

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



**Aproximación al concepto de función lineal.
El caso de una alumna invidente que cursa el
segundo grado de secundaria.**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTRA

**Presentada por:
CECILIA ANTONIA TORRES LEO**

**Asesor:
Dr. Uldarico Malaspina**

**Miembros del Jurado:
Dra. Norma Rubio Goycochea
Dr. Vincenç Font Moll
Dr. Uldarico Malaspina**

**Lima – Perú
2013**

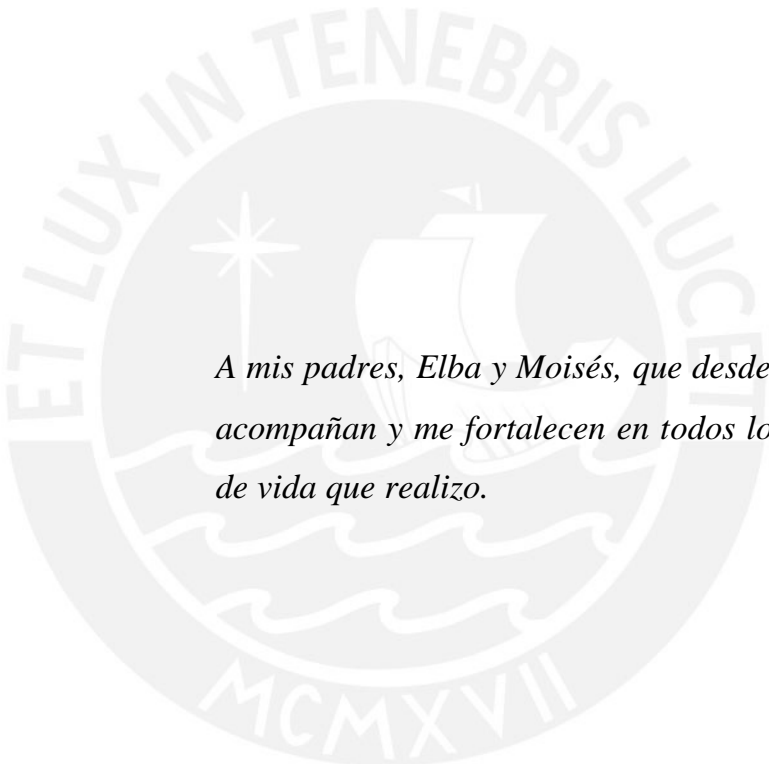


Recibí la visita de una muy buena amiga que acababa de regresar de un largo paseo por el bosque y le pregunté lo que había observado. “Nada en particular”, respondió ella. [...] ¿Cómo era posible, me pregunté a mi misma, caminar durante una hora por el bosque y no ver nada digno de mención? Yo que no puedo ver, encuentro cientos de cosas que me interesan a través del simple tacto. Siento la delicada simetría de una hoja... [...]... y descubro las notables circunvoluciones de una flor... [...]

Helen Keller, “Three day to see”



Dedicatoria



A mis padres, Elba y Moisés, que desde el cielo me acompañan y me fortalecen en todos los proyectos de vida que realizo.



Agradecimientos

A Janet y Ernesto por su importante participación, desinteresada y solidaria, para el logro de esta investigación de tesis.

Al Dr. Uldarico Malaspina por transmitirme su confianza y su fe, así como por la paciencia y las sabias orientaciones recibidas durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

A la Dra. Jesús Flores por brindarme las pautas claras y precisas durante la elaboración del plan de tesis.

A la Hna. María Teresa Gutiérrez, religiosa franciscana, quien me inspiró a desarrollar este estudio hacia los que más necesitan atención.

A los directivos del Centro de Rehabilitación de Ciegos de Lima (CERCIL) por brindarme las facilidades de sus instalaciones y permitirme que sea partícipe de la labor que realizan.

A los directivos y profesoras del Colegio de Educación Básica Especial “San Francisco de Asís” para niños ciegos y de baja visión por ofrecerme la entrada a sus aulas y acogerme con mucho calor humano.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú por haber sido elegida beneficiaria del Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes de Posgrado (PAIP) cuya donación económica ha servido para realizar este trabajo de tesis.



RESUMEN

El presente trabajo de tesis explora el aprendizaje que una alumna invidente realiza al acercarse a conceptos algebraicos relacionados con la función lineal. Las nociones que se han escogido para aproximarse a este concepto son pendiente, par ordenado, recta, correspondencia unívoca. Las simbolizaciones utilizadas y asociadas han sido las variables x e y .

La investigación se realizó en el Centro de Rehabilitación de Ciegos de Lima, CERCIL, y de allí se eligió como sujeto de estudio a una alumna que presenta ceguera congénita cuya dolencia se acentuó desde los ocho años de edad iniciándose, paulatinamente, la anulación de restos visuales.

El objetivo general de esta tesis es analizar los procesos de construcción y aproximación al concepto de función lineal que desarrolla esta alumna mediante el apoyo de recursos mediadores –herramientas materiales y semióticas– adecuados a su aprendizaje.

El marco de referencia teórico utilizado ha sido el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) que permitió identificar y analizar las prácticas matemáticas; las configuraciones cognitivas; los procesos matemáticos; y los conflictos semióticos que se presentaron en la alumna invidente, y hacer las comparaciones respectivas con los de un alumno vidente. Las técnicas de recojo de información así como las nociones de indicialidad y reflexión de acciones han sido aportadas por la Etnometodología.

Una conclusión que destacamos de este trabajo es que es posible diseñar una secuencia didáctica que permite a una alumna invidente descubrir el concepto de función lineal, su representación algebraica y gráfica, la relación entre ellas mediante la interpretación del coeficiente de la variable como pendiente de la recta (“empinamiento” de ella) y la solución de algunos problemas que involucra la interpretación del punto de intersección de dos rectas. Tal secuencia no es la que usualmente se sigue con alumnos videntes –pero es también admisible para tales

casos– y que parte de situaciones-problema contextualizadas y se apoya en diálogos amplios, considerando el contexto social y las experiencias de la alumna. Las configuraciones cognitivas elaboradas, de las soluciones de las situaciones-problema propuestas a la alumna invidente son análogas a las configuraciones epistémicas adoptadas, referidas a soluciones de un alumno vidente de quinto año de secundaria.



ÍNDICE

<i>Dedicatoria</i>	v
<i>Agradecimientos</i>	vii
RESUMEN	ix
ÍNDICE	xi
RELACIÓN DE FIGURAS	xvii
CONSIDERACIONES INICIALES	1
CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA	3
1.1 Problema de investigación	3
1.2 Antecedentes	3
1.3 Justificación del tema de investigación	5
1.4 Delimitación del problema.....	7
1.5 Pregunta de investigación	8
1.6 Objetivo general	8
1.7 Objetivos específicos.....	8
CAPÍTULO 2 – MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA	9
2.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)..	9
2.1.1. Sistema de prácticas matemáticas.	10
2.1.2. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos.	11

2.2	Metodología y Procedimientos.....	16
2.3	Diseño	17
2.4	Técnicas e Instrumentos.....	19
CAPÍTULO 3 – LA FUNCIÓN LINEAL		21
3.1	Algunos aspectos históricos	21
3.2	La función afín y la función lineal	22
3.3	La pendiente de una función lineal.....	24
CAPÍTULO 4 – EL ESTUDIANTE CON DISCAPACIDAD VISUAL		29
4.1	¿Qué es la discapacidad visual?	29
4.2	Plasticidad cerebral y aprendizaje	31
4.3	Desarrollo intelectual de las personas con discapacidad visual	32
4.4	Sistema Háptico.....	34
CAPÍTULO 5 – INVESTIGACIÓN PRELIMINAR		37
5.1	Identificación de la alumna invidente como participante de investigación	37
5.2	Perfil del sujeto de estudio	39
5.3	Perfil del alumno vidente como participante de apoyo en la investigación.....	40
5.4	Elaboración de los instrumentos de recojo de información	40
5.4.1.	Estructura de las entrevistas	40
5.4.2.	Estructura de las sesiones de investigación	41
5.4.3.	Sesiones previas.....	41
5.4.4.	Elaboración de las herramientas materiales y semióticas	65

CAPÍTULO 6 – ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD APLICADA SEGÚN LOS NIVELES DEL EOS..... 69

6.1	Bloque I de la actividad	69
6.1.1.	Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet	69
6.1.2.	Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto	70
6.1.3.	Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet	71
6.1.4.	Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto	75
6.1.5.	Procesos Matemáticos activados por Janet.....	78
6.1.6.	Procesos Matemáticos activados por Ernesto.....	79
6.1.7.	Conflictos Semióticos presentados por Janet	81
6.2	Bloque II de la actividad.....	82
6.2.1.	Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet	82
6.2.2.	Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto	83
6.2.3.	Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet	84
6.2.4.	Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto	91
6.2.5.	Procesos Matemáticos activados por Janet.....	98
6.2.6.	Procesos Matemáticos activados por Ernesto.....	104
6.2.7.	Conflictos Semióticos presentados por Janet	105
6.3	Bloque III de la actividad.....	108
6.3.1.	Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet	108
6.3.2.	Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto	108
6.3.3.	Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet	108
6.3.4.	Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto	112
6.3.5.	Procesos Matemáticos activados por Janet.....	113
6.3.6.	Procesos Matemáticos activados por Ernesto.....	114
6.3.7.	Conflictos Semióticos presentados por Janet	114
6.4	Bloque IV de la actividad	115

6.4.1. Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet.....	115
6.4.2. Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto.....	115
6.4.3. Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet.....	116
6.4.4. Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto.....	120
6.4.5. Procesos Matemáticos activados por Janet.....	123
6.4.6. Procesos Matemáticos activados por Ernesto.....	124
6.4.7. Conflictos Semióticos presentados por Janet.....	124
CAPÍTULO 7 – ANÁLISIS COMPARATIVO.....	125
7.1 Sistemas de Prácticas Matemáticas.....	125
7.2 Configuración de objetos y Procesos matemáticos.....	129
CAPÍTULO 8 – CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
FINALES.....	133
8.1 Conclusiones.....	133
8.2 Recomendaciones finales.....	137
REFERENCIAS.....	139
ANEXOS.....	145
ANEXO 1: Cuestionarios Guías para las entrevistas.....	147
ANEXO 2: Hoja Guía de la actividad final.....	153
BLOQUE I: Análisis de la relación entre el peso y el gasto. Elaboración de los modelos matemáticos respectivos.....	155
BLOQUE II: Análisis de la pendiente como relación entre la variación del gasto cuando varía el peso. Relación de la inclinación de la recta con el valor de la pendiente en el modelo matemático.....	155
BLOQUE III: Análisis de la relación unívoca entre variables.....	157
BLOQUE IV: Análisis de la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro...	157

ANEXO 3:	Aplicación de la Hoja Guía en Janet (15 nov 2012).....	159
ANEXO 4:	Aplicación de Hoja Guía en Ernesto (11 nov 2012).....	185
ILUSTRACIONES.....		195
ILUSTRACIÓN 1:	Hoja de la Situación “Tomando decisiones”	197
ILUSTRACIÓN 2:	Tabla de correspondencia (Bodega)	199
ILUSTRACIÓN 3:	Tabla de correspondencia (Mercado Mayorista).....	201
ILUSTRACIÓN 4:	Representación gráfica en el plano cartesiano	203
ILUSTRACIÓN 5:	Planos Cartesianos en relieve (Modelo 1).....	205
ILUSTRACIÓN 6:	Planos Cartesianos en relieve (Modelo 2).....	207
ILUSTRACIÓN 7:	Instrumentos didácticos	209
ILUSTRACIÓN 8:	Instrumentos didácticos	211
GLOSARIO.....		213



RELACIÓN DE FIGURAS

FIGURA 1:	INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA PENDIENTE. (SYDSAETER ET AL., 2012)	25
FIGURA 2:	LA NOCIÓN DE PENDIENTE VISTO DESDE EL PERFIL “GEOMÉTRICO”. (AZCÁRATE, 1990)	25
FIGURA 3:	LA NOCIÓN DE PENDIENTE VISTO DESDE EL PERFIL “FUNCIONAL”. (AZCÁRATE, 1990)	26
FIGURA 4:	ESQUEMA DE INTEGRACIÓN DE LOS DIFERENTES SENTIDOS DE LA PENDIENTE. (FONT, 2000)	27
FIGURA 5:	NIVELES DE LA FUNCIÓN VISUAL SEGÚN CIE-10.....	29
FIGURA 6:	CAMPO VISUAL SEÑALANDO LA VISIÓN PERIFÉRICA Y LA VISIÓN CENTRAL.	30
FIGURA 7:	TABLERO PROPUESTO POR EL TEXTO (EN VISTA) CON LA FINALIDAD DE COMPLETARLO. ESTE EJERCICIO ESTÁ DENTRO DEL TEMA DE RELACIONES Y CORRESPONDENCIAS.	42
FIGURA 8:	JANET RECONOCIENDO ELEMENTOS DE UN PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 2. 13-09-2012).....	43
FIGURA 9:	TABLA CON VALORES PARA SER UBICADOS EN EL PLANO CARTESIANO.....	44
FIGURA 10:	JANET UBICANDO SUS PRIMEROS PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 2. 13-09-2012).....	44
FIGURA 11:	JANET CONSTRUYENDO SUS PRIMERAS RECTAS SOBRE EL PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 3. 20-09-2012).....	47
FIGURA 12:	JANET LEYENDO EL PROBLEMA. (SESIÓN 4. 04-10-2012)	48
FIGURA 13:	JANET UBICANDO LOS PUNTOS DEL PRIMER CASO SOBRE EL PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 4. 04-10-2012)	50
FIGURA 14:	JANET SEÑALA CON LA MANO IZQUIERDA A LA RECTA $y = x + 3$ COMO EL CASO 1 Y, CON LA MANO DERECHA A LA RECTA $y = 3x + 1$ COMO EL CASO 2. (SESIÓN 5. 11-10-2012).....	51
FIGURA 15:	JANET SEÑALANDO CON SUS DEDOS LOS PUNTOS $(0; 2)$ Y $(1; 7)$ SOBRE LA RECTA IMAGINARIA $y = 5x + 2$. (SESIÓN 6. 18-10-2012).	57
FIGURA 16:	JANET CONSTRUYENDO LAS RECTAS APOYADA CON LA LECTURA DE SUS TABLAS DE CORRESPONDENCIA. (SESIÓN 7. 31-10-2012)	59
FIGURA 17:	JANET CONSTRUYENDO LA RECTA REFERENTE A LA SITUACIÓN DE DIANA. (SESIÓN 7. 31-10-2012).....	59
FIGURA 18:	JANET CON LAS RECTAS CONSTRUIDAS PARA LA SITUACIÓN DE CARLA, $y = 4x$; Y PARA DIANA, $y = 2x + 10$. (SESIÓN 7. 31-10-2012)	59
FIGURA 19:	JANET SE UBICA EN EL PUNTO DE ABCISCA 3 Y RASTREA SUBIENDO HASTA LLEGAR AL PUNTO QUE ESTÁ SOBRE LA RECTA QUE REPRESENTA LA SITUACIÓN DE CARLA. (SESIÓN 8. 08-11-2012)	63
FIGURA 20:	JANET RASTREA HACIA EL EJE Y. COMPRUEBA QUE PARA $x = 3$ LE CORRESPONDE EL VALOR DE $y = 12$. (SESIÓN 8. 08-11-2012).....	63
FIGURA 21:	JANET REGRESA AL PUNTO DE ABCISCA 3. OBSERVAR QUE ESTÁN LAS DOS MANOS EN EL PUNTO. (SESIÓN 8. 08-11-2012)	64
FIGURA 22:	JANET RASTREA Y SUBE DESDE $x = 3$ CON LA MANO DERECHA, MIENTRAS LA IZQUIERDA SUBE, PARALELAMENTE, PALPANDO ÉSTA EL PUNTO $(1; 4)$. (SESIÓN 8. 08-11-2012).....	64
FIGURA 23:	JANET SE DESVÍA EN SU RASTREO Y GIRA HACIA LA IZQUIERDA. MIENTRAS LA MANO IZQUIERDA SE HA DETENIDO EN EL PUNTO $(1; 4)$. (SESIÓN 8. 08-11-2012)	64
FIGURA 24:	JANET LLEVA AMBAS MANOS HACIA EL EJE Y. EL VALOR ES $y = 4$. (SESIÓN 8. 08-11-2012)	64

FIGURA 25:	TABLAS DE CORRESPONDENCIA ELABORADOS POR JANET Y TRADUCIDOS EN VISTA.	72
FIGURA 26:	TABLAS DE CORRESPONDENCIA REALIZADAS POR ERNESTO.	76
FIGURA 27:	REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN PLANOS CARTESIANOS SEPARADOS.	92
FIGURA 28:	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RECTAS EN UN MISMO PLANO CARTESIANO.....	93
FIGURA 29:	RASTREO REALIZADO POR JANET PARA IDENTIFICAR EL ORIGEN DE COORDENADAS EN EL PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	98
FIGURA 30:	JANET RASTREA UNA UNIDAD HACIA LA DERECHA DESDE EL PUNTO DE ABCISCA 0. (SESIÓN 9. 15-11-2012)...	99
FIGURA 31:	JANET RASTREA SUBIENDO UNA UNIDAD DESDE EL PUNTO DE ABCISCA 1. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	99
FIGURA 32:	JANET RASTREA SUBIENDO OTRA UNIDAD A LA ALTURA DEL PUNTO DE ABCISCA 1. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	100
FIGURA 33:	JANET SUBE UNA UNIDAD MÁS A LA ALTURA DEL PUNTO DE ABCISCA 1. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	100
FIGURA 34:	UBICACIÓN DEL PUNTO (1;3) EN EL PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	100
FIGURA 35:	JANET RASTREA AVANZANDO HACIA LA DERECHA EN UNA UNIDAD DESDE EL PUNTO (1; 3) ENCONTRÁNDOSE A LA ALTURA DEL PUNTO DE ABCISCA 2. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	101
FIGURA 36:	JANET RASTREA SUBIENDO UNA UNIDAD A LA ALTURA DEL PUNTO DE ABCISCA 2. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	101
FIGURA 37:	JANET REPITE EL RASTREO DE SUBIR UNA UNIDAD MÁS A LA ALTURA DEL PUNTO DE ABCISCA 2. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	102
FIGURA 38:	JANET SUBE UNA UNIDAD MÁS POR TERCERA VEZ A LA ALTURA DEL PUNTO DE ABCISCA 2. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	102
FIGURA 39:	UBICACIÓN Y SEÑALIZACIÓN DEL PUNTO (2; 6) SOBRE EL PLANO CARTESIANO. (SESIÓN 9. 15-11-2012).	102

CONSIDERACIONES INICIALES

¿Qué procesos cognitivos se activan cuando un estudiante ciego realiza actividades matemáticas? ¿Ellos realizan los mismos procesos que un alumno vidente? ¿Es posible que el alumno invidente nos hable de matemáticas mediante un lenguaje gestual o corporal? ¿Cómo introducir un tema algebraico en alumnos que presentan la discapacidad visual? ¿Cuáles serían los recursos mediadores que requieren estos alumnos para mejorar el estudio matemático? ¿Influye las experiencias sociales en su aprendizaje matemático?

Estas primeras interrogantes fueron las pautas que dieron inicio a esta investigación y de la cual han resultado enriquecedoras conclusiones. El tema algebraico escogido ha sido el concepto de función lineal porque implicaba el manejo de varios registros y, por lo tanto, implicaba mayores recursos mediadores adecuados. Además, este concepto permite manejar situaciones contextualizadas cercanas a la experiencia de los alumnos.

La presente investigación se inicia con la explicación de la problemática en el capítulo 1, mediante la exposición del problema de investigación, los estudios antecedentes, la justificación del tema de investigación, la delimitación del problema, la pregunta de investigación y los objetivos.

El marco teórico y la metodología utilizada se presentan en el capítulo 2. El Enfoque Ontosemiótico y la Etnometodología han sido los soportes de esta investigación que han permitido cumplir con los objetivos planteados.

En el capítulo 3 se menciona un pequeño recorrido histórico sobre la relación entre función y curvas, los conceptos de función afín y función lineal y, los elementos que conllevan estas definiciones.

En el cuarto capítulo, se hace una presentación sobre la discapacidad visual desde las definiciones que otorga la Organización Mundial de la Salud (OMS), así como algunos avances en neurociencias sobre plasticidad cerebral y aprendizaje, y la importancia del sistema háptico en el aprendizaje de un estudiante invidente.

La investigación preliminar se explica en el capítulo 5. En ella se hace referencia al perfil del sujeto de estudio que, por las características que se requerían para esta investigación, se decidió que sería el estudio de un solo caso. La participante de esta investigación es una alumna invidente cuyas características se encuentran descritas en este capítulo. Asimismo, se presenta el perfil de un alumno vidente quien participó en esta investigación en calidad de apoyo porque se requería realizar un análisis comparativo de las prácticas matemáticas entre ambos alumnos. Además, se describe la elaboración de los instrumentos de recojo de información: las entrevistas, las sesiones previas a la sesión central de investigación y, las herramientas materiales y semióticas.

El análisis didáctico de la actividad que se realizó en la sesión central se inicia en el capítulo 6. La actividad fue dividida en cuatro bloques y para cada uno se realizó la respectiva identificación de los sistemas de prácticas, la configuración cognitiva y epistémica de objetos matemáticos, los procesos matemáticos y los conflictos semióticos que mostraron la alumna invidente y el alumno vidente, enmarcados en las herramientas que proporciona el EOS, un estudio interno sobre dificultades y errores de Font (2012) y el análisis de errores de Radatz (1979).

El capítulo 7 está dedicado al análisis comparativo de los sistemas de prácticas matemáticas y la configuración de objetos y procesos matemáticos mencionados líneas arriba, identificados en la alumna invidente y el alumno vidente.

Para finalizar, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones de este trabajo y se proponen algunas recomendaciones finales.

También se adjuntan los anexos y las ilustraciones que comprenden la información proporcionada por la alumna invidente y el alumno vidente durante la sesión central de la investigación.

CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA

El presente capítulo es una presentación sobre la realidad educativa en torno al estudiante que presenta la discapacidad de la ceguera así como algunas investigaciones relacionadas a la enseñanza y al aprendizaje en el área de matemática. Se realiza un estudio de algunas investigaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto matemático de función lineal y, se justifica la relevancia personal, académica, profesional y social que el tema de investigación genera, así como la pregunta de investigación y sus correspondientes objetivos.

1.1 Problema de investigación

En las últimas décadas, el estudio y profundización de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se han ido posicionando gracias al interés y esfuerzo de profesionales que se dedican a la investigación continua en varias universidades del mundo. Cada universidad ha desarrollado sus propias líneas de investigación en áreas específicas tales como: Didáctica de las Matemáticas, Didáctica de la Probabilidad y la Estadística, Diseño y Evaluación del Currículo, Formación de profesores, Tecnologías de Información y Comunicación, entre otras.

El presente trabajo se centra en el estudio de la aproximación al concepto de función lineal en una alumna con la discapacidad visual de la ceguera. Este trabajo se apoya en investigaciones anteriores respecto al aprendizaje y enseñanza en personas ciegas, así como en estudios respecto al concepto de función lineal.

1.2 Antecedentes

Dentro de los trabajos investigados, se evidencia la importancia de cómo las personas con discapacidad visual construyen los conceptos. Fernández del Campo (1996) menciona que “aprender Matemáticas es, en principio, descubrirlas por uno mismo, con las ayudas precisas.” Con esta idea, el autor, quien fue el primer invidente español graduado en la Facultad de Ciencias, propugna que a la

“comprensión” se llega mediante la “acción”, es decir, “todos los mecanismos cognoscitivos reposan sobre la motricidad” (Piaget; cit. por Fernández del Campo, 1996). Este pensamiento se apoya en que

Comprender una proposición inteligible es hacer corresponder una imagen a cada término, de manera que el sistema de imágenes sea encadenado y coherente. Comprender el pensamiento formulado por un autor equivale a redescubrir todas las imágenes presentes en su espíritu cuando él ha querido formular la expresión de las mismas. (Arnaud Denjoy, 1947; cit. por Fernández del Campo, 1996, p. 51).

La imagen es una producción humana. Todo individuo, invidente o no, construye su mundo en base a representaciones o imágenes de las “cosas” – concretas o abstractas–, las cuales le servirán para fortalecer sus propias ideas, socializar e interactuar con los demás. Estas imágenes provienen de las percepciones (táctiles, auditivas, olfativas, etc.), recuerdos pasados, etc.

Por otro lado, Fernandes (2008), en su tesis doctoral apoyada en lineamientos vygotskianos, también ha investigado sobre la relación entre el cuerpo y la cognición en estudiantes con discapacidad visual, ha explorado la importancia del aspecto sensorial, así como la necesidad de utilizar herramientas semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Asimismo, Healey (2012) contribuye con el estudio de los canales sensoriales para evaluar las actividades matemáticas de los aprendices con discapacidad y comprender las diferencias y semejanzas en sus prácticas matemáticas. Aporta la importancia del lenguaje gestual como forma de comunicación y conocimiento matemático.

Las dos investigaciones anteriores aportan a este trabajo de investigación la importancia de relacionar el aspecto motor con la formación cognitiva de un sistema de imágenes que, luego, se convertirán en conceptos y relaciones de conceptos. El análisis del proceso de apropiación del concepto de función lineal en alumnos ciegos, priorizará la motricidad fina y el diálogo pues las personas con ceguera conocen el mundo mediante el sistema háptico y éste se complementa al

sistema auditivo y al sistema fonético, como sistemas sensoriales que median el aprendizaje.

Asimismo, ampliando y afianzando lo anterior, estudios previos sobre plasticidad cerebral señalan que los individuos con lesiones se adaptan al medio mediante tres niveles: la sinapsis, la capacidad de establecer nuevas conexiones para el desarrollo de tareas y, la utilidad de zonas cerebrales para las necesidades que surjan. En el caso de las personas con impedimento visual, la compensación de la falta de visión hace que los otros sentidos se potencien, lo que les permite conocer y reorganizar el mundo, cognitivamente, mediante el desarrollo del tacto y del oído (Martínez, 2009).

Las investigaciones exploradas respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal han sido realizadas en alumnos videntes y en grupos. Además, están orientadas a identificar errores u obstáculos pero desarrollados desde los conceptos formales de función, dominio, rango, y sus diferentes registros. También existen investigaciones de la didáctica de funciones lineales y cuadráticas pero asistidas por computadora.

Otra referencia que se investigó fue la proporcionada por Hitt (2002) cuyo aporte es la de remarcar la utilidad del concepto de función por sus múltiples aplicaciones. Además, mediante sus diferentes representaciones “nos permiten obtener información rápida para resolver problemas”. Su propuesta didáctica es principiar con situaciones contextualizadas para construir funciones lineales, acentuando la relación entre variables, el cambio de representación de registros y, la relación entre la razón de dos números y la pendiente de la recta.

1.3 Justificación del tema de investigación

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje en alumnos con discapacidad visual, sobre la construcción del concepto matemático de función lineal, surge por varias razones que se presentan a continuación:

- La preocupación social que en los últimos años ha generado el tema de la Inclusión Educativa en el país y en el mundo. En nuestro país, documentos como el Foro del Acuerdo Nacional, en sus secciones 2.1 y 2.3, y; la Ley General de Educación 28044 en su artículo 8, acápite b y c, estipulan políticas referentes a Equidad y Justicia Social pues la persona es centro y agente fundamental del proceso educativo sin discriminación alguna. Desde el 2005, nuestro país se encuentra inmerso en el proceso de construcción de una educación para todos, el cual implica la sensibilización y la concientización de esta realidad así como realizar los cambios pertinentes y continuos a nivel político, social, cultural, educativo y mental, con la finalidad de garantizar el derecho ciudadano de la educación, el que es amparado por la Constitución Política del Perú y la Declaración Universal de Derechos Humanos. Además, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en el documento *Guidelines for Inclusion: Ensuring Access to Education for All* (2005) ha aclarado que la educación especial es canalizada mediante un enfoque conocido como “integración”. Entonces, el principal reto que se identificó fue que esta “integración no había sido acompañada por cambios en la organización de la escuela ordinaria, su plan de estudios y estrategias de enseñanza y aprendizaje” (p.9). Esto obligó a implementar políticas de educación inclusiva, dar un nuevo significado al concepto de “necesidades especiales” y reconocer que “las diferencias individuales... son oportunidades para enriquecer el aprendizaje” (p.9).
- Aumento de personas con discapacidad visual en edad escolar. Según la Organización Mundial de la Salud (2011) se estima que existen unos 19 millones de niños menores a 15 años que sufren discapacidad visual y unos 1,4 millones de ellos sufren ceguera irreversible.
- El verdadero ambiente de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en el que se desenvuelve el estudiante invidente. En Perú, la mayoría de los alumnos ciegos se integran a colegios estatales. En ellos, la metodología de enseñanza está dirigida a alumnos videntes; las aulas cuentan

con 40 alumnos en cada una, aproximadamente; los docentes no conocen o no comprenden cómo apoyar al invidente en su aprendizaje y los materiales que se utilizan no son los más adecuados para la construcción y comprensión de los objetos matemáticos.

- Cercanía y conocimiento de la realidad educativa de las personas con discapacidad en general. Existe una profunda vocación docente y el deseo personal de cumplir con el derecho que tienen los alumnos respecto a su educación, aportando con subsidios que redunden en beneficio de este sector de la población, en particular con los que sufren impedimento visual, pues como ellos mismos lo expresan, el curso más difícil en su vida escolar es la matemática. Y es por ello, que los pocos ciegos que logran acceder a estudios superiores, optan por carreras profesionales de Letras y no de Ciencias.
- Importancia del estudio de la función lineal. En general, el estudio del concepto matemático de función enriquece y complementa la visión que el ser humano puede tener sobre la interrelación de las variables que intervienen en los fenómenos o eventos que suceden en su realidad. Dentro de este mundo de fenómenos, existen algunas realidades cercanas a los estudiantes en las que se presentan relaciones de proporcionalidad directa y que son sensibles de ser modelizadas mediante la función lineal. Una situación modelizada mediante una función lineal puede dar respuestas prácticas dentro de la cotidianidad del individuo, así como tener un mejor alcance predictivo de los hechos dentro de un análisis más profundo y especializado.

1.4 Delimitación del problema

La presente tesis está orientada a investigar los procesos de aproximación al concepto de función lineal en una alumna con discapacidad visual de la ceguera, que se encuentra cursando estudios secundarios y, que el contenido matemático mencionado esté presente dentro de su programación de estudios.

1.5 Pregunta de investigación

¿Cómo se aproxima al concepto de función lineal la alumna que presenta la discapacidad visual de la ceguera cuando se utilizan recursos mediadores – materiales y semióticos– como soportes de su aprendizaje?

1.6 Objetivo general

Analizar los procesos de aproximación y construcción del concepto de función lineal que realiza una alumna con la discapacidad visual de la ceguera, mediante el apoyo de recursos mediadores adecuados a su aprendizaje.

1.7 Objetivos específicos

1. Explorar los conocimientos previos que posee la alumna invidente respecto a las características o propiedades de una relación entre dos variables.
2. Identificar los sistemas de prácticas, la configuración cognitiva de objetos matemáticos y los procesos matemáticos, que intervienen en el proceso de aproximación y construcción del concepto de función lineal desde la realidad de la alumna invidente.
3. Reconocer las herramientas materiales y semióticas adecuadas para la mediación de la relación de la alumna invidente con la aproximación al concepto de función lineal.
4. Comparar la práctica matemática de la alumna invidente con la práctica matemática de un alumno vidente para identificar estrategias y dificultades que presenta la alumna en la aproximación al concepto de función lineal.
5. Presentar lineamientos para introducir el concepto de función lineal en el conjunto de conocimientos de los alumnos ciegos.

CAPÍTULO 2 – MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Se ha considerado el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) porque permite identificar, describir y analizar las prácticas matemáticas que presenta el sujeto de estudio, los objetos y procesos matemáticos que se activan durante estas prácticas, y los conflictos semióticos que pueden presentarse como dificultades para la apropiación de los conceptos matemáticos. Las herramientas para identificar errores y dificultades han sido tomadas del Documento interno del Máster de Formación del Profesorado de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (Font, 2012) y del Análisis de Errores en la Educación Matemática propuesto por Hendrick Radatz (1979).

Con la finalidad de conocer el proceso de aprendizaje personal y la historia académica, la influencia de su entorno y el uso de herramientas materiales y semióticas en el aprendizaje adquirido por el sujeto de estudio, así como la apreciación del aprendizaje adquirido durante la investigación de tesis, se ha considerado utilizar las técnicas y herramientas que ofrece la Etnometodología para el recojo de la información pertinente.

2.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) propone una interpretación de la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X en función de los significados que el sujeto X pueda establecer, en situaciones dadas, en donde el objeto O tiene carácter de fectivo. Según Hjelmslev (Bigot, s.f.), este carácter se entiende como la relación interdependiente que existe entre dos términos lingüísticos. En este caso, al existir una función semiótica entre objeto y sujeto, ambos juegan como fectivos. Por ello, existe una correspondencia entre conocimiento y significado el cual deriva en varios tipos de conocimientos según las funciones semióticas que se puedan enlazar entre los objetos introducidos en el modelo (Godino, 2002).

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un modelo teórico que describe, explica y valora procesos de instrucción matemática y que se elabora mediante el estudio de cinco niveles (Font, Planas y Godino, 2009):

- Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
- Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
- Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
- Identificación del sistema de normas y metanormas.
- Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Para proporcionar respuesta al objetivo general de analizar el proceso de aproximación y construcción del concepto de función lineal en alumnos ciegos, considerando recursos materiales y semióticos, así como de identificar y explicar dificultades cognitivas o didácticas, se ha considerado profundizar sólo en los dos primeros niveles que propone el EOS.

2.1.1. Sistema de prácticas matemáticas.

En este nivel se describen las secuencias de las prácticas matemáticas que desarrolla un agente en un contexto de enseñanza y aprendizaje. En Godino y Font (2007), el EOS define la práctica matemática como todo acto o expresión realizada por un agente cuando resuelve problemas matemáticos, comunica o informa a otros lo resuelto, valida su solución y la generaliza a otras situaciones contextuales. Los cuestionamientos que la investigación debe considerar en este nivel son: ¿Qué problemas y prácticas se realizan en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian?

Como el EOS basa su modelo en que el aprendizaje está determinado por la relación semiótica que existe entre objetos y sujetos, entonces es necesario identificar los significados personales que pueden presentarse en el sujeto de estudio.

Los significados personales son tipificados como:

Global. Es todo el sistema de prácticas que el sujeto manifiesta y potencializa referente al estudio de un objeto matemático.

Declarado. Es lo que el sujeto expresa efectivamente, observadas en una evaluación propuesta y considerándose las respuestas correctas e incorrectas desde el significado institucional.

Logrado. Es cuando las prácticas dadas por el sujeto corresponden a lo pauteado en el ámbito institucional.

2.1.2. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

En este nivel se identifican y se describen las relaciones complejas que se presentan en las prácticas matemáticas. Estas relaciones se manifiestan mediante la comunicación entre agentes, acciones que se realizan para resolver la situación problema, conceptos previos y emergentes, justificación a proposiciones dadas por el agente. El cuestionamiento que se hace en este nivel es: ¿Qué objetos y procesos matemáticos intervienen en las prácticas previamente identificadas?

Según Godino (2002), un objeto matemático es “todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a la cual puede hacer referencia cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas”. Estos objetos, llamados “primarios”, están categorizados de la siguiente manera:

Elementos lingüísticos. Referido a los términos, expresiones, notaciones y gráficos en las que puede expresarse el objeto.

Situación-Problema. Los objetos están dados en problemas extramatemáticos e intramatemáticos. Las situaciones devienen en alguna actividad matemática.

Procedimientos. Las que realiza el sujeto mediante algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos.

Conceptos. Son las definiciones o descripciones que se hacen del objeto.

Proposiciones. Son los atributos que posee el objeto y que suele expresarse mediante proposiciones o enunciados.

Argumentaciones. Son las justificaciones o fundamentaciones que sirven para validar o explicar las proposiciones.

Estos objetos matemáticos presentan cinco dualidades que permiten describir y relacionar diversas nociones cognitivas que propone el EOS. Las dualidades son las siguientes (Godino, Batanero & Font, 2009):

Personal / Institucional. Se considera como “cognición personal” al resultado que otorga el pensamiento y la acción del individuo ante problemas dados y, la “cognición institucional” es el resultado dialéctico que proviene de lo convenido y regulado en el seno de una institución.

Unitario / Sistémico. Cuando el objeto es conocido previamente y no necesita descomponerse para su estudio se dice que es unitario. Caso contrario, se considera sistémico. Esta dualidad es relativa al momento de estudio, es decir, la razón y la proporción pueden ser consideradas sistémicas cuando el estudiante está aprendiendo por primera vez estos objetos, pero pueden ser consideradas unitarias cuando conoce su significado y es aplicado en otros contextos sin mayor dificultad.

Ostensivo / No ostensivo. Si el objeto es mostrado a otros, es de conocimiento público, entonces es un objeto ostensivo. Pero si está en la mente del individuo o presente en un discurso matemático se dice que es no ostensivo.

Extensivo / Intensivo. Llamados también ejemplar – tipo. Aquí se identifica los elementos genéricos y los particulares que se presenta en

toda actividad matemática. Es la diferencia entre la creatividad matemática y el mecanicismo o algorítmico.

Expresión / Contenido. Toda función semiótica tiene un antecedente y consecuente. El antecedente está dado por el significante (o expresión) y el consecuente por el significado (o contenido) que lo establece una persona o institución acorde a ciertos criterios de correspondencia.

Como se mencionó anteriormente, los objetos matemáticos están interrelacionados a procesos matemáticos de carácter cognitivos–epistémicos (Godino y otros, 2009) los cuales se señalan a continuación:

- **Institucionalización – Personalización.**
- **Generalización – Particularización.**
- **Análisis / Descomposición – Síntesis/Reificación.**
- **Materialización / Concreción – Idealización / Abstracción.**
- **Expresión / Representación – Significación.**

Otros procesos que brinda la Dra. Rubio (2012) en su tesis doctoral, complementa esta relación de procesos matemáticos:

- **Algoritmización – Práctica – Trabajo de técnica.**
- **Detección – Identificación – Reconocimiento.**
- **Argumentación – Justificación.**
- **Unificación.**

Luego de identificar la similitud entre los significados personales y los institucionales se podría hablar de conflicto semiótico si existiese una brecha grande entre ambos significados. Esta dificultad está entendida como “cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos” (Godino y otros, 2009, p.15). Se considera que esto acarrearía dificultad en la construcción del objeto.

