PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

TITULO DE LA TESIS

"*Modelos Matemáticos para el Precio del Suelo Urbano*"

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

con Mención en Aplicaciones a la Economía

AUTOR

Juancarlos Rafael Landaure Olavarría

ASESOR

Alejandro Lugon Cerutti

JURADO

Loretta Gasco

Luis Valdivieso

LIMA – PERÚ 2013

Resumen Ejecutivo

La presente tesis revisa la literatura que se ha desarrollado sobre modelos matemáticos para la determinación de los precios del suelo urbano. La tesis se centra de forma específica en tres artículos del *Journal of Urban Economics* que desarrolló Denis Capozza, en los que se analizan, tres modelos: el modelo determinista, el modelo estocástico y el modelo de valoración de opciones.

El primer capítulo, tiene carácter introductorio y panorámico. Hace una revisión general de los primeros modelos, luego se presenta de manera sucinta los tres modelos que son la materia fundamental de la tesis, y culmina con las tendencias y nuevos enfoques de investigación que existen para modelar los precios de la tierra y las ciudades en general.

El segundo capítulo, presenta el modelo determinista, basado en el artículo *The Fundamentals of Land Prices and Urban Growth*. Se parte de algunas asunciones para construir un modelo dinámico sencillo de ciudad circular que determina los precios urbanos y agrícolas en función del tiempo y de la distancia al centro urbano. Nos enfocaremos en la primera parte del artículo, de donde se extrae la principal conclusión, que el precio del suelo urbano tiene cuatro componentes: el valor de la renta agrícola, el costo de conversión, el valor de accesibilidad, y la prima de crecimiento. Se hace una aplicación para el caso en que la población crece geométricamente. Se cierra el capítulo haciendo, como aporte propio, un ajuste: se desarrolla el mismo modelo determinista pero considerando crecimiento geométrico de las rentas.

El tercer capítulo, presenta el modelo estocástico, basado en el artículo *The Stochastic City*. Tiene las mismas asunciones del modelo determinista excepto que se asume que el crecimiento de los ingresos y de las rentas sigue un movimiento browniano lineal. Se destaca que la conversión de la tierra de rural a urbana es irreversible y el tiempo óptimo de conversión es una variable aleatoria (un tiempo de parada). La conclusión principal es que el precio urbano tiene cinco componentes: los cuatro primeros idénticos al del caso determinista más un quinto componente llamado prima de irreversibilidad que es el que contiene la incertidumbre. Además, se prueba que la incertidumbre retrasa la conversión de la tierra agrícola a urbana y reduce el tamaño de equilibrio de la ciudad. Al final, como aporte propio, se hace un ajuste: se desarrolla el mismo modelo estocástico pero con crecimiento geométrico de las rentas.

El cuarto capítulo, presenta el modelo de valoración de opciones, basado en el artículo *Optimal Land Development Decisions*. Se asume que las rentas crecen estocásticamente siguiendo un movimiento browniano geométrico. El artículo tiene, a diferencia de los dos anteriores, un enfoque desde la oferta, y la mayor parte se dedica a analizar la rentabilidad de la empresa comparando el método ortodoxo, basado en

el valor actual neto y la tasa interna de retorno, con el método de valoración de opciones que proporciona resultados más refinados. Ya que el objetivo de esta tesis apunta al estudio del precio del suelo urbano más desde un punto de vista del conjunto de toda la ciudad, el estudio se enfocará más en estimar el valor de la opción que se ejerce cuando el propietario de un terreno decide construir sobre él. Posteriormente, como aporte propio, se hace un ajuste para estimar el valor de la opción de conversión de la tierra agrícola a urbana, concluyéndose que el valor de dicha opción es igual a suma de las primas de crecimiento e irreversibilidad estimadas en los modelos anteriores.

El quinto capítulo, presenta un análisis comparativo de los tres modelos. Para lograr una comparación consistente, previamente se tuvieron que hacer en cada modelo los ajustes que se han explicado en los párrafos anteriores. La gran conclusión de este trabajo es que el modelo estocástico es una extensión del modelo determinista cuando no existe incertidumbre, y el modelo de valoración de opciones proporciona los mismos resultados para el valor de la prima de la tierra agrícola. Además, el modelo de opciones, al incorporar variables de la oferta, permitiría un enfoque más completo del equilibrio del mercado inmobiliario en la ciudad. En los apéndices se presenta un ejemplo aplicativo por cada modelo.

Palabras clave

Economía urbana, modelo monocéntrico, renta, precio, tierra urbana (suelo urbano), tierra agrícola (suelo rural), prima de crecimiento, prima de irreversibilidad, conversión, desarrollo, curva bid-rent, opción real, movimiento browniano

Reconocimientos

Esta investigación ha sido posible gracias a los consejos y recomendaciones de mi asesor en la Maestría en Matemáticas Aplicadas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Alejandro Lugón. También han sido valiosos los consejos y aportes de los profesores Loretta Gasco y Luis Valdivieso, quienes revisaron especialmente los capítulos referidos a los modelos estocástico y de valoración de opciones respectivamente.

Abreviaturas

$R(t, z)$: renta de la tierra en función del tiempo t y de la distancia z.

$P^u(t, z)$: precio del suelo urbano en función del tiempo t y de la distancia z.

$P^a(t, z)$: precio del suelo agrícola (o rural) en función del tiempo t y de la distancia z.

RI: renta de irreversibilidad.

PC: prima de crecimiento.

PI: prima de irreversibilidad.

CBD: Distrito Central de Negocios (Central Business District)

VAN: Valor actual neto

TIR: Tasa interna de retorno

Motivación y Antecedentes

Se ha dicho que la ciudad es la estructura más compleja que ha creado el hombre. Su comprensión implica el estudio de una gran cantidad y diversidad de variables y requiere tanto el análisis cualitativo como el cuantitativo. Esta tesis apunta al segundo tipo de análisis y especificamente a uno de los temas urbanos sobre el que se ha hecho mayor investigación por su importancia en el desarrollo de las ciudades: la determinación de los precios del suelo urbano. Los primeros trabajos de la construcción de un modelo matemático para la ciudad tienen sus raíces en el siglo XIX en un mundo predominantemente rural, usando enfoques desde la economía y la geografía. El estudio de la estructura espacial urbana, usando herramientas cuantitativas, tiene un gran impulso en la década de los 60's del siglo XX. En las últimas décadas se introdujeron métodos estadísticos. En el nuevo siglo se han incorporado nuevos enfoques: sistemas dinámicos, caos y fractales, autómata celular, redes neuronales, valoración de opciones, etc.

Objetivo

El objetivo de la tesis es revisar la literatura sobre los modelos matemáticos para la determinación del precio del suelo urbano en la ciudad. A efectos de reducir el amplio espectro de investigación que se ha realizado sobre el tema, la tesis se enfocará en los trabajos de Dennis Capozza, que es uno de los autores que más ha analizado el tema desde muchos enfoques distintos. Nos vamos a referir específicamente a tres enfoques para la determinación del precio del suelo urbano: modelo determinista, modelo estocástico y modelo de valoración de opciones. Finalmente, se hará un análisis comparativo entre dichos enfoques para culminar con la aplicación de un caso concreto.

Asimismo, de manera panorámica, se revisarán los resultados de los trabajos seminales y de los más contemporáneos que van más allá de cada uno de los enfoques y de los objetivos de esta tesis.

Contents

References

List of Tables

List of Figures

1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta una revisión panorámica de los primeros modelos de economía urbana que se desarrollaron, de los modelos de valoración de la tierra urbana que serán materia principal de la tesis, y de las tendencias y nuevos enfoques que se están desarrollando para la determinación del precio del suelo urbano y la construcción de modelos de ciudad.

1.1 Primeros Modelos

1.1.1 Teoría de la renta: David Ricardo

El primer trabajo seminal que marcó un hito en la historia de la economía en general y de la economía urbana en particular, fue la obra *On the Principles of Political Economy and Taxation*, publicado en 1817 por el gran economista inglés clásico David Ricardo (1772 - 1823). En el capítulo 2 de su libro, dedicado a la renta, Ricardo define la renta como la porción del producto de la tierra que se paga al terrateniente por el uso de las fuerzas originarias e indestructibles del suelo[18]. Ricardo argumenta que dicha renta es confundida con el interés y el beneficio de capital y el concepto es aplicado a cualquier cosa que pague anualmente el granjero al terrateniente.

En la época de Ricardo la gran mayoría del mundo era predominantemente rural; de hecho Londres era la ciudad más grande del mundo en la época victoriana y la población urbana representaba el 3% de la población mundial. Por ello, el interés de los economistas del siglo XIX estaba centrado en la tierra agrícola antes que en el tierra urbana. Ricardo cuestiona los argumentos de Adam Smith acerca de la renta, quien la concibe más como una compensación que tiene relación con los beneficios de lo que se extrae de la tierra y sin ninguna conexión con sus fuerzas originales e indestructibles.

La formulación de la ley de la renta hecha por Ricardo fue la primera exposición clara de la fuente y la magnitud de la renta, y es uno de los principios más importantes de la economía. La Ley de la Renta establece que la renta o alquiler de un determinado lugar es igual a la ventaja económica obtenida por el uso del lugar en su uso más productivo, en relación a la ventaja obtenida mediante el uso marginal (es decir, la mejor renta libre) de la tierra para la misma finalidad, teniendo en cuenta las mismas entradas de capital y el trabajo. La Renta Ricardiana es en realidad una renta diferencial.

1.1.2 Modelo de von Thünen y los modelos alemanes de geografía económica

Durante el siglo XIX y principios del siglo XX, economistas y geográfos alemanes contribuyeron al desarrollo de la economía urbana. El autor pionero fue Johann Heinrich von Thünen (1783 - 1850) quien desarrolló un modelo espacial de uso de la tierra[9]. En su obra *Der Isolierte Staat* (el Estado Aislado) publicada en 1826, desarrolló el primer tratado de economía espacial que incorpora la teoría de la renta. Von Thünen desarrolla un modelo matemático, el que puede resumirse en la ecuación (1.1):

$$R = Y(p - c) - YFd \tag{1.1}$$

donde,

R: renta de la tierra por unidad de área cultivada

Y: volumen de producción por unidad de área cultivada

p: precio de mercado por unidad de producto

c: costo de producción por unidad de producto

F: flete o costo de transporte por unidad de producto y por distancia

d: distancia al mercado

Von Thünen modeló un estado aislado abastecido por granjeros en los alrededores del campo. Supuso que los cultivos difieren tanto en su volumen por área de producción como en sus costos de transporte y cada cultivo es producido en diferentes intensidades. Las asunciones son: la ciudad está ubicada centralmente en un estado aislado, autosostenible y libre de influencias externas; la tierra es completamente plana; los agricultores transportan sus propios bienes al mercado desde sus parcelas hasta el centro de la ciudad; los agricultores son agentes racionales que actúan para maximizar sus beneficios.

La figura (1.1) muestra el modelo de von Thünen. Se muestra la *curva bid-rent*, es decir la renta que los agricultores están dispuestos a pagar en cada ubicación dada (medida por la distancia al centro de la ciudad), para tres cultivos. El gradiente de renta queda definido por la línea gruesa quebrada y convexa de la figura. A lo largo de cada uno de estos tres segmentos de línea, los productores de uno de los cultivos están dispuestos a pagar más por la tierra que los otros. En consecuencia, se formarán anillos concéntricos de cultivos alrededor de la ciudad. Las actividades más productivas o las actividades con los más altos costos de transporte se ubicarán cerca del mercado que está cerca del centro de la ciudad. Otra conclusión importante es que son los usos de la tierra los que determinan sus valores y no al revés.

1.1.3 Modelo de William Alonso

En 1964, el arquitecto argentino nacionalizado norteamericano, William Alonso (1933 - 1999), publicó

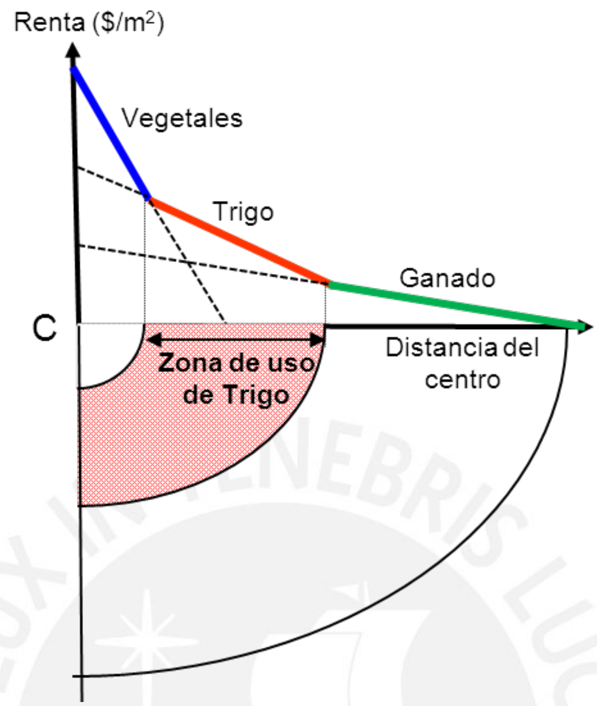

Figure 1.1: Modelo de von Thünen (Fuente: [9])

Location and land use: toward a general theory of land rent[2]. Se trata de un trabajo seminal que marca otro hito importante en la economía urbana y la geografía económica. Alonso, toma como punto de partida de su investigación el modelo de von Thünen, llevándolo del ámbito agrícola al ámbito urbano. El modelo de Alonso proporciona el uso de la tierra, la renta, intensidad del uso de la tierra, población y empleo como función de la distancia al Centro de Negocios Distrital (CBD por sus siglas en inglés) de la ciudad como una solución al problema de equilibrio económico en el mercado espacial.

La teoría de la oferta de la renta (*bid rent theory*) expuesta por Alonso es una teoría geográfica económica que estudia la variación del precio y la demanda de bienes inmuebles conforme cambia la distancia desde el Distrito Central de Negocios. Diferentes usuarios de la tierra competirán entre sí por la tierra cerca del centro de la ciudad. Esto se basa en la idea de que los establecimientos desean maximizar su rentabilidad, por lo que están mucho más dispuestos a pagar más dinero por la tierra cerca del centro y menos por las tierras más alejadas de esta zona. Esta teoría se basa en el razonamiento de que cuanto más accesible sea un área (es decir, cuanto mayor es la concentración de clientes), será más rentable.

Alonso define la curva "Oferta-Precio" (*Bid-Price Curve*) como un conjunto de combinaciones de precios de la tierra y las distancias entre los cuales el individuo es indiferente. Muestra que la renta de la tierra que el hogar puede pagar a cada distancia con el fin de alcanzar un nivel de utilidad determinado

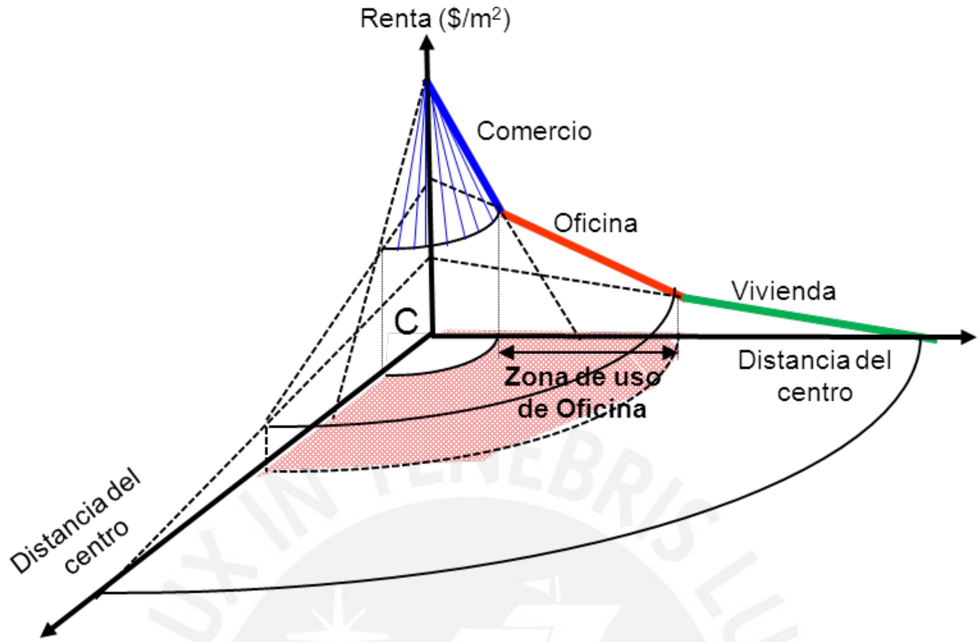

Figure 1.2: Curva Bid Rent de Alonso (Fuente: [2])

(por lo que hay una curva de precio de la oferta para cada nivel de utilidad). La función *Bid-Price* de la empresa urbana se puede definir como aquella que describe los precios que la empresa está dispuesta a pagar en lugares diferentes (distancias desde el centro de la ciudad) con el fin de lograr un cierto nivel de beneficios. La figura (1.2) muestra la curva bid-rent de Alonso en un gráfico 3D.

1.2 Tipos de modelos abordados en la tesis

En la presente tesis se ha considerado clasificar los modelos en tres grupos: modelos deterministas, modelos estocásticos y modelos de valoración de opciones. Para el desarrollo de la investigación se han seleccionado tres artículos, uno por cada modelo y todos ellos pertenecientes al mismo autor, Dennis Capozza.

1.2.1 Modelo determinista [5]

El modelo determinista analizado en esta tesis se trata de un modelo dinámico sencillo de ciudad, con ausencia de incertidumbre, en el que se determinan los precios urbanos y agrícolas en función del tiempo y de la distancia al centro urbano, incluyendo variables exógenas como la tasa de crecimiento poblacional, la tasa de interés, el tamaño inicial de la ciudad, la renta agrícola, el costo de conversión de la tierra de rural a urbana, entre otras. Este modelo es el más sencillo y es la base para desarrollar los otros modelos. Las asunciones son: la ciudad es circular, el uso del suelo es sólo para vivienda, excepto el centro que alberga los establecimientos de empleo, el tamaño del lote y el costo de transporte por distancia recorrida son constantes, todos los hogares son idénticos y sus restricciones presupuestarias, que son las mismas, están limitadas por el consumo en tierra, por el transporte para conmutar de cada vivienda al trabajo, y por el bien numerario que es la canasta del resto de los bienes de la economía que necesita el hogar. El resultado fundamental del modelo, en el que se enfocará la presente tesis, es el hecho que el precio del suelo urbano tiene cuatro componentes: el valor de la renta agrícola, el costo de conversión (de agrícola a urbana), el valor de accesibilidad (depende de la distancia al centro urbano), y el valor de los incrementos de renta futuros esperados (prima de crecimiento). Como caso aplicativo se presenta el caso de ciudad con crecimiento poblacional geométrico.

1.2.2 Modelo estocástico [6]

El modelo estocástico, tiene las mismas asunciones del modelo determinista excepto que aquí sí se tiene incertidumbre en el crecimiento de los ingresos y de las rentas que se asume que es lineal siguiendo un movimiento browniano y por consiguiente el crecimiento de la ciudad tendrá el mismo patrón. Una asunción clave es que la conversión de la tierra de rural a urbana es irreversible y el tiempo óptimo de conversión es una variable aleatoria (un tiempo de parada). Las consecuencias del modelo son: primero, el precio urbano tiene cinco componentes: los cuatro primeros idénticos al del caso determinista más un quinto componente llamado prima de irreversibilidad que es el que contiene la incertidumbre; segundo, la incertidumbre retrasa la conversión de la tierra agrícola a urbana; tercero, la incertidumbre y la irreversibilidad imparten un valor de opción compra a la tierra agrícola; y cuarto, la incertidumbre reduce el tamaño de equilibrio de la ciudad.

1.2.3 Modelo de valoración de opciones [7]

El modelo de valoración de opciones tiene un enfoque de valoración del suelo distinto a los otros dos métodos. Mientras los modelos determinista y estocástico tienen un enfoque desde la demanda y parten del supuesto que el valor o precio de la tierra es equivalente al valor actual neto de los flujos de renta que el terreno genera a lo largo de su vida útil, el modelo de valoración de opciones tiene un enfoque desde la oferta y propone que el valor o precio de la tierra tiene un valor de opción que el constructor puede ejercer cuando construye ya que el proceso es irreversible. El modelo asume que las rentas crecen de forma geométrica y con incertidumbre. Se analiza el detalle del momento óptimo de desarrollo de la tierra (edificación sobre los terrenos), basados principalmente en el criterio del valor actual neto y de la tasa interna de retorno. Aunque una buena parte del artículo que trata este modelo se enfoca más en las variables de producción, costos y rentabilidad de la empresa, la tesis se enfocará más en la estimación del valor de la opción que se ejerce cuando la tierra se desarrolla o se convierte a urbana. El modelo concluye que, aún bajo certidumbre, los proyectos de desarrollo son óptimamente retrasados más allá del punto donde el valor actual neto llega a ser no negativo siempre que los flujos de caja estén creciendo. Para esta tesis, la conclusión más importante es que el valor de la opción coincide con el valor de la prima de la tierra agrícola.

1.3 Tendencias y nuevos enfoques de investigación

Hacia finales del siglo XX y principios del siglo XXI nuevas líneas de investigación han surgido para comprender mejor los fenómenos urbanos, incluido el comportamiento de los precios del suelo urbano. Casi todos estos enfoques reconocen que la ciudad tiene una estructura similar a un organismo viviente. Estos nuevos modelos matemáticos incorporan no sólo enfoques de la economía urbana, sino también de la física, geografía, biología, ecología, computación, y otras disciplinas.

1.3.1 Fractales

Los principales autores que han modelado ciudades como fractales gigantes son Michael Batty (1994)[3], Nikos Salingaros en *Principles of Urban Structure* (2005) y Pierre Frankhauser en *Fractal geometry for measuring and modelling urban patterns. The Dynamics of Complex Urban Systems - an interdisciplinary approach.* (2008). Uno de los artículos más recientes, de particular relevancia por estar muy relacionado al tema de esta tesis es el trabajo de Shougeng Hu y Qiuming Cheng (2012)[12] en el que se analiza la distribución de los precios de la tierra usando modelos multifractales.

1.3.2 Sistemas dinámicos

Los modelos de sistemas dinámicos están siendo empleados para modelar y entender los sistemas y estructuras urbanas, los que comparten muchas propiedades con los sistemas orgánicos y ecológicos. Un trabajo relacionado al tema de esta tesis es el de Lin Li (2003)[15], en el que desarrolla un modelo para explicar la expansión urbana basado en un proceso de difusión. Asimismo, Anthony Bracken en *Simple mathematical models for urban growth*, aplica modelos de crecimiento logístico y de difusión.

1.3.3 Autómata Celular

Un autómata celular es una clase de modelo matemático en el que se genera el comportamiento de un sistema mediante un conjunto de reglas deterministas o probabilísticas que determinan el estado discreto de una célula basada en los estados de las células vecinas. Se han aplicado para estudiar una serie de fenómenos urbanos: simulación de tráfico, urbanización a escala regional, dinámica de uso del suelo, policentrismo, urbanización histórica, expansión urbana, dinámica socio-espacial, segregación y gentrificación, al igual que las simulaciones de la forma urbana, el crecimiento, y la ubicación. Algunos de los autores que han aplicado estos modelos a sistemas urbanos son: Sharaf Alkheder y Jie Shan [1]; O'Sullivan D, Torrens en *Cellular models of urban systems* (2000); Wolfram S, en *Cellular Automata and Complexity* (1994); Dawn C. Parker en *Multi-Agent Systems for the Simulation of Land-Use and Land-Cover Change* .

1.3.4 Redes neuronales

Las redes neuronales artificiales son sistemas de interconexión de neuronas en una red que trabajan juntas para producir un estímulo. Son usadas para simplificar los modelos de estructuras y para determinar los valores de los parámetros. Un trabajo relacionado al tema de la presente tesis es el de Anthony Gar-On Yeh y Xia Li [10]. En este artículo los autores presentan un método para integrar las redes neuronales, los autómatas celulares y los sistemas de información geográfica para que pueda ser empleado en el planeamiento del uso de la tierra. Otro artículo de similares caracteristicas es *Modeling urban dynamics with artificial neural networks and GIS*, de Chris Weisner [19].

2 MODELOS DETERMINISTAS PARA LA CIUDAD

2.1 Introducción

Desde el enfoque de la economía urbana, los primeros modelos matemáticos que se construyeron para explicar la ciudad fueron modelos deterministas. La mayoría de los artículos de la segunda mitad del siglo XX se han apoyado en los trabajos seminales sobre la renta de David Ricardo (1817)[18], en los trabajos realizados en el campo de la geografía económica sobre las teorías de localización de la escuela alemana del siglo XIX, y en especial en el gran trabajo de Alonso (1964)[2] sobre la ubicación y el uso de la tierra.

Cabe destacar, dentro de todos los autores y obras dedicadas a estos modelos, a los siguientes: Muth, Richard (1969) en *Cities and housing Mills*; Edwin (1972) en *Studies in the structure of the urban economy*; Wheaton, William (1974) en *A comparative static analysis of urban spatial structure J. Econ. Theory 9, 223–237*; Wheaton, William (1977) en *Income and urban residence*; Arnott, R. J. (1980) en *A simple urban growth model with durable housing*; Wheaton, William (1982) en *Urban residential growth under perfect foresight*; Straszheim, Mahlon (1987) en *The theory of urban residential location*.

En este capítulo se dará especial atención al trabajo de Dennis Capozza and Robert W. Helsley "The Fundamentals of Land Prices and Urban Growth", publicado en 1989, por ser uno de los que mejor resume y actualiza las ideas de sus predecesores en el modelo más simple de ciudad: un modelo circular, monocéntrico y determinístico. Las principales herramientas matemáticas y económicas usadas son: cálculo elemental, teoría de optimización, equilibrio parcial, economía urbana.

En la última parte de este capítulo se presenta, como aporte propio, el desarrollo del mismo modelo pero considerando un crecimiento geométrico de las rentas en vez de un crecimiento geométrico de la población como está desarrollado en el artículo del autor. Esto se hace para más adelante poder comparar este modelo con los otros que serán presentados en los siguientes capítulos. En el Apéndice 1 se ha elaborado un ejemplo aplicativo de este modelo.

2.2 Los fundamentos de los precios de la tierra y del crecimiento urbano [5]

Paper: *The Fundamentals of Land Prices and Urban Growth*

Autor: Dennis Capozza and Robert W. Helsley

Fuente: Journal of Urban Economics 26, 295-306 (1989)

2.2.1 Introducción

En el paper, Capozza trata un tema de economía urbana en el que construye un modelo dinámico que busca explicar los precios del suelo y el crecimiento urbano. El autor resalta tres aspectos importantes: primero, los determinantes de la estructura espacial urbana son diferentes en modelos estáticos y en modelos dinámicos, siendo los segundos más completos y cercanos a la realidad. Segundo, las principales características del modelo, que parecen presentar anomalías en contextos estáticos, son fácilmente explicadas cuando se incorpora la variable temporal del desarrollo urbano al modelo. Tercero, el crecimiento urbano influye poderosamente en el precio de la tierra. El modelo propuesto por el autor es basado en modelos de crecimiento urbano anteriores: en el modelo de crecimiento urbano con capital durable de Arnott (1980) y en el modelo de crecimiento residencial urbano de perfecta previsión de Wheaton (1982).

