

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD
CATÓLICA**
DEL PERÚ

**ESTUDIO DE IMPACTO DE SÓLIDOS DEFORMABLES
MEDIANTE LA SIMULACIÓN POR SOFTWARE
DE ELEMENTOS FINITOS**

Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico, que presenta el bachiller:

David Germán Guardamino León

ASESOR: Rosendo Franco Rodríguez

Lima, setiembre de 2013

RESUMEN

En este trabajo se presenta un procedimiento para el estudio de impacto de sólidos deformables mediante la simulación por software de elementos finitos. Para desarrollar el mencionado procedimiento, se realizó inicialmente un estudio de los diferentes métodos analíticos, computacionales y experimentales relacionados con este fenómeno. Con el estudio de los métodos analíticos, se resolvieron problemas básicos de impacto longitudinal, transversal y torsional en vigas con diferentes objetos proyectiles. Adicionalmente, mediante el estudio de los métodos computacionales, se realizaron las simulaciones de los mismos problemas básicos utilizando el software de elementos finitos ANSYS v14. Los resultados obtenidos mediante simulación fueron comparados con los resultados de los métodos analíticos y de otros autores encontrando que los métodos computacionales brindan resultados más confiables debido a que consideran efectos geométricos, inerciales, y no lineales. Adicionalmente, se encontró que para impactos a bajas velocidades el método de integración implícita en el tiempo es el más adecuado y el explícito lo es para impacto a altas velocidades. Finalmente, se determinó que para analizar el fenómeno de impacto es necesario conocer las frecuencias naturales y modos de vibración del sistema. Estas propiedades definen los parámetros de simulación por software de elementos finitos tales como el incremento del paso de tiempo (*Time Step*) y tiempo de simulación (*End Time*). Así, con lo anteriormente mencionado, se elaboró el procedimiento tomando en cuenta el pre-procesamiento, solución y post-procesamiento del problema. El mencionado procedimiento presenta detalles del modelo matemático que se debe desarrollar, del análisis del comportamiento dinámico del modelo desarrollado, de la elección del algoritmo implícito o explícito para la solución del problema y de la revisión de los resultados obtenidos para refinar el análisis. Como ejemplo de aplicación del procedimiento desarrollado se estudia una estructura FOPS (*Falling Object Protective Structure*) obteniendo resultados esperados de deformación plástica.



TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

TÍTULO : ESTUDIO DE IMPACTO DE SÓLIDOS DEFORMABLES
MEDIANTE LA SIMULACIÓN POR SOFTWARE DE
ELEMENTOS FINITOS

ÁREA : Diseño # 240

PROPUESTO POR : Dr. Rosendo Franco Rodríguez

ASESOR : Dr. Rosendo Franco Rodríguez

TESISTA : David Germán Guardamino León

CÓDIGO : 2007.4588

FECHA : 03 de Junio del 2013



DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS:

En la actualidad, el fenómeno de impacto entre cuerpos sólidos ha atraído un creciente interés de investigadores y diseñadores durante las últimas décadas debido a sus aplicaciones en diversas áreas de ingeniería. Existen métodos analíticos y experimentales para el análisis de este fenómeno, pero dado el gran desarrollo tecnológico en informática, el uso de los métodos computacionales ha ido adquiriendo gran aceptación y calidad en los resultados obtenidos. Sin embargo, este fenómeno no es muy estudiado en el ámbito universitario. En la presente tesis se desea realizar un estudio de los diferentes métodos analíticos, computacionales y experimentales relacionados con el fenómeno de impacto de sólidos deformables. Con los métodos analíticos se podrán resolver algunos ejemplos básicos, los cuales posteriormente serán simulados con métodos computacionales. Los resultados obtenidos serán comparados con los métodos analíticos y métodos experimentales desarrollados por otros autores. Con lo expuesto anteriormente, el objetivo general de la tesis es desarrollar un procedimiento detallado para el estudio de impacto de sólidos deformables mediante la simulación por software de elementos finitos. Con el mencionado procedimiento se podrá realizar diseños más eficientes logrando una reducción de los factores de seguridad, lo cual implica una reducción de material y de potencia instalada.



TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

**ESTUDIO DE IMPACTO DE SÓLIDOS DEFORMABLES MEDIANTE
LA SIMULACIÓN POR SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS**

Resumen

Introducción

Capítulo 1. Estudio del estado del arte

Capítulo 2. Desarrollo y simulación de ejemplos básicos

Capítulo 3. Desarrollo de un procedimiento para el estudio de impacto en sólidos deformables

Conclusiones

Bibliografía

Anexos

Máximo: 100 páginas



Dr. Rosendo Franco Rodríguez
Asesor







*A Dios que hizo todo esto posible,
a mis padres que siempre me brindaron su apoyo
y a mi familia.*

INDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN.....	i
DEDICATORIA.....	iv
INDICE DE CONTENIDOS.....	v
INTRODUCCION.....	1
1. ESTUDIO DEL ESTADO DEL ARTE	4
1.1 Introducción	4
1.2 Fenómeno de impacto	5
1.3 Revisión de métodos analíticos.....	6
1.3.1 Propagación de ondas	6
1.3.2 Impacto longitudinal en vigas	12
1.3.3 Impacto transversal en vigas.....	18
1.3.4 Impacto torsional en vigas.....	24
1.4 Revisión de métodos computacionales	25
1.4.1 Método de los Elementos Finitos	26
1.4.2 Análisis lineal	26
1.4.3 Discretización temporal.....	28
1.4.4 Discretización espacial.....	31
1.4.5 Análisis no lineal	31
1.5 Revisión de métodos experimentales.....	35
1.5.1 Ensayo de Charpy / Izod.....	35
1.6 Impacto a altas velocidades	37
2. DESARROLLO Y SIMULACIÓN DE EJEMPLOS BÁSICOS	40
2.1 Introducción	40
2.2 Desarrollo y simulación del primer ejemplo básico: impacto longitudinal	41
2.2.1 Desarrollo mediante métodos analíticos.....	42

2.2.2	Simulación mediante software de elementos finitos	43
2.2.3	Comparación y discusión de resultados	48
2.3	Desarrollo y simulación del segundo ejemplo básico: impacto transversal en una viga bi-apoyada	51
2.3.1	Desarrollo mediante métodos analíticos.....	52
2.3.2	Simulación mediante software de elementos finitos	53
2.3.3	Comparación y discusión de resultados	59
2.4	Desarrollo y simulación del tercer ejemplo básico: impacto torsional en una viga empotrada.....	62
2.4.1	Desarrollo mediante métodos analíticos.....	62
2.4.2	Simulación mediante software de elementos finitos	63
2.4.3.	Comparación y discusión de resultados	65
2.5	Desarrollo y simulación del cuarto ejemplo básico: impacto de una esfera contra un disco.....	66
2.5.1	Simulación mediante software de elementos finitos	66
3.	DESARROLLO DE UN PROCEDIMIENTO PARA EL ESTUDIO DE IMPACTO EN SÓLIDOS DEFORMABLES	73
3.1	Introducción	73
3.2	Procesos de análisis con el MEF	73
3.3	Desarrollo del procedimiento.....	75
3.4	Aplicación del procedimiento a un ejemplo complejo	81
3.4.1	Presentación del ejemplo complejo.....	81
3.4.2	Aplicación del procedimiento.....	85
	CONCLUSIONES.....	99
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	101

INTRODUCCION

El fenómeno de impacto entre cuerpos sólidos ha atraído un creciente interés por investigadores y diseñadores en las últimas décadas debido a sus aplicaciones en diversas áreas de ingeniería. Por ejemplo, se puede mencionar a los medios de transporte donde los componentes mecánicos deben absorber gran parte de la energía generada por un impacto eventual para garantizar la seguridad de los pasajeros. En la construcción y funcionamiento de tuberías, oleoductos o gasoductos también es importante el conocimiento de este fenómeno para poder prevenir posibles desastres ecológicos u otros daños debido a la ruptura de estructuras. Así mismo, su estudio está relacionado con el desarrollo de equipos de protección como cascos, chalecos anti-balas, blindaje, etc. En la mayoría de casos, resulta interesante estimar las magnitudes de los esfuerzos producidos por el impacto para que las estructuras diseñadas no sufran fallas o se encuentren en condiciones conocidas de trabajo.

En el caso de que el impacto de cuerpos sólidos no produzca deformación plástica, es decir, permanezca en régimen elástico, ocurrirá la generación y propagación de ondas de tensión elásticas en medida que la perturbación generada en la región de contacto se refleje en las regiones de contorno, produciendo vibraciones. Como el cálculo de las deformaciones producidas en la región de contacto que cumplan las ecuaciones de movimiento y que también sean compatibles geoméricamente son muy difíciles de ser obtenidas, diferentes aproximaciones analíticas han sido desarrolladas para el análisis de impacto. Por ejemplo, Pisarenko (1989) propuso el uso de un coeficiente de cargas dinámicas para analizar esfuerzos máximos de impacto. Brach (1991) resuelve numerosos problemas prácticos mediante el uso del

coeficiente de restitución “e”. Cuando los aspectos relacionados con la vibración son relevantes, la idealización del cuerpo rígido se torna inadecuada y el problema debe ser analizado utilizando la teoría de propagación de ondas. Expresiones para la determinación de esfuerzos basadas en la teoría de propagación de ondas elásticas, se pueden encontrar en Goldsmith (1960), Johnson (1985), Zukas (1992), Strong (2000) entre otros.

Para geometrías más complejas, la solución del problema se hace muy complicada y, por lo tanto, el uso de herramientas computacionales como el método de elementos finitos (MEF) se torna bastante útil para analizar el fenómeno debido a su versatilidad para definir condiciones de contorno en tales geometrías. Este método se encuentra automatizado en las herramientas de software CAE (*Computer Aided Engineering*, por sus siglas en inglés) tales como ANSYS, LS-DYNA, SolidWorks Simulation, Abaqus, Nastran, Patran o Comsol.

El uso de software de elementos finitos exige un profundo conocimiento no sólo del tema de trabajo, sino también de los principios del MEF. Adicionalmente, puede resultar complicado ya que no se cuenta con un procedimiento el cual brinde, a cualquier interesado en analizar este fenómeno, una secuencia detallada para realizarlo. Si se pudiera desarrollar dicho procedimiento, se podría realizar diseños más eficientes logrando una reducción de los coeficientes de seguridad lo cual implica una reducción de material y de potencia instalada. Se obtendría adicionalmente un ahorro económico y a su vez energético contribuyendo a disminuir el impacto ambiental.

En la presente tesis se desarrolla un procedimiento detallado para el estudio de impacto de sólidos deformables mediante la simulación por software de elementos finitos. Para lograr este objetivo, se sigue rigurosamente una línea de trabajo que empieza en el capítulo 1 con el estado del arte. En este capítulo se muestran los diferentes modelos analíticos, computacionales y experimentales para el estudio del fenómeno de impacto. Luego, en el capítulo 2, se desarrollan ejemplos básicos utilizando métodos analíticos para luego desarrollar los mismos ejemplos mediante la simulación por software de elementos finitos. Se realiza una comparación de los resultados obtenidos determinando la validez de los mismos. Finalmente, en el capítulo 3, se define el procedimiento y se aplica el mismo a un ejemplo de mayor complejidad para analizar los resultados obtenidos.

Por lo antes expuesto, en la presente tesis se plantean los siguientes objetivos:

El objetivo general de la tesis es:

- Obtener un procedimiento detallado para el estudio de impacto de sólidos deformables mediante la simulación por software de elementos finitos.

Como objetivos específicos se tienen:

- Definir los parámetros a tener en cuenta en un análisis de impacto de sólidos deformables.
- Desarrollar problemas básicos de impacto utilizando métodos analíticos.
- Realizar la simulación de los mismos problemas desarrollados utilizando software de elementos finitos.
- Comparar y validar resultados de ambos desarrollos.
- Definir el procedimiento para realizar análisis de impacto.
- Aplicar el procedimiento a un ejemplo de mayor complejidad.

CAPÍTULO 1

1. ESTUDIO DEL ESTADO DEL ARTE

1.1 Introducción

En la actualidad, existen diversos modelos desarrollados para el análisis de problemas de impacto. Estos métodos pueden ser divididos en tres grandes grupos: un primer grupo formado por métodos analíticos y métodos de energía, el segundo basado en ecuaciones diferenciales y el tercero mediante métodos experimentales.

En el primer grupo de métodos, la teoría de elasticidad y la propagación de ondas son la base para el análisis de impacto. Ambos fenómenos pueden ser apreciados en el impacto longitudinal, transversal y torsional.

El segundo grupo de métodos están ligados al uso del método de elementos finitos y diferencias finitas. Estos métodos son los más usados debido a que en la mayoría de situaciones reales se requiere de un estudio más detallado de los efectos en el material del cuerpo. Adicionalmente, estos métodos pueden ser desarrollados mediante la ayuda de software matemático y/o de simulación.

El tercer grupo de métodos se basan en ensayos de impacto como Izod y Charpy que proporcionan como resultados las propiedades mecánicas de los materiales cuando se aplican cargas dinámicas.

En el presente capítulo se revisan algunos métodos de los tres grupos mencionados anteriormente. Adicionalmente, se presentan algunos fenómenos producidos por impacto a altas velocidades.

1.2 Fenómeno de impacto

El fenómeno de impacto en cuerpos es una sollicitación dinámica de corta duración y elevada intensidad que, dada su naturaleza, puede producir daños severos sobre los cuerpos involucrados. Este fenómeno va desde la estática hasta el comportamiento de los materiales como fluidos semejante a la hidrodinámica.

Para clasificar el impacto se suele utilizar el parámetro de la velocidad. Sin embargo, resulta complejo clasificar de forma absoluta los diferentes tipos de impacto por un sólo parámetro, ya que otras variables de tipo geométrico o relacionado con las propiedades del proyectil tienen una importancia decisiva en los esfuerzos y deformaciones producidos en el objetivo del proyectil. Una primera aproximación de los fenómenos de impacto se pueden clasificar según la Tabla 1.1.

Tabla 1.1: Clasificación de impacto de acuerdo a su velocidad según Goicolea

Régimen de velocidad	Velocidad (m/s)	Fenómenos considerados
Velocidad baja	$v < 50$	Efectos elásticos o deformación plástica localizada.
Velocidad media	$50 < v < 500$	Deformación plástica generalizada.
Velocidad alta	$500 < v < 2000$	La resistencia viscosa del material cobra importancia.
Hipervelocidad	$v > 2000$	El material puede comportarse como fluido hidrodinámico.

Algunos de los fenómenos que se producen durante el impacto son:

- A. Dinámica y vibraciones estructurales: en ellos la geometría estructural es predominante, siendo relevantes en los impactos a baja velocidad, y puede estudiarse mediante métodos de integración implícita o explícita en el tiempo.
- B. Propagación de ondas de tensión y de choque: en los impactos a velocidades medias y bajas es importante analizar con detalle el efecto de las ondas de tensión, que se convierten en ondas de choque para impactos a hipervelocidad, por encima de los 2000 m/s generalmente.

- C. Comportamiento no lineal del material: plasticidad, rotura, dependencia de la velocidad de deformación, dependencia de la energía interna o de la temperatura. Se produce en mayor medida al aumentar la velocidad de impacto, aunque para velocidades muy elevadas el material pasa a comportarse prácticamente como un fluido, su resistencia puede despreciarse.
- D. Grandes desplazamientos, es decir cambios de geometría y rotaciones finitas que a su vez influyen en las cargas y en su efecto.
- E. Grandes deformaciones: los alargamientos unitarios de los materiales en fases sólidas pueden superar el 100 %. Bajo presiones muy elevadas el material se comporta como un fluido, con deformaciones muy grandes.
- F. Contactos y fenómenos de interfaz en los contornos: el contacto es clave en cualquier modelo de impacto, ya que a través de él se transmiten las cargas.
- G. Penetración y perforación, por la rotura del material que recibe el impacto (blanco).
- H. Fenómenos locales de rotura como *Spalling*, *Scabbing*, *Petaling*, *Plugging*. Se trata de los mecanismos de rotura del blanco que producen la penetración parcial o total. (Goicolea 2000: 4-5).

1.3 Revisión de métodos analíticos

A continuación se explica la teoría de propagación de ondas y los tipos de ondas producidos durante el impacto como longitudinales, flexionales y torsionales. Con esta explicación, se podrá abordar los diferentes métodos de energía y propagación de ondas para el análisis de impacto longitudinal, transversal y torsional en vigas.

1.3.1 Propagación de ondas

El impacto genera ondas de esfuerzos que propagan energía de deformación lejos de la región de impacto. Si la energía transformada en vibraciones elásticas equivale a una gran fracción de la energía total, el modelo de dinámica de cuerpo rígido no se puede aplicar y el enfoque basado en la propagación de ondas (o el modelo transitorio) es más adecuado.

1.3.1.1 Ondas longitudinales

Para describir este fenómeno, se tiene en la Figura 1-1, una barra isotrópica uniforme y fija en el espacio a la cual será transmitido un pulso compresivo longitudinal. Siendo el punto O el origen del sistema de coordenadas fijas, la expresión $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ denota el desplazamiento del punto $A'B'$ que es paralelo al punto AB . Sin embargo, este punto está inicialmente separado una distancia $x + dx$ del punto O . Si se aplica una fuerza rápidamente en el tiempo $t = 0$ en el plano $x = 0$, se produce una perturbación que será propagada elásticamente a lo largo de la barra tal que sobre el plano AB , en el tiempo t , se encontrará una tensión nominal compresiva $-\sigma_x$ (Teixeira 2002: 24-26).

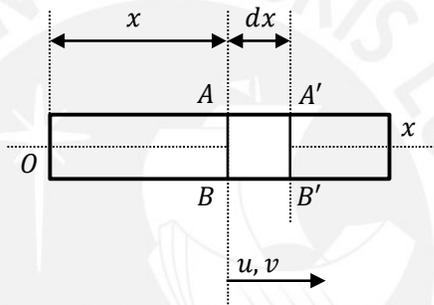


Figura 1-1: Barra isotrópica uniforme, Johnson (1972)

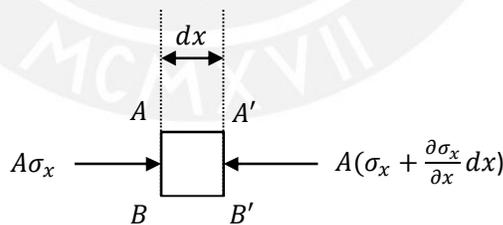


Figura 1-2: Balance de fuerzas del elemento $ABB'A'$

Johnson realiza un balance de fuerzas en el elemento $ABB'A'$ la cual es mostrada en la Figura 1-2. Cuando no presenta cargas, se produce una aceleración tal que la ecuación de movimiento para un elemento de la barra con una sección transversal inicial A es:

$$-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx * A = A * \rho * dx * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Donde ρ es la densidad del material cuando no tiene cargas. La deformación del elemento comprimido dx es $\frac{\partial u}{\partial x}$. Entonces se escribe:

$$-\frac{\sigma_x}{\partial u / \partial x} = E \quad (1.3)$$

Donde E es el módulo de Young. Reemplazando:

$$\sigma_x = -E * \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

Derivando:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -E * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

Usando la ecuación (1.2) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Esta ecuación es la ecuación de onda unidimensional.

Para encontrar una solución a esta ecuación de onda, Johnson supone que u es una función del tipo:

$$u = f(x - ct) + F(x + ct) \quad (1.7)$$

Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot \dot{f}(x - ct) + c \cdot \dot{F}(x + ct) \quad (1.8)$$

y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \cdot \ddot{f}(x - ct) + c^2 \cdot \ddot{F}(x - ct) \quad (1.9)$$

también:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \dot{f}(x - ct) + \dot{F}(x - ct) \quad (1.10)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ddot{f}(x - ct) + \ddot{F}(x - ct) \quad (1.11)$$

Finalmente comparando las ecuaciones (1.9) y (1.11), se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

Realizando una comparación de las ecuaciones (1.12) con (1.6), se tiene:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.13)$$

Este valor c se conoce como la velocidad de la propagación de onda de perturbación elástica a través del espacio ocupado por la barra cuando está sin cargas.

Cuando un esfuerzo de compresión uniforme σ_x es aplicado repentinamente en el extremo de una barra, una capa infinitesimalmente fina de material sufre compresión en el instante $t = 0$. Esta compresión viaja a lo largo de la barra con una velocidad c transfiriendo compresión a la capa de material más cercana. Luego de un intervalo de tiempo dt , una porción de longitud dx estará en compresión permaneciendo el resto de la barra en reposo (Timoshenko & Goodier 1980: 440-441).

Teixeira muestra una deducción para calcular el esfuerzo inicial producido en la barra aplicando ecuaciones de impulso y momentos. Este esfuerzo puede ser calculado mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_o = c * \rho * v \quad (1.14)$$

donde v es la velocidad media de las partículas en la zona comprimida.

1.3.1.2 Ondas flexionales

Para el caso de ondas flexionales, se debe considerar todos los desplazamientos en el análisis para obtener resultados coherentes. El estudio de ondas de Love muestra los desplazamientos con las siguientes expresiones:

$$u_r = U' \cos \theta e^{i(\xi z + \omega t)} \quad (1.15)$$

$$u_\theta = V' \sin \theta e^{i(\xi z + \omega t)} \quad (1.16)$$

$$u_z = W' \cos \theta e^{i(\xi z + \omega t)} \quad (1.17)$$

donde U', V' y W' son sólo funciones de r de coordenadas cilíndricas, ξ es el número de onda y ω es la velocidad angular.

Con lo anterior, es posible escribir las ecuaciones anteriores en términos de funciones de Bessel sustituyendo los desplazamientos en la ecuación de movimiento. Entonces:

$$u_r = \left[B_1 \frac{\partial}{\partial r} J_1(hr) + B_2 \xi \frac{\partial}{\partial r} J_1(k'r) + \frac{B_3}{r} \frac{\partial}{\partial r} J_1(k'r) \right] \cos \theta e^{i(\xi z + \omega t)} \quad (1.18)$$

$$u_\theta = - \left[\frac{B_1}{r} J_1(hr) + \frac{B_2 \xi}{r} J_1(k'r) + B_3 \frac{\partial}{\partial r} J_1(k'r) \right] \sin \theta e^{i(\xi z + \omega t)} \quad (1.19)$$

$$u_z = i [B_1 \xi J_1(hr) - B_2 k'^2 J_1(k'r)] \cos \theta e^{i(\xi z + \omega t)} \quad (1.20)$$

donde: $k'^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} - \xi^2$, $h^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} - \xi^2$ y B_1, B_2 y B_3 son constantes.

La ecuación de Euler-Bernoulli brinda una descripción muy simple para ondas flexionales en una viga de sección constante:

$$EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.21)$$

Donde u_y es el desplazamiento transversal de la viga, E es módulo de elasticidad, I es el momento de inercia, A es la sección transversal y ρ es la densidad de la viga.

Asumiendo el desplazamiento transversal de la forma $u_y = D \cos(\omega t - \xi x)$ donde D es la amplitud, se puede escribir la velocidad de fase c de la onda de flexión (Kolsky 1968: 68-73):

$$c = \frac{2\pi c_0 K}{A} \quad (1.22)$$

donde $K = \sqrt{IA}$ es el radio de giro de la sección transversal de la viga.

1.3.1.3 Ondas torsionales

Una aproximación para ondas torsionales se obtiene considerando un pulso torsional M_t aplicado repentinamente en el extremo de una viga de radio r en el instante $t = 0$. A una distancia x del origen de la viga, tal cual se muestra en la Figura 1-3, se asume que el plano de la sección transversal gira un ángulo θ . Se supone también que la viga tiene una velocidad angular ω . Entonces, un elemento de la viga de longitud δx presenta una rotación con respecto al otro lado de $(\partial\theta/\partial x)\delta x$. Sea $(\partial M_t/\partial x)$ la tasa de cambio de torque a lo largo de la viga con distancia x . Con lo anterior, el torque resultante en el elemento es de $(\partial M_t/\partial x)\delta x$ y produce una aceleración angular $\partial^2\theta/\partial t^2$, tal que (Johnson 1972: 46-50):

$$\frac{\partial M_t}{\partial x} \delta x = I \delta x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (1.23)$$

donde $I \delta x$ es el momento de inercia del elemento de longitud δx sobre el eje de la viga.

Usando teoría elemental de resistencia de materiales, se conoce que el torque T se calcula mediante la siguiente expresión:

$$M_t = \mu J_t \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1.24)$$

donde J_t es el momento polar de inercia.

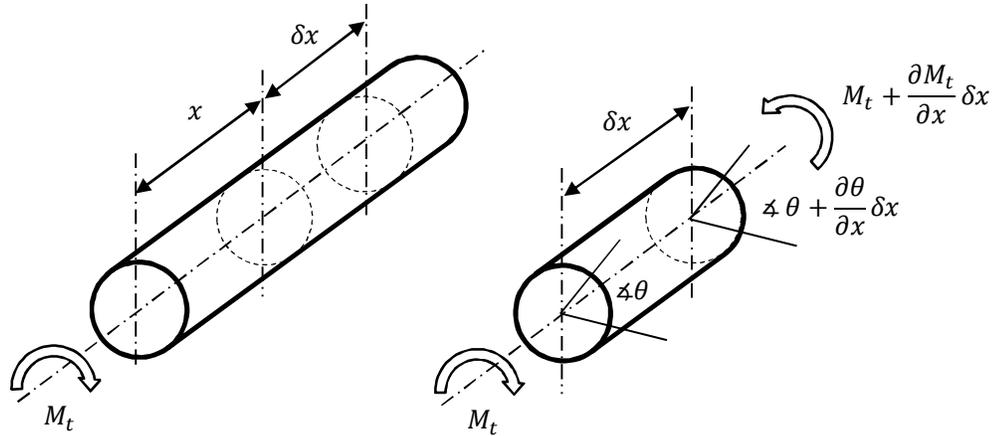


Figura 1-3: Pulso torsional sobre una viga según Johnson

Combinando las ecuaciones (1.23) y (1.24):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{1.25}$$

Donde $c_t = \sqrt{\mu J_t / I}$ representa la velocidad de propagación de pulso torsional a lo largo de la viga.

Para una viga cilíndrica de radio r , el valor de c_t es dado por:

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.26}$$

Finalmente, en el caso de una viga de sección transversal cuadrada de lado $2r$, el valor de c_t puede ser calculada aproximadamente según la siguiente expresión:

$$c_t = 0.919 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.27}$$

1.3.2 Impacto longitudinal en vigas

1.3.2.1 Métodos de energía para el impacto longitudinal

Uno de los análisis más simples para el impacto longitudinal en vigas es estudiar el esfuerzo máximo producido por un cuerpo que impacta a una viga empotrada. En la Figura 1-4, se tiene un cuerpo de masa m_2 que impacta a una viga esbelta de

masa $m_1 = \rho AL$ con una velocidad inicial v_{2_0} en el punto $x = 0$. El desplazamiento, módulo de elasticidad, la sección transversal y la longitud de la viga serán representadas por u, E, A y L respectivamente. Adicionalmente, se considera que la viga está inicialmente en reposo y empotrada en $x = L$.

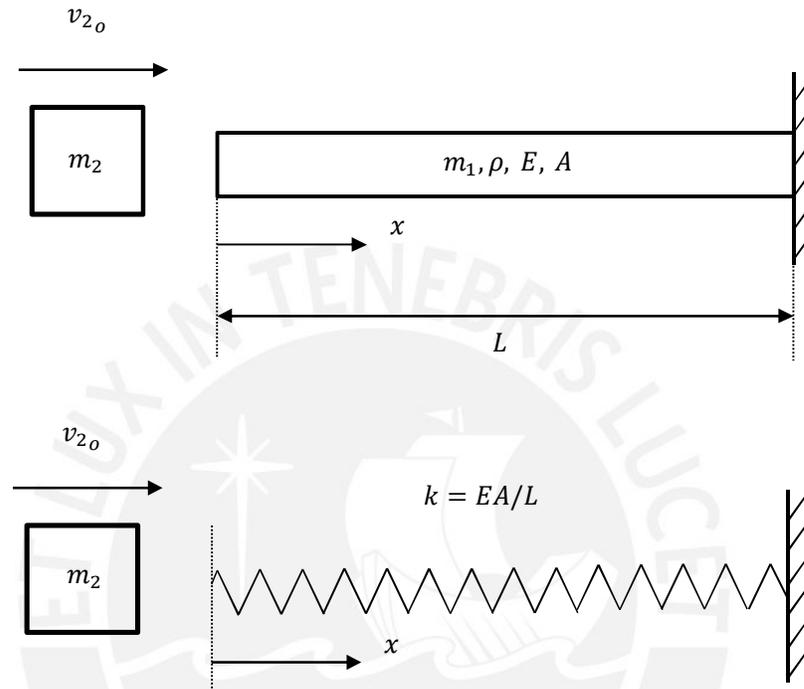


Figura 1-4: Impacto longitudinal sobre una viga según Goldsmith

Las consideraciones de este análisis incluyen la unidireccionalidad de las ondas de propagación en la viga, las vibraciones del cuerpo m_2 son omitidas y la perfecta planitud de las superficies de contacto (Goldsmith 1960: 46-47).

Goldsmith reemplaza la viga por un resorte lineal sin masa cuya constante de rigidez $k = EA/L$ es la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario en la viga. En el instante de máximo desplazamiento u_{max} del resorte, donde la masa m_2 estará en reposo, se realiza un balance de energía igualando la energía cinética inicial y la máxima energía potencial del sistema. De esta operación se obtiene:

$$E_{c_1} = E_p \rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_{2_0}^2 = \frac{1}{2} EAL \left(\frac{u_{max}}{L} \right)^2 \quad (1.28)$$

$$\therefore \epsilon_x = \frac{u_{max}}{L} = v_{2o} \sqrt{\frac{m_2}{EAL}} = \frac{v_{2o}}{c} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (1.29)$$

Con lo anterior, el esfuerzo máximo producido será:

$$\sigma_{max} = E\epsilon_x \rightarrow \sigma_{max} = \frac{E v_{2o}}{c} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \rightarrow \sigma_{max} = \sigma_o \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (1.30)$$

donde: $\sigma_o = \rho * c * v_{2o}$

Este análisis tiene la desventaja de no considerar efectos inerciales de la viga.

Un segundo análisis de esta situación fue estudiado por Spotts & Shoups en 1998. La masa m_2 tiene una velocidad v_{2o} antes del impacto pero, una vez que impacta contra la viga, esta velocidad se reduce a una velocidad v_d . Considerando que la masa m_2 y la viga permanecen en contacto después del impacto, se deduce que la velocidad en la extremidad de la viga es también v_d . Para solucionar este problema usando métodos de energía se considera que todos los elementos de la viga en el impacto tienen velocidades instantáneas que son proporcionales a sus distancias de pared de la misma (Teixiera 2002: 31-36).

