

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRIA EN INGENIERIA MECANICA



ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES TORSIONALES BAJO REGIMEN TRANSITORIO EN UN MECANISMO DE TRANSMISION POR ENGRANAJES

Tesis para optar el Grado de Magíster en Ingeniería Mecánica

Presentada por:
Ing. Carlo Mario Chiroque Suárez

Asesor:
Dipl. Ing. Jorge Alencastre Miranda

LIMA, 2010

RESUMEN

El presente trabajo de tesis tiene por objetivo desarrollar un modelo conceptual de un sistema de transmisión por engranajes (sistema ramificado) para determinar sus frecuencias naturales y modos de vibración torsional, así como, analizar la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva sinusoidal que simula la etapa de arranque (régimen transitorio).

En el primer capítulo se establece el fundamento teórico de las vibraciones torsionales y se describe la fenomenología que se produce durante la etapa de arranque.

En el segundo capítulo se desarrolla el modelo conceptual del mecanismo de transmisión, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento empleando las ecuaciones de *Lagrange* y se seleccionan los parámetros del mecanismo de modo que las frecuencias torsionales se encuentren en una gama que permitan realizar el análisis modal y el análisis bajo régimen transitorio.

En el tercer capítulo se evalúa inicialmente el sistema torsional de un grado de libertad; se analiza el comportamiento de la frecuencia natural, la razón de duración del pulso y la respuesta del sistema cuando variamos los parámetros del sistema torsional.

Para el sistema de tres grados de libertad se definieron seis casos de análisis, cada caso considera la variación de uno de los parámetros del sistema y se procede a analizar el comportamiento de las frecuencias naturales, modos de vibración torsional y respuesta del sistema bajo régimen transitorio. Para obtener las curvas características se elaboraron algoritmos de cálculo en MatLab.

Finalmente, se procedió a analizar el sistema equivalente de tres grados de libertad por el Método de los Elementos Finitos para obtener las frecuencias naturales de vibración torsional principalmente. La simulación se realizó en la plataforma CAD-CAE de Solidworks.

DEDICATORIA

A mis padres, Flor de María y Santos Odón, artífices de este proyecto, por su amor, comprensión, consejos y ayuda en todo momento. A mi hermana, Tatiana, por estar conmigo siempre, y por su apoyo constante.

A mi esposa María Ofelia por su amor, paciencia, comprensión, apoyo, por estar siempre a mi lado, y acompañarme en este difícil camino. A mis princesas Ana Paula y Fabiana, por ser la fuente de mi inspiración y motivación para superarme cada día más.

AGRADECIMIENTOS

Doy infinitamente gracias a Dios y la Virgen María Auxiliadora, por haberme dado la fuerza y guiado en todo momento para culminar con éxito los estudios de maestría.

Dipl. Ing. Jorge Alencastre Miranda, por su amistad, motivación constante y valiosa asesoría durante los estudios de maestría y el desarrollo de la tesis.

Dr. Jorge Moreno y Mg. Federico Coz que con sus sugerencias contribuyeron en la mejora del presente trabajo.

Ing. César Dongo, Gerente de Producción EPENSA, por su invaluable amistad y su apoyo incondicional para llevar adelante los estudios de maestría durante mi permanencia en la empresa.

A los docentes de la Maestría en Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú, que con sus valiosas enseñanzas y aportes me ayudaron a crecer como persona y como profesional.

A mis compañeros; Luis Mago, César Valero, Raúl Reyes, Enrique Apaza, Christian Oliva, por todos los momentos vividos durante la maestría.

PLAN DE TESIS

TITULO : ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES TORSIONALES BAJO
REGIMEN TRANSITORIO EN UN MECANISMO DE
TRANSMISION POR ENGRANAJES

TESISTA : Ing. Carlo Mario Chiroque Suárez

ASESOR : Dipl. Ing. Jorge Alencastre Miranda

FECHA : Lima, 06 de Julio del 2009

Planteamiento y Justificación del tema

Las vibraciones torsionales en ejes y árboles constituyen un amplio campo de estudio e investigación que debe ser tomado en cuenta por nuestra industria, ya que muchas veces, como consecuencia de este fenómeno, surgen problemas en las máquinas rotativas. En efecto, las vibraciones torsionales son probablemente una de las causas más comunes de falla y rotura de los dientes en engranajes y también son identificadas como causa de falla por fatiga en ejes rotatorios.

La medición de las vibraciones torsionales no suele ser una tarea que comúnmente se lleve a cabo en las máquinas rotativas o que se incluya en los programas de mantenimiento preventivo, debido a la dificultad de poder realizarla y al poco conocimiento del tema.

Las predicciones tempranas de las características torsionales de un sistema reducen eficientemente los costos si los resultados de los análisis se utilizan adecuadamente. Esto puede ser efectuado estudiando los resultados e incorporando los cambios durante la etapa de diseño, algo que, si se realiza durante la prueba final del producto, demanda mayor tiempo y elevados costos.

Una manera eficiente para tener una comprensión básica de las frecuencias naturales y modos de vibración torsional, así como de los fenómenos que se producen cuando los ejes son excitados por medio de fuerzas impulsivas es desarrollar un modelo conceptual del sistema dinámico.

Es por ello que el presente trabajo está orientado a desarrollar el modelo conceptual de un sistema de transmisión por engranajes para determinar y analizar sus frecuencias naturales, modos de vibración torsional, y la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva sinusoidal que simula la etapa de arranque (start-up).

Objetivos

Objetivo General:

Analizar las vibraciones torsionales bajo régimen transitorio (etapa de arranque) en un mecanismo de transmisión por engranajes.

Objetivos específicos:

- Determinar las frecuencias naturales y modos de vibración torsional del sistema.
- Determinar la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva sinusoidal que simula la etapa de arranque (start-up).

Explicación del método de trabajo

Para el desarrollo del presente trabajo inicialmente se estudiará el fenómeno de las vibraciones torsionales.

Se procederá a desarrollar el modelo conceptual del mecanismo de transmisión por engranajes.

Se determinarán las frecuencias naturales y modos de vibración torsional, asimismo, se determinará la respuesta del sistema bajo la acción de una fuerza impulsiva sinusoidal que simula la etapa de arranque.

Finalmente se llegará a las conclusiones y se proporcionarán las recomendaciones correspondientes.

Limitaciones

El presente estudio tiene las siguientes limitaciones:

- No se estudiarán las vibraciones por flexión y axial al eje (vibraciones longitudinales).
- No se evalúa el amortiguamiento del sistema
- No se realizan ensayos experimentales

No se realiza análisis de vibraciones en engranajes

Material, Equipo e instrumentos a usar

1. Una computadora Core Duo 2.4GHz; 2Gb de RAM con sistema operativo Microsoft Windows XP Profesional.
2. Software de simulación por computadora: SolidWorks 2009, CosmosWorks 2009, MATLAB R2008b.

Bibliografía

- [1] Inman Daniel J. , ENGINEERING VIBRATION, editorial Prentice-Hall, New Jersey, 1994.
- [2] Thomson William T., TEORIA DE VIBRACIONES: APLICACIONES, editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1981.
- [3] Den Hartog J.P., MECHANICAL VIBRATIONS, editorial McGraw-Hill, New York, 1940.
- [4] Vance Jhon M., ROTORDYNAMICS OF TURBOMACHINERY, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1988.
- [5] Harris Cyril M., SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK, editorial McGraw-Hill, New York, 1996.
- [6] Nakamura Shoichiro, ANALISIS NUMERICO Y VISUALIZACION GRAFICA CON MATLAB, editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1997.
- [7] Kirtikumar Ganatra Nirmal, “VALIDATION OF COMPUTER-GENERATED RESULTS WITH EXPERIMENTAL DATA OBTAINED FOR TORSIONAL VIBRATION OF SYNCHRONOUS MOTOR-DRIVEN TURBOMACHINERY”, MSc. Thesis, Texas A&M University, Texas, 2003.

INDICE

INTRODUCCION	1
1 FUNDAMENTOS TEORICOS	2
1.1 Vibración Torsional	2
1.1.1 Definición	2
1.1.2 Frecuencias naturales	2
1.1.3 Oscilación síncrona y asíncrona	3
1.2 Eje con varios discos (inercias)	5
1.2.1 Modelo conceptual de un sistema torsional	5
1.2.2 Análisis de auto-valores	11
1.2.3 Sistema torsional sin amortiguamiento	12
1.2.4 Sistema torsional con amortiguamiento	13
1.3 Régimen transitorio	17
1.3.1 Etapa de arranque	18
1.3.2 Vibraciones torsionales en etapa de arranque	20
1.3.3 Señales transitorias	24
1.3.3.1 Fuerzas impulsivas	24
1.3.3.2 Fuerza impulsiva sinusoidal	26
1.3.3.3 Respuesta transitoria	30
1.3.3.4 Diseño bajo fuerzas impulsivas	33
1.3.3.5 Análisis de respuesta para fuerza impulsiva	34
2. PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO EN EL MECANISMO DE TRANSMISION	37
2.1 Modelos conceptuales de sistemas mecánicos	37
2.2 Modelo conceptual del mecanismo de transmisión	41
2.2.1 Ecuaciones diferenciales de movimiento	43
2.3 Caso de estudio: Sistema de transmisión por engranajes	46

3	ANÁLISIS DE LAS VIBRACIONES TORSIONALES BAJO REGIMEN TRANSITORIO	48
3.1	Sistema de un grado de libertad	49
3.2	Sistema de tres grados de libertad. Mecanismo de transmisión	56
3.3	Simulación por el método de los elementos finitos	71
4.	EVALUACION DE RESULTADOS	76
4.1	Evaluación del sistema de un grado de libertad	76
4.2	Evaluación del sistema de tres grados de libertad	78
4.3	Evaluación de los resultados obtenidos por el Método de los Elementos Finitos	82
	CONCLUSIONES	83
	RECOMENDACIONES	85
	BIBLIOGRAFIA	86
	ANEXOS	88
	ANEXO 1: Diseño de una ménsula bajo la acción de una fuerza Impulsiva	88
	ANEXO 2: Método de Holzer para determinar los modos de vibración torsional	92
	ANEXO 3: Sistema equivalente de un mecanismo de transmisión por engranajes	93
	ANEXO 4: Programas de cálculo en Matlab	94
	ANEXO 5: Bancos de prueba para estudio de las vibraciones torsionales	106

LISTA DE SIMBOLOS

\bar{a}_n	:	Amplitud de oscilación de la n –ésima estación
d_{ec}	:	Diámetro del eje conducido
d_{em}	:	Diámetro del eje motriz
d_n	:	Diámetro de la sección de un eje
E	:	Energía cinética del sistema
F	:	Fuerza de amortiguamiento
G	:	Módulo de corte
I_{pn}	:	Momento de inercia polar de la sección de un eje
I'_{pn}	:	Inercia resultante en la estación n
I_1	:	Momento de inercia del rotor
I_2	:	Momento de inercia del piñón
I_3	:	Momento de inercia del engranaje
I_4	:	Momento de inercia de la carga
k_g	:	Rigidez global de los dientes de engranajes
k_n	:	Rigidez torsional de la sección de un eje
k'_n	:	Rigidez resultante en la estación n
k_1	:	Rigidez torsional del eje motriz
k_2	:	Rigidez torsional del eje conducido
L	:	Función de <i>Lagrange</i>
l_{ec}	:	Longitud del eje conducido
l_{em}	:	Longitud del eje motriz
l_n	:	Longitud de la sección de un eje
m_c	:	Masa de la carga

m_e	:	Masa del engranaje
m_p	:	Masa del piñón
m_r	:	Masa del rotor
$modulop$:	Módulo del piñón
Q_i	:	Fuerzas externas sin potencial
Q_n	:	Torque no conservativo de la n –ésima coordenada
q_i	:	Coordenada generalizada
\dot{q}_i	:	Derivada respecto al tiempo de la coordenada generalizada
R_d	:	Factor de respuesta
r_2	:	Radio primitivo del piñón
r_3	:	Radio primitivo del engranaje
r_r	:	Radio del rotor
r_t	:	Relación de transmisión
s	:	Auto-valor
T_n	:	Torque nominal
$T(t)$:	Fuerza impulsiva
t_n	:	Período natural del sistema
t_1	:	Período de la fuerza impulsiva
U	:	Energía potencial del sistema
U_d	:	Energía de deformación
Z_p	:	Número de dientes del piñón
Z_e	:	Número de dientes del engranaje

Símbolos griegos

δ_{est}	:	Deflexión estática
δ	:	Deflexión en los dientes de engranajes
θ_n	:	Desplazamiento angular de la n -ésima inercia
σ_{ad}	:	Esfuerzo admisible
ω	:	Frecuencia de excitación
ω_n	:	Frecuencia natural



LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1.	Respuestas típicas de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento sujeto a tres diferentes pulsos	36
Tabla 3.1.	Casos de análisis para el sistema de un grado de libertad. Parámetros variables (x); Parámetros constantes (-)	51
Tabla 3.2.	Casos de análisis para el sistema de tres grados de libertad. Parámetros variables (x); Parámetros constantes (-)	57
Tabla 3.3.	Frecuencias naturales obtenidas por el Método de los Elementos Finitos	74
Tabla 3.4.	Análisis comparativo de frecuencias	75
Tabla 4.1.	Método de <i>Holzer</i> . Frecuencia supuesta ω	93

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1.	(a)Oscilación síncrona. (b)Oscilación asíncrona	4
Fig. 1.2.	Parámetros generales de vibración torsional	6
Fig. 1.3.	Modelo de una estación	8
Fig. 1.4.	Modelo de un sistema con amortiguamiento	14
Fig. 1.5.	Esquema de retroalimentación para control de velocidad de una turbina	15
Fig. 1.6.	Esquema del controlador de velocidad	15
Fig. 1.7.	Esquema del tren motor de un helicóptero	16
Fig. 1.8.	Vibraciones torsionales excitadas por el arranque de un motor síncrono	18
Fig. 1.9.	Frecuencia pulsante de una máquina síncrona	19
Fig. 1.10.	Frecuencia arbitraria como una función de la velocidad del rotor	19
Fig. 1.11.	Diagrama de Campbell	20
Fig. 1.12.	Esquema experimental del sistema torsional	21
Fig. 1.13.	Vibración torsional libre	22
Fig. 1.14.	Torque medido durante el arranque	23
Fig. 1.15.	Corriente medida durante el arranque	23
Fig. 1.16.	Representación de la fuerza impulsiva	24
Fig. 1.17.	Sistema torsional de un grado de libertad	26
Fig. 1.18.	Respuesta del sistema a un pulso sinusoidal	30
Fig. 1.19.	Respuesta transitoria para tres tipos de fuerza impulsiva	32
Fig. 1.20.	Señales impulsivas típicas	34

Fig. 2.1.	Sistema par-inercia	38
Fig. 2.2.	Sistema par-resorte torsional	39
Fig. 2.3.	Sistemas engranados	41
Fig. 2.4.	Modelo conceptual del mecanismo de transmisión	42
Fig. 2.5.	Sistema torsional Motor-Multiplicador-Compresor	42
Fig. 3.1.	Modelo de un grado de libertad. Excitación por torque aplicado en el disco	49
Fig. 3.2.	Frecuencia Natural del sistema de un grado de libertad para (d) variable	52
Fig. 3.3.	Razón de duración del pulso del sistema de un grado de libertad para (d) variable	52
Fig. 3.4.	Respuesta del sistema de un grado de libertad para (d) variable	53
Fig. 3.5.	Frecuencia Natural del sistema de un grado de libertad para (l) variable	53
Fig. 3.6.	Razón de duración del pulso del sistema de un grado de libertad para (l) variable	54
Fig. 3.7.	Respuesta del sistema de un grado de libertad para (l) variable	54
Fig. 3.8.	Frecuencia Natural del sistema de un grado de libertad para (D) variable	55
Fig. 3.9.	Razón de duración del pulso del sistema de un grado de libertad para (D) variable	55

Fig. 3.10.	Respuesta del sistema de un grado de libertad para (D) variable	56
Fig. 3.11.	Frecuencias Naturales torsionales para (k_1) variable	57
Fig. 3.12.	Modos de Vibración torsional para (k_1) variable	58
Fig. 3.13.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (k_1) variable	58
Fig. 3.14.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (k_1) variable	59
Fig. 3.15.	Frecuencias Naturales torsionales para (I_2) y (r_2/r_3) variables	59
Fig. 3.16.	Modos de vibración torsional para (I_2) y (r_2/r_3) variables	60
Fig. 3.17.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (I_2) y (r_2/r_3) variables	60
Fig. 3.18.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (I_2) y (r_2/r_3) variables	61
Fig. 3.19.	Frecuencias Naturales torsionales para (I_2) variable	61
Fig. 3.20.	Modos de vibración torsional para (I_2) variable	62
Fig. 3.21.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (I_2) variable	62
Fig. 3.22.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (I_2) variable	63
Fig. 3.23.	Frecuencias Naturales torsionales para (r_2/r_3) variable	63
Fig. 3.24.	Modos de vibración torsional para (r_2/r_3) variable	64
Fig. 3.25.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (r_2/r_3) variable	64
Fig. 3.26.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (r_2/r_3) variable	65
Fig. 3.27.	Frecuencias Naturales torsionales para (k_2) variable	65
Fig. 3.28.	Modos de Vibración torsional para (k_2) variable	66

Fig. 3.29.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (k_2) variable	66
Fig. 3.30.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (k_2) variable	67
Fig. 3.31.	Frecuencias Naturales torsionales para (I_4) variable	67
Fig. 3.32.	Modos de Vibración torsional para (I_4) variable	68
Fig. 3.33.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (I_4) variable	68
Fig. 3.34.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (I_4) variable	69
Fig. 3.35.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (k_1) variable. Aplicación de ecuación empírica $T(t) = a + be^{-\lambda t} \sin(\omega t)$	70
Fig. 3.36.	Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (k_1) variable. Aplicación de ecuación empírica $T(t) = a + be^{-\lambda t} \sin(\omega t)$	71
Fig. 3.37.	Sistema equivalente del modelo conceptual	72
Fig. 3.38.	Primera frecuencia natural del sistema equivalente	73
Fig. 3.39.	Segunda frecuencia natural del sistema equivalente	73
Fig. 3.40.	Tercera frecuencia natural del sistema equivalente	74
Fig. 4.1.	Ménsula sometida a carga impulsiva	88
Fig. 4.2.	Reducción a un sistema equivalente	93
Fig. 4.3.	Equipo para estudio de las vibraciones torsionales de sistemas engranados	106
Fig. 4.4.	Equipo para estudio de las oscilaciones torsionales libres y amortiguadas	107
Fig. 4.5.	Modelo de vibración torsional con resorte espiral	108
Fig. 4.6.	Equipo para estudio de las vibraciones por torsión. Frecuencia de excitación de 1 a 20Hz	109
Fig. 4.7.	Equipo de vibración torsional con tres discos	110

INTRODUCCION

Todos los elementos de máquinas que giran experimentan vibraciones torsionales hasta un cierto grado, las cuales se producen en el arranque, paradas y operación continua de la máquina. A consecuencia de la vibración torsional surgen problemas frecuentes que se presentan en las máquinas rotativas como la torcedura de ejes por acción de los modos torsionales y en algunos casos llegando hasta la rotura del eje por consecuencia de la fatiga producida en los mismos.

Una manera eficiente para tener una comprensión básica de las frecuencias naturales y modos de vibración torsional, así como de los fenómenos que se producen cuando los ejes son excitados por medio de fuerzas impulsivas es desarrollar un modelo conceptual del sistema dinámico. Es por ello que el presente trabajo está orientado a desarrollar el modelo conceptual de un sistema de transmisión por engranajes para determinar y analizar sus frecuencias naturales, modos de vibración torsional, y la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva sinusoidal que simula la etapa de arranque.

Básicamente, un análisis de vibración torsional tiene como objetivos generales [4]:

1. Determinar las frecuencias naturales torsionales del sistema.
2. Evaluar el comportamiento de las frecuencias naturales y los modos de vibración al cambiar los parámetros de diseño.
3. Determinar las amplitudes de vibración y el esfuerzo de torsión máximo bajo excitación torsional en estado estacionario.
4. Determinar el torque dinámico y las cargas en los dientes de engranajes bajo régimen transitorio.
5. Evaluar la estabilidad torsional del tren de accionamiento con un control automático de velocidad.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1 VIBRACION TORSIONAL

1.1.1 DEFINICION

La vibración torsional es el movimiento angular oscilatorio en uno o más grados de libertad angular, alrededor de una posición de equilibrio.

Todos los elementos de máquinas que giran experimentan vibraciones torsionales hasta un cierto grado, las cuales se manifiestan en el arranque, paradas, y operación a velocidades variables. Conviene señalar, que así como las vibraciones laterales de ejes son percibidas fácilmente, ya que producen ruido y fuerte vibración en los soportes, no ocurre lo mismo con las vibraciones torsionales, que superpuestas al movimiento de rotación del eje sin excitar estructuras adyacentes, no son notadas hasta producirse la falla del sistema.

La vibración torsional excesiva puede tener como consecuencias: torceduras en ejes o árboles, fallas en los acoplamientos, elevados niveles de ruido en engranajes, falla en dientes de engranajes, aflojamiento del bobinado de un motor eléctrico.

1.1.2 FRECUENCIAS NATURALES

Cuando un sistema no amortiguado está vibrando libremente y no se requiere ninguna fuerza, torque o momento externo para mantener la vibración, se dice que esta vibrando a una de sus frecuencias naturales.

Un sistema eje-rotor posee un número de frecuencias naturales discretas de vibración por torsión (también existe vibración por flexión) y asociado a cada frecuencia natural existe un modo de vibración, el cual representa una distorsión geométrica del eje en el instante de máxima deformación durante la vibración.

Holzer propuso un método de cálculo para determinar las frecuencias naturales y formas modales de sistemas torsionales, suponiendo una frecuencia natural y asignando inicialmente una amplitud unitaria en un extremo del sistema se calcula progresivamente el torque y el desplazamiento angular en el otro extremo. Las frecuencias que resulten en torque externo cero o condiciones de borde compatibles en el otro extremo, serán las frecuencias naturales torsionales del sistema. Los desplazamientos angulares θ_i correspondientes a estas frecuencias naturales son las formas modales.

1.1.3 OSCILACION SINCRONA Y ASINCRONA

El desbalance es una de las fuentes más comunes de oscilación en un eje rotatorio, el cual producirá una oscilación síncrona con la velocidad del eje; pero no todas las oscilaciones son síncronas y los problemas más destructivos involucran oscilaciones asíncronas. La figura 1.1 muestra una vista de un rotor (eje y disco) oscilando y describe la diferencia esencial entre los dos tipos de movimiento; el elemento sombreado representa la masa desbalanceada.

En la figura 1.1a, la razón de cambio del ángulo ϕ respecto al tiempo ($\dot{\phi}$) es la velocidad de oscilación. El ángulo β permanece constante, entonces la velocidad de oscilación y la del eje son iguales (oscilación síncrona). De esta

manera el desbalance U del rotor está adelantado respecto al vector de oscilación V por el ángulo constante β .

En la figura 1.1b, la razón de cambio del ángulo β respecto al tiempo ($\dot{\beta}$) es la velocidad de rotación del rotor relativa al vector de oscilación V ; así la velocidad del eje es la suma de $\dot{\phi}$ y $\dot{\beta}$, en este caso la velocidad de oscilación y la del eje no son iguales (oscilación asíncrona).

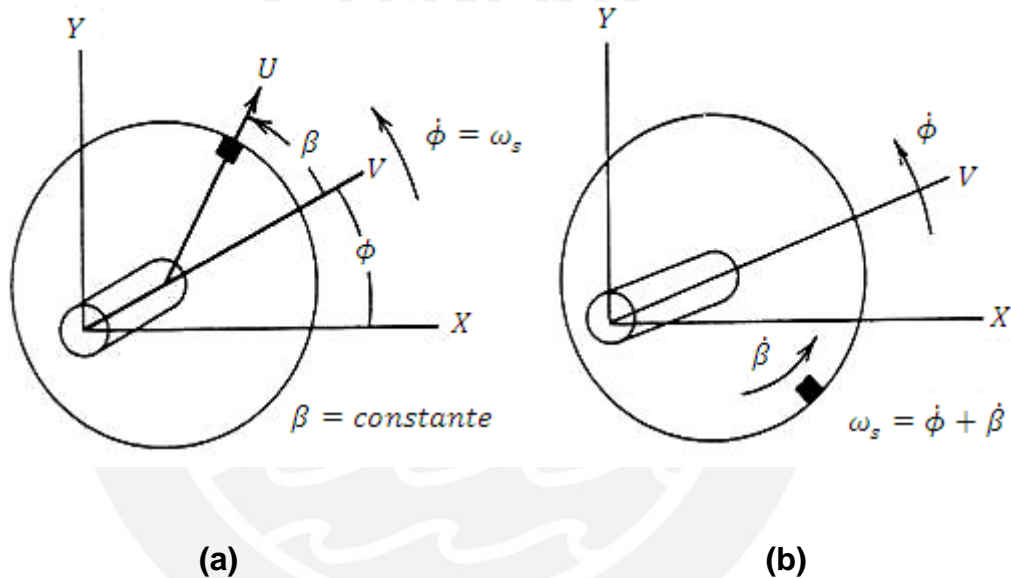


Fig. 1.1. (a) Oscilación síncrona. (b) Oscilación asíncrona. [4]

1.2 EJE CON VARIOS DISCOS (INERCIAS)

1.2.1 MODELO CONCEPTUAL DE UN SISTEMA TORSIONAL

A diferencia de la vibración lateral que se desarrolla en un plano transversal al eje de rotación, la vibración torsional se presenta en planos de rotación a los ejes de giro de las máquinas rotativas; los elementos que intervienen en su análisis se presentan según el diagrama de cuerpo libre de la figura 1.2, en el cual se considera las inercias polares de los discos y la rigidez torsional de las secciones de eje según sea el caso. Cabe mencionar que para el análisis en máquinas rotativas la función que desempeñan los apoyos no influye en la vibración torsional, pues la acción que puedan generar se manifiestan en planos transversales.

En la figura 1.2 se muestra el modelo de un sistema de parámetros agrupados, se aprecia que todas las inercias rotatorias son concentradas en N discos discretos, cada uno con su respectiva masa, y momento de inercia polar I_{p_n} . Por ejemplo I_{p_1} puede representar a un motor, I_{p_2} una caja reductora de velocidades, I_{p_3} un compresor, etc. Los discos están conectados por medio de secciones de ejes elásticas, estas secciones pueden ser llamados resortes torsionales de rigidez k_n , los resortes representan la flexibilidad torsional de los ejes y acoplamientos.

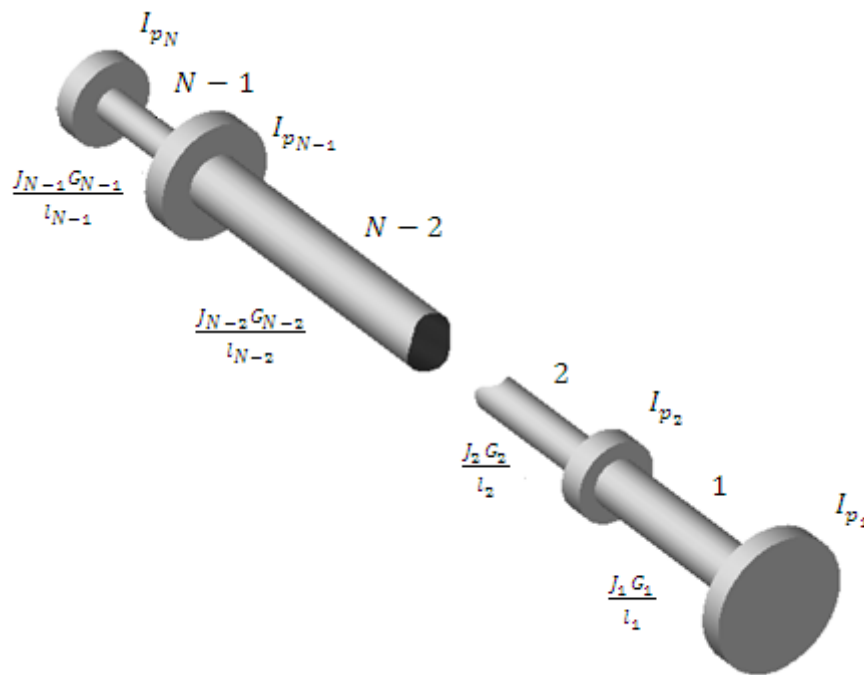


Fig. 1.2. Parámetros generales de vibración torsional [7]

La inercia de cada sección del eje es usualmente dividida en partes iguales y concentradas dentro de los discos a cada extremo de la sección. La rigidez torsional de la sección de un eje está dada por:

$$k_n = \frac{I_{pn} G}{l_n} \tag{1.1}$$

Donde:

I_{pn} : Momento de inercia polar, $I_{pn} = \frac{\pi d_n^2}{32}$

G : Módulo de corte.

l_n : Longitud de sección del eje.

d_n : Diámetro de sección del eje.

El concepto de estación es introducido para representar a un elemento de inercia con su respectivo elemento flexible; esto quiere decir que una estación se compone de un disco (elemento – momento de inercia polar) y el eje elástico contiguo (elemento-eje). Usualmente las porciones con forma de discos de grandes diámetros son representados en el modelo por un elemento masa y las porciones con forma de ejes esbeltos son representados por elementos eje; pero en realidad un eje de longitud apreciable puede ser dividido en un número adecuado de estaciones para poder obtener mejores resultados. La figura 1.3 muestra la n -ésima estación que consiste en una inercia conectada a la rigidez del eje.

En el análisis de vibración torsional el número de estaciones N debe ser como mínimo uno más que el número de frecuencias naturales a calcular.

Para representar la disipación de la energía vibratoria, se incorporan en el modelo amortiguadores viscosos, las características viscosas producen torques opuestos y linealmente proporcional a la velocidad angular del amortiguador. Los amortiguadores son denotados por C_n y representan la energía disipada en el movimiento torsional relativo a los ejes y acoplamientos; los amortiguadores denotados por B_n representan la energía disipada por los soportes. El propósito de agrupar los parámetros en estaciones discretas es describir matemáticamente la dinámica de cada inercia por una ecuación diferencial ordinaria, evitando las ecuaciones en derivadas parciales más complejas requeridas para el modelo de masas distribuidas.

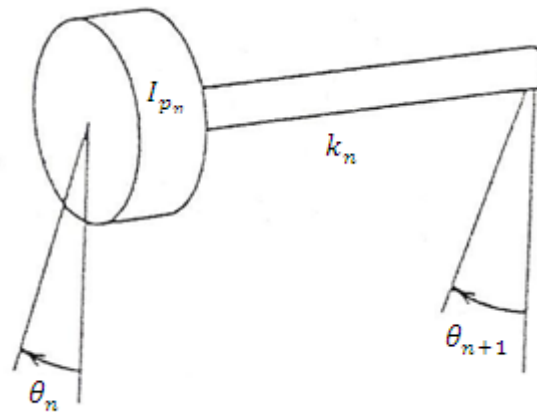


Fig. 1.3. Modelo de una estación [4]

Si θ_n es el desplazamiento angular de la n -ésima inercia, el sistema tiene N grados de libertad que se puede describir por N coordenadas generalizadas ($1 \leq n \leq N$); el movimiento del eje-rotor es entonces modelado por N ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes.

La ecuación diferencial puede ser deducida de las leyes de *Newton*, o por medio de las ecuaciones de *Lagrange*, estas últimas son generalmente usadas para el análisis de ejes rotativos.

Cada coordenada tendrá un movimiento $\theta_n(t)$ que satisface las ecuaciones de *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = Q_n \quad 1 \leq n \leq N \quad (1.2)$$

Donde:

$L = E - U$; Función de *Lagrange*

E = Energía cinética del sistema

U = Energía potencial del sistema

Q_n = Torque no conservativo en la n ésima coordenada

La función de *Lagrange*, es escrita en términos de θ_n y $\dot{\theta}_n$ en orden de las derivadas de la ecuación (1.2).

La energía cinética E es la suma de $\frac{1}{2}I_{p_n}\dot{\theta}_n^2$ alrededor de todas las inercias, entonces

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N I_{p_n} \dot{\theta}_n^2 \quad (1.3)$$

La energía potencial U es la suma de la energía de todos los resortes torsionales

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} k_n (\theta_n - \theta_{n+1})^2 \quad (1.4)$$

El torque no conservativo es obtenido mediante el principio del trabajo virtual δW , por la relación existente del torque de amortiguamiento, torque de arranque $T_{st}(t)$ y por el torque de carga, esto es

$$\delta W = \sum_{n=1}^N Q_n \delta \theta_n \quad (1.5)$$

Donde:

$$Q_1 = T_{st}(t) - B_1 \dot{\theta}_1 - C_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (1.6)$$

$$Q_n = T_n(t) - \sum_{n=2}^{N-1} [B_n \dot{\theta}_n + C_n(\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{n+1}) - C_{n-1}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n)] \quad (1.7)$$

$$Q_N = T_N(t) - B_N \dot{\theta}_N + B'_N \dot{\theta}_N |\dot{\theta}_N| - C_{N-1}(\dot{\theta}_{N-1} - \dot{\theta}_N) \quad (1.8)$$

El término B'_N en la ecuación (1.8) representa el torque de carga. Sustituyendo en la función de *Lagrange* las ecuaciones (1.3), (1.4) y el torque no conservativo Q_n mediante las ecuaciones (1.6), (1.7), (1.8) en la ecuación (1.2) resultan las N ecuaciones diferenciales de movimiento:

$$I_{p_1} \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 + C_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_{st}(t) \quad (1.9)$$

donde: $n = 1$;

$$\begin{aligned} I_{p_n} \ddot{\theta}_n + B_n \dot{\theta}_n + C_n(\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{n+1}) + C_{n-1}(\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_{n-1}) + k_n(\theta_n - \theta_{n+1}) \\ + k_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1}) = T_n(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde: $n = 2, 3, \dots, N - 1$

$$I_{p_N} \ddot{\theta}_N + B_N \dot{\theta}_N + C_{N-1} (\dot{\theta}_N - \dot{\theta}_{N-1}) + k_{N-1} (\theta_N - \theta_{N-1}) = -B'_N |\sin \dot{\theta}_N| + T_n(t) \quad (1.11)$$

donde: $n = N$;

Si en el sistema de transmisión se presentan reductores o multiplicadores de velocidad (engranajes) tenemos:

$$I_{p_n} = r_t^2 I'_{p_n} \quad (1.12)$$

$$k_n = r_t^2 k'_n \quad (1.13)$$

Donde:

r_t : Relación de transmisión

I'_{p_n} : Inercia resultante en la estación n

I_{p_n} : Inercia efectiva

k'_n : Rigidez resultante en la estación n

k_n : Rigidez efectiva

1.2.2 ANALISIS DE AUTO-VALORES

Usualmente el objetivo más importante en el análisis de vibración torsional es la determinación de las frecuencias naturales y sus modos de vibración torsional. En términos matemáticos estos son llamados auto-valores y auto-vectores respectivamente.

