PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSTGRADO

Deformaciones de Estructuras Complejas

Tesis
para optar el grado de
Magister en Matemática

Presentado por:
Yuliana Villarreal Montenegro

Bajo la orientación de
Dr. Percy Fernández Sánchez

Miembros del Jurado

Dr. Arturo Fernández Perez - UFMG (Brasil)
Dr. Roland Rabanal Montoya - PUCP (Perú)

Lima – Perú
2012

Dedico éste trabajo a mis padres Alejandro y Alicia; por su infinito amor, aliento, comprensión y confianza.

A mi maestro de la vida, Daisaku Ikeda, por sus palabras sabias:

En la vida, todos podemos tropezar y caer.
Sólo basta ponerse de pie
y con la frente en alto seguir marchando.
¡En la juventud, no existe fracaso que no se pueda remediar!
Daisaku Ikeda.

Agradezco a la vida por darme la oportunidad de escoger una profesión que demanda esfuerzo, dedicación y hacerlo lo mejor posible.
Por permitirme trabajar bajo el asesoramiento del Dr. Percy Fernández, cuyo tema dado surgió a raíz de los Proyectos de Investigación:

- ”Dos-Webs Algebraico y la Conjetura del Jacobiano”, y
- ”Automorfismos y Webs de Foliaciones Holomorfas”

Deformaciones de Estructuras Complejas es un tema difícil, con poca bibliografía y bastante matemática de nivel, fue un gran reto que despertó mi interés, aprendí y me desarrolle un poquito más en las Matemáticas.

A su vez agradezco a mis compañeros y amistades, de quienes a veces pensaba esperaban desistiera del tema, pero al contrario alimentaban más las ganas de lograr mi objetivo.

Finalmente Agradezco a mi organización Soka Gakkai Internacional de Perú que me enseña a ver la vicisitudes de la vida, siempre desde una perspectiva positiva, llena de esperanza y con mucha gratitud. Porque he aprendido a rendirme nunca y a lograr mis objetivos cueste lo que me cueste y tarde lo que me tarde, por eso con orgullo puedo decir lo conseguí, y es sólo el comienzo.

Índice general

Resumen **VI**

Introducción **VII**

1. Preliminares **1**

1.1. Funciones Holomorfas en $\mathbb{C}^n$ 1

1.1.1. Variedad Diferenciable 3

1.2. Variedades Complejas 4

1.2.1. Funciones y Aplicaciones Holomorfas 7

1.2.2. Subvariedades y Conjuntos Analíticos 10

1.2.3. Variedad Compleja Compacta 12

1.3. Formas Diferenciales 14

1.3.1. Producto Exterior 16

1.3.2. Suma Directa 17

1.3.3. La Complexificación del Espacio Tangente 18

1.4. Fibrados Vectoriales 19

1.4.1. Secciones de un Fibrado 22

1.4.2. Morfismos de Fibrados 23

2. Deformaciones de Estructuras Complejas **25**

2.1. Familia Analítica Compleja de Variedades Complejas Compactas 25

2.1.1. Automorfismos y Espacio Cociente 34

2.1.2. Automorfismo en Variedades Complejas. 35

2.2. Ejemplos de Deformaciones 36

2.2.1. El Toro Complejo 39

2.2.2. Curvas Elípticas 40

2.2.3. Superficie de Hopf 43

2.2.4. Superficie de Hirzebruch 47

3. Deformación Infinitesimal **53**

3.1. Familia Diferenciable de Variedades Complejas Compactas . . . 53

3.1.1. Equivalencia de Familias Diferenciables 55

3.1.2. Familia Diferenciable Localmente Trivial 55

3.2. Familia Diferenciable Inducida:
Cambio de Parámetro 55

3.2.1. Restricción de una Familia Diferenciable de Variedades
Complejas Compactas 56

3.3. Deformación Infinitesimal en una Familia Diferenciable de Variedades Complejas Compactas 57
3.4. La Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer en una Familia Analítica Compleja 63

4. El Número de Moduli **69**
4.1. Obstrucción 69
4.2. Número de Moduli 78
4.2.1. Ejemplo de la Superficie de Hirzebruch 82
4.2.2. Ejemplo del Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^n$ 85
4.2.3. Ejemplo del Toro Complejo n-dimensional 87

5. Apéndice **91**
5.1. Teoría de Haces 91
5.2. Grupo de Cohomología 92
5.3. Cohomológía de Haces: Secuencia Exacta 94
5.4. Cohomología de $\check{C}$ech 96
5.5. Formas Diferenciales Armónicas 98

Resumen

Este trabajo se describe una parte importante de los descubrimientos obtenidos durante el siglo XX, es una introducción a la teoría de variedades complejas y sus deformaciones. Intuitivamente la deformación de una variedad compleja compacta M, compuesta de un número finito de cartas coordenadas, viene dada por el desplazamiento de estas cartas.

Definimos $\mathscr{M} = \{M_t : t \in B\}$ y $\varpi : \mathscr{M} \to B$ de manera que el desplazamiento del cual hablo se llevará a cabo a través de la aplicación $\mathcal{KS}_t$ que va del espacio tangente de una variedad compleja B, denominado espacio base de una familia diferenciable de variedades complejas compactas $(\mathscr{M}, B, \varpi)$, al primer grupo de cohomología de M_t, es decir $\mathcal{KS}_t : T_t(B) \to H^1(M_t, \Theta_t)$, donde Θ es el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre M_t, a ésta aplicación se le llama La Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer, que nos permitirá medir las variaciones de primer orden de la estructura compleja.

En consecuencia, dada $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia analítica compleja de variedades complejas compactas, se tiene que las deformaciones infinitesimales $\Theta = dM_t/dt$ de $M_t = \varpi^{-1}(t)$ son ciertos elementos de $H^1(M_t, \Theta_t)$. Por otro lado, dada una variedad compleja compacta M, si $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ con $0 \subset B \subset \mathbb{C}$ es una familia analítica compleja tal que $M = \varpi^{-1}(0)$. ¿Podemos decir que $\Big(dM_t/dt\Big)_t \in H^1(M, \Theta)$ es una deformación infinitesimal de M?

Pues no está claro que cada θ deba surgir de ésta manera. Resulta que si θ surgiese así, entonces tiene que cumplir con ciertas condiciones adicionales. Si existen clases de cohomología θ que no cumplan las condiciones adicionales, entonces θ no son deformaciones infinitesimales de M, si no, son llamados Obstrucciones a la deformación de M. Esta teoría de la obstrucción, garantiza la existencia de una familia analítica compleja para cualquier $H^1(M, \Theta)$.

Finalmente, hablaremos sobre el Número de Moduli, $m(M)$, que viene a ser el número de parámetros efectivos de la familia analítica compleja $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ con $M = \varpi^{-1}(0)$, que contiene todas las deformaciones suficientemente pequeñas para M y nos da a conocer cuántas de éstas estructuras o deformaciones son iguales y diferentes.

Introducción

En este trabajo se describe una parte importante de los descubrimientos obtenidos durante el siglo XX, es una introducción a la teoría de variedades complejas y sus deformaciones. El término deformación se refiere a pequeñas perturbaciones de una estructura matemática específica, en áreas como análisis, álgebra y geometría algebraica. Por ejemplo, se puede hablar sobre teoría de deformación en variedades complejas, en álgebras asociativas, en esquemas, en representaciones, y muchas más. La cuestión radica en que los resultados de cada una de estas teorías son probados usando herramientas completamente distintas, desde familias de operadores diferenciales elípticos para la deformación en estructuras de variedad compleja ([5]) hasta topos anillados ([8]).

La teoría de deformaciones de estructuras complejas de variedades Riemannianas, es una idea que se remonta hasta el mismo Riemann, donde en un trabajo de 1857 ([1]) calculó el número de parámetros independientes del cual depende las variaciones de una superficie de Riemann compleja compacta (dimensión compleja igual a uno). Llamó a estos parámetros "moduli". La fórmula de Riemann declara que el número de moduli de una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ es igual a $3g-3$. Ésta fórmula fue generalizada por Klein para superficies de Riemann con borde. Desde esa publicación el interés en las deformaciones de estas estructuras nunca se ha perdido.

Con respecto a variedades de dimensiones mayores, las deformaciones de superficies algebraicas fueron tratados por primera vez en 1888 por Max Noether ([2]). Sin embargo las teorías de deformación de variedades complejas de dimensiones superiores no han sido tratadas si no 100 años después.

En 1957 (100 años después del trabajo de Riemann) Frölicher y Nijenhuis ([7]) publicaron un trabajo en el que estudian deformaciones de variedades complejas de dimensiones superiores mediante métodos de geometría diferencial obteniendo importantes resultados. Inspirados por este trabajo Kodaira y Spencer concibieron una teoría moderna de deformaciones de variedades complejas compactas, herramienta importante y la base de un gran cuerpo de la investigación posterior. El desarrollo de la teoría de Kodaira-Spencer, como se llama ahora, tuvo lugar durante la mitad y fines del decenio de 1950, ha tenido y sigue teniendo enorme influencia en amplios sectores de la Matemática, incluyendo la Teoría de Varias Variables Complejas, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, la Matemática y la Física. Pero esta teoría es local y algunas de las preguntas que trata la teoría de Kodaira-Spencer pueden ser ¿Existen deformaciones de una variedad compleja M?, ¿Qué propiedades de M son estables bajo deformación?, ¿Cómo se comporta el grupo de cohomología $H^q(M_t, \Theta_t)$ en la familia diferenciable de variedades complejas?. Pues bien, veamos una idea general de esta teoría de la cual hablará un poco el presente trabajo ([5]):

Intuitivamente la deformación de una variedad compleja compacta M, compuesta de un número finito de cartas coordenadas, viene dada por el desplazamiento de estas cartas. Definimos $\mathscr{M} = \{M_t : t \in B\}$ y a $\varpi : \mathscr{M} \to B$ de manera que el desplazamiento del cual hablamos se llevará acabo a través de la aplicación $\mathcal{KS}_t$ que va del espacio tangente de una variedad compleja B, denominada espacio base de una familia diferenciable de variedades complejas compactas $(\mathscr{M}, B, \varpi)$, al primer grupo de cohomología de M, es decir $\mathcal{KS}_t : T_t(B) \to H^1(M_t, \Theta_t)$, a esta aplicación $\mathbb{C}$-lineal se le llama Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer, la que nos permitirá medir las variaciones de primer orden de la estructura compleja. Esta aplicación nos da un importante resultado, de que la familia diferenciable es localmente trivial si y sólo sí la aplicación de Kodaira-Spencer es idénticamente nula, es decir $\mathcal{KS}_t = 0$.

Otro resultado muy importante concerniente a $\mathcal{KS}_t$ es que da (en sentido práctico) la obstrucción a levantar $\frac{\partial}{\partial t}$ sobre la base de un campo vectorial holomorfo definido sobre $\mathscr{M}$. Es decir, si $\frac{\partial}{\partial t}$ se levanta a un campo holomorfo v con $\varpi_*(v) = \frac{\partial}{\partial t}$, entonces el flujo holomorfo de v da un isomorfismo (holomorfo) $M_{t_0} \cong M_t$ y por lo tanto trivialización $\mathscr{M} \cong M_{t_0} \times B$. Ahora como puede ser visto usando particiones de la unidad, no hay obstrucción a levantar $\frac{\partial}{\partial t}$ como campo vectorial C^∞, luego el difeomorfismo resultante $(M_{t_0} \cong M_t)$, puede ser usado para transportar la estructura compleja de M_t de vuelta en M_{t_0}.

Un análisis minucioso, afirma que se puede expresar el operador de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_t$ para M_t como $\bar{\partial}_t = \bar{\partial} + \theta(t)$ donde $\theta(t)$ es una (0-1)-forma a valores en el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre M_t, el haz es denotado como Θ_t, tal que $\theta(t) = \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \ldots$ es una serie convergente en t. Luego la condición de integrabilidad $\bar{\partial}_t^2 = 0$ nos da una serie de relaciones que en conjunto son equivalentes entre sí, seguidamente usamos el isomorfismo de Dolbeault $H^1(M_t, \Theta_t) \cong H^{0,1}_{\bar{\partial}_t}(M_t, \Theta_t)$ obteniéndose $\mathcal{KS}_t(\frac{\partial}{\partial t}) = \{\theta(t)\}$. Mostrándose cómo la clase de Kodaira-Spencer dan la variación de variedades complejas.

Para terminar cabe aclarar que esta teoría fue asimilada en diversas teorías de deformaciones incluyendo subgrupos discretos de grupos de Lie semi-simples (Calabi, Weil, Matsushima, entre otros) y álgebras (Gerstenhaber), a lo largo de los años estas teorías fueron extendidas, expandidas y aplicadas.

En el área de geometría algebraica, la teoría de Kodaira-Spencer fue rápidamente absorbida, adaptada y muy extendida por Grothendieck y su escuela. Junto al estudio complementario de moduli global, especialmente de curvas algebraicas iniciadas por Mumford, uno ve que casi 50 años luego, la teoría de deformación (local y global) es absolutamente central en la geometría algebraica moderna. Inclusive en otras áreas como teoría de cuerdas (cohomología cuántica) y los trabajos en variedades de Calabi-Yau.

En síntesis, este trabajo se concentra en la teoría de deformaciones infinitesimales de estructuras de variedades complejas. Para su estudio, introduciremos al lector en algunos ejemplos de deformaciones, donde se observará que las fibras de las estructuras complejas son C^∞ equivalentes, pero analíticamente son distintas, luego presentaremos la Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer, $\mathcal{KS}_t$, y probaremos que si la aplicación $\mathcal{KS}_t$ es idénticamente nula, entonces la familia $(\mathscr{M},B,\varpi)$ es localmente trivial (o constante), esto es, la aplicación de Kodaira-Spencer mide la variación de las estructuras analíticas complejas.

En conclusión, dada $(\mathscr{M},B,\varpi)$ una familia analítica compleja de variedades complejas compactas, se tiene que las deformaciones infinitesimales dM_t/dt de $M_t = \varpi^{-1}(t)$ son ciertos elementos de $H^1(M_t,\Theta_t)$. En consecuencia, dado una variedad compleja compacta M, si $(\mathscr{M},B,\varpi)$ con $0 \in B \subset \mathbb{C}$ es una familia analítica compleja tal que $\varpi^{-1}(0) = M$. ¿Podemos decir que $(dM_t/dt)_{t=0} \in H^1(M,\Theta)$, donde Θ es el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre M, es una deformación infinitesimal de M?

Pues no está claro que cada θ deba surgir de ésta manera. Resulta que si θ surge de esta manera, entonces tiene que cumplir con ciertas condiciones adicionales. Así, si existen clases de cohomología θ que no cumplan las condiciones adicionales entonces, evidentemente, θ no son deformaciones infinitesimales de M y son llamados *Obstrucciones a la Deformación de* M.

Se tiene así, la teoría de la obstrucción, que describiremos también en éste trabajo, garantizando así la existencia de una familia analítica compleja para cualquier $\theta \in H^1(M,\Theta)$. Además, introduciremos la definición de Número de Moduli, $m(M)$, que es el número de parámetros efectivos de la familia analítica compleja $(\mathscr{M},B,\varpi)$ con $\varpi^{-1}(0) = M$, que contiene todas las deformaciones suficientemente pequeñas para M y daremos un par ejemplos al respecto.

Capítulo 1

Preliminares

El conocimiento es luz y la ignorancia es oscuridad.
¡Cuán maravilloso es aquel que mantiene vivo el afán de saber!
Daisaku Ikeda.

1.1. Funciones Holomorfas en $\mathbb{C}^n$

El dominio de las funciones de varias variables complejas está contenido en el espacio vectorial complejo $n-$dimensional $\mathbb{C}^n$, definido como el producto cartesiano $\underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n-\text{veces}}$ y se puede identificar con el espacio euclideano $\mathbb{R}^{2n}$, de dimensión $2n$. Es decir,

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n-\text{veces}} = \big\{(z_1,\ldots,z_n) : z_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n\big\},$$

de este modo, cada coordenada z_j de $z = (z_1,\ldots,z_n)$ se escribe $z_j = x_j + iy_j$, donde x_j e y_j son números reales e i la raíz cuadrada de -1.

Definición 1.1. *Una función f con valores complejos y definida sobre un abierto $D \subseteq \mathbb{C}^n$ es holomorfa en D, si cada punto $A = (a_1,\ldots,a_n) \in D$ se tiene una vecindad abierta $U \subset D$ donde la función f posee una expansión en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_n}(z_1-a_1)^{j_1}\ldots(z_n-a_n)^{j_n}, \tag{1.1}$$

la cual converge para todo $z = (z_1,\ldots,z_n) \in U$. En general, $g = (g_1,\ldots,g_m)$ es holomorfa en D cuando cada g_i satisface (1.1), en D. Una biyección holomorfa con inversa holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}^n$ se llama biholomorfismo.

Si $J = (j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ se define $z^J = z_1^{j_1}\ldots z_n^{j_n}$ y así f se puede escribir como

$$f(z) = \sum_J c_J(z-A)^J.$$

Observación 1.1.1. *La composición de dos funciones holomorfas también es holomorfa.*

Con frecuencia, usamos la norma Euclidiana $\|z\|$ y la norma del máximo $|z|$ definido como sigue:

$$\|z\|^2 := \sum z_j \bar{z}_j \qquad \text{y} \qquad |z| := \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Un **polidisco abierto** en $\mathbb{C}^n$ es el producto cartesiano de n discos abiertos y toma la forma

$$\begin{aligned} \Delta(A; R) &= \Delta(a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_n) \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n \right\}, \end{aligned}$$

donde el punto $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ es llamado el **centro** del polidisco, y el punto $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ es llamado su **poliradio**.

Para la demostración de la siguiente proposición vea [3]

Proposición 1.1. *Si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ está definida en $D \subset \mathbb{C}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) f es holomorfa en D.

(b) Las funciones coordenadas $f_i : D \to \mathbb{C}$ son holomorfas.

(c) Las $f_i : D \to \mathbb{C}$ son localmente limitadas y por cada $1 \leq j \leq n$,

$$z_j \to f_i(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_n)$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Para el caso $1-$dimensional, una función continua $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

(i) f es derivable: existe la derivada compleja $\dfrac{df}{dz}$ y coincide con

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son las derivadas parciales usuales.

(ii) f es analítica: localmente, f se representa por una serie de potencias.

(iii) Teorema de Cauchy: para cada curva cerrada $\gamma \in D$, contractible y suave por tramos la integral

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(iv) Cauchy-Riemann: las derivadas parciales son continuas en cada punto de D, y satisfacen

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

1.1.1. Variedad Diferenciable

Un espacio Hausdorff,[1] digamos Σ, es llamado variedad topológica cuando admite un cubrimiento abierto, a lo más numerable y formado por dominios $U_1, \ldots, U_j, \ldots$, donde cada U_j es homeomorfo a un dominio $\mathfrak{U}_j \subset \mathbb{R}^m$. Cada homeomorfismo de U_j en $\mathfrak{U}_j$:

$$x_j : p \mapsto x_j(p) = \left(x_j^1(p), \ldots, x_j^m(p)\right)$$

define las coordenadas locales. Luego la colección $\{x_j\} = \{x_1, \ldots, x_j, \ldots\}$ es llamado **sistema de coordenadas locales** sobre la variedad topológica Σ. Para cada j, k tal que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$,

$$\tau_{jk} : x_k(p) \mapsto x_j(p), \qquad p \in U_j \cap U_k,$$

es un homeomorfismo del conjunto abierto $\mathfrak{U}_{kj} = \{x_k(p) : p \in U_k \cap U_j\} \subset \mathfrak{U}_k$ en el conjunto abierto $\mathfrak{U}_{jk} = \{x_j(p) : p \in U_j \cap U_k\} \subset \mathfrak{U}_j$. Llamamos $\{x_j\}$ un sistema de coordenadas locales C^∞ si éstos τ_{jk} son también C^∞, lo que significa que $x_j^1(p), \ldots, x_j^m(p)$ son funciones C^∞ de $x_k^1(p), \ldots, x_k^m(p)$. Suponga dado dos sistemas de coordenadas locales C^∞, $\{x_j\}$ y $\{\mu_\lambda\}$ en Σ, y sea U_j el domino de x_j y W_λ el dominio de μ_λ. Si para cada par j, λ con $U_j \cap W_\lambda \neq \emptyset$, las aplicaciones

$$x_j(p) \mapsto \mu_\lambda \qquad \text{y} \qquad \mu_\lambda \mapsto x_j(p)$$

son ambas C^∞ para $p \in U_j \cap W_\lambda$, se dice que $\{x_j\}$ y $\{\mu_\lambda\}$ son C^∞ **equivalentes.** Esta propiedad define una relación de equivalencia y las clases conforman las **estructuras diferenciables** de la variedad topológica.

Definición 1.2 (Variedad Diferenciable)**.** *Una variedad topológica, dotada con una estructura diferenciable es llamada una variedad diferenciable*

Ejemplo 1.1. *Sea $S^1 = \{(\cos r, \operatorname{sen} r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$. Considere*

$$U = \{(\cos s, \operatorname{sen} s) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < s < \pi\}$$

y

$$V = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2\pi\}.$$

Sean x, y dos funciones de S^1 en $\mathbb{R}$ con dominios $Dom(x) = U$, $Dom(y) = V$ y defina por $x(\cos s, \operatorname{sen} s) = s$, $y(\cos t, \operatorname{sen} t) = t$. El cambio de coordenadas viene dado por

$$yx^{-1} = \begin{cases} 2\pi + s & -\pi < s < 0 \\ s & 0 < s < \pi \end{cases}$$

que es una función C^∞. Entonces el atlas $\{x, y\}$ dota a S^1 de una estructura de variedad diferenciable $1-$dimensional.

[1] Σ es Hausdorff si dados dos puntos distintos p, $q \in \Sigma$ existen abiertos disjuntos U, V tal que $p \in U$, $q \in V$.

La diferenciabilidad de una aplicación que va de un dominio $D \subset \Sigma$ en otra variedad diferenciable, es definida como sigue: Sea N una variedad diferenciable de dimensión n, $\{u_\lambda\}$ un sistema de coordenadas locales C^∞ en N, W_λ el dominio de u_λ, y $\phi : p \mapsto q = \phi(p)$ una aplicación continua de D a N, entonces para λ, j con $\phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación

$$\phi_{\lambda j} : x_j(p) \mapsto u_\lambda(\phi(p)), \qquad p \in \phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j$$

es una aplicación diferenciable del abierto $\mathfrak{U}_{j\lambda} = x_j(\phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j) \subset \mathbb{R}^m$ en el dominio $\mathcal{W}_\lambda = u_\lambda(W_\lambda)$.

1.2. Variedades Complejas

La variedad compleja es una generalización de superficie de Riemann. En una superficie de Riemann, la coordenada compleja local de un punto $p \in M$ es un número complejo, pero si en lugar de un número complejo se usa un conjunto ordenado de $n \in \mathbb{N}$ números complejos $z_j(p) = \big(z_1(p), \ldots, z_n(p)\big)$ se obtiene el concepto de variedad compleja n-dimensional. Más precisamente, cada variedad compleja está definida en M, un espacio de Hausdorff conexo, que admite una familia numerable de subconjuntos abiertos $\{U_1, \ldots, U_j, \ldots\}$ cuya unión la contiene. En cada elemento de este cubrimiento abierto de M está definido un homeomorfismo

$$z_j : p \mapsto z_j(p) = \big(z_j^1(p), \ldots, z_j^n(p)\big), \quad p \in U_j$$

el cual aplica $U_j \subset M$ en un dominio[2] $\mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$. Es decir, el par (U_j, z_j) es una **carta compleja** para M. De este modo, la familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \ldots\}$ es un **atlas analítico** de $M \subset \bigcup_j U_j$ si las cartas son compatibles dos a dos, donde **compatible** significa que cuando los dominios de las cartas (U_j, z_j) y (U_k, z_k) se intersectan $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, la aplicación $\tau_{jk} = z_j \circ z_k^{-1}$, dada por

$$\tau_{jk} : z_k(p) \mapsto z_j(p) \quad p \in U_j \cap U_k \tag{1.2}$$

induce un biholomorfismo entre los abiertos $\mathfrak{U}_{kj} = z_k(U_j \cap U_k) \subset \mathfrak{U}_k$ y $\mathfrak{U}_{jk} = z_j(U_j \cap U_k) \subset \mathfrak{U}_j$ de $\mathbb{C}^n$. En particular, todas las cartas de un atlas analítico han de tener imagen en abiertos de $\mathbb{C}^n$ para un mismo n (pues si $m \neq n$ los abiertos de $\mathbb{C}^n$ no son biholomórficamente equivalentes a los de $\mathbb{C}^n$). Por otro lado, es fácil ver que si a un atlas analítico se añaden todas las cartas compatibles con sus elementos, obtenemos de nuevo un atlas (es decir, las cartas añadidas no sólo son compatibles con las del atlas dado, sino también entre sí). El atlas así obtenido es llamado **atlas analítico maximal**, en el sentido de que no está contenido en otro atlas mayor y además se dice que $z_j : U_j \mapsto \mathfrak{U}_j$ define las coordenadas $\big(z_j^1(p), \ldots, z_j^n(p)\big) \in \mathbb{C}^n$ de $p \in U_j$; de este modo la colección $\{z_1, \ldots, z_j, \ldots\}$ es un **sistema de coordenadas locales** para M.

[2]Un subconjunto $D \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio en $\mathbb{C}^n$ si D es considerado un dominio como subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$, es decir un conjunto abierto conexo no vacío.

Definición 1.3 (Variedad Compleja)**.** *Un espacio de Hausdorff, conexo y con base numerable es llamado una variedad compleja de dimensión n, si admite un atlas analítico maximal $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \ldots\}$, también llamado la estructura compleja de la variedad.*

Observe que, una variedad compleja es una variedad con alguna estructura compleja.

Ejemplo 1.2. *Cualquier abierto conexo no vacio, $\mathfrak{U} \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad compleja de dimensión n. Consideramos $M = \mathfrak{U}$ y su sistema coordenado la identidad $\{z\}$ es decir $z \mapsto z = (z^1, \ldots, z^n)$.*

Cada $p \in U_j$ es determinado únicamente por sus coordenadas locales $z_j = z_j(p)$, por eso z_j permite indentificar U_j con $\mathfrak{U}_j$ y en consecuencia la variedad compleja M se obtiene al pegar los dominios $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_j, \ldots$ en $\mathbb{C}^n$ via el isomorfismo

$$\tau_{jk} : \mathfrak{U}_{kj} \to \mathfrak{U}_{jk}.$$

Por lo tanto, $M \equiv \bigcup_j \mathfrak{U}_j$, donde

$$z_j \in \mathfrak{U}_j \text{ y } z_k \in \mathfrak{U}_k \text{ son el mismo punto en } M \Leftrightarrow z_j = \tau_{jk}(z_k) \tag{1.3}$$

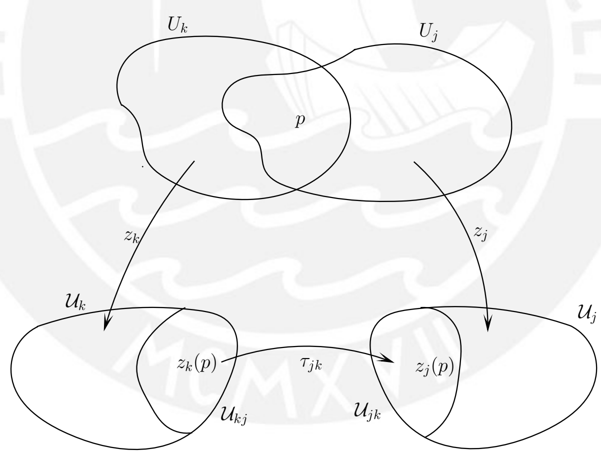


Figura 1.1:

En el siguiente ejemplo vemos como una variedad compleja de dimensión n, induce una variedad diferenciable con cartas en $\mathbb{R}^{2n}$, en el sentido de la Definición 1.2.

Ejemplo 1.3. *Sea $z_j = (z_j^1, \ldots, z_j^n)$ una carta para la variedad compleja M,*

$$z_j : U_j \subset M \to \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n.$$

Si por cada $\alpha = 1, \ldots, n$ se escribe $z_j^\alpha = x_j^{2\alpha-1} + ix_j^{2\alpha}$, entonces la igualdad $x_j = (x_j^1, \ldots, x_j^{2n})$ definen cartas reales

$$x_j : U_j \subset M \to \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Por lo tanto, $\{x_j\}$ genera una estructura C^∞ que hace de M una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.4 (El espacio proyectivo)**.** *Para $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus (0, \ldots, 0)$,*

$$[\zeta_0, \ldots, \zeta_n] = \big\{(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) | \lambda \in \mathbb{C}\big\}$$

es una linea compleja alrededor de cero. La colección de las líneas complejas alrededor de cero,

$$\mathbb{P}^n = \big\{\zeta = [\zeta_0, \ldots, \zeta_n] | (\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \neq (0, \ldots, 0)\big\}$$

es el ***espacio proyectivo complejo n-dimensional*** *y $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$ es llamado las coordenada homogéneas de $[\zeta_0, \ldots, \zeta_n] \in \mathbb{P}^n$. Al espacio proyectivo complejo 1-dimensional $\mathbb{P}^1$ se le conoce también como la* ***esfera de Riemann****.*

La igualdad $[\zeta_0', \ldots, \zeta_n'] = [\zeta_0, \ldots, \zeta_n]$ dice que $(\zeta_0', \ldots, \zeta_n')$ y $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$ son coordenadas homogéneas del mismo punto $\zeta \in \mathbb{P}^n$, esto es

$$\zeta_0' = \lambda\zeta_0, \ldots, \zeta_n' = \lambda\zeta_n \text{ para algún } \lambda \neq 0.$$

Por otro lado, en el abierto

$$U_j = \{\zeta \in \mathbb{P}^n : \zeta_j \neq 0\},$$

cada elemento $\zeta \in U_j$ es representado como

$$\zeta = [z^1, \ldots, z^{j-1}, 1, z^{j+1}, \ldots, z^n], \quad \text{donde} \quad z^\nu = \zeta_\nu/\zeta_j.$$

Esto genera $(z^1, \ldots, z^n)$, las coordenadas no homogéneas de ζ y define

$$z_j : \zeta \longrightarrow z_j(\zeta) = \big(z_j^0, \ldots, z_j^{j-1}, z_j^{j+1}, \ldots, z_j^n\big), \text{ con } z_j^\nu = \zeta_\nu/\zeta_j.$$

Por lo tanto, las imágenes $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$ son abiertos de $\mathbb{C}^n$ y la colección $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) | j = 0, 1, \ldots, n\}$ es un atlas analítico para el espacio proyectivo, ya que en la intersección $U_j \cap U_k$, se cumple

$$z_j^k = 1/z_k^j, \qquad z_j^\nu = z_k^\nu/z_k^j, \qquad \nu \neq j, \nu \neq k \tag{1.4}$$

y las transformaciones coordenadas

$$\tau_{jk} : z_k \longrightarrow z_j$$

son biholomorfas. En consecuencia, $\mathbb{P}^n$ es una variedad compleja, obtenida por pegar $(n+1)$-copias de $\mathbb{C}^n$ via el isomorfismo (1.4).

En éste ejemplo se puede verificar que la familia de sistemas coordenados es un espacio de Hausdorff que no tiene base numerable (para probar ello debe verificar que $\mathcal{A} = \{f_j : U_j \to M, \ j \in J\}$ es un cubrimiento para M y sus cambios de coordenadas son C^r holomorfas, así $\mathcal{B} = \{f_j(V) : V \subset U_j, \, j \in J\}$ es una base topológica de M, siendo para éste ejemplo $\mathcal{B}$ no numerable).

1.2.1. Funciones y Aplicaciones Holomorfas

Sea M una variedad compleja $n-$dimensional, $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \ldots\}$ su atlas analítico maximal y $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$, dominios de $\mathbb{C}^n$. Sea

$$f : D \to \mathbb{C}$$

una función definida sobre un dominio $D \subset M$. Si $\mathfrak{D}_j = z_j(D \cap U_j) \subset \mathfrak{U}_j$, el conjunto formado por las coordenadas, se define la función $f_j : \mathfrak{D}_j \to \mathbb{C}$

$$f_j = f \circ (z_j)^{-1},$$

de este modo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \cap U_j \arrow[d, "z_j"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathfrak{D}_j \subset \mathfrak{U}_j \arrow[r, "f_j"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Observe que si, para $p \in D \cap U_j$ se identifica $z_j = z_j(p)$, la función $f_j(z_j)$ satisface

$$f_j(z_j) = f(p), \quad \text{con} \quad z_j = z_j(p). \tag{1.5}$$

Por lo tanto, $f_j(z_j)$ es una función de n variables complejas $(z_1, \ldots, z_n)$ definidas en $\mathfrak{D}_j$. Por otro lado, si $z_j = \tau_{jk}(z_k)$, con τ_{jk} dado en (1.2), entonces

$$f_j(z_j) = f_k(z_k).$$

De este modo f es continua en D si y sólo si cada $f_j(z_j)$ es continua en $\mathfrak{D}_j$, pues $p \mapsto z_j = z_j(p)$ es un homeomorfismo. Ésta notación nos permite definir.

Definición 1.4 (Función Holomorfa)**.** *Sea D dominio de M una variedad compleja, $z_j : U_j \to \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$ una carta de M y $f_j : \mathfrak{U}_j \to \mathbb{C}$ una función de n variables complejas. Se dice que $f : D \to \mathbb{C}$ – bajo la notación anterior $f(p) = f_j(z_j)$, para $p \in D \cap U_j$ – es una función holomorfa si y sólo si cada $f_j(z_j)$ es holomorfa, con respecto a z_j.*

Las cartas locales de una variedad compleja generan ejemplos de funciones holomorfas, por medio de las proyecciones.

Observación 1.2.1. *Un sistema de coordenadas complejas locales $\{z_j\}$ sobre el espacio Hausdorff genera una estructura diferenciable si y sólo si cada z_j aplica su dominio U_j difeomórficamente en $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j) \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.*

Sea $\Phi : p \mapsto q = \Phi(p)$ una aplicación continua de un dominio $D \subset M$ en N, donde M y N son variedades complejas. Es decir, cada una admite una atlas analítico maximal, digamos $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \ldots\}$ para M y $\mathcal{B} = \{(W_\lambda, w_\lambda) : \lambda = 1, 2, \ldots\}$ para N. Por cada par λ, j con la intersección

$$\Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \neq \emptyset,$$

la aplicación

$$\Phi_{\lambda j} : z_j(p) \mapsto w_\lambda(q), \qquad q = \Phi(p), \qquad p \in \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \tag{1.6}$$

es continua y envia el dominio

$$\mathfrak{U}_{j\lambda} = \{z_j(p)/p \in \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j\} \subset \mathbb{C}^n$$

en $w_\lambda(W_\lambda) \subset \mathbb{C}^m$. En otras palabras, $\Phi_{\lambda j} = w_\lambda \circ \Phi \circ z_j^{-1}$ hace del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "z_j"'] & W_\lambda \arrow[d, "w_\lambda"] \\ \mathfrak{U}_{j\lambda} \arrow[r, "\Phi_{\lambda j}"] & w_\lambda(W_\lambda) \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Observación 1.2.2. *Si $M = \bigcup_j \mathfrak{U}_j$ y $N = \bigcup_\lambda \mathcal{W}_\lambda$, con $\mathcal{W}_\lambda = w_\lambda(W_\lambda)$ la aplicación Φ del dominio $D \subset M$ en N también se escribe*

$$\Phi : z_j \mapsto w_\lambda = \Phi(z_j).$$

Por tanto, se puede prescindir de los índices j, λ en $\Phi_{\lambda j}$ ya que $w_\lambda = \Phi_{\lambda j}(z_j)$ (vea, (1.5)*).*

Definición 1.5 (Aplicación Holomorfa)**.** *$\Phi : M \to N$ es una aplicación holomorfa entre las variedades complejas M y N, si para cada $p \in M$ y cada par de cartas z_j alrededor de p y w_λ alrededor $\Phi(p)$, se cumple que la función $w_\lambda \circ \Phi \circ z_j^{-1}$ es holomorfa en su dominio.*

Es fácil ver que para que Φ sea una aplicación holomorfa basta con que cumpla la definición para un par de cartas z_j y w_λ alrededor de cada punto p y de su imagen (es decir, si lo cumple para dos dadas, lo cumple para dos cualesquiera). Por otra parte, todo abierto de una variedad compleja M hereda de forma natural una estructura compleja (formada por las restricciones de las cartas que cortan al abierto), por lo que podemos hablar de Aplicaciones holomorfas en un abierto de una variedad, y entonces una aplicación es holomorfa si y sólo sí lo es en un entorno de cada punto.

Definición 1.6 (Matriz Jacobiana)**.** *Dada la aplicación $\Phi_{\lambda j}$ definida como antes, $\Phi_{\lambda j} : z_j(p) \mapsto \Phi_{\lambda j}(z_j(p)) = w_\lambda(q)$ holomorfa, la matriz*

$$\left(\frac{\partial w_\lambda^\nu}{\partial z_j^\mu}\right)_{\nu=1,\ldots,m\ /\ \mu=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_\lambda^1}{\partial z_j^1} & \cdots & \dfrac{\partial w_\lambda^1}{\partial z_j^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial w_\lambda^m}{\partial z_j^1} & \cdots & \dfrac{\partial w_\lambda^m}{\partial z_j^n} \end{pmatrix}$$

es llamada Matriz Jacobiano de $\Phi_{\lambda j}$, denotada por $\partial(w_\lambda^1, \ldots, w_\lambda^m)/(z_j^1, \ldots, z_j^n)$. En particular si $m = n$, el determinante de la matriz Jacobiano de $\Phi_{\lambda j}$:

$$J(z_j) = det \frac{\partial(w_\lambda^1, \ldots, w_\lambda^n)}{\partial(z_j^1, \ldots, z_j^n)}$$

es llamado el Jacobiano de $\Phi_{\lambda j}$.

Teorema 1.1. *Suponga $\Phi_{\lambda j} : \mathfrak{U}_{j\lambda} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa, y $J(z_j)$ su Jacobiano. Si $J(p^0) \neq 0$ en el punto $p^0 = z_j(p) \in \mathfrak{U}_{j\lambda}$, existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathfrak{U}_{j\lambda}$ de p^0, y una vecindad $\tilde{\mathcal{V}}$ de $\Phi_{\lambda j}(p^0)$, tal que $\Phi_{\lambda j}$ aplica $\mathcal{V}$ biyectivamente en $\tilde{\mathcal{V}}$. Es más, la inversa $\Phi_{\lambda j}^{-1}$ de $\Phi_{\lambda j}$ restricto a $\mathcal{V}$ es holomorfa sobre $\tilde{\mathcal{V}}$.*

Demostración. Similar a prueba del teorema (1.9) en [15]. □

Observación 1.2.3. *Consecuencias del teorema anterior:*

1. *Dado $\Phi_{\lambda j} : \mathfrak{U}_{j\lambda} \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa. Si $J(z_j(p))$ es distinto del vacío en el dominio $\mathfrak{U}_{j\lambda} \subset \mathbb{C}^n$, $\Phi_{\lambda j}(\mathfrak{U}_{j\lambda})$ es un dominio en $\mathbb{C}^n$.*

2. *Dado $\Phi_{\lambda j} : \mathfrak{U}_{j\lambda} \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa inyectiva. Si $J(z_j(p))$ es diferente del vacío en $\mathfrak{U}_{j\lambda}$, la inversa $\Phi_{\lambda j}^{-1}$ de $\Phi_{\lambda j}$ es una aplicación holomorfa del dominio $\Phi_{\lambda j}(\mathfrak{U}_{j\lambda})$ en $\mathfrak{U}_{j\lambda}$.*

Teorema 1.2. *Sean $f_{\lambda j}^1(z_j), \ldots, f_{\lambda j}^m(z_j)$ funciones holomorfas en un dominio $\mathfrak{U}_{\lambda j} \subset \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$. Suponga que*

$$rango \frac{\partial\big(f_{\lambda j}^1(z_j), \ldots, f_{\lambda j}^m(z_j)\big)}{\partial(z_j^1, \ldots, z_j^n)} = \nu$$

es independiente del punto $z_j(p)$, para cualquier $p \in \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j$, que se tome. Si p^0 es un punto en el dominio $\mathfrak{U}_{j\lambda}$ tal que

$$det \frac{\partial\big(f_{\lambda j}^1(z_j), \ldots, f_{\lambda j}^\nu(z_j)\big)}{\partial(z_j^1, \ldots, z_j^\nu)} \neq 0 \quad en \quad z_j(p) = p^0,$$

entonces existe una vecindad $\mathcal{V}$ de p^0 tal que $f_{\lambda j}^{\nu+1}(z_j), \ldots, f_{\lambda j}^m(z_j)$ son funciones holomorfas de $f_{\lambda j}^1(z_j), \ldots, f_{\lambda j}^\nu(z_j)$ en $\mathcal{V}$.