Los conflictos semióticos pueden ser analizados desde la perspectiva de las dificultades, estudio que está desarrollando el Máster de Formación del Profesorado de la Universitat de Barcelona (Font, 2012) y, desde la perspectiva de los errores bajo los términos que ofrece Radatz (1979).

La clasificación de las dificultades propuestas son las siguientes (Font, 2012):

- ***Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos.*** Relacionado al estudio epistemológico del contenido matemático, procesos de abstracción y generalización pueden acarrear dificultad en la construcción del conocimiento.
- ***Dificultades causadas por secuencias de actividades que no son potencialmente significativas.*** Estas dificultades pueden provenir de contenidos que el docente no ha estructurado adecuadamente para enseñarlo; de la presentación no adecuada que el docente haga del tema: poco clara, no está bien organizada, pronunciación no inteligible, mostrar una pizarra desordenada, etc.; y de libros de texto en cuanto no son claros en su redacción y presentación de problemas y ejercicios, son rutinarios y repetitivos, existen errores de edición, etc.
- ***Dificultades que se originan en la organización del centro.*** Pueden existir problemas con horarios inapropiados, exceso de alumnado por aula, no contar con laboratorios de matemática e informática, etc.
- ***Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado.*** Muchas veces el docente prepara sesiones de enseñanza y aprendizaje potencialmente significativas, pero el discente no presenta motivación frente a ello y, esto está relacionado a la autoestima y a la historia escolar del alumnado.
- ***Dificultades relacionadas con las discapacidades o bajo nivel de desarrollo psicológico de los alumnos.*** Relacionado al nivel de desarrollo psicológico o a algún tipo de discapacidad que impide el aprendizaje del discente. El aprendizaje se salvaguarda mediante la

adaptación de los contenidos y la metodología adecuada para cada alumno.

- ***Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores.*** Cuando el alumno presenta una brecha en sus conocimientos, es decir, no tiene los conocimientos previos que se necesita para construir otros nuevos.
- ***Dificultades relacionadas con los significados personales de los alumnos.*** Algunos significados personales del alumnado puede ser considerada un obstáculo por la institución escolar pues lo que es válido para un contexto, si se complejiza el contexto, posiblemente no sea válido el significado personal en este nuevo contexto.

La clasificación de errores que presenta Radatz (1979) son:

- ***Errores debidos a dificultades del lenguaje.*** Problemas con la traducción de una red semántica en lenguaje natural a una red semántica más formal en lenguaje matemático.
- ***Errores debidos a dificultades en la obtención de la información espacial.*** Son errores que se presentan con las destrezas espaciales y la capacidad de discriminación visual del alumno.
- ***Errores debidos a un dominio deficiente de los requisitos previos en destrezas, hechos y conceptos.*** Deficiencias algorítmicas, dominio inadecuado de los datos base, aplicación incorrecta de procedimientos y técnicas matemáticas y, conocimiento insuficiente de los conceptos previos y símbolos matemáticos.
- ***Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.*** Ante una información nueva, se presentan problemas de flexibilidad con la decodificación y codificación, es decir, al proponerse problemas similares tienden a aplicar operaciones cognitivas similares y las siguen utilizando a pesar de que las condiciones sustanciales del problema pueden haberse modificado. Esto da lugar a la rigidez habitual del pensamiento manifestado como una persistencia de procesos que

inhiben el proceso de una nueva información. Radatz (1979) propone la clasificación de Pipping para estos errores:

- Errores de perseveración. Tendencia a mantener o repetir una determinada actividad.
- Errores de asociación. Interacción incorrecta entre elementos u operaciones particulares.
- Errores de interferencia. Algoritmos o conceptos aprendidos pueden dificultar el aprendizaje de nuevos algoritmos o conceptos dados en procesos similares.
- Errores de asimilación. Proviene de falta de atención y concentración del alumno. No prestar atención puede causar errores en la escritura y la lectura.
- Errores de transferencia negativa de tareas previas. Aplicación errónea de las indicaciones de alguna tarea.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Aplicación de reglas o estrategias similares a otros contenidos pueden derivar en un uso irrelevante de reglas, algoritmos incorrectos y estrategias inadecuadas para la resolución de tareas y problemas.

2.2 Metodología y Procedimientos

Para el estudio de la construcción de conceptos matemáticos en individuos que presenta una alumna con discapacidad de la ceguera, se consideraron las herramientas que ofrece una investigación cualitativa por la intencionalidad y la relevancia del análisis en comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas en la alumna invidente, con la finalidad de identificar el potencial particular y social de ella.

La metodología de investigación que se desarrolló en el presente trabajo se fundamentó en los recursos que proporciona la etnometodología. El término fue acuñado por Harold Garfinkel (1967) y, busca objetivar la acción y la interacción

que proviene de la acción que realizan los sujetos. Enfatiza el conocimiento empírico de sus creencias, teorías y modelos que usan para edificar su mundo social y búsqueda de explicación de la misma partiendo desde sus propios agentes sociales y la dinámica de la misma acción. Según Firth (2010), las acciones sociales están influidas por el sentido común que los miembros de una sociedad imprimen en sus actividades diarias. Mediante este sentido común, los individuos coordinan, estructuran y comprenden sus prácticas cotidianas.

“El propósito [...] de la etnometodología [...] es partir de las ‘estructuras de experiencia’ de los miembros [...]”, aclara Firth (2010). Para los etnometodologistas, las acciones tienen un carácter contextual que se manifiestan por lo que ellos llaman “la indicialidad de las acciones” y “las cualidades contextualmente reflexivas de las acciones”. Es importante estudiar el significado, el contexto, la perspectiva del todo y la cultura de los actores sociales y su mundo. En palabras de Sandoval (1996), “la etnometodología se aproxima a las propuestas del análisis institucional y de la pragmática” (p.65).

Con esta metodología, la investigación desarrollada pudo identificar y profundizar el significado de los objetos matemáticos que utiliza una persona con ceguera realizados en su mundo personal y social, bajo el supuesto de que el alumno hace una construcción metódica de sus conocimientos y apoyado en soportes culturales que reconoce o interpreta.

2.3 Diseño

Siendo esta investigación cualitativa, se menciona, grosso modo, el diseño que sigue este tipo de investigación (Sandoval, 1996):

- 1°. Fase exploratoria con la finalidad de documentar la realidad que se va a analizar y obtener perfiles adecuados para el estudio.
- 2°. Mapeo en el que se identifiquen a los actores y las situaciones de interacción, lugar y variaciones de tiempo donde se desarrollan, buscando las características más relevantes del fenómeno objeto de análisis.

- 3°. Muestreo consistente en la selección de situaciones, evento, sujetos, lugares, momentos y temas, en forma progresiva en función de la propia dinámica de la investigación.
- 4°. Validez de los hallazgos en análisis intermedios mediante el permanente contacto o retroalimentación con los actores (validez interna) y, la revisión continua de las teorías que sostienen la investigación (validez externa).

Considerando lo anterior, algunas de las técnicas etnometodológicas, los niveles de análisis didáctico descritos en el marco teórico y, los objetivos propuestos inicialmente, se diseñaron las fases que orientaría el trabajo de investigación.

Fase 1. Implementación de las herramientas del análisis didáctico.

Eta de elaboración de cuestionarios, las entrevistas e instrumentos de soporte que se utilizaron con la alumna invidente para explorar sus conocimientos previos y analizar la secuencia didáctica que desarrollaba, así como los indicadores para analizar algunos procesos de instrucción.

Fase 2. Análisis de las secuencias didácticas y de las prácticas matemáticas.

Se aplicaron las herramientas elaboradas en la primera fase. Se observaron procesos instruccionales previos y se aplicó la actividad final desarrollada en una Hoja Guía (ver Anexo 2). Se analizaron e identificaron las prácticas realizadas tanto por el sujeto de estudio (en todas las sesiones) como por el sujeto de apoyo (en una única sesión posterior).

Fase 3. Elaboración de la configuración epistémica de objetos y procesos matemáticos.

Se elaboró la configuración epistémica del sujeto de apoyo (alumno vidente), el cual permite organizar los objetos matemáticos tanto previos como emergentes y los procesos matemáticos que se activaron en la práctica matemática desarrollada en una única sesión.

Fase 4. Elaboración de la configuración cognitiva de objetos y procesos matemáticos.

Se elaboró la configuración cognitiva del sujeto de estudio (alumna invidente) de las prácticas matemáticas realizadas en la sesión final, para la identificación y el análisis de los objetos matemáticos y los procesos pertinentes a ellos.

Fase 5. Descripción e identificación de conflictos semióticos potenciales mediante dificultades o errores en el aprendizaje.

Se describieron los conflictos semióticos que presentó el sujeto de estudio durante la realización de sus prácticas matemáticas.

Estas fases coadyuvaron a ordenar el análisis y la explicación de los objetivos planteados inicialmente.

2.4 Técnicas e Instrumentos

La investigación etnometodológica aporta las siguientes técnicas: la entrevista, la observación directa, la observación participativa, el diálogo, el análisis, las grabaciones de video, las charlas, los problemas que aparecen dentro de la investigación, las interacciones con las autoridades, diarios del investigador.

Las herramientas materiales de soporte que se requirieron en el proceso de instrucción del alumno invidente son: planos cartesianos adaptados, máquina Perkins, cubaritmo, tactógrafo con marcador de puntos, ábaco, papel bond A.4 de 120g o 150 g.

Las herramientas semióticas de soporte que se utilizaron en el proceso de aprendizaje de la estudiante invidente son: fichas escritas en el sistema Braille, gráficos en altorrelieve (tablas de doble entrada, puntos y rectas en el plano), grabaciones de voz y el diálogo.

Los recursos tecnológicos que registraron el proceso de instrucción durante el desarrollo de la investigación han sido la videocámara y la grabadora de voz.

Para la exploración de conocimientos previos, las técnicas que se consideraron son la observación directa y participativa, la entrevista y el análisis de algunas situaciones problema extraídas del contexto del alumno

Para el estudio de las secuencias didácticas, que serían analizados bajo el marco teórico del EOS, se elaboró una actividad que era orientada por una Hoja Guía. Esta actividad contenía una situación problema contextualizada a la realidad de la alumna. Se desarrolló mediante el diálogo y, paralelamente, la alumna produjo tablas de correspondencias y representaciones gráficas en el plano cartesiano. Además, utilizó recursos mediadores como la máquina Perkins, plano cartesiano adaptado, el ábaco y material concreto pertinente. La situación presentada a la alumna fue escrita en sistema Braille.



CAPÍTULO 3 – LA FUNCIÓN LINEAL

De forma resumida, en la primera sección se presentan algunos aspectos históricos y la importancia de la noción de función relacionado a los conceptos inherentes a ella tales como: tangente, cantidad variable, línea y curva. En la segunda sección, se presenta el concepto de función lineal de la forma como se utiliza en nuestros días.

3.1 Algunos aspectos históricos

Martínez (2008) ilustra históricamente el concepto de función y explica que durante el siglo XVII las matemáticas estaban dirigidas hacia el estudio de las curvas, pues éstas se relacionaban con magnitudes geométricas variables, llámense ordenadas, abscisas, tangentes y áreas entre curvas.

A mediados del siglo XVIII, Leonhard Euler propone que el estudio de las magnitudes variables no tenía por qué tener de referencia a magnitudes geométricas. Él presentó el concepto de cantidad abstracta o universal para definir su noción de función. Paralelamente, la comunidad matemática de ese tiempo ya estudiaba el concepto de función a través de las cantidades variables. Es así que con Isaac Newton, la noción de función y de variación se entrelaza fuertemente y, con Gottfried Leibniz se vincula la idea de función con problemas geométricos al estudiar curvas y tangentes. Entre él y Johan Bernoulli se discutía sobre la definición de función y la forma de representarla. Posteriormente, Bernoulli conceptuó a la función como

Llamo función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes. (Martínez, 2008)

Regresando a Euler, éste define qué es una cantidad constante.

Una cantidad constante es una cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor. (Martínez, 2008)

Como ya se mencionó, el concepto de función en Euler precede a la noción de cantidad variable.

Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o universal que contiene todos los valores determinados [...] comprende en ella misma a absolutamente todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentes. Incluso el cero y los números imaginarios no están excluidos del significado de cantidad variable. (Martínez, 2008)

Con este antecedente, Euler define en su *Introductio in analysin infinitorum*, publicado en 1748,

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes. (Martínez, 2008).

La frase “expresión analítica” que Euler utiliza para definir la función, Martínez (2008), indica que se refiere a una expresión compuesta de magnitudes representadas por símbolos y números mediante las operaciones algebraicas o trascendentes.

Cuando Euler profundiza la definición de función, menciona que existe una relación entre las funciones y las curvas, y que esta relación es recíproca.

Una función cualquiera de una variable x producirá una línea recta o curva. (Martínez, 2008).

3.2 La función afín y la función lineal

Las definiciones dadas a la función afín y a la función lineal las tomaremos de la obra la *Matemática de la Enseñanza Media* cuyos autores son Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000).

La función afín está definida como

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se llama afín cuando existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = ax + b$ tales que $x \in \mathbb{R}$.

En cambio, la función lineal está definida por “[...] la fórmula $f(x) = ax$ ”. Estos autores mencionan que la función lineal modeliza los problemas de proporcionalidad. Explican que la noción de proporcionalidad está presente en todas las culturas y, muestran como ejemplo, la definición que Antonio Trajano hace en su *Aritmética Progressiva* y que data desde 1883:

Se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando ellas se corresponden de tal modo que, multiplicándose una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número. En el primer caso, la proporcionalidad se llama directa y, en el segundo, inversa; las magnitudes se dicen directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

Lima et al (2000) redefinen lo anterior indicando que la proporcionalidad es

[...] una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cualesquiera números reales c, x se tiene $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidad directa) o $f(cx) = f(x)/c$, si $c \neq 0$ (proporcionalidad inversa).

Según los autores, existen situaciones de la vida diaria en que la forma $y = ax$, se presenta explícitamente (o casi). Ellos ofrecen el siguiente ejemplo:

Si un kilo de azúcar cuesta a reales, entonces x kilos cuestan $y = ax$ reales.

En *Matemáticas para el Análisis Económico* de Sydsaeter, Hammond y Carvajal (2012), se define lo siguiente:

Una *relación lineal* entre las variables x e y es de la forma: $y = ax + b$ (a y b constantes). La gráfica de esta ecuación es una recta. Si designamos por f a la función que asigna y a x , entonces $f(x) = ax + b$ y f se llama función lineal. El número a se llama la **pendiente** de la función y de la recta.

Cabe indicar que los autores hacen una indicación al pie de página, aclarando que la mayoría de los economistas llaman a $f(x) = ax + b$ como función lineal. Pero también amplían su observación informando

que los matemáticos reservan normalmente al nombre de ‘lineal’ para las funciones definidas por $y = ax$ (con $b = 0$, la intersección con el eje y). [...] a $y = ax + b$ (con $b \neq 0$) la llaman función ‘afín’.

El estudio de la función lineal implica, antes que nada, aclarar la terminología que comúnmente se utiliza. En este trabajo de investigación se va a utilizar indistintamente con el nombre de función lineal a las formas presentadas: $f(x) = ax + b$ y $f(x) = ax$, por cuestiones de practicidad y evitar la confusión en el sujeto de estudio. Además, el estudio se va a focalizar en el significado intuitivo de pendiente, su representación tabular y gráfica, y la relación entre variables que será realizada por el sujeto de estudio.

3.3 La pendiente de una función lineal

En el apartado anterior, se menciona la pendiente de la función. La definición que de ella hacen Sydsaeter et al (2012), se inicia tomando una unidad más para x y analizarlo en la función $f(x) = ax + b$ y relacionarlo con la variación en el valor de la función:

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a(x+1) + b - (ax + b) \\ &= \cancel{ax} + a + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b} \\ &= a \end{aligned}$$

Por lo tanto, afirman que la pendiente a puede ser entendida como el “cambio en el valor de la función cuando x aumenta en 1 unidad.”

También dan una mayor información respecto al valor de la pendiente. Indican que “si la pendiente a es positiva, la recta está inclinada hacia arriba (a la derecha)”. Además, agregan que “cuanto mayor es el valor de a , más vertical es”.

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos pertenecientes a la recta L . Formalizando, Sydsaeter et al (2012) definen a la pendiente de una recta L como:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

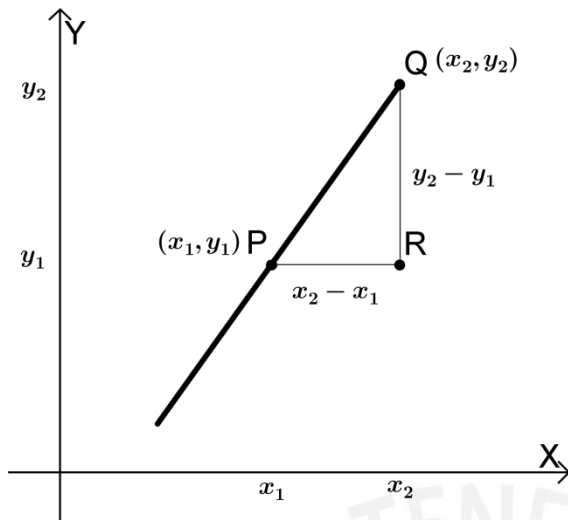


Figura 1: Interpretación gráfica de la pendiente. (Sydsaeter et al., 2012)

La investigación que brinda Azcárate, en su tesis doctoral (1990), referente a los esquemas conceptuales de alumnos catalanes de secundaria respecto a la concepción de la pendiente de una recta, es una clasificación de esta noción en tres categorías o perfiles:

- El perfil “geométrico” corresponde a una mayoría importante quienes en sus representaciones utilizan elementos propios del lenguaje geométrico, tanto descriptivo como analítico, y sugiere un esquema conceptual con imágenes gráficas de la pendiente de una recta. Se puede afirmar que estos alumnos asocian a la palabra “pendiente” la imagen gráfica de una recta en un sistema de ejes cartesianos, con una cierta disposición, muy a menudo caracterizada por un ángulo, y, en algunos casos por una distancia o por un punto, tal y como lo sugiere la figura 2.

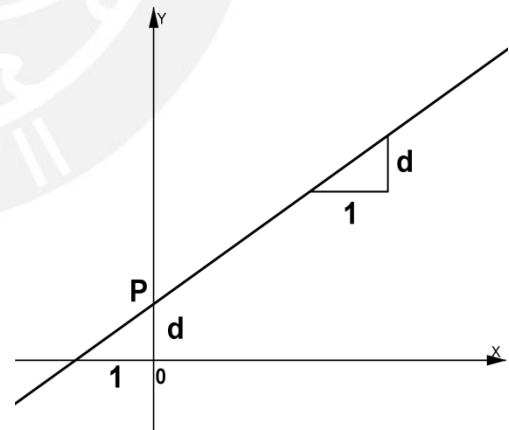


Figura 2: La noción de pendiente visto desde el perfil “geométrico”. (Azcárate, 1990)

Entre los perfiles denominados geométricos, se pueden distinguir tres niveles: un perfil geométrico-naif, un perfil geométrico (sin calificativo) y un perfil geométrico-pendiente.

- El perfil “operativo” caracteriza a los alumnos que, frente al requerimiento de explicar el significado de pendiente, contestan dando un algoritmo operativo que, o bien describe una función, o bien sirve para reconocer y/o calcular la pendiente en la ecuación de la recta. Se puede decir que estos alumnos se caracterizan por asociar a la palabra “pendiente”, en la mayoría de los casos, la imagen del coeficiente a en la fórmula del tipo $y = ax + b$ y, erróneamente, en algunos casos, la propia expresión polinómica $ax + b$. El esquema conceptual de estos alumnos tiene, por tanto, una faceta numérica, calculadora, algebraica, es decir, algorítmica y le falta la imagen gráfica.
- El perfil “funcional” caracteriza a los alumnos que han definido la pendiente como un cociente entre los incrementos de las variables. Se puede decir que estos alumnos se caracterizan por asociar a la palabra “pendiente” la imagen gráfica de una recta en que destacan los incrementos de las variables, tal y como se indica en la figura 3.

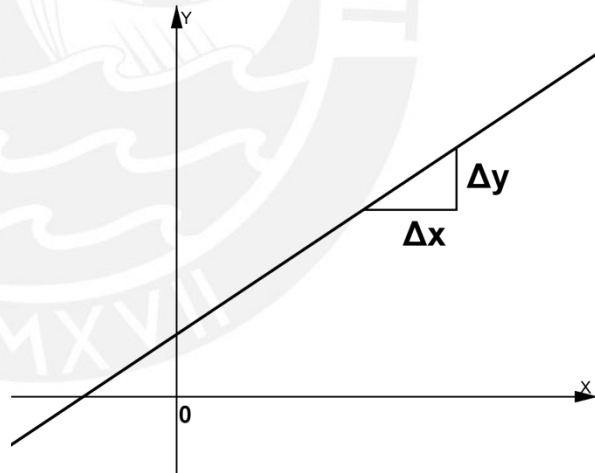


Figura 3: La noción de pendiente visto desde el perfil “funcional”. (Azcárate, 1990)

En la tesis de Font (2000) se consideran diferentes sentidos asociados al concepto de pendiente, los cuales complementan los perfiles propuestos por Azcárate (1990). Un análisis de los contextos en que los alumnos de secundaria han de trabajar la pendiente de una recta y sus formas de representación, permite

determinar, según este autor, que los sentidos que tiene este concepto en los diferentes contextos son los siguientes:

- Sentido geométrico: la pendiente determina la inclinación de la recta
- Sentido algebraico: el número que multiplica a x en la fórmula $y = ax + b$
- Sentido funcional: el aumento o disminución vertical por unidad horizontal
- Sentido trigonométrico: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las abscisas

Los diferentes sentidos mencionados se integran en el siguiente esquema:

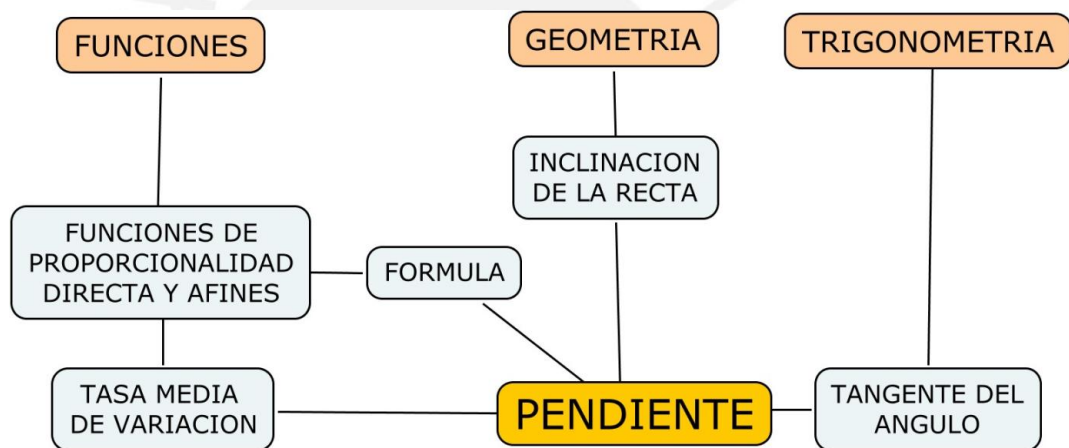


Figura 4: Esquema de integración de los diferentes sentidos de la pendiente. (Font, 2000)



CAPÍTULO 4 – EL ESTUDIANTE CON DISCAPACIDAD VISUAL

En esta sección, se presenta un breve panorama sobre algunas precisiones dadas por organizaciones o profesionales en este campo de estudio de enseñanza y discapacidad.

4.1 ¿Qué es la discapacidad visual?

Según la Organización Mundial de la Salud (2012), en su Clasificación Internacional de Enfermedades (CIE-10, actualización y revisión de 2006), la función visual presenta cuatro niveles: visión normal, discapacidad visual moderada, discapacidad visual grave y, ceguera. Utilizando el término de baja visión se reagrupan la discapacidad visual moderada y grave. Entonces, la discapacidad visual engloba a los casos de baja visión y ceguera.

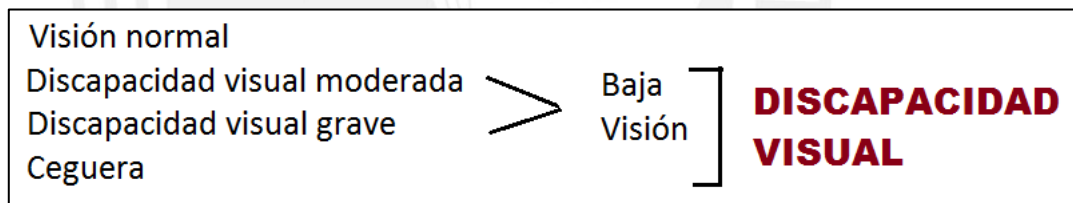


Figura 5: Niveles de la función visual según CIE-10.

Según la Junta de Andalucía, en su *Manual de atención al alumno con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de discapacidad visual y sordoceguera*, indica que es un término que abarca muchos tipos de problemas y dificultades visuales. Agregan que una persona que presente en ambos ojos, por lo menos una de estas dos condiciones:

- a) Su agudeza visual debe ser igual o inferior a 0'1 (1/10 de la escala Wecler) obtenida con la mejor corrección óptica posible.
- b) Campo visual disminuido a 10 grados o menos.

es considerado con ceguera legal y deficiencia visual.

Lo anterior señala que son personas que no poseen resto visual o que requieren de herramientas adecuadas que potencialicen la funcionalidad de la visión. El primer grupo comprende a las personas con ceguera total, porque son individuos que no poseen “resto visual o no perciben luz, y si la perciben no pueden localizar su procedencia.” (Junta de Andalucía, 2010). El segundo grupo son personas que les queda algo de resto visual pero que presentan pérdida de agudeza y pérdida de campo. En la pérdida de campo visual, el individuo puede presentar una visión periférica mas no central, o al contrario, no percibe la visión periférica pero sí la zona central.

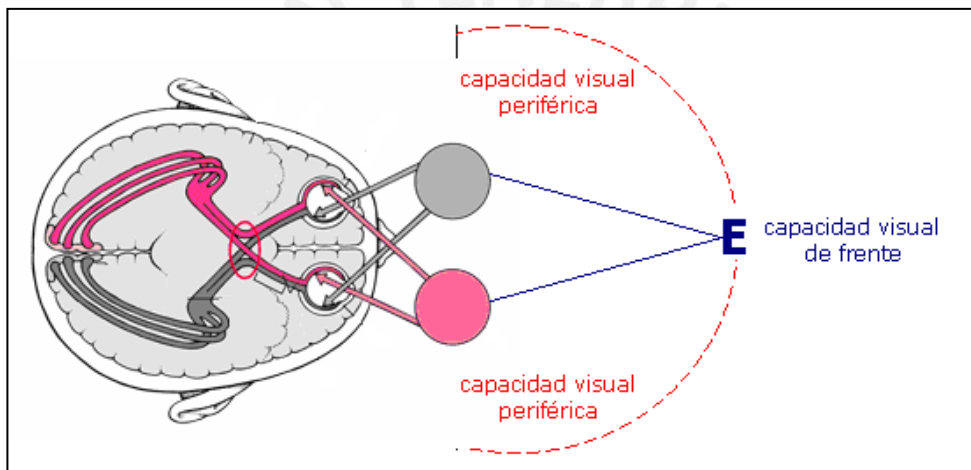


Figura 6: Campo visual señalando la visión periférica y la visión central.
(Fuente: http://www.altavision.com.co/exa11_clip_image003.gif)

Otra tipología que se añade está referida a si nacieron con la discapacidad o apareció después de haber gozado de visión. Según esto, las personas pueden ser clasificadas con discapacidad visual congénita o discapacidad visual adquirida.

Esta diferenciación permite identificar características entre diferentes grupos (según discapacidad y edad que perdieron la visión) y adecuar las herramientas materiales y semióticas para el aprendizaje del estudiante invidente o de baja visión. Por ejemplo, para aquellos que perdieron la visión a tierna edad y bajo el supuesto de que reciben atención en estimulación temprana, desarrollarán la sensibilidad del tacto a tal grado que podrán leer y escribir con mayor rapidez y eficiencia algún texto escrito en Braille. Algo similar sucede con la percepción

auditiva que les permite “estimar” ciertas distancias según la profundidad y cercanía del sonido que perciban. La adecuación se orienta a elaborar materiales en relieve, de tableros, diagramas y gráficos en planos cartesianos, parecidos a las que utiliza un vidente realizados en papel y lápiz, pero que no deben ser tan recargados pues, al haber perdido la visión tempranamente, no guardan en su memoria algún recuerdo de cómo son estos organizadores gráficos. En cambio, aquel que logró aprender y percibir visualmente las cosas en sus primeros años, tendrá dificultad con la lectura y escritura en Braille pero podrá ser superada con la rehabilitación apropiada. Para estos últimos, el material elaborado en relieve de los organizadores gráficos matemáticos podría ser un poco más detallado sin llegar a una mezcla (en relieve) de puntos sin sentido que lleve a la confusión de conceptos en la persona ciega. Además, el haber conocido formas y tamaños de algunos objetos coadyuva a una mejor situación interaccional entre profesora y alumno ya que se pueden utilizar analogías entre conceptos matemáticos y características propias de algunos objetos reales enriqueciendo la semántica utilizada por el alumno invidente.

Además, la carencia de la visión en una persona que no muestre otra anomalía o problema puede ser compensado por la estimulación adecuada de otras modalidades sensoriales (oído, tacto, olfato). Sin embargo, se debe tomar en cuenta que esta deficiencia afecta al desarrollo motor, cognitivo y de personalidad (Castejón y Navas, 2009).

4.2 Plasticidad cerebral y aprendizaje

Problemas que impliquen lesiones o daños que minimicen la funcionalidad de la parte afectada es estudiada por la rama de la neurociencia en el tópico de Plasticidad Cerebral y Aprendizaje.

Pascual-Castroviejo (1996) menciona que el cerebro tiene la capacidad de adaptarse a una nueva situación de lesión, compensando los efectos de la misma, parcialmente. Esta adaptación es mayor en los más jóvenes que en los adultos pues el cerebro está inmaduro. Los mecanismos por los cuales el cerebro se

adapta son histológicos, bioquímicos y fisiológicos. Indica que estos mecanismos deben estudiarse y comprenderse desde una perspectiva anatómica, fisiológica y/o funcional.

Fridman (2004) proporciona el término de *plasticidad adaptativa* que se relaciona con “lograr un cambio estructural y funcional que conlleve un beneficio perdido o previamente ausente.”. Afirma que el cerebro tiene la capacidad de reorganizarse y readaptarse funcionalmente.

Si bien ambos profesionales dirigen sus estudios hacia personas que han sufrido accidentes cerebrovasculares, lesiones medulares, traumatismos de cráneo y enfermedades de Parkinson, y a su rehabilitación clínica respectiva, sus investigaciones también sugieren pautas de aprendizaje unido a los avances médicos. Es el caso de Fridman, quien menciona como ejemplo de un modelo de desaferentación (privación de la funcionalidad por falta de estímulos) a la plasticidad que sucede con los ciegos cuando leen en Braille. Además, aporta los estudios de Sadato y colaboradores realizados en 1996 donde observaron, mediante tomografías, que las áreas cerebrales (áreas corticales) que estaban desaferentadas se activaban cuando la persona ciega realizaba la lectura en Braille, así como cuando utilizaba la discriminación táctil pero no en Braille. Con este avance, Fridman explica que

[...] las cortezas desaferentadas podrían reorganizarse funcionalmente como para suplir el trabajo de otra modalidad. [...] áreas con una modalidad específica sensorial (visión) comienzan a interpretar estímulos correspondientes a otra modalidad (sensibilidad).

Con esta información se puede fundamentar las adaptaciones adecuadas de herramientas materiales y semióticas en el aprendizaje del estudiante ciego.

4.3 Desarrollo intelectual de las personas con discapacidad visual

Piaget (1985), en el prefacio de su obra *La Toma de Conciencia*, indica que

Desde el punto de vista epistemológico [...] la interiorización de las acciones se halla en la fuente de las estructuras operatorias, lógico-matemáticas como causales y, exige, pues, un atento examen.

Con lo anterior se remarca la importancia del desarrollo del estadio sensorio-motor en las primeras etapas de evolución del ser humano, es decir, en su niñez.

Castejón y Navas (2009) indican que a partir de los cuatro meses de vida empiezan a mostrarse diferencias en el desarrollo entre un niño vidente y otro invidente. En este último, se pueden producir hasta retrasos de dos años. Además, presentan retrasos en orientación y movilidad hasta alrededor de los 19 meses en que muestran interés por objetos sonoros y por el movimiento (trasladarse), así como en

[...] el acceso a la función simbólica, determinados por la escasa conducta imitativa y por las dificultades que tiene un invidente para formar una imagen mental de sí mismo. [...] hay que compartir con Ochaíta (1993), las posibilidades que puede tener el lenguaje (y su imitación) para compensar algunos problemas en la elaboración de los símbolos. [...] está indicando que el lenguaje para los ciegos puede constituir una ruta alternativa para lograr resultados cognoscitivos similares a los logrados por los videntes a través de la acción.

Asimismo, entre los 3 y 7 años de vida, presentan retrasos en tareas de tipo figurativo y espacial, el cual se anula entre los 11 y 15 años. Respecto al pensamiento formal de los adolescentes invidentes, Castejón y Navas (2009) afirman que los ciegos tienen la capacidad de resolución de problema mediante el método hipotético-deductivo. Es así que, estos autores concuerdan con Ochaíta y citan lo siguiente:

[...] todo parece indicar que la falta de visión lleva a los ciegos a evolucionar de forma diferente a los videntes, aunque finalmente las capacidades intelectuales de ambos puedan considerarse semejantes. (Ochaíta, 1993, p.202)

4.4 Sistema Háptico

Una primera referencia sobre este tema ha sido la de Castejón y Nava (2009), quienes definen al sistema háptico como una integración de actividades complejas que realiza el sistema sensorial del tacto para obtener información del entorno inmediato.

Estudios sobre la complejidad del sistema sensorial del tacto, tales como reconocer sólidos o patrones tridimensionales, ha hecho que tenga mucha importancia la exploración como acto motor. Esto es mencionado por Aivar et al. (s.f.) quienes aseguran que “la percepción háptica depende en gran medida de la realización de movimientos de exploración, que es un proceso de carácter perceptivo-motor”. Esta exploración es una acción intencional por lo que Aivar et al (s.f.) la han denominado tacto dinámico

[...] que influye en los modos de estimar cualidades que no son accesibles directamente, ya que son propiedades relacionales y no cualidades primarias del objeto [...] El tacto dinámico, en la forma descrita, da acceso a propiedades como peso, longitud anchura, volumen forma y orientación de los objetos.

Pero la intención de esta tesis no está centrada exclusivamente a identificar propiedades que puede poseer un objeto. Ampliando la información anterior, Ballesteros (1999) indica que “el sistema háptico (tacto activo) es un sistema perceptivo complejo encargado de aprehender y codificar la estimulación que llega a los receptores cutáneos y cinestésicos (Loomis y Lederman, 1986). “[...] incorpora y combina información a partir de distintos subsistemas táctiles como el cutáneo, el térmico, el del dolor y el cinestésico”. Esta profesional agrega que los materiales didácticos elaborados en relieve –gráficos, mapas, textos en Braille– “constituyen los instrumentos más didácticos en el entrenamiento de la lectura, de la movilidad, de la geometría, la geografía, las matemáticas o la biología”.

¿Cómo almacenan la información sobre objetos familiares y no familiares las personas con discapacidad visual? Ballesteros, Bardisa, Reales y Muñiz (2003) han desarrollado un instrumento de evaluación llamado Batería de Habilidades

Hápticas. Su finalidad es evaluar la percepción y la memoria en niños invidentes y niños videntes mediante la modalidad háptica. Ellos aclaran que

[...] la eficiencia de la visión (en precisión y rapidez) hace que se considere que esta modalidad domina al resto de las modalidades perceptivas. La percepción de la forma a través del tacto es algo menos precisa y más lenta que la percepción visual. Esta observación ha hecho que muchos investigadores consideren injustamente que el tacto proporciona información empobrecida.

Las investigaciones de Ballesteros et al (2003) indican que se requiere de un marco de referencia para relacionar los rasgos percibidos en algún objeto o forma. Las personas con visión pueden identificar con facilidad algún marco de referencia cuando obtienen o intercambian información. En cambio, el tacto sin visión acarrea dificultades para identificar esos marcos de referencia que permitirían codificar la forma y relacionarlos unos con otros.

La memoria también es otro aspecto de importancia en el estudio de las habilidades hápticas. El almacén de la información es la memoria. ¿Pero de qué memoria hablamos? Ballesteros et al. (2003) mencionan que existen distintos tipos de memoria ubicados en distintas zonas de la corteza cerebral. Estas memorias son: memoria a corto plazo o inmediata, memoria a largo plazo o memoria permanente, memoria procedimental, memoria declarativa.

El trabajo de investigación de Ballesteros et al. (2003) está centrado en seis aspectos: comprensión espacial, memoria a corto plazo háptica (memoria de puntos, objetos y movimiento), identificación de objetos familiares a través del tacto, discriminación de figura-fondo y reconocimiento de formas incompletas, exploración eficiente de puntos (orientado a la lectura en Braille) y, discriminación de texturas.

La percepción de patrones de puntos realizados a través de la modalidad háptica supone un proceso constructivo que depende de procesos cognitivos para percibir la información, unido al uso flexible y rápido de movimientos manuales que permiten captar dicha información en paralelo. (Ballesteros et al, 2003)



CAPÍTULO 5 – INVESTIGACIÓN PRELIMINAR

La investigación preliminar corresponde a la primera fase que sirvió para la identificación de la participante en este estudio, para la exploración de la realidad y los conocimientos que posee esta alumna, y de la elaboración de las herramientas materiales y semióticas.