Las frecuencias naturales del modelo ilustrado en la figura 1.2 son las partes imaginarias de los auto-valores de las ecuaciones diferenciales de movimiento. Las ecuaciones diferenciales son linealizadas tomando el torque inicial $T_{st}(t) = T^*$ como una constante, y los valores $\dot{\theta}_n = \Omega + \dot{\epsilon}_n$, donde Ω es la velocidad del eje en estado estable y $\dot{\epsilon}_n$ es una pequeña perturbación angular de la velocidad en la estación n . Con estas sustituciones, las ecuaciones linealizadas resultan tener la misma forma de la ecuación (1.11), excepto haciendo cero el lado derecho de la ecuación (cancelando los torques de carga) y con todos los valores de θ_n reemplazados por ϵ_n . Es típico, sin embargo, escribir ϵ_n como θ_n , quedando claro que éstas son las pequeñas oscilaciones fuera del ángulo Ωt del estado estable de cada estación. Las ecuaciones resultantes no solo son lineales sino también pueden caracterizarse como ecuaciones diferenciales homogéneas, de segundo orden y con coeficientes constantes. La solución de todas estas ecuaciones es de la forma

$$\theta_n(t) = \bar{a}_n \cos(\omega_j t) \quad (1.14)$$

Donde \bar{a}_n es la amplitud de oscilación de la n -ésima estación y s es el autovalor y $n = 1, 2, \dots, N$

1.2.3 SISTEMA TORSIONAL SIN AMORTIGUAMIENTO

Si no consideramos amortiguamiento ($B_n = C_n = 0$; $n = 1, 2, \dots, N$), las ecuaciones (1.9) y (1.11) tienen $N - 1$ autovalores imaginarios distintos de cero; $S_j = \pm i\omega_j$; $j = 1, 2, \dots, N - 1$; que son las frecuencias naturales del

sistema torsional. De la ecuación (1.14), la solución para la vibración libre de la n –ésima estación es como sigue

$$\theta_n(t) = a_n \cos(\omega_j t) \quad (1.15)$$

Donde a_n es la amplitud real. Entre los procedimientos más conocidos para estos cálculos figuran el método de *Holzer*, método de la Matriz de Transferencia, método de *Stodola* (llamado también iteración de matrices).

1.2.4 SISTEMA TORSIONAL CON AMORTIGUAMIENTO

Si consideramos amortiguamiento, los auto-valores serán números complejos;

$$S_j = \lambda_j \pm i\omega_j \quad i = \sqrt{-1}; \quad j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1.16)$$

La solución de la ecuación (1.14) puede ser escrita como

$$\theta_n(t) = \sum_{j=1}^{N-1} a_{nj} e^{\lambda_j t} \cos(\omega_j t - \beta_{nj}) \quad (1.17)$$

Donde a_{nj} es la amplitud real de la estación n con frecuencia ω_j y β_{nj} es el ángulo de fase. De la ecuación (1.16) se puede deducir que las $N - 1$ frecuencias naturales no nulas son dadas por la parte imaginaria de los auto-valores, y el signo de la parte real λ_j determina en la vibración libre, dada por

la ecuación (1.17), un incremento para un proceso inestable o descenso para un sistema estable. La vibración torsional del eje-rotor modelado en las ecuaciones (1.9) a (1.11), será siempre estable cuando $\lambda_j < 0$, para todo j .

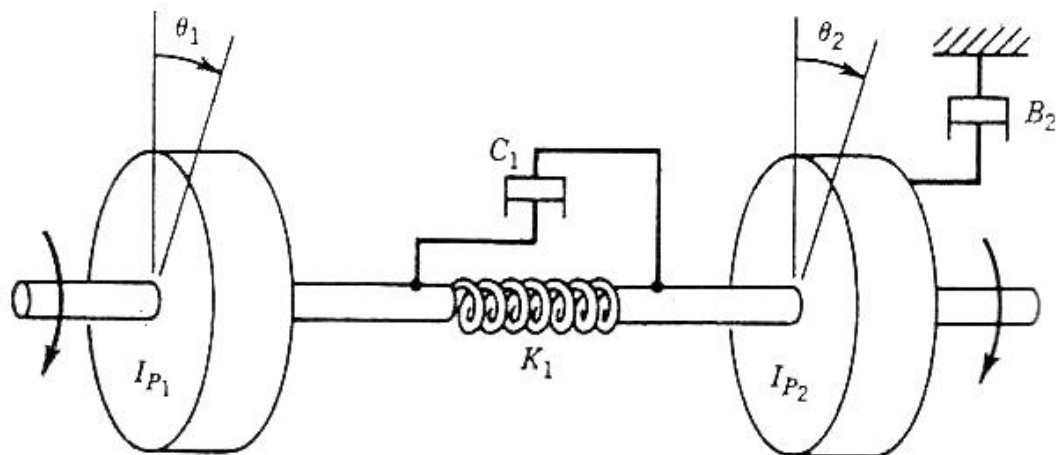


Fig. 1.4. Modelo de un sistema con amortiguamiento [4]

Cuando el proceso es inestable existen controladores de velocidad angular aplicados al torque inducido $T(t)$ para llegar a la estabilidad del sistema. En las figuras 1.5 y 1.6 se describe el funcionamiento de un controlador de velocidad angular. Básicamente, una señal (velocidad) ω_e es comparada con una velocidad ω_p pre-establecida y el error se retroalimenta para cambiar el flujo del combustible como sea necesario.

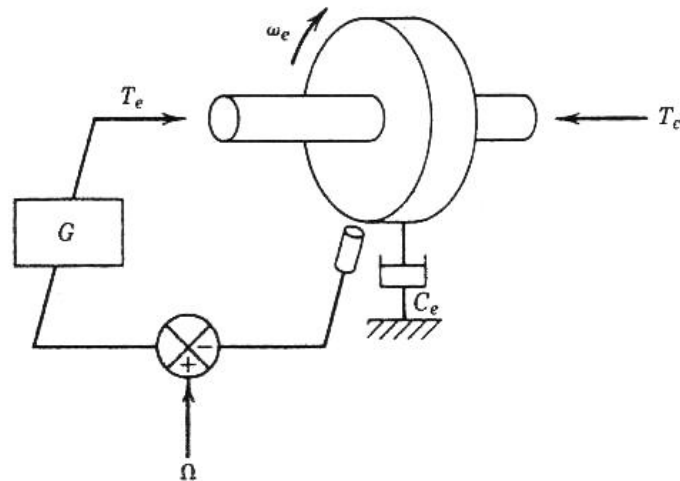


Fig. 1.5. Esquema de retroalimentación para control de velocidad de una turbina [4]

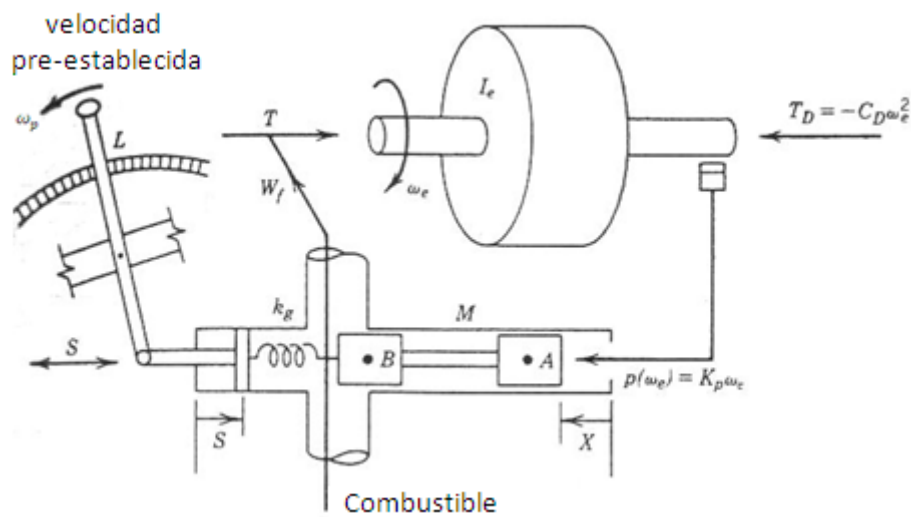


Fig. 1.6. Esquema del controlador de velocidad [4]

En un helicóptero, por ejemplo, el controlador automático de velocidad indica al piloto la señal de mantener la velocidad constante del motor durante los cambios de condiciones de carga y de vuelo.

Un problema particular que se presenta en los programas de desarrollo de helicópteros es el de mantener la estabilidad torsional del motor y del tren

motriz mientras se proporciona una respuesta suficientemente rápida a las demandas para los cambios de velocidad.

La figura 1.7 muestra el esquema de funcionamiento. Los principales elementos del sistema son: El generador de gas (el cual produce el torque T_e), el tren motriz y el controlador de velocidad. El tren motriz es un sistema torsional de tres inercias (turbina, caja de engranajes, hélice) y tiene dos frecuencias naturales diferentes de cero. La rigidez torsional del eje 2 de la hélice es reducida grandemente por el cociente del cuadrado de la relación de transmisión, típicamente 80:1, lo cual produce bajas frecuencias naturales.

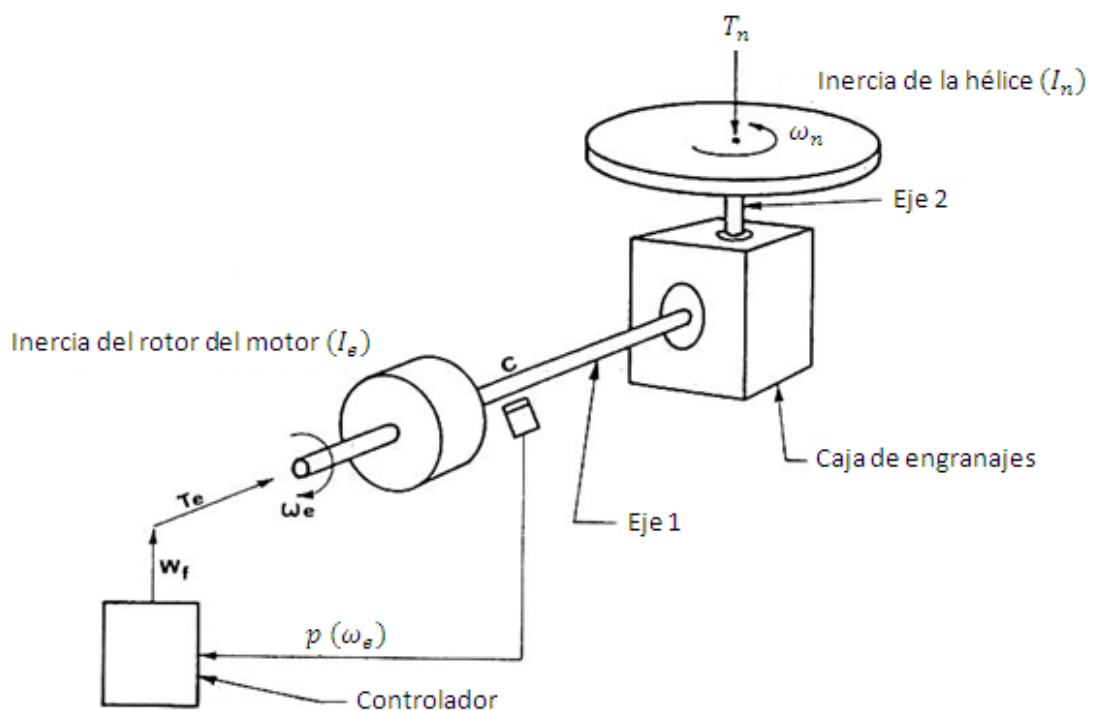


Fig. 1.7. Esquema del tren motor de un helicóptero [4]

1.3 REGIMEN TRANSITORIO

La energía total de un sistema, cualquiera que éste sea: mecánico, eléctrico, electromecánico, etc., no puede variar bruscamente, no es posible pasar de una forma de energía a otra forma de energía instantáneamente.

Este principio, en los circuitos eléctricos, se expresa diciendo que no es posible pasar de un estado de régimen permanente a otro estado de régimen no permanente de una manera instantánea o discontinua.

Un régimen transitorio eléctrico o mecánico puede ser aperiódico u oscilante. Es aperiódico cuando los parámetros que definen el estado de un sistema están sujetos a variaciones unidireccionales que se superponen al régimen permanente final. Y es oscilante cuando tales variaciones son periódicas, asimismo, superpuestas al régimen final. En general, tanto en un régimen permanente o transitorio si la causa que dio origen al mismo, cesa o se estabiliza, las variaciones terminan por amortiguarse, quedando al final únicamente el nuevo régimen permanente.

Como sea que el tiempo de duración de un régimen transitorio no queda generalmente bien definido, pues en teoría es infinito, se acepta que ha terminado cuando las variaciones en el tiempo de los parámetros afectados no son ya medibles.

En los sistemas electromecánicos, los regímenes transitorios eléctricos están asociados con circuitos eléctricos conteniendo inductancias y capacitancias, y los regímenes transitorios mecánicos con elementos mecánicos dotados de inercia y rigidez.

El cierre o apertura de un circuito, la etapa de arranque de un motor o el cambio de carga del mismo, cualquier variación brusca de la resistencia, la

autoinducción, son causa de perturbaciones eléctricas o mecánicas, origen de un régimen transitorio.

1.3.1 ETAPA DE ARRANQUE

A continuación se describe la etapa de arranque de un motor síncrono, ya que es precisamente en los sistemas accionados por estos motores en donde se producen vibraciones torsionales muy importantes a analizar (figura 1.8).

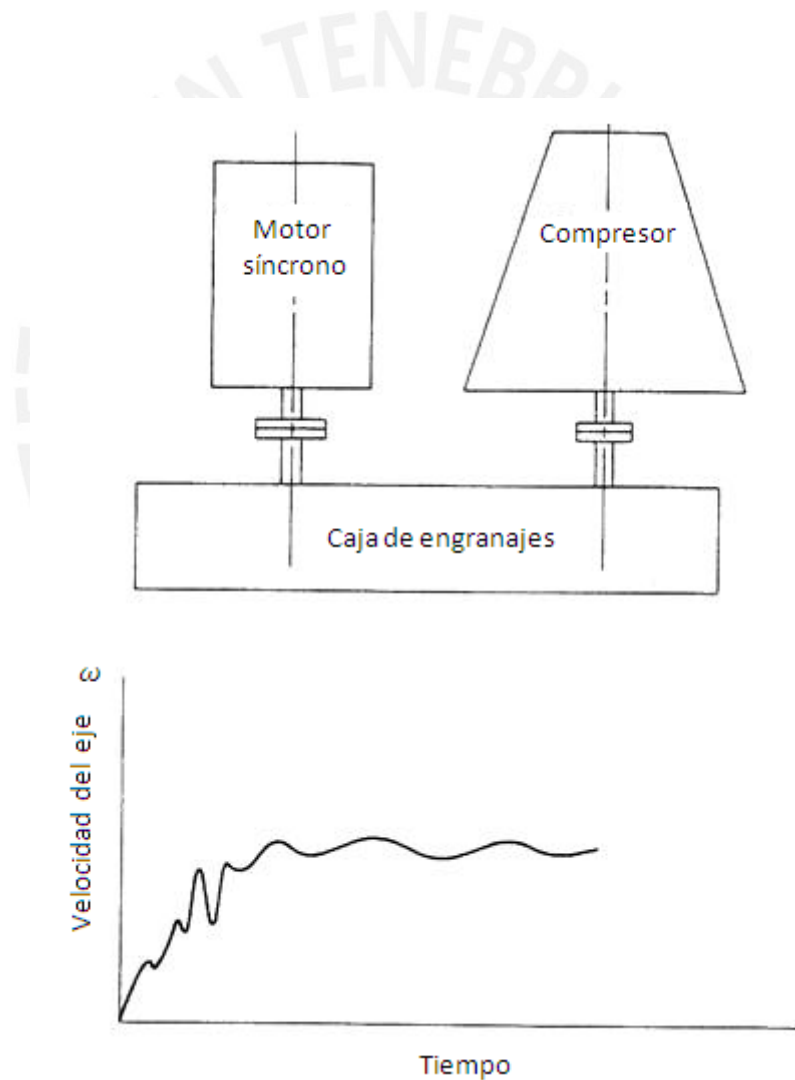


Fig. 1.8. Vibraciones torsionales excitadas por el arranque de un motor síncrono [4]

Los motores síncronos de polos salientes son puestos en marcha como motores de inducción, con el campo cortocircuitado o descargado a través de un resistor, esto produce un esfuerzo de torsión pulsante durante el arranque, con una frecuencia de excitación igual al doble de la frecuencia de deslizamiento del motor.

Si consideramos que la frecuencia de la línea es 60 Hz, la excitación comienza a 120 Hz, la cual decrece linealmente hasta cero cuando el motor alcanza la velocidad de sincronismo (figuras 1.9 y 1.10). Cualquier frecuencia natural que se encuentre dentro de este rango será excitada durante la etapa de arranque (figura 1.11).

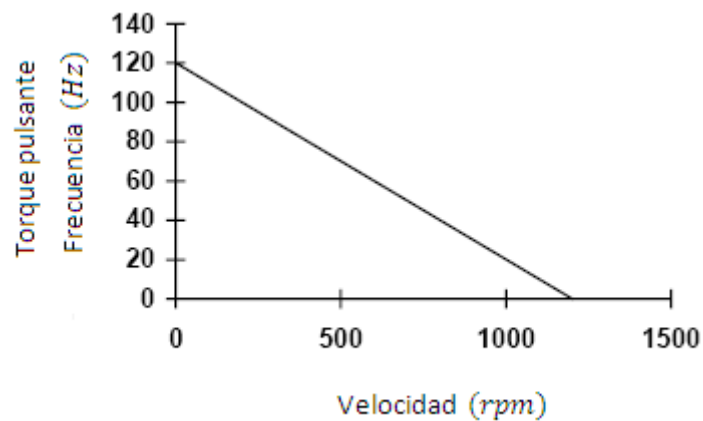


Fig. 1.9. Frecuencia pulsante de una máquina síncrona [7]

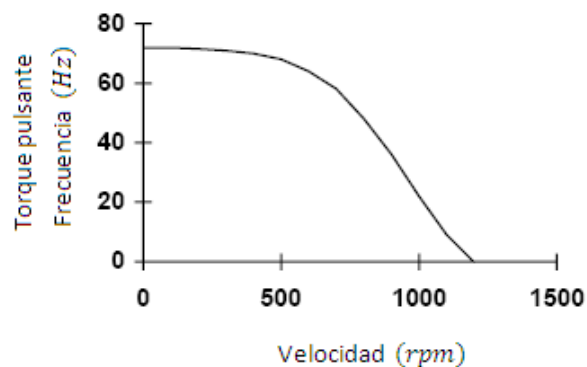


Fig. 1.10. Frecuencia arbitraria como una función de la velocidad del rotor [7]

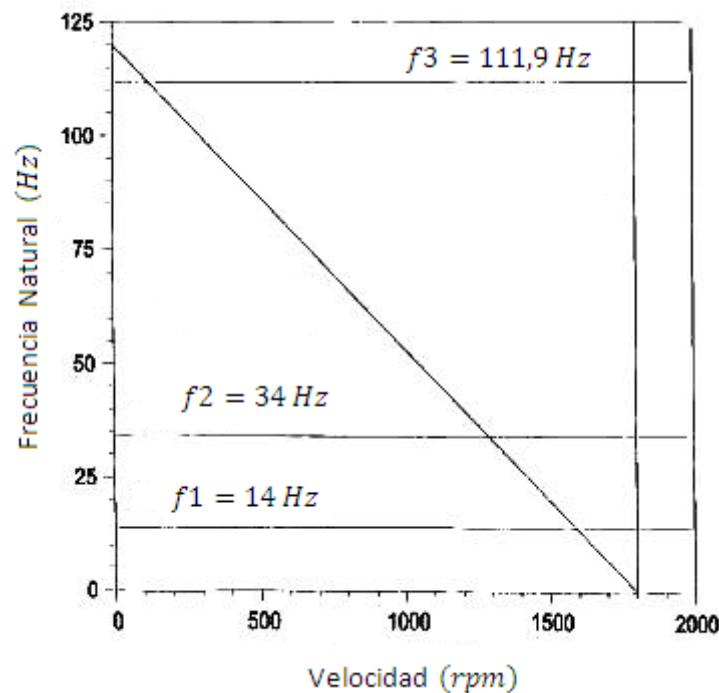


Fig. 1.11. Diagrama de Campbell [7]

El esfuerzo de torsión pulsante puede ser lo bastante alto como para exceder el límite de resistencia torsional del eje. Por esta razón, las tensiones transitorias se deben calcular y comparar con la tensión del límite de resistencia. No es necesario que las tensiones transitorias sean menores que la tensión del límite de resistencia; sin embargo, las tensiones deben ser suficientemente bajas como para permitir un número aceptable de arranques.

1.3.2 VIBRACIONES TORSIONALES EN ETAPA DE ARRANQUE

Ran, Yacamini y Smith citan en su trabajo de investigación [6] las mediciones de las vibraciones torsionales realizadas en el laboratorio con un modelo experimental (figura 1.12). Este experimento nos ilustra la fenomenología que se produce durante el régimen transitorio.

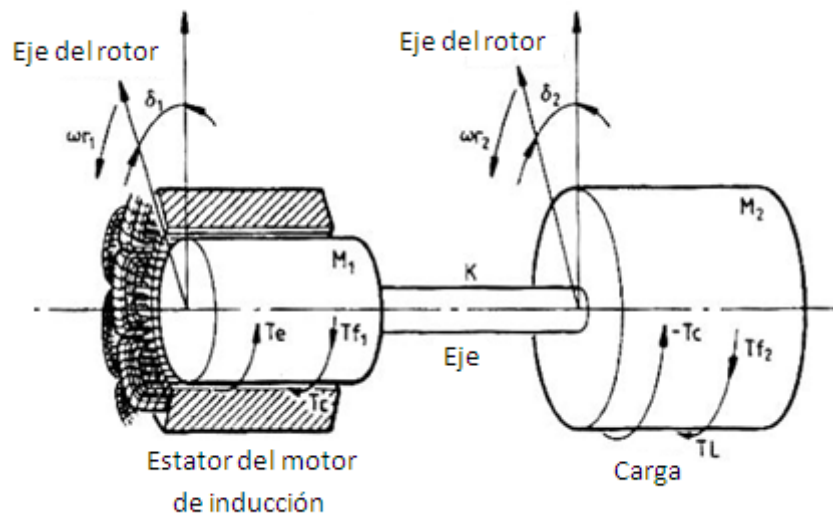


Fig. 1.12. Esquema experimental del sistema torsional [6]

El rotor del motor de inducción M_1 impulsa por medio de un eje a la carga M_2 , en este caso $M_2 > M_1$. El eje está conectado directamente a las inercias (M_1 y M_2), y no se le ha montado un acople intermedio.

En la figura 1.12, T_e es el torque en el entrehierro, T_c es el torque de acople entre las dos inercias a través del eje, T_L y T_f representan el torque de carga y el torque de amortiguamiento debido a la fricción del aire.

El primer experimento en el laboratorio fue diseñado para determinar el grado de amortiguamiento presente en el sistema mecánico cuando los rotores del motor y de la carga fueron sometidos a un estado de vibración torsional libre, para ello una palanca corta de masa despreciable fue acoplada al extremo del eje del motor y golpeada con un martillo, esto es equivalente a someter al sistema a una función impulso.

Para efectuar las mediciones se emplearon strain gauges y los resultados se muestran en la figura 1.13; se observa que hay un pequeño amortiguamiento

presente y después de cuatro segundos el torque oscilatorio se ha reducido alrededor del 50% de su valor inicial.

Cabe indicar que las bobinas eléctricas del motor no fueron energizadas durante esta prueba y los fenómenos electromagnéticos no tienen ningún efecto sobre el esfuerzo de torsión medio.

Para fines prácticos el amortiguamiento en sistemas torsionales puede ser considerado insignificante.

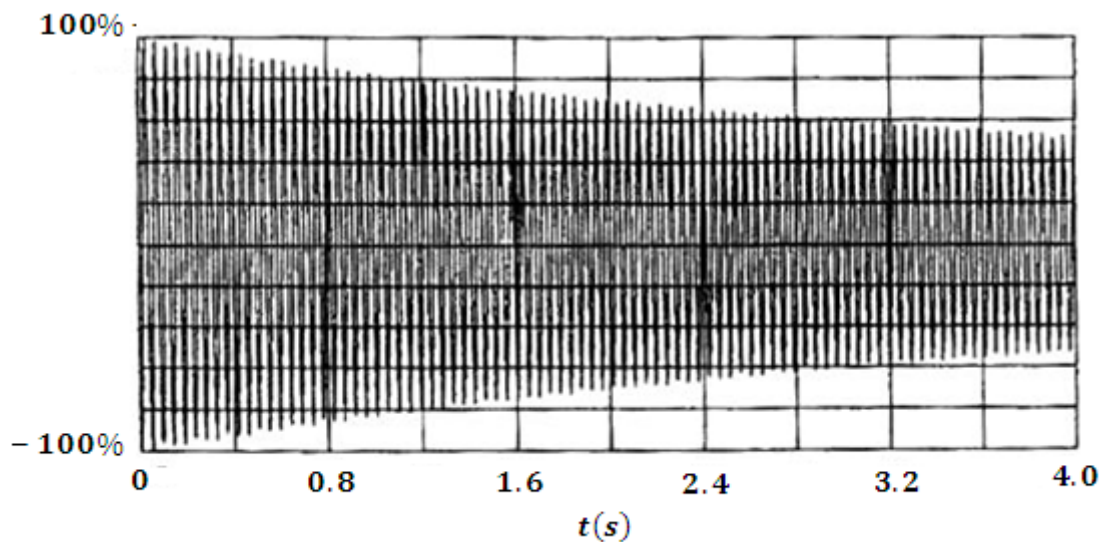


Fig. 1.13. Vibración torsional libre [6]

Para ilustrar el comportamiento dinámico del sistema torsional en la etapa de arranque, el motor fue conectado directamente a una línea de 415 V y 50 Hz., la impedancia causa aproximadamente un 10% de caída de voltaje en los terminales del motor.

El torque fue medido empleando los mismos strain gauges y los resultados se muestran en las figuras 1.14 y 1.15. El torque nominal del motor es 239 Nm, y durante el arranque se eleva a 1750 Nm.

Asimismo, la corriente durante el arranque toma un valor de 1375 A (figura 1.15).

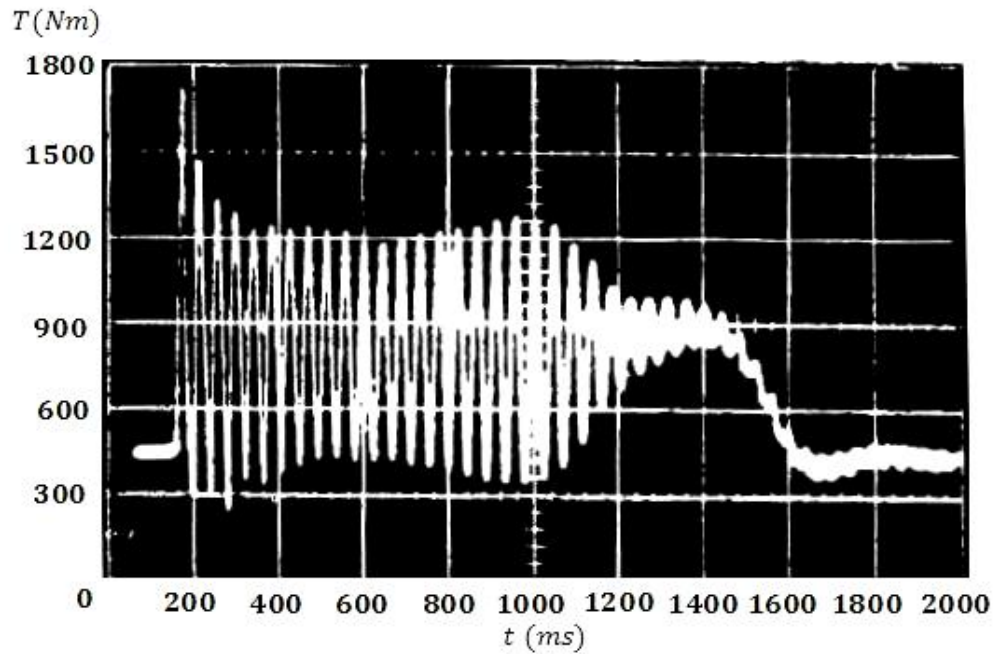


Fig. 1.14. Torque medido durante el arranque [6]

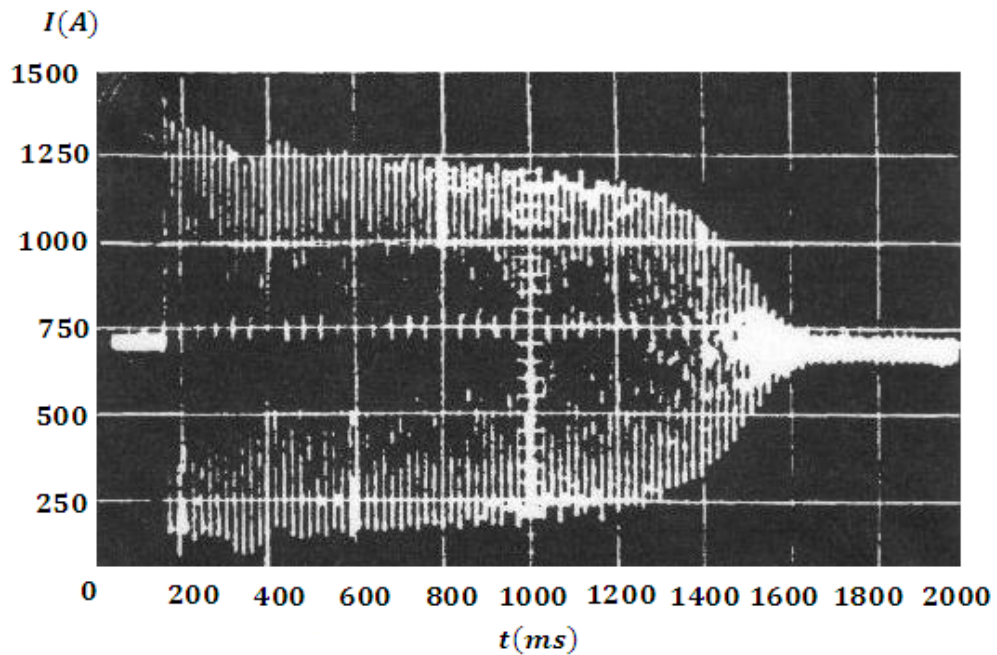


Fig. 1.15. Corriente medida durante el arranque [6]

1.3.3 SEÑALES TRANSITORIAS

Las señales transitorias tienen lugar cuando el sistema es sometido a la acción de fuerzas excitadoras que actúan por un breve período de tiempo, estas fuerzas provocan vibraciones que tienden a desaparecer un tiempo después que cesa la acción de las mismas.

Entre esas fuerzas excitadoras ocupa un lugar muy importante las de tipo impulsivo.

1.3.3.1 FUERZAS IMPULSIVAS

Los sistemas reales pueden estar sometidos a fuerzas excitadoras causantes del comportamiento transitorio del mismo.

Una de las características de las fuerzas impulsivas es que tienen un tiempo de duración muy pequeño, pero son de elevada magnitud por lo que le imprimen al sistema una velocidad inicial que será proporcional a su masa (inercia) y a su amortiguamiento.

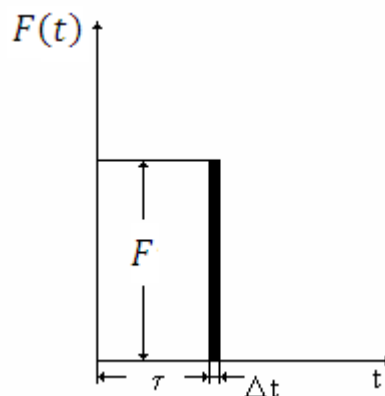


Fig. 1.16. Representación de la fuerza impulsiva [18]

La fuerza impulsiva puede ser representada mediante la segunda ley de Newton de acuerdo a:

$$F(t) = ma \rightarrow F(t) = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (1.18)$$

De donde se puede evaluar el impulso provocado por la fuerza $F(t)$ como sigue:

$$I = \int_t^{t+\Delta t} F(t) dt \quad (1.19)$$

De la figura 1.16 se observa que si $\Delta t \rightarrow 0$, la fuerza impulsiva tiende a valores infinitos para un impulso dado. Si el impulso I es igual a la unidad, entonces la fuerza impulsiva será unitaria cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y tomará las características de una función delta $\delta(t - \tau)$.