Entonces, sea u la velocidad del elemento a una distancia x de la pared, es válida la siguiente expresión:

$$u = \frac{v_d}{L} * x \quad (1.31)$$

Calculando la energía cinética después del impacto y aplicando el principio de conservación de cantidad de movimiento, se puede llegar a la siguiente expresión para el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{max} = \frac{v_{2o}}{A} * \sqrt{4k * m_2 \frac{\left[1 + \frac{m_1}{3m_2}\right]}{\left[2 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2}} \quad (1.32)$$

1.3.2.2 Método de propagación de ondas para impacto longitudinal

Considerando la propagación de ondas unidireccionalmente, las velocidades de los cuerpos en la cara de contacto de impacto en el instante $t = 0$ es igual a v_{2o} y la tensión inicial de compresión es igual a $\sigma_o = \rho * c * v_{2o}$. La velocidad del cuerpo que impacta a la viga y la presión sobre la misma van decreciendo gradualmente con el paso del tiempo debido a la flexibilidad de la viga. Como consecuencia se irá propagando una onda compresiva decreciente a lo largo de la viga hacia la dirección del empotramiento. La intensidad de esta onda puede ser calculada mediante la siguiente ecuación (Timoshenko & Goodier 1980: 444-452):

$$\sigma = \sigma_o e^{-\left(\frac{\sqrt{E}}{m_2}\right)t} \tag{1.33}$$

La ecuación (1.33) sólo es verdadera para el intervalo $t < 2L/c$. Cuando $t = 2L/c$ la onda retorna nuevamente a la zona de contacto y, como la velocidad del cuerpo que impacta puede ser modificada repentinamente, la onda será reflejada nuevamente y la tensión de compresión aumentará repentinamente a $2\sigma_o$ debido al efecto de superposición de ondas. Este fenómeno se puede observar en la Figura 1-5 c). Con esto, en cada intervalo $T = 2L/c$ habrá este efecto de superposición y la ecuación (1.33) debe ser corregida para obtener el verdadero valor del esfuerzo de compresión.

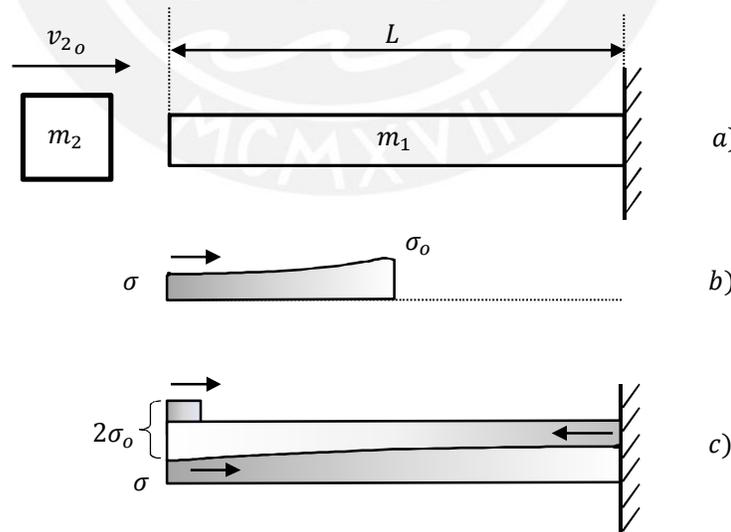


Figura 1-5: Trayectoria de ondas de compresión elástica según Timoshenko & Goodier

Timoshenko & Goodier muestran que sean $s_1(t), s_2(t), s_3(t) \dots$ las tensiones totales de compresión en los extremos de la viga, después de sus respectivos intervalos $T, 2T, 3T \dots$, las tensiones totales de compresión en sus respectivos intervalos son representadas por:

$$s_0(t) = \sigma_0 e^{-\left(\frac{2\alpha t}{T}\right)} \quad (1.34)$$

$$s_1(t) = s_0(t) + \sigma_0 e^{-2\alpha\left[\frac{t}{T}-1\right]} \left[1 + 4\alpha\left(1 - \frac{t}{T}\right)\right] \quad (1.35)$$

$$s_2(t) = s_1(t) + \sigma_0 e^{-2\alpha\left[\frac{t}{T}-2\right]} \left[1 + 8\alpha\left(2 - \frac{t}{T}\right)\right] + 8\alpha^2\left(2 - \frac{t}{T}\right)^2 \quad (1.36)$$

$$s_3(t) = s_2(t) + \sigma_0 e^{-2\alpha\left[\frac{t}{T}-3\right]} \left[1 + 12\alpha\left(3 - \frac{t}{T}\right)\right] + 24\alpha^2\left(3 - \frac{t}{T}\right)^2 + \frac{32}{3}\alpha^3\left(3 - \frac{t}{T}\right)^3 \quad (1.37)$$

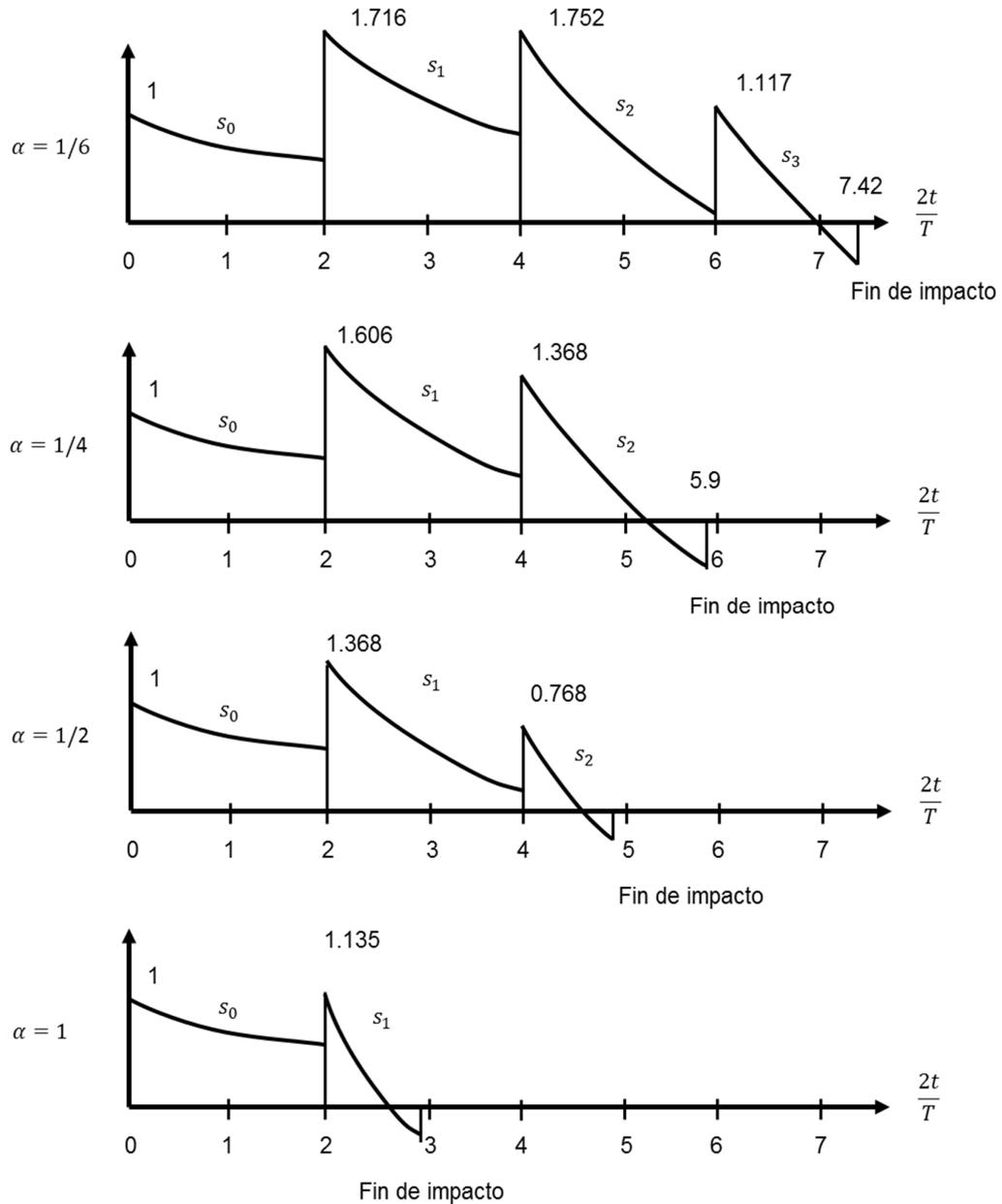


Figura 1-6: Trayectoria de ondas de compresión elástica según Timoshenko & Goodier

En la Figura 1-6 se muestran las curvas de tensión en los extremos de viga para diferentes relaciones de masa $\alpha = m_1/m_2$. En la gráfica se observa que los puntos picos de tensión son debido al efecto de superposición de ondas y que este valor depende de la relación α . Para $\alpha = 1, \alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{4}$ estos picos de tensión son dados en $t = T$ mientras que para $\alpha = \frac{1}{6}$ se da en $t = 2T$.

1.3.3 Impacto transversal en vigas

1.3.3.1 Métodos de energía para el impacto transversal

El estudio del impacto transversal o flexional ha sido realizado con modelos similares para el impacto longitudinal. En la Figura 1-7, se tiene un cuerpo rígido de masa m_2 que impacta a una viga uniforme bi-apoyada de masa $m_1 = \rho AL$ con una velocidad inicial v_{2o} . El desplazamiento, módulo de elasticidad, la sección transversal y la longitud de la viga serán representadas por u, E, A y L respectivamente.

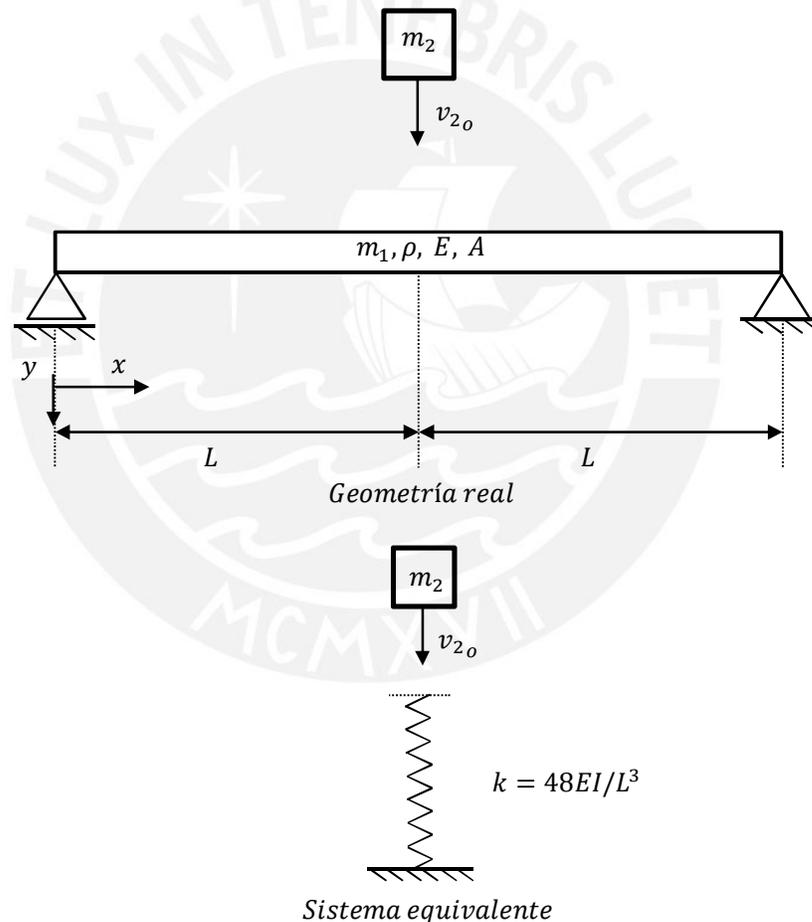


Figura 1-7: Impacto central en una viga bi-apoyada según Goldsmith

Goldsmith, al igual que en su análisis para impacto longitudinal, reemplaza la viga por un resorte lineal sin masa cuya constante de rigidez $k = 48EI/L^3$ es la fuerza estática requerida para producir una deformación transversal unitaria en la viga. En

el instante de máximo desplazamiento u_{max} del resorte, se realiza un balance de energía igualando la energía cinética inicial del cuerpo de masa m_2 y la máxima energía potencial del sistema. De esta operación se obtiene:

$$\frac{m_2 v_{2o}^2}{2} = \frac{k u_y^2}{2} \Rightarrow u_y = v_{2o} \sqrt{\frac{m_2}{k}} \quad (1.38)$$

Donde u_y es la deformación dinámica en el eje y . Incluyendo en el análisis la energía potencial de la masa m_2 , se puede obtener una relación entre las deformaciones estática u_s y dinámica u_y :

$$\frac{m_2 v_{2o}^2}{2} = \frac{k u_y^2}{2} - m_2 g u_y \Rightarrow \frac{u_y}{u_s} = 1 + \sqrt{1 + \frac{k * v_{2o}^2}{m_2 g^2}} \quad (1.39)$$

Siendo $u_s = m_2 g / k$.

Según Goldsmith, se ha podido constatar que la ecuación (1.39) presenta muchas discrepancias que son atribuidas a la falta de consideración de los efectos inerciales. Para corregir esta fórmula, fue desarrollada una ecuación basada en la conservación de cantidad de movimiento conocida como ecuación de Cox:

$$\frac{u_y}{u_s} = 1 + \sqrt{1 + \frac{k * v_{2o}^2}{m_2 g^2 (1 + \frac{17 m_1}{35 m_2})}} \quad (1.40)$$

El valor de tensión máxima es obtenido en la sección donde el momento flector M_f , producido por la fuerza $P = k * u_y$ debido al impacto, también es máximo. Esta sección es el centro de la viga y, por lo tanto, se tienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{PL/4}{W_f} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{k * u_y * L}{4W_f} \quad (1.41)$$

donde W_f es el módulo de resistencia a la flexión.

Otro modelo para este mismo caso es el de Pisarenko en 1989. Él evalúa la influencia de la acción dinámica de la carga sobre la deformación o la tensión a través de un coeficiente dinámico denominado k_d .

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{est}} \quad (1.42)$$

donde δ_{est} es la deformación del elemento elástico durante la aplicación estática de la carga y δ_d es la deformación durante la aplicación dinámica de la carga.

En un caso particular de un cuerpo de masa m_2 que impacta sobre una viga con condiciones determinadas de apoyo, desde una altura H determinada como se muestra en la Figura 1-8.

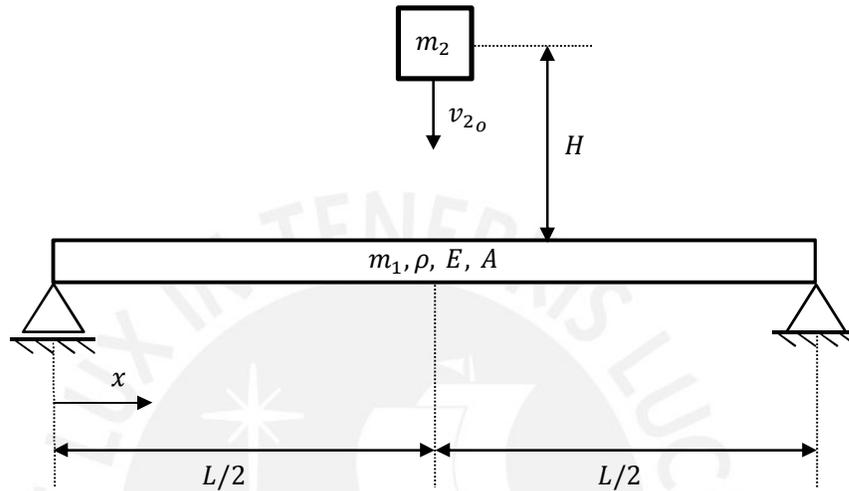


Figura 1-8: Impacto central en una viga bi-apoyada según Pisarenko

En el primer método, en el que no se considera la masa de la viga impactada, el coeficiente de cargas dinámicas se determina por la expresión (Pisarenko 1979: 578-580):

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}} \tag{1.43}$$

Donde k_d es el coeficiente de cargas dinámicas, cuando no se tiene en cuenta la masa del cuerpo impactado y δ_{est} es la flecha máxima de la viga (cuerpo impactado) bajo la carga estática ($m_2 * g$).

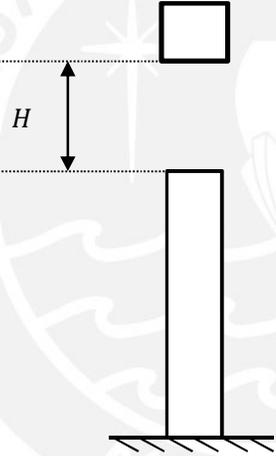
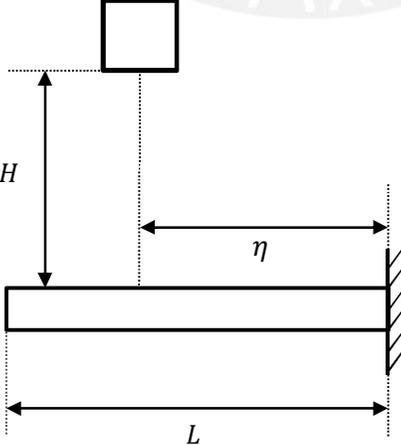
En el segundo método, en el que se tiene en cuenta la masa de la viga impactada, el coeficiente de cargas dinámicas se determina por la expresión:

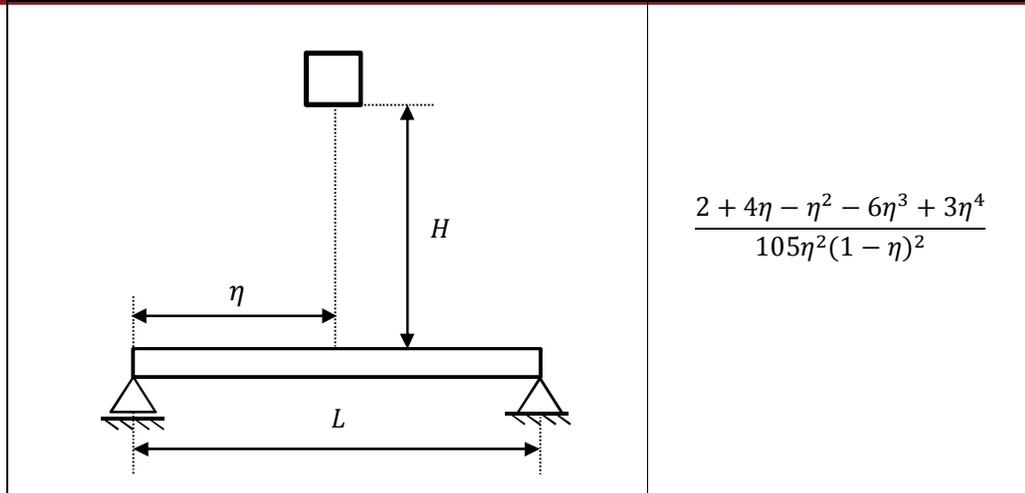
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est} * (1 + \alpha * \beta)}} \tag{1.44}$$

siendo k_d el coeficiente de cargas dinámicas, cuando se tiene en cuenta la masa del cuerpo impactado, α es un coeficiente que toma en consideración la masa del elemento golpeado y que depende de la forma, restricciones y tipo y lugar de aplicación de las cargas y β es la relación entre la masa del cuerpo impactado y la masa del cuerpo que impacta.

En la Tabla 1.2 se muestran los diferentes valores que toma el coeficiente α . Mediante el método de energía desarrollado por Pisarenko es posible analizar varios casos de impacto incluyendo el longitudinal y el impacto en el extremo de una viga empotrada.

Tabla 1.2: Algunos valores de α según Pisarenko

Esquema del elemento	α
	$\frac{1}{3}$
	$\frac{105 - 105\eta + 35\eta^2 - 2\eta^3}{140\eta^2}$



En la Tabla 1.2, el valor de η es el porcentaje de la longitud de la viga en donde se produce el impacto.

Para el estudio de impacto de un cuerpo rígido de masa m_2 con velocidad inicial v_{2o} que impacta en el extremo de una viga empotrada como se muestra en la Figura 1-9, Goldsmith realiza un análisis similar al de impacto en una viga bi-apoyada reemplazando a la viga por un resorte lineal cuya constante de rigidez $k = 3EI/L^3$.

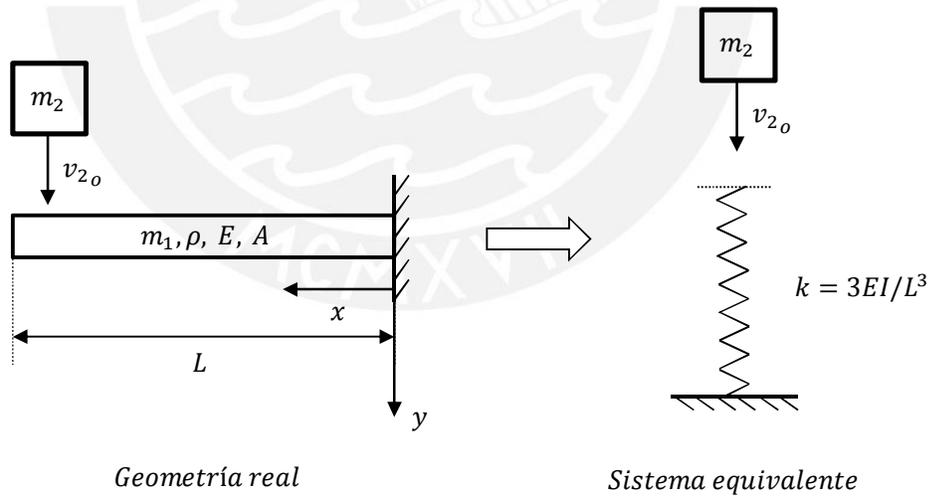


Figura 1-9: Impacto en una viga empotrada según Goldsmith

Realizando el balance de energía de la misma forma del caso anterior, se iguala la energía cinética inicial del cuerpo de masa m_2 y la máxima energía potencial del sistema. Así se obtiene:

$$\frac{m_2 v_{2o}^2}{2} = \frac{k u_y^2}{2} \Rightarrow u_y = v_{2o} \sqrt{\frac{m_2}{k}} \quad (1.45)$$

El valor de tensión máxima es obtenido en la sección donde el momento flector M_f , producido por la fuerza $P = k * u_y$ debido al impacto, también es máximo. Esta sección es la sección empotrada y, por lo tanto, se tienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{PL}{W_f} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{k * u_y * L}{W_f} \quad (1.46)$$

donde W_f es el módulo de resistencia a la flexión.

1.3.3.2 Métodos de propagación de ondas para el impacto transversal

Para analizar este problema de impacto transversal a partir de las ondas de propagación, se recurre a la teoría de vibraciones. Goldsmith propone una solución para el desplazamiento u_y de una viga bi-apoyada y sometida a un impacto en medio de la longitud de la misma:

$$u_y(x, t) = \frac{L^2 v_o}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\phi_i^3} \frac{\frac{\text{sen}(\frac{2\phi_i x}{L})}{\cos \phi_i} - \frac{\text{senh}(\frac{2\phi_i x}{L})}{\cosh \phi_i}}{\frac{1}{\cos^2 \phi_i} - \frac{1}{\cosh^2 \phi_i} + \frac{2\alpha}{\phi_i^2}} \text{sen}(\frac{4\phi_i^2 a^2}{L^2} t) \quad (1.47)$$

donde x es el punto de investigación en la viga. Siendo $a^4 = EI/\rho A$ y los valores de ϕ_i son dados en la Tabla 1.3 para varias relaciones de masa α .

Tabla 1.3: Valores de ϕ_i para diferentes valores de $\alpha = m_1/m_2$

α	Pequeños valores de α	1/10	1/2	1	2	Grandes valores de α
ϕ_1	0.75π	0.731	1.04799	1.191618	1.31965	0.5α
ϕ_2	1.25π	3.931	4.03652	4.11972	4.2372	1.5α
ϕ_3	2.25π	7.083	7.134	7.18994	7.28084	2.5α
ϕ_4	3.25π	10.22	10.25664	10.29839	10.37041	3.5α
ϕ_5	4.25π		13.3877	13.42093	13.4802	4.5α
ϕ_6	5.25π		16.52269	16.55021	16.60043	5.5α
ϕ_7	6.25π		19.65969	19.68824	19.72671	6.5α

1.3.4 Impacto torsional en vigas

1.3.4.1 Métodos de energía para el impacto torsional

La aproximación más elemental para el caso de impacto torsional considera a una viga empotrada de longitud L sometida a un impacto que genera un momento torsor M_t en su extremidad libre, como un resorte de rigidez $k = G * J_t / L$ conforme se muestra en la Figura 1.10, donde J_t es el momento polar de inercia. Igualando la energía potencial elástica absorbida por la viga con la energía cinética de los dos cuerpos que impactan se tiene:

$$\frac{m_2 v_{2o}^2}{2} = \frac{k \theta^2}{2} \Rightarrow \theta = v_{2o} \sqrt{\frac{m_2}{k}} \tag{1.48}$$

El esfuerzo de cizallamiento máximo, τ_{max} , será dado por:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{k \theta}{W_t} \tag{1.49}$$

donde W_t es el módulo de resistencia a la torsión.

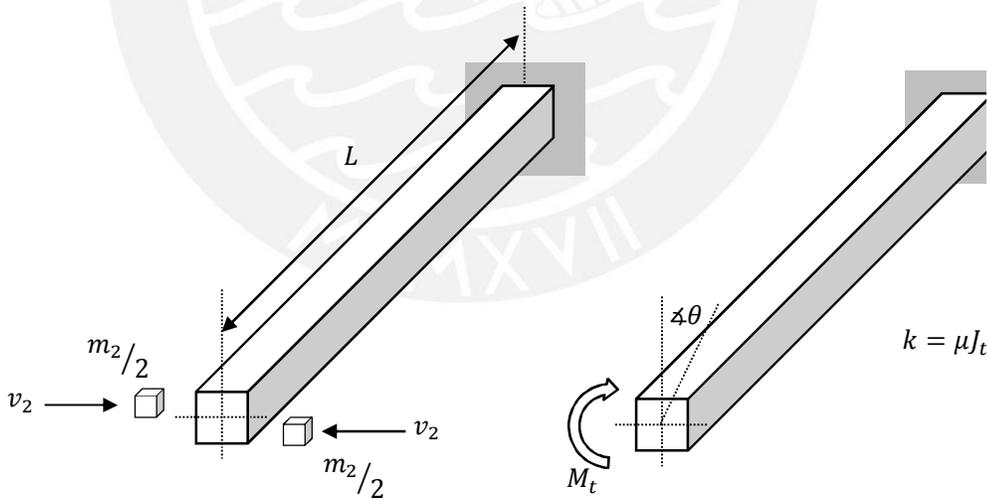


Figura 1-10: Impacto torsional en una viga empotrada según Goldsmith

1.3.4.2 Métodos de propagación de ondas para el impacto torsional

De acuerdo con Johnson, cuando se aborda el problema a partir de la teoría de propagación de ondas, se debe asumir que la solución del ángulo de rotación θ es de la forma $\theta = f(x - c_t t)$. Así:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = f'(x - c_t t) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -c_t * f'(x - c_t t) \quad (1.50)$$

A partir de las expresiones anteriores, se puede escribir:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{c_t} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.51)$$

Y según conceptos de resistencia de materiales, el momento de torsor M_t es dado por:

$$M_t = \mu J_t \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1.52)$$

Combinando las ecuaciones anteriores se tiene:

$$M_t = -\frac{\mu J_t}{c_t} \frac{\partial \theta}{\partial x} = J_t \sqrt{\mu \rho} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.53)$$

El esfuerzo de cizallamiento máximo se encuentra dividiendo el momento torsor M_t entre el módulo de resistencia a la torsión W_t suponiendo que el valor de la velocidad angular de la sección es conocida.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (1.54)$$

1.4 Revisión de métodos computacionales

Muchos fenómenos físicos de ingeniería pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales parciales. La solución de estas ecuaciones usando métodos analíticos resulta tediosa y algunas veces casi imposible de resolver para geometrías complejas, condiciones de carga y/o condiciones de borde.

Es por esto que el uso del método de elementos finitos (MEF) es muy usado en ingeniería y, en este caso particular, en problemas de impacto. Mediante este método es posible resolver las ecuaciones diferenciales parciales en forma aproximada.

1.4.1 Método de los Elementos Finitos

Basándose en los modelos de impacto examinados anteriormente, numerosas técnicas computacionales han sido desarrolladas para simular fenómenos de impacto. Uno de los métodos de cálculos más utilizado en esta área ha sido el método de elementos finitos (MEF). En la actualidad software comercial, como ANSYS, ABAQUS, LS-DYNA o PAM-Crash, agregan algoritmos que incluyen un modelado de contacto y son capaces de simular condiciones de impacto.

El principio del MEF se basa en la reducción del problema con infinitos grados de libertad, en un problema finito en el que intervenga un número finito de variables relacionadas a ciertos puntos característicos denominados nodos.

En todos los modelos de elementos finitos, los cuerpos a analizar se dividen en un número finito de formas simples denominadas elementos. Para definir el comportamiento en el interior de cada elemento, se supone que dentro del mismo todas las propiedades y condiciones quedan perfectamente definidas a partir de lo que sucede en los nodos a través de una adecuada función de interpolación.

En el MEF son esenciales los conceptos de discretización e interpolación. Donde la discretización es concebida como la acción de transformar la realidad de la naturaleza continua en un modelo discreto aproximado y la interpolación como la acción de aproximar los valores de una función a partir de su conocimiento en un número discreto de puntos. Por lo tanto, se trata de un método aproximado en el cual la precisión de los resultados depende de la cantidad de elementos utilizados y la función de interpolación utilizada.

Se debe tener en cuenta que este método es una virtualización de los problemas físicos reales, pues en un problema real existen varios fenómenos e interacciones, procesos de fabricación, casos de carga, condiciones de contorno, propiedades mecánicas de los materiales que en muchas ocasiones resultan imposibles de medir y/o caracterizar (Illescas 2009: 47-50).

1.4.2 Análisis lineal

Bathe, para solución de problemas dinámicos, utiliza la siguiente ecuación de movimiento:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Fa\} \quad (1.55)$$

donde $[M]$ es la matriz de masa, $[C]$ es la matriz de amortiguamiento, $[K]$ es la matriz de rigidez, $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$ el vector aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente y $\{Fa\}$ es el vector de fuerzas aplicadas (Bathe 1996: 499-502).

