PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE PRECIOS DE ARBITRAJE CON COSTOS DE TRANSACCIÓN EN UN MERCADO DE DIVISAS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN MATEMÁTICAS APLICADAS

AUTOR

David Dall'Orto Cacho

ASESOR

Dr. Luis Valdivieso

JURADO

Dr. Johel Beltrán

Dra. Loretta Gasco

Dr. Luis Valdivieso

LIMA-PERÚ

2013

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por su apoyo incondicional. A los doctores Luis Valdivieso y Johel Beltrán por compartir su tiempo y sus conocimientos. Por último, a mi esposa Sandra que siempre me impulsó a seguir adelante.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

Harrison and Kreps (1979) aplicaron el principio de no arbitraje al estudio sistemático de tres diferentes modelos de mercados financieros, siendo uno de ellos el modelo de Black - Scholes. Una característica importante de dicho estudio fue la estrecha relación entre los argumentos del principio de no arbitraje y la teoría de martingalas. Esta relación dio lugar al “Teorema Fundamental de Precios de Arbitraje”, término acuñado por Dybvig and Ross (1987). De manera general, se puede decir que un modelo matemático en un mercado financiero está libre de arbitraje si y solo si existe una martingala sujeta a una medida de probabilidad equivalente. La incorporación de la teoría de martingalas permitió la aplicación de herramientas matemáticas más complejas, siendo el primer intento para convertir el principio general de no arbitraje a teoremas matemáticos para su aplicación el realizado por Harrison and Pliska (1981), al utilizar espacios de probabilidad de dimensión finita.

Basados en esto y posteriores desarrollos, se ha creído conveniente en este trabajo revisar la aplicación del referido teorema fundamental a mercados financieros sin costos de transacción (sin fricciones), para luego estudiar su aplicación a mercados financieros particulares (mercados de divisas) que incorporen costos de transacción. Esto último, sin duda, acerca la teoría a la realidad. Tanto en el modelo sin fricciones como en el presente trabajo se presentará la condición de arbitraje débil, que establece una restricción para evitar que los agentes, sin inversión alguna, culminen su participación en el mercado con portafolios que, luego de liquidados, tengan un valor mayor a cero. En otras palabras, el presente trabajo establecerá las condiciones que deberán cumplir los precios de varios activos financieros en un mercado discreto bajo costos de transacción para que los agentes económicos no tengan oportunidades de arbitraje. Si bien, este estudio podría extenderse a mercados financieros cualesquiera, nos centraremos básicamente en el estudio de un mercado de divisas.

Al respecto, conviene señalar que el mercado de divisas es un mercado mundial y descentralizado en el que se negocian precisamente divisas (monedas utilizadas en una región o país ajeno a su lugar de origen). Los precios de las divisas fluctúan entre sí dentro del mercado monetario mundial. De este modo, podemos establecer distintos tipos de cambio entre divisas que varían constantemente en función de diversas variables como el crecimiento económico, la inflación, las tasas de interés o el consumo interno de un país. Por ejemplo, en el caso de la tasa de interés, los inversionistas preferirán aumentar sus posiciones en una divisa particular cuanto mayor sea la tasa de interés que pagan los bancos por los depósitos en esta divisa, pues en este caso los inversionistas recibirán un beneficio adicional por tener mayores depósitos bancarios en esta divisa. Esto último generará una apreciación (aumento de precio) de esta divisa respecto a otras. Asimismo, si se prevé que habrá una mayor inflación en el futuro (que originará una futura pérdida del poder adquisitivo de la divisa del país de mayor inflación), los inversionistas preferirán vender sus posiciones en esa divisa, lo cual originará su depreciación respecto a otras divisas.

Asimismo, debe señalarse que el mercado de divisas está organizado como un mercado "over the counter" o sobre el contador, en el cual existe una gran cantidad de agentes alrededor del mundo, por ejemplo bancos, que compran y venden grandes cantidades de divisas. Este mercado tiene la característica de ser muy competitivo, por lo cual, para efectos prácticos, funciona como si fuera un mercado centralizado. A su vez, los bancos centrales también desempeñan un papel importante en este mercado, siendo su principal objetivo controlar la oferta monetaria y/o las tasas de interés de la moneda de su país y a menudo imponen o dirigen los tipos de cambio utilizando sus reservas internacionales para estabilizar el mercado local.

En el presente trabajo, las operaciones de compra y venta de divisas a realizarse en el mercado estarán sujetas al pago de costos de transacción. Estos costos representan, por ejemplo, la comisión del intermediario financiero y los impuestos de ley. Se asumirá también que los costos de transacción son una proporción del monto de la operación y que son constantes durante un tiempo.

De otro lado, cabe señalar que el primer teorema fundamental (véase por ejemplo Sánchez (2010)) relaciona la teoría de valuación de activos financieros o derivados y la teoría de procesos estocásticos, en particular, de martingalas. Este resultado establece que la ausencia de oportunidades de arbitraje equivale a la existencia de una medida martingala equivalente de probabilidad neutral al riesgo, Q, donde entenderemos a esta última como una medida equivalente a la medida de probabilidad real P (ambos comparten los mismos elementos de medida nula) y es tal que los precios descontados de los activos en el mercado conforman un proceso martingala, cuyos niveles se mantienen en promedio constantes a lo largo del tiempo.

Para facilitar la notación en este trabajo, denotaremos un proceso estocástico por $\mathbf{X} = \{X_t\}$, donde $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ recorrerá los distintos periodos de transacción en nuestro mercado y T denotará al tiempo de expiración o maduración. Definiremos también el proceso $\mathbf{X}_- = \{(X_-)_t\}$ mediante:

$$(X_-)_t := X_{t-1}.$$

Asimismo, dados 2 procesos estocásticos, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, definiremos la integral estocástica discreta de $\mathbf{X}$ con respecto a $\mathbf{Y}$ como el proceso $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \{(X \cdot Y)_t\}$ tal que

$$(X \cdot Y)_t := \sum_{s=0}^{t} X_s \Delta Y_s,$$

siendo $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-1}$ la variación del proceso $\mathbf{Y}$ en s respecto a $s-1$. A este último proceso lo denotaremos por $\mathbf{\Delta Y}$. En tal sentido, se cumple que:

$$\mathbf{\Delta}(\mathbf{XY}) = \mathbf{X\Delta Y} + \mathbf{Y}_-\mathbf{\Delta X},$$

pues

$$\begin{aligned} \Delta(XY)_t &= X_tY_t - X_{t-1}Y_{t-1} \\ &= X_tY_t + X_tY_{t-1} - X_tY_{t-1} - X_{t-1}Y_{t-1} = X_t\Delta Y_t + (Y_-)_t\Delta X_t. \end{aligned}$$

Tras este capítulo introductorio, donde se han presentado los objetivos del presente trabajo y algunas definiciones y notaciones, los capítulos siguientes describirán la relación del principio de no arbitraje en mercados financieros con la medida martingala equivalente y las conclusiones que se derivan de este modelo. En particular, el capítulo 2 introduce la teoría de arbitraje y su aplicación a los mercados financieros sin costos de transacción. El capítulo 3 describe las características de un mercado de divisas con costos de transacción. El capítulo 4 desarrolla la teoría de arbitraje y su aplicación a un mercado de divisas con costos de transacción. Finalmente, el capítulo 5 contiene las conclusiones y futuras investigaciones que se puedan derivar de este trabajo.

Capítulo 2

Teoría de arbitraje aplicada a mercados financieros sin costos de transacción

Intuitivamente, una oportunidad de arbitraje es la posibilidad de obtener un beneficio en un mercado financiero sin correr riesgos; es decir, sin haber realizado inversión alguna de capital. En un mercado financiero líquido no deberían de haber tales oportunidades y es precisamente el mercado quien debe de regular o arbitrar para que ella no se presente. Esta formulación se debe a Harrison and Pliska (1981), quienes lo establecieron para un modelo con un número finito de estados de la naturaleza; es decir, para un espacio muestral Ω finito. De otro lado, este resultado de no arbitraje incorpora un concepto importante de probabilidad, el de una medida martingala, lo que da pie a afirmar, por lo pronto, que el resultado de no arbitraje establece que un agente no puede ganar (en tiempo finito) si se apuesta a un proceso martingala.

Para describir la condición de no arbitraje e introducir algunas definiciones, tomemos un ejemplo sencillo con dos activos financieros y dos estados de la naturaleza, los cuales nos indican los posibles caminos que los precios de estos activos pudieran seguir entre un periodo $t = 0$, digamos hoy, y un periodo $t = 1$, digamos mañana. Formalmente, tenemos aquí un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, donde asumiremos que las probabilidades de que estos estados de la naturaleza se den son estrictamente positivas y satisfacen $P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) = 1$.

Además, las cantidades de los dos activos financieros del agente formarán un portafolio de inversión y dichas cantidades vigentes en el período, digamos, $t = 1$ serán determinadas en el período $t = 0$ sobre la base de los precios de mercado en ese momento. Esta última condición nos dice que un portafolio de inversión es un proceso "predecible"; es decir, que sus componentes de "hoy" son determinados en función de la información de "ayer".

Tomemos ahora ciertas cantidades de estos dos activos, $H_1 = (H_1^1, H_1^2)$, y asumamos una estrategia autofinanciada [1] con valor inicial 0 y componentes H_1 que se mantienen constantes hasta el tiempo $t = 1$, momento en el cual, dependiendo de los nuevos precios, podríamos optar por otro portafolio, H. Si $S_t = (S_t^1, S_t^2)$ denota al vector de precios de cada uno de los dos activos en el período t, el valor de este portafolio en $t = 0$ viene dado por:

$$V_0 \;=\; H_1^1 S_0^1 \;+\; H_1^2 S_0^2 \;=\; 0$$

para cada estado de la naturaleza. Esta expresión se puede también formular como:

$$V_0 \;=\; \langle H_1, S_0 \rangle \;=\; 0,$$

donde $\langle , \rangle$ denota al clásico producto interno en el plano y representa geométricamente que los vectores que contienen al portafolio y precios de los activos en el período inicial son ortogonales.

Este ejemplo se podría mejor ilustrar en un plano cartesiano como el mostrado en la Figura 1. Aquí se ilustran los distintos portafolios y precios en el plano. Por la recta $\mathcal{H}_1$ representaremos al subespacio de todos los posibles portafolios con valor 0 que pueden adquirirse inicialmente; es decir, sin inversión alguna.

Supongamos ahora que para $t = 1$ y el primer estado de la naturaleza, ω_1, el vector de precios de los activos es $S_1(\omega_1)$. La perpendicular a esta línea representará entonces al espacio lineal que contiene a todos los portafolios futuros H cuyo valor es igual a 0. Similarmente, si para $t = 1$ y el estado de la naturaleza 2, ω_2, el vector de precios de los activos es $S_1(\omega_2)$, entonces la línea perpendicular a este vector de precios representará el espacio lineal que contiene a los futuros portafolios H con valor nulo.

Introduzcamos ahora el concepto de portafolio admisible: un portafolio H se dice admisible si

$$\langle H, S_t \rangle \geq 0$$

para casi todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, donde por el término "para casi todo" lo entenderemos como que esta relación no se cumple tan sólo en un conjunto cuyo producto cartesiano de la medida de Lebesgue y la medida de probabilidad es 0.

Geométricamente, y retomando la Figura 2.1, todos los portafolios admisibles H se encontrarán a la derecha de la intersección de las líneas perpendiculares generadas por los precios en $t = 1$ bajo cada estado de la naturaleza. A este conjunto de portafolios admisibles lo denotaremos por $\mathcal{A}$ y lo representamos por la zona sombreada de la Figura 2.1.

[1] Aunque más adelante se presentará este concepto, es importante indicar que una estrategia es autofinanciada si cualquier cambio en el valor del portafolio entre un período y otro solo resulta de las ganancias (o pérdidas) obtenidas producto de la variación de precios y no de entradas o salidas de dinero realizadas por el inversionista.

En nuestro ejemplo el inversionista empieza sin capital con un portafolio en $\mathcal{H}_1$ y con el valor de éste puede adquirir un portafolio en $\mathcal{A}$, por lo que resulta natural pensar que, para que no exista una oportunidad de arbitraje, el único portafolio que puede adquirir en $\mathcal{A}$ es el nulo. En otras palabras, el único portafolio admisible con una inversión nula debe ser el que tenga un valor 0, de lo contrario, el agente tendría la oportunidad de obtener un beneficio sin riesgo; es decir, sin realizar inversión alguna.