1.3.3.2 FUERZA IMPULSIVA SINUSOIDAL

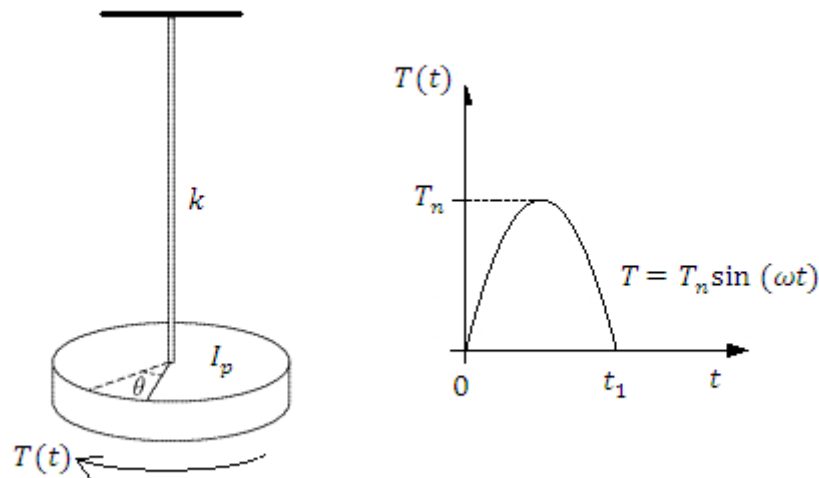


Fig. 1.17. Sistema torsional de un grado de libertad

Las razones para prestar una importante consideración a la respuesta de la excitación sinusoidal son:

- Ocurren en la mayoría de los generadores prácticos
- El teorema de Fourier permite extender el caso sinusoidal al caso general de análisis.
- La respuesta sinusoidal está relacionada directamente a la respuesta transitoria del sistema, ya que el caso más general es la sinusoidal atenuada exponencialmente.

Las condiciones iniciales son: $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$

La ecuación de movimiento de un sistema amortiguado puede ser expresado de la siguiente forma:

$$I_p \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + k\theta = T(t) \quad T(t) = \begin{cases} T_n \sin(\omega t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t \geq t_1 \end{cases} \quad (1.20)$$

donde:

$$\omega = \frac{\pi}{t_1} \quad (1.21)$$

La solución de la ecuación (1.20) se obtiene de la superposición de la solución homogénea $\theta_h(t)$ y la solución particular $\theta_p(t)$, aquí el término de amortiguamiento se desprecia.

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t) \quad (1.22)$$

$$\theta(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \left[\frac{T_n}{k - I_p \omega^2} \right] \sin \omega t \quad (1.23)$$

donde A y B son constantes y ω_n es la frecuencia natural del sistema

$$\omega_n = \frac{2\pi}{t_n} = \sqrt{\frac{k}{I_p}} \quad (1.24)$$

utilizando las condiciones iniciales se determinan las constantes A y B :

$$A = 0 \quad ; \quad B = -\frac{T_n \omega}{\omega_n (k - I_p \omega^2)} \quad (1.25)$$

Con ello encontramos la solución que toma la siguiente forma:

$$\theta(t) = \frac{T_n/k}{1 - [\frac{\omega}{\omega_n}]^2} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (1.26)$$

La ecuación anterior puede ser planteada de la siguiente manera:

$$\frac{\theta(t)}{\delta_{est}} = \frac{1}{1 - \left[\frac{t_n}{2t_1}\right]^2} \left[\sin \frac{\pi t}{t_1} - \frac{t_n}{2t_1} \sin \frac{2\pi t}{t_n} \right] \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (1.27)$$

donde: $\delta_{est} = \frac{T_n}{k}$

La solución dada en la ecuación (1.26) es solo válida durante el período de aplicación del torque $0 \leq t \leq t_1$.

Cuando no se aplica el torque $t \geq t_1$, entonces la solución se expresa como la solución de una vibración libre.

$$\theta(t) = A' \cos \omega_0 t + B' \sin \omega_0 t \quad t \geq t_1 \quad (1.28)$$

las constantes A' y B' se determinan de las condiciones iniciales $\theta(t = t_0)$ y $\dot{\theta}(t = t_0)$ dadas por la ecuación (1.27), lo cual nos genera las siguientes identidades:

$$\theta(t = t_0) = \alpha \left[-\frac{t_n}{2t_1} \sin \frac{2\pi t_1}{t_n} \right] = A' \cos \omega_n t_1 + B' \sin \omega_n t_1 \quad (1.29)$$

$$\dot{\theta}(t = t_0) = \alpha \left[\frac{-\pi}{t_1} - \frac{\pi}{t_1} \cos \frac{2\pi t_1}{t_n} \right] = -\omega_n A' \sin \omega_n t_1 + \omega_n B' \cos \omega_n t_1 \quad (1.30)$$

donde:
$$\alpha = \frac{\delta_{est}}{1 - \left[\frac{t_n}{2t_1} \right]^2}$$

Con las ecuaciones (1.29) y (1.30) se obtienen finalmente las constantes A' y B'

$$A' = \frac{\alpha \pi}{\omega_n t_1} \sin \omega_n t_1 \quad (1.31)$$

$$B' = -\frac{\alpha \pi}{\omega_n t_1} [1 + \cos \omega_n t_1] \quad (1.32)$$

Sustituyendo los valores de A' y B' en la ecuación (1.28) se obtiene la respuesta de la vibración libre.

$$\frac{\theta(t)}{\delta_{est}} = \frac{t_n/t_1}{2 \left[1 - \left[t_n/2t_1 \right] \right]} \left[\sin 2\pi \left[\frac{t_1}{t_n} - \frac{t}{t_n} \right] - \sin 2\pi \frac{t}{t_n} \right] \quad t > t_1 \quad (1.33)$$

Las ecuaciones (1.27) y (1.33) dan la respuesta en una representación adimensional, es decir, $\frac{\theta(t)}{\delta_{est}}$ es expresado en función del término $\frac{t_1}{t_n}$.

De este modo se puede determinar el máximo valor de $\frac{\theta(t)}{\delta_{est}}$ para un valor específico de $\frac{t_1}{t_n}$.

La respuesta del sistema se muestra en la figura 1.18, se observa que el máximo valor de $\left(\frac{\theta(t)}{\delta_{est}}\right)_{max} \cong 1,75$ ocurre para un valor $\frac{t_1}{t_n} \cong 0,75$.

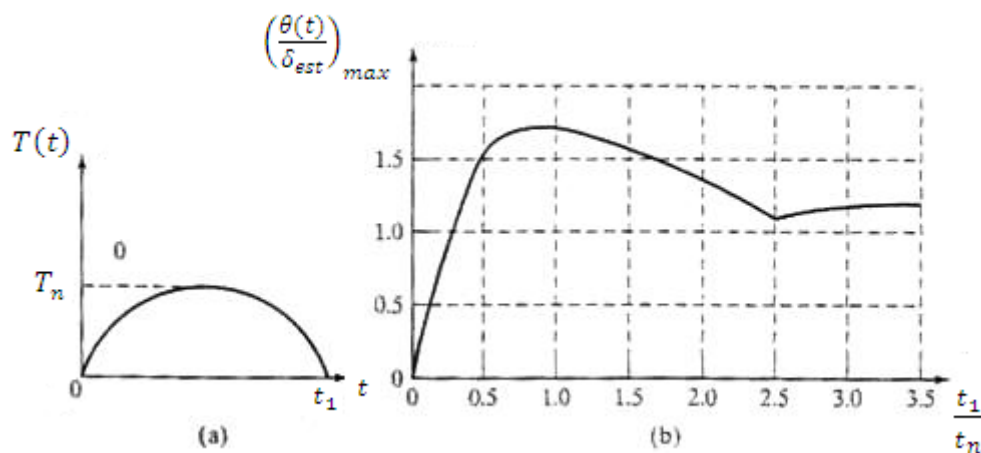


Fig. 1.18. Respuesta del sistema a un pulso sinusoidal [17]

1.3.3.3 RESPUESTA TRANSITORIA

Un choque representa una aplicación súbita de una fuerza u otra forma de perturbación, que se traduce en una respuesta transitoria de un sistema. El valor máximo de la respuesta es una buena medida de la severidad del choque y es, por supuesto, dependiente de las características del sistema. Co el objeto de caracterizar todos los tipos de excitaciones de choque, un oscilador no

amortiguado de un grado de libertad (sistema masa-resorte) es elegido como sistema estándar.

La respuesta de un sistema a una excitación arbitraria $f(t)$ es expresada en términos de la respuesta al impulso unitario $h(t)$ definida por la ecuación

$$x(t) = \int_0^t f(\xi) h(t - \xi) d\xi \quad (1.34)$$

Para el oscilador no amortiguado de un grado de libertad, tenemos:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \quad (1.35)$$

La respuesta pico que debe utilizarse en el gráfico de respuesta está dado por la ecuación

$$x(t)_{\text{máx}} = \left| \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t f(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi \right|_{\text{máx}} \quad (1.36)$$

En el caso que el choque es debido al movimiento súbito del punto de apoyo; $f(t)$ es reemplazado por $-\ddot{y}(t)$ en la ecuación (1.36). La aceleración del punto de soporte está dado por:

$$z(t)_{\text{máx}} = \left| \frac{-1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{y}(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi \right|_{\text{máx}} \quad (1.37)$$

En la figura 1.19 se representa la respuesta para tres excitaciones diferentes. La escala horizontal es igual a $\frac{t_1}{t_n}$ mientras que la escala vertical es un número adimensional que es una medida del efecto dinámico sobre la fuerza aplicada. El factor dinámico es generalmente menor que 2.

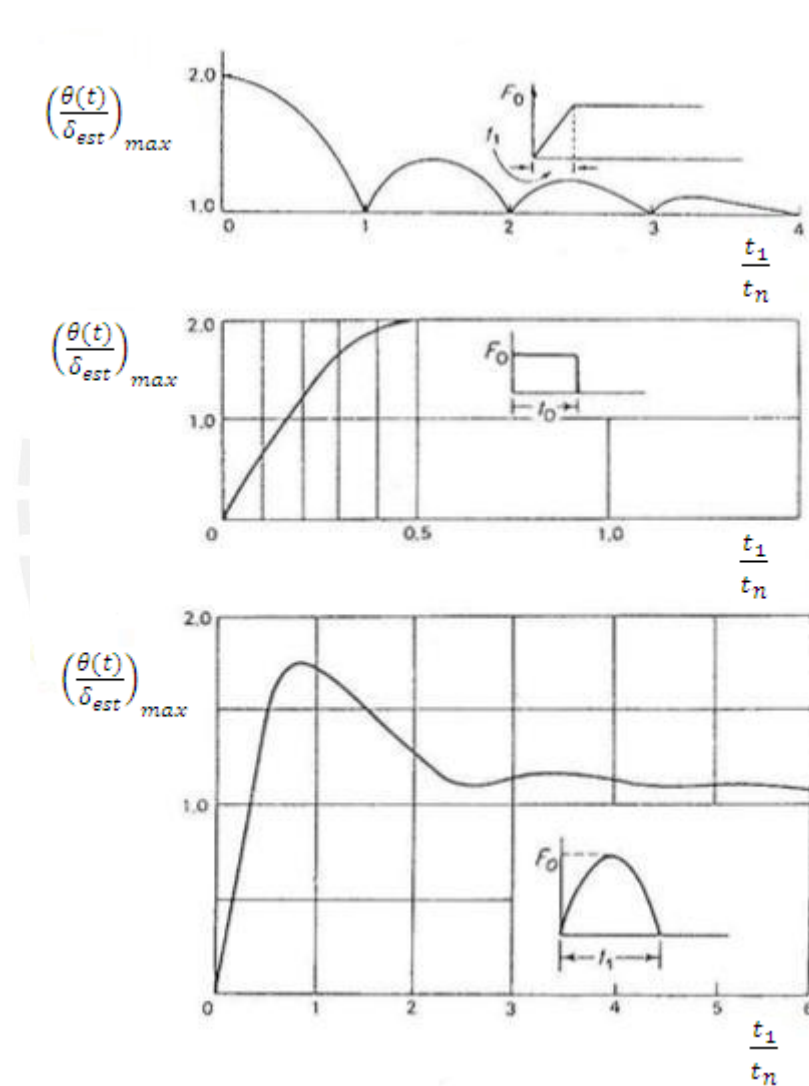


Fig. 1.19. Respuesta transitoria para tres tipos de fuerza impulsiva [2]

1.3.3.4 DISEÑO BAJO FUERZAS IMPULSIVAS

Cuando se aplica una fuerza de corta duración, usualmente de un período menor que el período natural de un sistema, se denomina fuerza impulsiva. Esta fuerza impulsiva causa un incremento significativo de los desplazamientos, velocidades, aceleraciones o también de los esfuerzos de un sistema mecánico.

Aunque la fatiga es una de las mayores causas de falla bajo excitaciones armónicas, por lo general este fenómeno no es importante cuando el sistema es sometido a cargas impulsivas. El impacto puede ser descrito mediante un pulso de impacto, velocidad de impacto o mediante el espectro de respuesta impulsiva. Los pulsos de impacto son introducidos como la aplicación súbita de fuerzas o desplazamientos en la forma de funciones de tipo rectangular, medio seno, triangular o funciones similares (figura 1.20). Un impulso de velocidades es causada por un cambio súbito de la velocidad, como consecuencia de dejar caer algún cuerpo de una determinada altura. El espectro de respuesta impulsiva describe la forma como una máquina o estructura, responde a un impacto específico. Diferentes tipos de pulsos impulsivos son usados en productos comerciales, industriales o militares. Las especificaciones para productos militares se encuentran en las normas MIL-E-5400 Y MIL-STD-810, en dichas normas se definen los diferentes tipos de pulsos impulsivos, también se dan las pautas y métodos para realizar pruebas experimentales con dichos pulsos.

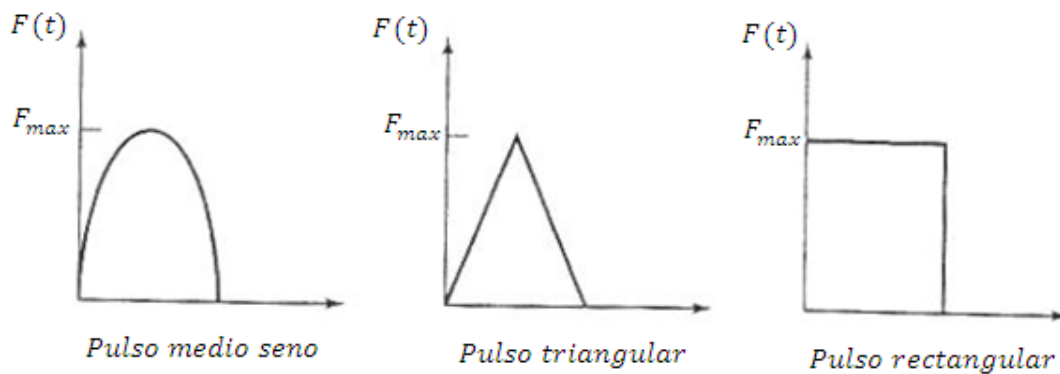


Fig. 1.20. Señales impulsivas típicas [17]

1.3.3.5 ANALISIS DE RESPUESTA PARA FUERZAS IMPULSIVAS

En la tabla 1.1 se muestra una serie de respuestas típicas para tres pulsos simétricos en función de la duración del pulso t_1 y el período natural del sistema t_n .

La importancia del parámetro t_1/t_n radica en que es un indicador de la duración del pulso tomando como referencia el período natural del sistema. Se distinguen tres casos principales dependiendo del valor de t_1/t_n .

- a) $\frac{t_1}{t_n} < 0,25$. En este caso la fuerza impulsiva es de corta duración

comparada con el período natural del sistema. La respuesta máxima ocurrirá después de que la fuerza haya sido aplicada y su amplitud es menor que la amplitud de la fuerza impulsiva. Es importante destacar que en el caso del pulso rectangular estas características se dan aproximadamente para valores de $(t_1/t_n) < 0,16$ dado que este pulso es de una naturaleza distinta porque alcanza su amplitud máxima de manera inmediata.

- b) $\frac{t_1}{t_n} \cong 1$. La respuesta máxima ocurre mientras la fuerza impulsiva es aplicada, y su amplitud es mayor. Se dice que la respuesta se amplifica.
- c) $\frac{t_1}{t_n} > 2$. La duración del pulso es mucho mayor comparado con el período natural del sistema. A medida que $\frac{t_1}{t_n}$ aumenta, la respuesta se aproxima al pulso, de manera que sus amplitudes son muy parecidas. Es por esto que la forma del pulso toma mayor importancia y la fuerza impulsiva se torna quasiestática.

TABLA 1.1 Respuestas típicas de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento sujeto a tres diferentes pulsos [16]

t_1/t_n	Rectangular	Medio Seno	Cicloidial
1/4			
1/2			
1			
3/2			
2			
5/2			

CAPITULO 2

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO EN EL MECANISMO

DE TRANSMISION

2.1 MODELOS CONCEPTUALES DE SISTEMAS MECANICOS

El movimiento de elementos mecánicos se puede describir en varias dimensiones como traslación, rotación, o sus combinaciones. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de sistemas mecánicos están formuladas directa o indirectamente mediante la ley del movimiento de Newton.

El movimiento de rotación de un cuerpo se puede definir como el movimiento alrededor de un eje fijo. La extensión de la ley de Newton para el movimiento de rotación establece que la suma algebraica de los momentos o pares alrededor de un eje fijo es igual al producto de la inercia por la aceleración angular alrededor del eje.

$$\sum \text{fuerzas} = I\alpha \quad (2.1)$$

En donde I denota la inercia y α es la aceleración angular. Las otras variables que se usan generalmente para describir el movimiento de rotación son el par T , la velocidad angular ω y el desplazamiento angular θ . Los elementos involucrados en el movimiento de rotación son los siguientes:

- a) Inercia; es la propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimiento de rotación. La inercia de un elemento dado depende de la composición geométrica alrededor del eje de rotación y de su densidad. La inercia de un disco circular o eje alrededor de su eje geométrico está dado por:

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (2.2)$$

Cuando un par es aplicado a un cuerpo con inercia I , como se presenta en la figura 2.1, la ecuación del par se escribe como:

$$T(t) = I\alpha(t) = I \frac{d\omega(t)}{dt} = I \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (2.3)$$

Donde: $\theta(t)$ es el desplazamiento angular, $\omega(t)$ es la velocidad angular, y $\alpha(t)$ es la aceleración angular.

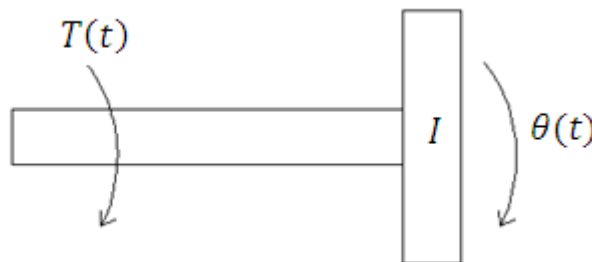


Fig. 2.1. Sistema par-inercia [13]

- b) Resorte torsional, como el caso del resorte lineal para el movimiento de traslación, la constante del resorte torsional k , en par por unidad de

desplazamiento angular, puede representar un eje cuando está sujeto a un par aplicado. La figura 2.2 ilustra un sistema par-resorte torsional que se puede representar por la ecuación:

$$T(t) = k\theta(t) \quad (2.4)$$

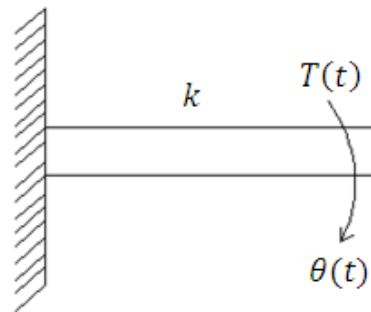


Fig. 2.2. Sistema par-resorte torsional [13]

Si el resorte torsional está pre-cargado por un par TP , la ecuación (2.4) se modifica a:

$$T(t) - TP = k\theta(t) \quad (2.5)$$

- c) Fricción para movimiento de rotación; los tres tipos de fricción modelados para el movimiento de traslación se pueden manejar para el movimiento de rotación, de esta forma:

Fricción viscosa:

$$T(t) = B \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.6)$$

Fricción estática:

$$T(t) = \pm(F_s) \mid_{\dot{\theta}=0} \quad (2.7)$$

Fricción de Coulomb:

$$T(t) = F_c \frac{d\theta(t)/dt}{\left| \frac{d\theta(t)}{dt} \right|} \quad (2.8)$$

En el caso de sistemas engranados (figura 2.3) la energía de deformación correspondiente es:

$$U_d = k_g \frac{\delta^2}{2} \quad (2.9)$$

Donde:

$$\delta = R_1\theta_1 - R_2\theta_2 \quad (2.10)$$

k_g : Rigidez de los dientes

Cuando la rigidez es muy alta, los dientes no se deforman, entonces la energía de deformación es cero.

$$R_1\theta_1 - R_2\theta_2 = 0 \quad (2.11)$$

$$\theta_2 = \frac{R_1}{R_2} \theta_1 \quad (2.12)$$

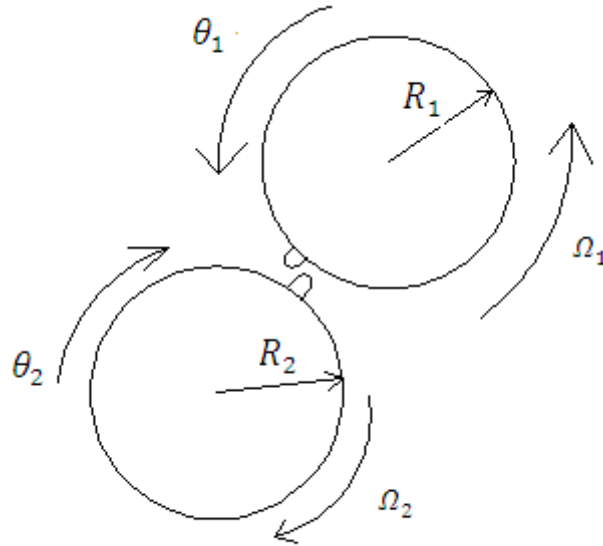


Fig. 2.3. Sistemas engranados [13]

2.2 MODELO CONCEPTUAL DEL MECANISMO DE TRANSMISION

El mecanismo de transmisión a estudiar se muestra en la figura 2.4. El mecanismo está conformado por dos ejes paralelos (motor y conducido) acoplados por un mecanismo de engranajes (piñón 2 y engranaje 3). Asimismo, los ejes motor y conducido, están conectados con la inercia del motor (entrada) y la inercia de carga (salida) respectivamente.

La figura 2.4 representa el modelo conceptual de un sistema torsional conformado por un motor eléctrico (I_1), un multiplicador (I_2, I_3), y la carga a impulsar (I_4).

Una de las aplicaciones industriales se observa en la figura 2.5, en la cual se muestra un compresor impulsado por un motor a través de un mecanismo de engranajes.

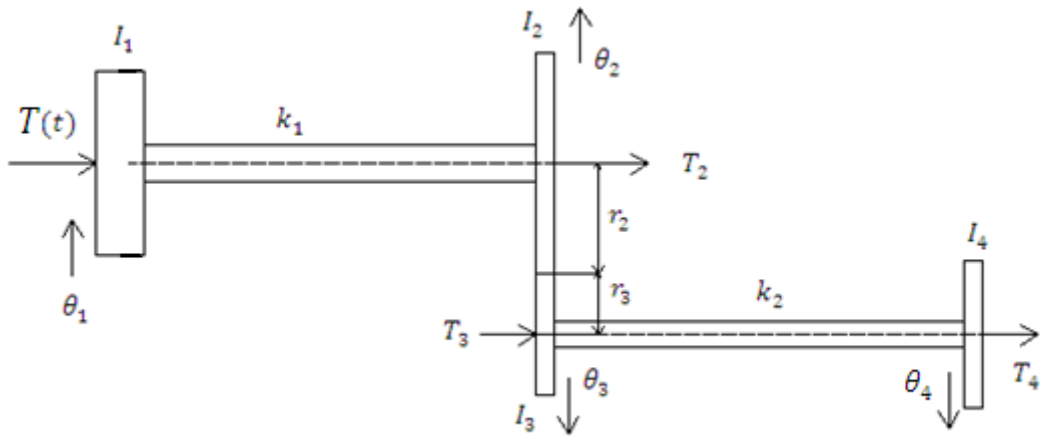


Fig. 2.4. Modelo conceptual del mecanismo de transmisión

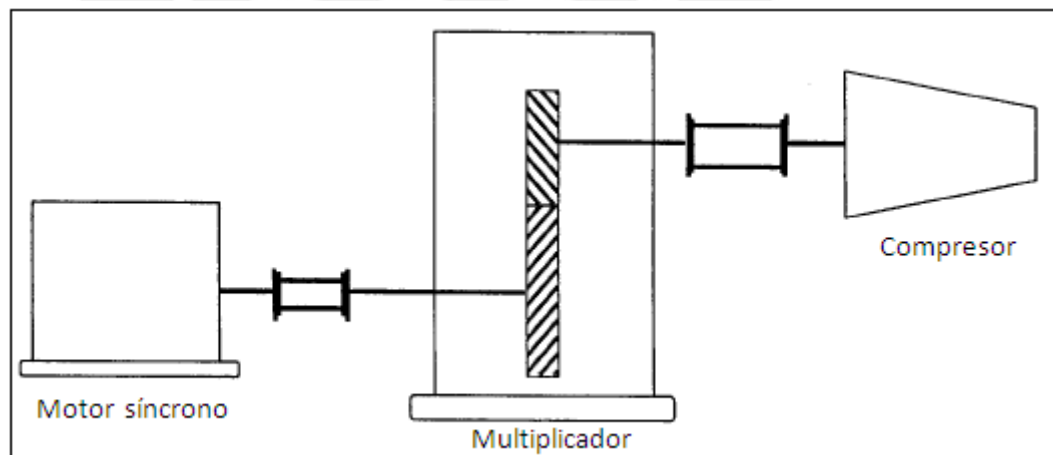


Fig. 2.5. Sistema torsional Motor – Multiplicador- Compresor [7]

2.2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO

Sobre el mecanismo de transmisión a estudiar:

- La fuerza impulsiva, $T(t)$, actúa sobre el disco 1 (I_1)
- El sistema tiene cuatro grados de libertad torsional ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$), pero con la relación cinemática $r_2\theta_2 = r_3\theta_3$, el desplazamiento θ_3 queda definido en función del desplazamiento θ_2 , reduciéndose de esta manera a tres grados de libertad torsional.
- Los engranajes se modelan como rotores rígidos
- En la etapa de arranque ($t = 0$) las condiciones iniciales de los desplazamientos ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$), velocidades ($\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4$), y aceleraciones ($\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$) son iguales a cero.
- El sistema considerado es un sistema dinámico lineal.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser deducidas utilizando las ecuaciones de *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.13)$$

Donde:

$L = E - U$; función de *Lagrange*

E : Energía cinética

U : Energía potencial

q_i : Coordenadas generalizadas

\dot{q}_i : Derivada respecto al tiempo de las coordenadas generalizadas

F : Fuerza de amortiguamiento

Q_i : Fuerzas externas sin potencial

$$E = \frac{1}{2}I_a\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_b\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}_4^2 \quad (2.14)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\theta_3 - \theta_4)^2 \quad (2.15)$$

Por el principio de los trabajos virtuales:

$$\delta W = T(t)\delta\theta_1 + T_4\delta\theta_4 \quad (2.16)$$

Normalmente el amortiguamiento en sistemas torsionales es pequeño y tiene poco efecto sobre las frecuencias naturales, por lo tanto las frecuencias naturales y modos de vibración torsional pueden ser calculados asumiendo el amortiguamiento igual a cero. Asimismo, la respuesta máxima es alcanzada en un período muy corto de tiempo, antes de que las fuerzas de amortiguamiento puedan absorber gran parte de la energía de vibración del sistema.

De esta manera en la ecuación 2.13, las fuerzas de amortiguamiento tienden a cero.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.17)$$

Desarrollando la función de *Lagrange*:

$$L = \frac{1}{2} \left[I_1 \dot{\theta}_1^2 + \left[I_2 + \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 I_3 \right] \dot{\theta}_2^2 + I_4 \dot{\theta}_4^2 - k_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 - k_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \theta_2 - \theta_4 \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

Para cada coordenada generalizada; $\theta_1, \theta_2, \theta_4$; ; tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= T(t) \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 &= T(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \left[I_2 + \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 I_3 \right] \ddot{\theta}_2 - k_1 \theta_1 + \left[k_1 + \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 k_2 \right] \theta_2 - k_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} &= 0 \\ I_4 \ddot{\theta}_4 - k_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \theta_2 + k_2 \theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ordenando, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 &= T(t) \\ \left[I_2 + \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 I_3 \right] \ddot{\theta}_2 - k_1 \theta_1 + \left[k_1 + \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 k_2 \right] \theta_2 - k_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \theta_4 &= 0 \\ I_4 \ddot{\theta}_4 - k_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \theta_2 + k_2 \theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 k_2 & -\left(\frac{r_2}{r_3}\right) k_2 \\ 0 & -\left(\frac{r_2}{r_3}\right) k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.3. CASO DE ESTUDIO: SISTEMA DE TRANSMISION POR ENGRANAJES

Teniendo presente que el objetivo de este trabajo es la comprensión de las vibraciones torsionales, se ha tomado como caso de estudio un sistema de transmisión por engranajes, cuyos parámetros fueron seleccionados de modo que las frecuencias torsionales se encuentren en una gama que permitan realizar el análisis modal y el análisis bajo régimen transitorio. Asimismo, los parámetros fueron seleccionados como razonablemente prácticos para la fabricación a futuro de este sistema y realizar ensayos experimentales.

Los parámetros seleccionados del sistema a estudiar son:

Rotor (del motor):

Masa del rotor, $m_r = 4,5 \text{ Kg}$

Radio del rotor, $r_r = 0,070 \text{ m}$

Momento de inercia del rotor, $I_1 = 0,0110 \text{ Kg} - \text{m}^2$

Eje Motor:

Diámetro del eje motor, $d_{em} = 0,025 \text{ m}$

Longitud del eje motor, $l_{em} = 0,5 \text{ m}$

Rigidez torsional, $k_1 = 5900 \text{ N} - \text{m}$

Piñón:

Módulo, $modulop = 4$

Número de dientes, $Z_p = 40$

Masa del piñón, $m_p = 6,4 \text{ Kg}$

Momento de inercia del piñón, $I_2 = 0,02048 \text{ Kg} - m^2$

Engranaje:

Número de dientes, $Z_e = 25$

Masa del engranaje, $m_e = 2,5 \text{ Kg}$

Momento de inercia del engrane, $I_3 = 0,00312 \text{ Kg} - m^2$

Eje Conducido:

Diámetro del eje conducido, $d_{ec} = 0,025 \text{ m}$

Longitud del eje conducido, $l_{ec} = 0,5 \text{ m}$

Rigidez torsional, $k_2 = 5900 \text{ N} - m$

Carga:

Masa de la carga, $m_c = 12,4 \text{ Kg}$

Momento de inercia de la carga, $I_4 = 0,062 \text{ Kg} - m^2$

Relación de transmisión; $r_t = \frac{Z_p}{Z_e} = 1,6$

Torque nominal, $T_n = 1 \text{ N} - m$

Frecuencia de excitación, $\omega = 60 \text{ Hz}$

CAPITULO 3

ANALISIS DE LAS VIBRACIONES TORSIONALES

BAJO REGIMEN TRANSITORIO

Uno de los principales problemas cuando se trata de estimar la respuesta de un sistema sujeto a excitaciones externas es idealizar dicha excitación. En la práctica, la señal de entrada para un sistema no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no es posible expresarla exactamente; sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar de forma analítica o mediante curvas.

Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar análisis matemáticos y experimentales de sistemas mecánicos, ya que las señales son funciones del tiempo muy simples.

Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian de forma gradual, una función rampa será una buena señal de prueba. Asimismo si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón será una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso será la mejor.

Para nuestro sistema simularemos el torque durante la etapa de arranque, por medio de una función impulsiva sinusoidal, $T(t)$, definida por:

$$T(t) = T_n \sin(\omega t) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.1)$$

Donde:

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

T_n : Torque nominal

ω : Frecuencia de excitación, $\omega = 60 \text{ Hz}$

3.1 SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

Se realiza el análisis para el sistema torsional de un grado de libertad (figura 3.1), lo que nos permitirá conocer la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva sinusoidal y conocer a priori la tendencia de esta respuesta para sistemas de múltiples grados de libertad.