Si el problema es de tipo estático, los vectores de aceleración de velocidad se suponen cero y la ecuación (1.55) se transforma en:

$$[K]\{u\} = \{Fa\} \quad (1.56)$$

Las ecuaciones (1.55) y (1.56) se transforman en no lineales cuando la matriz de rigidez $[K]$ es dependiente del desplazamiento $\{u\}$ y de sus derivadas. Por lo tanto las ecuaciones (1.45) y (1.46) quedan de la siguiente forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K(x(t))]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (1.57)$$

$$[K(x(t))]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (1.58)$$

Según Bathe, la ecuación (1.55) representa matemáticamente un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden y, en principio, la solución de tales ecuaciones puede obtenerse a través de patrones de solución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la solución del sistema puede ser difícil si el orden de las matrices es demasiado grande. A partir de esta situación, se considera el uso de los procedimientos alternativos de solución de ecuaciones tales como métodos de integración en el tiempo y métodos de superposición de nodos (Teixeira 2002: 22-23).

La idea central de estos métodos de integración es intentar satisfacer la ecuación (1.55) en intervalos de tiempo discretos Δt asumiendo una variación de los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración dentro de estos intervalos.

A partir del método de diferencias finitas, se obtienen diferentes expresiones para la aproximación de los vectores de aceleración $\{\ddot{u}\}$ y velocidad $\{\dot{u}\}$ en términos de desplazamiento $\{u\}$. Siendo la que destaca la obtenida a partir del método de diferencias centrales:

$$\{\ddot{u}\}_{(t)} = \frac{1}{\Delta t^2} [\{u\}_{(t-\Delta t)} - 2\{u\}_{(t)} + \{u\}_{(t+\Delta t)}] \quad (1.59)$$

El error de aproximación es de orden Δt^2 y es el mismo para la expresión de velocidad:

$$\{\dot{u}\}_{(t)} = \frac{1}{2\Delta t} [\{u\}_{(t+\Delta t)} - \{u\}_{(t-\Delta t)}] \quad (1.60)$$

El valor del desplazamiento en el paso siguiente $t + \Delta t$ es obtenido sustituyendo las expresiones de $\{\ddot{u}\}_{(t)}$ y $\{\dot{u}\}_{(t)}$ en la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{(t+\Delta t)} = & \{F(t)\} - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right) \{u\}_{(t)} \\ & - \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{(t-\Delta t)} \end{aligned} \quad (1.61)$$

1.4.3 Discretización temporal

Este tipo de discretización es usada cuando se necesitan resolver problemas fuertemente no lineales y se requiere de forma obligatoria la integración directa en el tiempo. Existen dos métodos bien definidos para obtener esta solución: el método explícito y el método implícito.

1.4.3.1 Método de integración implícita en el tiempo

La ecuación (1.61) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$[\bar{K}] \{u\}_{(t+\Delta t)} = \{\bar{F}\}_{(t)} \quad (1.62)$$

donde:

$$[\bar{K}] = \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C]$$

$$\{\bar{F}\}_{(t)} = \{F(t)\} - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right) \{u\}_{(t)} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{(t-\Delta t)}$$

En caso que las matrices de masa y amortiguación sean consistentes, la ecuación (1.62) caracteriza el algoritmo implícito desde que un conjunto de ecuaciones algebraicas tienen que ser resueltas simultáneamente a cada paso de tiempo, es decir, las ecuaciones están acopladas y es preciso invertir la matriz de rigidez efectiva $[\bar{K}]$ en cada paso.

Las principales ventajas de este algoritmo son:

- La convergencia es garantizada independiente del tamaño del incremento de tiempo Δt adoptado, es decir, es incondicionalmente convergente.
- La solución del problema no contiene simplificaciones de diagonalización de matrices.

Las desventajas del algoritmo dinámico implícito son:

- Requiere grandes recursos computacionales de memoria y procesamiento.
- Es más sensible la inestabilidad cuando en situaciones especiales la matriz de rigidez tiende a la singularidad (inestabilidad elástica).
- Paquetes comerciales son muy limitados.

1.4.3.2 Método de integración explícita en el tiempo

Cuando son utilizadas matrices de masa y amortiguamiento diagonalizadas en la ecuación (1.62), la matriz de rigidez efectiva $[\bar{K}]$ se torna diagonal $[\bar{K}]$ y el sistema de ecuaciones algebraicas queda desacoplado. Con esto no es necesario invertir la matriz de rigidez efectiva en cada paso de tiempo.

$$[\bar{K}] \{u\}_{(t+\Delta t)} = \{\bar{F}\}_{(t)} \quad (1.63)$$

donde:

$$[\bar{K}] = \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C]$$

$$\{\bar{F}\}_{(t)} = \{F(t)\} - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right) \{u\}_{(t)} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{u\}_{(t-\Delta t)}$$

Las ventajas de utilizar este método para la integración de tiempo para problemas no lineales son:

- Las ecuaciones se puedan desacoplar y pueden ser resueltos directamente (explícitamente).
- Ninguna comprobación de convergencia es necesaria ya que las ecuaciones se puedan desacoplar.
- Es un algoritmo robusto, rápido y más simple de implementar computacionalmente (requiere menos memoria de procesamiento).

- No se requiere ninguna inversión de la matriz de rigidez. Todas las no-linealidades (incluyendo el contacto) se incluyen en el vector de fuerza interna.

La principal desventaja es que su convergencia depende de la elección del incremento de tiempo (*time step*) Δt , es decir, el algoritmo es convergente condicionalmente.

En caso de problemas de propagación de ondas generadas por impacto, el incremento de tiempo Δt debe ser capaz de representar una pasada de onda por longitud efectiva L_e . El valor de L_e depende del tipo de elemento y del método de integración aplicado. Por lo tanto, el incremento de tiempo crítico Δt_{crit} que corresponde al límite de estabilidad del método explícito es dado por:

$$\Delta t_{crit} = \frac{L_e}{c} \quad (1.64)$$

donde c es la velocidad de propagación de onda ($c = \sqrt{E/\rho}$) (Tácito 2003: 44).

El método de integración explícita en el tiempo es más precisa y eficiente para:

- simulaciones de propagación de ondas de choque
- grandes deformaciones
- fragmentación
- impacto y penetración

1.4.3.3 Definición del *time step*

En diferencia al método de integración explícita, los valores del *time step* en el método implícito son usualmente mayores. La elección de este valor es parte clave para obtener buenos resultados durante las simulaciones.

El valor inicial del *time step* debe ser basado en los modos de vibración del sistema a analizar y por ello es necesario conocer el comportamiento dinámico del mismo. Esto se realiza mediante un análisis modal el cual nos brinda las frecuencias naturales y modos de vibrar de un objeto o estructura durante vibración libre.

Una sugerencia general para definir el valor inicial del *time step* es usar la siguiente ecuación:

$$\Delta t = \frac{1}{20 * f_n} \quad (1.65)$$

donde f_n es la frecuencia natural más alta del modo de vibración de interés. Este modo es el que produce mayor deformación en la dirección del impacto.

1.4.4 Discretización espacial

La discretización espacial se basa en la elección del tipo de mallado más adecuado para el análisis. Como regla general del mallado se busca una malla más fina, con elementos simples y robustos. Con el fin del realizar mallados más simples para obtener resultados numéricos se han desarrollado una serie de métodos como:

- Método Lagrangiano: en este tipo de formulación de la malla, un elemento finito representa la misma parte de material a lo largo de todo el análisis, el mallado seguirá los movimientos del material.
- Método Euleriano: las mallas se encuentran fijas en el espacio, permitiendo que el material fluya a través de las mismas. Es la discretización más usada para mecánica de fluidos. En los problemas de altas presiones, en que la respuesta del material es de tipo hidrodinámica, resultan de uso obligatorio.
- Método ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*): en este tipo de método, la malla parcialmente se mueve y se deforma, ya que sigue al material (parte lagrangiana) además de que el material puede fluir por la malla (parte euleriana) (Pernas 2009: 16-17).

Todas las técnicas anteriores resuelven la mayoría de problemas de impacto lineales pero no los no lineales.

1.4.5 Análisis no lineal

Para el análisis de problemas impacto es importante tener en cuenta al comportamiento no lineal del fenómeno. La no linealidad se produce por diversas causas (plasticidad, grandes desplazamientos, grandes rotaciones no infinitesimales, deformaciones y los efectos derivados del contacto y la fricción entre las placas), que pueden agruparse en tres categorías:

- No linealidad geométrica
- No linealidad del material
- Cambios en el estado (contacto)

Se observa este fenómeno cuando engrampamos papeles ya que el metal siempre se dobla de formas diferentes. La no linealidad hace que el proceso sea complejo y requiera la ayuda de sofisticados algoritmos numéricos y poderosos recursos computacionales (Teixiera 2002: 21-22).

Bathe asigna el comportamiento no lineal principalmente a tres causas:

- Comportamiento no lineal de tipo cinemático debido a grandes desplazamientos, rotaciones y deformaciones que se producen en el proceso.
- Conducta constitutiva de tipo no lineal debido al carácter inelástico (plástico, viscoplástico, degradación) que caracteriza a la deformación de los materiales.
- Carácter no lineal de las condiciones de límite debido a la interacción (contacto y fricción) que produce entre sólidos que actúan en el proceso a lo largo de una superficie que inicialmente no se conoce, y que varía a lo largo del proceso.

1.4.6 Contacto

El problema de contacto entre dos o más cuerpos es particularmente difícil de analizar debido, no sólo a la no linealidad de las condiciones de contorno, sino también debido a los modelos de fricción aplicados cuya mayoría son no lineales. Se consideran N cuerpos que están en contacto en un tiempo t . Sea tS_c el área de contacto para cada cuerpo L , $L = 1, \dots, N$. El principio de los trabajos virtuales para los N cuerpos, nos brinda para un tiempo t , según Bathe, el siguiente operador Π :

$$\Pi = \sum_{L=1}^N \int_V \sigma \cdot \delta \epsilon \cdot dV + \sum_{L=1}^N \int_V \delta u \cdot F^B \cdot dV + \sum_{L=1}^N \int_S \delta u^S \cdot F^B \cdot dS + \sum_{L=1}^N \int_C \delta u^C \cdot F^C \cdot dS \quad (1.66)$$

donde σ son los esfuerzos internos, $\delta \epsilon$ son las deformaciones virtuales internas, δu es el desplazamiento virtual, δu^S es el desplazamiento virtual en la superficie de fuerzas de superficies, δu^C es el desplazamiento virtual en la superficie de contacto, F^B son las fuerzas de campo, F^S son las fuerzas de superficie y F^{BC} son las fuerzas de contacto.

El efecto de las fuerzas de contacto, presente en el último término de la ecuación (1.66), es incluido como una contribución de fuerzas de superficie aplicadas externamente. Sea f^{IJ} el vector que contiene a las fuerzas de superficie debido al contacto del cuerpo I causado por el cuerpo J, y $f^{JI} = -f^{IJ}$ conforme a la Figura 1-11. El trabajo virtual debido a las fuerzas de tracción de contacto puede ser escrito como:

$$\int_{S^{IJ}} \delta u_i^I \cdot f_i^{IJ} \cdot dS^{IJ} + \int_{S^{JI}} \delta u_i^J \cdot f_i^{JI} \cdot dS^{JI} = \int_{S^{IJ}} \delta u_i^{IJ} \cdot f_i^{IJ} \cdot dS^{IJ} \quad (1.67)$$

donde δu_i^I y δu_i^J son las componentes de desplazamiento virtual sobre las superficies de contacto entre los cuerpos I y J respectivamente y el término $\delta u_i^{IJ} = \delta u_i^I - \delta u_i^J$.

El par de superficies S^{IJ} y S^{JI} que están en contacto, no tienen necesariamente el mismo tamaño y son denominados superficie de contacto y superficie de objetivo, respectivamente. Sin embargo, el área actual de contacto en un tiempo t para los cuerpos I y J es tS_c , y en cada caso esta área es parte de S^{IJ} y S^{JI} . El lado derecho de la ecuación (1.66) puede ser interpretado como el trabajo virtual que las fuerzas de contacto producen sobre el desplazamiento virtual relativo entre el par de superficies en contacto (Bathe 1996: 622-626).

Básicamente existen dos métodos para la solución del problema de contacto entre sólidos disponibles en software comercial. Éstos son:

1. Método de Multiplicadores de Lagrange
2. Método de Penalización

El método 1 calcula de modo exacto las restricciones de contacto, siendo ventajoso cuando se quiere extremar una función con restricciones impuestas. Como inconveniente presenta un aumento del número de incógnitas debido a los multiplicadores asociados como las fuerzas de contacto y también induce la aparición de ceros en la diagonal principal de la matriz de rigidez.

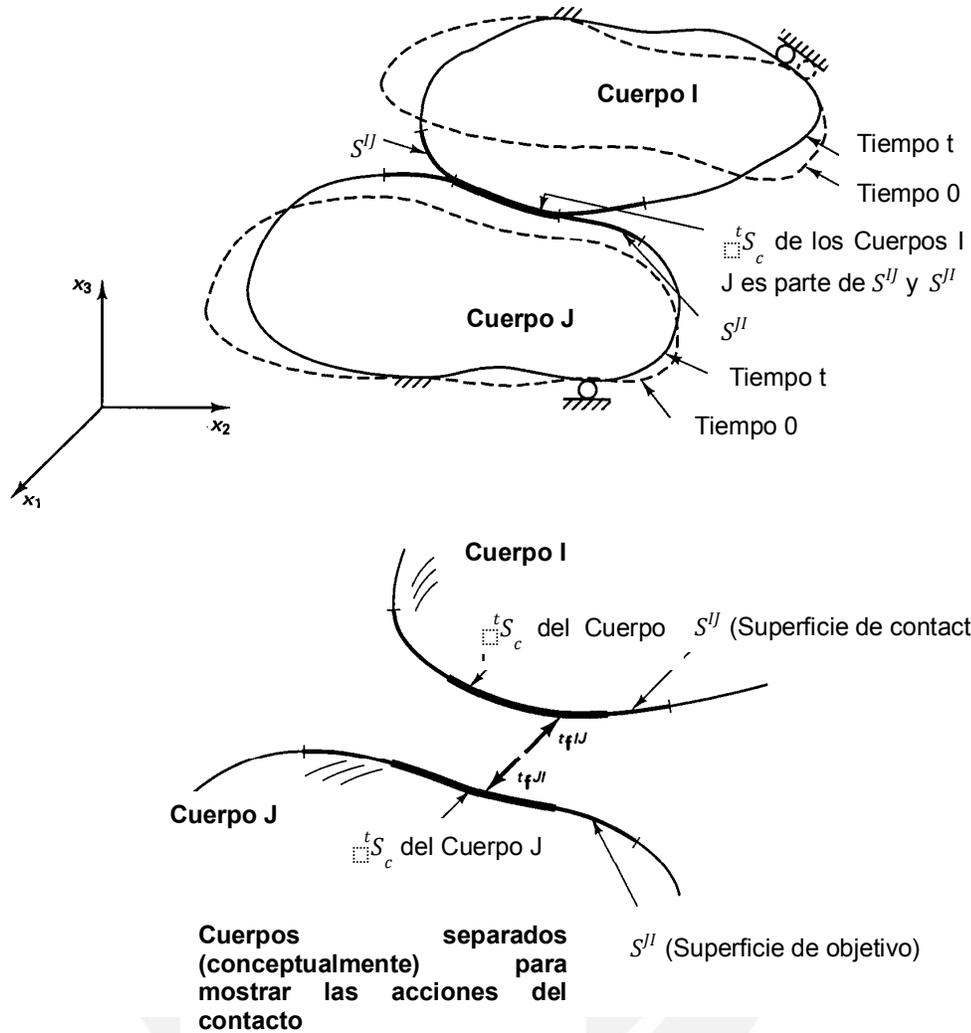


Figura 1-11: Cuerpo en contacto según Bathe

El método 2 requiere que las restricciones de contacto sean calculadas de forma aproximada a través de un factor de penalización. El problema se convierte en la elección adecuada de este factor una vez que, en medida en que el factor de penalización aumenta, la matriz de rigidez se vuelve mal condicionada y por otro lado, valores muy bajos del factor, puede llevar a penetraciones inexistentes de un sólido a otro (Teixeira 2002: 46-48).

1.5 Revisión de métodos experimentales

1.5.1 Ensayo de Charpy / Izod

Los ensayos de Charpy e Izod son ensayos destructivos que proporcionan una estimación de la energía requerida para romper un material bajo carga de impacto. El ensayo consiste principalmente de un martillo en caída libre que golpea una probeta entallada de dimensiones fijas, que registra la energía requerida en Joules para fracturar la probeta. En la Figura 1-12 se presenta un esquema del ensayo.

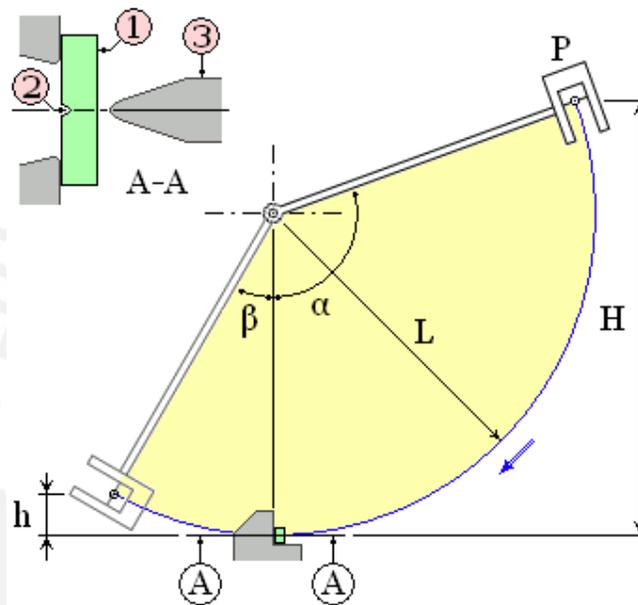


Figura 1-12: Ensayo Charpy (1: Probeta, 2: Entalla, 3: Cuchilla del péndulo) [fotografía]. (2005). Recuperado de http://enciclopedia.us.es/images/0/0c/Ensayo_resiliencia.png

Luego de golpear la probeta, el péndulo sigue su camino alcanzando una cierta altura "h" que depende de la cantidad de energía disipada al golpear. Las probetas que fallan en forma frágil se rompen en dos mitades, en cambio aquellas con mayor ductilidad se doblan sin romperse. Este comportamiento es muy dependiente de la temperatura y la composición química, esto obliga a realizar el ensayo con probetas a distinta temperatura, para evaluar la existencia de una "temperatura de transición dúctil-frágil". Este ensayo nos da como resultado un gráfico como el mostrado en la Figura 1-13 en donde se observa un fuerte cambio en la energía disipada para algunos aceros de bajo contenido de carbono mientras que el níquel no muestra una variación notable.

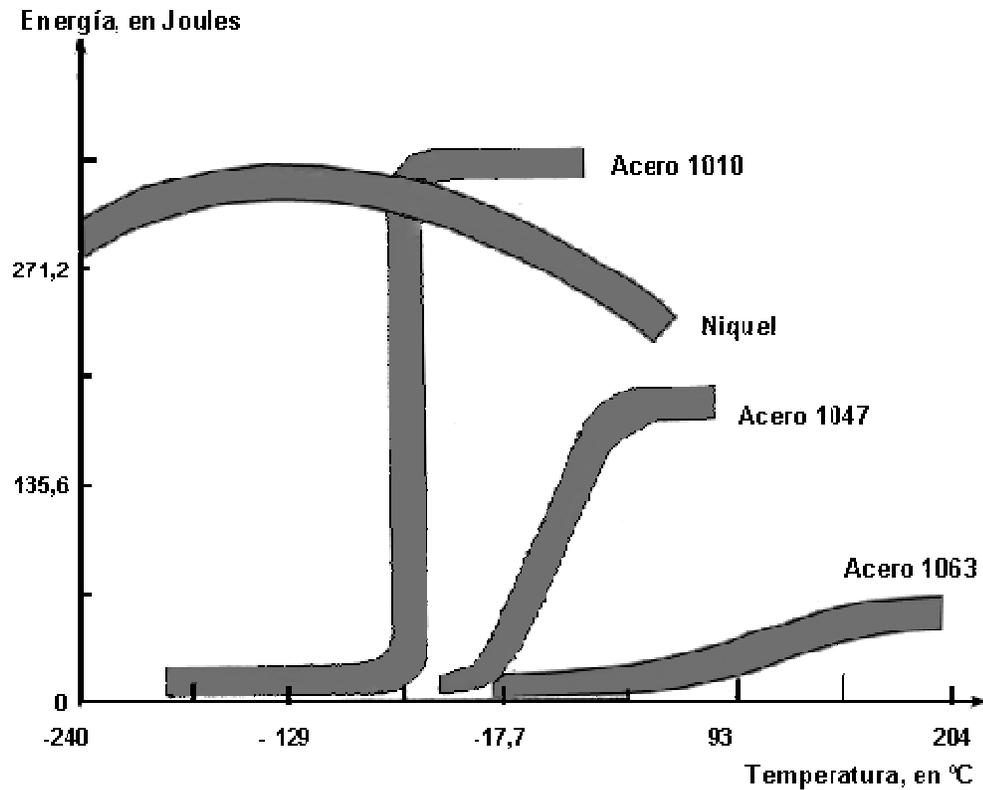


Figura 1-13: Resultados de pruebas de impacto para varias aleaciones, medidos a través de un intervalo de temperatura [fotografía]. (1999). Recuperado de <http://www2.ing.puc.cl/~icm2312/apuntes/materiales>

La diferencia entre el método Charpy e Izod es que la probeta del primero se apoya en sus extremos y se golpea en el centro por la cara contraria a la entalla. Mientras que en el tipo Izod, la probeta que se encuentra empotrada por una de sus mitades se golpea en el extremo del voladizo por la cara de la entalla. En la Figura 1-14 se presenta esta explicación en forma gráfica.

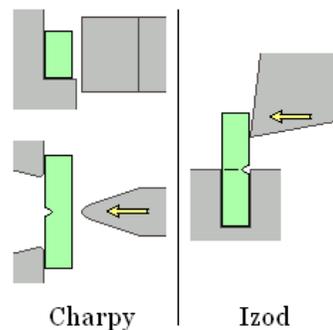


Figura 1-14: Diferencia entre método Charpy e Izod [fotografía]. (2005). Recuperado de http://enciclopedia.us.es/images/2/29/Ensayos_Charpy_e_Izod.png

1.6 Impacto a altas velocidades

En el impacto a altas velocidades, los fenómenos que se producen con mayor frecuencia y son además más interesantes en analizar son la perforación y la penetración. La definición de ambos términos se puede expresar de forma sencilla, en una penetración el objeto que impacta (proyectil) entra al objeto impactado (objetivo) sin traspasar por completo a este último. Caso contrario, en una perforación, el proyectil traspasa completamente al objetivo.

Un concepto importante a manejar cuando se estudia este tipo de impacto es el de límite balístico, precisamente porque es la velocidad crítica de impacto a la cual el objetivo va ser perforado. Usualmente se expresa como V_{50} , lo cual expresa que existe una probabilidad de 50% que esta velocidad produzca una perforación.

Uno de los casos más comunes de analizar es la perforación de cuerpos como placas o discos la cual involucra la acción simultánea de la formación de la fractura, *spalling*, propagación de ondas elásticas y plásticas, fricción, calor, entre otros. Físicamente la falla del cuerpo objetivo ocurre por una combinación de varias formas de fallas como las que se presentan en la Figura 1-15.

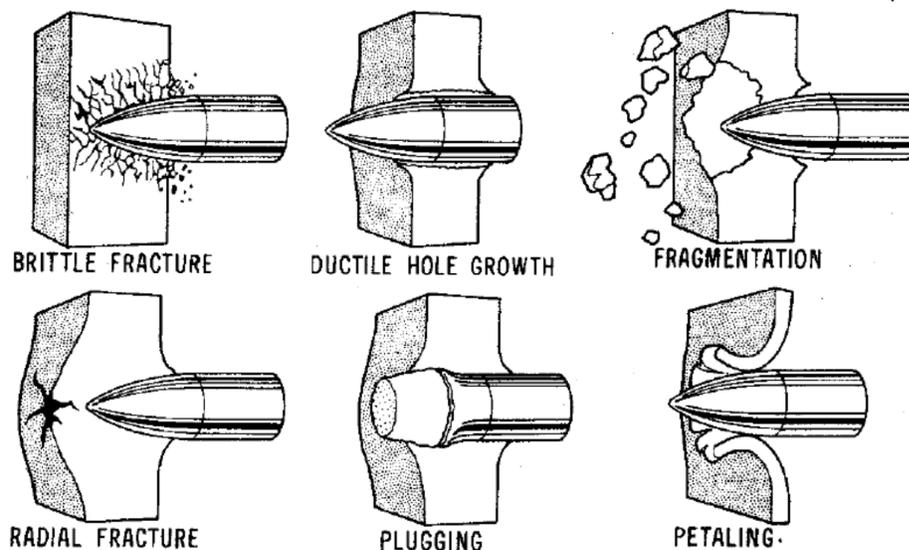


Figura 1-15: Mecanismos comunes de falla por impacto (Goldsmith, 1960)

1.6.1 Mecánica de penetración

Las penetraciones balísticas pueden describirse como dos formas básicas y una combinación de éstos: *plugging* y *petaling*. La forma de *plugging* normalmente ocurre por objetos contundentes y por objetos con ángulos afilados. En el impacto, la fuerza de ruptura toma valores altos a lo largo del perímetro del fragmento, esto produce una falla y así un tapón (*plug*) de material es retirado. Este tapón es acelerado en la dirección del fragmento y, por lo tanto, elimina parte de la energía del impacto. La Figura 1-16 muestra el fenómeno de *plugging*.

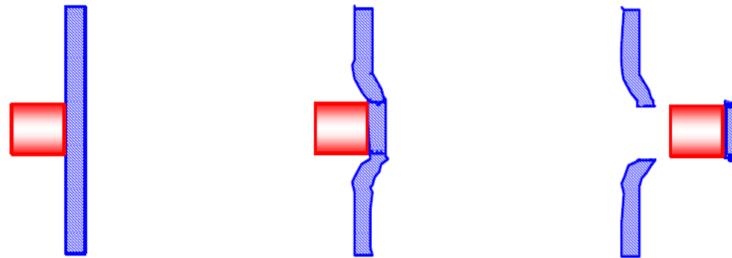


Figura 1-16: Fenómeno de plugging (Lundin y Mueller, 2005)

El *petaling* ocurre normalmente para proyectiles puntiagudos con un mínimo de orientación, donde el borde de contacto crea una intensa tensión de corte sobre una pequeña región en el área de impacto. Esto provoca una ruptura inicial de los materiales del cuerpo objetivo. Después de la perforación inicial, el material permanece unido pero es deformado conforme el resto del fragmento continúa avanzando a través del material del cuerpo objetivo. La Figura 1-17 muestra este proceso.

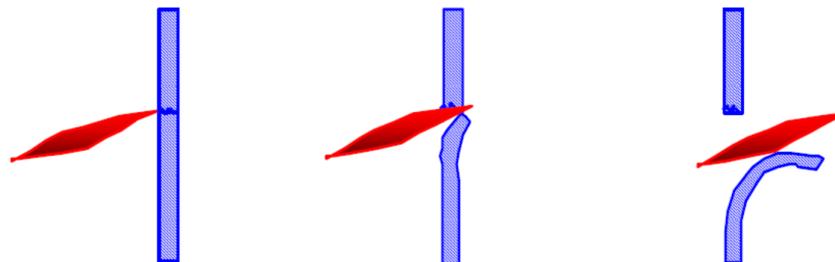


Figura 1-17: Fenómeno de petaling (Lundin y Mueller, 2005)

En realidad, la mayoría de casos de penetración son una combinación de *plugging* y *petaling*. Existen una serie de factores que afectan la mecánica de penetración.

Estos factores pueden ser clasificados como:

- Propiedades físicas del proyectil y fragmento
 - Dimensiones
 - Forma (objeto contundente o agudo)
 - Masa
 - Composición del material (*frangibility*)
- Propiedades balísticas
 - Velocidad de impacto
 - Orientación del fragmento
 - Área presentada
- Propiedades del elemento afectado
 - Material
 - Espesor



CAPÍTULO 2

2. DESARROLLO Y SIMULACIÓN DE EJEMPLOS BÁSICOS

2.1 Introducción

En el presente capítulo, se presenta inicialmente el desarrollo de ejemplos básicos de impacto a bajas velocidades mediante métodos analíticos y la simulación de los mismos mediante software de elementos finitos. El desarrollo de los ejemplos se basa en encontrar el esfuerzo y desplazamiento máximo en cada caso planteado mediante los métodos analíticos presentados en el Capítulo 1 para velocidades de impacto iguales a 4, 6 y 8 m/s. Así mismo, se presenta la simulación de dos ejemplos de impacto a alta velocidad donde se presentan efectos plásticos y ruptura.

Para la simulación de todos los ejemplos, se utilizó el software comercial ANSYS v14 con sus módulos *Transient Structural*, *Explicit Dynamics* y *Autodyn*. El primer módulo utiliza el algoritmo implícito en la resolución de la ecuación de movimiento mientras que el segundo y tercer módulo utilizan el algoritmo explícito para la resolución de la misma. En todos los ejemplos, los modelos geométricos fueron realizados mediante el software Autodesk Inventor 2011.

Para los ejemplos de baja velocidad, los cuerpos que impactan son considerados flexibles y se considera el comportamiento no lineal en caso se exceda el límite de fluencia del material. En todos los ejemplos de impacto longitudinal, transversal y torsional se utiliza una viga de sección cuadrada de acero estructural de 0.5 m de longitud. Sus características y propiedades físicas son mostradas en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Características y propiedades físicas de la viga

Características y propiedades físicas de la viga	Valor	Unidades
Longitud de la viga	0.5	m
Lado de cuadrado	0.03	m
Módulo de Young (E)	2E+11	Pa
Inercia I	6.75E-08	m ⁴
C	0.015	m
Densidad	7850	kg/m ³
Sección de la viga	0.0009	m ²
m ₁	3.5325	kg

El cuerpo que impacta va cambiando para observar los resultados con diferentes relaciones de masa de los cuerpos involucrados.

En los ejemplos de alta velocidad, dada la complejidad de su desarrollo por métodos analíticos, se muestra la simulación de una esfera contra una placa. Se varían los diámetros de las esferas y sus velocidades para observar los efectos ocasionados por la alteración de estos dos factores.

