico* **Conversión** *Registro Verbal* **Conversión**
2. Estrategia			
Haz un dibujo que relacione a las variables "x" y "3x" datos	*Pensemos que "x" es el ancho de un rectángulo, entonces ¿qué sería 3x?* *Dibujemos el rectángulo con sus medidas.* *Además, ¿qué representaría x + 3x + x + 3x ?*	*El largo*  *El Perímetro.*	*Registro Algebraico* **Conversión**

3. Solución			
Elabora un enunciado verbal de acuerdo a los datos y condición del problema.	*¿Qué datos tienes?*	*El perímetro de un rectángulo es 24 m.*	*Registro Verbal*
	¿Cuál es la condición del problema?	*El largo mide el triple del ancho.*	
	¿Qué es lo que se tiene que hallar?	*Las dimensiones de una piscina.*	**Conversión**
	Escribe un enunciado verbalconsiderando los datos, la condición y pregunta del problema.	*En una piscina rectangular el largo mide el triple del ancho. Si el perímetro del rectángulo es 24 m ¿Cuáles son las dimensiones de esa piscina?*	
Plantea una ecuación.	*Escribe la ecuación utilizando los datos y la condición*	$x+3x+x+3x=24$	*Registro Algebraico*
Resuelve la ecuación.	*Resuelve la ecuación.*	$x+3x+x+3x=24$ $6x=24$ $x=4$ *(ancho)* $3x=3(4)=12$ *(largo)*	**Tratamiento** *Registro Algebraico*
Responde a la pregunta.	*¿Cuáles son las dimensiones de esa piscina?*	*Las dimensiones de la piscina rectangular son 4m de ancho y 12m de largo.*	

3. ***En un restaurante hay 30 personas, 20 piden arroz con pollo; 10 tallarines rojos y 8 ningún plato. Si un grupo de las personas pide ambos platos. ¿Cuántas personas comen ambos platos?***

Orientaciones para resolver el problema	*Preguntas orientadoras*	*Respuestas Esperadas*	*Registros de representación*
1. Comprensión			
Lee el enunciado.	*¿De qué se trata el problema?*	*En cierto restaurante asisten 30 personas, 20 de ellas piden arroz con pollo, 10 tallarines rojos y 8 no comen. Si un grupo de las personas pide ambos platos ¿Cuántas personas piden ambos platos?*	
Identifica los datos que se brindan	*¿Qué datos tienes?*	*Total de personas 30.* *Comen arroz con pollo 20* *Comen tallarines rojos 10* *Ningún plato 8*	*Registro Verbal*
Analiza la condición del problema.	*¿Cuál es la condición del problema?*	*Si un grupo de las personas pide ambos platos.*	
Precisa que es lo que se pide.	*¿Qué es lo que se tiene que hallar?*	*El número de personas que comen arroz con pollo y tallarines.*	**Conversión**
2. Estrategia	*2. Estrategia*		
Haz un dibujo de acuerdo a los datos y condición del problema.	*¿Qué estrategia puedes usar para resolver el problema?* *¿Qué conjuntos se pueden representar?* *¿Pueden ser conjuntos disjuntos?*	*Hacer diagramas de Venn*  *No pueden ser conjuntos disjuntos porque existe un número determinado de personas que comen ambos platos y que se le representa con la variable "x"*	*Registro Numérico*

	¿Qué gráfica tendrías que utilizar?	 *Comen* *Ambos platos= x* *Solo arroz con pollo = 20 – x* *Solo tallarines = 10 – x* *Ningún plato = 8*	**Conversión** *Registro Algebraico*
Plantea una ecuación.	*Escribe una ecuación utilizando los datos y la condición*	$20 - x + x + 10 - x + 8 = 30$	**Tratamiento**
3. Solución	*3. Solución*		
Resuelve la ecuación. *Responde a la pregunta.*	*Resuelve la ecuación.* *¿Cuántas personas comen ambos platos?*	$20 - x + x + 10 - x + 8 = 30$ $38 - x = 30$ $x = 8$ *(comen ambos platos)* *Comen ambos platos arroz con pollo y tallarines 8 personas.*	*Registro Algebraico*

4.2.3.8 Aplicación del nuevo problema elaborado.

Durante 25 minutos las 29 estudiantes desarrollaron el problema en forma individual.El problema que se resolvió destacaba la conversión del registro gráfico al verbal y algebraico.

Se observó lo siguiente:

- Las estudiantes recordaban similitudes con algún problema desarrollado en noviembre del 2011.
- La mayoría de las estudiantes entendían el problema y no formulaban preguntas como sucedió en noviembre.
- Las estudiantes si sabían plantear y resolver ecuaciones.
- Se percibió menor dificultad que en la sesión 1 parar pasar del registro algebraico al registro verbal, pero, cabe mencionar que subsiste la dificultad y es coherente con lo atípico de la situación planteada.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LA PRIMERA Y SEGUNDA LISTA DE PROBLEMAS.

Tabla 1. Resultados de la primera lista de problemas

Problema	Responde correctamente		Responde con errores		No responde o responde incorrectamente	
	Estudiantes	**%**	Estudiantes	**%**	Estudiantes	**%**
1a	26	89,66	0	0	3	10,34
1b	26	89,66	1	3,45	2	6,89
1c	25	86,21	0	0	4	13,79
1d	15	51,72	0	0	14	48,28
1e	9	31,03	7	24,14	13	44,83
2a	7	24,14	13	44,83	9	31,03
2b	19	65,52	0	0	10	34,48
2c	7	24,14	13	44,83	9	31,03

Tabla 2. Resultados de la segunda lista de problemas

Problema	Responde correctamente		Responde con errores		No responde o responde incorrectamente	
	Estudiantes	**%**	Estudiantes	**%**	Estudiantes	**%**
a	10	34,48	12	41,38	7	24,14
b	21	72,41	0	0	8	27,59
c	13	44,83	6	20,69	10	34,48

5.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LOS PROBLEMAS ELABORADOS.

Problema 1a:

En este ítem el 90% de las estudiantes dibujó correctamente el rectángulo con las dimensiones correspondientes. De las estudiantes solo el 41% responde a la pregunta que se formula en el problema ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición dada?Esto indica que la mayoría de las estudiantes pueden pasar del enunciado verbal al numérico, pero no logran interpretar el significado del gráfico y no saben cuál es la respuesta del problema.

Se sugiere que las estudiantesse familiaricen con los términos “doble de”, la “longitud del largo” y la “longitud del ancho” y con su significado preciso en el contexto matemático. También, las estudiantes se deben familiarizar con las figuras geométricas y sus características (largo y ancho).

De acuerdo a la Teoría de Registros a la mayoría de las estudiantes les es fácil convertir del registro verbal al numérico.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

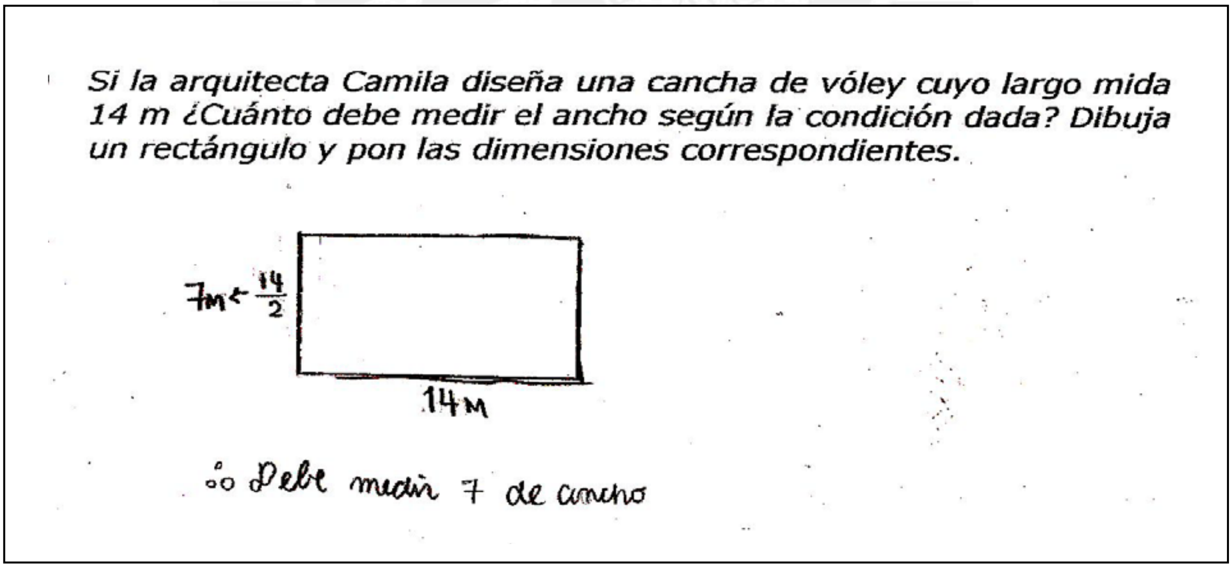


Figura 11.Respuesta de la estudiante

En la figura 11se observa que la estudiante dibujó correctamente el rectángulo con sus dimensiones, realizando una adecuada conversión del registro verbal al numérico.