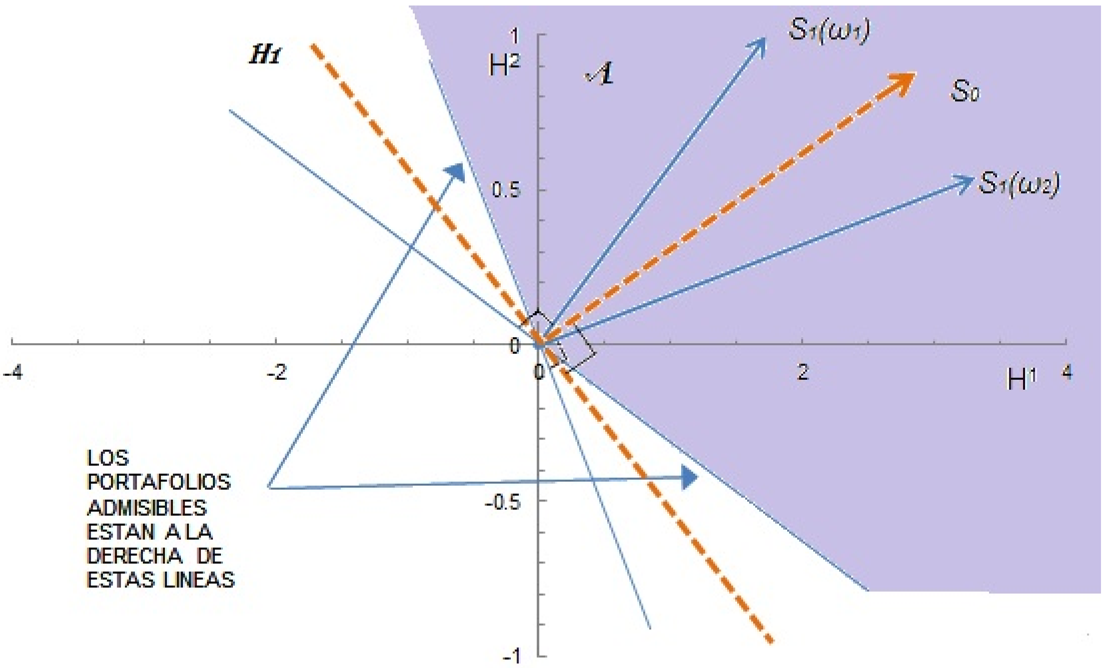

Figura 2.1: Representación gráfica de los portafolios admisibles

Teniendo en mente el ejemplo presentado, será conveniente ahora formalizar algunos conceptos para el modelamiento de nuestro mercado financiero de trabajo. En primer lugar, debe señalarse que el modelo parte de un espacio de probabilidad (Ω, F, P) finito, donde Ω denota al conjunto de estados de la naturaleza o posibles trayectorias que los precios de los activos en el mercado pudieran seguir. Sobre este espacio se definen distintos procesos estocásticos (que pueden ser por ejemplo los mismos precios de los activos financieros o los portafolios de los inversionistas), los cuales se observarán discretamente a lo largo de $T+1$ periodos. De ahí que se pueda señalar que las transacciones de los inversionistas se podrán realizar en cada período discreto $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, dependiendo de las condiciones económicas del mercado. Estas transacciones modificarán las posiciones de activos financieros del inversionista, donde cada activo financiero puede representar títulos, valores (acciones) o ciertos derechos sobre inmuebles realizables (opciones, títulos hipotecarios, entre otros).

La existencia del espacio de probabilidad (Ω, F, P) hace necesaria la introducción del espacio $L^0(\Omega, F, P)$, que es el espacio de clases de equivalencia de variables aleatorias

$F-$medibles definidas como iguales casi en todas partes con respecto a la medida de probabilidad P. Este espacio es un espacio líneal métrico completo. Por su parte, para modelar el proceso de precios de activos financieros $\mathbf{S}$ se definirá el espacio $L^1(\Omega, F, P)$, el cual contiene todas las funciones integrables en Ω (de esperanza finita). Este es un espacio vectorial completo.

Consideremos, por otro lado, un mercado de $d+1$ activos financieros, cuyo proceso estocástico de precios viene dado por $\hat{\mathbf{S}} = \{\hat{S}_t\}_{t=1}^T = \{(\hat{S}_t^0, \hat{S}_t^1 ..., \hat{S}_t^d)\}_{t=0}^T$. En este mercado el activo 0 denotará a un activo sin riesgo o numerario, como por ejemplo una cuenta bancaria o bono con tasa de interés r y proceso de precios $\{\widehat{S}_t^0 = e^{rt}\}$, en el cual asumiremos que $\hat{S}_0^0 = 1$. Los demás d activos, serán de otro lado, considerados como activos con riesgo.

Definamos ahora una estrategia de transacción o intercambio, a representarse por el proceso $\tilde{\mathbf{H}} = \{\tilde{H}_t\}_{t=1}^T = \{(\tilde{H}_t^0, \tilde{H}_t^1, \ldots, \tilde{H}_t^d)\}_{t=1}^T$, cuyos componentes, que llamaremos portafolios, toman valores en $\mathbb{R}^{d+1}$. De manera más específica $\tilde{H}_t^j$ representará aquí la cantidad del activo j que el inversionista mantiene hasta el periodo t. Dado que estas cantidades son seleccionadas por el inversionista apenas él observe los precios en el periodo $t-1$, se asumirá que el proceso $\tilde{\mathbf{H}} = \{\tilde{H}_t\}_{t=1}^T$ es predecible; o más formalmente, que $\tilde{H}_t$ es $F_{t-1}-$medible. Más aún, asumiremos que la estrategia de transacción es auto-financiada; esto es, $\forall t = 1, 2, \ldots, T-1$:

$$\langle \tilde{H}_t, \hat{S}_t \rangle = \langle \tilde{H}_{t+1}, \hat{S}_t \rangle$$

ó

$$\tilde{H}_t^0 \hat{S}_t^0 + \sum_{j=1}^{d} \tilde{H}_t^j \hat{S}_t^j = \tilde{H}_{t+1}^0 \hat{S}_t^0 + \sum_{j=1}^{d} \tilde{H}_{t+1}^j \hat{S}_t^j,$$

lo cual significa que para los cambios de portafolio dentro de la estrategia no podrá existir ni entrada ni salida de fondos en el mercado o, dicho de otro modo, todo nuevo portafolio en la estrategia deberá ser financiado con su portafolio anterior, siendo la inversión inicial para la estrategia dada por:

$$\hat{V}_0 = \langle \tilde{H}_1, \hat{S}_0 \rangle = \tilde{H}_1^0 + \sum_{j=1}^{d} \tilde{H}_1^j \hat{S}_0^j.$$

La dinámica del mercado podrá mejor entenderse de trabajarse en términos descontados, al utilizar los precios del activo 0 como numerario. Los precios descontados de los d activos con riesgo vendrán definidos por:

$$S_t^1 = \frac{\widehat{S}_t^1}{\widehat{S}_t^0}, S_t^2 = \frac{\widehat{S}_t^2}{\widehat{S}_t^0}, \ldots, S_t^d = \frac{\widehat{S}_t^d}{\widehat{S}_t^0}.$$

Llegados a este punto será importante redefinir de manera equivalente a la estrategia de transacción $\tilde{\mathbf{H}} = \{\tilde{H}_t\}_{t=1}^T = \{(\tilde{H}_t^0, \tilde{H}_t^1, \ldots, \tilde{H}_t^d)\}_{t=1}^T$, eliminando de ella su primera componente. Esto nos brindará la estrategia de transacción $\mathbf{H} = \{H_t\}_{t=1}^T = \{(H_t^1, \ldots, H_t^d)\}_{t=1}^T$, con $H_t^j = \tilde{H}_t^j, \forall j = 1, 2, \ldots, d$ para los activos con riesgo. De imponerse la normalización $\tilde{H}_1^0 = 0$ (por citar, al prescindirse inicialmente de la cuenta bancaria), ambos procesos $\tilde{\mathbf{H}}$ y $\mathbf{H}$ estarán en correspondencia 1-1. En tal sentido denotaremos por $\mathcal{H}$ al conjunto de todas las estrategias de transacción $\mathbf{H}$ como la descrita para la cual el inversionista empieza sin capital; es decir con $\hat{V}_0 = V_0 = \sum_{j=1}^d H_1^j S_0^j$.

Definimos ahora la integral estocástica discreta $\mathbf{H} \cdot \mathbf{S} = \{(H \cdot S)_t\}_{t=1}^T$, para una estrategia de transacción $\mathbf{H} = \{H_t\}_{t=1}^T$, mediante:

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} \langle H_u, \Delta S_u \rangle,$$

siendo $\langle ., . \rangle$ el producto interno en $\mathbb{R}^d$.

La variable aleatoria:

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} \langle H_u, \Delta S_u \rangle$$

modela entonces la ganancia o pérdida obtenida por el inversionista hasta el período t de seguir la estrategia de transacción $\mathbf{H}$.

Definición 2.1. *Llamaremos al subespacio de $L^0(\Omega, F, P)$:*

$$A = \{(H \cdot S)_T \mid \mathbf{H} = \{H_t\}_{t=1}^T \in \mathcal{H}\}$$

el conjunto de reclamos contingentes coberturables en el período de expiración T para una inversión inicial 0.

La interpretación económica de $(H \cdot S)_T$ es que éste representa la riqueza final (en el periodo de expiración T) de un agente que sigue la estrategia predecible $\mathbf{H}$ y que no ha invertido cantidad alguna en esta estrategia.

Aquí es donde se introduce la noción de arbitraje, el cual está condicionado al valor de $(H \cdot S)_T$. En efecto, si este valor es no negativo y diferente de cero, entonces existirá una estrategia de transacción o intercambio $\mathbf{H}$ en el que, sin inversión alguna, el inversionista podría obtener un beneficio en el período final. Para excluir tal posibilidad, la condición de no arbitraje (NA) establece lo siguiente.

Definición 2.2. *Diremos que el mercado satisface la condición de no arbitraje (NA), si y solamente si:*

$$A \cap L_+^0(\Omega, F, P) \ = \ \{0\},$$

donde 0 denota la variable aleatoria idénticamente nula.

Recordemos aquí que $L^0(\Omega, F, P)$ es el espacio de variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}$ y $L_+^0(\Omega, F, P)$ es su ortante positivo. La condición de no arbitraje descrita nos señala que la intersección entre el espacio de reclamos contingentes (riqueza final del inversionista) y el espacio de variables aleatorias no negativas debe contener solamente al 0. Tal condición se cumplirá si y solo si existe una medida de probabilidad equivalente respecto del cual cada elemento de A tiene media cero. Esto precisamente nos lleva a introducir el concepto de martingala.

Comencemos con la explicación intuitiva de una martingala que señala que este es un modelo matemático de una "apuesta justa" en el que un apostador, en promedio, no gana ni pierde en cada juego lo que, en otras palabras, significa que su ganancia esperada es 0. Si denominamos a la fortuna de un apostador en el período t como X_t, la condición de "apuesta justa" significa que la esperanza condicional de $X_t - X_{t-1}$, dado el conocimiento acumulado hasta el momento $t-1$, es 0.

El concepto de conocimiento acumulado nos da pie para explicar la definición de filtración. Una filtración describe el flujo de información que un agente va obteniendo conforme el tiempo transcurre. En términos más formales, se puede decir que dicha información se va almacenando en conjuntos denominados sub - sigma álgebras, donde cada sub - sigma álgebra se construye para un momento determinado y la sub - sigma álgebra más reciente incluye a todas las anteriores. Formalmente, una filtración en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) es una sucesión $F = (F_t)_{t=0}^T$ de sub - sigma álgebras de F tal que $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_T = F$, donde esta última condición indica que el conocimiento se incrementa con el tiempo. La introducción de una filtración asociado a un espacio probabilístico deviene en su natural extensión a lo que se conoce como un espacio filtrado $(\Omega, F, (F_t)_{t=0}^T, P)$.

En términos formales una martingala se define como sigue.