2.2.2 Asunciones del modelo

Se trata de una ciudad circular que crece radialmente, con un solo centro donde se concentra el empleo en el punto Distrito de Negocios Central (CBD) al cual todos los residentes conmutan diariamente y sus ubicaciones están indexadas por z, distancia al CBD. En la literatura se conoce como Modelo Monocéntrico[2]. El área urbana está ubicada en un plano homogéneo adecuado para el desarrollo. En el tiempo $t\epsilon[0,\infty[$, existen $N(t)$ viviendas idénticas que derivan su utilidad de la tierra L y de la canasta compuesta de los otros bienes (numerario) X. El consumo de la tierra por unidad de vivienda $\bar{L}$ (área de lote o terreno) es constante. En otras palabras, la densidad urbana es constante. La función utilidad de un hogar típico $U(X,L)$ es homogénea de grado uno (HG1), continua y creciente en X y L. Como $U(X,L)$ es HG1:

$$U\left(\alpha X,\alpha\bar{L}\right)=\alpha U\left(X.\bar{L}\right)$$

$$U(X,\bar{L})=\tfrac{1}{\alpha}U\left(\alpha X,\alpha\bar{L}\right)$$

$$Si\;1/\alpha=\bar{L}\Rightarrow U(X,\bar{L})=\bar{L}U\left(X/\bar{L},1\right)$$

$$U\left(X,\bar{L}\right)=u\left(X/\bar{L}\right)$$

u es función continua y creciente del ratio de otros bienes y de la tierra. El costo de conmutar (transporte del CBD a las viviendas) por unidad de distancia (US$/km) es constante: T. El borde del

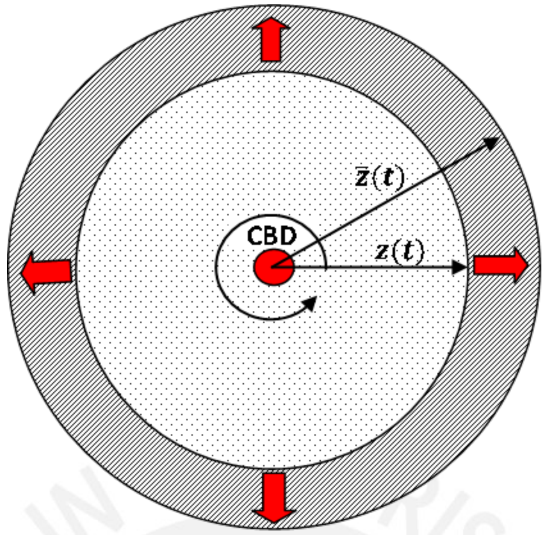

Figure 2.1: Modelo monocéntrico de ciudad circular[11]

área urbana, radio urbano $\bar{z}(t)$, se expande en anillos de 2π radianes conforme la población crece con el paso del tiempo. La figura (2.1) muestra gráficamente el modelo.

2.2.3 Equilibrio en el mercado de la tierra

Este punto no está incluido en el paper de Capozza; sin embargo, sí es tratado por los autores de los papers anteriores en los cuales su trabajo se fundamenta y ya que es crucial para entender el modelo con todas sus asunciones, se explicará brevemente en las líneas siguientes.

Citando el trabajo de DiPasquale y Wheaton (1996)[8], el mercado de la tierra es un mercado con productos completamente diferenciados; esto se debe fundamentalmente a la característica inherente de la ubicación. La oferta de la tierra es prácticamente fija (no se puede crear tierra y la “nueva tierra” que se incorpora al mercado es un proceso que toma tiempo y es difícil) por lo que dicha oferta es precio inelástica; en cambio, la demanda de tierra es muy sensible a los cambios de precio por lo que es elástica respecto al precio. Durante dos siglos los economistas han reconocido estas características del mercado de tierras, primero en el ámbito rural y después en el ámbito urbano, para poder determinar los precios de la tierra. Este enfoque apunta a que la tierra debe ser valorada en función a las ventajas de ubicación del lugar en el que existe respecto de otras parcelas o lotes: tierras mejor ubicadas serán más apreciadas y sus ocupantes deberán pagar más a cambio por estas ventajas. En resumen, este enfoque de compensación de diferencias asume que sólo la demanda determina el precio de la tierra para diferentes ubicaciones. La oferta juega un papel sólo para determinar el nivel general de precios de la tierra.

Ricardo (1817)[18] definió como renta a lo que los usuarios u ocupantes de la tierra pagan periódicamente por ella, y esto es por las ventajas diferenciales que tiene dicha tierra respecto de otras; es el concepto de renta diferencial en la teoría económica. En economía urbana se conoce como renta Ricardiana. En efecto, la característica más notoria del mercado de tierra urbana es que los terrenos mejor ubicados son más costosos y dicho costo se compensa con menores costos de transporte dentro de la ciudad al estar más cerca de los lugares de interés; sin embargo, se pagará menos por los terrenos peor ubicados pero a cambio se gastará más en transporte. En conclusión, por lo explicado líneas arriba, es posible agregar de forma más explícita algunas asunciones más al modelo (Capozza las asume implícitamente):

El precio de la tierra es determinado esencialmente por la demanda, por lo que se tendrá un precio de equilibrio considerando una economía de intercambio puro. La renta R de la tierra varía con la ubicación, es decir, con la distancia z al centro de la ciudad. Los terrenos son ocupados por quienes ofrecen la más alta renta y la tierra es asignada a su uso más productivo (produciendo la mayor renta).

La última asunción es esencial porque implica que cuando el mercado está en equilibrio en esta ciudad, las rentas que disminuyen conforme el ocupante se aleja del centro deben exactamente compensar el incremento de los costos de desplazamiento. Ya que la calidad y densidad de las viviendas es la misma en todas las ubicaciones, la única variación posible en la vivienda o en el bienestar del hogar es la cantidad de gasto en los otros bienes de consumo que se definió como X. Cuando las rentas compensan exactamente los costos de transporte, los hogares no tendrán ya más ningún incentivo para mudarse y se dice que el mercado de la tierra urbana está en equilibrio espacial, es decir, no es posible la mudanza debida a las diferencias de bienestar de los hogares.

En el mercado de la tierra podemos aplicar la teoría de equilibrio parcial[16], con una economía de intercambio puro (sólo la demanda determina los precios al ser considerada la oferta constante) donde cada consumidor i está definido por su dotación inicial ω_i y su preferencia $\gtrsim_i$

$$\varepsilon = \{(\omega_i, \gtrsim_i) : i = 1, ..., I\}$$

La función demanda de cada consumidor (representado en el modelo del paper por cada hogar o vivienda) se encuentra resolviendo el problema de optimización (p es el vector de precios de la canasta de bienes x y ω es el vector de dotaciones iniciales):

$$\max \; u(x)$$
$$s.a. \begin{array}{c} p.x \leq p.\omega \\ x \geq 0 \end{array}$$

Para este caso se tienen dos bienes: tierra y el resto de los bienes de la economía, y teniendo en cuenta que lo que cada consumidor gasta en la tierra se distribuye en la renta que debe pagar por dicho lote más el transporte de movilizarse desde su vivienda hasta el CBD, se tiene entonces:

$$\max \; U\left(X, \bar{L}\right)$$
$$s.a. \begin{array}{c} R\bar{L} + Tz + X \leq y \\ \bar{L} \geq 0, z \geq 0; X \geq 0 \end{array}$$

Que también se puede expresar así:

$$\max \; u\left(X/\bar{L}\right)$$
$$s.a. \begin{array}{c} R\bar{L} + Tz + X \leq y \\ \bar{L} \geq 0, z \geq 0; X \geq 0 \end{array} \tag{2.1}$$

Donde T es el costo de transporte por unidad de distancia y z es la distancia de la ubicación de la vivienda de un residente respecto al centro de la ciudad, tal como se definieron anteriormente. R es la renta periódica (cuota hipotecaria o alquiler anual) que el consumidor debe pagar por su lote de tamaño $\bar{L}$ que es constante. El índice de precios para la canasta de los otros bienes de la economía, X, es 1 ya que X se toma como numerario, siguiendo la teoría del equilibrio parcial. "y" es el ingreso o riqueza de cada consumidor. Este modelo es también conocido como el *Modelo de la Renta Ricardiana*, por lo explicado anteriormente.

2.2.4 Renta de la tierra

En el equilibrio, en cada punto, para cada instante de tiempo, la renta de la tierra debe satisfacer la restricción presupuestaria dada en (2.1) con igualdad[1]:

$$y = X + R\bar{L} + Tz \tag{2.2}$$

[1]En el equilibrio Walrasiano la función exceso de demanda agregada es nula. Para cada consumidor, su función exceso de demanda también será nula debido a la asunción de que en este modelo de ciudad se tienen todas las N viviendas (consumidores) idénticas. Una función exceso de demanda nula implica que la restricción presupuestaria se cumple con igualdad.[16]

Por definición, en (2.1) al maximizar u se obtiene la función de utilidad indirecta v. Como la ciudad (población) crece con el tiempo y dicho crecimiento afecta a las funciones de utilidad y de utilidad indirecta, entonces es posible expresar $v(t)$ en función del tiempo:

$$u\left(X/\bar{L}\right) = v(t)$$

Ya que según una de las asunciones del modelo es que u es continua y creciente, entonces existe su función inversa u^{-1} con lo que es posible escribir:

$$X/\bar{L} = u^{-1}\left[v(t)\right]$$

Reemplazando en (2.2) se obtiene una expresión para la renta de la tierra en función del tiempo y la distancia. Si la población urbana crece con el tiempo, el área y radio urbano (distancia al centro) también crecen con el tiempo. Por transitividad, si la renta urbana varía con la distancia al centro y dicha distancia varía con el tiempo, entonces la renta urbana varía también con el tiempo.

$$R(t,z) = \frac{1}{\bar{L}}\left(y - Tz\right) - u^{-1}\left[v(t)\right] \tag{2.3}$$

Para profundizar un poco más el análisis, es pertinente hallar las derivadas parciales de R(t,z) respecto a la distancia y al tiempo:

$$R_z\left(t,z\right) = -T/\bar{L} \tag{2.4}$$

$$R_t\left(t,z\right) = -\left(u^{-1}\right)'\left[v(t)\right]v'(t) \tag{2.5}$$

La ecuación (2.4) es la condición de equilibrio espacial en la que la renta disminuye de forma constante con la distancia para compensar el incremento de los costos totales de transporte; para un mismo tiempo, en todos los lugares de la ciudad dicha disminución se incrementa conforme disminuyen tanto los costos de transporte por km. como la densidad urbana ($1/\bar{L}$).

La ecuación (2.5) muestra que si los ingresos son constantes, entonces niveles de utilidad más bajos acompañan rentas crecientes conforme el área urbana crece en el tiempo. En otras palabras, si los ingresos son constantes, la rapidez con la que la renta disminuye es proporcional a la rapidez con la que los niveles de utilidad aumentan en el tiempo.

2.2.5 Precio de la tierra

Si los dueños de la tierra tienen perfecta previsión y el mercado de la tierra es competitivo, entonces el precio de la tierra debe ser igual al valor presente del flujo esperado de las rentas de tierra. El valor al

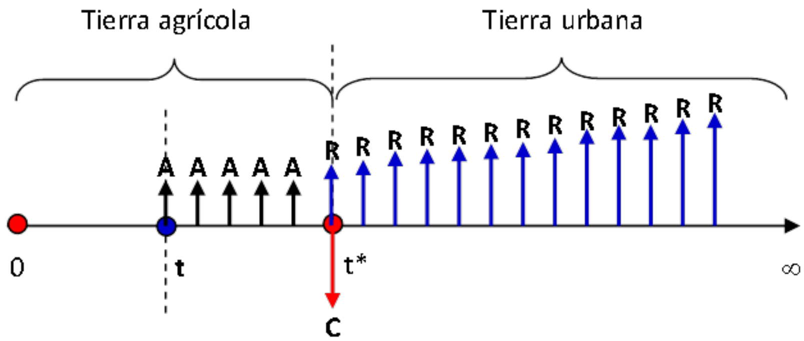

Figure 2.2: Flujos de rentas agrícolas y urbanas en el tiempo

tiempo t de una unidad de tierra urbanizada a la ubicación z es, asumiendo una capitalización continua (modelo en tiempo continuo):

$$P^u(t,z) = \int_t^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau,\ t\epsilon[t^*,\infty[\tag{2.6}$$

Donde r es la tasa de descuento, y t^* es la fecha en la que la tierra es convertida de agrícola (rural) a urbana. El límite superior de la integral es debido a que la tierra urbana puede considerarse un bien de vida prácticamente ilimitada. En palabras sencillas, el precio de la tierra es la renta capitalizada de ella.

Cuando la tierra es agrícola, el gráfico (2.2) permite visualizar mejor los cálculos: t representa el momento actual y t^* el momento en el que la tierra es convertida a urbana.

El precio de la tierra agrícola al tiempo t y a la ubicación z será el valor actual de todas las rentas que potencialmente pueda generar a lo largo de su vida útil: del flujo de las rentas dentro del intervalo de tiempo $[0,t^*[$ cuando es agrícola y del flujo de las rentas dentro del intervalo de tiempo $[t^*,\infty[$ cuando la tierra será urbana. A este valor hay que deducirle el valor actualizado de convertir la tierra de agrícola en urbana que es un costo y no un flujo de rentas como las agrícolas y urbanas. Todos los valores actuales se estiman respecto al momento actual t el que se encuentra dentro del intervalo $[0,t^*[$ por ser la tierra agrícola.

$$P^a(t,z) = \int_t^{t^*} Ae^{-r(\tau-t)}d\tau + \int_{t^*}^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau - Ce^{-r(t^*-t)},\ t\,\epsilon\,[0,t^*[\tag{2.7}$$

Donde A es el valor de la renta de la tierra agrícola y que se considera constante, $R(t,z)$ es la renta urbana que es variable y C es el costo de convertir una unidad de tierra de un uso agrícola a un uso urbano (costo de la habilitación urbana que es constante y se da por única vez en el tiempo t^*). El primer término en (2.7) es el valor presente al tiempo t del flujo de las rentas agrícolas por generarse a la fecha de conversión. El segundo término es el valor presente del flujo de las rentas urbanas por generarse desde la fecha de conversión en adelante. El último término es el valor presente del costo de conversión (urbanización) al tiempo t^*. En este simple modelo, la estructura urbana, una vez construida, no se deprecia.

2.2.6 Tiempo de conversión

Los propietarios de la tierra agrícola escogen la fecha de conversión t^* para maximizar el valor presente dado en la ecuación (2.7). Resolviendo la primera integral de esta ecuación (recordando que la renta agrícola A es constante) y agrupando términos, puede ser simplificada a:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r}\left[1 - e^{-r(t^*-t)}\right] + \int_{t^*}^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau - Ce^{-r(t^*-t)},\ t\,\epsilon\,[0,t^*[\tag{2.8}$$

Aplicando la condición de primer orden para maximizar $P^a(t,z)$ con respecto a t* y aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{\partial P^a(t,z)}{\partial t^*} = -R(t^*,z)e^{-r(t^*-t)} + Ae^{-r(t^*-t)} + rCe^{-r(t^*-t)} = 0$$

$$R\left(t^*,z\right) = A + rC \tag{2.9}$$

La tierra es desarrollada cuando la renta en el uso urbano iguala al costo de oportunidad de la tierra más el costo de conversión del capital. La ecuación (2.9) implícitamente define la renta de la tierra en el borde del área urbana (a la distancia $\bar{z}(t)$) al tiempo t. Según las asunciones del modelo, se espera que esta renta sea la mínima renta urbana ya que es la ubicación más alejada de la ciudad.

$$R\left(t,\bar{z}(t)\right) = A + rC \tag{2.10}$$

2.2.7 Equilibrio del mercado de la tierra y el modelo de ciudad circular

El autor enfoca el equilibrio del mercado de la tierra desde el punto de vista espacial, de la suficiencia del espacio para contener a todos los hogares. Anteriormente, basado en los trabajos de otros autores, se ha analizado las condiciones de equilibrio económico del mercado de la tierra para dar inicio a la construcción del modelo. Ya que todos los hogares $N(t)$ consumen la misma cantidad unitaria de tierra $\bar{L}$, siendo $\bar{z}(t)$ la ubicación en el borde del área urbana, $\bar{z}(t)$ viene a ser la longitud del radio del área urbana de forma circular. $\bar{z}(t)$ proporciona también una medida de la extensión de la ciudad en un momento dado y de su expansión a lo largo del tiempo ($\pi = 3.14159$).

$$\bar{z}(t) = \left[\frac{N(t)\bar{L}}{\pi}\right]^{1/2} \tag{2.11}$$

La ecuación (2.11) expresa que el área urbana debe ser suficientemente grande para albergar a todos los hogares[2].

2.2.8 Precios de la tierra y rentas de la tierra

Es necesario resaltar que el precio y la renta de la tierra son dos conceptos diferentes aunque relacionados. En el caso de un lote de terreno, de una vivienda, o de un bien inmueble en general, la gran mayoría de personas adquieren el bien (con fines de uso o de tenencia) pagando su precio en el largo plazo, a través de cuotas periódicas.

Siguiendo a Ricardo[18], tal como ya se ha explicado, la renta es el pago periódico que se hace por la tierra, que puede ser expresado como el alquiler por el uso de la tierra o como la cuota mensual (o anual) de un préstamo hipotecario por la tenencia de la tierra. La renta es el valor de R que aparece en la restricción presupuestaria del consumidor de la ecuación (2.2), es decir, lo que el consumidor paga periódicamente por el área $\bar{L}$ de su lote de vivienda. El precio, en cambio, es el valor del bien inmueble (lote de terreno o bien inmueble en general), que mide la capacidad que tiene el bien de generar rentas periódicas futuras. Es decir, el precio de la tierra es el valor actual de los flujos de renta esperados, tal como lo expresa la ecuación (2.6).

La función de utilidad indirecta se puede obtener de las ecuaciones (2.10) y (2.3). Igualando los miembros derechos de cada ecuación, se obtiene:

$$A + rC = (1/\bar{L})\,(y - Tz) - u^{-1}\left[v(t)\right]$$

$$v(t) = u\left[(1/\bar{L})\,(y - T\bar{z}(t)) - (A + rC)\right] \tag{2.12}$$

Para hallar la función de la renta de la tierra urbana, reemplazamos el valor de $v(t)$ obtenido en (2.12) en la ecuación (2.3):

[2]Un análisis más detallado del modelo de ciudad circular puede verse en Geltner and Miller [11]

$$R(t,z) = \frac{1}{\bar{L}}(y - Tz) - u^{-1}[v(t)]$$

$$R(t,z) = \frac{1}{\bar{L}}(y - Tz) - u^{-1}\left[u\left[(1/\bar{L})(y - T\bar{z}(t)) - (A + rC)\right]\right]$$

$$R(t,z) = \frac{1}{\bar{L}}(y - Tz) - \frac{1}{\bar{L}}(y - T\bar{z}(t)) + (A + rC)$$

$$R(t,z) = \frac{1}{\bar{L}}(T\bar{z}(t) - Tz) + (A + rC)$$

$$R(t,z) = A + rC + \frac{T}{\bar{L}}(\bar{z}(t) - z), \ z \le \bar{z}(t) \tag{2.13}$$

La ecuación (2.13) expresa que la renta tiene tres componentes: la renta de la tierra agrícola A, la renta del capital usado en convertir la tierra a uso urbano rC, y la renta de ubicación o accesibilidad cuyo valor es $\frac{T}{\bar{L}}(\bar{z}(t) - z)$. En un mismo momento y para las diferentes ubicaciones de la ciudad, las dos primeras componentes de la renta son constantes, mientras que la última es variable, decreciente con la distancia z y creciente con el tiempo t, debido a que la población urbana y por tanto el radio urbano $\bar{z}(t)$ crecen con el tiempo. Más allá del borde urbano $\bar{z}(t)$, la renta iguala a la productividad agrícola de la tierra.

$$R(t,z) = A, \ z > \bar{z}(t) \tag{2.14}$$

2.2.9 Precios de la tierra en el área desarrollada (urbana)

Para encontrar el precio de equilibrio de la tierra en el área urbana, se reemplaza la ecuación (2.13) en (2.6):

$$P^u(t,z) = \int_t^{\infty} \left[A + rC + \frac{T}{\bar{L}}(\bar{z}(t) - z)\right] e^{-r(\tau - t)} d\tau$$

$$P^u(t,z) = \left(A + rC - \frac{T}{\bar{L}}z\right) \int_t^{\infty} e^{-r(\tau - t)} d\tau + \frac{T}{\bar{L}} \int_t^{\infty} \bar{z}(t) e^{-r(\tau - t)} d\tau$$

$$P^u(t,z) = \frac{1}{r}\left(A + rC - \frac{T}{\bar{L}}z\right) + \frac{T}{\bar{L}} \int_t^{\infty} \bar{z}(t) e^{-r(\tau - t)} d\tau \tag{2.15}$$

Para que el precio de la tierra urbana sea acotado, se asumirá que $[N(\tau)]^{1/2} e^{-r\tau}$ tiende a cero conforme τ tiende a infinito. De la ecuación (2.11), recordando que $N(t)$ es el número de ciudadanos (viviendas), $\bar{z}(t)$ es el radio (tamaño) de la ciudad, y $\bar{L}$ es el área de cada lote de terreno (constante), se tiene:

$$N(\tau) = \pi\left[\bar{z}(\tau)\right]^2 / \bar{L}$$

$$[N(\tau)]^{1/2}\, e^{-r\tau} = \left(\pi/\bar{L}\right)^{1/2} \bar{z}(\tau) e^{-r\tau} \to 0,\text{si } \tau \to \infty$$

Integrando por partes el último término de (2.15), aplicando:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Tomando: $a = \int_t^\infty \bar{z}(\tau) e^{-r(\tau - t)} d\tau$

$$u = \bar{z}(\tau)$$

$$dv = e^{-r(\tau-t)} d\tau$$

$$du = \bar{z}'(\tau) d\tau$$

$$v = \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)} d\tau = -\tfrac{1}{r} e^{-r(\tau-t)} \mid_t^\infty = 1/r$$

$$a = \tfrac{1}{r}\bar{z}(t) + \tfrac{1}{r}\int_t^\infty \bar{z}'(\tau) e^{-r(\tau-t)} d\tau$$

Reemplazando en (2.15):

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\int_t^\infty \bar{z}'(t) e^{-r(\tau-t)} d\tau \tag{2.16}$$

Usando la ecuación (2.13) en (2.16):

$$\bar{z}(t) - z = \frac{\bar{L}}{T}\left(R(t,z) - A - rC\right)$$

Derivando respecto a t:

$$\bar{z}'(t) = \frac{\bar{L}}{T} R_t(t,z)$$

y reemplazando en (2.16)

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\int_t^\infty R_\tau\left(\tau, z\right) e^{-r(\tau-t)} d\tau \tag{2.17}$$

La ecuación (2.17), que es equivalente a la ecuación (2.16), resume este modelo, expresa el precio de un terreno urbano en función del tiempo y de su distancia al centro. En el área urbana, el precio del terreno tiene cuatro componentes: el primero es el valor de la renta de la tierra agrícola, el segundo es el valor de conversión del área rural a urbana, el tercero es el valor de accesibilidad o de ubicación, y el último es el valor del incremento esperado de las rentas futuras que resultan del crecimiento de la ciudad y que se conoce como prima de crecimiento. Se observa que la tasa de crecimiento de las rentas $R_t(t,z)$

es proporcional a la tasa de crecimiento de la ciudad $\bar{z}'(t)$. El último término, la prima de crecimiento, es variable en el tiempo t y de la distancia z dentro del área urbana.

2.2.10 Precios de la tierra en el área agrícola

El precio de la tierra agrícola se obtiene de forma similar. La expresión de la renta dada por la ecuación (2.13) se sustituye en (2.7):

$$P^a(t,z) = \int_t^{t^*} Ae^{-r(\tau-t)}d\tau + \int_{t^*}^{\infty}\left[A + rC + \frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(\tau) - z\right)\right]e^{-r(\tau-t)}d\tau - Ce^{-r(t^*-t)}$$

$$P^a(t,z) = \int_t^{\infty} Ae^{-r(\tau-t)}d\tau + \int_{t^*}^{\infty} rCe^{-r(\tau-t)}d\tau - Ce^{-r(t^*-t)} + \int_{t^*}^{\infty}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(\tau) - z\right)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}}\int_{t^*}^{\infty}\left(\bar{z}(\tau) - z\right)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

Integrando por partes, haciendo:

$$u = \bar{z}(\tau) - z$$

$$dv = e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

$$du = \bar{z}'(\tau)d\tau$$

$$v = -\tfrac{1}{r}e^{-r(\tau-t)}\mid_{t^*}^{\infty} = 1/r$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(\tau) - z\right)e^{-r(t^*-t)} + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\int_{t^*}^{\infty}\bar{z}'(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

Analizando el crecimiento de la ciudad, es decir el crecimiento del radio $\bar{z}(t)$, por definición t^* es el momento en el que la tierra será convertida de agrícola a urbana y $\bar{z}(t^*)$ es el radio urbano (distancia del centro al borde de la ciudad) que se tendrá en el futuro t^*. Como a la distancia z se está en el área agrícola ($z > \bar{z}(t)$) y $\bar{z}(t)$ irá creciendo en el tiempo hasta alcanzar el valor de z precisamente en el momento t^* cuando z sea el nuevo límite urbano. Por lo tanto, se tendrá (ver figura (2.3)):

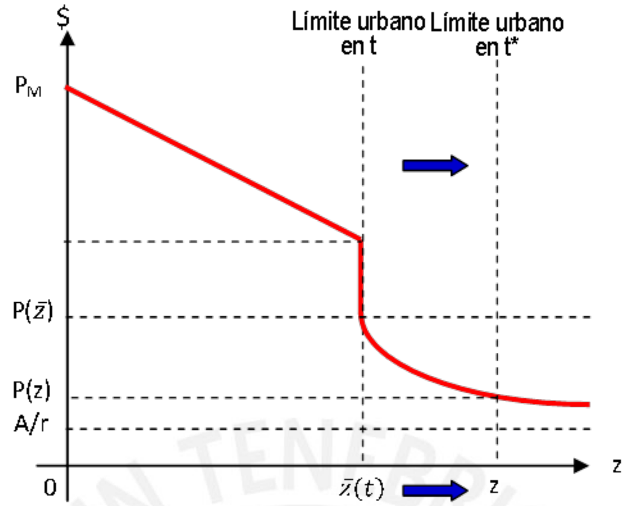

Figure 2.3: Crecimiento del radio urbano

$$\bar{z}(t^*) = z$$

Remplazando $\bar{z}(t^*) = z$ en la última expresión:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\int_{t^*}^{\infty} \bar{z}'(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau \tag{2.18}$$

Que también se puede expresar como:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\int_{t}^{\infty} \bar{z}'(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau - \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\int_{t}^{t^*} \bar{z}'(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\int_{t}^{\infty} R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau - \frac{1}{r}\int_{t}^{t^*} R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

La ecuación (2.18) es la expresión del precio de la tierra agrícola que tiene dos componentes: el valor de la renta agrícola A/r y el valor del incremento esperado de las rentas futuras que se dan después de la conversión del área agrícola en urbana. Este segundo componente, la prima de crecimiento, está constituida por los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación: el primero es exactamente igual a la prima de crecimiento que se tiene en el área urbana (ver ecuaciones (2.16) y (2.17)), el otro término es negativo por lo que la prima de crecimiento agrícola es menor a la prima de crecimiento urbana. Si se denota la prima de crecimiento por PC, de la última ecuación, se tiene:

$$PC^a(t,z) = \frac{1}{r}\int_t^{\infty} R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau - \frac{1}{r}\int_t^{t^*} R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

Un resultado importante de destacar es que, a diferencia del paper de Capozza, la prima de crecimiento agrícola y urbana son distintas, la primera menor que la segunda. Se estima que este error podría ser un problema de notación; la ecuación (2.18) es idéntica a la propuesta por el autor en el artículo salvo el hecho que el límite inferior de la integral es t^* en vez de t.

A diferencia de lo que ocurre en el área urbana, en el área agrícola esta prima de crecimiento no sólo cambia en el tiempo sino que disminuye con la distancia al centro de la ciudad, de tal forma que para ubicaciones cercanas al límite urbano ($z \to \bar{z}(t)$, $t \to t^*$) su valor se aproxima a la prima de crecimiento urbana (el tercer término de la ecuación (2.18) se hace nulo), mientras que para ubicaciones rurales muy alejadas de la ciudad ($z \to \infty$) se espera que el precio agrícola tienda al valor de la renta agrícola A/r.