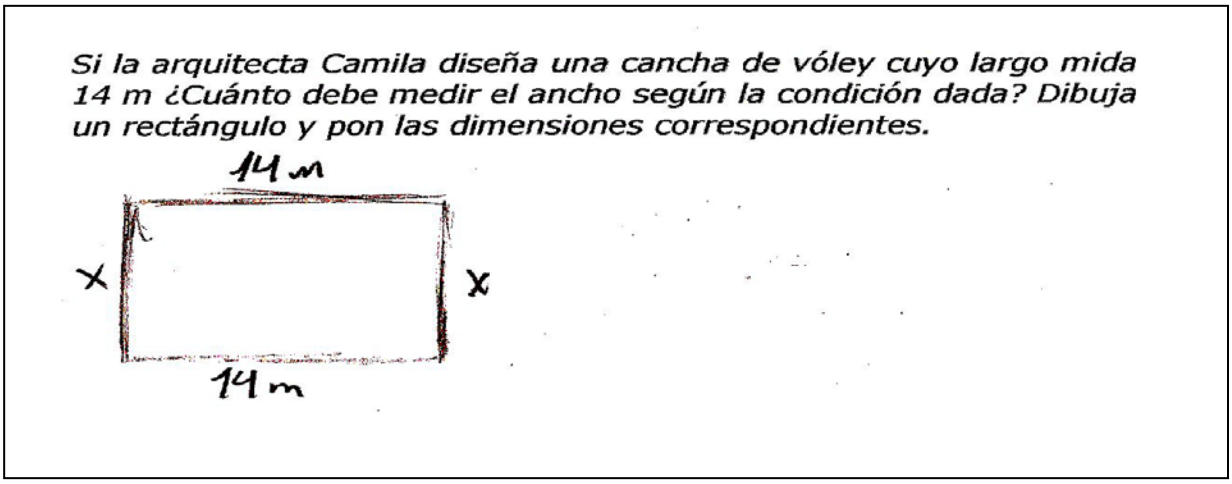


Figura 12. Respuesta de la estudiante

En la figura 12 se observa que la estudiante no entendió la condición que se especificó en el enunciado del problema, es decir que el largo es el doble del ancho, solo determinó el largo de la cancha de vóley y el ancho es un dato desconocido para ella, es decirno realizó una adecuada conversión del registro verbal al numérico y tampoco respondió a la pregunta.

Problema 1b:

En este ítem el 90% de las estudiantes calculó correctamente el perímetro. El10% de las estudiantes utilizaron la propiedad distributiva de la multiplicación para calcular el perímetro de la cancha de vóley.Esto quiere decir que si conocen el significado del término “perímetro”. De acuerdo a la Teoría de Registros se observa que la mayoría de las estudiantes les fue fácil convertir del registro verbal al numérico.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

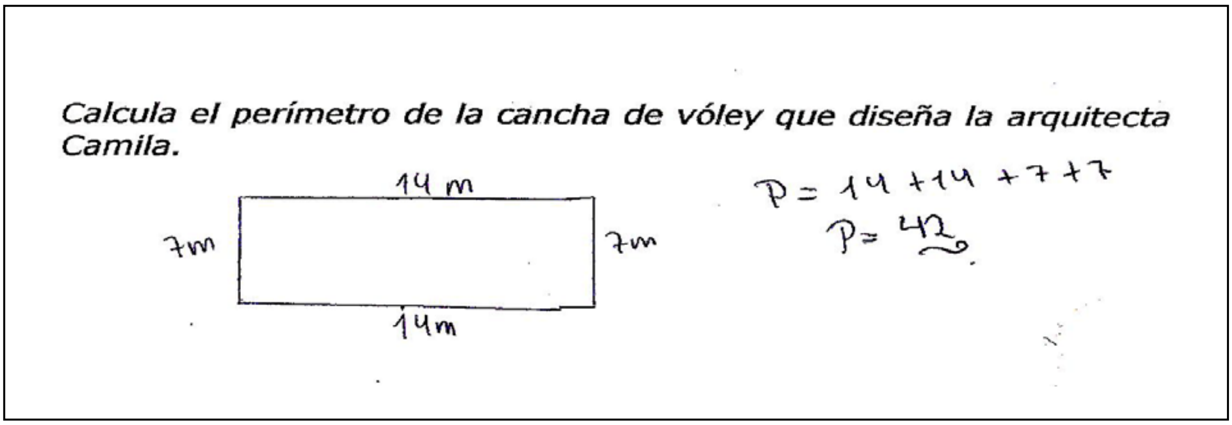


Figura 13. Respuesta de la estudiante

En la figura 13 se observa que la estudiante calculó el perímetro y dibujó el rectángulo correctamente, realizando una adecuada conversión del registro verbal al numérico.

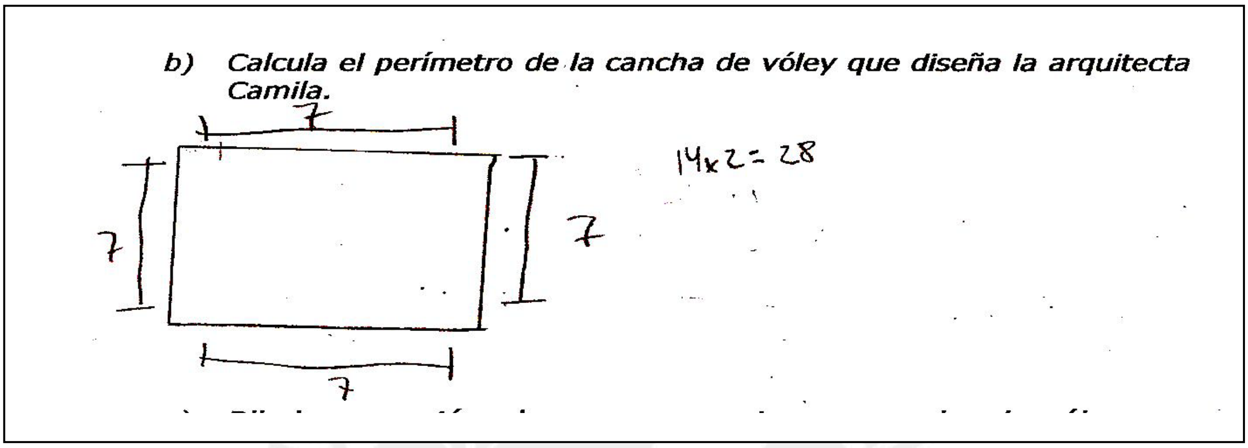


Figura 14. Respuesta de la estudiante

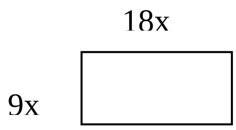
En la figura 14 se observa que la estudiante estableció que los lados en el rectángulo miden 7m y calculó el perímetro pero con los datos errados, es decir no realizó una adecuada conversión del registro verbal al numérico.

Problema 1c:

En este ítem el 86% de las estudiantes dibujó el rectángulo correctamente y usó la variable "x".

De acuerdo a la Teoría de Registros a la mayoría les fue fácil convertir del registro verbal al algebraico.

Algo que es interesante de destacar es que uno de las estudiantes elaboró el siguiente gráfico:



Observamos que usó correctamente el concepto de proporcionalidad, pues estableció que el ancho mide 9x y el largo 18x como los lados del rectángulo.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

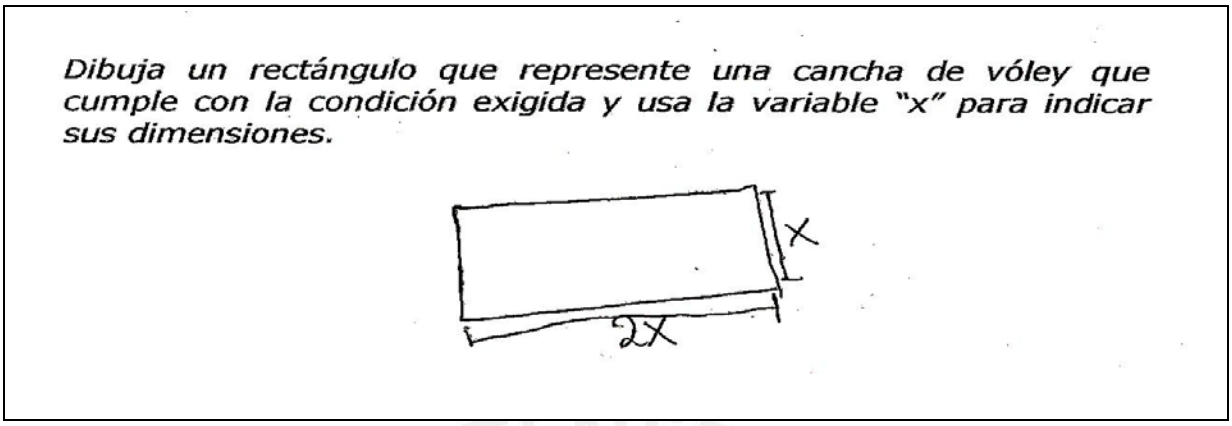


Figura 15. Respuesta de la estudiante

En la figura 15 se observa que la estudiante representó el gráfico correctamente con sus respectivas dimensiones, realizando una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