5.1 Identificación de la alumna invidente como participante de investigación

Con finalidad exploratoria, se visitó el CEBE San Francisco de Asís, localizado en el distrito de Surco, en la ciudad de Lima. Es un colegio estatal primario para niños ciegos y de baja visión, y que desde hace varios años cuentan en su población escolar a niños multi-impedidos que presentan discapacidad visual. Los inicios de esta investigación empezó en este colegio con las primeras observaciones que se hicieron a dos grados de educación: 1° y 4° de Primaria. La finalidad era reconocer la importancia del material concreto, de los juegos para la apropiación del concepto matemático de conjuntos en los niños de primer grado y, de las operaciones de unión e intersección en los alumnos de cuarto grado, así como observar sus prácticas matemáticas y el lenguaje que utilizaban para expresar sus conocimientos. Además, era importante conocer la apreciación de las docentes encargadas de estos grados en los logros y obstáculos que encontraban en sus alumnos. Con esta experiencia, se fue perfilando las primeras bases de esta investigación: supuestos, objetivos, contenido matemático y material a elaborar.

Cuando el proyecto tuvo claro sus objetivos, se decidió que la investigación se realizaría en el Centro de Rehabilitación de Ciegos de Lima (CERCIL), ubicado en el distrito de Santiago de Surco, en la ciudad de Lima, Perú. El Centro de Rehabilitación de Ciegos de Lima (CERCIL) ofrece varios servicios a las personas que presentan discapacidad visual. Uno de ellos es el apoyo a personas que no terminaron sus estudios escolares por diversos motivos, a través de un

convenio con un instituto educativo ubicado en la ciudad, entidad que ofrece a toda persona que desee acabar sus estudios escolares, un programa de educación a distancia y virtual, complementada con un libro de texto y la grabación de los temas en un disco compacto. Cada año realizan dos módulos que es el equivalente a dos grados escolares. Los participantes de CERCIL son alumnos matriculados de este instituto educativo bajo la modalidad de estudio en casa, pero estudian y rinden sus evaluaciones en CERCIL, canalizados dentro del Programa de Extensión e Integración de Estudios de personas ciegas y de baja visión que esta institución dirige dentro de sus instalaciones.

La profesora-investigadora solicitó realizar la labor del voluntariado en CERCIL con la finalidad tener una mayor cercanía con los participantes. La labor consistió en apoyar a los profesores encargados del Programa mencionado, un docente encargado del curso Matemática y una docente encargada de los cursos de letras. El trabajo era enseñar el curso de matemáticas a los alumnos. Además, se les afianzaba a los alumnos en lectura y escritura en sistema Braille, manipulación de herramientas materiales (ábaco, máquina Perkins, regleta, cubaritmo) y se elaboraban materiales en relieve.

En este Programa se conoció a la que sería la alumna en quien se centraría esta investigación. Este estudio requería de un estudiante con la discapacidad de la ceguera y que no presentara alguna otra deficiencia para no dispersar los objetivos de la investigación, que estuviera en el nivel de secundaria y que en su programación curricular estuviera el contenido matemático de función lineal. Además, el estudio del tema de función lineal implicaba un manejo de varios registros (simbólico, tabular y representación gráfica), por lo cual se decidió realizar el estudio con un solo sujeto.

Cuando la alumna idónea para la investigación fue seleccionada, los profesores del Programa sugirieron que ella sea alumna de la profesora-investigadora con la finalidad de realizar mejor las observaciones de las prácticas matemáticas que podían surgir en otro contexto que no sea propiamente las sesiones de investigación.

5.2 Perfil del sujeto de estudio

Como ya se ha mencionado previamente, el sujeto de estudio de esta investigación es una alumna invidente quien presenta ceguera congénita desde los ocho años de edad. Su nivel de inteligencia es normal promedio. En esta investigación ella será identificada con el nombre de Janet.

En la entrevista previa, la alumna refiere que a partir de los ocho años empezó a tener una visión borrosa. A partir de los ocho hasta los diez, aproximadamente, la visión fue disminuyendo más. Esto le generó inseguridad y disminución de autoestima. Cursó hasta el tercer grado de primaria en un colegio normal.

Ingresó a CERCIL a los 19 años de edad para su rehabilitación. Luego, a mediados del 2011, fue derivada al Programa de Extensión e Integración de Estudios y fue inscrita, mediante un examen de ubicación, en el quinto grado de primaria. En la actualidad, ha terminado el segundo año de nivel secundario y su visión es casi nula.

Ella se encuentra rehabilitada desde hace más de un año. Realiza sola las labores de casa tales como cocinar (prende la cocina, elabora guisos, pica, pela, no fríe), lavar platos y su ropa, planchar. Se siente segura en su casa y en libertad para movilizarse. Utiliza el bastón para su desenvolvimiento por las calles y solicita apoyo para cruzar la calle o tomar un ómnibus.

Respecto a sus logros, se siente feliz por todo lo que ha aprendido pero no satisfecha porque tiene deseos de aprender más. Considera que su discapacidad visual no es un obstáculo para su aprendizaje porque cuando mira hacia atrás, observa el avance que ha realizado en sí misma desde que empezó su rehabilitación y retomó sus estudios escolares.

Está agradecida con todas las personas que la han ayudado a superar obstáculos y a la rehabilitación que ha recibido en CERCIL.

En esta entrevista previa, se le preguntó sobre su aprendizaje en matemáticas. Se le preguntó si alguna vez había construido tablas de doble entrada, manipulado

planos cartesianos y gráficos estadísticos. Indicó que nunca había conocido estos registros y, por lo tanto, nunca los había elaborado.

5.3 Perfil del alumno vidente como participante de apoyo en la investigación

La investigación contemplaba el estudio de la configuración epistémica como referencial institucional para realizar un análisis comparativo con la configuración cognitiva que presentara la alumna invidente.

Se escogió a un alumno vidente que tuviera institucionalizado el concepto de función lineal, y que estuviera en los últimos años de estudio secundario. En este estudio se le reconocerá con el nombre de Ernesto. Él cuenta con 16 años de edad y, al momento de la aplicación de la actividad, estaba por terminar el 5° año de secundaria en un colegio particular de esta ciudad. Su trayectoria escolar en secundaria ha sido premiada con diplomas y medallas por el orden de mérito académico. Ahora es un alumno del primer ciclo universitario.

Sólo se requirió una sesión en donde este alumno aplicó la Hoja Guía que contenía la actividad final que debía realizar la alumna invidente y que serviría para desarrollar todo el análisis explicado en el marco teórico.

5.4 Elaboración de los instrumentos de recojo de información

5.4.1. Estructura de las entrevistas

Se elaboraron dos cuestionarios guías (ver Anexo 1) para orientar la entrevista previa desarrollada antes de la investigación, y la entrevista final realizada al terminar las sesiones de investigación. Ambas fueron registradas con una grabadora de voz para obtener con precisión las apreciaciones de la alumna invidente sobre el antes y después de este estudio.

La entrevista previa tiene la finalidad de conocer la historia personal del aprendizaje de la alumna invidente, su historia académica y sus motivaciones para lograr su realización personal.

La entrevista final estaba orientada a reconocer en la participante la influencia de su entorno y el uso de las herramientas materiales y semióticas en el aprendizaje adquirido y, su apreciación sobre la experiencia del aprendizaje adquirido en las sesiones de investigación.

5.4.2. Estructura de las sesiones de investigación

Fueron nueve sesiones de investigación, de los cuales seis fueron de exploración e identificación del vocabulario adecuado, e iniciación en las destrezas manuales para la elaboración de tablas de correspondencia, diagramas sagitales, reconocimiento del plano cartesiano, construcción de rectas y ubicación de puntos en el plano cartesiano. Además, estos registros fueron asociados a contextos problemáticos de la vida diaria y a términos matemáticos. Inclusive, Janet creó un problema, el cual fue discutido y representado en lenguaje simbólico y en una recta en el plano cartesiano. En las siguientes dos sesiones se desarrolló el análisis de un problema contextualizado que sirvió para perfilar la Hoja Guía de la actividad final, en la cual se centraliza esta investigación. La última sesión fue la aplicación de esta Hoja Guía (ver Anexo 2) que contenía una situación cercana a la experiencia diaria de Janet.

Para lograr una mejor identificación y análisis de las prácticas, objetos y procesos matemáticos empleados por la alumna, las sesiones se registraron en grabaciones de video. Las sesiones duraban dos horas cada una y se realizaban una vez por semana.

5.4.3. Sesiones previas

A continuación algunos ejemplos de los diálogos y actividades que se desarrollaron en las primeras sesiones.

- **Sesión 01 – 6 de setiembre de 2012.**

La profesora-investigadora le pregunta como conceptúa la palabra relación en matemática. Janet explica que la matemática está presente en su vida y da como ejemplo las siguientes expresiones:

- “Tantos gramos de jamonada y el precio de esa cantidad es tal, es una relación.”
- “El tanto de precio de una botella de aceite...está 20% menos por hoy.”
- “Y cuando relacionamos... las cantidades del precio con el producto.”

También se le presentó un pequeño plano cartesiano con los cuatro cuadrantes para que se familiarizara con el tacto. El plano solo contaba con los ejes y las marcas correspondientes a dichos ejes. No se le dio en forma de grilla. Fue fijando en su mente cómo estaba espaciado y qué elementos tenía.

Luego, se le presentó (ver Figura 7) y adaptó una información sobre gasto por pasajes y distancia recorrida que estaba en su libro de texto. Se le pedía que la información dada sea completada en el tablero.

c)

Distancia en Km	2	4	6	8	10	1,5	3,5	5
Pasaje en S/.	10	16	22	28	34			

Figura 7: Tablero propuesto por el texto (en vista) con la finalidad de completarlo. Este ejercicio está dentro del tema de Relaciones y Correspondencias.

En clases normales, Janet ya había palpado algunos organizadores de información que la profesora-investigadora le había dado como material de estudio en otros temas. Con este conocimiento y bajo la supervisión de la profesora-investigadora, ella produjo su primera tabla de correspondencia. Se le dio los datos que estaban en el texto (sólo los tres primeros pares verticales) y se le pidió que calculara los pasajes cuando la distancia era de 8; 10; 1 km, respectivamente. Se inició un

diálogo sobre la forma cómo estaban relacionados los datos y qué patrón encontraba entre ellos. Indicó que cada vez que avanzaba de dos en dos kilómetros, avanzaba de 6 en 6. Con este razonamiento, completó el gasto por pasajes para 8 km y 10 km, respectivamente. En su razonamiento predomina el cálculo mental y la familiaridad que tiene con precios y cantidades de productos. Luego, cuando se le preguntó por el gasto en 1 km y se le recordó que por 2 km el gasto correspondiente era de S/.10., ella realizó el cálculo mental y respondió que para 1 km, el gasto era de S/.5, porque 1 km es la mitad de 2 km, entonces el gasto también es la mitad. Con estos datos, terminó de completar su tablero para los datos de 1 km, 8 km y 10 km.

- **Sesión 02 – 13 de setiembre de 2012.**

A Janet se le propocionó un plano cartesiano elaborado por el centro de rehabilitación. Estaba representado por una cuadrícula y los ejes numerados. En este material iba explorando todos los relieves (ver Figura 8) y, en paralelo, relacionándolo con lo que ya había conocido en la sesión anterior.

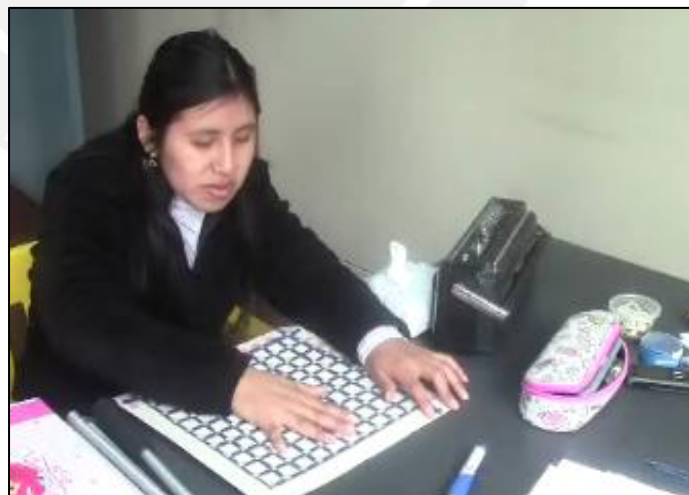


Figura 8: Janet reconociendo elementos de un plano cartesiano. (Sesión 2. 13-09-2012)

Con esta práctica, ella empezó a ubicar puntos en un nuevo plano cartesiano que no tenía numeración en los ejes (ver Figura 10). Estos

puntos estaban dados en un tablero donde se consideraban datos decimales y fuera de algún contexto (ver Figura 9). Lo que se buscaba era que Janet se familiarizara en la ubicación de puntos:

X	0,5	1	1,5	2	2,5
Y	1	2	3	4	5

Figura 9: Tabla con valores para ser ubicados en el plano cartesiano.

En este primer ejercicio, para ella le fue más fácil considerar la siguiente escala en el eje $X \rightarrow 0,5 : 1$, y en el eje $Y \rightarrow 1:1$. Según sus palabras así no se confundía. El problema que presentaba era que el tacto tiene cierta limitación espacial y recién estaba ejercitándose con figuras geométricas en el plano. Así es que el proceso cognitivo de fijar en su memoria los objetos que tocaba fue lento.

Con esta sesión, Janet iba mejorando la manipulación de herramientas materiales y semióticas que le servirían, posteriormente, para analizar situaciones contextualizadas, organizar sus ideas y adquirir nuevas terminologías.



Figura 10: Janet ubicando sus primeros puntos en el plano cartesiano. (Sesión 2. 13-09-2012)

- **Sesión 03 – 20 de setiembre de 2012.**

En esta sesión se le dio las indicaciones verbalmente respecto a como iba ir ubicando los puntos sobre el plano cartesiano. La condición era la siguiente:

“Por cada "x" que avanzo, se avanza en "y" dos espacios. ¿Dónde iría el chinche? ¿Dónde estaría el punto que representaría la ubicación final de cada movimiento?”.

Se le dirigió el rastreo en todo momento logrando que ubicara el punto (1;2). Luego, se le pidió que avanzara hasta 2 sobre el eje X y se le preguntó ¿qué valor le correspondería a "y"? La respuesta fue: “2 por cada 1... [...]...avanzo de dos en dos”. Utilizando la condición dada, Janet rastreó desde 0 hasta 2 sobre el eje X, subió dos unidades y volvió a subir dos unidades más. Ella indicó que llegaba a 4 en "y". Cabe aclarar que hasta ese momento ella realizaba estos movimientos sobre los ejes y después ubicaba el punto. Con esta técnica que se le dio, ella colocó cinco chinches que representaban a los puntos

Con este ejercicio, se le preguntó en qué situación de la vida se presenta esta relación donde se cumpliera que por cada uno que avanza en X, se avanzan dos en Y. Ella, después de unos breves minutos, aportó con una experiencia que tuvo hace tiempo. Recordó que era un problema matemático que le habían dado a su hermana menor. El problema decía que por cada tarro de leche que compraba le regalaban dos stickers. ¿Cuántos stickers recibirá si compra cuatro tarros?

Con este ejemplo, se siguió con el reforzamiento del análisis inductivo para orientarla a la generalización de la situación con una variable x que representaría el número de tarros de leche.

Los cálculos que realizó inicialmente, fueron de ir sumando las cantidades de stickers por cada tarro que compraba. Se le preguntó

cuándo era conveniente sumar y cuándo multiplicar. Ella respondió que cuando las cantidades son pequeñas, conviene sumar.

Ante esta respuesta se le preguntó cómo se hallaría el número total de stickers si se compraran números grandes de tarros de leche. Logró, con mucho esfuerzo y mucho diálogo, identificar que debía multiplicar 2 (por los stickers) con cualquier número de leche que comprara. Aceptó lentamente que la expresión matemática que representaba al número total de stickers que recibiría al comprar " x " tarros de leche era " $2x$ ". Incluso, mostró un lenguaje gestual de cansancio porque se le estaba presentando un conflicto cognitivo. Esto se debía a que había un problema de registro al pasar de un enunciado verbal a uno simbólico. Además, los conocimientos algebraicos de representar cualquier número por una variable, todavía eran vagos. Esta sesión y las subsiguientes fueron para reforzar, también, los conocimientos algebraicos básicos.

Luego, se le pidió que uniera los chinchos para que reconociera a la recta. Pero, antes de eso, ella ya se había percatado que los puntos estaban en línea recta.

Siguiendo con el ejercicio, se le comunicó que se iba a cambiar la condición para ubicar nuevos puntos: "Por cada uno en ' x ', se aumenta 3 en ' y '."

La ubicación de estos nuevos puntos y la construcción de la recta las realizó con cierta rapidez (ver Figura 11). Luego, siempre mediante el diálogo, se le pidió que explicara cómo elaboró la recta. Indicó que siguió la condición dada, así que para uno en " x " le corresponde 3 en " y "; para 2 en " x ", le corresponde 4 en " y "; para 3 en " x ", le corresponde 9 en " y "; para 4 en " x ", le corresponde 12 en " y ".

Se le pidió generalizar lo que había analizado. La profesora-investigadora le hizo un recuento de lo que había explicado. Se le

preguntó que patrón había encontrado. Ella respondió que había una relación con los números. Explicó que al 1 lo multiplicaba por 3. Al 2 lo multiplicaba por 3 para llegar a 6 en "y". Se le preguntó si ya se había percatado de cuál era el patrón. Ella asintió con un movimiento de cabeza y un breve sí. Se le preguntó que debía hacer con todos los valores de "x". Janet respondió que debía multiplicarlos por 3. Se le dio una frase a medias: "Entonces, y es igual a ¿cuánto?" Ella respondió: "y es igual a 3..." La profesora-investigadora preguntó: "¿3 qué?..." La alumna aclaró: "...3x". Se le felicitó por el logro conseguido aunque se observaba todavía que la alumna mostraba cierta inseguridad al dar sus respuestas debido al poco manejo de la simbología y la generalización de una situación.

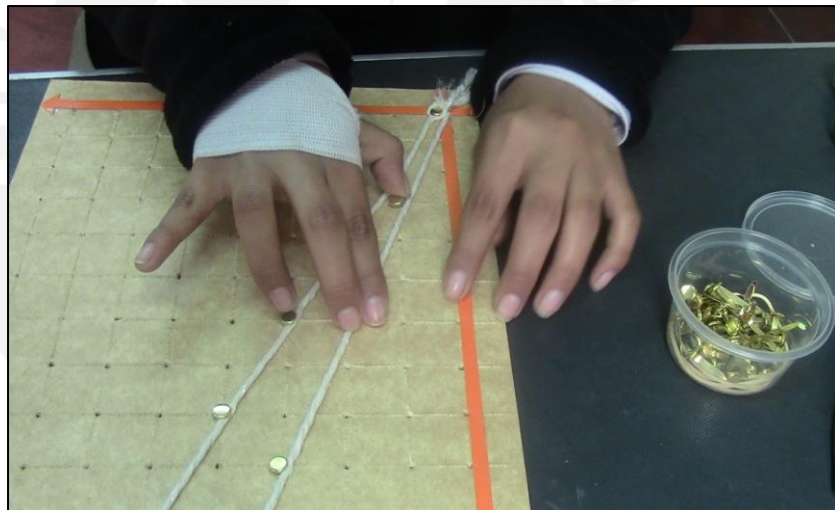


Figura 11: Janet construyendo sus primeras rectas sobre el plano cartesiano. (Sesión 3. 20-09-2012)

- **Sesión 04 – 04 de octubre de 2012.**

En esta sesión, Janet recibe una ficha de trabajo escrito en Braille que contiene un problema presentado en dos situaciones de ahorro diario, así como, las tareas que debe realizar. Estas tareas son preparar un organizador de datos, es decir, una tabla de correspondencia,

elaborar los modelos matemáticos que representan a las situaciones y representar las gráficas en el plano cartesiano.

Se le pide que lea (ver Figura 12) y, luego, explique cuales son las condiciones de ahorro en cada situación. Esto tiene la finalidad de mejorar la velocidad de lectura y la ortografía, afianzar la comprensión lectora mediante el diálogo posterior y fijar en su memoria inmediata las condiciones del problema.



Figura 12: Janet leyendo el problema.
(Sesión 4. 04-10-2012)

Un párrafo de siete líneas escritas en Braille, le tomó tres minutos leerlo. El contexto del problema decía: “Mi hermano me ha propuesto ahorrar dinero. Me dice que si ahorro un sol diario, él me va a dar 3 soles antes del ahorro diario. Pero si decido ahorrar 2 soles diarios, él me va a regalar un sol.”

Primero, se realiza el diálogo para que Janet defina a qué variables va a asociar el número de días y el ahorro diario en soles. Al principio, mostró errores en el cambio de registro verbal a registro simbólico. Para ordenar sus ideas, ella muestra el siguiente razonamiento en el caso 1 “Para el día 0, mi hermano me regala antes del ahorro, 3 soles.

Para el día 1, aún no teniendo 1 sol ahorrado, en el día 0 ya tenía 3. Y cuando pasó el día, obtuve ahorrado 1 sol y lo juntamos con los 3, entonces ya tengo 4 soles. Para el día 2, a los 4 soles le agrego 1 sol y tengo 5 soles.” Con este análisis inductivo Janet identifica como " x " al número de días de ahorro y como " y " al ahorro diario en soles, ya que el ahorro diario depende del número de días que ahorre. Este análisis le tomó unos cuatro minutos, aproximadamente.

Luego de realizar los cálculos pertinentes, ella elabora sus dos tablas siendo orientada en los espacios que debe considerar para una buena presentación y de fácil manejo de las mismas. Los valores que toma para " x " son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Al terminar con sus tablas, y en diálogo permanente, empieza a elaborar sus gráficas sobre el plano cartesiano. Inicia con la ubicación de puntos (ver Figura 13). Primero el caso 1 y, luego, el caso 2. Se le refuerza indicándole donde está el cero (origen de coordenadas) y se le recuerda las condiciones de cada situación. El rastreo para ubicar cada punto es colocar su dedo en cada valor de " x " y luego sube tantos espacios como valor ha obtenido en " y ".

Cuando va construyendo el segundo gráfico (caso 2) se percata de que no puede colocar el chinche en un punto porque allí estaba el chinche del caso 1 pero todavía no le da una interpretación. No se le exigió que hiciera la interpretación para no recargarle la cantidad de información que recibía o descubría. Sólo se relacionó el punto con la terminología de par ordenado $(2;5)$.

No se terminó la actividad porque sonó el timbre de salida. Quedó como pendiente para la siguiente sesión.

De las actividades trabajadas en las sesiones anteriores, se le entregó los gráficos de las rectas que hizo en el plano cartesiano pero

graficado en relieve sobre una hoja para que lo archivara como material de repaso.



Figura 13: Janet ubicando los puntos del primer caso sobre el plano cartesiano. (Sesión 4. 04-10-2012)

- **Sesión 05 – 11 de octubre de 2012.**

La sesión se inicia con un recuerdo de lo que hizo en la sesión anterior y, luego, se le pide que explique cuál propuesta de ahorro le conviene más. Su primera respuesta fue el caso 2 y lo justificó de la siguiente manera: “El caso 2 me dice que si yo ahorro 2 soles por día, mi hermano me dará 1 sol antes del ahorro. El caso 1 es diferente. Si yo ahorro 1 sol por día, me da 3 soles antes del ahorro. Me conviene el caso 2 porque en un día, tengo 3....” La profesora-investigadora la interrumpe para preguntar: “Y en el caso 1, ¿cuánto tienes en el primer día?” Ella dice: “Tengo 4”. Se le repregunta: “¿Allí te conviene el caso 2?” Ella reafirma: “Sí, me conviene el caso 2, porque... [...] si yo voy ahorrando hasta llegar a 6 días, tendría más dinero ahorrado que el caso 1.” Entonces, se le dice que su justificación es para un ahorro de muchos días. Se le vuelve a preguntar que pasaría si fuera un día. Ella responde: “Bueno, si fuera un día, ahí sí, el caso 1 es conveniente”. Cabe aclarar que al principio de este análisis, ella se

apoyaba en su lectura en la tabla de correspondencia. Pero sólo fueron unos segundos y pasó al cálculo mental y al apoyo en su memoria.

También se le pregunta si va a existir algún momento que sin importar cuál sea el caso, el ahorro diario es el mismo para un mismo número de días ahorrado. Se le pide que verifique sus datos en las tablas de correspondencia que representan a los dos casos. En este momento, la profesora-investigadora se percató que la alumna no lee sus tablas, sólo está pensando sobre la conveniencia en cada caso. Se le pide, nuevamente, que verifique sus datos según sus tablas. Recién ella lee con los dedos y lo hace en forma silenciosa. Se le ayuda a que analice día por día, preguntándole en todo momento qué caso conviene. En su lectura, cuando llega al día 2, se da cuenta y se sorprende que el ahorro diario coinciden. Entonces, ella concluye que antes del día 2 conviene el caso 1. Cuando es después del día 2, conviene el caso 2.

La segunda parte de esta sesión consistió en verificar la ubicación de puntos, identificar a qué caso pertenecía cada recta (ver Figura 14) y dialogar los significados que representan a cada punto.



Figura 14: Janet señala con la mano izquierda a la recta $y = x + 3$ como el caso 1 y, con la mano derecha a la recta $y = 3x + 1$ como el caso 2. (Sesión 5. 11-10-2012).

El rastreo empieza en $(0;0)$ y sube hasta encontrar los puntos ubicados en el eje Y. Identifica al caso 2 como la recta que está debajo de la recta del caso 1, por la posición de los puntos y por el valor en "y" de cada uno. Se le pide que rastree desde el día 1, " $x=1$ ", y avance hacia arriba hasta alcanzar los dos puntos que corresponden a cada recta, respectivamente. Vuelve a identificar que la recta del caso 2 está debajo a la del caso 1. En este momento, se relaciona la conveniencia de ahorro cuando una recta está sobre la otra. Para el análisis realizado se concluye que el caso 1 es la propuesta de ahorro que más conviene por estar la recta más arriba que la otra.

Para el día 2, Janet rastrea e identifica a la intersección de las rectas como, según sus palabras, "el día que me da igual si es el caso 1 ó el caso 2".

Para el día 3, rastrea y se da cuenta que el primer punto que toca pertenece al caso 1 y el segundo punto pertenece al caso 2. Identifica que la recta del caso 1 está por debajo del caso 2. Se le pregunta qué propuesta de ahorro conviene. Ella responde que corresponde al caso 2. Y si considera más días mediante el rastreo, se percata que es más notoria la separación de las rectas.

Se concluye que tanto las tablas de correspondencia y las representaciones gráficas en el plano cartesiano ayudan a organizar los datos y mejorar el análisis.

- **Sesión 06 – 18 de octubre de 2012**

En la sesión anterior se analizaron los datos de las tablas de correspondencia y se interpretaron la posición de las rectas y la intersección de las rectas referente a dos casos de ahorro.

En esta sesión, se busca relacionar el coeficiente de "x" de la expresión matemática que representa a cada situación de ahorro, con la variación de "y" respecto a la variación en "x". El análisis se realiza

sobre las rectas comparando las variaciones que se dan de un punto a otro punto cuando se avanza en una unidad el valor de "x". Se le solicita a la alumna que ubique la recta " $y = 2x + 1$ ". Luego, se le pide que señale con su dedo el punto (0;1). Inmediatamente, se le pide que avance en una unidad sobre el eje X y que ubique el valor de "y" correspondiente. Logra identificar el punto (1;3). Cabe señalar que, hasta este momento, no se había tomado en cuenta que la alumna invidente tenía problemas de rastreo desde los ejes para volver a ubicar puntos más alejados a los ejes, lo que le dificultaba la identificación del valor de "y" correspondiente generándole inseguridad en sus respuestas. Entonces, observando más detenidamente el movimiento de sus manos, se pudo identificar que ella tenía la costumbre de repasar los puntos de uno en uno como fijando en su memoria la posición de estos. Con esto se decidió reformular la manera cómo se estaban analizando las variaciones y se le pidió que cada vez que avanzara en una unidad lo hiciera de un punto a otro punto. Con el rastreo que realiza de punto a punto, Janet se percató que al avanzar uno en "x", se aumenta 2 en "y" siempre. Se le pide que relacione este valor de 2 y que la identifique en la expresión matemática " $y = 2x + 1$ ". Dudó un buen rato pero, luego, se dio cuenta que era el coeficiente de "x" el que representa el aumento de 2 en 2 en "y".

El mismo análisis se hizo para la recta del caso 2, " $y = x + 3$ ". Janet se ubica en el primer punto (0;3) y rastrea avanzando una unidad hacia la derecha y sube una unidad identificando el punto (1;4). Se refuerza diciendo que por cada uno que se aumenta en "x", se aumenta en uno en "y". Se le pide que verifique con los demás puntos si el valor de este aumento en "y" es el mismo cada vez que aumente una unidad en "x". Luego de que la alumna ha verificado que la variación en "y" es

constante, se le pide que relacione esta variación de 1 en la expresión matemática " $y = x + 3$ ". Esta vez, su respuesta es más rápida y afirma que este valor multiplica a la variable " x ".

Se trató de guiar, en forma inductiva, verbal y abstracta, otro ejemplo donde se dice que para un aumento de 1 en " x " se incrementa 5 en " y ". Se le pide que explique cómo deberá ser la expresión matemática que represente esta idea. A Janet le costó mucho relacionarlo con " $y = 5x$ ". Entonces, se le puso otros ejemplos: "Para un aumento de 1 en " x ", se incrementa 4 en " y ". ¿Cuál es la expresión matemática que relaciona estas variaciones?" Su respuesta fue inmediata: " $4x$ ". Pero aún no se podía afirmar que tuviera interiorizado esta relación entre variación en " y " y el coeficiente de " x " porque era la primera vez que se realizaba este tipo de análisis. Era necesario tener más ejercicios donde se construyeran rectas, se identificara la variación en " y " cuando varía uno en " x ", y se relacionara el incremento en " y " con el coeficiente de " x ".

El resto de esta sesión se dedicó a analizar cuando " x " variaba en otra cantidad diferente a 1. Se le pide que identifique qué sucede con " y " cuando " x " se incrementa en 1, en 2 y en 3. Utilizando la recta " $y = 2x + 1$ ", Janet rastrea desde el punto $(0;1)$ avanzando una unidad en " x ", entonces sube 2 unidades para encontrar el siguiente punto $(1;3)$. Luego, vuelve al $(0;1)$ y avanza dos en " x ", entonces para encontrar el siguiente punto $(2;5)$, se percata que debe subir 4 unidades. Nuevamente, vuelve al $(0;1)$ y avanza tres unidades en " x ". Luego, sube para encontrar el punto $(3;7)$ y observa que debe subir 6 unidades. Entonces, ella reflexiona y expresa que si avanza cuatro en " x ", avanzará 8 unidades hacia arriba. Se le menciona que entre las variables existe una relación proporcional. Es decir, que si la variación

se duplica o triplica en " x ", también se duplica o triplica la variación en " y ", respectivamente. Para verificar que ha entendido esta relación entre variaciones, se le propone el siguiente ejemplo: ¿Qué pasa si se avanzo 10 en " x "? ¿En cuánto se subirá en " y "? Janet realiza simultáneamente, un análisis inductivo y el rastreo en el plano cartesiano sobre la recta " $y = 2x + 1$ ". Se dice para sí: "Si avanzo 1, acá avanza 2;..." (Janet se encuentra rastreando en el eje X e, inmediatamente sube dos unidades) Luego, responde en voz alta: "... entonces, para 10 avanzaré 20".

Con todo el análisis anterior, se resumen y se relacionan las ideas concluyéndose en que existe una constante que influye en la proporción y que es el valor 2 porque todas las cantidades de " x " se duplican. Además, este valor 2 aparece en la expresión matemática " $y = 2x + 1$ " como el factor que multiplica a " x ".

Se afianzan estas ideas con la ubicación de otros puntos colocados previamente en otro plano cartesiano, en donde la variación en " y " es de 3 unidades cuando " x " varía en una unidad. Janet rastrea avanzando dos unidades hacia la derecha y se da cuenta que para encontrar el siguiente punto debe subir 6 unidades. Se reflexiona sobre ello y se le pregunta ¿qué pasó en esta variación? Y ella responde que se ha triplicado. Se le explica que esto se debe a que por cada uno que se avance en " x ", se avanza 3 en " y ". Con esta relación se le pregunta ¿cuánto debo subir cuando la variación en " x " es de cinco unidades? Ella realiza su cálculo mental y responde que 15. Se le afianza este resultado al ayudarla a percatarse que el valor de 15 es el triple de 5. Además, esto se relaciona con la expresión matemática " $y = 3x$ " porque para determinar el valor de " y ", hay que triplicar el valor de " x ".

Luego, se le pregunta cuánto está subiendo en "y" si la expresión matemática es " $y = 4x$ ". Ella responde más segura que son 4 unidades. Se le vuelve a preguntar: ¿Y si se avanzan 5 en "x", ¿cuánto le corresponde a "y"? Ella calcula mentalmente y responde que es 20.

Ahora, se le pide que señale el primer punto de la recta " $y = 2x + 1$ " y que relacione ambos datos. Se le pregunta qué representa el término independiente 1 en la recta graficada en el plano cartesiano. Ella identifica al primer punto. Se le amplía esta información diciéndole que el número 1 está relacionado con el punto donde se intercepta la recta con el eje Y. El valor de 1 le corresponde al eje Y. Se le pide que analice y encuentre la relación del término independiente 3 de la expresión matemática " $y = x + 3$ " con la recta que la representa. Janet señala con su dedo al punto (0;3) donde el 3 en "y" es el valor que aparece en la expresión. Con este señalamiento también informa que se relaciona con el punto de intersección de la recta con el eje Y.

Por último, se le proporcionó la expresión matemática " $y = 5x + 2$ " para que explique el significado del coeficiente de "x" y del término independiente de dicha expresión. Para dar respuesta a lo que requerido, Janet utiliza el plano cartesiano y sólo realiza rastreos sobre ella sin necesidad de colocar chinchas. Con sus dedos señala los puntos que analiza mientras va explicando lo que ha entendido. Primero, se ubica en el punto de ordenada 2 porque es el término independiente de la expresión. Luego, explica que el factor 5 significa que si avanza uno en "x", en "y" avanzaría 5. Con su dedo ubicado en (0;2) rastrea avanzando uno hacia la derecha y luego sube 5 unidades. Con la mano derecha, señala el punto (0;2) con el dedo pulgar y el punto (1;7) con el dedo índice. Reconoce que por estos dos puntos pasaría otra recta (ver Figura 15).



Figura 15: Janet señalando con sus dedos los puntos (0; 2) y (1; 7) sobre la recta imaginaria $y = 5x + 2$. (Sesión 6. 18-10-2012).

Antes de terminar la sesión, se le pide que reflexione sobre la inclinación de las rectas, incluida la del último ejemplo. Se recuerda que en este último ejemplo ella sólo apoya los dedos pulgar e índice e imagina que una recta pasa por esos dos puntos.

La argumentación de Janet es la siguiente: “Yo veo que en la primera recta... (Se confirma que se refiere a la recta " $y = 5x + 2$ " porque ella realiza un movimiento del dedo pulgar como si rastreara esta recta imaginaria)...es más inclinada, más paradita. Tiene más cantidad, cómo le digo, el valor es mayor (Se le pregunta si se refiere al valor que multiplica a " x ". Ella lo afirma.) .” Luego, ella rastrea las otras dos rectas, " $y = 2x + 1$ " e " $y = x + 3$ ", y se le pide que las compare para que identifique cuál es más paradita. Ella afirma que es recta " $y = 2x + 1$ " es más paradita que la otra. Este resultado lo ha obtenido del rastreo. Se le ayuda a que ordene sus ideas para que pueda indicar qué recta es “más paradita”. Se le hace un recuento de lo que ha explicado y se le vuelve a preguntar el orden de las rectas según mayor inclinación. Ella intuye que “más paradita” es la recta cuya expresión matemática presente un mayor valor en el coeficiente de " x ". Luego, ella misma explica que si para un mismo valor de " x " se le multiplica por diferentes valores, el resultado es mayor cuando el factor de " x " es mayor. Si bien, ha justificado la relación entre inclinación de recta con

el coeficiente de "x", en la expresión de su rostro se puede observar que aún no se siente segura de su respuesta. Se comprende que suceda esto porque era demasiada información en el mismo plano cartesiano y requiere de tiempo y ejercitación para que pueda asimilarlo.

- **Sesión 07 – 31 de octubre de 2012**

Para esta sesión se elaboró otra situación contextualizada con la finalidad de Janet analice de manera similar a lo que ya se había realizado en las sesiones anteriores. El contexto hacía referencia a dos amigas y vecinas que tienen sus chacras y diferentes rutinas de siembra. Por día, Diana siembra 2 m^2 y Carla 4 m^2 . Desde hace días, La tierra está preparada para ser sembrada nuevamente. Ambas deciden empezar juntas en el mismo día, pero Diana ya había sembrado 10 m^2 en los días anteriores.

Con este contexto, Janet realiza las tablas de correspondencia y cuando termina de elaborarlas se hace el diálogo pertinente (y extenso) sobre los valores que ha encontrado y la relación que existe entre días y área sembrada. Se le solicita que las relacione con las variables "x" e "y", y que indique cuál sería la expresión matemática que representaría la situación de Carla y Diana, respectivamente. También se analiza la variación del área sembrada respecto a la variación de un día. Luego, se le pide que ordene sus ideas y las redacte por escrito tomando en cuenta todo lo dialogado.

Al término de lo anterior, Janet empieza a elaborar las representaciones gráficas en el plano cartesiano (Ver Figura 17 y 18). Lo logra terminar pero no se pudo realizar el análisis correspondiente para el afianzamiento de lo dialogado previamente porque sonó el timbre de salida. Entonces, queda como tarea pendiente para la siguiente sesión.

Es de remarcar que al elaborar las rectas, Janet ya utiliza por ratos sus tablas de correspondencia (ver Figura 16) para verificar que los puntos corresponden a su tablero o para trasladar datos a su plano cartesiano. Se recuerda que en las primeras sesiones, ella se apoyaba, casi exclusivamente, en el cálculo mental.