Definición 2.3. *Un proceso estocástico $\mathbf{X} = \{X_t\}$ definido sobre un espacio filtrado $(\Omega, F, (F_t)_{t=0}^T, P)$ es una martingala si:*

(i) $\{X_t\}$ *es adaptado a* $(F_t)_{t=0}^T$*; es decir,* X_t *es* F_t *medible,* $\forall t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

(ii) Para cada t, X_t *es integrable; es decir,* $E_P[|X_t|] < \infty$.

(iii) Para cada t, $E_P[X_t|F_{t-1}] = X_{t-1}$.

Describamos ahora el concepto de medida martingala equivalente, que nos permitirá vincular el concepto de martingala, arriba descrito, con la condición de no arbitraje en mercados financieros cualesquiera. Recordemos que la condición de no arbitraje (NA) establece que $A \cap L_+^0(\Omega, F, P) = \{0\}$, lo que significa que toda estrategia con inversión nula $\mathbf{H} = \{H_t\}$ en $\mathcal{H}$ no nos debería llevar a que en el período de expiración, el agente obtenga un beneficio. En términos más formales, una oportunidad de arbitraje es una estrategia $\mathbf{H} = \{H_t\}$ en $\mathcal{H}$ (es decir, con $\langle H_1, S_0 \rangle = 0$) tal que

$$P((H \cdot S)_T \geq 0) = 1 \ \text{ y } \ P((H \cdot S)_T > 0) > 0 \tag{2.1}$$

De existir una estrategia autofinanciada que permita esto último, un agente podría entrar al mercado sin inversión alguna y tener posibilidades de obtener, al finalizar su participación, una cantidad estrictamente positiva sin incurrir en riesgo alguno. Diremos que un mercado estará libre de arbitraje si no existen en él oportunidades de arbitraje como las descritas en (2.1).

Una medida de probabilidad Q es equivalente a otra medida de probabilidad P (definidas ambas sobre un mismo espacio medible), si ellas comparten los mismos eventos de medida nula. Para un espacio de probabilidad finito (Ω, F, P) donde $P(\{\omega\}) > 0$ en cada estado de la naturaleza, esto significa que una medida de probabilidad Q definida en (Ω, F) será equivalente a la medida P si, y solamente si, $Q(\{\omega\}) > 0, \forall \omega \in \Omega$. Sobre esta base, pasemos a la definición formal de medida martingala equivalente.

Definición 2.4. *Una medida de probabilidad $Q \sim P$ es una medida martingala equivalente para el proceso de precios $\mathbf{S} = \{S_t\}$ definido sobre el espacio filtrado $(\Omega, F, (F_t)_{t=0}^T, P)$ y adaptado a $(F_t)_{t=0}^T$ si el proceso $\mathbf{S} = \{S_t\}$ es una martingala con respecto a Q; es decir, si $E_Q[|S_t|] < \infty$ y $E_Q[S_t|F_{t-1}] = S_{t-1}, \forall t = 0, 1, \ldots, T$.*

Todo lo anterior nos lleva al primer teorema fundamental de valoración de activos (PTFVA):

Teorema 2.5. *Sea $(\Omega, F_T, (F_t)_{t=0}^T, P)$ un espacio filtrado finito y sea $\mathbf{S}$ el proceso de precios descontados de los activos de un mercado financiero definidos sobre él. El mercado financiero se encuentra libre de arbitraje si, y solamente si, existe una medida martingala equivalente para $\mathbf{S}$.*

La prueba de este resultado lo diferiremos, en una versión más general, al capítulo 4.

Capítulo 3

El mercado de divisas discreto con costos de transacción

Al igual que en el mercado financiero sin costos de transacción descrito en el capítulo anterior, asumiremos que las transacciones en nuestro mercado se dan discretamente a lo largo de los períodos $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Formalmente, los distintos procesos en este mercado estarán definidos sobre un espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, donde Ω es un espacio muestral finito, conformado por todas las trayectorias posibles que pudiera seguir el proceso de precios de los activos en nuestro mercado, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de eventos en Ω, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t=0,1,2,\ldots,T}$ una filtración y P una medida de probabilidad.

En este contexto sería usual trabajar con procesos estocásticos adaptados a $\mathbb{F}$; es decir, en los que cada elemento del proceso será revelado en cada periodo t que indexa al proceso, o más formalmente en el que cada elemento aleatorio del proceso pertenezca al espacio $L^0(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Este espacio, sin embargo deberá de entenderse ahora en una perspectiva más amplia, pues él podría contener no solo variables aleatorias sino también otros elementos como vectores o matrices aleatorias. Así si A_t es un subconjunto del espacio de llegada de los elementos aleatorios de interés, será muy común trabajar en nuestro desarrollo con el subespacio $L^0(A_t, \mathcal{F}_t)$, o simplemente $L^0(A_t)$ de no existir confusión, el cual denotaría a la colección de elementos aleatorios ($\mathcal{F}_t-$medibles) en $L^0(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ cuyos valores caen en el conjunto A_t. Un proceso particular de estos en nuestro modelo será el proceso de los precios de los d activos financieros en transacción, que para nuestro caso serán divisas. Dicho proceso estocástico se representa por $\mathbf{S} = \{S_t\}$, donde $S_0 = s$ es un valor conocido en $t = 0$ y los subíndices, a menos se indique lo contrario, asumiremos que van sobre los periodos de transacción del mercado; vale decir, pertenecen a $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$. Estos precios podrán expresarse respecto al precio de un activo de referencia, que en nuestro mercado de divisas lo tomaremos como el dólar americano US (\$), o simplemente dólar. En otras palabras, cada vector aleatorio componente de $\mathbf{S}$ representará los precios de los d activos financieros, medidos en términos del precio del dólar, aspecto último que nos permitirá una mejor comparación del valor del portafolio entre un período y otro.

Para mejor entender el concepto del precio de un activo con respecto al precio de otro, tomemos, como ejemplo, un mercado de divisas con 3 activos: sol ($S/.$), dólar (\$) y euro (€). Los precios de estas monedas respecto al precio del dólar serán las cantidades de dólares necesarios para comprar una unidad de cada una de las 3 divisas. Obviamente, para el dólar, el valor será 1. Un posible valor del proceso de precios hoy podría ser $S_0 = (\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$ que indica que para adquirir un sol necesitamos $\$\frac{1}{3}$ y para adquirir un euro requerimos \$1.33.

Desde otro punto de vista, estos precios no son sino la inversa de la tasa de cambio de la cantidad de divisas que podríamos adquirir con un dólar o también la tasa de cambio de la cantidad de dólares que podríamos adquirir con una unidad de la divisa de interés.

Por otro lado, el mercado de divisas estará sujeto al pago de costos de transacción por las operaciones de compra y venta de estos activos. Estos costos de transacción representan, por ejemplo, la comisión del intermediario financiero y los impuestos de ley. Los costos de transacción serán una proporción del monto de la operación y, por lo general, son constantes durante un tiempo. Estos costos de transacción proporcionales y constantes se definirán por la siguiente matriz cuadrada Λ de dimensión d:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} & \dots & \lambda^{1d} \\ \lambda^{21} & \lambda^{22} & \dots & \lambda^{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{d1} & \lambda^{d2} & \dots & \lambda^{dd} \end{bmatrix}$$

donde $\lambda^{ij} \geq 0$ y $\lambda^{ii} = 0$. Cada λ^{ij} representa el costo de transacción, como una proporción adicional que tendrá que desembolsarse al comprar una unidad de la divisa j utilizando la divisa i como medio de pago. Como se puede observar, la compra de una divisa conlleva un posible costo y, en la situación particular de intercambio de una divisa por ella misma, no se generan costos para el agente.

Como ilustración, retomemos el caso de nuestro mercado de 3 divisas (sol, dólar, euro). Para un inversionista, los costos de transacción de estas divisas en un mercado financiero específico (por ejemplo, Lima) podrían ser $\lambda^{12} = 0.01$ (el costo de transacción por comprar dólares utilizando el sol como medio de pago), $\lambda^{13} = 0.02$ (el costo de transacción por comprar euros utilizando el sol como medio de pago) y $\lambda^{23} = 0.03$ (el costo de transacción por comprar euros utilizando el dólar como medio de pago). Si suponemos que los costos de transacción son los mismos si se realizaran las operaciones inversas sobre la asunción de que no existen barreras o dificultades para realizar tales operaciones, entonces la matriz de costos de transacción sería:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 & 0 \end{bmatrix}$$

En la mayoría de casos, $\lambda^{ij} \neq \lambda^{ji}$, pues ello depende de los intermediarios financieros utilizados para realizar las transacciones, de los impuestos de un país y de otros aspectos legales y de políticas de estado como por ejemplo el control de los mercados cambiarios que intentan frenar o desincentivar ciertas transacciones motivando la aparición de "mercados negros". En base a todo lo anteriormente discutido, si por ejemplo, la tasa de cambio entre el dólar y el sol es 3 soles por dólar y $\lambda^{12} = 0.01$, el monto que tendrá que desembolsar el agente para adquirir 1 dólar será de:

$$\pi^{12} = 3 + 0.01(3) = (1.01)3 = 3.03 \text{ soles.} \tag{3.1}$$

El monto correspondiente al costo de transacción puede parecer muy pequeño, pero cuando se negocian grandes volúmenes de divisas, como en muchas ocasiones ocurre, el desembolso monetario por ese concepto será alto.

En el presente trabajo, será conveniente utilizar un proceso adaptado de compraventa $\{\Pi_t\}$, que incorpore tanto el proceso de precios, $\{S_t\}$, como el proceso matricial de costos de transacción, $\{\Lambda_t\}$, pudiendo este último cambiar en el tiempo; es decir, ser un proceso estocástico. Cada elemento de la matriz Π_t se denota por π_t^{ii} si dicho elemento se encuentra en la diagonal y por π_t^{ij} si se encuentra fuera de la diagonal. Aquí π_t^{ij} denota al número de unidades del activo i, incluyéndose los costos de transacción, que un agente requiere para poder comprar una unidad del activo j en el periodo t. Este viene dado, como en (3.1), explícitamente por:

$$\pi_t^{ij} \ = \ (1 + \lambda_t^{ij})\frac{S_t^j}{S_t^i}, \quad 1 \leq i, j \leq d,$$

Note que $(1 + \lambda_t^{ij})$ se interpreta aquí como un factor de variación del precio de una divisa j con respecto a otra divisa i, $\frac{S_t^j}{S_t^i}$, debido a la presencia de costos de transacción. En nuestro ejemplo (3.1), por citar, este factor es de 1.01.

Las entradas de la matriz Π_t supondremos satisfacen las condiciones siguientes:

(i) $\pi_t^{ij} > 0$, para $1 \leq i, j \leq d$

(ii) $\pi_t^{ii} = 1$, para $1 \leq i \leq d$

(iii) $\pi_t^{ij} \leq \pi_t^{ik}\pi_t^{kj}$, para $1 \leq i, j, k \leq d$

donde el primer supuesto es obvio, desde que no es posible que el número de activos para comprar una unidad de otro activo sea nulo o negativo. De otro lado, el número de unidades para comprar una unidad del mismo activo tiene que ser naturalmente 1. En referencia al tercer supuesto, se establece que el agente no puede obtener un mejor resultado si decide comprar una unidad de otro activo a través de una cadena de transacciones que realizarlo de manera directa. Por ejemplo, en el mercado de divisas, si el agente desea obtener un dólar utilizando el euro como medio de pago, éste no puede obtener un mejor resultado comprando primero soles para luego utilizar esta divisa y comprar un dólar, que hacerlo directamente (cambiando euros para obtener un dólar).

Note que los factores de variación de precios por costos de transacción satisfacen también, por (iii), que:

$$(1+\lambda_t^{ij}) \leq (1+\lambda_t^{ik})(1+\lambda_t^{kj}).$$

De otro lado, las tenencias de divisas o portafolio de un agente en el momento t bien pueden representarse a través de un vector cuyos componentes son los valores de dichas tenencias expresados en términos de la divisa de referencia, que en nuestro caso es el dólar:

$$V_t \;=\; (V_t^1, \ldots, V_t^d)\;.$$

o también a través de cantidades físicas de las divisas; es decir, de cantidades en la moneda local de cada una de las divisas que posee el agente:

$$\widehat{V}_t \;=\; (\widehat{V}_t^1, \ldots, \widehat{V}_t^d),$$

donde $\widehat{V}_t^i \;=\; \frac{V_t^i}{S_t^i}$.