Los resultados de las ecuaciones (2.13), (2.17) y (2.18) son de los más importantes en este artículo y se pueden resumir en dos gráficos. El Gráfico (2.4) muestra en forma estática el valor de la renta en función de la distancia, dentro y fuera del área urbana. La renta fuera del área urbana es la renta agrícola A. En el borde del área urbana en $\bar{z}(t)$, la renta salta por el costo de oportunidad rC de transformar la tierra rural en tierra urbana apta para el desarrollo. Dentro del área urbana la renta crece a la tasa dada por los costos de transporte por unidad de distancia por unidad de tierra T, alcanzando su valor máximo RM en el centro de la ciudad. A una distancia z arbitraria del centro urbano, la renta $R(z)$ es la suma de tres componentes: la renta agrícola A, la renta de conversión rC, y la renta de ubicación U.

El panel derecho de la figura (2.4) muestra la dinámica del crecimiento de las rentas debido al crecimiento de la ciudad. La crecer la población (manteniéndose todo lo demás constante incluida la densidad), las rentas crecen del tiempo t_1 (línea gruesa interior) al tiempo t_2 (línea gruesa exterior). La renta a la distancia z del centro se incrementa de $R_1(z)$ a $R_2(z)$ cuando la ciudad se expande de $\bar{z}(t_1)$ a $\bar{z}(t_2)$. La renta de ubicación es el único componente de la renta que varía tanto con el tiempo como con la posición; las rentas agrícola y de conversión son constantes.

En $z = 0$:

$$R_M(t,z) = A + rC + \frac{T}{\bar{L}}\bar{z}(t)$$

En cualquier z:

$$R(t,z) = A + rC + U$$

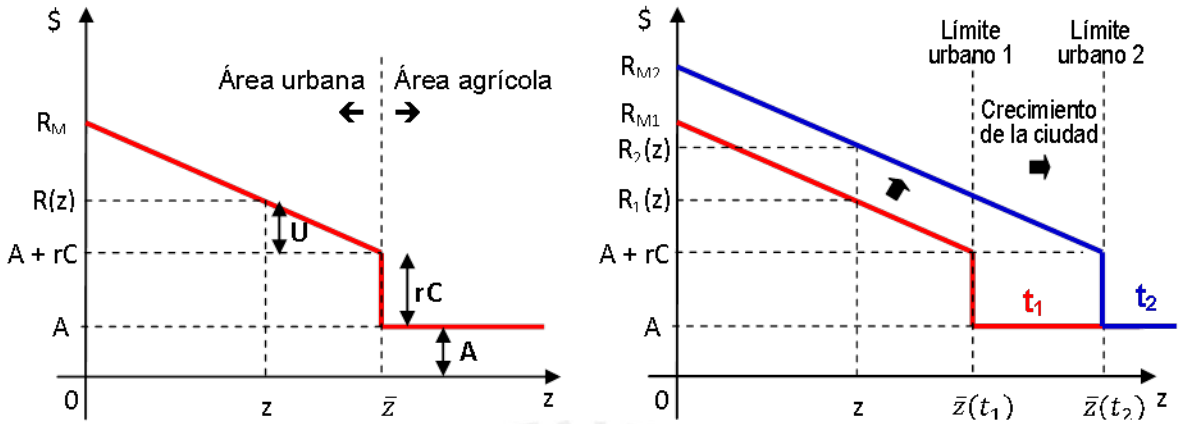

Figure 2.4: Renta de la tierra agrícola y urbana y su crecimiento en el tiempo

$$U = \frac{T}{\bar{L}} \left(\bar{z}(t) - z\right)$$

En $z = \bar{z}(t)$:

$$R(t, z) = A + rC$$

El panel izquierdo de la Figura (2.5) muestra en forma estática el precio en función de la distancia, dentro y fuera del área urbana. A grandes distancias del centro urbano, el precio de la tierra es su valor agrícola A/r. Estando todavía en el área agrícola a la distancia "a" pero acercándose al límite urbano, el precio de la tierra $P(a)$ tiene los dos componentes indicados en la ecuación (2.18): además del valor agrícola, se tiene una prima igual al valor presente de los futuros incrementos en renta que son esperados después que la tierra sea convertida para uso urbano y que alcanza su valor máximo PCM en el límite urbano. En el borde del área urbana en $\bar{z}(t)$, el precio salta por el costo C de transformar la tierra rural en tierra urbana apta para el desarrollo. Dentro del área urbana el precio crece por el valor capitalizado de la accesibilidad (una mejor ubicación) conforme nos acercamos al centro de la ciudad, alcanzando su valor máximo PM en dicho centro CBD. A una distancia z arbitraria del centro urbano, el precio $P(z)$ es la suma de cuatro componentes: el valor agrícola A/r, la prima de crecimiento máxima PCM que se alcanza en el borde urbano (y se mantiene constante en toda el área urbana), el valor de conversión C, y el valor de ubicación PU.

El panel derecho de la Figura (2.5) muestra la dinámica del crecimiento de los precios debido al crecimiento de la ciudad. Sin la existencia de restricciones físicas ni legales, cuando la población de una ciudad crece, manteniendo su densidad constante, su área se expande en todas las direcciones y por consiguiente su radio (distancia al centro). Al crecer la población (manteniéndose todo lo demás constante

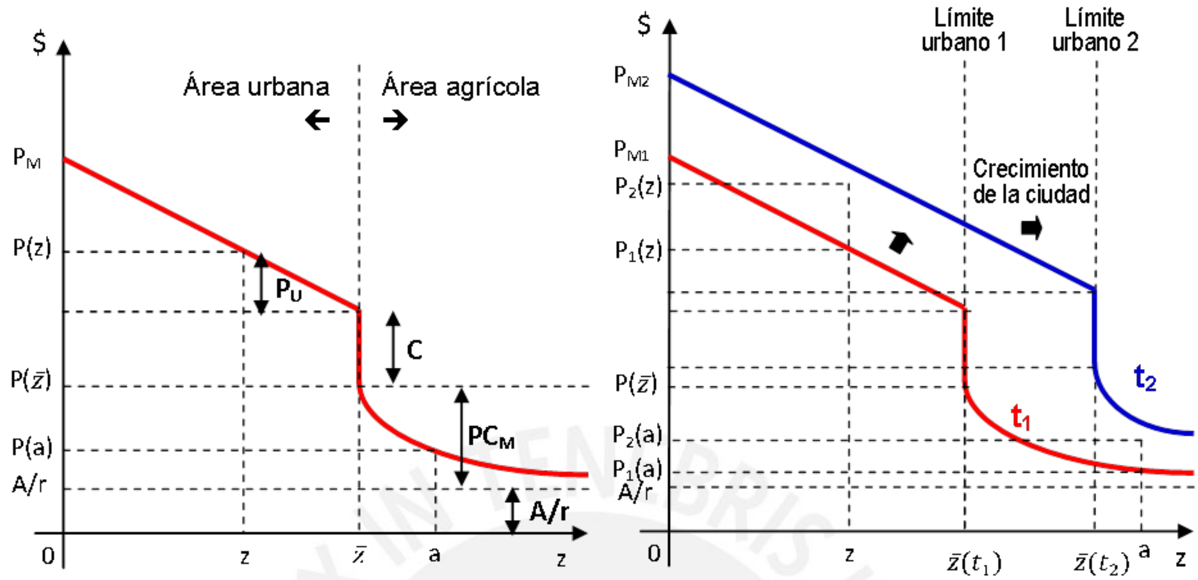

Figure 2.5: Precio de la tierra agrícola y urbana y su crecimiento en el tiempo

incluida la densidad), los precios crecen del tiempo t_1 (línea gruesa interior) al tiempo t_2 (línea gruesa exterior). Dentro del área urbana, el precio a la distancia z del centro se incrementa de $P_1(z)$ a $P_2(z)$ cuando la ciudad se expande de $\bar{z}_1(t)$ a $\bar{z}_2(t)$. El componente de ubicación del precio de la tierra urbana es el único componente que varía tanto con el tiempo como con la posición. La tierra agrícola no cambia su renta pero sí cambia su precio; a una distancia "a" del centro de la ciudad más allá del límite urbano, al expandirse la ciudad de $\bar{z}_1(t)$ a $\bar{z}_2(t)$, el precio de la tierra agrícola crece en el tiempo de $P_1(a)$ a $P_2(a)$. Además, para un mismo momento dado, el precio agrícola cambia con la distancia, decreciendo desde el borde urbano hacia lugares rurales muy alejados de la ciudad hasta que valor se aproxima al valor de la renta agrícola A/r.

En z:

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + PC_M + C + P_U$$

$$PC_M = \frac{1}{r}\int_t^{\infty} \bar{z}(t)e^{-r(\tau - t)}d\tau$$

$$P_U = \frac{1}{r}\frac{T}{\overline{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right)$$

2.2.11 Crecimiento exponencial de la población

Al análisis anterior se aplicará el caso en el que la población del área urbana crece exponencialmente a una tasa g.

$$N(t) = N(0)e^{gt} \tag{2.19}$$

De (2.11), que define el radio (tamaño de la ciudad):

$$\bar{z}(t) = \left[\frac{N(0)e^{gt}\bar{L}}{\pi}\right]^{1/2}$$

$$\bar{z}(t) = \bar{z}(0)e^{gt/2}$$

$$\bar{z}(\tau) = \bar{z}(t)e^{g(\tau-t)/2} \tag{2.20}$$

$$\bar{z}'(\tau) = \frac{g}{2}\bar{z}(t)e^{g(\tau-t)/2}$$

Reemplazando en la ecuación (2.16), se tiene:

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\int_t^{\infty} \frac{g}{2}\bar{z}(t)e^{g(\tau-t)/2}e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\frac{g}{2}\bar{z}(t)\int_t^{\infty} e^{-(\tau-t)(r-g/2)}d\tau$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{\bar{L}}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{T}{\bar{\bar{L}}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t) \tag{2.21}$$

El último término de la ecuación (2.21) es el valor de los incrementos de renta futuros anticipados cuando la población del área urbana crece exponencialmente. Varía directamente con la tasa de crecimiento poblacional g y con el tamaño de la ciudad $\bar{z}(t)$ y de forma inversa con la tasa de descuento r.

$$PC = \frac{1}{r}\int_t^{\infty} R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau = \frac{T}{\bar{\bar{L}}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t)$$

Para que el último término de la ecuación (2.17) sea una integral finita, se requiere que se cumpla la condición: $g < 2r$, o equivalentemente que la tasa de descuento debe exceder la mitad de la tasa de crecimiento exponencial. De esa forma, el valor presente de los futuros incrementos de renta se aproxima a cero conforme τ se aproxima al infinito, y el precio de la tierra es acotado.

Para obtener la expresión del precio en el área agrícola, se reemplaza (2.20) en la ecuación (2.18):

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\frac{g}{2}\bar{z}(t)\int_t^{\infty} e^{-(\tau-t)(r-g/2)}d\tau - \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\frac{g}{2}\bar{z}(t)\int_t^{t^*} e^{-(\tau-t)(r-g/2)}d\tau$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\frac{g}{2}\bar{z}(t)\left[-\frac{e^{-(\tau-t)(r-g/2)}}{(r-g/2)}\right]_t^{\infty} - \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\frac{g}{2}\bar{z}(t)\left[-\frac{e^{-(\tau-t)(r-g/2)}}{(r-g/2)}\right]_t^{t^*}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t) - \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\frac{g}{2}\bar{z}(t)\left[\frac{1}{r-g/2} - \frac{e^{-(t^*-t)(r-g/2)}}{r-g/2}\right]$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t) - \frac{T}{\bar{L}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t)\left[1 - e^{-(t^*-t)(r-g/2)}\right]$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t)\left[e^{-r(t^*-t)}e^{g/2(t^*-t)}\right]$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}}\frac{g/2}{r\,(r-g/2)}\bar{z}(t)\left[e^{-(t^*-t)(r-g/2)}\right]$$

Por (2.20):

$$\bar{z}(t^*) = \bar{z}(t)e^{g(t^*-t)/2}$$

$$\ln\bar{z}(t^*) - \ln\bar{z}(t) = g(t^*-t)/2$$

$$t^* - t = \frac{\ln\bar{z}(t^*) - \ln\bar{z}(t)}{g/2}$$

$$t^* - t = \ln\left[\frac{\bar{z}(t^*)}{\bar{z}(t)}\right]^{2/g}$$

$$e^{(t^*-t)} = \left[\frac{\bar{z}(t^*)}{\bar{z}(t)}\right]^{2/g}$$

$$e^{-r(t^*-t)} = \left[\frac{\bar{z}(t)}{\bar{z}(t^*)}\right]^{2r/g} = \left[\frac{\bar{z}(t)}{z}\right]^{2r/g}$$

$$e^{g/2(t^*-t)} = \frac{\bar{z}(t^*)}{\bar{z}(t)} = \frac{z}{\bar{z}(t)}$$

$$e^{-(t^*-t)(r-g/2)} = \left[\frac{\bar{z}(t)}{z}\right]^{\frac{2r}{g}-1}$$

Reemplazando las anteriores expresiones en la última ecuación del precio agrícola:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}} \frac{g/2}{r\,(r-g/2)} \bar{z}(t) \left[\frac{\bar{z}(t)}{z}\right]^{\frac{2r}{g}-1} \tag{2.22}$$

Como $2r < g$ y $z > \bar{z}(t)$, se tiene:

$$0 < \frac{z}{\bar{z}(t)} < 1$$

$$2r/g - 1 > 0$$

La última ecuación es la expresión del valor de la tierra cuando está en el área agrícola y se tiene un crecimiento exponencial de la población. Tiene dos componentes: el valor de la renta agrícola A/r y la prima de crecimiento que es claramente menor a la prima de crecimiento que se tiene en el área urbana. En el límite urbano, cuando $z = \bar{z}(t)$, la prima de crecimiento en el área agrícola se iguala a la del área urbana. A distancias muy grandes, cuando $z \to \infty$, la prima de crecimiento tiende a ser nula y el valor de la tierra agrícola tiende a ser igual al valor de la renta agrícola A/r. Se observa que la prima de crecimiento disminuye inversamente con la distancia, debido al factor $\left[\frac{\bar{z}(t)}{z}\right]^{\frac{2r}{g}-1}$, siendo una función decreciente en z (el exponente es positivo). Cuando $r > g$, que es el caso más común, el exponente $2r/g-1$ hace que la prima de crecimiento disminuya rápidamente conforme aumenta la distancia al límite urbano; la disminución es más lenta si $r < g$.

Para el caso en que la tasa de interés es igual a la tasa de crecimiento ($r = g$), la prima de crecimiento varía con la distancia de forma inversa según el factor $1/z$.

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}} \frac{[\bar{z}(t)]^2}{g} \left(\frac{1}{z}\right)$$

Para el caso en que la tasa de interés es igual una vez y media la tasa de crecimiento ($r = 1.5g$), la prima de crecimiento varía con el inverso del cuadrado de la distancia al centro según el factor $1/z^2$.

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{T}{\bar{L}} \frac{[\bar{z}(t)]^3}{3g} \left(\frac{1}{z^2}\right)$$

2.3 Modelo determinista con crecimiento geométrico de las rentas

En esta sección se desarrollará el mismo modelo determinista considerando los mismos criterios de la sección anterior, pero en vez de tomar como punto de partida que la población (y por consiguiente el radio de la ciudad) crece geométricamente, se asumirá que es la renta de la tierra la que crece geométricamente y ocasiona que la población y el tamaño de la ciudad crezcan a ese ritmo.

Si las rentas crecen geométricamente en el tiempo, entonces, se cumple:

$$R(t,z) = R(0,z)e^{gt}$$

$$R(\tau,z) = R(t,z)e^{g(\tau-t)} \tag{2.23}$$

$$R_\tau(\tau,z) = gR(t,z)e^{g(\tau-t)}$$

De la ecuación (2.17) se tiene:

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\int_t^\infty R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

Reemplazando la ecuación (2.23) en la expresión anterior, se obtiene la expresión para el precio de la tierra urbana cuando las rentas crecen geométricamente:

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\int_t^\infty gR(t,z)e^{g(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{gR(t,z)}{r}\int_t^\infty e^{-(r-g)(\tau-t)}d\tau$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{g}{r-g}\right)R(t,z) \tag{2.24}$$

De la ecuación (2.18) se tiene:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\int_{t^*}^\infty R_\tau(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

Reemplazando la ecuación (2.23) en la expresión anterior, se obtiene la expresión para el precio de la tierra agrícola cuando las rentas crecen geométricamente (se considera $r > g$):

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\int_{t^*}^\infty gR(t,z)e^{g(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{gR(t,z)}{r}\int_{t^*}^\infty e^{-(r-g)(\tau-t)}d\tau$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{g}{r-g}\right)R(t,z)e^{-(r-g)(t^*-t)}$$

De la ecuación (2.23):

$$e^{(t^*-t)} = \left(\frac{R^*}{R}\right)^{1/g}$$

$$e^{-(r-g)(t^*-t)} = \left(\frac{R}{R^*}\right)^{\frac{r}{g}-1}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{g}{r-g}\right)R(t,z)\left[\frac{R(t,z)}{R(t^*,z)}\right]^{\frac{r}{g}-1} \tag{2.25}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{g}{r-g}\right)R(t^*,z)\left[\frac{R(t,z)}{R(t^*,z)}\right]^{\frac{r}{g}} \tag{2.26}$$

Que en función de la distancia z es equivalente a:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{g}{r-g}\right)R(t^*,z)\left[1 + \frac{T\left(\bar{z}(t)-z\right)}{\bar{L}R^*}\right]^{\frac{r}{g}} \tag{2.27}$$

Cuando las rentas crecen geométricamente, el comportamiento de los precios de la tierra, tanto urbana como agrícola, es esencialmente el mismo que cuando es la población la que crece geométricamente. El precio urbano tiene los cuatro componentes descritos anteriormente: valor agrícola, valor de construcción, valor de ubicación o accesibilidad y prima de crecimiento. El precio agrícola tiene los dos componentes analizados en la sección anterior: el valor agrícola y la prima de crecimiento que varía esta última de forma inversa con la distancia al borde urbano. El cambio introducido en esta sección respecto a lo considerado en el artículo del autor, será para facilitar las comparaciones entre los diferentes modelos como se verá en los capítulos siguientes.

3 MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA LA CIUDAD

3.1 Introducción

Los fenómenos urbanos no son completamente deterministas; no siempre se cuenta con información suficiente y se tienen presentes una serie de elementos aleatorios. En un modelo de ciudad más cercano a la realidad, la conversión de la tierra de rural a urbana es irreversible; además, los ingresos de los hogares presentan incertidumbre en sus incrementos. Esto origina que el comportamiento de las rentas y de los precios de la tierra sean procesos estocásticos. El hecho de que no se tenga certeza de cuándo se dará la conversión, genera especulación retrasando el desarrollo de la ciudad e incrementando los precios.

En este capítulo se dará especial atención al trabajo de Dennis Capozza and Robert W. Helsley *The Stochastic City*, publicado en 1990, por ser uno de los que mejor resume y actualiza las ideas de sus predecesores, además de que este artículo constituye una extensión del modelo presentado por los mismos autores en el modelo determinístico tratado en el capítulo anterior. Las principales herramientas matemáticas y económicas usadas son: esperanza condicional, martingalas, tiempos de parada, cálculo estocástico, teoría de optimización, equilibrio parcial.

En la última parte de este capítulo se presenta, como aporte propio, el desarrollo del mismo modelo pero considerando un crecimiento geométrico de las rentas en vez de un crecimiento lineal de las mismas como está desarrollado en el artículo del autor. Esto se hace para más adelante poder comparar este modelo con los otros que serán presentados en los siguientes capítulos. En el Apéndice 2 se ha elaborado un ejemplo aplicativo de este modelo.

3.2 La ciudad estocástica: modelo de crecimiento lineal [6]

Paper: *The Stochastic City*

Autor: Dennis Capozza and Robert W. Helsley

Fuente: Journal of Urban Economics 28, 187-203 (1990)

3.2.1 Introducción

El trabajo de Capozza analiza el efecto de la incertidumbre en el equilibrio de las rentas y de los precios en un modelo simple de crecimiento del área urbana. Esencialmente, se aplica la teoría de procesos estocásticos en tiempo continuo al momento de la conversión de la tierra de rural a urbana bajo condiciones de incertidumbre. La asunción básica de este modelo es que dicha conversión de la tierra es económicamente irreversible, lo cual afecta las rentas y los precios de la tierra, aún cuando los dueños de la tierra sean neutrales frente al riesgo. La irreversibilidad se da porque una vez que el propietario de una parcela agrícola toma la decisión de convertirla a urbana, ya no se podrá volver al estado original.

El principal aporte del trabajo de los autores es la demostración de cuatro efectos de la incertidumbre:

- Retrasa la conversión de la tierra de uso agrícola a uso urbano
- Imparte un valor de opción de compra a la tierra agrícola
- Ocasiona que la tierra en el límite urbano se venda más que a su costo de oportunidad en otros usos
- Reduce el tamaño de equilibrio de la ciudad.

En este modelo los ingresos de los hogares, las rentas y los precios de la tierra, y el tamaño de la ciudad siguen procesos estocásticos.

3.2.2 Asunciones del modelo

Las asunciones de este modelo son las mismas que las del modelo determinista, excepto que el autor hace algunas asunciones que han sido modificadas para hacer el modelo más sencillo:

- Las ubicaciones son indexadas por sus distancias z desde el CBD, donde la distancia es medida para que el costo de transportarse a una unidad de distancia sea \$1 ($T = 1$).
- Los hogares son idénticos y sus utilidades provienen de la tierra y del bien numerario compuesto x. El consumo de tierra (tamaño de terreno) es fijado en una unidad por hogar ($\bar{L} = 1$).
- La restricción presupuestaria de un hogar residiendo en la ubicación z, siendo $y(t)$ el ingreso exógeno del hogar en el tiempo t y $R(t, z)$ la renta de la tierra, es:

$$y(t) = x + R(t, z) + z \tag{3.1}$$

3.2.3 Equilibrio del hogar

La condición de equlibrio para los hogares es :

$$V\left[R(t,z),y(t)\right]=\bar{V} \tag{3.2}$$

Donde $V(.)$ es la función de utilidad indirecta y $\bar{V}$ es el nivel de utilidad nacional, que en este modelo es constante ya que se tienen hogares idénticos. Ya que el tamaño de los lotes es fijo, la ecuación (3.2) implica que todos los hogares consumen la misma cantidad del bien numerario en equilibrio $\bar{x}$, donde

$$U(\bar{x},1)=\bar{V} \tag{3.3}$$

y $U(.)$ es la función de utilidad directa. La función renta de la tierra es

$$R(t,z)=y(t)-(\bar{x}+z) \tag{3.4}$$

3.2.4 Asunciones estocásticas

Además de las asunciones deterministas, se tienen asunciones adicionales para incluir la incertidumbre. Los ingresos de los hogares se incrementan todo el tiempo en forma incierta. Según Mills (1981), que el autor cita, los ingresos se incrementan debido a que el área urbana exporta a un mercado mundial en expansión. Los cambios en la demanda mundial son transmitidos mediante el mercado laboral a los ingresos de los hogares y a las rentas de la tierra al tiempo que el sector de exportación ajusta su volumen de producción.

La sucesión de variables aleatorias $\{y(t),t\geqslant 0\}$ es un proceso de movimiento browniano con tendencia g y varianza σ^2. Esto implica que los ingresos siguen un camino aleatorio que se desplaza hacia arriba $\$g$ por unidad de tiempo. Refraseando, es posible decir que la renta tiene una tendencia g y varianza σ^2 en cada tiempo t, y el valor de y será entonces gt más un valor estocástico con media cero y varianza σ^2. Como consecuencia, para el ingreso $y(t)$ se cumplen los supuestos de un proceso de Wiener:

1. Propiedad de los incrementos estacionarios: $y(t+s)-y(t)\sim N\left[gs,\sigma^2 s\right]$ para todo t
2. Propiedad de los incrementos independientes: $\forall t_0<t_1<...<t_n, y(t_1)-y(t_0), y(t_2)-y(t_1),...,y(t_n)-y(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes con distribuciones dadas en el anterior supuesto.
3. $y(0)=0$; y
4. $y(t)=gt+\sigma B(t)$, donde $\{B(t),t\geq 0\}$es movimiento browniano estándar con media 0 y varianza 1.

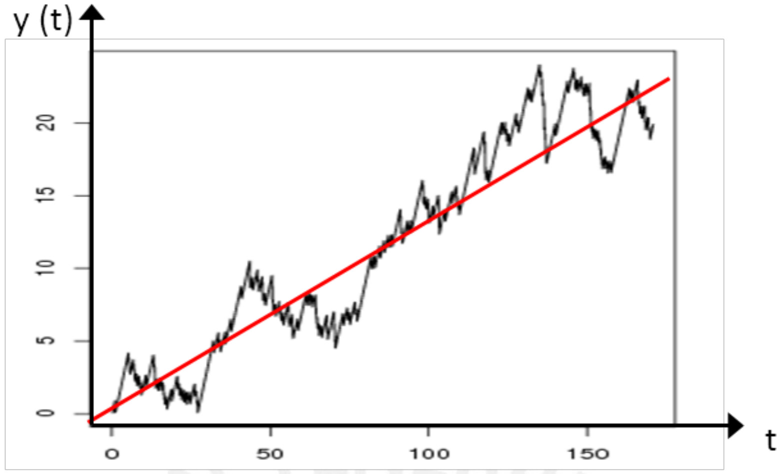

Figure 3.1: Movimiento Browniano de los ingresos

De la ecuación (3.4), la renta R es también una variable aleatoria, donde la sucesión $\{R(t,z), t \geq 0\}$ tiene, al igual que el ingreso las propiedades de los incrementos estacionarios e independientes; la tercera propiedad toma la forma de:

$$R(0,z) = -(\bar{x} + z)$$

Y la cuarta propiedad toma la siguiente forma:

$$R(t,z) \equiv R(0,z) + gt + \sigma B(t)$$

Las anteriores relaciones implican:

$$R(t+s,z) \stackrel{d}{=} R(t,z) + gs + \sigma B(s) \tag{3.5}$$

Donde las variables aleatorias en la ecuación (3.5) son iguales en distribución.