2.2 Desarrollo y simulación del primer ejemplo básico: impacto longitudinal

El primer ejemplo a desarrollar es el impacto longitudinal de un cuerpo contra una viga empotrada de sección cuadrada tal cual se muestra en la Figura 2-1. El material de ambos cuerpos es acero estructural. Las características y propiedades físicas del cuerpo de impacto mencionados anteriormente son presentadas en la Tabla 2.2.

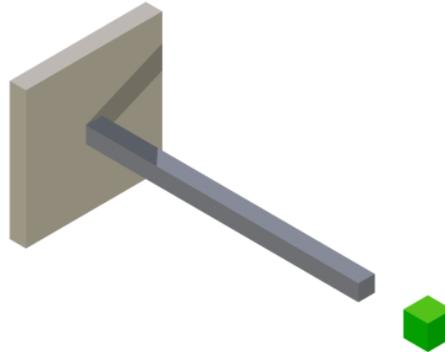


Figura 2-1: Impacto en una viga empotrada

Tabla 2.2: Características y propiedades físicas del cuerpo de impacto

Características y propiedades físicas del cuerpo	Valor	Unidades
Lado del cubo	0.0965	m
Densidad	7850	kg/m ³
m ₂	7.054	kg
Velocidad que impacta v_{2o}	4, 6 y 8	m/s

2.2.1 Desarrollo mediante métodos analíticos

El desarrollo del ejemplo mediante métodos analíticos para una velocidad de impacto de 4 m/s es presentado en el Anexo 1 donde todos los cálculos y consideraciones son indicados. Para los casos de 6 y 8 m/s, el procedimiento de cálculo es el mismo. En la Tabla 2.3 se muestran los resultados obtenidos de esfuerzo de compresión máximo para las 3 velocidades desarrolladas.

Tabla 2.3: Esfuerzo máximo de impacto longitudinal para diferentes velocidades de impacto

		Esfuerzo máximo (MPa)		
		v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s
Métodos de energía	Goldsmith	223.97	335.96	447.94
	Spotts & Shoup	207.34	311	414.67
	Pisarenko (1er Método)	224.05	336.04	448.02
	Pisarenko (2do Método)	207.41	311.08	414.75
Propagación de ondas		216.82	325.23	433.64

En la Tabla 2.4 se muestran los diferentes valores de desplazamiento máximo obtenidos por el método de energía de Pisarenko para las velocidades de impacto de 4, 6 y 8 m/s.

Tabla 2.4: Desplazamiento máximo de impacto longitudinal para diferentes velocidades de impacto

		Desplazamiento máximo (mm)		
		v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s
Métodos de energía	Pisarenko (1er Método)	0.56	0.84	1.12
	Pisarenko (2do Método)	0.52	0.78	1.04

2.2.2 Simulación mediante software de elementos finitos

2.2.2.1 Simulación usando el algoritmo dinámico implícito

El algoritmo implícito tiene como principal ventaja su convergencia independiente de la elección del incremento de tiempo Δt denominado por el software ANSYS como *time step*. Para obtener valores más adecuados para este parámetro, es necesario realizar un análisis modal previo para estimar las frecuencias naturales del sistema y así calcular el *time step* mediante la ecuación (1.65). En la Tabla 2.5 se muestran las primeras ocho frecuencias naturales obtenidas usando el módulo Modal en ANSYS. Cabe mencionar que en este análisis modal se ha realizado con todos los grados de libertad de la viga. En la Figura 2-2 se muestran los cuatro primeros modos de vibración de la viga y del cuerpo que impacta longitudinalmente.

Tabla 2.5: Análisis modal del sistema de impacto longitudinal

Modo	Frecuencia (Hz)
1	604.20
2	1446.40
3	1650.40
4	2529.20
5	3127.60
6	4339.30
7	4970.40
8	7109.60

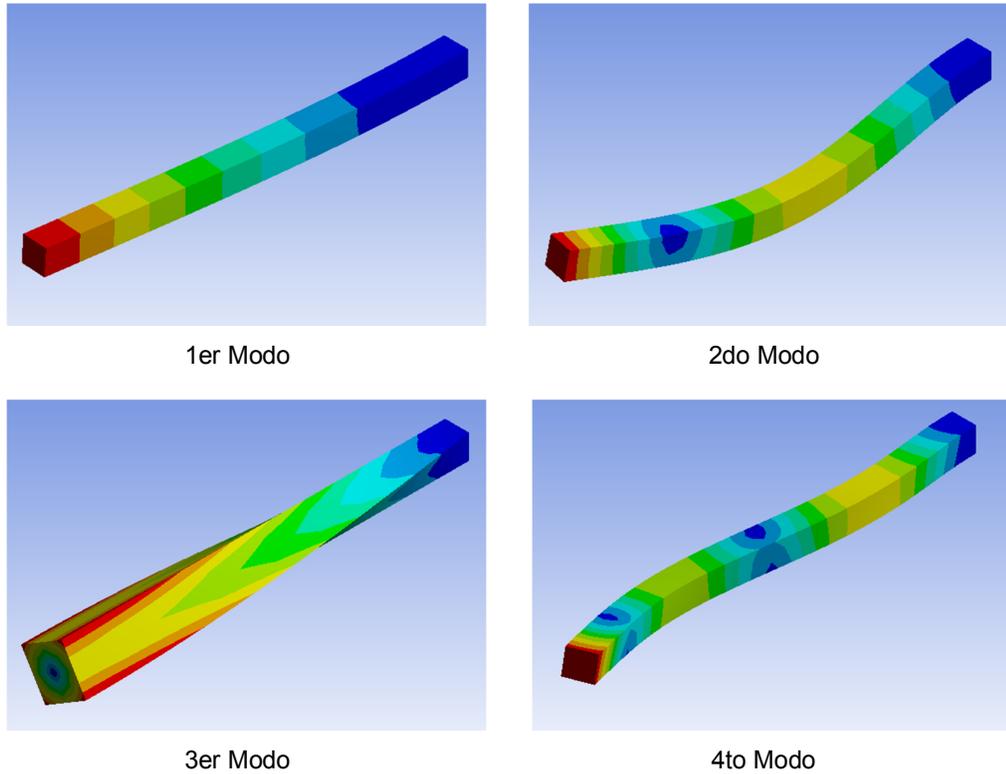


Figura 2-2: Modos de vibración para el sistema de impacto longitudinal

Una frecuencia natural de $f_n = 604.2 \text{ Hz}$, obtenida de la Tabla 2.5, corresponde al primer modo de vibración de la viga que la hace vibrar longitudinalmente. Reemplazando en la ecuación (1.65):

$$\Delta t = \frac{1}{20 * f_n} = 8.27 E^{-5} \text{ s} \tag{2.1}$$

Con valor calculado anteriormente, se realiza la simulación con la inclusión de los parámetros de tiempo adicionales mostrados en la Tabla 2.6.

Tabla 2.6: Parámetros de tiempo en ANSYS para impacto longitudinal

Parámetro	Valor	Unidad
Time Step	8.27E-05	s
End Time	0.02	s
Initial Time Step	8.00E-05	s
Minimum Time Step	7.00E-05	s
Maximum Time Step	8.00E-04	s

El mallado realizado a los cuerpos en el análisis implícito fue realizado mediante la opción de Mechanical del software ANSYS el cual generó 2447 nodos y 419 elementos. En la Figura 2-3 se muestra el mallado realizado para el algoritmo implícito.

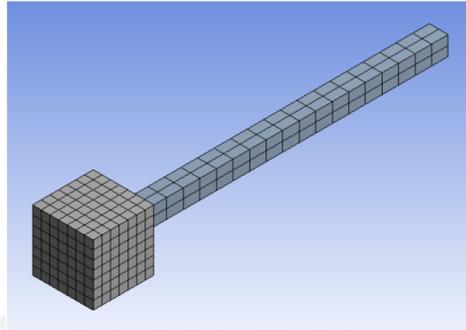


Figura 2-3: Mallado para impacto longitudinal mediante algoritmo implícito

Los resultados de esfuerzo máximo para una velocidad de impacto de 4 m/s se muestran en la Figura 2-4. En esta figura se observa que el mayor esfuerzo se da en la zona del empotramiento de la viga. Todos los resultados de esfuerzo y desplazamiento se muestran en la Tabla 2.7.

Tabla 2.7: Esfuerzos y desplazamiento máximo en impacto longitudinal mediante algoritmo implícito

ANSYS (Transient Structural)					
v = 4 m/s		v = 6 m/s		v = 8 m/s	
Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)
254.13	0.47	299.37	0.88	310.54	1.16

En la Figura 2-5 se observa los diferentes valores del esfuerzo máximo en las tres velocidades conforme transcurre el tiempo. En la figura mencionada anteriormente, se observa claramente la existencia de propagación de ondas la cual se aleja de la zona de impacto con dirección al empotramiento con el transcurso del tiempo.

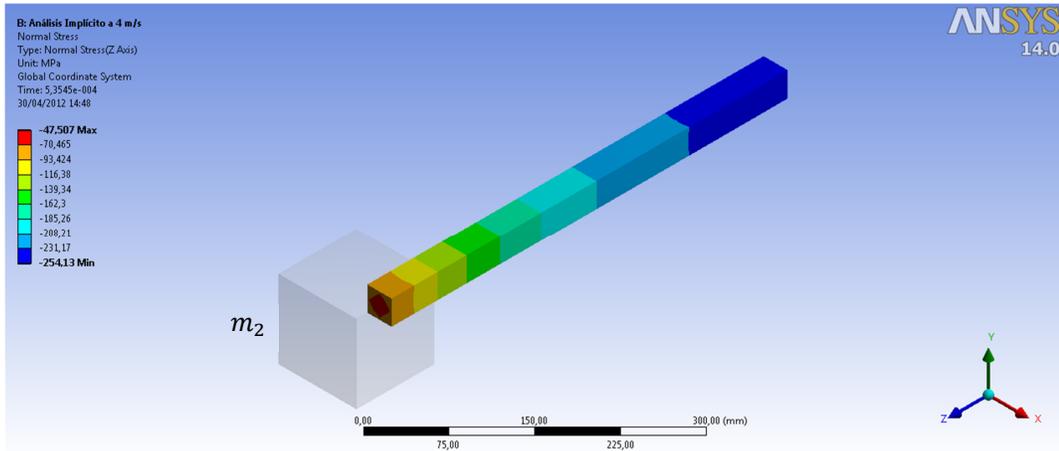


Figura 2-4: Esfuerzo máximo en impacto longitudinal para una velocidad de impacto de 4 m/s (Algoritmo Implícito)

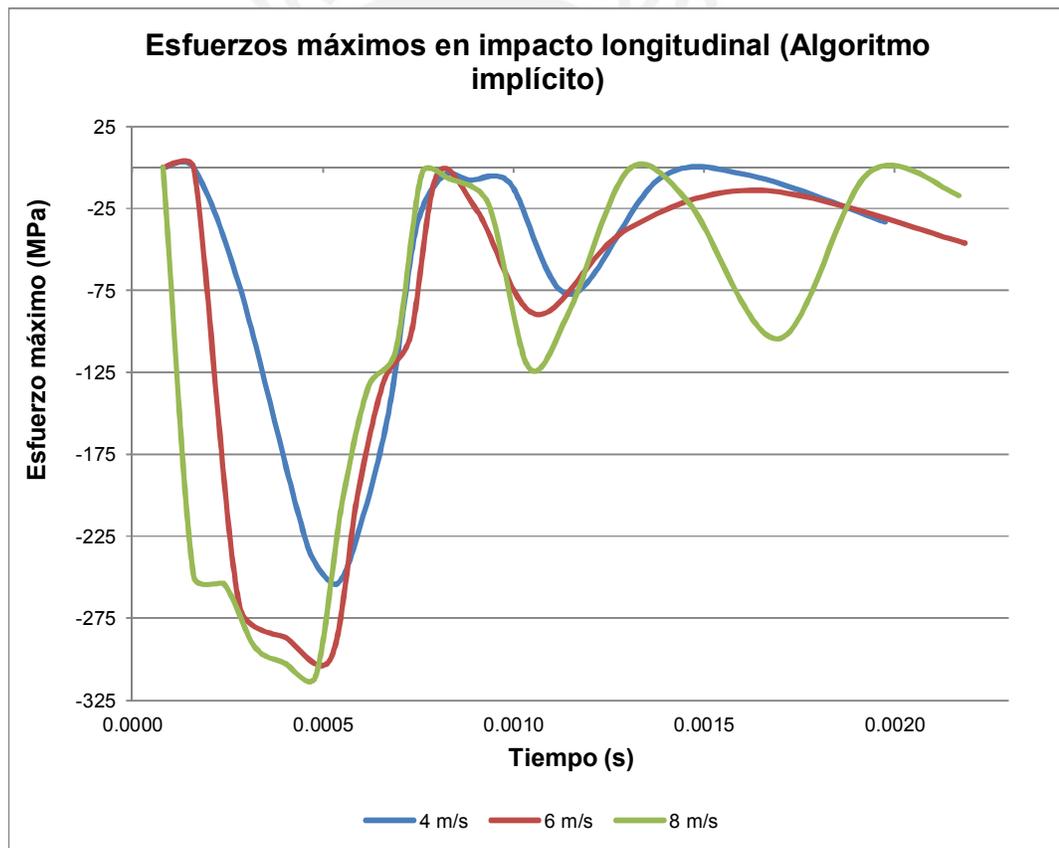


Figura 2-5: Esfuerzos máximos obtenidos para diferentes velocidades de impacto longitudinal (Algoritmo Implícito)

2.2.2.2 Simulación usando el algoritmo dinámico explícito

En el caso del algoritmo explícito, el software ANSYS sólo requiere el valor de tiempo de simulación *End Time* el cual es 0.02 s. igual al del algoritmo implícito.

Para el mallado en este algoritmo, el software ANSYS recomienda el uso de la opción *Explicit*. Esta opción generó una malla de 3352 nodos y 2530 elementos. En la Figura 2-6 se muestra el mallado generado para los cuerpos.

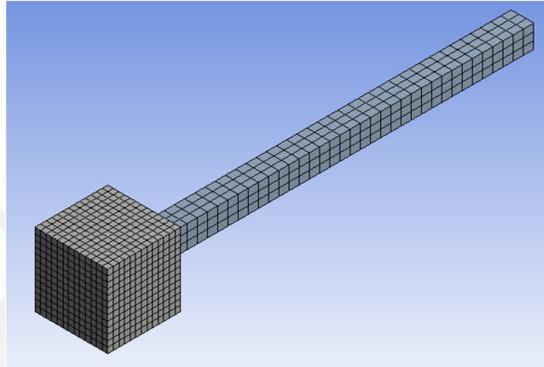


Figura 2-6: Mallado para impacto longitudinal mediante algoritmo explícito

Los resultados de esfuerzo máximo para una velocidad de impacto de 6 m/s se muestran en la Figura 2-7. El esfuerzo máximo es un esfuerzo de compresión en la zona del empotramiento de la viga tal cual fue obtenido con el método implícito pero con diferente valor. Todos los resultados de esfuerzo y desplazamiento se muestran en la Tabla 2.8.

Figura 2-7: Esfuerzo máximo en impacto longitudinal para una velocidad de impacto de 6 m/s (Algoritmo Explícito)

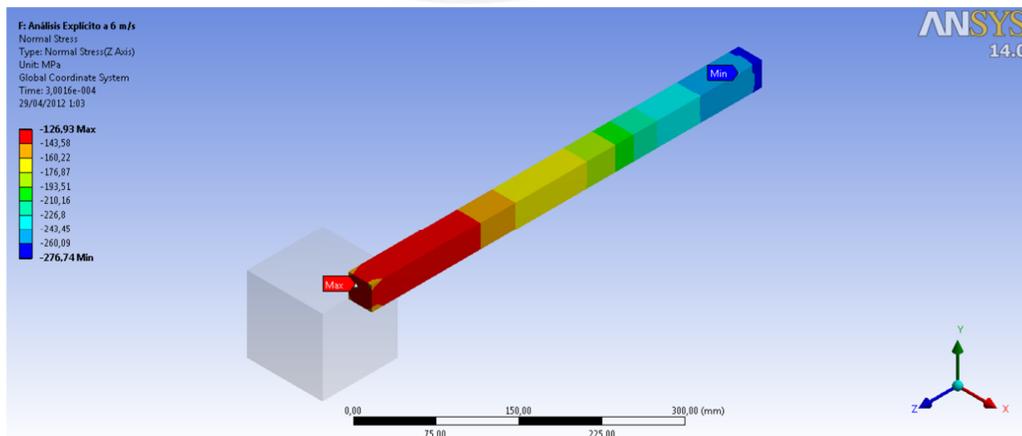


Tabla 2.8: Esfuerzos y desplazamiento máximo en impacto longitudinal mediante algoritmo explícito

ANSYS (Explicit Dynamics)					
v = 4 m/s		v = 6 m/s		v = 8 m/s	
Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)
268.20	0.52	276.82	0.84	286.2	1.26

En la Figura 2-8 se observa los diferentes valores del esfuerzo máximo en las tres velocidades con el transcurso del tiempo. La presencia de propagación de ondas es visible.

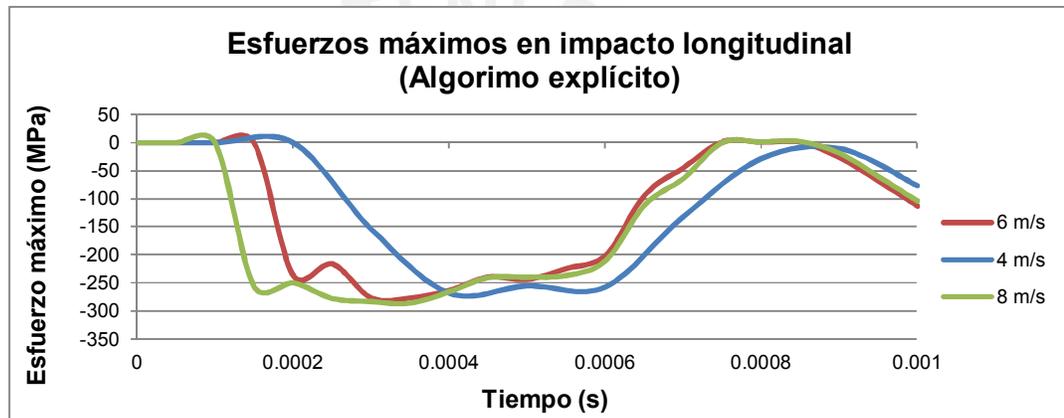


Figura 2-8: Esfuerzos máximos obtenidos para diferentes velocidades de impacto longitudinal (Algoritmo Explícito)

2.2.3 Comparación y discusión de resultados

Los resultados de esfuerzos máximos obtenidos mediante los métodos analíticos muestran diferencias en todos los casos de velocidades. Los valores mínimos de esfuerzo fueron obtenidos mediante el método de Spotts & Shoup y el segundo método de energía desarrollado por Pisarenko. Este último método, presenta grandes consideraciones de masas involucradas en el impacto como las consideraciones geométricas del problema. Los valores máximos fueron calculados por el primer método de energía presentado Pisarenko el cual presenta consideraciones geométricas semejantes para todos los casos de impacto. En el caso de propagación de ondas, los valores obtenidos son mayores en comparación a los métodos de energía. Esta diferencia puede ser explicada por el hecho que los métodos de energía consideran al coeficiente de Poisson, en cuanto la propagación de ondas considera apenas el esfuerzo en la dirección del eje de la viga y que es constante en toda la sección. Adicionalmente, es necesario considerar que los

métodos de Goldsmith y Spotts & Shoup no consideran los efectos inerciales del sistema. Los resultados de esfuerzos máximos con métodos analíticos se muestran en la Figura 2-9.

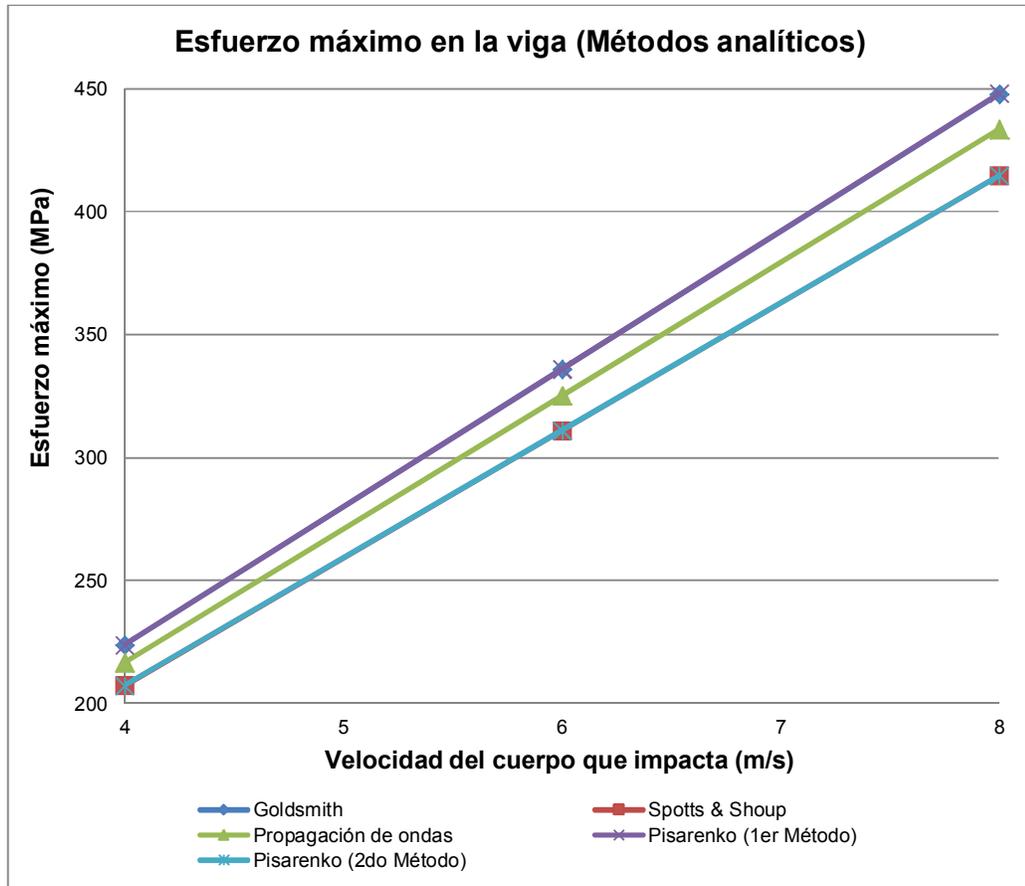


Figura 2-9: Gráfica comparativa entre los esfuerzos obtenidos por métodos analíticos para impacto longitudinal

En el caso de desplazamientos máximos obtenidos, al igual que en los esfuerzos, se obtienen menores valores usando el segundo método de energía presentado por Pisarenko. Cabe resaltar que la diferencia entre los métodos desarrollados por Pisarenko son mínimas. De lo expuesto anteriormente, se deduce que se obtienen valores menores cuando se consideran masas, geometrías y condiciones de impacto. Los métodos analíticos consideran que los esfuerzos producidos en el impacto se presentan en la zona elástica del material; sin embargo, el límite de fluencia del acero estructural es de 250 MPa y se puede observar que, para velocidades de 6 y 8 m/s, se excede este valor con lo cual se afirma que el material se encuentra en un rango no lineal cuyos efectos no son considerados en los métodos analíticos utilizados.

En los resultados obtenidos mediante software de elementos finitos, también se observa diferencias entre ambos métodos tanto en esfuerzos y deformaciones obtenidas. El método implícito presenta menores valores que los explícitos pero esta diferencia no es muy pronunciada. Se destaca que el método implícito presenta mayor data debido a los pequeños intervalos de tiempo en el análisis del mismo. En el caso del método explícito, ANSYS calcula automáticamente este incremento de tiempo el cual es menor al algoritmo implícito para ahorrar tiempo de procesamiento. En la Figura 2-10 se muestra una gráfica comparativa de esfuerzos obtenidos mediante ambos algoritmos para las velocidades de impacto desarrolladas.

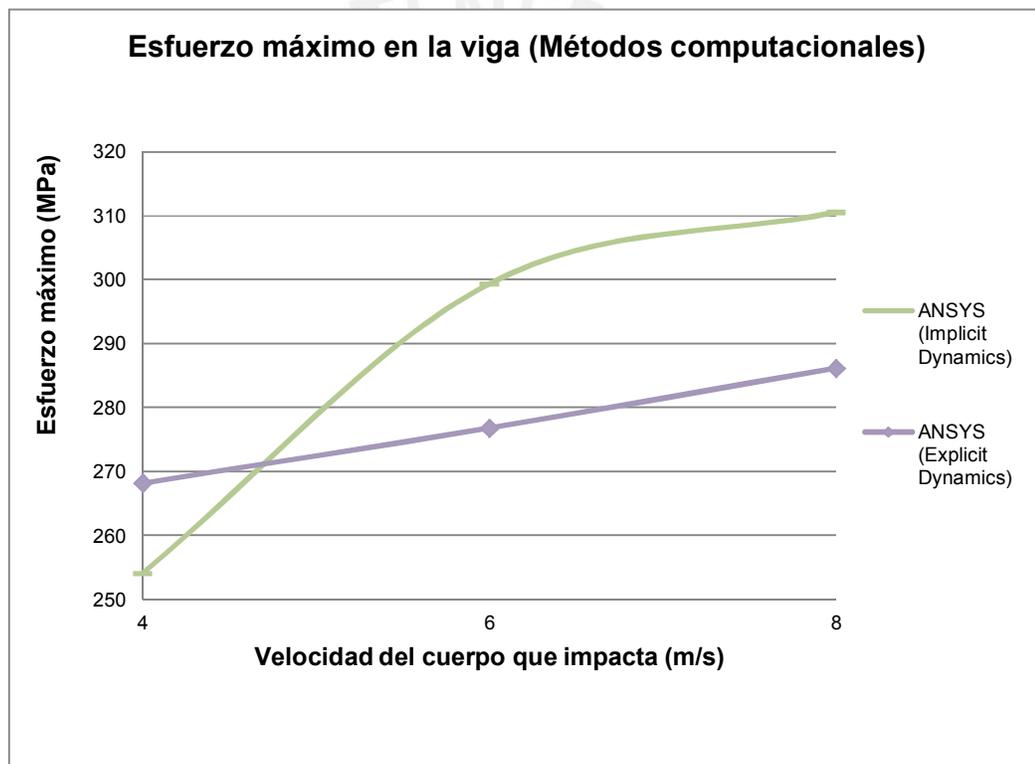


Figura 2-10: Gráfica comparativa entre los esfuerzos obtenidos por métodos computacionales para impacto longitudinal

En esta figura, se puede observar la tendencia de mayores valores mediante el método implícito en comparación del explícito. En la Tabla 2.9 se muestran todos los resultados obtenidos mediante los métodos utilizados en este ejemplo. Cabe señalar que los métodos computacionales contemplan en su análisis los efectos geométricos, inerciales y no lineales que se presentan en el fenómeno de impacto brindando resultados más confiables en comparación a los métodos de energía y

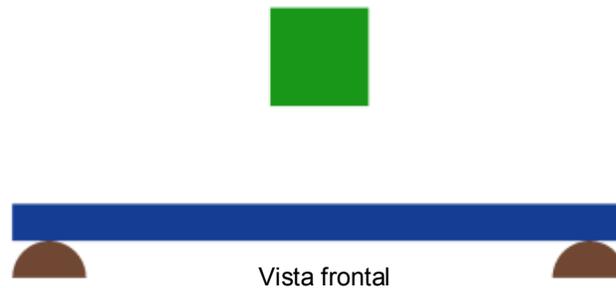
propagación de ondas. También, se aprecia que el método implícito brinda mayores valores en el esfuerzo máximo que el método explícito pero menores valores en el desplazamiento máximo.

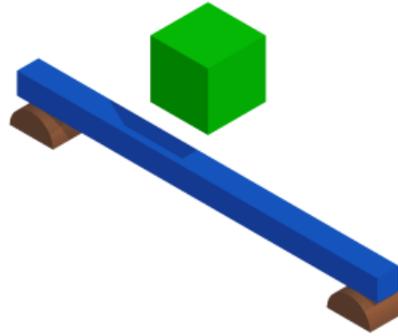
Tabla 2.9: Tabla comparativa entre los esfuerzos obtenidos por todos los métodos desarrollados para impacto longitudinal en viga empotrada

		Esfuerzo máximo (MPa)			Desplazamiento máximo (mm)		
		v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s	v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s
Métodos de energía	Goldsmith	223.97	335.96	447.94	-	-	-
	Spotts & Shoup	207.34	311	414.67	-	-	-
	Pisarenko (1er Método)	224.05	336.04	448.02	0.56	0.84	1.12
	Pisarenko (2do Método)	207.41	311.08	414.75	0.52	0.78	1.04
Propagación de ondas		216.82	325.23	433.64	-	-	-
ANSYS (Transient Structural)		254.13	299.37	310.54	0.47	0.88	1.16
ANSYS (Explicit Dynamics)		268.2	276.82	286.2	0.52	0.84	1.26

2.3 Desarrollo y simulación del segundo ejemplo básico: impacto transversal en una viga bi-apoyada

El segundo ejemplo básico se trata del análisis de impacto transversal de un cuerpo que cae de una determinada altura sobre una viga tal cual se muestra en la Figura 2-11. La viga tiene una sección cuadrada de $l = 30 \text{ mm}$, y se encuentra ubicada sobre dos apoyos: uno fijo y el otro móvil. Los valores de las propiedades de la viga se muestran en la Tabla 2-10.





Vista isométrica

Figura 2-11: Impacto transversal en una viga bi-apoyada

Tabla 2.10: Propiedades de la viga impactada

Datos	Valor	Unidades
Longitud de la viga	0.5	m
Lado de viga	0.03	m
Módulo de Young (E)	2E+11	Pa
Inercia I	6.75E-08	m ⁴
c	0.015	m
Densidad	7850	kg/m ³
Sección viga	0.0009	m ²
m ₁	3.5325	kg

El cuerpo, que impacta en la mitad de la longitud de la viga, es un cubo de lado $L_{cubo} = 80 \text{ mm}$ con una masa $m_2 = 4 \text{ kg}$. Ambos cuerpos son de acero estructural con una densidad igual a 7850 kg/m^3 .

2.3.1 Desarrollo mediante métodos analíticos

El desarrollo del ejemplo mediante métodos analíticos para una velocidad de impacto de 4 m/s es presentado en el Anexo 2 donde todos los cálculos y consideraciones son indicados. Para los casos de 6 y 8 m/s , el procedimiento de cálculo es el mismo.