Para mejor entender esta última relación, supongamos que V_t^i representa la tenencia de soles equivalente a 10 dólares ($V_t^i = 10$) en el periodo t. Si el tipo de cambio en el periodo t en nuestro país es de 3 soles por dólar; vale decir, $S_t^i = \frac{1}{3}$ dólares por sol, entonces $\widehat{V}_t^i = 30$ unidades físicas de la divisa sol o simplemente 30 soles. El cálculo resulta de la siguiente operación:

$$\widehat{V}_t^i \;=\; \frac{V_t^i}{S_t^i} \;=\; \frac{10}{1/3} \;=\; 30.$$

Ahora, se introduce la noción de “estrategia”, entendida ésta como el conjunto de acciones, o más concretamente de transferencias entre divisas, que un agente pudiera realizar en el tiempo. Esta estrategia estará conformada en cada periodo por portafolios, los cuales representarán esencialmente las cantidades de activos (divisas) que el agente mantendrá de ellas en cada periodo. Una estrategia será el resultado de un comportamiento racional del agente en busca de lograr los mejores resultados en su interacción con el mercado. Una de estas estrategias es la posibilidad que tiene el agente para construir un determinado portafolio utilizando los mecanismos de financiamiento que posee el mercado; es decir, sin dinero propio adicional, a excepción de su inversión inicial. Una estrategia como esta se denomina autofinanciada y su dinámica dependerá de la inversión inicial del agente $V_{-1} = v$, de la variación de los precios de los activos, ΔS_t, y de los cambios en valor atribuibles a cambios en la estrategia del agente, ΔB_t, para un período t.

Más específicamente, el último término para una divisa i, ΔB_t^i, recoge los cambios de valor (en términos del numerario) de esta divisa atribuibles a los incrementos y reducciones de esta divisa luego de su intercambio con otras divisas. En tal sentido, resulta conveniente, para una mejor comprensión, dividir ΔB_t^i en 2 componentes: una que recoja solo los incrementos de la divisa i atribuibles a las transferencias provenientes de las demás divisas, y otra que recoja las reducciones de la divisa i generadas por las transferencias de ella, incluyéndose costos de transacción, hacia las demás divisas. En particular, el monto transferido desde una divisa específica, digamos i, hacia otra j en el periodo t se representará por ΔL_t^{ij}.

Para explicar la dinámica de una estrategia autofinanciada, retomemos nuestro mercado de 3 divisas (sol, dólar, euro) en un horizonte de tiempo de tan sólo 2 períodos y supongamos el siguiente escenario:

- La inversión inicial o tenencia física de las divisas con la cual el agente entra al mercado es de $S/.$ 300, \$ 100 y €90; es decir, $\widehat{V}_{-1}$ =(300, 100, 90).

- Los precios de las divisas expresadas en términos del numerario, para el período 0 son: $S_0 = (\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$, correspondiendo cada componente al precio de una unidad de cada divisa en términos del dólar. Se asume también que $S_{-1} = S_0$.

- La matriz Λ de costos de transacción será la misma a la presentada al inicio de este capítulo y asumiremos se mantiene constante durante los períodos 0 y 1; es decir,

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} \lambda_t^{11} & \lambda_t^{12} & \lambda_t^{13} \\ \lambda_t^{21} & \lambda_t^{22} & \lambda_t^{23} \\ \lambda_t^{31} & \lambda_t^{32} & \lambda_t^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 & 0 \end{bmatrix}$$

Supongamos ahora que el inversionista realiza en el período $t = 0$ las siguientes transacciones: transferir \$20 a soles, \$10 de los euros a soles y \$5 de los soles a dólares. En términos de la notación arriba indicada, estas transacciones se representan por:

$$\Delta L_0^{21} = 20, \quad \Delta L_0^{31} = 10, \quad \Delta L_0^{12} = 5$$

Como consecuencia de dichas transacciones, el inversionista tendrá un nuevo portafolio cuyo cambio en valor para las tres divisas estará dado explícitamente por:

$$\begin{aligned} \Delta B_0^1 &= \Delta L_0^{21} + \Delta L_0^{31} - \Delta L_0^{12}(1 + \lambda_0^{12}) &&= 20 + 10 - 5(1 + 0.01) &&= 24.95 \\ \Delta B_0^2 &= \Delta L_0^{12} - \Delta L_0^{21}(1 + \lambda_0^{21}) &&= 5 - 20(1 + 0.01) &&= -15.20 \\ \Delta B_0^3 &= -\Delta L_0^{31}(1 + \lambda_0^{31}) &&= -10(1 + 0.02) &&= -10.20 \end{aligned}$$

Note que para ΔB_0^1, se ha sumado, por un lado, los incrementos en valor de la divisa soles atribuibles a las transferencias provenientes de las otras 2 divisas, dólares y euros, y, por otro lado, se ha restado la reducción en valor de la divisa soles -incluyéndose costos de transacción- generado por la transferencia desde esta divisa hacia dólares. Como resultado de esta suma neta, el inversionista ha visto incrementado el valor de sus tenencias en soles en \$ 24.95. Haciendo esta misma operación para las otras 2 divisas, se observa que el inversionista sufre la reducción en valor de sus tenencias de dólares en \$ 15.20 y de euros en \$ 10.20. Vale reiterar que los costos de transacción en ΔB_0^i sólo intervienen cuando se transfiere la divisa i (o equivalentemente cuando se compra con la divisa i) a otras divisas, pero no en el sentido contrario. Los costos de transacción de cualquier otra divisa j a la divisa i serán indirectamente incorporados al momento del cálculo de ΔB_0^j.

Dado que se ha supuesto que los precios de las divisas no han variado en $t = 0$,

$$\Delta V_0^i = \Delta B_0^i;$$

es decir, la variación del valor de las tenencias de cada divisa es explicada solo por la variación de las posiciones. Así, considerando que V_{-1} =(100, 100, 120), el valor de cada divisa, al final del período 0, es producto de las transacciones arriba mencionadas:

$$\begin{aligned} V_0^1 &= V_{-1}^1 + \Delta V_0^1 &&= 100 + 24.95 = 124.95 \\ V_0^2 &= V_{-1}^2 + \Delta V_0^2 &&= 100 - 15.20 = 84.80 \\ V_0^3 &= V_{-1}^3 + \Delta V_0^3 &&= 120 - 10.20 = 109.80 \end{aligned}$$

En general, sin embargo, para cualquier otro periodo t la dinámica de una estrategia autofinanciada dependerá de la variación de los precios de los activos, ΔS_t^i, y de los cambios en valor atribuibles a cambios en la estrategia, ΔB_t^i. Así, si para el periodo $t = 1$, el vector de precios cambia de $S_0 = (\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$ a $S_1 = (\frac{1}{3.2}, 1, 1.2)$ y que, como consecuencia de ello, el inversionista decide realizar las siguientes transacciones: transferir \$20 de los soles a dólares, \$10 de los euros a dólares US y \$5 de los soles a euros; es decir:

$$\Delta L_1^{12} = 20, \quad \Delta L_1^{32} = 10, \quad \Delta L_1^{13} = 5,$$

entonces estos cambios de precios y estrategia conllevarán a un cambio en el valor de las tenencias de cada divisa para este periodo. En el caso de la divisa sol, por ejemplo, este cambio de valor quedará definido por:

$$\Delta V_1^1 = \widehat{V}_0^1 \Delta S_1^1 + \Delta B_1^1 = 374.85(\frac{1}{3.2} - \frac{1}{3}) + \Delta B_1^1,$$

donde

$$\Delta B_1^1 = -\Delta L_1^{12}(1 + 0.01) - \Delta L_1^{13}(1 + 0.02) = -25.3;$$

es decir, por

$$\Delta V_1^1 = -7.81 - 25.3 = -31.1$$

Similarmente, para las divisas en dólares y euros, ΔV_1^2 y ΔV_1^3 vendrán dados por:

$$\Delta V_1^2 = \widehat{V}_0^2 \Delta S_1^2 + \Delta B_1^2 = 84.80(\frac{1}{3.2} - \frac{1}{3}) + 30 = 28.23$$

y

$$\Delta V_1^3 = \widehat{V}_0^3 \Delta S_1^3 + \Delta B_1^3 = 82.35(\frac{1}{3.2} - \frac{1}{3}) + 5 - 10(1 + 0.03) = -7.02$$

respectivamente.

Habiéndose calculado ΔV_1^i, el nuevo valor del portafolio en el período $t = 1$ será:

$$V_1^1 = 124.95 - 31.1 = 93.85$$

$$V_1^2 = 84.20 + 28.23 = 113.03$$

$$V_1^3 = 109.80 - 7.02 = 102.78$$

Basados en el ejemplo dado, podemos ahora sí formular la dinámica general para el proceso de valor de una divisa i dentro de un portafolio para la estrategia autofinanciada. Esta viene dada por:

$$\Delta V_t^i = \widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \Delta B_t^i, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

donde

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij},$$

y se asume que $V_{-1} = v$.

En la ecuación (3.2), $\Delta L_t^{ij} \in L^0(\mathbf{R}_+, F_t)$ podría interpretarse como una orden del agente ejecutada inmediatamente por un trader y que literalmente indicaría que se incremente la divisa j en ΔL_t^{ij} unidades del numerario a costa de la divisa i. El costo de transacción indicaría que para ello el trader tendría que disminuir la divisa última en $(1+\lambda_t^{ij})\Delta L_t^{ij}$ unidades del numerario. Estas transferencias, pueden más compactamente representarse como un proceso matricial, en el que para cada t,

$$\Delta L_t = [\Delta L_t^{ij}] \in L^0(\tilde{\mathbf{M}}_+^d, F_t) \subseteq L^0(\mathbf{M}_+^d, F_t),$$

siendo $\tilde{\mathbf{M}}_+^d$ el conjunto de matrices $d \times d$ con entradas no negativas y diagonales nulas y $\mathbf{M}_+^d$ el conjunto de matrices $d \times d$ con entradas no negativas. Si bien parece racional que para estos procesos se debería cumplir que $\Delta L_t^{ij} \Delta L_t^{ji} = 0$; es decir, que no existan transferencias de fondos en ambas direcciones, será conveniente no excluir tales ordenes desde que su inclusión no afectará los resultados de no-arbitraje que más adelante desarrollaremos.

La ecuación (3.2) señala, como lo vimos en nuestro ejemplo, que la variación del valor del portafolio de una divisa depende de la variación de su precio y de la estrategia seguida por el agente (que es implementada apenas conocidos los nuevos precios). De seguirse esta estrategia, culminaremos en el periodo de expiración T con un portafolio, cuyo valor ciertamente dependerá de la inversión inicial v. Al conjunto de estos valores terminales los denominaremos el conjunto de "resultados", R_T^v.

En el capítulo siguiente exploraremos las condiciones que se deberían de imponer en el mercado para que no exista arbitraje, lo cual significará esencialmente que el conjunto de resultados R_T^0, generados sin inversión inicial y construido a partir de la ecuación (3.2), deberá contener solo al elemento nulo cuando se intersecta con el conjunto de variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}_+^d$; es decir, el proceso de valor final o la riqueza final del inversionista no deberá ser estrictamente positiva.

Capítulo 4

El principio de arbitraje en un mercado de divisas con costos de transacción

4.1. Introducción

En el capítulo 2 se estableció que un mercado financiero sin costos de transacción; es decir, sin fricción, se encontraba libre de arbitraje, si y solamente si, existía una medida de probabilidad equivalente respecto del cual los precios descontados de los activos financieros del inversionista conformaban una martingala. En el capítulo 3 se presentó el modelo de un mercado financiero con costos de transacción, en donde se describe el proceso de valor de una estrategia dependiente, por un lado, de las transacciones que realice el inversionista con sus activos financieros y, por otro lado, de los cambios en los precios de sus activos.