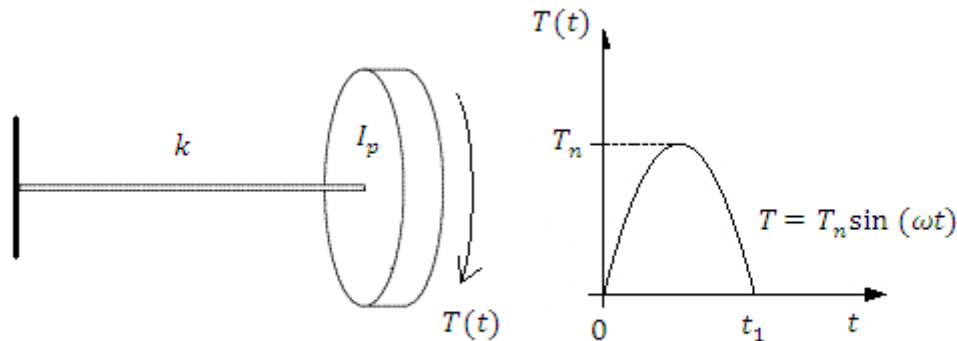


Fig. 3.1. Modelo de un grado de libertad. Excitación por torque aplicado en el disco

Para el sistema de un grado de libertad, la frecuencia natural está dada por la ecuación (1.24).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I_p}}$$

Donde:

k : Rigidez torsional del eje, $k = \frac{JG}{l}$

J : Momento de inercia polar del eje, $J = \frac{\pi d^4}{32}$

d : Diámetro del eje

l : Longitud del eje

G : Módulo de corte, $G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

ρ : Densidad del material, $\rho = 7860 \text{ Kg/m}^3$

I_p : Momento de inercia polar del disco, $I_p = \frac{\rho \pi t D^4}{32}$

D : Diámetro del disco

t : Espesor del disco

Reemplazando en la ecuación (1.24) obtenemos una ecuación generalizada para la frecuencia natural dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{G}{\rho t} \times \frac{d^4}{D^4 l}} \quad (3.2)$$

Seleccionaremos como parámetros iniciales para este sistema los siguientes:

$d = 20 \text{ mm}; l = 400 \text{ mm}$

$D = 195 \text{ mm}; t = 8.5 \text{ mm}$

De la ecuación (1.26) obtenemos la respuesta del sistema a un pulso sinusoidal.

$$\frac{T_{st}}{T_n} = \frac{1}{1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.3)$$

Tomando como datos los parámetros seleccionados para el sistema, las ecuaciones (3.2) y (3.3); se elaboró un programa de cálculo en Matlab que nos permite obtener las curvas características del comportamiento de la frecuencia natural (ω_n), la razón de duración del pulso (t_1/t_n) y la respuesta del sistema (T_{st}/T_n); variando los parámetros d, D, l . Los casos de análisis se presentan en la tabla 3.1

TABLA 3.1 Casos de análisis para el sistema de un grado de libertad.

Parámetros variables (x); Parámetros constantes (-)

	d	l	D
CASO I	x	-	-
CASO II	-	x	-
CASO III	-	-	X

Los resultados se muestran en las figuras 3.2 a 3.10

CASO I: Diámetro (d) del eje variable

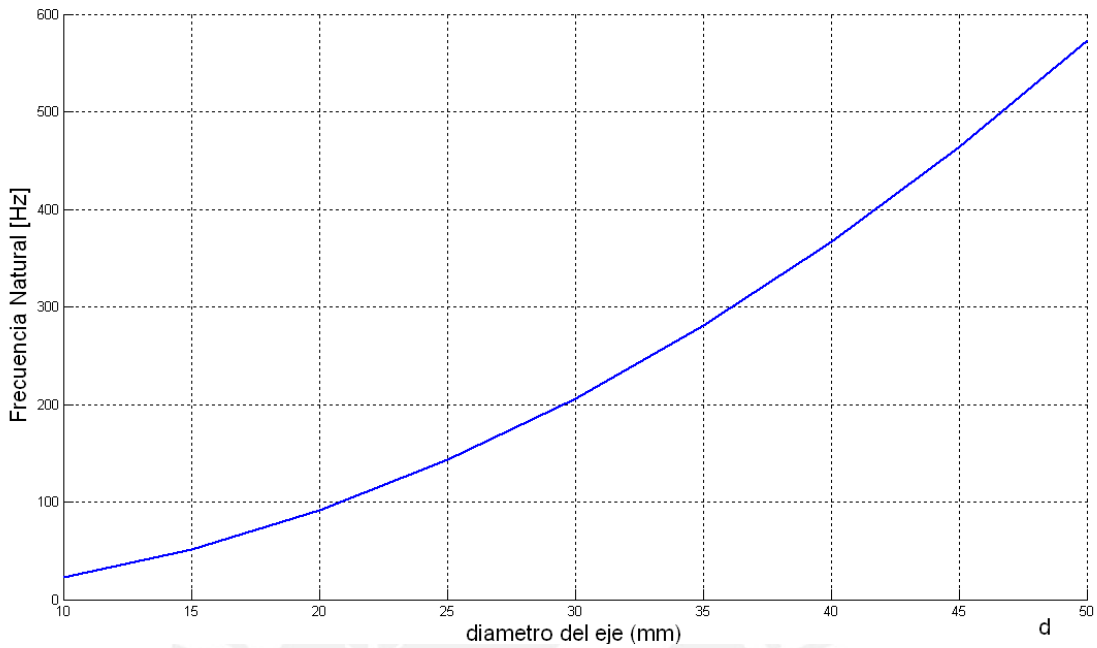


Fig. 3.2. Frecuencia Natural del sistema de un grado de libertad para (d) variable

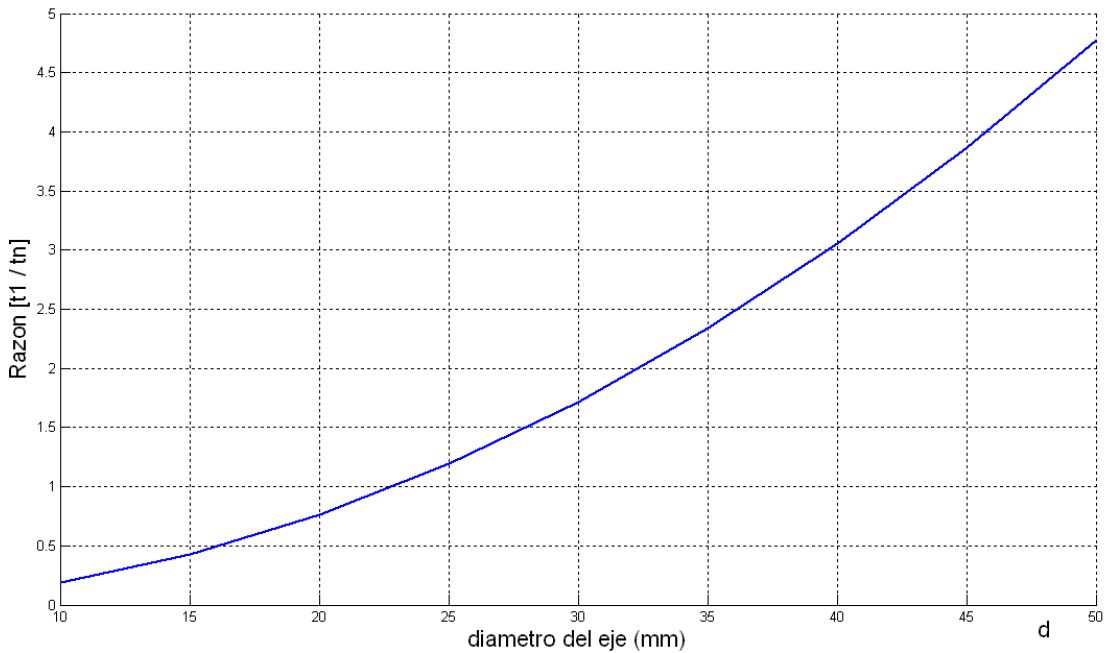


Fig. 3.3. Razón de duración del pulso del sistema de un grado de libertad para (d) variable

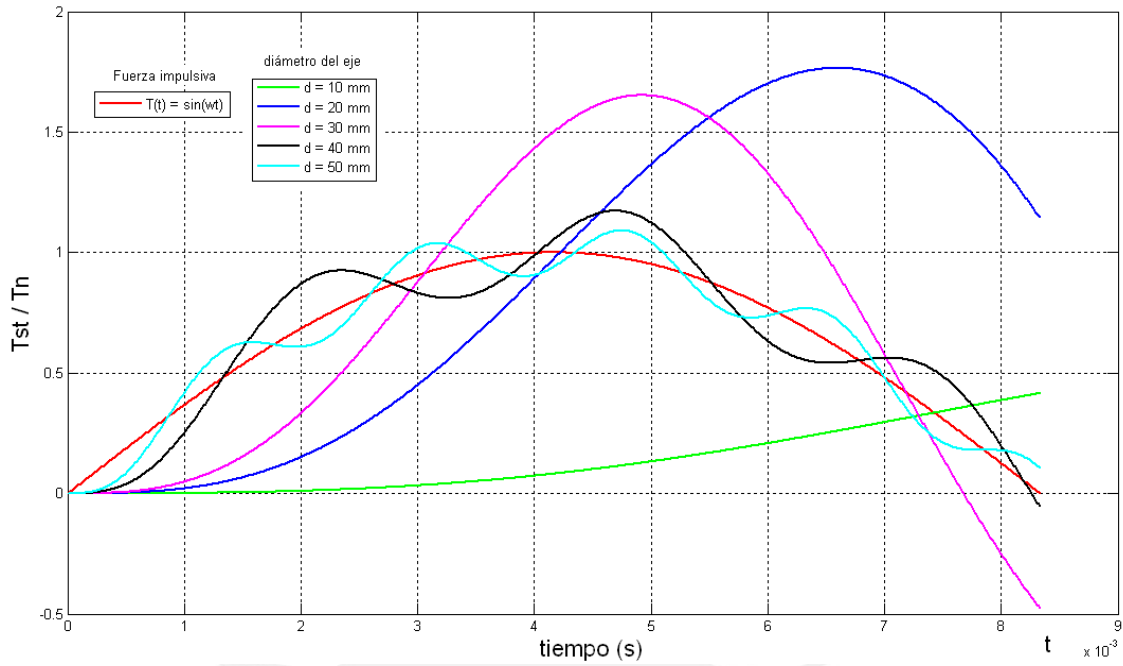


Fig. 3.4. Respuesta del sistema de un grado de libertad para (d) variable

CASO II: Longitud (l) del eje variable

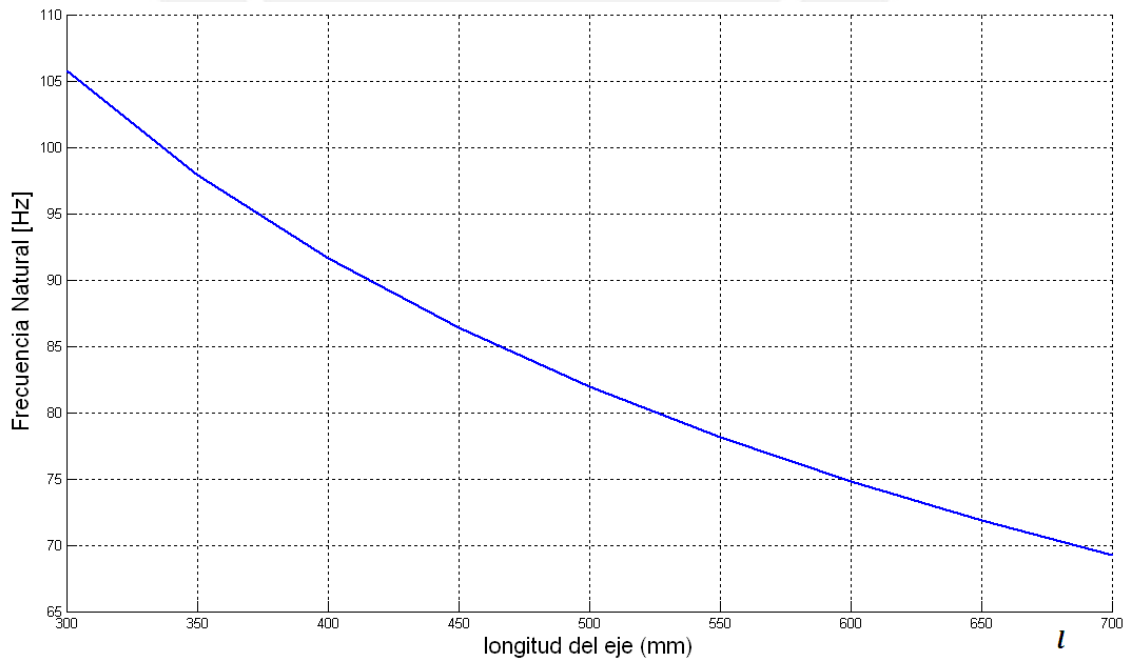


Fig. 3.5. Frecuencia Natural del sistema de un grado de libertad para (l) variable

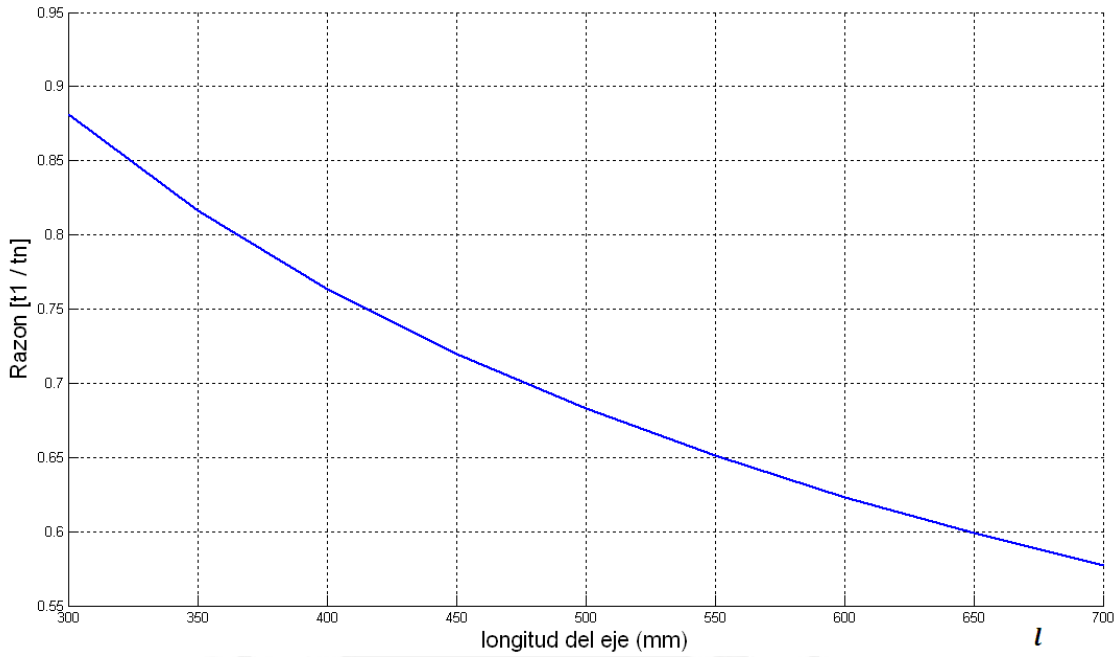


Fig. 3.6. Razón de duración del pulso del sistema de un grado de libertad para (l) variable

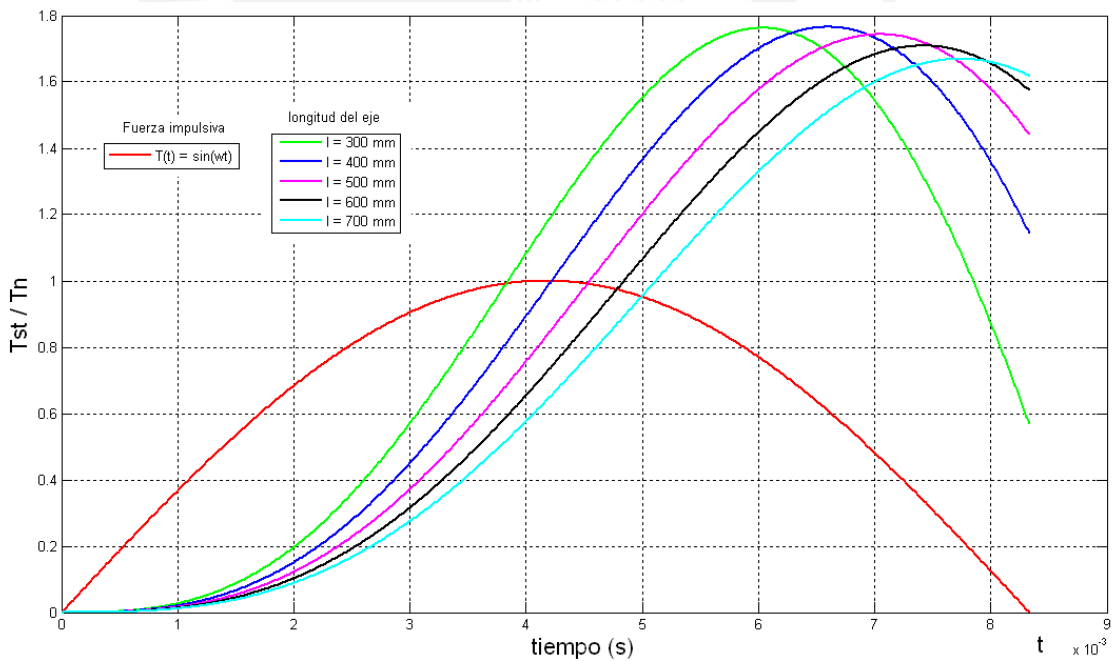


Fig. 3.7. Respuesta del sistema de un grado de libertad para (l) variable

CASO III: Diámetro (D) del disco variable

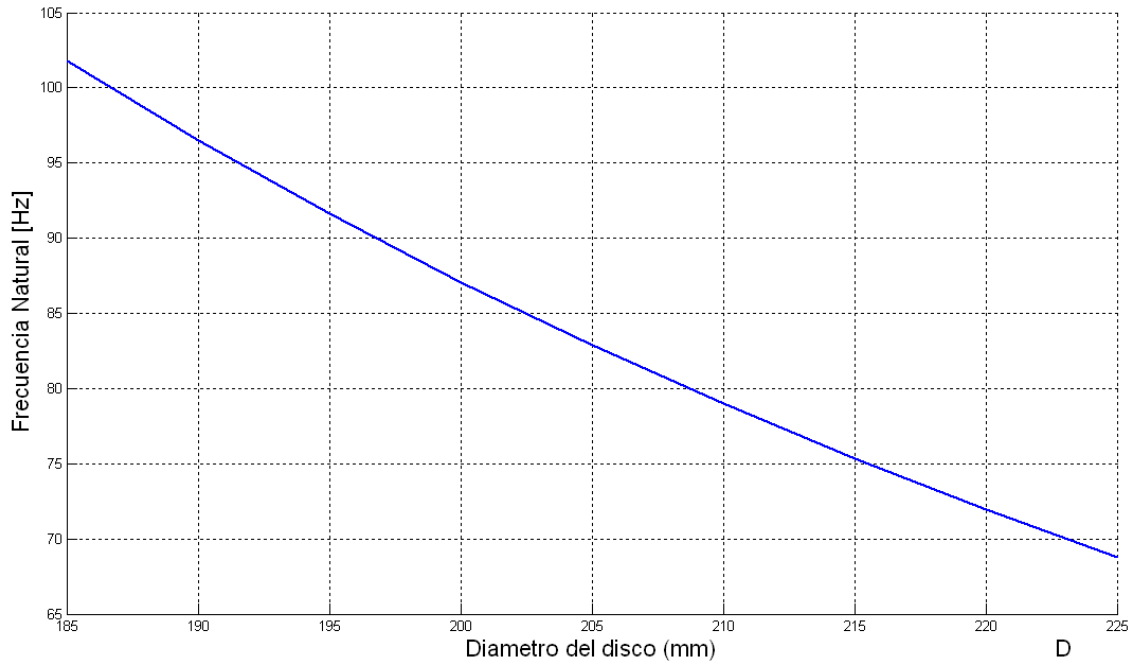


Fig. 3.8. Frecuencia Natural del sistema de un grado de libertad para (D) variable

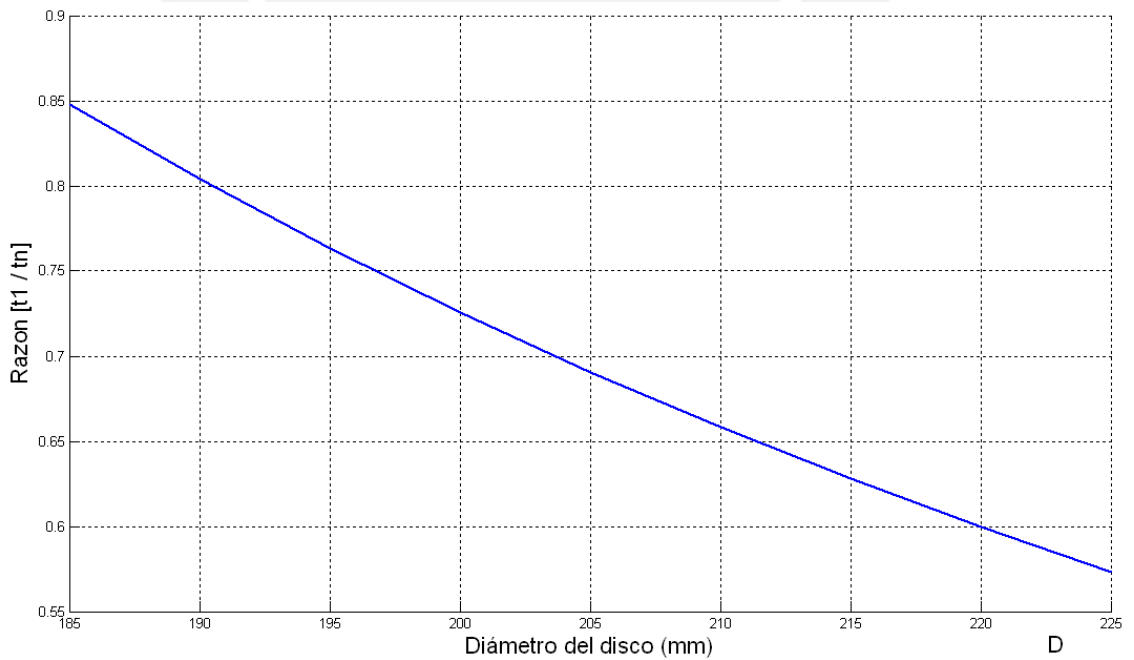


Fig. 3.9. Razón de duración del pulso del sistema de un grado de libertad para (D) variable

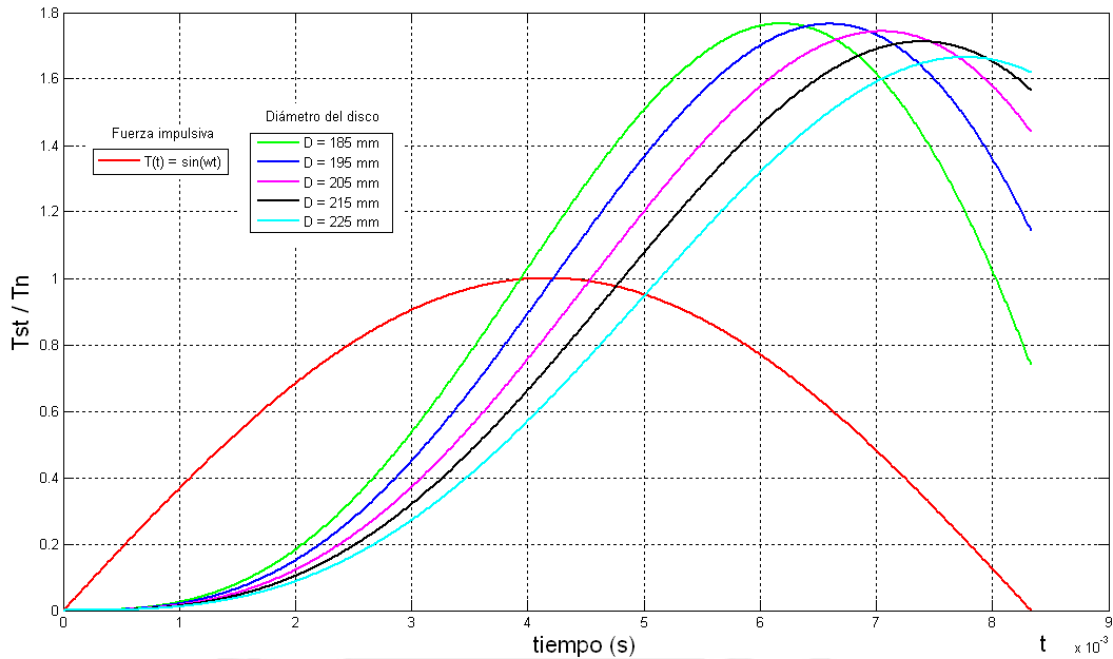


Fig. 3.10. Respuesta del sistema de un grado de libertad para (D) variable

3.2 SISTEMA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD. MECANISMO DE TRANSMISION

Tomando como datos las ecuaciones (2.23) , (3.1) y los parámetros definidos en el apartado 2.3, se elaboró un programa de cálculo en Matlab que nos permite obtener las curvas características del comportamiento de la frecuencia natural (ω_n), y la respuesta del sistema (T_{st}/T_n) ante una fuerza impulsiva sinusoidal. Se presentan seis casos de análisis, lo cuales consideran la variación de los parámetros $k_1, I_2, r_2/r_3, k_2, I_4$. Asimismo, para cada caso se evaluaron los modos de vibración torsional variando ω_n , empleando para ello el Método de Holzer.

Los casos de análisis se presentan en la tabla 3.2

TABLA 3.2 Casos de análisis para el sistema de tres grados de libertad.
Parámetros variables (x); Parámetros constantes (-)

	k_1	I_2	r_2/r_3	k_2	I_4
CASO I	x	-	-	-	-
CASO II	-	X	x	-	-
CASO III	-	X	-	-	-
CASO IV	-	-	x	-	-
CASO V	-	-	-	x	-
CASO VI	-	-	-	-	X

Los resultados se muestran en las figuras 3.11 a 3.34

CASO I: Rigidez del eje motor (k_1) variable y los parámetros ($I_1, I_2, I_3, r_2/r_3, k_2, I_4$) se mantienen constantes.

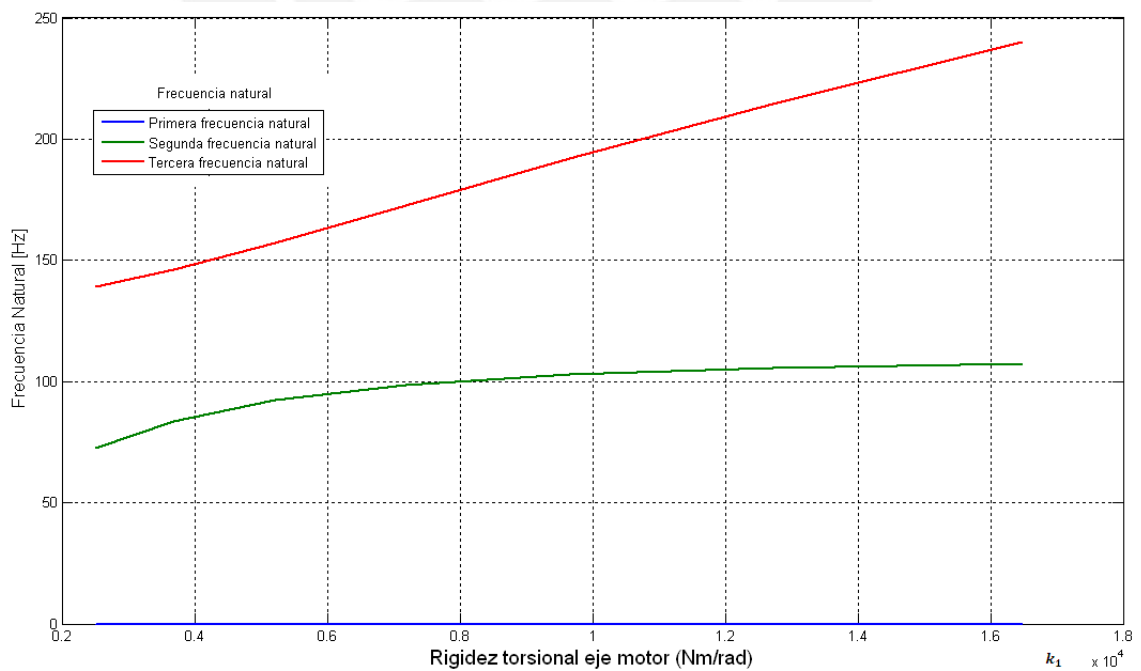


Fig. 3.11. Frecuencias Naturales torsionales para (k_1) variable

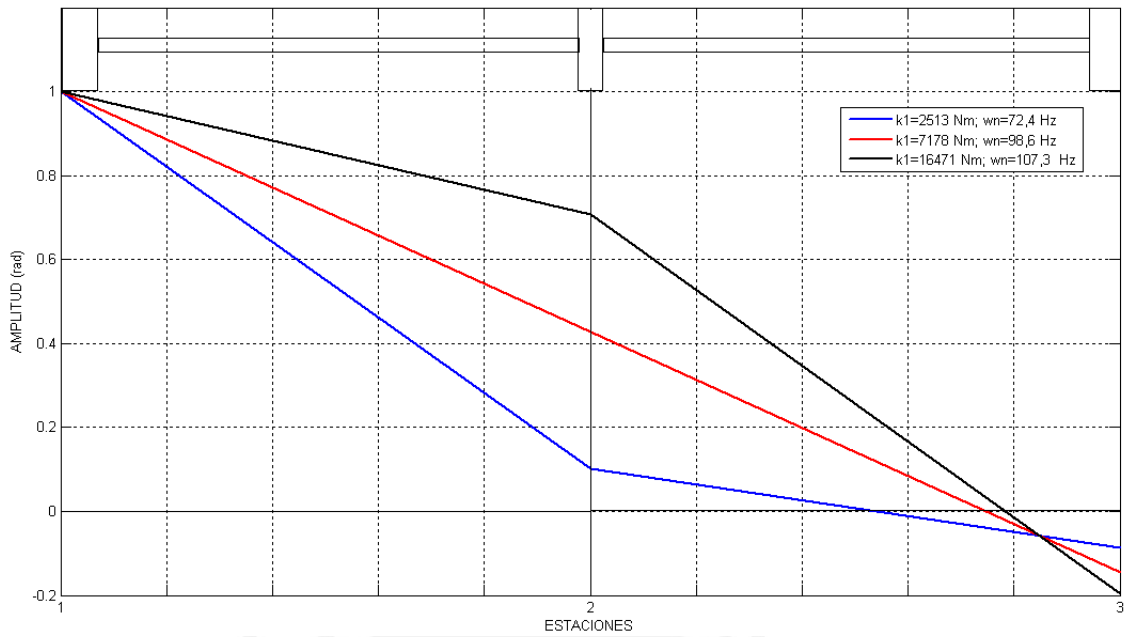


Fig. 3.12. Modos de Vibración torsional para (k_1) variable

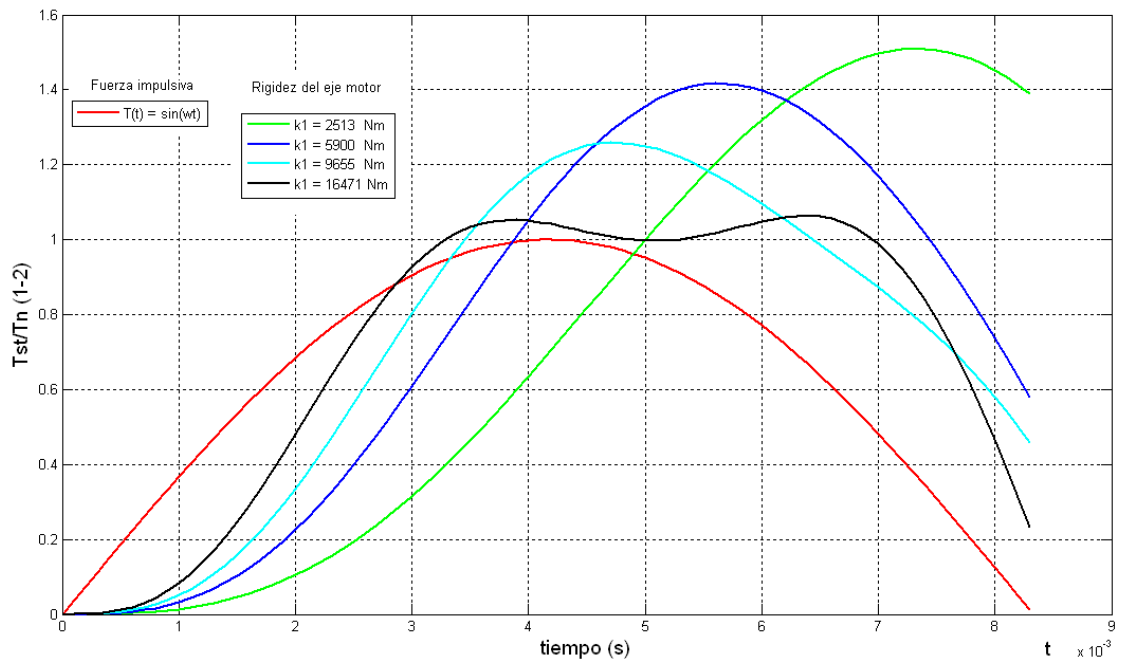


Fig. 3.13. Respuesta del sistema ($T_{st \ 1-2}/T_n$) para (k_1) variable

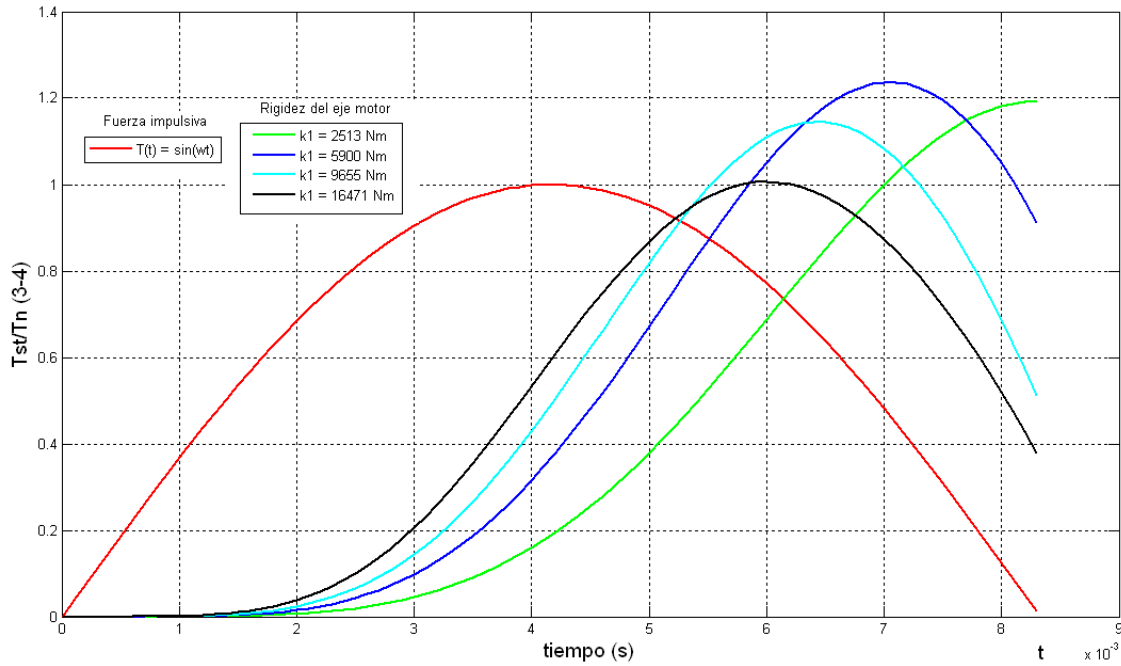


Fig. 3.14. Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (k_1) variable

CASO II: Inercia del piñón (I_2) y (r_2/r_3) variables. Los parámetros (I_1, k_1, I_3, k_2, I_4) se mantienen constantes