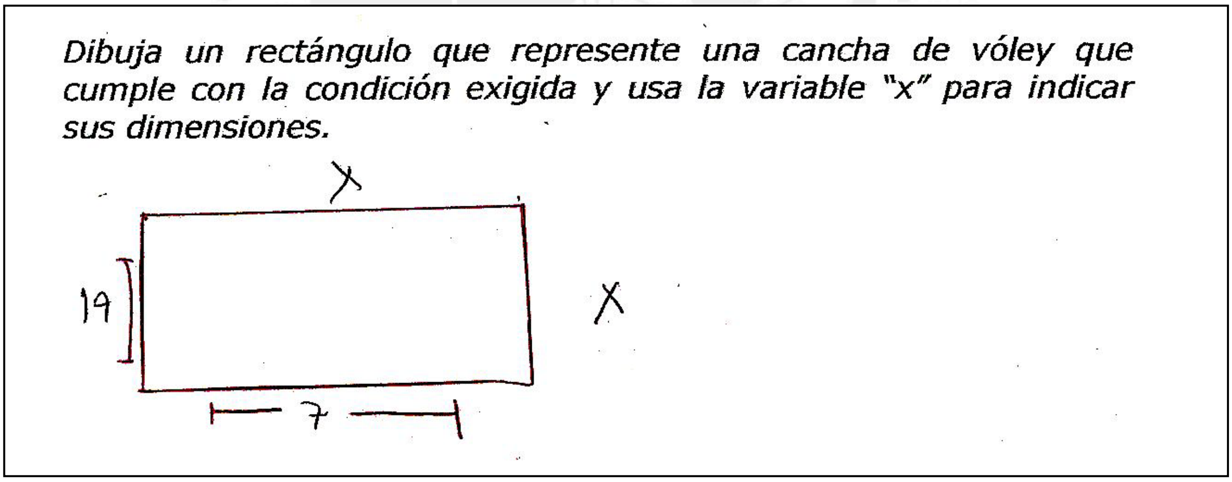


Figura 16. Respuesta de la estudiante

En la figura 16 se observa que la estudiante no entendió la pregunta y colocó los datos de forma incorrecta; para la estudiante el largo y el ancho miden "x" además estableció que el largo mide 7 y el ancho 14, es decir no realizó una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

Problema 1d:

En este ítem el 52% de las estudiantes escribió correctamente la ecuación.

De acuerdo a la Teoría de Registros a cerca de la mitad de las estudiantes les fue difícil convertir del registro verbal al algebraico.

Se observa que la traducción de gráficos a una ecuación es un problema que se presenta en las estudiantes ya que siempre existe la dificultad en usar variables, característico en el campo del algebra en la cual se generalizan relaciones matemáticas.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

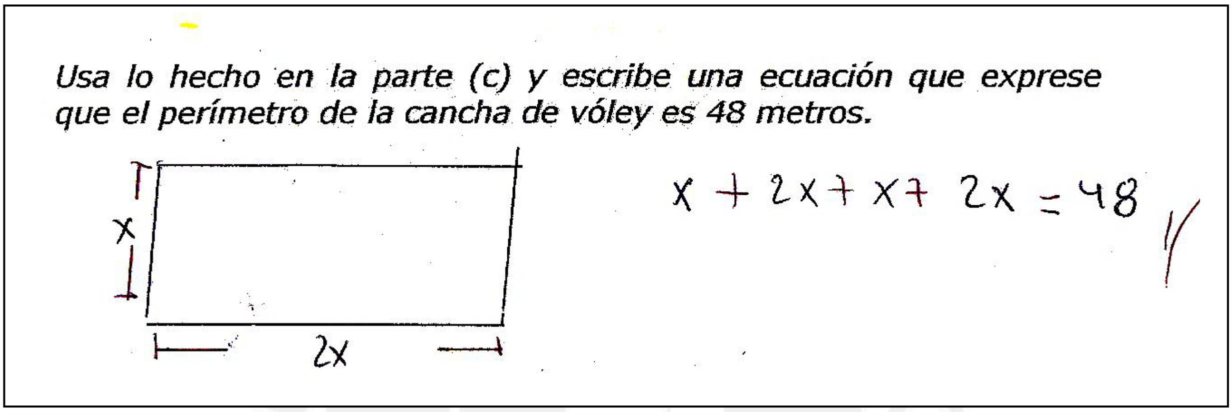


Figura 17. Respuesta de la estudiante

En la figura 17 se observa que la estudiante planteó la ecuación correctamente, realizando una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

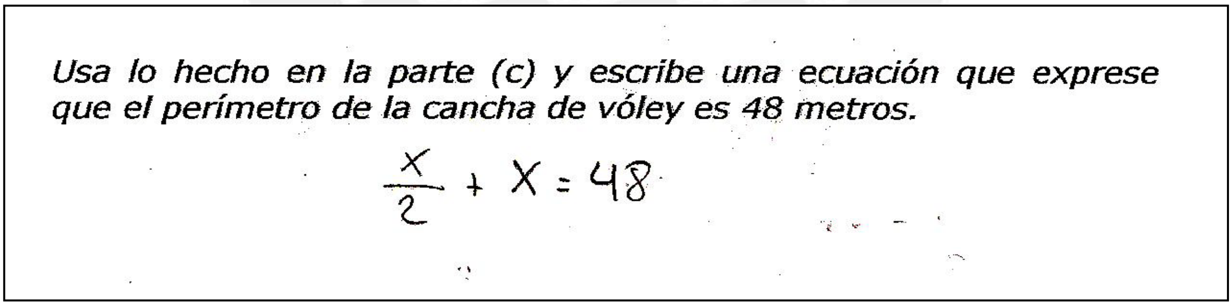


Figura 18. Respuesta de la estudiante

En la figura 18 se observa que la estudiante no planteó correctamente la ecuación, no entendió que la suma de las longitudes de los lados del rectángulo era igual al perímetro, es decir no realizó una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

<u>Problema 1e:</u>

En este ítem el 31% de las estudiantes resuelve la ecuación y dibuja el rectángulo con las dimensiones halladas. El 9% de los alumnos solo resuelve la ecuación y no dibuja el rectángulo. El 11% de los alumnos solo dibuja el rectángulo y no resuelve la ecuación planteada.

De acuerdo a la Teoría de Registros a la mayoría de las estudiantes les fue difícil un tratamiento en el registro algebraico.

Esto demuestra que la mayoría de las estudiantes no realizan la solución completa del problema porque no comprenden lo que se les pide hacer.

Además no resuelven bien las ecuaciones lineales, porque utilizan en forma errónea las expresiones equivalentes, se equivocan al transponer términos o no operan fracciones correctamente.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

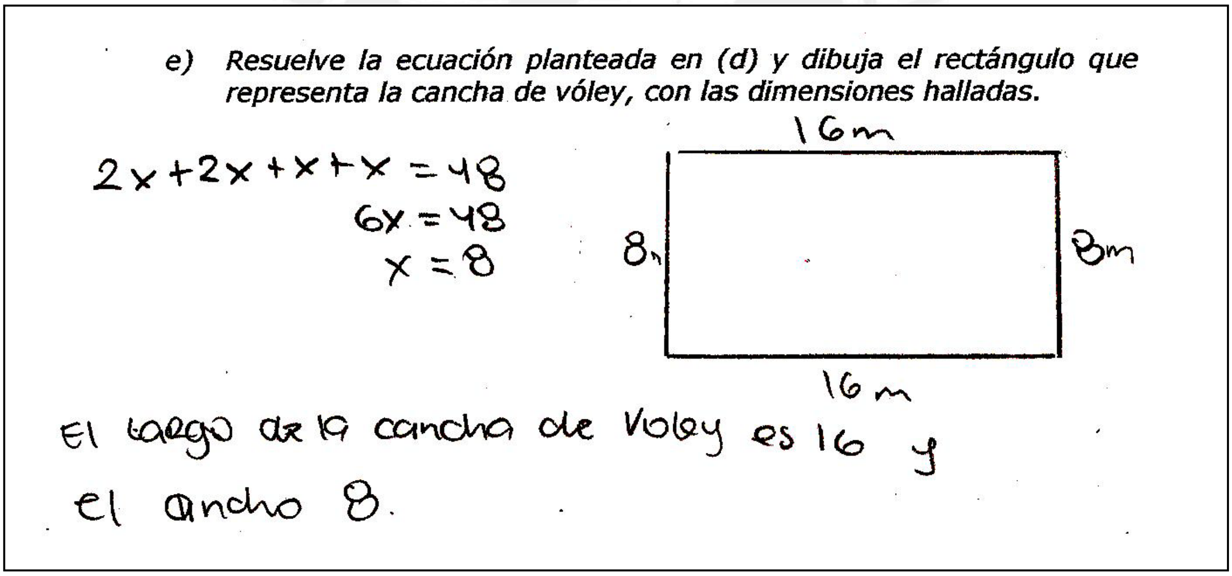


Figura 19. Respuesta de la estudiante

En la figura 19 se observa que la estudiante resolvió correctamente la ecuación realizando un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Resuelve la ecuación planteada en (d) y dibuja el rectángulo que representa la cancha de vóley, con las dimensiones halladas.

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 48$$

$$x + x + x + x = 48 \times 4$$

$$4x = 192$$

$$x = \frac{192}{4}$$

$$x = 48 //$$

Figura 20. Respuesta de la estudiante

En la figura 20 se observa que la estudiante no resolvió correctamente la ecuación lineal con denominadores; hay dificultad al sumar expresiones algebraicas; no realizó un adecuado tratamiento en el registro algebraico, además que no dibujó el rectángulo que representa la cancha de vóley

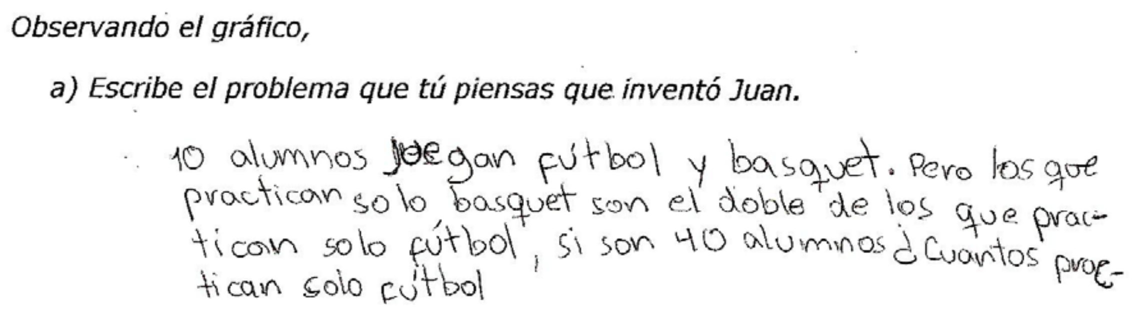
<u>Problema 2a:</u>

En este ítem el 24% de las estudiantes escribió correctamente el problema de acuerdo al gráfico.