En el presente capítulo, se establecerá la condición para que un mercado de divisas con costos de transacción se encuentre libre de arbitraje. Para ello, mantendremos los supuestos del capítulo anterior respecto al proceso adaptado $\mathbf{S} = \{S_t\} = \{(S_t^1, ..., S_t^d)\}_{t=0,1,...,T}$ de precios de las divisas en términos de una divisa de referencia (el dólar US) y al proceso adaptado matricial de costos de transacción $\{\Lambda_t\} = \{[\lambda_t^{ij}]\} \in \mathbf{M}_+^d$, donde por $\mathbf{M}_+^d$ entenderemos al conjunto de matrices de dimensión $d \times d$ con entradas no negativas. Asimismo, mantendremos el supuesto que:

$$(1 + \lambda^{ij}) \leq (1 + \lambda^{ik})(1 + \lambda^{kj}) \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \ldots, d\};$$

es decir, que el inversionista no podrá obtener un mejor resultado si compra una divisa a través de una cadena de transacciones que realizarlo de manera directa, por ser esta última más barata. En el presente modelo, el valor del portafolio del inversionista, en cada momento $t \geq 0$, podrá expresarse tanto en cantidades físicas, $\widehat{V}_t = (\widehat{V}_t^1, ..., \widehat{V}_t^d)$, como en términos de un numerario, $V_t = (V_t^1, ..., V_t^d)$, donde recordemos que este último satisface la dinámica (3.2):

$$\Delta V_t^i = \widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \Delta B_t^i$$

siendo

$$V_{-1} = v$$

la inversión inicial y

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}.$$

En esta ecuación, el cambio del valor de una divisa i en el periodo t depende de los cambios exógenos de sus precios, ΔS_t^i, y de las transacciones ordenadas por el inversionista respecto a dicha divisa, ΔB_t^i. Si tomamos en cuenta que $\widehat{V}_t^i = \frac{V_t^i}{S_t^i}$, entonces reconoceremos fácilmente que (3.2) puede expresarse también como una ecuación lineal en diferencias de la forma:

$$\Delta V_t^i = V_{t-1}^i \Delta Y_t^i + \Delta B_t^i, \tag{4.1}$$

siendo

$$\Delta Y_t^i = \frac{\Delta S_t^i}{S_{t-1}^i} \quad y \quad V_{-1}^i = v^i.$$

La ecuación (4.1) tiene solución y podrá llegarse a ella de elegirse una estrategia de control. Esta estrategia de control será el proceso adaptado $\mathbf{B} = \{B_t\}$. En adelante denotaremos por $\mathcal{B}$ al conjunto de todas las estrategias de control disponibles para el inversionista. En particular, describiremos como $\mathcal{B}_0$ a este mismo conjunto cuando $v = 0$; es decir, se tenga una inversión inicial nula.

El análisis de (4.1) se simplifica considerablemente de expresarse el valor del portafolio del inversionista en términos de las cantidades físicas de cada una de las divisas, pues así resulta que tal dinámica depende solo de las acciones que tome el agente y no de la evolución de los precios. En efecto, de (4.1) se sigue que:

$$\begin{array}{lcl} \Delta V_t^i & = & \frac{V_{t-1}^i}{S_{t-1}^i} \Delta S_t^i + \Delta B_t^i \\ V_t^i - V_{t-1}^i & = & \frac{V_{t-1}^i}{S_{t-1}^i} (S_t^i - S_{t-1}^i) + \Delta B_t^i \\ \frac{V_t^i}{S_t^i} & = & \frac{V_{t-1}^i}{S_{t-1}^i} + \frac{\Delta B_t^i}{S_t^i}. \end{array}$$

Por tanto:

$$\Delta \widehat{V}_t^i = \frac{\Delta B_t^i}{S_t^i},$$

ecuación que puede escribirse más compactamente como:

$$\Delta \widehat{V}_t = \widehat{\Delta B}_t.$$

Así, de seguirse este enfoque podremos fácilmente expresar la solución de la ecuación (4.1), tanto en unidades físicas como en términos de un numerario, mediante las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_t^i &= \widehat{V}_{t-1}^i + \tfrac{\Delta B_t^i}{S_t^i} \\
\widehat{V}_t^i &= \widehat{V}_{t-2}^i + \tfrac{\Delta B_{t-1}^i}{S_{t-1}^i} + \tfrac{\Delta B_t^i}{S_t^i} \\
&\vdots \\
\widehat{V}_t^i &= \widehat{V}_{-1}^i + \tfrac{\Delta B_0^i}{S_0^i} + \ldots + \tfrac{\Delta B_t^i}{S_t^i} \\
\widehat{V}_t^i &= v^i + \textstyle\sum_{s=0}^t \tfrac{\Delta B_s^i}{S_s^i}
\end{aligned}$$

y

$$V_t^i = S_t^i \widehat{V}_t^i = S_t^i (v^i + \sum_{s=0}^{t} \frac{\Delta B_s^i}{S_s^i}). \tag{4.2}$$

De (3.2) se desprende fácilmente que cada vector aleatorio F_t-medible ΔB_t recae en el conjunto (aleatorio) $-M_t$, siendo M_t definido por:

$$M_t = \{x = (x^1, x^2, ..., x^d) \in \mathbf{R}^d \mid \exists a = [a^{ij}] \in \tilde{\mathbf{M}}_+^d \text{ tal que } x^i = \sum_{j=1}^{d} [(1 + \lambda_t^{ij}) a^{ij} - a^{ji}]\},$$

donde recordemos que $\tilde{\mathbf{M}}_+^d$ denota al conjunto de matrices $d \times d$ con entradas no negativas y diagonales nulas, conjunto sobre el cual recaen las transferencias u ordenes dadas por un agente para el intercambio de divisas. Esto último nos permite expresar al conjunto de estrategias de control $\mathcal{B}$, mediante:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{B} = \{B_t\} \mid \Delta B_t \in L^0(-M_t, F_t), \forall t = 0, 1, \ldots, T\}.$$

Dada la dependencia del proceso de valor del $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ seguido, será también usual denotar, cuando sea necesario, al proceso de valor con un supraíndice que incluya a este proceso.

La proposición siguiente nos da una caracterización matemática más conveniente del conjunto M_t.

Proposición 4.1. *M_t es un cono poliédrico.*

Demostración. Puesto que $\tilde{\mathbf{M}}_+^d$ podría identificarse con $\mathbb{R}_+^{d(d-1)}$, este representa un cono poliédrico. De otro lado, M_t es la imagen de este cono en el espacio $\mathbf{M}^d$ de matrices de orden d bajo la transformación lineal $\Psi : \mathbf{M}^d \to \mathbb{R}^d$ de componentes:

$$[\Psi((a^{ij}))]^i = \sum_{j=1}^{d} [(1 + \lambda_t^{ij}) a^{ij} - a^{ji}], \; \forall i = 1, 2, \ldots, d.$$

Por tanto, el corolario A.6 implica que M_t es también un cono poliédrico. □

Si aplicamos la transformación lineal Ψ de la última proposición a los vectores que generan a $\tilde{\mathbf{M}}_+^d$ en su representación como un espacio $\mathbb{R}_+^{d(d-1)}$, estos constituirán los generadores del cono M_t. Concretamente se tendrá que:

$$M_t = \text{cono}\{(1+\lambda_t^{ij})e_i - e_j \ \mid \ 1 \leq i, j \leq d\},$$

donde e_i denota al $i-$'esimo vector canónico en $\mathbb{R}^d$.

De otro lado, es importante presentar el cono dual (positivo) de M_t:

$$M_t^* := \{w \in \mathbb{R}^d \mid \langle w^\top x\rangle \geq 0, \ \forall x \in M_t\}.$$

Una caracterización importante de este conjunto, viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 4.2.

$$M_t^* := \{w \in \mathbb{R}^d \mid (1+\lambda_t^{ij})w^i - w^j \geq 0, \ \forall \ 1 \leq i, j \leq d\}.$$

Demostración. Note que si $x \in M_t$, entonces

$$w^\top x = \sum_{i=1}^{d} w^i \left(-\sum_{j=1}^{d} a^{ji} + \sum_{j=1}^{d}(1+\lambda^{ij})a^{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^{d}[-w^j + (1+\lambda^{ij})w^i]a^{ij}$$

lo cual implica que $G_t = \{w \in \mathbb{R}^d \mid (1+\lambda_t^{ij})w^i - w^j \geq 0, \ \forall \ 1 \leq i, j \leq d\} \subseteq M_t^*$. De otro lado, si tomamos $w \in M_t^*$ afirmamos que $w \in G_t$, pues de existir algún par de índices i, j en w con $(1+\lambda_t^{ij})w^i - w^j < 0$, entonces podríamos tomar $x \in M_t$ con entradas en las matrices de transferencias nulas excepto para $a^{ij} > 0$, que cumple que $\langle w, x\rangle = (-w^j + (1+\lambda^{ij})w^i)a^{ij} < 0$, lo cual contradice al hecho de que $w \in M_t^*$. $\square$

Habiéndose definido el conjunto M_t, que contiene los valores negativos de los vectores aleatorios F_t-medibles ΔB_t, presentemos ahora al conjunto K_t, al que definiremos como el "cono de solvencia". De manera intuitiva, podemos señalar que un inversionista con un portafolio en K_t, al que llamaremos "solvente", tendrá la capacidad de pagar sus deudas (o liquidar sus posiciones cortas), pudiendo incluso obtener un saldo positivo, que podrá luego destinar a "consumo". Formalmente, el conjunto de portafolios solventes, K_t, es el conjunto de vectores $x = [x^1, x^2, ..., x^d]^\top \in \mathbb{R}^d$, para el cual se puede encontrar una matriz $a \in \mathbf{M}_+^d$ y un vector $l \in \mathbb{R}_+^d$ tal que:

$$x^i - \sum_{j=1}^{d}(1+\lambda_t^{ij})a^{ij} + \sum_{j=1}^{d} a^{ji} = l^i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, d.$$

Una lectura alternativa del portafolio solvente, que se desprende de su representación matemática, es aquella que permite al inversionista obtener un monto en $\mathbb{R}_+^d$, luego de interactuar con el mercado y liquidar sus deudas, habiendo, incluso, asumido los costos de transacción, λ_t^{ij}, generados en las operaciones. Se puede escribir también el cono de solvencia de una manera más compacta mediante:

$$K_t = M_t + \mathbb{R}_+^d.$$

Por otro lado, al igual que en el caso del cono poliédrico M_t, podemos expresar el cono K_t en términos de sus vectores generadores con la ayuda de la transformación lineal Ψ definida en la proposición 4.1. Tal representación viene dada por:

$$K_t = \operatorname{cono}\{(1+\lambda_t^{ij})e_i - e_j, e_i \;\mid\; 1 \leq i, j \leq d\}. \tag{4.3}$$

En la siguiente proposición presentaremos a los elementos (o portafolios) del cono de solvencia K_t en términos de las unidades físicas de las divisas contenidas en ellos. A este nuevo conjunto lo denotaremos como $\widehat{K}_t$. Al igual que en el caso de K_t, los portafolios del nuevo cono de solvencia resultarán ser la suma de dos portafolios, uno generado por portafolios de la forma $\pi_t^{ij} e_i - e_j$, que se encontrará en $\widehat{M}_t$ (el conjunto que contiene los vectores $-\widehat{\Delta B}_t$) y otro por portafolios de la forma $e_i \in \mathbb{R}_+^d$; es decir,

$$\widehat{K}_t = \widehat{M}_t + \mathbb{R}_+^d.$$

Proposición 4.3.

$$\widehat{K}_t = cono\{\pi_t^{ij} e_i - e_j, e_i, \;\mid\; 1 \leq i, j \leq d\},$$

donde:

$$\pi_t^{ij} := (1+\lambda_t^{ij})\frac{S_t^j}{S_t^i}.$$

Demostración. De manera explícita, el cono K_t viene generado por los vectores:

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda_t^{12} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1+\lambda_t^{1d} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1+\lambda_t^{21} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\lambda_t^{2d} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\dots, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1+\lambda_t^{i1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1+\lambda_t^{id} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1+\lambda_t^{d1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1+\lambda_t^{d2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 1+\lambda_t^{d(d-1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ello significa que cada elemento $x = [x^1, \dots, x^d]^\top \in K_t$, puede representarse por:

$$\begin{aligned}
x^1 &= \alpha_{10} + \alpha_{12}(1+\lambda_t^{12}) + \ldots + \alpha_{1d}(1+\lambda_t^{1d}) - \alpha_{21} - \alpha_{31} - \ldots - \alpha_{d1} \\
x^2 &= \alpha_{20} + \alpha_{21}(1+\lambda_t^{21}) + \ldots + \alpha_{2d}(1+\lambda_t^{2d}) - \alpha_{12} - \alpha_{32} - \ldots - \alpha_{d2} \\
&\;\;\vdots \\
x^d &= \alpha_{d0} + \alpha_{d1}(1+\lambda_t^{d1}) + \cdots + \alpha_{d(d-1)}(1+\lambda_t^{d(d-1)}) - \alpha_{1d} - \alpha_{2d} - \ldots - \alpha_{(d-1)d},
\end{aligned}$$

donde los α_{ij} son números estrictamente positivos.