En la Tabla 2.11 se muestran los diferentes valores de esfuerzos máximos obtenidos por el método de energía de Pisarenko para las velocidades de impacto de 4 , 6 y 8 m/s .

Tabla 2.11: Esfuerzo máximo de impacto transversal en viga bi-apoyada para diferentes velocidades de impacto

		Esfuerzo máximo (MPa)		
		v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s
Métodos de energía	Pisarenko (1er Método)	508.27	761.96	1015.45
	Pisarenko (2do Método)	396.59	594.34	792.08

En la Tabla 2.12 se muestran los diferentes valores de desplazamiento máximo obtenidos por el método de energía de Pisarenko para las velocidades de impacto de 4, 6 y 8 m/s.

Tabla 2.12: Desplazamiento máximo de impacto transversal en viga bi-apoyada para diferentes velocidades de impacto

		Desplazamiento máximo (mm)		
		v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s
Métodos de energía	Pisarenko (1er Método)	3.53	5.29	7.05
	Pisarenko (2do Método)	2.75	4.13	5.5

2.3.2 Simulación mediante software de elementos finitos

2.3.2.1 Simulación usando el algoritmo dinámico implícito

Tal cual fue explicado en el ejemplo anterior, para obtener valores más adecuados es necesario realizar un análisis modal previo para estimar las frecuencias naturales del sistema y así calcular el *time step* mediante la ecuación (1.65). En la Tabla 2.13 se muestran las primeras cuatro frecuencias naturales obtenidas usando el módulo Modal en ANSYS. En la Figura 2-12 se muestran los cuatro primeros modos de vibración transversal de la viga bi-apoyada.

Tabla 2.13: Análisis modal del sistema de impacto transversal en viga bi-apoyada

Modo	Frecuencia (Hz)
1	270.43
2	1022.6
3	2606.1
4	5770.4

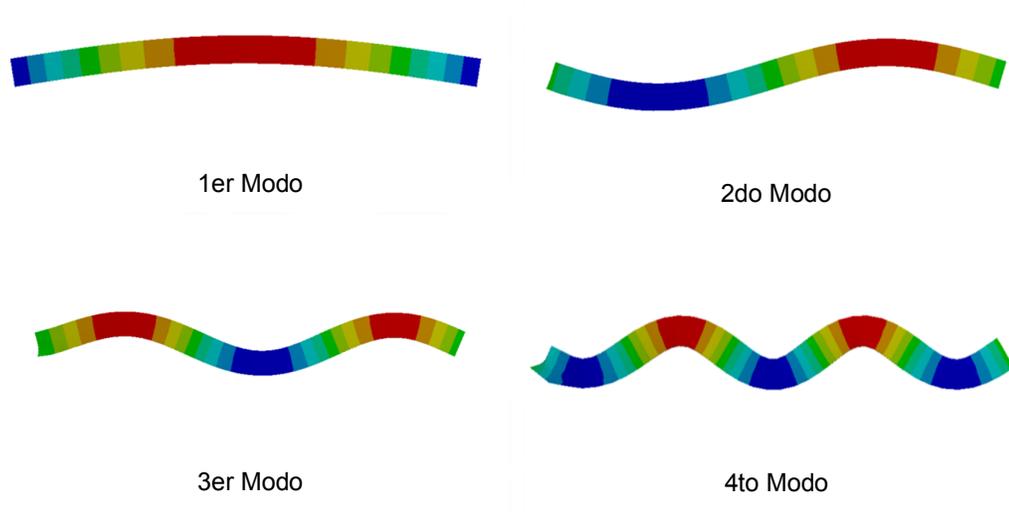


Figura 2-12: Modos de vibración para el sistema de impacto transversal en viga bi-apoyada

Una frecuencia natural de $f_n = 270.8 \text{ Hz}$, obtenida de la Tabla 2.13, corresponde al primer modo de vibración transversal de la viga. Reemplazando en la ecuación (1.65):

$$\Delta t = \frac{1}{20 * f_n} = 1.84 E^{-4} \text{ s} \quad (2.2)$$

Con valor calculado anteriormente, se realiza la simulación con la inclusión de parámetros de tiempo adicionales mostrados en la Tabla 2.14.

Tabla 2.14: Parámetros de tiempo en ANSYS para impacto transversal en viga bi-apoyada

Parámetro	Valor	Unidad
Time Step	1.84E-04	s
End Time	0.02	s
Initial time Step	1.00E-04	s
Minimum Time Step	7.00E-05	s
Maximum Time Step	8.00E-04	s

El mallado realizado a los cuerpos en el análisis implícito fue realizado mediante la opción de *Mechanical* del software ANSYS el cual generó 1846 nodos y 296 elementos. En la Figura 2-13 se muestra el mallado realizado para el algoritmo implícito.

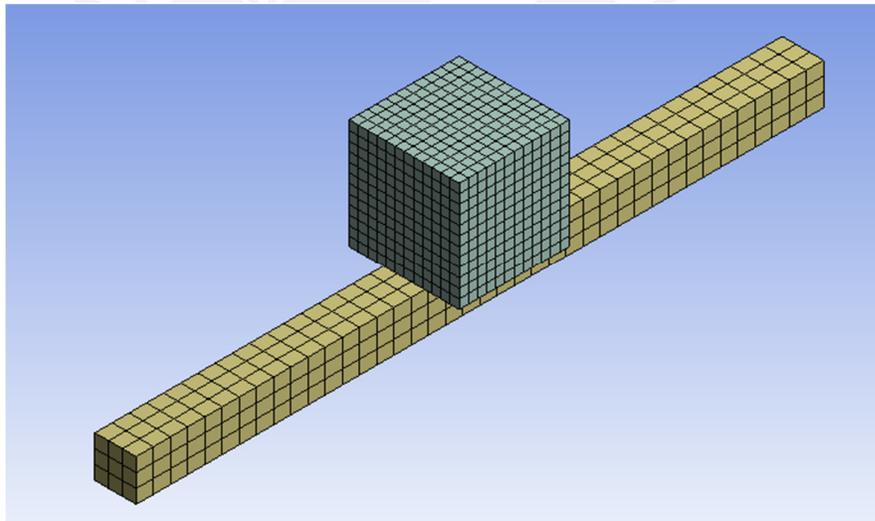


Figura 2-13: Mallado para impacto transversal en viga bi-apoyada mediante algoritmo implícito

Los resultados de esfuerzo y desplazamiento máximo para una velocidad de impacto de 4 m/s se muestran en las Figuras 2-14 y 2-15 respectivamente. Todos los resultados de esfuerzo y desplazamiento se muestran en la Tabla 2.14.

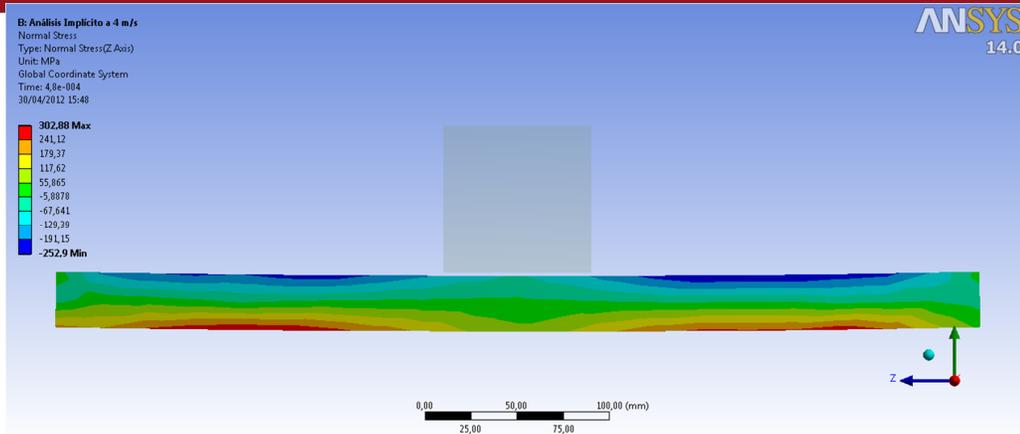


Figura 2-14: Esfuerzo máximo en impacto transversal en viga bi-apoyada para una velocidad de impacto de 4 m/s (Algoritmo Implícito)

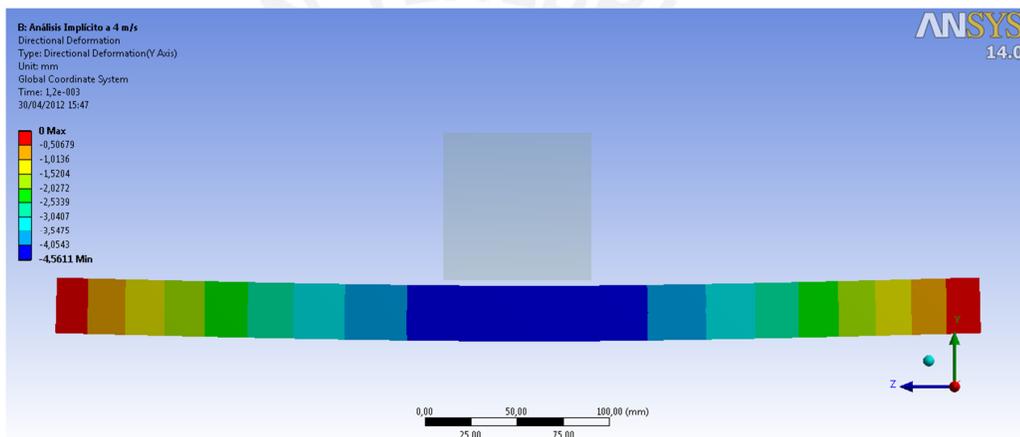


Figura 2-15: Desplazamiento máximo en impacto transversal en viga bi-apoyada para una velocidad de impacto de 4 m/s (Algoritmo Implícito)

La Figura 2-14 se aprecia que el esfuerzo máximo no se da en la mitad de la viga como es de esperarse con un cálculo por resistencia de materiales. En este caso, se puede observar que el esfuerzo producido por la propagación de ondas es mayor que el producido por el impacto del cuerpo. Por otro lado, el desplazamiento sí se da en la mitad de la viga al igual que los cálculos por resistencia. En la Tabla 2.15 se muestran los resultados obtenidos mediante el algoritmo implícito.

Tabla 2.15: Esfuerzos y desplazamientos máximos en impacto transversal en viga bi-apoyada mediante algoritmo implícito

ANSYS (Implicit Dynamics)					
v = 4 m/s		v = 6 m/s		v = 8 m/s	
Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)
354.23	4.55	321.95	7.43	382.13	13.03

2.3.2.2 Simulación usando el algoritmo dinámico explícito

En el caso del algoritmo explícito, el software ANSYS sólo requiere el valor de tiempo de simulación *End Time* el cual es 0.02 s. igual al del algoritmo implícito.

Para el mallado en este algoritmo, el software ANSYS recomienda el uso de la opción *Explicit*. Esta opción generó una malla de 2853 nodos y 2088 elementos. En la Figura 2-16 se muestra el mallado generado para los cuerpos.

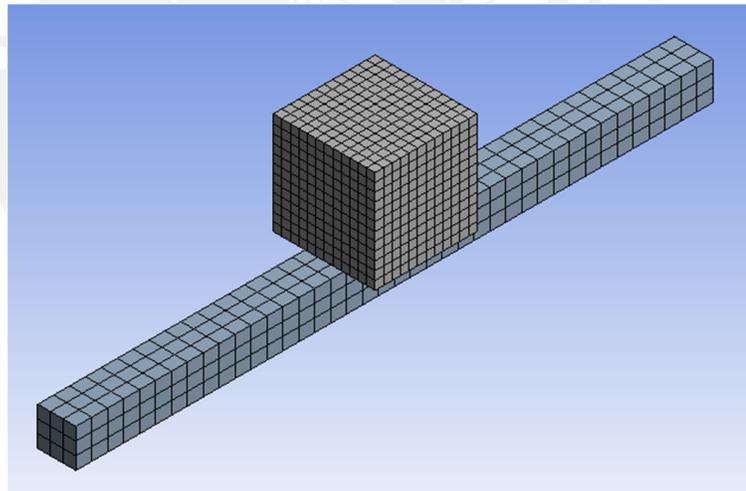


Figura 2-16: Mallado para impacto transversal mediante algoritmo explícito

Los resultados de esfuerzo y desplazamiento máximo para una velocidad de impacto de 6 m/s se muestran en las Figuras 2-17 y 2-18 respectivamente. Todos los resultados de esfuerzo y desplazamiento se muestran en la Tabla 2.16.

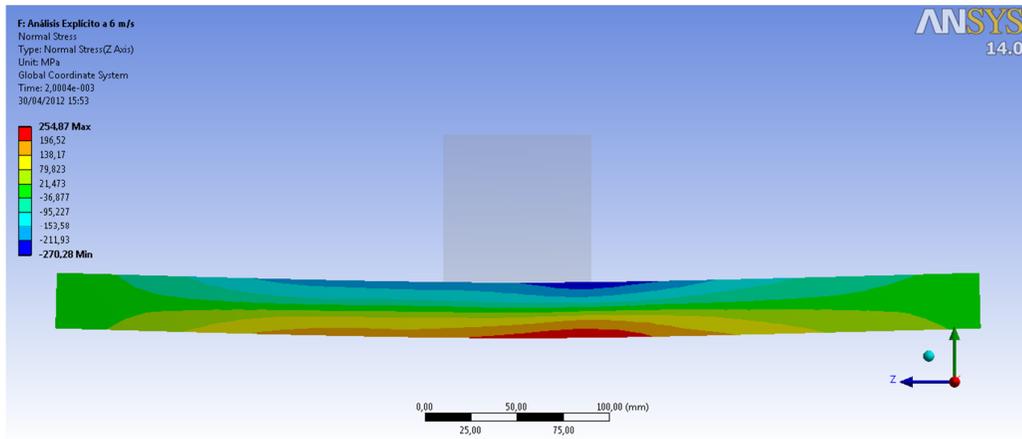


Figura 2-17: Esfuerzo máximo en impacto transversal en viga bi-apoyada para una velocidad de impacto de 6 m/s (Algoritmo Explícito)

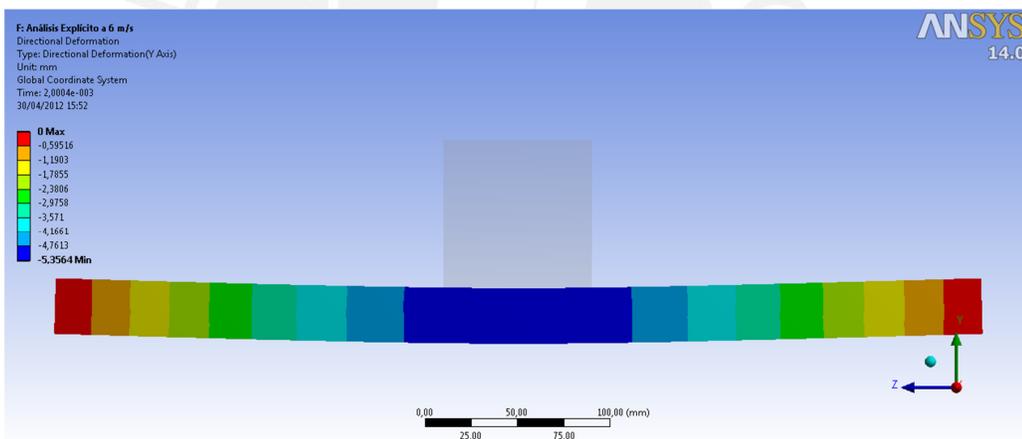


Figura 2-18: Desplazamiento máximo en impacto transversal en viga bi-apoyada para una velocidad de impacto de 6 m/s (Algoritmo Explícito)

En la Figura 2-17 se puede observar que el esfuerzo máximo se da en la mitad de la viga tal cual nos indica los cálculos por resistencia de materiales. En la Figura 2-18 se observa que el desplazamiento, al igual que los cálculos por resistencia de materiales y el método implícito, se da en la mitad de la viga. En la Tabla 2.16 se muestran los resultados obtenidos mediante el método explícito.

Tabla 2.16: Esfuerzos y desplazamiento máximo en impacto transversal en viga bi-apoyada mediante algoritmo explícito

ANSYS (Explicit Dynamics)					
v = 4 m/s		v = 6 m/s		v = 8 m/s	
Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)	Esfuerzo (MPa)	Desplazamiento (mm)
253.05	3.11	270.28	5.36	284.12	8.02

En la Figura 2.19 se muestra los diferentes valores del esfuerzo máximo de las tres velocidades conforme transcurre el tiempo. En la figura mencionada anteriormente se observa el fenómeno de propagación de ondas producido por el impacto.

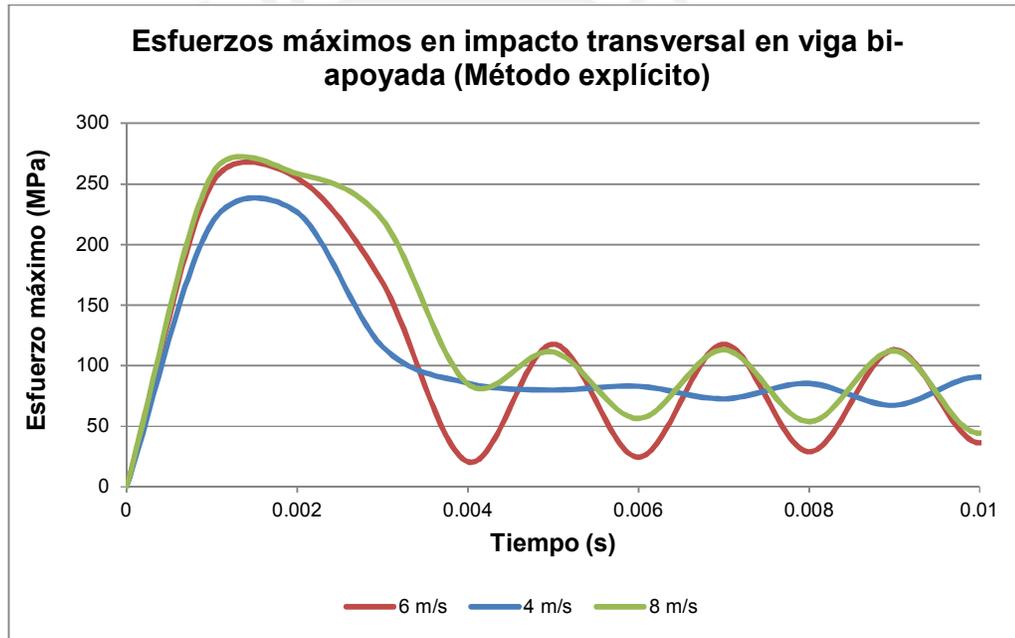


Figura 2-19: Esfuerzos máximos obtenidos para diferentes velocidades de impacto transversal en viga bi-apoyada (Algoritmo Explícito)

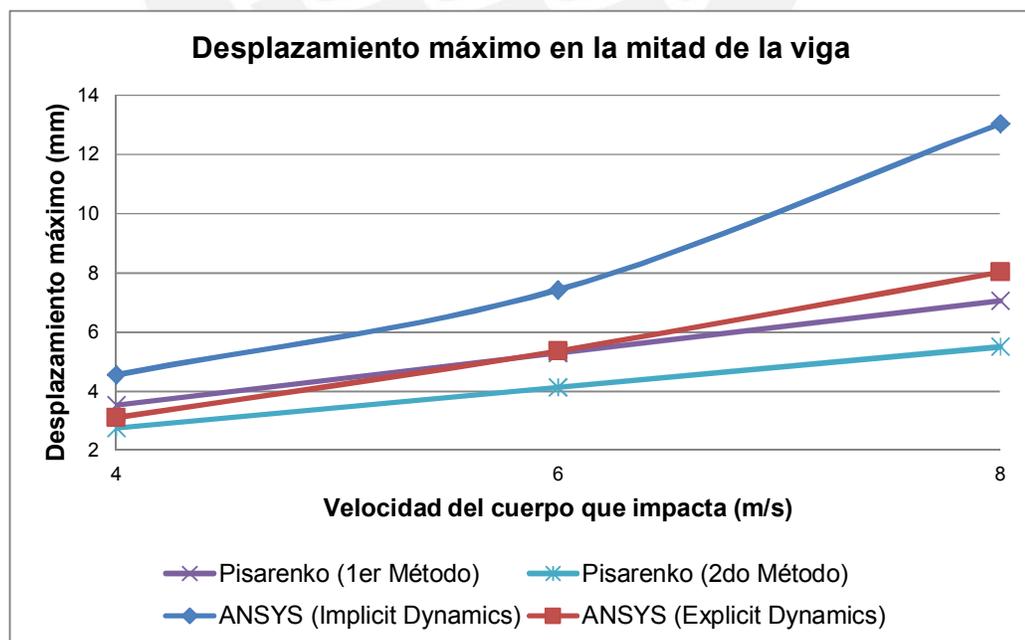
2.3.3 Comparación y discusión de resultados

Al igual que en el ejemplo anterior, en los métodos analíticos se observan diferencias entre los valores de esfuerzo y desplazamientos máximos obtenidos. El primer método de energía mostrado Pisarenko presenta valores más altos que el segundo método que considera condiciones de geometría y masas de cuerpos. Con esto es posible afirmar que se obtienen valores menores cuando se consideran

factores de geometría y masas. Así también, se observa que los métodos analíticos realizan muchas simplificaciones y tienden a sobredimensionar valores. En todos los casos de impacto transversal, los esfuerzos pasan el límite de fluencia del material (250 MPa) y se observa que los métodos de energía desarrollados por Pisarenko no toman en cuenta los efectos no lineales del material analizando en el rango elástico y así brindan valores altos de esfuerzo en la mitad de la viga.

En el caso de los métodos computacionales implícito y explícito, al igual que el ejemplo anterior, se observan diferencias entre ambos valores de esfuerzos pero éstas son menores que las encontradas en los métodos analíticos. El algoritmo implícito muestra los valores más altos en cuanto al desplazamiento en la mitad de la viga en todos los casos de impacto. Cabe resaltar que los valores obtenidos para esfuerzo máximo por ambos métodos computacionales no alcanzan valores tan altos como los obtenidos por los métodos analíticos. Caso contrario sucede con los valores de desplazamiento que sí alcanzan valores mucho mayores que los obtenidos con los métodos analíticos. Esto se observa en la Figura 2-20 donde se muestra una gráfica comparativa de desplazamientos obtenidos mediante todos los métodos para las velocidades de impacto analizadas.

Figura 2-20: Gráfica comparativa entre los desplazamientos obtenidos por todos los métodos desarrollados para impacto transversal en viga bi-apoyada



Con los resultados obtenidos es posible afirmar que los métodos computacionales brindan valores más adecuados para el análisis de impacto y el algoritmo implícito brinda resultados más cercanos a los analíticos. En la Figura 2-21 se muestra una gráfica comparativa de esfuerzos obtenidos mediante todos los métodos para las velocidades de impacto analizadas. En la Tabla 2.17 se muestran todos los resultados obtenidos para este ejemplo.

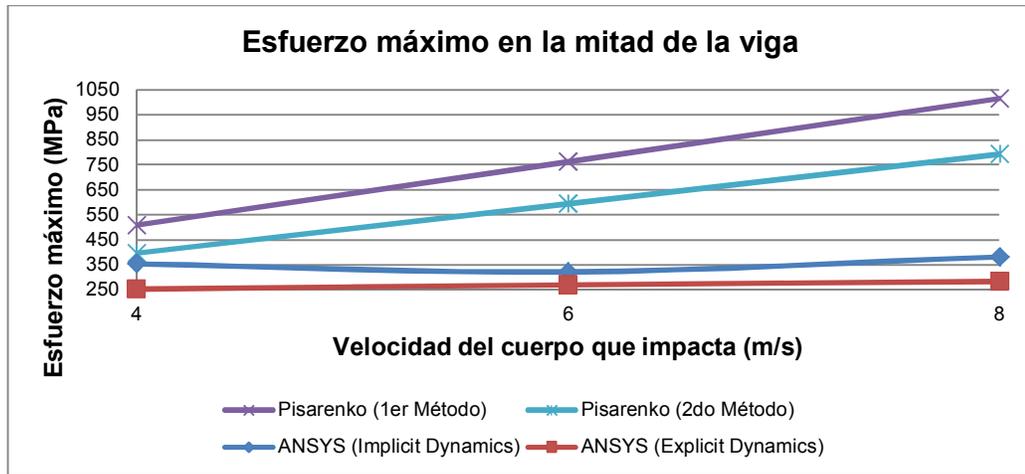


Figura 2-21: Gráfica comparativa entre los esfuerzos obtenidos por todos los métodos desarrollados para impacto transversal en viga bi-apoyada

Tabla 2.17: Tabla comparativa entre los esfuerzos obtenidos por todos los métodos desarrollados para impacto transversal en viga bi-apoyada

Métodos de energía		Esfuerzo máximo (MPa)			Desplazamiento máximo (mm)		
		v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s	v = 4 m/s	v = 6 m/s	v = 8 m/s
Pisarenko	Pisarenko (1er Método)	508.27	761.96	1015.45	3.53	5.29	7.05
	Pisarenko (2do Método)	396.59	594.34	792.08	2.75	4.13	5.5
ANSYS (Transient Structural)		354.23	321.95	382.13	4.55	7.43	13.03
ANSYS (Explicit Dynamics)		253.05	270.28	284.12	3.11	5.36	8.02

2.4 Desarrollo y simulación del tercer ejemplo básico: impacto torsional en una viga empotrada

El tercer ejemplo a desarrollar es un impacto que produce esfuerzos torsionales en una viga empotrada. Estos esfuerzos torsionales son producidos por el impacto de dos cuerpos en sentidos contrarios a una velocidad de 5 m/s. Los mencionados cuerpos son cubos con lado $L_{cubo} = 15 \text{ mm}$ y con una masa de $m_{cubo} = 0.026 \text{ Kg}$. El material de todos los cuerpos mencionados es acero estructural con una densidad igual a 7850 kg/m^3 . En la Figura 2-22, se muestra la geometría del ejemplo.

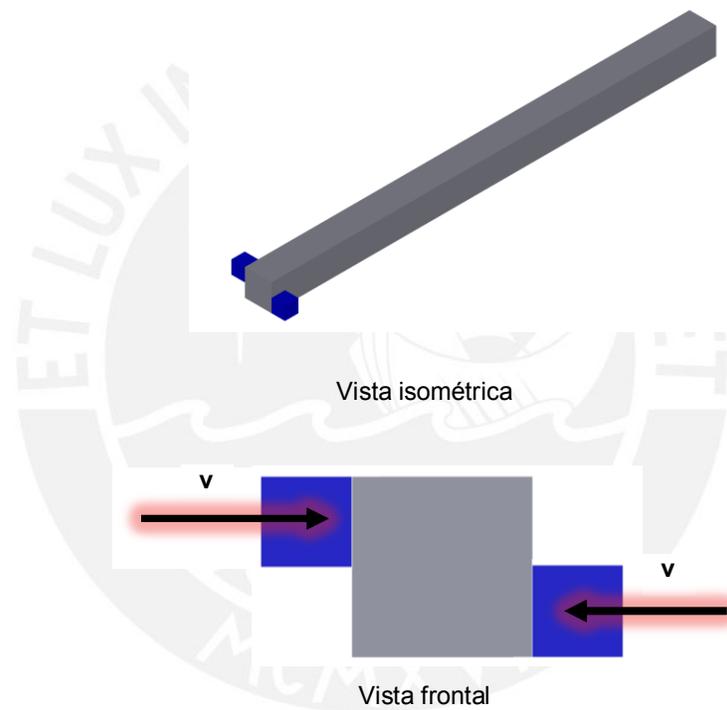


Figura 2-22: Impacto torsional en una viga empotrada

2.4.1 Desarrollo mediante métodos analíticos

El desarrollo del ejemplo de impacto torsional es realizado en el Anexo 3 donde se presentan las fórmulas y consideraciones utilizadas para su solución. Utilizando el método de Goldsmith, se obtiene un valor de esfuerzo cortante máximo de $\tau_{max} = 27.18 \text{ MPa}$.

2.4.2 Simulación mediante software de elementos finitos

La simulación de este ejemplo se realizó mediante el módulo *Explicit Dynamics* de ANSYS v14. Se consideró el contacto entre los cuerpos que impactan a la viga como tipo *Frictionless* y un soporte fijo (*Fixed Support*) en el empotramiento de la viga. El mallado fue realizado mediante la opción *Explicit* de ANSYS generando 66918 nodos y 58520 elementos. Esto debido a que se definió un tamaño de elemento de 2 mm para la viga empotrada. El tiempo de simulación para este ejemplo fue de $1E-3$ s. En la Figura 2-23 se muestra el mallado formado para el ejemplo desarrollado.

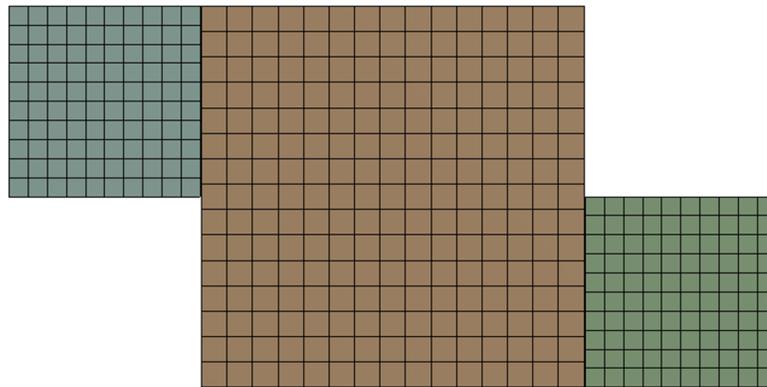


Figura 2-23: Mallado para impacto torsional en viga empotrada mediante algoritmo explícito

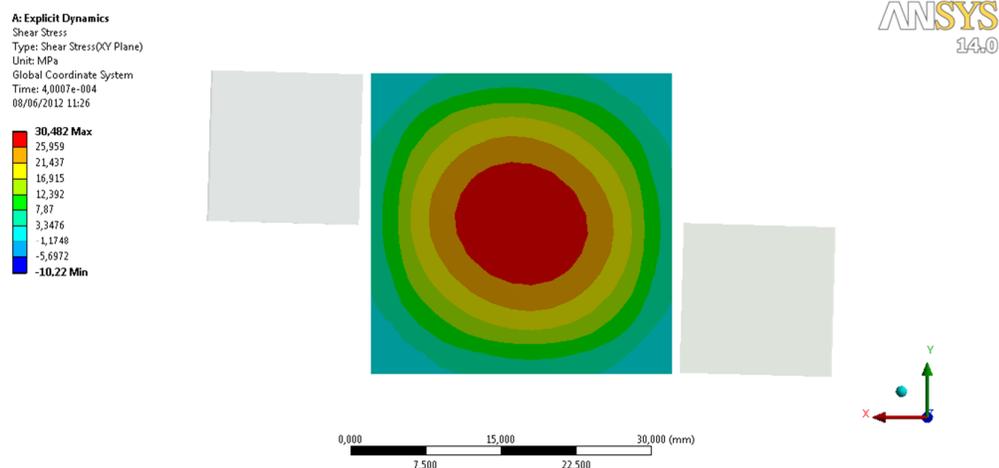


Figura 2-24: Esfuerzo cortante máximo en impacto torsional en viga empotrada

Con el método de elementos finitos y la integración explícita, se obtiene un valor de esfuerzo cortante máximo de $\tau_{max} = 30.48 MPa$ y un esfuerzo equivalente según Von Mises de $\sigma_{Von Mises} = 108.66 MPa$. En la Figura 2-24 se presenta el esfuerzo cortante máximo de la viga empotrada obtenido en la simulación en el instante del impacto. Se observa que este esfuerzo se produce en el centro del interior de la viga justo en el centro geométrico de la misma.