De acuerdo a la Teoría de Registros a la mayoría de las estudiantes les fue difícil una conversión del registro algebraico al verbal.

Las estudiantes muestran dificultades al escribir un enunciado porque en clase básicamente se les enseña a resolver ecuaciones y no a crear una situación problemática a partir de un esquema y más aun usando variables que implican doble, triple, mitad de un número.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

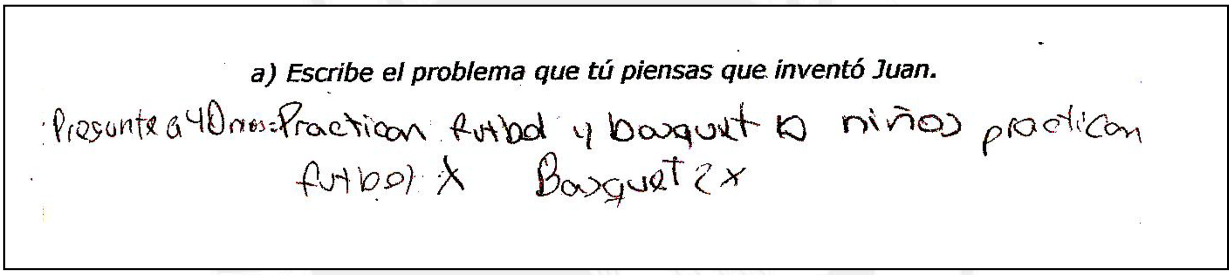

Observando el gráfico,

a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

10 alumnos juegan fútbol y basquet. Pero los que practican solo basquet son el doble de los que practican solo fútbol, si son 40 alumnos ¿Cuantos practican solo fútbol

Figura 21. Respuesta de la estudiante

En la figura 21 se observa que la estudiante escribió correctamente el enunciado del problema con los datos, con la condición y la pregunta, realizando una adecuada conversión del registro algebraico al verbal.


a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

Presunta a 40 niños: Practican futbol y basquet 10 niños practican futbol x Basquet 2x

Figura 22. Respuesta de la estudiante

En la figura 22 se observa quela estudiante escribió el enunciado del problema solo con los datos que se proporcionan y no formuló la condición, ni la pregunta del problema, usó las variables que aparecen en el gráfico sin relacionarlo como condición del problema, por tanto, es decir no realizó una adecuada conversión del registro algebraico al verbal.

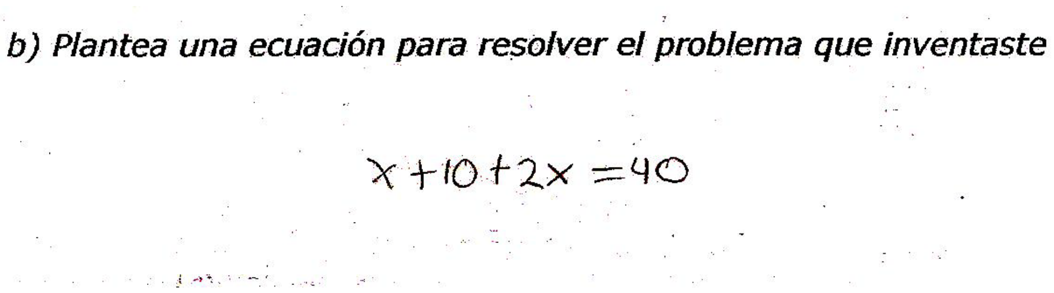
Problema 2b:

En este ítem el 66% de las estudiantes planteó correctamente una ecuación.

De acuerdo a la Teoría de Registros a la mayoría de las estudiantes les fue fácil convertir del registro verbal al algebraico.

Esto demuestra que si pueden plantear ecuaciones lineales; el objetomatemático es Operaciones con Conjuntos tema aprendido por las estudiantes desde primaria.

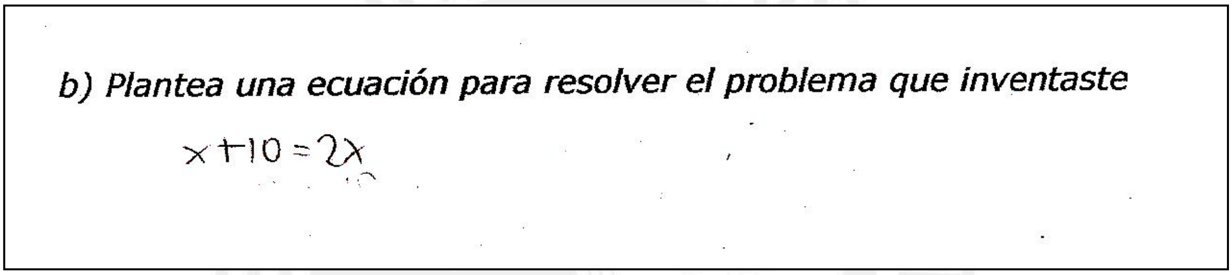
Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:


b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste

$x + 10 + 2x = 40$

Figura 23. Respuesta de la estudiante

En la figura 23 se observa que la estudiante planteó la ecuación correctamente, realizando una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.


b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste

$x + 10 = 2x$

Figura 24. Respuesta de la estudiante

En la figura 24 se observa que la estudiante no planteó la ecuación correctamente, es decir no realizó una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

<u>Problema 2c:</u>

En este ítem el 24% de las estudiantes resolvió correctamente la ecuación y escribió la respuesta del problema que planteó. El 45 % de las estudiantes solo resolvió la ecuación y no respondió la pregunta del problema que planteó.

De acuerdo a la Teoría de Registros a la mayoría de las estudiantes les fue difícil un tratamiento en el registro algebraico.

Como no escribieron acertadamente un enunciado verbal sobre el grafico, por tanto no pueden dar respuesta a la pregunta del problema que tenían que elaborar.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

c) *Resuelve el problema usando la ecuación.*

$x+10+2x=40$

$3x=30$

$x=10$

$\therefore$ Sólo fútbol $= \underline{10}$ p.

Sólo básquet $= 10(2)$.

$= \underline{20}$ p.

Figura 25. Respuesta de la estudiante

En la figura 25 se observa que la estudiante resolvió correctamente la ecuación y respondió a la pregunta; realizando un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

c) *Resuelve el problema usando la ecuación.*

$x+10+2x$

$3x=10$

$y=10:3$

$x=30$

$\therefore 30+x=40$

Figura 26. Respuesta de la estudiante

En la figura 26 se observa que la estudiante no planteó la ecuación correctamente y la resolvió erróneamente, es decir no realizó un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL NUEVO PROBLEMA ELABORADO

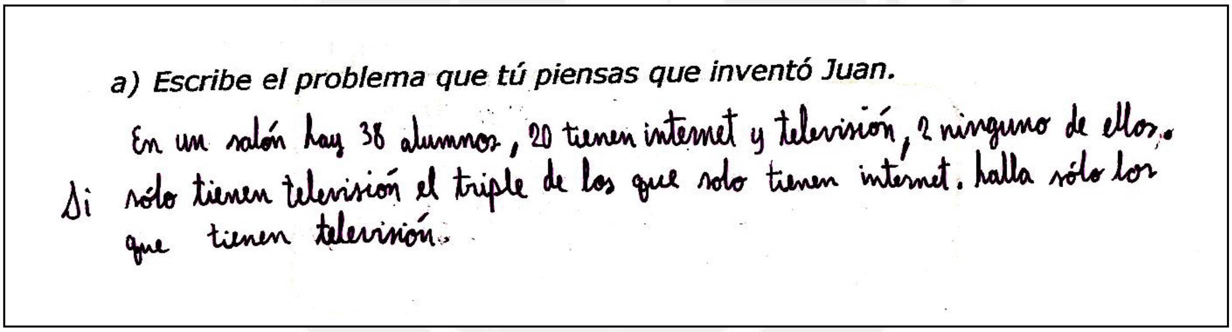
Pregunta a:

En esta pregunta se les pidió que escriban el enunciado de un problema, observando un gráfico con ciertos datos, un 34 % de las estudiantes lo hicieron muy bien, es decir escribieron correctamente el problema de acuerdo al gráfico.

Se observa que en este ítem se incrementó en un 10% las respuestas correctas de las estudiantes, con referencia a los resultados de noviembre del 2011, por tanto realizan una adecuada conversión del registro algebraico al verbal.

Es bueno que las estudiantes realicen este tipo de conversión ya que hace posible que los alumnos formulen preguntas como ¿Cuántos alumnos tienen solo internet? ¿Cuántos alumnos tienen internet? ¿Cuántos alumnos tienen televisión?¿Cuál es la diferencia entre los alumnos que tienen internet y televisión?¿Cuántos alumnos tienen televisión e internet?