De manera más compacta, se tiene que para cualquier $i = 1, 2, \ldots, d$:

$$x^i = \alpha_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \alpha_{ij}(1 + \lambda_t^{ij}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \alpha_{ji}.$$

Si deseamos representar K_t en términos de las cantidades físicas de sus componentes, bastará dividir cada elemento de K_t entre sus respectivos precios, S_t^i, $\ldots$,S_t^d, por lo que todo elemento de $\widehat{K_t}$ podrá representarse por un vector y, cuya $i-$ésima componente viene dada por:

$$y^i = \frac{\alpha_{i0}}{S_t^i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \alpha_{ij}(1 + \lambda_t^{ij})\frac{1}{S_t^i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \alpha_{ji}\frac{1}{S_t^i},$$

para algunos α_{ij} estrictamente positivos. Esto puede describirse también como:

$$\begin{aligned} y^i &= \frac{\alpha_{i0}}{S_t^i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \alpha_{ij}(1 + \lambda_t^{ij})\frac{S_t^j}{S_t^i S_t^j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \alpha_{ji}\frac{1}{S_t^i} \\ &= \tilde{\alpha}_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \tilde{\alpha}_{ij}\pi_t^{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} \tilde{\alpha}_{ji}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\alpha}_{i0} = \frac{\alpha_{i0}}{S_t^i}$ y $\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{S_t^j}$. Esto nos conduce, trabajando de manera inversa a lo desarrollado a la representación dada en la proposición. $\square$

De manera equivalente a lo visto para M_t, podemos describir el cono dual de K_t como:

$$K_t^* = M_t^* \cap \mathbb{R}_+^d := \{w \in \mathbb{R}_+^d \mid (1 + \lambda_t^{ij})w^i - w^j \geq 0,\ \forall\ 1 \leq i, j \leq d\}$$

Este, en términos de las divisas físicas, viene dado por:

$$\widehat{K}_t^* = \widehat{M}_t^* \cap \mathbb{R}_+^d := \{w \in \mathbb{R}_+^d \mid \pi_t^{ij} w^i - w^j \geq 0,\ \forall\ 1 \leq i, j \leq d\}. \tag{4.4}$$

Sobre la base de las representaciones anteriores, podemos afirmar que el presente modelo (4.1) no es más que una ecuación lineal en diferencias con una estrategia de control aditiva, **B**, que está sujeta a restricciones definidas en conos poliédricos. Si deseamos encontrar en este modelo un teorema análogo al primer teorema fundamental de valoración de activos (PTFVA), debemos utilizar algunas propiedades que nos permitan acceder a los conjuntos que contengan dicha ecuación lineal, aspecto que será abordado en la siguiente sección. Esta ecuación lineal tendrá una solución, y ello nos permitirá realizar un análisis más sencillo del presente modelo.

Demos ahora una interpretación financiera al modelo, para lo cual utilizaremos la representación del cono dual $\widehat{K}_t^*$. Esta interpretación se basa en el trabajo de Schachermayer (2004) y derivará en el concepto de "spread cambiario". Consideremos un elemento $w \in \widehat{K}_t^*$, al cual identificaremos como un vector de precios (en relación a algún numerario) para el que no existan costos de transacción; es decir, no haya fricción, y sean w^j y w^i sus componentes j e i que los asociaremos, respectivamente a las divisas j e i. De (4.3) se observa que $\frac{w^j}{w^i} \leq \pi_t^{ij}$, donde recordemos que π_t^{ij} denota al número de unidades del activo i que se requieren para comprar una unidad del activo j al tomarse en cuenta los costos de transacción en t. Más aún, de la misma ecuación vemos que $\frac{w^i}{w^j} \leq \pi^{ji}$, lo que es equivalente a $\frac{w^j}{w^i} \geq \frac{1}{\pi_t^{ji}}$. Por tanto, $w \in \widehat{K}_t^*$ si, y solamente si, todas sus componentes satisfacen que la tasa de cambio sin fricción para adquirir una unidad de la divisa j con la divisa i, $\frac{w^j}{w^i}$, pertenece al intervalo $[\frac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij}]$, intervalo último que denominaremos "spread cambiario".

Para mayor claridad expliquemos el significado de estos conceptos a través del siguiente ejemplo. Supongamos que en un mercado financiero se pueden intercambiar dos divisas (sol, dólar US) cuyas cotizaciones en un momento t vienen dadas por el vector $S_t = [\frac{1}{3}, 1]^\top$, donde $\frac{1}{3}$ es el precio del sol en términos de un dólar US y 1 es el precio del dólar expresado en la misma moneda. Se asume, además, que los costos de transacción para intercambiar una divisa por otra se representan a través de la matriz Λ_t:

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

Según esta matriz, la proporción adicional que asumirá el inversionista por concepto de costos de transacción cuando compre la divisa dólar US, utilizando la divisa sol como medio de pago, es 0.4. De igual forma, para realizar la operación contraria, el agente tendrá que asumir la proporción 0.2.

Con el vector S_t y la matriz Λ_t arriba especificados, podremos construir la matriz de compra-venta Π_t:

$$\Pi_t = \begin{bmatrix} 1 & 4.2 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la proposición (4.2), el cono de solvencia $\widehat{K}_t$ tendrá la siguiente representación:

$$\widehat{K}_t \;=\; \text{cono}\{(4.2, -1), (-1, 0.4)\}$$

El cono dual de $\widehat{K}_t$, $\widehat{K}_t^*$, estará conformado entonces por todos los precios $w = [w^1, w^2]^\top \in \mathbb{R}_+^2$ que cumplen que la tasa de cambio sin fricción para adquirir un dólar US en soles, $\frac{w^2}{w^1}$, pertenece al intervalo $[2.5, 4.2]$. Por ejemplo, $\frac{w^2}{w^1} = 3$ cumplirá tal condición, lo cual, a su vez, puede conseguirse de tomarse $w^2 = 1$ y $w^1 = \frac{1}{3}$ ó $w^2 = 2$ y $w^1 = \frac{2}{3}$, puntos que se representan por a y b en la Figura 4.1. El hecho que ambos precios provean la misma tasa de cambio sin fricción se debe al hecho de utilizar ambos distintos numerarios.

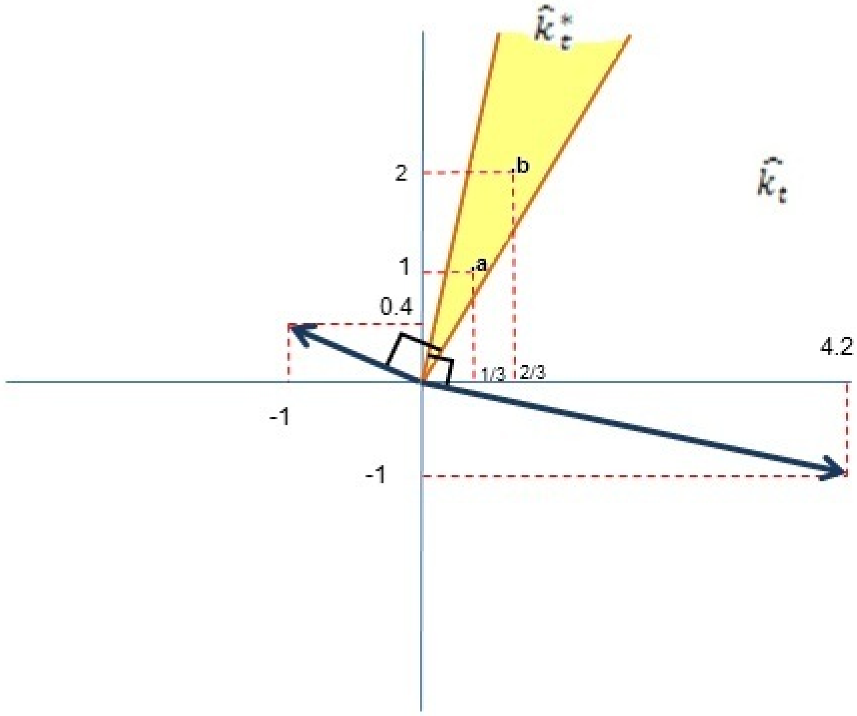

Figura 4.1: Conjunto de portafolios solventes

En la literatura a los elementos de $w \in \widehat{K}_t^*$ se les denomina un sistema de precios consistentes con la matriz de compra-venta Π_t. En el presente modelo, con un número finito de estados de la naturaleza, la existencia de dichos elementos eliminará, como lo veremos en nuestro teorema principal, la posibilidad de oportunidades de arbitraje.

Nos toca ahora determinar las condiciones que deberán cumplir $\frac{w^j}{w^i}$ para que se mantenga en el intervalo $[\frac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij}]$, aspecto que será materia de análisis en la siguiente sección.

4.2. Condiciones de no arbitraje en un mercado financiero con costos de transacción

En esta sección discutiremos la condición de no arbitraje en mercados financieros con costos de transacción. Para ello, daremos primero la definición de una oportunidad de "arbitraje estricto" y la de un modelo o mercado que excluye tales oportunidades.

Definición 4.4. *Una oportunidad de "arbitraje estricto" es una estrategia $B \in \mathcal{B}_0$ tal que el valor terminal de esta estrategia, pertenezca a $L^0(\mathbb{R}^d_+)$, pero no sea 0.*

Definición 4.5. *Diremos que un modelo tiene la propiedad de "arbitraje débil" (en símbolos, NA^w) si no admite oportunidades estrictas de arbitraje.*

Introducimos en este modelo el conjunto de resultados R_T^0, también denominado "riqueza alcanzable" por el inversionista en T, de empezar éste con un capital nulo. En otras palabras, el conjunto R_T^0 se genera a partir de una estrategia $B \in \mathcal{B}_0$. Dicho esto, podremos reescribir la definición de NA^w mediante la siguiente expresión:

$$R_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$$

o, equivalentemente, por:

$$\widehat{R}_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}.$$

Esto nos dice que la ausencia de oportunidades de "arbitraje débil" se cumple si el único resultado posible para un inversionista que empezó sin capital al seguir una estrategia en $\mathcal{B}_0$, es un portafolio con valor final nulo en cada uno de los activos.

Definición 4.6. *Un reclamo contingente $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^d)$ es cualquier vector aleatorio d-dimensional. Diremos que un reclamo contingente ξ es coberturable si existe una estrategia $B \in \mathcal{B}$ tal que su proceso de valor asociado satisfaga en el tiempo de expiración T que casi ciertamente:*

$$V_T^i \ \geq \ \xi^i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, d.$$

La siguiente proposición nos dará una forma alternativa útil de expresar al conjunto de reclamos coberturables.

Proposición 4.7. *$\xi \in L^0(\mathbb{R}^d)$ es coberturable si, y solamente si, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que su proceso de valor asociado satisfaga que $V_T - \xi \ \in K_T \quad (a.s).$*

Demostración. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que su proceso de valor satisface a.s. $V_T \geq \xi$ si, y solamente si, $\exists \rho \in L^0(\mathbb{R}_+^d)$ tal que $V_T = \xi + \rho$. Sea $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ igual a $B \in \mathcal{B}_0$ con la excepción de que $\Delta\tilde{B}_T = \Delta B_T + \eta$, para algún $\eta \in L^0(M_T)$. Entonces el proceso de valor asociado a esta nueva estrategia satisface en cada activo i:

$$\begin{gathered}\tilde{V}_T^i = S_T^i(v^i + \textstyle\sum_{s=0}^{T-1} \frac{\Delta B_s^i}{S_s^i} + \frac{\Delta \tilde{B}_T^i}{S_T^i}) \\ \tilde{V}_T^i = S_T^i(v^i + \textstyle\sum_{s=0}^{T} \frac{\Delta B_s^i}{S_s^i}) + \eta^i \\ \tilde{V}_T^i = V_T^i + \eta^i\end{gathered}$$

lo cual nos da el siguiente resultado,

$$\tilde{V}_T^i = \xi^i + \rho^i + \eta^i \Leftrightarrow \tilde{V}_T^i - \xi^i = \rho^i + \eta^i \Leftrightarrow \tilde{V}_T - \xi = \rho + \eta.$$

Esto equivale a decir que casi ciertamente:

$$\tilde{V}_T - \xi \in K_T.$$

□

Definamos ahora al conjunto de reclamos contingentes "coberturables" con inversión inicial nula, A_T^0, mediante:

$$A_T^0 := R_T^0 - L^0(K_T, F_T).$$

Este conjunto representa los portafolios que pueden coberturarse mediante transacciones ordenadas por el inversionista y, según su notación, es la diferencia (no conjuntista) de un portafolio en R_T^0; es decir, un portafolio con los valores finales de las divisas que un inversionista ha alcanzado sin inversión alguna, y un portafolio en el conjunto $L^0(K_T, F_T)$, conformado por portafolios solventes. Una lectura alternativa con contenido financiero respecto a dicha notación es que todo elemento del conjunto A_T^0 puede representarse como la suma de un portafolio en R_T^0 y un portafolio cuyas componentes son los valores negativos de un portafolio solvente. Estos últimos se pueden representar también (ver Schachermayer (2004)) como portafolios disponibles en T.