Demostración. Ponga $w_1 = f_{\lambda j}^1(z_j), \ldots, w_\nu = f_{\lambda j}^\nu(z_j)$. Sobre una vecindad lo suficientemente pequeña $\mathcal{V}$ de p^0,

$$det \frac{\partial(w_1, \ldots, w_\nu, z_j^{\nu+1}, \ldots, z_j^n)}{\partial(z_j^1, \ldots, z_j^\nu, z_j^{\nu+1}, \ldots, z_j^n)} = det \frac{\partial(w_1, \ldots, w_\nu)}{\partial(z_j^1, \ldots, z_j^\nu)} \neq 0.$$

Por lo tanto, del teorema (1.1),

$$\Phi_{\lambda j} : (z_j^1, \ldots, z_j^\nu, z_j^{\nu+1}, \ldots, z_j^n) \mapsto (w_\lambda^1, \ldots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \ldots, z_j^n)$$

es un biholomorfismo de $\mathcal{V}$ en una vecindad $\tilde{\mathcal{V}}$ de $\Phi_{\lambda j}(p^0) = q^0 = w_\lambda(q)$. Sea

$$g_{\lambda j} = g_{\lambda j}(w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n) = f_{\lambda j}^\nu(\Phi_{\lambda j}^{-1}(w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)).$$

Así, $g_{\lambda j}^1, \dots, g_{\lambda j}^m$ son funciones holomorfas de $w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n$ en $\mathcal{V}$, y

$$rango \frac{\partial(g_{\lambda j}^1, \dots, g_{\lambda j}^m)}{\partial(w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)} = \nu$$

Por lo tanto, $g_{\lambda j}^1 = w_{\lambda j}^1, \dots, g_{\lambda j}^\nu = w_{\lambda j}^\nu$, se tiene

$$\frac{\partial g_{\lambda j}^{\nu+l}}{\partial z_j^{\nu+k}} = det \frac{\partial(g_{\lambda j}^1, \dots, g_{\lambda j}^\nu, g_{\lambda j}^{\nu+l})}{\partial(w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu, z_j^{\nu+k})} = 0, \quad l = 1, \dots, m-\nu, \quad k = 1, \dots, n-\nu.$$

Aquí los $g_{\lambda j}^{\nu+l}(w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)$ son funciones holomorfas de $w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu$ y no dependen de $z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n$:

$$g_{\lambda j}^{\nu+l}(w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n) = h_{\lambda j}(w_{\lambda j}^1, \dots, w_{\lambda j}^\nu).$$

En consecuencia,

$$f_{\lambda j}^{\nu+l}(z_j) = h_{\lambda j}(f_{\lambda j}^1(z_j), \dots, f_{\lambda j}^\nu(z_j))$$

es holomorfa y se concluye así la demostración. $\square$

1.2.2. Subvariedades y Conjuntos Analíticos

Dos variedades complejas M y N, son **analíticamente equivalentes**, si existe una aplicación biholomorfa[3] $\Phi : M \to N$. En este caso, M y N se consideran como la misma variedad compleja, pues

- Φ es un homeomorfismo, la identificación de $p \in M$ y $q = \Phi(p) \in N$ genera mismo espacio Hausdorff Σ.
- Cada $\Phi_{\lambda j}$, definida en (1.6) es biholomorfismo y así z_j y w_λ son sistemas de coordenadas complejas locales compatibles en Σ.

Definición 1.7 (Conjunto analítico)**.** *Sea S un subconjunto cerrado de M^n, una variedad de dimensión n. S es un conjunto analítico en M si para cada $q \in S$, existe un número finito de funciones holomorfas $f_q^1, \dots, f_q^\nu$; $\nu = \nu(q)$, definidas en una vecindad abierta $U(q) \subset M^n$ de q tal que*

$$S \cap U(q) = \{p \in U(q) | f_q^1(p) = \dots = f_q^\nu(p) = 0\}.$$

Sea S un conjunto analítico de M^n. Localmente S satisface el siguiente sistema de ecuaciones analíticas

$$f_q^1(p) = \dots = f_q^\nu(p) = 0,$$

[3]Una aplicación biholomorfa es una biyección holomorfa con inversa holomorfa

llamado también ecuación local de S en q. Hay infinidad de opciones de ecuaciones locales para un S dado. S es llamado **regular** en q si se puede escoger una ecuación local $f_q^1(p) = \ldots = f_q^\nu(p) = 0$ de S en q de manera que el

$$rango\frac{\partial(f_q^1(p),\ldots,f_q^\nu(p))}{\partial(z_q^1(p),\ldots,z_q^n(p))} = \nu, \quad p = q.$$

Siendo este el caso, llamamos $n-\nu$ la dimensión de S en q. De lo contrario llamaremos a $q \in S$ un **punto singular** de S.

Definición 1.8 (Subvariedad Compleja)**.** *Un subconjunto analítico conexo S de M^n sin puntos singulares es llamado una subvariedad compleja de M.*

Sea M^n una variedad compleja y suponga que para cada $q \in M$, se escoge un polidisco coordenado $U_{R(q)}(q)$ con respecto a las coordenadas locales $z_q : p \mapsto z_q(p)$ tal que $U_{R(q)}(q) \cap S = \emptyset$ para $q \neq S$ y que $U_{R(q)} \subset U(q)$ para $q \in S$. Entonces se puede elegir a lo mas un numero finito de polidiscos coordenados,

$$U_j = U_{r(j)}(q_j) \subset U_{R(q)}(q_j), \quad j = 1,2,3,\ldots,$$

tal que $U = \{U_j : j = 1,2,\ldots\}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de M. Por simplicidad escribimos z_j por z_{q_j}, $f_j^k(p)$ por $f_{q_j}^k(p)$ y ν_j por $\nu(q_j)$. Entonces o $S \cap U_j = \emptyset$, o $q_j \in S$, y si $q_j \in S$,

$$S \cap U = \{p \in U_j : f_j^1(p) = \cdots = f_j^{\nu_j}(p) = 0\}. \tag{1.7}$$

En particular si S es una subvariedad compleja, se tiene

$$S \cap U_j = \{p \in U_j : z_j^{m+1}(p) = \cdots = z_j^n(p) = 0\}, \tag{1.8}$$

donde $m = n - \nu_j$ es independiente de j. De hecho, si $S \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, es claro que $m_j = m_k$. Entonces la afirmación se desprende de la conexidad de S. Para éste resultado, se dice que S es en si misma una variedad compleja. En efecto si ponemos $V_j = S \cap U_j$, $V = \{V_j : V_j \neq \emptyset\}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de S, y

$$z_{jS} : p \mapsto z_{jS}(p) = \left(z_j^1(p),\ldots,z_j^m(p)\right)$$

es un homeomorfismo de V_j en un polidisco en $\mathbb{C}^m$. La transformación coordenada

$$\tau_{jkS} : z_{kS}(p) \mapsto z_{jS}(p)$$

es un biholomorfismo puesto que es la restricción de τ_{jk} :

$$(z_k^1,\ldots,z_k^m,\ldots,z_k^n) \mapsto (z_j^1,\ldots,z_j^m,\ldots,z_j^n) \quad \text{a} \quad \{z_k^{m+1} = \cdots = z_k^n = 0\}.$$

Por consiguiente $\{z_{jS} : V_j \neq \emptyset\}$ forma un sistema de coordenadas complejas locales, por lo tanto, definimos una estructura compleja sobre S. Así S es una variedad compleja de dimensión $m = n - \nu$.

En otras palabras, S es una subvariedad compleja, si para cada $q \in S$ existe una vecindad U_q de q y una aplicación biholomorfa $f : U_q \to \Delta(0,r)$ sobre un polidisco de $\mathbb{C}^n$ tal que $f(q) = 0$ y para algún entero k, se tiene

$$f(U_q \cap S) = \{z \in \Delta(0,r) : z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}.$$

Ejemplo 1.5 (Hipersuperficie Analítica). *Sea S un subconjunto analítico de M^n, se define en S una sola ecuación $\{f_q(p) = 0\}$ en alguna vecindad de cada $q \in S$. En éste caso se elige U_j como en la ecuación (1.7), se tiene*

$$S \cap U_j = \{p \in U_j : f_j(p) = 0\} \tag{1.9}$$

donde $f_j(p)$ es holomorfa en U_j. Si se identifica U_j con $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j) \subset \mathbb{C}^n$ del modo usual,

$$S \cap U_j = \{z_j \in \mathfrak{U}_j : f_j(z_j) = 0\}$$

es una hipersuperficie de $\mathfrak{U}_j$, donde $f_j(p) = f_j(z_j)$ es una función holomorfa de z_j en $\mathfrak{U}_j$. Entonces si se toma $U_{R(q)}(q)$ lo suficientemente pequeño, se puede elegir $f_j(z_j)$ tal que $f_j(z_j) = 0$ sea una ecuación minimal[4] *de $S \cap \mathfrak{U}_j$ en $\mathfrak{U}_j$. En éste caso $f_j(p) = 0$ es llamado una ecuación minimal de S en U_j. Entonces S es regular en $q \in S \cap U_j$ si y sólo si al menos una de las derivadas parciales $\partial f_j(z_j)/\partial z_j^k$ de $f_j(z_j)$ no se reduce en $z_j = z_j(q)$. De ésta manera se puede ver que una hipersuperficie analítica es un subconjunto analítico de M.*

En consecuencia, el conjunto S' de todos los puntos regulares de S es un subconjunto abierto de S. Si se elige $S'' = S \setminus S'$ como el conjunto de puntos singulares de S. Entonces $S'' \cap \mathfrak{U}_j$ es definido por el sistema de ecuaciones holomorfas

$$f_j(z_j) = \frac{\partial f_j(z_j)}{\partial z_j^1} = \cdots = \frac{\partial f_j(z_j)}{\partial z_j^n} = 0.$$

Así S'' es un subconjunto analítico de M^n. $M \setminus S''$ es una variedad compleja, y cada componente conexa de $S' = S \setminus S''$ es una subvariedad de $M^n \setminus S''$.

1.2.3. Variedad Compleja Compacta

Una variedad compleja M es llamada compacta si es un espacio topológico compacto, en el sentido usual. De este modo, a partir de algún atlas maximal $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \ldots\}$, con $z_j(U_j) = \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$ la identificación descrita en (1.3) muestra que cada variedad compleja, compacta M es obtenida por pegar un número finito de dominios $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ en $\mathbb{C}^n$ (vea figura 1.1). Bajo ésta notación se demostrará el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Una función holomorfa definida sobre una variedad compleja compacta M, es constante.*

Demostración. Como M es compacta y $\mathbb{C}$ admite la norma del máximo, cada función holomorfa $f : M \to \mathbb{C}$ alcanza su 'máximo', es decir

$$\exists\, q \in M \text{ tal que } |f(p)| \leq |f(q)|, \quad \forall p \in M.$$

Más aún, la función definida en (1.5) satisface $f(p) = f_j(z_j) = f_j(z_j^1, \ldots, z_j^n)$ y es holomorfa en $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$; en particular, si $q \in U_j$ se puede suponer que

[4] $f_0(z) = 0$ es una ecuación minimal de S en 0 si y sólo sí $f_0(z)$ y al menos una de sus derivadas parciales $f_{0z_k}(z) = \partial f_0(z)/\partial z_k$ son primos relativos en el anillos de series de potencias.

$\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$ contiene un polidisco de radio 1 y centro $A_j = z_j(q)$ que cumple $A_j = (a_j^1, \ldots, a_j^n)$. Con esto, se define

$$g(w) = f_j\big(a_j^1 + w(z_j^1 - a_j^1), \ldots, a_j^n + w(z_j^n - a_j^n)\big), \text{ con } z_j = z_j(p),$$

la cual es holomorfa en el disco $|w| < 1 + \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$ pequeño, y satisface

$$|g(w)| = |f_j(a_j^1 + w(z_j^1 - a_j^1), \ldots, a_j^n + w(z_j^n - a_j^n))| \leq |f_j(z_j(q))| = |g(0)|.$$

En otras palabras, $g(w)$ alcanza su máximo en $w = 0$, el centro del disco $|w| < 1 + \varepsilon$. Por teorema del módulo máximo,

$$g(w) \text{ es constante en el disco } |w| < 1 + \varepsilon$$

y en consecuencia

(a.1) $f_j : \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es constante, si $q \in U_j$.

En efecto, se tiene $|f_j(z_j(q))| \leq |f_j(\tilde{q})|$ para todo $z_j(q) \in \mathcal{V}_j$ vecindad abierta de $\tilde{q} \in \mathfrak{U}_j$. Para probar que f_j es constante, considere arbitrariamente la recta compleja pasando por $\tilde{q} \in \mathfrak{U}_j$, definido como

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^n \\ \zeta &\mapsto L(\zeta) = \tilde{q} + w\zeta \end{aligned}$$

note que L es holomorfa y está bien definida. Tome $w \in \mathfrak{U}_j$ con la propiedad de $|w| < \rho$, esto se da porque $\mathfrak{U}_j$ es abierto, luego la restricción $f_j|_L := \varphi_w$ es holomorfa en el disco $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho\}$ definido por

$$\varphi_w(\zeta) = f_j \circ L(\zeta) = f_j(\tilde{q} + w\zeta)$$

entonces

$$|\varphi_w(\zeta)| = |f_j(\tilde{q} + w\zeta)| \leq |f_j(\tilde{q})| = |\varphi_w(0)|$$

Así, $|\varphi_w(\zeta)| \leq |\varphi_w(0)|$, entonces φ_w alcanza su máximo en $\zeta = 0$. Por teorema del módulo máximo para una variable, en φ_w se tiene que, $\varphi_w \equiv c(w)$ constante. Observe que la constante depende de w pero $\varphi_w(0) = f_j(\tilde{q})$, el cual es una constante, no depende de w, por tanto $c(w)$ es constante. Luego $f_j \equiv c$, constante en $\{w \in \mathbb{C}^n : |w| < \rho\}$, haciendo variar $w \in \mathfrak{U}_j$, se tiene que f_j es constante en una vecindad de $\tilde{q}$, es decir $\mathcal{V}_j$, por teorema de la identidad se sigue que f_j es constante en todo $\mathfrak{U}_j$. Esto muestra (a.1). Más aún, se cumple:

(a.2) Cada $f_j : \mathfrak{U}_j \to \mathbb{C}$ es constante.

En efecto, basta con probar que $f_j(z_j(q)) = f_k(z_k(q))$ en la imagen de la intersección de cada par de abiertos coordenados $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, es decir $\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k$, lo cual se da por la misma definición de variedad, y procediendo como en (a.1) se tiene que cada f_j es constante. Así se muestra (a.2) y se concluye, por continuación analítica [5] que $f(p)$ es constante en todo M. $\square$

Observación 1.2.4. *Sea $f : M \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa y M una variedad compleja compacta, se tiene que f es constante.*

[5] Sea D_0 un dominio de $\mathbb{C}^n$, y $f_0(z)$ una función holomorfa en D_0. Para D_1 otro dominio de $\mathbb{C}^n$ con $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$. Si existe una función holomorfa $f_1(z)$ definida en D_1 tal que $f_1(z) = f_0(z)$ en $D_0 \cap D_1$, entonces $f_1(z)$ es llamado una continuación analítica de $f_0(z)$ en D_1.

1.3. Formas Diferenciales

Una forma diferencial puede ser entendida como una familia de operadores multilineales y antisimétricos, los que estan definidos sobre el espacio tangente a una variedad diferenciable. El concepto de forma diferencial es una generalización sobre ideas previas como el gradiente, la divergencia, el rotacional, etc. Esa generalización y la moderna notación usada en el estudio de las formas diferenciales se debe a Cartan, [13]. Esta sección lo expresaré siguiendo las notas de Fernández, [16].

En un espacio o variedad de dimensión n, pueden definirse $0-$formas, $1-$formas, $\ldots$ y $n-$formas.

Las $1-$formas actúan como funciones lineales reales definidas sobre el espacio vectorial tangente a la variedad diferencial que se esté considerando. Así pues el conjunto de todas las $1-$formas definidas en un punto de la variedad es isomorfo al espacio dual del espacio vectorial tangente en dicho punto.

Definición 1.9. *Una k-*forma alternada *sobre un espacio vectorial real V de dimensión n es una función $\varphi : V \times V \ldots \times V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $v_1, \ldots, v_q, u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:*

1. *Lineal en cada variable: $\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, u + \alpha v, v_{i+1}, \ldots, v_q)$ es igual a*

$$\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_q) + \alpha\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_q)$$

2. *Antisimétrica: $\varphi(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_q) = -\varphi(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_q)$*

Las k-formas alternadas sobre un espacio vectorial V forman un espacio vectorial, denotado por $Alt^k(V)$. Claramente, $Alt^1(V)$ está constituido por las transformaciones lineales sobre V.

Ejemplo 1.6. *Sea $M^{n\times n} = \{(a_{ij} : a_{ij} \in \mathbb{R})\}$ el espacio de las matrices de orden $n \times n$ que puede ser identificado con $M^{n\times n} \equiv \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n-veces}$, denotemos $A = (a_{ij}) = (A_1, \ldots, A_n)$ donde $A_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})^t$ (t significa transpuesta). Una de las formas de definir la función determinante $det : M^{n\times n} \to \mathbb{R}$ se hace inductivamente de la siguiente manera:*

$$det(A) = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}),$$

donde j es fijada y $A_{ij} \in M^{(n-1)\times(n-1)}$ es la matriz obtenida al quitar la fila i y la columna j de la matriz A. La función

$$\begin{array}{rcl} det : M^{n\times n} & \to & \mathbb{R} \\ (A_1, \ldots, A_n) & \mapsto & det(A_1, \ldots, A_n), \end{array}$$

es n-lineal alternada, pues es lineal y antisimétrica.

Ejemplo 1.7. *Toda función lineal $f : V \to \mathbb{R}$ es 1-lineal alternada, pues es lineal con respecto a la única variable y la condición de antisimetría no es posible violarla, dado que hay solo una variable y para alternar necesito por lo menos dos variables.*

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la base de $(\mathbb{R}^n)^* = Alt^1(\mathbb{R}^n)$ dual a la base canónica. Definimos la k-forma alternada

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = det \begin{vmatrix} v_{1i_1} & \ldots & v_{1i_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ki_1} & \ldots & v_{ki_n} \end{vmatrix}$$

Se denota $dx^I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$ y se prueba sin dificultad que $\{dx^I / I = (i_1 < i_2 < \cdots < i_k)\}$ forma una base de $Alt^k(V)$

Definición 1.10. *Sea M una variedad de dimensión m, una k-*forma sobre la variedad *M es una aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \omega: & M & \to & \bigcup_{p\in M} Alt^k(T_pM) \\ & p & \mapsto & \omega_p : T_pM\times, \ldots, \times T_pM \to \mathbb{R} \end{array}$$

donde ω_p es una k-forma alternada.

El espacio $\displaystyle\bigcup_{p\in M} Alt^k(T_pM)$ es denotado por $Alt^k(TM)$ y el espacio de k-formas sobre M por $\Omega^k(M)$. Así, en cada abierto coordenado, $U \subset M$, la k-forma ω puede representarse como

$$\omega = \sum a_I dx^I$$

donde $a_I : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones definidas en U. Diremos que ω es de clase C^r $(0 \leq r \leq \infty)$ holomorfas [6] si las aplicaciones son de clase C^k u holomorfas.

Ejemplo 1.8. *La diferencial total de una función de varias variables puede ser tratada rigurosamente como una $1-$forma. Si se tiene una función de varias variables $f(x_1, \ldots, x_n)$ diferenciable, su diferencial total es una $1-$forma exacta:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Con estos antecedentes se puede generalizar la idea y ver otra interpretación para función holomorfa, como en la siguiente observación:

Observación 1.3.1. *Dado $D \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Una función $f : D \to \mathbb{C}^m$ es considerada holomorfa, si $f : D \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$ es una aplicación de clase C^1 y para cada $z \in D$, la diferencial $df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es $\mathbb{C}$-lineal, vea [3].*

Veamos qué debe cumplir una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ para que sea $\mathbb{C}$-lineal. Si es $\mathbb{C}$-lineal entonces $g(z_1, \ldots, z_n) = c_1z_1 + \ldots + c_nz_n$, para ciertos $c_i = a_i + ib_i$ en $\mathbb{C}$. Si llamamos $z_i = x_i + iy_i$ entonces

$$g(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (a_1x_1 - b_1y_1 + \ldots + a_nx_n - b_ny_n, a_1y_1 + b_1x_1 + \ldots + a_ny_n + b_nx_n),$$

luego la matriz de g es

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & \cdots & a_n & -b_n \\ b_1 & a_1 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, si la matriz g es de esta forma (para números reales cualesquiera a_i y b_i) entonces g es $\mathbb{C}$-lineal.

[6] Cuando las formas son complejas las $a_j : U \subset M \longrightarrow \mathbb{C}$

1.3.1. Producto Exterior

Definición 1.11. *Sea ω una $k-$*forma diferencial *de clase C^r ($r \geq 1$) es holomorfa en una variedad M, localmente se expresa como,*

$$\omega = \sum a_I \wedge dx^I,$$

con cada componente a_I diferenciable. El diferencial $d\omega$ de ω es la $(k{+}1)-$forma diferencial dada por

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx^I.$$

Es decir, tomamos la suma de los productos exteriores del diferencial de cada componente a_I con su respectivo producto dx^I.

Ejemplo 1.9. *Sea ω la $1-$forma diferencial de $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$\omega = xydx - y^2dy + 3zdz.$$

Entonces, $d\omega$ es la $2-$forma diferencial

$$\begin{aligned} d\omega = &\ d(xy) \wedge dx - d(y^2) \wedge dy + d(3z) \wedge dz \\ = &\ (ydx + xdy) \wedge dx - (2ydy) \wedge dy + (3dz) \wedge dz \\ = &\ xdy \wedge dx = -xdx \wedge dy \end{aligned}$$

Definición 1.12. *Dadas una k-forma $\omega = \sum_I a_I dx_I$ con $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$ y una s-forma $\eta = \sum_J b_J dx_J$ con $J = (j_1, \ldots, j_s)$, $j_1 < \ldots < j_s$. El* producto exterior *de ambas formas es una $s + k$-forma definida como*

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

La definición de producto exterior es hecha de modo que si $\omega_1, \ldots, \omega_k$ son 1-formas entonces el producto $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ sea una k-forma definida por

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(v_1 \ldots v_k) = det(\omega_i(v_j))$$

Ejemplo 1.10. *Considere $\omega = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3$ una 1-forma en $\mathbb{R}^3$ y $\eta = x_1dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ una 2-formas en $\mathbb{R}^3$. Entonces el producto exterior de estas dos formas será*

$$\omega \wedge \eta = x_1x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (x_1x_3 - x_2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Observaciones 1.3.1.

1) Si $k = 0$ entonces $Alt^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ y $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.

2) Los $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(v_1 \ldots v_k)$ donde $I = (i_1 < \ldots < i_k)$ forman una base para $Alt^k(\mathbb{R}^n)$. Así todo elemento $\omega \in \Omega^k(U)$ se puede expresar como

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

donde $a_I = a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$. *Para abreviar, escribiremos*

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \in \Omega^k(U).$$

3) Sean $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $\eta = \sum_I b_I dx_I \in \Omega^k(U)$ *y* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ *entonces*

$$\begin{aligned} \omega + \eta &= \sum_I (a_I + b_I) dx_I \\ \phi\omega &= \sum_I (\phi a_I) dx_I. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.11. *Consideremos* $U = \mathbb{R}^3$, $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 \in \Omega^1(U)$ *y* $\eta = \eta_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \eta_{13} dx_1 \wedge dx_3 + \eta_{23} dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^2(U)$, *así*

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \omega_1\eta_{23} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \omega_2\eta_{13} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \omega_3\eta_{12} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\omega_1\eta_{23} - \omega_2\eta_{13} + \omega_3\eta_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.12. *Consideremos* $U \subset \mathbb{R}^3$ *así tenemos* $\Omega^1(U)$, $\Omega^2(U)$ *y* $\Omega^3(U)$ *los espacios sobre* $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ *generados respectivamente por* $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$, $\{dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3\}$ *y* $\{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\}$ *de donde*

$$\omega \in \Omega^1(U) \Leftrightarrow \omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3,$$

donde $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{C}^\infty$.

$$\omega \in \Omega^2(U) \Leftrightarrow \omega = \omega_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{13} dx_1 \wedge dx_3 + \omega_{23} dx_2 \wedge dx_3,$$

donde $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23} \in \mathcal{C}^\infty$.

$$\omega \in \Omega^3(U) \Leftrightarrow \omega = \omega_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

donde $\omega_{123} \in \mathcal{C}^\infty$.

1.3.2. Suma Directa

Definición 1.13. *La suma directa* $E \oplus F$ *de dos* A*-módulos derechos* [7] E *y* F *es la totalidad de pares ordenados* $\{(x,y) : x \in E,\ y \in F\}$. *La operación suma y la acción* A *se definen ."entrada por entrada", como es de esperar:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad (x,y)a = (xa, ya)$$

Es usual identificar E con $E \oplus 0$ y F con $0 \oplus F$, para poder considerar E y F como submódulos de $E \oplus F$.

[7] Un A-módulo derecho E sobre un anillo A es un grupo abeliano $(E,+)$ junto con una operación $E \times A \to E$ (llamada multiplicación escalar) de modo tal que para todo $a, b \in A$ y $x, y \in E$ se satisfacen:

* $(x+y)a = xa + ya$.
* $x(a+b) = xa + xb$.
* $x(ab) = (xa)b$.
* $x1 = x$ para la unidad 1 de A (ie. todos nuestros módulos son unitarios).

1.3.3. La Complexificación del Espacio Tangente

Sea M una variedad compleja, con $dim_{\mathbb{C}} M = m$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene $Alt^k(T_pM^c)$ donde T_pM^c es llamado la complexificación del espacio tangente (o también espacio tangente complexificado), esto es:

Sea V espacio vectorial de $dim_{\mathbb{R}} V = n$, definimos su complexificado como $V^c = V \times V$ junto a las siguientes operaciones:

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$(a + ib).(v_1, v_2) = (av_1 - bv_2, bv_1 + av_2)$$

Luego V^c es un espacio vectorial complejo de $dim_{\mathbb{C}} V^c = n$

Lema 1.1. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ es base real de V, entonces $((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0))$ es base compleja de V^c.*

Observe que $i.(v, 0) = (0, v)$ y si $(v, w) \in V^c \Rightarrow (v, w) = v + iw$.
Ahora, sea M una variedad compleja (holomorfa) con dimensión real igual a $dim_{\mathbb{R}} M = 2dim_{\mathbb{C}} M = 2m$.
Así, para cada $p \in M$ escogemos una parametrización

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{C}^m &\rightarrow M \\ (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) &\mapsto f(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) \end{aligned}$$

la base real de T_pM es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_p \right)$$

luego por el lema anterior tendremos que:

$$\left((\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, 0), (\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, 0), \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p, 0), (\frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_p, 0) \right)$$

es la base compleja de T_pM^c. Equivalente a escribir

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}\Big|_p \right)$$

considerando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_p &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p, -\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \Big) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big|_p &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p + i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \Big) \end{aligned}$$

Luego como T_pM es generado por $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m}\Big|_p \right)$ entonces definamos $\overline{T_pM}$ como el espacio vectorial generado por $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}\Big|_p \right)$, de ahí que:

$$T_pM^c = T_pM \oplus \overline{T_pM}.$$

Una k-forma en el complexificado del espacio tangente es un aplicación:

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow \bigcup_{p\in M} Alt^k(T_pM^c) \\ p &\mapsto \omega_p : T_pM^c \times \ldots \times T_pM^c \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

podemos denotar:

$$Alt^k(TM^c) := \bigcup_{p\in M} Alt^k(T_pM^c)$$

y como $\Omega^k_c(M)$ al espacio de las k-formas en el complexificado. Esto quiere decir $\Omega^k_c(M) = \{\omega_p : Alt^k(TM^c) \rightarrow \mathbb{C}\}$, tiene estructura de R-módulo, donde $R = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} \,/\, \text{f es diferenciable}\}$ es el anillo.

Luego la base de éste módulo, localmente, es $(dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{k_q})$ donde $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq m$ y $1 \leq k_1 < \ldots < k_q \leq m$, además que $p + q = k$

Simplificando la notación tenemos:

$$dz_J \wedge d\bar{z}_K = dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{k_q}$$

de este modo la base anterior quedará expresada: $dz_J \wedge d\bar{z}_K : |J| + |K| = k$ así toda k-forma complexificada sobre M se escribe como:

$$\omega = \sum_{|J|+|K|=q} a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

donde $a_{JK} : M \rightarrow \mathbb{C}$

Definición 1.14. *Una k-forma complexificada ω sobre M tiene bigrado (p, q), donde $p + q = k$, si es posible escribir*

$$\omega = \sum_{|J|=p, |K|=q} a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

Luego $\Omega^{(p,q)}_c(M)$, el espacio de formas de bigrado (p, q), forma también un módulo sobre el anillo de funciones diferenciables. Esto nos permite notar que:

$$\Omega^k_c(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{(p,q)}_c(M)$$

1.4. Fibrados Vectoriales

Definición 1.15. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces una variedad diferenciable E, es llamado fibrado vectorial sobre M si satisface las siguientes condiciones:*

1. *La aplicación C^∞, $\pi : E \rightarrow M$, de E sobre M es dada.*

2. *$\forall p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial ν-dimensional: $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{C}^\nu$, donde ν es independiente de p.*

3. *$\forall q \in M$, existe una vecindad U con $q \in U \subset M$, tal que $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{C}^\nu$ y para cualquier $p \in U$, $p \times \mathbb{C}^\nu$ es isomorfo a $\pi^{-1}(p)$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial: $\pi^{-1}(p) \cong p \times \mathbb{C}^\nu$*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_j) \subset E \arrow[r, "\pi"] & U_j \subset M \\
U_j \times \mathbb{C}^\nu \arrow[u, "F_j"] \arrow[ur, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \quad \pi o F_j = \pi_1$$

Llamaremos a $\pi^{-1}(p)$ la fibra de E sobre p, que denotaremos por E_p, ν es el rango de la variedad E. M será considerado el espacio base de E, y π la proyección. Denotaremos a E por (E, M, π).

Ejemplo 1.13 (Fibrado Trivial)**.** *Sea M una variedad, el fibrado trivial es $\pi : M \times \mathbb{R}^n \to M$ donde $\pi(p, v) = p$. Observe que la $Id : M \times \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(M)$ es la trivialización. Por definición de fibrado, todo fibrado vectorial es localmente trivial.*

Sea $M = \bigcup_{j \in J} U_j$ cubrimiento localmente finito de M y (E, M, π) un fibrado vectorial sobre M. Si cada U_j es tomado lo suficientemente pequeño, tenemos por condición (3) que:

$$\pi^{-1}(U_j) = U_j \times \mathbb{C}^\nu = \{(p, \zeta_j)/p \in U_j, \zeta_j = (\zeta_j^1, \ldots, \zeta_j^\nu)\}$$

puesto que $p \times \mathbb{C}^\nu \simeq \pi^{-1}(p)$, entonces $(\zeta_j^1, \ldots, \zeta_j^\nu)$ es un sistema de coordenadas sobre el espacio vectorial $\pi^{-1}(p)$.

Para $p \in U_{jk}$, donde denotamos $U_{jk} := U_j \cap U_k$, $(\zeta_j^1, \ldots, \zeta_j^\nu)$ y $(\zeta_k^1, \ldots, \zeta_k^\nu)$ son sistemas coordenados del mismo espacio vectorial $\pi^{-1}(p)$ de aquí existe una transformación lineal invertible $(f_{jk\beta}^\alpha)$ tal que:

$$\zeta_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} f_{jk\beta}^{\alpha(p)} \zeta_k^\beta \tag{1.10}$$

donde $(p, \zeta_j) \in U_j \times \mathbb{C}^\nu$ y $(p, \zeta_k) \in U_k \times \mathbb{C}^\nu$ son el mismo punto de E si y sólo sí cumple (1.10). Llamaremos a $(\zeta_j^1, \ldots, \zeta_j^\nu)$ la fibra coordenada de $(p, \zeta_j) \in E_p$ sobre U_j. Ya que el subdominio $\pi^{-1}(U_j)$ de M es, por condición (3), isomorfa a $U_j \times \mathbb{C}^\nu$ como una variedad diferenciable, así $\zeta_j^1, \ldots, \zeta_j^\nu$ son funciones C^∞ en $\pi^{-1}(U_j)$. Consecuentemente en (1.10), ζ_j^α es una función C^∞ de $(p, \zeta_k^1, \ldots, \zeta_k^\nu)$, de ahí que $f_{jk\beta}^\alpha(p)$ es una función C^∞ en U_{jk}. Pero usando notación vectorial, (1.10) puede ser escrito más simple como:

$$\zeta_j = f_{jk}(p) \cdot \zeta_k \tag{1.11}$$

Las funciones transición, $f_{jk}(p)$, satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} f_{jj} = 1, \text{ donde 1 denota la matriz unidad} \\ f_{jk} \cdot f_{kj} = 1 \\ f_{jk} \cdot f_{kl} \cdot f_{lj} = 1 \end{cases}$$

Observaciones 1.4.1.

1. *Tenemos que* $f_{jk} = f_{jk}(p)$ *denota la matriz* $(f^{\alpha}_{jk\beta}(p))_{\alpha,\beta=1,2,\ldots,\nu}$. *Donde se tiene que* $\det f_{jk}(p) \neq 0$.
2. *Las funciones transición,* f_{jk}*, permite determinar y reconstruir el fibrado vectorial* E*, así como expresar localmente los objetos definidos sobre* E *en base a estas funciones transición.*
3. *Aquí escribiremos* $E = \{f_{jk}\}$*, un fibrado vectorial, determinado únicamente por dar* f_{jk} *con* $j, k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{tikzcd}
U_{jk} \times \mathbb{R}^{\nu} \arrow[r, "F_j"] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[rr, bend left, "F_k^{-1} \circ F_j"] & \pi^{-1}(U_{jk}) \arrow[r, "F_k"] \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"] & U_{jk} \times \mathbb{R}^{\nu} \arrow[d, "\pi_1"] \\
U_{jk} & & U_{jk}
\end{tikzcd}$$

De manera que $F_k^{-1} \circ F_j(p, \zeta) = (p, f_{jk}(p).\zeta)$ donde $f_{jk} : U_{jk} \to GL(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{R}^{\nu})$

Ejemplo 1.14 (Fibrado Tangente)**.** *Sea* M *una variedad diferenciable con parametrizaciones* $f_j : U_j \to M$*, y sea* $E = \bigcup_j \{j\} \times V_j \times \mathbb{R}^m$ *donde* $V_j = f(U_j)$*, consideremos la relación de equivalencia*

$$(j, p, v) \sim (k, q, w) \ \ si\, p = q \ \ y\, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p))v = w$$

definimos fibrado tangente por $TM = \dfrac{E}{\sim}$*, a partir de ahí tenemos la siguiente proyección natural*

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ [j, p, v] &\mapsto p \end{aligned}$$

y las funciones

$$\begin{aligned} F_j : V_j \times \mathbb{R}^m &\to TM \\ (p, v) &\mapsto [j, p, v] \end{aligned}$$

cuya composición de una de ellas con la inversa de otra está dada por

$$\begin{aligned} F_k^{-1} F_j : (V_j \cap V_k) \times \mathbb{R}^m &\to (V_j \cap V_k) \times \mathbb{R}^m \\ (p, v) &\mapsto (p, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p)).v) \end{aligned}$$

y tiene como regla de definición

$$(p, v) \overset{F_j}{\longmapsto} [j, p, v] = [k, p, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p)).v] \overset{F_k^{-1}}{\longmapsto} (p, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p)).v)$$

esto es para asegurarnos que TM es una variedad diferenciable.
Luego la proyección $\pi : TM \to M$ definida por $\pi(p,v) = p$ para $v \in T_pM$, efectivamente es un fibrado vectorial.

1.4.1. Secciones de un Fibrado

A continuación se dará el concepto de *Secciones de un Fibrado* y un ejemplo donde veremos que la sección de un fibrado tangente, es un campo vectorial.

Definición 1.16. *Una sección sobre un fibrado $\pi : E \to M$ en un abierto $U \subseteq M$, es una función $s : U \to E$ tal que $\pi \circ s = Id_U$, es decir el diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "Id"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

El espacio de las secciones de clase C^k será denotado por $\Gamma^k(M,E)$.

Representación Local de las Secciones:

Sea $s : M \longrightarrow E$ una sección ($\pi \circ s = Id$) con $F_j^{-1} \circ s(p) = (p, s_j(p))$ en U_j donde $s_j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{tikzcd} U_j \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_j"] & E \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ & U_j \subset M \arrow[u, shift left, "s"] \arrow[ul, phantom] \end{tikzcd} \quad F_j^{-1} \cdot s : U_j \times \mathbb{R}^n \to U_j \subset M$$

Luego, en $U_{jk} = U_j \cap U_k$ se tiene que $F_j(p, s_j(p)) = s(p) = F_k(p, s_k(p))$, así $(p, s_k(p)) = F_k^{-1} \circ F_j(p, s_j(p)) = (p, f_{jk}(p) s_j(p))$, entonces se cumple la siguiente relación

$$s_k = f_{jk} s_j \ \text{ en } \ U_{jk} \tag{1.12}$$

que nos permite ver cómo son las secciones localmente.

Veamos el siguiente ejemplo:

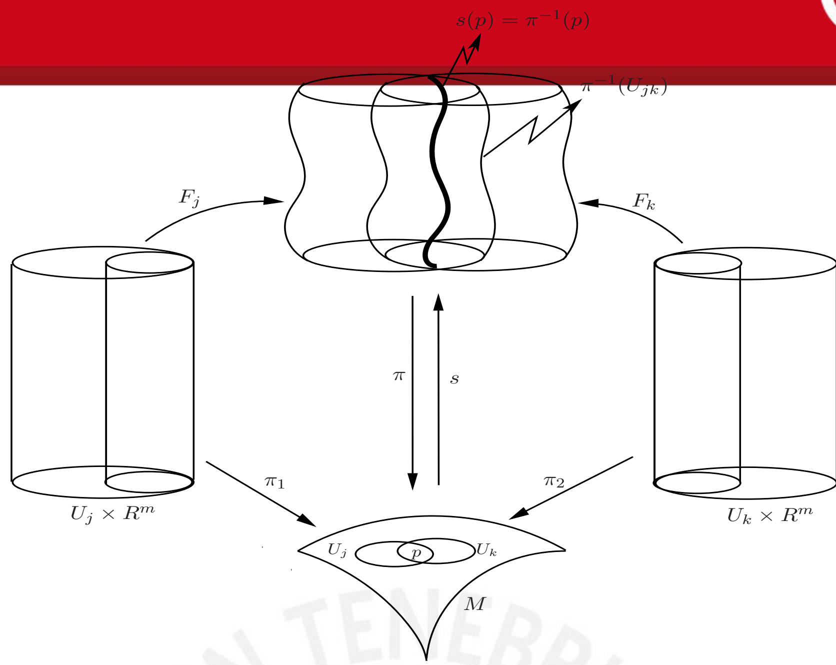
Ejemplo 1.15 (Campo Vectorial)**.** *Una sección del fibrado tangente TM es llamado campo vectorial. Un campo $X : M \to TM$ puede ser representado en $U_j \subseteq M$ por*

$$F_j^{-1} X(p) = (p, X_j(p))$$

donde $F_j : U_j \times \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(U_j)$ es una trivialización de TM y $X_j : U_j \to \mathbb{R}^m$. Definimos $\tilde{X}_j : U_j \to \mathbb{R}^m$ tal que $f_j' \tilde{X}_j = X$. En $f_k^{-1}(U_{jk})$ tenemos que

$$\tilde{X}_k = (f_k^{-1} f_j)_* \tilde{X}_j$$

esto es, X_k es la imagen recíproca de X_j por medio del cambio de variable $f_k^{-1} f_j$, según la definición siguiente, de pullback.



Definición 1.17. *Sea ω una q-forma en $\mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, la imagen recíproca de ω por medio de f es una q-forma $f^*\omega$ en $\mathbb{R}^m$ definida como*

$$f^*(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_q) = \omega(f(p))(df(p)v_1, \ldots, df(p)v_q)$$

$p \in \mathbb{R}^m, v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^m$. Si g es una 0-forma, la imagen recíproca de g por medio de f es simplemente la composición

$$f^*(g) = g \circ f$$

1.4.2. Morfismos de Fibrados

Definición 1.18. *Sean $\pi_1 : E_1 \to M$ y $\pi_2 : E_2 \to M$ fibrados vectoriales. Una aplicación $\varphi : E_1 \to E_2$ es un morfismo de fibras vectoriales si:*

1. *$\varphi|_{\pi_1^{-1}(p)} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(\varphi(p))$ es una transformación lineal.*
2. *El diagrama siguiente, conmuta*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M \arrow[r, "Id_M"] & M \end{tikzcd}$$

Si existe otro morfismo de fibrados ψ tal que $\psi\varphi = Id_{E_2}$ y $\varphi\psi = Id_{E_1}$ entonces φ será llamado isomorfismos de los fibrados π_1 y π_2.

Si φ es un morfismo de los fibrados $\pi_1 : E_1 \to M$ y $\pi_2 : E_2 \to M$ cuyas trivializaciones son $F_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(U_j)$ y $G_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to \pi_2^{-1}(U_j)$ respectivamente. Entonces, $\varphi_j = G_j^{-1}\varphi F_j$ es de la forma $\varphi_j(p, v) = (p, a_j(p)v)$ donde $a_j : U_j \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ($a_j : U_j \to GL(n)$ si φ es un isomorfismo). Luego para otro índice k, $\varphi_k = G_k^{-1}\varphi F_k$. Así, en la intersección U_{jk} tenemos la siguiente relación

$$G_k\varphi_k F_k^{-1} = G_j\varphi_j F_j^{-1}$$

que equivale a la relación $\varphi_k F_k^{-1} F_j = G_k^{-1} G_j \varphi_j$ en U_{jk}. Aplicando a (p, v) conseguimos

$$(p, a_k f_{kj}(p)v) = \varphi_k F_k^{-1} F_j(p, v) = G_k^{-1} G_j \varphi_j(p, v) = (p, g_{kj} a_j(p)v)$$

Luego la relación fundamental que determina un morfismo de fibrado es:

$$a_k f_{kj} = g_{kj} a_j \quad \text{en } U_{kj} \tag{1.13}$$

Además si las funciones $a_j : U_j \to GL(n)$, vista en forma matricial, posee inversa entonces determina un isomorfismo de fibrados.