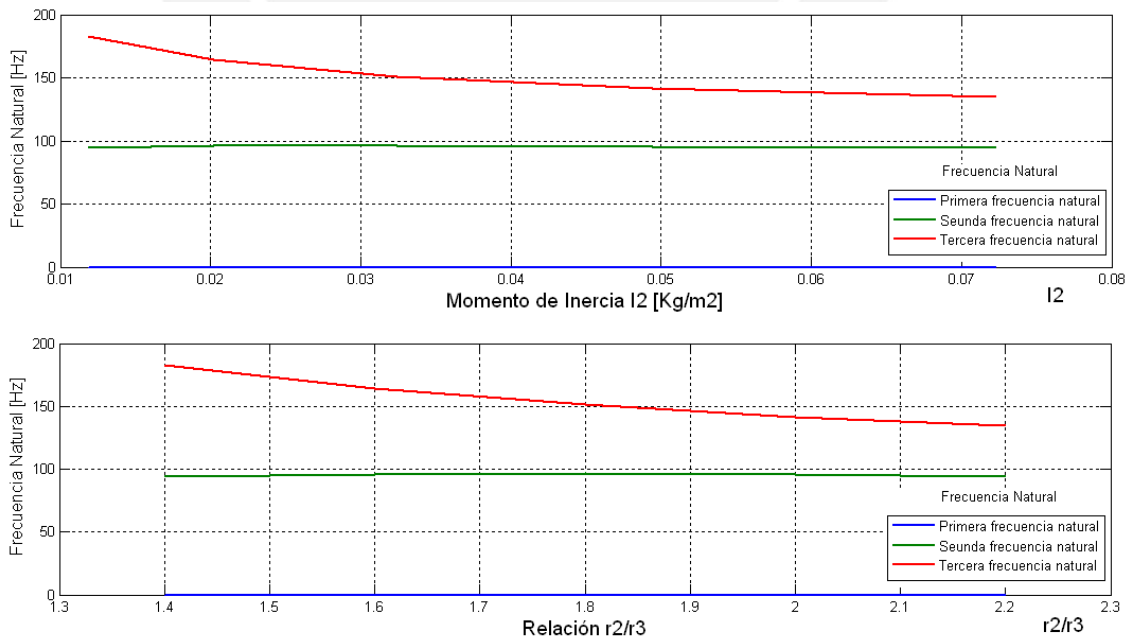


Fig. 3.15. Frecuencias Naturales torsionales para (I_2) y (r_2/r_3) variables

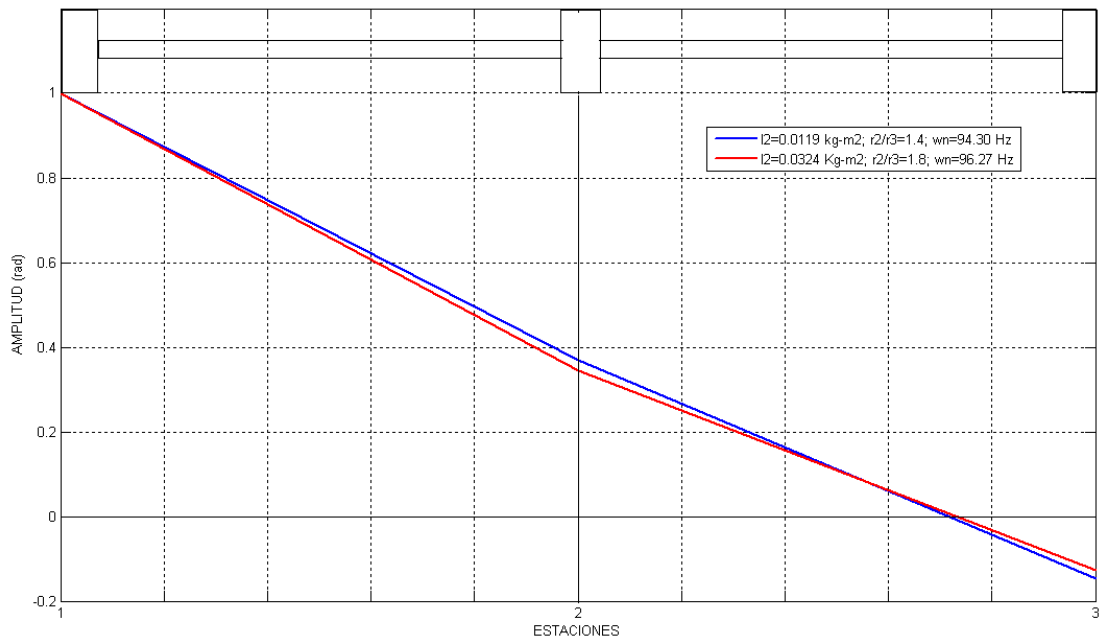


Fig. 3.16. Modos de vibración torsional para (I_2) y (r_2/r_3) variables

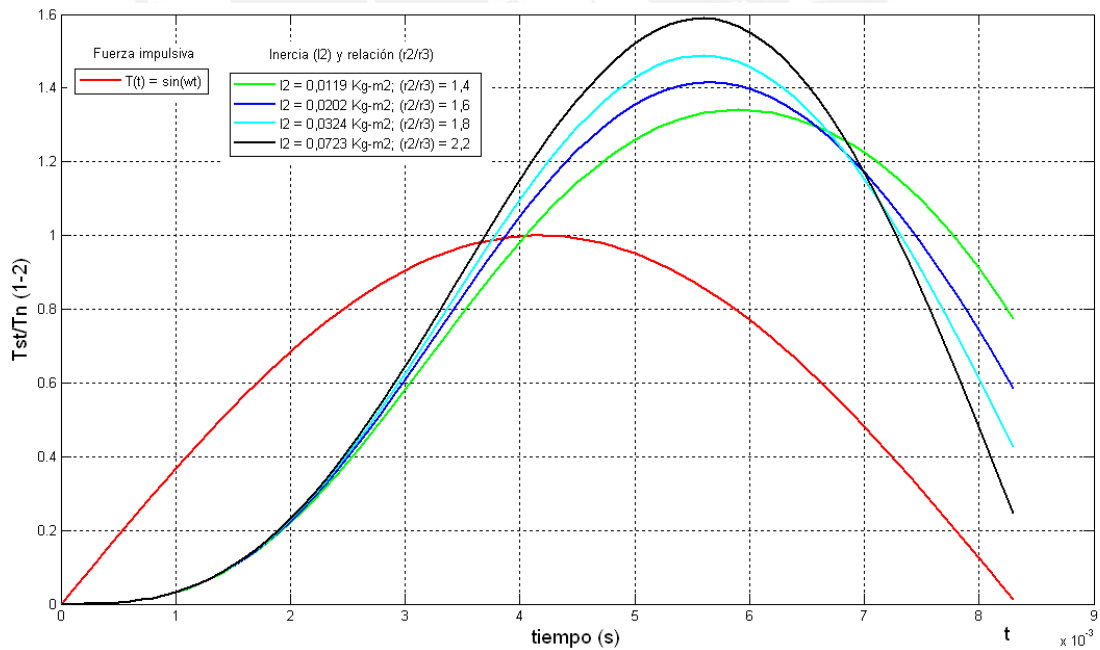


Fig. 3.17. Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (I_2) y (r_2/r_3) variables

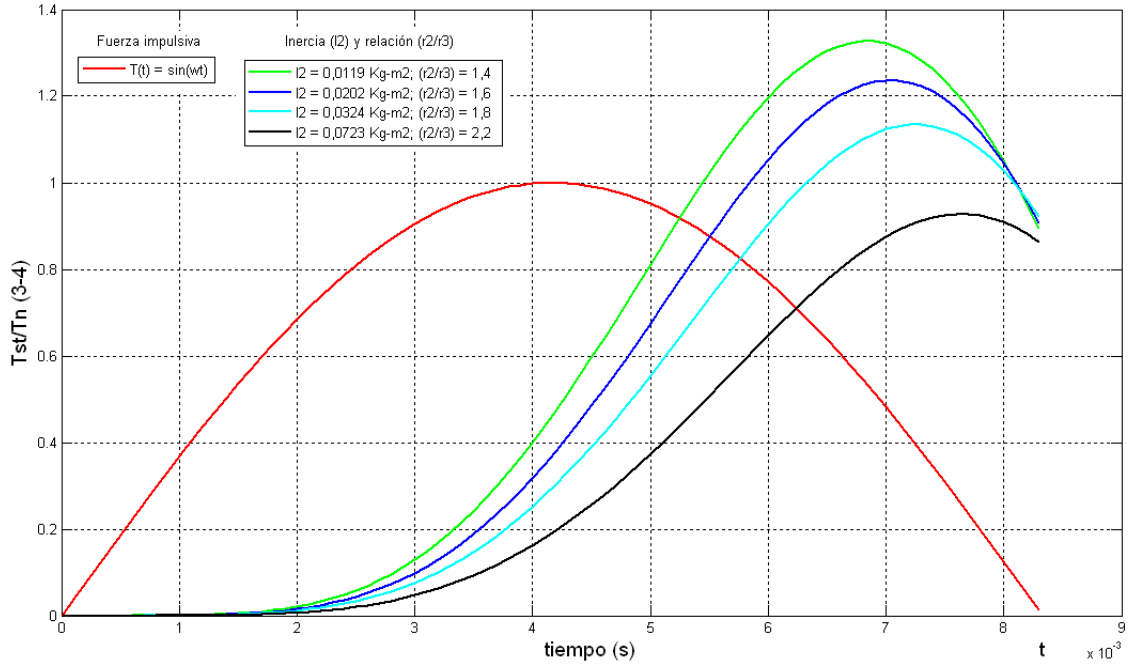


Fig. 3.18. Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (I_2) y (r_2/r_3) variables

CASO III: Inercia del piñón (I_2) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, r_2/r_3, k_2, I_4$) se mantienen constantes

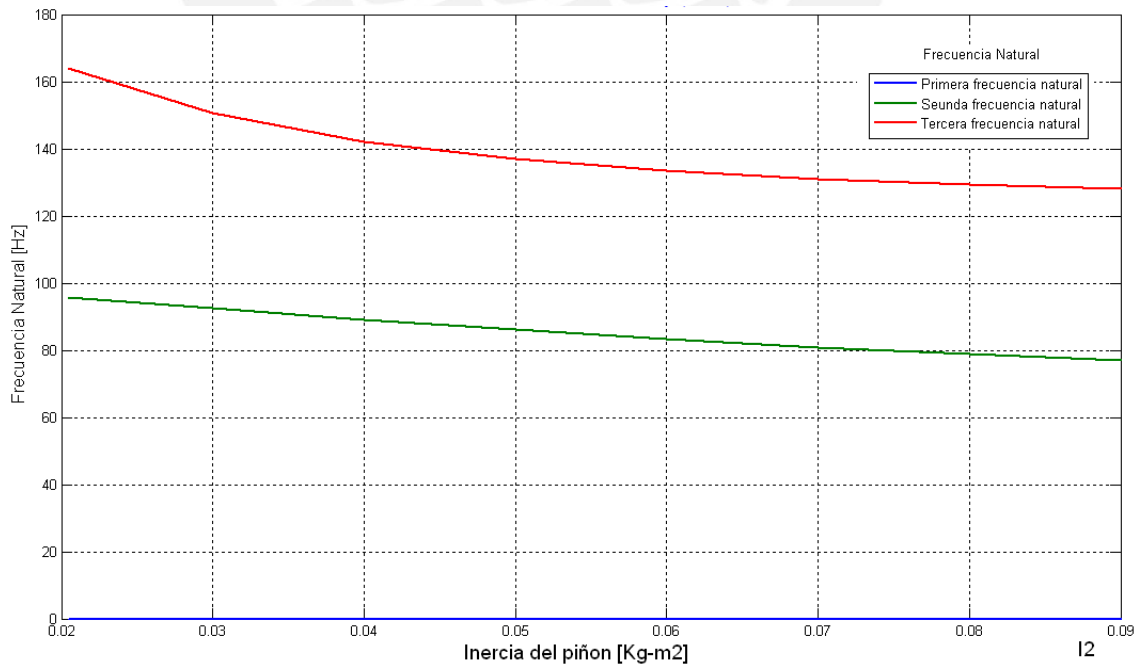


Fig. 3.19. Frecuencias Naturales torsionales para (I_2) variable

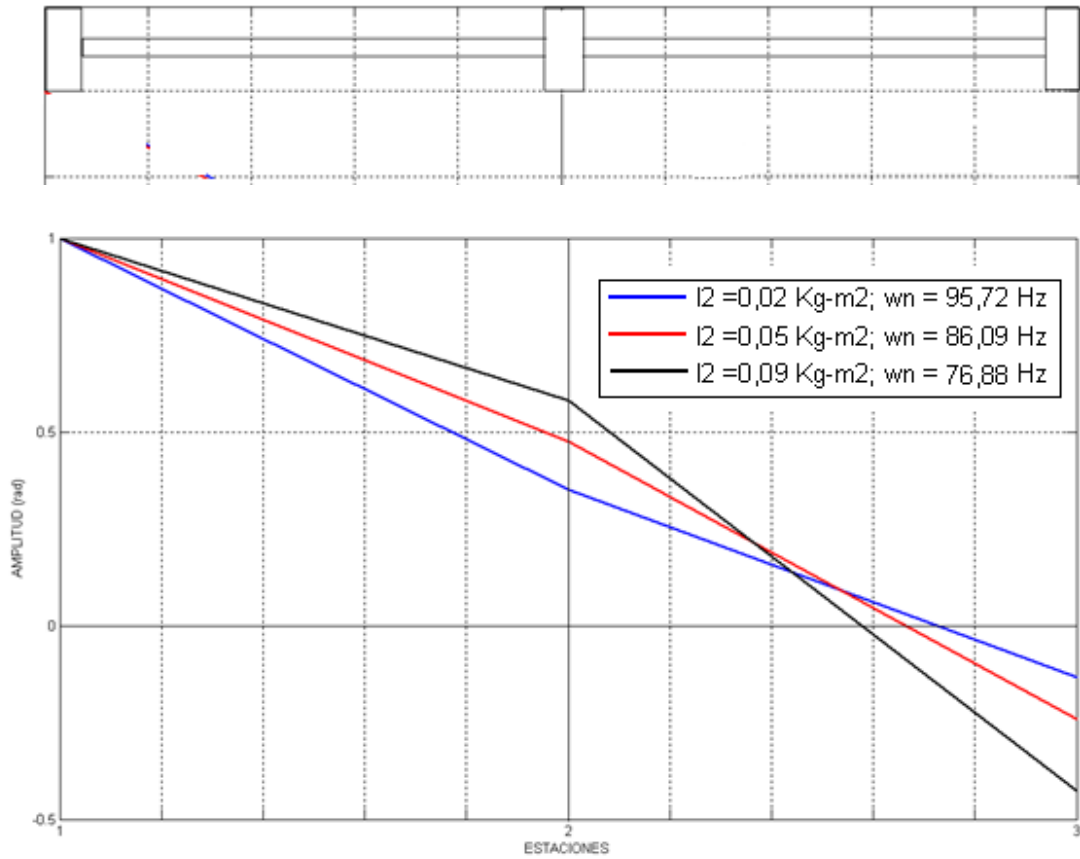


Fig. 3.20. Modos de vibración torsional para (I_2) variable

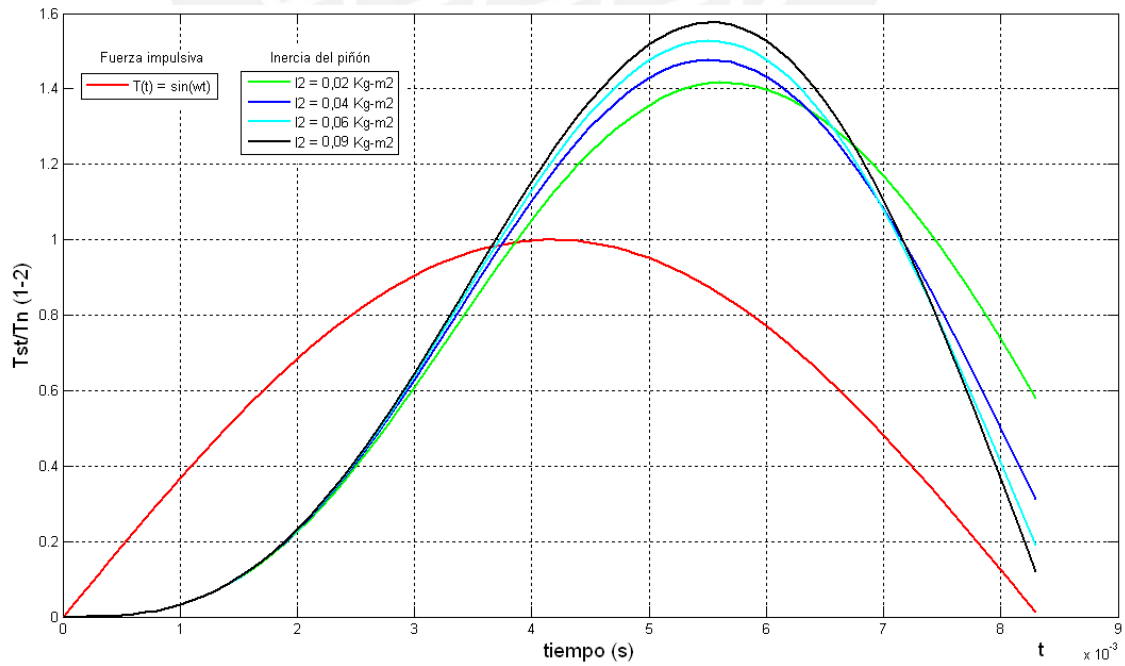


Fig. 3.21. Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (I_2) variable

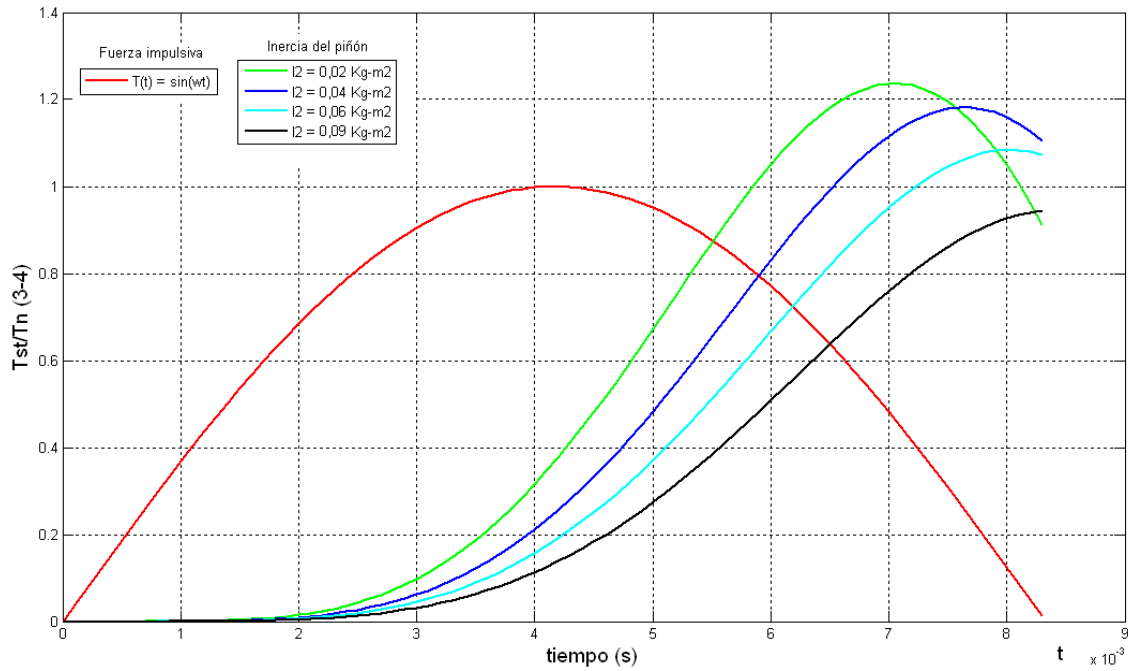


Fig. 3.22. Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (I_2) variable

CASO IV: Relación de radios (r_2/r_3) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, I_2, k_2, I_4$) se mantienen constantes

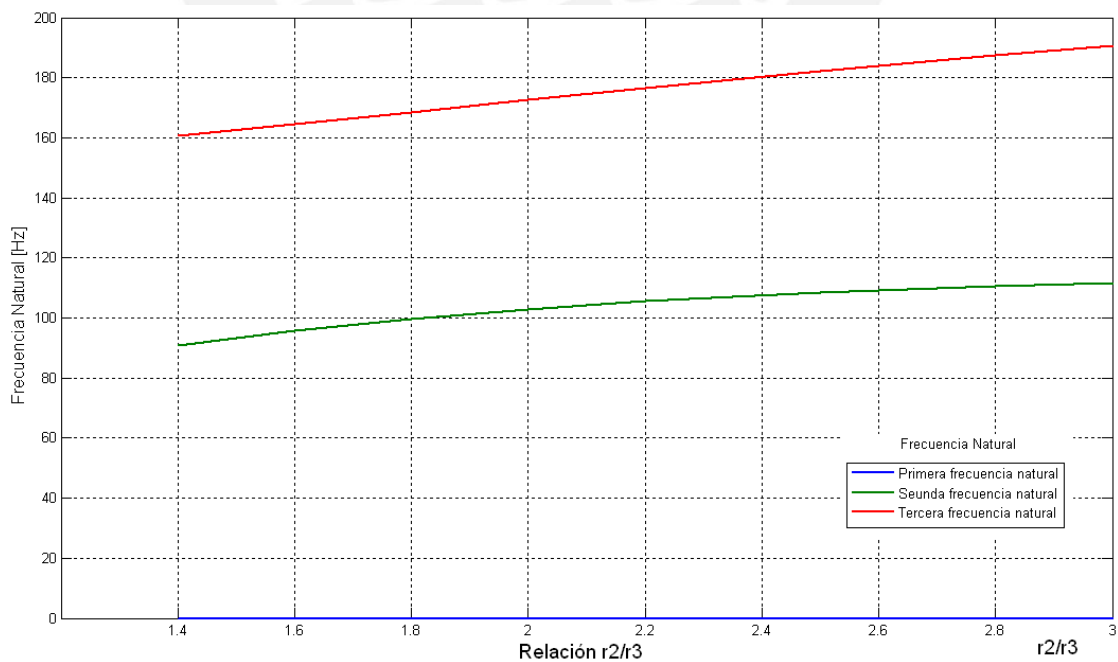


Fig. 3.23. Frecuencias Naturales torsionales para (r_2/r_3) variable

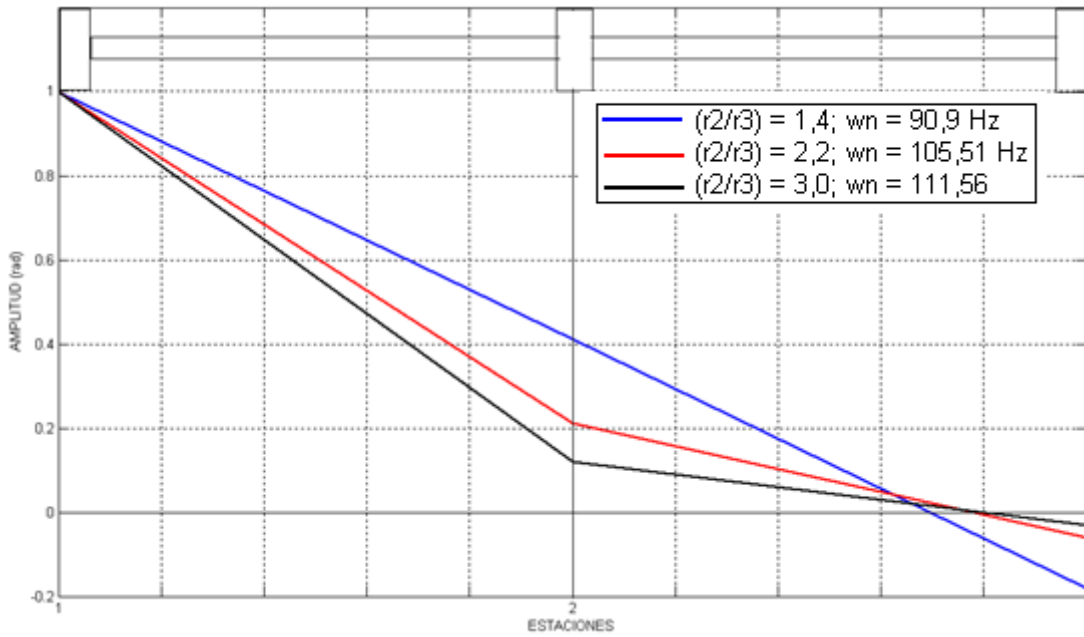


Fig. 3.24. Modos de vibración torsional para (r_2/r_3) variable

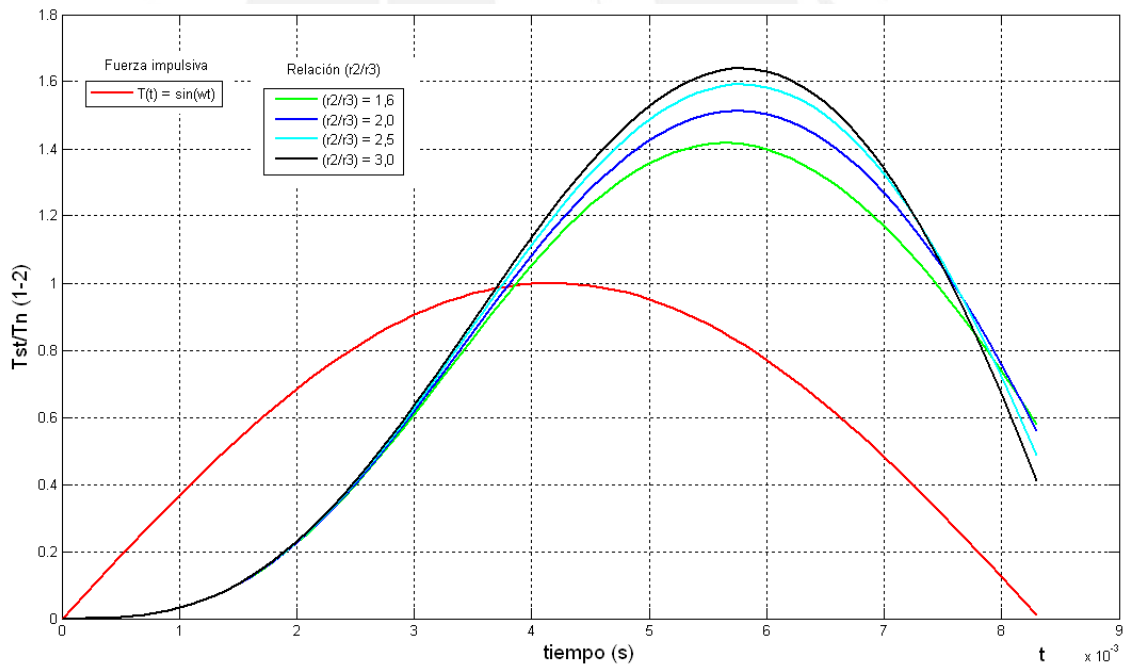


Fig. 3.25. Respuesta del sistema $(T_{st\ 1-2}/T_n)$ para (r_2/r_3) variable

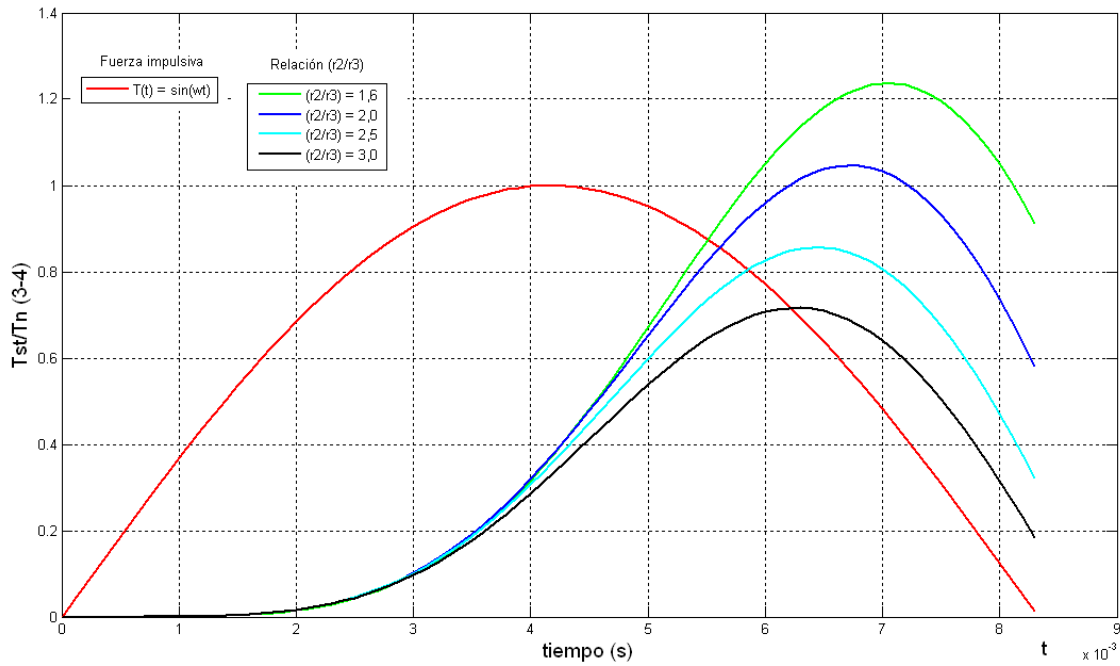


Fig. 3.26. Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (r_2/r_3) variable

CASO V: Rigidez del eje conducido (k_2) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, r_2/r_3, I_2, I_4$) se mantienen constantes