Denotemos ahora por $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ al conjunto de martingalas $\mathbf{Z} = \{Z_t\}$ (con respecto a nuestro espacio filtrado de trabajo $(\Omega, F, \mathcal{F}, P)$) tales que

$$Z_t \in L^0(\widehat{K}_t^* \setminus \{0\}) \;\; \text{para todo } t = 0, 1, \ldots, T;$$

es decir, que Z_t sea no nulo y se encuentre en el conjunto dual del cono de solvencia, para cada t. Como se mencionó en la sección anterior, los elementos de $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ reciben el nombre de un sistema de precios consistentes. La idea detrás de esta definición es que cada Z_t aquí defina un sistema de precios consistentes con la matriz de costos de transacción, Λ_t en el sentido que las tasas de cambio derivadas correspondientes pertenezcan al spread cambiario: $[\frac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij}]$. Estos precios deberán estar, además, relacionados intertemporalmente, de manera que, para cada activo i, su precio Z_t^i sea igual a la esperanza condicional de su precio Z_{t+1}^i para el período $t+1$. En el presente modelo, con finitos estados de la naturaleza, la existencia de dichos elementos será equivalente a la ausencia de oportunidades de arbitraje.

Antes de plantear y formalizar el resultado anterior, presentemos previamente una identificación que será de gran utilidad en la prueba del teorema fundamental. Esta identificación es posible desde que estamos trabajando en un espacio muestral finito $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ donde asumiremos, sin pérdida de generalidad, que

$$p_j = P(\{w_j\}) > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}_N^+.$$

En este espacio todo vector aleatorio ξ de dimensión d:

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d,$$

podrá identificarse con un elemento en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{dN}$ de producto interno

$$\langle \xi, \eta \rangle = E[\xi^\top \eta] = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{N} \xi^i(\omega_j)\eta^i(\omega_j)p_j.$$

Con estas definiciones y demás proposiciones establecidas en este capítulo, estamos ya en condiciones de presentar el teorema principal de este estudio, el mismo que definirá las condiciones para evitar oportunidades de arbitraje en un mercado de divisas con costos de transacción de asumirse un número finito de estados de la naturaleza (Ω finito). Este teorema es una extensión natural del teorema de Harrison and Pliska (1981) aplicado a mercados financieros perfectos (sin fricción). De manera general, se puede señalar que este mercado se encuentra libre de oportunidades de arbitraje si, y solamente si, existe un sistema de precios consistente con la matriz de costos de transacción en cada momento t, lo cual asegura que el valor de cada divisa en el momento T sea no positivo.

Teorema 4.8. *Supongamos que Ω es finito. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $R_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$

(b) $A_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$;

(c) $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\}) \neq \emptyset$

Demostración. Afirmamos para empezar que las condiciones (a) y (b) son equivalentes. En efecto, por definición $A_T^0 = R_T^0 - L^0(K_T)$ y consecuentemente $R_T^0 \subseteq A_T^0$. Por tanto si (b) se cumple, se tiene que

$$\{0\} \subseteq R_T^0 \cap L(\mathbb{R}_+^d) \subseteq A_T^0 \cap L(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$$

y consecuentemente

$$R_T^0 \cap L(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}.$$

Por otro lado, si $x \in A_T^0 \cap L(\mathbb{R}_+^d) \Leftrightarrow$ existe $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0$ tal que su proceso de valor satisface $V_T \geq x \geq 0$. Así de cumplirse (a), podemos tomar $y = V_T \in R_T^0 \cap L(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$, con lo que $x = 0$.

Revisemos ahora la equivalencia entre (a) y (c). De (4.2) se sigue que $\widehat{R}_T^0$ es un cono poliédrico, pues este resulta ser una suma de conos poliédricos. Además, $L^0(\mathbb{R}_+^d)$ es también un cono propio poliédrico cuyo dual positivo coincide con su primal. Por tanto podemos aplicar la extensión del lema de Stiemke dada en la proposición A.10, para garantizar que se cumple la condición (a) si, y solamente si, existe una variable aleatoria de dimensión d, η, en la intersección de $-\widehat{R}_T^{0*}$ con el interior de $L^0(\mathbb{R}_+^d)$. Esto significa, de un lado, que los componentes de η son estrictamente positivos, al pertenecer η al interior de $L^0(\mathbb{R}_+^d)$ y, de otro lado, que $\langle \xi, \eta \rangle = E[\xi^\top \eta] \leq 0$, para todo

$\xi \in \widehat{R}^0_T$. Definamos ahora la martingala $\mathbf{Z} = \{Z_t\}$ mediante $Z_t = E[\eta \mid F_t]$. Para concluir con la prueba del teorema bastará con probar que este proceso pertenece a $\mathcal{M}^T_0(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$. En efecto, si recordamos que $\widehat{K}_t = \widehat{M_t} + \mathbb{R}^d_+$ y que $\widehat{M_t} \subseteq -\widehat{R}^0_T$ de trabajarse con una estrategia $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_0$, podemos establecer que, para cualquier ζ tal que,

$$\zeta \in L^0(\widehat{\mathbf{K}}_t, F_t) \subseteq -\widehat{R}^0_T + L^0(\mathbb{R}^d_+)$$

se cumple que:

$$\langle \zeta, Z_t \rangle = E[\zeta^\top E[\eta \mid F_t]] = E[\zeta^\top \eta] = \langle \zeta, \eta \rangle \geq 0$$

lo que significa que $Z_t \in L^0(\widehat{K}^*_t, F_t)$. □

Relacionemos ahora el teorema previo de arbitraje con la noción tradicional de la existencia de una medida martingala equivalente. Si se cumple c), entonces es posible encontrar un proceso de precios $\{Z_t\}$ que sea martingala bajo P y cuyas componentes no nulas recaigan en el dual del cono de solvencia. Si fijamos aquí a Z^1_t como el numerario, podríamos reescribir el proceso $\{Z_t\}$ como el proceso de precios $\{\tilde{S}_t\}$ dado por:

$$\tilde{S}_t = \left(1, \frac{Z^2_t}{Z^1_t}, \frac{Z^3_t}{Z^1_t}, \cdots, \frac{Z^d_t}{Z^1_t}\right), \quad t = 0, \ldots, T.$$

Definamos ahora en $(\Omega, F = F_T)$ la medida Q mediante:

$$Q(A) = \int_\Omega \frac{Z^1_T(\omega)}{Z^1_0(\omega)} P(d\omega).$$

Claramente, $Q \sim P$ y se cumple que:

$$E\Big[\frac{Z^1_t}{Z^1_0} \mid F_t\Big] = \frac{1}{Z^1_0} E[Z^1_t \mid F_t] = \frac{Z^1_t}{Z^1_0}.$$

Resulta entonces que el proceso de precios $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{S}_t\}$ es una martingala bajo Q. Esto se sigue desde que, por la regla de Bayes, se cumple que para cualquier periodo t y divisa i:

$$\begin{aligned}
E_Q\big[\tilde{S}_t \mid F_{t-1}\big] &= E_Q\big[\tfrac{Z^i_t}{Z^1_t} \mid F_{t-1}\big] \\
&= \frac{E\big[\frac{Z^i_t}{Z^1_t}\frac{Z^1_T}{Z^1_0} | F_{t-1}\big]}{\frac{Z^1_{t-1}}{Z^1_0}} \\
&= \tfrac{1}{Z^1_{t-1}} E\big[E\big[\tfrac{Z^i_t}{Z^1_t} Z^1_T \mid F_t\big] \mid F_{t-1}\big] \\
&= \tfrac{1}{Z^1_{t-1}} E\big[\tfrac{Z^i_t}{Z^1_t} Z^1_t \mid F_{t-1}\big] \\
&= \tfrac{1}{Z^1_{t-1}} E[Z^i_t \mid F_{t-1}] \\
&= \tfrac{Z^i_{t-1}}{Z^1_{t-1}} = \tilde{S}_{t-1}.
\end{aligned}$$

Dicha correspondencia también funciona en la otra dirección. En efecto, si existe una medida martingala equivalente $Q \sim P$ para el cual el proceso de precios $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{S}_t\}$

con primer actio como numerario:

$$\tilde{S}_t = (1, \tilde{S}_t^2, \tilde{S}_t^3, \ldots, \tilde{S}_t^d), \quad t = 0, \ldots, T$$

es una martingala, podríamos entonces definir un proceso $\mathbf{Z} = \{Z_t\}$ dado por

$$Z_t^1 = E[\frac{dQ}{dP} \mid F_t]$$

y

$$Z_t^i = Z_t^1 \tilde{S}_t^i, \quad \text{para} \quad i = 2, \ldots, d,$$

siendo $\frac{dQ}{dP}$ la derivada de Radon-Nikodym. Este proceso, que es no nulo para cada t, resulta ser luego una martingala bajo la medida P, ya que:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{t-1} = E_Q[\tilde{S}_t^i \mid F_{t-1}] &= \frac{E\left[\tilde{S}_t^i \frac{dQ}{dP} \mid F_{t-1}\right]}{E\left[\frac{dQ}{dP} \mid F_{t-1}\right]} \\ &= \frac{E\left[E\left[\tilde{S}_t^i \frac{dQ}{dP} \mid F_t\right] \mid F_{t-1}\right]}{Z_{t-1}^1} = \frac{E\left[\tilde{S}_t^i Z_t^1 \mid F_{t-1}\right]}{Z_{t-1}^1} \end{aligned}$$

y

$$E[Z_t^i \mid F_{t-1}] = Z_{t-1}^i.$$

Más aún, vale observar que la derivada de Radon - Nikodym, $\frac{dQ}{dP}$, es la misma variable aleatoria η utilizada en la prueba del teorema anterior, por lo que los valores que toma dicha derivada se encuentran, como vimos en la demostración de este teorema, en el dual del cono de solvencia $\widehat{K}_t^*$.

Vale finalmente comentar que el desarrollo arriba mencionado contiene, como caso particular, al teorema de Harrison and Pliska (1981). Para ver ello, supongamos que $\Lambda_t = 0$ y que el primer activo del portafolio del inversionista es el numerario (en nuestro trabajo era el dólar US). Esto significa que $\Delta S_t^1 = 0$. Si tenemos, además, el valor del activo i en el momento t, V_t^i, podremos representar el valor del portafolio del inversionista en el momento t a través de la siguiente expresión:

$$\bar{V}_t = \sum_{i=1}^{d} V_t^i.$$

A partir de esto último y tomando en cuenta la dinámica del valor de la divisa i en la ecuación (3.2), podremos encontrar una expresión para la dinámica del valor del portafolio:

$$\begin{aligned} \bar{V}_t - \bar{V}_{t-1} &= \textstyle\sum_{i=1}^d V_t^i - \sum_{i=1}^d V_{t-1}^i = \sum_{i=1}^d \Delta V_t^i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d (\widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \Delta B_t^i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d \widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \sum_{i=1}^d \Delta B_t^i \end{aligned}$$

Sin embargo, es conveniente notar que en el presente caso, donde $\Lambda_t = 0$, se cumple que $\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^d \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^d \Delta L_t^{ij}$, por lo que su suma,

$$\sum_{i=1}^d \Delta B_t^i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \Delta L_t^{ji} - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \Delta L_t^{ij} = 0$$

Por tanto, si $\Lambda_t = 0$,

$$\Delta \bar{V}_t = \sum_{i=1}^d \widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i = \langle H_t, \Delta S_t \rangle,$$

donde,

$$H_t = (\widehat{V}_{t-1}^1, \widehat{V}_{t-1}^2, \ldots, \widehat{V}_{t-1}^d) \in L^0(\mathbb{R}^d, F_{t-1})$$

Esto nos lleva a afirmar que el conjunto de valores $\bar{V}_T$ es el mismo conjunto A_T del modelo financiero sin costos de transacción y la condición clásica de no arbitraje, $A_T \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$ es equivalente a la condición de arbitraje débil determinado en este capítulo, $R_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$.