Aplicando propiedades del movimiento browniano, la ecuación (3.5) puede escribirse de la siguiente manera:

$$R(t+s,z) = R(0,z) + g(t+s) + \sigma B(t+s)$$

3.2.5 Valor de la tierra urbana

En un mercado competitivo el precio de la tierra equivale al valor presente esperado de las rentas de tierra futura. El autor asume que los dueños de la tierra urbana son neutrales al riesgo y tienen una tasa de descuento común r; además, dichos dueños conocen las rentas actuales $R(t,z)$ y la distribución de las rentas futuras, dada por g y σ. El precio al tiempo t de una unidad de tierra urbana a la ubicación z es:

$$P^u(t,z) = E\left\{\int_t^\infty R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\}, z \leq \bar{z}(t) \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) expresa una esperanza condicional en la información disponible al tiempo t.[3]

Ajustando $\tau = t + s$ en (3.5) y reemplazando en (3.6), se tiene el precio de la tierra urbana:

$$P^u(t,z) = E\left\{\int_0^\infty \left[R(t,z) + gs + \sigma B(s)\right] e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^u(t,z) = E\left\{\int_0^\infty R(t,z)e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + E\left\{\int_0^\infty gse^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + E\left\{\int_0^\infty \sigma B(s)e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^u(t,z) = E\left\{R(t,z)\int_0^\infty e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + gE\left\{\int_0^\infty se^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + \sigma E\left\{\int_0^\infty B(s)e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\}$$

Cambiando de variables:

$$a = E\left\{R(t,z)\int_0^\infty e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\}$$

$$b = gE\left\{\int_0^\infty se^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\}$$

$$c = \sigma E\left\{\int_0^\infty B(s)e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\}$$

Se tienen las siguientes identidades para resolver las integrales:

$$\int e^{-rs}ds = -\frac{1}{r}e^{-rs} \ ...(*)$$

$$\int se^{-rs}ds = -\frac{1}{r}e^{-rs}(s + \frac{1}{r}) \ ...(**)$$

Aplicando (*) en a se obtiene $1/r$. Aplicando propiedades de esperanza condicional se llega a:

$$a = \frac{1}{r}E\left\{R(t,z) \mid R(t,z)\right\} = \frac{1}{r}R(t,z)$$

Aplicando (**) en b se obtiene $1/r^2$. Ya que esta expresión no depende de $R(t,z)$, se obtiene:

[3] Como bien se sabe por teoría de la medida, la existencia de una función de esperanza condicional es determinada por el Teorema de Radon-Nikodym; una condición suficiente es que la esperanza incondicional exista.

$$b = \frac{g}{r^2}$$

$B(s)$ es por definición un movimiento browniano estándar, por lo que tiene una distribución de probabilidad normal con media cero $E\left[B(s)\right] = 0$ y varianza s. Se probará que la esperanza del término definido arriba como c es nula.

$$\begin{array}{rcl} E\left\{\int_0^\infty B(s)e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} & = & \int_\Omega \left\{\int_0^\infty B(s)e^{-rs}ds\right\} dP \; (Def. \; Esperanza) \\ & = & \int_0^\infty e^{-rs}\left\{\int_\Omega B(s)dP\right\} ds \; (Teor. \; Fubini) \\ & = & \int_0^\infty e^{-rs}E\left[B(s)\right] ds \\ & = & 0 \end{array}$$

Luego, el precio de la tierra en el área urbana será la suma de los tres componentes a, b y c.

$$P^u(t,z) = \frac{1}{r}R(t,z) + \frac{g}{r^2}$$

$$P^u(t,z) = \frac{1}{r}\left[R(t,z) + \frac{g}{r}\right] \tag{3.7}$$

3.2.6 Valor de la tierra agrícola

En el área agrícola, la renta de la tierra es A. El costo de capital de convertir una unidad de tierra a uso urbano es C. Luego, la tierra urbana es producida de la tierra agrícola añadiendo una cantidad fija de capital por unidad. Después de que la tierra es convertida, recibe rentas urbanas por siempre. La decisión de transformar la tierra rural en urbana es irreversible. El valor de la tierra agrícola en el tiempo t a la ubicación z es:

$$P^a(t,s,z) = E\left\{\int_t^{t+s} Ae^{-r(\tau-t)}d\tau + \int_{t+s}^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau - Ce^{-rs} \mid R(t,z)\right\}, z \geq \bar{z}(t) \tag{3.8}$$

Donde $t+s$ es la fecha de la conversión de la tierra de agrícola a urbana y s es un tiempo de parada. El primer término dentro de la esperanza en la ecuación (3.8) es el valor presente de las rentas agrícolas hasta la fecha de la conversión. El segundo término es el valor presente de las rentas urbanas desde la fecha de conversión en adelante. El último término es el valor presente del costo de conversión al tiempo $t+s$.

El movimiento browniano posee la propiedad de Markov. Esta propiedad nos dice que para predecir el futuro del proceso, conocer sólo el presente proporciona tanta información como conocer toda la historia del proceso hasta el tiempo t. Se dice que es una propiedad por la que el proceso no tiene memoria.

Expresando en el lenguaje matemático se tiene para las rentas que, siendo $\{R(t,z), t \geq 0\}$ un proceso de movimiento browniano[4]:

$$P\left(R_{t+s} = r_{t+s} \mid R_s = r_s, R_{s_n} = r_{s_n}, ..., R_{s_2} = r_{s_2}, R_{s_1} = r_{s_1}\right) = P\left(R_{t+s} = r_{t+s} \mid R_s = r_s\right)$$

La propiedad fuerte de Markov extiende la propiedad de Markov a los tiempos de parada.

De las ecuaciones (3.5), (3.7) y usando la propiedad de Markov fuerte[4], la ecuación (3.8) se puede escribir:

$$P^a(t,s,z) = E\left\{\int_t^{t+s} Ae^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\} + E\left\{\int_{t+s}^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\} + E\left\{-Ce^{-rs} \mid R(t,z)\right\}$$

Haciendo:

$$\alpha = E\left\{\int_t^{t+s} Ae^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\}$$

$$\beta = E\left\{\int_{t+s}^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\}$$

$$\gamma = E\left\{-Ce^{-rs} \mid R(t,z)\right\}$$

Para resolver la integral de α aplicamos (*):

$$\alpha = AE\left\{-\frac{1}{r}e^{-r(\tau-t)}\Big|_{t+s}^{\infty} \mid R(t,z)\right\}$$

$$\alpha = AE\left\{-\frac{1}{r}\left(e^{-rs}-1\right) \mid R(t,z)\right\}$$

$$\alpha = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}E\left\{-Ae^{-rs} \mid R(t,z)\right\}$$

Para resolver la integral de β aplicamos las ecuaciones (3.5) y (**) y ajustando $\tau = t+s$:

$$\beta = E\left\{\int_{t+s}^{\infty} R(t,z)e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + E\left\{g\int_{t+s}^{\infty} se^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + \sigma E\left\{\int_{t+s}^{\infty} B(s)e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\}$$

$$\beta = E\left\{\frac{1}{r}R(t,z)e^{-rs} \mid R(t,z)\right\} + E\left\{\frac{g}{r}(s+\frac{1}{r})e^{-rs}ds \mid R(t,z)\right\} + E\left\{\frac{\sigma}{r}B(s)e^{-rs} \mid R(t,z)\right\}$$

$$\beta = \frac{1}{r} E\left\{ \left[R(t,z) + gs + \sigma B(s) + \frac{g}{r} \right] e^{-rs} \mid R(t,z) \right\}$$

$$\beta = \frac{1}{r} E\left\{ \left[R(t+s,z) + \frac{g}{r} \right] e^{-rs} \mid R(t,z) \right\}$$

$$P^a(t,s,z) = \alpha + \beta + \gamma$$

$$P^a(t,s,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r} E\left\{ -Ae^{-rs} \mid R(t,z) \right\} + \frac{1}{r} E\left\{ \left[R(t+s,z) + \frac{g}{r} \right] e^{-rs} \mid R(t,z) \right\} + \frac{1}{r} E\left\{ -rCe^{-rs} \mid R(t,z) \right\}$$

$$P^a(t,s,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r} E\left\{ \left[R(t+s,z) + \frac{g}{r} - A - rC \right] e^{-rs} \mid R(t,z) \right\} \tag{3.9}$$

Los dueños de la tierra escogerán la fecha de conversión que maximize el beneficio esperado o el valor de la tierra. Por ello, los terratenientes resolverán el programa:

$$\max_{s} P^a(t,s,z) \tag{3.10}$$

Sea t^* el tiempo óptimo de conversión. Luego, el precio de la tierra es $P^a(t,t^*,z) \equiv P^a(t,z)$

3.2.7 Rentas y precios cuando se tiene futuro sin incertidumbre

Cuando se tiene una situación determinista, la desviación estándar de las variables aleatorias del modelo se aproxima a cero. Por ello, la ecuación (3.5) se transforma en:

$$R(t+s,z) = R(t,z) + gs \tag{3.11}$$

El tiempo óptimo de conversión se puede deducir de las ecuaciones (3.10) y (3.8):

$$R(t^*,z) = A + rC \tag{3.12}$$

Es decir, en el borde del área urbana, la renta es igual a la renta agrícola más el costo de oportunidad de convertir la tierra de rural a urbana. De la ecuación (3.4):

Renta:

$$R(t,z) = \begin{cases} A + rC + z^*(t) - z, & z \leq \bar{z}(t) \\ A, & z > \bar{z}(t) \end{cases} \tag{3.13}$$

Precio de la tierra urbana: reemplazando (3.13) en (3.7):

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r}\left[z^*(t) - z\right],\ z \leq \bar{z}(t) \tag{3.14}$$

Precio de la tierra agrícola: de (3.9):

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}E\left\{\left[R(t+s,z) + \frac{g}{r}\right]e^{-rs} \mid R(t,z)\right\} - \frac{1}{r}E\left\{\left[A + rC\right]e^{-rs} \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}E\left\{R(t+s,z)e^{-rs} \mid R(t,z)\right\} + \frac{1}{r}E\left\{\frac{g}{r}e^{-rs} \mid R(t,z)\right\} - \frac{1}{r}E\left\{\left[A + rC\right]e^{-rs} \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{g}{r^2}e^{-r(t^*-t)}E\left\{1 \mid R(t,z)\right\} + \frac{e^{-r(t^*-t)}}{r}E\left\{R(t+s,z) \mid R(t,z)\right\} - \frac{e^{-r(t^*-t)}}{r}E\left\{\left[A + rC\right] \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{g}{r^2}e^{-r(t^*-t)},\ z > \bar{z}(t) \tag{3.15}$$

De la ecuación (3.11):

$$R(t^*,z) = R(t,z) + g(t^* - t)$$

$$t^* - t = \left[R(t^*,z) - R(t,z)\right]/g$$

De la ecuación (3.4) ($\bar{x}$ y y son constantes):

$$R(t^*,z) = y(t^*,z) - (\bar{x} + \bar{z}(t))$$

$$R(t^*,z) - R(t,z) = y(t^*,z) - y(t,z) - (\bar{z}(t) - z)$$

$$R(t^*,z) - R(t,z) = z - \bar{z}(t)$$

$$t^* - t = \left[R(t^*,z) - R(t,z)\right]/g = \left[z - \bar{z}(t)\right]/g$$

Reemplazando en (3.15):

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{g}{r^2}e^{-r[z-\bar{z}(t)]/g},\ z > \bar{z}(t) \tag{3.16}$$

Teniendo en cuenta las asunciones y simplificaciones en este modelo donde el área del lote y el costo de transporte por distancia recorrida tienen valores unitarios ($\bar{L} = 1, T = 1$) y que además el crecimiento de los ingresos y las rentas es lineal en vez de exponencial, las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.16) son muy similares a las obtenidas para el modelo determinista desarrollado en el capítulo 2, y por lo tanto las conclusiones son prácticamente las mismas. La renta de la tierra tiene tres componentes: la renta agrícola A, la renta de conversión rC y la renta de ubicación $[\bar{z}(t) - z]$ (más allá del borde urbano la renta es

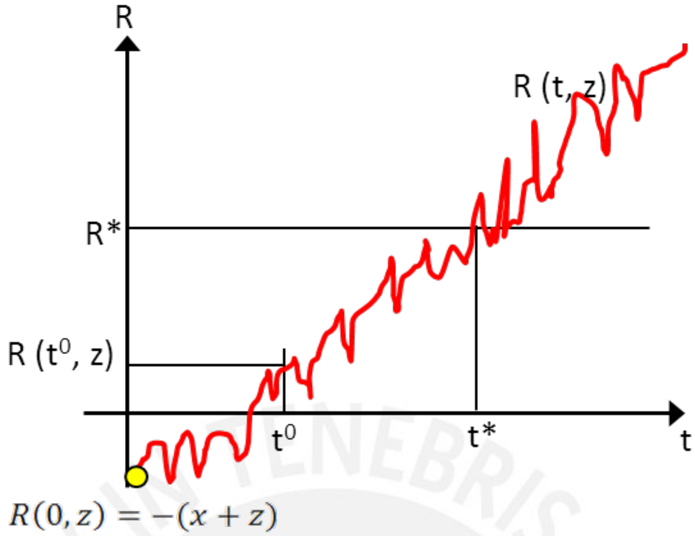

Figure 3.2: Tiempo de parada (Fuente: [6])

completamente agrícola). El precio de la tierra urbana tiene cuatro componentes: el valor de la renta Agrícola A/r, el costo de conversión C, el valor de ubicación o accesibilidad $\frac{1}{r}\left[\bar{z}(t)-z\right]$ y la prima de crecimiento equivalente al valor presente de los incrementos de renta anticipados después del desarrollo de la tierra (habilitación urbana). El precio de la tierra agrícola tiene dos componentes: el valor agrícola y la prima de crecimiento que tiene su valor máximo en el borde urbano y disminuye con la distancia.

3.2.8 Rentas y precios cuando el futuro es incierto

Para resolver el modelo probabilístico, se tratará el problema del dueño de la tierra como un problema de tiempo de parada[4]. Si R^* representa el nivel de rentas urbanas al cual es óptimo convertir la tierra agrícola en urbana (R^* llamado también nivel de renta de reserva), el tiempo de conversión, conocido también como el primer tiempo de parada o tiempo de alcance, se define como:

$$t^* = \min_{s} \{t + s \geq t \mid R(t+s, z) \geq R^*\} \tag{3.17}$$

En la realidad R^* es el nivel de rentas que se tiene en la periferia de la ciudad. El tiempo de parada está ilustrado en la Figura (3.2)

Definiendo $F(R^*)$ como el precio de la tierra agrícola esperado condicionado a R^*:

$$F(R^*) = E\left\{P^a(t, t^*, z) \mid R(t, z), R^*\right\}$$

De (3.9) se tiene:

$$F(R^{*}) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left[R^{*} + \frac{g}{r} - A - rC\right] E\left\{e^{-r(t*-t)} \mid R(t,z), R^{*}\right\} \tag{3.18}$$

El único componente aleatorio en la expresión anterior es el tiempo de parada t^{*}; los demás componentes no son afectados por la esperanza condicional.

La distribución del primer tiempo de parada bajo un movimiento browniano con media g y desviación estándar σ es conocida. Aplicaremos las propiedades de las martingalas y de los tiempos de parada (un movimiento browniano o proceso de Wiener es una martingala). Para hallar la esperanza condicional de la ecuación (3.18) se ha tomado el desarrollo que se presenta en Karlin y Taylor. [14]

Definimos α de tal forma que se cumpla:

$$r = \alpha g + \tfrac{1}{2}\alpha^{2}\sigma^{2}\ (***)$$

Se probará que $V\left(t\right)$ es una martingala, donde

$$V(t) = \exp\left\{\alpha R(t) - rt\right\}$$

- $V(t)$ es integrable: $E \mid V(t) \mid= \exp\left\{\alpha R(t) - rt\right\} < \infty$
- $V(t)$ es adaptada a la filtración: $\mathcal{F}_t = \sigma(t_1, t_2, ..., t, ...t^{*})$
- $E\left[V(t+s) \mid \mathcal{F}_t\right] = V(t)$

Se probará la última condición:

$$\begin{aligned}
E\left[V(t+s) \mid \mathcal{F}_t\right] &= E\left[e^{\alpha R(t+s) - r(t+s)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[e^{\alpha R(t) - r(t)} e^{\alpha(gs + \sigma B(s)) - rs} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[V(t) e^{\alpha(gs + \sigma B(s)) - rs} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= V(t) E\left[e^{\alpha(R(t+s) + R(t)) - rs}\right] \\
E\left[V(t+s) \mid \mathcal{F}_t\right] &= V(t)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$0 \leq V(t) \leq e^{\alpha R(t)}$$

Para $t = 0$, $R\left(0, z\right) = -\left(\bar{x} + z\right)$

Para un t cualquiera, se tiene $R(t,z)$. Se tiene:

- El primer tiempo de parada $t^* < \infty$
- $V(t^*)$ es integrable, es decir $E \mid V(t^*) \mid = E \mid \exp\{\alpha R(t^*) - rt^*\} \mid < \infty$
- $E\left[V\left(t\right)1_{\{t^*>t\}}\right] \to 0,\ conforme\ t \to \infty$

Siendo $1_{\{t^*>t\}}$la función indicadora, se puede comprobar la expresión anterior ya que:

$$V\left(t\right)1_{\{t^*>t\}} = \begin{cases} V\left(t\right),\ t^* > t \\ 0,\ t^* \leq t \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} E\left[V\left(t\right)1_{\{t^*>t\}}\right] = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} E\left[V\left(t\right)1_{\{t^*\leq t\}}\right] = E\left[V\left(t\right)\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} E\left[V\left(t^* \wedge t\right)\right] = 1$$

Se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de Parada Opcional:

$$E\left[V\left(t^*\right)\right] = E\left[V\left(1\right)\right]$$

Y la propiedad fundamental de las martingalas, para un tiempo t cualquiera:

$$E\left[V\left(t^*\right)\right] = E\left[V\left(t\right)\right]$$

Reemplazando el valor de $V(t)$ y teniendo en cuenta que t^* es la única variable aleatoria:

$$E\left[e^{\alpha R^*}e^{-rt^*}\right] = E\left[e^{\alpha R(t,z)}e^{-rt}\right]$$

$$e^{\alpha R^*}E\left[e^{-rt^*}\right] = e^{-\alpha R(t,z)}e^{-rt}$$

$$E\left[e^{-r(t^*-t)}\right] = e^{-\alpha(R^*-R(t,z))}$$

$$E\left\{e^{-r(t*-t)} \mid R(t,z), R^*\right\} = e^{-\alpha[R*-R(t,z)]} \tag{3.19}$$

De (***):

$$\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + g\alpha - r = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{g^2+2\sigma^2 r} - g\right)$$

$$\alpha = \frac{\left(g^2 + 2\sigma^2 r\right)^{1/2} - g}{\sigma^2} \tag{3.20}$$

Por tanto, reemplazando los resultados obtenidos en la ecuación (3.18) el precio de la tierra agrícola esperado puede escribirse como:

$$F(R^*) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left[R^* + \frac{g}{r} - A - rC\right] e^{-\alpha[R* - R(t,z)]} \tag{3.21}$$

El nivel de renta de reserva, o valor de conversión óptimo, R^* maximiza (3.21). Aplicando las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial F\left(R^*\right)}{\partial R^*} = -\frac{\alpha}{r}\left[R^* + \frac{g}{r} - A - rC\right] e^{-\alpha[R* - R(t,z)]} + \frac{1}{r} e^{-\alpha[R* - R(t,z)]} = 0$$

$$\frac{1}{r}\left[R^* + \frac{g}{r} - A - rC\right] = \frac{1}{\alpha r}$$

$$R^* = A + rC + \frac{r - \alpha g}{\alpha r} \tag{3.22}$$

Donde $\alpha \leq r/g$. Comparando las ecuaciones (3.12) y (3.22) se llega a la conclusión que cuando existe incertidumbre, la renta en el borde urbano es más alta. De (3.7) el precio de reserva, o precio en el borde urbano es:

$$P^* = \frac{A}{r} + C + \frac{g}{r^2} + \frac{r - \alpha g}{\alpha r^2} \tag{3.23}$$

De las anteriores relaciones, se deduce la Función de Renta de equilibrio, tanto para el área urbana como para el área agrícola:

$$R(t,z) = \begin{cases} A + rC + \frac{r-\alpha g}{\alpha r} + \bar{z}(t) - z, \; z \leq \bar{z}(t) \\ A, \; z > \bar{z}(t) \end{cases} \tag{3.24}$$

La renta con incertidumbre tiene los mismos componentes que la renta determinista más un cuarto término que es la renta de incertidumbre o de irreversibilidad $\frac{r-\alpha g}{\alpha r}$ que varía de forma directa con la varianza σ^2. Interesa saber qué pasa con α cuando la varianza σ^2 tiende a cero. En la ecuación (3.20) la expresión bajo el radical se desarrolla según el teorema del binomio.

$$\alpha = \frac{\left(g^2 + 2\sigma^2 r\right)^{1/2} - g}{\sigma^2}$$

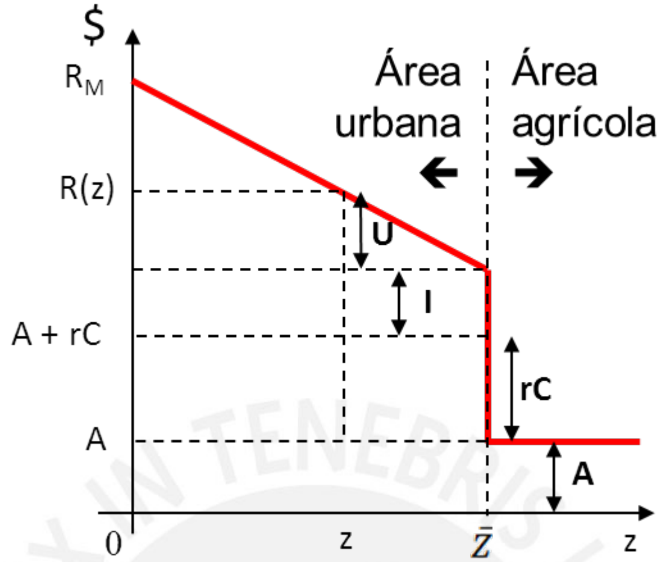

Figure 3.3: Renta de la tierra con incertidumbre

$$\alpha = \frac{g\left[\left(1+2\left(\frac{\sigma}{g}\right)^2 r\right)^{1/2} - 1\right]}{\sigma^2}$$

$$\alpha = \frac{g\left[1+r\left(\frac{\sigma}{g}\right)^2 - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\sigma}{g}\right)^4 + \frac{1}{2}r^3\left(\frac{\sigma}{g}\right)^6 - ... - 1\right]}{\sigma^2}$$

$$\alpha = g\left[r\left(\frac{1}{g^2}\right) - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\sigma^2}{g^4}\right) + \frac{1}{2}r^3\left(\frac{\sigma^4}{g^6}\right) - ...\right]$$

Tomando límites, se hace converger σ^2 a cero (mínimo), con lo que el valor de α (máximo) será:

$$\alpha = \frac{r}{g}$$

Reemplazando el valor de α en la expresión de la renta de irreversibilidad RI se tiene:

$$RI(mín) = \frac{\frac{r}{\alpha} - g}{r} = 0$$

Es decir, en ausencia de incertidumbre, no existe renta de irreversibilidad y la renta dada por la ecuación (3.24) coincide con la expresión dada en el caso determinista.

La figura (3.3) muestra la variación de las rentas de la tierra en función de la distancia con incertidumbre, tanto para el área urbana como para el área agrícola.

De (3.4) y (3.22), el límite del área urbana al tiempo t es:

$$\bar{z}(t) = y(t) - (R^* + \bar{x}) \tag{3.25}$$

De la ecuación (3.7), el precio de la tierra urbana es:

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{g}{r^2} + \frac{r-\alpha g}{\alpha r^2} + \frac{1}{r}\left[\bar{z}(t) - z\right],\ z \leq \bar{z}(t) \tag{3.26}$$

De (3.21), el precio de la tierra agrícola es:

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{1}{r}\left[R^* + \frac{g}{r} - A - rC\right] e^{-\alpha(R^* - R(t,z))}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \left[\frac{g}{r^2} + \frac{r-\alpha g}{\alpha r^2}\right] e^{-\alpha(R^* - R(t,z))}$$

De las ecuaciones (3.22) y (3.24):

$$R(t,z) - R^* = \bar{z}(t) - z$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{g}{r^2} e^{-\alpha[z-\bar{z}(t)]} + \frac{r-\alpha g}{\alpha r^2} e^{-\alpha[z-\bar{z}(t)]},\ z > \bar{z}(t) \tag{3.27}$$

Análogamente como se analizó para la renta, en ausencia de incertidumbre, $\sigma^2 = 0$, la prima de irreversibilidad es nula y las expresiones para los precios urbano y agrícola coinciden con las del caso determinista.

El precio de la tierra urbana con incertidumbre tiene ahora cinco componentes: cuatro de ellos son iguales a los del precio determinístico y el componente nuevo que aparece es la prima de irreversibilidad $\frac{r-\alpha g}{\alpha r^2}$. El precio de la tierra agrícola con incertidumbre tiene tres componentes: el valor agrícola A/r, la prima de crecimiento y la prima de irreversibilidad; los dos últimos tienen sus valores máximos en el borde urbano y decaen conforme se alejan de él. Además, el precio de la tierra agrícola ahora incluye un valor de opción, la contrapartida de la prima de irreversibilidad en el precio de la tierra urbana, la que crece menos conforme se incrementa la distancia desde el límite urbano y el tiempo del desarrollo se mueve más hacia el futuro. Estos resultados se pueden apreciar gráficamente en la Figura (3.4).

Las ecuaciones (3.24), (3.26) y (3.27) resumen lo más importante de este modelo. En general, se puede concluir que la incertidumbre incrementa las rentas y los precios en toda la ciudad y su alrededor agrícola.

3.2.9 El momento de la conversión

En un modelo determinista de crecimiento de un área urbana, la tierra es desarrollada cuando la renta

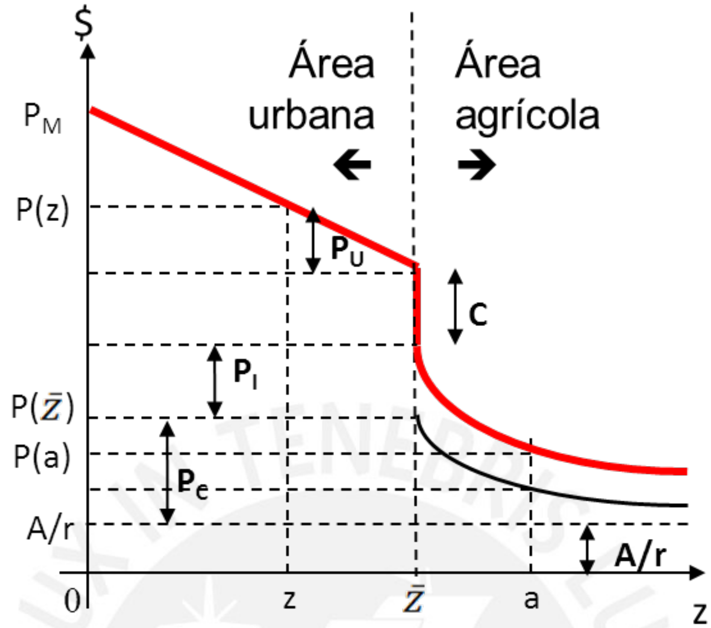

Figure 3.4: Precio de la tierra con incertidumbre

en el uso urbano iguala el costo de oportunidad del desarrollo: la suma de la renta de la tierra agrícola y del costo de oportunidad del capital. La incertidumbre acerca del comportamiento futuro de las rentas urbanas afecta la decisión del desarrollo. Intutitivamente se puede imaginar que una estrategia óptima sería posponer el desarrollo hasta que la renta de la tierra urbana se incremente lo suficiente como para compensar la aversión al riesgo de los inversionistas. Es decir, puede imaginarse que el desarrollo ocurrirá cuando la renta en el área urbana iguale el costo de oportunidad del desarrollo más una prima de riesgo.

Las verdaderas razones por las que el desarrollo es pospuesto en presencia de incertidumbre difieren de una interpretación intuitiva. El modelo sugiere que aún en presencia de inversionistas que son neutrales al riesgo, el desarrollo se postergará, por lo que la aversión al riesgo no es la explicación.

El desarrollo es postergado debido a que el costo de oportunidad del desarrollo incluye el valor de la opción de la tierra agrícola, el valor de la habilidad para evitar resultados adversos en un mercado de tierra urbano riesgoso mientras todavía retiene una reclamación en resultados favorables. El desarrollo no se producirá al mismo nivel de rentas que se exige para el caso determinista desde que los inversionistas saben que las rentas pueden caer por debajo de este nivel en el futuro inmediato. Sin embargo, mientras la conversión es pospuesta, y el nivel de rentas de la tierra urbana se mueve hacia arriba, la probabilidad de que las rentas caigan por debajo de las rentas agrícolas disminuye. Por lo tanto, el valor presente de los retornos futuros esperados se incrementa retrasando el desarrollo e incluso un inversionista neutral al riesgo adoptará dicha estrategia.