Figura 16: Janet construyendo las rectas apoyada con la lectura de sus tablas de correspondencia. (Sesión 7. 31-10-2012)

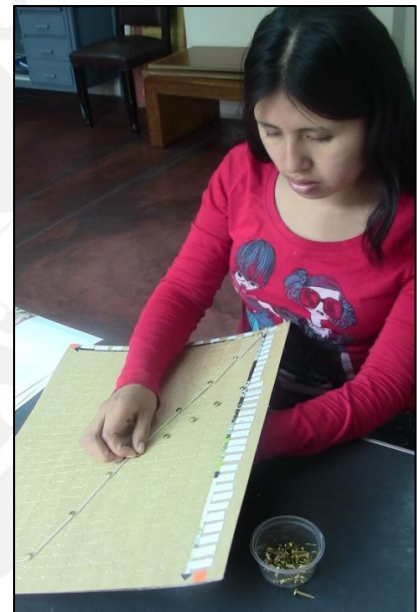


Figura 17: Janet construyendo la recta referente a la situación de Diana. (Sesión 7. 31-10-2012)

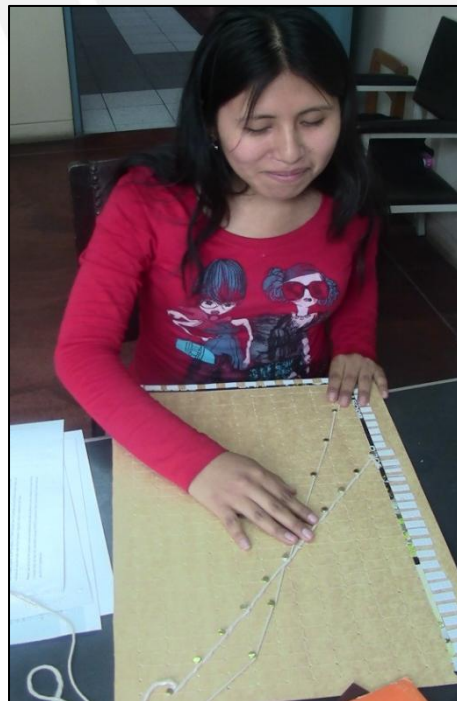


Figura 18: Janet con las rectas construidas para la situación de Carla, $y = 4x$; y para Diana, $y = 2x + 10$. (Sesión 7. 31-10-2012)

- **Sesión 08 – 08 de noviembre de 2012**

La sesión retoma lo iniciado la semana anterior. Al iniciar la sesión, se le pide que explique lo que las rectas graficadas en el plano cartesiano le informan.

Ella empieza tocando la recta que representa a la situación de siembra de Diana y reconoce la expresión matemática de la siguiente manera: con el dedo índice derecho ubica dactilarmente, el intercepto $(0;10)$ y, desde allí, rastrea una unidad hacia la derecha y luego sube dos unidades hasta encontrar el siguiente punto $(1;12)$. Con este movimiento, ella expresa que a Diana le corresponde la expresión " $y = 2x + 10$ ". Argumenta que en 0 días, Diana ya tenía 10 m^2 trabajados.

Luego, explica que Carla empieza con 0 m^2 para 0 días; y que trabaja de 4 en 4 m^2 . Menciona que la expresión que representa la situación de Carla es " $y = 4x$ ". Se le pregunta cómo se da cuenta de que esa es la expresión. Ella justifica diciendo que "si avanza un 'x'... estoy avanzando cuatro en 'y'...".

También indica que en el gráfico encuentra una "unión", señalando la intersección de las rectas. Se le aclara que es una intersección de rectas. Ella explica que "en un cierto día, Diana y Carla obtienen el mismo trabajo... la misma cantidad...de metros cuadrados." Se le felicita por las argumentaciones que ha dado sobre el trabajo realizado y ella exclama que "creo que a través del gráfico lo entiendo mejor".

Con todo lo anterior, se vuelve a repasar lo que ya se había dialogado en la sesión anterior. Se le pide que diga a qué representa el eje X y el eje Y, respectivamente. Ella reconoce que el eje X representa al número de días (aunque al principio se equivocó y dijo área, pero luego tomó su gráfico, lo rastreó y afirmó que era al número

de días), entonces el eje Y corresponde al área. Luego, se desea conocer la dependencia entre las variables. Se le preguntó qué variable es dependiente y cuál independiente. Ella afirma que la variable dependiente es el área (simultáneamente, ella rastrea una parte del eje Y porque siempre se ha relacionado a este eje con el resultado que se halla de los cálculos realizados al elaborar las tablas de correspondencia) y la variable independiente es el eje X, es decir, el tiempo (mientras habla, ella señala con su dedo el eje X) Se le pregunta por qué no podría ser al revés y si el problema se prestaría para pensar que la variable independiente fuera el área y la variable dependiente el número de días. Ella se queda en silencio porque está reflexionando sobre esa posibilidad. Luego, responde que tal vez, pero también cree que no saldría. Se le menciona que eso sería un estudio para después. Y antes de terminar con esta parte, se le sugirió analizar si para ella le es más fácil, luego de leer el problema, entender que el área depende de los días a que los días dependen del área. Ella responde que sí, que ella lo entiende como que el área depende de los días.

Se recordó también cuando se analizaron las variaciones del área cuando se variaba de un día al siguiente. Se le preguntó que se deseaba encontrar realizar este análisis. Ella explicó que “siempre se aumenta la misma cantidad”. Indicó que para Diana, el área aumentaba de 2 en 2 metros cuadrados. Se le pidió que dijera con qué se relacionaba este valor de 2. Ella dice que es para construir la ecuación que representa la situación de siembra de Diana. Pero aún faltaba otro dato. Entonces se le pide que recuerde cuál era la ecuación o expresión matemática respectiva. En todo momento que ella explica esta parte, ha tenido el plano cartesiano en su mano y rastrea por ratos de del primer punto al siguiente punto de la recta que estaba analizando. A la misma vez, ella repite la ecuación " $y = 2x + 10$ " y, a la vez, rastrea desde el eje de coordenadas hasta el punto $(0;10)$, deteniéndose en esta ubicación.

Entonces, se da cuenta que falta considerar el número 10. Indica que este valor corresponde al día 0 pero que Diana ya había sembrado 10 m², previamente.

Otro aspecto analizado fue la inclinación de la recta. Antes, se le recordó que el factor que multiplica a "x" en cada expresión matemática, representaba la variación de "y" cuando "x" variaba en una unidad, Entonces, se le pidió que identificara cuál de las rectas es "más paradita". Ella rastrea las dos rectas y concluye que es la de Carla. Se le preguntó cuál era el factor que multiplica a "x" en la ecuación que representaba la situación de siembre de Carla. Janet dijo que era 4. Luego, se le dice que la recta de Carla es "más paradita" y el factor que multiplica a "x" es 4. Inmediatamente, se hace el análisis para la recta de Diana. Se le dice que si la de Carla es la "más paradita", entonces la de Diana debía ser la "menos paradita". Con esto, se le pide que mencione el factor que multiplica a "x" en la ecuación de Diana. Janet reconoce que es el valor de 2. Ahora, se le pide que relacione las ideas de "más o menos paradita" con los valores de 4 y 2 identificados en cada ecuación. Janet concluye que mientras mayor sea el factor que multiplique a "x", la recta es "más paradita".

Esta es la primera sesión en la que se analiza, en forma gráfica, la posibilidad de que existan dos valores en "y" para un mismo valor de "x". Primero, Janet se ubica en el punto de abscisa 3 y sube hasta encontrar el punto correspondiente y que está sobre la recta de Carla (ver Figura 19). De allí, rastrea hasta el eje Y, confirmando que el valor es 12 (ver Figura 20). Hasta ese momento, ella creía que "x" puede tener dos valores. Regresa al punto de abscisa 3 (ver Figura 21) y sube con la mano derecha, pero a la misma vez, la mano izquierda está rastreando en paralelo (ver Figura 22) palpando a su vez el punto (1;4), justo cuando su mano derecha (qué está en la dirección del punto de abscisa 3) se encuentra a la altura del punto de ordenada 4, es decir,

no ha llegado hasta el punto sobre la recta. Entonces, ella lleva sus dos manos hacia el eje Y encontrando que el valor es 4 (ver Figuras 23 y 24). Con esto, ella afirma que el otro valor para " $x=3$ " es " $y=4$ ".

El error que presenta es de dispersión de información ocasionándole una falsa interpretación. Se le hace ver su error porque su rastreo se alteró al sentir un punto que está en la recta pero que no correspondía al punto de abscisa 3. Si ella parte del punto de abscisa 3 debió haber rastreado, sin desviarse, hasta llegar a la recta y al punto correspondiente; y recién allí dirigirse hasta el eje Y para identificar el valor que lo relaciona. Consideró a la recta como un espejo en donde " x " se refleja en " y " en forma perpendicular. Por lo tanto, concluyó que para cada " x " le corresponde un único " y ".

Para la aplicación de la actividad en la sesión central de investigación y al observarse este error, se reconsideró realizar el análisis sobre la correspondencia unívoca entre variables, en forma inductiva mediante preguntas y respuestas con referencia al contexto mismo del problema antes de afianzar la interpretación geométrica.



Figura 19: Janet se ubica en el punto de abscisa 3 y rastrea subiendo hasta llegar al punto que está sobre la recta que representa la situación de Carla. (Sesión 8. 08-11-2012)

Figura 20: Janet rastrea hacia el eje Y. Comprueba que para $x = 3$ le corresponde el valor de $y = 12$. (Sesión 8. 08-11-2012)





Figura 21: Janet regresa al punto de abscisa 3. Observar que están las dos manos en el punto. (Sesión 8. 08-11-2012)



Figura 22: Janet rastrea y sube desde $x = 3$ con la mano derecha, mientras la izquierda sube, paralelamente, palpando ésta el punto (1; 4). (Sesión 8. 08-11-2012)



Figura 23: Janet se desvía en su rastreo y gira hacia la izquierda. Mientras la mano izquierda se ha detenido en el punto (1; 4). (Sesión 8. 08-11-2012)



Figura 24: Janet lleva ambas manos hacia el eje Y. El valor es $y = 4$. (Sesión 8. 08-11-2012)

- **Sesión 09 – 15 de noviembre de 2012**

Esta es la sesión central de la investigación y está descrita en el capítulo siguiente en donde se explican los sistemas de prácticas, la configuración cognitiva, los procesos matemáticos y los conflictos semióticos que presentó la alumna invidente.

5.4.4. Elaboración de las herramientas materiales y semióticas

En el ínterin de la investigación, se elaboraron herramientas materiales y semióticas adecuadas utilizadas en las sesiones con la alumna invidente participante y lograr que ella adquiriera un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos y su relación con su cotidianidad.

En todas las sesiones, la comunicación entre profesora-investigadora y la alumna invidente fue fluida, tanto a nivel verbal como en lectura y escritura en Sistema Braille. Uno de los obstáculos que se identificó para el avance de los conocimientos era que la alumna tenía un dominio regular de lecto-escritura en Braille, así como a un manejo no tan eficiente del vocabulario natural al dar alguna explicación o justificación. En vista de ello, se dio énfasis a los diálogos, a realizar analogías de términos en varios contextos, a facilitarle los problemas escritos en Braille y a utilizar con más asiduidad la máquina Perkins para afianzar la escritura mediante las respuestas que debía dar a las preguntas que se le hacía en cada problema.

A Janet se le guió en el uso de la máquina Perkins para la elaboración de las tablas de correspondencia y diagramas sagitales, con la finalidad de afianzar el concepto de relación e identificar la correspondencia entre dos cantidades.

Se elaboraron varios planos cartesianos en relieve para que se familiarizara con ellos. Uno tenía los cuatro cuadrantes (ver Ilustración 5, página 205) y se le explicó a la alumna la posición de los ejes y la posición de los números en esos ejes. Luego, pasó a planos cartesianos que sólo mostraba el primer cuadrante donde se le había colocado en relieve la cuadrícula y los ejes. No se pusieron la numeración a los ejes porque, en una de las sesiones, se buscaba que la alumna invidente considerara no sólo una escala de 1 : 1 en cada eje, sino que trabajara con mitades, es decir se escalo el eje X de 1 : $\frac{1}{2}$. Esta idea se aplicó para ampliar los números que se encuentran entre dos números enteros

positivos. Además, era importante que descubriera que un número racional no entero tiene su correspondiente imagen en el eje Y, así como su representación en la recta. A su vez, se requería observar cuánta información abstracta podía almacenar en su memoria inmediata. En los planos cartesianos, la alumna invidente empezó a ubicar puntos y construir rectas. Los puntos los obtenía mediante la elaboración de tablas de correspondencia. Los puntos eran señalados con un chinche y, la recta era representada con un pabilo. Todos estos materiales se los llevaba a su casa donde podía crear y mostrar a sus más allegados lo que estaba aprendiendo. Estas construcciones que ella realizaba, eran transcritas en hoja y adjuntado al desarrollo del problema que ya había realizado en Braille. Se iba generando pequeñas separatas como material de estudio para su casa.

Con todo lo anterior, se elaboró la Hoja Guía (ver Anexo 2, página 151) para el análisis que se ha desarrollado según el marco teórico descrito en el capítulo 2. Este instrumento consta de la presentación de una situación familiar a la alumna invidente y cuatro bloques de análisis mediante preguntas inductivas.

La situación presentada se llamó “Tomando decisiones” y fue escrita en Braille (ver Ilustración 1, página 195) para el afianzamiento de la comprensión lectora de Janet. El tenor es el siguiente:

“En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2 pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5.”

Los cuatro bloques en que se dividió esta Hoja Guía de la actividad estaban diseñados en un lenguaje sencillo, pero orientados a una aproximación del concepto de función lineal.

- Bloque I: Análisis de la relación entre el peso y el gasto. Elaboración de los modelos matemáticos respectivos.

Este bloque comprendía la elaboración de las tablas de correspondencia para cada situación, uno para la bodega y el otro para el Mercado Mayorista. Con ello, se quería llegar a que la alumna invidente elabore las expresiones algebraicas que representarían a las situaciones mencionadas.

- Bloque II: Análisis de la pendiente como relación entre la variación del gasto cuando varía el peso. Relación de la inclinación de la recta con el valor de la pendiente en el modelo matemático.

En este bloque se requería que la alumna invidente construyera los gráficos de las rectas sobre un plano cartesiano adaptado. Las situaciones a analizar habían sido contempladas sólo con rectas con pendiente positiva. Esta decisión se tomó debido a que la alumna había manifestado en la entrevista previa que nunca había hecho representaciones gráficas ni tabulaciones en tablas de doble entrada.

- Bloque III: Análisis de la relación unívoca entre variables.

En esta parte se busca que la alumna analice la correspondencia entre los valores del peso en kilogramos y los valores del gasto en soles, respectivamente, e identificar la correspondencia unívoca entre variables.

- Bloque IV: Análisis de la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro.

Considerando que las situaciones analizadas son parte de la vida diaria de la alumna invidente, se consideró analizar la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro, mediante la comparación de las cantidades en el peso y su correspondiente gasto y el lugar de compra. Además, se analizó la posición de las rectas, antes y después de la intersección entre ellas.



CAPÍTULO 6 – ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD APLICADA SEGÚN LOS NIVELES DEL EOS

La actividad fue aplicada en la novena sesión programada. En esta sección se identifican y describen los sistemas de prácticas matemáticas, la configuración epistémica, la configuración cognitiva de los objetos matemáticos, los procesos matemáticos, y los conflictos interpretados como dificultades o errores de la alumna participante en esta investigación. Además, se presentan el sistema de prácticas, configuración epistémica y procesos matemáticos que son activados por el alumno vidente para su posterior análisis comparativo en el siguiente capítulo.

A continuación, se reproduce el texto de la situación “Tomando decisiones”:

“En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2 pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5.”

6.1 Bloque I de la actividad

6.1.1. Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet

En este Bloque I de la actividad matemática propuesta, las prácticas matemáticas desarrolladas por la alumna han sido las siguientes:

- Presta atención a las indicaciones que da la profesora-investigadora respecto al desarrollo de este primer bloque. Recibe la hoja, codificada en Braille, donde está escrita la situación que debe entender y analizar. Realiza la lectura táctil en forma silenciosa.
- Lee y comprende la situación propuesta y las tareas que debe realizar. Pregunta sobre cualquier duda que se le presente en ella. Realiza una relectura en voz alta para verificar si ha comprendido la situación propuesta.

- Identifica, en la situación propuesta dada, la existencia de una relación entre el peso en kilogramos y el gasto en soles.
- Identifica dos situaciones de análisis: la de la bodega y la del Mercado Mayorista.
- Construye las tablas de correspondencia para cada situación identificada.
- Identifica la coincidencia que se presenta en las dos tablas cuando el peso es de 5 kg y el gasto es de S/.15.
- Asocia la variable “ x ” al peso en kilogramos y la variable “ y ” al gasto en soles.
- Infiere que las variables se relacionan como “ $y = 3x$ ” en la bodega y, como “ $y = 2x+5$ ” en el Mercado Mayorista.

6.1.2. Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto

Las prácticas matemáticas desarrolladas por Ernesto, en este primer bloque de la actividad propuesta, son las siguientes:

- Lee y comprende la actividad propuesta. Ernesto escucha las indicaciones de la profesora-investigadora respecto al desarrollo de cada bloque. Recibe la hoja con la situación a analizar y realiza una lectura silenciosa.
- Identifica dos situaciones de análisis: la de la bodega y la del Mercado Mayorista.
- Identifica la existencia de una relación entre el peso en kilogramos y el gasto en soles para cada situación.
- Modeliza cada situación con notación de función lineal. Identifica el gasto en la bodega como la función “ $f(x) = 3x$ ” y, el gasto en el Mercado Mayorista como la función “ $f(x) = ax + b$ ”.
- Asocia la variable “ x ” al peso en kilogramos y la variable “ y ” al gasto en soles.

- Justifica cómo ha elaborado las tablas correspondientes indicando que ha utilizado las funciones que modelizan cada situación para calcular los valores correspondientes al peso y al gasto para cada lugar de compra.
- Utiliza indistintamente la notación para el gasto en soles como “ x ” o como “ $f(x)$ ”.

6.1.3. Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet

La configuración cognitiva está desarrollada a partir de la actividad presentada en la Hoja Guía y que se desarrolló con la alumna invidente en la última sesión de todas las programadas.

Como ya se mencionó en el marco teórico, la configuración de objetos matemáticos identifica y analiza seis objetos matemáticos primarios: los elementos lingüísticos que entran en juego en la actividad matemática, la situación-problema que genera esta actividad, los conceptos que se mencionan o introducen, los procedimientos que se realizan en las acciones matemáticas, las proposiciones que se hacen de los conceptos y, los argumentos que explican o aclaran los procedimientos utilizados y las proposiciones expresadas.

Elementos Lingüísticos.

- **Expresión verbal oral.**

Respecto a la bodega, utiliza los siguientes términos:

- “Para 0 kilos, 0 soles. Y para 1 kilo, 3 soles. Para 2, 6... Y para 3, 9... y, así sucesivamente... Para 5 kilos, 15... Es decir, todo lo voy multiplicando, el 1 por el 3, el 2 por el 3... lo que se repite es el 3.”
- “20 kilos... 60 (*soles*)... (10 kilos) 300 soles... 1000 kilos, 3000 soles.”
- “(“y” *igual*...)... $3x$ ”.

Respecto al Mercado Mayorista, expresa lo siguiente:

- “(Si no se compra las papas...)... 5 soles. (Para 1 kilo...)... 7 soles... Si yo compro 9 kilos, mi gasto es de 23. Multiplico por 2...y después sumo el 5. (Si compro 20 kilos...)... 45...”
- “Si compro “x” kilos... tengo “2x”... “y” igual “2x más 5”... ”.

- **Expresión gráfica.**

Resumió la información en dos tablas de correspondencia. Los realizó en sistema Braille (ver Ilustración 2, página 197; e Ilustración 3, página 199). Se presenta la traducción en lenguaje castellano:

Bodega cerca de mi casa		Mercado Mayorista	
Peso en Kg	Gasto en soles	Peso en Kg	Gasto en soles
0	0	0	5
1	3	1	7
2	6	2	9
3	9	3	11
4	12	4	13
5	15	5	15
6	18	6	17
7	21	7	19
8	24	8	21
9	27	9	23
10	30	10	25

Figura 25: Tablas de correspondencia elaborados por Janet y traducidos en vista.

- **Expresión simbólica.**

Los números escritos en sistema Braille y representados en las tablas de correspondencia (ver Ilustración 2, página 197; e Ilustración 3, página 199).

- **Expresión gestual.**

Janet presenta gesto pensativo y quietud corporal cuando:

- muestra la tendencia a ordenar sus ideas para relacionar los conceptos que posee con las palabras que escucha y que no es de su uso común.
- realiza cálculos mentales.

Además, muestra la lectura táctil en las tablas de correspondencia cuando identifica los valores que coinciden en ambas tablas respecto a la compra de 5 kilos de papa y su gasto correspondiente de 15 soles.

Situación - Problema.

Dentro de este bloque se analiza contextualmente la relación entre el peso y el gasto en cada situación (bodega y Mercado Mayorista) para la construcción de las tablas de correspondencia y la elaboración de los modelos matemáticos respectivos.

Conceptos.

Los conceptos de adición y multiplicación se presentan bajo una visión contextualizada y, a la vez, mecánica por parte de la alumna invidente. Indica que va multiplicando por 3 (caso de la bodega) y por 2 (caso del Mercado Mayorista) al número de kilos de papa que compre. Además, expresa que debe sumar 5 a la compra de los kilos de papa (caso del Mercado Mayorista) por concepto de pasajes. Estas nociones de adición y multiplicación servirán para que emerjan los modelos algebraicos de cada caso analizado.

Procedimientos.

- Cuando construye las tablas de correspondencia, los elabora en la máquina Perkins y, paralelamente, desarrolla el cálculo mental de los gastos que se realizan en cada lugar de compra. Además, menciona que cuando se compran 5 kilos de papas, el gasto es de 15 soles, y que esta información aparece en las dos tablas.

- Al asociar la variable “ x ” al peso en kilogramos y la variable “ y ” al gasto en soles, lo manifiesta en el diálogo continuo que mantiene con la profesora-investigadora.
- Al elaborar los modelos “ $y = 3x$ ” para la situación de la bodega y, como “ $y = 2x+5$ ” para la situación del Mercado Mayorista, lo realiza apoyada por las preguntas propuestas por la Hoja Guía de la actividad y el diálogo, respondiendo oralmente y en sus respuestas explica los cálculos que realiza generalizando la situación en la relación de las dos variables.

Proposiciones.

- El modelo del gasto en la bodega es “ $y = 3x$ ”.
- El modelo del gasto en el Mercado Mayorista es “ $y = 2x+5$ ”.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** El modelo del gasto en la bodega es “ $y = 3x$ ”.
 - Argumento 1: Para 0 kilos, 0 soles.
 - Argumento 2: Y para 1 kilo, 3 soles.
 - Argumento 3: Para 2, 6.
 - Argumento 4: Y para 3, 9... y así, sucesivamente...
 - Argumento 5: Para 5 kilos, 15...
 - Argumento 6: Es decir, que todo lo voy multiplicando... el 1 por el 3, el 2 por el 3... lo que se repite es el 3.
 - Argumento 7: *(cuando compras 9 kilos, el gasto es...)*...27 soles...
 - Argumento 8: *(Y... cuando compras 20 kilos, gastas...)*...60...
 - Argumento 9: *(Y ¿si compras 10 kilos?...)*...300 soles.
 - Argumento 10: 1000 kilos... 3000 soles...
 - Argumento 11: “ x ” kilos.... *(¿cuánto te pago?...)* $3x$...
 - Argumento 12: *(¿cuánto vale “ y ”?...)*... $3x$.

- **Tesis 2:** El modelo del gasto en el Mercado Mayorista es “ $y = 2x+5$ ”.
- Argumento 1: *(Y si compras 1 kilo, tu gasto es...)* De 7 soles.
- Argumento 2: Si yo compro 9 kilos, mi gasto es de 23.
- Argumento 3: Multiplico 2... por 9...y, después, sumo el 5.
- Argumento 4: *(...si yo compro 20 kilos...)* mmm...45.
- Argumento 5: Si compro “ x ” kilos...multiplicarlos... por 2... tengo “ $2x$ ”... sumarlo 5...

6.1.4. Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto

La configuración epistémica está elaborada a partir de las respuestas que el alumno vidente, Ernesto, escribió en la Hoja Guía de la actividad y de los breves diálogos que se llevaron a cabo durante el desarrollo de la Hoja Guía

Elementos Lingüísticos.

- **Expresión verbal escrita.**

Respecto a la bodega:

- “Se relacionan ambas variables mediante la función lineal ‘ $y = 3x$ ’. Donde y es el gasto en soles, x son los kilos de papa.”
- “Cada valor lo reemplazo en la fórmula de la función.” *(refiriéndose al valor de x).*
- “(...“ y ” igual...)... $3x$ ”.

Respecto al Mercado Mayorista:

- “Se relacionan ambas variables mediante la función lineal ‘ $y = 2x+5$ ’, (se le suma el 5 por el gasto extra en pasaje). Donde y es el gasto en soles, x son los kilos de papa.”
- “Cada valor lo reemplazo en la fórmula de la función.” *(refiriéndose al valor de x).*

Además, como noción general, agrega que “una función lineal es una regla de correspondencia de la forma $f(x) = ax + b$, donde a : pendiente, b : constante real.”

- **Expresión gráfica.**

$f(x) = 3x$		$g(x) = 2x + 5$	
Bodega de la esquina		Mercado mayorista	
Peso (en S/)	Gasto (en S/)	Peso (en S/)	Gasto (en S/)
0	0	0	5
1	3	1	7
2	6	2	9
3	9	3	11
4	12	4	13
5	15	5	15
6	18	6	17
7	21	7	19
8	24	8	21
9	27	9	23
10	30	10	25

Cada valor lo reemplazo en la fórmula de la función.

Figura 26: Tablas de correspondencia realizadas por Ernesto.

- **Expresión simbólica.**

- Los números escritos en las tablas de correspondencia.
- $f(x) = 3x$, $g(x) = 2x + 5$, $y = 3x$, $y = 2x + 5$.

Situación - Problema.

Dentro de este bloque se analiza contextualmente la relación entre el peso y el gasto en cada situación (bodega y Mercado Mayorista) para la construcción de las tablas de correspondencia y la elaboración de los modelos matemáticos respectivos.

Conceptos.

Los conceptos previos que el alumno manifiesta y utiliza son: función lineal, pendiente, constante real, variables, regla de correspondencia.

Procedimientos.

- La existencia de una relación entre el peso en kilogramos y el gasto en soles, Ernesto la expresa como una relación entre variables mediante una función lineal. Además, cuando asocia la variable “ x ” al peso en kilogramos y la variable “ y ” al gasto en soles, lo denota como “ $y = 3x$ ” (bodega) e “ $y = 2x+5$ ” (Mercado Mayorista).
- La modelización de cada situación la realiza cuando construye las tablas de correspondencia y las denota algebraicamente como “ $f(x) = 3x$ ” para el caso de la bodega y, “ $g(x) = 2x + 5$ ”, para el caso del Mercado Mayorista.
- Por los dos procedimientos descritos previamente, se observa que utiliza indistintamente la notación “ $f(x)$ ” e “ y ” para referirse al gasto en soles.

Proposiciones.

- El modelo del gasto en la bodega es “ $y = 3x$ ”.
- El modelo del gasto en el Mercado Mayorista es “ $y = 2x+5$ ”
- Las variables se relacionan mediante una función lineal.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** El modelo del gasto en la bodega es “ $y = 3x$ ”.
 Argumento 1: (... no encuentras papas, gastas...)... 0 soles.
 Argumento 2: (... 1 kg, el gasto es...)... 3 soles.
 Argumento 3: (... 9 k...)... 27 soles.
 Argumento 4: (... 20 kg, gastas...)... 60 soles.
 Argumento 5: (... cuando compras “ x ” kg de papa, tu gasto es...)... $3x$ soles.
 Argumento 6: Se relacionan ambas variables mediante una función lineal donde “ y ” es el gasto en soles, “ x ” son los kilos de papa.

- **Tesis 2:** El modelo del gasto en el Mercado Mayorista es

$$“y = 2x + 5”$$
.
 - Argumento 1: (... *no encuentras papas, gastas...*)... 5 soles.
 - Argumento 2: (... *1 kg, el gasto es...*)... 7 soles.
 - Argumento 3: (... *9 k...*)... 23 soles.
 - Argumento 4: (... *20 kg, gastas...*)... $2x + 5$.
 - Argumento 5: (... *cuando compras “x” kg de papa, tu gasto es...*)...
 $2x + 5$.
 - Argumento 6: Se relacionan ambas variables mediante una función lineal donde “y” es el gasto en soles, “x” son los kilos de papa.

- **Tesis 3:** Las variables se relacionan mediante una función lineal
 - Argumento 1: “ $y = 3x$ ”. Donde “y” es el gasto en soles, “x” son los kilos de papa.
 - Argumento 2: “ $y = 2x + 5$ ”. Donde “y” es el gasto en soles, “x” son los kilos de papa.
 - Argumento 3: Una función lineal es una regla de correspondencia de la forma “ $f(x) = ax + b$ ”, donde a : pendiente, b : constante real.

6.1.5. Procesos Matemáticos activados por Janet

Proceso de Materialización.

La alumna construye, en sistema Braille, las dos tablas de correspondencia sobre la situación de la bodega y sobre la situación del Mercado Mayorista, respectivamente. Se apoya con el manejo de la máquina Perkins y con el sentido espacial que ha desarrollado en las sesiones previas para medir adecuadamente los espacios en su hoja. (ver Ilustración 2, página 197; e Ilustración 3, página 199).

Proceso de Trabajo de técnica.

Al elaborar las tablas de correspondencia para los dos casos analizados, Janet explica la relación que ha encontrado entre el peso y el

gasto como cantidades de kilos que se multiplican por 3 para el caso de la bodega (ver Anexo3: de U62 a U70 y de U100 a U111) y, cantidades de kilos que se multiplican por 2 y se le agrega 5 para el caso del Mercado Mayorista (ver Anexo 3: de U204 a U215).

Proceso de Detección.

Cuando elabora la tabla de correspondencia respecto al Mercado Mayorista, la alumna descubre que existe una coincidencia en un par de valores relacionados en ambos casos: afirma que si se compran 5 kilos de papa en cualquiera de los dos lugares, el gasto siempre es de S/.15.

Proceso de Significación.

Janet asocia el peso en kilos con la variable “ x ” y, el gasto en soles con la variable “ y ”, variables que han sido aportadas por la profesora-investigadora.

Proceso de Unificación.

La relación entre el peso en kilos y el gasto en soles, Janet las resume y asocia en dos modelos matemáticos: “ $y = 3x$ ” para el caso de la bodega e, “ $y = 2x+5$ ” para el caso del Mercado Mayorista.

Proceso de Argumentación y Justificación.

Janet justifica con un razonamiento inductivo la construcción de los modelos matemáticos “ $y = 3x$ ” e “ $y = 2x+5$ ”. Se pueden observar en la parte de argumentaciones que realiza en la sección 6.1.3.

6.1.6. Procesos Matemáticos activados por Ernesto

Proceso de Materialización.

El alumno elabora las dos tablas de correspondencia referentes a la situación de la bodega y a la situación del Mercado Mayorista, respectivamente (ver Anexo 4).

Proceso de Abstracción e Identificación.

Antes de construir las tablas de correspondencia, Ernesto descontextualiza cada situación e identifica con una función lineal la relación entre peso en kg y gasto en soles para cada caso analizado, respectivamente.

Proceso de Algoritmización.

En la elaboración de las tablas de correspondencia, Ernesto señala que evalúa, en cada función construida, el valor numérico de cada peso en kg para obtener los gastos correspondientes, según la situación analizada.

Proceso de Significación.

Ernesto asocia el peso en kilos con la variable “ x ” y, el gasto en soles con la variable “ y ”, variables que han sido dadas por la profesora-investigadora. Además, indica que las variables se relacionan mediante una función lineal la cual las representa en su respectiva notación: “ $f(x) = 3x$ ” (bodega) y “ $g(x) = 2x + 5$ ” (Mercado Mayorista).

Proceso de Personalización.

Escribe la forma de la función lineal “ $f(x) = ax + b$ ” y señala que a es la pendiente y b es una constante real.

Proceso de Unificación.

Ernesto sintetiza la relación entre el peso en kilos y el gasto en soles mediante los modelos matemáticos: “ $y = 3x$ ” y “ $f(x) = 3x$ ” para el caso de la bodega e, “ $y = 2x+5$ ” y “ $g(x) = 2x + 5$ ” para el caso del Mercado Mayorista.

Proceso de Argumentación y Justificación.

El alumno justifica con un razonamiento inductivo la construcción de los modelos matemáticos “ $y = 3x$ ” e “ $y = 2x+5$ ”.

6.1.7. Conflictos Semióticos presentados por Janet

- La alumna invidente presenta cierta dificultad moderada al leer y escribir en Braille por los pocos años que lleva ejercitándose en este sistema. Esto le origina un conflicto entre los significados personales e institucionales pues la asimilación y la acomodación de nuevas palabras y nuevos contenidos matemáticos se adquieren de forma más lenta pudiendo ocasionar una ralentización en el razonamiento matemático e inseguridad en sus procesos cognitivos. Además, esta dificultad relacionada con los contenidos matemáticos puede complicarse con la falta de dominio de algunos contenidos anteriores.
- Para lograr elaborar los modelos “ $y = 3x$ ” para la situación de la bodega y, como “ $y = 2x+5$ ” para la situación del Mercado Mayorista, Janet tuvo errores en un inicio. Según las definiciones que propone Radatz (1979) en cuanto a errores que pueden presentar los estudiantes, se puede identificar la rigidez de pensamiento que la alumna mostró en un momento de análisis en la situación de la bodega: confundió las variables “ x ” e “ y ”. Por ejemplo, cuando se le preguntó por el gasto cuando compra “ x ” kilos de papa, ella respondió: “ x soles (ver Anexo 2, U114 –U115). O en este otro ejemplo, cuando se le preguntó cómo relaciona las dos variables, expresó: “...’y igual x más 3’...” cuando debió haber respondido “ $y = 3x$ ” (ver Anexo 2, U139 a U150) o algo similar. Es decir, en su mente sabía que debía ir sumando de tres en tres pero no relacionó que una suma reiterativa es una multiplicación y no lo asoció con la variable que representaba al valor del peso en kilogramos. Cabe añadir que esta dificultad se manifestó luego de que hubo una interrupción ruidosa con el megáfono de la institución y esto se aunó al nerviosismo propio de la alumna al darse cuenta que sus respuestas no la convencían. Pero también se debe considerar que ella lleva varios años bajo un aprendizaje con muy poca estimulación hacia el aprendizaje de

contenidos matemáticos. Además, al encontrarse en un proceso de integración en los estudios, y en modalidad a distancia, se ha puesto énfasis en los cálculos y técnicas mecanicistas antes que estimular en ella el uso de conceptos y propiedades matemáticas desde situaciones contextualizadas.

6.2 Bloque II de la actividad

6.2.1. Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet

Janet presenta las siguientes prácticas matemáticas en este segundo bloque:

- Construye las rectas que representan a la situación de la bodega y a la del Mercado Mayorista, sobre un plano cartesiano en relieve elaborado por la profesora-investigadora.
- Realiza una lectura táctil de los datos que están en las tablas de correspondencia, respectivamente.
- Identifica que el gasto en soles que se realiza en la bodega aumenta de tres en tres al variar una unidad de kilogramo en el peso. Igualmente, reconoce que en el Mercado Mayorista, el gasto en soles aumenta de dos en dos al variar una unidad de kilogramo en el peso.
- Relaciona las expresiones “ $y = 3x$ ” (bodega) e “ $y = 2x+5$ ” (Mercado Mayorista), con la forma en que ha construido sus rectas. Su razonamiento se apoya con las preguntas que se le realiza y con el recorrido táctil que realiza sobre las rectas.
- Identifica a la variación en el gasto cuando varía en una unidad el peso con el valor que multiplica a “ x ” en cada modelo matemático. Además, afirma que a mayor variación en el gasto, la recta es más empinada.

6.2.2. Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto

- Ernesto construye los planos cartesianos, ubica los puntos y grafica las rectas. Primero, representa las rectas en planos diferentes y, luego, los grafica en el mismo plano.
- Cuando representa la situación de la bodega, el alumno grafica los ejes X e Y sobre una cuadrícula. Escribe que el eje X representa al peso en kg y, el Eje Y al gasto en soles. Explica en su hoja que las escalas que ha considerado para los ejes son:

Eje X → cada cuadrado = 1 unidad

Eje Y → cada cuadrado = 3 unidades.

Revisa la tabla de correspondencia y representa cada par de números relacionados como un punto en el plano cartesiano. Los ubica siguiendo las líneas de la cuadrícula y desde los ejes. Luego, grafica la recta que pasa por todos los puntos. Explica debajo de la representación hecha que la gráfica es una recta que pasa por el origen y es una función lineal.

- Para representar la situación del Mercado Mayorista, el alumno grafica los ejes X e Y sobre otra cuadrícula. Indica que el eje X representa al peso en kg y, el Eje Y al gasto en soles. No ha explicitado estas escalas, pero se observa en su gráfico que las escalas consideradas para los ejes son:

Eje X → cada cuadrado = 1 unidad

Eje Y → cada cuadrado = 2 unidades.

Revisa la tabla de correspondencia y representa cada par ordenado como un punto en el plano cartesiano. Nuevamente, los ubica siguiendo las líneas de la cuadrícula y desde los ejes. Grafica la recta que pasa por todos los puntos. Explica que la gráfica elaborada es una recta que se ha trasladado mediante el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ y representa a una función lineal.

- Representa las rectas en un mismo plano cartesiano y en una hoja cuadrículada. Para ello, construye los ejes con escala 1:1. Grafica cada

recta utilizando sólo dos puntos de referencia para cada una. Identifica la intersección de las rectas.