De otro lado, en el caso $\Lambda_t = 0$ se tiene que si $w \in \widehat{K}_t^* \ \{0\}$, entonces para cualquier par de activos i, j se tiene que

$$\frac{w^j}{w^i} \in [\tfrac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij}] = \{\frac{S_t^j}{S_t^i}\} = \{\frac{\lambda S_t^j}{\lambda S_t^i}\}, \forall \lambda > 0.$$

Así resulta que $\widehat{K}_t^* = \mathbb{R}_+ S_t$ y, por tanto, la propiedad $Z_t \in L^0(\widehat{K}_t^*, F_t)$ significa simplemente que $Z_t = \rho_t S_t$ para algún $\rho_t > 0$. Por tanto, retomando nuestra discusión anterior, $Z_t \in \mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ si, y solo si, existe una medida martingala equivalente $Q \sim P$ tal que el proceso $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{S}_t\}$ sea una martingala bajo Q. Note que este último proceso esta definido para cualquier activo i mediante:

$$\tilde{S}_t^i = \frac{Z_t^i}{Z_t^1} = \frac{\rho_t S_t^i}{\rho_t S_t^1} = \frac{S_t^i}{S_t^1},$$

Así el proceso $\tilde{\mathbf{S}}$ representa al proceso de precios descontados, de tomarse como numerario al primer activo.

Capítulo 5

Comentarios finales

En el presente trabajo se ha estudiado la condición que deben de cumplir los precios de un conjunto de activos financieros, que en nuestro trabajo los consideramos divisas, para que un inversionista no tenga oportunidades de arbitraje; es decir, no pueda obtener un beneficio sin riesgo alguno.

Primero, se presentó el clásico modelo de un mercado financiero sin fricciones, en el que las transacciones entre activos pueden realizarse sin costo alguno, y luego se estableció que dichos mercados se encuentran libres de arbitraje si y solo si existía una medida de probabilidad equivalente respecto de la cual los precios descontados de los activos en el mercado conformaban una martingala. Con la intención de extender este resultado, conocido como el teorema fundamental de preciso de arbitraje, se introdujo posteriormente el modelo de mercados financieros bajo costos de transacción proporcionales en un mercado de divisas. En este modelo se supuso que la compra de una divisa por intermedio de otra estaba sujeta a un costo de transacción, la cual se expresaba como un porcentaje adicional sobre el valor de la tasa de cambio. Se estudio aquí cómo entender, desde un punto de vista geométrico, la condición de no arbitraje y se determinó que esta condición se cumple si y solamente si podemos garantizar la existencia de un sistema de precios consistentes, conformado por una colección de martingalas de componentes estrictamente positivos. Para ello, se revisaron principalmente las investigaciones de Kabanov and Safarian (2009) y Delbaen and Schachermayer (2006), quienes demostraron, con rigurosidad matemática, que el principio de no arbitraje en mercados imperfectos (con costos de transacción proporcionales) para procesos observados discretamente en un horizonte finito se basaba en la teoría de martingalas. Si bien los enfoques de estos autores consideraron diversas variantes en la modelización e incluso la posibilidad que los precios pudieran tomar cualquier valor (es decir, que el espacio muestral Ω sea un espacio arbitrario), nosotros basamos nuestro enfoque en el de Kabanov, quién demostró que muchos conceptos para el caso general podían simplificarse considerablemente de tomarse Ω finito. Este fue el caso analizado en el presente trabajo, así como una extensión de la condición de no arbitraje que deja expedito el camino para investigaciones futuras en el caso que Ω sea un espacio arbitrario.

Vale también aclarar que la teoría de los modelos de mercados financieros con costos de transacción no solo se limita a establecer las condiciones de no arbitraje y su relación con la teoría de martingalas, sino que también nos provee, como en el caso de los modelos sin fricciones, de una herramienta útil para analizar otros problemas financieros como lo son el de la valuación de instrumentos derivados o la solución a problemas de consumo e inversión óptimos en estos mercados; temas que esperemos puedan ser analizados en investigaciones futuras.

Apéndice A

Conos poliédricos

En este apéndice desarrollamos algunos conceptos de convexidad en $\mathbb{R}^n$ que son referidos en el trabajo. Nos enfocaremos principalmente en el concepto de los conos poliédricos. A lo largo de este desarrollo entenderemos a $\langle .,. \rangle$ como un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Definición A.1. *Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si $\forall x_1, x_2 \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$ uno tiene*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in C.$$

Se dice que $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono si $\forall x \in C$ y $\lambda \geq 0$, $\lambda x \in C$. El conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono convexo si es un conjunto convexo y, a la vez, un cono.

Una extensión natural de los conceptos de recta y plano en los espacios euclídeos viene dada por la siguiente definición.

Definición A.2. *Dados $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos un hiperplano de vector normal a mediante:*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = \alpha\}.$$

Claramente todo hiperplano H que pasa por el origen particiona a $\mathbb{R}^n$ en dos conjuntos: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \geq 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle < 0\}$. Llamaremos al primero de ellos un semiespacio lineal (cerrado).

Definición A.3. *Un cono C se dice que es poliédrico si es la intersección de un número finito de semiespacios lineales.*

Note que si C es un cono poliédrico, entonces $\exists a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$C = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a_j \rangle \geq 0\}.$$

Así, si definimos la matriz $A = [a_1, ..., a_m]^T$ de orden $m \times n$, el cono poliédrico C puede también describirse, en el caso de trabajarse con una norma euclideana, como:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq 0\},$$

donde tomaremos a los elementos de $\mathbb{R}^n$ como vectores columna.

Definición A.4. *Dados $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ definimos el cono finitamente generado por estos vectores por:*

$$\text{cono}\,\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \mid \lambda_j \geq 0\}.$$

La demostración del teorema siguiente que será fundamental en nuestro estudio se puede encontrar en Schrijver (1986).

Teorema A.5 (Farkas-Minkowski-Weyl)**.** *Un cono es poliédrico si, y solamente si, éste es finitamente generado.*

Corolario A.6. *La imagen de un cono poliédrico bajo una transformación lineal es un cono poliédrico.*

Demostración. Si C es un cono poliédrico, entonces por el teorema anterior $\exists a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$ para algunos $\lambda_j \geq 0\}$. Luego, si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $LC = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Lx$ para algún $x \in C\} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j La_j,$ para algunos$\lambda_j \geq 0\}$ es finitamente generado y es por tanto, por el teorema anterior, un cono poliédrico. □

Definición A.7. *Dado un cono C en $\mathbb{R}^n$ definimos su cono dual mediante:*

$$C^* = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in C\}.$$

Vale comentar que el dual de todo cono C es siempre cerrado y convexo, al margen de que C lo sea.

Proposición A.8. *Si C_1 y C_2 son 2 conos convexos cerrados en $\mathbb{R}^n$, entonces:*

$$(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*.$$

Demostración. Sea $y \in (C_1 + C_2)^*$, entonces $\langle y, x_1 + x_2\rangle \geq 0,\ \forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2$. Dado que el vector nulo se encuentra en la clausura de C_1 y C_2, si $x_2 \to 0$ con $x_2 \in C_2$ en la ecuación anterior, obtenemos $\langle y, x_1\rangle \geq 0, \forall x_1 \in C_1$; y similarmente, si $x_1 \to 0$ con $x_1 \in C_1$ en la ecuación anterior, obtenemos $\langle y, x_2\rangle \geq 0, \forall x_2 \in C_2$. Por tanto, $y \in C_1^* \cap C_2^*$, lo cual demuestra que $(C_1 + C_2)^* \subset C_1^* \cap C_2^*$. De otro lado, sea $y \in C_1^* \cap C_2^*$, entonces $\langle y, x_1\rangle \geq 0, \forall x_1 \in C_1$ y $\langle y, x_2\rangle \geq 0, \forall x_2 \in C_2$, lo cual implica que $\langle y, x_1 + x_2\rangle = \langle y, x_1\rangle + \langle y, x_2\rangle \geq 0, \forall x_1 \in C_1$ y $\forall x_2 \in C_2$. Por tanto, $y \in (C_1 + C_2)^*$, lo que demuestra que $C_1^* \cap C_2^* \subset (C_1 + C_2)^*$. □

Culminemos este apéndice presentando un resultado que nos será de gran utilidad. Este es una extensión del conocido lema de Stiemke (cuya versión original fue publicada en la revista Mathematische Annalen en 1915). Antes, necesitamos el concepto de conos propios.

Definición A.9. *Un cono convexo y cerrado C se dice propio si*

$$F = C \cap -C = \{0\}.$$

El lema de Stiemke manifiesta lo siguiente. Si

$$A = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n]$$

es una matriz de orden $m \times n$, siendo $a_1, \dots, a_n$ vectores columna en $\mathbb{R}^m$, entonces sólo una de las dos situaciones siguientes puede ocurrir:

a) Existe $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ con $Ax = 0$.

b) Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y'A^\top > 0$.

Aquí conviene indicar que:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}, \;\; \mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n | x > 0\},$$

donde $x \geq 0$ si $x_i \geq 0, \forall i$, y $x > 0$ si $x_i \geq 0, \forall i$ y $x_i > 0$ para algún i.
El Lema de Stiemke establece que, para cualquier matriz A,

$$R(A^\top) \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\} \Leftrightarrow null(A) \cap \mathbb{R}^n_{++}$$

donde

$$R(A) = \{y | y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$$

y

$$null(A) = \{x | Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Posteriormente, Kabanov and Stricker (2001) generaliza dicho teorema para un mercado financiero con costos de transacción, estableciendo la siguiente proposición, cuya prueba puede encontrarse en Kabanov and Safarian (2009)

Proposición A.10. *(Extensión del Lema de Stiemke) Sean R y C conos cerrados en $\mathbb{R}^n$. Asumamos que C es propio . Entonces*

$$R \cap C = \{0\} \Leftrightarrow (-R^*) \cap int(C^*) \neq \emptyset.$$

La extensión del Lema de Stiemke nos da la condición matemática que evita oportunidades de arbitraje en un mercado financiero con fricción. En este caso, podemos asociar los conos R y C del Lema con los conos $\widehat{R}_T$ y $L^0(\mathbb{R}^d_+)$, respectivamente, siendo éste último, además, propio. El Lema establece que el único elemento en común entre $\widehat{R}_T$ y $L^0(\mathbb{R}^d_+)$ será el cero, si, y solo si, el negativo del dual de $\widehat{R}_T$ y el interior del dual de $L^0(\mathbb{R}^d_+)$ no tienen elementos comunes.

Bibliografía

Delbaen, F. and Schachermayer, W. (2006). *The mathematics of arbitrage*, Springer Finance. 5

Dybvig, P. and Ross, S. (1987). Arbitrage, *The New Palgrave: a dictionary of finance WW Norton NYC* pp. 57–71. 1

Harrison, M. and Kreps, D. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory* **20**: 381–408. 1

Harrison, M. and Pliska, S. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes and their Applications* **11**: 215–260. 1, 2, 4.2, 4.2

Kabanov, Y. and Safarian, M. (2009). *Markets with transaction costs, mathematical theory*, Springer Finance. 5, A

Kabanov, Y. and Stricker, C. (2001). The harrison pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs, *Journal of mathematical economics* **35(2)**: 185–196. A

Sánchez, A. (2010). *El primer teorema fundamental para la valuación de activos*, Master's thesis, Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F. México. 1

Schachermayer, W. (2004). The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time, *Math. Finance* **14(1)**: 19–48. 4.1, 4.2

Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley and Sons Ltd. A