Con incertidumbre e irreversibilidad, el nivel de rentas que ocasiona la conversión de la tierra, la renta de reserva, supera la suma de la renta agrícola y el costo de oportunidad del capital. Análogamente, el precio de reserva de la tierra urbana excede el valor capitalizado de la renta de la tierra agrícola más el costo de conversión. Se puede apreciar que la renta y el precio de reserva suben con el grado de incertidumbre. De las ecuaciones (3.22) y (3.23) se tiene:

$$\frac{\partial R*}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma^2} > 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial P*}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{r\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma^2} > 0 \tag{3.29}$$

3.2.10 Tamaño de la ciudad

En este modelo de ciudad abierta, la incertidumbre reduce sin ambigüedades el tamaño esperado de la ciudad. Ya que las rentas en el borde urbano son más altas conforme más alto es el grado de incertidumbre acerca del futuro de las rentas de la tierra, en cualquier punto en el tiempo una fracción más grande del ingreso es dedicado al consumo de la tierra y una fracción más pequeña al transporte en un modelo de ciudad riesgosa. Esta situación sólo puede sostenerse si los hogares en el límite urbano realizan una travesía más reducida para ir a trabajar y el área urbana con la mayor varianza de rentas futuras es más pequeña. De la ecuación (3.25) se tiene:

$$E\left[\bar{z}(t)\right] = gt - (R^* + \bar{x}) \tag{3.30}$$

donde:

$$\frac{\partial E\left[\bar{z}(t)\right]}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial R*}{\partial \sigma^2} < 0 \tag{3.31}$$

3.2.11 Rentas y precios de la tierra

Como se ha visto, los efectos de la incertidumbre en los precios de la tierra están muy relacionados a sus efectos en el tamaño de la ciudad y en el momento de conversión de la tierra de rural a urbana. Una implicación fundamental es que aquel equilibrio de precio de la tierra en el área agrícola incluye un valor de opción que se incrementa con la varianza de las rentas. Este valor de la opción disminuye conforme la distancia del límite del área urbana se incrementa, implicando un gradiente espacial para los precios de la tierra agrícola que no están directamente relacionados a los costos de transporte. El equilibrio en los precios de la tierra en el área desarrollada incluye una prima de irreversibilidad que es igual al valor de la opción en el límite urbano y que también se incrementa con la varianza de las rentas.

El modelo implica que para un tamaño dado de la ciudad, los precios de la tierra tanto del área urbana como del área agrícola deben ser más altos en ciudades más riesgosas (según el modelo el riesgo proviene de la incertidumbre que existe en el nivel de los ingresos y por tanto en el nivel de rentas). Sin embargo, con el límite del área urbana determinado endógenamente, el precio de la tierra urbana no es afectado por la incertidumbre. De las ecuaciones (3.26) y (3.27), el precio esperado de la tierra urbana puede escribirse como:

$$E\left[P^u(t,z)\right] = \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r}\left(gt - \bar{x} - z\right),\ z \leq \bar{z}(t) \tag{3.32}$$

que es independiente de σ^2.

El precio esperado de la tierra agrícola, en cambio, sí depende del grado de incertidumbre cuando el tamaño de la ciudad es una variable endógena. De la ecuación (3.27), el precio esperado de la tierra agrícola puede ser escrito como:

$$E\left[P^a(t,z)\right] = \frac{A}{r} + \frac{1}{\alpha r} e^{-\alpha[z - Ez^*(t)]} e^{\left(\sigma^2/2\right)t},\ z > \bar{z}(t) \tag{3.33}$$

El efecto de una incertidumbre más alta en los precios de la tierra agrícola es ambiguo. La expresión $\partial P^a(t,z)/\partial\sigma^2$ es confusa y su signo es ambiguo. Cuando dos ciudades con diferente varianza de los ingresos futuros esperados son comparadas, los precios de la tierra agrícola pueden ser más bajos en la ciudad más riesgosa para algunas ubicaciones cerca del límite urbano. Sin embargo, se puede demostrar que los precios de la tierra agrícola son eventualmente más altos en el área urbana con mayor varianza. La figura (3.5) grafica el efecto del grado de incertidumbre en los precios y rentas de la tierra cuando el tamaño de la ciudad es endógeno.

El efecto de crecimiento e incertidumbre en el equilibrio de las rentas de la tierra es tal vez más sorpresivo. Debido a que las rentas son pagos por el uso actual de la tierra uno podría esperar que el crecimiento futuro o incertidumbre no tenga influencia en el pago actual. Pero aquí, debido a que el valor de la opción incrementa el valor de la renta, el tamaño de la ciudad y consecuentemente el equilibrio de las rentas urbanas promedio son afectados tanto por la tendencia g y la varianza σ^2 del proceso estocástico para las rentas. Para un tamaño de ciudad dado, tanto las rentas como los precios son más altos en una ciudad incierta.

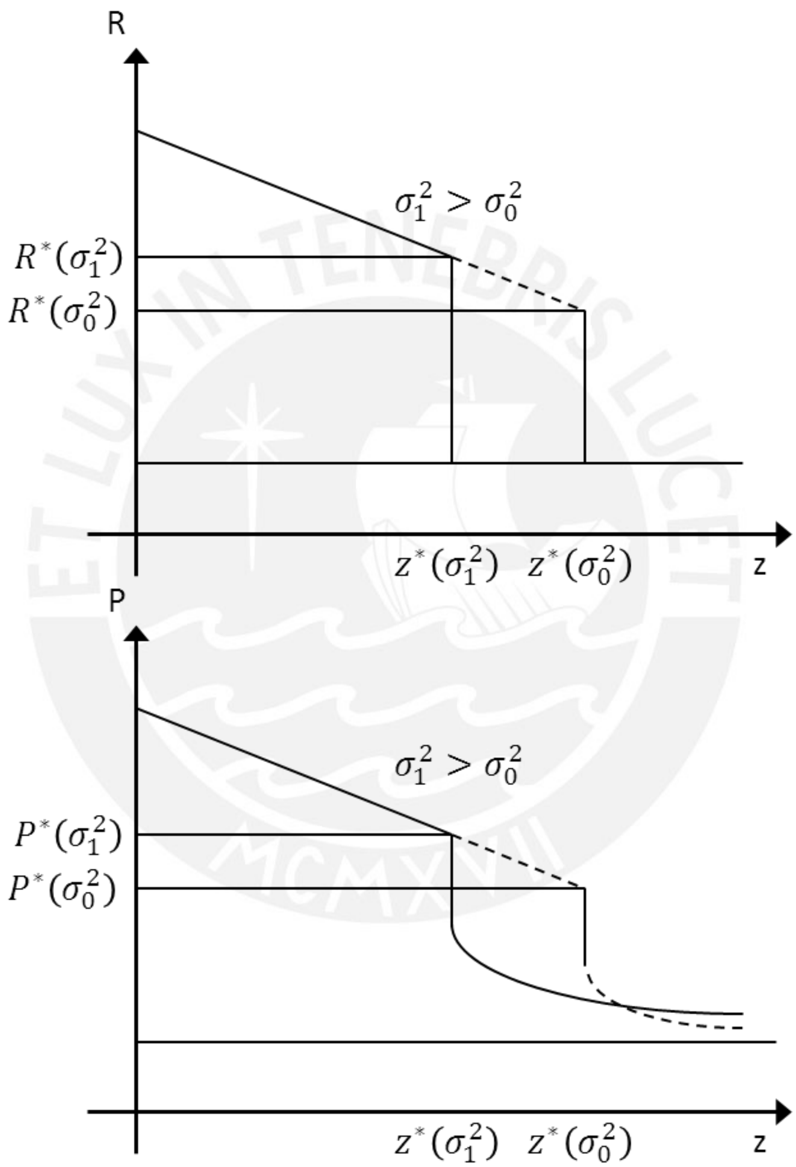

Figure 3.5: Equilibrio de rentas y precios de la tierra y grado de incertidumbre (Fuente: [6])

3.3 La ciudad estocástica: modelo de crecimiento geométrico

Se desarrollará el mismo modelo estocástico pero con el caso en el que los ingresos y las rentas crecen geométricamente con incertidumbre. Se seguirá el mismo procedimiento que el usado en el caso lineal. En este caso se asume que la variación porcentual de las rentas tiene una tendencia lineal que es afectada por un término de ruido modelado por un movimiento browniano según lo expresado por la ecuación (3.34). En otras palabras, las rentas evolucionan siguiendo un movimiento browniano geométrico.

$$\frac{dR(t,z)}{R(t,z)} = gdt + \sigma dB(t) \tag{3.34}$$

Donde $\{B(t), t \geq 0\}$ es un movimiento browniano estándar con media 0 y varianza 1, g es la tasa de crecimiento media y σ es la volatilidad o la desviación estándar de la tasa de crecimiento. Aplicamos el modelo de equilibrio del CAPM en su versión de tiempo continuo para determinar la rentabilidad ajustada al riesgo. En vez de usar g se usará $\hat{g}$ como la tasa de crecimiento de riesgo neutral.

$$\hat{g} = g - \lambda \quad \hat{r} = (r + \lambda) - g$$

donde λ es la prima de riesgo por el portafolio que replica la evolución estocástica del flujo de caja, y $r + \lambda$ es la tasa de descuento de riesgo ajustada.

Ya que $R(t,z)$ sigue un proceso de Îto, para resolver la ecuación anterior, aplicamos el cálculo de Îto [4]:

Fórmula de Îto: Sea $f : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$una función de clase $C^{1,2}$; es decir, con primera derivada parcial respecto a t continua y segunda derivada parcial respecto a X continua. Si X es una solución de:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t)$$

donde $B(t)$ es un movimiento browniano, entonces el proceso $Y = \{Y(t) = f(t, X(t))\}$satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dY(t) = \left[\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial t} + a(t,X(t))\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial X} + \frac{1}{2}b^2(t,X(t))\frac{\partial^2 f(t,X(t))}{\partial X^2}\right] dt + b(t,X(t))\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial X}dB(t)$$

Considerando la ecuación estocástica anterior (3.34) y tomando $\hat{g}$ en vez de g como tasa de crecimiento de riesgo neutral, se tiene ($\tilde{B}$ es un movimiento browniano estándar con otra medida de probabilidad):

$$dR(t) = \hat{g}R(t)dt + \sigma R(t)d\tilde{B}(t) \tag{3.35}$$

Se probará que la siguiente expresión:

$$R(t) = R(0)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\tilde{B}(t)} \tag{3.36}$$

es solución de la ecuación (3.35). Ya que se cumplen las asunciones, aplicamos la formula de Îto:

$$dR(t) = d\left(R(0)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\tilde{B}(t)}\right)$$

$$dR(t) = \left[\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)R(0)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B(t)} + \frac{\sigma^2}{2}R(0)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B(t)}\right]dt + \sigma R(0)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B(t)}d\tilde{B}(t)$$

$$dR(t) = \left[\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)R(t) + \frac{\sigma^2}{2}R(t)\right]dt + \sigma R(t)d\tilde{B}(t)$$

$$dR(t) = \hat{g}R(t)dt + \sigma R(t)d\tilde{B}(t)\square$$

Lo que prueba que (3.36) es solución de (3.35). En general, para un $R(\tau, z)$ cualquiera, se tiene (usaremos B en lugar de $\tilde{B}$ sin perder generalidad):

$$R(\tau, z) = R(t, z)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-t)+\sigma B(\tau-t)} \tag{3.37}$$

El precio de la tierra urbana es la esperanza condicional del flujo de rentas que se den a lo largo de la vida útil del terreno según lo descrito en la ecuación (3.6).

$$P^u(t, z) = E\left\{\int_t^\infty R(\tau, z)e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t, z)\right\}$$

$$P^u(t, z) = E\left\{\int_t^\infty R(t)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-t)+\sigma B(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t, z)\right\}$$

$$P^u(t, z) = E\left\{R(t, z)\int_t^\infty e^{-\left(r-\hat{g}+\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-t)}e^{\sigma B(\tau-t)}d\tau \mid R(t, z)\right\}$$

Haciendo los cambios de variable: $\tau - t = s$ y :

$$\phi = r - \widehat{g} + \frac{\sigma^2}{2} \tag{3.38}$$

La ecuación anterior se transforma en:

$$P^u(t, z) = E\left\{R(t, z)\int_0^\infty e^{-\phi s}e^{\sigma B(s)}ds \mid R(t, z)\right\}$$

Como $R(t,z)$ es $R(t,z)$ - medible y la integral es independiente de $R(t,z)$:

$$P^u(t,z) = R(t,z)E\left\{\int_0^{\infty} e^{-\phi s}e^{\sigma B(s)}ds\right\}$$

Recordando que por definición de esperanza:

$$E\left[X\right] = \int_{\Omega} X dP$$

$$P^u(t,z) = R(t,z)\int_{\Omega}\left\{\int_0^{\infty} e^{-\phi s}e^{\sigma B(s)}ds\right\}dP$$

Aplicando Fubini, se puede intercambiar el orden de integración:

$$P^u(t,z) = R(t,z)\int_0^{\infty} e^{-\phi s}\left(\int_{\Omega} e^{\sigma B(s)}dP\right)ds$$

$$P^u(t,z) = R(t,z)\int_0^{\infty} e^{-\phi s}E\left[e^{\sigma B(s)}\right]ds \tag{3.39}$$

Se calculará el valor de la esperanza $E\left[e^{\sigma B(s)}\right]$. Ya que $B(s)$ es un movimiento browniano estándar, tiene una distribución normal. El cálculo de la esperanza consiste en realidad en calcular la función generadora de momentos para la variable aleatoria $B(s)$:

$$B(s) \sim N(0,s)$$

$$\sigma B(s) \sim N(0, s\sigma^2)$$

Haciendo: $B(s) = X$

$$M_X(\sigma) = E\left[e^{\sigma X}\right] = \int_{\Omega} e^{\sigma X}dP$$

$$E\left[e^{\sigma X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2s\sigma^2}}e^x dx$$

$$E\left[e^{\sigma X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2s\sigma^2}\left(x^2-2s\sigma^2x+s^2\sigma^4\right)+\frac{s\sigma^2}{2}}dx$$

$$E\left[e^{\sigma X}\right] = e^{\frac{s\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2s\sigma^2}\left(x-s\sigma^2\right)^2}dx$$

La integral es de una función de densidad de probabilidad de una normal $N(s\sigma^2, s\sigma^2)$ en toda la extensión del intervalo, por lo que su valor es la unidad.

$$E\left[e^{\sigma B(s)}\right] = e^{\frac{s\sigma^2}{2}} \tag{3.40}$$

Reemplazando el resultado de la ecuación (3.40) en la ecuación (3.39):

$$P^u(t,z) = R(t,z)\int_0^\infty e^{-\phi s} e^{s\frac{\sigma^2}{2}} ds$$

$$P^u(t,z) = R(t,z)\int_0^\infty e^{-(\phi-\frac{\sigma^2}{2})s} ds$$

$$P^u(t,z) = \frac{R(t,z)}{\phi - \frac{\sigma^2}{2}}$$

Finalmente, reemplazando el valor de ϕ de la ecuación (3.38) el precio de la tierra urbana, cuando las rentas crecen siguiendo un movimiento browniano geométrico está dado por la ecuación (3.41):

$$P^u(t,z) = \frac{1}{r-\hat{g}} R(t,z) \tag{3.41}$$

Análogamente al caso lineal, la renta debe estar compuesta de cuatro componentes: la renta agrícola (A), la renta de construcción (rC), la renta de ubicación (RU) y la renta de irreversibilidad (o de incertidumbre) (RI).

$$R(t,z) = A + rC + \frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + RI$$

Reemplazando en la ecuación (3.41):

$$P^u(t,z) = \frac{1}{r-\hat{g}} R(t,z) = \left(\frac{1}{r} + \frac{\hat{g}}{r\,(r-\hat{g})}\right) R(t,z)$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{\hat{g}}{r\,(r-\hat{g})} R(t,z) + \frac{1}{r} RI \tag{3.42}$$

El último término de la ecuación (3.42) es el componente de incertidumbre para el precio. Se observa que si este término es nulo (ausencia de incertidumbre) la ecuación (3.42) coincide con la expresión (2.24) que da el precio determinista estudiado en la sección 2.3.

Para determinar el precio agrícola, aplicamos la ecuación (3.8):

$$P^a(t,s,z) = E\left\{\int_t^{t^*} A e^{-r(\tau-t)} d\tau - C e^{-r(t^*-t)} + \int_{t^*}^{\infty} R(\tau,z) e^{-r(\tau-t)} d\tau \mid R(t,z)\right\} \tag{3.43}$$

El primer y segundo términos de la esperanza son identicos al caso lineal visto anteriormente; en el tercer término, usando la ecuación (3.37), se tiene:

$$E_1 = E\left\{\int_t^{t^*} A e^{-r(\tau-t)} d\tau \mid R(t,z)\right\} = \frac{A}{r} - \frac{A}{r} E\left\{e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}$$

$$E_2 = E\left\{C e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\} = \frac{rC}{r} E\left\{e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}$$

$$E_3 = E\left\{\int_{t^*}^{\infty} R(\tau,z)e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\} = E\left\{\int_{t^*}^{\infty} R(t,z)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-t)+\sigma B(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}d\tau \mid R(t,z)\right\}$$

En donde la integral es la misma que la anterior pero con el límite inferior diferente:

donde $\phi = r - \hat{g} + \frac{\sigma^2}{2}$ y $s = \tau - t$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\int_{t^*}^{\infty} e^{-\phi s}e^{\sigma B(s)}ds \mid R(t,z)\right\}$$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{E\left\{\int_{t_1}^{\infty} e^{-\phi s}e^{\sigma B(s)}ds \mid R(t,z)\right\} \mid t^* = t_1\right\}$$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\int_{\Omega}\left\{\int_{t_1}^{\infty} e^{-\phi s}e^{\sigma B(s)}ds \mid R(t,z)\right\}dP \mid t^* = t_1\right\}$$

Aplicando Fubini, se puede intercambiar el orden de integración:

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\int_{t_1}^{\infty} e^{-\phi s}\left(\int_{\Omega} e^{\sigma B(s)}dP\right)ds \mid R(t,z) \mid t^* = t_1\right\}$$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\int_{t_1}^{\infty} e^{-\phi s}E\left[e^{\sigma B(s)}\right]ds \mid R(t,z) \mid t^* = t_1\right\}$$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\int_{t_1}^{\infty} e^{-\phi s}e^{s\sigma^2/2}ds \mid R(t,z) \mid t^* = t_1\right\}$$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\int_{t_1}^{\infty} e^{-(\phi-\sigma^2/2)s}ds \mid R(t,z) \mid t^* = t_1\right\}$$

$$E_3 = R(t,z)E\left\{\frac{e^{-(\phi-\sigma^2/2)(t^*-t)}}{\phi-\sigma^2/2} \mid R(t,z)\right\}$$

$$E_3 = \frac{R(t,z)}{r-\hat{g}}E\left\{e^{-(r-\hat{g})(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\} \tag{3.44}$$

Resolviendo y reemplazando en la expresión del precio de la tierra agrícola, ecuación (3.45)

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} - \frac{(A+rC)}{r}E\left\{e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\} + \frac{R(t,z)}{r-\hat{g}}E\left\{e^{-(r-\hat{g})(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r}+\frac{\hat{g}R(t,z)}{r\,(r-\hat{g})}E\left\{e^{-(r-\hat{g})(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}+\frac{R(t,z)}{r}E\left\{e^{-(r-\hat{g})(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}-\frac{A+rC}{r}E\left\{e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{\hat{g}R(t,z)}{r\,(r-\hat{g})}E_4 + \frac{R(t,z)}{r}E_4 - \frac{A+rC}{r}E_5 \tag{3.45}$$

Donde:

$$E_4 = E\left\{e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}$$

$$E_5 = E\left\{e^{-(r-\hat{g})(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\}$$

Para hallar las esperanzas condicionales se aplica un procedimiento análogo al desarrollado para el caso lineal en la sección 3.2 (ver Karlin y Taylor [14]). Se calculará el valor de E_4. El tiempo de parada t^* se define como en (3.17):

$$t^* = \min_s \{t :\mid R(t,z) \geq R^*\}$$

$$t^* = \min_s \left\{t :\mid e^{X(t,z)} \geq R^*\right\}$$

$$t^* = \min_s \{t :\mid X(t,z) \geq \ln R^*\}$$

Donde $R(t,x) = e^{X(t,z)}$ y $X(t,z) = \left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)$

Definimos θ de tal forma que se cumpla:

$$r = \theta\left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 \ (****)$$

Se probó en la sección anterior que $V(t)$ es una martingala, donde

$$V(t) = \exp\{\theta X(t) - rt\}$$

Se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de Parada Opcional:

$$E[V(t^*)] = E[V(1)]$$

Y la propiedad fundamental de las martingalas, para un tiempo t cualquiera:

$$E[V(t^*)] = E[V(t)]$$

Reemplazando el valor de $V(t)$ y teniendo en cuenta que t^* es la única variable aleatoria:

$$E\left[e^{\theta X^*}e^{-rt^*}\right] = E\left[e^{\theta X(t,z)}e^{-rt}\right]$$

$$e^{\theta X^*}E\left[e^{-rt^*}\right] = e^{-\theta X(t,z)}e^{-rt}$$

$$E\left[e^{-r(t^*-t)}\right] = e^{-\theta(X^*-X(t,z))}$$

Como: $R(t,x) = e^{X(t,z)}$ o $X(t,z) = \ln R(t,z)$

$$E\left[e^{-r(t^*-t)}\right] = e^{-\theta(\ln R^* - \ln R(t,z))}$$

$$E\left[e^{-r(t^*-t)}\right] = e^{-\theta\left(\ln \frac{R^*}{R(t,z)}\right)}$$

$$E\left[e^{-r(t^*-t)}\right] = \left[e^{\left(\ln \frac{R(t,z)}{R^*}\right)}\right]^{\theta}$$

$$E\left[e^{-r(t^*-t)}\right] = \left[\frac{R(t,z)}{R^*}\right]^{\theta} \tag{3.46}$$

De (****):

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta - r = 0$$

$$\theta = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{\left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r} - \left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

$$\theta = \frac{\left(\left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r\right)^{1/2} - \left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma^2} \tag{3.47}$$

Agrupando términos de manera conveniente comparando con el caso determinista de crecimiento geométrico de las rentas desarrollado en la sección 2.3, se tiene:

$$E_4 = E\left\{e^{-r(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\} = \left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta}$$

$$E_5 = E\left\{e^{-(r-\hat{g})(t^*-t)} \mid R(t,z)\right\} = \left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1}$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (3.45):

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{\hat{g}R(t,z)}{r\,(r-\hat{g})}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1} + \frac{R(t,z)}{r}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1} - \frac{A+rC}{r}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{\hat{g}R(t,z)}{r\,(r-\hat{g})}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1} + \frac{R^*}{r}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta} - \frac{A+rC}{r}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta}$$

Para la renta de reserva se cumple: $R^* = A + rC + RI$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{\hat{g}R(t,z)}{r\,(r-\hat{g})}\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1} + \frac{1}{r}\left(R^* - A - rC\right)\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta}$$

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \frac{\hat{g}}{r(r-\hat{g})}R(t,z)\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1} + \frac{1}{r}RI\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta} \tag{3.48}$$

Donde

$$\theta = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{\left(\hat{g} - \sigma^2/2\right)^2 + 2\sigma^2 r} - \left(\hat{g} - \sigma^2/2\right)\right) \tag{3.49}$$

Se aprecia que el parámetro α de la ecuación (3.20) en el caso estocástico lineal es casi idéntico al parámtero θ dado por la ecuación (3.49) para el caso estocástico geométrico, diferenciándose en que en este último g se ha reemplazado por $\hat{g} - \sigma^2/2$.

Aplicando el mismo procedimiento usado para el caso lineal desarrollado en el punto 3.2, para obtener la renta de reserva R^* aplicamos las condiciones de primer orden a la ecuación (3.48) respecto a R^*.

$$P^a(t,z) = \frac{A}{r} + \left(\frac{\hat{g}R^*}{r\,(r-\hat{g})} + \frac{RI}{r}\right)\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta}$$

$$\frac{\partial P^a(t,z)}{\partial R^*} = \frac{(1-\theta)\,\hat{g}}{r\,(r-\hat{g})}\,(R^*)^{-\theta} R^{\theta} + \frac{\theta\hat{g}}{r\,(r-\hat{g})}\,(R^*)^{1-\theta} R^{\theta-1}\frac{dR}{dR^*} - \theta\frac{RI}{r}R^{\theta}\,(R^*)^{-\theta-1} + \theta\frac{RI}{r}\,(R^*)^{-\theta} R^{\theta-1}\frac{dR}{dR^*} = 0$$

$$\frac{\theta\hat{g}}{r-\hat{g}}\,(R^*)^2\frac{dR}{dR^*} + \theta RIR^*\frac{dR}{dR^*} = \frac{(\theta-1)\,\hat{g}}{(r-\hat{g})}RR^* + \theta RIR = 0$$

$$\left(\frac{\theta\hat{g}}{r-\hat{g}}R^* + \theta RI\right)R^*\frac{dR}{dR^*} = \left(\frac{(\theta-1)\,\hat{g}}{(r-\hat{g})}R^* + \theta RI\right)R$$

$$\left[\frac{\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI}{\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI}\right]\frac{dR^*}{R^*} = \frac{dR}{R}$$

$$\int\left[\frac{\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI}{\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI}\right]\frac{dR^*}{R^*} = \int\frac{dR}{R} \tag{3.50}$$

La ecuación (3.50) tiene la forma $\int \frac{1}{x}\frac{Ax+B}{Cx+D}dx$, la que es posible resolver separando fracciones.

$$\int \frac{1}{x}\frac{Ax+B}{Cx+D}dx = \ln\left[x\,(Cx+D)^{\frac{A}{C}-\frac{B}{D}}\right]$$

Aplicando la expresión anterior para resolver (3.50), se tiene:

$$\ln\left\{R^*\left[\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI\right]^{\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)-1}\right\} = \ln R$$

$$R^*\left[\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI\right]^{-\frac{1}{\theta}} = R$$

$$\left(\frac{\hat{g}}{r-\hat{g}}\right)R^* + RI = \left(\frac{R^*}{R}\right)^{\theta} \tag{3.51}$$

De la ecuación de restricción presupuestaria, se tiene:

$$y = \bar{L}R + Tz + X$$

$$R = \frac{y}{\bar{L}} - \frac{T}{\bar{L}}z - \frac{X}{\bar{L}}$$

$$R^* = \frac{y}{\bar{L}} - \frac{T}{\bar{L}}\bar{z}(t) - \frac{X}{\bar{L}}$$

El numerario X y el ingreso total son constantes, entonces:

$$R - R^* = \frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) = RU$$

$$R = R^* + RU$$

Reemplazando en la ecuación (3.51)

$$\left(\frac{\hat{g}}{r - \hat{g}}\right) R^* + RI = \left(\frac{R^*}{R^* + RU}\right)^{\theta} \tag{3.52}$$

Resolviendo la ecuación (3.52) se obtiene R^*. La renta de incertidumbre RI se obtiene de:

$$RI = R^* - A - rC \tag{3.53}$$

De (3.52) y (*3.53*):

$$\left(\frac{r}{r - \hat{g}}\right) R^* - (A + rC) = \left(\frac{R^*}{R^* + RU}\right)^{\theta} \tag{3.54}$$

La renta urbana es:

$$R(t, z) = A + rC + RI + \frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) \tag{3.55}$$

De las ecuaciones (3.41) y (3.42), el precio de la tierra urbana es:

$$P^u(t, z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left(\bar{z}(t) - z\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{\hat{g}}{r - \hat{g}}\right] R(t, z) + \frac{1}{r}RI \tag{3.56}$$

Y el precio de la tierra agrícola es:

$$P^a(t, s, z) = \frac{A}{r} + \frac{\hat{g}}{r(r - \hat{g})} R(t, z)\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta - 1} + \frac{1}{r}RI\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta} \tag{3.57}$$

Donde θ se ha definido según la ecuación (3.49).

En resumen, en este caso de modelo estocástico con crecimiento geométrico de las rentas, el precio de la tierra urbana y agrícola tienen básicamente el mismo comportamiento que los precios del caso lineal vistos en la sección 3.2: el precio urbano tiene cinco componentes y el precio agrícola tiene tres. La diferencia está en que para el precio urbano en el caso geométrico la prima de crecimiento varía en función no sólo del tiempo sino también en función de la distancia. Para el precio agrícola, las primas de crecimiento e irreversibilidad disminuyen, conforme aumenta la distancia, más lentamente que en el caso lineal en el que disminuyen de forma exponencial.