Recíprocamente, dadas las funciones $a_j : U_j \to GL(n)$ tales que $a_k f_{kj} = g_{kj} a_j$ en $U_j k$, podemos construir un isomorfismo de fibrado $\varphi : E_1 \to E_2$ definiendo

$$\varphi|_{U_j} = G_j \varphi_j F_j^{-1}, \ \text{ donde } \ \varphi_j(p, v) = (p, a_j(p).v)$$

pues en U_{jk} tenemos la identidad $F_k^{-1}\varphi_k G_k = F_j^{-1}\varphi_j G_j$, ya que

$$\varphi_k F_k F_j^{-1}(p, v) = (p, a_k f_{kj}(p).v) = (p, g_{kj} a_j(p).v) = G_k G_j^{-1} \varphi_j(p, v).$$

Ejemplo 1.16. *Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrado de rango 1 (fibrado de linea) tal que una sección $s : M \longrightarrow E$, no se anule en ningún punto de M. Entonces el fibrado es trivial. Luego existe un isomorfismo entre $E \times \mathbb{R}$ y E,*

$$\begin{tikzcd} E \times \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "F_j^{-1}\cdot s"'] & E \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ & M \arrow[u, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

Basta ver que $F_j^{-1} \cdot s(p) = (p, s_j(p))$ en $U_j \subset M$ donde $s_j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple la ecuación (1.12) reescrita como $s_k.\mathbf{1}= f_{jk}.s_k$ donde 1 representa el cociclo del fibrado trivial, luego por el resultado en la ecuación (1.13) y como los s_j y s_k no se anulan en ningún punto entonces se tiene así que φ es un isomorfismo de fibrados.

Capítulo 2

Deformaciones de Estructuras Complejas

Cuando se asume la determinación de ¡No seré derrotado! ¡Triunfaré!,
cada dificultad se convierte en un trampolín dirigido a nuestro desarrollo,
y un tesoro que adornará nuestra vida.

Daisaku Ikeda.

2.1. Familia Analítica Compleja de Variedades Complejas Compactas

Si M es una variedad compleja compacta de dimensión n, donde se asume su sistema de coordenadas complejas locales finita, $\{(U_j, z_j); j = 1, \ldots, l\}$. Una variedad compleja es obtenida por pegar un número finito de polidiscos $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l$ por identificación $z_k \in \mathfrak{U}_k$ y $z_j = f_{jk}(z_k) \in \mathfrak{U}_j$.

Una *deformación* de M es considerada la variedad compleja obtenida por pegar los mismos polidiscos $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l$ via funciones transición diferentes. En otras palabras, se reemplaza $f^{\alpha}_{jk}(z_k)$ por las funciones

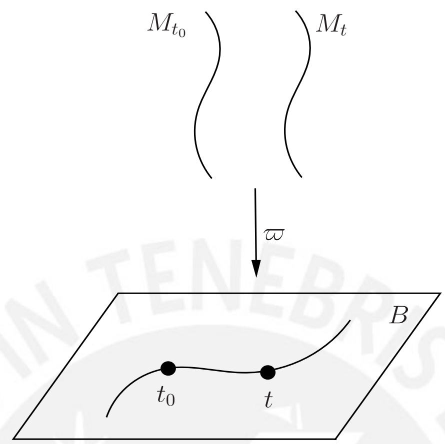
$$f^{\alpha}_{jk}(z_k, t) = f^{\alpha}_{jk}(z_k, t_1, \ldots, t_m)$$

con la *condición inicial* $f^{\alpha}_{jk}(z_k, t_0) = f^{\alpha}_{jk}(z_k)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$ es un parámetro que representa un punto variable en alguna variedad conexa (compleja o real diferenciable) B. Las condiciones iniciales aseguran que para $t = t_0 \in B$, la deformación que se obtiene es en sí el mismo M. Además para cada $t \in B$, si se denota M_t la variedad compleja obtenida por pegar los polidiscos $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l$ via las funciones transición $f_{jk}(z_k, t)$, entonces cada M_t es llamado una deformación de $M_{t_0} = M$. La deformación de M no es mas que el desplazamiento de sus cartas coordenadas. Ésta es la idea fundamental de Kodaira y Spencer. Definamos ahora lo que es una Familia Analítica Compleja.

Definición 2.1 (Familia Analítica Compleja)**.** *Sea B una variedad compleja (conexa) y $\{M_t/t \in B\}$ un conjunto de variedades complejas compactas conexas dependiendo de $t \in B$. Decimos que M_t depende analíticamente de t y* *que $\{M_t/t \in B\}$ forma una familia analítica compleja, si existe una variedad compleja $\mathscr{M}$ y una aplicación holomorfa ϖ de $\mathscr{M}$ en B tal que:*

1. *El rango de la matriz Jacobiano de ϖ es igual a la dimensión compleja de B en cada punto de $\mathscr{M}$ y*

2. *$\varpi^{-1}(t) = M_t$ para cada $t \in B$ (esto implica que M_t es una subvariedad compleja compacta de $\mathscr{M}$),*



Nota: Observe en la definición, que ϖ con las condiciones dadas, equivale a decir sea una sumersión propia holomorfa con fibras compactas.

Entonces sucede que si se considera la familia analítica compleja $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ de variedades complejas conexas compactas $M_t = \varpi^{-1}(t), t \in B$, se tiene que para una fibra fija $M = M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0), t_0 \in B$, cualquier otra fibra lo suficientemente cerca $M_t = \varpi^{-1}(t)$, es decir t suficientemente cerca de t_0, es simplemente una variedad compleja obtenida por los mismos polidiscos que forman el sistema de abiertos coordenados complejos locales de M vía las funciones transición, exactamente de la forma mencionada anteriormente, de manera que las fibras cercanas son en realidad las deformaciones de la variedad M. Más formalmente pasamos a definir lo que es Deformación.

Definición 2.2 (Deformación Global y Local). *Sea M una variedad compleja conexa compacta y $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia analítica compleja de variedades complejas conexas compactas con $M \cong M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ para algún $t_0 \in B$. Si existe un dominio $I \subset B$ conteniendo t_0 que satisface:*

1. *Para cada $t \in I$, $M_t = \varpi^{-1}(t)$ es una variedad compleja compacta obtenida por pegar los polidiscos $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l$ via las funciones transición*

$$f^{\alpha}_{jk}(z_k, t) = f^{\alpha}_{jk}(z_k, t_1, \ldots, t_m)$$

   con la condición inicial $f^{\alpha}_{jk}(z_k, t_0) = f^{\alpha}_{jk}(z_k)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$ son coordenadas complejas locales en I, y

2. *$f_{jk}(z_k,t)$ son funciones holomorfas en t.*

Se le llama a la variedad compleja conexa compacta $M_t = \varpi^{-1}(t)$, para cada $t \in I$, una deformación local *de estructura compleja de M. De manera más general llamamos a la fibra $M_t = \varpi^{-1}(t)$, para cada $t \in B$, una* deformación global *de estructura compleja de M.*

La existencia de I se asegura por la misma definición de familia analítica compleja, siempre podemos encontrar un cubrimiento abierto localmente finito $\{U'_j; j \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{M}$ y un sistema de cartas coordenadas locales $\{(U'_j, z_j); j \in \mathbb{N}\}$ con cada z_j holomorfa de U'_j en $\mathfrak{U}_j \times I_j$, $\mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio que puede ser asumido como el polidisco:

$$\mathfrak{U}_j = \{z_j(p) = \big(z_j^1(p), \ldots, z_n^1(p)\big) \in \mathbb{C}^n : p \in U'_j, |z_j^\alpha(p)| < r_j^\alpha, \alpha = 1, \ldots, n\}$$

y donde $I_j \subset B$ es (identificado via la aplicación coordenada holomorfa con) un domino en $\mathbb{C}^m$, m la dimensión de B como variedad compleja.

Aquí I_j puede ser escogido como un multi-intervalo abierto dado por

$$I_j = \{t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{C}^m : a_{j\nu} < t_\nu < b_{j\nu}, \nu = 1, \ldots, m\}.$$

Así se tiene para $p \in U'_j \subset \mathcal{M}$,

$$z_j(p) = \big(z_j^1(p), \ldots, z_n^1(p), t_1, \ldots, t_m\big),\ \varpi(p) = (t_1, \ldots, t_m).$$

Las funciones transición $\{f_{jk}\}$ que pega los dominios $\{\mathfrak{U}_j \times I_j\}$ para dar la variedad compleja $\mathcal{M}$ se dan como de costumbre por $f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1}$ y son funciones holomorfas en las variables t y z_k (en efecto, las funciones $\{f_{jk}\}$ son holomorfas en la variable z_k) y por lo tanto, se escriben como $f_{jk}(z_k,t)$. Así los puntos $(z_j,t) \in \mathfrak{U}_j \times I_j$ y $(z_k,t') \in \mathfrak{U}_k \times I_k$ representan el mismo punto de $\mathcal{M}$ si y sólo si $(z_j,t) = f_{jk}(z_k,t')$ lo cual significa que t y t' necesariamente deben representar el mismo punto de B.

Ahora fijamos cualquier $t_0 \in B$. Entonces $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ es la variedad compleja conexa compacta obtenida por pegar los polidiscos $\{\mathfrak{U}_j \times \{t_0\} \cong \mathfrak{U}_j : U'_j \cap M_{t_0} \neq \emptyset\}$ via las funciones transición (biholomorfas) $\{f_{jk}(z_k,t_0)\}$ y por lo tanto los puntos $z_j \in \mathfrak{U}_j$ y $z_k \in \mathfrak{U}_k$ representan el mismo punto de $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ si y sólo si $z_j = f_{jk}(z_k,t_0)$.

Por la compacidad de las fibras de ϖ y el hecho de que el cubrimiento abierto $\{U'_j\}$ es localmente finito, se puede ver que existe un entorno abierto I de t_0 en B tal que $\varpi^{-1}(I)$ se encuentre en la unión de un número finito de $\{U'_j\}$ la cual supondremos sin pérdida de generalidad sea $U'_1, \ldots, U'_l$. Sea $U_j = U'_j \cap M_{t_0}$ para cada j. Luego $t \in I$. Con esto verificamos la existencia de $I \subset B$ cumpliendo las condiciones dadas en la definición de anterior.

Entonces por construcción, M_t es una variedad compleja conexa compacta obtenida por pegar los polidiscos $\{\mathfrak{U}_j \times \{t\} \cong \mathfrak{U}_j; j = 1, \ldots, l\}$ via las funciones transición $\{f_{jk}(z_k, t)\}$ (que depende holomórficamente de las variables z_k) y por tanto los puntos $z_j \in \mathfrak{U}_j$ y $z_k \in \mathfrak{U}_k$ representan el mismo punto de $M_t = \varpi^{-1}(t)$ si y sólo si $z_j = f_{jk}(z_k, t)$.

De ésta manera, se puede ver que la restricción de $(\mathcal{M}, B, \varpi)$ a $I \subset B$, que da la familia analítica compleja $(\mathcal{M}_I, I, \varpi)$, se compone de fibras que son todas variedades complejas compactas obtenidas por pegar los mismos polidiscos $\{\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_l\}$ pero con las funciones de transición $f_{jk}(z_k, t)$ que depende analíticamente del parámetro $t \in I$. Luego, llamamos a la variedad compleja conexa compacta $M_t = \varpi^{-1}(t)$, para cada $t \in I$, una deformación C^∞ de la estructura compleja de M. La variedad $\mathscr{M}$ es llamado el espacio total de deformaciones C^∞ de estructuras complejas de M, y B es llamado el espacio de parámetros o espacio base.

Y se puede observar que estos polidiscos son en sí mismos independientes del parámetro $t \in I$ y sólo la forma en que se pegan entre sí dependen de $t \in I$ a fin de determinar diferentes deformaciones de estructuras complejas sobre cualquier fibra fija (elegida) $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$, $t_0 \in I \subset B$.

Observación 2.1.1. *Se dice que las familias analíticas complejas $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ y $(\mathscr{N}, B, \sigma)$ son* ***equivalentes*** *si existe un biholomorfismo*

$$\Phi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$$

tal que para cada $t \in B$, la restricción

$$\Phi| : M_t \to N_t$$

también es un biholomorfismo, donde $M_t = \varpi^{-1}(t)$ y $N_t = \sigma^{-1}(t)$.

Cuando las familias $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ y $(\mathscr{N}, B, \sigma)$ son equivalentes, consideraciones elementales muestran que $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ puede ser pensado como la familia analítica compleja $(\mathscr{N}, B, \sigma)$ dotado de un conjunto de nuevas coordenadas complejas locales de $\mathscr{M}$.

Definición 2.3. *Sean M y N variedades complejas compactas. Se dice que M es una deformación de N, si existe una familia analítica compleja tal que $M, N \subset \{M_t/t \in B\}$, cumple $M_{t_0} = M, M_{t_1} = N$.*

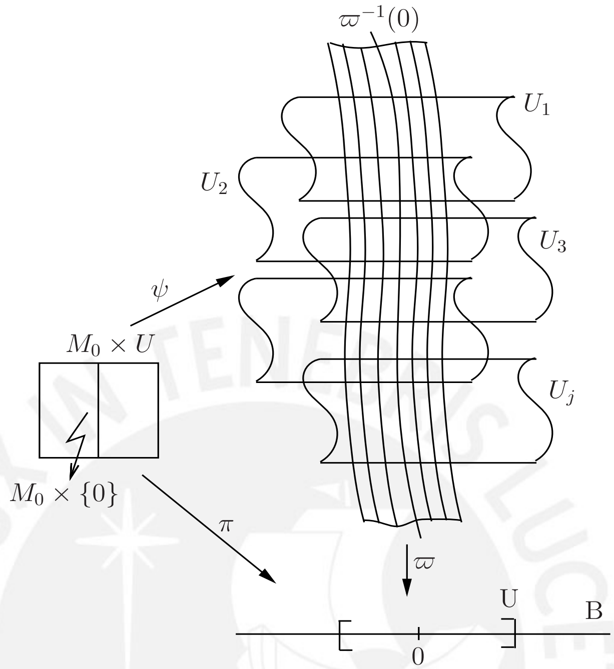
Sea B un donimio de $\mathbb{R}^m$ y $\varpi : \mathscr{M} \longrightarrow B$ una aplicación C^∞, tal que $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es una familia analítica compleja. Luego, por teorema de la sumersión [14], existe un sistema de coordenadas locales de $\mathscr{M}$, $\{x_1, \ldots, x_j, \ldots\}$ que satisface:

1. $x_j(p) = (x_j^1(p), \ldots, x_j^n(p), t_1, \ldots, t_m)$.
2. $\{\mathscr{U}/j = 1, 2, \ldots\}$ forma un cubrimiento abierto localmente finito de $\mathscr{M}$ donde $\mathscr{U}_j$ es el dominio de x_j.

Así, $\mathscr{M}$ es una variedad diferenciable.

Teorema 2.1 (Teorema de Ehresmann [13]). *Sea $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia analítica compleja y $0 \in B \subset \mathbb{R}^m$, entonces existen:*

- *Un cubo abierto $U = \{t/|t_1| < r, \ldots, |t_m| < r,\}$ tal que su clausura $\overline{U} \subset B$, y*
- *Un difeomorfismo $\psi : M_0 \times U \to \varpi^{-1}(U)$ tal que $\varpi \circ \psi = \pi$, donde $\pi : M_0 \times U \to U$ es la proyección sobre U.*



Demostración. Por inducción, suponga $m = 1$ entonces, $B \subset \mathbb{R}$, $U =]-r, r[$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, donde $[-r, r] \subset B$ y $(x_j, t_1) := (x_j^1, \ldots, x_j^n, t_1)$, primero construimos un campo vectorial C^∞ sobre $\mathscr{M}$, la cual es dado en cada $\mathscr{U}_j$, como

$$v_j(x_j, t_1) = \sum_{\alpha=1}^{m} v_j^\alpha(x_j, t_1) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} + \frac{\partial}{\partial t_1} \tag{2.1}$$

Denotemos al campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t_1}$ sobre $\mathscr{U}_k$ por $(\frac{\partial}{\partial t_1})_k$, luego bajo la transformación de coordenadas $x_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(x_k^1, \ldots, x_k^m, t_1)$, tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_j, t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_j \tag{2.2}$$

sobre $\mathscr{U}_{jk}$, seguidamente como $\mathscr{M}$ es compacto y $\{\mathscr{U}_j\}$ un cubrimiento localmente finito, existe $\{\rho_j(x_j, t_1)\}$ una partición de la unidad subordinada[1] a $\mathscr{U}_j$ (es decir $\rho_j \equiv 0$ en $\mathscr{M} \setminus \mathscr{U}_j$), entonces

$$\sum_j \rho_j(x_j, t_1) \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_j \tag{2.3}$$

[1]Si M es una variedad diferenciable, una partición de la unidad de M es una familia de funciones $\{f_i\}$, C^∞ y se dice subordinada a un recubrimiento $\{\mathcal{U}_j\}$, si para todo i existe un j tal que el soporte de f_i, (denotado por $supp(f_i)$ es la clausura del subconjunto de M en que f_i no se anula), está contenido en $\mathcal{U}_j$.

es un campo vectorial sobre $\mathscr{M}$, luego tenemos (si ponemos $\rho_k(x_k,t_1) = \rho_k$)

$$\begin{aligned}
\sum_k \rho_k \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)_j &= \sum_k \rho_k \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(x_k,t_1)}{\partial t_1} . \frac{\partial}{\partial x_k^{\alpha}} + \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)_k\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{j=k} \rho_k \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(x_k,t_1)}{\partial t_1} + \sum_{j\neq k} \rho_k \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(x_k,t_1)}{\partial t_1}\right) \frac{\partial}{\partial x_k^{\alpha}} + \sum_k \rho_k \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)_k
\end{aligned}$$

Esto es

$$\sum_k \rho_k \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j\neq k} \rho_k \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(x_k,t_1)}{\partial t_1} . \frac{\partial}{\partial x_k^{\alpha}} + \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)_k$$

un campo vectorial sobre $\mathscr{U}_{jk}$, por lo tanto el campo vectorial dado por (2.3) lo podemos poner (sobre $\mathscr{M}$), como

$$v_j^{\alpha}(x_j,t_1) = \sum_{j\neq k} \rho_k(x_k,t_1) \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(x_k,t_1)}{\partial t_1} \tag{2.4}$$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de este campo

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j^{\alpha}}{dt} = v_j^{\alpha}(x_j^1,\ldots,x_j^n,t_1), \quad \alpha = 1,2,\ldots,m \\ \dfrac{dt_1}{dt} = 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

para cualquier punto $(\zeta_i,0) = (\zeta_i^1,\ldots,\zeta_i^n,0) \in \mathscr{M}_0 = \varpi^{-1}(0)$, cuyas condiciones iniciales son

$$\begin{cases} x_k^{\alpha}(0) = \zeta_i^{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,n \\ t_1(0) = 0 \end{cases}$$

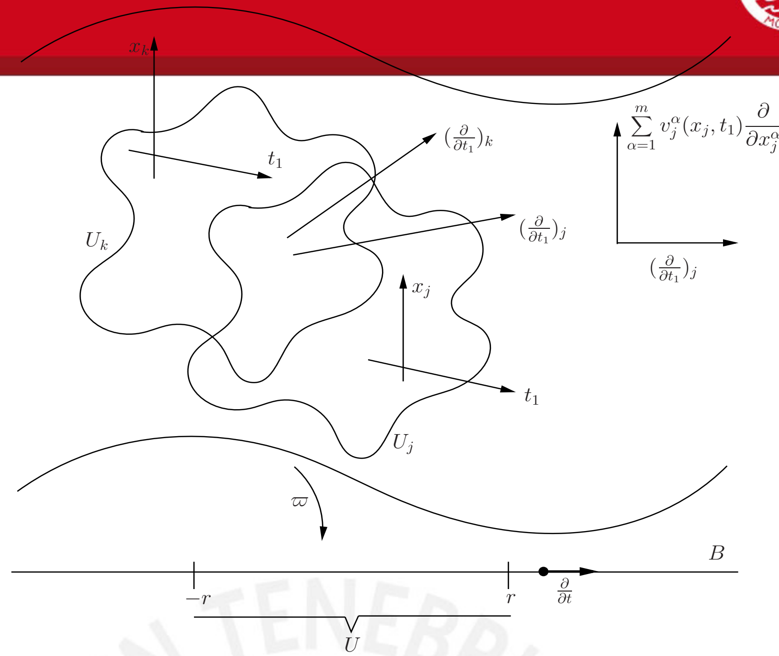
entonces existe una única solución de (2.5) dado por

$$\begin{cases} x_k^{\alpha} = \zeta_k^{\alpha}(\zeta_i,t), \quad \alpha = 1,2,\ldots,n \\ t_1(t) = t \end{cases}$$

así $t \mapsto \big(x_k^1(\zeta_i,t),\ldots,x_k^n(\zeta_i,t),t\big)$, $-r < t < r$, es una curva regular alrededor de $(\zeta_i,0)$ sobre $M_0 = M_0 \times \{0\}$ bajo la notación $(\zeta_i,0) = (\zeta_i^1,\ldots,\zeta_i^n)$ y $M_0 \times U \ni \big((\zeta_i,0),t\big) \equiv (\zeta_i,t)$ donde

$$\begin{tikzcd}
(\zeta_i^1,\ldots,\zeta_i^n,t) \in M_0 \times U \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (x_k^1,\ldots,x_k^n,t) \in \varpi^{-1}(U) \arrow[dl, "\varpi"] \\
& t \in U \subset \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

se puede apreciar que $\varpi \circ \psi(\zeta_i,t) = \varpi(x_k^1(\zeta_i,t),\ldots,x_k^n(\zeta_i,t),t) = t = \pi(\zeta_i,t)$ es decir $\varpi \circ \psi = \pi$ y como ϖ es diferenciable en su restricción y π es sobreyectiva,



se tiene que ψ es diferenciable, entonces $M_0 \times U \cong \varpi^{-1}(U)$.

Pasemos a ver el caso general, cuando la dimensión de B es m, sea la hipótesis inductiva como sigue

$$U^{m-1} = \{(t_1, \ldots, t_m - 1) \in B^{m-1} : |t_i| < r, i = 1, 2, \ldots, m-1\},$$

donde $M_0 \times U^{m-1} = \varpi^{-1}(U^{m-1})$, y defina $U_m = \{t_m \in B / |t_m| < r\} \subset \mathbb{R}$, donde $U = U^{m-1} \times U_m$. Se expresa $M_0 \times U = M_0 \times U^{m-1} \times U_m = \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m$, y sólo se prueba que $\varpi^{-1}(U) = \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m$.

Dado $p \in \mathscr{M}$, $\varpi(p) = (t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m)$ defina $\varpi_m : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ por $\varpi(p) = t_m$ que es C^∞ y aplica ϖ^{-1} en U, ($\varpi^{-1} |_{\varpi^{-1}(U)}$: $\varpi^{-1}(U) \to U_m$) y denotemos la proyección π_m como $\pi_m : \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m \to U_m \subset \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
(x_j^1, \ldots, x_j^n, t_1, \ldots, t_m) \arrow[rr, "\psi_m"] \arrow[dr, "\pi_m"'] & & \varpi^{-1}(U) \arrow[dl, "\varpi"] \\
& U_m \subset \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

para construir una aplicación ψ_m de $\varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m$ en $\varpi^{-1}(U)$ procedemos como en la primera parte, consiguiendo el siguiente campo vectorial (sobre $\mathscr{U}_{jk}$) respecto a la partición de la unidad,

$$\sum_j \rho_j(\frac{\partial}{\partial t_m})_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j \neq k} \rho_j \frac{\partial f_{jk}^\alpha}{\partial t_m} \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} + (\frac{\partial}{\partial t_m})_k$$

luego obtenemos, como en (2.4),

$$\sum_{\alpha}^{n} v_j^\alpha(x_j^1,\ldots,x_j^n,t_1,\ldots,t_m)\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}+\frac{\partial}{\partial t_m}$$

el campo vectorial C^∞ sobre $\mathscr{M}$, que al resolver su sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j^\alpha}{dt} = v_j^\alpha(x_j^1,\ldots,x_j^n,t_1,\ldots,t_m), \quad \alpha = 1,2,\ldots,n \\ \dfrac{dt_\nu}{dt} = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots,m-1 \\ \dfrac{dt_m}{dt} = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Obtenemos el difeomorfismo $\psi_m : \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m \to \varpi^{-1}(U)$ de manera que $\varpi_m \circ \psi_m = \pi_m$. Así se concluye que $\varpi^{-1}(U) = \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m = M_0 \times U$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Aplicando el teorema 2.1 a la familia analítica compleja $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.1. *Sea $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia analítica compleja, c un punto arbitrario de B y $M_c = \varpi^{-1}(c)$. Para un polidisco lo suficientemente pequeño $U(c)$ con centro en c, existe $\psi_c : M : c \times U(c) \to \varpi^{-1}(U(c))$ tal que $\varpi \circ \psi_c = \pi_c$ donde $\pi_c : M_c \times U(c) \to U(c)$.*

$$\begin{tikzcd} M_c \times U(c) \arrow[rr, "\psi_c"] \arrow[dr, "\pi_c"'] & & \varpi^{-1}(U(c)) \\ & U(c) \arrow[ur, "\varpi_c"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 2.4. *Decimos que todas las deformaciones, lo suficientemente pequeñas, tienen una cierta propiedad $\mathscr{P}$, si para cualquier familia analítica compleja $\{M_t/t \in B\}$ con $M_{t_0} = M$, podemos encontrar una vecindad I, con $t_0 \in I \subset B$ tal que M_t tiene la propiedad $\mathscr{P}$, para cada $t \in I$.*

A continuación daremos un teorema cuya idea intuitiva es que, dados cualquier par de fibras asociadas al fibrado tangente de una variedad compleja compacta de la familia analítica compleja dada, éstas son difeomorfas.

Teorema 2.2. *Sea* $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *una familia analítica compleja de variedades complejas compactas* $\{M_t/t \in B\}$*, y* t_0 *cualquier punto de* B*, entonces* $M_t = \varpi^{-1}(t)$ *es difeomorfo a* $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$*, para cualquier* $t \in B$*.*

Demostración. Sea $\mathscr{M}$ una variedad diferenciable (arbitraria), con sistema de coordenadas locales $\{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots\}$, y cubrimiento arbitrario localmente finito $\{\mathscr{U}_j / j = 1, 2, \ldots\}$ tal que $x_j : p \mapsto (x_j^1(p), \ldots, x_j^m(p)) = x_j(p)$, donde el cambio de coordenadas está dado por $x_j^\alpha(p) = f_{jk}^\alpha(x_k^1(p), \ldots, x_k^m(p))$, con $\alpha = 1, \ldots, m$, se construye (localmente)

$$v_j = (v_j^1, \ldots, v_j^m) = (\dot{x}_j^1(t), \ldots, \dot{x}_j^m(t)) = \dot{x}_j(t)$$

vector tangente sobre un abierto de $\mathscr{M}$, con su cambio de coordenadas

$$v_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta} . v_k^\beta$$

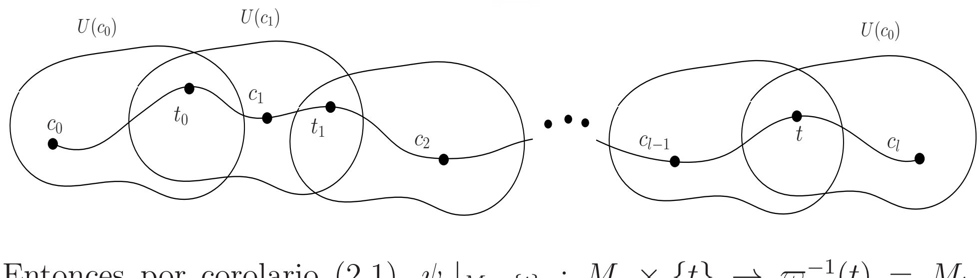
y como no depende de ésta, tenemos que

$$\sum_{\alpha=1}^{m} v_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} v_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} \tag{2.7}$$

Si un vector tangente $v(x_j) = \sum_{\alpha=1}^{m} v_j^\alpha(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}$ es asignado a cada punto x_j de $\mathscr{M}$, llamaremos a $v(x_j)$ un campo vectorial C^∞ (es decir todo $v_j^\alpha(x_j)$ es C^∞), además $v(x_j) \neq 0$ en cada punto de $\mathscr{M}$, luego asociemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \frac{dx_j^\alpha}{dt} = v_j^\alpha(x_j^1, \ldots, x_j^m), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m \right. \tag{2.8}$$

la cual tiene una única solución $x_j^\alpha = x_j^\alpha(t)$ en todas las condiciones iniciales dadas $x_j^\alpha(0) = \zeta_i^\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, y denotemos esta solución por $x_j^\alpha(t, \zeta_i)$ (función C^∞ de t) con $\zeta_i = (\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^m)$. Ya que el sistema de ecuaciones (2.8) es invariante bajo la transformación de coordenadas por (2.7), su solución $x_j^\alpha(t, \zeta_i)$ da una curva suave $t \mapsto x_j(t, \zeta_i) = (x_j^1(t, \zeta_j), \ldots, x_j^m(t, \zeta_j))$ en $\mathscr{M}$ partiendo del punto $\zeta_i \in \mathscr{M}$.



Entonces por corolario (2.1), $\psi_c|_{M_c \times \{t\}} : M_c \times \{t\} \to \varpi^{-1}(t) = M_t$ es un difeomorfismo, luego para todo $t \in U(c)$, M_c es difeomorfo a M_t. Dado cualesquiera $t_0, t \in B$, podemos escoger polidiscos $U(c_0), \ldots, U(c_l)$ como en el teorema (2.1) tal que $t_0 \in U(c_0)$, $t \in U(c_l)$, además que $U(c_j) \cap U(c_{j-1}) \neq \emptyset$, para $j = 0, 1, \ldots, l$. Entonces $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ es difeomorfo a $M_t = \varpi^{-1}(t)$ $M_{c_0} \cong M_{t_0} \cong M_{c_1} \cong M_{t_1} \cong \ldots, M_t \cong M_{c_l} \cong$ entonces $M_{t_0} \cong M_t$ $\square$

2.1.1. Automorfismos y Espacio Cociente

Antes, veamos algunas definiciones preliminares:

Definición 2.5. *Sea G un grupo dotado con una topología de tal manera que las aplicaciones producto e inversión de la operación de grupo, $\mu : G \times G \to G$ y $t : G \to G$ dadas por:*

$$\mu(gh) = gh; \; t(g) = g^{-1}$$

son continuas, entonces se dirá que G es un grupo topológico. Además se dirá que G es un grupo discreto si es un grupo topológico que tiene la topología discreta.

Todo grupo puede ser convertido en un grupo topológico si es dotado con la topología discreta.

Ejemplo 2.1. *Cada uno de los siguientes grupos es un grupo topológico:*

1. *La recta real $\mathbb{R}$ con la estructura de grupo aditivo y la topología euclídea.*
2. *El conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de números reales diferentes del cero con la multiplicación, y la topología relativa de $\mathbb{R}$.*
3. *El conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de números complejos diferentes al cero bajo la multiplicación compleja, con la topología relativa de $\mathbb{C}$.*
4. *El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$, que es el conjunto de matrices reales inversibles de $n \times n$ con la multiplicación de matrices, con la topología heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$.*
5. *Cualquier grupo dotado con la topología discreta.*

Definición 2.6. *Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Una acción continua de G en X es una aplicación continua $\theta : G \times X \to X$, tal que satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *$\theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G y*
2. *$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$ para todo $x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$.*

Para simplificar la notación, se denota $\theta(g, x)$ por $g \cdot x$.

Definición 2.7. *Sea G un grupo, dada una acción en X, se define la órbita de $x \in X$ como el conjuntos $G.x = \{g \cdot x, \forall g \in G\}$.*

Con el concepto de órbita de un elemento, se puede hablar del espacio cociente X/G, cuyos elementos son las órbitas de la acción.

2.1.2. Automorfismo en Variedades Complejas.

Sea W una variedad compleja, un **automorfismo** de W será la aplicación biholomorfa de W en si misma, en otras palabras, un automorfismo es una aplicación que no altera la estructura compleja de W. Cuando definimos el producto de dos automorfismos g_1, g_2 de W como su composición $g_1 \circ g_2$, el conjunto de todos los automorfismo de W forma un grupo, la cual denotamos por $\mathscr{G}$. La unidad de este grupo es la identidad en W, y la inversa de $g \in \mathscr{G}$ es la aplicación inversa g^{-1} de g.

Ahora, sea G un grupo de automorfismos de W. Para $p \in W$, el conjunto $G_p = \{g(p) : g \in G\}$ es llamado la órbita de G alrededor de p. Dos órbitas G_p y G_q no tienen un elemento en común a menos que ellos coincidan. Es así que W se descompone en órbitas mutuamente disjuntas de G.

Luego, al conjunto de todas las órbitas de G se le llama el espacio cociente de W por G, denotado por $\hat{W} = W/G$, obtenido de W identificando $p \in W$ con $q \in W$ si existe un elemento $g \in G$ tal que $q = g(p)$.

En decir, asumiendo la acción C^∞, $\theta : G \times M \to M$. Definimos la relación $\sim$ sobre M por $p \sim q$ si para algún $g \in G$ tenemos $q = \theta_g(p) = gp$. Fácilmente se puede ver que $\sim$ es una relación de equivalencia y que las clases de equivalencias coinciden con las órbita de G. En efecto, $p \sim p$ pues $p = ep$ y $p \sim q$ mediante $q = gp$, lo que implica $p = g^{-1}q$ o $q \sim p$, de modo la que la relación es reflexiva y simétrica. Finalmente, dado que $p \sim q$ y $q \sim r$ tenemos que tener $q = gp$ y $r = hq$ de modo que $r = (hg)p$ y luego $p \sim r$. Obviamente, $p \sim q$ implica que p y q están en la misma órbita, por lo que la clase de equivalencia $[p] \subset G_p$. A la inversa, si $q \in G_p$, entonces $p \sim q$ así $G_p \subset [p]$.

Se define la *Topología Cociente* de $\hat{W} = W/G$, un subconjunto $\hat{U}$ de $\hat{W}$ es un abierto si y sólo si su imagen inversa para la aplicación $p \mapsto \hat{p} = G_p$ es abierta en W. Así $\hat{U}_r(\hat{q}) = \{\hat{p} : p \in U_r(q)\}$ es un conjunto abierto de $\hat{W}$, para $U_r(q) = \{p : |z_q^1(p)| < r, \ldots, |z_q^n(p)| < r\}$ dado $q \in W$ y $r > 0$, luego la aplicación $p \mapsto \hat{p}$ aplica $U_r(q)$ homeomórficamente en $\hat{U}_r(\hat{q}) = \{\hat{p} : p \in U_r(q)\}$. De ésta manera $\hat{W}$ es una variedad topológica.

Ejemplo 2.2. *Cuando $M = \mathbb{R}^n$ y $G = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : X^t.X = Id\}$ el subgrupo de matrices ortogonales $n \times n$, actúa naturalmente como un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, se tiene que las órbitas corresponden a esferas concéntricas y por lo tanto son una a una en correspondencia con los números reales $r \geq 0$ por la aplicación que asigna a cada esfera, su radio. Así hay un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n/G$ y el rayo $0 \leq r < \infty$; pero éste cociente no es una variedad.*

En general, el espacio cociente W/G de una variedad compleja no es siempre una variedad compleja. Con el fin de que W/G pueda ser una variedad compleja, G debe satisfacer ciertas condiciones. Que veremos en la siguiente sección, donde daremos algunos ejemplos.

2.2. Ejemplos de Deformaciones

El teorema 2.3 que presentamos a continuación, nos brinda un método para construir una variedad compleja compacta como el espacio cociente de una variedad compleja dada. Pero antes veamos la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Sea G un grupo de automorfismos de una variedad compleja W. Si la acción de G en W es*

(a) Propiamente discontinua*: para cualquier par de compactos K_1 y K_2 de W, existe un número finito de elementos $g \in G$ tal que $g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$, y*

(b) Libre de puntos fijos*: para cualquier $g \in G$ excepto la identidad, $g(p) \neq p$.*

entonces las órbitas de la acción son subvariedades (complejas) de W.

Demostración. Antes de iniciar la demostración de la proposición, se afirma que:

(a.1) Ser propiamente discontinua es equivalente a decir que para cada punto $p \in W$, existe U_p, un entorno abierto (relativamente compacto) de p tal que $\forall g \in G$, $(g \neq 1)$, se tiene que $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$.

Sea $p \in M$, entonces existen vecindades U y V de p tales que $g(U) \cap V = \emptyset$ excepto para un número finito de elementos, sean ellos $g_0 = e, g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$. Ya que la acción es libre de puntos de fijos y M es Hausdorff, para cada g_i existen vecindades disjuntas W_i de p y W_i' de $g \cdot x$. Sea

$$U' = U \cap V \cap W_1 \cap (g_1^{-1} W_1') \cap \ldots \cap W_k \cap (g_k^{-1} W_k')$$

Se mostrará que U' tiene las propiedades requeridas, en efecto, primero considérese $g = g_i$ para algún $i \geq 1$. Si $p \in U' \subseteq g^{-1} W_1'$, entonces $g_i \cdot p \in W_i'$, el cual es distinto de W_i y por lo tanto de U'. Así $g(U') \cap U' = \emptyset$. Por otro lado, si $g \in G$ no es la identidad y no es alguno de los g_i, entonces para cualquier $p \in U' \subseteq U$, se tiene que $g \cdot p \in g(U')$, el cual es disjunto con V y por lo tanto también de U. Análogamente al contrario, de ésta manera queda mostrada (a.1).

(a.2) las órbitas de la acción son subvariedades de W.

En efecto, como G actúa propiamente discontinua sobre la variedad compleja W, podemos encontrar un atlas tal que si $q \in W$ y $g \in G$, $g \neq 1$, entonces $g(U_q) \cap U_q = \emptyset$ además que $G_p \cap U_q = \{p\}$ para cualquier $p \in U_q$. Luego $\rho : p \mapsto \hat{p} = G_p$ es inyectiva en U_q. Por definición de topología cociente ρ es una aplicación abierta en W, considere $U_{\tilde{q}} = \{\hat{p} : p \in U_q\}$ un abierto en W/G. Se tiene que un abierto del conjunto G_p será la intersección de éste con una carta de W/G; y como ρ aplica U_q homeomórficamente en $U_{\tilde{q}}$, la aplicación $z_j : \hat{p} \mapsto z_j(\hat{p})$ definida por $z_j(\hat{p}) = z_{q_j}(p)$ para $p \in U_q$ es un homeomorfismo de $U_{\tilde{q}}$ en $\mathbb{C}^n$, su restricción lo será también para G_p. Y en una vecindad lo suficientemente pequeña de la intersección de dos abiertos de $\hat{p}_0$, se tiene que $z_j(\hat{p}) \mapsto z_k(\hat{p})$ es un biholomorfismo, así forma un sistema coordenado para G_p, y de ésta manera (a.2) queda mostrado. □

Si G es propiamente discontinua, entonces cada órbita G_p es un subconjunto discreto de W. Veamos el siguiente ejemplo como ilustración:

Ejemplo 2.3. *Sea $M = S^1$ y sea la acción de G como potencias de una rotación irracional, es decir, la acción rota por $a/2\pi$ con a irracional. Esto es, se tiene la acción $(n, e^{2\pi it})$ a $e^{2\pi i(t+na/2\pi)}$. Esta acción es libre de puntos fijos, pero no es propiamente discontinua, en efecto considere el compacto $K = \{e^{2\pi it} \in S^1 : 0 \leq t \leq 1/4\}$, ahora hay infinitos $n \in \mathbb{Z}$ tales que $nK \cap K \neq \emptyset$*

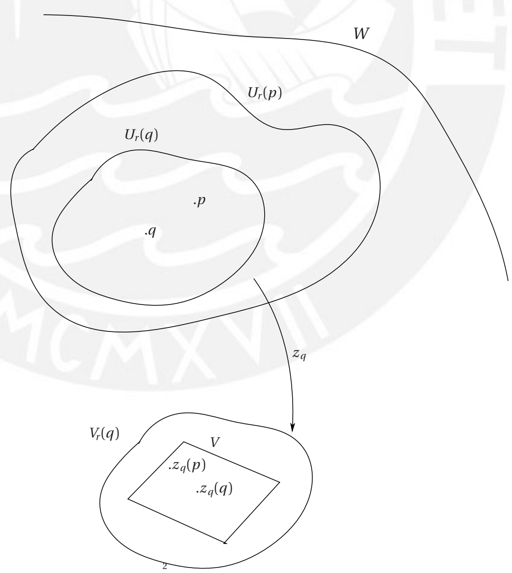
La acción propiamente discontinua obliga a la órbita G_p a ser un subconjunto discreto de M (para cualquier p). Sin embargo, hay acciones libres con órbitas discretas que no son propiamente discontinua.