- Siguiendo las preguntas que se dan en la Hoja Guía y observando sus gráficas, compara las cantidades entre la variación en el gasto en soles y la variación en el peso en kilogramos. Concluye en afirmar que la variación en el gasto es de S/.3 en el caso de la bodega y de S/.2 en el caso del Mercado Mayorista.
- Justifica que la variación que ocurre en el gasto sea constante y lo relaciona con la pendiente de la recta. Y la pendiente de la recta la relaciona con su inclinación (empinamiento).

6.2.3. Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet

Elementos Lingüísticos.

- **Expresión verbal oral.**

Respecto a la bodega:

- “... yo lo estoy multiplicando 3 por la cantidad” y el gasto aumenta... “...en 3”.
- Cuando construía la recta iba “...de tres en tres.”
- Forma como construye la recta... “... avanzo... hacia la (*derecha*)... en uno... (*luego*)...subo tres en “y”...”
- Relaciona la expresión “...y igual $3x$...” con “...todo valor se multiplica por 3...” al referirse cómo calculaba cuando construía la recta.

Respecto al Mercado Mayorista:

- Luego del análisis inductivo respecto a la variación que ocurre en el gasto cuando se varía en una unidad de kilogramo en el peso, expresa que el gasto presenta un aumento... “... en 2”.
- Relaciona la expresión “...y igual $2x+5$ ’...” con el aumento “..en 2” y asegura que “...el 2... se va multiplicando... a ‘ x ’... que es el peso en kilos...”

Relaciona los aumentos de 3 en 3 para la bodega y los aumentos de 2 en 2 para la situación del Mercado Mayorista mediante la expresión “... que mientras el valor crece... el valor aumenta... de la variación del gasto... la recta es más empinada”. Es decir, más paradita es...”...la de la bodega...” y menos paradita es... “...la del Mercado Mayorista”.

- **Expresión gráfica.**

Se muestra la representación gráfica que Janet ha elaborado en un plano cartesiano adaptado con relieves. (Ver Ilustración 4, página 201).

- **Expresión simbólica.**

Janet no presenta escritura simbólica pues en este bloque todo fue dialogado y graficado.

- **Expresión gestual.**

Mientras Janet construye sus gráficas en el plano cartesiano, se puede observar que ella:

- Para ubicar cada punto, rastrea desde un punto anterior y avanza hacia la derecha en una unidad, luego sube 3 unidades (si es el caso de la bodega) o sube 2 unidades (si es el caso del Mercado Mayorista).
- Señala con el dedo índice al punto (5;15) como el par ordenado donde se intersecan las dos rectas.
- Gesto pensativo y de quietud corporal cuando realiza cálculos mentales o recuerda datos obtenidos con anterioridad.

Situación - Problema.

En este bloque se busca que la alumna invidente analice y relacione la variación del gasto cuando varía el peso en una unidad de kilogramo, con el coeficiente de la variable "x" y con la inclinación de la recta.

Conceptos.

En el trabajo de investigación no se ha utilizado el término de la pendiente ni se ha definido de manera formal. La actividad propuesta busca que la alumna parta de su propio lenguaje y experiencia con lo que va desarrollando y analizando en este bloque. Los significados personales que ella ofrece son ideas alusivas a la pendiente:

- Bajo una visión funcional, relaciona la variación ocurrida en el gasto cuando varía el peso en una unidad de kilogramo, como un aumento constante: de 3 en la situación de la bodega y de 2 en la situación del Mercado Mayorista.
- Bajo una perspectiva simbólica, cuando menciona que estos valores de 3 y 2, respectivamente están relacionados con el coeficiente que multiplica a “ x ” pues estos valores representan al precio que se multiplica por cada “ x ” kilos que se compren.
- Bajo un visión gráfica, cuando explica que estos valores de 3 y 2 se relacionan con el empinamiento que muestra cada recta. Indica que cuando construyó las gráficas iba de “...3 en 3...” y de “...2 en 2...”, respectivamente.

Procedimientos.

- Al construir las rectas que representan a la situación de la bodega y a la del Mercado Mayorista, sobre un plano cartesiano en relieve elaborado por la profesora-investigadora, Janet realiza lo siguiente:
 - Para la situación de la bodega, Janet identifica el punto $(0;0)$ en el origen de coordenadas mediante la técnica del rastreo con los dedos. Para ubicar el punto $(1;3)$ rastrea con el dedo índice derecho sobre el eje X, desde $(0;0)$ y avanza hasta el punto de abscisa 1. De allí, con el mismo dedo, rastrea hacia arriba subiendo tres unidades. Para el punto $(2;6)$ parte del punto $(1;3)$, rastrea con el dedo índice avanzando una unidad

- hacia la derecha y, luego, sube tres unidades. Para el par ordenado (3;9), realiza la misma estrategia anterior: parte del punto anterior, rastrea una unidad a la derecha y sube tres unidades. Y así sucesivamente, hasta terminar con todos los puntos.
- Para la situación del Mercado Mayorista, la alumna ubica el punto (0;5). Partiendo del origen de coordenadas rastrea con el dedo índice hacia punto de ordenada 5 (intercepto con el eje Y). Luego, desde este punto, rastrea una unidad hacia la derecha y sube dos unidades para ubicar el punto (1;7). Y, similar a la anterior situación, Janet realiza la misma estrategia para ubicar los pares ordenados restantes: se ubica en el punto anterior, rastrea una unidad hacia la derecha y sube dos unidades.
 - Al identificar que el gasto en soles que se realiza en la bodega aumenta de tres en tres al variar una unidad de kilogramo en el peso, Janet ha sido orientada con un análisis inductivo. Este análisis se acompaña con la revisión (rastreo táctil) con los planos cartesianos apoyada del recuerdo que tiene en su memoria de los cálculos que ya realizó con anterioridad en sus tablas de correspondencia. Por ejemplo, se muestra el diálogo respecto a la variación del gasto en la situación de la bodega:

U291	P-I: <i>Muy bien... ahora, ya usando el tabl... perdón el plano cartesiano donde están tus dos gráficos...vamos a analizar lo mismo, ¿no?, como analizamos en el tablero, ¿sí?</i>
U292	J: <i>Sí...</i>
U293	P-I: <i>Por 1 kilo... vámonos al caso de la bodega, ¿sí?... mira "bodega" estoy diciendo... ¿Cuál es la de la bodega?</i>
U294	J: <i>Ésta...</i> (la alumna indica con su dedo la recta referente a la de la bodega)
U295	P-I: <i>Ya... esa... ¿no es cierto?</i>
U296	J: <i>Sí...</i>
U297	P-I: <i>Ya... Por 1 kilo de papas, ¿cuánto gastas?</i>
U298	J: <i>¿Por 1 kilo de papa? 3.</i>
U299	P-I: <i>3, igual, ¿no? ¿Por 2 kilos?</i>
U300	J: <i>6.</i>
U301	P-I: <i>6, ¿no? ¿Aumenta o disminuye el gasto?</i>
U302	J: <i>¿El gasto en soles?</i>
U303	P-I: <i>Sí, claro, en soles...</i>
U304	J: <i>Sí.</i>
U305	P-I: <i>Sí, aumenta, ¿no?..</i>
U306	J: <i>Sí, aumenta.</i>
U307	P-I: <i>¿En cuánto varía ese gasto al cambiar de 1 kilo a 2 kilos?</i>
U308	J: <i>De 1 a 2 kilos varía en 3.</i> (No utiliza el gráfico para dar esta respuesta.)
U309	P-I: <i>En 3 soles, ¿no es cierto?</i>
U310	J: <i>Sí.</i>

U311	P-I: <i>Ya, ok. Ahora, si por... nos vamos por 4 kilos de papa... ¿Cuánto gastas?</i>
U312	J: <i>En 4 kilos de papa... estaría gastando... mmm... ay...</i>
U313	P-I: <i>Sí. En tu gráfico, nomás. Lleva tu dedo al eje Y, y fíjate cuánto se gasta.</i>
U314	J: <i>En 4 kilos, me dice, ¿no? (La alumna toca los puntos y va hacia el eje Y, pero regresa de nuevo a los puntos.</i>
U315	P-I: <i>Ajá, ¿cuánto gastas?</i>
U316	J: <i>12. (ella responde luego de calcular, en voz baja, el gasto en cada punto hasta llegar a los 4 kilos)</i>
U317	P-I: <i>12. ¿Y por 5 kilos?</i>
U318	J: <i>Ah, por 5 kilos, 15.</i>
U319	P-I: <i>¿Aumenta o disminuye el gasto?</i>
U320	J: <i>Aumenta.</i>
U321	P-I: <i>¿En cuánto?</i>
U322	J: <i>En 3.</i>
U323	P-I: <i>Al cambiar de 4 kilos a 5 kilos, ¿no?</i>
U324	J: <i>Ajá.</i>
U325	P-I: <i>Ya, similar al anterior, ¿no?</i>
U326	J: <i>Ajá.</i>
U327	P-I: <i>¿Y si voy de 9 kilos?... En 9 kilos, ¿cuánto gasto?</i>
U328	J: <i>¿En 9 kilos?, 27.</i>
U329	P-I: <i>¿Y en 10?</i>
U330	J: <i>Y en 10 kilos, 30.</i>
U331	P-I: <i>Igual aumenta, ¿no?</i>
U332	J: <i>Sí.</i>
U333	P-I: <i>¿En cuánto?</i>
U334	J: <i>En 3.</i>
U335	P-I: <i>En 3 kilos... en los dos...</i>
U336	J: <i>Bueno, aumenta multiplicado. Porque siempre... bueno yo lo estoy multiplicando 3 por la cantidad.</i>
U337	P-I: <i>Ah, por la cantidad de kilos, porque ese es el análisis que hemos hecho.</i>
U338	J: <i>Sí.</i>
U339	P-I: <i>Muy bien. Bueno, en los tres resultados que hemos analizado hace un momentito, ¿no?, al pasar de 1 kilo a 2 kilos... ¿cuánto varía el gasto?; pasar de 4 kilos a 5 kilos, ¿cuánto varía el gasto?, ¿ok?; pasar de 9 a 10 kilos, ¿cuánto varía el gasto?... Te pregunto, ¿la variación es la misma o ha salido un resultado diferente? La variación del gasto, ah! En los tres casos, ¿la variación es la misma? O sea, ¿aumenta?, en pocas palabras, ¿aumenta siempre?</i>
U340	J: <i>Sí.</i>
U341	P-I: <i>¿Y aumenta en cuánto?</i>
U342	J: <i>En la mis... en 3.</i>
U343	P-I: <i>En 3... En los tres casos, ¿no es cierto?</i>
U344	J: <i>Sí.</i>
U345	P-I: <i>Entonces, es la misma, ¿o no?</i>
U346	J: <i>Sí.</i>
U347	P-I: <i>Entonces, la variación del gasto es la misma. Exactamente, ya... Muy bien... ¿Y siempre va a suceder eso? Por ejemplo, examina en tu gráfico. Si esta variación del gasto... O sea, Siempre que yo vaya de una cantidad de kilo cualquiera y le agrego un kilo más, ¿no?, ¿esa variación en el gasto se mantiene? O sea, ¿siempre voy a tener de tres en tres? ¿Tú qué dices?</i>
U348	J: <i>Sí.</i>
U349	P-I: <i>Sí, ¿no?</i>
U350	J: <i>Sí.</i>
U351	P-I: <i>Incluso... sí, porque... incluso tú lo has armado de esa manera... ¿o no?</i>
U352	J: <i>Sí. De tres en tres.</i>
U353	P-I: <i>De tres en tres... tú ya no bajabas al eje X... Tú de frente ibas desde el punto donde estabas, ¿no?...</i>
U354	J: <i>Sí.</i>

Para el caso del Mercado Mayorista, el análisis inductivo se realiza de manera similar al caso de la bodega, con la finalidad de que Janet reconozca que el gasto en soles aumenta de dos en dos al variar una unidad de kilogramo en el peso.

- Las expresiones “ $y = 3x$ ” (bodega) e “ $y = 2x+5$ ” (Mercado Mayorista) son relacionadas con la forma como construyó las rectas. En el diálogo anterior, se puede observar que la alumna tiene claro que debe multiplicar 3 a la cantidad de kilos, entonces el gasto “...aumenta multiplicado...” (U336) y cuando construyó su recta iba “...3 en 3...” (U351 a U354). De modo similar, Janet realiza el análisis para el caso del Mercado Mayorista.
- La alumna identifica que la variación en el gasto cuando varía el peso en una unidad se relaciona con el valor que multiplica a “ x ” en cada modelo matemático. El diálogo anterior unido al siguiente fragmento son parte del mismo contexto de análisis y, por lo cual, nos da una idea de que Janet relaciona la variación en el gasto con el coeficiente de “ x ”:

U450	P-I: <i>A ver. ¿En la bodega cómo fue, cómo quedó?</i>
U451	J: <i>Ah, ya. Que todos en la bodega... todos se multiplican por 3.</i>
U452	P-I: <i>Por 3. ¿Toda la bodega o todos los kilos?</i>
U453	J: <i>Je, je...</i>
U454	P-I: <i>O sea, si eran “x” kilos, ¿cómo quedaba la fórmula?</i>
U455	J: <i>Si eran “x” kilos... este... tenía...</i>
U456	P-I: <i>Y mi gasto era “y”...</i>
U457	J: <i>“y”... “y” igual “$3x$”.</i>

- Además, afirma que a mayor variación en el gasto, la recta es más empinada. Para llegar a esta afirmación, Janet recorre con sus dedos las rectas que están sobre el plano cartesiano y comprueba cuál es la que está más empinada y cuál no. Luego lo relaciona con los valores de 3 y 2, respectivamente.

Proposiciones.

- Existe un par de valores, (5;15), que coinciden en los dos casos (*según sus tablas y sus gráficos*).
- La variación del gasto al variar el peso en una unidad siempre es la misma.
- Cuando la variación constante del gasto es mayor, por cada kilo de papa que aumenta, la recta es más empinada.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** La variación del gasto al variar el peso en una unidad siempre es la misma.

Caso de la bodega:

- Argumento 1: ¿Por un kilo de papa? 3... (¿Por 2 kilos?) ... 6... (¿Aumenta o disminuye el gasto?)... Sí, aumenta... De 1 a 2 kilos varía en 3 soles.
- Argumento 2: En 4 kilos de papa... estaría gastando... 12... por 5 kilos, 15... aumenta en 3.
- Argumento 3: ¿En 9 kilos?... 27. Y en 10 kilos, 30. (Igual aumenta, ¿no?)... Sí... en 3.
- Argumento 4: (¿aumenta siempre?)... Sí... (¿en cuánto?)... En la mis... en 3.
- Argumento 5: Avanzo... hacia... (la derecha... ¿cuánto?)... uno. Luego, subo tres... en... “y”.

Caso del Mercado Mayorista:

- Argumento 1: (Por 1 kilo)... 2 soles... En el gasto total... 7 soles. Por 2 kilos, el gasto sería en 9 soles.
- Argumento 2: (¿aumenta?)... Sí... (¿Y en cuánto?)... En 2.
- Argumento 3: (¿En 4 kilos de papa?)... a ver... 13 soles. En 5 kilos de papa... este... 15.
- Argumento 4: Y si son 9 kilos... estaríamos gastando 23. Y si son 10 kilos... estaríamos gastando... mmm... 25.
- Argumento 5: ¿De 4 a 5?... (¿el gasto aumenta?)... aumenta... en 2.
- Argumento 6: De 9 a 10 también aumenta... en 2.

Argumento 7: *(la variación del gasto...)*... Es la misma.

Argumento 8: Siempre se va a aumentar 2 en “y”.

- **Tesis 2:** Mientras el valor (constante) de la variación del gasto es mayor, la recta es más empinada.

Argumento 1: *(¿Cuál de las dos rectas es “más paradita” o más empinada?)* La de la bodega.

Argumento 2: *(¿”menos paradita”?)* La del Mercado Mayorista.

Argumento 3: *(De 3 en 3... y es la “más paradita”... De 2 en 2 y es la “menos paradita”... ¿cuál es la deducción?)* Que mientras el valor crece... el valor aumenta... de la variación del gasto... la recta es más empinada.

6.2.4. Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto

Elementos Lingüísticos.

- **Expresión verbal escrita.**

Respecto a la bodega:

- “Se ha graficado una función lineal...”.
- “Se ha graficado una recta que está en el origen”.
- “Aumenta en 3 soles”.
- “...hay una variación de 3... el gasto varía en 3 soles...”
- “...la pendiente de la recta es 3.”
- “Pendiente: es una tasa de cambio, la derivada de una función en un punto.”

Respecto al Mercado Mayorista:

- “Se forma una recta”.
- “...traslación mediante el vector...”.
- “Varía en 2 soles”. “Aumenta en 2 soles”.
- “...la pendiente de la recta es 2... el gasto varía en 2 soles”

- “A mayor pendiente (si varía más), la recta va a estar más empinada y; a menor pendiente (si varía menos), la recta va a estar menos empinada.”.

En general, utiliza estas expresiones para ambos casos:

- “Se ha graficado una función lineal...”.
- “Una recta es una figura geométrica. Sean dos puntos... en el plano... menor distancia...”.

- **Expresión gráfica.**

Ernesto graficó tres planos cartesianos.

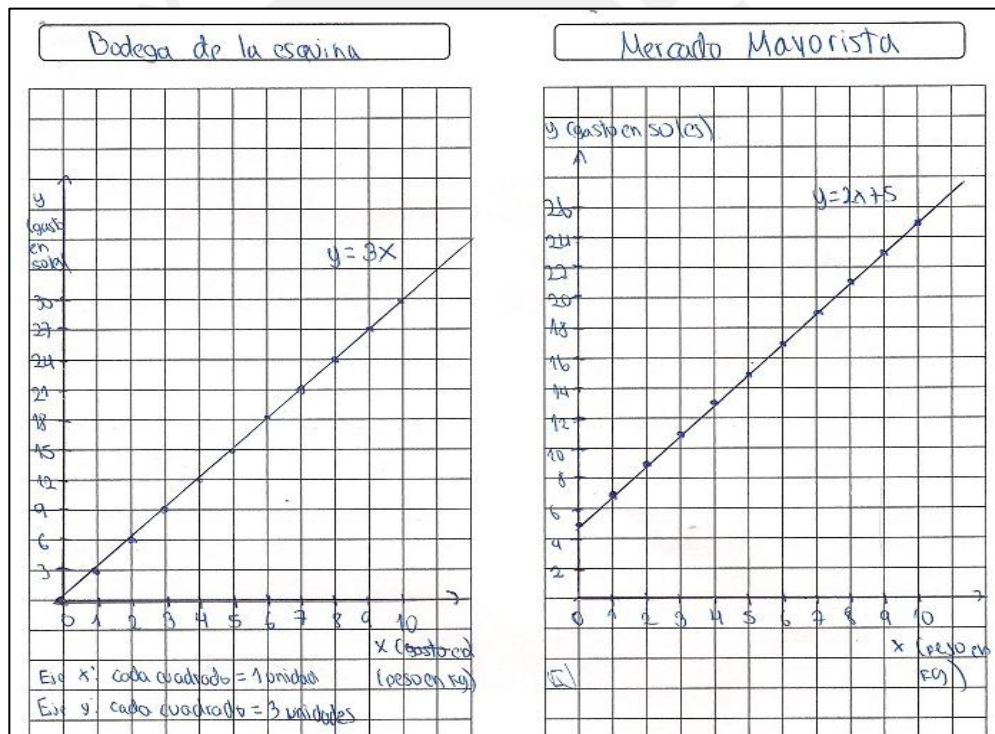


Figura 27: Representación gráfica en planos cartesianos separados.

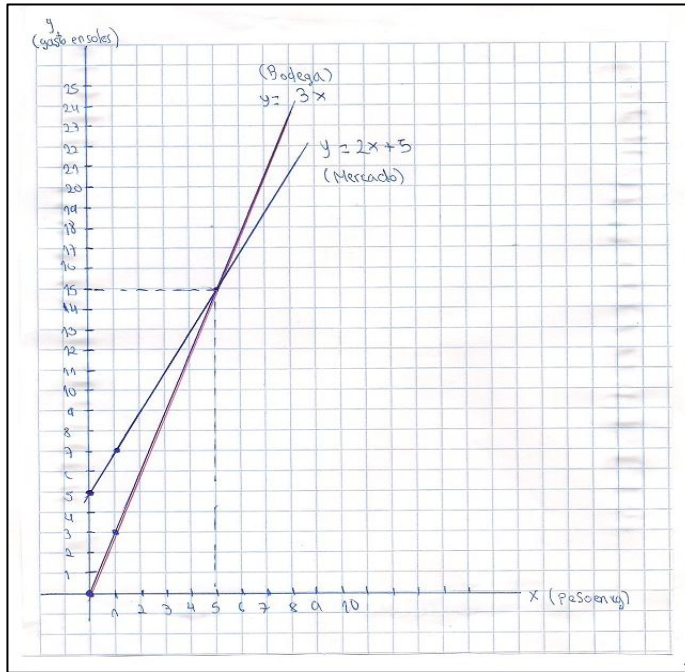


Figura 28: Representación gráfica de las rectas en un mismo plano cartesiano.

- **Expresión simbólica.**

El alumno expresa lo siguientes símbolos matemáticos.

Vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, puntos A y B, $y = 3x$, $y = 2x + 5$, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, Δy , Δx .

Situación – Problema.

En este bloque se busca que se analice y relacione la variación del gasto cuando varía el peso en una unidad de kilogramo, con el coeficiente de la variable “x” y con la inclinación de la recta.

Conceptos.

Los conceptos que Ernesto usa para explicar algo que analiza o muestra son: Recta, origen, función lineal, traslación, vector, puntos, plano, menor distancia entre dos puntos, prolongación, aumento, variación, pendiente de la recta, tasa de cambio, derivada, mayor y menor.

Procedimientos.

- Cuando representa la situación de la bodega, el alumno grafica los ejes X e Y sobre una cuadrícula. Escribe que el eje X representa al peso en kg y, el Eje Y al gasto en soles. Explica en su hoja que las escalas que ha considerado para los ejes son:

Eje X → cada cuadrado = 1 unidad

Eje Y → cada cuadrado = 3 unidades.

Revisa la tabla de correspondencia y representa cada par de números relacionados como un punto en el plano cartesiano. Los ubica siguiendo las líneas de la cuadrícula y desde los ejes. Luego, grafica la recta que pasa por todos los puntos. Explica debajo de la representación hecha que la gráfica es una recta que pasa por el origen y es una función lineal.

- Para representar la situación del Mercado Mayorista, el alumno grafica los ejes X e Y sobre otra cuadrícula. Indica que el eje X representa al peso en kg y, el Eje Y al gasto en soles. No está explícito como en el anterior gráfico, pero se observa en su gráfico que las escalas consideradas para los ejes son:

Eje X → cada cuadrado = 1 unidad

Eje Y → cada cuadrado = 2 unidades.

Revisa la tabla de correspondencia y representa cada par ordenado como un punto en el plano cartesiano. Nuevamente, los ubica siguiendo las líneas de la cuadrícula y desde los ejes. Grafica la recta que pasa por todos los puntos. Explica que la gráfica elaborada es una recta que se ha trasladado mediante el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ y representa a una función lineal.

- Representa las rectas en un mismo plano cartesiano y en una hoja cuadrículada. Para ello, construye los ejes con escala 1:1. Grafica cada recta utilizando sólo dos puntos de referencia para cada una. Identifica la intersección de las rectas.
- Con relación a la variación del gasto respecto a la variación en el peso en kilos:
 - Compara la cantidad de la variación del gasto respecto a la variación en la cantidad de kilos cuando se aumenta en una unidad para cada kilogramo del peso.
 - Inductivamente, reconoce que la variación es de 3 soles en el caso de la bodega y de 2 soles en el caso del Mercado Mayorista.
 - Justifica que la variación sea constante al relacionarlo con la pendiente de la recta afirmando que “...como la pendiente de la recta es 2, cuando sucede lo indicado el gasto varía en 2 soles.”
 - Relaciona la pendiente con la inclinación de la recta (empinamiento) expresando que
“El gasto varía en 3 soles... Esto se debe a que la pendiente de la recta es 3.”
“... a mayor pendiente (si varía más), la recta va a estar más empinada y; a menor pendiente (si varía menos), la recta va a estar menos empinada.”

Proposiciones.

- La variación del gasto al variar el peso en una unidad siempre se mantiene (constante).
- La variación del gasto respecto a la variación del peso está relacionado con la pendiente de la recta.

- A mayor pendiente (si varía más), la recta es más empinada y a menor pendiente (si varía menos), la recta va a estar menos empinada.
- La gráfica de una función lineal es una recta.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** La variación del gasto al variar el peso en una unidad siempre se mantiene (constante).

Caso de la bodega:

Argumento 1: *(Por 1 kilo de papa gastas...)* 3 soles. *(Por 2 kilos de papa gastas...)* 6 soles. *(¿Aumenta o disminuye el gasto?)* Aumenta en 3 soles.

Argumento 2: *(Por 4 kilos de papa gastas...)* 12 soles. *(Por 5 kilos de papa gastas...)* 15 soles. *(¿Aumenta o disminuye el gasto?)* Aumenta en 3 soles.

Argumento 3: *(Por 4 kilos de papa gastas...)* 12 soles. *(Por 5 kilos de papa gastas...)* 15 soles. *(¿Aumenta o disminuye el gasto?)* Aumenta en 3 soles.

Argumento 4: *(¿la variación del gasto es la misma o son diferentes?)* Es la misma (en 3 soles).

Argumento 5: *(Examina en tu gráfico si la variación se mantiene...)* Sí, se sigue manteniendo.

Argumento 6: Cuando compro una cantidad cualquiera y se compara con lo que gasto y cuando compro esa cantidad aumentada en uno, hay una variación de 3.

Caso del Mercado Mayorista:

Argumento 1: *(Por 1 kilo de papa gastas...)* 7 soles. *(Por 2 kilos de papa gastas...)* 9 soles. *(¿Aumenta o disminuye el gasto?)* Varía en 2 soles (aumenta).

Argumento 2: *(Por 4 kilos de papa gastas...)* 13 soles. *(Por 5 kilos de papa gastas...)* 15 soles. *(¿Aumenta o disminuye el gasto?)* Aumenta en 2 soles.

Argumento 3: *(Por 4 kilos de papa gastas...)* 23 soles. *(Por 5 kilos de papa gastas...)* 25 soles. *(¿Aumenta o disminuye el gasto?)* Aumenta en dos soles.

Argumento 4: *(¿la variación del gasto es la misma o son diferentes?)* Sí, aumenta en 2 soles.

Argumento 5: *(Examina en tu gráfico si la variación se mantiene...)* Sí, se sigue manteniendo.

- **Tesis 2:** La variación del gasto respecto a la variación del peso está relacionado con la pendiente de la recta.
 - Argumento 1: El gasto varía en 3 soles, puesto que aumenta. Esto se debe a que la pendiente de la recta es 3. (*Respecto al caso de la bodega*).
 - Argumento 2: Como la pendiente de la recta es 2... el gasto varía en 2 soles. (*Respecto al caso del Mercado Mayorista*).

- **Tesis 3:** A mayor pendiente (si varía más), la recta es más empinada y a menor pendiente (si varía menos), la recta va a estar menos empinada.
 - Argumento 1: (*¿Cuál recta es más empinada?*). La primera (*refiriéndose al de la bodega*).
 - Argumento 2: (*¿Cuál recta es menos empinada?*). La segunda (*refiriéndose al del Mercado*).
 - Argumento 3: Que a mayor pendiente (si varía más), la recta va a estar más empinada.
 - Argumento 4: A menor pendiente (si varía menos), la recta va a estar menos empinada.

- **Tesis 4:** La gráfica de una función lineal es una recta.
 - Argumento 1: Se ha graficado una función lineal que representa los gastos en soles vs el peso en kg de las papas. Se ha graficado una recta que está en el origen. (*Refiriéndose al caso de la bodega*).
 - Argumento 2: Se ha graficado una función lineal que representa los gastos en soles vs. el peso en kg de las papas. Se forma una recta. Se ha dado una traslación mediante el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (*refiriéndose al caso del Mercado Mayorista*).
 - Argumento 3: Una recta es una figura geométrica. Sean dos puntos A y B ubicados en el plano, una recta es aquella línea que une a los dos puntos en la menor distancia posible.
 - Argumento 4: .. y se prolonga infinitamente por ambos (*se refiere a los puntos A y B*).

6.2.5. Procesos Matemáticos activados por Janet

Proceso de Materialización:

Janet construye las rectas que representan la relación del peso en kilos con el gasto en soles de cada caso (ver Ilustración 4, página 201).

Proceso de Personalización:

Janet ha creado su propia estrategia para representar gráficamente las rectas que modelizan las situaciones analizadas.

Para construir la recta que representa al modelo del caso de la bodega, “ $y = 3x$ ”, realiza lo siguiente:

- 1º. Mediante la técnica de rastreo digital sobre el plano, identifica la intersección de los ejes (origen de coordenadas) como el punto $(0,0)$ y lo señala con un chinche (ver figura 29).



Figura 29: Rastreo realizado por Janet para identificar el origen de coordenadas en el plano cartesiano. (Sesión 9. 15-11-2012).

2°. Para el punto $(1, 3)$, con su dedo índice derecho, rastrea el eje X desde 0 y avanza hasta 1 (ver figura 30).



Figura 30: Janet rastrea una unidad hacia la derecha desde el punto de abscisa 0. (Sesión 9. 15-11-2012).

De allí, con el mismo dedo, rastrea hacia arriba y sube 3 unidades (ver figuras 31 al 34). El punto es señalado con un chinche.



Figura 31: Janet rastrea subiendo una unidad desde el punto de abscisa 1. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 32: Janet rastrea subiendo otra unidad a la altura del punto de abscisa 1. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 33: Janet sube una unidad más a la altura del punto de abscisa 1. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 34: Ubicación del punto (1;3) en el plano cartesiano. (Sesión 9. 15-11-2012).

3°. Para el siguiente punto, $(2,6)$, realiza el mismo movimiento anterior pero partiendo de $(1,3)$ como punto referencial. Es decir, con su dedo índice derecho rastrea avanzando una unidad hacia la derecha (ver figura 35) y, luego, sube 3 unidades (ver figuras 36 al 38). Allí coloca el tercer chinche (ver figura 39).



Figura 35: Janet rastrea avanzando hacia la derecha en una unidad desde el punto $(1, 3)$ encontrándose a la altura del punto de abscisa 2. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 36: Janet rastrea subiendo una unidad a la altura del punto de abscisa 2. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 37: Janet repite el rastreo de subir una unidad más a la altura del punto de abscisa 2. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 38: Janet sube una unidad más por tercera vez a la altura del punto de abscisa 2. (Sesión 9. 15-11-2012).



Figura 39: Ubicación y señalización del punto (2; 6) sobre el plano cartesiano. (Sesión 9. 15-11-2012).

- 4°. Para ubicar los demás puntos, realiza los mismos movimientos partiendo siempre del punto anterior que le sirve de referente.
- 5°. Luego, une cada punto con una pita para representar a la recta que las contiene.

Para construir la recta que representa al modelo del caso del Mercado Mayorista, “ $y = 2x+5$ ”:

- 1°. Ubica su dedo índice en el origen de coordenadas y, de allí, rastrea 5 unidades hacia arriba ubicando el punto $(0,5)$ sobre el eje Y.
- 2°. Desde este punto, rastrea una unidad hacia la derecha y, luego, sube 2 unidades ubicándose en el punto $(1,7)$ y colocando un chinche para su señalización.
- 3°. Para identificar los demás puntos, siempre toma el punto anterior como referencial y el movimiento que realiza con su dedo es avanzar una unidad a la derecha y subir 2 unidades.
- 4°. Por último, utilizando un pabilo (pita) une todos los puntos para representar a la recta que las contiene.

Proceso de Algoritmización y Práctica.

Estos procesos se presentan cuando la alumna realiza cálculos mentales al analizar la relación de la variación del gasto en soles respecto a la variación del peso en kilos y afianza sus resultados con el rastreo táctil sobre las rectas construidas en el plano cartesiano.

Proceso de Detección y Reconocimiento.

Identifica en el plano cartesiano, ubicando con su dedo en el punto donde las rectas se intersecan, para comprobar lo que ya había descubierto en las dos tablas de correspondencia que elaboró en el Bloque I: que al comprar 5 kilos de papa, el gasto de S/.15 es el mismo en cualquiera de los dos casos.

Proceso de Argumentación y Justificación.

La alumna expone con un razonamiento inductivo que la variación del gasto en soles al variar el peso en una unidad en kilos siempre se mantiene. Para el caso de la bodega, la variación del gasto es un aumento de S/.3 y, para el caso del Mercado Mayorista, la variación en el gasto es un aumento de S/.2. Además, analiza y explica que a mayor valor en la variación del gasto, más empinada es la recta.

6.2.6. Procesos Matemáticos activados por Ernesto

Proceso de Trabajo de técnica y Materialización:

Ernesto construye en planos separados y, luego, en un mismo plano, las rectas que representan la relación del peso en kilos con el gasto en soles de cada caso. En los planos separados grafica los ejes utilizando escalas (Eje $X \rightarrow 1:1$; Eje $Y \rightarrow 1:3$). Identifica al Eje X como el Peso en kg y al eje Y como el Gasto en soles. Ubica los puntos tomando los datos de las tablas de correspondencia. Grafica las rectas y las señala con las expresiones matemáticas: “ $y = 3x$ ” (modelo de la bodega) e “ $y = 2x+5$ ” (modelo del Mercado Mayorista).

Proceso de Personalización.

Este proceso se presenta cuando el alumno relaciona la función lineal con una recta al momento de elaborar las gráficas. Adicionalmente, explica que la variación del gasto en soles respecto a la variación en una unidad del peso en kg, se encuentran relacionadas por la pendiente de la recta, Por otro lado, relaciona la pendiente de la recta con su inclinación. Además, explica que la pendiente es una tasa de cambio, la derivada de una función en un punto y la denota simbólicamente como el cociente entre las variaciones de “ y ”, y de “ x ”.

Proceso de Significación.

Ernesto define a la pendiente como una tasa de cambio, como la derivada de una función en un punto. Afirma que las rectas tienen una pendiente constante. Utiliza notaciones matemáticas para señalar que la tasa de cambio es “de Δy respecto a Δx ”, y al referirse a la pendiente de la recta emplea $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Proceso de Argumentación y Justificación.

Las argumentaciones que Ernesto manifiesta están dirigidas a justificar que al variar el peso en una unidad en kilos, la variación del gasto en soles siempre se mantiene. Para el caso de la bodega, la variación del gasto implica un aumento de S/.3 y; para el caso del Mercado Mayorista, la variación en el gasto es un aumento de S/.2. Asimismo, analiza y explica que la variación del gasto respecto a la variación del peso está relacionada con la pendiente de la recta, y que a mayor pendiente, la recta es más empinada. Con esto, afirma que la función lineal es una recta pues la variación del gasto respecto a la variación del peso es constante y está representada por la pendiente de la recta.

6.2.7. Conflictos Semióticos presentados por Janet

- La alumna nuevamente presenta dificultades con el lenguaje tanto natural como el matemático. Estas dificultades están asociadas con el nivel regular que posee en lecto-escritura en Braille y en poseer un nivel regular de palabras en su vocabulario. Pero también provienen de las dificultades relacionadas con las discapacidades o bajo nivel de desarrollo psicológico de los alumnos (Godino et al, 2011). En general, Janet se expresa correctamente, pero le toma tiempo buscar las palabras adecuadas y precisas para dar algún tipo de explicación.

Esto se debe a que la discapacidad visual que presenta limita la información que se percibe por los otros sentidos y el tiempo que requiere para lograr el equilibrio cognitivo es mayor. Como cita Castejón & Navas, 2009): “[...] la recogida de información es secuencial y, por ello, más lenta porque se produce una sobrecarga del sistema de memoria a corto plazo o memoria de trabajo”. Además, la alumna se encuentra en un proceso de reforzamiento en sus hábitos de estudio y de conocimientos. Esta carencia de un mejor léxico y manejo del vocabulario que conlleva a no organizar con rapidez sus ideas, se pueden manifestar como errores de asociación o rigidez del pensamiento (Radatz, 1979). Esto le ocurrió cuando analizaba la relación entre la variación en el gasto con el coeficiente de “x” en la situación del Mercado Mayorista. Si bien fue momentáneo, de todas maneras se presentó el error. A continuación, se muestra el fragmento donde aparece esta dificultad.

U464	P-I: <i>Ya... Y tiene que ver con este movimien... con esto que has encontrado de la variación que va de 2 en 2?</i>
U465	J: <i>Sí. Se va multiplicando.</i>
U466	P-I: <i>¿A qué multiplica?</i>
U467	J: <i>Se... ¿a quién multiplica...?</i>
U468	P-I: <i>Ajá. ¿A qué multiplica ese 2?</i>
U469	J: <i>Ahh...</i>
U470	P-I: <i>¿Qué valores?</i>
U471	J: <i>El 2 multiplica...</i>
U464	P-I: <i>A cualquier valor ¿de qué?</i>
U465	J: <i>Mmmm... (Presenta nerviosismo porque no sabe cómo responder)</i>
U466	P-I: <i>En general... en general... tu fórmula, ¿cuál es? “y” igual...</i>
U467	J: <i>“2x”</i>
U468	P-I: <i>Ah... ¿“2x más qué”?... “2x más 5”... ya lo has dicho y recontradicho.</i>
U469	J: <i>Sí.</i>
U470	P-I: <i>¿A quién multiplica el 2?... allí en tu fórmula... en tu fórmula...</i>
U471	J: <i>En mi fórmula multiplica... mmm...</i>
U472	P-I: <i>Lo acabas de decir. A ver... vuélvemelo a decir... “y” igual ¿cuánto?...</i>
U473	J: <i>A “x”...</i>
U474	P-I: <i>...Es que se te va siempre la idea... A “x”, ¿no es cierto?... ¿y qué cosa era “x”? ¿Qué me representa “x”?</i>
U475	J: <i>El kilo.</i>
U476	P-I: <i>El kilo... O sea, el peso en kilos, ¿estamos de acuerdo?</i>
U477	J: <i>Sí... el peso en kilos...</i>
U478	P-I: <i>Sí... te estoy redundando para que vayas relacionando cada vez las cosas, ¿ya?</i>
U479	J: <i>Ajá.</i>

- Lo anterior también se asocia con las dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores, en especial de conceptos y propiedades. Esta realidad está relacionada con la información sesgada que ha recibido en temas matemáticos, uno por la modalidad de estudio a distancia y, por otro lado, por los años de escolaridad que dejó de llevar. Ella posee un nivel de conocimientos matemáticos y herramientas matemáticas muy básicas y que no han sido profundizados. Con esta observación, las primeras sesiones de esta investigación fueron orientadas a desarrollar un ambiente donde la alumna tuviera una mayor cercanía con el lenguaje matemático, aprendiera a elaborar tablas de doble entrada y a graficar rectas, así como a enfatizar la comprensión lectora en problemas. En estas sesiones se produjeron materiales de estudio en sistema Braille, algunos hechos por la alumna invidente y otros por la profesora-investigadora. Esta producción de material demanda tiempo, así es que la información que recibía debería haber sido complementada con información adquirida por otros medios. Lamentablemente, el acceso a la información por otros medios es limitado pues no cuenta con un libro de texto matemático que esté codificado en Braille, no posee la máquina Perkins en su hogar el cual le facilitaría la producción de más material escrito así como la construcción de cuadros y planos cartesianos, no cuenta con el servicio de internet en su hogar, y el apoyo en su casa no es muy significativo o frecuente en lo referente a la enseñanza o explicación de los temas matemáticos. Además, hay que considerar que ella ha retomado sus estudios hace un par de años como parte del programa de inclusión, y que influyen en la aparición de estos errores por falta de dominio en los contenidos matemáticos previos.