4 *MODELO DE VALORACIÓN DE OPCIONES*

4.1 Introducción

En la construcción de modelos matemáticos para la valoración de la tierra, el método preferido es el de capitalización de la renta del suelo. Siguiendo este método, el precio de la tierra se define como el valor actual neto de los flujos netos de renta esperados que la tierra tiene el potencial de generar a lo largo de su vida útil, la que se asume infinita. Éste ha sido el método empleado para los modelos determinista y estocástico desarrollados en los capítulos 2 y 3. La teoría de valuación de opciones proporciona un marco para estudiar la relación entre el valor de la tierra y el desarrollo inmobiliario (edificación), o entre el valor de la tierra y su urbanización (conversión de la tierra de rural a urbana). La decisión de inversión física produce una opción de compra característica ya que el propietario (o desarrollador) tiene el derecho mas no la obligación de asumir el proyecto de habilitación urbana y/o construcción. El precio de ejercicio es el costo de la construcción. Como ocurre en las opciones financieras, la opción real es abandonada a la fecha de ejercicio y el proceso de construcción es irreversible. Se trata de una opción a perpetuidad ya que la fecha de expiración es ilimitada.

El modelo de valoración de opciones es más moderno. A diferencia de los modelos anteriores que tienen un enfoque desde la demanda, este modelo tiene un enfoque desde la oferta. Este capítulo se enfocará en el artículo *Optimal Land Development Decisions* de Capozza y Li y más que centrarse en el análisis de rentabilidad y en las funciones de producción y otras variables de interés de la empresa, el análisis se enfocará en la estimación del valor de la opción de desarrollo de la tierra. Las principales herramientas matemáticas y financieras que se utilizan son: teoría de valoración de opciones, calculo estocástico, teoría de optimización. Para la primera se ha tomando como consulta de referencia a Hull[13].

4.2 Decisiones óptimas de desarrollo de la tierra [7]

Paper: *Optimal Land Development Decisions*

Autor: Dennis Capozza and Yuming Li

Fuente: Journal of Urban Economics 51, 123-142 (2002)

4.2.1 Introducción

En este artículo, Cappoza modela la decisión de desarrollo cuando las rentas crecen geométricamente y con incertidumbre, y la intensidad de capital es variable. Se derivan reglas simples para estimar el momento óptimo de los proyectos de desarrollo de la tierra basados en los criterios del uso de la tasa interna de retorno y el valor presente neto. Se demuestra que, aún bajo certidumbre, los proyectos son óptimamente retrasados más allá del punto donde el valor actual neto llega a ser no negativo, si los flujos de caja esperados están creciendo.

Actualmente se reconoce que la decisión de invertir es equivalente a la decisión de ejercer una opción real y que la teoría de las opciones financieras puede aplicarse a las decisiones de inversión reales. Una diferencia crucial entre las opciones reales y financieras es la habilidad para variar la intensidad de capital de la inversión (o volumen de producción) la que es importante cuando hay un factor de producción fijo tal como la tierra o la mano de obra.

Las asunciones en este modelo son:

- Las rentas crecen geométricamente y con incertidumbre.
- El desarrollo de la tierra es irreversible.
- El volumen de producción es variable.
- La tecnología de producción tiene elasticidad de sustitución constante, CES por sus siglas en inglés (no se considerará en esta tesis este punto desarrollado por el autor en el artículo).

Los tres principales resultados del modelo que los autores exponen son:

- Los proyectos son óptimamente retrasados más allá de la barrera ingenua en la que la TIR iguala al costo del capital, aún en condiciones de certidumbre cuando los flujos de caja están creciendo, lo cual implica que la incertidumbre es una condición suficiente pero no necesaria para un retraso óptimo. Los proyectos son retrasados aún más si el volumen de producción es variable.
- Se generalizan las reglas de decisión óptimas que surgen del enfoque de las opciones reales y se comparan con las reglas clásicas de inversión que usan los indicadores VAN, TIR y el ratio q de Tobin. Se comparan además los valores críticos bajo certidumbre e incertidumbre. Irreversibilidad y volumen de producción variable alteran las decisiones óptimas de desarrollo.

- Se derivan las circunstancias bajo las cuales un incremento en la tasa de interés conduce a un incremento de la inversión. Este resultado aparentemente perverso surge porque la irreversibilidad desacopla reglas de decisión óptimas desde una relación monótona con la tasa de interés única. Cuando los proyectos son retrasados, el VAN es positivo y la TIR es mayor al costo del capital. Un incremento en la tasa de interés y del costo de capital puede ser compensado por una disminución en el valor de la opción que acelera los proyectos de inversión.

4.2.2 La decisión de desarrollo de la tierra

Las asunciones del modelo son:

- Se tiene una única variable de estado, la renta neta o flujo de caja $X(t)$ por unidad de producción del proyecto.
- Los proyectos de desarrollo (construcción) se consideran nuevas inversiones, es decir el capital durable comprometido en el pasado no se perderá si el proyecto es ejecutado.
- Hay un sólo factor de producción fijo que es la tierra.
- Al momento de la inversión el constructor escoje la intensidad de capital (nivel de inversión) K, y el volumen de producción o nivel de capacidad $Q(K)$. Se asume que el capital es de vida infinita y que no se deprecia.
- La función de producción $Q(K)$ se asume que es creciente y cóncava: $Q'(K) > 0$, $Q''(K) < 0$
- Una unidad de capital cuesta 1 unidad monetaria para que el costo de inversión del proyecto sea también K.
- Una vez que el costo de capital de la inversión es comprometido al proyecto, se asume que es irreversible.
- El mercado espacial es competitivo de tal forma que la demanda de espacio $Q(K)$ es perfectamente elástica.

La renta neta $X(t)$ al tiempo t, evoluciona estocásticamente siguiendo un movimiento browniano geométrico de la forma expresada en la ecuación (4.1):

$$\frac{dX}{X} = gdt + \sigma dB \tag{4.1}$$

Donde g es la tasa de crecimiento media, σ es la volatilidad o desviación estándar de la tasa de crecimiento y dB es el incremento de un proceso de Wiener estándar. Los decisores conocen los parámetros del proceso tal que hay previsión perfecta ($\sigma = 0$) o expectativas racionales ($\sigma > 0$).

En cualquier tiempo t, el precio de una unidad de espacio es el valor presente de los flujos de caja futuros esperados, tal como lo expresa la ecuación (4.2):

$$P\left[X\left(t\right)\right] = E_t\left[\int_t^{\infty} X(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau\right] \tag{4.2}$$

Donde E_t es la esperanza condicional en la información en t acerca del flujo de caja ajustado y riesgoso $X(\tau)$, y r es la tasa de descuento ($\tau > t$).

Debido a (4.1), el precio unitario de espacio, P, es una función de la renta neta $X(t)$ al tiempo t. El valor del nivel de producción anual $Q(K)$ es $Q(K)P(X)$. Si el proyecto es asumido al momento t, el valor actual neto VAN del proyecto es:

$$V(X, K) = Q(K)P(X) - K \tag{4.3}$$

La ecuación (4.3) representa el VAN de los flujos de caja futuros menos el costo de inversión. El problema de inversión es seleccionar el número de unidades de capital K, y el momento de desarrollo $T \geq t$, para maximizar el valor de la oportunidad de inversión.

$$W(X) = \max_{T,K} E_t\left[V\left(X\left(T\right)\right)e^{-r(T-t)}\right] \tag{4.4}$$

En la ecuación (4.4) E_t es la esperanza condicional definida anteriormente, T es el primer tiempo de parada aleatorio adaptado al proceso del flujo de caja (momento óptimo de construcción en el futuro), y K es escogido para maximizar el VAN al tiempo T. $W(X)$ representa el valor de una garantía perpetua o el valor de la opción para invertir en el proyecto en cualquier fecha futura. Es también el valor presente al tiempo t del VAN al momento de inversión óptimamente escogido. La figura (4.1) ilustra el valor de W.

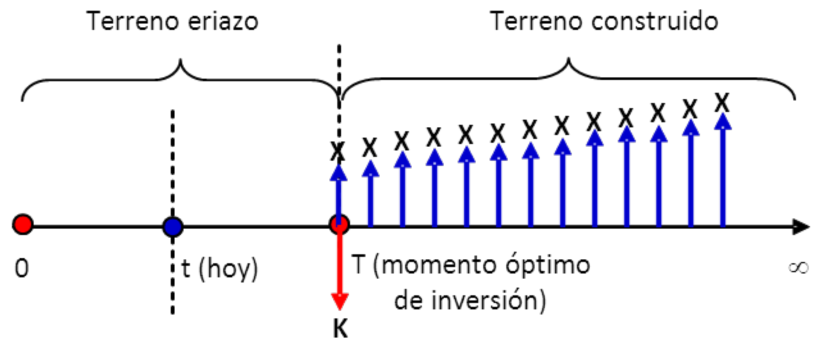

Figure 4.1: Valor de la opción W

4.2.3 Reglas de decisión óptima con previsión perfecta

Los autores trabajan el caso bajo certidumbre, y muestran que el retraso de la inversión relativo a lo que se obtiene aplicando la regla clásica de $VAN \geq 0$ o $TIR = costo\ de\ capital$, es óptimo. Si la renta neta se incrementa a una tasa constante g $(0 \leq g \leq r)$ con una desviación estándar nula ($\sigma = 0$), entonces, de la ecuación (4.1) el valor presente del flujo de caja neto es:

$$\frac{dX}{X} = gdt$$

$$\int_{X(t)}^{X(\tau)} \frac{dX}{X} = \int_t^{\tau} gd\tau$$

$$\ln \frac{X(\tau)}{X(t)} = g\left(\tau - t\right)$$

$$X(\tau) = X(t)e^{g(\tau - t)}$$

Reemplazando en la ecuación (4.2):

$$P\left(X\left(t\right)\right) = \int_t^{\infty} X(t)e^{g(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

$$P\left(X\left(t\right)\right) = X(t)\int_t^{\infty} e^{-(r-g)(\tau-t)}d\tau$$

$$P(X(t)) = \frac{X(t)}{r-g} \tag{4.5}$$

Debido a que el flujo de caja al tiempo futuro T es $X(T) = X(t)e^{g(T-t)}$, el factor de valor presente se puede expresar de la siguiente forma:

$$e^{-r(T-t)} = \left[e^{-g(T-t)}\right]^{r/g} = \left[\tfrac{X(t)}{X(T)}\right]^{r/g}$$

De la expresión anterior y de la ecuación (4.3), la ecuación (4.4) se puede reescribir como:

$$W(X(T)) = V(X(T))e^{-r(T-t)}$$

$$W(X) = V(X^*)\left[\tfrac{X}{X^*}\right]^{r/g}$$

$$W(X) = \left[\frac{Q(K^*)X^*}{r-g} - K^*\right]\left[\frac{X}{X^*}\right]^{r/g} \tag{4.6}$$

Para $X \leq X^*$y donde $X^* = X(T)$ es el umbral o flujo de caja mínimo para que se dé una inversión óptima.

Aplicando las condiciones de primer orden respecto al capital K a la ecuación (4.3), se tiene que el beneficio marginal es igual al costo marginal del capital cuando se escoge el nivel óptimo de capital K^*.

$$V'(X) = \frac{dV(X)}{dK} = \frac{dQ(K)}{dK}P(X) + \frac{dP(X)}{dK}Q(K) - 1 = 0$$

Reemplazando el valor de $P(X)$ dado por (4.5) y teniendo que $Q'(K) = \frac{dQ(K)}{dK}$:

$$\frac{Q'(K^*)X^*}{r-g} = 1 \tag{4.7}$$

Lo que significa que un incremento en X^* debe estar asociado a un incremento en K^* mientras la función de producción exhiba rendimientos marginales decrecientes, es decir, debe cumplirse $Q''(K) < 0$.

Análogamente, aplicando las condiciones de primer orden respecto a X^*a la ecuación (4.3), implica que al tiempo T, el rendimiento del flujo de caja actual satisface:

$$V'(X) = \frac{dV(X)}{dX} = \frac{dQ(K)}{dX}P(X) + \frac{dP(X)}{dX}Q(K) - \frac{dK}{dX} = 0$$

De la ecuación (4.6) se tiene:

$$W(X) = X^{r/g}\left[\frac{Q(K^*)\,(X^*)^{1-r/g}}{r-g} - K^*\,(X^*)^{-r/g}\right]$$

Aplicando las condiciones de primer orden respecto a X^*:

$$\left[\frac{Q(K^*)\,(1-r/g)\,(X^*)^{-r/g}}{r-g} - K^*\,(-r/g)\,(X^*)^{-r/g-1}\right] = 0$$

$$\frac{Q^*X^*}{K^*} = r \tag{4.8}$$

Por abuso de notación $Q^* = Q(K^*)$ es el nivel óptimo de producción (área de construcción). Las ecuaciones (4.7) y (4.8) determinan el nivel de umbral óptimo de renta X^* y el nivel de capital óptimo K^*. De las ecuaciones (4.3) y (4.5) para un nivel de capital óptimamente escogido K^*, la tasa interna de retorno (TIR) del proyecto es[4]:

$$V(X) = Q(K)P(X) - K = 0$$

$$Q(K)\left(\frac{X}{TIR-g}\right) = K$$

$$TIR = \frac{QX}{K} + g \tag{4.9}$$

Consecuentemente, la tasa interna de retorno debe ser igual al rendimiento actual más la tasa de crecimiento. De las ecuaciones (4.8) y (4.9) se tiene:

$$TIR^* = \frac{Q^*X^*}{K^*} + g$$

$$TIR^* = r + g \tag{4.10}$$

Una conclusión importante es que para proyectos irreversibles con posibilidad de retrasar la inversión, si los flujos de caja están subiendo a lo largo del tiempo, la regla óptima es retrasar el proyecto hasta el rendimiento actual en lugar de que la TIR iguale el costo de capital dado por (4.8); es decir, la TIR

[4] Por definición la TIR es la tasa de descuento para la cual el VAN es cero.

mínima debe incluir la tasa de crecimiento esperada de los flujos de caja. Aún bajo condiciones de certidumbre, la TIR mínima no es igual al costo de capital.

Reemplazando (4.5) en (4.3) y usando (4.8) se obtiene el valor actual neto crítico, V^*:

$$V^* = \frac{g}{r-g}K^* \tag{4.11}$$

La ecuación (4.11) indica que el valor crítico debe reflejar el valor actual del crecimiento en los flujos de caja.

El valor crítico de Tobin's q, se define como el valor presente de los flujos de caja por unidad de costo de inversión:

$$q = \frac{Q(K)P(X)}{K}$$

En este caso, reemplazando los valores obtenidos, dicho valor será:

$$q^* = \frac{r}{r-g} \tag{4.12}$$

El que es siempre mayor que la unidad.

Las reglas de decisión basadas en el VAN y la TIR se ilustran en la figura (4.2). Con una opción de retrasar el proyecto, el VAN y la TIR del proyecto crecen a lo largo del tiempo mientras los flujos de caja X crezcan. Cuando $X < X^*$, la TIR es menor que TIR^* y el VAN de invertir hoy es menor que el valor de la oportunidad de inversión W. Dicho valor, incluye el VAN de invertir hoy más un valor positivo de espera. Una inversión óptima toma lugar cuando $X = X^*$; en ese momento se cumple $TIR = TIR^*$ y $VAN = V^*$.

Aunque el artículo dedica buena parte al análisis de la rentabilidad de la empresa, en este capítulo se dará mayor énfasis al valor de la oportunidad de inversión que viene a ser el valor de la opción determinista W dada por la ecuación (4.6). De dicha ecuación, se aprecia que al cumplirse que el exponente $\frac{r}{g} > 1$, $W(X)$ será una curva creciente y convexa respecto de X tal como se muestra en la Figura (4.2) con líneas discontinuas. Además, el valor de la opción se incrementa al aumentar el nivel de producción Q, el nivel de rentas X y la tasa de crecimiento g, céteris páribus; y se reduce al disminuir la tasa de descuento r y el nivel de inversión en la construcción K.

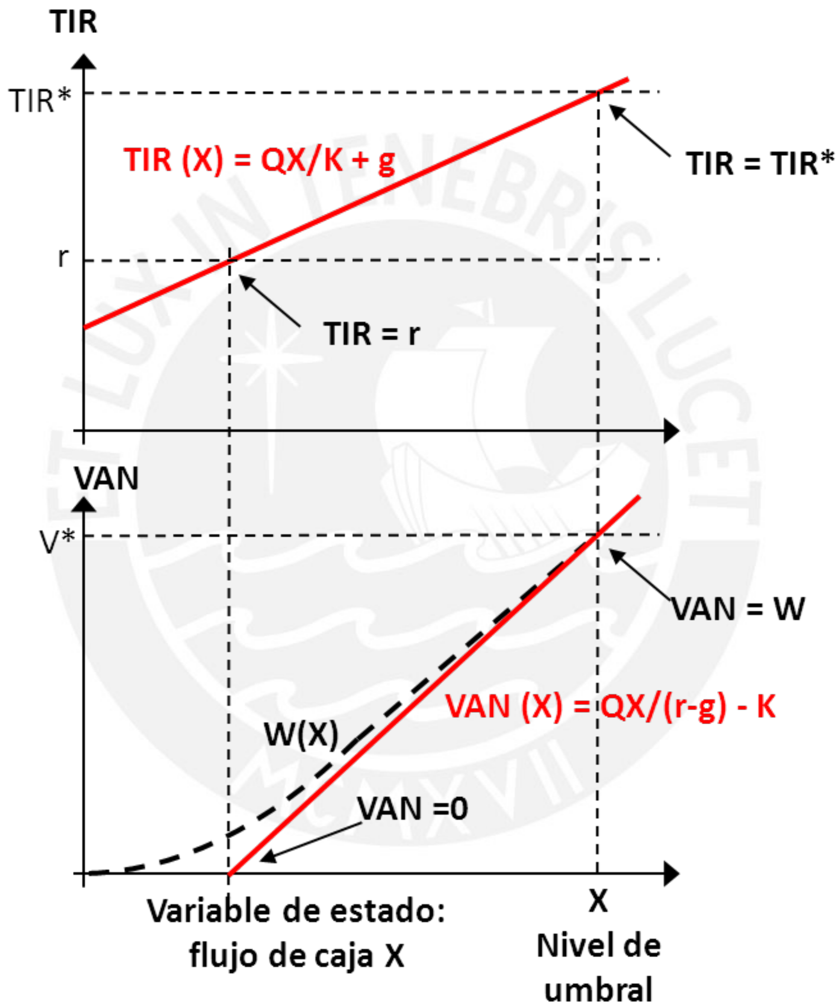

Figure 4.2: Reglas para el VAN y la TIR óptimos (Fuente: [7])

$$W(X) = V(X^*)\left[\frac{X}{X^*}\right]^{\frac{r}{g}}$$

$$W^{'}(X) = \frac{r}{g}\left(\frac{V(X^*)}{X^*}\right)\left[\frac{X}{X^*}\right]^{\frac{r}{g}-1} > 0$$

$$W^{''}(X) = \frac{r}{g}\left(\frac{r}{g}-1\right)\left(\frac{V(X^*)}{(X^*)^2}\right)\left[\frac{X}{X^*}\right]^{\frac{r}{g}-2} > 0$$

4.2.4 La decisión estocástica

El caso en el que existe existe incertidumbre $\sigma > 0$ y expectativas racionales, las rentas varían estocásticamente siguiendo un movimiento browniano geométrico [4]. El valor presente de las rentas y el valor de la oportunidad de inversión pueden ser valuados como reclamos contingentes u opciones. De la ecuación (4.1):

$$\int \frac{dX(\tau)}{X(\tau)} = \hat{g}(\tau - t) + \sigma\left(B(\tau) - B(t)\right)$$

Donde $\{B(t), t \geq 0\}$ es un movimiento browniano estándar con media 0 y varianza 1. Ya que $X(t)$ sigue un proceso de Îto, para resolver la ecuación anterior, aplicamos el cálculo de Îto. Por lo desarrollado en la sección 3.3 del capítulo anterior referido a las rentas con crecimiento browniano geométrico, se tiene (ver los detalles de la solución en la sección 3.3 y la ecuación (3.41), X es equivalente a R):

$$X(\tau) = X(t)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) + \sigma(B(\tau) - B(t))}$$

Reemplazando en la ecuación (4.2):

$$P\left(X\left(t\right)\right) = E_t\left[\int_t^{\infty} X(t)e^{\left(\hat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) + \sigma(B(\tau) - B(t))}e^{-r(\tau - t)}d\tau\right]$$

Aplicando lo desarrollado en la sección 3.3 (X es equivalente a R), tomamos el resultado de la ecuación (3.41):

$$P(X) = \frac{X}{r - \hat{g}} \tag{4.13}$$

Donde $\hat{g} = g - \lambda$. La ecuación (4.13) también se puede escribir así:

$$P\left(X\left(t\right)\right) = \frac{X}{\left(r+\lambda\right) - g}$$

donde λ es la prima de riesgo del portafolio que replica la evolución estocástica del flujo de caja X, según como se explicó previamente. El término $r + \lambda$ es la tasa de descuento de riesgo ajustada para el flujo de caja, en contraste con el caso sin incertidumbre. Para hallar el valor de la opción W definida en (4.4), se usará la fórmula de Feynman-Kac que establece una relación entre cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales y procesos estocásticos [17].

Formula de Feynman-Kac: Supongamos que $X(t)$ sigue un proceso estocástico:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB^{Q}(t) \tag{4.14}$$

donde $B^{Q}(t)$ es un movimiento browniano bajo una medida de probabilidad Q. Sea $W(X(t), t)$ una función diferenciable de $X(t)$ y t supongamos que $W(X(t), t)$ sigue una ecuación diferencial parcial dada por:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mu(t, X(t))\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^{2}(t, X(t))\frac{\partial^{2} W}{\partial X^{2}} - r(X(t), t)W(X(t), t) = 0 \tag{4.15}$$

y con condición de frontera: $W(X(T), T)$. El teorema afirma que tiene la solución:

$$W(X(t), t) = E^{Q}\left[e^{-\int_{t}^{T} r(X(u),u)du} W(X(T), T) \mid \mathcal{F}_{\mathrm{t}}\right] \tag{4.16}$$

Donde la esperanza condicional es tomada bajo la medida de probabilidad Q que hace el término estocástico en la primera ecuación sea un movimiento browniano.

De la ecuación (4.1):

$$dX(t) = \hat{g}X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \tag{4.17}$$

De la ecuación (4.4), el valor de la opción W cuando la inversión se realiza en el tiempo futuro $T \geq t$, dado que se tiene información sobre el flujo de caja al tiempo t (ver fig (4.1)):

$$W(X\left(t\right)) = \max_{T,K} E\left[V\left(X\left(T\right)\right)e^{-r(T-t)} \mid \mathcal{F}_{\mathrm{t}}\right]$$

Como en el momento óptimo de inversión T^{*} el valor actual neto V^{*} es igual al valor de la opción W^{*}, se tiene: $V(X(T^*)) = W(X(T^*))$

$$W(X(t)) = E\left[W(X(T^*))\, e^{-r(T^*-t)} \mid \mathcal{F}_{\mathrm{t}}\right] \tag{4.18}$$

La ecuación (4.17) es similar a la ecuación (4.14) donde $\hat{g}$ y σ son constantes. La ecuación (4.18) es similar a la ecuación (4.16) donde r es constante. Por lo tanto, se cumplen las condiciones de la fórmula de Feynman-Kac y en consecuencia el valor de la opción W satisface la ecuación diferencial parcial (reemplazamos $\hat{g}$ por μ):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \hat{g}X\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - rW = 0$$

Ya que $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$, el valor de la opción para invertir satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\sigma^2}{2}X^2\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \hat{g}X\frac{\partial W}{\partial X} - rW = 0 \tag{4.19}$$

y las condiciones iniciales son:

$$W(0) = 0,\ W(X^*) = V(X^*),\ \frac{\partial W(X^*)}{\partial X} = \frac{\partial V(X^*)}{\partial X} \tag{4.20}$$

Las condiciones iniciales tienen la siguiente interpretación. La primera condición es trivial ya que se sigue del hecho que el proyecto no tiene valor si los actuales y futuros flujos de caja son nulos. La segunda condición es una condición de continuidad, declara que al momento de la inversión el valor de la oportunidad de inversión futura (valor de la opción) equivale al actual VAN. La tercera condición es la condición de optimalidad, que asegura que el umbral de renta $X^* = X(T)$ es escogido óptimamente.

Resolvemos la ecuación (4.19) tomando en cuenta las condiciones iniciales dadas en (4.20). Primero le damos la forma de una ecuación diferencial homogénea:

$$W^{''} + \frac{2\hat{g}}{\sigma^2 X}W^{'} - \frac{2r}{\sigma^2 X^2}W = 0 \tag{4.21}$$

Para resolver la ecuación (4.21) probamos con la solución de la forma:

$$W(X) = V(X^*)\left(\frac{X}{X^*}\right)^{\theta} \tag{4.22}$$

Y se calcula su primera y segunda derivadas respecto a X:

$$W^{'}(X) = \theta V(X^*)\frac{X^{\theta-1}}{(X^*)^{\theta}}$$

$$W^{''}(X) = \theta(\theta-1)V(X^*)\frac{X^{\theta-2}}{(X^*)^{\theta}}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.21):

$$\theta(\theta-1)V(X^*)\frac{X^{\theta-2}}{(X^*)^{\theta}} + \frac{2\hat{g}}{\sigma^2 X}\left[\theta V(X^*)\frac{X^{\theta-1}}{(X^*)^{\theta}}\right] - \frac{2r}{\sigma^2 X^2}\left[V(X^*)\left(\frac{X}{X^*}\right)^{\theta}\right] = 0$$

$$\theta(\theta-1)V(X^*)\left[\frac{X^{\theta-2}}{(X^*)^{\theta}}\right] + \frac{2\hat{g}}{\sigma^2}\theta V(X^*)\left[\frac{X^{\theta-2}}{(X^*)^{\theta}}\right] - \frac{2r}{\sigma^2}V(X^*)\left[\frac{X^{\theta-2}}{(X^*)^{\theta}}\right] = 0$$

$$\theta(\theta-1) + \frac{2\hat{g}}{\sigma^2}\theta - \frac{2r}{\sigma^2} = 0$$

$$\sigma^2\theta^2 + 2\left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta - 2r = 0$$

Resolviendo para θ:

$$\theta = \frac{1}{\sigma^2}\left[-\left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(\hat{g} - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}\right] > 1$$

Por lo tanto, la ecuación (4.22) es una solución de la ecuación diferencial (4.21) y bajo las condiciones iniciales el valor de V^* es el valor actual neto crítico. Usando la ecuación (4.3) y reemplazando en (4.22):

$$W(X) = \left[\frac{Q(K^*)X^*}{r-\hat{g}} - K^*\right]\left(\frac{X}{X^*}\right)^{\theta} \tag{4.23}$$

Los indicadores de rentabilidad son muy similares al del caso determinista desarrollado en la sección 4.2.3 corregidos por un factor de incertidumbre. Como se comentó, este capítulo no se centrará en el análisis de rentabilidad, para ver los detalles, se puede consultar Capozza y Li [7]. Por otro lado, el valor de la opción estocástica tiene las mismas características que aquellas de la opción determinista en cuanto a su crecimiento y convexidad. En el límite, cuando la incertidumbre es infinita, el valor de la opción varía linealmente con el nivel de rentas.

4.3 Valor de opción de la tierra agrícola para convertirla a urbana

La ecuación (4.4) da el valor de la opción de compra, y particularmente la ecuación (4.23) da el valor de la opción para el caso estocástico. Para poder uniformizar con los modelos de los capítulos anteriores, se considerará el caso en el que la opción se ejerce no cuando se toma la decisión de construir el edificio sino cuando se va a convertir la tierra agrícola en urbana (habilitación urbana).