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:


a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

En un salón hay 38 alumnos, 20 tienen internet y televisión, 2 ninguno de ellos. Si sólo tienen televisión el triple de los que solo tienen internet. halla sólo los que tienen televisión.

Figura 27. Respuesta de la estudiante

En la figura 27 se observa que la estudiante escribió correctamente el enunciado del problema con los datos, con la condición y la pregunta, realizando una adecuada conversión del registro algebraico al verbal.

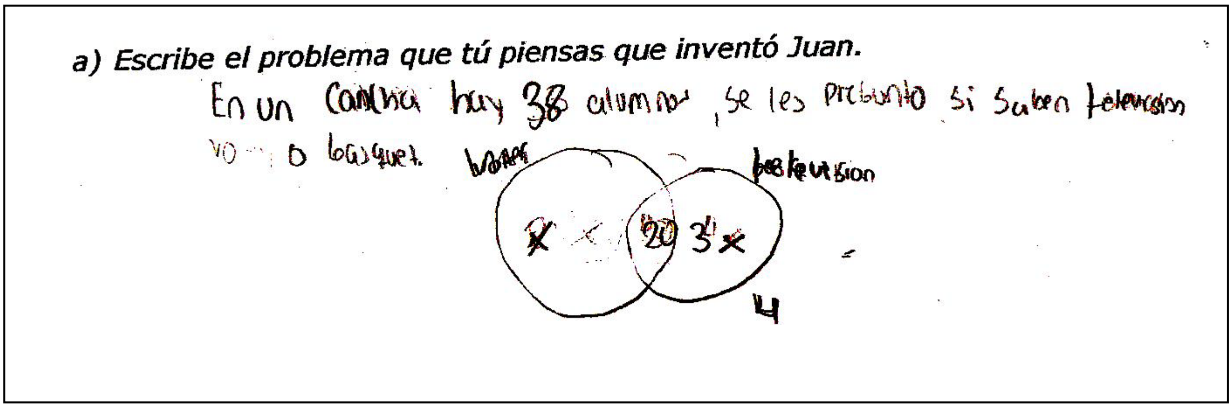


Figura 28. Respuesta de la estudiante

En la figura 28 se observa que la estudiante escribió el enunciado del problema solo con el dato del total de alumnos y los que saben televisión o básquet, no formuló la condición, ni la pregunta del problema, usó el mismo grafico que se debía interpretar y cambio el dato de los alumnos que no tienen televisión e internet; así no realizó una adecuada conversión del registro algebraico al verbal.

<u>*Pregunta b:*</u>

En esta pregunta se les pidió que planteen una ecuación, el 72% lo hizo correctamente.

Se observa que en este ítem se incrementó en un 6% las respuestas correctas de las estudiantes, con referencia a los resultados de noviembre del 2011, por tanto realizan una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:

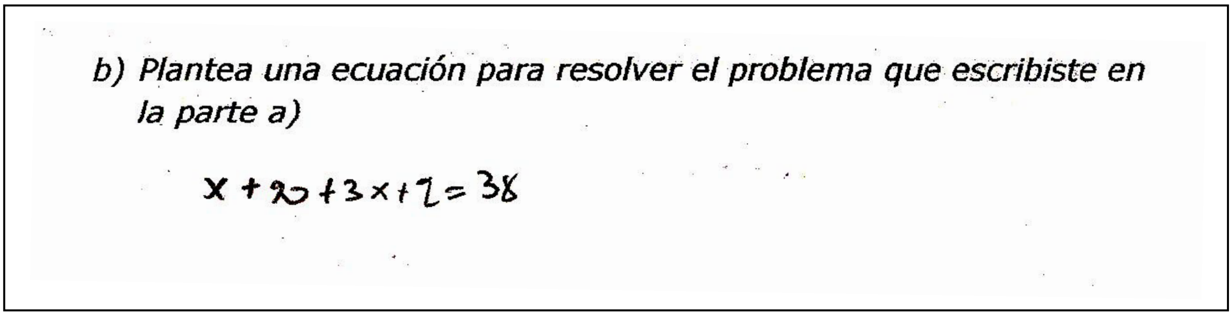
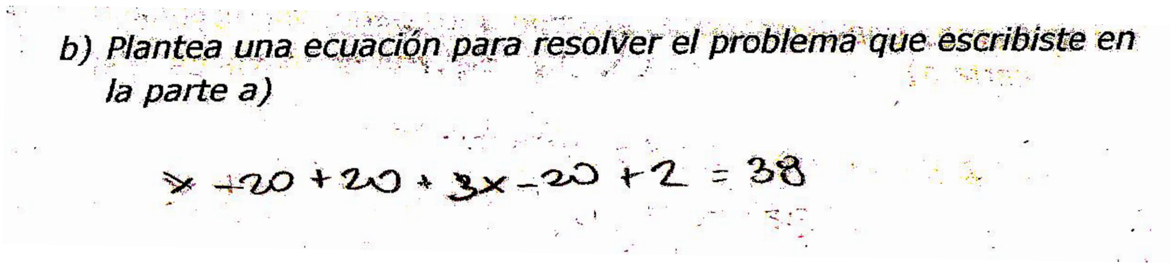


Figura 29. Respuesta de la estudiante

En la figura 29 se observa que la estudiante planteó la ecuación correctamente, realizando una apropiada conversión del registro verbal al algebraico.


b) Plantea una ecuación para resolver el problema que escribiste en la parte a)

$x + 20 + 20 + 3x - 20 + 2 = 38$

Figura 30. Respuesta de la estudiante

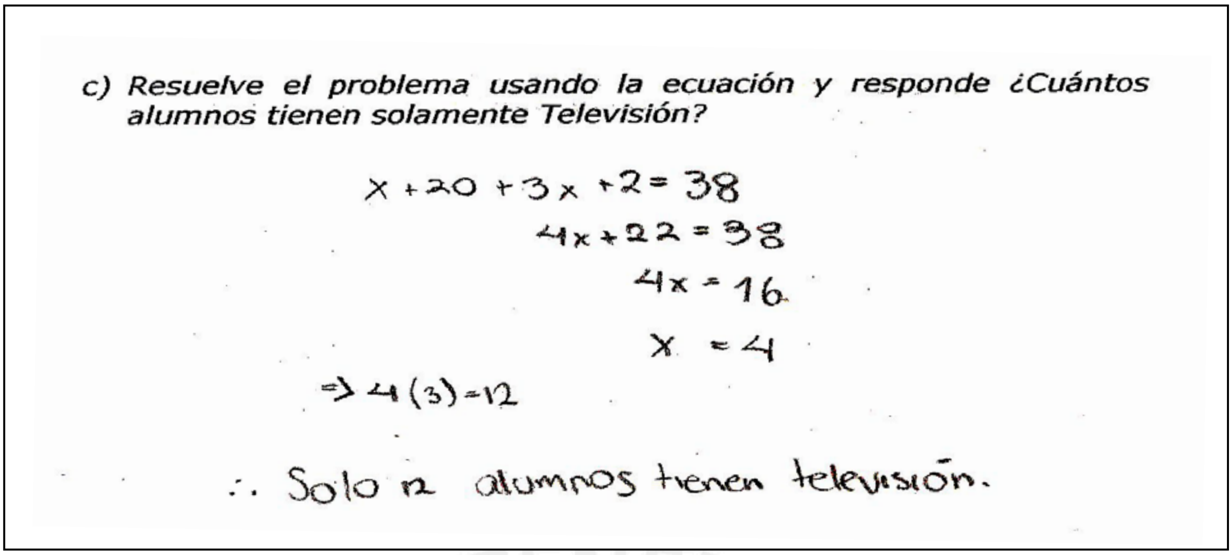
En la figura 30 se observa que la estudiante no planteó la ecuación correctamente, no comprendió la lectura del gráfico, es decir no realizó una adecuada conversión del registro verbal al algebraico.

Pregunta c:

En esta pregunta se les pidió que resuelvan la ecuación planteada y respondan a la pregunta del problema, el 45% de las estudiantes resolvió correctamente la ecuación y escribió la respuesta del problema. El 17 % de las estudiantes solo resolvió la ecuación y no respondió la pregunta del problema.

Se observa que en este ítem se incrementó en un 21% las respuestas correctas de las estudiantes, con referencia a los resultados de noviembre del 2011, por tanto realizan un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Consideramos analizar el desarrollo de este problema de dos estudiantes:



c) *Resuelve el problema usando la ecuación y responde ¿Cuántos alumnos tienen solamente Televisión?*

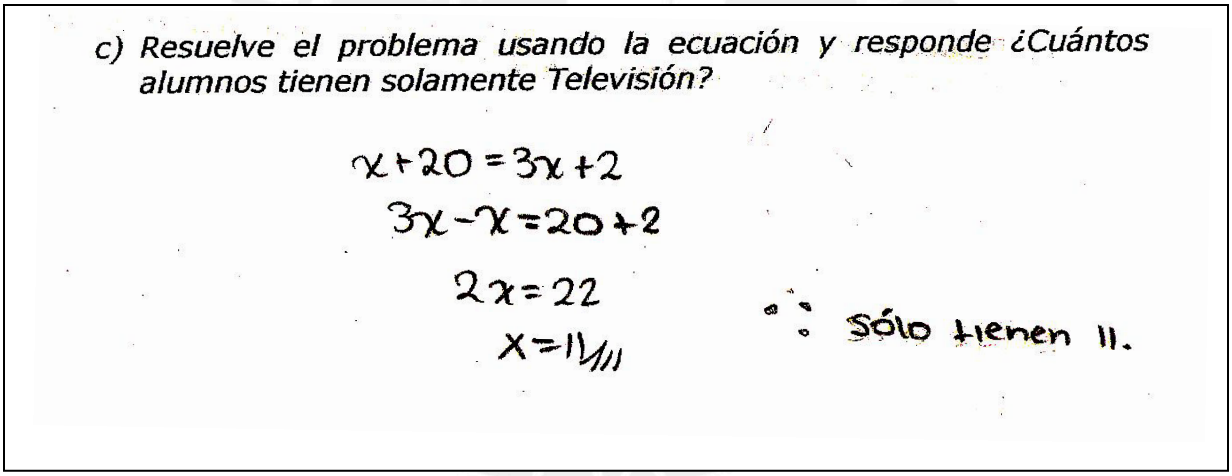
$$x + 20 + 3x + 2 = 38$$
$$4x + 22 = 38$$
$$4x = 16$$
$$x = 4$$

$\Rightarrow 4(3) = 12$

$\therefore$ Solo 12 alumnos tienen televisión.