6.3 Bloque III de la actividad

6.3.1. Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet

En este bloque, la alumna ha mostrado la siguiente práctica matemática:

- Verifica que para cada valor en el peso le corresponde un único valor en el gasto.

6.3.2. Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto

El alumno realizó el análisis sólo sobre la situación de la bodega, pues así estaba planteado en la Hoja Guía.

- Justifica la correspondencia unívoca entre las variables del peso y del gasto.
- Explica que el valor del gasto es único para su correspondiente valor en el peso.

6.3.3. Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet

Elementos Lingüísticos.

- **Expresión verbal oral.**

Respecto a la bodega:

- “...el gasto es de S/.3 cada kilo. Y si yo pido 3 kilos de papa, me saldría S/.9.”
- Cuando se le pregunta si es el valor en el gasto es único para cada valor en el peso, ella responde: “Único”.
- “Porque el gasto de cada kilo, como repito... es de S/.3. No importa si aumenta en 2 ó 3 kilos, siempre será multiplicado por 3.”

Respecto al Mercado Mayorista:

- Cuando se le pregunta si puede tener varios valores en el gasto para un valor fijo en el peso, ella responde: “Es único”.
- Se le pregunta por la condición para que esto ocurra y afirma: “Que... cualquier... este número... o sea, de kilo de papa siempre será multiplicado por 2... y aumentado... sumando 5... Ese es por el gasto en pasajes.”.

- **Expresión gráfica.**

En este bloque, la alumna no muestra nuevas representaciones gráficas. Sus razonamientos se apoyan en las tablas de correspondencia y las rectas construidas en los bloques anteriores.

- **Expresión simbólica.**

La alumna no presenta escritura simbólica pues este bloque se llevó a cabo de forma dialogada y utilizando los recursos materiales que se elaboraron en los bloques anteriores.

- **Expresión gestual.**

Al analizar la relación unívoca entre las variables.

- Rastreo táctil sobre la recta.
- Cálculo mental observado en gesto pensativo al tocar cada punto (chinche) y antes de ofrecer alguna respuesta.
- Lectura táctil en la tabla de correspondencia para verificar que a cada valor en el peso le corresponde un único valor en el gasto.

Situación - Problema.

En esta parte de la investigación, se busca analizar la correspondencia unívoca entre las variables que representan al peso en kilogramos y al gasto en soles, respectivamente.

Conceptos.

Durante la investigación no se han utilizado los términos de correspondencia unívoca ni de relación inyectiva de manera rigurosa. El estudio busca que la alumna utilice su propio lenguaje y experiencia en el desarrollo y análisis de la actividad propuesta en este bloque. Janet ha manejado el concepto de inyectividad:

- Bajo una visión funcional, cuando realiza cálculos mentales y afirma que para cualquier número de kilo de papa que se compre en la bodega siempre será multiplicado por S/.3 por ser el precio de cada kilo y el valor en el gasto será el correspondiente para esa cantidad de kilos que se compren. Para el caso del Mercado Mayorista, explica que para cualquier número de kilo de papa que se adquiera siempre será multiplicado por 2 y, luego, se le suma 5 por concepto de pasajes.
- Bajo un visión gráfica, cuando identifica en las tablas de correspondencia que a cada valor del peso le corresponde un único valor en el gasto.

Procedimientos.

Para verificar que para cada valor en el peso le corresponde un único valor en el gasto, Janet realiza los siguientes procedimientos:

- Respecto al caso de la bodega.
 - Sobre el gráfico de la recta, rastrea cada punto y relaciona, mediante cálculo mental, la correspondencia entre el valor del peso y el valor del gasto.
 - Mediante preguntas dirigidas para un análisis inductivo, ella explica que el gasto es único porque se paga S/.3 por cada kilo.
 - Comprueba en la tabla de correspondencia que a cada valor del peso le corresponde un único valor en el gasto.

- Respecto al caso del Mercado Mayorista.
 - Comprueba en la tabla de correspondencia la correspondencia unívoca entre el peso y el gasto.
 - Mediante preguntas dirigidas para un análisis inductivo, Janet afirma que el gasto es único porque la condición es multiplicar por 2 al número de kilo de papa y aumentarle 5 (correspondiente al pasaje).

Proposiciones.

- El valor del gasto es único para cada cantidad de kilos de papa que se compre (bajo las condiciones dadas por cada lugar de compra).

Argumentaciones.

- **Tesis:** El gasto en la bodega es un valor único para cada cantidad de kilos de papa que se compre. El gasto en el Mercado Mayorista es un valor único para cada cantidad de kilos de papa que se compre.

Caso de la bodega:

Argumento 1: (*¿Habría la posibilidad de que al comprar 3 kilos de papa, el gasto ya no fuera de S/.9 sino otro valor?*)... Mmm...no. (*¿Para los 3 kilos de papa, el gasto sería único?*)... Sí. Porque el gasto es de S/.3 cada kilo.

Argumento 2: (*Y si compras 7 kilos... ¿este gasto puede tener otro valor o es único?*)... Único... Porque el gasto de cada kilo, como repito... es de S/.3. No importa si aumenta en 2 ó 3 kilos, siempre será multiplicado por 3. (Entonces, *para 7 kilos siempre serán...*)... S/.21.

Argumento 3: (*... puedo comprar cualquier cantidad de kilos de papa... va a suceder que...*)... siempre se va a multiplicar por 3.

Argumento 4: (*... para cualquier kilo de papa que yo compre el gasto siempre va a ser...*)... multiplicado... por 3... Es único...

Caso del Mercado Mayorista:

Argumento 1: (*El gasto... ¿es único o puedo tener varios valores para una misma cantidad de kilos?*)... Es único.

Argumento 2: (*¿Cuál es la condición?*)... Que... cualquier... este número... o sea, de kilo de papa siempre será multiplicado por 2... (*¿Qué más?*)... y aumentado... sumando 5. Ese es el gasto por los pasajes.

6.3.4. Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto

Elementos Lingüísticos

- **Expresión verbal escrita.**

La Hoja Guía sólo contemplaba el análisis en la bodega:

- Respecto a la posibilidad de que al comprar 3 kg de papa el gasto resulte otro valor, el alumno respondió: “El valor es único... por concepto de función... por definición de función.”
- “Cada valor del eje X sólo tiene una imagen.”
- “A 24 sólo le corresponde un valor de x . Esto es porque es una recta y no otra figura. Además por la definición de función, a cada elemento de x le corresponde un único elemento de y . Si sucediera lo contrario habría otra relación.”

- **Expresión gráfica.**

En este bloque, Ernesto no ha construido nuevas representaciones gráficas. Sus razonamientos se apoyan en las tablas de correspondencia y las rectas construidas en los bloques anteriores.

- **Expresión simbólica.**

El alumno sólo utiliza las siguientes notaciones: 8, 24, x , y .

Situación - Problema.

En esta parte de la investigación, se busca analizar la correspondencia unívoca entre las variables que representan al peso en kilogramos y al gasto en soles, respectivamente.

Conceptos.

Los conceptos que Ernesto utiliza al explicar o justificar alguna respuesta son: función, eje X, imagen, correspondencia, recta, elemento de X y elemento de Y, relación.

Proposiciones.

- El valor del gasto es único.
- Cada valor del eje X sólo tiene una imagen.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** El valor del gasto es único.

Argumento 1: (*¿Habría la posibilidad de que al comprar 3 kilos de papa, el gasto ya no fuera de S/.9 sino otro valor?*) El valor es único (por concepto de función).

Argumento 2: (*Y si compras 7 kilos... ¿este gasto puede tener otro valor o es único?*)... No, es único (por definición de función).

Argumento 3: No hay otro valor, por ejemplo, cuando quiero comprar 8 kilos.

Argumento 4: A 24 kg sólo le corresponde un valor de x .

- **Tesis 2:** Cada valor del eje X sólo tiene una imagen.

Argumento 1: Esto es porque es una recta y no otra figura.

Argumento 2: Por la definición de función, a cada elemento de x le corresponde un único elemento de y .

Argumento 3: Si sucediera lo contrario, habría otra relación.

6.3.5. Procesos Matemáticos activados por Janet

Proceso de Análisis.

La alumna realiza una revisión a los valores que aparecen en sus tablas de correspondencia, a las rectas construidas en el plano cartesiano y,

paralelamente, apoya esta revisión con cálculos mentales, con la finalidad de afirmar que el valor del gasto es único para cada valor de kilo de papas comprado.

Proceso de Argumentación y Justificación.

Janet afirma que el gasto es un valor único para cada valor de kilo de papa que se compre porque siempre se multiplica cada kilo por su precio que es de S/.3, en el caso de la bodega. Para la situación del Mercado Mayorista, cada kilo de papa se multiplica por su precio que es de S/.2 por kilo y se le agrega S/.5 por los pasajes.

6.3.6. Procesos Matemáticos activados por Ernesto

Proceso de Personalización.

Ernesto explica que “por la definición de función, a cada elemento de ‘ x ’, le corresponde un único elemento de ‘ y ’. Si sucediera lo contrario, habría otra relación.”

Proceso de Argumentación y Justificación.

El alumno explica que existe una correspondencia unívoca entre las variables “ x ” e “ y ”. Afirma que el gasto es un valor único para cada valor de kilo de papa que se compre. Esta explicación es reforzada con lo siguiente: “cada valor del eje X sólo tiene una imagen “ y ” por la definición de función, a cada elemento de ‘ x ’ le corresponde un único elemento de ‘ y ’. Si sucediera lo contrario habría otra relación”.

6.3.7. Conflictos Semióticos presentados por Janet

En este bloque de análisis se analizaba la correspondencia unívoca entre el peso y el gasto. La tarea consistió en comprobar, rastreando sus rectas, leyendo sus tablas de correspondencia y mediante el diálogo, que el gasto era único para cada kilo de papa que se compre. La alumna

desarrolló con más seguridad esta parte de la actividad porque, como ya lo dijo en una de las sesiones previas, le era más fácil entender el contexto en los gráficos del plano cartesiano. Además, la abstracción no era de mayor nivel como en los otros bloques. No se utilizaron las variables. Sólo se analizó el contexto en lenguaje natural y, como la situación le era familiar, sus repuestas fueron más precisas y correctas.

6.4 Bloque IV de la actividad

6.4.1. Sistema de Prácticas Matemáticas de Janet

Las prácticas matemáticas observadas en la alumna han sido:

- Identifica y señala el punto de intersección de las rectas.
- Discrimina la conveniencia de comprar en la bodega cuando la compra es menor a 5 kg y, conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando la compra es mayor a 5 kg de papa.
- Compara la posición de las rectas antes y después del punto de intersección y la relaciona con la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro.

6.4.2. Sistema de Prácticas Matemáticas de Ernesto

- Verifica, mediante análisis algebraico de “ $f(x) = g(x)$ ”, la existencia de un par de valores que se corresponden (para 5 kg de papa, el gasto asciende a S/.15) y pertenece tanto a la situación de la bodega como a la del Mercado Mayorista. Agrega que el punto de intersección de las rectas representa este par ordenado. El alumno escribe lo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 3x = 2x + 5 & \text{En el par } (5;15). \quad 5\text{kg.} \\ x = 5 & \text{El punto de la intersección de ambas rectas.} \end{array}$$

- Compara los gastos posibles que se realizan en cada lugar de compra (bodega y Mercado Mayorista) si se compran menos de 5 kg de papa. Escribe los gastos que realizaría en cada lugar y, luego, afirma que conviene comprar en la bodega cuando es menos de 5 kg.
- El alumno realiza un análisis similar para compras mayores a 5 kg y concluye que conviene comprar en el Mercado Mayorista.

6.4.3. Configuración Cognitiva de objetos matemáticos de Janet

Elementos Lingüísticos

- **Expresión verbal oral.**
 - Cuando se le recuerda a la alumna de la existencia del par ordenado que indica que comprar en la bodega es lo mismo que comprar en el Mercado Mayorista porque el valor en el gasto es igual: “...5 (*kilos*)... A 15 (*soles*)....”.
 - Cuando Janet analiza el gasto para cantidades de kilos menores a 5 kilos: (*Para 2 kilos...*) “De S/.6 (*en bodega*)... De S/.9... sumando el pasaje (*en Mercado Mayorista*)”. (*Para 3 kilos...*) “S/.9 (*en bodega*)... S/.11... sumando los pasajes (*en Mercado Mayorista*)”.
 - Cuando Janet analiza el gasto para cantidades de kilos mayores a 5 kilos: “Si compro 6 kilo... mmm... 6 kilos en mi bodega me costaría, pues, S/.18.” “Y si compro 6 en el Mercado me costaría... este... S/.17.” “En la bodega, 8 kilos me saldría S/.24... Y en el Mercado me saldría 21.”
 - Cuando analiza la posición de las rectas utiliza las siguientes expresiones: “más abajo”, “el valor del gasto es menor”.
- **Expresión gráfica.**

En este bloque, la alumna no construye nuevas representaciones gráficas. Utiliza las rectas construidas previamente para apoyar sus razonamientos.

- **Expresión simbólica.**

Janet no muestra escritura simbólica pues este bloque se llevó a cabo de forma dialogada y utilizando los recursos materiales que se elaboraron en los bloques anteriores.

- **Expresión gestual.**

- Señalización con los dedos en la intersección de las rectas.
- Gesto pensativo y movimiento de labios expresando el sonido de...mmm... cuando realiza los cálculos mentales antes de dar alguna respuesta.
- Rastreo con los dedos hacia la intersección de las rectas.

Situación - Problema.

Como la introducción al tema de función lineal ha partido de una situación contextualizada, este bloque está orientado a analizar la conveniencia de comprar en un lugar o en otro.

Conceptos.

Las nociones de “mayor que” y “menor que” así como de “más abajo” y “más arriba” son presentados por la alumna de manera práctica y apoyada por los gráficos que construyó previamente. El análisis fue inductivo y orientado con las preguntas de la Hoja Guía.

- Bajo una visión funcional, cuando realiza cálculos mentales y compara los gastos que se realizarían en cada lugar cuando se compra una misma cantidad en kilogramos de papa.
- Bajo una visión gráfica, cuando se ubica en la intersección de rectas en el plano cartesiano y compara la posición de las rectas, antes y después del punto de intersección, relacionando con el resultado previo de haber identificado donde es más conveniente comprar.

Procedimientos.

- Al identificar la intersección de las rectas ubica sus manos sobre la intersección. Este movimiento fue espontáneo y ocurrió cuando se le preguntó por el valor en kilogramos de papa para el cual el gasto correspondiente es el mismo tanto para bodega como para el Mercado Mayorista.
- Cuando discrimina la conveniencia de comprar en la bodega cuando la compra es menor a 5 kg y, conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando la compra es mayor a 5 kg de papa, lo realiza calculando y comparando los diferentes gastos antes y después del punto de intersección de las rectas. No realiza ningún rastreo. Todo el razonamiento se apoya en el cálculo mental y en el recuerdo de los resultados anteriores.
- Para comparar la posición de las rectas antes y después del punto de intersección, señala con el dedo índice este punto. Luego, rastrea hacia abajo y con el apoyo dialogado entre profesora-investigadora y alumna, Janet identifica que si una recta está por debajo de la otra, entonces conviene comprar en la situación que representa dicha recta. De la misma manera realiza el análisis para la posición de las rectas hacia arriba del punto de intersección.

Proposiciones.

- Conviene comprar en la bodega cuando es menos de 5 kilos de papa.
- Conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando es más de 5 kilos de papa.
- Si la recta está “más abajo”, el valor del gasto es menor.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** Conviene comprar en la bodega cuando es menos de 5 kilos.

Argumento 1: *(Si compras 2 kilos de papa, el gasto en la bodega es...)...* De S/.6. *(¿y en el Mercado Mayorista?)..* De S/.9....sumando el pasaje. *(Si ahora son 3 kilos...)...* En la bodega sería S/.9 y en el Mercado sería 11... sumando los pasajes.

Argumento 2: *(¿dónde te conviene comprar cuando es menos de 5 kilos?)...* en la bodega.

- **Tesis 2:** Conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando es más de 5 kilos.

Argumento 1: Si compro 6 kilos...mmm... 6 kilos en mi bodega me costaría, pues, S/.18. Y si compro 6 en el Mercado me costaría... S/.17.

Argumento 2: En la bodega, 8 kilos me saldría S/.24. Y en el Mercado me saldría 21.

Argumento 3: *(¿Dónde conviene comprar?)* En el Mercado.

- **Tesis 3:** Si la recta está “más abajo”, el valor del gasto es menor.

Argumento 1: *(Cuándo tomo menos de 5 kilos, ¿qué pasa con las rectas?...¿quién está una más arriba y quién está más abajo?)...* el de la bodega... está más abajo... *(El del Mercado estás más arriba...)*... Sí.

Argumento 2: *(... ¿qué dijiste hace un ratito?... ¿Dónde me conviene comprar?...)...* En la bodega *(¿Hay relación...?...* Si compro menos kilos la recta está...)*... más (la alumna señala la recta que está más abajo)...* (... más abajo, ¿no?)... Sí. *(O sea, la bodega está debajo de la...)...*del Mercado.

Argumento 3: *(Y si yo me voy... más de 5 kilos...¿quién está más arriba y quién más abajo?)...* Ah. La bodega (Janet identifica y señala la recta que está más arriba) *(La bodega está más arriba...)*... Sí. *(Y el Mercado estás más abajo...)*... Sí.

Argumento 4: *(... ¿qué dijiste.. que era?)...*Que era conveniente comprar en el Mercado.

Argumento 5: *(¿Qué deducimos? Si la recta está más abajo...)*... el valor es menor... el valor del gasto. *(O sea, es más barato comprar allí...)*... Sí.

6.4.4. Configuración Epistémica de objetos matemáticos de Ernesto

Elementos Lingüísticos

- **Expresión verbal.**
 - “En el par $(5;15)$. El punto de la intersección de ambas rectas.” (Expresado por escrito).
 - “Por la posición, la recta que está por debajo de la otra es el lugar donde conviene comprar.” (Expresado oralmente).

- **Expresión gráfica.**

Ernesto utiliza las rectas que construyó en un mismo plano cartesiano, con anterioridad, para analizar la posición de las rectas.

- **Expresión simbólica.**

Las notaciones escritas por el alumno son: $(5, 15)$, $3x = 2x + 5$, $x = 5$, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 24, 21.

Situación - Problema.

Como la introducción al tema de función lineal ha partido de una situación contextualizada, este bloque está orientado a analizar la conveniencia de comprar en un lugar o en otro y relacionarlo con la posición de las rectas.

Conceptos.

Los conceptos mencionados por el alumno son: par (*ordenado*), punto de intersección, posición de rectas.

Procedimientos.

- Ernesto verifica la existencia de un par de valores que se corresponden (para 5 kg de papa, el gasto asciende a S/.15) y pertenece tanto a la

situación de la bodega como a la del Mercado Mayorista igualando las expresiones algebraicas que modelizó para cada situación. Además lo relaciona con el punto de intersección. Él escribe lo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 3x = 2x + 5 & \text{En el par } (5;15). \quad 5\text{kg.} \\ x = 5 & \text{El punto de la intersección de ambas rectas.} \end{array}$$

- Para determinar en qué lugar es más conveniente comprar, Ernesto se guía de las preguntas propuestas en la Hoja Guía de la actividad, comparando los gastos posibles que se realizan en cada lugar de compra si se compran menos de 5 kg o más de 5 kg de papa. Obtiene los valores que las rectas le ofrecen y se apoya en cálculos mentales.
- El alumno relaciona la posición de las rectas con la conveniencia de comprar en un lugar o en otro observando en su representación gráfica dichas rectas y explicando que un punto de abscisa le corresponde dos valores diferentes que están sobre cada recta, respectivamente. Compara estos dos valores y afirma que el menor está en la recta que está debajo de la otra.

Proposiciones.

- En la intersección de rectas ocurre que el gasto en bodega es el mismo que el gasto en el Mercado Mayorista.
- Conviene comprar en la bodega cuando es menos de 5 kilos.
- Conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando es más de 5 kilos.
- La recta que está “debajo de la otra” es la que representa la conveniencia de comprar en un lugar que en el otro.

Argumentaciones.

- **Tesis 1:** En la intersección de rectas ocurre que el gasto en bodega es el mismo que el gasto en el Mercado Mayorista.

Argumento 1: (*Análisis algebraico*)... $3x = 2x + 5$

$$x = 5$$

Argumento 2: En el par $(5, 15)$. 5 kg. El punto de la intersección de ambas rectas.

- **Tesis 2:** Conviene comprar en la bodega cuando es menos de 5 kilos.

Argumento 1: (*Si compras 2 kg de papa, el gasto en la bodega es de...*)... 6 soles (*y en el Mercado Mayorista...*)... 9 soles.

Argumento 2: (*Si compras 3 kilos de papa, el gasto en la bodega es de...*)... 9 soles (*y en el Mercado Mayorista...*)... 11 soles.

Argumento 3: Bodega: S/.15; S/.12; S/.11; S/.6.

Mercado: S/.15; S/.13; S/.9; S/.9.

(*¿Dónde te conviene comprar cuando es menos de 5 kilos?*)
En la bodega.

- **Tesis 3:** Conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando es más de 5 kilos.

Argumento 1: (*Si compras 6 kg de papa, el gasto en la bodega es de...*)... 18 soles (*y en el Mercado Mayorista...*)... S/.17.

Argumento 2: (*Si compras 8 kg de papa, el gasto en la bodega es de...*)... S/.14 (*y en el Mercado Mayorista...*)... S/.21.

Argumento 3: Bodega: S/.18; S/.24.

Mercado: S/.17; S/.21.

(*¿Dónde te conviene comprar cuando es menos de 5 kilos?*)
En el Mercado.

Observación: En el caso de Janet, ella revisa el gráfico para confirmar resultados expuestos.

- **Tesis 4:** La recta que está debajo de la otra es la que representa la conveniencia de comprar en un lugar que en el otro. (Esta proposición se dio en los últimos minutos de la sesión y fue en diálogo entre profesora-investigadora y alumno)

- Argumento 1: (*¿Las rectas que ya habías graficado informaba sobre la conveniencia de comprar en algún lugar o en otro?*)... Sí. (*Explícamelo...*)... Si tomo un valor del eje X que esté después de la intersección y lo llevo hasta las rectas, tengo dos valores diferentes que son el gasto en cada lugar. El valor menor me indica dónde conviene comprar.
- Argumento 2: (*Me has hablado de un punto... ¿y si generalizas?*)... Por la posición, la recta que está por debajo de la otra es el lugar donde conviene comprar.

6.4.5. Procesos Matemáticos activados por Janet

Proceso de Significación.

Janet señala con su dedo la intersección de las rectas y la relaciona con el par de valores que coinciden para ambos casos y que los había detectado, en un primer momento, en las tablas. Es decir, es el punto donde comprar 5 kilos de papa, o en la bodega o en el Mercado Mayorista, el gasto correspondiente es S/.15.

Proceso de Argumentación y Justificación.

La alumna sustenta inductivamente la conclusión de que conviene comprar en la bodega cuando es menos de 5 kilos y conviene comprar en el Mercado Mayorista cuando es más de 5 kilos.

Proceso de Análisis.

Janet compara la posición de las rectas antes y después del punto (5;15) y lo relaciona con la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro. Reconoce que cuando una recta está debajo de la otra, es más barato comprar en ese contexto.

6.4.6. Procesos Matemáticos activados por Ernesto

Proceso de Personalización.

El alumno se vale del análisis algebraico ($3x=2x+5$, $x=5$) para identificar el par ordenado que representa la intersección de las rectas.

Proceso de Algoritmización y Trabajo de Técnica.

Ernesto calcula los valores del par ordenado que representa la intersección de las rectas mediante el método de eliminación por igualación en un sistema de ecuaciones con dos variables.

Proceso de Significación.

Ernesto verifica en el gráfico de las rectas en un mismo plano cartesiano que el par ordenado $(5;15)$ corresponda a la intersección de las rectas pues es el punto donde el gasto en la bodega es el mismo que el gasto en el Mercado Mayorista al comprar 5 kg de papa.

Proceso de Argumentación y Justificación.

El alumno justifica mediante un proceso inductivo sobre la conveniencia de comprar en la bodega cuando es menos de 5 kilos y de comprar en el Mercado Mayorista cuando es más de 5 kilos.

6.4.7. Conflictos Semióticos presentados por Janet

Similar al bloque anterior, esta sección no requería de una mayor abstracción. La tarea consistía en identificar el lugar donde convenía comprar. Para ello, se requería que ella comparara e hiciera una revisión de los resultados que obtuvo anteriormente. Luego, su razonamiento fue conducido a que relacione la posición de las rectas con la conveniencia de comprar en lugar o en otro. En general, Janet realizó bien este bloque, aunque presentó problemas, pero muy ligeramente, con su vocabulario para argumentar sus respuestas.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISIS COMPARATIVO

7.1 Sistemas de Prácticas Matemáticas

Los sistemas de prácticas matemáticas que realizan la alumna invidente y el alumno vidente muestran que existen diferencias y similitudes en la forma en que adquieren los conocimientos. Janet requiere desarrollar sus destrezas potencializando su sistema háptico. Como se puede observar en las prácticas de la alumna, ella expresa o comunica más cuando realiza una actividad que implique una construcción o confección manual. Así lo ha demostrado cuando construía las rectas en el plano cartesiano. Teniendo en cuenta sus palabras: “En realidad, me he acostumbrado más a trabajar en el plano que me sale mucho mejor... Bueno, yo pienso que en el plano lo comprendo mejor.”, se deben elaborar recursos materiales que sean sencillos pero que se puedan explotar muchos significados con contenido matemático.

Al margen del nivel regular que tiene en lecto-escritura en sistema Braille y el nivel regular de su vocabulario, varias prácticas matemáticas de Janet son similares a la de Ernesto y, hay otras prácticas que difieren pero que la enriquecen mucho en su aprendizaje. Se ha observado que

- Ambos saben escuchar indicaciones.
- Ambos realizan una lectura silenciosa. Si bien a Janet se le pidió que hiciera una relectura en voz alta para afianzar su comprensión lectora, Ernesto lo sigue haciendo en forma silenciosa.
- Ambos construyen tablas de correspondencia. Janet lo hace en la máquina Perkins y Ernesto lo hace con lapicero. Janet justifica la construcción de sus tablas mediante la multiplicación del precio por la cantidad de kilos, en cambio, Ernesto elaboró las funciones que modelizan cada situación y las aplicó para construir las tablas.
- Ambos identificaron que existía una relación entre el peso en kilogramos y el gasto en soles. Ernesto lo identificó inmediatamente como una función lineal. En

cambio, Janet lo relacionó con su vida cotidiana y sus operaciones básicas de suma y multiplicación.

- Ambos asociaron con variables al peso en kilogramos y al gasto en soles, respetivamente. Infieren que estas variables se relacionan en las siguientes expresiones: “ $y = 3x$ ” (caso de la bodega) e “ $y = 2x+5$ ” (caso del Mercado Mayorista). La diferencia observada fue que Ernesto utilizó la notación de función, mientras que a Janet se le apoyó constantemente con un análisis inductivo.
- Ambos grafican rectas en el plano cartesiano. Ernesto lo hace con regla y lapicero, mientras que Janet lo hace con chinchas y pabilo (pita). La diferencia es que Ernesto dibuja también el plano cartesiano, mientras que a Janet se le debe elaborar el plano cartesiano en relieve. Otra diferencia es la manera como ubican los puntos que representan a cada par ordenado. Mientras Ernesto se apoya en los ejes y en su visión espacial cuando construye sus rectas, Janet lo hace mediante rastreo táctil, yendo de un punto a otro y mostrando el siguiente movimiento: avanza una unidad y sube 3 unidades (bodega) o 2 unidades (Mercado Mayorista), según sea el caso.
- Ambos identifican la relación unívoca entre las variables. A Janet se le apoya con el análisis inductivo mediante preguntas y se le pide que verifique en sus tablas de correspondencias esta relación unívoca. Ernesto también verifica los datos de sus tablas y se orienta de las preguntas de análisis inductivo que están en la Hoja Guía, pero agrega que la relación unívoca ocurre porque es una función lineal y su representación es una recta.
- Ambos relacionan la variación del gasto cuando varía en una unidad de kilogramo de papa con el coeficiente de “ x ” y con la inclinación de la recta. Janet analiza inductivamente que la variación en el gasto es constante cuando varía el peso en un kilogramo, evoca las expresiones de “ $y = 3x$ ” e “ $y = 2x+5$ ”, y las relaciona con la forma como ha construido sus rectas. Esto le permite afirmar que a mayor variación en el gasto la recta es más empinada. Ernesto, también, realiza el análisis inductivo que se ofrece en la Hoja Guía, compara en sus gráficas, y concluye que la variación en el gasto es constante. Esta variación lo relaciona con la pendiente de la recta y con su inclinación.

- Ambos relacionan la intersección de las rectas como el punto en el que comprar en la bodega o comprar en el Mercado Mayorista resultaba el mismo gasto para una determinada cantidad de kilogramos de papa. Lo singular fue que, al preguntarle a Janet sobre el valor en kilogramos de papa para el cual el gasto correspondiente es el mismo tanto para bodega como para el Mercado Mayorista, ella señalaba con su dedo índice la intersección de recta. Sin embargo, Ernesto comprueba la situación mediante la igualación de las dos funciones que representan a cada recta.
- Ambos reconocen la conveniencia de comprar en un lugar o en otro según la cantidad de papas que se compren. Janet realiza cálculos y comparaciones con valores que están antes y después del punto de intersección. No realiza ningún rastreo sobre el plano cartesiano, sólo apoya su dedo índice en la intersección y realiza los cálculos mentales correspondientes. Además, compara la posición de las rectas antes y después el punto de intersección e identifica que si una recta está por debajo de la otra, entonces conviene comprar en el caso que representa dicha recta. Ernesto compara valores antes y después del punto de intersección para afirmar dónde conviene comprar cuando es menos de 5 kg y más de 5 kg, respectivamente.

Tres diferencias notables que se han observado en este estudio, están referidas al lenguaje utilizado, la organización espacial al construir las rectas y, la forma de adquirir y profundizar los conocimientos:

- 1°. Ernesto utiliza un lenguaje más formal, con las notaciones simbólicas apropiadas y los conceptos que se pueden identificar del problema. Janet utiliza un lenguaje más coloquial relacionando los nuevos términos o conceptos que recibe. El proceso de asimilar los nuevos conocimientos es un poco más lento en ella pero eso no significa que no pueda lograr la institucionalización de los significados matemáticos.
- 2°. Ernesto construye las rectas en la forma clásica. Dibuja los ejes X e Y, y traslada los datos de sus tablas de correspondencia al plano cartesiano. Ubica los puntos verificando que este punto esté a la altura de la abscisa y la ordenada correspondientes. Es decir, su vista y su mano (en realidad, es con el lapicero) rastrean desde los ejes hacia el punto. Janet presenta otra

estrategia que es la de ubicarse en un punto y rastrear hacia la derecha en una unidad y subir 3 ó 2 unidades, según sea la situación que se representa. Ella no regresa a los ejes, sino que va de punto en punto. Esta es una estrategia que ella misma creó y que puede ser una puerta de entrada para formalizar el concepto de pendiente.

- 3°. Ernesto aprendió el tema de función lineal de la manera usual. El profesor de su colegio le brindó la definición formal, identificando en su notación simbólica los elementos de la pendiente y la ordenada. Además, definen la pendiente en lenguaje simbólico, previo análisis en un gráfico donde pueden visualizar que también se relación con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X. Luego, les dan ejercicios prácticos para que se ejercite en estas definiciones y gráficos de manera abstracta (no contextualizados), para después realizar algunos problemas contextualizados. En cambio, a Janet le es más fácil aprender cuando los conceptos están relacionados con su cotidianidad y experiencias cercanas. Es decir, se le debe enseñar partiendo de problemas contextualizados, llevándola de un lenguaje coloquial y razonamiento particular a un lenguaje más formal y a un pensamiento más avanzado.

Luego de revisar el sistema de prácticas matemáticas de la alumna invidente y del alumno vidente, se puede afirmar que Janet presenta significados personales que provienen de su cotidianidad que le permiten aproximarse a términos matemáticos y actividades matemáticas, pero que requieren más tiempo porque la construcción de conceptos e imágenes pasa por mecanismos cognitivos desarrollados a partir de la información que percibe y se canaliza por los sistemas sensoriales táctil y auditivo.

La alumna ha mostrado un sistema de prácticas globales observadas en las acciones y procedimientos que utilizaba en cada bloque de trabajo. Los significados personales declarados están presentes en el diálogo continuo que se desarrolló para conocer las argumentaciones que justificaban alguna proposición dada por ella. Pero estos significados, comparados con el de Ernesto, todavía están en proceso de llegar a ser significados personales logrados.

7.2 Configuración de objetos y Procesos matemáticos

Se analizan las dimensiones duales que presentan los objetos matemáticos, dimensiones propuestas por el marco teórico del EOS.

Personal – Institucional.

Las acciones que realiza la alumna invidente en su aprendizaje muestran una dimensión notablemente personal. Los procesos de personalización han estado presentes tanto en las sesiones previas como en la sesión final. Por ejemplo, la estrategia que utiliza para construir la recta sobre el plano cartesiano, el lenguaje dactilar que ella está mostrando nos dice, implícitamente, sobre la noción de pendiente. O, procesar cálculos e inferir según los resultados obtenidos para expresar que para cada valor del peso en kilogramos, le corresponde un único valor en el gasto. Desde un contexto dado, ella está mencionando la inyectividad de la función. En cambio, Ernesto tiene personalizado los conceptos de función lineal, pendiente, recta, vector; los cuales utiliza para justificar varias preguntas que se presentan en la Hoja Guía y que están dadas en un lenguaje natural.

Ostensivo – No ostensivo.

Como el EOS contempla que los objetos ostensivos también pueden estar implícitos en el discurso matemático, entonces, se puede decir que la alumna invidente hace ostensiva las variables (cuando asocia la variable “ x ” al peso en kilogramos y la variable “ y ” al gasto en soles), hace mención de operaciones aritméticas (adición y multiplicación), la noción funcional de pendiente cuando explica el patrón de movimientos que realiza para construir la recta, la noción alusiva a la inyectividad cuando analiza los valores que obtuvo en sus tablas de correspondencia y los puntos en las rectas. Todo esto mostrado en los diálogos que se han desarrollado en toda la investigación. También, el análisis de las situaciones que se proponen en la Hoja Guía hace que ella materialice tablas de correspondencia y representación gráfica sobre el plano cartesiano. A su vez, los objetos no ostensivos estarían dados por la definición formal de los conceptos de función, pendiente, inyectividad.

Con respecto a la faceta ostensiva de los objetos matemáticos mostrados por Ernesto, él sí utiliza la notación simbólica y define los conceptos de función, función lineal, recta y pendiente.

Expresión – Contenido.

Esta faceta es importante porque aquí entra en juego la relación semiótica entre objeto y sujeto, mediante el vínculo entre significante y significado unido a la posible interpretación del signo.

Janet muestra procesos de significación acompañado de los procesos de detección y reconocimiento cuando asocia el peso en kilos con la variable " x " y, el gasto en soles con la variable " y ". Otro momento es cuando infiere los modelos matemáticos " $y = 3x$ " e " $y = 2x+5$ " para las situaciones de la bodega y del Mercado Mayorista, respectivamente. Además, el punto de la intersección de las rectas representa para ella que comprar en la bodega tendría un gasto igual a la compra en el Mercado Mayorista. En forma contextualizada, Janet está igualando las dos expresiones algebraicas mencionadas.

Ernesto presenta un mayor manejo institucional de los signos, en expresión y en contenido. Muestra de ello, son las notaciones simbólicas que utiliza y las definiciones de conceptos matemáticos que le sirven para realizar sus justificaciones.

Extensivo – Intensivo.