Teorema 2.3. *Sea G un grupo de automorfismos de una variedad compleja W. Si la acción de G en W es propiamente discontinua y libre de puntos fijos entonces*

(a) las órbitas de la acción son subvariedades de W

(b) el espacio cociente W/G tiene la estructura canónica de una variedad compleja, inducida por W.

Demostración. Sólo se demuestrá la parte (b), porque la proposición (2.1) implica la primera parte del teorema.



Para cada $q \in W$, se considera un sistema de coordenadas $(z_q^1, \ldots, z_q^n)$ con centro en q y se elige $r > 0$ de modo que el polidisco

$$V = \{(z_q^1(p), \ldots, z_q^n(p)) : |z_q^k(p)| \leq r, k = 1, \ldots, n\}$$

esté contenido en el rango de $z_q(U_r(q))$. Con esto se define

$$U_r(q) = \{p : |z_q^1(p)| < r, \ldots, |z_q^n(p)| < r\}.$$

(i) Existe $r > 0$ tal que $g(U_r(q)) \cap U_r(q) = \emptyset$, para cualquier $g \in G$ distinto de la identidad.

En efecto, si (a.1) no es verdad existe $g_n \in G$, distinto de la identidad, tal que $g_n(U_n) \cap U_n \neq \emptyset$ donde $U_n = U_{r/n}(q)$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ luego se tiene que $g_n(U_1) \cap U_1 \neq \emptyset$ para cualquier n.
Como la clausura de U_1 es compacta y G es propiamente discontinua, entonces existen $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un subconjunto finito de G, y podemos encontrar un g_i, digamos, g_1 tal que $g_1(U_n) \cap U_n \neq \emptyset$ para un número infinito n. Por lo tanto $g_1(q) = q$, es decir que q es un punto fijo, pero eso contradice la hipótesis. En consecuencia para n suficientemente grande $g(U_n) \cap U_n = \emptyset$ para cualquier $g \in G$ distinto de la identidad. Entonces, escribimos simplemente r en vez de r/n y tenemos $g(U_r(q)) \cap U_r(q) = \emptyset$. Lo que prueba (a.1).

(ii) Existe $r > 0$ tal que $G_p \cap U_r(q) = \{p\}$ para todo $p \in U_r(q)$,

En efecto, por (a.1), se tiene que $g(U_r(q)) \cap U_r(q) = \emptyset$ para $g \in G$ distinto de la identidad, $g \neq 1$, entonces si se toma $r > 0$ lo suficientemente pequeño, $G_p \cap U_r(q) = \{p\}$ para cualquier $p \in U_r(q)$. Esto muestra (a.2).

Para el conjunto $U_r(q)$ dado en (a.2), la restricción de la proyección $\psi(p) = G_p$,

$$\psi| : U_r(q) \to W/G$$

es inyectiva. Más aún:

(iii) $\psi| : U_r(q) \to W/G$ es un homeomorfismo entre abiertos.

Por otro lado, el conjunto $V_r(G_q) = \{G_p : p \in U_r(q)\} \subset W/G$ es abierto; en efecto, tenemos que

$$\psi^{-1}(V_r(G_q)) = \{p \in W : \psi(p) \in V_r(G_q)\} = \{p \in W : G_p \subset V_r(G_p)\} = U_r(q)$$

se sigue que $V_r(G_q)$ es abierto en $\hat{W}$ (por definición de topología cociente). Entonces ψ aplica $U_r(q)$ homeomórficamente sobre $V_r(G_q)$ y esto muestra (a.3). Por tanto W/G es una variedad topológica.

(b) W/G tiene la estructura canónica de una variedad compleja, inducida por W.

Para cada punto $q \in W$, fijemos un polidisco coordenado $U_r(q)$ con $r = r(q)$ satisfaciendo las condiciones anteriores y escojamos polidiscos coordenados $U_j(q_j)$ con $0 < r_j \leq r(q_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, tal que $\{U_j(q_j) : j = 1, 2, \ldots\}$ forma un cubrimiento abierto localmente finito de W. Entonces $\hat{W}$ es cubierto por $\hat{U}_j = \{\hat{p} : p \in U_j(q_j)\}$. Luego como ψ aplica $U_j(q_j)$ homeomorficamente en $\hat{U}_j$, la aplicación $z_j : \hat{p} \mapsto z_j(\hat{p})$ definida por

$$z_j(\hat{p}) = z_{q_j}(p) \quad \text{para } p \in U_j(q_j)$$

es un homeomorfismo de $\hat{U}_j$ en $\mathbb{C}^n$. Veamos, el cambio de coordenadas, suponga $\hat{U}_j \cap \hat{U}_k \neq \emptyset$, y tomemos un punto arbitrario $\hat{p}_0 \in U_j(q_j) \cap U_k(q_k)$ con $p_0 \in U_j(q_j)$.

Entonces existe un único elemento $g \in G$ tal que $g(p_0) \in U_k(q_k)$, y en una vecindad pequeña de $\hat{p}_0$, tenemos

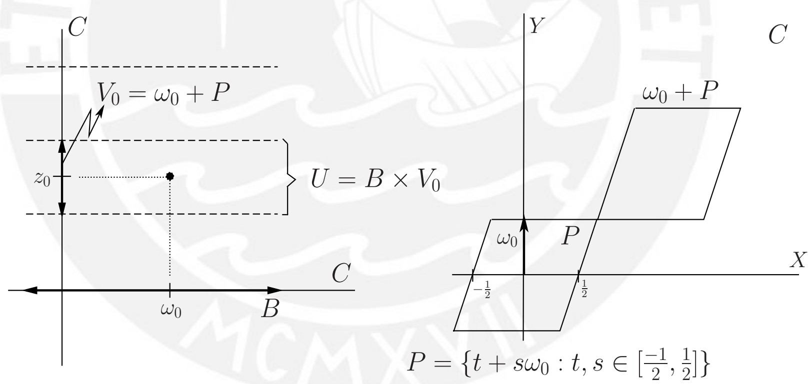
$$z_j(\hat{p}) = z_{q_j}(p), \qquad z_k(\hat{p}) = z_{q_k}(g(p)), \quad p \in U_j(q_j)$$

puesto que g es biholomorfa, la aplicación $z_j(\hat{p}) \mapsto z_k(\hat{p})$ también es biholomorfa. Así $\{z_1, z_2, \ldots\}$ forma un sistema de coordenadas complejas locales sobre $\hat{W}$, y define un a estructura compleja sobre $\hat{W}$. $\square$

2.2.1. El Toro Complejo

Ejemplo 2.4. *Dado el toro complejo, $T_\omega = \mathbb{C}/G$ donde G es el conjunto $G = \{n + m\omega / n, m \in \mathbb{Z}, Im(\omega) > 0\}$. Sea $B = \{\omega / Im(\omega) > 0\} \subset \mathbb{C}$ y sea $\mathscr{G} = \{g_{mn} : (\omega, z) \mapsto (\omega, z + m\omega + n) : m, n \in \mathbb{Z}, Im(\omega) > 0\}$ un grupo de transformaciones propiamente discontinuas y libre de puntos fijos en $B \times \mathbb{C}$, construimos $\mathscr{M} = (B \times \mathbb{C}) / \mathscr{G}$ una variedad compleja, de tal manera que $\{T_\omega : \omega \in B\}$ es una familia analítica compleja.*

Primero demostremos que $\mathscr{G}$ es propiamente discontinua, usando la equivalencia dada en la demostración de la proposición (2.1), para ello tomemos $(\omega_0, z_0) \in B \times \mathbb{C}$ (fijo), y $U \subset B \times \mathbb{C}$ un entorno abierto (y relativamente compacto) de (ω_0, z_0), de manera que podamos suponer, $\exists\, g \in \mathscr{G}$ tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$,



tomando a $U = B \times V_0$, donde $V_0 = \omega_0 + \mathcal{P}$ siendo $\mathcal{P}$ el plano en $\mathbb{C}$ definido como $\mathcal{P} = \{t + s\omega_0 : t, s \in [-1/2, 1/2]\}$, además que $(\omega_0, z_0) \in U$ y $g(\omega_0, z_0) \in U$, pero como se tiene que $g(\omega_0, z_0) = (\omega_0, z_0 + m\omega_0 + n)$, entonces haciendo m y n lo suficientemente grande se llega a una contradicción ya que U es relativamente compacto, es así que, haciendo variar $(\omega, z) \in B$ se cosigue que $\forall g \in \mathscr{G}$ distinto de la identidad, existe un entorno U de (ω, z) tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, por lo tanto $\mathscr{G}$ es propiamente discontinua.

Pasaremos a probar que $\mathscr{G}$ es libre de puntos fijos, es decir que para cualquier $g \in \mathscr{G}$ diferente de la identidad no tiene puntos fijos, suponga entonces que tiene al menos un punto fijo, sea $g \neq 1$ y tome $(\omega, z) \in B \times \mathbb{C} \Rightarrow g(\omega, z) = (\omega, z + m\omega + n) \Rightarrow (\omega, z) = (\omega, z + m\omega + n)$ de esto obtenemos que $0 = m\omega + n$ y se desprende dos casos: que $m \neq 0$ ó $m = 0$, si

$m \neq 0 \Rightarrow \omega = \frac{-n}{m} \Rightarrow Im(\omega) = Im(\frac{-n}{m}) = 0$ y si $m = 0 \Rightarrow n = 0$ en ambas hay contradicción.

De ahí tenemos que $(B \times \mathbb{C})/\mathscr{G}$ es una variedad compleja usando el teorema (2.3); se define la proyección $\pi : B \times \mathbb{C} \to B$ que induce la aplicación holomorfa $\varpi : \mathscr{M} \to B$, luego $\varpi^{-1}(\omega) = \{[\omega, z] : z \in \mathbb{C}\}$ y como $g_{mn}|_{\{\omega\}\times\mathbb{C}} : (\omega, z) \mapsto (\omega, n + mz)$, entonces $\varpi^{-1}(\omega) = \frac{\{\omega\}\times\mathbb{C}}{\{g_{mn}|_{\{\omega\}\times\mathbb{C}} : m,n\in\mathbb{Z}\}} = \frac{\mathbb{C}}{G} = T_\omega$, aún más, se puede ver que el rango del jacobiano de ϖ es igual a la dimensión compleja de B, es decir 1, concluyéndose así que $\{T_\omega : \omega \in B\}$ es una familia analítica compleja, bajo la notación anterior, $(\mathscr{M}, B, \varpi)$.

2.2.2. Curvas Elípticas

Ejemplo 2.5. *Sea* $\mathbb{H} = \{\omega \in \mathbb{C} : Im(\omega) > 0\}$ *semiplano superior complejo,* $\mathscr{G}=\{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : g\omega = \dfrac{a\omega + b}{c\omega + d},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z};\ ad - bc = 1\}$, *grupo de transformaciones actuando sobre* $\mathbb{H}$, *considere* $\{T_\omega : \omega \in \mathbb{H}\}$ *la familia analítica compleja (de curvas elípticas), siendo una vez más* $T_\omega = \mathbb{C}/G_\omega$, *y* $G_\omega = \{m\omega + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
Probaremos que $\mathscr{F}= \{\omega \in \mathbb{H} : |Re(\omega)| \leq 1/2\ \wedge\ |\omega| \geq 1\}$ *es un dominio fundamental de* $\mathscr{G}$ *y que dados* $\omega, \omega' \in \mathbb{H}$ *tal que* $\exists\ g \in \mathscr{G}$ *con* $\omega' = g(\omega)$ *entonces* $T_\omega = T_{\omega'}$ *biholomorficamente.*

Observamos que $\mathscr{G}$ identificado con $SL_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$ el grupo de transformaciones lineales fraccionarias que actúa sobre $\mathbb{H}$ por las transformaciones definidas, para $z \in \mathbb{C}$, como:

$$gz = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \wedge \qquad g\infty = a/c = \lim_{z\to\infty} gz \tag{2.9}$$

llamadas transformaciones fraccionarias sobre la esfera de Riemann $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o conocida también como la linea proyectiva compleja $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.
$\mathscr{F}$ es una región cerrada de $\mathbb{H}$ (por lo general, $\mathscr{F}$ también será simplemente conexa). Decimos que $\mathscr{F}$ es un "Dominio Fundamental"para el subgrupo $\mathscr{G}$ si todos los $z \in \mathbb{H}$, son $\mathscr{G}$-equivalentes a un punto en $\mathscr{F}$, pero no hay dos puntos distintos z_1, z_2 en el interior de $\mathscr{F}$ que sean $\mathscr{G}$ -equivalentes (sólo a dos puntos de los límites se les permite ser $\mathscr{G}$-equivalentes, esto significa que $\exists\ g \in \mathscr{G}$ tal que $z_2 = g\, z_1$).
Probemos entonces que $\mathscr{F}$ es un dominio fundamental de $\mathscr{G}$.
El grupo $\mathscr{G}$ contiene dos transformaciones lineales fraccionarias que actúan como generadores para todo el grupo

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \to z + 1 \qquad \wedge \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : z \to -1/z$$

Para probar que todo $z \in \mathbb{H}$ es $\mathscr{G}$-equivalente a un punto en $\mathscr{F}$, la idea es usar la traslación T^j para mover un punto z hacia el interior de la franja $-1/2 \leq |Re(z)| \leq 1/2$, si este cae fuera de círculo y fuera de $\mathscr{F}$. De otro modo, si cae dentro del círculo unitario, usamos S para lanzar el punto fuera del círculo unitario, entonces para ponerlo dentro de la franja usamos la traslación T^k, y continuar de esta manera hasta obtener un punto dentro de la franja y fuera del círculo unidad. Veamos una prueba más precisa.

Sea $z \in \mathbb{H}$ fijo, sea también $\Gamma' \subset \mathscr{G}$ subgrupo generado por S y T (pronto veremos que $\mathscr{G}=\pm\Gamma'$).
Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ entonces $Im(\gamma z) = \dfrac{Im(z)}{|cz+d|^2}$ en efecto,

$$\begin{aligned}
Im(\gamma z) &= Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = Im\left[\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}\right] \\
&= Im\left[\frac{(ac|z|^2+bd)+(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2}\right] \\
&= Im\left[\frac{(ac|z|^2+bd)}{|cz+d|^2}\right] + Im\left[\frac{(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2}\right] \\
Im(\gamma z) &= |cz+d|^{-2} Im(adz+bc\bar{z})
\end{aligned}$$

Por otro lado, considerando $z = x+iy$ obtenemos que la $Im(adz+bc\bar{z}) = Im[(ad+bc)x+i(ad-bc)y] = (ad-bc)y = 1.y = Im(z)$. Por lo tanto

$$Im(\gamma z) = |cz+d|^{-2} Im(z) \tag{2.10}$$

Ya que c y d son enteros, los números $|cz+d|^2$ se limitan de cero. (Generalmente, como c y d varían en todo los enteros, los números complejos $cz+d$ funcionan a través del enrejado generado por 1 y z, y existe un disco alrededor de cero que no contiene ningún punto del enrejado distinto de cero).
Así, existe algún $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ tal que $Im(\gamma z)$ es máximo.
Reemplazando γ por $T^j\gamma$ para un cierto j conveniente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que γz está en la franja $-1/2 \leq |Re(z)| \leq 1/2$. Pero luego, si γz no estaba en $\mathscr{F}$ i.e. si tenemos $|\gamma z| < 1$, entonces por (2.10), tendríamos

$$Im(S\gamma z) = Im\left(\frac{\gamma z}{|\gamma z|^2}\right) > Im(\gamma z)$$

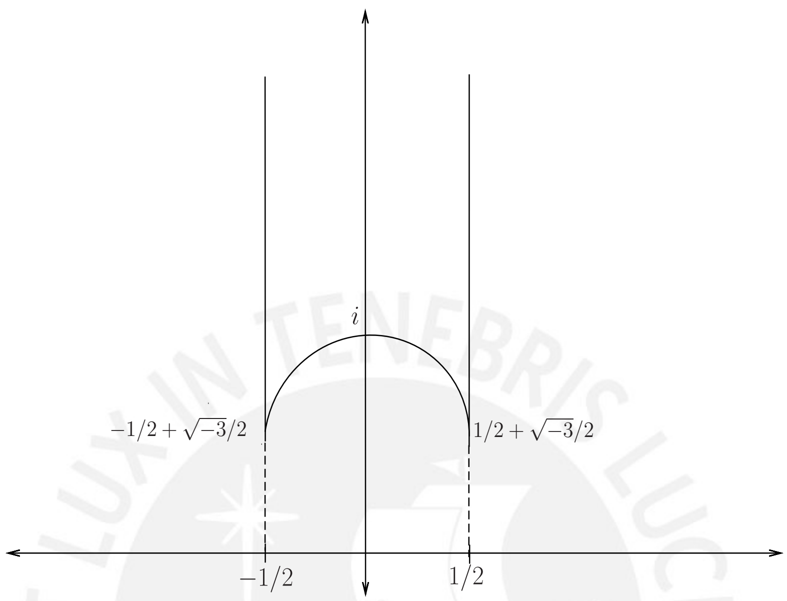
esto significa que $S\gamma z$ tiene una parte imaginaria estrictamente mayor que γz, lo que contradice la elección de $\gamma \in \Gamma'$ que $Im(\gamma z)$ sea máximo. Por lo tanto existe $\gamma \in \Gamma'$ tal que $\gamma z \in \mathscr{F}$.
Ahora probaremos que dos puntos en el interior de $\mathscr{F}$ no son $\mathscr{G}$-equivalentes (en realidad se prueba un resultado más preciso).
Suponga que si $z_1, z_2 \in \mathscr{F}$ son $\mathscr{G}$-equivalentes (no estamos suponiendo que z_1 y z_2 son necesariamente distintos o que se encuentran en el interior de $\mathscr{F}$). Sin pérdida de generalidad, supongamos $Im(z_2) \geq Im(z_1)$.
Sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{G}$ tal que $z_2 = \gamma z_1$, ya que la $Im(z_2) \geq Im(z_1)$, entonces por (2.10) tenemos $|cz_1+d| \leq 1$. Como z_1 está en $\mathscr{F}$ y d es entero, es fácil ver que esta desigualdad es imposible si $|c| \geq 2$. Dejando los siguientes casos:

(i) $c = 0$, $d = \pm 1$

(ii) $c = \pm 1$, $d = 0$ y z_1 está sobre el círculo unitario

(iii) $c = d = \pm 1$ y $z_1 = -1/2 + \sqrt{-3}/2$

(iv) $c = -d = \pm 1$ y $z_1 = 1/2 + \sqrt{-3}/2$



- En el caso (i), γ ó $-\gamma$ es una traslación T^j, pero tal γ puede llevar un punto de $\mathscr{F}$ en otro punto de $\mathscr{F}$ sólo si ésta es la identidad o si $j = \pm 1$ y los puntos están en las dos líneas de frontera vertical $Re(z) = \pm 1/2$.

- En el caso (ii) es fácil de ver que $\gamma = \pm T^a S$ con $a = 0$ y z_1, z_2 están sobre el círculo unitario (y situadas simétricamente respecto al eje imaginario) o con $a = \pm 1$ y $z_1 = z_2 = \pm 1/2 + \sqrt{-3}/2$.

- En el caso (iii) γ puede ser escrito como $\pm T^a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y si ésta aplicación lleva z_1 en z_2 en $\mathscr{F}$ tenemos $a = 0$ y $z_2 = z_1 = -1/2 + \sqrt{-3}/2$ o bien $a = 1$ y $z_2 = z_1 + 1 = 1/2 + \sqrt{-3}/2$.

- En el caso (iv) se maneja de la misma manera como en el caso (iii)

Así, se concluye que en ningún caso z_1, como z_2 pertenecen al interior de $\mathscr{F}$, a menos que $\pm\gamma$ sea la identidad y $z_2 = z_1$

Ahora queda demostrar que $T_w \cong T'_w$, basta con probar que $G_w = G'_w$. Sea

$G_w = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, $G'_w = \mathbb{Z}w'_1 + \mathbb{Z}w'_2$ y sea $z \in G'_w$, escribimos $z = nw'_1 + mw'_2$ para algún $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces existe $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{G}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

luego $w'_1 = aw_1 + bw_2$ y $w'_2 = cw_1 + dw_2$, así $z = nw'_1 + mw'_2 = n(aw_1 + bw_2) + m(cw_1 + dw_2) = (na + mc)w_1 + (nb + md)w_2$ por lo tanto $z \in G_w$ y tenemos $G'_w \subset G_w$. Probemos la otra inclusión, sea $z \in G_w$, escribimos $z = nw_1 + mw_2$ para algún $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces existe $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \mathscr{G}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix}$$

luego $z = nw_1 + mw_2 = n(dw'_1 - bw'_2) + m(aw'_2 - cw'_1) = (nd - mc)w'_1 + (ma - nb)w'_2$ por lo tanto $z \in G'_w$ así tenemos $G_w \subset G'_w$. Concluyendo que $G_w = G'_w$ y en consecuencia $T_w \cong T'_w$ lo que queríamos probar.

2.2.3. Superficie de Hopf

Ejemplo 2.6. *Una superficie de Hopf, M_t, es definida por $M_t = \dfrac{W}{G_t}$, siendo $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ y $G_t = \{g^n / n \in \mathbb{Z}\}$ donde $g : (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + tz_2, \alpha z_2)$, $0 < |\alpha| < 1$ y $t \in \mathbb{C}$. Entonces $M_t = \dfrac{W}{G_t}$ es una variedad compleja compacta.*

Demostración. Para probar que M_t sea una variedad compleja, primero probaremos que G_t actúa propiamente discontinua y libre de puntos fijos sobre W. Supongamos $g^n z = z$, $\forall\ z \in W$ y $\forall\ n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, y escribamos

$g = \begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $0 < |\alpha| < 1$ y $t \in \mathbb{C}$ entonces $g^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}t \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$, luego si $z = (z_1, z_2)$ tenemos $g^n z = (\alpha^n z_1 + n\alpha^{n-1}tz_2, \alpha^n z_2)$, como $z \in W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ y $g^n z = z$ entonces $\alpha^n = 1$ una contradicción ya que $0 < |\alpha| < 1$. Así decimos que G_t es libre de puntos de fijos.

Sean $K_1,\ K_2 \subset W$ cualquier conjuntos compactos, para decir que es propiamente discontinua, es suficiente probar que el siguiente conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} : g^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} = \{z \in W : z \in K_2 \wedge z = g^n z', z' \in K_1\}$$

sea finito o esté contenido en un conjunto finito. Entonces, podemos decir que existen constantes positivas c y d tal que $|\alpha| \leq c < 1$ y $|d| \leq d$.
Definamos una norma en $\mathbb{C}^2$ por $|z| = |(z_1, z_2)| = |z_1| + |z_2|$, entonces existen constantes positivas a y b tal que $a \leq |z| \leq b$, $\forall\ z \in K_2$.
Luego, $|g^n z| = |(\alpha^n z_1 + n\alpha^{n-1}tz_2, \alpha^n z_2)| \leq |\alpha|^n|z_1| + n|\alpha|^{n-1}|t||z_2| + |\alpha|^n|z_2|$ así tenemos $|g^n z| \leq (c^n + nc^{n-1}d + c^n)b \to 0$ cuando $n \to +\infty$, para algún n

positivo, por lo tanto $\exists\, N > 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $|g^n z| < a$, $\forall\, n \geq N$ y $\forall\, z \in K_2$.
Afirmamos que existe un entero positivo N' tal que $|g^{-n} z| > b$, para todo $n \geq N'$, $\forall\, g^n z \in g^n(K_1)$ y $\forall\, z \in K_2$.
Supongamos lo contrario, que existe una secuencia de puntos $\{g_\nu z_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots}$ de $g(K_1)$, para alguna secuencia $\{z_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots} \subset K_2$, y existe una secuencia de enteros $n_1 < n_2 < \cdots$, tal que $|g^{-n} z| \leq b$, para $\nu = 1, 2, \cdots$; ponemos $w_\nu = g_\nu^{-n_\nu} z_\nu$ entonces $z_\nu = g_\nu^{n_\nu} w_\nu$, con $\nu = 1, 2, \cdots$, y si $w_\nu = (w_\nu^1, w_\nu^2)$ y $g_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_\nu & t_\nu \\ 0 & \alpha_\nu \end{pmatrix}$ se tiene que, para $\nu = 1, 2, \cdots$

$$z_\nu = g_\nu^{n_\nu} w_\nu = (\alpha_\nu^{n_\nu} w_\nu^1 + n_\nu \alpha_\nu^{n-1} t_\nu w_\nu^2, \alpha_\nu^{n_\nu} w_\nu^2)$$

luego procediendo como antes

$$|z_\nu| \leq (c^{n_\nu} + n_\nu c^{n_\nu - 1} d + c^{n_\nu}) b \to 0$$

cuando $\nu \to +\infty$, contradiciendo que $\{z_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots} \subset K_2$. Por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{Z} / g^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \subset \{n \in \mathbb{Z} / -N' < n < N\}$$

Con esto concluimos que G_t es propiamente discontinua y libre de puntos fijos sobre W, así tenemos que M_t, por teorema 2.3, hereda la estructura canónica de una variedad compleja inducida por W. $\square$

Lema 2.1. *Siendo $M_t = W/G_t$ como antes, tenemos que $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$ es una familia analítica compleja.*

Demostración. Sea $\mathscr{M} = \{M_t : t \in \mathbb{C}\} = (W \times \mathbb{C})/G$, donde tenemos $G = \{g^n : n \in \mathbb{Z} \;\text{ y }\; g(z_1, z_2, t) = (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2, t)\}$. Luego, G es propiamente discontinua y libre de puntos fijos en $W \times \mathbb{C}$, para probarlo se procede como antes (en la superficie de Hopf), tomamos un conjunto compacto $K_1 \subset W$ y un conjunto compacto $K_2 \subset \mathbb{C}$ y se prueba que

$$\{n \in \mathbb{Z} : g^n(K_1 \times K_2) \cap (K_1 \times K_2) \neq \emptyset\}$$

i.e. $\{(z, t) \in W \times \mathbb{C} : (z, t) \in (K_1 \times K_2) \wedge (z, t) = g^n(z', t), z' \in K_1 \wedge t \in K_2\}$

sea un conjunto finito. Entonces tenemos que $\mathscr{M} = \frac{W \times \mathbb{C}}{G}$ es una variedad compleja. Así la proyección de $W \times \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ conmuta con g, induciendo una aplicación holomorfa ϖ de $\mathscr{M}$ en $\mathbb{C}$.
Es decir, se define la proyección $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que conmuta con g e induce la aplicación holomorfa $\varpi : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$, luego $\varpi^{-1}(t) = \{[z_1, z_2, t] : t \in \mathbb{C}\}$ entonces $\varpi^{-1}(t) = \frac{W \times \{t\}}{\{g|_{W \times \{t\}} : \alpha \in \mathbb{Z}\}} = \frac{W}{G_t} = M_t$, así $(\mathscr{M}, \mathbb{C}, \varpi)$ es una familia analítica compleja. Puede verse también que el rango de la matriz Jacobiano de ϖ es igual a 1. De esta manera $(\mathscr{M}, \mathbb{C}, \varpi)$ es una familia analítica compleja con $\varpi^{-1}(t) = W/G_t = M_t$. $\square$

Por otro lado, parece ser que la estructura compleja de M_t varía a medida que t varía en $\mathbb{C}$, pero no es cierto, veamos por qué?

Sea $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(\mathscr{M}_U, U, \varpi_U)$ la restricción de $(\mathscr{M}, \mathbb{C}, \varpi)$. Esto se deduce de inmediato de la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

En efecto, introduzcamos nuevas coordenadas $(w_1, w_2, t) = (z_1, tz_2, t)$ en $W \times U$. Entonces en términos de estas coordenadas, g es representado como

$$g : (w_1, w_2, t) \mapsto (\alpha w_1, \alpha w_2 + w_1, t)$$

En consecuencia $\mathscr{M}_U = (W \times U)/\mathscr{G} = W/G_1 \times U = M_1 \times U$, es así que $(\mathscr{M}_U, U, \varpi_U) = (M_1 \times U, U, \pi)$.
Por lo tanto M_t tiene la misma estructura compleja que M_1 para $t \neq 0$. Sin embargo, la estructura compleja de M_0 es diferente de M_t para $t \neq 0$. Para ver esto, consideremos un campo vectorial holomorfo sobre M_t, éste campo es inducido por un campo vectorial holomorfo G_t-invariante en W. En lo que sigue, escribiremos $z' = (z'_1, z'_2)$ en lugar de $(\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2, \alpha^m z_2)$ por simplicidad. Bajo esta notación tenemos

$$g_t^m : z = (z_1, z_2) \mapsto z' = (z'_1, z'_2)$$

Sea un campo vectorial holomorfo G_t-invariante en W,

$$v_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + v_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

donde $v_1(z)$ y $v_2(z)$ son funciones holomorfas en W. Donde

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \alpha^m \frac{\partial}{\partial z'_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial z_2} = m\alpha^{m-1}t\frac{\partial}{\partial z'_1} + \alpha^m \frac{\partial}{\partial z'_2},$$

luego el campo vectorial dado anteriormente es transformado por g_t^m en el campo vectorial

$$(\alpha^m v_1(z) + m\alpha^{m-1}tv_2(z))\frac{\partial}{\partial z'_1} + \alpha^m v_2(z)\frac{\partial}{\partial z'_2}$$

y como el campo dado es G_t-invariante, tenemos

$$\begin{array}{rcl} v_1(z') & = & \alpha^m v_1(z) + m\alpha^{m-1}tv_2(z) \\ v_2(z') & = & \alpha^m v_2(z) \end{array} \tag{2.11}$$

De acuerdo con el lema de Hartog, las funciones $v_1(z_1, z_2)$ y $v_2(z_1, z_2)$ sobre W son extendidas a funciones holomorfas en todo $\mathbb{C}^2$.
Por lo tanto asumimos que $v_1(z_1, z_2)$ y $v_2(z_1, z_2)$ son holomorfas en todo $\mathbb{C}^2$. De la ecuación (2.11), tenemos

$$v_2(z_1, z_2) = \frac{1}{\alpha^m} v_2(\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2, \alpha^m z_2)$$

En consecuencia, dado que $0 <\mid \alpha \mid< 1$, dejando

$$v_2(z_1,z_2)=\sum_{h,k=0}^{+\infty} c_{hk} z_1^h z_2^k$$

la expansión en serie de potencias de $v_2(z_1,z_2)$, tenemos

$$\begin{aligned} v_2(z_1,z_2) &= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\alpha^m}\sum_{h,k} c_{h,k}(a^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2)^h(\alpha^m z_2)^k \\ &= \lim_{m\to+\infty}\Big(\frac{c_{00}}{\alpha^m} + c_{10}z_1 + \frac{mt}{\alpha}c_{10}z_2 + c_{01}z_2\Big) \end{aligned}$$

Con el fin de que este límite pueda existir para cualquier z_1, z_2, debe ser c_{00} cero, y, si $t \neq 0$, c_{10} debe ser también cero. Por lo tanto tenemos

$$v_(z_1,z_2) = c_{10}z_1 + c_{01}z_2$$

donde $c_{10} = 0$ si $t \neq 0$. Así

$$v_1(z_1,z_2)=\sum_{h,k=0}^{+\infty} b_{hk} z_1^h z_2^k$$

Entonces por la ecuación (2.11) tenemos

$$\begin{aligned} v_1(z_1,z_2) &= \lim_{m\to+\infty}\Big(\frac{1}{\alpha^m}v_1(\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2, \alpha^m z_2) - \frac{mt}{\alpha}v_2(z_1,z_2)\Big) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\Big(\frac{b_{00}}{\alpha^m} + b_{10}z_1 + \frac{mt}{\alpha}b_{10}z_2 + b_{01}z_2 - \frac{mt}{\alpha}(c_{10}z_1 + c_{01}z_2)\Big) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\Big(\frac{b_{00}}{\alpha^m} + \big[b_{10} - \frac{mt}{\alpha}c_{10}\big]z_1 + \frac{mt}{\alpha}\big[b_{10} - c_{01}\big]z_2 + b_{01}z_2\Big) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos $b_{00} = 0$, y, si $t \neq 0$, también tenemos $b_{10} = c_{01}$. Por eso

$$v_1(z_1,z_2) = b_{10}z_1 + b_{01}z_2$$

sostiene que $b_{10} = c_{01}$ si $t \neq 0$.
En resumen, si ponemos $c_1 = b_{10}$, $c_2 = b_{01}$, $c_3 = c_{10}$ y $c_4 = c_{01}$, un campo vectorial holomorfo en M_0 es dado por

$$c_1 z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + c_2 z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + c_3 z_1\frac{\partial}{\partial z_2} + c_4 z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

mientras que un campo vectorial holomorfo sobre M_t, con $t \neq 0$ es dado por

$$c_1\Big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\Big) + c_2 z_2\frac{\partial}{\partial z_1}$$

Por tanto hay cuatro campos vectoriales holomorfos linealmente independientes sobre M_0, mientras que sobre M_t con $t \neq 0$, sólo hay dos tipos. Es así que M_0 tiene una estructura compleja diferente a M_t con $t \neq 0$. Así, la estructura compleja de M_t da "saltos" en $t = 0$.

2.2.4. Superficie de Hirzebruch

Ver [17].

Ejemplo 2.7. *Escribamos* $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *como* $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$ *donde* $U_1 = \mathbb{C}$ *y* $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$. *Sea* $\tilde{M}_m = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$ *donde* $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ *y* $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ *son el mismo punto en* $\tilde{M}_m$ *si cumple que*

$$z_1 z_2 = 1 \quad y \quad \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 \tag{2.12}$$

Ahora, fijemos un número natural $k \leq m/2$ *y considere el siguiente conjunto algebraico*

$$\mathscr{M} = \{([x_0 : x_1], [y_0 : y_1 : y_2], t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} / x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + t x_0^{m-k} x_1^k y_2 = 0\}$$

denotando $x = [x_0 : x_1]$, $y = [y_0 : y_1 : y_2]$, *demostremos que* $\mathscr{M}$ *es una variedad compleja compacta, para ello definamos la aplicación* p *como*

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, y, t) & \longmapsto & p(x, y, t) = x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + t x_0^{m-k} x_1^k y_2. \end{array}$$

Como $p^{-1}(0) = \mathscr{M}$, *basta probar que* p *es una sumersión sobre* $\mathscr{M}$, *es decir que 0 sea un valor regular de* p *en cada abierto. Considere el cubrimiento usual para* $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ *y* $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ *y denote* $U_{jk} = U_j \times U_k \times \mathbb{C}$ *para* $j = 0, 1$ *y* $k = 0, 1, 2$, *donde* $\mathscr{M} = \bigcup (U_{jk} \cap \mathscr{M})$, *así se tiene:*

1. *En* U_{00}, *hacemos* $x_0 = 1$ *y* $y_0 = 1$, *luego* $p(x, y, t) = y_1 - x_1^m + t x_1^k y_2$, *hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_0} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial y_1} = 1, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = -m x_1^{m-1} + k t x_1^{k-1} y_2, & \dfrac{\partial p}{\partial y_2} = t x_1^k, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y_0} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial t} = x_1^k y_2. \end{cases}$$

   Como $\dfrac{\partial p}{\partial y_1} \neq 0$ *entonces 0 es un valor regular de* p *en* U_{00}.

2. *En* U_{01}, *hacemos* $x_0 = 1$ *y* $y_1 = 1$, *luego* $p(x, y, t) = 1 - x_1^m y_0 + t x_1^k y_2$, *hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_0} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial y_1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = -m x_1^{m-1} y_0 + t k x_1^{k-1} y_2, & \dfrac{\partial p}{\partial y_2} = t x_1^k, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y_0} = -x_1^m, & \dfrac{\partial p}{\partial t} = x_1^k y_2. \end{cases}$$

Para garantizar que amenos una derivada parcial sea distinta de cero, veremos si el conjunto de singularidades en U_{01} no intercepta $\mathscr{M}$, se tiene que $Sing(p)|_{U_{01}} = \{((1,0),(y_0,1,y_2),t)/t, y_0, y_2 \in \mathbb{C}\}$ y se comprueba que sus puntos no satisface la ecuación $x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + t x_0^{m-k} x_1^k y_2 = 0$ entonces no está en $\mathscr{M}$, que significa existe alguna derivada parcial diferente de 0, por tanto éste es un valor regular de p en U_{01}.

3. *En U_{02}, hacemos $x_0 = 1$ y $y_2 = 1$, luego $p(x,y,t) = y_1 - x_1^m y_0 + t x_1^k$, hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_0} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial y_1} = 1, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = -m x_1^{m-1} + t k x_1^{k-1}, & \dfrac{\partial p}{\partial y_2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y_0} = -x_1^m, & \dfrac{\partial p}{\partial t} = x_1^k. \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial p}{\partial y_1} \neq 0$ entonces 0 es un valor regular de p en U_{02}.

4. *En U_{10}, hacemos $x_1 = 1$ y $y_0 = 1$, luego $p(x,y,t) = x_0^m y_1 - 1 + t x_0^{m-k} y_2$, hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_0} = m x_0^{m-1} y_1 + t(m-k) x_0^{(m-k)-1} y_2, & \dfrac{\partial p}{\partial y_1} = x_0^m, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial y_2} = t x_0^{m-k}, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y_0} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial t} = x_0^{m-k} y_2. \end{cases}$$

Analizando como antes, $Sing(p)|_{U_{10}} = \{((0,1),(1,y_1,y_2),t)/t, y_1, y_2 \in \mathbb{C}\}$, sus puntos no satisface la ecuación $x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + t x_0^{m-k} x_1^k y_2 = 0$ entonces no está en $\mathscr{M}$, que significa existe alguna derivada parcial diferente de 0, por tanto éste es un valor regular de p en U_{10}.

5. *En U_{11}, hacemos $x_1 = 1$ y $y_1 = 1$, luego $p(x,y,t) = x_0^m - y_0 + t x_0^{m-k} y_2$, hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_0} = m x_0^{m-1} + t(m-k) x_0^{(m-k)-1} y_2, & \dfrac{\partial p}{\partial y_1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial y_2} = t x_0^{m-k}, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y_0} = -1, & \dfrac{\partial p}{\partial t} = x_0^{m-k} y_2. \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial p}{\partial y_0} \neq 0$ *entonces 0 es un valor regular de* p *en* U_{11}.

6. *En* U_{12}, *hacemos* $x_1 = 1$ *y* $y_2 = 1$, *luego* $p(x,y,t) = x_0^m y_1 - y_0 + t x_0^{m-k}$, *hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_0} = m x_0^{m-1} y_1 + t(m-k) x_0^{(m-k)-1}, & \dfrac{\partial p}{\partial y_1} = x_0^m, \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial y_2} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y_0} = -1, & \dfrac{\partial p}{\partial t} = x_0^{m-k}. \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial p}{\partial y_0} \neq 0$ *entonces 0 es un valor regular de* p *en* U_{12}.

Finalmente, queda demostrado que $\mathscr{M}$ *es una variedad compleja compacta, considere la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varpi: & \mathscr{M} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,y,t) & \longmapsto & t \end{array}$$

Dado que $\mathscr{M}$ *es una variedad y* ϖ *es una sumersión, se tiene que* $\varpi^{-1}(t) = M_t$ *son subvariedades holomorfas de* $\mathscr{M}$, *por tanto se concluye que la variedad* $\mathscr{M} = \{M_t \,/\, t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}$ *es una familia analítica compleja.*

Visto de otra manera, fijando un número natural $k \leq m/2$, podemos describir M_t como

$$M_t = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$$

donde $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ y $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ son el mismo punto de M_t si

$$z_1 z_2 = 1 \quad \text{y} \quad \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 + t z_2^k \tag{2.13}$$

Para $t = 0$, tenemos que $M_0 = \tilde{M}_m$ ya que en este caso la ecuación (2.13) se convierte en la ecuación (2.12).
Para $t \neq 0$, introducimos en M_t las siguientes coordenadas (z_i, ζ_i') en $U_i \times \mathbb{P}^1$, siendo $i = 1, 2$ como sigue

$$\begin{aligned} (z_1, \zeta_1') &= \left(z_1, \frac{z_1^k \zeta_1 - t}{t \zeta_1} \right) \\ (z_2, \zeta_2') &= \left(z_2, \frac{\zeta_2}{t z_2^{m-k} \zeta_2 + t^2} \right) \end{aligned}$$

Dado que los factores determinantes obtenidos por los coeficientes de las siguientes transformaciones lineales

$$\zeta_1' = \frac{z_1^k \zeta_1 - t}{t \zeta_1} \qquad \wedge \qquad \zeta_2' = \frac{\zeta_2}{t z_2^{m-k} \zeta_2 + t^2}$$

son dados por

$$\begin{vmatrix} z_1^k & -t \\ t & 0 \end{vmatrix} = t^2 \neq 0 \qquad \wedge \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t z_2^{m-k}\zeta_2 + t^2 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 \neq 0$$

respectivamente, (z_i, ζ_i') realmente definen las coordenadas de $U_i \times \mathbb{P}^1$. Luego por la ecuación (2.7) tenemos

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= \frac{z_1^k\zeta_1 - t}{t\zeta_1} = \frac{z_1^k(z_2^m\zeta_2 + tz_2^k) - t}{t(z_2^m\zeta_2 + tz_2^k)} \\ &= \frac{z_2^{m-k}\zeta_2}{tz_2^m\zeta_2 + t^2 z_2^k} = z_2^{m-2k}\frac{\zeta_2}{tz_2^{m-k} + t^2} = z_2^{m-2k}\zeta_2' \end{aligned}$$

De manera que, en términos de estas nuevas coordenadas, la relación (2.13) es dado por

$$z_1 z_2 = 1 \quad \text{y} \quad \zeta_1' = z_2^{m-2k}\zeta_2'$$

por lo tanto, $M_t = \tilde{M}_{m-2k}$.