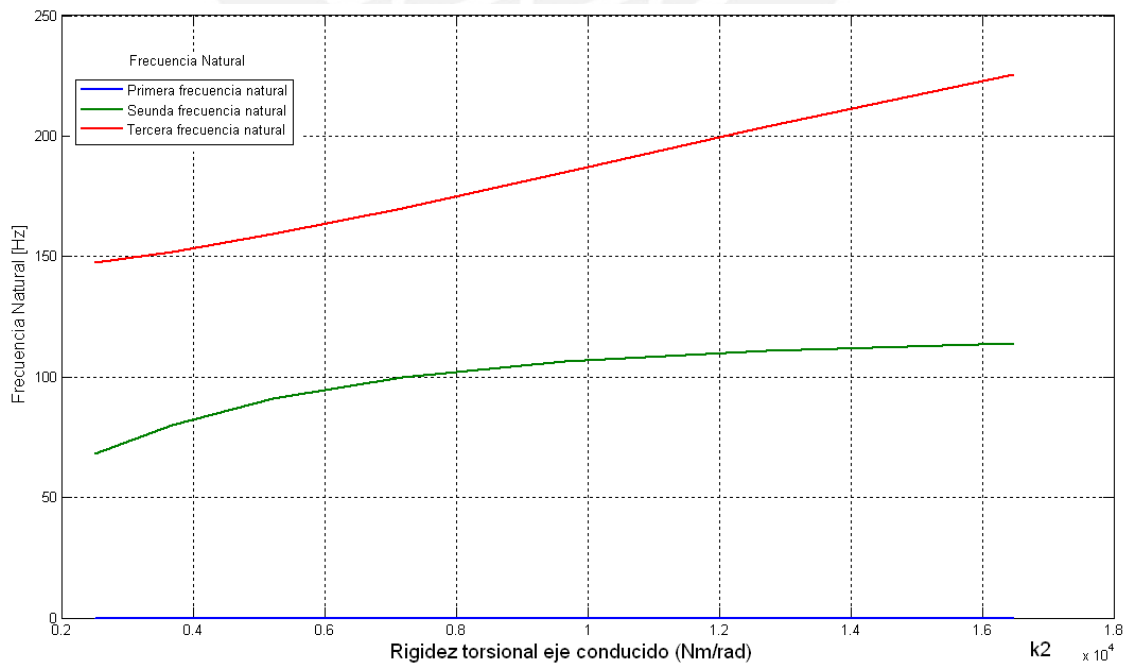


Fig. 3.27. Frecuencias Naturales torsionales para (k_2) variable

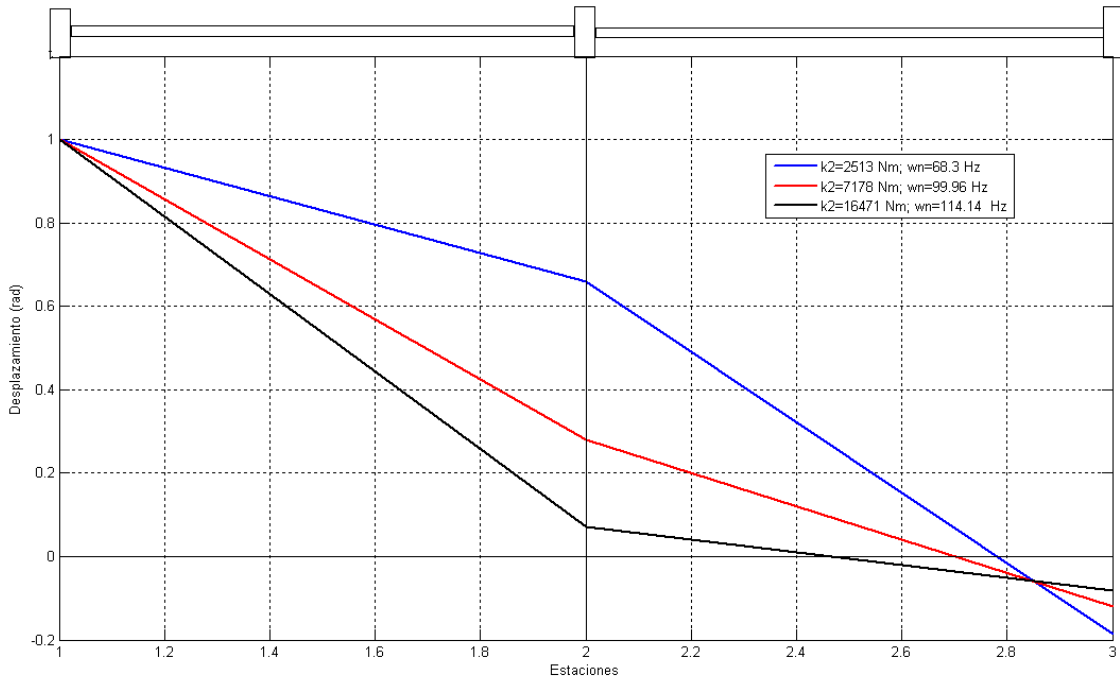


Fig. 3.28. Modos de vibración torsional para (k_2) variable

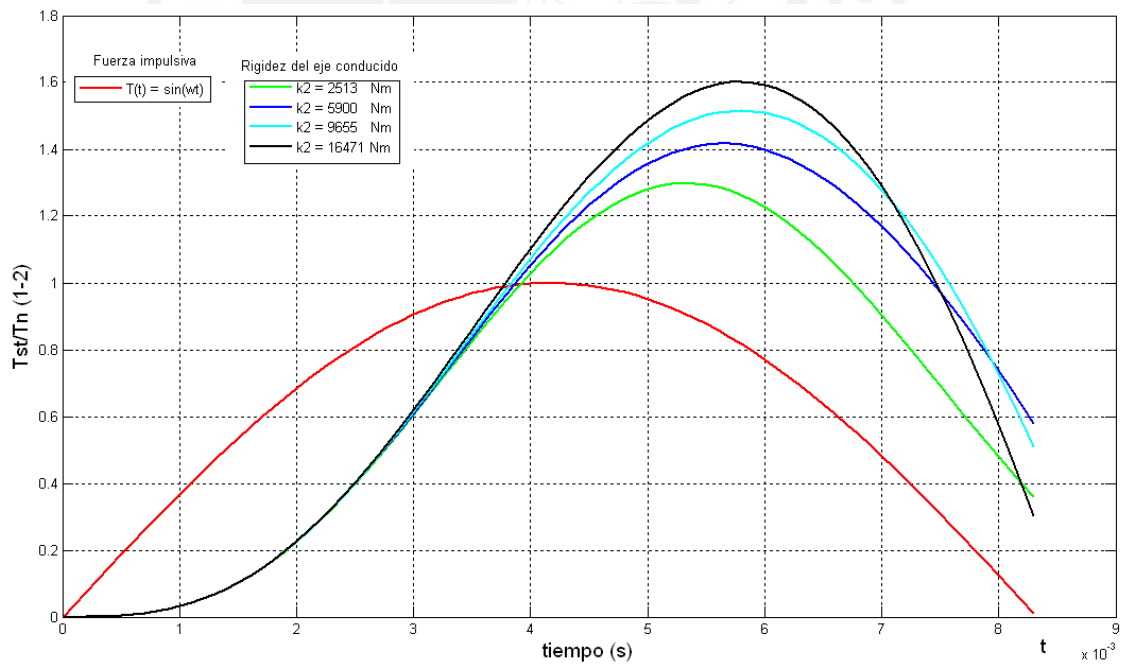


Fig. 3.29. Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (k_2) variable

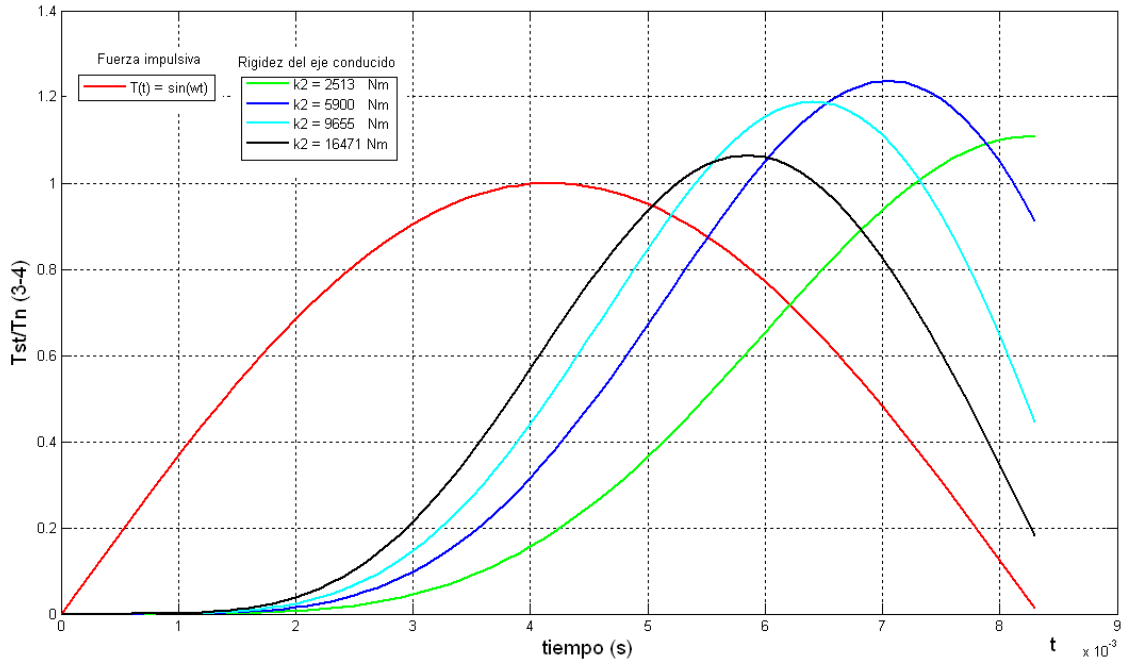


Fig. 3.30. Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (k_2) variable

CASO VI: Inercia de la carga (I_4) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, r_2/r_3, I_2, k_2$) se mantienen constantes.

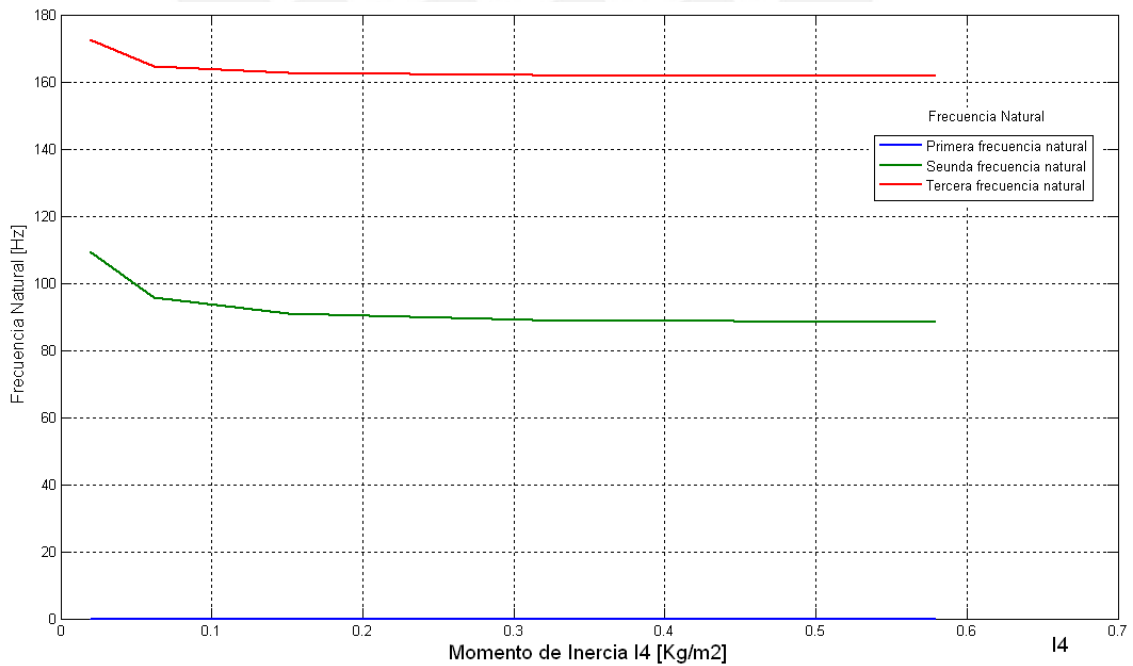


Fig. 3.31. Frecuencias Naturales torsionales para (I_4) variable

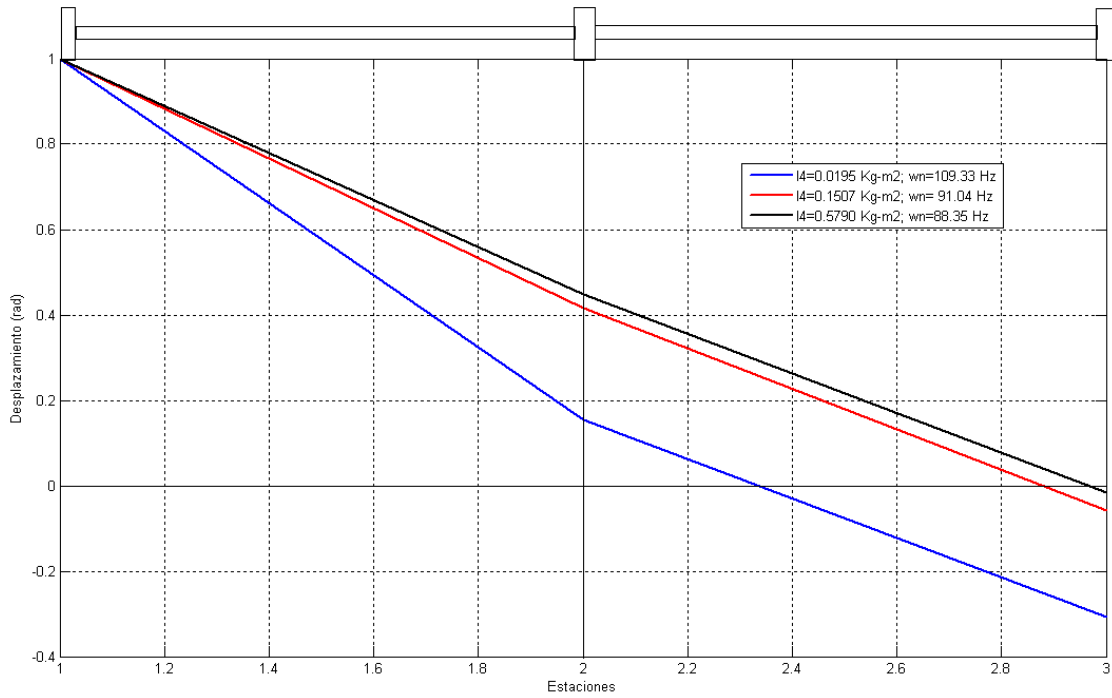


Fig. 3.32. Modos de vibración torsional para (I_4) variable

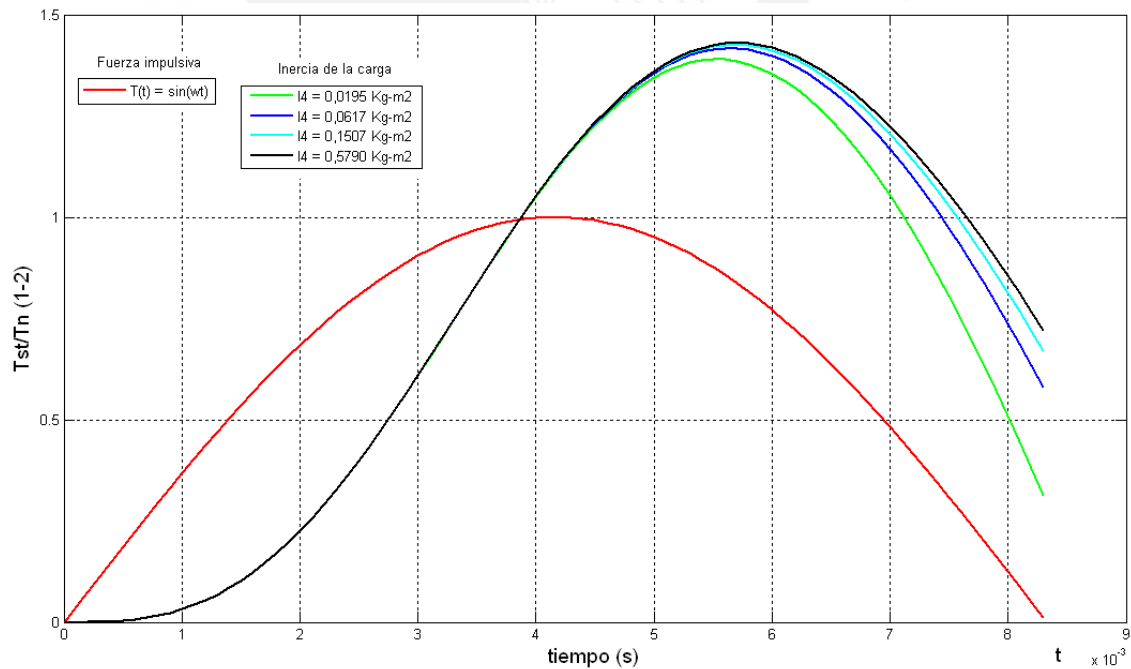


Fig. 3.33. Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (I_4) variable

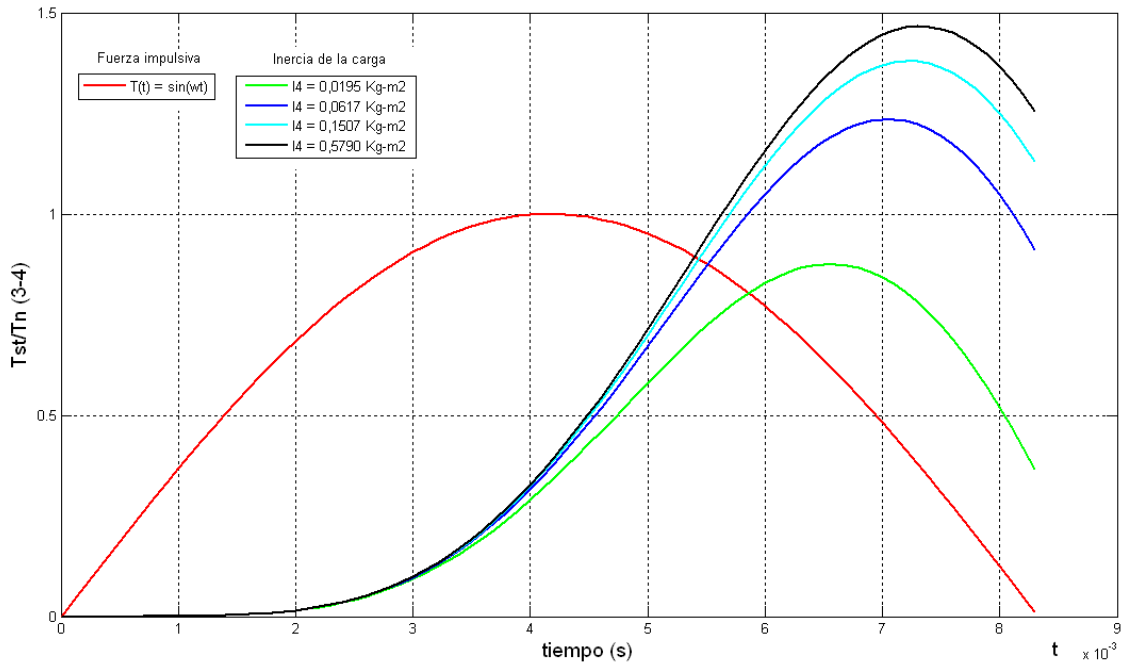


Fig. 3.34 Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (I_4) variable

Lalanne Michel y Ferraris Guy [13] plantean una ecuación más elaborada para la fuerza impulsiva $T(t)$, la cual considera las leyes del electromagnetismo, dicha ecuación está dada por:

$$T(t) = a + be^{-\lambda t} \sin(\omega t) \tag{3.4}$$

Donde a, b, λ , son constantes diferentes de cero y ω es la frecuencia eléctrica, reemplazando por sus valores tenemos:

$$T(t) = T_n[0,8 + 6e^{-0,25t} \sin(\omega t + 0,1)] \tag{3.5}$$

Reemplazando la ecuación (3.5) en la ecuación (2.23) y ejecutando el programa en Matlab, analizaremos la respuesta del sistema para el CASO I (k_1 variable y los otros parámetros se mantienen constantes).

Los resultados se muestran en las figuras 3.35 y 3.36

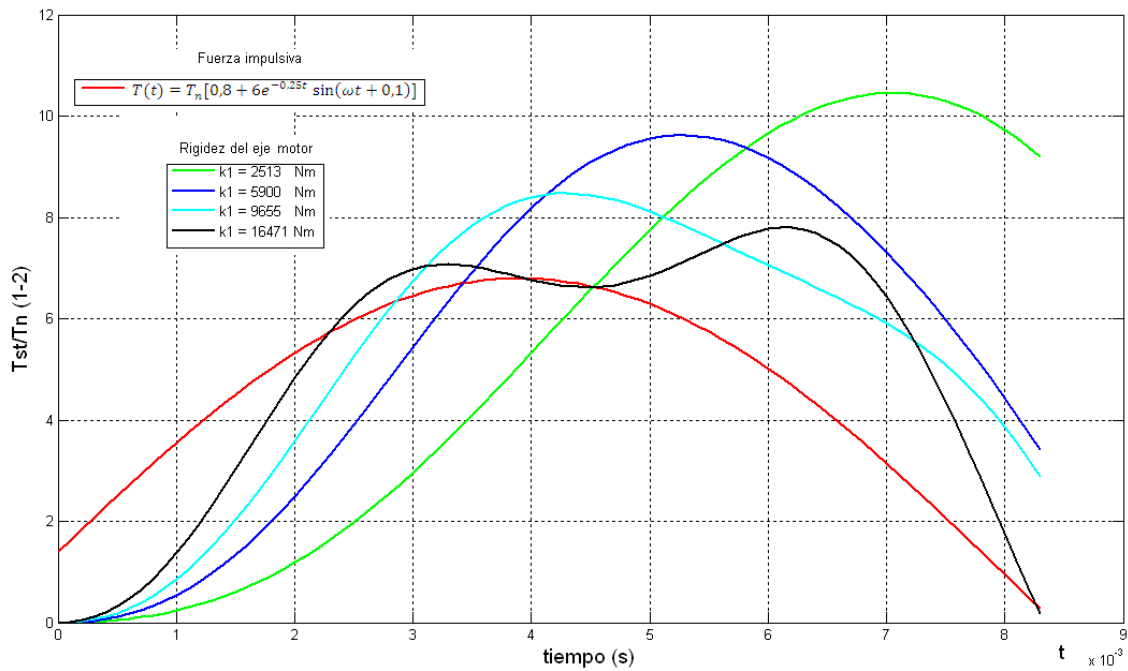


Fig. 3.35. Respuesta del sistema ($T_{st\ 1-2}/T_n$) para (k_1) variable.

Aplicación de ecuación empírica $T(t) = a + be^{-\lambda t} \sin(\omega t)$

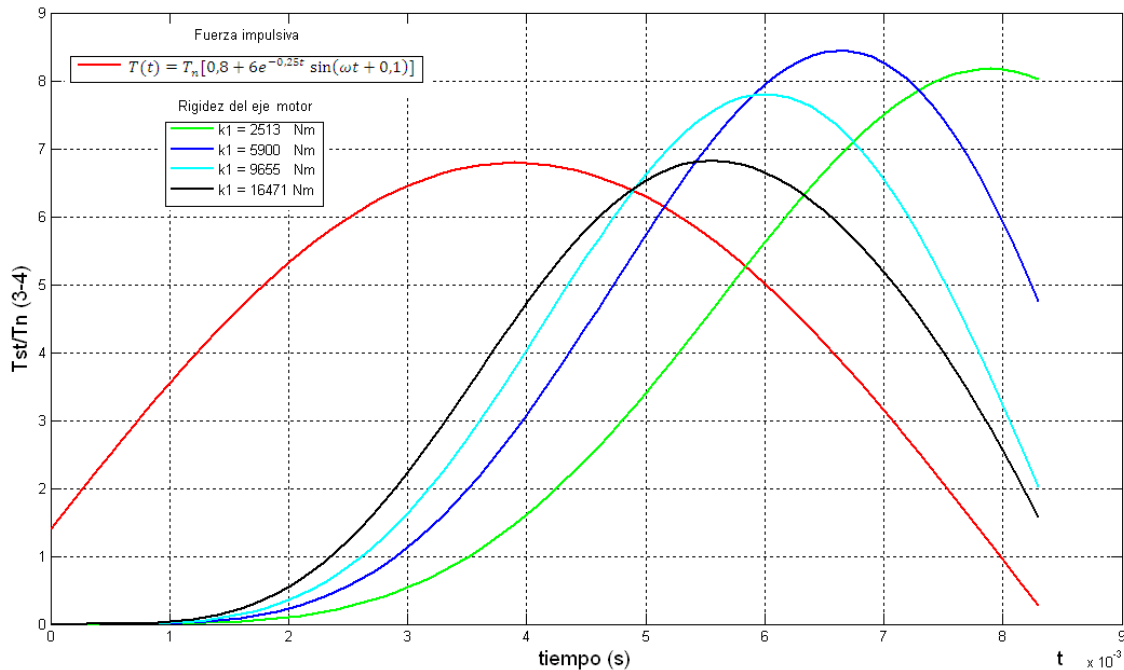


Fig. 3.36. Respuesta del sistema ($T_{st\ 3-4}/T_n$) para (k_1) variable.

Aplicación de ecuación empírica $T(t) = a + be^{-\lambda t} \sin(\omega t)$

3.3. SIMULACION POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El Método de los Elementos Finitos se emplea como un método complementario para determinar las frecuencias naturales y modos de vibración del sistema torsional equivalente de tres grados de libertad.

Las etapas que componen la simulación por el método de los elementos finitos son las siguientes:

- Pre-Proceso: Aquí se realiza la identificación del modelo, es decir, se define la geometría, se asigna el material, propiedades, y se señalan las condiciones de contorno y las cargas. Para la definición de la geometría se emplearon los parámetros del sistema definidos en el apartado 2.3.

El material asignado es el acero AISI 1020. Para los grados de libertad, se toman las restricciones de modo que solo se permite el giro alrededor del eje Z . Sobre las cargas aplicadas, no se aplica ninguna carga, ya que para el análisis de frecuencias no intervienen cargas externas. Establecidos todos los pasos previos, se procede al enmallado, utilizando para ello elementos sólidos de seis nodos.

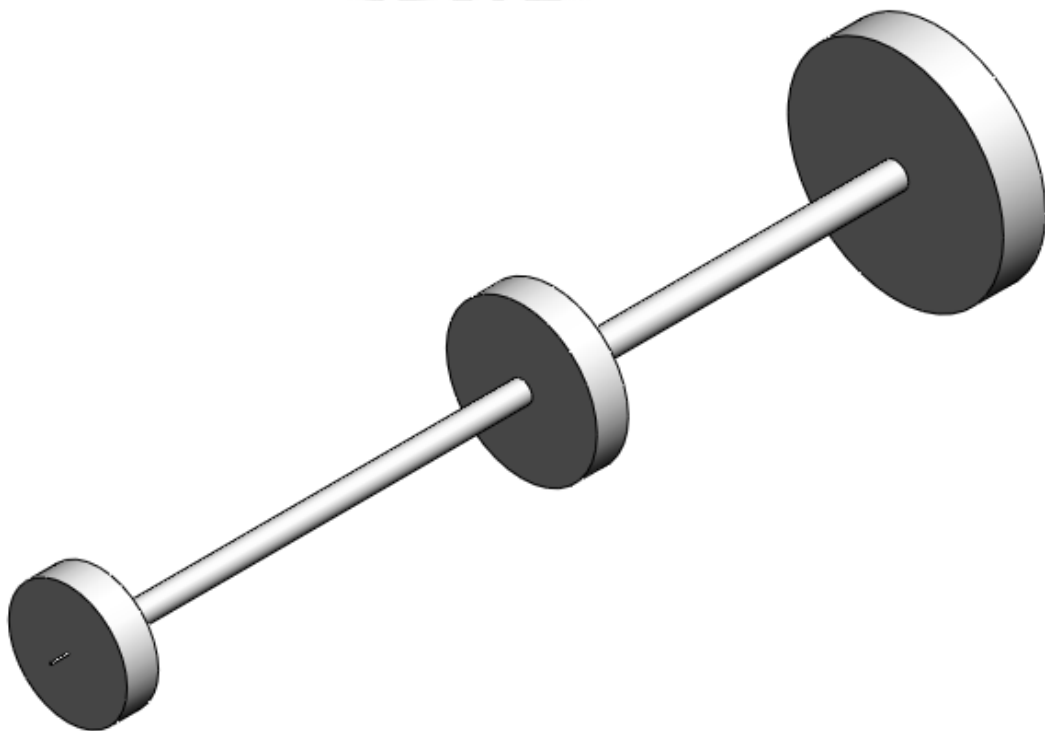


Fig. 3.37. Sistema equivalente del modelo conceptual

- Proceso: Es la etapa donde se resolverá las ecuaciones que se forman con las matrices de inercia y rigidez para determinar las frecuencias naturales torsionales respectivas.

Nombre de modelo: Sistema 3gl
 Nombre de estudio: FRECUENCIAS TORSIONALES
 Tipo de resultado: Frecuencia Desplazamientos1
 Forma modal: 1 Valor = 0.8784 Hz
 Escala de deformación: 0.373224

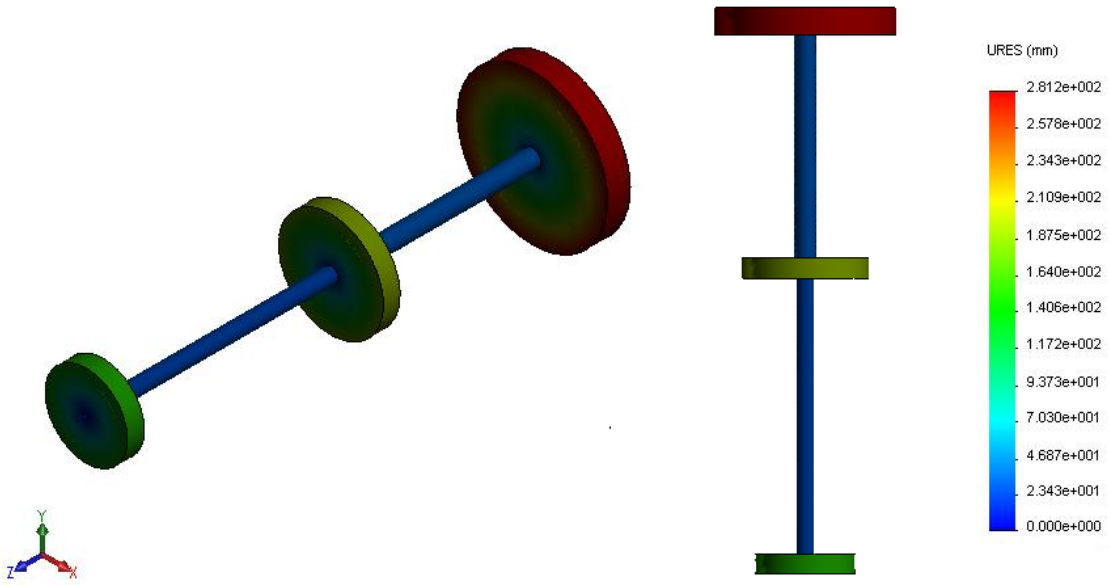


Fig. 3.38. Primera frecuencia natural del sistema equivalente

Nombre de modelo: Sistema 3gl
 Nombre de estudio: FRECUENCIAS TORSIONALES
 Tipo de resultado: Frecuencia Desplazamientos2
 Forma modal: 2 Valor = 92.496 Hz
 Escala de deformación: 0.199835

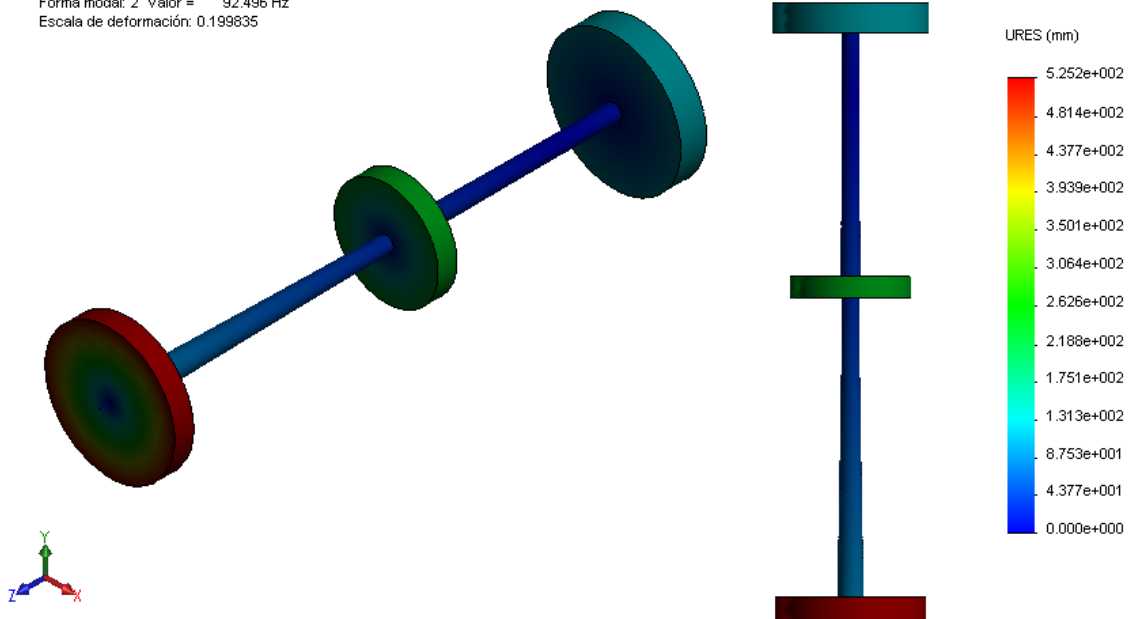


Fig. 3.39. Segunda frecuencia natural del sistema equivalente

Nombre de modelo: Sistema 3gl
 Nombre de estudio: FRECUENCIAS TORSIONALES
 Tipo de resultado: Frecuencia Desplazamientos3
 Forma modal: 3 Valor = 158.54 Hz
 Escala de deformación: 0.25047

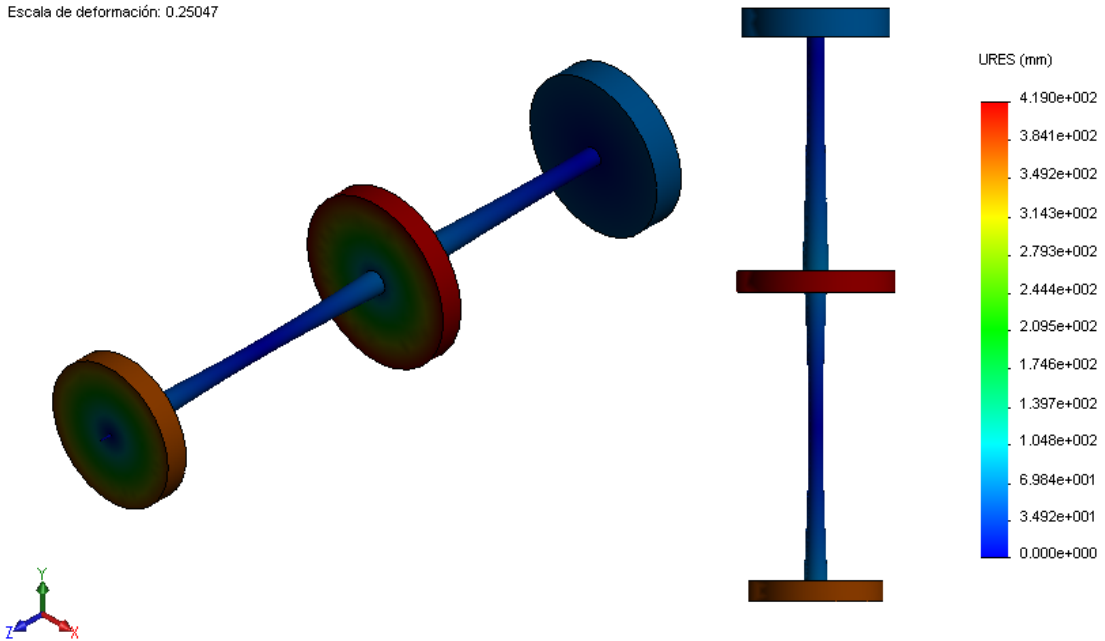


Figura 3.40. Tercera frecuencia natural del sistema equivalente

- Post-Proceso: Se evalúan las frecuencias naturales resultantes y se procede a comparar con las frecuencias naturales obtenidas por las ecuaciones de *Lagrange*. Los resultados se presentan en las tablas 3.3 y 3.4.