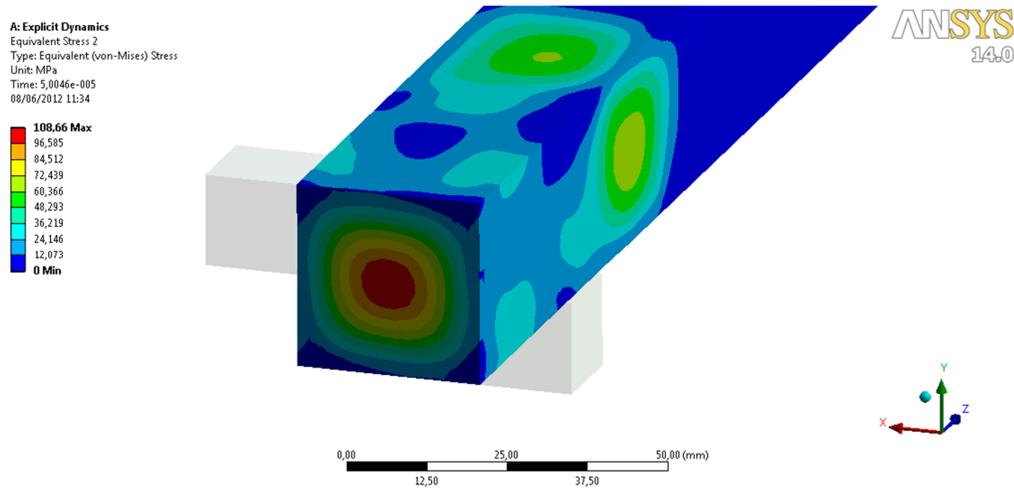


Figura 2-25: Esfuerzo equivalente máximo en impacto torsional en viga empotrada

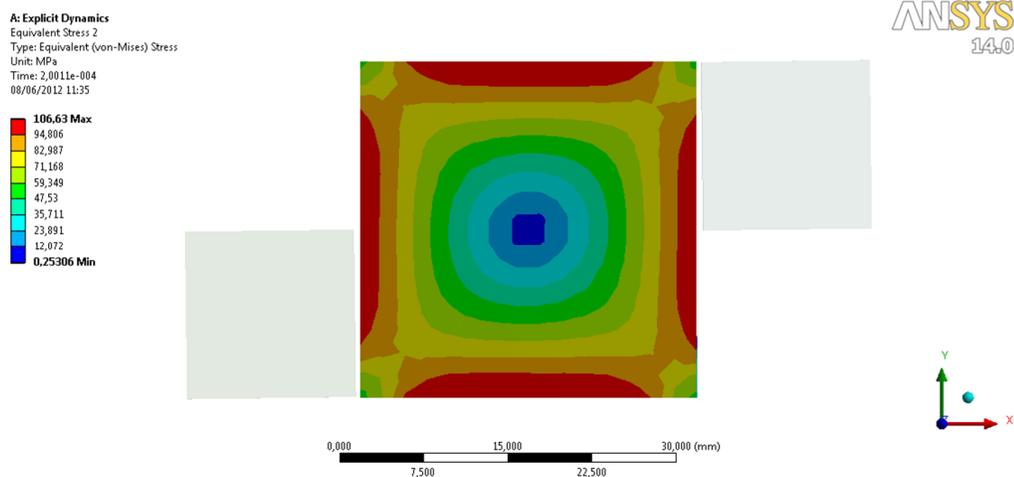


Figura 2-26: Esfuerzo equivalente máximo en el empotramiento en impacto torsional

En la Figura 2-25 se muestra el máximo esfuerzo equivalente según Von Mises en el instante de impacto. Al igual que el esfuerzo cortante, éste se produce en el centro del interior de la viga. También se observa el viaje de ondas de esfuerzo a través de la viga se da en dirección al empotramiento. En la Figura 2-26, se observa

que los esfuerzos equivalentes máximos en el empotramiento son producidos en el centro de los bordes de la viga con valores similares al esfuerzo máximo en el instante del impacto.

2.4.3. Comparación y discusión de resultados

En este ejemplo las diferencias entre métodos analíticos y computacionales se siguen observando. En el caso del esfuerzo cortante máximo, se observa que el valor obtenido por el MEF es 12% mayor que el obtenido por el método de Goldsmith. Esta diferencia está dada por las simplificaciones que presenta el método analítico como el no considerar la geometría del cuerpo proyectil ni la propagación de ondas.

Para el caso del esfuerzo máximo equivalente según Von Mises, se observa la aparición de momentos flectores debido a peso de la viga que incrementan considerablemente el valor del esfuerzo hasta los 108.66 MPa que se obtienen. Mediante la simulación se observó la propagación de ondas que viajan desde la zona de impacto hacia el empotramiento donde se producen esfuerzos similares a los del impacto. Esta propagación no es posible determinarla mediante métodos analíticos con lo cual se afirma que los mencionados métodos no brindan resultados precisos. En la Tabla 2-18 se muestra una tabla comparativa de los resultados obtenidos para el presente ejemplo.

Tabla 2.18: Tabla comparativa entre los esfuerzos obtenidos por todos los métodos desarrollados para impacto torsional en viga empotrada

	Esfuerzo cortante máximo (MPa)	Esfuerzo equivalente Von Mises (MPa)
v = 5 m/s		
Goldsmith	27.18	-
ANSYS (Transient Structural)	30.48	108.66

2.5 Desarrollo y simulación del cuarto ejemplo básico: impacto de una esfera contra un disco

El cuarto ejemplo a desarrollar se trata del impacto de una esfera de acero estructural contra un disco de aluminio de espesor $t = 32 \text{ mm}$. En el primer caso a simular, se presenta una esfera de diámetro $d = 10 \text{ mm}$ impactando al disco con una velocidad de 1888 m/s. En el segundo caso, el diámetro de la esfera es $d = 15 \text{ mm}$ impactando al disco con una velocidad de 5264 m/s. En la Figura 2-27 se muestra la geometría utilizada en este ejemplo.



Figura 2-27: Impacto de una esfera sobre un disco

2.5.1 Simulación mediante software de elementos finitos

Para la simulación del presente ejemplo se utilizaron los módulos *Explicit Dynamics* y *Autodyn* en ANSYS v14. Los mencionados módulos son recomendados para el análisis a altas velocidades y mediante el presente ejemplo se busca estudiar cuál de los dos módulos brinda mejores resultados. Para cada caso planteado, se simula el mismo ejemplo en ambos módulos mediante un análisis 2D y utilizando la axisimetría de los cuerpos involucrados.

El mallado utilizado en ambos casos fue generado por la opción *Explicit* en ANSYS y se asignó un tamaño máximo de 1 mm para cada elemento. En la Figura 2-28 se muestra la geometría utilizada así como el mallado para la esfera de 10 mm.

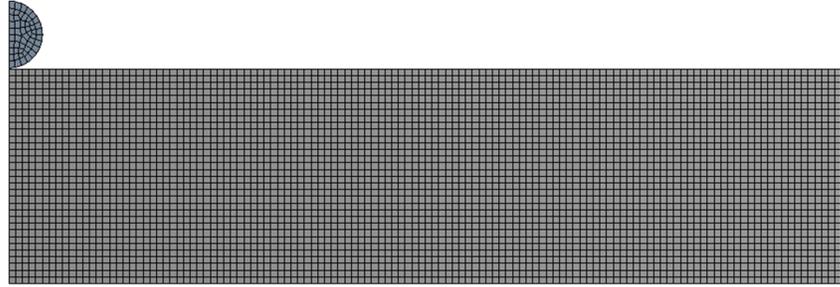


Figura 2-28: Mallado para impacto de esfera de 10 mm contra disco

Para ambos casos simulados, se considera a la esfera flexible y además un apoyo fijo en toda la cara externa del disco. Así mismo, en ambos módulos se utilizan mallados del tipo Lagrangianos.

2.5.1.1 Simulación del primer caso: esfera de 10 mm

En este primer caso, la esfera presenta un diámetro de 10 mm y una velocidad de impacto de 1888 m/s. Esta velocidad es considerada como alta y es necesario considerar que los resultados obtenidos deben presentar fenómenos de resistencia viscosa del material y también un claro fenómeno de propagación de ondas.

Para la simulación de este ejemplo usando el módulo de *Explicit Dynamics*, el software generó una malla de 4225 nodos y 4053 elementos utilizando la opción Explicit. El tiempo de simulación fue de 1E-04 s. La deformación plástica equivalente obtenida fue de 2.06 y es constante desde los 5E-06 s. hasta el final de la simulación. En la Figura 2-29 se muestra, a través del tiempo de simulación, la deformación plástica equivalente para este ejemplo.

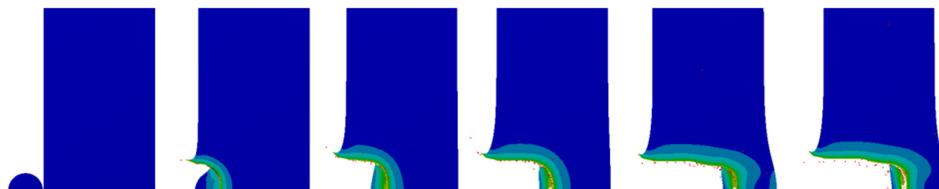


Figura 2-29: Deformación plástica equivalente para el impacto de esfera de 10 mm contra disco utilizando Explicit Dynamics

En la Figura 2-29, se aprecia penetración de la esfera la cual produce una propagación de ondas de esfuerzos desde la zona de impacto hacia el exterior del disco. Esta penetración no conduce a una perforación posterior debido a que la esfera se deforma plásticamente en el interior del disco.

Se observa que las fallas producidas en la placa por efectos del impacto son una combinación de formación de pétalos en el inicio y fragmentación a lo largo del impacto. Siendo éstos efectos muy comunes de encontrar en impactos a velocidades mayores a 900 m/s.

Usando el módulo *Autodyn* con los mismos parámetros definidos para el módulo *Explicit Dynamics*, los resultados encontrados con respecto a la deformación plástica equivalente son distintos. Con éste módulo se obtuvo una deformación plástica equivalente de 1.87 en comparación de los 2.06 obtenidos con el módulo *Explicit Dynamics*. En la Figura 2-30 se observa la deformación plástica equivalente a través del tiempo para este ejemplo utilizando *Autodyn*.

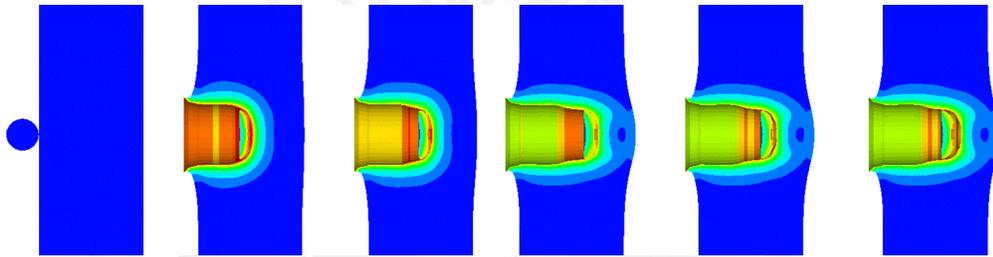


Figura 2-30: Deformación plástica equivalente para el primer caso utilizando Autodyn

En este módulo, también se aprecia la formación de pétalos pero no la fragmentación observada con el módulo anterior. En la Figura 2-31 se presenta la formación de pétalos en la penetración del proyectil.

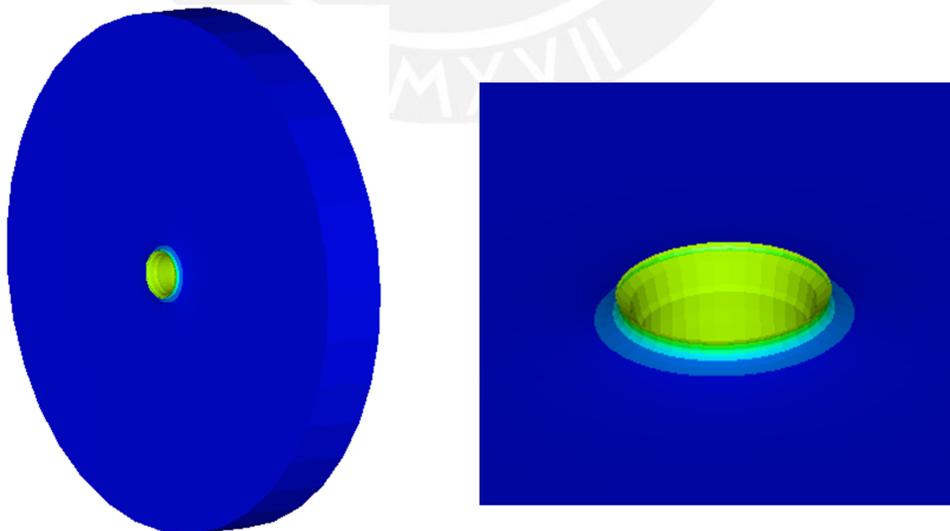


Figura 2-31: Formación de pétalo producido por el impacto de esfera de 10 mm.

2.5.1.2 Simulación del segundo caso: esfera de 15 mm

Para el segundo caso, la esfera presenta un diámetro de 15 mm y una velocidad de impacto de 5264 m/s. Esta velocidad es considerada como hipervelocidad y los materiales involucrados se comportan como fluidos hidrodinámicos.

Para la simulación de este ejemplo usando el módulo de *Explicit Dynamics*, el software generó una malla de 4289 nodos y 4111 elementos utilizando la opción *Explicit*. El tiempo de simulación fue de 3E-05 s. La deformación plástica equivalente obtenida fue de 2.57 y es constante desde los 3E-06 s. hasta el final de la simulación. En la Figura 2-32 se muestra, a través del tiempo de simulación, la deformación plástica equivalente para este ejemplo.



Figura 2-32: Deformación plástica equivalente para el impacto de esfera de 15 mm contra disco utilizando Explicit Dynamics

En la Figura 2-32, se aprecia penetración de la esfera y propagación de ondas igual que en el caso anterior simulado. Se observa que la penetración de la esfera produce fragmentación al iniciarse el contacto entre ambos cuerpos debido a la alta velocidad de la esfera. Al igual que en el caso anterior, se observa la formación de pétalos pero con mayor deformación plástica asemejándose a una mini explosión al producirse el impacto. También se observa que la esfera se desintegra completamente en el impacto quedando una parte pequeña de la misma al término del impacto.

Usando el módulo *Autodyn* con los mismos parámetros definidos para el módulo *Explicit Dynamics*, los resultados encontrados con respecto a la deformación plástica equivalente son muy distintos y lejanos en comparación a los del módulo anterior. Con éste módulo se obtuvo una deformación plástica equivalente de 3.1 en comparación de los 2.57 obtenidos con el módulo *Explicit Dynamics*.

En este módulo, también se aprecia la formación de pétalos pero con mayores deformaciones plásticas e incluso la presencia de un “plug”. En la Figura 2-33 se

observa la deformación plástica equivalente a través del tiempo para este ejemplo utilizando *Autodyn*.

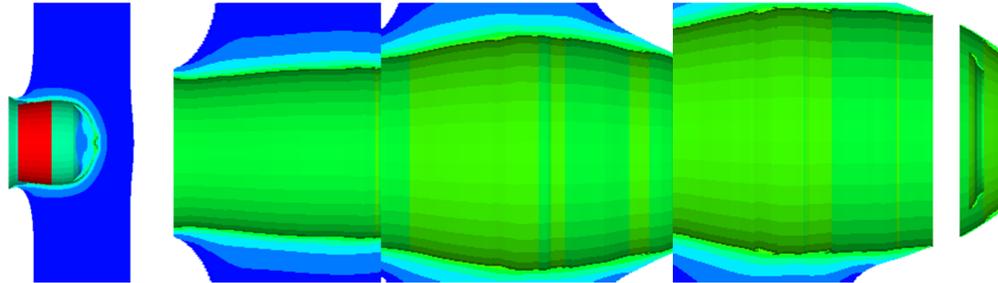


Figura 2-33: Deformación plástica equivalente para el segundo caso utilizando *Autodyn*

El *plug* formado por el impacto así como la formación de pétalo tanto en el ingreso del proyectil como en la salida del mismo es presentado en la Figura 2-34.

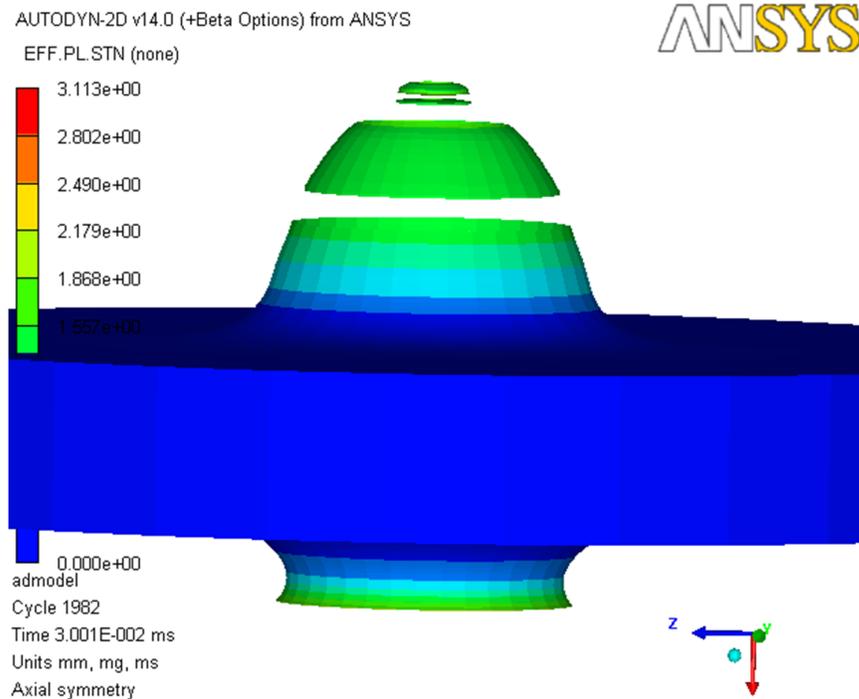


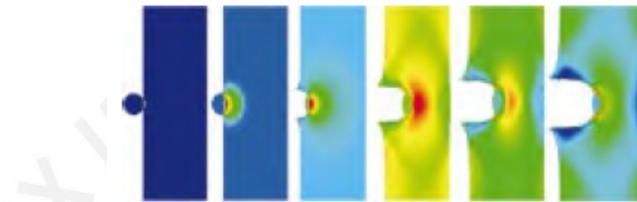
Figura 2-34: Detalle del *plug* y pétalo formado por el impacto en el segundo caso

2.5.2 Verificación de simulación de impacto en altas velocidades

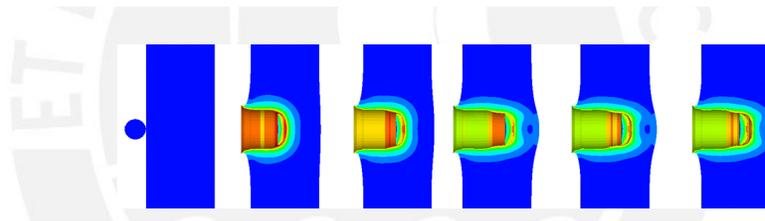
Para verificar y comparar los resultados de estos ejemplos, se contrastan con los resultados obtenidos en un trabajo de investigación realizado por el Terminal Balístico del Laboratorio de Investigación del Ministerio de Defensa de India

(*Terminal Ballistics Research Laboratory*). En este trabajo denominado “*Dynamic yield strength of mild steel under impact loading*”, se presentan los resultados de la simulación y experimentación de los casos simulados anteriormente.

Para el primer caso, el mencionado trabajo presenta los resultados de la deformación plástica simulados mediante el módulo *Autodyn* usando el solucionador Euleriano. En la Figura 2-35 se presenta, en la parte superior, los resultados del trabajo mencionado en el párrafo anterior y, en la parte inferior, los resultados obtenidos mediante la simulación.



Resultados de la simulación presentados en “*Dynamic yield strength of mild steel under impact loading*” (Singh, 2008)



Resultados de la simulación del primer caso (Esfera de 10 mm)

Figura 2-35: Comparación entre simulaciones del primer caso

En la Figura 2-35, se observa que ambas simulaciones tienen resultados en común. En ambas se observa la formación de pétalo tipo cráter en la zona de inicio de penetración de la esfera. Además, se observa que la esfera se deforma plásticamente durante la penetración y queda en el interior del disco. Finalmente, también se observa que ambas tienen una abolladura en el otro lado del disco producido por el impacto.



En el segundo caso presentado, el mencionado trabajo comprueba por experimentación la simulación realizada usando el mismo modulo y solucionador. Tomando como referencia el resultado de la experimentación del trabajo

caso mediante (Luis, 2008)

presentada en la Figura 2-36, se observa que la simulación realizada presenta los Resultados de la experimentación, se obtiene formación de pétalos tipo del disco, un *plug* y una parte de la esfera deformada. Es el caso obtienen en la simulación realizada los cuales guardan mucha similitud en sus formas geométricas. En la misma Figura 2-36, se presenta el resultado de la simulación del segundo caso mostrando la similitud con los obtenidos mediante experimentación.

Figura 2-36: Resultados de la experimentación y comparación del segundo caso

CAPÍTULO 3

3. DESARROLLO DE UN PROCEDIMIENTO PARA EL ESTUDIO DE IMPACTO EN SÓLIDOS DEFORMABLES

3.1 Introducción

En los capítulos anteriores se ha presentado una base teórica para analizar problemas de impacto con diferentes velocidades así como sus simulaciones mediante elementos finitos realizando una comparación entre los resultados obtenidos mediante ambos métodos de análisis. Se ha podido constatar que los resultados obtenidos por el método de elementos finitos brindan valores que consideran la propagación de ondas, los contactos entre ambos cuerpos, la geometría del cuerpo que produce el impacto y la no linealidad en los ejemplos desarrollados.

En el presente capítulo se presenta un procedimiento para el estudio de impacto en sólidos deformables mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) utilizando el software ANSYS v14.

3.2 Procesos de análisis con el MEF

Todo problema físico envuelve la existencia de una estructura real o componentes estructurales sujetos a ciertas cargas externas. La idealización del problema para un modelo matemático requiere ciertas condiciones que permiten obtener ecuaciones diferenciales que gobiernen dicho modelo. El MEF resuelve estas ecuaciones y, dado que es un procedimiento numérico, resulta necesario el

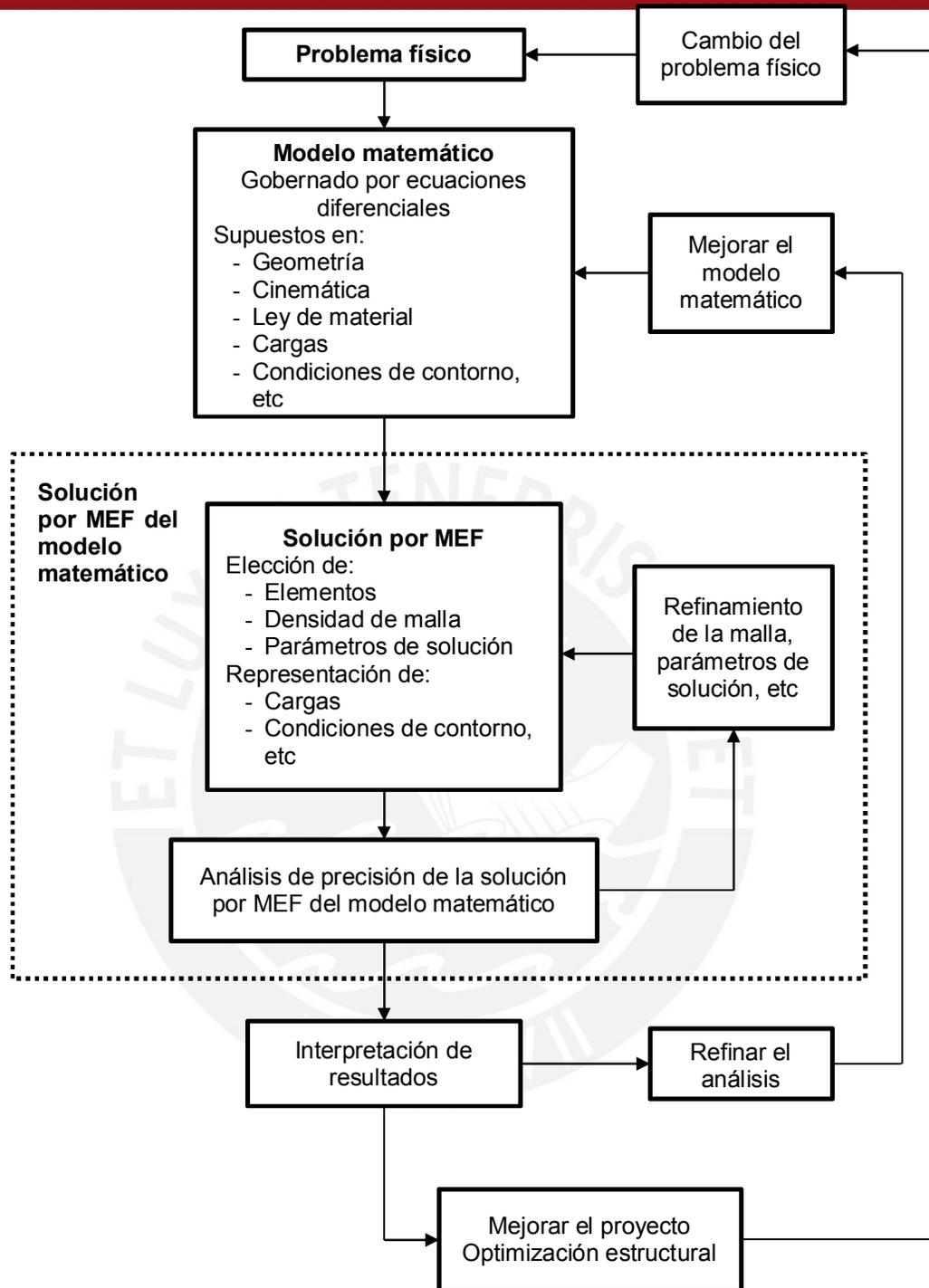


Figura 3-1: Proceso de análisis por el MEF (Bathe)

refinamiento de los parámetros de solución para que se obtenga precisión en los resultados deseados. Con esto, los resultados deben ser interpretados y así poder refinar el modelo matemático.

En la Figura 3-1, Bathe presenta un diagrama el cual resume el proceso de análisis por el MEF.

Adicionalmente, según Huebner, el MEF puede ser resumido básicamente en 3 etapas: pre-procesamiento, solución y post-procesamiento.

- a. Pre-procesamiento: es la etapa de preparación donde es realizada la modelación del problema, se definen el tipo de análisis asumiendo hipótesis, condiciones iniciales de contorno, cargas, elección del tipo de elemento y las propiedades de sus materiales.
- b. Solución: es basada en algoritmos numéricos que tienen como objetivo solucionar de manera rápida y precisa las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales y de contorno correspondientes de la modelación.
- c. Post-procesamiento: es la etapa donde el conjunto de soluciones obtenidas, como desplazamientos, esfuerzos, deformaciones, temperaturas, frecuencias naturales, etc; son visualizadas e interpretadas.

3.3 Desarrollo del procedimiento

De acuerdo al proceso para el MEF mencionado, se presenta el procedimiento para el estudio de impacto en sólidos deformables:

Paso 1: Construcción del modelo matemático

1.1 Definición del tipo de elemento

Los principales tipos de elementos usados para la creación de modelos son mostrados a continuación:

- a. Elementos Cáscara (SHELL)

Los elementos Shell son utilizados para simular el comportamiento de sólidos de sección transversal fina, tales como placas delgadas o chapas metálicas. De manera más específica, tienen aplicación en todo tipo de estructuras laminares, cuyo espesor es menor que 0,1 veces su longitud menor.

- b. Elemento sólido (SOLID)

Estos elementos se utilizan para simular el comportamiento de sólidos sometidos a diferentes tipos de cargas. Su principal aplicación es el análisis de estructuras de

paredes gruesas. Las formas de estos elementos varían desde tetraedros, cuñas, hexaedros, etc.

c. Elemento tipo viga (BEAM)

Los elementos viga son utilizados para proporcionar rigidez a tracción o compresión; flexión o torsión entre dos nodos. Estos elementos pueden tener una gran variedad de secciones como: circular, rectangular, entre otras. Los elementos viga son capaces de simular tanto comportamiento elástico lineal como plástico.

1.2 Definición del material de los cuerpos

Dado que la mayoría de análisis de impacto presentan un comportamiento no lineal, se requiere que los materiales definidos del software contemplen esta característica. ANSYS, en su aplicación nativa *Engineering Data*, presenta dos librerías que contienen materiales para este tipo de análisis:

a. *Explicit Materials*

Contiene un amplio rango de materiales usados generalmente en análisis explícitos no lineales. La desventaja de esta librería es que los materiales sólo se pueden usar para los análisis explícitos.

b. *General non-linear Materials*

Esta librería contiene información de materiales básicos para análisis no lineal. Como ventaja frente a *Explicit Materials* es que los materiales se pueden usar para análisis implícitos y explícitos.