Así, para cualquier número natural $k \leq m/2$, $\tilde{M}_m$ es una deformación de $\tilde{M}_{m-2k}$. Por lo tanto, poniendo $k = m/2$ si m es par, y $k = m/2 - 1/2$ si m es impar, vemos que $\tilde{M}_m$ es una deformación de $\tilde{M}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si m es par, y una deformación de $\tilde{M}_1$ si m es impar. Por tanto, por el teorema (2.2), $\tilde{M}_m$ es difeomorfo a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si m es par y a $\tilde{M}_1$ si m es impar.
De este modo $\tilde{M}_m$ y $\tilde{M}_n$ son difeomorfos si $m \equiv n(mod\ 2)$, pero no son biholomorfos si $m \neq n$. En consecuencia, en la familia $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$ descrita anteriormente, $M_t = \tilde{M}_{m-2k}$ no cambia su estructura compleja para todo $t \neq 0$, y la estructura compleja de M_t pasa a ser $M_0 = \tilde{M}_m$ en $t = 0$.
Luego se demuestra, que $\tilde{M}_m$ no es biholomorfo a $\tilde{M}_n$ si $m \neq n$, calculando el número de campos vectoriales linealmente independientes en ellos.
Para ello, consideremos primero campos vectoriales holomorfos sobre $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$. Un campo vectorial holomorfo sobre $\mathbb{P}^1$ es representado como $v_1(z_1)(\frac{d}{dz_1})$ sobre U_1, $v_2(z_2)(\frac{d}{dz_2})$ sobre U_2, donde $v_i(z_i)$ son funciones enteras de z_i sobre U_i para $i = 1, 2$. Sobre $U_1 \cap U_2$, deben coincidir:

$$v_1(z_1)\Big(\frac{d}{dz_1}\Big) = v_2(z_2)\Big(\frac{d}{dz_2}\Big) \tag{2.14}$$

ya que $z_1 = 1/z_2$, tenemos

$$\frac{d}{dz_2} = \frac{dz_1}{dz_2}\frac{d}{dz_1} = -\frac{1}{z_2^2}\frac{d}{dz_1} = -z_1^2\frac{d}{dz_1}.$$

Luego, sustituyendo ésta expresión en la ecuación (2.14), se obtiene

$$v_1(z_1) = -z_1^2 v_2 \frac{1}{z_1}.$$

Por tanto, poniendo

$$v_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n} z_1^n \quad \text{y} \quad v_2(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z_2^n,$$

tenemos

$$c_{10} + c_{11}z_1 + c_{12}z_1^2 + \cdots = -c_{20}z_1^2 - c_{21}z_1 - c_{22} - \cdots .$$

Por lo tanto $v_1(z_1)$ debe ser una cuadrática $az_1^2 + bz_1 + c$ en z_1 :

$$v_1(z_1)\frac{d}{dz_1} = (az_1^2 + bz_1 + c)\frac{d}{dz_1} \tag{2.15}$$

donde la función holomorfa sobre $\mathbb{P}^1$ es constante, y el campo vectorial holomorfo sobre $\tilde{M}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es dado por

$$(az_1^2 + bz_1 + c)\frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_1\zeta_1^2 + \beta_1\zeta_1 + \gamma_1)\frac{\partial}{\partial \zeta_1}.$$

Por consiguiente existe 6 campos vectoriales sobre $\tilde{M}_0$ linealmente independientes.
A continuación, considere un campo vectorial holomorfo sobre $\tilde{M}_m = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$, $m \geq 1$. A partir de la ecuación (2.15) un campo vectorial holomorfo sobre $U_1 \times \mathbb{P}^1$ tiene la forma

$$v_1(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_1(z_1)\zeta_1^2 + \beta_1(z_1)\zeta_1 + \gamma_1(z_1))\frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \tag{2.16}$$

donde $v_1(z_1)$, $\alpha_1(z_1)$, $\beta_1(z_1)$, $\gamma_1(z_1)$ son funciones enteras de z_1. Similarmente un campo vectorial holomorfo sobre $U_2 \times \mathbb{P}^1$ es dado por

$$v_2(z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + (\alpha_2(z_2)\zeta_2^2 + \beta_2(z_2)\zeta_2 + \gamma_2(z_2))\frac{\partial}{\partial \zeta_2}, \tag{2.17}$$

donde $v_2(z_2)$, $\alpha_2(z_2)$, $\beta_2(z_2)$, $\gamma_2(z_2)$ son funciones enteras sobre z_2.

Para un campo vectorial holomorfo sobre $\tilde{M}_m$ que tiene la forma de la ecuación (2.16) sobre $U_1 \times \mathbb{P}^1$, y la forma de (2.17) sobre $U_2 \times \mathbb{P}^1$, se tiene

$$\begin{aligned} & v_1(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_1(z_1)\zeta_1^2 + \beta_1(z_1)\zeta_1 + \gamma_1(z_1))\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ &= v_2(z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + (\alpha_2(z_2)\zeta_2^2 + \beta_2(z_2)\zeta_2 + \gamma_2(z_2))\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

sobre $U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$. Como $z_1 = 1/z_2$ y $\zeta_1 = z_2^m\zeta_2$ por ecuación (2.12), se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_2} = -\dfrac{1}{z_2^2}\dfrac{\partial}{\partial z_1} + mz_2^{m-1}\zeta_2\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1} = -z_1^2\dfrac{\partial}{\partial z_1} + mz_1\zeta_1\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta_2} = z_2^m\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1} = \dfrac{1}{z_1^m}\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}. \end{cases}$$

Sustituyendo éste resultado en el lado derecho de la ecuación (2.18), y comparando los coeficientes, se tiene

$$\begin{cases} v_1(z_1) = -z_1^2 v_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big), \\ \alpha_1(z_1) = -z_1^m \alpha_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big), \\ \beta_1(z_1) = m z_1 v_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big) + \beta_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big), \\ \gamma_1(z_1) = \dfrac{1}{z_1^m}\gamma_2\Big(\dfrac{1}{z_2}\Big). \end{cases}$$

A partir de éstas igualdades, tenemos $v_1(z_1) = az_1^2 + bz_1 + c$, $\alpha_1(z_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k z_1^k$, $\beta_1(z_1) = maz_1 + d$, y $\gamma_1(z_1) = 0$. Por lo tanto sobre $\tilde{M}_m$ con $m \geq 1$, tenemos $(m+5)$ campos vectoriales linealmente independientes correspondiente a las constantes arbitrarias a, b, c, c_0, $c_1, \ldots, c_m$ y d dadas antes.

Así, el número de campos vectoriales holomorfos linealmente independientes sobre $\tilde{M}_m$ es 6 para $m = 0$, y $(m+5)$ para $m \geq 1$. De ahí, si $m \equiv n(\text{mod}2)$, y $m \neq n$, $\tilde{M}_m$ y $\tilde{M}_n$ no son biholomorfos.

Capítulo 3

Deformación Infinitesimal

No importa si el andar es lento.
La persona que avanza firmemente, paso a paso,
en dirección hacia sus metas, es una auténtica triunfadora.
Daisaku Ikeda.

3.1. Familia Diferenciable de Variedades Complejas Compactas

La definición de familia diferenciable C^∞ de variedades complejas compactas es análoga a la definición de una familia analítica compleja dada en el capítulo anterior $\{M_t : t \in B\} :=(\mathscr{M},B,\varpi)$. A continuación veamos un ejemplo y la definición más precisa de familia diferenciable.

Ejemplo 3.1 (Familia Diferenciable de Anillos Complejos). *Sea $B =]0,1[\subset \mathbb{R}$ y sea el conjunto $\mathscr{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 < x < 1, x^2 < y^2 + z^2 < 1\}$. Digamos que $\varpi : \mathscr{M} \to B$ es simplemente la restricción de la proyección $p_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en la primera coordenada. Luego*

$$\varpi^{-1}(x_0) = \Delta_{x_0} := \{w \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = p_x^{-1}(x_0); x_0^2 < |w| < 1\}$$

es un anillo complejo para cada $x_0 \in B$, donde $w = y + (\sqrt{-1})z$. Entonces se tiene que $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es una familia diferenciable de anillos complejos, donde a esta familia diferenciable se le ve sólo como una familia de variedades complejas conexas.

Sea $\mathscr{M}$ una variedad diferenciable, B un dominio de $\mathbb{R}^m$, y ϖ un aplicación C^∞ de $\mathscr{M}$ en B. Suponga que el rango de la matriz jacobiano de ϖ es igual a m en cada punto de $\mathscr{M}$. Entonces, escogemos un sistema C^∞ de coordenadas locales $\{z_1, \ldots, x_j, \ldots\}$, $x_j : p \mapsto x_j(p)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $x_j(p) = (x_j^1(p), \ldots, x_j^\nu(p), t_1, \ldots, t_m)$, donde $(t_1, \ldots, t_m) = \varpi(p)$

(ii) $\{\mathscr{U}_j\}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de $\mathscr{M}$ donde $\mathscr{U}_j$ es el dominio de x_j

Por lo tanto para cada punto $t \in B$, si $\varpi^{-1}(t)$ es conexa, $\varpi^{-1}(t)$ es una variedad diferenciable cuyo sistema C^∞ de coordenadas locales está dado de la siguiente manera

$$\{p \mapsto (x_j^1(p), \ldots, x_j^\nu(p)) : \ \mathscr{U}_j \cap \varpi^{-1}(t) \neq \emptyset\}$$

Por otra parte, si $\varpi^{-1}(t)$ es compacta, teniendo para cada $t_0 \in B$ un multi-intervalo abierto I tal que $t_0 \in I \subset \overline{I} \subset B$, decimos por el teorema (2.1) que $\varpi^{-1}(I) = \varpi^{-1}(t_0) \times I$.

Definición 3.1 (Familia Diferenciable de Variedades Complejas Compactas)**.** *Suponga que dado una variedad compleja $M_t = M_t^n$ para cada punto t de un dominio $B \subset \mathbb{R}^m$; $\{M_t : t \in B\}$ es llamado una familia diferenciable de variedades complejas compactas, si existe una variedad diferenciable $\mathscr{M}$ y una aplicación sobreyectiva C^∞, ϖ de $\mathscr{M}$ en B satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(i) El rango de la matriz jacobiano de ϖ es igual a m en cada punto de $\mathscr{M}$.

(ii) Para cada $t \in B$, $\varpi^{-1}(t)$ es una variedad conexa subconjunto de $\mathscr{M}$.

(iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$.

(iv) Existe un cubrimiento abierto localmente finito $\{\mathscr{U}_j : j = 1, 2, \ldots\}$ de $\mathscr{M}$ y funciones C^∞ complejas-valuadas $z_j^1(p), \ldots, z_j^n(p)$ definidas en $\mathscr{U}_j$ tal que para cada t

$$\{p \mapsto (z_j^1(p), \ldots, z_j^n(p) : \mathscr{U}_j \cap \varpi^{-1}(t) \neq \emptyset\}$$

forma un sistema de coordenadas locales complejas de M_t.

Observación sobre la definición de Familia Diferenciable

Sea η la dimensión de $\mathscr{M}$ como variedad diferenciable real. Entonces la condición (i) en la definición anterior asegura (por el teorema de la Función Implícita) que la fibra $\varpi^{-1}(t)$, es una subvariedad diferenciable real de $\mathscr{M}$ de dimensión $\eta - m$ para cada $t \in B$, y la condición (ii) asegura que las fibras son variedades complejas compactas, de manera que podemos reducir estas dos condiciones a que ϖ sea una sumersión y una aplicación propia. El requerimiento (iii) es que, para cada $t \in B$, la subvariedad diferenciable real compacta conexa $\varpi^{-1}(t)$ de $\mathscr{M}$ admite una estructura compleja de manera que sea una variedad compleja de dimensión n biholomorfa a la variedad compleja M_t prescrita anteriormente. Por lo tanto, $\eta - m = 2n$.
Al utilizar el teorema de la Función Implícita, podemos obtener un sistema de coordenadas locales C^∞, $\{(\mathscr{U}_j, x_j)\}$ donde $\{\mathscr{U}_j\}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de $\mathscr{M}$ y $x_j : \mathscr{U}_j \to \mathbb{R}^\eta$ es la aplicación coordenada dada por

$$x_j(p) = (x_j^1(p), \ldots, x_j^{2n}(p), t_1, \ldots, t_m)$$

donde $\varpi(p) = (t_1, \ldots, t_m) = t \in B \subset \mathbb{R}^m$. De hecho, cada x_j en realidad aplica $\mathscr{U}_j$ en la variedad producto $\mathbb{R}^{2n} \times B \subset \mathbb{R}^\eta$. Es más, $\varpi^{-1}(t)$ como variedad diferenciable real tiene un sistema local de coordenadas C^∞ dado por el cubrimiento abierto $\{\mathscr{U}_j \cap \varpi^{-1}(t)\}$ con las aplicaciones C^∞ en cada intersección no vacía $\mathscr{U}_j \cap \varpi^{-1}(t) \neq \emptyset$ dado por $p \mapsto (x_j^1(p), \ldots, x_j^{2n}(p))$. Ahora el propósito de la condición (iv) es relacionar las coordenadas, $\{x_j^\alpha\}$ con $1 \leq \alpha \leq 2n$, de la estructura compleja de $\varpi^{-1}(t)$ a M_t en el siguiente sentido: si ponemos $z_j^\alpha = x_j^{2\alpha-1} + (\sqrt{-1}x_j^{2\alpha})$ donde $1 \leq \alpha \leq n$ siendo estas, funciones complejas C^∞ de $\mathscr{U}_j$ en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$; el requerimiento es que (para una elección adecuada del sistema coordenado C^∞ en $\mathscr{M}$), la aplicación

$$p \mapsto (z_j^1(p), \ldots, z_j^n(p)), \quad p \in \varpi^{-1}(t)$$

sirva como coordenadas complejas de una estructura compleja en $\varpi^{-1}(t)$ isomorfa a M_t.

3.1.1. Equivalencia de Familias Diferenciables

Suponga que $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ y $(\mathscr{N}, B, \varphi)$ son dos familias diferenciables de variedades complejas compactas con el mismo espacio base B. Se dice que son equivalentes (diferenciables) si existe un difeomorfismo $\Phi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ tal que para cada $t \in B$, Φ aplica $M_t = \varpi^{-1}(t)$ biholomorficamente en $N_t = \varphi^{-1}(t)$.

3.1.2. Familia Diferenciable Localmente Trivial

Sea la familia diferenciable $(M \times B, B, p)$ donde M es una variedad compleja compacta, B es una variedad diferenciable conexa, $M \times B$ denota el producto de variedades diferenciables y p es sólo la proyección sobre en el segundo factor de este producto, esto es un ejemplo de una familia diferenciable trivial. Mas generalmente podemos decir que una **familia diferenciable** con espacio base B es **trivial** si ésta es equivalente a la familia diferenciable $(M \times B, B, p)$ para algunas variedades complejas compactas M. Si esto sucede está claro que todas sus fibras (como variedades complejas) son biholomorfas a M.

Definición 3.2. *Una familia diferenciable $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es llamada trivial si ésta es equivalente a $(M \times B, B, p)$ donde $M = \varpi^{-1}(t_0)$ con $t_0 \in B$.*

Definición 3.3. *Una familia diferenciable $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es llamada localmente trivial, si para cada $t \in B$, existe un dominio $I \subset B$ conteniendo a t de manera que la restricción de $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ a I es trivial, en el sentido de la definición anterior.*

3.2. Familia Diferenciable Inducida: Cambio de Parámetro

Suponga $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es una familia diferenciable de variedades complejas conexas compactas. Sea $h : D \to B$ una aplicación holomorfa de variedades complejas conexas. Defina el producto de fibras

$$\mathscr{M} \times_B D = \{(m, s) \in \mathscr{M} \times D; \varpi(m) = h(s)\}$$

y considere la imagen del producto de fibras bajo la aplicación canónica

$$\varpi \times 1_D : \mathscr{M} \times D \to B \times D$$

dada por $(p, s) \mapsto (t, s) = (\varpi(p), s)$, donde 1_D denota la aplicación identidad en D. La imagen es la gráfica

$$G_h = \{(h(s), s) \in B \times D : s \in D\}$$

de la aplicación h. Ahora G_h es, naturalmente, una subvariedad compleja de $B \times D$ y es biholomorfa a D via la segunda proyección p desde la variedad producto compleja $B \times D$.

Dado que ϖ es una aplicación holomorfa de rango máximo, por lo que también lo es la aplicación $\varpi \times 1_D$.

Por lo tanto, por el teorema de la Función Implícita, la imagen inversa del gráfico de h bajo esta última aplicación adquiere naturalmente la estructura de una subvariedad compleja de $\mathscr{M} \times B$; pero esta imagen inversa es precisamente el producto de fibras.

Por eso, el producto de fibras se convierte, de una manera natural, en el espacio de deformación de una familia analítica compleja

$$(\mathscr{M} \times_B D, D, p \circ (\varpi \times 1_D)).$$

Esta familia analítica compleja tiene espacio de parámetros D y es llamado la familia inducida de $\mathscr{M}$ via h o el pullback de la familia $\mathscr{M}$ por h y es denotada por simplicidad como $(h^*\mathscr{M}, D, h^*\varpi)$, donde $h^*\mathscr{M} = \mathscr{M} \times_B D$ y $h^*\varpi = p \circ (\varpi \times 1_D)$.

Note que para cada $s \in D$, la variedad compleja $(h^*\varpi)^{-1}(s)$ es biholomorfa a $M_{h(s)} = \varpi^{-1}(h(s))$. En consecuencia, la familia inducida $\{M_{h(s)} : s \in D\}$ puede ser pensado como una familia obtenida de $\{M_t : t \in B\}$ por el cambio de parámetro de $t \in B$ a $s \in D$ via la aplicación h con $h(s) = t$.

Está claro que si $f : E \to D$ es una aplicación de variedades complejas conexas, entonces la familia compleja analítica en E inducida por la aplicación compuesta $h \circ f$ de la familia $\mathscr{M}$ en B puede ser canónicamente identificado con la familia analítica compleja inducida por la aplicación f de la familia $h^*\mathscr{M}$ en D. En particular si h es un difeomorfismo se tiene que $(h^*\mathscr{M}, D, h^*\varpi)$ es equivalente a $(\mathscr{M}, B, \varpi)$. Además que el pullback de una familia trivial es también una familia trivial.

3.2.1. Restricción de una Familia Diferenciable de Variedades Complejas Compactas

Sea $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia diferenciable de variedades complejas compactas. Sea $I \subset B$ un dominio en B. Así I adquiere de una manera única la estructura de una subvariedad abierta de B tal que la aplicación $i : I \to B$ es una inmersión abierta. Entonces el pullback de la familia $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ por i, denotado por $(i^*\mathscr{M}, I, i^*\varpi)$ es llamado la restricción de $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ en $I \subset B$.

Además en lugar de escribir $(i^*\mathscr{M}, I, i^*\varpi)$ vamos a escribir $(\mathscr{M}_I, I, \varpi)$. Luego, las siguientes declaraciones son entonces obvias:

1. La restricción de una familia trivial es trivial.
2. La operación de pullback conmuta con la operación de restricción.

3.3. Deformación Infinitesimal en una Familia Diferenciable de Variedades Complejas Compactas

Sea $(\mathscr{M}_I, I, \varpi_I)$, la restricción de la familia diferenciable $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ a I, y $\{(\mathscr{U}'_j, x_j)\}$ un cubrimiento de $\varpi^{-1}(I)$ tal que $x_j(\mathscr{U}'_j) = U_j \times I$. Además, para cada $t \in I$, sea $\mathscr{U}_{j,t} := \mathscr{U}'_j \cap M_t$ y $x_j(\mathscr{U}_{j,t}) = U_j \times \{t\} \cong U_j$.

Escribamos $\mathscr{U}_{j,t_0}$ como $\mathscr{U}_j$, y denotemos a $\mathscr{U}_{jk} := \mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_k$, note que, en cada intersección no vacía, $z_i = f_{ik}(z_k, t)$ en $\mathscr{U}_{ik}$, $z_i = f_{ij}(z_j, t)$ en $\mathscr{U}_{ij}$ y $z_j = f_{jk}(z_k, t)$ en $\mathscr{U}_{jk}$, entonces tenemos que:

$$f_{ik}(z_k, t) = f_{ij}(f_{jk}(z_k, t), t); \quad \text{en } \mathscr{U}_{ijk}$$

tener en cuenta que m es la dimensión de B como variedad diferenciable real y $t = (t_1, \ldots, t_m)$ son coordenadas locales C^∞ en I inducido de $\mathbb{R}^m$.

Ahora, derivando la igualdad anterior en la dirección del vector tangente a B en $t \in I$, es decir $\dfrac{\partial}{\partial t}$, y poniendo $z_j^\beta = f_{jk}^\beta(z_k, t)$; $\beta = 1, 2, \ldots, n$ obtenemos

$$\frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t},$$

y poniendo también que $z_i^\alpha = f_{ij}^\alpha(z_j, t)$; $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ tenemos finalmente

$$\frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t},$$

luego introducimos el siguiente campo vectorial holomorfo

$$\theta_{jk}(z_k, t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}; \quad \text{con } z_k = f_{kj}(z_j, t) \text{ en } \mathscr{U}_{jk} \subset M_t$$

entonces podemos reescribir las igualdades de arriba de la siguiente forma intrínseca:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial z_j^\beta}$$

donde usamos la igualdad de que

$$\frac{\partial}{\partial z_j^\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} . \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}$$

Además, denotando $\theta_{jk}(z_j,t)$ por $\theta_{jk}(t)$ por simplicidad, tenemos en $\mathscr{U}_{ijk}$ que las igualdades obtenidas al introducir el campo vectorial holomorfo, la podemos escribir como:

$$\theta_{ik}(t) = \theta_{ij}(t) + \theta_{jk}(t)$$

Luego, si ponemos $i = k$, de la igualdad anterior se tiene

$$\theta_{kj}(t) = -\theta_{jk}(t)$$

En efecto, $\theta_{kk}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{kk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t} . \frac{\partial}{z_k^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_k^\alpha}{\partial t} . \frac{\partial}{z_k^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} = 0.$

Vamos a denotar por Θ_t el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre M_t, es decir el haz asociado al fibrado tangente holomorfo de M_t, entonces la relación anterior expresa el hecho de que las secciones $\theta_{jk}(t) \in \Theta_t(\mathscr{U}_{jk})$ define 1-cociclo con valores en el haz Θ_t relativo al cubrimiento abierto, $\mathfrak{U}_t := \{\mathscr{U}_j \cap M_t\}$, de M_t. Esto se escribe $\{\theta_{jk}(t)\} \in Z^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$.

Como $\mathscr{U}_{j,t}$ es biholomorfo (via x_j) al polidisco correspondiente $U_j \times \{t\} \cong U_j$ como vimos antes, entonces este 1-cociclo define un elemento

$$\theta(t) \in H^1(M_t, \Theta_t) \cong \check{H}^1(M_t, \Theta_t) := \check{H}^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$$

Pero por corolario (**??**) se tiene que $H^1(M_t,\Theta_t) = \bigcup_{U_t} H^1(U_t,\Theta_t)$, entonces

$$H^1(U_t,\Theta_t) \subset H^1(M_t,\Theta_t)$$

Así $\theta(t)$ es considerado un elemento de $H^1(M_t,\Theta_t)$. Es decir, $\theta(t)$ es la clase de cohomología de $\{\theta_{jk}(t)\}$ obtenidas de derivar las funciones transición que son responsables de cambiar la estructura compleja de M_t respecto a t.
La clase de cohomología $\theta(t)$ obtenida, es llamada la deformación infinitesimal de M_t a lo largo de la dirección prescrita por $\frac{\partial}{\partial t} \in T_tB$.

Entonces una *Deformación Infinitesimal* de la estructura compleja de una variedad compleja compacta M, es representado por un elemento del primer grupo de cohomología de ésta variedad con valores en su haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos, $H^1(M,\Theta)$. Cada deformación infinitesimal es asociado a una dirección tangente en un punto del espacio base, sobre el cual, las fibras correspondientes de la familia es la variedad compleja compacta fijada cuya deformación local de estructura compleja queremos estudiar, a través de la aplicación de Kodaira-Spencer, que se verá la sección siguiente.

Proposición 3.1. $\theta(t) = \left(\frac{dM_t}{dt}\right)$ *es independiente del sistema de coordenadas locales elegido,* $\{(\mathcal{U}_j, z_j^\alpha)\}$.

Demostración. Sea $\{\mathcal{V}_\lambda\}$ un refinamiento del cubrimiento $\{\mathcal{U}_j\}$ tal que $(\zeta_\lambda^\alpha, t)$ son coordenadas en $\{\mathcal{V}_\lambda\}$ donde

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(\zeta_\lambda, t) :| \zeta_\lambda^\alpha |< \epsilon_\lambda, | t |< \epsilon\}$$

como $\{\mathcal{V}_\lambda\}$ es un refinamiento de $\{\mathcal{U}_j\}$ tenemos una aplicación $s : \Lambda \to J$ tal que $\mathcal{V}_\lambda \subseteq \mathcal{U}_j$, también tenemos funciones transición holomorfas $\varphi_{\lambda\nu}$ donde

$$\zeta_\lambda^\alpha = \varphi_{\lambda\nu}(\zeta_\nu, t) \ \text{ en } \ \mathcal{V}_{\lambda\nu}$$

Entonces el cociclo definido por este cubrimiento es

$$\eta_{\lambda\nu}(t) = \sum \frac{\partial \varphi_{\lambda\nu}^\alpha(\zeta_\nu, t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial \zeta_\nu^\alpha}$$

Luego s induce una aplicación $s^* : \{\theta_{jk}\} \to \{\theta_{\lambda\nu}\}$, donde

$$\theta_{\lambda\nu}(t) = \gamma_{\mathcal{V}_{\lambda\nu} \cap M_t}\theta_{jk}(t) \ \text{ con } \ j = s(\lambda), \ k = s(\nu)$$

Debemos demostrar que $\{\eta_{\lambda\nu}\}$ es cohomológica a $\{\theta_{\lambda\nu}\}$, es decir, existe una cocadena $\{\theta_\mu(t)\}$ tal que

$$\eta_{\lambda\nu}(t) - \theta_{\lambda\nu} = \theta_\nu(t) - \theta_\lambda(t)$$

Como $\mathcal{V}_\lambda \subseteq \mathcal{U}_j$ con $j = s(\lambda)$, existe un holomorfismo g_j tal que $z_j^\alpha = g_j^\alpha(\zeta_\lambda, t)$ en $\mathcal{V}_\lambda$. Así tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} g_j^\alpha[\varphi_{\lambda\nu}(\zeta_\nu, t)] &= g_j^\alpha(\zeta_\lambda, t) = z_j^\alpha \\ &= f_{jk}^\alpha(z_k^\alpha, t) \\ &= f_{jk}^\alpha(g_k^\alpha(\zeta_\nu, t), t) \end{aligned}$$

Esto es,

$$g_j^\alpha[\varphi_{\lambda\nu}(\zeta_\nu, t)] = f_{jk}^\alpha(g_k^\alpha(\zeta_\nu, t), t) \ \text{ en } \ \mathcal{V}_{\lambda\nu}$$

Derivamos la última expresión obtenida

$$\sum \frac{\partial g_j^\alpha(\zeta_\lambda, t)}{\partial \zeta_\lambda^\beta}.\frac{\partial \varphi_{\lambda\nu}^\beta(\zeta_\nu, t)}{\partial t} + \frac{\partial g_j^\alpha(\zeta_\lambda, t)}{\partial t} = \sum \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial z_k^\beta}.\frac{\partial g_k^\beta(\zeta_\nu, t)}{\partial t} + \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t}$$

Multiplicamos por $(\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha})$

$$\sum \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial \zeta_\lambda^\beta}.\frac{\partial \varphi_{\lambda\nu}^\beta(\zeta_\nu,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum \frac{\partial g_j^\alpha(\zeta_\lambda,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} = \sum \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta}.\frac{\partial g_k^\beta(\zeta_\nu,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

$$\sum \frac{\partial \varphi_{\lambda\nu}^\beta(\zeta_\nu,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial \zeta_\lambda^\beta} + \sum \frac{\partial g_{s(\lambda)}^\alpha(\zeta_\lambda,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_{s(\lambda)}^\alpha} = \sum \frac{\partial g_{s(\nu)}^\beta(\zeta_\nu,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_{s(\nu)}^\beta} + \sum \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

$$\sum \frac{\partial \varphi_{\lambda\nu}^\beta(\zeta_\nu,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial \zeta_\lambda^\beta} - \sum \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} = \sum \frac{\partial g_{s(\nu)}^\beta(\zeta_\nu,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_{s(\nu)}^\beta} - \sum \frac{\partial g_{s(\lambda)}^\alpha(\zeta_\lambda,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z_{s(\lambda)}^\alpha}$$

Luego, habiéndose utilizado las siguientes igualdades

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_\lambda^\beta} = \sum \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial \zeta_\lambda^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \quad \text{y} \quad \theta_\mu := \sum \frac{\partial g_{s(\mu)}^\alpha}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z_{s(\mu)}^\alpha}$$

Se obtiene lo que queríamos demostrar

$$\eta_{\lambda\nu}(t) - \theta_{\lambda\nu} = \theta_\nu(t) - \theta_\lambda(t)$$

□

Proposición 3.2. *Si* $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *es localmente trivial, entonces* $\theta(t) = \left(\frac{dM_t}{dt}\right)$ *es idénticamente nula.*

Demostración. Como por hipótesis $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es localmente trivial, entonces por definición, existe un dominio lo suficientemente pequeño $I \subset B \subset \mathbb{R}$ de manera que $(\mathscr{M}, I, \varpi)$ es equivalente a $(M \times I, I, \pi)$. Ya que la deformación $\theta(t)$ de $M_t = \varpi^{-1}(t)$ por la proposición anterior, no depende del sistema de coordenadas locales elegido, podemos calcular $\theta(t)$ para $t \in I$ en términos de las coordenadas locales $\{u_\lambda\}$ de $M \times I$, tal que $u_\lambda = (w_\lambda, t)$ donde $\{w_\lambda\}$ es un sistema de coordenadas locales de M. Sea $w_\mu \to w_\lambda = h_{\lambda\mu}(w_\mu)$ la transformación de coordenadas para $\{w_\lambda\}$. Tenemos que la transformación de coordenadas para $\{u_\lambda\}$ estará dado por

$$(w_\mu, t) \to (w_\lambda, t) = (h_{\lambda\mu}(w_\mu), t)$$

y como $h_{\lambda\mu}(w_\mu)$ es independiente de t, entonces

$$\theta_{\lambda\mu}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial h_{\lambda\mu}^\alpha(w_\mu)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial w_\lambda^\alpha} = 0$$

por lo tanto $\theta(t) = 0$. Así, si la estructura compleja de $M_t = \varpi^{-1}(t)$ no varía con t en el sentido que $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es localmente trivial, tenemos $\theta(t) = 0$. □

El siguiente teorema nos ayudará a dar respuesta a la interrogante que surge en la demostración del teorema, de si la dimensión del primer grupo de cohomología de M_t sobre el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos independe de t, además de que la deformación infinitesimal sea nula, entonces la familia diferenciable de variedades complejas compactas es locamente trivial.

Teorema 3.1. *Si* $dim H^1(M_t, \Theta_t)$ *es independiente de* $t \in I$*, entonces podemos elegir una 0-cocadena* $\{\theta_j(t)\}$ *con* $\delta\{\theta_j(t)\} = \{\theta_{jk}(t)\}$ *tal que cada* $\theta_j^\alpha(z_j, t)$ *es una función* C^∞ *de* $z_j^1, \ldots, z_j^n, t$ *donde* $\theta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^\alpha(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$.

La demostración del teorema, no la veremos aquí, pero su prueba depende del método desarrollado por Spencer y el autor de la teoría variaciones de las estructuras cuasi-complejas, véalo en el artículo [11].

Teorema 3.2. *Sea $M_t = \varpi^{-1}(t)$. Si la $dimH^1(M_t, \Theta_t)$ es independiente de t, y $\theta(t) = \dfrac{dM_t}{dt} = 0$, entonces $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es localmente trivial.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que la $dimH^1(M_t, \Theta_t)$ es independiente de t, entonces podemos considerar por simplicidad la familia diferenciable $\mathscr{M}_I = \varpi^{-1}(I) = \bigcup_{j=1}^{l} U_j \times I$ de manera que $M_t = \varpi^{-1}(t)$ donde $t \in I \subset B$ siendo $B \subset \mathbb{R}$ y $\mathfrak{U} = \{U_j \times t\}$, además tenemos que $\theta(t)$ es por definición, la clase de cohomología del 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta_t)$ donde tenemos que $\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dfrac{\partial f_{jk}^{\alpha}}{\partial t} . \dfrac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$ y como $H^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t) \subset H^1(M_t, \Theta_t)$, se tiene

$$\theta(t) \in H^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t) = \frac{Z^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)}{\delta C^0(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)}$$

pero $\theta(t) = 0$ significa que $\{\theta_{jk}(t)\} = \delta\{\theta_j(t)\}$, es decir existe una 0-cocadena $\{\theta_j(t)\} \in C^0(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$ tal que $\theta_{jk}(t) = \theta_k(t) - \theta_j(t)$.
Pero queremos demostrar que $(\mathscr{M}_I, I, \varpi)$ es equivalente a $(M \times I, I, \pi)$ con $M = \varpi^{-1}(0)$. En otra palabras demostrar que existe un difeomorfismo Φ de $M \times I$ en $\mathscr{M}_I = \bigcup_{j=1}^{l} U_j \times I$ tal que Φ aplica $M \times I$ biholomorficamente en $M_t = \varpi^{-1}(t)$ para cada t. Para ello procedemos como en el teorema (2.1). Sea el campo vectorial en cada abierto coordenado de $M \times I$

$$\theta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^{\alpha}(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

la igualdad $\theta_{jk}(t) = \theta_k(t) - \theta_j(t)$ la escribimos

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k, t)}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_k^{\alpha}(z_k, t) \frac{\partial}{\partial z_k^{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^{\alpha}(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

Denotamos por $(\frac{\partial}{\partial t})_k$ el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ en $U_k \times I \subset \mathscr{M}_I$. Entonces con respecto a la transformación coordenada $(z_k, t) \mapsto (z_j, t)$, $z_j^{\alpha} = f_{jk}^{\alpha}(z_k, t)$ con $\alpha = 1, \ldots, n$ tenemos como en la ecuación (2.2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j$$

Por lo tanto en cada subconjunto abierto $U_j \times I \cap U_k \times I \neq \emptyset$ de $\mathscr{M}_I$ tenemos

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^{\alpha}(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = -\sum_{\alpha=1}^{n} \theta_k^{\alpha}(z_k, t) \frac{\partial}{\partial z_k^{\alpha}} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_k$$

Definimos el campo vectorial v en $\mathscr{M}_I$, poniendo en cada $U_j \times I$

$$v = -\sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^{\alpha}(z_j, t) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.1}$$

esta ecuación es un análogo de la ecuación (2.1). Pero en contraste con (2.1), no se desprende inmediatamente que v es C^∞. De hecho, aunque $\theta^\alpha_{jk}(t)$ es un campo vectorial C^∞ en $U_j \times I \cap U_k \times I$, $\theta_j(t)$ puede no ser diferenciable en t. Por otra parte $\theta_j(t)$ no es determinado únicamente por $\{\theta_{jk}(t)\}$. De ahí surge el siguiente problema: ¿Podemos elegir $\theta_j(t)$, $j = 1, \ldots, l$ de manera que cada $\theta^\alpha_j(z_j, t)$ es C^∞ en $z^1_j, \ldots, z^n_j, t$?. El teorema (3.1) nos permite dar respuesta a ésta interrogante.

Por hipótesis la $dimH^1(M_t, \Theta_t)$ no depende de t. Luego por teorema (3.1), elegimos $\{\theta_j(t)\}$ tal que cada $\theta_j(t)$ sea un campo vectorial C^∞ en $U_j \times I \subset \mathscr{M}_I$. Así v en la ecuación (3.1) es un campo vectorial C^∞ en $\mathscr{M}_I$. Considere ahora el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dfrac{dz^\alpha_j}{ds} = -\theta^\alpha_j(z^1_j, \ldots, z^n_j, t), \quad \alpha = 1, \ldots, n \\ \dfrac{dt}{ds} = 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

para v como en la ecuación (2.5). Tome un $p \in M = \varpi^{-1}(0)$ arbitrario, y asuma $p \in U_i \times 0$. Sea $(\zeta_i(p), 0)$ las coordenadas locales de p, el sistema anterior tiene solución única

$$\begin{cases} z^\alpha_j(s) = \zeta^\alpha_j(p, s), \\ t = s, \end{cases}$$

bajo la condición inicial

$$\begin{cases} z^\alpha_i(0) = \zeta^\alpha_i(p), \quad \alpha = 1, \ldots, n \\ t(0) = 0, \end{cases}$$

Esta solución nos da una curva suave en $\mathscr{M}_I$ pasando por p

$$\gamma_p : t \mapsto \gamma_p(t) = (z_j(p, t), t), \qquad t \in I$$

por lo tanto se obtiene una familia de curvas suaves $\{\gamma_p : p \in M\}$ en $\mathscr{M}_I$.
Luego por el teorema de unicidad de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, para cada punto $(z_j, t) \in \mathscr{M}_I$, existe sólo una curva que pasa por ese punto. Por consiguiente, la aplicación

$$\Phi : (p, t) \mapsto (z_j, t) = (z_j(p, t), t)$$

es un difeomorfismo de $M \times I$ en $\mathscr{M}_I$.
Es así, con el fin de ver que $\Phi : M \times I \to M_t$ sea un biholomorfismo, basta demostrar que $z_j(p, t)$ es holomorfo en p. Para ello escribimos $z_j(p, t)$ como una función de t poniendo a las coordenadas complejas locales $\zeta^\lambda_j = \zeta^\lambda_j(p)$, $\lambda = 1, \ldots, n$, de p de la siguiente forma

$$z^\alpha_j = z^\alpha_j(\zeta_i, t) = z^\alpha_j(\zeta^1_i, \ldots, \zeta^n_i, t)$$

ya que $t = s$, por la ecuación (3.2) tenemos

$$\frac{d}{dt} z_j^\alpha(\zeta_i, t) = -\theta_j^\alpha(z_j^1(\zeta_i, t), \ldots, z_j^n(\zeta_i, t), t)$$

Derivando ambos lados de esta ecuación respecto a $\bar{\zeta}_i^\lambda$, desde que $\theta_j^\alpha(z_j, t)$ es holomorfo en $z_j^1, \ldots, z_j^n$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial z_j^\alpha(\zeta_i, t)}{\partial \bar{\zeta}_i^\lambda} = -\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \theta_j^\alpha}{\partial z_j^\beta}(z_j(\zeta_i, t), t).\frac{\partial z_j^\beta(\zeta_i, t)}{\partial \bar{\zeta}_i^\lambda}$$

poniendo $\omega_j^\alpha(t) = \dfrac{\partial z_j^\alpha(\zeta_i, t)}{\partial \bar{\zeta}_i^\alpha}$. Entonces $\omega_j^\alpha(t)$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\frac{d}{dt}\omega_j^\alpha(t) = -\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \theta_j^\alpha}{\partial z_j^\beta}(z_j(\zeta_i, t), t)\omega_j^\beta(t), \qquad \alpha = 1, \ldots, n$$

y como $z_i^\alpha(\zeta_i, 0) = \zeta_i^\alpha$, tenemos $\omega_i^\alpha(0) = \dfrac{\partial \zeta_i^\alpha}{\partial \bar{\zeta}_i^\lambda} = 0$. Aquí la solución $\omega_j^\alpha(t)$ satisface la condición inicial: $\omega_j^\alpha(0) = 0$. En consecuencia, por unicidad de la solución, $\omega_j^\alpha = 0$. Así $\dfrac{\partial z_j^\alpha(\zeta_i, t)}{\partial \bar{\zeta}_i^\lambda} = 0$, y $z_j^\alpha(p, t)$ es holomorfo en p. Por lo tanto $\Phi : M \times t \to M_t$ es biholomorfo, lo que demuestra que $(\mathscr{M}_I, I, \varpi)$ es trivial. $\square$

Observación

Cabe resaltar que la hipótesis de que las fibras sean compactas es necesaria, pues si observamos el ejemplo (3.1) vemos que las fibras $\varpi^{-1}(x_0) = \Delta_{x_0}$, para cada $x_0 \in B$, son anillos complejos todos diferentes con estructuras complejas distintas, luego $H^1(\Delta_x, \Theta_x) \equiv H^1(U_x, \Theta_x)$ por teorema de Leray (5.2), siendo U_x un cubrimiento de Stein para el anillo Δ_x, por otro lado $H^1(\{\Delta_x\}, \Theta_x) = 0$ pues para un campo vectorial $X_x \in \Theta_x(\Delta_x)$ lo podemos expresar como la diferencia de dos campos en cada abierto del cubrimiento, en éste caso hemos tomado como abierto al mismo anillo $\{\Delta_x\}$, entonces se tiene sólo un abierto y $X_x = X_x - 0$, siendo 0 el campo trivial, enseguida se puede escoger $U_x = \{\Delta_x\}$ de manera que $H^1(U_x, \Theta_x) = H^1(\{\Delta_x\}, \Theta_x)$ por lo tanto $H^1(\Delta_x, \Theta_x) = 0$, luego por teorema (3.2), la familia diferenciable $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es localmente trivial, es decir que todas sus fibras son biholomorfas, lo cual es una contradicción porque vía equivalencia de anillos éstas serán conformemente equivalentes si sus radios menores son iguales (ver teorema 14.22 pag. 292 en [18]), esta situación se debe a que para $x \in B$, las fibras (anillos complejos) $\varpi^{-1}(x) = \Delta_x$, no son compactas.