Figura 31. Respuesta de la estudiante

En la figura 31 se observa que la estudiante resolvió correctamente la ecuación y responde a la pregunta, realizando un correcto tratamiento en el registro algebraico.



c) *Resuelve el problema usando la ecuación y responde ¿Cuántos alumnos tienen solamente Televisión?*

$$x + 20 = 3x + 2$$
$$3x - x = 20 + 2$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$

$\therefore$ Sólo tienen 11.

Figura 32. Respuesta de la estudiante

En la figura 32 se observa que la estudiante no resolvió correctamente la ecuación, es decir no realiza un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Finalmente podemos concluir, usando terminología de la Teoría de Registros, que a la mayoría de las estudiantes les es fácil convertir del registro verbal al numérico; a casi la mitad de las estudiantes les es fácil convertir del registro verbal al algebraico y realizar tratamientos algebraicos y a un poco más de la tercera parte de los estudiantes les es fácil convertir del registro algebraico al verbal.

5.4 ERRORES Y DIFICULTADES AL RESOLVER PROBLEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Luego de observar que las estudiantes tienen errores comunes, hemos clasificado estos errores en 6:

Error 1.**<u>Se hace uso inadecuado de la variable</u>:**

Las estudiantes no identifican la variable que debe usar para determinar cierta cantidad desconocida.

Error 2.**<u>No se logra usar el concepto de perímetro en términos de la variable x:</u>**

Las estudiantes desconocen el significado de perímetro de una figura geométrica como el rectángulo y no logran escribir una expresión para ello.

Error 3.**<u>No se pasa del cálculo aritmético al uso de una ecuación</u>:**

Las estudiantesno logran plantear una ecuación para resolver el problema, solo hacen cálculos aritméticos.

Error 4.**<u>La representación verbal no corresponde a la representación algebraica:</u>**

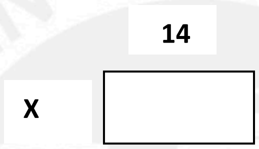
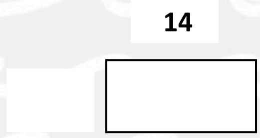
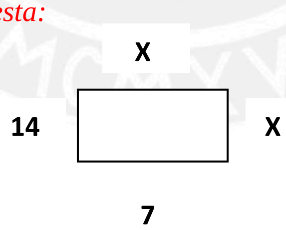
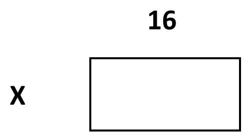
Las estudiantesno logran redactar un enunciado a partir de un esquema.

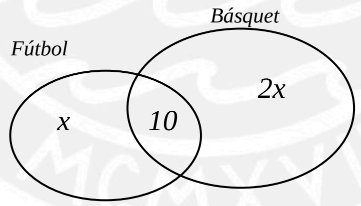
Error 5. **<u>La representación algebraica no corresponde a la representación verbal:</u>**

Las estudiantesno logran plantear una ecuación lineal a partir de la información mostrada en un esquema.

Error 6.**<u>Laecuación no se resuelve correctamente</u>:**

Las estudiantesno logran resolver una ecuación lineal correctamente.

Clase de Error	Ejemplo	Explicación
Error 1 **“Se hace uso inadecuado de la variable”**	Pregunta 1a: Las dimensiones oficiales de las canchas de vóley son 18m de largo y 9m de ancho. Todas las canchas de vóley deben cumplir la condición de ser rectangulares, con la longitud del largo el doble de la longitud del ancho. Si la arquitecta Camila diseña una cancha de vóley cuyo largo mida 14 m ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición dada? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes. *Respuesta:*  Pregunta 1c: Dibuja un rectángulo que represente una cancha de vóley que cumple con la condición exigida y usa la variable “x” para indicar sus dimensiones. *Respuesta:*  *Respuesta:*  *Respuesta:* 	No entiende la condición (*ser rectangulares, con la longitud del largo el doble de la longitud del ancho*)que se especificó en el enunciado del problema. No usa variable x para establecer la proporción entre los lados. No entiende la pregunta y coloca los datos de forma incorrecta. No relaciona la condición del problema y el uso de la variable.

Error 2 **“No se logra usar el concepto de perímetro en términos de la variable x”**	Pregunta 1d: Usa lo hecho en la parte 1c y escribe una ecuación que exprese que el perímetro de la cancha de vóley es 48 metros. *Respuesta:* $x+\frac{x}{2}+x=48$	No entiende que la suma de las longitudes de los lados del rectángulo era igual al perímetro.
Error 3 **“No se pasa del cálculo aritmético al uso de una ecuación”**	Pregunta 1d: Usa lo hecho en la parte 1c y escribe una ecuación que exprese que el perímetro de la cancha de vóley es 48 metros. *Respuesta:* $8+8+16+16=48$ *Respuesta:* $16+16+7+7=48$	No sabe plantear una ecuación.
Error 4 **“La representación verbal no corresponde a la representación algebraica”**	Pregunta 2a: Juan preguntó a 40 alumnos si practican básquet o fútbol. Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.  Observando el esquema, Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan *Respuesta:* ¿Cuántos practican solo futbol y solo básquet? *Respuesta:* Juan hizo una encuesta de los deportes favoritos.	No sabe redactar problemas de enunciado verbal. Solo plantea preguntas Enuncia información general sobre el grafico. No logra redactar un problema

	Respuesta: En la clase de educación física hay 40 alumnos. A 10 les gusta el fútbol y básquet, la cantidad de básquet es el doble de fútbol, ¿A cuántos les gusta el futbol? *Respuesta:* Pregunte a 40 alumnos, practican futbol y básquet 10 niños, practican futbol “x” y básquet “2x”. *Respuesta:* Si Juan entrevistó a 40 alumnos, a 10 les gusta futbol y básquet, ¿A cuántos les gusta futbol y a cuantos les gusta básquet?	Confunde “solo juegan básquet” con “juegan básquet” Usa las variables que aparecen en el gráfico sin relacionarlo de forma correcta. Escribe el problema sin utilizar el dato “x” y “2x”
Error 5 **“La representación algebraica no corresponde a la representación verbal”**	Pregunta 2b: Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste *Respuesta:* $x-10=2(x-40)$ *Respuesta:* $2x+10=40$ *Respuesta:* $x+2x+10+10=40$	Plantea la ecuación erróneamente. Plantea la ecuación sin considerar el dato solo futbol “x”. Plantea la ecuación duplicando el dato de 10 personas que practican básquet y futbol.
Error 6 **“La ecuación no se resuelve correctamente”**	Pregunta 2c: Resuelve el problema usando la ecuación. *Respuesta:* $x+10+2x$ $3x=10$ $x=30$ *Respuesta:* $x-10=2(x-40)$ $x-10=2x-80$ $2x+x=80+10$ $3x=90$ $x=30$	No hay tratamiento en lo algebraico, es decir no saben resolver ecuaciones lineales.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

6.1 CONCLUSIONES

El presente trabajo de investigación nos permite afirmar que hemos cumplido el objetivo general, en la medida que hemos cumplido los objetivos específicos, como detallamos a continuación:

1. El objetivo específico 1 se cumplió, pues las secuencias de problemas presentadas a las estudiantes en la prueba de diagnóstico, en la sesión de aprendizaje y en las sesiones de aplicación, motivaron a afrontar las cuestiones que se les plantearon, vinculadas con ecuaciones lineales, haciendo tratamientos en los registros algebraico, numérico y verbal, como muestran los análisis de resultados. (Un ejemplo lo tenemos en la pg. 87 figura 25)

2. Se observa que las estudiantes al resolver las ecuaciones lineales tienen dificultades al trasponer términos en la adición, sustracción, multiplicación y división y al sumar expresiones algebraicas racionales, lo que evidencia dificultades al realizar tratamientos dentro del registro algebraico. (Un ejemplo lo tenemos en la pg. 84 figura 20)

3. El objetivo específico 2 se cumplió, pues las secuencias de problemas presentadas a las estudiantes en la prueba de diagnóstico, en la sesión de aprendizaje y en las sesiones de aplicación, las motivaron a afrontar las cuestiones que se les plantearon, vinculadas con ecuaciones lineales, haciendo conversiones entre los registros algebraico, numérico y verbal, como muestran los análisis de resultados. (Un ejemplo lo tenemos en la pg. 83 figura 19)

4. Las estudiantes, en su mayoría, son capaces de realizar conversiones del registro verbal al algebraico, pero tienen dificultades para realizar conversiones del registro algebraico al verbal, lo cual confirma nuestra hipótesis. (Mostramos ejemplos de estas situaciones en la pg. 81 figura 15 ypg. 85 figura 22)

5. El objetivo específico 3 se cumplió, pues logramos clasificar e identificar los errores que con más frecuencia cometen los estudiantes al resolver problemas con ecuaciones lineales:
    - ✓ Se hace uso inadecuado de la variable.
    - ✓ No se logra usar el concepto de perímetro en términos de la variable "x".
    - ✓ No se pasa del cálculo aritmético al uso de una ecuación.
    - ✓ La representación verbal no corresponde a la representación algebraica.
    - ✓ La representación algebraica no corresponde a la representación verbal.
    - ✓ La ecuación no se resuelve correctamente.