Así mismo, en caso de trabajar con materiales nuevos o compuestos, ANSYS es capaz de la creación de nuevos materiales mediante el ingreso de todas sus propiedades físicas, mecánicas y/o térmicas para definir completamente el comportamiento mecánico del mismo.

1.3 Definición de la geometría del modelo

La geometría del modelo puede ser realizada por cualquier software CAD tales como Autodesk Inventor, SolidWorks o Catia. ANSYS tiene compatibilidad para la mayoría de software CAD lo cual lo hace muy flexible al importar geometrías para el modelo matemático.

1.4 Generación de la malla

El mallado para el análisis por MEF es una tarea básica que puede resultar complicada en muchos casos. Adicionalmente, la generación de la malla es uno de los factores que influyen en la precisión de los resultados. Por un lado, el error de las soluciones obtenidas mediante el MEF depende del tamaño de los elementos y, por otro, para la mayoría de casos la presencia de elementos distorsionados disminuye la precisión de la solución. En el Anexo A4 se presenta una metodología para realizar un correcto mallado para el software ANSYS.

1.5 Definición de interacción entre cuerpos y contactos

En este paso, se definen la interacción de los cuerpos involucrados en el modelo matemático. El software ANSYS lo denomina *Body Interaction* y presenta 4 tipos:

- a. Ligadura (*Bonded*): los cuerpos con esta interacción están unidos y forman un solo cuerpo, en otras palabras, se puede decir que están soldados.
- b. Sin fricción (*Frictionless*): Los cuerpos se deslizan entre sí sin fricción.
- c. Con fricción (*Frictional*): Los cuerpos se deslizan entre sí con fricción.
- d. Refuerzo (*Reinforcement*): Se utiliza para aplicar un refuerzo discreto a los cuerpos sólidos. Usualmente se presenta su uso en vigas.

En caso de no realizar ninguna definición de interacción, ANSYS define una interacción sin fricción a todos los cuerpos por defecto.

Para definir los contactos entre los cuerpos, ANSYS detecta automáticamente los contactos que son usados para definir la interacción entre las caras específicas de los cuerpos. El software presenta los siguientes tipos:

- a. Ligadura (*Bonded*): las uniones puede ser destruidas.
- b. Sin separación (*No separation*): no admitido para análisis explícitos.
- c. Sin fricción (*Frictionless*)
- d. Con fricción (*Frictional*): se admiten fricciones estáticas y dinámicas.
- e. Áspero (*Rough*): no admitido para análisis explícitos.

Paso 2: Análisis del comportamiento dinámico del modelo

Con el modelo matemático generado, se realiza un análisis modal para conocer el comportamiento dinámico del mismo. Este análisis nos brinda las diferentes

frecuencias de resonancia y modos de vibración del modelo. ANSYS presenta un módulo *Modal* en el cual es posible realizar este análisis.

Es importante conocer la frecuencia de resonancia la cual produzca este fenómeno en la dirección del impacto para luego poder definir el *timestep* en el análisis.

Paso 3: Aplicación de cargas y condiciones iniciales del problema

Luego de realizar el análisis del comportamiento dinámico del modelo, se procede a la aplicación de la velocidad inicial del cuerpo que impacta. Este cuerpo se debe ubicar lo más cerca posible al cuerpo a impactar para ahorrar tiempo de simulación. La velocidad inicial puede ser lineal o angular y puede ser introducida en ANSYS mediante componentes o vectores.

Así mismo, se definen las restricciones y/o cargas en el modelo tales como:

- Aceleración (*Acceleration*)
- Gravedad (*Standard Earth Gravity*)
- Presión (*Pressure*)
- Fuerza (*Force*)
- Apoyo fijo (*Fixed Support*)
- Desplazamiento (*Displacement*)
- Desplazamiento remoto (*Remote Displacement*)
- Velocidad (*Velocity*)
- Límite de impedancia (*Impedance Boundary*)
- Apoyo simple (*Simply Supported*)
- Rotación fija (*Fixed Rotation*)

En este paso, también se definen los parámetros de tiempo de simulación. En ambos análisis implícito y explícito es necesario introducir el tiempo de simulación (*End Time*) el cual debe ser bien pequeño debido a que los impactos se producen en fracciones de segundo. Uno debe ingresar un valor para un análisis previo y luego ir modificándolo para obtener resultados más precisos.

Otro parámetro a considerar es el *Time Step* el cual, para análisis implícitos, debe ser calculado mediante la ecuación (1.65) con el valor de frecuencia de resonancia calculado en el Paso 2. Los valores de paso de tiempo inicial (*Initial time step*) puede ser considerado a la mitad del *Time Step* definido previamente.

El valor mínimo del *Time Step* es el valor que terminará la simulación si es que el *Time Step* cae por debajo del valor definido. Se recomienda definir este valor como la décima parte del *Time Step* definido previamente.

El valor máximo del *Time Step* es el valor el cual se utilizará como máximo en la solución de la simulación, en caso contrario, se utilizará el *Time Step* mediante una estabilidad computarizada. Se recomienda usar el mismo valor que el *Initial time step*.

Para los análisis explícitos, solo es necesaria la definición del *End Time* y los demás controles de tiempo son controlados por el ANSYS. Para análisis iniciales se recomienda utilizar esta opción pero, si se desea análisis más precisos, se deben cambiar estos valores.

Paso 4: Solución y obtención de resultados

En este paso se define el tipo de módulo a utilizar en el ANSYS y, por ende, el método de integración implícito o explícito. Esta decisión se basa en la velocidad del cuerpo que impacta. En la Tabla 3.1, se presenta una tabla indicando los diferentes tipos de efectos producidos en los cuerpos según la velocidad de impacto.

Con la Tabla 3.1, es posible clasificar el impacto con la velocidad del cuerpo que impacta y definir si el análisis será implícito (para bajas velocidades) o explícito (altas velocidades).

En caso de analizar mediante el método implícito, ANSYS utiliza este método en su módulo *Transient Structural*. Para el caso del método explícito, el módulo *Explicit Dynamics* y *Autodyn* son los que utilizan mencionado método.

Para la obtención de resultados, ANSYS brinda los siguientes tipos de resultados:

- Deformación: total, direccional, máxima, mínima, equivalente plástica.
- Desplazamiento: total, direccional, máxima, mínima.
- Esfuerzo: equivalente según Von Mises, máximo, mínimo, normal, de corte.

Tabla 3.1: Clasificación y efectos de impacto según Goicolea

Solución	Velocidad de impacto (m/s)	Velocidad de deformación (/s)	Efecto
Implícito		$< 10^{-5}$	Estático - fluencia
↓	< 50	$10^{-5} - 10^{-1}$	Elástico
	50-1000	$10^{-1} - 10^1$	Elástico-plástico (deformación significante del material)
	1000-3000	$10^5 - 10^6$	Plástica ante todo (la presión igual o excede la resistencia del material)
	3000-12000	$10^6 - 10^8$	Hidrodinámica (presión excede muchas veces la resistencia del material)
Explícito	> 12000	$> 10^8$	Vaporización de los sólidos que chocan

Paso 5: Revisión de resultados obtenidos

En este paso final, se revisan los resultados obtenidos para verificar que la simulación ha sido realizada correctamente. El usuario debe tener nociones básicas de cuáles serían los resultados posibles para hacer una comparación con los que son obtenidos mediante el MEF.

Si el usuario encuentra que los resultados obtenidos no son los adecuados, se debe proceder al refinamiento del análisis como la mejora de la malla o una mejor definición de condiciones iniciales del problema. Con esto realizado, se realiza de nuevo la simulación hasta obtener los resultados más acorde a los supuestos, es decir, más precisos.

3.4 Aplicación del procedimiento a un ejemplo complejo

3.4.1 Presentación del ejemplo complejo

El procedimiento presentado se aplica a una estructura de protección contra la caída de objetos, en inglés *Falling Object Protective Structure* (FOPS), la cual que protege al operador de una máquina de la caída de objetos como rocas, herramientas, ramas de árboles, etc. En la Figura 3-2 se muestra un accidente por falla de una estructura FOPS en una retroexcavadora.



Figura 3-2: Accidente por falla de estructura tipo FOPS [Imagen o fotografía sin título de descripción del trabajo]. Recuperado de <http://frikiprl.blogspot.com/2008/11/accidentes-laborales-en-el-campo.html>. Consulta: 16 de Junio de 2013

Las principales demandas de estas estructuras son que tienen que ser resistentes tanto las fuerzas de impacto y a su vez absorber la energía que genera el impacto.

Todas las FOPS están obligadas a cumplir a cabalidad las normas de seguridad de acuerdo a sus usos tanto en minería, construcción o agricultura. Las normas de seguridad para FOPS se establecen en las normas ISO 3449 y SAE J231. En resumen, se determina que cuando un peso de la forma y la masa establecidas (la probeta de impacto) se deja caer libremente sobre una estructura FOPS desde una altura establecida, la deformación de la parte del techo de la estructura no deberá llegar al Volumen Límite de Deformación (VLD). El VLD, en inglés *Deflection Limiting Volume*, es un volumen que más o menos simula la condición de un operador de la máquina sentado en la cabina del operador y está normado según ISO 3164. La Figura 3-3 muestra un ejemplo de VLD.

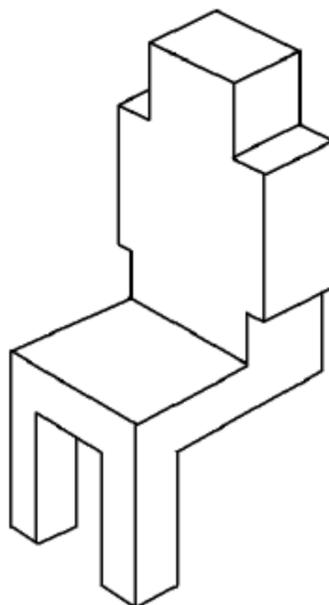


Figura 3-3: Volumen límite de deformación (VLD) (ISO, 2005)

La norma ISO 3449 presenta dos niveles de criterio de desempeño para protección contra impacto, basados en el uso final de la máquina:

- a) Nivel I: protección contra el impacto de un objeto de ensayo de forma esférica que caiga desde una altura suficiente como para desarrollar una energía de 1 365 J.
- b) Nivel II: protección contra el impacto de un objeto de ensayo de forma cilíndrica que caiga desde una altura suficiente como para desarrollar una energía de 11 600 J.

Para esta simulación, se usará el criterio del Nivel II con lo cual la altura de caída del objeto de ensayo es definida en función de su masa, conforme a lo mostrado en la Figura 3-4.

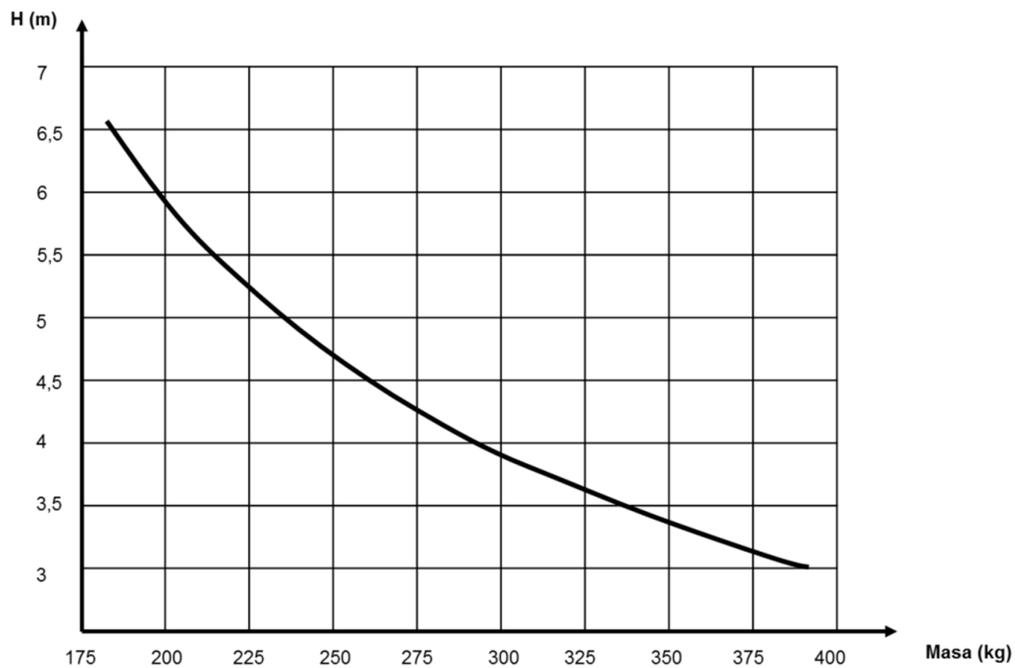


Figura 3-4: Curva de requisito para Nivel II – ISO 3449 (ISO, 2005)

La simulación consiste en la caída de un objeto (probeta) de Nivel II cuyas dimensiones están de acuerdo a la norma ISO 3449-2005. En la Tabla 3.2 se presenta las características de la probeta utilizada.

Tabla 3.2: Datos de la probeta ISO 3449

Datos de la probeta	Valor	Unidades
Masa de la probeta	228.34	kg
Velocidad de impacto	10	m/s
Energía cinética	11630	J
Altura de caída de la probeta (según Figura 3-4)	5.2	m

En Figura 3-5 se presenta la geometría de la probeta ISO 3449 la cual está normalizada por los siguientes parámetros:

- $d_1 = 204 \text{ mm}$
- $d_2 = 255 \text{ a } 260 \text{ mm}$
- $d_3 = 203 \text{ a } 204 \text{ mm}$
- $l_1 = 102 \text{ mm}$
- $l_2 = 109 \text{ mm}$
- $l_3 = 584 \text{ mm}$

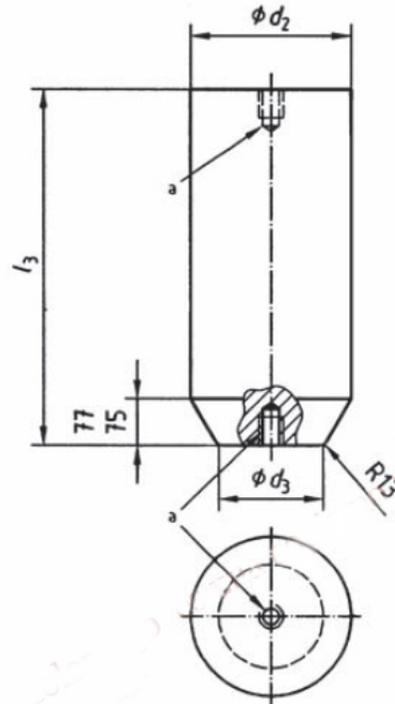


Figura 3-5: Geometría de probeta ISO 3449 (ISO, 2005)

La estructura presentada en la Figura 3-6 está conformada por las siguientes partes: una plataforma de base, dos brazos que están apoyados en la plataforma, dos extensiones de brazos, el techo propio formado por la unión de vigas y una plancha y la probeta del ensayo.

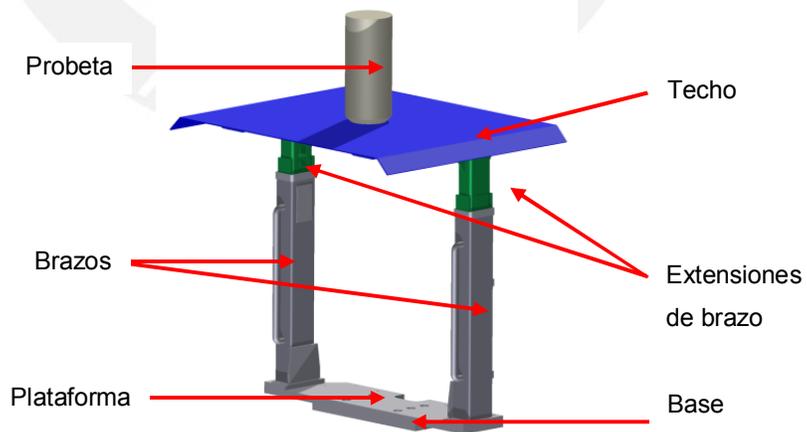


Figura 3-6: Estructura de cabina

3.4.2 Aplicación del procedimiento

Con el procedimiento detallado anteriormente, a continuación, se aplica paso a paso el mencionado procedimiento a una estructura FOPS.

Paso 1: Construcción del modelo matemático

1.1 Definición del tipo de elemento

El tipo de elemento usado para la estructura es elemento sólido ya que la estructura será sometida a diversas cargas y no está conformada sólo por vigas.

1.2 Definición del material de los cuerpos

El material de todos los cuerpos de la estructura es acero estructural. En ANSYS, se asignó el material *Structural Steel* de la librería *General Materials*.

Dado que el único cuerpo que va a sufrir deformación plástica es el techo, sólo a este cuerpo se le ha designado un material con características no lineales. El material designado fue *Structural Steel NL* de la librería de *General non-linear Materials*. En la Tabla 3.3 se presenta las propiedades físicas y mecánicas de los materiales utilizados para la simulación.

Tabla 3.3: Propiedades físicas y mecánicas de materiales usados en la simulación

Propiedad	Structural Steel	Structural Steel NL	Unidades
Densidad	7850	7750	kg/m ³
Módulo de Poisson	0.3	0.31	
Módulo de Young	2E11	1.93E11	Pa
Módulo de cizalladura	7.69E10	7.36E10	Pa
Límite de fluencia	250	210	MPa

1.3 Definición de la geometría del modelo

La geometría del modelo 3D fue realizada en el software Autodesk Inventor 2011. Para reducir considerablemente el tiempo de solución de la simulación, se aprovechó la simetría de la estructura y se realizó un modelo simétrico. En la Figura 3-7 se presenta el modelo simétrico desarrollado así como el sistema de coordenadas cilíndricas definido para la creación del otro cuerpo simétrico en ANSYS.

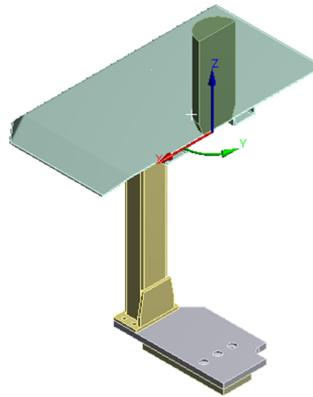


Figura 3-7: Modelo simétrico de la estructura

Para lograr un cuerpo simétrico en ANSYS, se utilizó el tipo *Polar* que permite trabajar con el sistema de coordenadas cilíndricas definido anteriormente y método *Half* que indica que el cuerpo simétrico a crear es la mitad del cuerpo real. Luego, se ingresa el ángulo de barrido para la creación del cuerpo cuyo valor es de 180°. Finalmente, se define la región de simetría mediante la selección de las caras simétricas del modelo. Esta operación se presenta en la Figura 3-8 en la cual se muestra las caras de simetría definidas.

Región de Simetría (4 caras)
18/06/2012 11:56

■ Región de Simetría (4 caras)

ANSYS
14.0

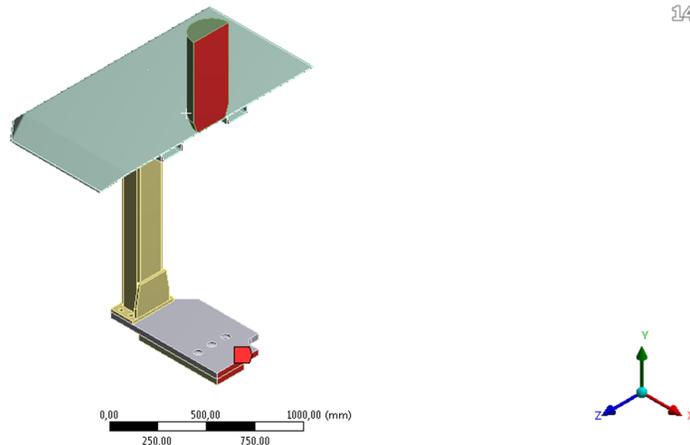


Figura 3-8: Región de simetría

Al realizar el modelo, el ANSYS considera cada elemento del ensamble como un cuerpo. Esto en la realidad no es correcto ya que la estructura posee 4 cuerpos mencionados anteriormente que van unidos por medio de pernos. Para corregir esto, ANSYS en su aplicación nativa *Design Modeler*, permite agrupar varios

elementos del ensamble y definirlos como solo cuerpo. Mediante esta operación, se logró obtener los 4 cuerpos definidos independientes más la probeta.

Una definición adicional es que la plancha ha sido mecanizada por el doblado de la misma. Esto significa que las caras formadas por el mencionado proceso son, en realidad, una sola y no la unión de caras. Entonces, el impacto de la probeta sobre el techo se dará en esta cara y no sólo en la cara superior del techo. Para realizar esta definición en ANSYS, se utiliza la opción *Virtual Cell* en *Virtual Topology*. Un *Virtual Cell* define una cara individual a partir de la selección de varias caras sea esto realizado manual o automáticamente. En la Figura 3-9 se presenta la definición de este parámetro en ANSYS para el techo. En la mencionada figura se observa la nueva cara formada de color ocre en la cual es la unión de las caras que forman la parte superior del techo.

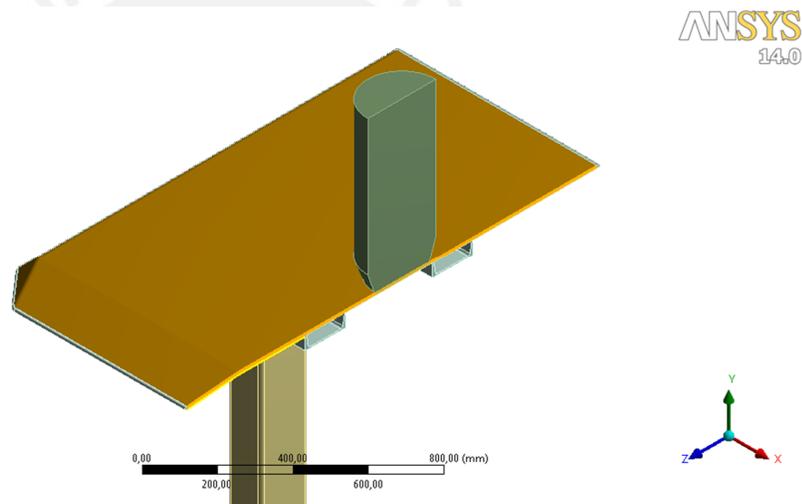


Figura 3-9: Definición de Virtual Cell para el techo

1.4 Generación de la malla

Para la generación de la malla es necesario definir, primeramente, el tipo de método de mallado. En este ejemplo se define el método *Automatic* el cual permite combinar conformación tetraédrica con el método de barrido. En ANSYS no es necesario definir este método ya que es una condición por defecto (*Default*).

Con la definición previa, es posible seguir los pasos del proceso del mallado según ANSYS.

i. Especificar las configuraciones globales de la malla

La configuración global de la malla es dada por el problema físico a analizar. En este ejemplo, el problema físico es de tipo mecánico y, por ello, la opción definida es *Mechanical*.

También se define una relevancia (*Relevance*) de 100 para obtener un mallado de alta precisión en todo el modelo geométrico. Por otro lado se define un nivel basto (*Coarse*) para el *Relevance Center* que configura el indicador del control de relevancia deslizante. Con las definiciones anteriores, se busca tener un mallado fino con elementos no tan pequeños que permite tener resultados precisos y un menor tiempo de simulación.

Como última configuración global, se define un tamaño de elemento de 50 mm para toda la estructura.

ii. Insertar las configuraciones locales de la malla

En este ejemplo se busca conseguir la deformación precisa por el efecto de impacto entre la probeta y el techo. Es por ello, que se determina un *Contact sizing* para el contacto de tipo *Frictionless* entre la probeta y el techo con la definición de un tamaño de elemento de 2 mm.

iii. Previsualizar y generar la malla

Con las configuraciones globales y locales definidas se procede a generar la malla. En la Figura 3-10 se muestra la malla generada por ANSYS.

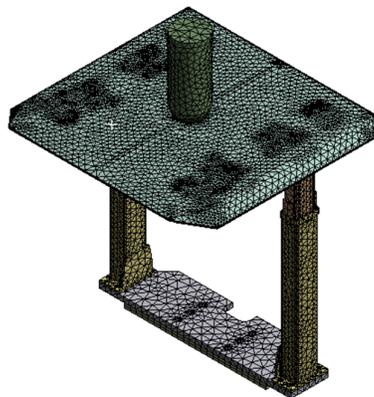


Figura 3-10: Malla de la estructura

En la Figura 3-10 se observa que existe una mayor densidad de malla en la zona de contacto de la probeta y el techo tal cual se definió en la configuración local. En la Figura 3-11 se presenta el detalle del *Contact sizing* mencionado.

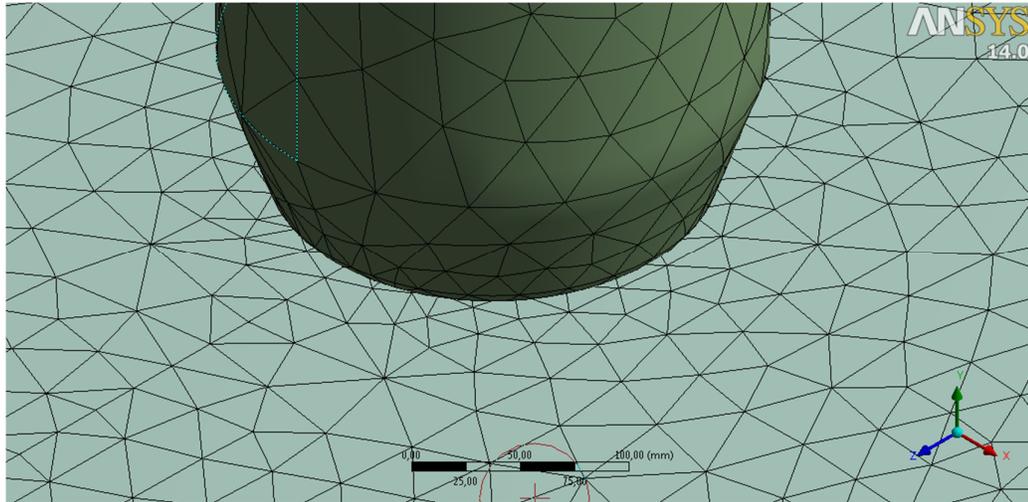


Figura 3-11: Detalle de Contact sizing entre probeta y techo

iv. Verificar la calidad de la malla

En las dos figuras anteriores presentadas se observa que el mallado es uniforme y presenta mayores densidades en las zonas de contacto que permiten obtener mayor precisión en los resultados a obtener. Con lo anterior, se concluye que mallado obtenido tiene buena calidad y será usado para el ejemplo. En la Figura 3-12 se observa la cantidad de elementos generados en la malla según su tamaño y tipo.

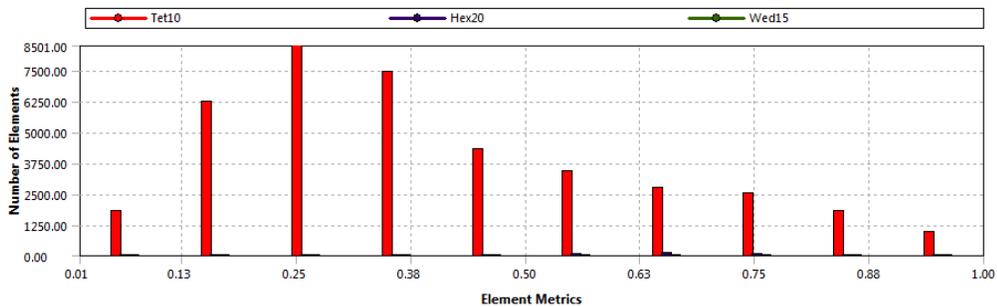


Figura 3-12: Estadística de elementos generados en la malla

1.5 Definición de interacción entre cuerpos y contactos

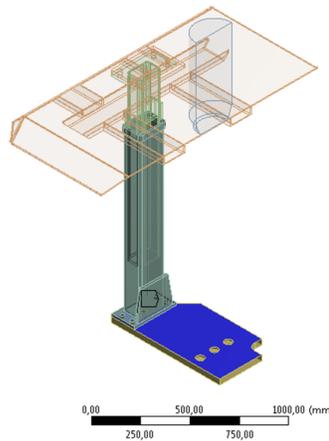
Los cuerpos de la estructura, a excepción de la probeta, están ligados entre sí y forman un solo cuerpo debido a los pernos colocados para la unión de los mismos. Con lo anterior, se definen 3 contactos de tipo *Bonded* en la estructura:

- Contacto tipo *Bonded*: Base a Plataforma
- Contacto tipo *Bonded*: Plataforma a Brazo
- Contacto tipo *Bonded*: Brazo a Extensión de Brazo
- Contacto tipo *Bonded*: Extensión de Brazo a Techo

En las Figuras 3-13, 3-14, 3-15 y 3-16 se presentan éstos contactos así como las caras seleccionadas para su definición.