3.4. La Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer en una Familia Analítica Compleja

Considere, como a inicio de la sección (3.3), una familia analítica compleja $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ de variedades complejas compactas donde B es un dominio de

$\mathbb{C}^m$. Sea $\{x_1, \ldots, x_j, \ldots\}$ sistema de coordenadas locales, con $x_j = (z_j, t) = (z_j^1, \ldots, z_j^n, t_1, \ldots, t_m)$ en $\mathscr{M}$, y $\mathscr{U}_j$ el dominio de x_j.

Suponga que en $\mathscr{U}_{jk} \neq \emptyset$, tenemos

$$z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_j^1, \ldots, z_j^n, t_1, \ldots, t_m), \quad \alpha = 1, \ldots, n+m$$

Como de costumbre, identificamos un punto de $\mathscr{M}$ con sus coordenadas locales, podemos considerar que $\mathscr{U}_j = x_j(\mathscr{U}_j) \subset \mathbb{C}^n \times B$, y que $\mathscr{M} = \bigcup_j \mathscr{U}_j$ se obtiene pegando los dominios $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_k, \ldots$ de $\mathbb{C}^n \times B$ mediante la identificación de (z_j, t) y (z_k, t) si $z_j = f_{jk}(z_k, t)$.

Además de que $\mathfrak{U}_t = \{U_{jt} : U_{jt} = \mathscr{U}_j \cap M_t \neq \emptyset\}$ forma un cubrimiento de $M_t = \varpi^{-1}(t)$.

El espacio tangente $T_t(B)$ de B en t consiste de todos los vectores tangentes $\dfrac{\partial}{\partial t} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \dfrac{\partial}{\partial t_\lambda}$, con $c_\lambda \in \mathbb{C}$. Para $\dfrac{\partial}{\partial t} \in T_t(B)$, ponemos

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \ldots, t_m)}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \qquad z_k = f_{kj}(z_j, t)$$

Entonces tenemos que $\{\theta_{jk}(t)\} \in Z^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$. Luego la clase de cohomología $\theta(t) \in H^1(M_t, \Theta_t)$ del 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\}$, nos permite dar la siguiente definición:

Definición 3.4 (Deformación Infinitesimal)**.** *La clase de cohomología obtenida arriba $\theta(t)$, es llamada la deformación infinitesimal de M_t a lo largo de la dirección prescrita por $\dfrac{\partial}{\partial t} \in T_t B$. También, $\theta(t)$, es llamada la derivada de la estructura compleja de M_t a lo largo de la dirección prescrita por $\dfrac{\partial}{\partial t} \in T_t B$ con $t \in B$. Así $\theta(t) := \dfrac{\partial M_t}{\partial t}$.*

La deformación infinitesimal $\dfrac{\partial M_t}{\partial t}$ es independiente del sistema de coordenadas locales elegida. Es así, que definimos la aplicación $\mathcal{KS}_t$ como sigue.

Definición 3.5 (Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer)**.** *Defina la aplicación $\mathcal{KS}_t : T_t B \to H^1(M_t, \Theta_t)$ dado por $\mathcal{KS}_t(\dfrac{\partial}{\partial t}) = \theta(t) = \dfrac{dM_t}{dt}$. Esta aplicación es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y es llamada Aplicación de Deformación Infinitesimal o Aplicación Infinitesimal de Kodaira-Spencer en $t \in B$ para la familia analítica compleja$(\mathscr{M}, B, \varpi)$.*

Teorema 3.3. *Si $dim H^1(M_t, \Theta_t)$ es independiente de t, y $\mathcal{KS}_t = 0$, entonces $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es localmente trivial.*

Demostración. Como la $dim H^1(M_t, \Theta_t)$ no depende de t, consideremos la familia diferenciable $(\mathscr{M}_I, I, \varpi)$.
Por simplicidad asumamos que $I = \{(t_1, \ldots, t_m) : |t_1| < r, \ldots, |t_m| < r\}$ y demostremos por inducción en m tal como en la prueba del teorema (2.1).
Sean

$$\begin{aligned} I^{m-1} &= \{(t_1, \ldots, t_m) : |t_1| < r, \ldots, |t_{m-1}| < r\} \\ I_m &= \{t_m : -r < t_m < r\} \end{aligned}$$

de manera que $I = I^{m-1} \times I_m$.
Consideremos también que $I^{m-1} = I^{m-1} \times 0 \subset I$, entonces tendríamos que $(\varpi^{-1}(I^{m-1}), I^{m-1}, \varpi)$ es una familia diferenciable.
Como éste teorema se cumple para $m = 1$, asumamos que $\varpi^{-1}(I^{m-1})$ es trivial y definamos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \varpi^{-1}(I^{m-1}) \times I_m &\longrightarrow I \\ (p, t_m) &\longmapsto (\varpi(p), t_m) \end{aligned}$$

luego $p \in \varpi^{-1}(I^{m-1})$ entonces $\varpi^{-1}(I^{m-1}) \times I_m$ es una familia diferenciable sobre el espacio de parámetros I, y como por hipótesis inductiva se tiene que $(\varpi^{-1}(I^{m-1}), I^{m-1}, \varpi)$ es localmente trivial, tenemos pues que $\varpi^{-1}(I^{m-1})$ es equivalente a $M \times I^{m-1}$ donde $M = \varpi^{-1}(0)$, de ahí que $\varpi^{-1}(I^{m-1}) \times I_m$ es equivalente a $M \times I$.
Por lo tanto, con el fin de demostrar la trivialidad de $\mathscr{M}_I$, es suficiente verificar que $\mathscr{M}_I$ es equivalente a $\varpi^{-1}(I^{m-1}) \times I_m$, procediendo como sigue, ponemos

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k, t_1 \ldots, t_m)}{\partial t_m} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

Entonces la clase de cohomología $\theta(t) = \mathcal{KS}_t(\partial/\partial t_m)$ del 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\}$, por lo obtenido de la hipótesis inductiva, es igual a 0. Consecuentemente como en el caso $m = 1$, por el resultado de que $H^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t) \subset H^1(M_t, \Theta_t)$, existe una 0-cocadena $\{\theta_j(t)\} \in C^0(\mathfrak{U}_t, \Theta_t)$ tal que $\{\theta_{jk}(t)\} = \delta\{\theta_j(t)\}$. Ya que el teorema (3.1) sigue siendo cierto también para $m \geq 2$, podemos suponer que los coeficientes $\theta_j^{\alpha}(z_j, t_1, \ldots, t_m)$ en

$$\theta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^{\alpha}(z_j, t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} \tag{3.3}$$

son funciones C^{∞} de $z_j^1, \ldots, z_j^n, t_1, \ldots, t_m$ en $U_j \times I$. Por lo tanto como en el caso $m = 1$, obtenemos un campo vectorial v, C^{∞} sobre $\mathscr{M}_I$ tal que en cada $U_j \times I \subset \mathscr{M}_I$ tenemos

$$v = -\sum_{\alpha=1}^{n} \theta_j^{\alpha}(z_j, t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial t_m} \tag{3.4}$$

Tenga en cuenta las correspondientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dfrac{dz_j^{\alpha}}{ds} = -\theta_j^{\alpha}(z_j, t_1, \ldots, t_m), & \alpha = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{dt_{\lambda}}{ds} = 0, & \lambda = 1, \ldots, m-1, \\ \dfrac{dt_m}{ds} = 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Tome cualquier punto $p \in \varpi^{-1}(I^{m-1}) = \bigcup_i U_i \times I^{m-1} \times 0$, y deje que $(\zeta_i(p), t_1, \ldots, t_{m-1}, 0)$ sea sus coordenadas locales donde $(t_1, \ldots, t_{m-1}, 0) = \varpi(p)$. Entonces la ecuación (3.5) tiene la única solución

$$\begin{cases} z_j^\alpha(s) = z_j^\alpha(p, s), & \alpha = 1, \ldots, n, \\ t_\lambda(s) = t_\lambda, & \lambda = 1, \ldots, m-1, \\ t_m = s \end{cases}$$

en la condiciones iniciales

$$\begin{cases} z_i^\alpha(0) = \zeta_i^\alpha(p), & \alpha = 1, \ldots, n, \\ t_\lambda(0) = t_\lambda, & \lambda = 1, \ldots, m-1, \\ t_m(0) = 0 \end{cases}$$

De este modo se obtiene un difeomorfismo Φ de $\varpi^{-1}(I^{m-1}) \times I_m$ en $\mathscr{M}_I$:

$$\Phi : (p, t_m) \mapsto (z_j(p, t_m), t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m)$$

Si, con las coordenadas locales $(\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^n, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m)$, escribimos

$$z_j^\alpha(p, t_m) = z_j^\alpha(\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^n, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m),$$

entonces $\theta_j^\alpha(z_j, t_1, \ldots, t_m)$ es holomorfa en $z_j^1, \ldots, z_j^n$, y vemos como en el caso $m = 1$ que $z_j^\alpha(\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^n, t_1, \ldots, t_m)$ es holomorfa en $\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^n$. □

Definición 3.6 (Completitud)**.** *Sean* $(\mathscr{M}, B, \varpi) = \{M_t := \varpi^{-1}(t), t \in B\}$ *una familia analítica compleja de variedades complejas compactas,* $t_0 \in B$ *y* $(\mathscr{N}, D, \pi)$ *cualquier familia analítica compleja de variedades complejas compactas con* $s_0 \in D$ *tal que* $N_{s_0} := \pi^{-1}(s_0)$ *es biholomorfo a* M_{t_0}*.*

Decimos que la familia analítica compleja $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *es completa en* $t_0 \in B$ *si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cada una de estas familias* $(\mathscr{N}, D, \pi)$*, existe una vecindad lo suficientemente pequeña* $E \subset D$ *de* s_0*,*

2. *Una aplicación holomorfa* $h : E \to B$ *tal que* $h(s_0) = t_0$*, y*

3. *La familia inducida* $(h^*\mathscr{M}, E, h^*\varpi)$ *sea equivalente a* $(\mathscr{N}_E, E, \pi)$ *la restricción de* $(\mathscr{N}, D, \pi)$ *en* $E \subset D$*.*

La aplicación holomorfa h, no necesita ser única.

Por lo tanto vemos que si $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es completo en $t_0 \in B$, entonces contiene todas las deformaciones infinitesimales de $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ - incluso los que provienen de familias analíticas complejas arbitrarias $(\mathscr{N}, D, \pi)$ con $N_{s_0} := \pi^{-1}(s_0) \cong M_{t_0}$ - y además contiene también todas las deformaciones locales suficientemente pequeñas de M_{t_0} que pueden venir de cualquier familia arbitraria $(\mathscr{N}, D, \pi)$ con $N_{s_0} := \pi^{-1}(s_0) \cong M_{t_0}$.

Definición 3.7. *Una familia analítica compleja de variedades complejas compactas* $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *se dice que es completa (global) si es completa en cada punto* $t \in B$.

Así, si $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es completa, entonces contiene todas las deformaciones infinitesimales de M_t para cada $t \in B$ y también todas las deformaciones suficientemente pequeñas de M_t para cada $t \in B$.

Teorema 3.4 (Teorema de Completitud). *Sea* $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *una familia analítica compleja de variedades complejas compactas. Entonces* $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *es completa en* $t_0 \in B$ *si la aplicación infinitesimal de Kodaira-Spencer en* t_0,

$$\mathcal{KS}_t : T_{t_0}B \to H^1(M_{t_0}, \Theta_{t_0}),$$

es sobreyectiva.

Nos limitaremos a indicar la filosofía detrás de la prueba del teorema anterior dada por Kodaira en su libro (ver [15]-cap. 6).
Supongamos primero que $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es una familia analítica compleja y sea $h : D \to B$ una aplicación holomorfa. Considere la familia analítica compleja inducida $(h^*\mathscr{M}, D, h^*\varpi)$, definida en la sección (3.2). Entonces existe $g : h^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ una aplicación holomorfa, tal que g aplica la variedad compleja compacta $(h^*\varpi)^{-1}(s)$ biholomórficamente en $\varpi^{-1}(h(s)) = M_{h(s)}$ para cada $s \in D$ es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} h^*\mathscr{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h^*\varpi"'] & \mathscr{M} \arrow[d, "\varpi"] \\ D \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Si identificamos $(h^*\varpi)^{-1}(s_0) = M_{h(s_0)} \times \{s_0\}$ con $M_{h(s_0)} = \varpi^{-1}(h(s_0))$ entonces podemos decir que g se extiende a la aplicación identidad en $M_{h(s_0)}$. El primer paso crucial en la prueba del teorema de completitud es el siguiente resultado.

Lema 3.1. *Sea* $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ *y* $(\mathscr{N}, D, \pi)$ *familias analíticas complejas de variedades complejas compactas con* $t_0 \in B$, $s_0 \in D$ *tal que* $M = \varpi^{-1}(t_0) = \pi^{-1}(s_0)$. *Suponga que podamos encontrar una vecindad suficientemente pequeña,* Δ *de* s_0, *contenido en* D, *una aplicación holomorfa* $h : \Delta \to B$ *con* $h(s_0) = t_0$, *y además una aplicación holomorfa* $g : \mathscr{N}_\Delta = \pi^{-1}(\Delta) \to \mathscr{M}$ *tal que:*

1. *g aplica $\pi^{-1}(s)$ biholomórficamente en $\varpi^{-1}(h(s))$ para cada $s \in \Delta$ y*
2. *g restricto a $\pi^{-1}(s_0)$ es la aplicación identidad sobre $\mathscr{N}$*

Entonces la familia inducida $(h^*\mathscr{M}, D, h^*\varpi)$ *es exactamente la restricción* $(\mathscr{N}_\Delta, \Delta, \pi)$ *de* $(\mathscr{N}, D, \pi)$ *en* Δ.

Para la demostración de éste lema, en primer lugar, recurrimos a la construcción dada en la sección (3.2) de familia inducida, verificando que la familia inducida es biholomórficamente equivalente a la restricción de la familia de

D a Δ. En consecuencia, un cambio de coordenadas adecuado para la familia inducida, identifica la aplicación holomorfa de $(h^*\varpi)^{-1}(s_0)$ en $\pi^{-1}(s_0)$ con la aplicación identidad de M.

Entonces dada una familia analítica compleja $(\mathscr{N}, D, \pi)$ con $s_0 \in D$ tal que $\pi^{-1}(s_0) \cong M_{t_0}$, Kodaira construye las aplicaciones holomorfas h, g (que cumplan las condiciones dados en el lema) primero como serie de potencias formales según un método para resolver muchas congruencias infinitas usando la cohomología de Čech. Luego demuestra que estas series de potencias formales en realidad convergen a las aplicaciones holomorfas deseadas. Kodaira hace esto para cualquier familia analítica compleja elegida arbitrariamente $(\mathscr{N}, D, \pi)$ con $\pi^{-1}(s_0) \cong \varpi^{-1}(t_0)$ y por lo tanto demuestra el teorema de completitud. La hipótesis que la aplicación infinitesimal Kodaira-Spencer en el punto $t_0 \in B$ para la familia $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ sea sobreyectiva se utiliza en la prueba de la existencia de las series formales de g, h satisfaciendo las propiedades deseadas.

Demostración. (Lema 3.1)
Sea $(\mathscr{N}^*, \Delta, \hat{\pi})$ una familia analítica compleja inducida de $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ por $h : \Delta \to B$. Luego para cada $s \in \Delta$ se tiene que $\hat{\pi}^{-1}(s) = M_{h(s)} \times s$, y que

$$\mathscr{N}^* = \bigcup_{s\in\Delta} M_{h(s)} \times s \subset \mathscr{M} \times \Delta$$

es una subvariedad de $\mathscr{M} \times \Delta$.

Denotando un punto de $\mathscr{N}_\Delta$ por q, consideramos la aplicación holomorfa $\Phi : q \mapsto \Phi(q) = (g(q), \pi(q))$ de $\mathscr{N}_\Delta$ en $\mathscr{M} \times \Delta$. Como g aplica cada N_s, biholomórficamente en $M_{h(s)}$, Φ aplica N, biholomórficamente en

$$\Phi(N_s) = M_{h(s)} \times s.$$

Aquí Φ aplica $\mathscr{N}_\Delta = \bigcup_{s\in\Delta} N_s$, biholomórficamente en $\mathscr{N}^* = \bigcup_{s\in\Delta} M_{h(s)} \times s$.

Por otra parte

$$\hat{\pi}\Phi(N_s) = \hat{\pi}(M_{h(s)} \times s) = s = \pi(N_s)$$

es decir $\pi = \hat{\pi}\Phi$. Por lo tanto $(\mathscr{N}_\Delta, \Delta, \pi)$ y $(\mathscr{N}_\Delta^*, \Delta, \pi)$ son biholomórficamente equivalentes, la cual prueba que $(\mathscr{N}_\Delta, \Delta, \pi)$ es la familia analítica compleja inducida de $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ por h. □

Capítulo 4

El Número de Moduli

El esfuerzo es el puente que une el sueño con la realidad.
La persona que se empeñe con ahínco podrá sentir cómo emerge
la esperanza desde su fuero más íntimo. La esperanza nace del tesón.
Daisaku Ikeda.

Sea $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia analítica compleja de variedades complejas compactas, donde B es un dominio de $\mathbb{C}^n$. Se tiene que las deformaciones infinitesimales dM_t/dt de $M_t = \varpi^{-1}(t)$ son ciertos elementos de $H^1(M_t, \Theta_t)$.

En consecuencia, dado una variedad compleja compacta M, si $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ con $0 \in B \subset \mathbb{C}^n$ es una familia analítica compleja tal que $\varpi^{-1}(0) = M$, ¿podemos decir que $(dM_t/dt)_{t=0} \in H^1(M, \Theta)$, donde Θ es el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre M, es una deformación infinitesimal de M?.

No está claro que cada θ deba surgir de ésta manera. Resulta que si θ surge de esta manera, entonces tiene que cumplir con ciertas condiciones adicionales. Así, si existen clases de cohomología θ que no cumplan las condiciones adicionales, entonces, evidentemente, θ no son deformaciones infinitesimales de M y estos son llamados *Obstrucciones a la Deformación de M*. Esto nos lleva a la teoría de la obstrucción, que se describe a continuación, y garantizaremos la existencia de una familia analítica compleja para cualquier $\theta \in H^1(M, \Theta)$.

4.1. Obstrucción

Lema 4.1. *Sea $U = \{(z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n : |z^1| < r, \ldots, |z^n| < r\}$ un polidisco y Θ el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre U. Entonces*

$$H^q(U, \Theta) = 0, \quad q \geq 1 \tag{4.1}$$

Demostración. Un germen de campo vectorial holomorfo $v \in \Theta_z$ con $z \in U$ es escrito de la forma

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

donde los coeficientes v_α con $1 \leq \alpha \leq n$, son gérmenes de funciones holomorfas en z. Así, v puede ser representado como $v = (v_1, \ldots, v_n)$ con $v_\alpha \in \mathcal{O}_z$, donde denotaremos el haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre U por $\mathcal{O}$. Por lo tanto podemos escribir

$$H^q(U,\Theta) = \underbrace{H^q(U,\mathcal{O}) + \ldots + H^q(U,\mathcal{O})}_{n-veces} \tag{4.2}$$

luego,

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(U) = \Gamma(U, \overline{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1})/\,\overline{\partial}\Gamma(U,\mathcal{A}^{p,q-1})$$

es llamado el grupo $\overline{\partial}$-cohomología de M, entonces por el teorema de Dolbeault (5.3), si ($p = 0$), tenemos que

$$H^q(U,\mathcal{O}) \cong H^{0,q}_{\overline{\partial}}(U)$$

la cual por el lema de Dolbeault (5.1), para cualquier $(0,q)$-forma $\overline{\partial}$-cerrada $\varphi \in \Gamma(U, \overline{\partial}\mathcal{A}^{0,q-1})$, existe una $(0,q-1)$-forma $\psi \in \Gamma(U,\mathcal{A}^{0,q-1})$ de manera que $\varphi = \overline{\partial}\psi$, entonces $H^{0,q}_{\overline{\partial}}(U) = 0$ lo que implica $H^q(U,\mathcal{O}) = 0$ y por (4.2) se tiene $H^q(U,\Theta) = 0$. □

Para un $\theta \in H^1(M,\Theta)$ dado, si $\theta = (dM_t/dt)_t = 0$, entonces θ es la clase de cohomología de un 1-cociclo $\{\theta_{jk}(0)\} \in Z^1(\mathfrak{U},\Theta)$, aquí (4.12) impone una cierta restricción en tal θ.
Con el fin de dejar claro el significado de ésta condición, ponemos para cualquier 1-cociclo $\{\theta_{jk}\} \in Z^1(\mathfrak{U},\Theta)$,

$$\zeta_{ijk} = [\theta_{ij}, \theta_{jk}] \ \text{ sobre } \ U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$$

ζ_{ijk} es un campo vectorial holomorfo sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$. Luego $\{\zeta_{ijk}\}$ forma un 2-cociclo sobre U, en efecto

$$\begin{aligned} \zeta_{ikj} &= [\theta_{ik}, \theta_{kj}] = -[\theta_{ij} + \theta_{jk}, \theta_{jk}] = -[\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\theta_{jk}, \theta_{jk}] \\ &= -[\theta_{ij}, \theta_{jk}] = -\zeta_{ijk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{jik} &= [\theta_{ji}, \theta_{ik}] = -[\theta_{ij}, \theta_{ij} + \theta_{jk}] = -[\theta_{ij}, \theta_{ij}] - [\theta_{ij}, \theta_{jk}] \\ &= -[\theta_{ij}, \theta_{jk}] = -\zeta_{ijk} \end{aligned}$$

Se tiene así, $\zeta_{ikj} = \zeta_{jki}$ es decir, ζ_{ijk} es antisimétrica en i,j,k. Seguimos, ahora en $U_h \cap U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \zeta_{ijk} - \zeta_{hjk} + \zeta_{hik} - \zeta_{hij} &= [\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\theta_{hj}, \theta_{jk}] + [\theta_{hi}, \theta_{ik}] - [\theta_{hi}, \theta_{ij}] \\ &= [\theta_{ij} - \theta_{hj}, \theta_{jk}] + [\theta_{hi}, \theta_{ik} - \theta_{ij}] \\ &= -[\theta_{hi}, \theta_{jk}] + [\theta_{hi}, \theta_{jk}] = 0 \end{aligned}$$

Luego $\{\zeta_{ijk}\}$ es un 2-cociclo. Ahora para unos 1-cociclos arbitrarios $\{\theta_{jk}\}$ y $\{\eta_{jk}\} \in Z^1(\mathfrak{U},\Theta)$, sean $\zeta_{ijk} = [\theta_{ij}, \theta_{jk}]$ y $\zeta_{ijk} = [\eta_{ij}, \eta_{jk}]$, entonces

$$\begin{aligned} 2\zeta_{ijk} &= [\theta_{ij}, \theta_{jk}] + [\eta_{ij}, \eta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij}, \theta_{jk}] + [\eta_{ij}, \eta_{jk}] + [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] + [\eta_{ij}, \theta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] + [\eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij} + \eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}]-[\theta_{ij},\eta_{jk}]-[\eta_{ij},\theta_{jk}]+[\theta_{ij},\theta_{jk}]-[\theta_{ij},\theta_{jk}]+\\
&\quad [\eta_{ij},\eta_{jk}]-[\eta_{ij},\eta_{jk}]\\
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}]+[\theta_{ij},\theta_{jk}-\eta_{jk}]+[\eta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}]-\\
&\quad [\theta_{ij},\theta_{jk}]-[\eta_{ij},\eta_{jk}]\\
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}]+[-\theta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}]+[\eta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}]-\\
&\quad [\theta_{ij},\theta_{jk}]-[\eta_{ij},\eta_{jk}]\\
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}]+[\eta_{ij}-\theta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}]-[\theta_{ij},\theta_{jk}]-[\eta_{ij},\eta_{jk}]\\
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}]-[\theta_{ij},\theta_{jk}]-[\eta_{ij},\eta_{jk}]\\
&= [\theta_{ij},\theta_{jk}]+[\theta_{ij},\eta_{jk}]+[\eta_{ij},\theta_{jk}]+[\eta_{ij},\eta_{jk}]-[\theta_{ij},\theta_{jk}]-[\eta_{ij},\eta_{jk}]\\
&= [\theta_{ij},\eta_{jk}]+[\eta_{ij},\theta_{jk}]
\end{aligned}$$

De ésta manera se tiene,

$$\zeta_{ijk}=\frac{1}{2}([\theta_{ij},\eta_{jk}]+[\eta_{ij},\theta_{jk}])$$

luego $\{\zeta_{ijk}\}$ es también un 2-cociclo en $Z^2(\mathfrak{U},\Theta)$, cuya clase de cohomología ζ es únicamente determinada por la clase de cohomología θ de $\{\theta_{jk}\}$ y η de $\{\eta_{jk}\}$. Por tanto, si $\theta_{jk}=\theta_k-\theta_j$, por un simple cálculo se tiene

$$2\zeta_{ijk}=[\theta_j+\theta_k,\eta_{jk}]-[\theta_i+\theta_k,\eta_{ik}]+[\theta_i+\theta_j,\eta_{ij}],$$

es decir, que $\{\zeta_{ijk}\}=\delta\{[\theta_j+\theta_k,\eta_{jk}]\}$.

Por tanto, bajo estos resultados, podemos definir la clase corchete:

Definición 4.1 (Clase Corchete)**.** *Dados $\theta,\eta\in H^1(M,\Theta)$, la aplicación bilineal $[-,-]:H^1(M,\Theta)\times H^1(M,\Theta)\to H^2(M,\Theta)$ define la clase corchete como $[\theta,\eta]=\zeta$.*

Teorema 4.1. *Dada una variedad compleja compacta M y $\theta\in H^1(M,\Theta)$. Si existe una familia analítica compleja $(\mathscr{M},B,\varpi)$ tal que $\varpi^{-1}(0)=M$, y $(dM_t/dt)_{t=0}=\theta$. Entonces $[\theta,\theta]=0$.*

Demostración. Supóngase damos una variedad compleja compacta M, y sea $(\mathscr{M},B,\varpi)$ con $0\in B\subset\mathbb{C}$ una familia analítica compleja tal que $\varpi^{-1}(0)=M$. Tome un disco pequeño Δ con centro 0 de manera que $0\in\Delta\subset B$, y representando $\mathcal{M}_\Delta=\varpi^{-1}(\Delta)$ en la forma:

$$\mathcal{M}_\Delta=\bigcup_{j=1}^{l}U_j\times\Delta \tag{4.3}$$

donde cada U_j es un polidisco, y $(z_j,t)\in U_j\times\Delta$ con $(z_k,t)\in U_k\times\Delta$ son el mismo punto sobre $\mathcal{M}_\Delta$ si $z_j^\alpha=f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ para $\alpha=1,\ldots,n$.

Aquí cada $f^\alpha_{jk}(z_k,t)$ es una función holomorfa de $z^1_k,\ldots,z^n_k,t$ definida sobre $U_k\times\Delta\cap U_j\times\Delta\neq\emptyset$

La deformación infinitesimal $\theta(t)=dM_t/dt\in H^1(M_t,\Theta)$ es, por definición, la clase de cohomología de 1-cociclo $\{\theta_{jk}(t)\}\in Z^1(\mathfrak{U}_t,\Theta)$ donde $\mathfrak{U}_t=\{U_j\times t\}$, y el campo vectorial

$$\theta_{jk}(t)=\sum_\alpha \theta^\alpha_{jk}(z_j,t)\frac{\partial}{\partial z^\alpha_j} \tag{4.4}$$

es dado por

$$\theta^\alpha_{jk}(z_j,t)=\frac{\partial f^\alpha_{jk}(z_k,t)}{\partial t},\ \ \text{con}\ \ z_k=f_{kj}(z_j,t) \tag{4.5}$$

note que las funciones $\theta^\alpha_{jk}(z_j,t)$ de $z^1_j,\ldots,z^n_j,t$ son obtenidas diferenciando primero las funciones $f^\alpha_{jk}(z_k,t)$ de $z^1_k,\ldots,z^n_k,t$ con respecto a t, y luego sustituyendo $z^\alpha_k=f^\alpha_{kj}(z_j,t)$.

Sobre $U_k\times\Delta\cap U_i\times\Delta\cap U_j\times\Delta\neq\emptyset$ tenemos la igualdad

$$f^\alpha_{ik}(z_k,t)=f^\alpha_{ij}(f^\alpha_{jk}(z_k,t),t),\quad \alpha=1,\ldots,n \tag{4.6}$$

Diferenciando ambas lados de ésta igualdad en t, se obtiene

$$\frac{\partial f^\alpha_{ik}(z_k,t)}{\partial t}=\frac{\partial f^\beta_{ij}(z^\beta_j,t)}{\partial t}+\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f^\alpha_{ij}(z_j,t)}{\partial z^\beta_j}.\frac{\partial f^\beta_{jk}(z_k,t)}{\partial t}$$

luego usando la igualdad (4.5) y el echo que $f^\alpha_{ij}(z_j,t)=z^\alpha_i$ tenemos

$$\theta^\alpha_{ik}(z_i,t)=\theta^\alpha_{ij}(z_i,t)+\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial z^\alpha_i}{\partial z^\beta_j}.\theta^\beta_{jk}(z_j,t),\quad \alpha=1,\ldots,n \tag{4.7}$$

como lo expuesto en el capítulo anterior, sección (3.4), así ésta igualdad implica que $\theta_{jk}(t)$ es un 1-cociclo.

Algunas veces escribimos $(\partial/\partial t)_j$ en ves de $(\partial/\partial t)$ con la finalidad de hacer explícita que $\partial/\partial t$ denota la diferenciación de una función de $z^1_j,\ldots,z^n_j,t$ con respecto a t.

Ahora, sobre $U_j\times\Delta\cap U_i\times\Delta\neq\emptyset$, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z^\alpha_j}=\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial z^\beta_i}{\partial z^\alpha_j}.\frac{\partial}{\partial z^\beta_i},\quad \frac{\partial z^\beta_i}{\partial z^\alpha_j}=\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f^\beta_{ij}(z_j,t)}{\partial z^\alpha_j}\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j=\sum_{\beta=1}^n\left(\frac{\partial z^\beta_i}{\partial t}\right)_j.\frac{\partial}{\partial z^\beta_i}+\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i,\quad \left(\frac{\partial z^\beta_i}{\partial t}\right)_j=\frac{\partial f^\beta_{ij}(z_j,t)}{\partial t}\end{gathered} \tag{4.8}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j\theta^\alpha_{ik}(z_i,t) &= \sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f^\beta_{ij}(z_j,t)}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial z^\beta_i}\theta^\alpha_{ik}(z_i,t)+\frac{\partial\theta^\alpha_{ik}(z_i,t)}{\partial t}\\ &= \sum_{\beta=1}^n\theta^\beta_{ij}(z_i,t)\frac{\partial\theta^\alpha_{ik}(z_i,t)}{\partial z^\beta_j}+\frac{\partial\theta^\alpha_{ik}(z_i,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Por lo tanto, denotando

$$\dot{\theta}^{\alpha}_{ik}(z_i,t) = \frac{\partial \theta^{\alpha}_{ik}(z_i,t)}{\partial t}$$

tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j \theta^{\alpha}_{ik}(z_i,t) = \theta_{ij}(t).\theta^{\alpha}_{ik}(z_i,t) + \dot{\theta}^{\alpha}_{ik}(z_i,t)$$

similarmente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j \theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t) = \theta_{ij}(t).\theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t) + \dot{\theta}^{\alpha}_{ij}(z_i,t)$$

y usando las igualdades (4.8), (4.5) y (4.4), (en ese orden) se tiene:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}} \theta^{\beta}_{jk}(z_j,t) &= \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f^{\alpha}_{ij}(z_j,t)}{\partial z_j^{\beta}\partial t}.\theta^{\beta}_{jk}(z_j,t) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}}.\dot{\theta}^{\beta}_{jk}(z_j,t) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} \theta^{\beta}_{jk}(z_j,t)\frac{\partial \theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t)}{\partial z_j^{\beta}} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}}.\dot{\theta}^{\beta}_{jk}(z_j,t) \\
&= \theta_{jk}(t).\theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}}.\dot{\theta}^{\beta}_{jk}(z_j,t)
\end{aligned}$$

Conformemente, diferenciando (4.7) con respecto a t, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
\theta_{ij}(t).\theta^{\alpha}_{ik}(z_i,t) + \dot{\theta}^{\alpha}_{ik}(z_i,t) &= \theta_{ij}(t).\theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t) + \dot{\theta}^{\alpha}_{ij}(z_i,t) + \theta_{jk}(t).\theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t) + \\
& \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}} \dot{\theta}^{\beta}_{jk}(z_j,t)
\end{aligned}$$

luego, como de (4.7) se tiene

$$\theta^{\alpha}_{ik}(z_i,t) - \theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t) = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}} \theta^{\beta}_{jk}(z_j,t)$$

entonces podemos escribir la igualdad anterior de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^{\alpha}_{ij}(z_i,t) - \dot{\theta}^{\alpha}_{ik}(z_i,t) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}} \dot{\theta}^{\beta}_{jk}(z_j,t) &= \theta_{ij}(t).\textstyle\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_i^{\alpha}}{\partial z_j^{\beta}} \theta^{\beta}_{jk}(z_j,t) \\
& \quad -\theta_{jk}(t).\theta^{\alpha}_{ij}(z_i,t)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En general, definiremos la clase corchete de dos campos vectoriales holomorfos locales $v = \sum_{\alpha=1}^{n} v_j^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}\right)$ y $u = \sum_{\alpha=1}^{n} u_j^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}\right)$ de la siguiente manera

$$[v,u] = \sum_{\alpha=1}^{n} (v.u_j^{\alpha} - u.v_j^{\alpha})\frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}} \tag{4.10}$$

Tenemos que $[v,u]_j = [v,u]_k$ es decir que

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(v.u_j^\alpha - u.v_j^\alpha)\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n}(v.u_k^\beta - u.v_k^\beta)\frac{\partial}{\partial z_k^\beta}$$

en efecto, usando que $u_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial z_k^\beta}.u_k^\beta$ en $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, y por (4.8)

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n}(v.u_j^\alpha - u.v_j^\alpha)\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^{n}(v.u_j^\alpha - u.v_j^\alpha).\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial z_k^\beta}{\partial z_j^\alpha}\frac{\partial}{\partial z_k^\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}v.u_j^\alpha\frac{\partial z_k^\beta}{\partial z_j^\alpha} - u.v_j^\alpha\frac{\partial z_k^\beta}{\partial z_j^\alpha}\Big)\frac{\partial}{\partial z_k^\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\Big(v\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial z_k^\beta}{\partial z_j^\alpha}u_j^\alpha - u\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial z_k^\beta}{\partial z_j^\alpha}v_j^\alpha\Big)\frac{\partial}{\partial z_k^\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}(v.u_k^\beta - u.v_k^\beta)\frac{\partial}{\partial z_k^\alpha}
\end{aligned}$$

También tenemos que $[v,u]$ es bilineal en u y v, como sigue:

$$\begin{aligned}
[v+w,u] &= \sum_{\alpha=1}^{n}\big[(v+w).u_j^\alpha - u(v_j^\alpha + w_j^\alpha)\big]\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\big[(v.u_j^\alpha + w.u_j^\alpha) - (u.v_j^\alpha + u.w_j^\alpha)\big]\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}(v.u_j^\alpha - u.v_j^\alpha)\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}(w.u_j^\alpha - u.w_j^\alpha)\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
&= [v,u] + [w,u] \\
[\lambda v,u] &= \sum_{\alpha=1}^{n}\big[(\lambda v).u_j^\alpha - u(\lambda v_j^\alpha)\big]\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
&= \lambda\sum_{\alpha=1}^{n}(v.u_j^\alpha - u.v_j^\alpha)\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
&= \lambda[v,u]
\end{aligned}$$

Análogamente se comprueba $[v,u+w]$ y $[v,\lambda u]$. Entonces, podemos observar que $[v,u]$ no depende del cambio de coordenadas, es bilineal y claramente

$$[u,v] = -[v,u]$$

Denotando $\dot{\theta}_{ij}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{\theta}_{ij}^{\alpha}(z_i, t)\frac{\partial}{\partial z_i^{\alpha}}$ y así sucesivamente, y usando clase corchete, podemos reescribir (4.9) como

$$\dot{\theta}_{ij}(t) - \dot{\theta}_{ik}(t) + \dot{\theta}_{jk} = [\theta_{ij}(t), \theta_{jk}(t)] \tag{4.11}$$

luego sustituyendo $t = 0$, obtenemos

$$\dot{\theta}_{ij}(0) - \dot{\theta}_{ik}(0) + \dot{\theta}_{jk} = [\theta_{ij}(0), \theta_{jk}(0)] \tag{4.12}$$

y como asumimos que $M = M_0$, identificando U_j con $U_j \times 0$, podemos considerar $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ como un cubrimiento abierto finito de M.
Para un $\theta \in H^1(M, \Theta)$ dado, si $\theta = (dM_t/dt)_t = 0$, entonces θ es la clase de cohomología de un 1-cociclo $\{\theta_{jk}(0)\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$, aquí (4.12) impone una cierta restrición en tal θ.
Con el fin de dejar claro el significado de ésta condición, ponemos para cualquier 1-cociclo $\{\theta_{jk}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$,

$$\zeta_{ijk} = [\theta_{ij}, \theta_{jk}] \ \text{ sobre } \ U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$$

ζ_{ijk} es un campo vectorial holomorfo sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$. $\{\zeta_{ijk}\}$ forma un 2-cociclo sobre U, en efecto

$$\begin{aligned} \zeta_{ikj} = &\ [\theta_{ik}, \theta_{kj}] = -[\theta_{ij} + \theta_{jk}, \theta_{jk}] = -[\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\theta_{jk}, \theta_{jk}] \\ = &\ -[\theta_{ij}, \theta_{jk}] = -\zeta_{ijk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{jik} = &\ [\theta_{ji}, \theta_{ik}] = -[\theta_{ij}, \theta_{ij} + \theta_{jk}] = -[\theta_{ij}, \theta_{ij}] - [\theta_{ij}, \theta_{jk}] \\ = &\ -[\theta_{ij}, \theta_{jk}] = -\zeta_{ijk} \end{aligned}$$

Luego se tiene, $\zeta_{ikj} = \zeta_{jki}$ es decir, ζ_{ijk} es antisimétrica en i, j, k. Seguimos, ahora en $U_h \cap U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \zeta_{ijk} - \zeta_{hjk} + \zeta_{hik} - \zeta_{hij} = &\ [\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\theta_{hj}, \theta_{jk}] + [\theta_{hi}, \theta_{ik}] - [\theta_{hi}, \theta_{ij}] \\ = &\ [\theta_{ij} - \theta_{hj}, \theta_{jk}] + [\theta_{hi}, \theta_{ik} - \theta_{ij}] \\ = &\ -[\theta_{hi}, \theta_{jk}] + [\theta_{hi}, \theta_{jk}] = 0 \end{aligned}$$

Así $\{\zeta_{ijk}\}$ es un 2-cociclo. Ahora para unos 1-cociclos arbitrarios $\{\theta_{jk}\}$ y $\{\eta_{jk}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta)$, sean $\zeta_{ijk} = [\theta_{ij}, \theta_{jk}]$ y $\zeta_{ijk} = [\eta_{ij}, \eta_{jk}]$, luego

$$\begin{aligned} 2\zeta_{ijk} &= [\theta_{ij}, \theta_{jk}] + [\eta_{ij}, \eta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij}, \theta_{jk}] + [\eta_{ij}, \eta_{jk}] + [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] + [\eta_{ij}, \theta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] + [\eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij} + \eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij} + \eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] - [\theta_{ij}, \eta_{jk}] - [\eta_{ij}, \theta_{jk}] + [\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\theta_{ij}, \theta_{jk}] + \\ &\quad [\eta_{ij}, \eta_{jk}] - [\eta_{ij}, \eta_{jk}] \\ &= [\theta_{ij} + \eta_{ij}, \theta_{jk} + \eta_{jk}] + [\theta_{ij}, \theta_{jk} - \eta_{jk}] + [\eta_{ij}, \eta_{jk} - \theta_{jk}] - \\ &\quad [\theta_{ij}, \theta_{jk}] - [\eta_{ij}, \eta_{jk}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}] + [-\theta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}] + [\eta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}] - \\
&\quad [\theta_{ij},\theta_{jk}] - [\eta_{ij},\eta_{jk}] \\
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}] + [\eta_{ij}-\theta_{ij},\eta_{jk}-\theta_{jk}] - [\theta_{ij},\theta_{jk}] - [\eta_{ij},\eta_{jk}] \\
&= [\theta_{ij}+\eta_{ij},\theta_{jk}+\eta_{jk}] - [\theta_{ij},\theta_{jk}] - [\eta_{ij},\eta_{jk}] \\
&= [\theta_{ij},\theta_{jk}] + [\theta_{ij},\eta_{jk}] + [\eta_{ij},\theta_{jk}] + [\eta_{ij},\eta_{jk}] - [\theta_{ij},\theta_{jk}] - [\eta_{ij},\eta_{jk}] \\
&= [\theta_{ij},\eta_{jk}] + [\eta_{ij},\theta_{jk}]
\end{aligned}
$$

Entonces se tiene,

$$\zeta_{ijk} = \frac{1}{2}([\theta_{ij},\eta_{jk}] + [\eta_{ij},\theta_{jk}])$$

luego $\{\zeta_{ijk}\}$ es también un 2-cociclo en $Z^2(\mathfrak{U},\Theta)$, cuya clase de cohomología ζ es únicamente determinada por la clase de cohomología θ de $\{\theta_{jk}\}$ y η de $\{\eta_{jk}\}$. Por tanto, si $\theta_{jk} = \theta_k - \theta_j$, por un simple cálculo se tiene

$$2\zeta_{ijk} = [\theta_j + \theta_k, \eta_{jk}] - [\theta_i + \theta_k, \eta_{ik}] + [\theta_i + \theta_j, \eta_{ij}],$$

es decir, que $\{\zeta_{ijk}\} = \delta\{[\theta_j + \theta_k, \eta_{jk}]\}$.
Entonces definimos la clase corchete de $\theta, \eta \in H^1(M,\Theta)$ por

$$[\theta,\eta] = \zeta \tag{4.13}$$

$[\theta,\eta]$ es bilineal en θ y η, y se cumple la igualdad $[\theta,\eta] = -[\eta,\theta]$.
Note que hemos definido una aplicación bilineal:

$$[-,-] : H^1(M,\Theta) \times H^1(M,\Theta) \to H^2(M,\Theta)$$

Poniendo $i = k$ en (4.12), obtenemos $\dot{\theta}_{kj}(0) + \dot{\theta}_{jk}(0) = 0$ pues $\dot{\theta}_{kk}(0) = 0$. Así, $\{\dot{\theta}_{jk}(0)\} \in C^1(\mathfrak{U},\Theta)$ es un 1-cocadena, y por (4.12) podemos reescribirlo como

$$\delta\{\dot{\theta}_{jk}(0)\} = \{\zeta_{ijk}\}, \quad \zeta_{ijk} = [\theta_{ij}(0), \theta_{jk}(0)].$$

Obteniendo

$$[\theta(0),\theta(0)] = 0 \tag{4.14}$$

Es así que bajo estos resultados queda demostrado el teorema. □

Observación:
Por otro lado, si $[\theta,\theta] \neq 0$, no existe deformación M_t con $M_0 = M$ y $(dM_t/dt)_{t=0} = \theta$. En el sentido que llamamos a $[\theta,\theta] \in H^2(M,\Theta)$ la obstrucción de la deformación de M.
La condición necesaria de $[\theta,\theta] = 0$ es obtenida por derivar la ecuación (4.7) con respecto a t, y poniendo $t = 0$, mientras que (4.7) es obtenido de derivar la ecuación (4.6) con respecto a t. Así, la condición $[\theta,\theta] = 0$ es obtenida de (4.6) derivando dos veces respecto a t y poniendo $t = 0$.