Así, podemos concluir que al resolver problemas con ecuaciones lineales, los estudiantes muestran dificultades, de menos a más, en las siguientes transformaciones: tratamientos en el registro algebraico, pues en general resuelven satisfactoriamente ecuaciones lineales; conversiones del registro verbal al algebraico, pues llegan a plantear ecuaciones correspondientes a problemas sencillos enunciados verbalmente; conversiones del registro algebraico al verbal, pues fue una minoría la que logró construir un enunciado verbal correspondiente a una información cuantitativa y con una incógnita, dada en un diagrama de Venn.

6.2 SUGERENCIAS

1. Realizar investigaciones futuras sobre la resolución de problemas relacionados con ecuaciones lineales, teniendo como marco la teoría de registros de representación semiótica de Duval pero poniendo énfasis en la conversión del registro algebraico al verbal. Podría diseñarse una secuencia didáctica que estimule eficientemente la realización de estas conversiones.
2. Diseñar investigaciones futuras que relacionen la conversión de los registros algebraicos al verbal, con la creación de problemas.
3. Diseñar investigaciones integradas con el área de comunicación integral que permitan identificar los tratamientos en el registroverbal.
4. En las investigaciones que se hagan, complementar el análisis de los resultados de las pruebas escritas, con entrevistas personales que permitan conocer mejor las razones de los errores y aciertos de los estudiantes.

REFERENCIAS

Abrate, R (2006) *Errores y dificultades en matemática.* Recuperado de http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

Arias, M. (2007). *La resolución de problemas: enfoque y métodos para mejorar la educación matemática escolar*. Revista de Aprender Matemáticas. 5-9.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1998). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá, Colombia: Editorial Thomson

Bello, I. (2006). *Algebra*. México D.F. México:Editorial Thomson

Caballero, M. (2010). *Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal. Un estudio con profesores de bachillerato*. (Tesis de licenciatura) .Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Cardoso, R. (2008). *Una propuesta para evaluar la resolución de problemas matemáticos de enunciado verbal en el sexto grado de primaria.*(Tesis de maestría). Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú

Careaga, R. (1992). *El desarrollo del pensamiento a través de la solución de problemas matemáticos.* Revista de Problemas de Aprendizaje. Colegio Palestra 38-45. Lima, Perú.

Chiroque, J. (2010). *Registro de representación semiótica del concepto de función real en estudiantes de humanidades.*(Tesis de maestría). Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú

Corbalán, F. (2002). *Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Depaz, R., Fernández, M. (2011). *Resolución de problemas matemáticos de sustracción en alumnos de 3er grado de primaria de un colegio privado y de un colegio estatal en lima.*(Tesis de maestría). Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú,

De Faria, E. (2006). *Ingeniería didáctica.* Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Recuperado de cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/12/17

De la Cruz, M. (2010). *Talentum*. Lima Perú: Editorial Bruño

Dias, S. (2010). Aprendizagem em Matemática. Sao Paulo, Brasil: Papirus Editora

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME. Recuperado de http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

Duval, R. (2012). *Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica*. Lima, Perú: VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas.Pontificia Universidad Católica del Perú,

D'Amore, B. (2006). Didáctica de la Matemática. Bogotá, Colombia: Cooperativa EditorialMagisterio.

Echenique, I. (2006) *Matemáticas resolución de problemas*. Recuperado de http://dpto.educacion.navarra.es/publicaciones/pdf/matematicas.pdf

Font.V.(2003) *Matemáticas y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática.* Recuperado de *http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/vfont.pdf*

García, J. (2011) *Propuesta metodológica para el tratamiento a la resolución de problemas geométricos de cálculo y demostración.* Recuperado de *http://www.eumed.net/rev/ced/29/jegr.htm*

Godino, J. (2004) *Matemáticas para Maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Guzmán, R. (2006). *Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal.* (Tesis de licenciatura). Chilpancingo Guerrero, México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Gustafson, D. (1997). *Algebra Intermedia*. México D.F. México: Editorial Thomson.

Hernandez, J. (1996). *Sobre habilidades en la resoluciónde problemas aritméticos verbales,mediante el uso de dos sistemasde representación yuxtapuestos*. Recuperado de ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp19.pdf

Leithold, L. (1985). *Algebra Superior*. México D.F. México: Editorial Continental

Leithold, L. (1998). *Matemáticas previas al cálculo*. México D.F. México: Editorial Oxford

Luceño, J. (1999). *Resolución de problemas aritméticos en el aula*. Málaga. España: Ediciones Aljibe.

Maffey, S. (2006). *Estudio sobre la meta cognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales*. (Tesis de licenciatura).. México D.F., México: Instituto Politécnico Nacional.

Malaspina, U. (2011). *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica*. Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG -Editorial Académica Española.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición*. Barcelona, España: Ediciones Paidos.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009) *Guiding Principles for Mathematics Curriculum and Assessment* . Recuperado dehttp://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=23273

OCDE. PISA. (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte*. Madrid, España: INCE.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima, Perú.

Podalll, M., Comellas, M. (1996).*Estrategias de aprendizaje, su aplicación en las áreas verbal y matemática*. Barcelona, España: Editorial Laertes

Pólya, G. (1992).*Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F. México: Editorial Trillas

Pozas, D., Guevara, M. (2009). *La construcción del lenguaje algebraico desde la resolución de problemas*. Revista Novedades Educativas.60-63. Lima, Perú.

Puig, L., Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Editorial Síntesis

Queysanne, M. (1971). *Algebra Básica*. Barcelona, España: Editorial Vicens –Vives

Ramírez, M. (2007) Estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. (Tesis Doctoral). Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Reverand, E. (2004) Construyendo la aritmética formal a partir de la informal de un estudio de caso.Recuperado de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S0798-97922004000100002&script=sci_arttext

Santos, M. (2001) *Planteamiento de problema y problematización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Recuperado de http://www.dvv-international.de/index.php?article_id=453&clang=3

Santos, L. (1995)*La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.* Recuperado de http://www.mat.uson.mx/depto/diplomado/secundaria/lecturas.pdf

Stewart, I. (2008).*Historia de las matemáticas.*Barcelona, España: Editorial Crítica

Vilanova, S. (s.f) *El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje.* Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/203vilanova.pdf

APÉNDICE

PRUEBA DIAGNOSTICO

Nombre: ____

Colegio: ____

Grado: _________ Nivel: Secundaria Fecha: _________________

Lee detenidamente cada una de las siguientes situaciones y responde.

1. En el juego del SUBE Y BAJA (balancín) participan 4 amigos: Ana, Lucía, Martín y Gustavo. En un extremo están Ana y Martín y en el otro extremo Gustavo y Lucía.

Ana dice "Yo peso 35kg"
Martín dice "Yo peso 39kg"
Gustavo dice "Yo peso 40kg"
Lucia dice "Yo no me acuerdo de mi peso"

a) Si se sabe que el balancín está en equilibrio.

- *Representa gráficamente la situación.*

- *Gustavo dice que el peso de Lucía se puede saber resolviendo una ecuación. ¿Gustavo tiene razón? En caso afirmativo muestra y resuelve tal ecuación.*

b) *Si los dos chicos están en un extremo y las dos chicas en el otro. ¿Puedes decir que están equilibrio? ¿Por qué?*

- *En caso que no estuvieran en equilibrio y quisieran usar una mochila. ¿Cuánto debería pesar la mochila para equilibrar el sube y baja? ¿En qué extremo deberá colocarse?*

c) *En un tercer momento Ana y Lucía se retiran y llegan a jugar 2 hermanos gemelos, que tienen igual peso. Si Gustavo y Martín se ubican en un extremo del Sube y Baja y los hermanos gemelos en el otro, quedan en equilibrio. Martín dice que puede saber cuánto pesa cada gemelo resolviendo una ecuación. ¿Martín tiene razón? En caso afirmativo, muestra y resuelve tal ecuación.*

d) *Inventa un problema parecido a los anteriores, que se resuelva usando una ecuación.*

2. El profesor Pedro pide a sus alumnos que recorten una cartulina para obtener un rectángulo cuya base sea mayor que su altura en 4cm.

a) Dibuja uno de los rectángulos y usa la variable "x" para indicar sus dimensiones.

b) Juan ha recortado un rectángulo cuya base mide 26 cm y cuya altura mide 21 cm. ¿Éste cumple la condición establecida por el profesor Pedro? ¿Por qué?

c) Si María quiere obtener un rectángulo cuya base mida 19cm. ¿Cuánto debe medir su altura según las condiciones que dio el profesor Pedro? Representa el rectángulo de María.