El costo de inversión K es el costo de conversión C más el valor puro de la tierra agrícola $\frac{A}{r}$ visto en los capítulos anteriores y no es variable en función de Q sino fijo. El volumen de producción Q ya no es el número de metros cuadrados a edificar sino el número de metros cuadrados a habilitar y ya no es variable en función de las rentas sino fijo, limitado por el área bruta del terreno[5]; sin pérdida de generalidad podemos tomar un valor unitario. El flujo de rentas netas definido en este capítulo como X es ahora R, de manera similar a las rentas de la tierra expresado en los modelos anteriores.

El valor de la opción para el caso estocástico, según la ecuación (4.23) es ahora:

$$W = \left[\frac{R(t^*, z)}{r - \hat{g}} - \left(\frac{A}{r} + C\right)\right]\left[\frac{R(t, z)}{R(t^*, z)}\right]^{\theta} \tag{4.24}$$

$$W = \left[\frac{\hat{g}R(t^*, z)}{r\,(r - \hat{g})} + \frac{1}{r}R(t^*, z) - \frac{1}{r}\,(A + rC)\right]\left[\frac{R(t, z)}{R(t^*, z)}\right]^{\theta}$$

Para el caso estocástico, la renta de reserva R^* es igual a:

$$R^* = A + rC + RI$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$W = \left[\frac{\hat{g}R(t^*, z)}{r\,(r - \hat{g})} + \frac{1}{r}RI\right]\left[\frac{R(t, z)}{R(t^*, z)}\right]^{\theta}$$

$$W = \left[\frac{\hat{g}}{r\,(r - \hat{g})}\right] R(t, z)\left[\frac{R(t, z)}{R(t^*, z)}\right]^{\theta - 1} + \left[\frac{1}{r}\right] RI\left[\frac{R(t, z)}{R(t^*, z)}\right]^{\theta} \tag{4.25}$$

[5]El área bruta de un terreno rústico o rural es el área total, mientras que el área neta es la porción del área bruta que se ha urbanizado y se utilizará para la construcción. La diferencia se da por aportes para vías, parques y otros elementos urbanos según normas.

Al comparar las ecuaciones (3.48) y (4.25) se llega a la conclusión que el valor de la opción de la tierra agrícola es igual a la suma de las primas de crecimiento e irreversibilidad. En ausencia de incertidumbre, la renta de irreversibilidad $RI = 0$ y $\theta = \frac{r}{g}$ con lo que el valor de la opción determinista dado por la ecuación (4.6) es igual a la prima de crecimiento de la tierra agrícola para el modelo determinista visto en la sección 2.3 según la ecuación (2.25).[6]

Para terminar este capítulo, se hará una reflexión cualitativa sobre la relación que existe entre la teoría de valoración de opciones y la valoración de la tierra. Debido a la existencia de incertidumbre y de crecimiento de las rentas, una parcela de tierra agrícola relativamente cercana a un área urbana posee un valor de opción real similar al de una opción financiera porque el propietario tiene el derecho mas no la obligación de habilitar dicha tierra y convertirla de rural a urbana. Si dicho propietario ejerce la opción de habilitar el terreno, una vez que se ha consumado la urbanización, el proceso es irreversible ya que no es posible (o sumamente difícil) convertirlo a agrícola. El activo subyacente es el terreno que es un activo real. El precio de ejercicio es el costo que se incurre al convertir la tierra agrícola en urbana. Como la decisión de invertir no tiene una fecha fija de expiración (el terreno tiene vida infinita), se trata de una opción a perpetuidad. Además, como se puede ejercer en cualquier momento, la opción real se parece más a una opción americana perpetua. Así, el valor total de la tierra agrícola, expresado por su precio P^a es igual al valor agrícola puro $\frac{A}{r}$ más el valor de la opción real W que se genera por la expectativa de crecimiento y de incertidumbre (primas de crecimiento e irreversibilidad.

$$P^a = \frac{A}{r} + W \tag{4.26}$$

Se usará el siguiente ejemplo con un árbol binomial para ilustrar mejor la idea. Se tiene un terreno agrícola ubicado cerca de la periferia de la ciudad. Su precio unitario P^a hoy es de \$100 / m2 y el costo de conversión de la tierra de agrícola a urbana es \$90 (precio de ejercicio), se asumirá que no cambiará en el tiempo. La tasa anual de descuento es de 5% y la volatilidad es de 14%. Para dentro de un año se tienen dos escenarios:

- Escenario 1: con una probabilidad de 65%, el precio aumenta a \$ 115.
- Escenario 2: con una probabilidad de 35%, el precio disminuye a \$87.

[6] Un estudio detallado de la vinculación entre las opciones reales y el valor de la tierra se puede encontrar en el capítulo 28 de Geltner and Miller [11] donde se presenta la famosa fórmula de Samuelson - Mckean aplicada al valor de la tierra como una opción de construcción. La fórmula tiene la misma forma que las que se presentan en las ecuaciones de este capítulo por lo que existe consistencia en los resultados.

Solución:

Primero, se trata de una opción de compra, ya que realizar la urbanización del terreno equivale a comprar todas las instalaciones y servicios propios de una habilitación urbana: redes de agua, redes de alcantarillado, redes de energía eléctrica, pistas y veredas, etc. Lo que se gasta en dicha urbanización es el precio de ejercicio K. Para hallar el valor de la opción de compra, identificaremos los datos que se trabajarán en un árbol binomial de un sólo período:

- Precio de la tierra agrícola hoy: $P^a = \$100$
- Tasa de descuento: $r = 0.05$
- Horizonte de tiempo (no es exactamente el tiempo de expiración): $T = 1$año.
- Precio de ejercicio del activo (habilitación urbana): $K = \$90$
- Volatilidad: $\sigma = 0.14$

Las demás variables las podemos calcular usando la teoría de árboles binomiales (ver [13]):

- Factor de crecimiento del precio de la tierra: $u = e^{\sigma\sqrt{T}} = 1.15$
- Factor de disminución del precio de la tierra: $d = 1/u = 0.87$
- Probabilidad de riesgo neutral: $p = \frac{e^{rT}-d}{u-d} = 65\%$
- Precio de la tierra agrícola en un año (escenario 1: subida de precio): $P_u^a = P^a u = \$115$
- Precio de la tierra agrícola en un año (escenario 2: bajada de precio): $P_d^a = P^a d = \$87$
- Valor de la opción en un año (escenario 1: subida de precio): $f_u = max\left\{P_u^a - K, 0\right\} = \max\left\{115 - 90, 0\right\} = \$25$
- Valor de la opción en un año (escenario 2: bajada de precio): $f_d = max\left\{P_d^a - K, 0\right\} = \max\left\{87 - 90, 0\right\} = 0$

Finalmente, el valor de la opción será el pago esperado del reclamo, bajo la probabilidad de riesgo neutral, descontado a la tasa libre de riesgo:

$$W = e^{-rT}\left(pf_u + (1-p)f_d\right)$$

$$W = e^{-rT}\left(pmax\left\{P_u^a - K, 0\right\} + (1-p)max\left\{P_d^a - K, 0\right\}\right)$$

$$W = \left(\frac{e^{-rT}}{e^{\sigma\sqrt{T}} - e^{-\sigma\sqrt{T}}}\right)\left[\left(e^{rT} - e^{-\sigma\sqrt{T}}\right)max\left\{P^a e^{\sigma\sqrt{T}} - K, 0\right\} + \left(e^{\sigma\sqrt{T}} - e^{rT}\right)max\left\{P^a e^{-\sigma\sqrt{T}} - K, 0\right\}\right] \tag{4.27}$$

En el ejemplo, el valor para la opción de urbanizar el terreno agrícola es $W = \$15.42$. En realidad, para obtener este valor no era necesario desarrollar la ecuación (4.27), pero dicha ecuación muestra con detalle

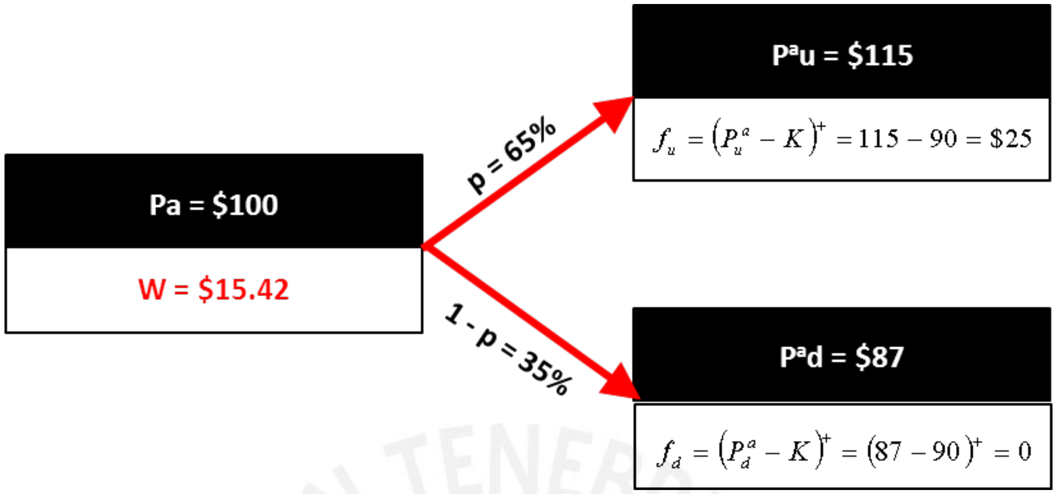

Figure 4.3: Valor de la opción de la tierra agrícola

que la opción depende de la tasa de descuento, del tiempo en el que se ejerce (se urbaniza), del valor inicial de la tierra, del precio de ejercicio (costo de la urbanización) y de la volatilidad o incertidumbren del precio. Se trata por supuesto de un modelo muy simplificado, en el que solamente se ha considerado un solo período. La figura (4.3) ilustra mejor el desarrollo del ejemplo.

Usando la ecuación (4.26) se puede obtener el precio agrícola puro:

$$P^{ap} = P^a - W = 100 - 15.42 = \$84.58$$

Por lo explicado, el valor de la opción viene a ser igual al valor de las primas de crecimiento y de irreversibilidad. En el ejemplo este valor representa el 15.42% del valor total agrícola y el 84.58% restante se debe al valor agrícola puro. Lo que se observa en el mundo real es que los terrenos agrícolas que están cercanos a la periferia urbana, sus primas representan la mayor parte del valor total, mientras que lo contrario ocurre con terrenos agrícolas muy alejados de la ciudad.

La renta agrícola es posible deducirla de la anterior ecuación, ya que es igual al valor agrícola puro por la tasa de descuento. Esta cantidad es la que el propietario de dicha parcela agrícola recibe anualmente por cada unidad de área de la parcela.

$$A = rP^{ap} = 0.05 \times 84.58 = \$4.23$$

5 CONCLUSIONES

En el presente capítulo se presentan las comparaciones entre los tres modelos de los capítulos 2, 3 y 4. Las variables que se compararán son: renta, precio de la tierra urbana y precio de la tierra agrícola. Para los modelos determinista y estocástico se compararán los casos de crecimiento lineal y geométrico. Las comparaciones con el modelo de valoración de opciones serán sólo para el caso de crecimiento geométrico. Hacia el final del capítulo se presentarán los hallazgos y resultados de dichas comparaciones, así como sus limitaciones.

5.1 Comparación entre los modelos determinista y estocástico

El modelo presentado por el autor en el artículo desarrollado en el capítulo 2 de esta tesis, es un modelo determinista con crecimiento geométrico de la población; mientras que el modelo desarrollado en el capítulo 3 es un modelo estocástico con crecimiento lineal de las rentas. Para poder hacer una buena comparación se hicieron ajustes a ambos modelos: en la sección 2.3 del modelo determinista se desarrolló el modelo con el crecimiento geométrico de las rentas en vez de la población, mientras que en la sección 3.3 del modelo estocástico se desarrolló el modelo con crecimiento geométrico de las rentas en vez de crecimiento lineal como está en el artículo original.

Para el caso donde se tiene crecimiento lineal de las rentas, se resumen los resultados de la comparación en el cuadro (5.1). En el modelo determinista el precio urbano tiene cuatro componentes: valor agrícola, valor de construcción, valor de ubicación y valor de la prima de crecimiento. En el modelo estocástico el precio urbano tiene cinco componentes: los mismos del modelo determinista más la prima de irreversibilidad debida a la incertidumbre. El modelo estocástico es una extensión del modelo determinista, en él se aprecia que la incertidumbre incrementa la renta y el precio de la tierra.

La misma conclusión es para el caso de crecimiento geométrico (ver cuadro (5.2)). Sin embargo, en este caso las primas de crecimiento e irreversibilidad son mayores en contraste con el caso lineal. En el área agrícola, cuando el crecimiento de las rentas es lineal, el precio disminuye más rápido con la distancia en contraste con el caso de crecimiento geométrico de las rentas.

MODELOS LINEALES		
Variable	**Determinista**	**Estocástico**
Renta: $R(\tau,z)$	$R(t,z)+g(\tau-t)$	$R(t,z)+g(\tau-t)+\sigma B(\tau-t)$
Precio urbano: $P^u(t,z)$	$\frac{A}{r}+C+\frac{1}{r}\frac{T}{\overline{L}}(\bar{z}(t)-z)+\frac{g}{r^2}$	$\frac{A}{r}+C+\frac{1}{r}\frac{T}{\overline{L}}(\bar{z}(t)-z)+\frac{g}{r^2}+\frac{r-\alpha g}{\alpha r^2}$
Precio agrícola: $P^a(t,z)$	$\frac{A}{r}+\frac{g}{r^2}e^{-\alpha(z-\bar{z}(t))}$	$\frac{A}{r}+\frac{g}{r^2}e^{-\alpha(z-\bar{z}(t))}+\frac{r-\alpha g}{\alpha r^2}e^{-\alpha(z-\bar{z}(t))}$
$\alpha=\frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{g^2+2\sigma^2 r}-g\right)$		

Table 5.1: Comparación de modelos determinista y estocástico con crecimiento lineal

5.2 Comparación entre los modelos determinista y de valoración de opciones

Se comparan los resultados obtenidos en la sección 2.3 para el precio agrícola determinista (con crecimiento geométrico de las rentas) con los resultados de la sección 4.2.3 para el valor de la opción con previsión perfecta, talcomo se muestran en la tabla (5.3). En el artículo original del modelo de valoración de opciones, el autor considera la opción generada por el desarrollo de la tierra (o edificación). Para hacer la comparación, se ajustará este modelo considerando más bien la opción generada por la tierra agrícola por su conversión de rural a urbana. En ese sentido, el precio de ejercicio K^* ya no representa el costo de la inversión en la edificación sino el costo de convertir la tierra en urbana C más el costo de oportunidad de percibir la renta agrícola A/r .

$$K^* = \frac{A}{r} + C \tag{5.1}$$

Reemplazando este valor en la expresión de la opción determinista, ecuación (4.6) y considerando un valor unitario para el volumen de producción (área a urbanizar: $Q = 1$):

$$W = \left[\frac{Q(K^*)}{r-g}R^* - K^*\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^{r/g}$$

$$W = \left[\frac{1}{r-g}R^* - \left(\frac{A}{r}+C\right)\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^{r/g}$$

MODELOS GEOMÉTRICOS		
Variable	**Determinista**	**Estocástico**
Renta: $R(\tau,z)$	$R(t,z)e^{g(\tau-t)}$	$R(t,z)e^{\left(g-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-t)+\sigma B(\tau-t)}$
Precio urbano: $P^u(t,z)$	$\frac{A}{r}+C+\frac{1}{r}\frac{T}{\overline{L}}(\bar{z}(t)-z)+\frac{g}{r(r-g)}R(t,z)$	$\frac{A}{r}+C+\frac{1}{r}\frac{T}{\overline{L}}(\bar{z}(t)-z)+\frac{\widehat{g}}{r(r-\widehat{g})}R(t,z)+\frac{1}{r}RI$
Precio agrícola: $P^a(t,z)$	$\frac{A}{r}+\frac{g}{r(r-g)}R(t,z)\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\frac{r}{g}-1}$	$\frac{A}{r}+\frac{\widehat{g}}{r(r-\widehat{g})}R(t,z)\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta-1}+\frac{1}{r}RI\left[\frac{R}{R^*}\right]^{\theta}$
$\theta=\frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{\left(\widehat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2\sigma^2 r}-\left(\widehat{g}-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$		

Table 5.2: Comparación de modelos determinista y estocástico con crecimiento geométrico

CONVERSIÓN DE LA TIERRA AGRÍCOLA A URBANA		
Variable	**Prima Determinista**	**Opción**
Precio agrícola: $P^a(t,z)$	$\frac{g}{r(r-g)}R^*\left[\frac{R}{R^*}\right]^{r/g}$	$\left[\frac{Q(K^*)}{r-g}R^*-K^*\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^{r/g}$
$K^*=\frac{A}{r}+C \qquad Q(K^*)=1$		

Table 5.3: Comparación de modelos determinista y de valoración de opciones

$$W=\left[\frac{g}{r(r-g)}R^*+\frac{1}{r}R^*-\frac{1}{r}(A+rC)\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^{r/g}$$

En ausencia de incertidumbre $\sigma=0$ se cumple que la renta de reserva: $R^*=A+rC$, se tiene de la expresión anterior:

$$W=\left[\frac{g}{r(r-g)}R^*\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^{r/g} \tag{5.2}$$

La ecuación (5.2) es idéntica al segundo término de la derecha de la ecuación (2.26) de la sección 2.3. En conclusión, en el caso determinista, el valor de la opción agrícola es igual a la prima de crecimiento.

5.3 Comparación entre los modelos estocástico y de valoración de opciones

Se comparan los resultados obtenidos en la sección 3.3 para el precio agrícola estocástico (con crecimiento geométrico de las rentas) con los resultados de la sección 4.2.4 para el valor de la opción con incertidumbre, tal como se muestran en la tabla (5.4). De forma análoga a lo explicado en la sección 5.2, hacemos un ajuste hacer la comparación, de tal forma que se considerará la opción generada por la tierra agrícola por su conversión de rural a urbana. Reemplazando de (5.1) el valor de K^* en la expresión de la opción estocástica, ecuación (4.23), y considerando un valor unitario para el volumen de producción (área a urbanizar: $Q = 1$):

$$W(X) = \left[\frac{Q(R^*)R^*}{r-\hat{g}} - K^*\right]\left(\frac{R}{R^*}\right)^\theta$$

$$W(X) = \left[\frac{1}{r-\hat{g}}R^* - \left(\frac{A}{r} + C\right)\right]\left(\frac{R}{R^*}\right)^\theta$$

$$W = \left[\frac{\hat{g}}{r(r-\hat{g})}R^* + \frac{1}{r}R^* - \frac{1}{r}\left(A + rC\right)\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta$$

En presencia de incertidumbre $\sigma > 0$ se cumple que la renta de reserva: $R^* = A + rC + RI$, se tiene de la expresión anterior:

$$W = \left[\frac{\hat{g}}{r(r-\hat{g})}R^* + \frac{1}{r}RI\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta$$

$$W = \left[\frac{\hat{g}}{r(r-\hat{g})}R^*\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta + \frac{1}{r}RI\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta \tag{5.3}$$

La ecuación (5.3) es idéntica al segundo y tercer términos de la derecha de la ecuación (3.48) de la sección 3.3. En conclusión, en el caso estocástico, el valor de la opción agrícola es igual a la suma de las primas de crecimiento y de irreversibilidad.

5.4 Comparación entre los tres modelos

La gran conclusión de la comparación entre los tres modelos estudiados en esta tesis es que existe gran consistencia entre dichos modelos. El modelo estocástico es el mismo que el determinista salvo que incorpora un componente adicional a la renta y al precio, el componente de incertidumbre o irreversibilidad. El modelo de valoración por opciones da los mismos resultados que aquellos basados en el flujo de caja

CONVERSIÓN DE LA TIERRA AGRÍCOLA A URBANA		
Variable	**Prima Estocástica**	**Opción**
Precio agrícola: $P^a(t,z)$	$\frac{\hat{g}}{r(r-\hat{g})}R^*\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta + \frac{1}{r}RI\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta$	$\left[\left(\frac{\hat{g}}{r(r-\hat{g})}+\frac{1}{r}\right)Q(K^*)R^* - K^*\right]\left[\frac{R}{R^*}\right]^\theta$
$K^* = \frac{A}{r} + C \qquad Q(K^*) = 1$		

Table 5.4: Comparación de modelos estocástico y de valoración de opciones

descontado y el valor de la opción es el mismo que el de las primas de crecimiento y/o de incertidumbre de la tierra agrícola, según sea el caso determinista o estocástico. Con la valoración de opciones es posible extender el análisis de los precios de la tierra incluyendo variables de la oferta inmobiliaria cuando la opción se genera ya no sólo por la conversión de la tierra de agrícola a urbana, sino también cuando una tierra urbana no desarrollada se usa para construir un edificio sobre el terreno, por lo que el enfoque de valoración de opciones permitiría un análisis más completo del mercado inmobiliario y de la ciudad.

A APÉNDICES

APÉNDICE 1: Aplicación Modelo Determinista (Capítulo 2)

Se aplicarán los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.21) y (2.22) a un ejemplo concreto. A continuación se presentan los datos y se tabulan los resultados de los cuatro componentes del precio en función a la distancia z.

- Población (viviendas): $N(t) = 1'000,000$ hogares
- Radio del área urbana: $\bar{z}(t) = 8,921$ m.
- $\pi = 3.14$
- Área de lote típico de vivienda: usando la ecuación (2.11): $\bar{L} = 250$ m2
- Densidad: $D = \left(1/\bar{L}\right) * 10,000 = 40$ hab/Ha
- Costo anual de un kilómetro de transporte: $T = \$1/m/año = \$2.74/Km/día$
- Tasa de descuento: $r = 5\%$
- Renta de la tierra agrícola: $A = \$1.00/m^2$
- Costo de conversión: $C = \$100.00/m^2$
- Tasa de crecimiento poblacional: $g = 2\%$

La tabla (A.1) muestra la variación de la renta respecto a la distancia al centro con sus respectivos componentes. La primera columna representa la distancia al centro de la ciudad z; las columnas segunda, tercera y cuarta representan cada uno de los componentes: la renta agrícola A, el costo de oportunidad de construcción C, y la renta de ubicación RU respectivamente; la última columna representa la renta que es la suma de los tres componentes anteriores. En este modelo con crecimiento exponencial se puede observar que la renta agrícola permanece constante; la renta de construcción es constante en el área urbana y cero

VARIACIÓN DE LA RENTA CON LA DISTANCIA				
z	A	rC	RU	R ($/m2)
0	1.00	5.00	35.68	41.68
1,000	1.00	5.00	31.68	37.68
2,000	1.00	5.00	27.68	33.68
3,000	1.00	5.00	23.68	29.68
4,000	1.00	5.00	19.68	25.68
5,000	1.00	5.00	15.68	21.68
6,000	1.00	5.00	11.68	17.68
7,000	1.00	5.00	7.68	13.68
8,000	1.00	5.00	3.68	9.68
8,921	**1.00**	**5.00**	**0.00**	**6.00**
9,000	1.00	0.00	0.00	1.00
10,000	1.00	0.00	0.00	1.00
11,151	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**1.00**
11,000	1.00	0.00	0.00	1.00
12,000	1.00	0.00	0.00	1.00
13,000	1.00	0.00	0.00	1.00
14,000	1.00	0.00	0.00	1.00
15,000	1.00	0.00	0.00	1.00
16,000	1.00	0.00	0.00	1.00
17,000	1.00	0.00	0.00	1.00
18,000	1.00	0.00	0.00	1.00
19,000	1.00	0.00	0.00	1.00
20,000	1.00	0.00	0.00	1.00

Table A.1: Variación de la renta con la distancia

fuera de ella; la renta de ubicación disminuye linealmente con la distancia dentro del área urbana desde un máximo en el centro hasta un mínimo en el borde urbano y se hace nulo en el área agrícola. La figura (A.1) muestra el gráfico de la renta respecto a la distancia al centro.

La tabla (A.2) muestra la variación del precio respecto a la distancia al centro con sus respectivos componentes. La primera columna representa la distancia al centro de la ciudad z; las columnas segunda, tercera, cuarta y quinta representan cada uno de los componentes: valor de renta agrícola A/r, valor de construcción C, valor de ubicación PU y la prima de crecimiento PC, respectivamente; la última columna representa el precio que es la suma de los cuatro componentes anteriores. En este modelo con crecimiento exponencial se puede observar que el valor de renta agrícola permanece constante; el valor de construcción es constante en el área urbana y cero fuera de ella; el valor de ubicación disminuye linealmente con la distancia dentro del área urbana desde un máximo en el centro hasta un mínimo en el borde urbano y se hace nulo en el área agrícola; la prima de crecimiento es constante en toda el área urbana y más allá del radio de la ciudad $\bar{z}(t)$ disminuye hasta hacerse casi nulo para distancias mayores a 30 Km. La figura (A.2) muestra gráficamente lo descrito en la tabla (A.2).