Entonces, motivados por el teorema anterior, se da la siguiente definición.

Definición 4.2 (Obstrucción). *Sea M una variedad compleja compacta. Un elemento $\theta \in H^1(M,\Theta)$ se le llama **obstrucción**, si el elemento correspondiente $[\theta,\theta] \in H^2(M,\Theta)$ es distinto de cero. Si θ es obstrucción, entonces el elemento $[\theta,\theta]$ se dice es una obstrucción (primaria) a la deformación infinitesimal de la estructura compleja de M.*

No existe variedad compleja compacta (incluso algebraizable) M para los cuales podamos encontrar una clase de cohomología obstruida $\theta \in H^1(M,\Theta)$. Kodaira y Spencer en ([5]) da un ejemplo de ello: $M := T^n \times \mathbb{P}^1$ donde T^n (posiblemente algebraico) es el toro complejo n-dimensional, $n \geq 2$.

Por otro lado, siguiendo la idea de la demostración del teorema (3.4), que dice si ($\mathscr{M}$,B,ϖ) es una familia analítica compleja y $h : D \to B$ una aplicación holomorfa. Se puede considerar la familia analítica compleja inducida ($h^*\mathscr{M}$,$D, h^*\varpi$), dada en la sección (3.2). Entonces existe $g : h^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ una aplicación holomorfa, tal que g aplica la variedad compleja compacta $(h^*\varpi)^{-1}(s)$ biholomórficamente en $\varpi^{-1}(h(s)) = M_{h(s)}$ para cada $s \in D$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} h^*\mathscr{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h^*\varpi"'] & \mathscr{M} \arrow[d, "\varpi"] \\ D \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Y si identificamos $(h^*\varpi)^{-1}(s_0) = M_{h(s_0)} \times \{s_0\}$ con $M_{h(s_0)} = \varpi^{-1}(h(s_0))$ entonces se puede decir que g se extiende a la aplicación identidad en $M_{h(s_0)}$.

Luego el siguiente teorema resulta ser la derivada de la función compuesta resultante de ésta construcción.

Teorema 4.2. *Para cualquier vector tangente $\dfrac{\partial}{\partial s} \in T_s(D)$, la deformación infinitesimal de $M_{h(s)}$ a lo largo de $\dfrac{\partial}{\partial s}$ es dado por*

$$\frac{\partial M_{h(s)}}{\partial s} = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial t_\lambda}{\partial s}\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}, \quad (t_1,\ldots,t_m) = h(s). \tag{4.15}$$

Demostración. Pongamos

$$\begin{aligned} \theta_{\lambda jk}(t) &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha_{jk}(z_k, t_1\ldots,t_m)}{\partial t_\lambda}.\frac{\partial}{\partial z^\alpha_j}, \\ \eta_{jk}(s) &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha_{jk}(z_k, h(s))}{\partial s}.\frac{\partial}{\partial z^\alpha_j} \end{aligned}$$

Tenemos que $\dfrac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}$ es la clase de cohomología del 1-cociclo $\{\theta_{\lambda jk}(t)\}$, y $\dfrac{\partial M_{h(s)}}{\partial s}$ es el de $\{\eta_{jk}(s)\}$. Luego como $h(s) = (t_1,\ldots,t_m)$, tenemos

$$\frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k,h(s))}{\partial s}=\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial t_\lambda}{\partial s}.\frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k,t_1\ldots,t_m)}{\partial t_\lambda}$$

Por lo tanto, vemos que (4.15) se cumple. El resultado en (4.15) es la fórmula de la derivada de una función compuesta. □

4.2. Número de Moduli

Sea ($\mathscr{M}$,B,ϖ) una familia analítica compleja de variedades complejas compactas que es completa en $t_0 \in B$.

La completitud se consigue por el teorema (3.4) expuesto antes, de que la aplicación infinitesimal Kodaira-Spencer $\mathcal{KS}_t : T_{t_0}B \to H^1(M_{t_0},\Theta_{t_0})$ es sobreyectiva. En este caso sabemos que ($\mathscr{M}$,B,ϖ) contiene todas las posibles deformaciones infinitesimales de M_{t_0}. Pero puede ocurrir que dos direcciones tangentes distintas en t_0 a B pueda dar lugar a la misma deformación infinitesimal de M_{t_0}. Nos gustaría tener una situación en la que esto no suceda, es decir, situación en la que $\mathcal{KS}_t$ sea inyectiva.

Luego $\mathcal{KS}_t$ daría un isomorfismo de $T_{t_0}B$ con $H^1(M_{t_0},\Theta_{t_0})$. En términos más generales, nos gustaría tener una situación donde no haya "direcciones redundantes". Naturalmente, esto nos lleva a lo siguiente.

Definición 4.3 (Familia Eficaz)**.** *Sea ($\mathscr{M}$,B,ϖ) una familia analítica compleja de variedades complejas compactas y $t_0 \in B$:*

1. *Se dice que ésta* ***familia es eficaz*** *en $t_0 \in B$ si la aplicación infinitesimal de Kodaira-Spencer $\mathcal{KS}_t : T_{t_0}B \to H^1(M_{t_0},\Theta_{t_0})$ es inyectiva, y*

2. *Decimos que ($\mathscr{M}$,B,ϖ) es* ***efectivamente parametrizado*** *o que $t \in B$ es un parámetro eficaz si ($\mathscr{M}$,B,ϖ) es eficaz en cada $t \in B$.*

Note que si ($\mathscr{M}$,B,ϖ) es efectivamente parametrizada, entonces en cada $t \in B$, distintas direcciones tangentes dan lugar a distintas deformaciones infinitesimales de M_t, es decir, no hay dos direcciones tangentes diferentes que puedan definir la misma deformación infinitesimal de M_t para cada $t \in B$.

Ahora si M es una variedad compleja compacta y ($\mathscr{M}$,B,ϖ) una familia analítica compleja de variedades complejas compactas con $t_0 \in B$ tal que $\varpi^{-1}(t_0) = M$, entonces podemos esperar algo especial que suceda si esta familia se completa y se parametriza con eficacia. Esto se justifica por el siguiente teorema:

Teorema 4.3. *Sea M una variedad compleja compacta y ($\mathscr{M}, B,\varpi$) una familia analítica compleja completa efectivamente parametrizada con $t_0 \in B$ tal que $\varpi^{-1}(t_0) = M$. Entonces tenemos lo siguiente:*

1. *Sea ($\mathscr{N}, D,\pi$) cualquier familia analítica compleja de variedades complejas compactas, completa efectivamente parametrizada con $s_0 \in D$ tal que $\pi^{-1}(s_0) = M$. Entonces, ambos B y D tienen la misma dimensión como variedades.*

2. *Sea $(\mathscr{N}, D, \pi)$ una familia analítica compleja satisfaciendo la hipótesis de (1) dada arriba. Entonces existe un dominio $E \subset D$ con $s_0 \in E$ y una aplicación holomorfa* ***inyectiva*** *$h : E \longrightarrow B$ (es decir una inmersión abierta) aplicando s_0 en t_0 tal que la familia inducida por h, $(h^*\mathscr{M}, E, h^*\varpi)$, es equivalente a la restricción de la familia $\mathscr{N}$ a E, $(\mathscr{N}_E, E, \pi)$. En este sentido, una familia analítica compleja completa efectivamente parametrizada con fibra M es únicamente determinado, a condición de que existe, a nivel local en el punto sobre el que M es la fibra.*

Demostración. **(1):** Ya que $\varpi^{-1}(t_0) = M = \pi^{-1}(s_0)$ y $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es completa, implica que es completa en t_0, entonces existe un dominio $E \subset D$ con $s_0 \in E$ y una aplicación holomorfa $h : E \longrightarrow B$ con $h(s_0) = t_0$ tal que $(h^*\mathscr{M}, E, h^*\varpi)$ es equivalente a $(\mathscr{N}_E, E, \pi)$. Sea l la dimensión de E. Si escogemos E suficientemente pequeño de modo que esté cubierto por un solo sistema coordenado complejo local con coordenadas $s = (s_1, \ldots, s_l)$, entonces tenemos que el vector tangente $\langle \frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_l} \rangle$ forma una base sobre $\mathbb{C}$ de $T_sE = T_sD$.
Pero desde que $(\mathscr{N}, D, \pi)$ es efectivamente parametrizable, vemos que también lo es su restricción $(\mathscr{N}_E, E, \pi)$. Por lo tanto $\mathcal{KS}_s : T_sE \longrightarrow H^1(N_s, \Theta_s)$ es inyectiva para cada $s \in E$. Aquí, como es habitual, $N_s = \pi^{-1}(s)$.
A continuación, como $(h^*\mathscr{M}, E, h^*\varpi)$ es equivalente a $(\mathscr{N}_E, E, \pi)$, tenemos que N_s es biholomorfo a $M_{h(s)}$ para cada $s \in E$. Así, $\langle \frac{\partial N_s}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial N_s}{\partial s_l} \rangle$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ en $H^1(N_s, \Theta_s) = H^1(M_{h(s)}, \Theta_{h(s)})$ para cada $s \in E$. Ahora, sea m la dimensión B y $t = (t_1, \ldots, t_m)$ una coordenada compleja local en una vecindad suficientemente pequeña de $t_0 = h(s_0) \in B$. Luego la elección de E a ser más pequeña, si es necesario, tenemos que $t = (t_1, \ldots, t_m) = h(s)$ y $\langle \frac{\partial M_t}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial M_t}{\partial t_m} \rangle$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ en $H^1(M_{h(s)}, \Theta_{h(s)}) = H^1(M_t, \Theta_t)$ para cada t en esta vecindad coordenada compleja local, donde se ha utilizado el hecho de que la imagen del espacio tangente en t a B en $H^1(M_t, \Theta_t)$ por $\mathcal{KS}_t$ tiene dimensión m porque $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ es efectivamente parametrizada.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H^1(M_{h(s)}, \Theta_{h(s)}) \arrow[r, "(=)"] & H^1(M_t, \Theta_t) \\ T_sD \arrow[u, "\mathcal{KS}_s"] \arrow[r, "dh_s"] & T_tB \arrow[u, "\mathcal{KS}_t"'] \end{tikzcd}$$

Además por la regla de la cadena tenemos:

$$\mathcal{KS}_s\Big(\frac{\partial}{\partial s_\mu}\Big) = \frac{\partial N_s}{\partial s_\mu} = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial t_\lambda}{\partial s_\mu} \frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}, \ (1 \leq \mu \leq m).$$

Así demostramos que la imagen de $\mathcal{KS}_s$ está contenido en la imagen de $\mathcal{KS}_t$ para cada $s \in E$. Como $\langle \frac{\partial N_s}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial N_s}{\partial s_l} \rangle$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ como se ha señalado, esto obliga a $l \leq m$.
Ahora nos dedicamos a realizar el argumento anterior, invirtiendo los papeles de $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ y $(\mathscr{N}, D, \pi)$ para obtener $m \leq l$, donde $m = l$.

(2): Hemos demostrado anteriormente que para cada $s \in E$, $\mathcal{KS}_s(T_sD) = \mathcal{KS}_t(T_tB) \subset H^1(M_t, \Theta_t)$ donde $t = h(s)$. Así, el determinante de la matriz

$$\left(\frac{\partial t_\lambda}{\partial s_\mu}\right)$$

es distinto de cero. Pero esta matriz es precisamente la matriz jacobiana de la aplicación holomorfa $h : E \longrightarrow B$ (escrito en términos de las coordenadas locales en $s_0 \in E$ y $t_0 = h(s_0) \in B$). Por eso h tiene que ser inyectiva y por lo tanto $\Delta := h(E)$ es un dominio de B conteniendo a t_0. Ahora tome E suficientemente pequeño, por lo que Δ también será lo suficientemente pequeño de tal manera que puede representar el espacio de deformación de la familia restringida $(\mathscr{M}_\Delta, \Delta, \varpi)$ como

$$\mathscr{M}_\Delta = \Big(\bigcup_{j=1}^{k}(U_j \times \Delta)\Big)/ \sim_\Delta$$

donde $U_1, \ldots, U_k$ son los polidiscos que se pegan a través de las funciones transición $\{f_{jk}(z_k, t_0)\}$ para dar la variedad compleja compacta M_{t_0} y la relación de equivalencia $\sim_\Delta$ es definida como: si $(z_j, t) \in U_j \times \Delta$ y $(z_k, t') \in U_k \times \Delta$ entonces $(z_j, t) \sim_\Delta (z_k, t')$ si y sólo si $t = t'$ y $z_j = f_{jk}(z_k, t)$. Entonces podemos escribir

$$\mathscr{N}_E = \Big(\bigcup_{j=1}^{k}(U_j \times E)\Big)/ \sim E$$

donde la relación de equivalencia $\sim E$ es definida: si $(z_j, s) \in U_j \times E$ y $(z_k, s') \in U_k \times E$ entonces $(z_j, s) \sim E(z_k, s')$ si y sólo sí $s = s'$ y $z_j = f_{jk}(z_k, h(s))$. Ahora bien, como $h : E \longrightarrow \Delta$ es biholomorfa, consideramos h como una transformación coordenada de uno y el mismo espacio de parámetros (es decir identifica E y Δ como estructuras complejas biholomorfas en la misma variedad diferenciable). Entonces $(\mathscr{M}_\Delta, \Delta, \varpi)$ y $(\mathscr{N}_E, E, \pi)$ puede ser considerado como la misma familia analítica compleja pero con diferentes opciones de sistemas de coordenadas en $\mathscr{N}_E$ y $\mathscr{M}_\Delta$. $\square$

Motivados por el teorema anterior, declaramos lo siguiente.

Definición 4.4 (Número de Moduli)**.** *Sea M una variedad compleja compacta y $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ una familia analítica de variedades complejas compactas efectivamente parametrizada con $\varpi^{-1}(0) = M$, donde B es un dominio de $\mathbb{C}^m$ conteniendo a 0. Llamaremos a $m = dimB$ el número de Moduli de M, y lo denotamos por $m(M)$.*

Si no existe tal familia para la variedad compleja M, diremos que $m(M) = 0$. El número de Moduli $m(M)$, es el número de parámetros efectivos de la familia analítica compleja $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ con $\varpi^{-1}(0) = M$, que contiene todas las deformaciones suficientemente pequeñas para M. Por lo tanto el número de parámetros de M, en el sentido preciso, es considerado como el número de Moduli $m(M)$.

Para una variedad compleja compacta dada, M, si existe una familia analítica compleja efectivamente parametrizada $(\mathscr{M},B,\varpi)$ donde B es un dominio de $\mathbb{C}^n$ conteniendo al 0 y $\varpi^{-1}(0) = M$, se sigue que

- $\mathcal{KS}_0 : T_0B \to H^1(M, \Theta)$ es inyectiva, y
- $\mathcal{KS}_0(T_0B)$ es un subespacio lineal m-dimensional de $H^1(M, \Theta)$.

Asuma $\theta \in \mathcal{KS}_0(T_0B)$, entonces $\theta = \mathcal{KS}_0\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)$ para algún

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial t_\lambda}\Big) \in T_0B.$$

Sea $s \in \mathbb{C}$ una variable y ponga $t(s) = (t_1(s), \ldots, t_m(s)) = (c_1 s, \ldots, c_m s)$. Luego si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, tenemos $t(s) \in B$ para $|s| < \epsilon$.
Por lo tanto considerando la familia analítica compleja $\{M_{t(s)} : |s| < \epsilon\}$ inducida de $(\mathscr{M},B,\varpi)$ por la aplicación holomorfa $s \mapsto t = t(s)$, tenemos $M_{t(0)} = M_0 = M$, y de (4.15),

$$\begin{aligned}\Big(\frac{dM_{t(s)}}{ds}\Big)_{s=0} &= \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda\Big(\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}\Big)\\ &= \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda.\mathcal{KS}_0\Big(\frac{\partial}{\partial t_\lambda}\Big)\\ &= \mathcal{KS}_0\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \theta.\end{aligned}$$

Entonces, por el teorema (4.1), θ satisface la igualdad $[\theta, \theta] = 0$. Además, como se ha visto durante la demostración del teorema señalado anteriormente, θ deberá satisfacer un número infinito de condiciones. Así, en general, $\mathcal{KS}_0(T_0B) \subsetneqq H^1(M, \Theta)$, y podemos esperar que m sea bastante más pequeño a la dimensión de $H^1(M, \Theta)$.
Como $[\theta, \eta] = [\eta, \theta]$ si $\theta, \eta \in \mathcal{KS}_0(T_0B)$, se tiene

$$[\theta, \eta] = \frac{1}{2}\Big([\theta + \eta, \theta + \eta] - [\theta, \theta] - [\eta, \eta]\Big) = 0.$$

Por otro lado, si $m = dim H^1(M, \Theta)$, se tiene que $\mathcal{KS}_0(T_0B) = H^1(M, \Theta)$. De ahí, considerando el caso anterior de $\{M_{t(s)} : |s| < \epsilon\}$, podemos observar que para cualquier $\theta \in H^1(M, \Theta)$, existe una familia analítica compleja $(\mathscr{M},B,\varpi)$

con $0 \in B \subset \mathbb{C}$ tal que $\varpi^{-1}(0) = M$ y que $\left(\frac{dM_t}{dt}\right)_{t=0} = \theta$.

Veamos ahora ejemplos donde calcularemos el número de parámetros de algunas variedades complejas compactas, como son la Superficie de Hirzebruch, el Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^n$ y el Toro Complejo n-dimensional.

4.2.1. Ejemplo de la Superficie de Hirzebruch

Considere la familia analítica compleja construida en (2.13) en el caso $m = 2$ y $k = 1$. Empleando la misma notación como en el ejemplo (2.2.4), tenemos

$$M_t = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1, \quad U_1 = U_2 = \mathbb{C},$$

donde $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ y $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ son el mismo punto de M_t si y sólo si

$$z_1 z_2 = 1, \quad \zeta_1 = z_2^2 \zeta_2 + t z_2 \tag{4.16}$$

Hemos visto que $M_0 = \tilde{M}_2$, y $M_t = \tilde{M}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ para $t \neq 0$. Recordar que

$$\tilde{M}_m = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1,$$

donde $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ y $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ se identifican si $z_1 z_2 = 1$ y $\zeta_1 = z_2^m \zeta_2$. Para calcular $dim H^1(\tilde{M}_m, \Theta)$, primero probemos que

Lema 4.2.

$$H^1(\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1, \Theta) = 0$$

Demostración. Ya que $\mathbb{P}^1$ es una unión de U_1 y U_2, $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ se escribe como

$$\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 = V_1 \cup V_2, \quad \text{donde} \quad V_1 = \mathbb{C} \times U_1,\ V_2 = \mathbb{C} \times U_2,$$

es decir, $\mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$ forma un cubrimiento abierto de $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ por dos vecindades coordenadas V_1 y V_2. Ambos son biholomorfos a $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, y el Lema de Dolbeault (5.1) es válido para $\mathbb{C}^2$ considerado como un bi-disco de radio ∞. De ahí el teorema de Leray (5.2) se aplica al cubrimiento $\mathcal{B}$, y se obtiene

$$H^1(\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1, \Theta) = H^1(\mathcal{B}, \Theta) = Z^1(\mathcal{B}, \Theta)/\delta C^0(\mathcal{B}, \Theta).$$

Un 1-cociclo $\{\theta_{12}, \theta 21\}$ perteneciendo a $Z^1(\mathcal{B}, \Theta)$ consiste de campos vectoriales holomorfos θ_{12} y $\theta 21$ sobre $V_1 \cap V_2$ con $\theta_{12} = -\theta_{21}$, mientras que $C^0(\mathcal{B}, \Theta)$ es el conjunto de todos los pares $\{\theta_1, \theta_2\}$, donde éstos son campos vectoriales holomorfos sobre V_1 y V_2 respectivamente. Por lo tanto, con el fin de demostrar $H^1(\mathcal{B}, \Theta) = 0$, es suficiente para demostrar que cualquier 1-cociclo $\{\theta_{12}, \theta_{21}\}$ es representado como $\delta\{\theta_1, \theta_2\}$, es decir,

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1.$$

Sea w la coordenada en $\mathbb{C}$. Luego, en términos de las coordenadas (w, z_1) en $V_1 = U_1 \times \mathbb{P}^1$, el campo vectorial holomorfo θ_{12} sobre $V_1 \cap V_2$ es escrita en la forma

$$\theta_{12} = u(w, z_1)\frac{\partial}{\partial w} + v(w, z_1)\frac{\partial}{\partial z_1},$$

donde $u(w,z_1)$ y $v(w,z_1)$ son funciones holomorfas en $V_1 \cap V_2 = \mathbb{C} \times (U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. De ahí que se puede ampliar en series de Laurent en z_1 :

$$u(w,z_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(w) z_1^n, \qquad v(w,z_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n(w) z_1^n,$$

donde los $u_n(w)$, $v_n(w)$ son funciones enteras de w. En vista de $z_1 = 1/z_2$ y $\partial/\partial z_1 = -z_2^2(\partial/\partial z_2)$, si establecemos

$$\theta_1 = -\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(w) z_1^n \frac{\partial}{\partial w} - \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(w) z_1^n \frac{\partial}{\partial z_1},$$

$$\theta_2 = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(w) z_2^n \frac{\partial}{\partial w} - \sum_{n=1}^{+\infty} v_{-n}(w) z_2^{n+2} \frac{\partial}{\partial z_2},$$

entonces θ_1 y θ_2 son campos vectoriales holomorfo sobre V_1 y V_2, respectivamente, y satisface $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$. □

Ponga $W_1 = U_1 \times \mathbb{P}^1$ y $W_2 = U_2 \times \mathbb{P}^1$. Entonces $\mathfrak{B} = \{W_1, W_2\}$ es un cubrimiento abierto de $\tilde{M}_m$ y ambos W_1 y W_2 son biholomorfos en $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$. Así, $H^1(W_1, \Theta) = H^1(W_2, \Theta) = 0$. Luego, por teorema (**??**), tenemos

$$H^1(\tilde{M}_m, \Theta) = H^1(\mathcal{B}, \Theta) = Z^1(\mathfrak{B}, \Theta)/\delta C^0(\mathcal{B}, \Theta).$$

Representemos un 1-cociclo $\{\theta_{12}, \theta_{21}\} \in Z^1(\mathfrak{B}, \Theta)$ por el campo vectorial holomorfo $\theta_{12} = -\theta_{21}$ sobre $W_1 \cap W_2$. Entonces, este 1-cociclo pertenece a $\delta C^0(\mathfrak{B}, \Theta)$ si y solo si existe campos vectoriales holomorfos θ_1 y θ_2 respectivamente en W_1 y W_2 tal que

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_{12}. \tag{4.17}$$

Por la ecuación (2.16), θ_1 es escrita en forma

$$\theta_1 = v_1(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + \big(\alpha_1(z_1)\zeta_1^2 + \beta_1(z_1)\zeta_1 + \gamma_1(z_1)\big)\frac{\partial}{\partial \zeta_1},$$

donde $v_1(z_1), \alpha_1(z_1), \beta_1(z_1), \gamma_1(z_1)$ son funciones enteras de z_1. Similarmente, por ecuación (2.17), θ_2 es escrita de la forma

$$\theta_2 = v_1(z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + \big(\alpha_2(z_2)\zeta_2^2 + \beta_2(z_2)\zeta_2 + \gamma_2(z_2)\big)\frac{\partial}{\partial \zeta_2},$$

donde $v_2(z_2), \alpha_2(z_2), \beta_2(z_2), \gamma_2(z_2)$ son funciones enteras de z_2. Escribimos θ_{12} como sigue en términos de las coordenadas (z_1, ζ_1) :

$$\theta_{12} = v_{12}(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + \big(\alpha_{12}(z_1)\zeta_1^2 + \beta_{12}(z_1)\zeta_1 + \gamma_{12}(z_1)\big)\frac{\partial}{\partial \zeta_1}.$$

Aquí, $v_{12}(z_1), \alpha_{12}(z_1), \beta_{12}(z_1), \gamma_{12}(z_1)$ son funciones holomorfas de z_1 sobre $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$, por tanto, se expandes en series de Laurent en z_1. En términos de las coordenadas (z_1, ζ_1) con $z_1 = 1/z_2$, $\zeta_1 = z_2^m \zeta_2$ en lugar de (z_2, ζ_2), θ_2 es escrita en la forma

$$-z_1^2 v_2(z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + \Big(z_1^m \alpha_2(z_2)\zeta_1^2 + m z_1 v_2(z_2)\zeta_1 + \beta_2(z_2)\zeta_1 + \frac{\gamma_2(z_2)}{z_1^m}\Big)\frac{\partial}{\partial \zeta_1}$$

(ver pág. 51). Aquí la ecuación (4.17) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -z_1^2 v_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big) - v_1(z_1) & = & v_{12}(z_1), \\ z_1^m \alpha_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big) - \alpha_1(z_1) & = & \alpha_{12}(z_1), \\ m z_1 v_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big) + \beta_2\Big(\dfrac{1}{z_1}\Big) - \beta_1(z_1) & = & \beta_{12}(z_1), \\ \dfrac{1}{z_1^m}\gamma_2\Big(\dfrac{1}{z_2}\Big) - \gamma_1(z_1) & = & \gamma_{12}(z_1). \end{array}\right.$$

En caso $m = 0$ o 1, estas ecuaciones siempre tienen una solución. Para $m \geq 2$, sea $\gamma_{12}(z_1) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_1^n$ una expansión de Laurent de $\gamma_{12}(z_1)$. Entonces las ecuaciones dadas arriba tienen solución si y solo si $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-m+1} = 0$. Se obtiene

$$dim\, H^1(\tilde{M}_m, \Theta) = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \\ m-1, & m = 2, 3, 4, \ldots, \end{cases} \tag{4.18}$$

y para $m \geq 2$, el 1-cociclo

$$\theta_{12} = z_2^k \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \in Z^1(\mathfrak{B}, \Theta), \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{4.19}$$

forma una base de $H^1(\tilde{M}_m, \Theta) \cong H^1(\mathfrak{B}, \Theta)$.

A continuación probemos

Lema 4.3.

$$H^2(\tilde{M}_t, \Theta) = 0 \tag{4.20}$$

Demostración. Puesto que tenemos $H^1(\tilde{M}_m, \Theta) = dim H^0(\tilde{M}_m, \Omega^1(K))$ por teorema (5.5, donde $K = \bigwedge^n T^*(M)$ juega un rol importante en geometría algebraica y variedades complejas; es suficiente probar $H^0(\tilde{M}_m, \Omega^1(K)) = 0$. Como $\tilde{M}_m = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, cualquier $\psi \in H^0(\tilde{M}_m, \Omega^1(K))$ se escribe sobre $U_1 \times \mathbb{C}^{\subset} U_1 \times \mathbb{P}^1$ de la forma

$$\psi = \big(g(z_1, \zeta_1)dz_1 + h(z_1, \zeta_1)d\zeta_1\big) \otimes \big(dz_1 \wedge d\zeta_1\big),$$

donde $g(z_1, \zeta_1)$ y $h(z_1, \zeta_1)$ son funciones holomorfa de z_1 y $\zeta_1 \neq \infty$. Note que ψ requiere ser holomorfa en una vecindad de $U_1 \times \infty$. Cambiando las coordenadas ζ_1 en las coordenadas locales $w = 1/\zeta_1$ al ∞, obtenemos

$$\psi = -\left(g\Big(z_1, \frac{1}{w}\Big)dz_1 - h\Big(z_1, \frac{1}{w}\Big)\frac{dw}{w^2}\right) \otimes \left(dz_1 \wedge \frac{dw}{w^2}\right).$$

Así $(1/w^2)g(z_1, 1/w)$ y $(1/w^4)h(z_1, 1/w)$ deben ser holomorfas en w.

Por lo tanto $g(z_1, \zeta_1) = h(z_1, \zeta_1) = 0$, es decir, $\psi = 0$ □

Con estas preparaciones, volvemos al estudio de la familia analítica compleja definida por la ecuación (4.16). Donde $M_0 = \tilde{M}_2$, y $M_t = \tilde{M}_0$, $t \neq 0$, tenemos, por ecuación (4.18),

Proposición 4.1.

$$dim\, H^1(M_t, \Theta_t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Con el fin de calcular las deformaciones infinitesimales de M_t, escribimos (4.16) como

$$z_1 = f^1_{12}(z_2, \zeta_2, t), \qquad \zeta_1 = f^2_{12}(z_2, \zeta_2, t),$$

donde $f^1_{12}(z_2, \zeta_2, t) = 1/z_2$ es independiente de t_t y $f^2_{12}(z_2, \zeta_2, t) = z_2^2\zeta_2 + tz_2$. La deformación infinitesimal $dM_t/dt \in H^1(M_t, \Theta_t)$ no es más que la clase de cohomología del 1-cociclo

$$\theta_{12}(t) = \frac{\partial f^2_{12}(z_2, \zeta_2, t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = z_2\frac{\partial}{\partial \zeta_1}.$$

Para $t = 0$, $z_2(\frac{\partial}{\partial \zeta_1})$ forma una base de $H^1(M_0, \Theta_0) = H^1(\tilde{M}_2, \Theta)$ por (4.19). Así $\mathcal{KS}_0 : T_0(\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(M_0, \Theta_0)$ es sobreyectiva. Por tanto, por el teorema de completitud (3.4), la familia $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$ es completa en $t = 0$. Como $H^2(\tilde{M}_2, \Theta) = 0$ por (4.20), existe una familia $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ tal que $\varpi^{-1}(0) = \tilde{M}_2$ y que $\mathcal{KS}_0 : T_0(B) \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{M}_2, \Theta)$ con $0 \in B \subset \mathbb{C}$.

Para $t \neq 0$, $H^1(M_t, \Theta_t) = 0$ por (4.21). Así $dM_t/dt = 0$ y la familia $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$ es completa para cualquier t. Por tanto $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$ es una familia analítica compleja completa.

Para la familia completa $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$, tenemos $dimH^1(M_0, \Theta_0) = 1$, y $dimH^1(M_t, \Theta_t) = 0$ para $t \neq 0$. Esto implica, que el número de moduli $m(\tilde{M}_2)$ no está definida. Recordemos que $dimH^0(\tilde{M}_2, \Theta) = 7$ (ver pag. 52). Este ejemplo muestra que incluso si $H^2(M, \Theta) = 0$, el número de moduli $m(M)$ no está necesariamente definido en el caso $H^0(M, \Theta) \neq 0$.

4.2.2. Ejemplo del Espacio Proyectivo $\mathbb{P}^n$

Sean $U_j = \{[x_0 : \ldots : x_n] : x_j \neq 0\}_{j=0,\ldots,n}$ abiertos coordenados de manera que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$, luego como $\mathbb{P}^n$ es una variedad compleja compacta y simplemente conexa, podemos considerar los U_j como polidiscos coordenados, de ahí por el teorema de Leray tenemos que $H^q(\mathbb{P}^n, \Theta) \cong H^q(\mathfrak{U}, \Theta)$ para cualquier cubrimiento $\mathfrak{U}$ de $\mathbb{P}^n$ que cumpla $H^q(U_j, \Theta) = 0$ y como por el lema (4.1), se tiene

$$H^q(U_j, \Theta) = 0, \quad q \geq 1,\ j = 0, \ldots, n,$$

por tanto, debemos probar $H^q(\mathfrak{U},\Theta) = 0 \Leftrightarrow Z^q(\mathfrak{U},\Theta) = \delta C^{q-1}(\mathfrak{U},\Theta)$, $q \geq 1$ en efecto, se sabe que $\delta C^{q-1}(\mathfrak{U},\Theta) \subset Z^q(\mathfrak{U},\Theta)$ puesto que

$$Z^q(\mathfrak{U},\Theta) = \{c^q \in C^q(\mathfrak{U},\Theta) : \delta c^q = 0\},$$

se tiene luego $\delta\delta C^{q-1}(\mathfrak{U},\Theta) = 0$. Veamos ahora lo recíproco, sea $c^q \in Z^q(\mathfrak{U},\Theta)$ entonces $c^q \in C^q(\mathfrak{U},\Theta)$ tal que $\delta c^q = 0$, demostraremos que c^q es un coborde, es decir que existe un $c^{q-1} \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\Theta)$ tal que $\delta c^{q-1} = c^q$.
Definamos $c^{q-1} = \{c_{k_0\ldots k_{q-1}}\}$, y hagamos $q = 1$ en el proyectivo 2-dimensional $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$, entonces debemos probar que existe $b = \{b_j\} \in C^0(\mathfrak{U},\Theta)$ tal que $\delta b = c^1$ donde $c^1 = \{c_{k_0k_1}\}$, es decir que cumpla $c_{k_0k_1} = b_{j_1} - b_{j_0}$.
Veamos en $U_0 \cap U_1$ donde

$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 \neq 0, x_1 \neq 0\} \\ &= \left\{\left[\frac{x_0}{x_0} : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right] : x_0 \neq 0\right\} \\ &= \{[1 : x : y] : x \neq 0\} \end{aligned}$$

ya que $\{c_{k_0k_1}\} \in Z^1(\mathfrak{U},\Theta)$ es un campo vectorial holomorfo del haz de gérmenes de campos vectoriales Θ sobre $\mathfrak{U}$, entonces expresamos

$$c_{k_0k_1} = c^0_{k_0k_1}\frac{\partial}{\partial x} + c^1_{k_0k_1}\frac{\partial}{\partial y}$$

donde $c^0_{k_0k_1}$ y $c^1_{k_0k_1}$ son holomorfas en $U_0 \cup U_1$.
Luego, $c^0_{k_0k_1} = \sum\limits_{q_1\in\mathbb{N},\, q_2\in\mathbb{Z}} c^0_{k_0k_1,q_1q_2}x^{q_1}y^{q_2}$ la podemos reescribir como

$$c^0_{k_0k_1} = \underbrace{\sum_{q_1\in\mathbb{N},\, q_2\in\mathbb{Z}^+} c^0_{k_0k_1,q_1q_2}x^{q_1}y^{q_2}}_{=:b^0_{j_1}\in\mathcal{O}(U_0)} - \underbrace{\sum_{q_1\in\mathbb{N},\, q_2\in\mathbb{Z}^-} c^0_{k_0k_1,q_1q_2}x^{q_1}y^{q_2}}_{=:b^0_{j_0}\in\mathcal{O}(U_1)}$$

entonces $c^0_{k_0k_1} = b^0_{j_1} - b^0_{j_0}$. Análogamente tenemos $c^1_{k_0k_1} = b^1_{j_1} - b^1_{j_0}$.
Por lo tanto en $U_0 \cap U_1$ se tiene

$$c_{k_0k_1} = \underbrace{\left(b^0_{j_1}\frac{\partial}{\partial x} + b^1_{j_1}\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{=:b_{j_1}} - \underbrace{\left(b^0_{j_0}\frac{\partial}{\partial x} + b^1_{j_0}\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{=:b_{j_0}}$$

luego $c_{k_0k_1} = b_{j_1} - b_{j_0}$ donde $b_{j_1} \in \Theta(U_1)$ y $b_{j_0} \in \Theta(U_0)$.
Similarmente se obtiene para

$$U_0 \cap U_2 = \{[x : y : 1] : x \neq 0\} \text{ que } c_{k_0k_2} = d_{j_2} - d_{j_0}$$

y para

$$U_1 \cap U_2 = \{[x : 1 : y] : y \neq 0\} \text{ que } c_{k_1k_2} = e_{j_2} - e_{j_1},$$

de ahí tenemos que $c_{k_1k_2} - c_{k_0k_2} + c_{k_0k_1} = 0$ de donde se obtiene $e_{j_2} = d_{j_2}$, $b_{j_1} = e_{j_1}$ y $d_{j_0} = b_{j_0}$.
Esto quiere decir que para cada par de abiertos coordenados en $\mathbb{P}^2$ se cumple que existe $b = \{b_j\} \in C^0(\mathfrak{U}, \Theta)$ tal que $\delta b = c^1$ donde $c^1 = \{c_{k_0k_1}\}$, generalizando para $\mathbb{P}^n$, se comprueba lo mismo, por lo tanto obtenemos que $H^1(\mathbb{P}^n, \Theta) = 0$, es así que se tiene $m = 0$, luego $\mathbb{P}^n$ no contiene parámetros variables y $0 = dim H^1(\mathbb{P}^n, \Theta)$.