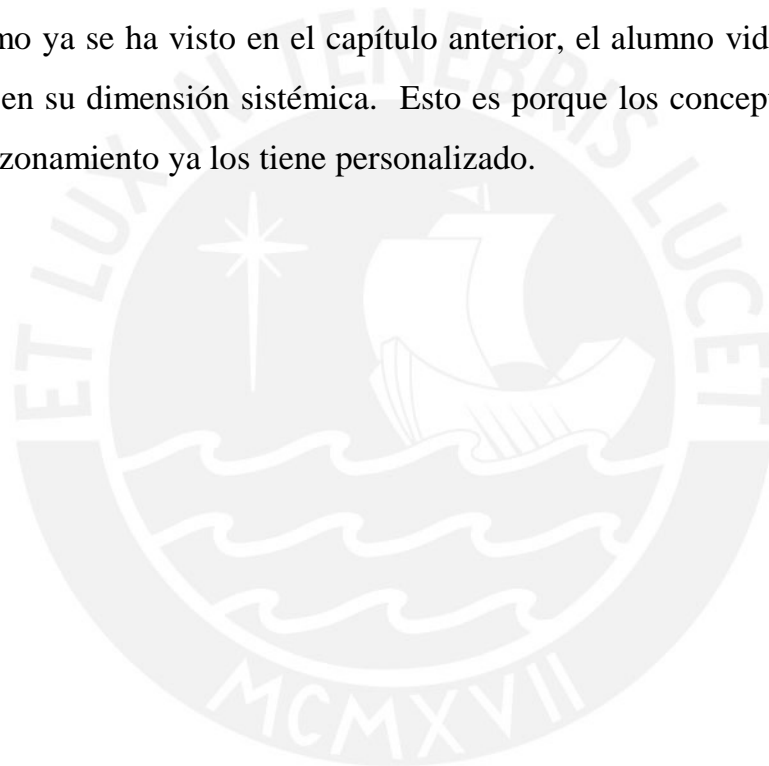
En la actividad matemática que realiza Janet, predomina la dimensión extensiva. Ella no utiliza elementos genéricos, es decir, los objetos que ha podido inferir están particularizados para el contexto que se le ha pedido analizar. Por ejemplo, los modelos matemáticos " $y = 3x$ " e " $y = 2x+5$ " están diseñados para la situación de la bodega y del Mercado Mayorista, respectivamente.

Ernesto, por su parte, no sólo particulariza al dar las expresiones algebraicas que representan a cada situación, sino que generaliza con la definición de función lineal y pendiente, y las relaciona con su interpretación gráfica al decir que una función lineal es una recta.

Unitario – sistémico.

Definitivamente, la alumna invidente se encuentra en la dimensión unitaria respecto a la definición y los elementos que atañen a la función lineal. Ella recién está descomponiendo todo un sistema, y de forma contextualizada, que comprende los conceptos de variable, de función, de función lineal, de pendiente, de inyectividad, y de la interpretación gráfica de dichos conceptos. Lo que se puede considerar como objetos sistémicos, porque le son conocidos y los utiliza sin necesidad de descomponerlos, son la adición y la multiplicación.

Como ya se ha visto en el capítulo anterior, el alumno vidente sí utiliza a los objetos en su dimensión sistémica. Esto es porque los conceptos que intervienen en su razonamiento ya los tiene personalizado.





CAPÍTULO 8 – CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES

La experiencia enriquecedora de esta investigación ha llevado a identificar algunos aspectos importantes que se deben considerar cuando se ejerce la docencia con estudiantes que presentan la discapacidad de la ceguera.

Ha sido importante analizar y comparar las dos entrevistas, previa y final, porque se descubren varios elementos que se deben tomar en cuenta. Algunos aspectos destacados por la alumna son:

- Antes de la investigación, ella entendía una operación matemática de forma mecánica pero no podía explicar qué estaba obteniendo. La podía realizar pero no sabía cómo justificar lo que operaba.
- Es importante manejar bien el sistema Braille, tanto en escritura como en lectura, y un buen manejo de materiales didácticos (máquina Perkins, ábaco, etc.).
- Valora que el docente sea claro en sus indicaciones y explique bien el significado de los conceptos, que utilice los nombres apropiados de los objetos matemáticos, que elabore material en relieve, y que domine el sistema Braille para lograr una mejor comunicación, sobre todo en Matemáticas.

En líneas generales, este trabajo es sólo la punta del iceberg que representa a una didáctica especial por descubrir, dirigida a alumnos con diversidad funcional, en este caso, alumnos con ceguera.

8.1 Conclusiones

En base a la investigación realizada, este estudio presenta las siguientes conclusiones:

- Se debe tomar en consideración las experiencias personales y realidades cercanas a la alumna invidente como el mejor marco de referencia para

relacionar los conocimientos previos con las nuevas informaciones que se le brinde. Esto contribuirá a organizar y ampliar sus significados personales y a lograr su posterior vinculación con significados institucionales.

- Partir de una situación contextualizada ha permitido que la noción de pendiente, en su aspecto funcional, la alumna la relacione con la variación constante que ocurre en el gasto total por cada aumento en un kilogramo de papa con precio conocido. Además, bajo una visión simbólica, ha relacionado esta variación como una cantidad constante y que se muestra en las expresiones matemáticas como el factor que multiplica a “ x ”. Asimismo, en el aspecto gráfico, esta relación entre la variación del gasto respecto a la variación del peso ha sido señalada, mediante el rastreo digital sobre el plano cartesiano, y argumentada por la alumna cuando construía las rectas que representaban al caso de la bodega (avanzaba una unidad a la derecha y subía 3 unidades) y al caso del Mercado Mayorista (avanzaba una unidad a la derecha y subía 2 unidades). También, bajo la visión gráfica, ha asociado la variación constante con la inclinación de la recta y afirma que “...mientras el valor crece... el valor aumenta...de la variación del gasto... la recta es más empinada.”. Resumiendo, la comprensión de la complejidad de la noción de pendiente es posible lograrla en la alumna invidente. Esta noción se relaciona con a) la pendiente como el cociente entre la variación de la variable dependiente y la independiente (significado funcional), b) la pendiente como el número que multiplica a “ x ” (significado algebraico) y, c) la pendiente como el número que determina la inclinación de la recta (significado geométrico). Se destaca que el camino seguido por la alumna invidente es distinto al que realiza las personas videntes (quienes comienzan con la idea de que la pendiente determina la inclinación de la recta). En el estudio realizado se ha considerado que se debe comenzar por el significado funcional de la pendiente.

- La noción de correspondencia unívoca ha sido desarrollada desde el contexto bajo dos aspectos, funcional y gráfica. De manera funcional, la alumna compara y analiza, mediante cálculos mentales, la posibilidad de que a una misma cantidad de kilogramos de papa comprados en un solo lugar, le cobren diferente cantidad en soles. Justifica que eso no puede suceder porque para cualquier kilogramo que compre siempre será multiplicado por S/.3 (caso de la bodega) o S/.2 (caso del Mercado Mayorista). En el aspecto gráfico, la alumna revisa sus tablas de correspondencia y verifica que a cada kilogramo de papa que se compre le corresponde un único valor de soles en el precio.
- Las nociones de “mayor que”, “menor que”, “más abajo” y “más arriba” utilizadas al comparar los dos casos (bodega y Mercado Mayorista) también tiene connotación funcional y gráfica. En su forma funcional, calcula y compara los gastos en que incurriría al comprar la misma cantidad de kilogramos de papa en ambos lugares. En una visión gráfica, mediante el rastreo táctil sobre el plano cartesiano, se ubica en el punto de intersección de las rectas y, desde allí, compara la posición de las rectas antes y después del punto de intersección. Se recuerda que esta intersección significaba para la alumna que comprar en la bodega o en el Mercado Mayorista era obtener el mismo gasto en soles, S/.15, para la compra de 5 kilogramos de papa.
- Es fundamental explorar la agudeza y la sensibilidad del sistema háptico para obtener información con un mayor significado. La configuración cognitiva de cada bloque propuesto en la Hoja Guía ha permitido identificar el rol importante de lo mencionado para descubrir el juego semiótico en cada acción, palabra y gesto que proporcionaba la alumna invidente en el proceso de instrucción. Con las sesiones previas, los recursos mediadores fueron seleccionados o diseñados para que permitan la interacción significativa entre alumno y objeto a conocer, con la finalidad de disminuir los problemas de coordinación de información que proceden desde los otros sentidos

(percepción). Por ejemplo, la construcción de las tablas de correspondencia y el plano cartesiano, ambos en relieve, fue de mucha utilidad para que logre fijar algunos conceptos intuitivos o contextualizados del significado de recta, de pendiente, de dependencia entre variables y de inyectividad. Se hace hincapié en que los materiales creados no han sido muy recargados para que la alumna no presente confusión al momento de producir sus imágenes mentales y minimizar errores al relacionar la información que se presenta en ese material elaborado.

- Se debe potenciar la inteligencia verbal y su capacidad de argumentación mediante el método inductivo-deductivo y tareas adecuadamente graduadas en dificultad, con material concreto, y reforzarlas con un diálogo continuo que paulatinamente lleve a conceptos o términos matemáticos nuevos. Este estímulo a la argumentación contribuye a que la alumna puede expresar el mundo interior que construye y relaciona con sus propias experiencias. Por ejemplo cuando asocia la variable “ x ” con el peso en kilogramos y a la variable “ y ” con el gasto en soles es en diálogo mediante preguntas inductivas y, apoyadas por la construcción de sus tablas de correspondencias y su correspondiente lectura.
- Es importante tener en cuenta que un alumno invidente maneja una información limitada mediante el tacto y requiere más tiempo para producir la imagen o concepto y asimilar dicha información. Recibir demasiada información en poco tiempo, puede generar un conflicto cognitivo y semiótico que se reflejará en cansancio y confusión al relacionar conceptos, y en consecuencia, en dificultades de aprendizaje.
- Para elaborar una propuesta didáctica que contribuya a que alumnos invidentes construyan y utilicen el concepto de función lineal es esencial tener como lineamiento transversal el diálogo continuo y la percepción tanto del lenguaje hablado y gestual como de las expresiones de las habilidades hápticas del alumno. Algunos lineamientos específicos son los siguientes:

- Explorar los conocimientos previos de los alumnos invidentes.
- Conocer la realidad cercana de los alumnos invidentes.
- Presentar problemas contextualizados, elaborados teniendo en cuenta las exploraciones anteriores.
- Elaborar e interpretar tablas y gráficos referidos a los problemas elaborados y establecer relaciones entre ambos registros.
- Generar nuevas situaciones problemáticas, establecer comparaciones entre ellas y hacer reinterpretaciones formales y contextualizadas.

Por todo lo expuesto, se destaca finalmente, que es posible diseñar una secuencia didáctica que permite a una alumna invidente descubrir el concepto de función lineal, sus representaciones algebraicas y gráficas, la relación entre ellas mediante la interpretación del coeficiente de la variable como pendiente de la recta (“empinamiento” de ella) y la solución de algunos problemas que involucran la interpretación del punto de intersección de dos rectas. Tal secuencia no es la que usualmente se sigue con alumnos videntes –pero es también admisible para tales casos– y parte de situaciones-problema contextualizadas, apoyándose en diálogos amplios, considerando el contexto social y las experiencias de la alumna. Las configuraciones cognitivas elaboradas, de las soluciones de las situaciones-problema propuestas a la alumna invidente son análogas a las configuraciones epistémicas adoptadas, referidas a soluciones de un alumno vidente de quinto año de secundaria.

8.2 Recomendaciones finales

Esta tesis contribuye a una nueva forma de presentar y construir el concepto de función lineal. El trabajo realizado con la alumna invidente no formaliza lo que es la función lineal ni los elementos que intervienen en su conceptualización, porque el objetivo primordial es cómo introducir de la manera más accesible dicho concepto, enfatizando la mediación semiótica desarrollada con la utilización de recursos tales como las tablas de correspondencia y el plano cartesiano, así como el uso del lenguaje (oral y escrito)

como un conjunto de signos y significados, y aprovechar los conocimientos previos tanto académicos como experienciales que poseía la alumna. Esta aproximación al concepto de función lineal ha sido posible por el énfasis dado en esta investigación a la observación continua de los signos indiciales y a la reflexión de las acciones que manifestaba la alumna invidente, desarrolladas en las sesiones previas, y que ayudó a construir o elaborar el contexto o escenario en que se realizarían las prácticas matemáticas.

Según lo explicado en el párrafo anterior, se brindan las siguientes recomendaciones:

- Ampliar o replicar este estudio en otros alumnos con ceguera, como estudios de caso, o con alumnos invidentes integrados a un colegio de educación básica regular.
- Extender el alcance de esta investigación profundizando en los otros tres niveles propuestos por el EOS (análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y metanormas, y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción)
- Evaluar el potencial de aprendizaje de un estudiante con ceguera y, de allí, utilizar o elaborar los recursos necesarios para lograr la comprensión de las nociones inherentes a la función lineal y su vinculación con la proporcionalidad directa y el porcentaje.

REFERENCIAS

- Aivar, P., Gómez, L., Maiche, A., Moreno, A. & Travaieso, D. (s.f.). *Sistemas sensoriales sensoriales y motores*. Universitat Oberta de Catalunya. Disponible en http://cv.uoc.edu/~grc0_002790_web5/PID_00153738/web/main/materias/PID_00153737-2.pdf
- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. (Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona).
- Castejón, J. & Navas, L. (Eds.) (2009) *Unas bases psicológicas de la educación especial*. España: Editorial Club Universitario. Disponible en http://books.google.com.pe/books/about/Unas_bases_psicol%C3%B3gicas_de_la_educaci%C3%B3n_especial.html?hl=es&id=1iYAQeyYr3sC&redir_esc=y
- Bigot, M. (s.f.) *Apuntes de Lingüística Antropológica*. Disponible en <http://rephip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/1367/3..HJELMSLEV.pdf?sequence=4>
- Ballesteros, S. (1999). Evaluación de las habilidades hápticas. *Integración*. 31,5-15. Disponible en <http://www.once.es/appdocumentos/once/prod/integracion%2031.pdf>
- Ballesteros, S.; Bardisa, D.; Reales, J. & Muñiz, J. (2003). La Batería de Habilidades Hápticas: un instrumento para evaluar la percepción y la memoria de niños ciegos y videntes a través de la modalidad háptica. *Integración*. 43, 7-20. Disponible en http://www.once.es/new/servicios-especializados-en-discapacidad-visual/publicaciones-sobre-discapacidad-visual/nueva-estructura-revista-integracion/copy_of_numeros-publicados/integracion-pdf/Integracion-43.pdf
- Consejo de Ministros. *Foro del Acuerdo Nacional, 2002*. Lima, Perú. Impreso en Empresa Peruana de Servicios Editoriales S.A. Segraf - Editora Perú. Disponible en <http://www.acuerdonacional.pe/publicaciones/politicasestado/castellano.pdf>
- Fernandes, S. (2004). *Uma análise vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual*. (Tesis de maestría, Pontificia Universidade Católica de São Paulo). Disponible en http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/FERNANDES_solange_hassan_ahmad.html

- Fernandes, S. (2008). *Das experiências sensoriais aos conhecimentos matemáticos: uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva*. (Tesis doctoral, Pontificia Universidade Católica de São Paulo). Disponible en http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/solange_hamad_fernandes.pdf
- Fernández del Campo, J. (1996, 19 de marzo). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. Disponible en http://sid.usal.es/idocs/F8/FDO1443/ense%C3%B1anza_matematicas_ciegos.pdf
- Firth, A. (2010). Etnometodología. *Discurso y Sociedad*, 4(3), 597-614. Artículo traducido por Teresa E. Cadavid G.
- Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicación a les derivades*. (Tesis doctoral) Universitat de Barcelona, España.
- Font, V.; Planas, N.; Godino, J. (2009). *Modelo para el análisis didáctico en Educación Matemática*. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf
- Font, V. (2012). Dificultades, errores y obstáculos. Documento interno del Máster de Formación del Profesorado de Matemáticas de la Universitat de Barcelona. España.
- Fridman, E. (2004). Plasticidad cerebral y aprendizaje en la neurorehabilitación. *Archivos de Neurología, Neurocirugía y Neuropsiquiatría*, 8(2). Revista oficial de la Fundación para la Lucha contra las Enfermedades Neurológicas de la Infancia – FLENI. Disponible en http://www.annyn.org.ar/dspace/bitstream/123456789/126/1/2004_8_2_4.pdf
- Garfinkel, H. (1967). *Studies in Ethnomethodology*. United States of América: Prentice-Hall, Inc.
- Godino, J. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237-284. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf
- Godino J.; Font, V. (2007) *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

- Godino, J.; Batanero, C. & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/558/1/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J.; Font, V.; Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (2011). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en Educación Matemática. Versión preliminar en español disponible en <http://www.ugr.es/~jgodino/>
- Healey, L. (2012). Hands that see, hands that speak: Investigating relationships between sensory activity, forms of communicating and mathematical cognition. *12th International Congress on Mathematical Education*. Regular lectures 1-8, 298-316. Seoul, Korea.
- Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Pearson Educación.
- Junta de Andalucía. (2010). *Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de Discapacidad Visual y Sordoceguera*. Disponible en http://www.juntadeandalucia.es/educacion/portal/com/bin/Contenidos/PSE/orientacionyatenciondiversidad/educacionespecial/ManualdeatencionalalumnadoNEAE/1278666001766_08.pdf
- Lima, E. L.; Pinto, P. C.; Wagner, E. & Morgado, A. C. (2000) La Matemática de la Enseñanza Media. *Serie La Enseñanza Matemática*. I, 81–87. Perú: Instituto de Matemática y Ciencias Afines – IMCA.
- Martínez, C. (2008, mayo). El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. *Miscelánea Matemática*, 46, 73-91. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- Martínez, Y. (2009, 20 de noviembre). El cerebro de los invidentes es diferente de las personas que ven. *Tendencias 21*. Disponible en http://www.tendencias21.net/El-cerebro-de-los-invidentes-es-diferente-al-de-las-personas-que-ven_a3853.html
- McGraw-Hill. (2012). Capítulo 7: La memoria humana. Disponible en <http://www.mcgraw-hill.es/bcv/guide/capitulo/8448180607.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. *Ley General de Educación 28044, 2003*. Lima, Perú. Disponible en <http://www.google.com.pe/url?sa=t&rct=j&q=ley%20general%20de%20educaci%C3%B3n%2028044&source=web&cd=2&ved=0CFAQFj>

AB&url=http%3A%2F%2Fwww.minedu.gob.pe%2Ffiles%2F253_201109141438.doc
&ei=Pzm8T-

b1MsiOgwfJmbyRDw&usg=AFQjCNFWPSpo2KLLk205ArHu6JBQpYFppEA

Ministerio de Educación del Perú. *Plan Nacional de Educación para todos 2005-2015. Hacia una educación de calidad con equidad.* Lima, Perú. Impreso en Gráfica MACOLE S.R.L. Disponible en <http://www.minedu.gob.pe/educacionparatodos/xtras/PlanNacionalEPT2005-2015Peru01.pdf>

Ministerio de Educación del Perú. *Inclusión educativa en el Perú, 2008.* Lima, Perú. Disponible en http://www.ibe.unesco.org/National_Reports/ICE_2008/peru_NR08_sp.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. *Guidelines for inclusion: Ensuring access to education for all, 2005.* Paris, Francia: Impreso en las oficinas de la UNESCO. Disponible en <http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001402/140224e.pdf>

Organización Mundial de la Salud. (2012). *Ceguera y discapacidad visual.* Nota descriptiva N° 282. Centro de Prensa de la OMS. Disponible en <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs282/es/index.html>

Pascual-Castroviejo, I. (1996). Plasticidad cerebral. *REV NEUROL*, 24(135), 1361-1366.

Piaget, J. (1985). *La toma de conciencia.* España: Ediciones MORATA. Disponible en http://books.google.com.pe/books?id=2D3Rzt7LeosC&dq=piaget&source=gbs_navlinks_s

Radatz, H. (1979, mayo). Error analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), pp. 163-172.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.

Sandoval, C. (1996). Investigación Cualitativa. *Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de Investigación Social*, Módulo 4. Disponible en http://desarrollo.ut.edu.co/tolima/hermesoft/portal/home_1/rec/arc_6667.pdf

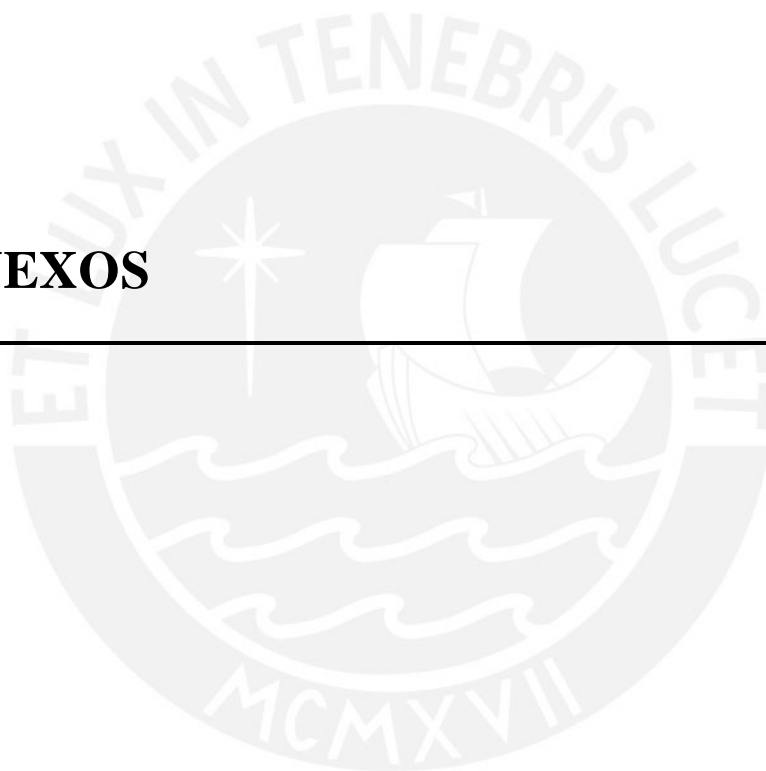
Soriano, C.; Guillazo, G.; Redolar, D.; Torras, M. & Vale, A. (2007). *Fundamentos de Neurociencia*. España: Editorial UOC (Universitat Oberta de Catalunya). Disponible en http://books.google.com.pe/books/about/Fundamentos_de_neurociencia.html?id=d8F3gASc8AIC&redir_esc=y

Sydsaeter, K.; Hammond, P. & Carvajal, a. (2012) *Matemáticas para el Análisis Económico*. España: Pearson Educación S.A.





ANEXOS





ANEXO 1: Cuestionarios Guías para las entrevistas



ENTREVISTA PREVIA

(Semi-estructurada)

01. ¿Quiénes conforman tu familia? ¿Con quiénes vives y con quiénes estás en estrecha relación?
02. ¿Realizas actividades de la vida diaria? ¿Realizas algún oficio manual? Explica.
03. ¿Qué actividades realizas sola y cuáles no? ¿Por qué? Investigar si es por la discapacidad visual o es por baja autoestima.
04. ¿Desde cuándo presentas la discapacidad de la ceguera?
05. ¿Cómo ha sido tu desarrollo escolar? ¿Cómo era tu rendimiento en matemáticas?
06. ¿Por qué decidiste retomar tus estudios escolares?
07. ¿Escribes y lees en sistema Braille con rapidez y eficiencia?
08. ¿Sabes construir gráficos tales como tablas de doble entrada, gráficos estadísticos y manejar planos cartesianos?
09. ¿Qué crees que necesitas para lograr un buen aprendizaje en matemáticas?
10. ¿Qué esperas lograr en tu vida?



ENTREVISTA FINAL

(Semi-estructurada)

- 01.** ¿Has recibido apoyo de tu familia durante el desarrollo de tu participación en esta investigación de tesis? ¿Qué comentarios y actitudes han expresado cuándo les mostrabas las actividades que realizabas en las sesiones de investigación?
- 02.** ¿Crees que es importante para que construyas tus conocimientos el buen manejo de las herramientas materiales tales como la máquina Perkins, la regleta y planos cartesianos? Explica.
- 03.** ¿Crees que es importante para que construyas tus conocimientos aprender a elaborar gráficos y cuadros para ordenar la información que recibas?
- 04.** ¿Crees que es importante leer y escribir con destreza en sistema Braille para tu aprendizaje en matemáticas?
- 05.** ¿Crees que es importante discutir los conocimientos en cada sesión de clase para lograr una mejor comprensión de los temas?
- 06.** ¿Crees que es importante relacionar los contenidos matemáticos con situaciones de tu cotidianeidad?
- 07.** ¿Cómo te has sentido durante la investigación?



ANEXO 2: Hoja Guía de la actividad final



SITUACIÓN: TOMANDO DECISIONES

En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/2 pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/5.

BLOQUE I: Análisis de la relación entre el peso y el gasto. Elaboración de los modelos matemáticos respectivos.

- 01.** Elabora la tabla de correspondencia Peso en kg – Gasto en soles para la bodega y para el Mercado Mayorista, respectivamente. Desarrolla esta tabla para 0 kg, 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg, 9 kg y 10 kg.
- 02.** Teniendo en cuenta la tabla de correspondencia de la bodega:
- Si vas a la bodega y no encuentras papas, gastas _____
 - Cuando compras 1 kg, el gasto es _____
 - Cuando compras 9 kg, el gasto es _____
 - Cuando compras 20 kg, gastas _____
 - Y cuando compras x kg de papa, tu gasto es _____
 - Considerando que has simbolizado al gasto con la variable y , ¿cómo relacionarías la cantidad x kilos de papa con el gasto y en soles?
- 03.** Teniendo en cuenta la tabla de correspondencia respecto al Mercado Mayorista:
- Si vas al Mercado y no encuentras papas, gastas _____
 - Cuando compras 1 kg, el gasto es _____
 - Cuando compras 9 kg, el gasto es _____
 - Cuando compras 20 kg, gastas _____
 - Y cuando compras x kg de papas, tu gasto es _____
 - Considerando que has simbolizado al gasto con la variable y , ¿cómo relacionarías la cantidad x kilos de papa con el gasto y en soles?

BLOQUE II: Análisis de la pendiente como relación entre la variación del gasto cuando varía el peso. Relación de la inclinación de la recta con el valor de la pendiente en el modelo matemático.

- 04.** Construye en el plano cartesiano las dos relaciones de correspondencia respectivas. Une los puntos con una línea e indica qué figuras geométricas has graficado.

- 05.** En el gráfico que representa la relación Peso en kg – Gasto en soles referente a la bodega, analiza lo siguiente:
- Por 1 kg de papa gastas _____. Por 2 kg de papa gastas _____. ¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 1 kg a 2 kg?
 - Por 4 kg de papa gastas _____. Por 5 kg de papa gastas _____. ¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 4 kg a 5 kg?
 - Por 9 kg de papa gastas _____. Por 10 kg de papa gastas _____. ¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 9 kg a 10 kg?
 - En los tres resultados anteriores, ¿la variación del gasto es la misma o son diferentes?
 - Examina en tu gráfico si la variación en el gasto se sigue manteniendo cuando escoges un número cualquiera de kilos de papa y luego consideras un kilo más. En tus palabras, generaliza lo que sucede con el gasto cuando comparas lo que gastas en una cantidad cualquiera de kilos de papa con lo que gastas en esa cantidad de kilos aumentada en uno.
- 06.** En el gráfico que representa la relación Peso en kg – Gasto en soles referente al Mercado Mayorista, analiza lo siguiente:
- Por 1 kg de papa gastas _____. Por 2 kg de papa gastas _____. ¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 1 kg a 2 kg?
 - Por 4 kg de papa gastas _____. Por 5 kg de papa gastas _____. ¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 4 kg a 5 kg?
 - Por 9 kg de papa gastas _____. Por 10 kg de papa gastas _____. ¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 9 kg a 10 kg?
 - En los tres resultados anteriores, ¿la variación del gasto es la misma o son diferentes?
 - Examina en tu gráfico si la variación en el gasto se sigue manteniendo cuando escoges un número cualquiera de kilos de papa y luego consideras un kilo más. En tus palabras, generaliza lo que sucede con el gasto cuando comparas lo que gastas en una cantidad cualquiera de kilos de papa con lo que gastas en esa cantidad de kilos aumentada en uno.
- 07.** Analiza en los gráficos que has elaborado y responde:
- ¿Cuál de las rectas es más “paradita” o más empinada?

 - ¿Cuál de las rectas es menos “paradita” o menos empinada?

 - Compara tus respuestas con las deducciones que elaboraste sobre la variación del gasto en las preguntas 6 y 7. ¿Cuál es la relación que existe entre la empinada que es una recta y la variación entre el gasto en una cantidad cualquiera de kilos de papa y el gasto en esa cantidad de kilos aumentada en uno?

BLOQUE III: Análisis de la relación unívoca entre variables.

08. Analiza en la recta que representa al modelo de la bodega.
- Considerando las condiciones de la situación dada, si compras 3 kg de papa, el gasto es de s/.9. ¿Habría la posibilidad de que al comprar 3 kg de papa el gasto resulte otro valor? ¿O es único?
 - Si compras 7 kg, el gasto asciende a S/.21. ¿Este gasto puede tener otro valor? ¿O es único?
 - ¿Sucederá lo mismo con el gasto en cualquier cantidad de kilos de papa? Entonces, podríamos decir que para cualquier número de kilos de papa que se compre, el gasto correspondiente siempre es _____.
 - Escoge un número cualquiera de kilos de papa en tu tablero de correspondencias de la bodega y explica tu respuesta a la pregunta anterior.
 - Escoge un número cualquiera de kilos de papa en tu gráfico que representa los gastos en la bodega y explica la respuesta que diste en la (c).

BLOQUE IV: Análisis de la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro.

09. Analiza en los gráficos: ¿Cuál es el número de kilos de papa para el cual el gasto, al comprarlos en la bodega, es el mismo que al comprarlos en el mercado mayorista?
10. Analiza qué sucede con el gasto cuando compras una cantidad de kilogramos menor al que has encontrado en la pregunta anterior.
- Si compras 2 kg de papa, el gasto en la bodega es de _____ y el gasto en el Mercado Mayorista es de _____.
 - Si compras 3 kg de papa, el gasto en la bodega es de _____ y el gasto en el Mercado Mayorista es de _____.
 - ¿Dónde te conviene comprar si compras menos de 5 kilos?
11. Analiza qué sucede con el gasto cuando compras una cantidad mayor de kilogramos de papas al que has encontrado en la pregunta 10.
- Si compras 6 kg de papa, el gasto en la bodega es de _____ y el gasto en el Mercado Mayorista es de _____.
 - Si compras 8 kg de papa, el gasto en la bodega es de _____ y el gasto en el Mercado Mayorista es de _____.
 - ¿Dónde te conviene comprar si compras más de 5 kilos?



**ANEXO 3: Aplicación de la Hoja Guía en
Janet (15 noviembre 2012)**



TRANSCRIPCIÓN DE LOS DIÁLOGOS

BLOQUE I: Análisis de la relación entre el peso y el gasto. Elaboración de los modelos matemáticos respectivos.

U1	P-I: <i>Ok, Janet. Vamos a terminar con estas actividades que hemos estado haciendo, ¿no?... eh... con esta última, ¿sí?... y vamos a ver cómo me respondes... cómo ha ido tu aprendizaje. (La alumna recibe la hoja donde está escrita la situación) Te voy a dar la situación escrita en Braille, ya?...</i>
U2	J: <i>Sí... (La alumna revisa lo escrito en la parte superior de la hoja y luego, la deja a un lado del escritorio para prestar atención a lo que le habla la profesora, pero inmediatamente sigue con su lectura táctil).</i>
U3	P-I: <i>...para que la leas. Las preguntas que te voy a hacer no te las voy a dar por escrito, te las voy a dar en forma oral, ¿sí?...</i>
U4	J: <i>Sí...</i>
U5	P-I: <i>Y me vas a responder en forma oral y lo que necesitemos escribir lo escribirás, pues, en Braille, ¿ya?</i>
U6	J: <i>Sí...</i>
U7	P-I: <i>Yo te voy a dar el papel necesario... un papel grueso... Muy bien, entonces, empezamos.</i>

La alumna empieza con la lectura táctil y silenciosa de la situación.

U8	J: <i>Señorita...</i>
U9	P-I: <i>¿Ahá?</i>
U10	J: <i>... en la bodega de mi... dice... de mi... de la cuadra de mi... ¿qué dice?... de mi cuadra... esta parte dice... pa... pa... ahh!!... papa...</i>
U11	P-I: <i>Ja, ja, ja...</i>
U12	J: <i>Ja, ja, ja, ah, ya entendí...</i>
U13	P-I: <i>¿Ya? ¿Sí?</i>
U14	J: <i>Sí.</i>
U15	P-I: <i>¿Está bien escrito o no?</i>
U16	J: <i>Sí, sí, está bien.</i>
U17	P-I: <i>Ya... sigue...</i>

La alumna sigue con su lectura táctil y en voz baja hasta terminarla.

U18	P-I: <i>Ya, a ver... ahora que ya lo leíste, ¿me lo puedes leer de corrido?</i>
-----	---

U19	J: <i>¿De corrido?, jeje... (...sonrisa nerviosa)</i>
U20	P-I: <i>Sí... Bueno, ya la leíste, entonces es más fácil, ¿no?</i>
U21	J: <i>Ajá! Ya... a ver, me dice (la alumna respira hondo)... En... en la... en la bodega de la... de la esquina de mi cuadra... de mi cuadra... cada... cada kilogramo de papa cuesta 3 soles... el... eso me dice... en el Mercado Mayorista, el... el cual se encuentra lejos de... de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta 2 soles... 2 soles... pero... pero debo gastar en pasaje de... de ida y vuelta la cantidad... la cantidad de 5 soles.</i>
U22	P-I: <i>Muy bien, Janet, muy bien... Lo que vamos a hacer como primer momento...</i>
U23	J: <i>Ajá...</i>
U24	P-I: <i>... como siempre lo hemos hecho... es hacer la tabla de correspondencia, ok?</i>
U25	J: <i>Sííí.... (...responde con alegría)</i>
U26	P-I: <i>Ya, muy bien...</i>

La profesora investigadora acomoda la videograbadora en un lugar y apaga el ventilador, mientras la alumna se acomoda en su sitio y se relaja.

U27	P-I: <i>Entonces te voy a dar una hoja y vas a armar (la alumna coge la hoja-situación y la pone al lado de la máquina Perkins)... pues ten esto a la mano (se le aproxima la hoja del problema)... la tabla de correspondencia que corresponde. Si tú te has dado cuenta, peso en Kg, ¿no?... </i>
U28	J: <i>Sí.</i>
U29	P-I: <i>y el otro es un gasto, ¿no?... en general...</i>
U30	J: <i>En soles.</i>
U31	P-I: <i>... gasto en soles... Entonces, mis dos tablas tienen que... ehh....perdón, sí, mi tabla tiene que relacionar peso en kg con...</i>
U32	J: <i>gasto en soles...</i>
U33	P-I: <i>...para dos situaciones, en verdad, ¿no? Se te ha presentado como una situación pero, en verdad, hay dos opciones.</i>
U34	J: <i>Sí.</i>
U35	P-I: <i>Entonces, ¿cuántos tableros vas a elaborar?</i>
U36	J: <i>Ehh... dos tableros.</i>
U37	P-I: <i>Uno para la...</i>
U38	J: <i>Uno para el peso en kg y gasto en soles...</i>
U39	P-I: <i>Pero, ¿eso es para quién, para qué situación?</i>
U40	J: <i>Para la situación 1.</i>
U41	P-I: <i>¿Cuál es la situación 1 para ti?</i>
U42	J: <i>De... la situación 1 es...</i>
U43	P-I: <i>¿Qué es la situación 1?</i>
U44	J: <i>Bueno la compra de la...</i>
U45	P-I: <i>¿En dónde?</i>

U46	J: <i>En su casa... en la cuadra de su casa.</i>
U47	P-I: <i>Esa es en la bodega, entonces.</i>
U48	J: <i>En la bodega de su casa.</i>
U49	P-I: <i>Y la otra situación sería...</i>
U50	J: <i>En el... bueno... la otra situación sería...</i>
U51	P-I: <i>¿Dónde? ¿En qué lugar?..</i>
U52	J: <i>la situación 2...en el Mercado Mayorista.</i>
U53	P-I: <i>En el Mercado Mayorista. O sea, son dos tableros, no?... que vas a elaborar.</i>
U54	J: <i>Sí.</i>
U55	P-I: <i>Vas a elaborarlo... ehh... de 0 kg, 1 kg, 2, 3, sucesivamente, hasta 10 kg, ok?</i>
U56	J: <i>Ah, ya.</i>
U57	P-I: <i>... para que tengas una mejor... este... un mejor alcance de las cantidades que vas a analizar, ¿ya?</i>
U58	J: <i>Ajá.</i>

La alumna elabora sus dos tablas en hojas bond de 120 g y se apoya utilizando la máquina Perkins y leyendo su hoja-situación para tal fin. La profesora-investigadora la apoya en lo necesario para la presentación de las tablas (espacios, columnas, título de cada tablero, título de cada columna, subrayado). Cada tablero la ha desarrollado en hoja separada y las ha construido en 15 minutos cada uno, aproximadamente. Sólo se ha filmado la elaboración del primer tablero completamente.