Usando los datos del mismo ejemplo, se fijará una distancia, por ejemplo $z = 5,000$ m. y se estudiará

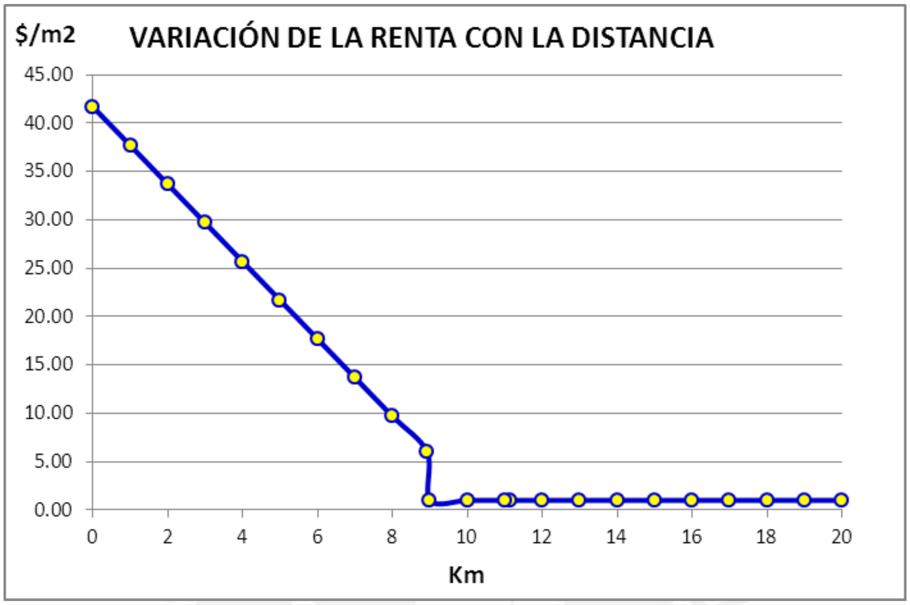

Figure A.1: Variación de la renta con la distancia

VARIACIÓN DEL PRECIO CON LA DISTANCIA					
z	A/r	C	PU	PC	P ($/m2)
0	20.00	100.00	713.65	178.41	1,012.06
1,000	20.00	100.00	633.65	178.41	932.06
2,000	20.00	100.00	553.65	178.41	852.06
3,000	20.00	100.00	473.65	178.41	772.06
4,000	20.00	100.00	393.65	178.41	692.06
5,000	20.00	100.00	313.65	178.41	612.06
6,000	20.00	100.00	233.65	178.41	532.06
7,000	20.00	100.00	153.65	178.41	452.06
8,000	20.00	100.00	73.65	178.41	372.06
8,921	**20.00**	**100.00**	**0.00**	**178.41**	**298.41**
9,000	20.00	0.00	0.00	172.20	192.20
10,000	20.00	0.00	0.00	112.98	132.98
11,151	20.00	0.00	0.00	73.08	93.08
11,200	20.00	0.00	0.00	71.80	91.80
12,000	20.00	0.00	0.00	54.49	74.49
13,000	20.00	0.00	0.00	39.56	59.56
14,000	20.00	0.00	0.00	29.41	49.41
15,000	20.00	0.00	0.00	22.32	42.32
16,000	20.00	0.00	0.00	17.24	37.24
17,000	20.00	0.00	0.00	13.53	33.53
18,000	20.00	0.00	0.00	10.76	30.76
19,000	20.00	0.00	0.00	8.67	28.67
20,000	20.00	0.00	0.00	7.06	27.06

Table A.2: Variación del precio con la distancia

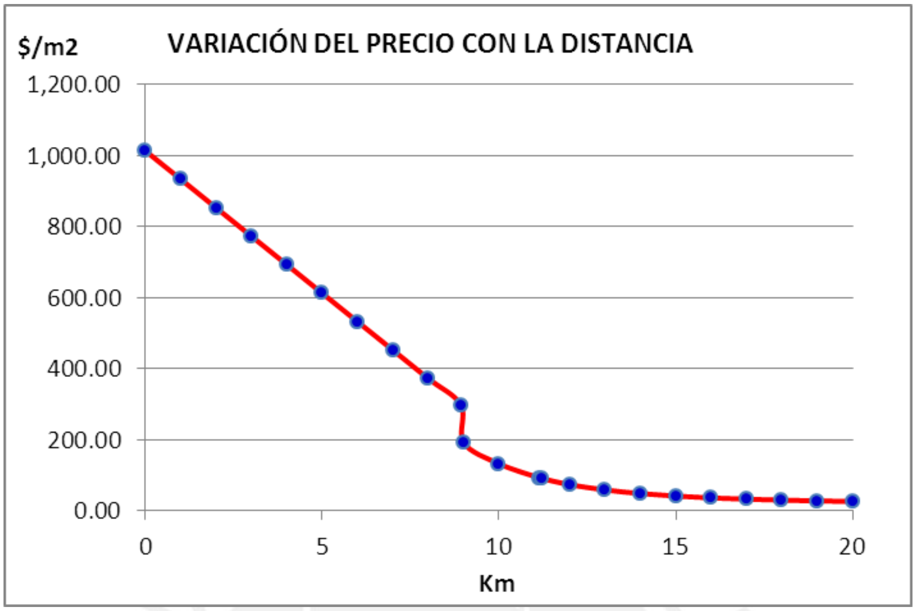

Figure A.2: Variación del precio con la distancia

la variabilidad del precio a lo largo del tiempo para esta misma ubicación. La diferencia $\tau - t$ señala los años transcurridos desde t, el momento actual. Recordando que el radio crece exponencialmente con el tiempo según $\bar{z}(\tau) = e^{g(\tau-t)/2}$ y arreglando la ecuación (2.21) para expresar el precio de la tierra en el área urbana en función del tiempo, se tiene:

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\bar{z}(t)\left[1 + \frac{g/2}{r - g/2}\right]$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\bar{z}(t)\left[\frac{1}{1 - g/2r}\right]$$

$$P^u(t,z) = \frac{A}{r} + C + \frac{1}{r}\frac{T}{\bar{L}}\left[\frac{1}{1 - g/2r}\right]\bar{z}_0 e^{\frac{g(t-t_0)}{2}}$$

Donde $\bar{z}_0$ es el valor del radio de la ciudad al momento actual t_0. Tabulando los datos se presenta la siguiente tabla de variación del precio en $z = 5$ Km, para los 20 años próximos.

En la tabla (A.3) se aprecia que el tamaño de la ciudad $\bar{z}(t)$ crece exponencialmente con el tiempo al igual que el precio, aunque en este último el efecto exponencial es muy pequeño (la última columna muestra la pendiente que no es constante, aunque varía muy poco), tendiendo a ser casi lineal. Se observa que la prima de crecimiento PC y el componente de ubicación PU son los que crecen en el tiempo.

VARIACIÓN DEL PRECIO CON EL TIEMPO						
τ - t	ƶ(τ)	A/r	C	PU	PC	P ($/m2)
0	8,921	20.00	100.00	313.65	178.41	612.06
1	9,010	20.00	100.00	320.82	180.21	621.03
2	9,101	20.00	100.00	328.07	182.02	630.08
3	9,192	20.00	100.00	335.38	183.85	639.23
4	9,285	20.00	100.00	342.77	185.69	648.47
5	9,378	20.00	100.00	350.24	187.56	657.80
6	9,472	20.00	100.00	357.78	189.44	667.22
7	9,567	20.00	100.00	365.40	191.35	676.74
8	9,664	20.00	100.00	373.09	193.27	686.36
9	9,761	20.00	100.00	380.86	195.21	696.07
10	9,859	20.00	100.00	388.70	197.18	705.88
11	9,958	20.00	100.00	396.63	199.16	715.79
12	10,058	20.00	100.00	404.64	201.16	725.80
13	10,159	20.00	100.00	412.72	203.18	735.91
14	10,261	20.00	100.00	420.89	205.22	746.12
15	10,364	20.00	100.00	429.14	207.29	756.43
16	10,468	20.00	100.00	437.48	209.37	766.84
17	10,574	20.00	100.00	445.89	211.47	777.37
18	10,680	20.00	100.00	454.39	213.60	787.99
19	10,787	20.00	100.00	462.98	215.75	798.73
20	10,896	20.00	100.00	471.65	217.91	809.57

Table A.3: Variación del precio con el tiempo

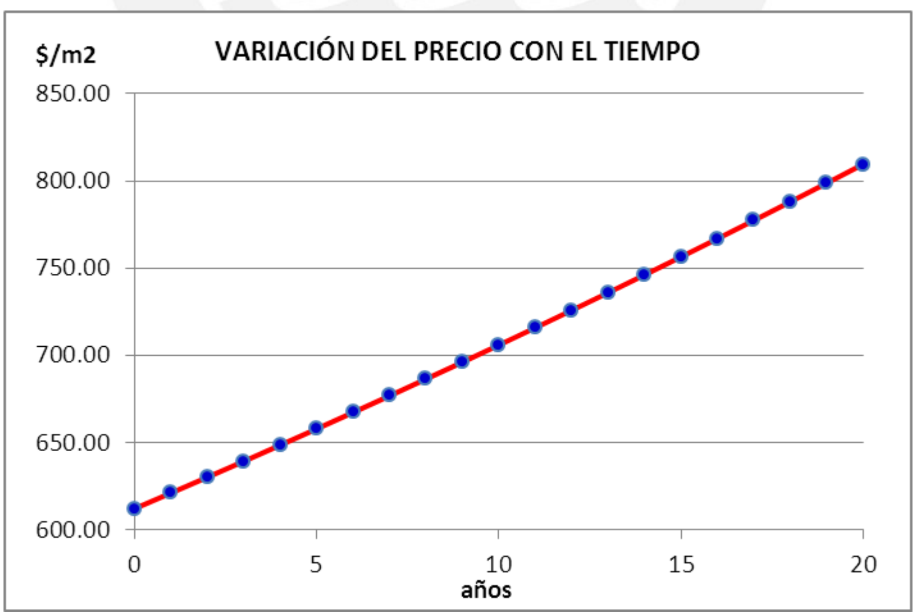

Figure A.3: Variación del precio con el tiempo

VARIACIÓN DE LA RENTA CON LA DISTANCIA					
z	A	rC	RI	RU	R ($/m2)
0	1.00	5.00	15.61	35.68	57.30
1,000	1.00	5.00	15.61	31.68	53.30
2,000	1.00	5.00	15.61	27.68	49.30
3,000	1.00	5.00	15.61	23.68	45.30
4,000	1.00	5.00	15.61	19.68	41.30
5,000	1.00	5.00	15.61	15.68	37.30
6,000	1.00	5.00	15.61	11.68	33.30
7,000	1.00	5.00	15.61	7.68	29.30
8,000	1.00	5.00	15.61	3.68	25.30
8,921	**1.00**	**5.00**	**15.61**	**0.00**	**21.61**
9,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
10,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
11,151	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**1.00**
11,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
12,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
13,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
14,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
15,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
16,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
17,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
18,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
19,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
20,000	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Table A.4: Variación de las rentas con la distancia - Modelo estocástico lineal

APÉNDICE 2: Aplicación Modelo Estocástico (Capítulo 3)

Se tomará como base los datos del ejemplo anterior, de la ciudad de un millón de hogares, para aplicarlos al modelo estocástico (lineal) desarrollado en el capítulo 3. Adicionalmente, se tomará en consideración una desviación estándar en las rentas igual a $\sigma = 5$. Aplicando la ecuación (3.20), se obtiene el valor de $\alpha = 0.062$, que determina en gran medida la cuantía de incertidumbre en la renta y el precio, según lo explicado en el capítulo 3.

La tabla (A.4) muestra los diferentes valores que adopta la renta de la tierra según la distancia al centro de la ciudad. Se aprecian los cuatro componentes de la renta: la renta agrícola A, de construcción rC y de irreversibilidad RI son constantes respecto a la distancia,. mientras que la renta de ubicación RU varía de forma lineal y decreciente con la distancia. La figura (A.4) muestra gráficamente lo descrito en la tabla (A.4); se aprecia que el componente estocástico RI incrementa más las rentas respecto al caso determinista además de crear una brecha mayor en el límite de la ciudad, a una distancia de 8,921 m.

Respecto a los precios, la tabla (A.5) muestra los cinco componentes del precio. Se aprecia que en el área agrícola, a corta distancia de la frontera urbana, la prima de irreversibilidad PI y de crecimiento PC disminuyen drásticamente, lo que se explica por las ecuaciones en las que estos componentes decrecen exponencialmente. Además, la prima de irreversibilidad tienen mayor influencia que la prima de crecimiento

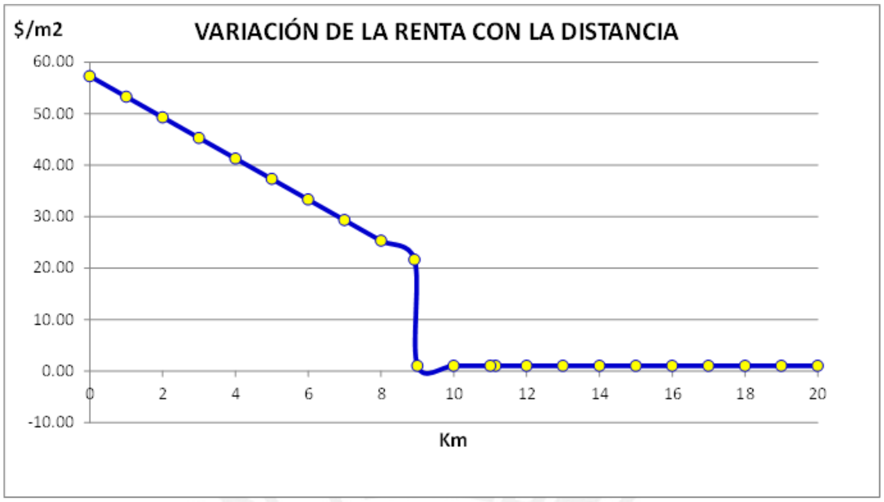

Figure A.4: Variación de las rentas con la distancia - Modelo estocástico lineal

en el precio total P. La figura (A.5) muestra gráficamente lo descrito en la tabla (A.5).

VARIACIÓN DEL PRECIO CON LA DISTANCIA						
z	A/r	C	PU	PI	PC	P ($/m2)
0	20.00	100.00	713.65	312.25	8.00	1,153.90
1,000	20.00	100.00	633.65	312.25	8.00	1,073.90
2,000	20.00	100.00	553.65	312.25	8.00	993.90
3,000	20.00	100.00	473.65	312.25	8.00	913.90
4,000	20.00	100.00	393.65	312.25	8.00	833.90
5,000	20.00	100.00	313.65	312.25	8.00	753.90
6,000	20.00	100.00	233.65	312.25	8.00	673.90
7,000	20.00	100.00	153.65	312.25	8.00	593.90
8,000	20.00	100.00	73.65	312.25	8.00	513.90
8,921	**20.00**	**100.00**	**0.00**	**312.25**	**8.00**	**440.25**
9,000	20.00	0.00	0.00	63.83	1.64	85.47
10,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
11,151	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
11,200	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
12,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
13,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
14,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
15,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
16,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
17,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
18,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
19,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00
20,000	20.00	0.00	0.00	0.00	0.00	20.00

Table A.5: Variación del precio con la distancia - Modelo estocástico lineal

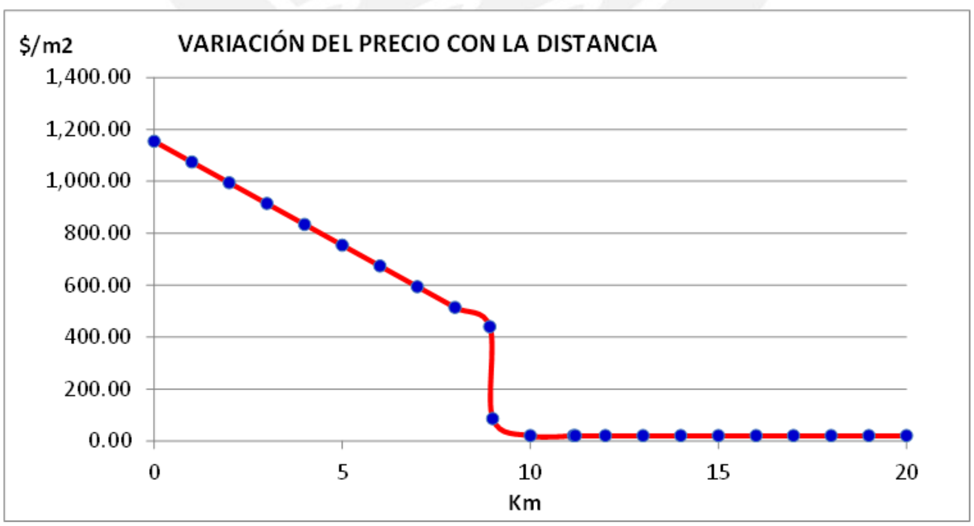

Figure A.5: Variación del precio con la distancia - Modelo estocástico lineal

APÉNDICE 3: Aplicación Modelo de Valoración de Opciones (Capítulo 4)

Se aplicará el resultado obtenido en la ecuación (4.24) desarrollado en la sección 4.3 para determinar el valor de la opción de la tierra agrícola cuando se va a convertir a urbana. Se usarán los mismos datos del ejemplo anterior, excepto que la tasa de descuento será $r = 10\%$ (este incremento se hace para apreciar mejor la variación no lineal de W respecto de R). Se asumirá un nivel de renta de reserva $R^* = \$20/m^2$. El valor de la opción agrícola W de la tierra es creciente en función de las rentas R (la que depende a su vez de la distancia al centro de la ciudad y del tiempo). Según la ecuación (4.24), el valor de la opción W es:

$$W = \left[\frac{R^*}{r - \hat{g}} - \left(\frac{A}{r} + C\right)\right]\left[\frac{R(t,z)}{R^*}\right]^\theta$$

Y el valor del precio agrícola total es: $P^a = \frac{A}{r} + W$.

Los datos son:

- Renta de reserva: $R^* = \$20/m^2$
- Tasa de descuento: $r = 10\%$
- Tasa de crecimiento media: $g = 2\%$
- Tasa de crecimiento de riesgo neutral: $\hat{g} = 1\%$
- Volatilidad (desviación estándar): $\sigma = 1$
- Renta agrícola: $A = \$1/m^2$
- Costo de conversión: $C = \$100/m^2$
- Theta: $\theta = 1.153$ (usando la ecuación (3.47))

El cuadro (A.6) muestra los valores de la opción W y del precio agrícola P^a para diferentes valores de la renta R.

La figura (A.6) muestra gráficamente el comportamiento del precio y de la opción agrícola en función de la renta. Se puede apreciar que las dos curvas son convexas y paralelas entre sí.

VARIACIÓN DE LA OPCIÓN CON LA RENTA			
R	A/r	W	Pa
0.00	10.00	0.00	10.00
1.00	10.00	3.54	13.54
2.00	10.00	7.88	17.88
3.00	10.00	12.58	22.58
4.00	10.00	17.53	27.53
5.00	10.00	22.68	32.68
6.00	10.00	27.99	37.99
7.00	10.00	33.44	43.44
8.00	10.00	39.00	49.00
9.00	10.00	44.68	54.68
10.00	10.00	50.45	60.45
11.00	10.00	56.31	66.31
12.00	10.00	62.26	72.26
13.00	10.00	68.28	78.28
14.00	10.00	74.37	84.37
15.00	10.00	80.53	90.53
16.00	10.00	86.76	96.76
17.00	10.00	93.04	103.04
18.00	10.00	99.38	109.38
19.00	10.00	105.78	115.78
20.00	10.00	112.22	122.22

Table A.6: Variación del precio y de la opción agrícola con la renta

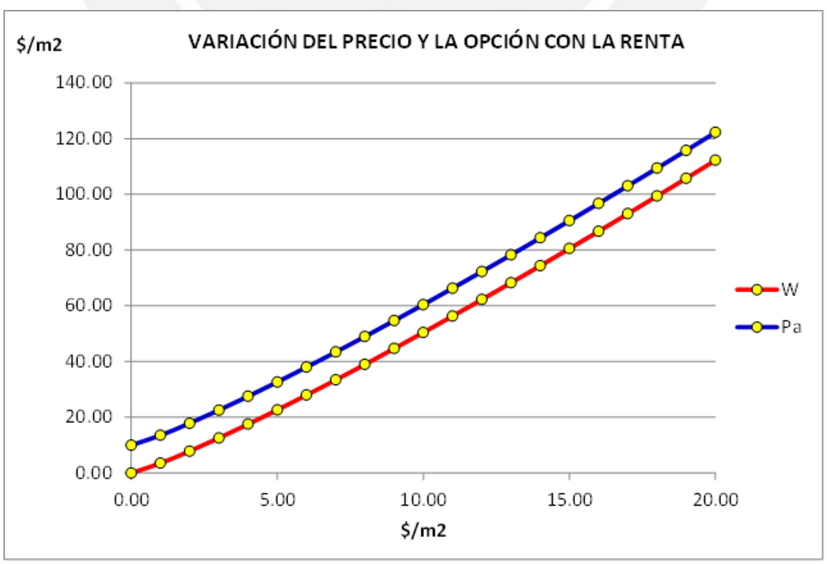

Figure A.6: Variación del precio y de la opción agrícola con la renta

APÉNDICE 4: Glosario de términos y de conceptos

- **Curva bid-rent** [8, 11, 9, 2]: La "bid-rent" es la máxima renta que un potencial usuario ofrece o está dispuesto a pagar por una determinada ubicación.

- **Esperanza condicional** [4]: Sea X una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y sea $\mathcal{G}$ una sigma álgebra que contiene a $\mathcal{F}$. Entonces, la esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$ está definida como una variable aleatoria $E\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ tal que

  - $E\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ es $\mathcal{G}$-medible
  - Para cualquier $A \,\epsilon\, \mathcal{G}$

$$\int_A E\left[X \mid \mathcal{G}\right] dP = \int_A X dP$$

- **Fórmula de Feynman-Kac** [17]: *Supongamos que $X(t)$ sigue un proceso estocástico:*

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB^Q(t)$$

donde $B^Q(t)$ es un movimiento browniano bajo una medida de probabilidad Q. Sea $W(X(t), t)$ una función diferenciable de $X(t)$ y t supongamos que $W(X(t), t)$ sigue una ecuación diferencial parcial dada por:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mu(t, X(t))\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X(t))\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - r(X(t), t)W(X(t), t) = 0$$

y con condición de frontera: $W(X(T), T)$. El teorema afirma que tiene la solución:

$$W(X(t), t) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(X(u),u)du} W(X(T), T) \mid \mathcal{F}_{\mathrm{t}}\right]$$

Donde la esperanza condicional es tomada bajo la medida de probabilidad Q que hace el término estocástico en la primera ecuación sea un movimiento browniano.

- **Movimiento Browniano** [4]: Es un proceso estocástico $B(t)$ con valores en $\mathbb{R}$ definidos en $t\,\epsilon[0,\infty)$ tal que

1. $B(0) = 0$ casi seguramente;
2. Los caminos muestrales $t \to B(t)$ son continuos casi seguramente;
3. Para cualquier sucesión finita de tiempos $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ y conjuntos de Borel $A_1, ..., A_n \subset \mathbb{R}$

$$P\{B(t_1)\epsilon A_1, ..., B(t_n)\epsilon A_n\} = \int_{A_1} ... \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) ... p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 ... dx_n$$

donde

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

definido para cualquier $x, y\, \epsilon\, \mathbb{R}$ y $t > 0$ es llamada la densidad de transición.

- **Opción real** [7, 11, 13]: Es el derecho, mas no la obligación, de asumir una decisión de inversión tal como postergar, abandonar, expandir, ejecutar, o contratar un proyecto de inversión de capital. A diferencia de la opción financiera, el activo subyacente es un activo real.

- **Precio de equilibrio** [16]: Se dice que p^* es un precio de equilibrio (Walrasiano) si la función exceso de demanda agregada Z es nula. Para asegurar la existencia de un vector de precios p^* se deben cumplir las siguientes cinco propiedades:

  - $Z(p)$ es continua
  - $\forall \alpha > 0;\ Z(\alpha p) = Z(p)$
  - $pZ(p) = 0$
  - $\exists s > 0\, tal\ que\ \forall p\, \epsilon\, \mathbb{R}^L_{++} mín_{l=1,...,L} Z_l(p^n) \to +\infty$
  - Si $p^n \to p \neq 0$ con $p_{l'} = 0$ para cierto l': $máx_l Z_l(p^n) \to +\infty$

- **Precio de la tierra agrícola** [5]: En economía urbana, es el precio de equilibrio que se da para la tierra rural, aquella que está fuera de los límites urbanos.

- **Precio de la tierra urbana** [5]: En economía urbana, es el precio de equilibrio que se da para la tierra desarrollada (con habilitación urbana: redes de servicios de agua, alcantarillado, electricidad, etc.), aquella que está dentro de la ciudad.

- **Prima de crecimiento** [5, 6]: Es el componente del precio de la tierra (urbana o agrícola) que equivale al valor de los futuros incrementos de renta que resultan del crecimiento de la ciudad.

- **Prima de incertidumbre** [6]: Es el componente del precio de la tierra (urbana o agrícola) que cuantifica el riesgo que se genera debido a la incertidumbre de la inversión en la conversión de la tierra de agrícola a urbana. Es llamada también "prima de irreversibilidad".

- **Propiedad de Markov** [4]: Sea S un conjunto contable finito y $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una sucesión S-valuada de variables aleatorias X_n, $n \epsilon \mathbb{N}$ es llamada una cadena de Markov S-valuada si para todo $n \epsilon \mathbb{N}$ y $s \epsilon S$

$$P\left(X_{n+1} = s \mid X_0, ..., X_n\right) = P\left(X_{n+1} = s \mid X_n\right)$$

  La propiedad anterior se llama *Propiedad de Markov* de la cadena X_n. Se dice que una cadena de Markov no tiene memoria porque los estadops futuros dependen sólo del presente, no del pasado.

- **Renta de la tierra** [18]: Según David Ricardo, la renta es la porción del producto de la tierra que se paga a su dueño por el uso de las fuerzas originarias e indestructibles del suelo (por el uso de las fuerzas productivas tales como cultivar, cosechar, etc.). Debido a que la tierra no es ilimitada y que su calidad no es uniforme es la razón de que se pague renta por el uso de ella. La renta agrícola es la diferencia en el producto que se obtiene, empleando dos cantidades iguales de capital y de trabajo. Este concepto de renta diferencial es el que se emplea en la economía urbana y la renta dentro de la ciudad está dada por la diferencia en los terrenos que tienen ubicaciones distintas.

- **Teorema de Radon-Nikodyn** [4]: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{G}$ una sigma álgebra contenida en $\mathcal{F}$. Entonces, para cualquier variable aleatoria X existe una variable aleatoria Y que es $\mathcal{G}$-medible, tal que:

$$\int_A X dP = \int_A Y dP$$

  Para cada $A \epsilon \mathcal{G}$

- **Tiempo de parada** [4]: Una variable aleatoria τ con valores en el conjunto $\{1, 2, ...\} \cup \infty$ es llamada tiempo de parada (con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n$) si para cada $n = 1, 2, ...$

$$\{\tau = n\} \;\epsilon\, \mathcal{F}_n$$

- **TIR** [7]: La Tasa Interna de Retorno es un indicador multi período que permite medir el retorno de una inversión. La TIR equivale a la tasa de descuento que hace el VAN nulo. Se usa para medir la bondad de una inversión: un proyecto rentable tiene una TIR no menor que la tasa de descuento.

- **VAN** [7]: El Valor Actual Neto es un indicador que permite calcular el valor presente de los flujos de caja futuros que se originan por una inversión. Equivale a la suma de dichos flujos de caja descontados a una tasa de descuento. Se usa para medir la bondad de una inversión: un proyecto rentable tiene un VAN no negativo.

En tiempo discreto:

$$VAN = F_0 + \frac{F_1}{1+K} + \frac{F_2}{(1+K)^2} + ... + \frac{F_N}{(1+K)^N}$$

En tiempo continuo:

$$VAN = \int_t^N F(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau$$

Donde:
F_i: Flujo en el tiempo i
K: tasa de descuento
N: número de períodos o tiempo final
$F(\tau)$: flujo en tiempo continuo en función del tiempo

References

[1] ALKHEDER, S. & SHAN, J. en *Cellular Automata Urban Growth Simulation and Evaluation - A Case Study of Indianapolis.* Geomatics Engineering, School of Civil Engineering, Purdue University

[2] ALONSO W. (1964) *Location and land use: toward a general theory of land rent.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[3] BATTY, M. *A Geometry of Form and Function* (1994) Academic Press Limited 24-28 Oval Road, London.

[4] BRZEZNIAK, Z. & ZASTAWNIAK, T. (1999) *Basic Stochastic processes.* Springer-Verlag London Limited

[5] CAPOZZA, D. & HELSLEY R. (1989), *The Fundamentals of Land Prices and Urban Growth*, en Journal of Urban Economics 26, 295-306.

[6] CAPOZZA, D. & HELSLEY R. (1990), *The Stochastic city*, en Journal of Urban Economics 28, 187-203.

[7] CAPOZZA, D. & LI, Y. (2002), *Optimal Land Development Decisions*, en Journal of Urban Economics 51, 123-142.

[8] DIPASQUALE & WHEATON (1996) *Urban economics and real estate markets.* Chapter 3: “The urban land market: rents and prices”. Prentice Hall, New Jersey.

[9] FUJITA, M.; KRUGMAN, P.; VENABLES, A. *The Spatial Economy.* Chapter 2: “Antecedent I: Urban Economics”. Prentice Hall, New Jersey

[10] GAR-ON YEH, A. & LI, X. *Theory, data, methods: developing spatially explicit economic models of land use change.* Centre of Urban Planning and Environmental Management. University of Hong Kong.

[11] GELTNER & MILLER (2001) *Commercial real estate analysis and investments.* Chapter 4: “Inside the city: Some basic urban economics” Chapter 28 “Real Options and Land Value”. South-Western. Mason. Ohio

[12] HU, S. & CHENG, Q. en *Multifractal characterization of urban residential land price in space and time* (2012). Applied Geography 34 (2012) 161 - 170

[13] HULL, J. (2005). *Options, Futures, and other derivatives* 6th ed.

[14] KARLIN, S. & TAYLOR, H. (1975). *A first course in stochastic processes.* Academy Press New York.

[15] LI, L. *Simulating spatial urban expansion based on a physical process* (2003) Landscape and Urban Planning 64 (2003) 67–76

[16] MAS-COLELL, Andreu. (1995) *Microeconomic Theory.* New York – Oxford. Oxford University Press.

[17] OKSENDAL, B. (2003) *Stochastic Differential Equation: An Introduction with Applications.* Sexta edición, Springer.

[18] RICARDO, David. (1817) *On the Principles of Political Economy and Taxation.* London: John Murray.

[19] WEISNER, C. (1997) *Modeling Urban Dynamics with Artifitial Neural Networks and GIS.*