Bonded - Brazo To Plataforma
07/06/2012 16:26

■ Bonded - Brazo To Plataforma



ANSYS
14.0

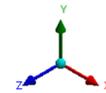
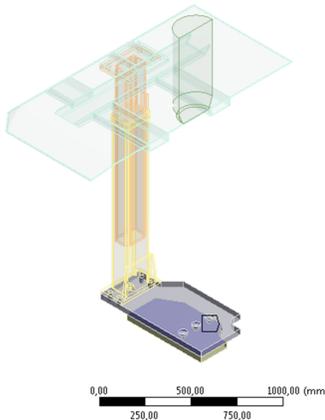


Figura 3-13: Contacto tipo Bonded: Base a Plataforma

Bonded - Plataforma To Base
18/06/2012 11:57

■ Bonded - Plataforma To Base



ANSYS
14.0

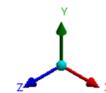


Figura 3-14: Contacto tipo Bonded: Plataforma a Brazo

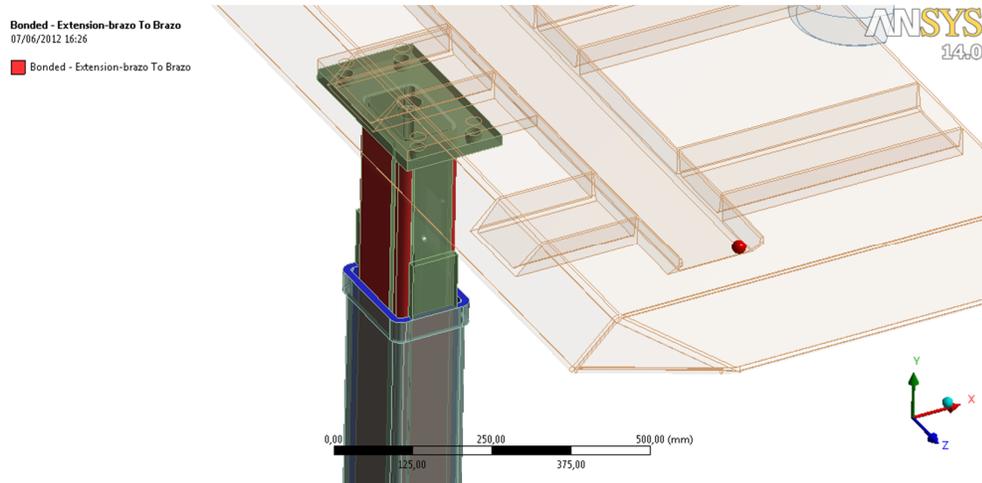


Figura 3-15: Contacto tipo Bonded: Brazo a Extensión de Brazo

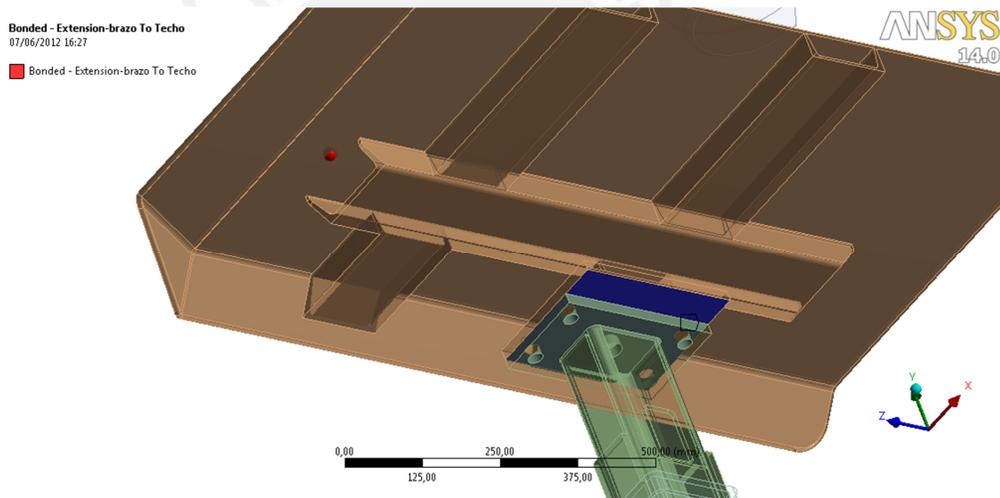


Figura 3-16: Contacto tipo Bonded: Extensión de Brazo a Techo

En el caso de la probeta, el contacto entre la misma y el techo es de tipo *Frictional* (con fricción) debido a que la probeta penetra al techo. El coeficiente de fricción es del tipo dinámico y su valor entre cuerpos de acero está entre 0,2 y 0,3. Para este ejemplo se utiliza un coeficiente dinámico de 0,2. En la Figura 3-17 se presenta este contacto así como las caras seleccionadas para su definición.

Frictional - Probeta To Techo
 17/06/2012 10:14
 Frictional - Probeta To Techo

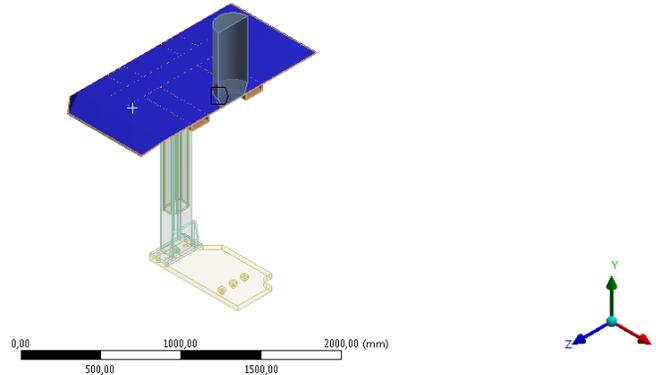


Figura 3-17: Contacto tipo Frictional: Probeta a Techo

Paso 2: Análisis del comportamiento dinámico del modelo

Utilizando el módulo *Modal* de ANSYS, se obtuvo las 5 primeras frecuencias naturales de la estructura con el objetivo de conocer el comportamiento dinámico de la misma. En la Tabla 3.4 se presentan las 5 frecuencias de resonancia obtenidas mediante el módulo *Modal* en ANSYS. En la Figura 3-18 se muestra los 5 modos de vibración obtenidos.

Tabla 3.4: Análisis modal de la estructura

Modo	Frecuencia (Hz)
1	20.75
2	37.95
3	45.61
4	75.05
5	104.36

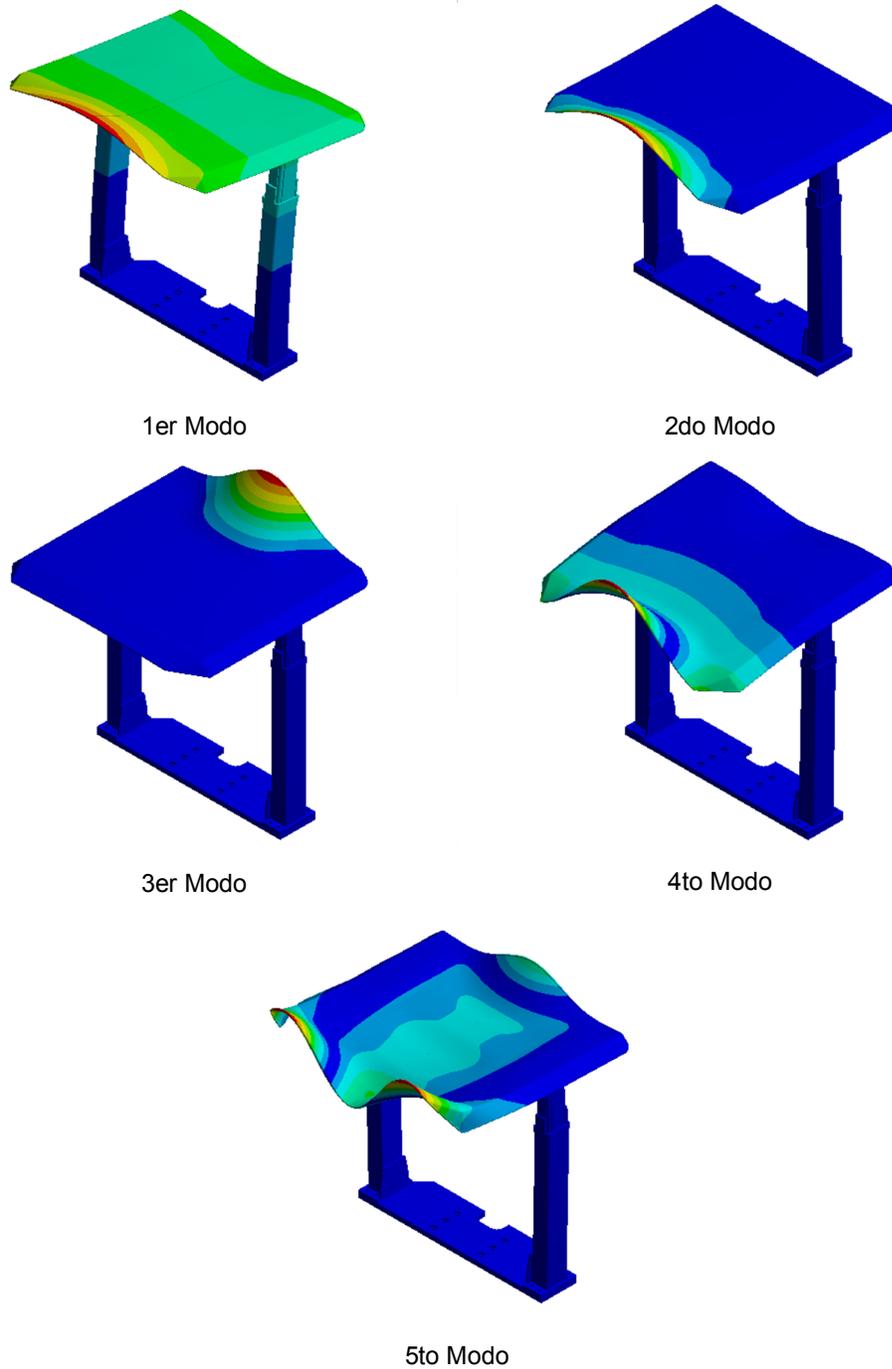


Figura 3-18: Modos de vibración para la estructura

De acorde a la Figura 3-18, se observa que existe una mayor deformación en el 5to modo de vibración de la estructura cuya frecuencia es de 104.36 Hz. Este valor será usado para calcular el *Time Step* requerido para la simulación.

Paso 3: Aplicación de cargas y condiciones iniciales del problema

En este paso, se aplica la velocidad de la probeta que es de 10 m/s en la dirección $-Y$ mediante coordenadas. Así mismo, se considera la gravedad en la misma dirección del impacto. Finalmente, se define un apoyo fijo (*Fixed Support*) en la cara inferior de la plataforma. En las Figuras 3-19, 3-20 y 3-21 se presentan estas condiciones del problema en el modelo.

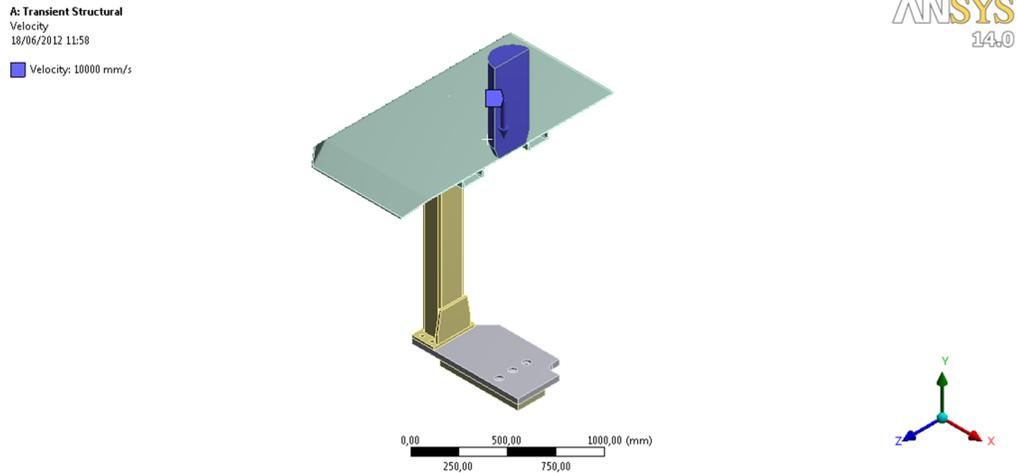


Figura 3-19: Definición de velocidad 10 m/s

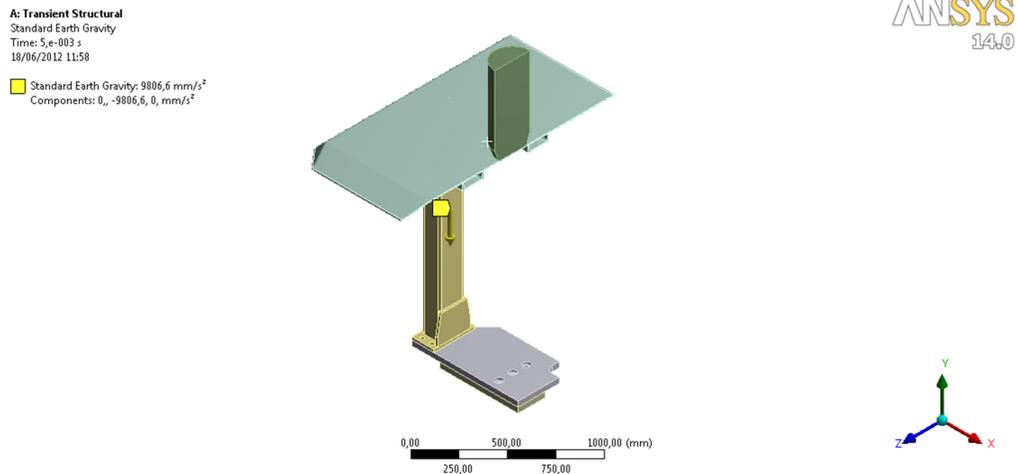


Figura 3-20: Definición de gravedad en el eje $-Y$

A: Transient Structural
Fixed Support
Time: 5.e-003 s
18/06/2012 11:59
■ Fixed Support

ANSYS
14.0

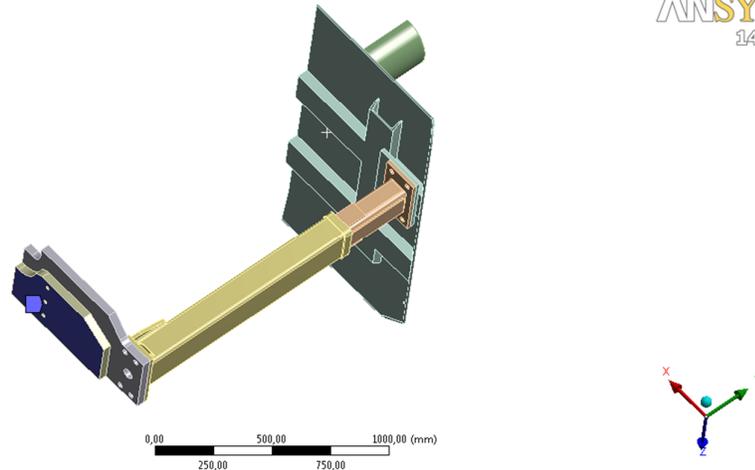


Figura 3-21: Definición de apoyo fijo en Plataforma

Los parámetros de simulación son definidos a continuación:

- El valor de *End Time* será de $5E-3$ s debido a que el impacto se produce en un periodo de tiempo muy pequeño. Este valor puede ser cambiado de acuerdo a los resultados obtenidos.
- El *Time Step* es definido mediante la ecuación (1.65) presentada en el Capítulo 1:

$$\Delta t = \frac{1}{20 * f_n} = \frac{1}{20 * 104.36} \approx 4.5 E - 4 \text{ s} \quad (3.1)$$

Para obtener el *Initial time step*, el valor obtenido en la expresión (3.1) es dividido entre 2. Con lo anterior, el *Initial time step* será de $2.25E-4$ s.

- El valor de *Minimum Time Step* se toma usando la recomendación de dividir el *Initial time step* entre 10. Con esto, el valor del *Minimum time step* será de $2.25E-5$ s.
- El *Maximum Time Step* es dado tomando la recomendación que este sea igual al *Initial time step* entre 10. Con esto, el valor del *Maximum time step* será de $2.25E-4$ s.

En la Tabla 3.5 se presenta un resumen de los parámetros de tiempo definidos para la simulación.

Tabla 3.5: Parámetros de tiempo en ANSYS para estructura FOPS

Parámetro	Valor	Unidad
Time Step	4.5E-04	s
End Time	5E-3	s
Initial Time Step	2.25E-04	s
Minimum Time Step	2.25E-05	s
Maximum Time Step	2.25E-04	s

Paso 4: Solución y obtención de resultados

El módulo a utilizar en ANSYS se define considerando la velocidad de impacto. En este ejemplo, esta velocidad es de 10 m/s con lo cual, de acuerdo a la Tabla 3.1, el método a utilizar es el implícito. Por ende, el módulo a usar será *Transient Structural*.

También se define el tipo de resultado a obtener. En este caso, se busca la deformación en el eje Y del modelo con lo cual se define la opción *Directional Deformation* en el eje Y. Para conocer las partes de la estructura a reforzar por los esfuerzos producidos por el impacto, se define la opción *Equivalent Stress* el cual nos permite conocer el esfuerzo equivalente según Von Mises en toda la estructura.

Paso 5: Revisión de resultados obtenidos

La simulación del ejemplo complejo tuvo una duración de una hora aproximadamente. Los resultados obtenidos fueron los esperados ya que se produce una deformación plástica en el techo en la dirección del eje Y, la probeta no sufre daño alguno y la estructura no presenta rupturas.

Por un lado, la deformación en el eje Y es de 66 mm debido al impacto de la probeta. En la Figura 3-22 se presenta el resultado de la simulación del desplazamiento con un doble aumento de las deformaciones para observar los efectos producidos. En la misma figura se observa que el techo presenta una deformación plástica sin producirse ruptura de la plancha. En la Figura 3-23 se observa un detalle de la ubicación de la mayor zona deformada por el impacto de la probeta.

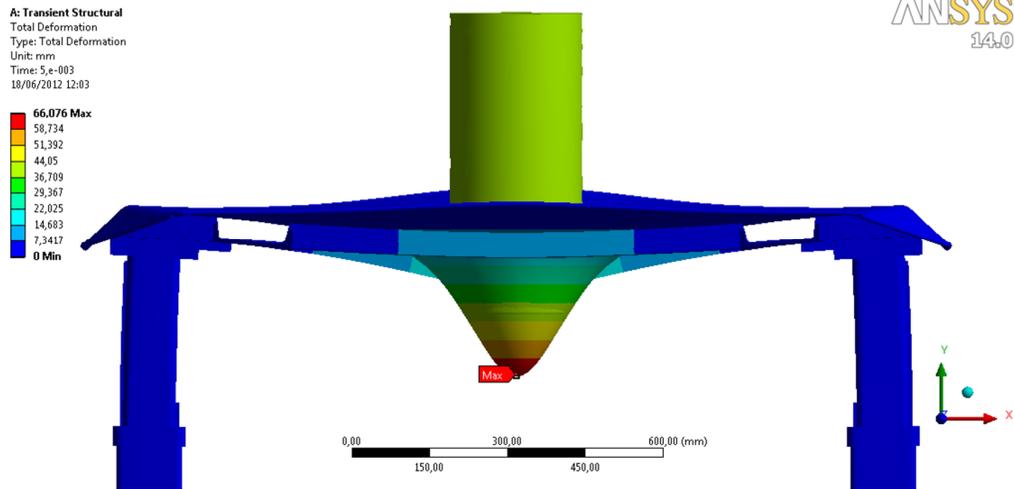


Figura 3-22: Deformación en el eje Y de la estructura

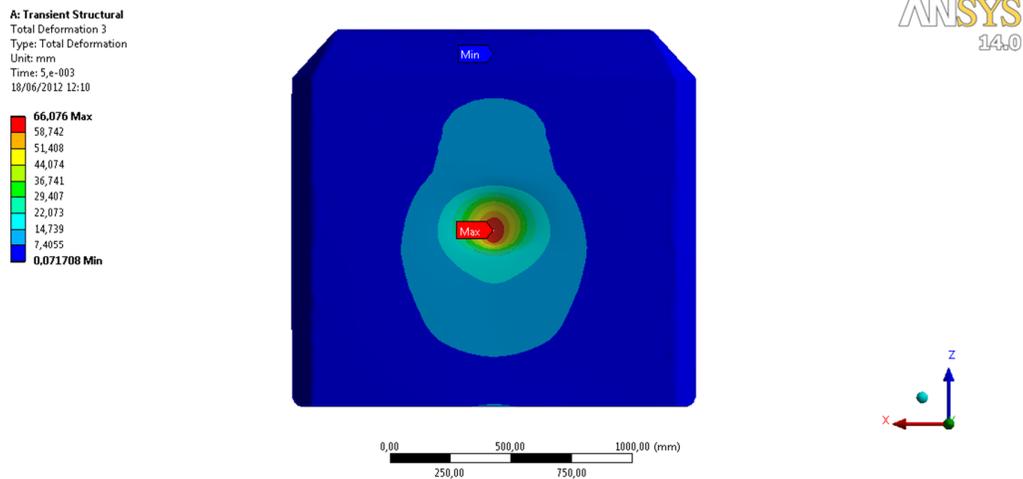


Figura 3-23: Detalle de la ubicación de la zona deformada

Por el lado del esfuerzo equivalente según Von Mises, los mayores esfuerzos producidos por el impacto se encuentran en el techo y también se observa la propagación de ondas de esfuerzo por toda la estructura. Esta propagación de ondas de esfuerzos produce mayores esfuerzos en las extensiones de los brazos de la estructura provocando la flexión hacia adentro de la estructura. Esto se puede observar en la Figura 3-24 en la cual se presenta los esfuerzos equivalente en la toda la estructura en una vista frontal de la misma.

A: Transient Structural
 Equivalent Stress
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress
 Unit: MPa
 Time: 5.e-003
 18/06/2012 12:08

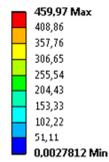

 ANSYS
 14.0

Figura 3-24: Esfuerzos equivalente en la estructura

El mayor esfuerzo encontrado es de 459,97 MPa el cual es mayor que el límite de fluencia del acero estructural. Los esfuerzos menores se ubican lejos de la zona de impacto, específicamente, en los brazos, plataforma y base de la estructura.

Con los resultados anteriores, se observa que la simulación nos brinda resultados acordes a lo esperado.

CONCLUSIONES

El procedimiento para el análisis de impacto fue desarrollado tomando en cuenta todo lo analizado en los capítulos de la tesis. El procedimiento consiste en la aplicación del MEF con una integración implícita o explícita en el tiempo, según la magnitud de la velocidad de impacto, para estimar los valores de esfuerzos y desplazamientos debido a este fenómeno. El ejemplo de la estructura FOPS presentado en la tesis demuestra que el procedimiento desarrollado es factible para analizar este fenómeno.

Comparando los resultados de esfuerzos máximos en el impacto longitudinal se observa que el MEF, usando integración implícita, brinda valores menores en el orden del 10% en comparación con los métodos analíticos, mientras que en el impacto transversal la diferencia aumenta hasta el orden del 100%. Una tendencia muy similar existe al comparar el MEF usando integración explícita y los métodos analíticos. En general se aprecia que los métodos analíticos brindan valores que crecen agresivamente según la velocidad de impacto en comparación a otros métodos mostrados en la tesis. Se presume que el crecimiento agresivo de valores se debe a que los métodos analíticos no consideran efectos inerciales, de propagación de ondas y no lineales.

Analizando los resultados obtenidos mediante la integración implícita y explícita, se observa una diferencia de 32% aproximadamente entre ellos. Esta diferencia radica en el tipo de solución numérica que adopta cada método. En el implícito, se requiere necesariamente de la solución de un sistema global de ecuaciones, es decir, se resuelve un sistema de ecuaciones para cada incremento de tiempo. La

principal ventaja de este método es su convergencia con cualquier valor de *Time Step* elegido para el cálculo y su principal desventaja es el mayor tiempo de simulación en comparación al método explícito. Por el contrario, este método explícito plantea un algoritmo de cálculo elemento por elemento, no contemplando la solución de un sistema global de ecuaciones. Su principal ventaja es el menor tiempo de simulación en comparación al implícito y su desventaja es su dependencia de convergencia según el *Time Step* elegido para el cálculo. Esta afirmación queda corroborada por los ejemplos desarrollados y coincide con lo planteado por la mayoría de autores consultados.

Se desarrolló un ejemplo de impacto a alta velocidad, obteniéndose resultados muy similares a los mostrados en una prueba experimental, lo que demuestra la validez del MEF utilizando la formulación explícita. En este ejemplo se pudo verificar el efecto de *petaling* y *plugging* encontrado en la bibliografía consultada.

Lo expresado en los párrafos anteriores permite afirmar que la velocidad de impacto es una variable fundamental en estudios de impacto, ésta determina el método de integración a utilizar para la simulación del problema. Así, el método implícito es más adecuado para impactos a velocidades bajas, mientras que el explícito es recomendable para altas velocidades.

Dos aspectos muy importantes en la simulación de problemas de impacto son el *Time Step* y el método de integración a emplear, para ello se requiere conocer las propiedades dinámicas del sistema a simular, las cuales son las frecuencias naturales y los modos de vibración. En este sentido se recomienda realizar el análisis modal para determinar los parámetros de simulación mencionados. La modificación de estos parámetros produce cambios significativos en los resultados, lo cual se ha podido constatar en los ejemplos desarrollados.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ANSYS Inc.
2010 *Introduction to ANSYS AUTODYN 12.1* [diapositivas]. Material de enseñanza. Canonsburg: Ansys Inc. Consulta: 15 de febrero de 2012
< <https://www1.ansys.com/customer/default.asp>>
- ANSYS Inc.
2010 *Introduction to ANSYS Explicit STR 14.0* [diapositivas]. Material de enseñanza. Canonsburg: Ansys Inc. Consulta: 15 de febrero de 2012
< <https://www1.ansys.com/customer/default.asp>>
- ANSYS Inc.
2010 *Introduction to ANSYS Meshing 14.0* [diapositivas]. Material de enseñanza. Canonsburg: Ansys Inc. Consulta: 15 de febrero de 2012
< <https://www1.ansys.com/customer/default.asp>>
- ANSYS Inc.
2010 *Linear and Nonlinear Dynamics 13.0* [diapositivas]. Material de enseñanza. Canonsburg: Ansys Inc. Consulta: 15 de febrero de 2012
< <https://www1.ansys.com/customer/default.asp>>
- APARICIO, César
2001 *Estudo de impacto usando elementos finitos e análise não linear*. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica. São Paulo: Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos.
- BATHE, Klaus-Jürgen
1995 *Finite element procedures*. 1.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.

- BECERRIL, Daniel
2010 *Estudio del impacto de un vehículo sobre señales de tráfico mediante LS-Dyna*. Tesis de Grado. Madrid: Universidad Carlos III, Departamento de Ingeniería Mecánica.
- BUDYNAS, Richard y J. Keith NISBETT
2011 *Shigley's Mechanical Engineering Design*. 9.ed. New York: Mc-Graw Hill.
- CHENG, Loi
2011 *Finite element simulation of elevator car frame buffer crash using ANSYS, Altair HyperMesh and RADIOSS*. Tesis de Maestría. Hartford: Rensselaer Polytechnic Institute, Graduate Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute.
- CORTEZ, Oswaldo y María SOTOMAYOR
2007 *Aplicación del método de elementos finitos y programas computacionales en el diseño estructural de un galpón para el taller de la empresa Procopet S.A*. Tesis de Grado. Quito: Escuela Politécnica Nacional, Escuela de Ingeniería.
- FAIK, Salah y Holly WITTEMAN
2000 "Modeling of Impact Dynamics: A Literature Survey". *International ADAMS User Conference*. Toronto, 2000, Vol. 1, No. 1, pp. 1-11.
- GRACÍA DE LA FIGAL, Javier y Sergio MARRERO
2011 "Análisis dinámico de carcasa de caja de velocidad". *Ingeniería Mecánica*. La Habana, 2011, Vol. 14, No. 2, pp. 151-159.
- GRYTEN, Frode
2008 *Low-velocity penetration of aluminium plates*. Tesis de Doctorado. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Engineering Science and Technology – Department of Structural Engineering.

- GOICOLEA, José
2000 *“Estructuras sometidas a impacto”*. En CAR, Eduardo; LÓPEZ, Francisco; OLLER, Sergio. *Estructuras sometidas a acciones dinámicas*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, pp. 535-567.
- GOLDSMITH, Werner
1960 *Impact: The theory and physical behaviour of colliding solids*. 1.ed. London: Edward Arnold.
- HUEBNER, Kenneth y otros
2001 *The finite element method for engineers*. 4.ed. New York: John Wiley.
- HUSSAINOVAA, Irina; Klaus-Peter SCHADEB y Sergei TISLERC
2006 *“Dynamic coefficients in impact mechanics”*. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*. Tallin, 2006, Vol. 12, No. 1, pp. 26-39.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION
2005 *ISO 3449-2005(E): Earth-moving machinery–Falling object protective structures–Laboratory tests and performance requirements*.
- JOHNSON, William
1972 *Impact strength of materials*. 1.ed. Londres: Edward Arnold.
- KANEDA, Shuuichi y Tomoki TAMAGAWA
2003 *“Introduction of Simulation of Falling Object Protective Structures”*. *Komatsu Technical Report 2003*. Tokio, 2003, Vol. 49, No. 151, pp.1-6.

- LUNDIN, Steven y Richard MUELLER
2005 *Advanced Aircraft Materials, Engine Debris Penetration Testing*. Reporte final. Washington: U.S. Department of Transportation, Office of Aviation Research.
- MORENO, Raudel, Arturo MARTÍNEZ y Jorge SAMÁ
2009 *“Análisis por elementos finitos de cargas de impacto en elementos estructurales de máquinas agrícolas”*. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. La Habana, 2009, Vol. 18, No. 3, pp. 63-69.
- ORTEGA, Y
2006 *“Prueba de impacto: Ensayo Charpy”*. *Revista Mexicana de Física*. Distrito Federal, 2006, Vol. 52, No. 1, pp. 51-57.
- PAI, Krishna
2006 *Modeling of rollover protective structure and falling object protective structure tests on a composite cab for skid steer loaders*. Tesis de Maestría. Kansas: Wichita State University, Department of Mechanical Engineering.
- PÉREZ, Alejandro
2008 *Metodología para simulación de fenómenos de perforación, debidos a fallas del tipo no contenida de turbina de avión*. Tesis de Maestría. Santiago de Querétaro: Instituto Politécnico Nacional, Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología/Posgrado en tecnología avanzada.
- PISARENKO, G. A. YÁKOVLEV y V. MATVÉEV
1979 *Manual de resistencia de materiales*. 1.ed. Moscú: Editorial Mir Moscú
- PIZHONG QIAO, F, Mijia YANG y Florin BOBARU
2006 *“Impact Mechanics and High-Energy Absorbing Materials: Review”*. *Journal of Aerospace Engineering*. Reston, 2008, Vol. 21, No. 4, pp. 235-248.

- SINGH, Manjit y otros
2008 *“Dynamic Yield Strength of Mild Steel under Impact Loading”*.
Defence Science Journal. Chandigarh, 2008, Vol. 58, No. 2,
pp. 275-284.
- SPOTTS, Merhyle y Terry SHOUP
1998 *Design of machine elements*. 7.ed. New Jersey: Prentice Hall.
- STRONGE, William
2000 *Impact Mechanics*. 1.ed. Cambridge: Cambridge University
Press.
- TÁCITO, Alexandre
2003 *Metodologia para a análise de impacto em sistemas elásticos
usando-se o método dos elementos finitos e a integração
explícita no tempo*. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica.
São Paulo: Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia
de São Carlos.
- TEIXEIRA, Giovanni
2002 *Análise de impacto em vigas usando-se o método de
integração explícita no tempo*. Tesis de Maestría en Ingeniería
Mecánica. São Paulo: Universidade de São Paulo, Escola de
Engenharia de São Carlos.
- TIMOSHENKO, Stephen y James GOODIER
2006 *Theory of elasticity*. 3.ed. New York: McGraw- Gill.