4.2.3. Ejemplo del Toro Complejo n-dimensional

Como el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$ es un grupo de Lie complejo conmutativo con la suma de vectores como operación de grupo, y es $2n$-dimensional como espacio vectorial real, podemos fijar una base sobre $\mathbb{R}$ con $2n$-vectores linealmente independientes (L.I), $w_j := (w_j^1, \ldots, w_j^n) \in \mathbb{C}^n$ con $j = 1, \ldots, 2n$. Entonces el subconjunto de $\mathbb{C}^n$ definido por

$$G = \Big\{ \sum_{j=1}^{2n} (m_j w_j) : m_j \in \mathbb{Z} \Big\}$$

es un reticulado en $\mathbb{C}^n$ (es decir, un $\mathbb{Z}$-submódulo de rango maximal, rango $2n$ en $\mathbb{C}^n$, por tanto isomorfo a $\mathbb{Z}^{2n}$) y, además, un subgrupo discreto del grupo de Lie $\mathbb{C}^n$. G tiene como dominio fundamental al paralelepípedo real cerrado $2n$-dimensional dado por

$$F = \Big\{ \sum_{j=1}^{2n} (t_j w_j) : 0 < t_j < 1 \Big\}.$$

F es claramente compacto y conexo. Luego, $M := \mathbb{C}^n / G$ es un grupo de Lie complejo conmutativo compacto conexo n-dimensional llamado toro complejo n-dimensional y tiene a $\mathbb{C}^n$ como espacio universal que lo cubre junto al grupo de transformación de G.
Sea S el conjunto de las matrices de orden n donde la parte imaginaria tiene determinante positiva. Escribimos un elemento $s \in S$ como $s = (s^\alpha_\beta)$ donde α denota el índice de la fila y β el índice de la columna. Entonces S es identificado como una subvariedad abierta, de la variedad compleja $\mathbb{C}^{n^2}$, de matrices de orden n con s^α_β denotando la $(n(\alpha-1)+\beta)$-ésima coordenada de $\mathbb{C}^{n^2}$. Luego, para cada matriz $s \in S$ definimos una matriz con n-filas y $2n$-columnas, cuyas entradas están dadas por las componentes de los $2n$-vectores L.I de la $\mathbb{R}$-base de $w_k = (w_k^1, \ldots, w_k^n)$ donde $k = 1, \ldots, 2n$, pero entre $w_1, \ldots, w_{2n}$ existen n-vectores L.I sobre $\mathbb{C}^n$, entonces podemos asumir que dichos vectores son $w_{n+1}, \ldots, w_{2n}$.
Por lo tanto, podemos denotar a la matriz como $w(s) = (w_j^\alpha(s))$, mediante $w_j^\alpha(s) = \delta_j^\alpha$ para $j = 1, \ldots, n$ y $w_j^\alpha(s) = s^\alpha_\beta$ para $j = n+\beta$, $\beta = 1, \ldots, n$, ésta matriz es llamada matriz periodo asociado a M, en términos de éstas

coordenadas es

$$w(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & s^1_{n+1} & s^1_{n+2} & \cdots & s^1_{2n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s^2_{n+1} & s^2_{n+2} & \cdots & s^2_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s^n_{n+1} & s^n_{n+2} & \cdots & s^n_{2n} \end{bmatrix} \qquad (4.22)$$

Defina el siguiente conjunto de aplicaciones $\mathbb{C}^n \times S \to \mathbb{C}^n \times S$

$$\hat{G} = \{g_j : (z, s) \mapsto (z + w_j(s), s); j = 1, \ldots, 2n\}$$

donde $w_j(s)$ es el vector en $\mathbb{C}^n$ con componentes correspondientes a las entradas de la j-ésima columna de $w(s)$. Cada g_j es un automorfismo holomorfo de $\mathbb{C}^n \times S$. Sea luego, G el subgrupo abeliano aditivo de automorfismo de $\mathbb{C}^n \times S$ generado por $\hat{G}$. Luego, G actúa propiamente discontinua sin puntos fijos y por tanto el cociente $B := (\mathbb{C}^n \times S)/G$ es una variedad compleja, por teorema (2.3), además la proyección canónica sobre el segundo factor de $\mathbb{C}^n \times S$ induce una aplicación holomorfa $\varpi : B \to S$ cuya fibra en cada punto $s \in S$ es un toro de dimensión n con matriz periodo $w(s)$. Es así que, $(\mathscr{B}, S, \varpi)$ es una familia analítica compleja del toro complejo n-dimensional.
Entonces dada ésta familia, demostraremos que es una familia completa efectivamente parametrizable, probando que la aplicación infinitesimal Kodaira-Spencer es un isomorfismo en cada $s \in S$ porque así podemos aplicar el teorema de completitud, y el número de Moduli para cualquier toro complejo T^n es definido e igual a $n^2 = dim(H^1(T^n, \Theta_{T^n}))$. Note que la dimensión de S es también n^2 por la definición misma de S (se puede identificar naturalmente de manera obvia con un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$).

Sea $(\mathscr{B}, S, \varpi) = \{B_s := \varpi{-}1, s \in S\}$, Θ_s el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre B_s. Sea p la aplicación cubrimiento canónico localmente biholomorfo de $\mathbb{C}^n \times S \to (\mathbb{C}^n \times S)/G =: \mathscr{B}$, $\{U_i, i \in \mathbb{N}\}$ un cubrimiento localmente finito de $\mathscr{B}$ donde cada U_i es escogido lo suficientemente pequeño de modo que su imagen inversa por p sea la unión disjunta de infinitos dominios $\{U_{ij}, j \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{C}^n \times S$ siendo cada uno de ellos una aplicación biholomorfa por p en U_i.
Elija uno de los U_{ij} para cada i, digamos U_{i1}. Sea $(Z^1, \ldots, z^n)$ coordenadas estándar sobre $\mathbb{C}^n$ y $s = (s^\alpha_\beta) \in S \subset \mathbb{C}^{n^2}$ coordenadas sobre S inducida (de las coordenadas estándar de $\mathbb{C}^n$) vía su inclusión como un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^{n^2}$. Por lo tanto tenemos a $(z^1, \ldots, z^n, s)$ como coordenadas sobre $\mathbb{C}^n \times S$. Luego sea $(z^1_i, \ldots, z^n_i, s)$ la restricción de estas coordenadas en U_{i1} para cada i. Como $p : U_{i1} \to U_i$ es biholomorfo, podemos considerar, para cada i, las coordenadas $(z^1_i, \ldots, z^n_i, s)$ en U_{i1} como coordenadas en U_i vía p. Escribimos así, por simpleza, $(z^1_i, \ldots, z^n_i, s) = (z_i, s)$. Por tanto tenemos el sistema de coordenadas locales $\{(U_i, (z_i, s)); i \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{B}$. Entonces, por la definición misma de $\mathscr{B}$ tenemos que en $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$z^\alpha_i = z^\alpha_k + m^\alpha_{ik} + \sum_{\beta=1}^{n} m^{n+\beta}_{ik} s^\alpha_\beta, \quad m^j_{ik} \in \mathbb{Z}, \; (1 \leq \alpha \leq n) \qquad (4.23)$$

Las funciones de transición de $\mathscr{B}$ relativa al cubrimiento $\{U_i, i \in \mathbb{N}\}$ serán dadas por

$$f_{ik}^{\alpha}(z_k, s) = z_k^{\alpha} + m_{ik}^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n} m_{ik}^{n+\beta} s_{\beta}^{\alpha}, \quad m_{ik}^{\alpha} \in \mathbb{Z},\ (1 \leq \alpha \leq n).$$

Aquí la deformación infinitesimal de B_s a lo largo de $(\partial/\partial s_{\beta_0}^{\alpha_0})$ es dado por la clase de cohomología $\theta(s) \in H^1(B_s, \Theta_s)$ definida por el 1-cociclo $\{\theta_{ik}(s)\}$ donde

$$\theta_{ik}(s) = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial f_{ik}^{\gamma}(z_k, s)}{\partial s_{\beta_0}^{\alpha_0}} \frac{\partial}{\partial z_i^{\gamma}} = m_{ik}^{n+\beta_0} \frac{\partial}{\partial z_i^{\alpha_0}} \tag{4.24}$$

Sea Ψ_s el haz de gérmenes de campos vectoriales C^∞, de la forma $\displaystyle\sum_{\alpha} \psi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$ sobre B_s. Tenemos entonces la secuencia exacta corta de haces sobre B_s dado por

$$0 \longrightarrow \Theta_s \xrightarrow{i} \Psi_s \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\partial}\Psi_s \longrightarrow 0$$

de la cual obtenemos la secuencia exacta larga en cohomología (ver teorema (5.1) en el Apéndice)

$$0 \longrightarrow H^0(B_s, \Theta_s) \xrightarrow{i} H^0(B_s, \Psi_s) \xrightarrow{\bar{\partial}} H^0(B_s, \bar{\partial}\Psi_s) \xrightarrow{\delta^*} H^1(B_s, \Theta_s) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^(B_s, \Psi_s) \longrightarrow H^1(B_s, \bar{\partial}\Psi_s) \longrightarrow \cdots$$

Donde se puede comprobar que la aplicación $H^1(B_s, \Psi_s) \to H^1(B_s, \bar{\partial}\Psi_s)$, dada en la secuencia exacta larga anterior, es inyectiva. Por lo tanto δ^* es sobreyectiva. Así tenemos:

$$H^1(B_s, \Theta_s) = H^0(B_s, \bar{\partial}\Psi_s)/\bar{\partial}H^0(B_s, \Psi_s)$$

Vamos a utilizar cohomología de Čech para los cálculos de abajo (véanse las observaciones al final de la sección (5.4) en el Apéndice). En primer lugar, a partir de las relaciones (4.23) anteriores se obtiene:

$$\sum_{\beta=1}^{n} m_{ik}^{n+\beta}(s_{\beta}^{\alpha} - \overline{s_{\beta}^{\alpha}}) = z_i^{\alpha} - \overline{z_i^{\alpha}} - (z_k^{\alpha} - \overline{z_k^{\alpha}}) \tag{4.25}$$

Por la definición de S, ya que $s = (s_{\beta}^{\alpha}) \in S$, la determinante de $(s - \bar{s})$ es distinto de cero; por lo tanto, podemos establecer $u = (s - \bar{s})^{-1} = (u_{\beta}^{\alpha})$. Entonces tenemos

$$m_{ik}^{n+\beta_0} = \sum_{\gamma=1}^{n} (\overline{z_k^{\gamma}} - z_k^{\gamma}) u_{\gamma}^{\beta_0} - \sum_{\gamma=1}^{n} (\overline{z_i^{\gamma}} - z_i^{\gamma}) u_{\gamma}^{\beta_0} \tag{4.26}$$

Ahora establezca en cada intersección no vacía $U_k \cap B_s$

$$\psi_k = \sum_{\gamma}^{n} (\overline{z_k^\gamma} - z_k^\gamma) u_\gamma^{\beta_0} \frac{\partial}{\partial z_k^{\alpha_0}}.$$

Luego de las relaciones (4.24) y (4.26) tenemos en cada intersección no vacía $U_i \cap U_k \cap B_s$

$$\psi_k - \psi_i = \sum_{\gamma}^{n} \big((\overline{z_k^\gamma} - z_k^\gamma) - (\overline{z_i^\gamma} - z_i^\gamma) \big) u_\gamma^{\beta_0} \frac{\partial}{\partial z_i^{\alpha_0}} = m_{ik}^{n+\beta} \frac{\partial}{\partial z_i^{\alpha_0}} = \theta_{ik}(s),$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\dfrac{\partial}{\partial z_i^{\alpha_0}} = \dfrac{\partial}{\partial z_k^{\alpha_0}}$ en $U_i \cap U_k$.

Sea $\mathcal{U}_s = \{U_{ks};\, U_{ks} := U_k \cap B_s \neq \emptyset\}$. Note que ψ_k es una sección de Ψ_s sobre U_{ks} y $\bar{\partial}\psi_k - \bar{\partial}\psi_i = 0$ sobre $U_{ks} \cap U_{is} \neq \emptyset$. De ahí que estos $\bar{\partial}\psi_k$ se pegan para dar una sección global $\varphi(s)$ de $\bar{\partial}\Psi_s$ es decir, una sección sobre B_s tal que

$$\varphi(s)|_{U_{ks}} = \bar{\partial}\psi_k = \sum_{\gamma=1}^{n} u_\gamma^{\beta_0} (d\overline{z_k^\gamma} \otimes \frac{\partial}{\partial_k^{\alpha_0}}).$$

Ahora $c^0 = \{\psi_k\} \in C^0(\mathcal{U}_0, \Psi_s)$. Entonces $\bar{\partial} c^0 = \varphi(s)$ y $\delta c^0 := \{\psi_k - \psi_i\} = \{\theta_{ik}(s)\}$ (ver la sección (5.4) del Apéndice). Al analizar la forma en que δ^* es definida, es fácil ver que estos dos últimos cálculos implican que $\delta^*\varphi(s) = \theta(s)$ donde $\theta(s) \in H^1(B_s, \Theta_s)$ es la clase de cohomología determinada por $\{\theta_{ik}(s)\}$.

Ahora $\mathbb{H}^{0,1}(TB_s)$ denota un vector armónico TB_s-forma de tipo $(0,1)$ donde TB_s denota las fibras tangentes de B_s. A continuación, podemos comprobar que bajo el isomorfismo del teorema (5.6) Hodge-Dolbeault tenemos:

$$H^1(B_s, \Theta_s) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,1}(B_s, TB_s) \cong \mathbb{H}^{0,1}(TB_s) : \theta(s) \mapsto \varphi(s).$$

Por otra parte, como resultado de los cálculos explícitos

$$\mathbb{H}^{0,1}(TB_s) = \left\{ \varphi;\ \varphi = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c_\beta^\alpha \Big(d\bar{z^\beta} \otimes \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \Big),\ c_\beta^\alpha \in \mathbb{C} \right\},$$

tenemos la dimensión de $H^1(B_s, \Theta_s)$ como n^2. Además, dado que el factor determinante de $u = (s - \bar{s})^{-1}$ es diferente de cero, los elementos

$$\left\langle \varphi(s) = \sum_{\gamma=1}^{n} u_\gamma^{\beta_0} \Big(d\bar{z}^\gamma \otimes \frac{\partial}{\partial z^{\alpha_0}} \Big);\ 1 \leq \alpha_0, \beta_0 \leq n \right\rangle$$

son linealmente independientes. De ahí que la aplicación infinitesimal de Kodaira-Spencer $\mathcal{KS}_s : T_sS \to H^1(B_s, \Theta_s)$ es un isomorfismo.

Por lo tanto, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 4.4. *Si la familia analítica compleja* $(\mathscr{B}, S, \varpi)$ *es completa y efectivamente parametrizable. El número de Moduli de cualquier toro complejo* n*-dimensional* B *es definido e igual a* n^2*. También tenemos que la dimensión de* $H^1(B, \Theta)$ *es igual al número de Moduli de* B*.*

Capítulo 5

Apéndice

Una persona bella, en el auténtico sentido de la palabra,
es aquella que vive cada día con esmero y dedicación, y que además tiene
la capacidad de descubrir la belleza en los diferentes aspectos de la vida.
Daisaku Ikeda.

5.1. Teoría de Haces

Definición 5.1. *Sea un espacio topológico X con una topología τ. Un pre-haz $\mathcal{F}$ en X consta de los siguientes datos:*

(i) Una colección de conjuntos no vacíos $\mathcal{F}(U)$, con $U \in \tau$.

(ii) Una colección de aplicaciones $\rho = \{\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)\}$ donde $U \subset V$, ρ_U^V homomorfismos (restricción) y cumple propiedad de transitividad.

(iii) $\rho_U^U = Id_{\mathcal{F}(U)}$ para cada U, y $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$ para $U \subset V \subset W$.

El conjunto $\mathcal{F}(U)$ es llamado el conjunto de secciones del pre-haz $\mathcal{F}$ sobre U.

Mas aún, un pre-haz $\mathcal{F}$ se supone que debe llevar una estructura algebraica adicional. Por ejemplo:

Definición 5.2. *Un pre-haz $\mathcal{F}$ es llamado un pre-haz de grupo abeliano (resp. anillos, R-módulos, algebras) si todos los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ son grupos abelianos (resp. anillos, R-módulos, algebras) y si las aplicaciones ρ_U^V son morfismos de estas estructuras algebraicas. En este caso, siempre asumimos que $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$*

Ejemplo 5.1. *Sea X una superficie de Riemann, entonces un pre-haz $\mathcal{F}$ de X será el espacio de gérmenes de funciones holomorfas, es decir $\mathcal{O}(U)$ con $\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ tal que lleva una aplicación holomorfa f en $f\,|_U$.*

Definición 5.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $(\mathcal{F}, \rho)$ un pre-haz, éste es llamado un haz. Si dado un $\mathfrak{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ se cumple las siguientes condiciones:*

(i) Dado $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$ entonces $\exists\, f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$

(ii) Sean $f, g \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(f) = \rho_{U_i}^U(g)$ entonces $f = g$

5.2. Grupo de Cohomología

Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X. Denotamos $U_k = U_{k_0 \ldots k_q} = U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_q}$, donde $k = (k_0 \ldots k_q) \in I^{q+1}$ y q es un entero no negativo.

Definición 5.4. *Una q-cocadena de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{F}$ es una función $c^q = \{\sigma_k\}$ el cual asigna a cada $(q+1)$-upla ordenada $k = (k_0 \ldots k_q) \in I^{q+1}$ una sección $\sigma_k \in \Gamma(U_k, \mathcal{F})$ además que σ_k es una función alternante de k.*

Simbólicamente, c^q es una q-cocadena de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{F}$ si

$$\begin{array}{rcl} c^q : I^{q+1} & \rightarrow & \Gamma(U_k, \mathcal{F}) \\ k & \mapsto & c^q(k) = \sigma_k, \end{array}$$

y una función es llamada *alternante* si

1. $\sigma_{k_0 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_q} = 0$ si cualesquiera dos de $(k_0, \ldots, k_p)$ son iguales.

2. $(\sigma_{k_0 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_q})_{k \in I^{q+1}} = -(\sigma_{k_0 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_q})_{k \in I^{q+1}}$, $0 \leq i < j \leq q$.

Usaremos la notación $\sigma_{k_0 \ldots k_q}$ para representar una q-cocadena. El conjunto de q-cocadenas de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{F}$ es denotado por $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
En símbolos

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \;=\; \{c^q = \{\sigma_{k_0 \ldots k_q}\}_{k \in I^{q+1}} \,/\, \sigma_{k_0 \ldots k_q} \in \Gamma(U_{k_0 \ldots k_q}, \mathcal{F})\}$$

Observaciones 5.2.1.

1. $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tiene la estructura de grupo abeliano, pues es un producto de grupos abelianos de secciones.

2. $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ asocia a cada abierto U del cubrimiento $\mathcal{U}$ una sección de $\mathcal{F}(U)$.

3. Un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi_q^* : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \rightarrow & C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\ (\sigma_{k_0 \ldots k_q})_{k \in I^{q+1}} & \mapsto & \phi_q^*(\sigma_{k_0 \ldots k_q})_{k \in I^{q+1}} = (\phi^*(\sigma_{k_0 \ldots k_q}))_{k \in I^{q+1}} \end{array}$$

llevando $(\sigma_{k_0 \ldots k_q})_{k \in I^{q+1}}$ en $(\phi^*(\sigma_{k_0 \ldots k_q}))_{k \in I^{q+1}}$ donde ϕ^* denota las aplicaciones inducidas sobre grupos de secciones.

Definición 5.5. *El* operador coborde $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ *es definido de la siguiente forma*

$$\delta\{\sigma_{k_0 \ldots k_q}\}_{k \in I^{q+1}} = \{\tau_{k_0 \ldots k_{q+1}}\}_{k \in I^{q+2}},$$

donde

$$\{\tau_{k_0 \ldots k_{q+1}}\}_{k \in I^{q+2}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j r_j \{\sigma_{k_0 \ldots \widehat{k_j} \ldots k_{q+1}}\}_{k \in I^{q+1}}, \;\; k \in I^{q+2},$$

$\widehat{k}_j$ simboliza la ausencia del índice j y r_j se refiere a la aplicación de la restricción $r_{U_{k_0\ldots k_{q+1}}\; U_{k_0\ldots \widehat{k}_j\ldots k_{q+1}}}$, es decir

$$r_j(\sigma_{k_0\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}})_{k\in I^{q+1}} = r_{U_{k_0\ldots k_{q+1}}\; U_{k_0\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}}}(\sigma_{k_0\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}})_{k\in I^{q+1}}.$$

(a.1) Si $c^q = \{\sigma_k\} \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$, entonces $\delta\{\sigma_k\} \in C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
En efecto, es suficiente verificar que $\delta\{\sigma_k\}$ es una función alternante,

$$\begin{aligned}
\delta(\sigma_{k_0 s_1\ldots k_q}) &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j r_j(\sigma_{k_0k_1\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}}) \\
&= r_0(\sigma_{k_1k_2\ldots k_{q+1}}) - r_1(\sigma_{k_0k_2\ldots k_{q+1}}) + \sum_{j=2}^{q+1}(-1)^j r_j(\sigma_{k_0k_1\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}}) \\
&= -r_1(\sigma_{k_0k_2\ldots k_{q+1}}) + r_0(\sigma_{k_1k_2\ldots k_{p+1}}) - \sum_{j=2}^{q+1}(-1)^j r_j(\sigma_{k_1k_0\ldots\widehat{k}_j\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}})) \\
&= -\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j r_j(\sigma_{k_1k_0\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}}) \\
&= -\delta(\sigma_{k_1 s_0\ldots k_q}),
\end{aligned}$$

y si $k_0 = k_1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta(\sigma_{k_0k_1\ldots k_p}) &= r_0(\sigma_{k_1k_2\ldots k_{q+1}}) - r_1(\sigma_{k_0k_2\ldots k_{q+1}}) \\
&= r_0(\sigma_{k_1k_2\ldots k_{q+1}}) - r_1(\sigma_{k_1k_2\ldots k_{q+1}}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dado que $\displaystyle\sum_{j=2}^{q+1}(-1)^j r_j(\sigma_{k_0k_1\ldots\widehat{k}_j\ldots k_{q+1}}) = 0.$

Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un homomorfismo de haces, denotando por δ los operadores cobordes asociados a ambos haces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi_q^*"] \arrow[d, "\delta"] & C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[d, "\delta"] \\
C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi_{q+1}^*"] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}),
\end{tikzcd}$$

así tenemos que

$$\phi_{q+1}^* \circ \delta = \delta \circ \phi_q^*$$

Ahora definamos

$$Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c^q \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \delta c^q = 0\},$$

que será el núcleo del operador coborde $\delta : C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Los elementos de $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ son llamados *q-cociclos*. Para $q \geq 1$, pasamos a definir

$$B^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c^q \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \quad \text{existe } c^{q-1} \in C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \text{ y } \delta(c^{q-1}) = c^q\}$$

que es la imagen del operador coborde $\delta : C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$.
Los elementos de $B^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ son llamados *q-cobordes.*
Así, $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y $B^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ denotan los grupos de q-cociclos y q-cobordes respectivamente. En el caso que $q = 0$, convendremos que $C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ y $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$.
Luego tenemos que $\delta\delta C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$, así $B^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es un subgrupo de $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$, es decir $B^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subset Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$, para todo $q \geq 0$.
Podemos definir

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\delta C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})} = \frac{Z^q(\mathcal{U},\mathcal{F})}{B^q(\mathcal{U},\mathcal{F})}$$

el q-ésimo *Grupo de Cohomología de* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en* $\mathcal{F}$.

Para $q = 0$, definimos

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Si $\{\sigma_j\} \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$, entonces $\sigma_j = \sigma_k$ en $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, por lo que define un elemento $\sigma \in \Gamma(M,\mathcal{F})$ con $\sigma = \sigma_j$ en U_j. Luego tenemos $\sigma_j = r_{U_j}\sigma$. Así, podemos identificar $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ con $\Gamma(M,\mathcal{F})$, que es,

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(M,\mathcal{F})$$

Observaciones 5.2.2.

1. *Como los homomorfismos* $\phi_q^* : C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ *inducidos por un homomorfismo de haces* $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, *conmutan con los operadores coborde, ellos inducen homomorfismos entre grupos de cohomología*

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\mathcal{U}}^q : H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & H^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \\ [\sigma_{k_0\ldots k_q}] & \mapsto & \phi_{\mathcal{U}}^q([\sigma_{k_0\ldots k_q}]) = [\phi_q^*(\sigma_{k_0\ldots k_q})]. \end{array}$$

2. *Como* $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c^0 \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \delta(c^0) = 0\}$ *y* $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$, *se tiene* $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{[c^0] : c^0 = \{\sigma_j\} \in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\} = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

5.3. Cohomológía de Haces: Secuencia Exacta

sea $\mathcal{F}$ un haz sobre una variedad diferenciable M, y $\varpi : \mathcal{F} \to M$ su proyección.

Definición 5.6. *Un subconjunto* $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ *es llamado un subhaz de* $\mathcal{F}$ *si las siguientes condiciones son satisfechas:*

(i) $\mathcal{F}'$ *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{F}$.

(ii) $\varpi(\mathcal{F}') = M$.

(iii) Para cualquier $p \in M$, $\mathcal{F}'_p = \varpi^{-1}(p) \cap \mathcal{F}'$ *es un* K*-submódulo de* $\mathcal{F}_p$.

Claramente $\mathcal{F}'$ en sí mismo es un haz sobre M.
Sea $\mathcal{F}''$ un haz sobre M con la proyección ϖ''.

Definición 5.7. *Un homomorfismo h de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}''$ es definida como una aplicación continua de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}''$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(i) $\varpi'' \circ h = \varpi$.

(ii) *Para cualquier* $p \in M$, $h : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}''_p$ *es un* K*-homomorfismo.*

Definición 5.8. $h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ *es llamado un isomorfismo de* $\mathcal{F}$ *en* $\mathcal{F}''$, *si* h *es un homomorfismo y si para cualquier* $p \in M$, $h : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}''_p$ *es un* K*-isomorfismo.*

Definición 5.9. *Una secuencia de haces y homomorfismos de haces sobre una variedad* M

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{h_0} \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{m-1} \xrightarrow{\quad h_{m-1} \quad} \mathcal{F}_m \xrightarrow{h_m} \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_l \qquad (5.1)$$

es exacta si, $h_{m-1}(\mathcal{F}_{m-1}) = Ker\ h_m$, *con* $m = 1, 2, \ldots, l-1$. *Similarmente una secuencia de* K*-módulos y* K*-homomorfismos*

$$H_0 \xrightarrow{h_0} \cdots \longrightarrow H_{m-1} \xrightarrow{\quad h_{m-1} \quad} H_m \xrightarrow{h_m} \cdots$$

es llamada exacta si, $h_{m-1}(H_{m-1}) = Ker\ h_m$, *con* $m = 1, 2, \ldots, l-1$.

Supóngase que dada una secuencia exacta de haces sobre M

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \qquad (5.2)$$

investiguemos la relación entre los grupos de cohomología $H^q(M, \mathcal{F}')$, $H^q(M, \mathcal{F})$ y $H^q(M, \mathcal{F}'')$. La exactitud dado en la ecuación anterior (5.2) implica que el $Ker\ i = 0$, $Ker\ h = i(\mathcal{F}')$, y $\mathcal{F}'' = h(\mathcal{F})$. Por lo tanto, $\mathcal{F}' = i(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ es un subhaz e i es la aplicación inclusión. De aquí también se tiene el isomorfismo, $\mathcal{F}/\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}''$, entre $\mathcal{F}''$ y el haz cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Escribimos $H^q(\mathcal{F}')$ para $H^q(M, \mathcal{F}')$, etc., por simplicidad. El homomorfismo $\mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F}$ induce un homomorfismo $H^q(\mathcal{F}') \xrightarrow{i} H^q(\mathcal{F})$, y $\mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}''$ induce un homomorfismo $H^q(\mathcal{F}) \xrightarrow{h} H^q(\mathcal{F}'')$. Siendo así, el siguiente teorema es fundamental.

Teorema 5.1. *La secuencia exacta de haces* $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ *induce la secuencia exacta de grupos de cohomología*

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}') \xrightarrow{i} H^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{h} H^0(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{F}') \xrightarrow{i} \cdots \qquad (5.3)$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^q(\mathcal{F}') \xrightarrow{i} H^q(\mathcal{F}) \xrightarrow{h} H^q(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(\mathcal{F}') \xrightarrow{i} \cdots$$

5.4. Cohomología de Čech

Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U} := \{U_i,\ i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{F}$ un haz de grupo abeliano sobre X. Sea I un conjunto de índices debidamente ordenado. Denotemos $U_{i_0 i_1 \ldots i_p}$ la intersección $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ para cualquier subconjunto finito $\{i_0, i_1, \ldots, i_p\} \subset I$.

Para cada entero $p \geq 0$, se define el siguiente grupo abeliano:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Pi_{i_0 < i_1 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}),$$

donde Π denota la operación de tomar un producto directo de grupos abelianos. Así, un elemento $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es una colección

$$\alpha = \{\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_p},\ i_0 < i_1 < \cdots < i_p\},$$

donde $\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_p})$ para cada $(p+1)$-tupla $(i_0, i_1, \ldots, i_p)$ de elementos de I con $i_0 < i_1 < \cdots < i_p$.

Para cada entero $p \geq 0$, definir el homomorfismo de grupo abeliano siguiente:

$$d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ \ \alpha \mapsto d^p\alpha,$$

donde para $\alpha = \{\alpha_{i_0 i_1 \ldots i_p},\ i_0 < i_1 < \cdots < i_p\}$ como antes, definimos $d^p\alpha$ como sigue:

$$d^p\alpha = \beta = \{\beta_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}};\ i_0 < i_1 < \cdots < i_{p+1}\},\ \ \beta_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}} \in \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}),$$

donde $\beta_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}$ es la suma de las restricciones a $\mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}})$ de los siguientes $(p+2)$ secciones locales de $\mathcal{F}$:

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{p+1}};\ (-1)^k \alpha_{i_0 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{p+1}},\ (1 \leq k \leq p);\ (-1)^{p+1}\alpha_{i_0 \ldots i_p}.$$

Es fácil ver que $d^{p+1} \circ d^p = 0$ para cada $p \geq 0$, de modo que la $Img(d^{p+1}) \subset Ker(d^p)$ para cada $p \geq 1$. Por lo tanto la siguiente secuencia es un complejo de grupos abelianos y homomorfismos de grupo, ver la sección (5.3):

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : 0 \xrightarrow{\quad d^{-1} \quad} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\quad d^2 \quad} \cdots$$

Se define el grupo abeliano $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, para cada entero $p \geq 0$, llamado el p-ésimo grupo de cohomología e Čech de X con valores en el haz $\mathcal{F}$ en relación al cubrimiento $\mathcal{U}$ como el cociente siguiente:

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Ker\ (d^p)/Img\ (d^{p-1}).$$

Cada aplicación d^p es llamado la aplicación coborde o diferenciable para el complejo $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. A menudo denotamos el *Kernel* de d^p por $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y llamamos a sus elementos como p-cociclos. Además, los elementos de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ son llamados p-cocadenas y los de la *Imagen* son llamados p-cobordes.

Ahora suponemos además que X es una variedad compleja compacta y que cada conjunto abierto U_i es biholomorfo a un polidisco en $\mathbb{C}^n$, donde n es la dimensión de X como una variedad compleja, y que el mayor grupo de cohomología de haces de cualquier intersección finita de éstos conjuntos abiertos con valores en el has $\mathcal{F}$ limitado a ésta intersección, es vacía (esta condición se cumple, por ejemplo, si se es capaz de encontrar un cubrimiento de tal manera que cualquier intersección finita de conjuntos abiertos de éste cubrimiento sea biholomorfo a un polidisco). Dicho cubrimiento no existe para cualquier variedad compleja compacta, y es llamado un cubrimiento de Leray.

Definición 5.10 (Cubrimiento de Leray)**.** *Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento abierto del espacio topológico X, y $\mathcal{F}$ un haz de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de Leray respecto a $\mathcal{F}$ si, para cada conjunto finito $i_1, \ldots, i_n$ de índices, y para todo $k > 0$, $H^k(U_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \mathcal{F}) = 0$.* [1]

Pasamos a definir el p-ésimo grupo de Cohomología de Čech de X con valores en el haz $\mathcal{F}$ como el grupo abeliano $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definido antes; más aún, este grupo se determinada de manera única, independientemente de la elección del cubrimiento $\mathcal{U}$, siempre y cuando sea un cubrimiento de Leray como lo requerimos arriba, por lo que se denota este grupo como $\check{H}^p(X, \mathcal{F})$.

Teorema 5.2 (Teorema de Leray)**.** *Sea $\mathcal{F}$ un haz del espacio topológico X, y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Si $\mathcal{F}$ es un haz acíclico* [2] *en cada intersección finita de elementos de $\mathcal{U}$, entonces*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$$

donde $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es el p-ésimo grupo de cohomología de Cech de $\mathcal{F}$ respecto al cubrimiento abierto $\mathcal{U}$. [3]

Ver detalles en la tesis: Cohomología de Haces y Algunas Aplicaciones a Varias Variables Complejas ([19]).

Otros resultados importantes son, el Lema y el teorema de Dolbeault:

Lema 5.1. *(Lema de Dolbeault)*
Si una (p, q)-forma C^∞, $\varphi = \varphi^{(p,q)}$ con $q \geq 1$ definida sobre un polidisco $U_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z^1| < R, \ldots, |z^n| < R\}$, con $0 \leq R \leq +\infty$, es $\overline{\partial}$-cerrado, entonces existe una $(p, q-1)$-forma C^∞ ψ en U_R tal que $\varphi = \overline{\partial}\psi$

Teorema 5.3. *(Teorema de Dolbeault)*

$$H^q(M, \Omega^p) \cong \Gamma(M, \overline{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1})/\overline{\partial}\Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q-1}), \quad q \geq 1 \tag{5.4}$$

[1] Taylor, JL: Several Complex Variables whit Connections to Algebraic Geometry and Lie Groups. Graduate Studies in Mathematics v. 46. American Mathematical Society, Providence, RI. 2002.

[2] Un haz $\mathcal{F}$ es llamado acíclico sobre un subconjunto abierto U, si el q-ésimo grupo de cohomología, $H^q(U, \mathcal{F}) = 0$ para $q \geq 1$.

[3] Bonavero, Laurent. Cohomology of Line Bundles on Toric Varieties, Vanishing Theorems. Lectures 16-17 from "Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties".

Teorema 5.4. *Sea M una variedad compleja compacta de dimensión n, y F un campo vectorial holomorfo sobre M. Entonces la igualdad*

$$dimH^q(M, \Omega^p(F)) = dimH^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(F^*)) \tag{5.5}$$

sostiene que F^* es el campo dual de F.

La prueba del teorema está dado en [15] pag. 164.

5.5. Formas Diferenciales Armónicas

Sea M una variedad compleja compacta de dimensión n, y sea $\mathscr{L}^{p,q} = \Gamma(M, \mathscr{A}^{p,q})$ el espacio lineal de los (p,q)-formas C^∞ sobre M donde $\Gamma(M, \mathscr{A}^{p,q})$ es el espacio de las secciones de $\mathscr{A}^{p,q}$, el haz de gérmenes de las (p,q)-formas, C^∞ sobre M.

$\partial : \varphi \mapsto \partial\varphi$ es un operador diferencial parcial lineal de orden 1, la cual aplica $\mathscr{L}^{(p,q)}$ en $\mathscr{L}^{(p+1,q)}$ y,

$\bar{\partial} : \varphi \mapsto \bar{\partial}\varphi$ es un operador diferencial parcial lineal de orden 1, la cual aplica $\mathscr{L}^{(p,q)}$ en $\mathscr{L}^{(p,q+1)}$

Defina

$$\mathfrak{d} = -^*\partial^* \tag{5.6}$$

donde $* : \psi \mapsto^* \psi$ aplica $\mathscr{L}^{p,q}$ en $\mathscr{L}^{n-p,n-q}$, $\mathfrak{d}$ aplica $\mathscr{L}^{p,q}$, $q \geq 1$ en $\mathscr{L}^{p,q-1}$. Para $\psi \in \mathscr{L}^{p,0}$, $\mathfrak{d}\psi = 0$. $\mathfrak{d}$ es también un operador diferencial parcial lineal de orden 1. Para $\varphi \in \mathscr{L}^{p,q-1}$ y $\psi \in \mathscr{L}^{p,q}$, tenemos

$$(\bar{\partial}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathfrak{d}\psi) \tag{5.7}$$

Por (5.7), $\mathfrak{d}$ es el operador adjunto de $\bar{\partial}$, y tomando su conjugada compleja, obtenemos

$$(\mathfrak{d}\psi, \varphi) = (\psi, \bar{\partial}\varphi) \tag{5.8}$$

Los coeficientes $\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(z)$ de una (p,q)-forma ψ, forma un campo tensorial C^∞, la cual

$$\psi^{\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_p \beta_1 \ldots \beta_q}(z) = \sum g^{\bar{\alpha}_1 \lambda_1} \ldots g^{\bar{\alpha}_p \lambda_p} g^{\bar{\nu}_1 \beta_1} \ldots g^{\bar{\nu}_q \beta_q} \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}(z)$$

define un campo tensorial contravariante.
En consecuencia llamamos $\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(z)$ la componente covariante de ψ, y $\psi^{\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_p \beta_1 \ldots \beta_q}$ la componente contravariante de ψ. Ya que $\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q}(z)$ es antisimétrica en los índices $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ y $\bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_q$ tal como lo es $\psi^{\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_p \beta_1 \ldots \beta_q}(z)$.

Definición 5.11. *(Operador de Laplace-Beltram)*
$\Box = \bar{\partial}\mathfrak{d} + \mathfrak{d}\bar{\partial}$ es llamado operador complejo Laplace-Beltram. $\Box : \varphi \mapsto \Box\varphi$ es un operador diferencial parcial lineal de rango 2.

Definición 5.12. *(Forma Diferenciable Armónica)*
$\varphi \in \mathscr{L}^{p,q}$ es llamado una forma diferenciable armónica o simplemente forma armónica si $\bar{\partial}\varphi = \mathfrak{d}\varphi = 0$

Si φ es armónica, entonces $\Box\varphi = \bar{\partial}\mathfrak{d}\varphi + \mathfrak{d}\bar{\partial}\varphi = 0$ y viceversa, si $\Box\varphi = 0$, entonces φ es armónica, puesto que se tenemos $(\Box\varphi, \varphi) = \|\bar{\partial}\varphi\|^2 + \|\mathfrak{d}\varphi\|^2$.

Denotemos por $H^{p,q}$ el subespacio lineal de $\mathscr{L}^{p,q}$ consistiendo de todas las (p,q)-formas armónicas.

$$H^{p,q} = \{\varphi \in \mathscr{L}^{p,q} / \Box\varphi = 0\}$$

Decimos que φ y ψ son ortogonales si $(\varphi, \psi) = 0$. Si $\varphi \in H^{p,q}$ entonces $(\varphi, \Box\varphi) = 0 = (\Box\varphi, \varphi)$ para todo $\psi \in \mathscr{L}^{p,q}$, aquí se tiene que $H^{p,q}$ y $\Box\mathscr{L}^{p,q}$ son ortogonales.

Teorema 5.5.
$$\mathscr{L}^{p,q} = H^{p,q} \oplus \Box\mathscr{L}^{p,q}$$

Corolario 5.1.
$$\mathscr{L}^{p,q} = H^{p,q} \oplus \bar{\partial}\mathscr{L}^{p,q-1} + \mathfrak{d}\mathscr{L}^{p,q+1},$$
donde quitaremos el término $\bar{\partial}\mathscr{L}^{p,q-1}$ para $q = 0$ y $\mathfrak{d}\mathscr{L}^{p,q+1}$ para $q = n$.

Considere $\bar{\partial}$-cohomología $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = \Gamma(M, \bar{\partial}\mathscr{A}^{p,q-1}) / \bar{\partial}\Gamma(M, \mathscr{A}^{p,q-1})$ $q \geq 1$, de M. Entonces $\Gamma(M, \mathscr{A}^{p,q-1}) = \mathscr{L}^{0,q-1}$ y $\Gamma(M, \bar{\partial}\mathscr{A}^{p,q-1})$ es el subespacio de $\mathscr{L}^{p,q}$ de todos las (p,q)-formas $\bar{\partial}$-cerradas C^∞. Teniendo

$$\Gamma(M, \bar{\partial}\mathscr{A}^{p,q-1}) = H^{p,q} \oplus \bar{\partial}\mathscr{L}^{p,q-1}.$$

Una forma armónica $\varphi \in H^{p,q}$ da un representante de una clase $\bar{\partial}$-cohomología de (p,q)-forma.
Es así que el teorema (5.3) de Dolbeault dice que:

Teorema 5.6. *(Teorema de Hodge-Dolbeault)*

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}.$$

Para una $(p,0)$-forma C^∞, φ, se tiene $\bar{\partial}\varphi = 0$, que quiere decir que φ es holomorfo. En consecuencia $H^{p,0} = H^0(M, \Omega^p)$, donde Ω^p es el subhaz del haz de gérmenes de las $(p,0)$-formas, $\mathscr{A}^{p,0}$.

Bibliografía

[1] RIEMANN, B. Theorie der Abel'schen Funtionen (German) *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 115-155, 88-142.

[2] NOETHER, M. *Anzahl der Modulen einer Classe algebraischer Feldchen.*(German) Sitz. Koniglich. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, erster Halbband (1888), 123-127.

[3] KAUP L. KAUP B & BARTHEL G. *Holomorphic functions of several variables:an introduction to the fundamental theory.* Walter de Gruyter & Co. Berlin, 1983, x+353pp

[4] CARTAN E. *Systèmes Diffèrentiels Extèrieurs et Leurs Applications Gèomètriques Act. Sci. et Ind.* **994**, París, (1945).

[5] KODAIRA K. & SPENCER D.C. On deformation of complex analytic structures, I-II, III *Annals of Math.* **67** (1958) 328–466; **71** (1960) 43–76.

[6] BOTT R. Homogeneous vector bundles *Annals of Math.* **66** (1957) 203–248.

[7] FRÖHLICHER, A. & NIJENHUIS, A. A theorem on stability of complex structures. *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. **43** (1957) 239-241.

[8] ILLUSIE I. *Complexe contangent et déformations I et II.* Springer, Lecture Notes in Math. **239**, 1971; **283**, 1972.

[9] KODAIRA, K. & MORROW, J. *Complex Manifolds.* Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1971.

[10] HIRZEBRUCH, F. *Topological Methodos in Agebraic Geometry* 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[11] —, & SPENCER, D. C. *On the variation of almost-complex structure, in Algebraic, Geometry and Topology.* A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 139-150. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[12] —, —: A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces *Acta Math.* **100** (1958) 281-294.

[13] Ehresmann, C. *Les Connexions Infinitésimales dans un Espace Fibré Différentiable*. Colloque de Topologie á Bruxelles, 29 (1950). S. Kobayashi: Conexion des Variétés Fibrées, C. R., 238, 318 (1954).

[14] Guillermin, V. & Pollack, A. *Differential Topology*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Originally Published: Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1974.

[15] Kodaira, K. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao. Reprint of the 1986 English edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. x+465 pp.

[16] Fernández, P. *Notas de Fibrado Vectoriales y sus Clases Características*. XXIII Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana (2005).

[17] Hirzebruch, F. *Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 124 (1951), 77-86. MR 0045384 Zbl 043.30302.

[18] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. Third Edition. Copyright 1987, 1974, 1966 por McGraw-Hill, Inc.

[19] Saravia, N. *Cohomología de Haces y Algunas Aplicaciones a Varias Variables Complejas*. Tesis para optar el Grado de Magister en Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. Diciembre-2008.