d) *Calcula el perímetro que tendrá el rectángulo de María.*

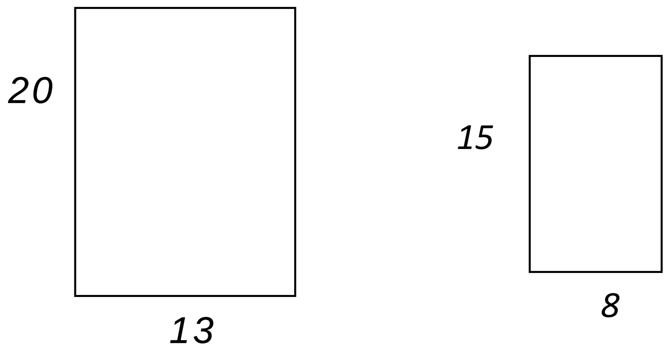
e) *El profesor Pedro dice que además de que la base sea mayor que su altura en 4cm, los rectángulos deben tener 40 cm de perímetro y se desea conocer las dimensiones de tales rectángulos.*

- *¿Se puede saber cuánto deben medir la altura y la base? ¿Cuáles serían esas dimensiones?*

- *Usa la variable x en una representación del rectángulo y plantea una ecuación correspondiente a esta situación.*

- *Resuelve la ecuación que planteaste y dibuja el rectángulo con sus dimensiones correspondientes.*

f) En otro salón la profesora Miriam pidió también a sus alumnos que recorten rectángulos y a continuación se representan dos rectángulos. ¿Qué condición pidió la profesora para la base y la altura de los rectángulos?



g) Inventa un problema parecido al propuesto en (e)

3. Lee detenidamente cada una de las siguientes situaciones y responde.

La profesora Luz enseña a sus alumnas el tema de Proporcionalidad y les comenta a sus alumnas que esta foto de sus mascotas tienen ciertas dimensiones mide 3cm x 3.5 cm.

3 cm

3.5 cm

a) *La maestra quiere nacer un cuadro de la foto ampliada de sus perritos. Si la altura debe ser de 60cm. Plantea y resuelve una ecuación para encontrar la longitud de la base.*

b) *La profesora Luz decide participar en un concurso de gigantografrías. Las reglas del concurso exigen que las dimensiones sean tales que la suma de la longitud de la base más la longitud de la altura sea 780 cm. Halla las dimensiones de la gigantografría que presenta Luz, si mantiene las proporciones de su foto original.*

EXPRESIONES VERBALES Y/O ALGEBRAICAS

Nombre: ____

Colegio: ____

Grado: _________ Nivel: Secundaria Fecha: _____________

En el siguiente cuadro escribimos expresiones algebraicas correspondientes a cadaexpresión verbal:

Expresiones verbales	Expresiones algebraicas
El triple de la cantidad de juguetes de Ximena	
La edad de Luz dentro de 5 años	
El doble de la diferencia de un número y 6	
Los dos tercios de la cantidad de dinero de Freddy	
El cuadrado de un número, disminuido en 2	

En el siguiente cuadro escribimos expresiones verbales que corresponden a cada expresión algebraica:

Expresiones simbólicas	Expresiones verbales
$4n$	
$p-11$	
$2(g+5)$	
$x-\frac{4}{5}x$	
$\frac{y}{6}$	

PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES

Nombre: ____

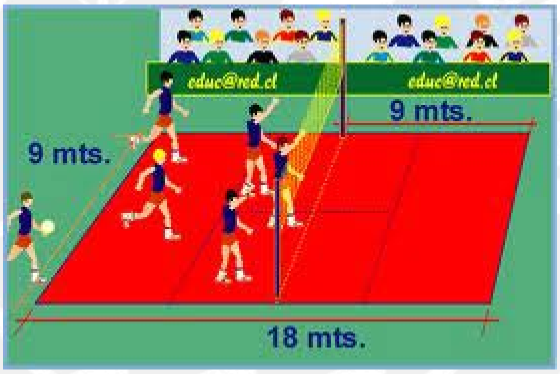
Colegio: ____

Grado: _________ Nivel: Secundaria Fecha: _____________

Lee detenidamente cada una de las siguientes situaciones y responde.

1. Las dimensiones oficiales de las canchas de vóley son 18m de largo y 9m de ancho.

Todas las canchas de vóley deben cumplir la condición de ser rectangulares, con la longitud del largo el doble de la longitud del ancho.



a) Si la arquitecta Camila diseña una cancha de vóley cuyo largo mida 14 m ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición dada? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes.

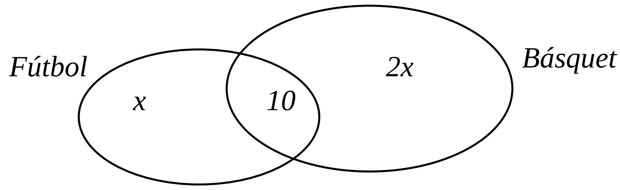
b) Calcula el perímetro de la cancha de vóley que diseña la arquitecta Camila.

c) Dibuja un rectángulo que represente una cancha de vóley que cumple con la condición exigida y usa la variable "x" para indicar sus dimensiones.

d) Usa lo hecho en la parte © y escribe una ecuación que exprese que el perímetro de la cancha de vóley es 48 metros.

e) Resuelve la ecuación planteada en (d) y dibuja el rectángulo que representa la cancha de vóley, con las dimensiones halladas.

2. ***Juan preguntó a 40 alumnos si practican básquet o fútbol. Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.***



Observando el gráfico,

a) *Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.*

b) *Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste.*

c) *Resuelve el problema usando la ecuación.*

EXPRESIONES VERBALES Y/O ALGEBRAICAS

(SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº1)

En el siguiente cuadro escribimos expresiones algebraicas correspondientes a cadaexpresión verbal:

Expresiones verbales	Expresiones algebraicas
El doble de la cantidad de dinero que tiene Juan	
Un numero aumentado en 10	
La edad de María hace 3 años	
Tres veces un número, disminuido en 5	
El cuádruple de la suma de un número y siete	
La suma de dos números enteros consecutivos	
Los tres cuartos de la cantidad de cuadernos de Sofía	
El cuadrado de un número, aumentado en 8	
La tercera parte de la suma de dos números	
El producto de dos números	

En el siguiente cuadro escribimos expresiones verbales que corresponden a cada expresión algebraica:

Expresiones algebraicas	Expresiones verbales
$5a$	
$b-9$	
$2m+6$	
$3(p-7)$	
n^2-1	
$x+\frac{3}{4}x$	
$4(z-10)$	
$8y+11$	
x^3	
$\frac{c}{d}$	

PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES

(SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº1)

1. ***Silvia quiere comprar una mesa rectangular cuyo ancho tenga una longitud que sea la tercera parte de la longitud de su largo.***
   a) *Si el carpintero le ofrece una mesa de 210cm de largo ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición de Silvia? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes.*
   b) *Calcula el perímetro de la mesa que escoge Silvia que tiene 210cm de largo.*
   c) *Dibuja un rectángulo que represente la mesa de Silvia que cumpla con la condición exigida y usa la variable "x" para indicar sus dimensiones.*
   d) *Otro carpintero le ofrece una mesa que cumple la condición que exige Silvia y que la suma del largo y del ancho es 320cm. Halla las medidas de tal mesa.*

2. ***En el aula de 1er año hay 37 alumnas, de las cuales a 15 les gustan los helados de vainilla y chocolate. Si las que les gusta solo el helado de chocolate son dos alumnas más de las que les gusta solo el helado de vainilla. ¿A cuántas les gusta solo el helado de vainilla y a cuántas solo el helado de chocolate?***

PROBLEMA CON ECUACIONES LINEALES

Nombre: ____

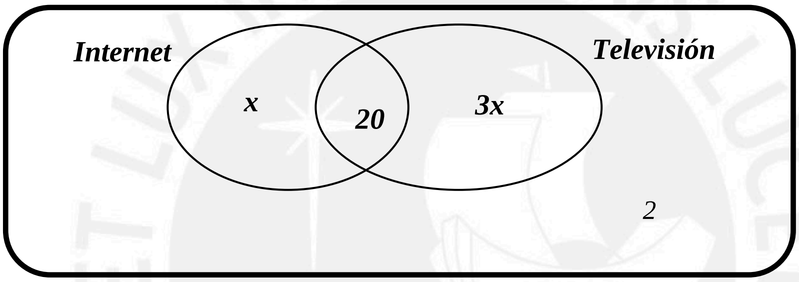
Colegio: ____

Grado: _________ Nivel: Secundaria Fecha:_____________

Lee detenidamente cada una de las siguientes situaciones y haz lo que se pide.

1. ***En otro salón hay 38 alumnos y se les preguntó si en su casa tienen Internet o Televisión.***

Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.



Observando el gráfico,

a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

b) Plantea una ecuación para resolver el problema que escribiste en la parte a)

c) Resuelve el problema usando la ecuación y responde ¿Cuántos alumnos tienen solamente Televisión?

PROBLEMAS CON ECUACIONES LINEALES

(SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº2)

1. *En un rectángulo el largo mide 6 metros más que el ancho y el perímetro es 28 m. ¿Cuáles son sus dimensiones?*

2. *María resolvió un problema planteando la siguiente ecuación*

$$x + 3x + x + 3x = 24$$

Escribe un problema que tú piensas que resolvió María.

3. *En un restaurante hay 30 personas, 20 piden arroz con pollo; 10 tallarines rojos y 8 ningún plato. ¿Cuántas personas comen ambos platos?*