TABLA 3.3 Frecuencias Naturales obtenidas por el Método de los Elementos Finitos

ω_n	1ra	2da	3ra
Hz	0,87	92,49	158,54
rpm	52,2	5549	9512

TABLA 3.4 Análisis comparativo de frecuencias

ω_n (Hz)	1ra	2da	3ra
<i>Ecuaciones de Lagrange</i>	0	94	160
<i>FEM</i>	0,87	92,49	158,54
<i>Error</i>	-0,87	1,51	1,46



CAPITULO 4

EVALUACION DE RESULTADOS

4.1 EVALUACION DEL SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

Caso I : Diámetro del eje (d) variable y los parámetros (l, D) se mantienen constantes.

- Al incrementar el diámetro del eje, la rigidez torsional del mismo también aumenta, lo cual origina un aumento significativo de la frecuencia natural del sistema.
- El incremento de la rigidez torsional del sistema origina un incremento significativo del parámetro t_1/t_n .
- La respuesta máxima del sistema se obtiene para valores de $\frac{t_1}{t_n} = \frac{\omega_n}{2\omega} \cong 1 - 1.5$, es decir cuando la frecuencia natural se aproxima al doble de la frecuencia de excitación (120 Hz), en este caso la respuesta máxima ocurre mientras la fuerza impulsiva es aplicada.
- Para valores $\frac{t_1}{t_n} = \frac{\omega_n}{2\omega} < 1$, la respuesta del sistema ocurre después de que la fuerza ha sido aplicada y su amplitud es menor que la amplitud de la fuerza impulsiva.

- A medida que incrementamos la rigidez, por medio del incremento del diámetro, la respuesta del sistema se aproxima al pulso, de manera que sus amplitudes llegan a ser muy próximas.

Caso II : Longitud del eje (l) variable y los parámetros (d, D) se mantienen constantes.

- Al incrementar la longitud del eje, la rigidez torsional disminuye, por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema disminuyen.
- La disminución de la rigidez torsional, por medio del incremento de la longitud del eje, origina una disminución no significativa del parámetro t_1/t_n
- El incremento de la longitud del eje, no produce cambios significativos en la respuesta del sistema en cuanto a su amplitud. En este caso la respuesta ocurre mientras la fuerza impulsiva es aplicada.

Caso III : Diámetro del disco (D) variable y los parámetros (d, l) se mantienen constantes.

- Al mantener constante los parámetros d y l e incrementar la inercia del disco por medio del incremento de su diámetro, el sistema tiene un comportamiento similar al caso II.

De los casos analizados, se concluye que el parámetro que ejerce gran influencia en la respuesta del sistema es el diámetro del eje, su variación, produce cambios significativos en la amplitud de la respuesta del sistema.

4.2 EVALUACION DEL SISTEMA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

CASO I: Rigidez del eje motor (k_1) variable y los parámetros ($I_1, I_2, I_3, r_2/r_3, k_2, I_4$) se mantienen constantes.

- La primera frecuencia natural corresponde a modo de cuerpo rígido y la segunda frecuencia natural (frecuencia natural a analizar) se incrementa cuando la rigidez del eje motor aumenta.
- Se presentan los modos de vibración torsional para un rango de frecuencias creciente, al incrementar la frecuencia natural se observa que la amplitud de la segunda inercia equivalente también incrementa.
- Al incrementar la rigidez torsional del eje motor, la amplitud de la respuesta del sistema disminuye, hasta aproximarse a la fuerza impulsiva, de manera que sus amplitudes llegan a ser muy próximas.
- La amplitud de la respuesta del sistema en la sección del eje conducido también disminuye, llegando a aproximarse a la amplitud de la fuerza impulsiva.

CASO II: Inercia del piñón (I_2) y (r_2/r_3) variables y los parámetros (I_1, k_1, I_3, k_2, I_4) se mantienen constantes

- El incremento de la inercia del piñón (I_2) y de la relación (r_2/r_3) no ejerce influencia significativa en el comportamiento de la frecuencia natural del sistema.
- Para los modos de vibración torsional se observa que al incrementar la frecuencia natural, la amplitud de la segunda inercia equivalente disminuye.
- Al incrementar la inercia del piñón y la relación de radios, la amplitud de la respuesta del sistema se incrementa en la sección del eje motor y disminuye en la sección del eje conducido. En ambos casos la respuesta máxima ocurre mientras la fuerza impulsiva es aplicada. Sin embargo, para la sección del eje conducido, si se siguen incrementando los parámetros (I_2) y (r_2/r_3) la tendencia de la amplitud de respuesta es su decrecimiento hasta ser menor que la amplitud de la fuerza impulsiva.

CASO III: Inercia del piñón (I_2) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, r_2/r_3, k_2, I_4$) se mantienen constantes

- Al incrementar solo la inercia del piñón y mantener los demás parámetros constantes, origina una disminución de la frecuencia natural del sistema.

- Para el sistema equivalente, la amplitud de la segunda inercia se incrementa a medida que disminuye la frecuencia natural del sistema.
- Para la respuesta del sistema, el comportamiento es similar al caso II, a medida que se incrementa la inercia, la amplitud de respuesta del sistema se incrementa en la sección del eje motor y disminuye en la sección del eje conducido. La respuesta máxima del sistema ocurre mientras la fuerza impulsiva es aplicada. Sin embargo, para la sección del eje conducido, si se sigue incrementando la inercia (I_2), la tendencia de la amplitud de respuesta es su decrecimiento hasta ser menor que la amplitud de la fuerza impulsiva.

CASO IV: Relación de radios (r_2/r_3) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, I_2, k_2, I_4$) se mantienen constantes

- El incremento de la relación (r_2/r_3) manteniendo los demás parámetros constantes origina un incremento en la frecuencia natural del sistema.
- El incremento de la relación (r_2/r_3) significa que el radio primitivo del piñón y el número de dientes se incrementará, mantener la inercia constante se logra en el proceso de fabricación disminuyendo masa al disco del piñón.
- Para la respuesta del sistema, la amplitud se incrementa en la sección del eje motor cuando se incrementa la relación (r_2/r_3).

- La respuesta máxima del sistema en la sección del eje motor ocurre mientras la fuerza impulsiva es aplicada. Para la sección del eje conducido a medida que se incrementa (r_2/r_3) la amplitud de respuesta del sistema va decreciendo llegando a ser menor que la amplitud de la fuerza impulsiva.

CASO V: Rigidez del eje conducido (k_2) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, r_2/r_3, I_2, I_4$) se mantienen constantes

- Al incrementar la rigidez del eje conducido, la frecuencia natural del sistema se incrementa.
- Al incrementar la rigidez torsional del eje conducido, la amplitud de la respuesta del sistema aumenta en la sección del eje motor y la respuesta máxima ocurre mientras se aplica la fuerza impulsiva.
- La amplitud de la respuesta del sistema en la sección del eje conducido disminuye, llegando a aproximarse a la amplitud de la fuerza impulsiva.

CASO VI: Inercia de la carga (I_4) variable y los parámetros ($I_1, k_1, I_3, r_2/r_3, I_2, k_2$) se mantienen constantes.

- Al incrementar la inercia de la carga, la frecuencia natural del sistema disminuye.
- Un incremento en la inercia (I_4) no influye significativamente en la amplitud de respuesta del sistema en la sección del eje motor, en

este caso la respuesta máxima ocurre mientras se aplica la fuerza impulsiva.

- Al incrementarse la inercia (I_4), la amplitud de respuesta del sistema en la sección del eje conducido se incrementa significativamente, llegando a ser mayor que la amplitud de la fuerza impulsiva, en este caso la respuesta se amplifica.

4.3 EVALUACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

- El resultado de las frecuencias obtenidas por el Método de los Elementos Finitos se muestran en la tabla 3.1. En la tabla 3.2 se muestra un análisis comparativo respecto de las frecuencias obtenidas aplicando las ecuaciones de *Lagrange*, como se observa los valores de las frecuencias obtenidas por el Método de los Elementos Finitos son muy próximos a los obtenidos por las ecuaciones de *Lagrange* y el rango de error es aceptable.

CONCLUSIONES

- El desarrollo del modelo conceptual del mecanismo de transmisión, el empleo de las ecuaciones de *Lagrange* para definir las ecuaciones de movimiento y el planteamiento de los seis casos de análisis, nos permite determinar y tener una comprensión básica del comportamiento de las frecuencias naturales, modos de vibración torsional, así como de la respuesta del sistema cuando es excitado por una fuerza impulsiva sinusoidal.
- El estudio de un modelo ideal de un grado de libertad es fundamental para entender y conocer a priori el comportamiento dinámico del sistema real.
- El idealizar los fenómenos que se presentan en sistemas reales como impacto, choque, arranque de un motor, por medio de una señal impulsiva típica permite obtener una buena aproximación a la respuesta real del sistema.
- La fuerza impulsiva sinusoidal es una buena señal de prueba para el análisis en régimen transitorio, ya que al analizar el sistema torsional con una expresión más elaborada para el torque de arranque obtenemos factores de respuesta proporcionales, es decir, si no contamos con una expresión deducida teórica o experimentalmente que describa el comportamiento real de un sistema, las señales impulsivas típicas nos brindan información muy próxima a lo que puede ocurrir en la realidad.
- La razón de la duración del pulso y el período natural del sistema (t_1/t_n) nos indica si la respuesta máxima ocurre después de que cesa la fuerza impulsiva, mientras actúa la fuerza impulsiva o si la fuerza impulsiva se torna cuasiestática.

- Desde el punto de vista de diseño, calcular la respuesta del sistema en régimen transitorio (T_{st}/T_n), es importante para realizar un posterior análisis de fatiga y predecir inclusive el número de arranques de la máquina.
- El espectro de respuesta es un concepto útil para fines de diseño, ya que según la fuerza impulsiva aplicada nos muestra la respuesta de pico máxima como función de la frecuencia natural del sistema.
- Al incrementar el parámetro (r_2/r_3) y manteniendo los demás parámetros constantes, origina que la amplitud de la respuesta en la sección del eje motor alcance valores máximos comparados con las amplitudes obtenidas variando los demás parámetros. En la sección del eje conducido dicha amplitud va disminuyendo hasta ser menor que la amplitud de la fuerza impulsiva.
- El incremento de los parámetros r_2/r_3 , k_1 , k_2 originan un incremento significativo de la frecuencia natural del sistema.
- La aplicación del Método de los Elementos Finitos es un método alternativo para el análisis dinámico de sistemas torsionales, los resultados obtenidos son muy próximos a los calculados por el método analítico, de esta forma puede ser usado en situaciones prácticas de la industria donde por lo general se requiere criterios de solución en el menor tiempo posible.

RECOMENDACIONES

- Diseñar y fabricar un banco de pruebas para el estudio de las vibraciones torsionales. En el Anexo 5 se presentan algunas alternativas.
- Estudiar experimentalmente las vibraciones torsionales en régimen transitorio considerando al sistema mecánico-eléctrico en conjunto, el comportamiento de los componentes eléctricos debe ser considerado.
- Estudiar las vibraciones torsionales en engranajes considerando la influencia del backlash (holgura entre dientes), así como las vibraciones laterales-torsionales acopladas.
- A partir de los valores del torque obtenidos en el régimen transitorio es recomendable ampliar este estudio realizando un análisis de fatiga. Asimismo el análisis de fatiga puede ser empleado para predecir el número de arranques de una máquina.
- Se considera que un curso de Dinámica de Rotores, por su importancia y amplia aplicación en la industria deba ser incluido en el plan de estudios de la Maestría en Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

BIBLIOGRAFIA

1. Inman Daniel J. , ENGINEERING VIBRATION, editorial Prentice-Hall, New Jersey, 1994.
2. Thomson William T., TEORIA DE VIBRACIONES: APLICACIONES, editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1981.
3. Den Hartog J.P., MECHANICAL VIBRATIONS, editorial McGraw-Hill, New York, 1940.
4. Vance John M., ROTORDYNAMICS OF TURBOMACHINERY, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1988.
5. Harris Cyril M., SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK, editorial McGraw-Hill, New York, 1996.
6. Ran ,L.; Yacamini,R.; Smith, K.S.; TORSIONAL VIBRATIONS IN ELECTRICAL INDUCTION MOTOR DRIVES DURING START-UP, transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acustics, April 1996, p.p. 242-251.
7. Kirtikumar Ganatra Nirmal, “VALIDATION OF COMPUTER-GENERATED RESULTS WITH EXPERIMENTAL DATA OBTAINED FOR TORSIONAL VIBRATION OF SYNCHRONOUS MOTOR-DRIVEN TURBOMACHINERY”, MSc. Thesis, Texas A&M University, Texas, 2003.
8. EQUIPOS PARA LA EDUCACION EN INGENIERIA, 2005.
<http://www.gunt.de/>.

9. Apaza Nina, José, ANALISIS VIBRACIONAL DE UN ROTOR JEFFCOT CON UNA FISURA RADIAL EN SU EJE, Tesis de Magíster, PUCP, Lima, 2006.
10. Nakamura Novoa, Marcial, ANALISIS DE UNA MAQUINA ROTATIVA, Tesis de Ingeniero, PUCP, Lima, 2000.
11. Kikaganeshwala Yagnesh, "VIBRATION ANALYSIS OF GEAR SYSTEM AS COMBINED ROTOR SYSTEM BASED ON COMPLEX ROTOR VARIABLE", MSc. Thesis, University of Cincinnati, Ohio, 2005.
12. Duncan N. Walker, TORSIONAL VIBRATION OF TURBOMACHINERY, editorial McGraw-Hill, New York, 2003.
13. Lalanne Michel and Ferraris Guy, ROTORDYNAMICS PREDICTION IN ENGINEERING, editorial John Wiley&Sons, New York, 1998.
14. Ehrich Fredric F., HANDBOOK OF ROTORDYNAMICS, editorial McGraw-Hill, New York, 1992.
15. Rao J.S., ROTOR DYNAMICS, editorial New Age International (P) Limited, New Delhi, 1996.
16. Ledesma Ramirez, Diego, TENDENCIAS EN EL AISLAMIENTO DE IMPACTOS, University of Southampton, INGENIERIA, Enero-Marzo 2007, Vol.X, No34.
17. Rao, Singiresu; MECHANICAL VIBRATIONS, editorial Prentice-Hall, New Jersey, 2003.
18. Mosquera Genaro, LAS VIBRACIONES MECANICAS Y SU APLICACIÓN AL MANTENIMIENTO PREDICTIVO, Centro de Altos Estudios Gerenciales ISID, Caracas, 2001.

ANEXOS

ANEXO 1: DISEÑO DE UNA MENSULA BAJO LA ACCION DE UNA FUERZA IMPULSIVA [17]

Un instrumento de medición está montado sobre una viga en voladizo de aluminio tal como se muestra en la figura 4.1a. Un objeto se deja caer sobre la ménsula y el resultado del impacto puede ser aproximado como un pulso medio sinusoidal como se muestra en la figura 4.1b. Se pide diseñar la ménsula que soporte una aceleración de $100g$ bajo un pulso medio sinusoidal. Asumir el peso específico del aluminio como $0,1 \text{ lb/pulg}^3$, el módulo de elasticidad es $E = 107 \text{ lb/pulg}^2$ y el esfuerzo admisible del aluminio es $\sigma_{ad} = 26000 \text{ lb/pulg}^2$

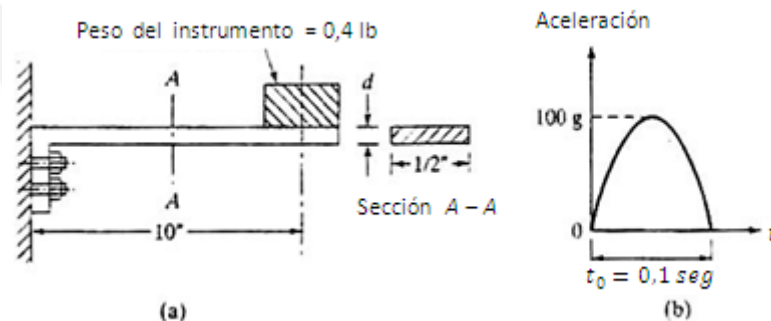


Fig. 4.1. Ménsula sometida a carga impulsiva [17]

Datos: Pulso impulsivo y esfuerzo admisible

Se pide: Espesor de la viga (d)

Procedimiento: Encontrar el factor de amplificación impulsiva y usar la teoría de vigas.

Solución:

Se determina la carga total que soportará la viga, que en este caso será el peso del instrumento más el peso de la viga misma.

$$W_{viga} = (10) \left(\frac{1}{2} d \right) (0,1) = 0,5d$$

$$W_{Total} = W_{viga} + W_{inst.} = 0,5d + 0,4$$

El momento de inercia de la viga es:

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \frac{1}{2} d^3 = 0,04167d^3$$

La deflexión estática de la viga, como consecuencia de la carga W_{Total} se determina para ésta ménsula como sigue:

$$\delta_{est} = \frac{W_T L^3}{3EI} = \frac{(0,5d + 0,4)(10^3)}{3 \times 10^7 (0,04167d^3)} = \frac{(0,5d + 0,4)}{d^3} 7,9994 \times 10^{-4}$$

Para determinar el factor de amplificación por efectos de impacto, es necesario conocer el valor de t_1/t_n , para lo cual asumiremos el valor de $d = \frac{1}{2}$ pulg, con ello es posible determinar la deflexión estática.

$$\delta_{est} = \left(\frac{0,5 \times 0,5 + 0,4}{(0,5)^3} \right) 7,9994 \times 10^{-4} = 41,5969 \times 10^{-4} \text{ pulg}$$

Con este valor determinamos el período t_n :

$$t_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi \left(\frac{\delta_{est}}{g} \right)^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{41,5969 \times 10^{-4}}{386,4}} = 0,0206 \text{ s}$$

Con ello obtenemos la relación de tiempos:

$$\frac{t_1}{t_n} = \frac{0,1}{0,020615} = 4,851$$

El factor de amplificación por impacto A_{imp} se determina de la figura 1.23 y tiene como valor 1,1. La fuerza dinámica F_{din} que actúa sobre la ménsula está dada por:

$$F_{din} = A_{imp} M a_s = (1,1) \left(\frac{0,65}{g} \right) (100g) = 71,5 \text{ lb}$$

Donde a_s es la aceleración correspondiente al impacto, M es la masa total que actúa sobre la viga en voladizo y $M a_s$, es la fuerza de inercia sobre la viga. Notar que el momento de inercia se da

$$I = 0,041671d^3 = 0,00521 \text{ pulg}^4$$

El máximo esfuerzo se encuentra en el empotramiento y se obtiene como sigue:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{bc}}{I} = \frac{(71,5 \times 10)^{0,5/2}}{0,005209} = 34315,60 \text{ lb/pulg}^2$$

El valor del esfuerzo excede el valor permisible, entonces, se asume un nuevo valor de $d = 0,6$. Con ello sigue el procedimiento y se determinan los valores necesarios.

$$\delta_{est} = \left(\frac{0,5 \times 0,5 + 0,4}{(0,6)^3} \right) 7,9994 \times 10^{-4} = 25,9240 \times 10^{-4} \text{ pulg}$$

$$T_o = 2\pi \left(\frac{\delta_{est}}{g} \right)^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{25,9240 \times 10^{-4}}{386,4}} = 0,0162 \text{ s}$$

De la figura se determina el factor de amplificación impacto $A_{imp} \cong 1,1$ y con ello la fuerza dinámica.

$$F_{din} = (1,1) \left(\frac{0,70}{g} \right) (100g) = 77,0 \text{ lb}$$

Cuando $d = 0,6 \text{ pulg}$; $I = 0,009001 \text{ pulg}^4$ y el esfuerzo máximo es:

$$\sigma_{max} = \frac{(77 \times 10)}{0,009001} \left(\frac{0,6}{2} \right) = 25663,81 \text{ lb/pulg}^2$$

Este valor no excede el valor permisible, entonces se elige el espesor

$$d = 0,6 \text{ pulg}$$

ANEXO 2: METODO DE HOLZER PARA DETERMINAR LOS MODOS DE VIBRACION TORSIONAL

El método de *Holzer* es un proceso de aproximaciones sucesivas, se aplica para sistemas equivalentes de masas concentradas, en ejes en línea o enlazados. Se supone que el sistema está vibrando a una frecuencia natural y que se desprecian las pérdidas de energía por amortiguamiento y fricción.

Al vibrar el sistema de una manera libre, los únicos pares externos serán los de inercia en cada masa, los cuales son de la forma $I\theta\omega^2$. Estos pares se transmiten a través de los ejes que unen las masas, siendo los pares elásticos que se producen en aquellos, los correspondientes a las diferencias de los ángulos de torsión entre cada dos masas consecutivas, o igualmente a la diferencia entre los pares de inercia entre dichas masas.

Al no existir más pares exteriores que los de inercia se tiene que verificar, al estar el sistema vibrando con su frecuencia natural, que

$$\sum_{i=1}^n I_i \theta_i \omega^2 = 0 \quad (4.1)$$

Para este método se suele tomar por sencillez para θ_1 , el valor 1 y se supone un valor inicial para la frecuencia ω , luego se comprueba si con ella se verifica la ecuación (3.3), para ello se adopta la siguiente tabulación:

Tabla 4.1. Método de *Holzer*. Frecuencia supuesta ω

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Número de las masas	I_i	$I_i \omega^2 (10^{-6})$	θ_i	$I_i \omega^2 \theta_i (10^{-6})$	$\sum I_i \omega^2 \theta_i (10^{-6})$	K_i	$\Delta \theta = \frac{\sum I_i \omega^2 \theta_i (10^{-6})}{K_i} (10^{-6})$
1	I_1		θ_1			K_1	
2	I_2		θ_2			K_2	
3	I_3		θ_3			K_3	
·	·		·			·	
n	I_n		θ_n		0	K_n	

ANEXO 3: SISTEMA EQUIVALENTE DE UN MECANISMO DE TRANSMISION POR ENGRANAJES

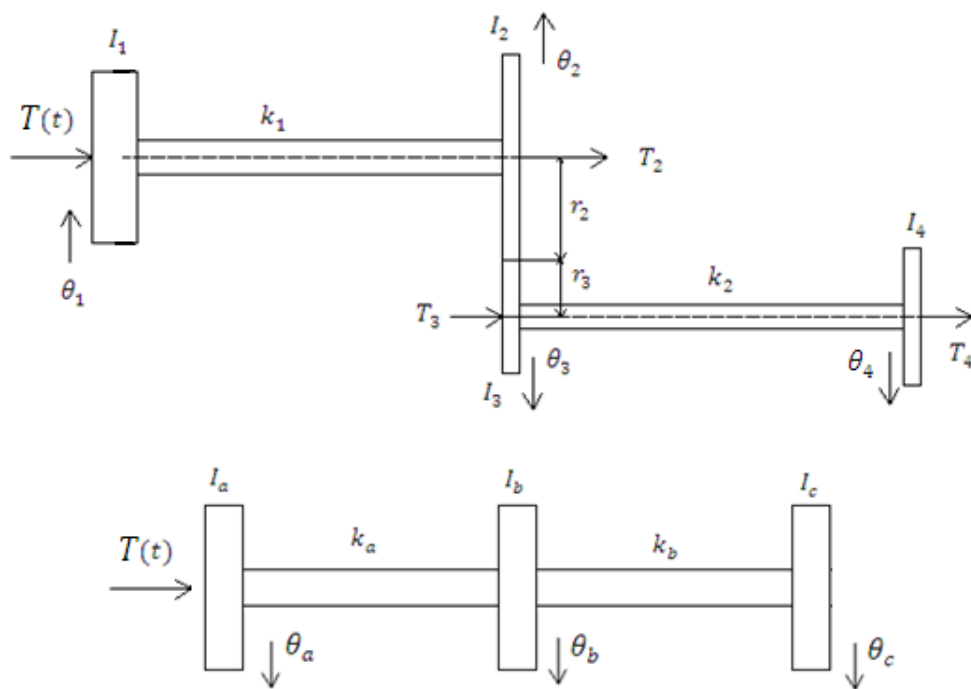


Fig. 4.2. Reducción a un sistema equivalente [17]

Donde:

$$I_a = I_1 ; I_b = I_2 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 I_3 ; I_c = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 I_4$$

$$k_a = k_1 ; k_b = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 k_2$$

Ecuaciones de movimiento; en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_a \\ \ddot{\theta}_b \\ \ddot{\theta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & (k_a + k_b) & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ANEXO 4: PROGRAMAS DE CALCULO EN MATLAB

A.4.1. SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

```
%Primer caso; variamos el diámetro del eje en mm
d=10:5:50;
l=400; % longitud del eje en mm
D=195; % Diámetro del disco en mm
%Segundo caso; variamos la longitud del eje en mm
l1=300:50:700;
d1=20; %diámetro del eje en mm
%Tercer caso; variamos el Diámetro del disco (inercia) en mm
D1=185:5:225;
t=8.5; %espesor del disco se mantiene constante en mm
%-----
Tn=1; %N-m
w=60*2*pi; %60Hz
t1=pi/w;
G=80E09; %(N/m2)
%Calculo de la rigidez para los dos casos; k1, k2
k1=((pi*G)/(32*(l/1000))).*(d./1000).^4; %Rigidez del eje para diámetro del eje variable
(Nm/rad)
k2=((pi*G)/(32.*(l1./1000))).*(d1./1000).^4; %Rigidez del eje para longitud del eje variable
(Nm/rad)
kk3=((pi*G)/(32.*(l./1000))).*(d1./1000).^4; %Rigidez del eje para Diámetro del disco (inercia)
variable (Nm/rad)
dens=7860; %(Kg/m3)
wnc1=(((G)/(dens.*(D.^4).*(t/1000).*(l./1000))).*(d.^4)).^(0.5); %frecuencia natural en rad/s
para diámetro variable
wnc2=(((G)/(dens.*(D.^4).*(t/1000).*(l1./1000))).*(d1.^4)).^(0.5); %frecuencia natural en rad/s
para longitud variable
```



```

wnc3=(((G)/(dens.*(D1.^4).*(t/1000).*(l./1000))).*(d1.^4)).^(0.5); %frecuencia natural en rad/s
para inercia variable
wn1=wnc1./(2*pi); %Hz
wn2=wnc2./(2*pi); %Hz
wn3=wnc3./(2*pi); %Hz
razon1=(wn1)./(2*60);
razon2=(wn2)./(2*60);
razon3=(wn3)./(2*60);
figure (1)
hold on
plot(d,wn1,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('diametro del eje (mm)','fontsize',16)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',16)
figure (2)
hold on
plot(l1,wn2,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('longitud del eje (mm)','fontsize',16)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',16)
figure (3)
hold on
plot(D1,wn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Diametro del disco (mm)','fontsize',16)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',16)
figure (4)
hold on
plot(d,razon1,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('diametro del eje (mm)','fontsize',16)
ylabel('Razon [t1 / tn]','fontsize',16)
figure (5)
hold on
plot(l1,razon2,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('longitud del eje (mm)','fontsize',16)
ylabel('Razon [t1 / tn]','fontsize',16)
figure (6)
hold on
plot(D1,razon3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Diámetro del disco (mm)','fontsize',16)
ylabel('Razon [t1 / tn]','fontsize',16)
%-----
% Grafica de la respuesta del sistema 1gl. para diámetro del eje variable
%-----
t=0:0.00001:t1;
T=sin(w*t);
%d1=10mm, d2=20mm, d3=30mm, d4=40mm, d5=50mm
k1=200; k2=3140; k3=15900; k4=50270; k5=122720;
wnc1=143.9; wnc2=575.6; wnc3=899.3; wnc4=2302.2; wnc5=3597.2;
desp1=((Tn/k1)/(1-((w/wnc1)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc1)*(sin(wnc1*t))));
Tst1=k1*desp1;
desp2=((Tn/k2)/(1-((w/wnc2)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc2)*(sin(wnc2*t))));
Tst2=k2*desp2;
desp3=((Tn/k3)/(1-((w/wnc3)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc3)*(sin(wnc3*t))));
Tst3=k3*desp3;
desp4=((Tn/k4)/(1-((w/wnc4)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc4)*(sin(wnc4*t))));

```

```

Tst4=k4*desp4;
desp5=((Tn/k5)/(1-((w/wnc5)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc5)*(sin(wnc5*t))));
Tst5=k5*desp5;
figure(7)
plot(t,T,'r',t,Tst1,'g',t,Tst2,'b',t,Tst3,'m',t,Tst4,'k',t,Tst5,'c','LineWidth',2)
grid on
xlabel('tiempo (s)','fontsize',16);
ylabel('Tst / Tn','fontsize',16);
title('Respuesta del Sistema. Rigidez variable (d)', 'FontSize',[16],'color','b')
%-----
% Grafica de la respuesta del sistema 1gl. para longitud del eje variable
%-----
k11=4188.8; k22=3141.6; k33=2513.3; k44=2094.4; k55=1795.2;
wnc11=664.5909; wnc22=575.5526; wnc33= 514.7899; wnc44=469.9367; wnc55=435.0769;
%l1=300mm, l2=400mm, l3=500mm, l4=600mm, l5=700mm
desp11=((Tn/k11)/(1-((w/wnc11)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc11)*(sin(wnc11*t))));
Tst11=k11*desp11;
desp22=((Tn/k22)/(1-((w/wnc22)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc22)*(sin(wnc22*t))));
Tst22=k22*desp22;
desp33=((Tn/k33)/(1-((w/wnc33)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc33)*(sin(wnc33*t))));
Tst33=k33*desp33;
desp44=((Tn/k44)/(1-((w/wnc44)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc44)*(sin(wnc44*t))));
Tst44=k44*desp44;
desp55=((Tn/k55)/(1-((w/wnc55)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc55)*(sin(wnc55*t))));
Tst55=k55*desp55;
figure(8)
plot(t,T,'r',t,Tst11,'g',t,Tst22,'b',t,Tst33,'m',t,Tst44,'k',t,Tst55,'c','LineWidth',2)
grid on
xlabel('tiempo (s)','fontsize',16);
ylabel('Tst / Tn','fontsize',16);
title('Respuesta del sistema. Rigidez Variable (L)', 'FontSize',[16],'color','b')
%-----
% Grafica de la respuesta del sistema 1gl. para Diámetro del disco
% (inercia) variable
wnc111=639.4562; wnc222=575.5526; wnc333= 520.7707; wnc444=473.4535;
wnc555=432.3040;
%D1=185mm, D2=195mm, D3=205mm, D4=215mm, D5=225mm
sd1=(7860*pi*0.0085/32)*(0.185^4);
sd2=(7860*pi*0.0085/32)*(0.195^4);
sd3=(7860*pi*0.0085/32)*(0.205^4);
sd4=(7860*pi*0.0085/32)*(0.215^4);
sd5=(7860*pi*0.0085/32)*(0.225^4);
asdfg=[sd1 sd2 sd3 sd4 sd5];
desp111=((Tn/kk3)/(1-((w/wnc111)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc111)*(sin(wnc111*t))));
Tst111=kk3*desp111;
desp222=((Tn/kk3)/(1-((w/wnc222)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc222)*(sin(wnc222*t))));
Tst222=kk3*desp222;
desp333=((Tn/kk3)/(1-((w/wnc333)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc333)*(sin(wnc333*t))));
Tst333=kk3*desp333;
desp444=((Tn/kk3)/(1-((w/wnc444)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc444)*(sin(wnc444*t))));
Tst444=kk3*desp444;
desp555=((Tn/kk3)/(1-((w/wnc555)^2))).*((sin(w*t))-((w/wnc555)*(sin(wnc555*t))));
Tst555=kk3*desp555;
figure(9)
plot(t,T,'r',t,Tst111,'g',t,Tst222,'b',t,Tst333,'m',t,Tst444,'k',t,Tst555,'c','LineWidth',2)
grid on
xlabel('tiempo (s)','fontsize',16);
ylabel('Tst / Tn','fontsize',16);
title('Respuesta del sistema. Inercia variable', 'FontSize',[16],'color','b')
    
```

A.4.2. FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PARA RIGIDEZ DEL EJE MOTOR VARIABLE

```

% Diámetro del eje motriz variable (Rigidez variable)
% Eje motriz
d11=20; d12=22; d13=24; d14=26; d15=28; d16=30; d17=32;
l1=500; G=80E09; %(N/m2)
k11=(G*pi*((d11/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
k12=(G*pi*((d12/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
k13=(G*pi*((d13/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
k14=(G*pi*((d14/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
k15=(G*pi*((d15/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
k16=(G*pi*((d16/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
k17=(G*pi*((d17/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
KK=[k11 k12 k13 k14 k15 k16 k17];
% Eje conducido
d2=25;l2=500;
k2=(G*pi*((d2/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
% Relación de transmisión 1.6, en este caso constante
% Datos de engranaje:
mod=4; a=10*mod; dens=7860; z2=40;
z32=25; d32=mod*z32; % rt=1.6 (z2/z32)
l32=((dens*(a/1000)*(pi))/32)*((d32/1000)^4);
l1=0.0110;l2=0.02048; l4=0.062;
% Tn=1;
w=60; %Frecuencia de excitación en Hz
%input('Matriz de inercia')
MI32=[l1 0 0; 0 ((l2)+((1.6^2)*(l32))) 0; 0 0 l4];
%input('Matriz de rigidez')
MK31=[k11, -k11, 0; -k11, ((k11)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK32=[k12, -k12, 0; -k12, ((k12)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK33=[k13, -k13, 0; -k13, ((k13)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK34=[k14, -k14, 0; -k14, ((k14)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK35=[k15, -k15, 0; -k15, ((k15)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK36=[k16, -k16, 0; -k16, ((k16)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK37=[k17, -k17, 0; -k17, ((k17)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];

% Resolución del problema de valores propios no amortiguado
[V1,D1]=eig(MK31,MI32);
[V2,D2]=eig(MK32,MI32);
[V3,D3]=eig(MK33,MI32);
[V4,D4]=eig(MK34,MI32);
[V5,D5]=eig(MK35,MI32);
[V6,D6]=eig(MK36,MI32);
[V7,D7]=eig(MK37,MI32);
%Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)
%input('Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)')
wp31=sqrt(diag(D1));
wp32=sqrt(diag(D2));
wp33=sqrt(diag(D3));
wp34=sqrt(diag(D4));
wp35=sqrt(diag(D5));
wp36=sqrt(diag(D6));
wp37=sqrt(diag(D7));
%Frecuencias naturales del sistema no amortiguado
%input('Frecuencias naturales del sistema no amortiguado (Hz)')
fp1=wp31/(2*pi); %d1=20mm

```

```

fp2=wp32/(2*pi); %rt=25mm
fp3=wp33/(2*pi); %rt=30mm
fp4=wp34/(2*pi); %rt=35mm
fp5=wp35/(2*pi); %rt=40mm
fp6=wp36/(2*pi); %rt=45mm
fp7=wp37/(2*pi); %rt=50mm
fn1=[0 0 0 0 0 0 0];
fn2=[fp1(2,1) fp2(2,1) fp3(2,1) fp4(2,1) fp5(2,1) fp6(2,1) fp7(2,1)];
fn3=[fp1(3,1) fp2(3,1) fp3(3,1) fp4(3,1) fp5(3,1) fp6(3,1) fp7(3,1)];
figure(1)
plot(KK,fn1, KK,fn2, KK,fn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Rigidez torsional eje motor (Nm/rad)','fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. K1 variable','FontSize',[14],'color','b')
    
```

A.4.3. FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PARA INERCIA DEL

PIÑÓN Y (r_2/r_3) VARIABLE

```

% Incrementamos inercia del piñon (I2) y r2/r3
% Eje motriz
d1=25;l1=500; G=80E09; %(N/m2)
k1=(G*pi*((d1/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
% Eje conducido
d2=25;l2=500;
k2=(G*pi*((d2/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
% Del piñon
mod=4; a=10*mod; dens=7860;
z21=35; d21=mod*z21; r21=d21/2;
z22=40; d22=mod*z22; r22=d22/2;
z23=45; d23=mod*z23; r23=d23/2;
z24=50; d24=mod*z24; r24=d24/2;
z25=55; d25=mod*z25; r25=d25/2;
I21=((dens*(a/1000)*(pi))/2)*((r21/1000)^4);
I22=((dens*(a/1000)*(pi))/2)*((r22/1000)^4);
I23=((dens*(a/1000)*(pi))/2)*((r23/1000)^4);
I24=((dens*(a/1000)*(pi))/2)*((r24/1000)^4);
I25=((dens*(a/1000)*(pi))/2)*((r25/1000)^4);
I1=0.0110;I3=0.00312; r3=50; I4=0.062;
I=[I21 I22 I23 I24 I25];
ratio=[r21/r3 r22/r3 r23/r3 r24/r3 r25/r3];
%Tn=1;
w=60; %Frecuencia de excitación en Hz
%input('Matriz de inercia')
MI31=[I1 0 0; 0 ((I21)+(((r21/r3)^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI32=[I1 0 0; 0 ((I22)+(((r22/r3)^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI33=[I1 0 0; 0 ((I23)+(((r23/r3)^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI34=[I1 0 0; 0 ((I24)+(((r24/r3)^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI35=[I1 0 0; 0 ((I25)+(((r25/r3)^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
%input('Matriz de rigidez')
MK31=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*((r21/r3)^2))), (-k2*(r21/r3)); 0, (-k2*(r21/r3)), k2];
MK32=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*((r22/r3)^2))), (-k2*(r22/r3)); 0, (-k2*(r22/r3)), k2];
MK33=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*((r23/r3)^2))), (-k2*(r23/r3)); 0, (-k2*(r23/r3)), k2];
MK34=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*((r24/r3)^2))), (-k2*(r24/r3)); 0, (-k2*(r24/r3)), k2];
MK35=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*((r25/r3)^2))), (-k2*(r25/r3)); 0, (-k2*(r25/r3)), k2];
    
```

```

% Resolución del problema de valores propios no amortiguado
[V1,D1]=eig(MK31,MI31);
[V2,D2]=eig(MK32,MI32);
[V3,D3]=eig(MK33,MI33);
[V4,D4]=eig(MK34,MI34);
[V5,D5]=eig(MK35,MI35);
%Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)
wp31=sqrt(diag(D1));
wp32=sqrt(diag(D2));
wp33=sqrt(diag(D3));
wp34=sqrt(diag(D4));
wp35=sqrt(diag(D5));
%Frecuencias naturales del sistema no amortiguado
fp1=wp31/(2*pi); %rt=1.4
fp2=wp32/(2*pi); %rt=1.6
fp3=wp33/(2*pi); %rt=1.8
fp4=wp34/(2*pi); %rt=2.0
fp5=wp35/(2*pi); %rt=2.2
fn1=[0 0 0 0 0];
fn2=[fp1(2,1) fp2(2,1) fp3(2,1) fp4(2,1) fp5(2,1)];
fn3=[fp1(3,1) fp2(3,1) fp3(3,1) fp4(3,1) fp5(3,1)];
figure(1)
plot(fn,fn1,fn2,fn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Momento de Inercia I2 [Kg/m2]','fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. I2 variable','FontSize',[14],'color','b')
figure(2)
plot(ratio,fn1,ratio,fn2,ratio,fn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Relación r2/r3','fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. (r2/r3) variable','FontSize',[14],'color','b')

```

A.4.4. FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PARA INERCIA DEL PIÑÓN VARIABLE Y (r_2/r_3) CONSTANTE

```

% Incrementamos inercia del piñon (I2) y r2/r3=cte
% Eje motriz
d1=25;l1=500; G=80E09; %(N/m2)
k1=(G*pi*((d1/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
% Eje conducido
d2=25;l2=500;
k2=(G*pi*((d2/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
% Del piñon
mod=4; a=10*mod; dens=7860;
z2=40; d2=mod*z2; r2=d2/2;
I21=0.02048; I22=0.030; I23= 0.040; I24=0.050; I25=0.060; I26=0.070; I27=0.080; I28=0.090;
I2=[I21 I22 I23 I24 I25 I26 I27 I28];
I1=0.0110;I3=0.00312;r3=50; I4=0.062;
%Tn=1;
w=60; %Frecuencia de excitación en Hz
%input('Matriz de inercia')
MI31=[I1 0 0; 0 ((I21)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI32=[I1 0 0; 0 ((I22)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI33=[I1 0 0; 0 ((I23)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];

```



```

MI34=[1 0 0; 0 ((I24)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI35=[1 0 0; 0 ((I25)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI36=[1 0 0; 0 ((I26)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI37=[1 0 0; 0 ((I27)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI38=[1 0 0; 0 ((I28)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
%input('Matriz de rigidez')
MK31=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK32=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK33=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK34=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK35=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK36=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK37=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK38=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
% Resolución del problema de valores propios no amortiguado
[V1,D1]=eig(MK31,MI31);
[V2,D2]=eig(MK32,MI32);
[V3,D3]=eig(MK33,MI33);
[V4,D4]=eig(MK34,MI34);
[V5,D5]=eig(MK35,MI35);
[V6,D6]=eig(MK36,MI36);
[V7,D7]=eig(MK37,MI37);
[V8,D8]=eig(MK38,MI38);
%Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)
wp31=sqrt(diag(D1));
wp32=sqrt(diag(D2));
wp33=sqrt(diag(D3));
wp34=sqrt(diag(D4));
wp35=sqrt(diag(D5));
wp36=sqrt(diag(D6));
wp37=sqrt(diag(D7));
wp38=sqrt(diag(D8));
%Frecuencias naturales del sistema no amortiguado
fp1=wp31/(2*pi);
fp2=wp32/(2*pi);
fp3=wp33/(2*pi);
fp4=wp34/(2*pi);
fp5=wp35/(2*pi);
fp6=wp36/(2*pi);
fp7=wp37/(2*pi);
fp8=wp38/(2*pi);
fn1=[0 0 0 0 0 0 0 0];
fn2=[fp1(2,1) fp2(2,1) fp3(2,1) fp4(2,1) fp5(2,1) fp6(2,1) fp7(2,1) fp8(2,1)];
fn3=[fp1(3,1) fp2(3,1) fp3(3,1) fp4(3,1) fp5(3,1) fp6(3,1) fp7(3,1) fp8(3,1)];
plot(I2,fn1,I2,fn2,I2,fn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Inercia del piñon [Kg-m2]','fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. I2 variable y (r2/r3) constante','FontSize',[14],'color','b')

```

A.4.5. FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PARA INERCIA DEL PIÑÓN CONSTANTE Y (r_2/r_3) VARIABLE

```

% Inercia del piñón constante (I2) y r2/r3 variable,
% z=35,40,45,50,55
% Eje motriz
d1=25;l1=500; G=80E09; %(N/m2)
k1=(G*pi*((d1/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
% Eje conducido
d2=25;l2=500;
k2=(G*pi*((d2/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
% Del piñón
mod=4; a=10*mod; dens=7860;
z2=40; d2=mod*z2; % rt=40/25
I2=((dens*(a/1000)*(pi))/32)*((d2/1000)^4);
rt=[1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.5 2.8 3.0];
I1=0.0110;I3=0.00312; I4=0.062;
%Tn=1;
w=60; %Frecuencia de excitación en Hz
%input('Matriz de inercia')
MI31=[I1 0 0; 0 ((I2)+((1.4^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI32=[I1 0 0; 0 ((I2)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI33=[I1 0 0; 0 ((I2)+((1.8^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI34=[I1 0 0; 0 ((I2)+((2.0^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI35=[I1 0 0; 0 ((I2)+((2.2^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI36=[I1 0 0; 0 ((I2)+((2.5^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI37=[I1 0 0; 0 ((I2)+((2.8^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
MI38=[I1 0 0; 0 ((I2)+((3.0^2)*(I3))) 0; 0 0 I4];
%input('Matriz de rigidez')
MK31=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.4^2))), (-k2*1.4); 0, (-k2*1.4), k2];
MK32=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
MK33=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.8^2))), (-k2*1.8); 0, (-k2*1.8), k2];
MK34=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(2.0^2))), (-k2*2.0); 0, (-k2*2.0), k2];
MK35=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(2.2^2))), (-k2*2.2); 0, (-k2*2.2), k2];
MK36=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(2.5^2))), (-k2*2.5); 0, (-k2*2.5), k2];
MK37=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(2.8^2))), (-k2*2.8); 0, (-k2*2.8), k2];
MK38=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(3.0^2))), (-k2*3.0); 0, (-k2*3.0), k2];
% Resolución del problema de valores propios no amortiguado
[V1,D1]=eig(MK31,MI31);
[V2,D2]=eig(MK32,MI32);
[V3,D3]=eig(MK33,MI33);
[V4,D4]=eig(MK34,MI34);
[V5,D5]=eig(MK35,MI35);
[V6,D6]=eig(MK36,MI36);
[V7,D7]=eig(MK37,MI37);
[V8,D8]=eig(MK38,MI38);
%Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)
wp31=sqrt(diag(D1));
wp32=sqrt(diag(D2));
wp33=sqrt(diag(D3));
wp34=sqrt(diag(D4));
wp35=sqrt(diag(D5));
wp36=sqrt(diag(D6));
wp37=sqrt(diag(D7));
wp38=sqrt(diag(D8));
%Frecuencias naturales del sistema no amortiguado
fp1=wp31/(2*pi); %rt=1.4

```

```

fp2=wp32/(2*pi); %rt=1.6
fp3=wp33/(2*pi); %rt=1.8
fp4=wp34/(2*pi); %rt=2.0
fp5=wp35/(2*pi); %rt=2.2
fp6=wp36/(2*pi); %rt=2.5
fp7=wp37/(2*pi); %rt=2.8
fp8=wp38/(2*pi); %rt=3.0
fn1=[0 0 0 0 0 0 0];
fn2=[fp1(2,1) fp2(2,1) fp3(2,1) fp4(2,1) fp5(2,1) fp6(2,1) fp7(2,1) fp8(2,1)];
fn3=[fp1(3,1) fp2(3,1) fp3(3,1) fp4(3,1) fp5(3,1) fp6(3,1) fp7(3,1) fp8(3,1)];
plot(rt,fn1,rt,fn2,rt,fn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Relación r2/r3. ','fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. l2 constante y (r2/r3) variable', 'FontSize',[14],'color','b')

```

A.4.6. FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PARA RIGIDEZ DEL

EJE CONDUcido VARIABLE

```

% Diámetro del eje conducido variable (Rigidez variable)
% Eje motriz
d1=25;l1=500;G=80E09;%N/m2
k1=(G*pi*((d1/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
% Eje conducido
d21=20; d22=22; d23=24; d24=26; d25=28; d26=30; d27=32;
l2=500;
k21=(G*pi*((d21/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
k22=(G*pi*((d22/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
k23=(G*pi*((d23/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
k24=(G*pi*((d24/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
k25=(G*pi*((d25/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
k26=(G*pi*((d26/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
k27=(G*pi*((d27/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
KK=[k21 k22 k23 k24 k25 k26 k27];
% Relación de transmisión 1.6, en este caso constante
% Datos de engranaje:
mod=4; a=10*mod; dens=7860; z2=40;
z32=25; d32=mod*z32; % rt=1.6 (z2/z32)
l32=((dens*(a/1000)*(pi))/32)*((d32/1000)^4);
l1=0.01110;l2=0.02048; l4=0.062;
%Tn=1;
w=60; %Frecuencia de excitación en Hz
%input('Matriz de inercia')
MI32=[l1 0 0; 0 ((l2)+((1.6^2)*(l32))) 0; 0 0 l4];
%input('Matriz de rigidez')
MK31=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k21)*(1.6^2))), (-k21*1.6); 0, (-k21*1.6), k21];
MK32=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k22)*(1.6^2))), (-k22*1.6); 0, (-k22*1.6), k22];
MK33=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k23)*(1.6^2))), (-k23*1.6); 0, (-k23*1.6), k23];
MK34=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k24)*(1.6^2))), (-k24*1.6); 0, (-k24*1.6), k24];
MK35=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k25)*(1.6^2))), (-k25*1.6); 0, (-k25*1.6), k25];
MK36=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k26)*(1.6^2))), (-k26*1.6); 0, (-k26*1.6), k26];
MK37=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k27)*(1.6^2))), (-k27*1.6); 0, (-k27*1.6), k27];
% Resolución del problema de valores propios no amortiguado
[V1,D1]=eig(MK31,MI32);
[V2,D2]=eig(MK32,MI32);

```



```

[V3,D3]=eig(MK33,MI32);
[V4,D4]=eig(MK34,MI32);
[V5,D5]=eig(MK35,MI32);
[V6,D6]=eig(MK36,MI32);
[V7,D7]=eig(MK37,MI32);
%Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)
%input('Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)')
wp31=sqrt(diag(D1));
wp32=sqrt(diag(D2));
wp33=sqrt(diag(D3));
wp34=sqrt(diag(D4));
wp35=sqrt(diag(D5));
wp36=sqrt(diag(D6));
wp37=sqrt(diag(D7));
%Frecuencias naturales del sistema no amortiguado
%input('Frecuencias naturales del sistema no amortiguado (Hz)')
fp1=wp31/(2*pi); %d1=20mm
fp2=wp32/(2*pi); %rt=22mm
fp3=wp33/(2*pi); %rt=24mm
fp4=wp34/(2*pi); %rt=26mm
fp5=wp35/(2*pi); %rt=28mm
fp6=wp36/(2*pi); %rt=30mm
fp7=wp37/(2*pi); %rt=32mm
fn1=[0 0 0 0 0 0 0];
fn2=[fp1(2,1) fp2(2,1) fp3(2,1) fp4(2,1) fp5(2,1) fp6(2,1) fp7(2,1)];
fn3=[fp1(3,1) fp2(3,1) fp3(3,1) fp4(3,1) fp5(3,1) fp6(3,1) fp7(3,1)];
figure(1)
plot(KK,fn1, KK,fn2, KK,fn3, 'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Rigidez torsional eje conducido (Nm/rad)', 'fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]', 'fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. k2 variable', 'FontSize',[14], 'color','b')

```

A.4.7. FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PARA INERCIA DE LA CARGA VARIABLE

```

% Inercia de la carga variable
% Eje motriz
d1=25;l1=500; G=80E09; %(N/m2)
k1=(G*pi*((d1/1000)^4))/((32)*(l1/1000));
% Eje conducido
d2=25;l2=500;
k2=(G*pi*((d2/1000)^4))/((32)*(l2/1000));
% Del piñon
mod=4; a=10*mod; dens=7860;
z2=40; d2=mod*z2; % rt=40/25
I2=((dens*(a/1000)*(pi))/32)*((d2/1000)^4);
I1=0.0110;I3=0.00312;
t4=50; d41=150; d42=200; d43=250; d44=300; d45=350;
I41=((dens*(t4/1000)*(pi))/32)*((d41/1000)^4);
I42=((dens*(t4/1000)*(pi))/32)*((d42/1000)^4);
I43=((dens*(t4/1000)*(pi))/32)*((d43/1000)^4);
I44=((dens*(t4/1000)*(pi))/32)*((d44/1000)^4);
I45=((dens*(t4/1000)*(pi))/32)*((d45/1000)^4);
I=[I41 I42 I43 I44 I45];
%Tn=1;

```

```
w=60; %Frecuencia de excitación en Hz
%input('Matriz de inercia')
MI31=[11 0 0; 0 ((I2)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I41];
MI32=[11 0 0; 0 ((I2)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I42];
MI33=[11 0 0; 0 ((I2)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I43];
MI34=[11 0 0; 0 ((I2)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I44];
MI35=[11 0 0; 0 ((I2)+((1.6^2)*(I3))) 0; 0 0 I45];
%input('Matriz de rigidez')
MK31=[k1, -k1, 0; -k1, ((k1)+((k2)*(1.6^2))), (-k2*1.6); 0, (-k2*1.6), k2];
% Resolución del problema de valores propios no amortiguado
[V1,D1]=eig(MK31,MI31);
[V2,D2]=eig(MK31,MI32);
[V3,D3]=eig(MK31,MI33);
[V4,D4]=eig(MK31,MI34);
[V5,D5]=eig(MK31,MI35);
%Frecuencias angulares del sistema no amortiguado (rad/s)
wp31=sqrt(diag(D1));
wp32=sqrt(diag(D2));
wp33=sqrt(diag(D3));
wp34=sqrt(diag(D4));
wp35=sqrt(diag(D5));
%Frecuencias naturales del sistema no amortiguado
fp1=wp31/(2*pi); %rt=1.4
fp2=wp32/(2*pi); %rt=1.6
fp3=wp33/(2*pi); %rt=1.8
fp4=wp34/(2*pi); %rt=2.0
fp5=wp35/(2*pi); %rt=2.2
fn1=[0 0 0 0 0];
fn2=[fp1(2,1) fp2(2,1) fp3(2,1) fp4(2,1) fp5(2,1)];
fn3=[fp1(3,1) fp2(3,1) fp3(3,1) fp4(3,1) fp5(3,1)];
plot(II,fn1, II,fn2,II,fn3,'LineWidth',2)
grid on
xlabel('Momento de Inercia I4 [Kg/m2]','fontsize',14)
ylabel('Frecuencia Natural [Hz]','fontsize',12)
title('Frecuencias Naturales. I4 variable', 'FontSize',[14],'color','b')
```

A.4.8. VIBRACIONES TORSIONALES BAJO REGIMEN TRANSITORIO

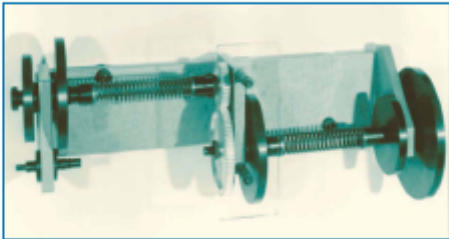
```
%REGIMEN TRANSITORIO
I1=0.0110;I3=0.00312;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Inercia del piñon variable y rt variable
%I2= 0.0119 ; n=1.4; I4=0.062;
%I2= 0.0723 ; n=2.2; I4=0.062;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Inercia del piñon variable y rt constante
%I2= 0.02048 ; %n=1.6; %I4=0.062;
%I2= 0.090 ; n=1.6; I4=0.062;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%I4=0.0195;
I4=0.5790;I2=0.02048;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%k1=2513;
k1=5900;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%k2=2513;
k2=5900;
%k2=9655;
```

```

%k2=16471;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Inercia del piñón constante y rt variable
n=1.6;
%n=2.0;
%n=2.5;
%n=3.0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Tn=1;w=60*2*pi;
tspan=[0:0.0001:(1/120)];
y0=[0; 0; 0; 0; 0];
[t,y]=ode23('dfunc6_23', tspan, y0);
A=sin(w*t);
figure(1)
tor12=k1.*((y(:, 1))-(y(:, 3)));
plot(t,tor12,t,A,'r')
grid on
xlabel('tiempo (s)', 'fontsize', 14);
ylabel('Tst/Tn (1-2)', 'fontsize', 14);
figure(2)
teta3=rt*(y(:, 3));
tor34=k2.*(teta3-(y(:,5)));
plot(t,tor34,t,A,'r')
grid on
xlabel('tiempo (s)', 'fontsize', 14);
ylabel('Tst/Tn (3-4)', 'fontsize', 14);
me12=[tor12]';
me34=[tor34]';

```

**ANEXO 5: BANCOS DE PRUEBA PARA ESTUDIO DE LAS
VIBRACIONES TORSIONALES [8]**



EDIBON Torsional Oscillations
Equipment

MOT

Torsional oscillations apparatus is intended for use in either the classroom or the laboratory and may be used to illustrate and investigate the torsional oscillations of single rotor, multi-rotor and geared systems.

The apparatus consists basically of a rigid frame carrying bearing cells, helical springs to simulate long flexible shafts and discs of varying mass moment of inertias. Suitable gears of various sizes are also provided.

The natural frequencies are of a low order and may be counted, a line drawn axially on the spring serves to illustrate the elastic line and facilitates the experimental location of the nodes.

The apparatus may be wall mounted or mounted on the Universal Bench Mounting Frame

Dimensions 790 x 380 x 370 mm approx.
Net Weight 28 kg

Note: New catalogue available soon

* Specifications subject to change without previous notice, due to continuous improvements of the product.

EDIBON
TEACHING EQUIPMENTS

C/ San José 11-13, 28921 ALCORCON (Madrid) SPAIN
Phone: 34-91-6198683 FAX: 34-91-6198647E-mail: edibon@edibon.com
Web site: www.edibon.com

DISTRIBUTED BY:

Edibon ED 01 / 01

MECHANICS & MATERIALS

Figura 4.3. Equipo para estudio de las vibraciones torsionales de sistemas engranados



- Efecto de masa giratoria, resistencia a la torsión y medida de amortiguación sobre un vibrador por torsión

Descripción

El juego de ensayo contiene tres barras de torsión distintas y dos discos de masa también diferentes. Un amortiguador de aceite permite atenuar las amplitudes. Los componentes se montan fácilmente y con exactitud en las ranuras del perfil del bastidor del sistema didáctico para oscilaciones TM 150.

Ensayos

- Frecuencia de resonancia de oscilaciones torsionales
- Efecto de la rigidez a la torsión, la masa giratoria y la amortiguación

Especificación

- [1] Ensayo complementario vibraciones por torsión al sistema de enseñanza sobre oscilaciones TM 150
- [2] Barras de torsión $\varnothing 3\text{mm}$, $\varnothing 5\text{mm}$, $\varnothing 6\text{mm}$, largo 800mm, acero inoxidable
- [3] Discos de masa: $\varnothing 150\text{mm}$, $\varnothing 228\text{mm}$
- [4] Mandril con cojinete de bolas $\varnothing 0,5...8,0\text{mm}$
- [5] Amortiguador abierto cargado de aceite
- [6] Estructura LxAnxAI aprox. 250x250x100mm

Datos técnicos

Barras de torsión: $\varnothing 3\text{mm}$, $\varnothing 5\text{mm}$, $\varnothing 6\text{mm}$,
Largo 800mm, acero inoxidable
Discos de masa: pequeño $\varnothing 150\text{mm}$ con aprox. 2,7kg; grande $\varnothing 228\text{mm}$ con aprox. 4,8kg
Mandril: $\varnothing 0,5...8,0\text{mm}$

Dimensiones y pesos

Estructura del ensayo ensamblada, appr. 27 kg
L x An x AI: aprox. 250 x 250 x 1100mm

Volumen de suministro

3 barras, 2 discos, 2 unidad rodamiento, 1 dispositivo de fijación, 1 amortiguador, 1 manual

Figura 4.4. Equipo para estudio de las oscilaciones torsionales libres y amortiguadas



- Experimento de oscilaciones en sistema de muelle espiral-masa rotativa

Descripción

Un muelle espiral de acero laminado en frío se encuentra enclavado entre un eje con cojinete de bolas y un soporte fijo. Sobre el eje asientan dos brazos opuestos entre sí. Dos piezas metálicas corredizas sobre los brazos que pueden afianzarse fiablemente mediante tornillos de fijación forman las masas rotativas cuyo momento de inercia puede modificarse. El sistema se invierte manualmente. El ángulo de torsión se lee en un disco graduado a precisión de 1° que igualmente se encuentra conectado en fijo con el eje. El equipo está previsto para montaje a pared.

Ensayos

- Determinación de la rigidez de un muelle espiral
- Determ. de la frecuencia propia de un sistema de muelle espiral-masa rotativa
- - Con modificación de la totalidad de la masa oscilante
- - Con modificación de la distribución de la masa

Especificación

- [1] Estudio de las oscilaciones de péndulo en un sistema de muelle espiral-masa rotativa
- [2] Sección transversal del muelle espiral: 10x1mm
- [3] Radio de brazo de la masa rotativa: 36...150mm
- [4] Pesas: 0,5kg
- [5] Cartabón graduado integrado, graduación 1°
- [6] Equipo previsto para montaje a pared
- [7] LxAnxAI 250x200x366mm

Datos técnicos

Muelle espiral, sección transversal: 10x1mm
 Longitud del muelle: aprox. 800mm
 Radio interior: 10mm, radio exterior: 50mm
 Pesas: 0,5kg
 Radio de brazo de la masa rotativa: 36...150mm

Dimensiones y pesos

L x An x Al: 250 x 200 x 366 mm
 Peso: aprox. 6 kg

Volumen de suministro

1 modelo cinético completo, 1 instrucciones de ensayo

Nº de artículo

040.16400 TM 164 Modelo de Vibración Torsional con Resorte Espiral

Figura 4.5. Modelo de vibración torsional con resorte espiral



- Variado experimento de mesa sobre la resistencia a la torsión y vibraciones por torsión
- Comportamiento de vibradores de dos y tres masas
- Sistema de adquisición de datos para PC TM 140.20 disponible

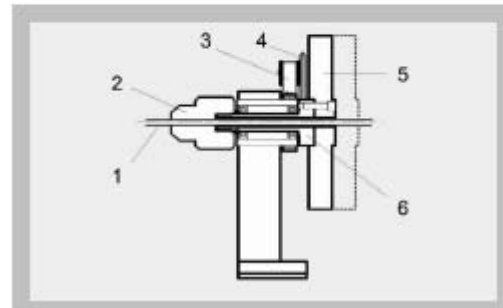


Ensayos

- Determinación de la resistencia a la torsión de una barra de acero
- Determinación de los pares de inercia de masas
- Comportamiento de la extinción de la oscilación de vibraciones por torsión
- Determinación de la amortiguación en vibraciones por torsión
- Vibraciones por torsión forzadas, resonancia
- Sistema de vibraciones por torsión con varias masas, vibrador por torsión de dos masas, vibrador por torsión de tres masas

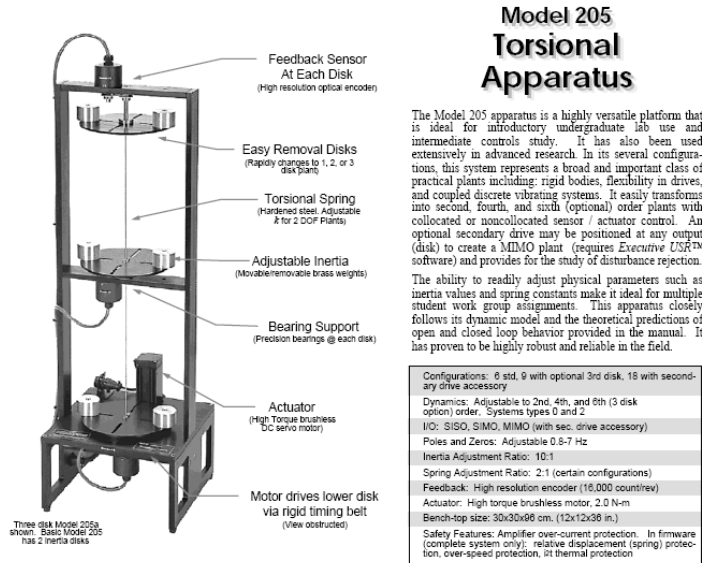
Descripción

Este equipo de mesa tiene la finalidad de hacer entender mediante experimentos sugestivos la torsión y vibraciones de torsión. También se han previsto igualmente ensayos demostrativos y prácticos. Elemento central del ensayo es una barra de torsión. En la misma pueden fijarse con ayuda de mandriles de sujeción discos de masa con diferentes valores de inercia. De esta forma es posible construir un sistema de vibraciones por torsión de hasta tres masas. Con una unidad excitadora eléctricamente alimentada desde la unidad de mando pueden forzarse vibraciones sobre las mismas. Un amortiguador regulable permite influir sobre éstas. Generadores de ángulos de giro en los mandriles de sujeción suministran como señal eléctrica la amplitud de las vibraciones. La unidad de mando procesa estas señales y las pone a disposición a fines de indicación; p. ej., con un osciloscopio bicanal o con el sistema de adquisición de datos para PC TM 140.20 disponible como accesorio.



1 mandril de sujeción, 2 barra de torsión, 3 generador del ángulo de giro, 4 rueda de fricción, 5 volante de masa, 6 brida de tres orificios sobre arrastrador con cojinete de bolas

Figura 4.6. Equipo para estudio de las vibraciones por torsión. Frecuencia de excitación de 1 a 20Hz



Easily Transforms to 6 Distinct Plants That Include...
(Nine plants with optional third disk*)

Plant Models				
Plant Models	<i>Rigid body</i>	<i>Free-clamped</i>	<i>Free-free, 2 DOF</i>	<i>Free-clamped, 2 DOF</i>
Time Domain Equations	$J\ddot{\theta}(t) = T(t)$	$J\ddot{\theta}(t) + k\theta(t) = T(t)$	$J_1\ddot{\theta}_1(t) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = T(t)$ $J_2\ddot{\theta}_2(t) + k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0$	$J_1\ddot{\theta}_1(t) + k_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + k_2\theta_1(t) = T(t)$ $J_2\ddot{\theta}_2(t) + k_1(\theta_2(t) - \theta_1(t)) + k_2\theta_2(t) = 0$
S-Domain Equations	$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J s^2}$	$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J s^2 + k}$	$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{J_2 s^2 + k}{J_1 J s^2 + k}$, $\frac{\theta_2(s)}{D(s)} = \frac{k}{D(s)}$ $D(s) = s^2 (J_1 J s^2 + (J_1 + J_2) k)$	$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{J_2 s^2 + k_1 + k_2}{D(s)}$, $\frac{\theta_2(s)}{D(s)} = \frac{k_1}{D(s)}$ $D(s) = J_1 J s^4 + (J_1(k_1 + k_2) + J_2 k_1) s^2 + k_1 k_2$
Characteristics	<ul style="list-style-type: none"> Rigid body model. Type 2 system. See page 5. 	<ul style="list-style-type: none"> Classic spring-mass oscillator Type 0 system Single vibration mode 	<ul style="list-style-type: none"> Rigid body plus 1 oscillatory mode. Type 2 system. $\theta_1 T$: 2 imag zeros, pole excess = 2 $\theta_2 T$: no zeros, pole excess = 4 	<ul style="list-style-type: none"> 2 oscillatory modes. Type 0 system. $\theta_1 T$: 2 imag zeros, pole excess = 2 $\theta_2 T$: no zeros, pole excess = 4

* Three disk Model 205a plant provides sixth dynamic order with third normal mode.

Figura 4.7. Equipo de vibración torsional con tres discos