Diálogo al terminar el primer tablero:

U59	P-I: <i>Muy bien. A ver, cuéntame, cuándo es 0.... cuando es 0 kilos.... a ver, cuéntame ¿cómo vas?</i>
U60	J: <i>Cuando....</i>
U61	P-I: <i>... tu tablero... cuéntame qué cosa... cómo has...</i>
U62	J: <i>Ah. Para 0 kilo, 0 soles. Y Para 1 kilo, 3 soles. (En todo momento, la alumna responde sin leer su tablero, sus respuestas proviene del cálculo mental que realiza al multiplicar por 3 cada número de kilos)</i>
U63	P-I: <i>Ajá.</i>
U64	J: <i>Para 2, 6.</i>
U65	P-I: <i>Ya...</i>
U66	J: <i>Y para 3, 9... y así, sucesivamente...</i>
U67	P-I: <i>Ajá....</i>
U68	J: <i>Para 5 kg, 15...</i>
U69	P-I: <i>Ya...</i>

U70	J: <i>Es decir, que todo lo voy multiplicando... el 1 por el 3, el 2 por el 3.... lo que se repite es el 3.</i>
U71	P-I: <i>Ya, hija. Muy bien. Ahora te doy el otro papel para que hagas el otro tablero.</i>

Diálogo a la mitad de la elaboración del segundo tablero:

U72	P-I: <i>Muy bien. ¿Qué tal te va con tu segundo tablero, Janet?</i>
U73	J: <i>Muy bien.</i>
U74	P-I: <i>Y, ¿en qué número ya vas?</i>
U75	J: <i>En el 5... Y acabo de encontrar ... que en el día 5 para el tablero 1 que hice el de la bodega de mi casa... eh, cómo se llama... en 5 sol.... en 5, en el número 5 tengo... para el número 5 en....</i>
U76	P-I: <i>5 kilos.</i>
U77	J: <i>... en 5 kilos...</i>
U78	P-I: <i>Ajá...</i>
U79	J: <i>...tengo 15 en soles...</i>
U80	P-I: <i>Eso es en la bodega de tu casa.</i>
U81	J: <i>Sí.</i>
U82	P-I: <i>Ya. Y, ¿qué tiene que ver con tu segundo tablero?</i>
U83	J: <i>En este segundo tablero... este que estoy agarrando... el segundo... éste...</i>
U84	P-I: <i>Sí...sí...</i>
U85	J: <i>.... es lo mismo...</i>
U86	P-I: <i>Ah...</i>
U87	J: <i>Eh... y éste...</i>
U88	P-I: <i>Ese es en el Mercado Mayorista....</i>
U89	J: <i>.... en el Mercado mayorista...</i>
U90	P-I: <i>Ajá...</i>
U91	J: <i>... para 5 kilos tengo 15 en soles... (la alumna lo lee de su tablero semielaborado)</i>
U92	P-I: <i>Ah!! Mira, tú. Ya lo encontraste antes de hacerlo en el plano, no? Muy bien. ¿Ya? Eso es un buen gran dato... eso, después, lo tenemos que verificar en el plano, ¿ya? Perfecto...</i>

Diálogo al terminar el segundo tablero:

U93	P-I: <i>Ya estás cerrando tu segundo tablero, ¿no?...</i>
U94	J: <i>Sí.</i>
U95	P-I: <i>Ya, entonces, vamos a discutir un poquito esto que acabas de hacer, ¿sí?</i>
U96	J: <i>Ajá...</i>
U97	P-I: <i>Con tus dos tableros en mano... ¿está bien?</i>
U98	J: <i>Ajá...</i>
U99	P-I: <i>Y... a ver, pues... y dice... Teniendo en cuenta la tabla de</i>

	<i>correspondencia de la bodega.... yo voy a anotar también tus respuestas... Bien, veamos... Si vas a la bodega y no encuentras papas, gastas... ¿cuánto?</i>
U100	J: <i>0 soles.</i>
U101	P-I: <i>0 soles, ok. Y cuando compras 1 kilo, el gasto es... de...</i>
U102	J: <i>3 soles.</i>
U103	P-I: <i>Cuando compras 9 kilos, el gasto es...</i>
U104	J: <i>Mmmmm....27 soles.</i>
U105	P-I: <i>Y... cuando compras 20 kilos, gastas...</i>
U106	J: <i>Trein... ¿20 kilos?, je, je... (sonrisa nerviosa)</i>
U107	P-I: <i>Ajá...</i>
U108	J: <i>Se...senta...</i>
U109	P-I: <i>Mmmm, claro! Ya me lo dijiste al principio, ¿te acuerdas?... Habías encontrado un modelo... qué se estaba sosteniendo al final, ¿no?</i>
U110	P-I: <i>Y ¿si compras 10 kilos?</i>
U111	J: <i>300 soles.</i>
U112	P-I: <i>Ya... ahora sí... Y ¿si compras "x" kilos de papa? ¿"x" kilogramos de papa?, tu gasto es...</i>
U113	J: <i>Si yo compro "x" kilogramos de papa... mmmm....</i>

En este momento hubo una interrupción de la discusión porque sonó el megáfono de la institución. Se esperó a que terminaran de utilizarla.

U114	P-I: <i>Ya, ahora sí. Si compras "x" kilos de papa, tu gasto es...</i>
U115	J: <i>De "x" soles...</i>
U116	P-I: <i>¿De "x" soles?</i>
U117	J: <i>... "x" kilos...</i>
U118	P-I: <i>Cuando te dije 20 kilos y ya no lo tienes en el tablero, me dijiste 60... y cuando te dije 100, me dijiste 300... y si ahora te digo "x" kilos...</i>
U119	J: <i>.... "x" kilos...</i>
U120	P-I: <i>¿Cómo sacaste los 60 si no está en tu tablero? ¿Cómo sacaste los 300?</i>
U121	J: <i>Multiplcando...</i>
U122	P-I: <i>Si yo compro 1000 kilos...</i>
U123	J: <i>1000 kilos... 3000 soles...</i>
U124	P-I: <i>Voy a comprar... me voy y compro "x" kilos de papa en la bodega de tu casa... ¿cuánto te pago?</i>
U125	J: <i>"3x"...</i>
U126	P-I: <i>3, ¿qué?...</i>
U127	J: <i>"x"....</i>
U128	P-I: <i>"3x", pues... "3x", ¿no es cierto?</i>
U129	J: <i>Sí...</i>
U130	P-I: <i>Entonces, considerando que has simbolizado al gasto con la variable "y", ¿no es cierto?... supongamos... consideremos eso porque si a los</i>

	<i>kilos le estoy llamando “x”... al peso le estoy llamando “x”, el gasto va a ser “y”.</i>
U131	J: <i>Sí.</i>
U132	P-I: <i>¿Estamos de acuerdo? Entonces, ahora, sí... ¿Cómo relacionarías, lo que acabamos de hablar hace un momento, la cantidad “x” kilos de papa con el gasto “y” en soles?</i>
U133	J: <i>... “x” kilos de papas...</i>
U134	P-I: <i>... de papa... con el gasto “y” en soles.</i>
U135	P-I: <i>¿Cómo relaciono las dos variables? Lo que hemos llamado en un principio: ¿cuál es el modelo?... que lo poníamos en forma de ecuación....</i>
U136	J: <i>Ah, lo escribimos.....</i>

En este momento hay otra interrupción y proviene del timbre de cambio de hora.

U137	P-I: <i>Esto sólo es relacionar las dos variables... no interesa si son 10 kilos, 20 kilos... sólo estoy relacionando mi “y” con el “x”. Entonces, ¿cómo los relaciono los dos?</i>
U138	J: <i>Sería “y” igual... como aquí no se ve... no es necesario si hay 1 kilo, 2 kilos...</i>
U139	P-I: <i>No, se están tomando “x” kilos...</i>
U140	J: <i>... “y” igual “x” más 3.</i>
U141	P-I: <i>más 3?... o sea, yo estoy sumando kilos... y el 3, ¿qué cosa es, soles o kilos?</i>
U142	J: <i>Soles.</i>
U143	P-I: <i>O sea, yo estoy sumando kilos con soles.</i>
U144	J: <i>No.</i>
U145	P-I: <i>“y” es el gasto... O sea, si yo gasto 1 kilo, “y” va a ser 3 soles, ¿no es cierto?; si gasto 2 kilos, “y” va a ser 6 soles; si gasto “x” kilos, ¿“y” qué va a ser?</i>
U146	J: <i>Si gasto “x” kilos, “y” va a ser... 3...</i>
U147	P-I: <i>3, ¿qué?</i>
U148	J: <i>“3y”...</i>
U149	P-I: <i>O sea, “y” es igual a “3y”...</i>
U150	J: <i>No... “y” igual...</i>
U151	P-I: <i>¿Por qué te estás confundiendo, Janet? ¿O estás nerviosa?</i>
U152	J: <i>Eso... (sonrisa nerviosa).</i>
U153	P-I: <i>No, no... Tú trabaja normal, hija, tú trabaja normal... no... olvídete... Ya sacaste que si compras “x” kilos, ¿cuánto gastas?</i>
U154	J: <i>“3x”.</i>
U155	P-I: <i>Ya pues. Entonces, ¿cuánto vale “y”?</i>
U156	J: <i>“3x”.</i>
U157	P-I: <i>Ah, y eso ¿no has podido decirlo? Si ese es el gasto, ¿o no?</i>
U158	J: <i>Je, je...</i>

U159	P-I: <i>¿Cómo relaciono las dos variables? Con la fórmula, ¿no?</i>
U160	J: <i>Sí.</i>
U161	P-I: <i>¿Cuál fórmula? “y” igual...</i>
U162	J: <i>“3x”.</i>
U163	P-I: <i>“3x”, pues... ¿Por qué te mareaste?</i>
U164	J: <i>(Pensativa)</i>
U165	P-I: <i>¿Ahh? ¿O no te convence eso?</i>
U166	J: <i>No, sí, ja, ja...</i>
U167	P-I: <i>Ahora sí te convence, ja, ja, ja, sí te convence...</i>
U168	J: <i>Sí.</i>
U169	P-I: <i>Porque hemos dicho que cada kilo cuesta 3 soles, ¿sí o no?</i>
U170	J: <i>Sí.</i>
U171	P-I: <i>Entonces ese precio de 3 soles... ¿a quién afecta ese precio?</i>
U172	J: <i>Al “x”.</i>
U173	P-I: <i>Pues allí estaba. Vámonos al segundo tablero que es el del Mercado Mayorista y vamos a analizar de la misma manera. Si vas al Mercado y no encuentras papas o las papas están malogradas, qué se yo... al final no las compras, ¿cuánto gastas?</i>
U174	J: <i>5.</i>
U175	P-I: <i>5 soles. Y si compras 1 kilo, tu gasto es...</i>
U176	J: <i>De 7 soles.</i>
U177	P-I: <i>Y si compras 9 kilos...</i>
U178	J: <i>Si yo compro 9 kilos, mi gasto es de 23.</i>
U179	P-I: <i>¿Qué estás haciendo hasta allí? ¿Cómo sacas esos datos?</i>
U180	J: <i>Bueno, multiplico 2...</i>
U181	P-I: <i>Por...</i>
U182	J: <i>Por 9...</i>
U183	P-I: <i>O sea, el número de kilos, ¿no?</i>
U184	J: <i>Sí.</i>
U185	P-I: <i>y, luego, le haces...</i>
U186	J: <i>Y, después, sumo el 5.</i>
U187	P-I: <i>Ya, perfecto. Entonces, si yo compro 20 kilos, ¿cuánto gastaré?</i>
U188	J: <i>Mmm... 45...</i>
U189	P-I: <i>Ok... Ahora sí... Y si compro “x” kilos...</i>
U190	J: <i>Ay, je, je... Si compro “x” kilos...</i>
U191	P-I: <i>Tú lo estás diciendo... número de kilos... tengo que hacerle esto y, luego, le agrego esto...</i>
U192	J: <i>Sí.</i>
U193	P-I: <i>Si compro “x” kilos, ¿cuál va a ser el gasto? ¿En función a “x”, no?</i>
U194	J: <i>Si compro “x” kilos...</i>
U195	P-I: <i>Ajá... ¿Qué debo hacer? ¿Qué operaciones debo hacer con los kilos?</i>
U196	J: <i>Multiplicarlos...</i>
U197	P-I: <i>¿Cuánto? ¿Por cuánto?</i>
U198	J: <i>Por 5.</i>

U199	P-I: <i>¿Por 5? ¿5 soles cuesta el kilo de papa?</i>
U200	J: <i>No. Por 2.</i>
U201	P-I: <i>Por 2.</i>
U202	J: <i>Por 2.</i>
U203	P-I: <i>Entonces, ¿hasta allí qué tengo?</i>
U204	J: <i>Tengo "2x".</i>
U205	P-I: <i>Y ¿qué más falta?, o ¿ya no le falta?</i>
U206	J: <i>No. Sumarlo.</i>
U207	P-I: <i>¿Qué le sumo?</i>
U208	J: <i>5.</i>
U209	P-I: <i>Entonces, sería... en total...</i>
U210	J: <i>"y" igual "2x más 5".</i>
U211	P-I: <i>Ah, ya me diste la respuesta, ja, ja, ja.</i>
U212	J: <i>Ja, ja, ja...</i>
U213	P-I: <i>Muy bien... ¿está bien?</i>
U214	J: <i>Sí.</i>
U215	P-I: <i>"y" igual "2x más 5"... Entonces, hasta aquí hemos hecho el análisis de la relación entre peso y gasto y, de la elaboración, pues, de estas formulitas que has sacado que tú ya sabes que son modelos, ¿no?</i>
U216	J: <i>Sí...</i>
U217	P-I: <i>... modelos de las situaciones.</i>

BLOQUE II: Análisis de la pendiente como relación entre la variación del gasto cuando varía el peso. Relación de la inclinación de la recta con el valor de la pendiente en el modelo matemático.

U218	P-I: <i>Ok. Entonces, vamos a sacar la máquina (Perkins)... ya no la necesitamos... y ya, recuerdas qué es cada fórmula... cada situación está modelada por una fórmula que tú has encontrado, ¿estamos de acuerdo?</i>
U219	J: <i>Sí.</i>
U220	P-I: <i>Entonces, no te olvides cómo son las fórmulas. (Se le aproxima el plano cartesiano y la alumna lo palpa).</i>
U221	J: <i>Ajá.</i>
U222	P-I: <i>... Vamos a desarrollar el segundo bloque que es construir en el plano cartesiano, ¿sí?, con las dos relaciones de correspondencia que has encontrado: la relación en la bodega...</i>
U223	J: <i>... y en la...</i>
U224	P-I: <i>... y la relación de correspondencia en el Mercado Mayorista, ¿ok?</i>
U225	J: <i>Sí.</i>
U226	P-I: <i>Entonces, te voy a dar... acá están los chinchos. Por este otro lado, te voy a dar las pitas para que, después, me grafiques las rectas</i>

	<i>correspondientes.</i>
U227	J: <i>Sí...</i>
U228	P-I: <i>Entonces, empezamos... Vamos primero con el de la bodega.</i>

La alumna construye la gráfica que representa la situación de la bodega, tomando los datos que están en su tablero. A cada par de valores relacionados lo ubica en el plano cartesiano y lo señala con un chinche. La profesora-investigadora sólo la apoyará en algunos detalles para la mejor presentación de sus gráficas.

- 1°. Identifica el punto (0; 0) y lo ubica en el plano.
- 2°. Para el punto (1; 3): con su dedo índice derecho, rastrea el eje X desde 0 y avanza hasta 1 y, de allí, con el mismo dedo, rastrea hacia arriba subiendo 3 unidades. El punto es señalado con un chinche. Se le pide a la alumna que no ajuste demasiado el chinche, porque luego deberá pasar la pita por ellos.
- 3°. Para el punto (2; 6): partiendo del punto (1; 3), realiza el mismo movimiento anterior. Con su dedo índice derecho rastrea avanzando una unidad hacia la derecha y, luego, sube 3 unidades. Allí coloca el tercer chinche.
- 4°. Para el punto (3; 9), lo ubica siguiendo la misma rutina anterior. A raíz de esta observación, se realiza el siguiente diálogo:

U229	P-I: <i>Tú te guías del primer punto (punto anterior al que va a ubicar). Ya no bajas hasta el eje X, ¿no?</i>
U230	J: <i>No.</i>
U231	P-I: <i>Te guías desde el mismo punto y haces... haces un solo movimiento... aumentas uno (a la derecha), ¿no?...?</i>
U232	J: <i>Sí...</i>
U233	P-I: <i>Y subes ¿cuánto?</i>
U234	J: <i>Tres.</i>
U235	P-I: <i>Muy bien. Eso también lo hemos estudiado, ¿no? Ya después vamos a hablar de eso, ¿ya?</i>
U236	J: <i>Ya...</i>
U237	P-I: <i>Muy bien... Mira, ¡qué interesante!... Claro, así no te pierdes, ¿no?</i>
U238	J: <i>Sí... Es que cuando bajaba a...</i>
U239	P-I: <i>... cuando bajabas hasta el eje X...</i>
U240	J: <i>... cuando bajaba hasta el eje X... este... me perdía...</i>
U241	P-I: <i>Te perdías porque tenías que contar mucho, ¿no?...?</i>
U242	J: <i>Sí.</i>

U243	P-I: <i>Claro... Entonces, era más fácil ir de un punto a otro punto... ok.</i>
U244	J: <i>Es la misma cantidad que estoy aumentando lo que hice en el tablero... solamente aumentando tres...</i>
U245	P-I: <i>Ah, ok, ¿el precio?</i>
U246	J: <i>Sí</i>
U247	P-I: <i>Ajá... Porque estás cambiando el valor en las “x”.</i>
U248	J: <i>Sí...</i>
U249	P-I: <i>Ya... y eso que tú mueves... tres... ¿es el precio, entonces?</i>
U250	J: <i>Sí. El precio que multiplica al valor de “x”.</i>
U251	P-I: <i>Muy bien. O sea, que en tu formulita también aparece... ese movimiento de tres...</i>
U252	J: <i>Sí.</i>
U253	P-I: <i>Por cada un “x, ¿no?</i>
U254	J: <i>Sí.</i>
U255	P-I: <i>Ah, ya, ok.</i>

La alumna termina de ubicar los puntos restantes siguiendo el mismo patrón: ubica el punto anterior y, desde allí, avanza una unidad hacia la derecha y sube tres unidades.

La profesora-investigadora sigue supervisando que la alumna termine de ubicar todos los puntos y, después, que una todos los puntos con la pita. Cuando la alumna finaliza con el gráfico que representa a la situación de la bodega, empieza a construir el gráfico respecto a la situación del Mercado Mayorista. Ubica el punto (0; 5) en el eje Y. Coloca su dedo índice en el origen de coordenadas y, de allí, rastrea 5 unidades hacia arriba. Luego, para los demás puntos, los ubica con el siguiente patrón: desde un punto referencial y con el dedo índice, avanza una unidad hacia la derecha y, luego, sube dos unidades hasta llegar al siguiente punto.

U256	P-I: <i>Cada vez lo haces más rápido, ¿no?</i>
U257	J: <i>Sí...</i>
U258	P-I: <i>Tú misma has aprendido tus propias estrategias para construir tus gráficos...</i>
U259	J: <i>En realidad, me he acostumbrado más trabajar en el plano que me sale mucho mejor... Bueno, yo pienso que en el plano lo comprendo mejor.</i>
U260	P-I: <i>Sí, ¿no?</i>
U261	J: <i>Sí...</i>
U262	P-I: <i>¿Por qué, ah?</i>
U263	J: <i>No sé...</i>

U264	P-I: <i>Te reduce toda la situación...</i>
U265	J: <i>Sí.</i>
U266	P-I: <i>¿no? Es un buen representante de toda la situación que estás analizando...</i>
U267	J: <i>Sí...</i>
U268	P-I: <i>Allí encuentras varias cosas, varios detalles...</i>
U269	J: <i>Sí... también en...</i>
U270	P-I: <i>... en el tablero...</i>
U271	J: <i>Pero... este... en el tablero a veces suelo enredarme por los números. En cambio, aquí yo sólo sé que allá solamente hay un valor y cuando se aumenta cada valor de "x".</i>
U272	P-I: <i>Mmm... Claro... ya te entendí... Claro, cuando implica un poco de cálculos donde te... como te confundiste la primera vez, ¿no?... cuando te cambié las cantidades...</i>
U273	J: <i>Sí.</i>
U274	P-I: <i>Ya...</i>

La alumna sigue trabajando sola y al llegar al punto (5; 15), ella inicia el diálogo:

U275	J: <i>Ajá. Aquí es...</i>
U276	P-I: <i>Allí es, ¿no?</i>
U277	J: <i>Sí... Yo decía porqué no llego...Es que esto era 0 días (indicando con su dedo los puntos que ya ha colocado desde 0 días)... Y en el día 5 que es acá... (señala con su dedo el punto (5; 15))</i>
U278	P-I: <i>Días... no estamos en días... Estamos en kilos... ja, ja...</i>
U279	J: <i>Diré en el que... cómo se llama... en el kilo...</i>
U280	P-I: <i>... de 5 kilos...</i>
U281	J: <i>...de 5 kilos.</i>
U282	P-I: <i>O sea, confirma tu tablero...</i>
U283	J: <i>Sí...</i>

La alumna continúa ubicando los puntos. Al terminar de colocar el último punto, comenta sin dejar de rastrear los puntos:

U284	J: <i>Y aquí terminó el... (ininteligible)</i>
U285	P-I: <i>Ajá...</i>
U286	J: <i>Bueno, aquí se ve cuál de los dos valores...</i>
U287	P-I: <i>... cuál de las dos situaciones... Ya aquí hay que analizar, ¿no?, en qué momento conviene y en qué momento, no.</i>
U288	J: <i>Sí...</i>
U289	P-I: <i>... en qué momento conviene y en qué momento, no.</i>
U290	J: <i>Ya... Vamos a seguir la secuencia...</i>

La alumna termina de unir con la pita todos los puntos que pertenecen a la situación del Mercado Mayorista.

U291	P-I: <i>Muy bien... ahora, ya usando el tabl... perdón el plano cartesiano donde están tus dos gráficos... vamos a analizar lo mismo, ¿no?, como analizamos en el tablero, ¿sí?</i>
U292	J: <i>Sí...</i>
U293	P-I: <i>Por 1 kilo... vámonos al caso de la bodega, ¿sí?... mira “bodega” estoy diciendo... ¿Cuál es la de la bodega?</i>
U294	J: <i>Ésta... (la alumna indica con su dedo la recta referente a la de la bodega)</i>
U295	P-I: <i>Ya... esa... ¿no es cierto?</i>
U296	J: <i>Sí...</i>
U297	P-I: <i>Ya... Por 1 kilo de papas, ¿cuánto gastas?</i>
U298	J: <i>¿Por 1 kilo de papa? 3.</i>
U299	P-I: <i>3, igual, ¿no? ¿Por 2 kilos?</i>
U300	J: <i>6.</i>
U301	P-I: <i>6, ¿no? ¿Aumenta o disminuye el gasto?</i>
U302	J: <i>¿El gasto en soles?</i>
U303	P-I: <i>Sí, claro, en soles...</i>
U304	J: <i>Sí.</i>
U305	P-I: <i>Sí, aumenta, ¿no?..</i>
U306	J: <i>Sí, aumenta.</i>
U307	P-I: <i>¿En cuánto varía ese gasto al cambiar de 1 kilo a 2 kilos?</i>
U308	J: <i>De 1 a 2 kilos varía en 3. (No utiliza el gráfico para dar esta respuesta.)</i>
U309	P-I: <i>En 3 soles, ¿no es cierto?</i>
U310	J: <i>Sí.</i>
U311	P-I: <i>Ya, ok. Ahora, si por... nos vamos por 4 kilos de papa... ¿Cuánto gastas?</i>
U312	J: <i>En 4 kilos de papa... estaría gastando... mmm... ay...</i>
U313	P-I: <i>Sí. En tu gráfico, nomás. Lleva tu dedito al eje Y, y fíjate cuánto se gasta.</i>

La alumna toca los puntos y va al eje Y, pero regresa de nuevo a los puntos.

U314	J: <i>En 4 kilos, me dice, ¿no?</i>
U315	P-I: <i>Ajá, ¿cuánto gastas?</i>
U316	J: <i>12. (ella responde luego calcular, en voz baja, el gasto en cada punto hasta llegar a los 4 kilos)</i>
U317	P-I: <i>12. ¿Y por 5 kilos?</i>
U318	J: <i>Ah, por 5 kilos, 15.</i>
U319	P-I: <i>¿Aumenta o disminuye el gasto?</i>
U320	J: <i>Aumenta.</i>
U321	P-I: <i>¿En cuánto?</i>

U322	J: <i>En 3.</i>
U323	P-I: <i>Al cambiar de 4 kilos a 5 kilos, ¿no?</i>
U324	J: <i>Ajá.</i>
U325	P-I: <i>Ya, similar al anterior, ¿no?</i>
U326	J: <i>Ajá.</i>
U327	P-I: <i>¿Y si voy de 9 kilos?... En 9 kilos, ¿cuánto gasto?</i>
U328	J: <i>¿En 9 kilos?, 27.</i>
U329	P-I: <i>¿Y en 10?</i>
U330	J: <i>Y en 10 kilos, 30.</i>
U331	P-I: <i>Igual aumenta, ¿no?</i>
U332	J: <i>Sí.</i>
U333	P-I: <i>¿En cuánto?</i>
U334	J: <i>En 3.</i>
U335	P-I: <i>En 3 kilos... en los dos...</i>
U336	J: <i>Bueno, aumenta multiplicado. Porque siempre... bueno yo lo estoy multiplicando 3 por la cantidad.</i>
U337	P-I: <i>Ah, por la cantidad de kilos, porque ese es el análisis que hemos hecho.</i>
U338	J: <i>Sí.</i>
U339	P-I: <i>Muy bien. Bueno, en los tres resultados que hemos analizado hace un momentito, ¿no?, al pasar de 1 kilo a 2 kilos... ¿cuánto varía el gasto?; pasar de 4 kilos a 5 kilos, ¿cuánto varía el gasto?, ¿ok?; pasar de 9 a 10 kilos, ¿cuánto varía el gasto?... Te pregunto, ¿la variación es la misma o ha salido un resultado diferente? La variación del gasto, ah! En los tres casos, ¿la variación es la misma? O sea, ¿aumenta?, en pocas palabras, ¿aumenta siempre?</i>
U340	J: <i>Sí.</i>
U341	P-I: <i>¿Y aumenta en cuánto?</i>
U342	J: <i>En la mis... en 3.</i>
U343	P-I: <i>En 3... En los tres casos, ¿no es cierto?</i>
U344	J: <i>Sí.</i>
U345	P-I: <i>Entonces, es la misma, ¿o no?</i>
U346	J: <i>Sí.</i>
U347	P-I: <i>Entonces, la variación del gasto es la misma. Exactamente, ya... Muy bien... ¿Y siempre va a suceder eso? Por ejemplo, examina en tu gráfico. Si esta variación del gasto... O sea, Siempre que yo vaya de una cantidad de kilo cualquiera y le agrego un kilo más, ¿no?, ¿esa variación en el gasto se mantiene? O sea, ¿siempre voy a tener de tres en tres? ¿Tú qué dices?</i>
U348	J: <i>Sí.</i>
U349	P-I: <i>Sí, ¿no?</i>
U350	J: <i>Sí.</i>
U351	P-I: <i>Incluso... sí, porque... incluso tú lo has armado de esa manera... ¿o no?</i>
U352	J: <i>Sí. De tres en tres.</i>
U353	P-I: <i>De tres en tres... tú ya no bajabas al eje X... Tú de frente ibas desde el punto donde estabas, ¿no?...</i>

U354	J: <i>Sí.</i>
U355	P-I: <i>... te ibas al otro kilo, ¿sí o no?...</i>
U356	J: <i>Sí.</i>
U357	P-I: <i>... ¿y cómo hacías?... con tu dedito, ¿qué?...</i>
U358	J: <i>Avanzo...</i>
U359	P-I: <i>...avanzabas hacia...</i>
U360	J: <i>...hacia...ammm...</i>
U361	P-I: <i>Primero, ¿cómo haces?... Avanzabas a la derecha, ¿no?...</i>
U362	J: <i>Sí.</i>
U363	P-I: <i>¿Cuánto?</i>
U364	J: <i>Uno.</i>
U365	P-I: <i>Uno porque le estás aumentando un kilo.</i>
U366	J: <i>Sí.</i>
U367	P-I: <i>¿Y, luego, qué hacías?</i>
U368	J: <i>Subo tres...</i>
U369	P-I: <i>...tres...</i>
U370	J: <i>...tres...este...en “y”.</i>
U371	P-I: <i>En “y”, ¿no es cierto?</i>
U372	J: <i>Sí.</i>
U373	P-I: <i>Muy bien. Entonces, está sucediendo esto. ¿Estamos de acuerdo?</i>
U374	J: <i>Ajá.</i>
U375	P-I: <i>Ya está. Entonces, estamos... ahhh.... muy bien. Y en el gráfico del Mercado Mayorista, ¿qué sucede? Vámonos... olvídate un poco de la bodega..., vámonos al del Mercado Mayorista... igual, ¿no?</i>

La alumna inmediatamente lleva sus manos al plano cartesiano e identifica la recta que representa a la situación del Mercado Mayorista. Ubica su mano derecha en el punto (0; 5).

U376	P-I: <i>Por 1 kilo de papa, ¿cuánto estás gastando?</i>
U377	J: <i>Por 2 kilos de papa...</i>
U378	P-I: <i>No, por 1 kilo...</i>
U379	J: <i>Ahhh...</i>
U380	P-I: <i>...primero...</i>
U381	J: <i>2 soles.</i>
U382	P-I: <i>Por 1 kilo gasto 2 soles... ahhh... sí, gasto 2 soles... ajá... pero, ¿cuál es el gasto... gasto? Yo digo gastas...</i>
U383	J: <i>¡Ah, ya! En el gasto total... 7 soles.</i>
U384	P-I: <i>7 soles, ¿no? Por 2 kilos, ¿tu gasto...?</i>
U385	J: <i>Por 2 kilos, el gasto sería en 9 soles.</i>
U386	P-I: <i>... con todo incluido, ¿no?</i>
U387	J: <i>Sí.</i>
U388	P-I: <i>¿Aumenta?</i>

U389	J: <i>Sí.</i>
U390	P-I: <i>¿Y en cuánto?</i>
U391	J: <i>En 2.</i>
U392	P-I: <i>En 2, ¿no?</i>
U393	J: <i>Sí.</i>
U394	P-I: <i>Cuando yo voy de 1 kilo a 2 kilos, ¿ok?</i>
U395	J: <i>Sí.</i>
U396	P-I: <i>Igual. Si estoy en 4 kilos de papa, ¿cuánto he gastado?</i>
U397	J: <i>Mmmm... a ver... 13 soles.</i>
U398	P-I: <i>13 soles.</i>
U399	J: <i>Sí.</i>
U400	P-I: <i>¿Y si son 5 kilos?</i>
U401	J: <i>En 5 kilos de papa... este...15.</i>
U402	P-I: <i>15 soles. Ya. ¿Y si son 9 kilos?</i>
U403	J: <i>Y si son 9 kilos...estaríamos gastando 23.</i>
U404	P-I: <i>¿Y si son 10 kilos?</i>
U405	J: <i>Y si son 10 kilos... estaríamos gastando... ¿10 kilos, no?</i>
U406	P-I: <i>Ajá.</i>
U407	J: <i>Mmm... 25.</i>
U408	P-I: <i>Ya está. En el caso de 4 a 5 kilos, ¿aumenta o disminuye el gasto?</i>
U409	J: <i>¿De 4 a 5?</i>
U410	P-I: <i>Ajá... ¿el gasto aumenta?</i>
U411	J: <i>Aumenta.</i>
U412	P-I: <i>... aumenta, ¿no? ¿En cuánto?</i>
U413	J: <i>En 2.</i>
U414	P-I: <i>En 2, también, ¿no?</i>
U415	J: <i>Sí.</i>
U416	P-I: <i>¿Y en el de 9 a 10? ¿Qué dices?</i>
U417	J: <i>De 9 a 10 también aumenta.</i>
U418	P-I: <i>¿En cuánto?</i>
U419	J: <i>En 2.</i>
U420	P-I: <i>Ya. Entonces, la variación del gasto, ¿es la misma o es diferente?</i>
U421	J: <i>Es la misma.</i>
U422	P-I: <i>¿Es la misma, no?</i>
U423	J: <i>Sí.</i>
U424	P-I: <i>Es un aumento de 2 soles. ¿Estamos de acuerdo?</i>
U425	J: <i>Sí.</i>
U426	P-I: <i>Ya. Entonces, vamos a ver... este... hay que examinar en el gráfico, otra vez, si esta variación en el gasto se mantiene, ¿no? O sea, tú toma cualquier kilo, cualquier valor ¿está bien?...</i>
U427	J: <i>Ajá.</i>
U428	P-I: <i>... cualquier punto de tu gráfico que indica un valor en kilos, ¿no?...</i>
U429	J: <i>Ajá.</i>
U430	P-I: <i>... y solamente le aumentas 1, o sea, te vas a 1 kilo más... ¿siempre voy a</i>

	<i>tener este resultado de que...?</i>
U431	J: <i>Sí. Siempre se va a aumentar 2 en “y”.</i>
U432	P-I: <i>En 2 en “y”.</i>
U433	J: <i>Sí.</i>
U434	P-I: <i>¿Estamos de acuerdo? Ya, ok... Entonces, tú te has dado cuenta que... Y ese aumentar en 2, aumentar en 3... ¿en dónde también lo hemos visto?</i>
U435	J: <i>Mmm... ¿aumentar en 2 y aumentar en 3?</i>
U436	P-I: <i>Sí. Esa idea... ¿en dónde más lo hemos revisado antes?</i>
U437	J: <i>Ah... en el... este... en el tablero...</i>
U438	P-I: <i>En el tablero, ¿no es cierto?</i>
U439	J: <i>Sí.</i>
U440	P-I: <i>¿Y qué más? Y de los tableros, ¿qué encontramos, después?</i>
U441	J: <i>Encontramos la variación y, también, encontramos un punto donde que...mmm... (La alumna señala, en estos momentos, el punto de intersección (5; 15) para lograr explicar verbalmente la coincidencia de las dos situaciones.) ... en la situación de la bodega y la situación del Mercado Mayorista... Coinc... ¿cómo le digo?... ay, ya se me fue la palabra...</i>
U442	P-I: <i>A ver, ¿qué quieres indicar?</i>
U443	J: <i>Quiero decir que... por ejemplo, en el tablero 1 y en el tablero 2, en 5 kilos siempre voy a reci... va a resultar la misma cantidad.</i>
U444	P-I: <i>Ah, ya. Eso fue lo que descubriste cuando hiciste el tablero ¿no?, y ahora lo has vuelto a verificar en el plano cartesiano.</i>
U445	J: <i>Sí.</i>
U446	P-I: <i>Ok... ya... Pero algo más, también, sacamos... ¿Te acuerdas qué analizamos? Sacamos unas fórmulas... para la bodega y para el Mercado Mayorista.</i>
U447	J: <i>Sí.</i>
U448	P-I: <i>¿Qué fórmulas eran, te acuerdas?</i>
U449	J: <i>Mmm... las fórmulas... que ambas son multiplicadas... mmm...</i>
U450	P-I: <i>A ver. ¿En la bodega cómo fue, cómo quedó?</i>
U451	J: <i>Ah, ya. Que todos en la bodega... todos se multiplican por 3.</i>
U452	P-I: <i>Por 3. ¿Toda la bodega o todos los kilos?</i>
U453	J: <i>Je, je...</i>
U454	P-I: <i>O sea, si eran “x” kilos, ¿cómo quedaba la fórmula?</i>
U455	J: <i>Si eran “x” kilos... este... tenía...</i>
U456	P-I: <i>Y mi gasto era “y”...</i>
U457	J: <i>“y”... “y” igual “3x”.</i>
U458	P-I: <i>Ya está... ¿Tiene algo que ver con el análisis que has hecho, ahorita, de estar subiendo de 3 en 3?</i>
U459	J: <i>Sí. Que todo valor se multiplica en 3.</i>
U460	P-I: <i>Y en el caso del mercado Mayorista, ¿qué fue lo que encontraste... para un gasto “y” y “x” kilos?</i>
U461	J: <i>Lo mismo... que todo el valor...</i>
U462	P-I: <i>Ya... pero ¿cuál fue? dame la fórmula... ¿cuál es?... “y” igual...</i>

U463	J: <i>Ah... “y” igual a “2x más 5”.</i>
U464	P-I: <i>Ya... Y tiene que ver con este movimien... con esto que has encontrado de la variación que va de 2 en 2?</i>
U465	J: <i>Sí. Se va multiplicando.</i>
U466	P-I: <i>¿A qué multiplica?</i>
U467	J: <i>Se... ¿a quién multiplica...?</i>
U468	P-I: <i>Ajá. ¿A qué multiplica ese 2?</i>
U469	J: <i>Ahh...</i>
U470	P-I: <i>¿Qué valores?</i>
U471	J: <i>El 2 multiplica...</i>
U472	P-I: <i>A cualquier valor ¿de qué?</i>
U473	J: <i>Mmmm... (Presenta nerviosismo porque no sabe cómo responder)</i>
U474	P-I: <i>En general... en general... tu fórmula, ¿cuál es? “y” igual...</i>
U475	J: <i>“2x”</i>
U476	P-I: <i>Ah... ¿“2x más qué”?... “2x más 5”... ya lo has dicho y recontradicho.</i>
U477	J: <i>Sí.</i>
U478	P-I: <i>¿A quién multiplica el 2?... allí en tu fórmula... en tu fórmula...</i>
U479	J: <i>En mi fórmula multiplica... mmm...</i>
U480	P-I: <i>Lo acabas de decir. A ver... vuélvemelo a decir... “y” igual ¿cuánto?...</i>
U481	J: <i>A “x”...</i>
U482	P-I: <i>...Es que se te va siempre la idea... A “x”, ¿no es cierto?... ¿y qué cosa era “x”? ¿Qué me representa “x”?</i>
U483	J: <i>El kilo.</i>
U484	P-I: <i>El kilo... O sea, el peso en kilos, ¿estamos de acuerdo?</i>
U485	J: <i>Sí... el peso en kilos...</i>
U486	P-I: <i>Sí... te estoy redundando para que vayas relacionando cada vez las cosas, ¿ya?</i>
U487	J: <i>Ajá.</i>
U488	P-I: <i>Muy bien. Entonces, vamos a ver, ¿qué tiene que ver este 2 y este 3 que tú has encontrado... y que multiplica a... los modelos que tú has encontrado... que es “y” igual “3x”... multiplica a los “x”... y el otro multiplica al “x” del Mercado Mayorista que es “2x más 5”? ¿Qué tiene que ver un poco con lo que es... este... ehhh... si es “más paradita” o no, ya? ¿Cuál de las dos rectas, así como gráfico, es “más paradita”, o sea, es “más empinada”, también? También se dice o “más empinada”... ¿La de la bodega o la del Mercado Mayorista?</i>

La alumna recorre con sus dos manos, los dos gráficos que ha elaborado en toda su extensión.

U489	J: <i>La de la bodega.</i>
U490	P-I: <i>Y entonces, ¿”menos paradita” quién es?</i>
U491	J: <i>La del Mercado Mayorista.</i>

U492	P-I: <i>Ya. La del Mercado Mayorista, ok... Muy bien... Acabas de analizar la variación del gasto...</i>
U493	J: <i>Sí.</i>
U494	P-I: <i>... en la bodega me has dicho que es de 2 en 2 y la variación del gasto en el Mercado Mayorista es de... ¡Perdón!..</i>
U495	J: <i>.. es al revés... (La alumna sonrío)</i>
U496	P-I: <i>Retrocedo... de la bodega es de 3 en 3 y, más bien, la del Mercado Mayorista es de 2 en 2.</i>
U497	J: <i>De 2 en 2.</i>
U498	P-I: <i>Ya... ¿Cuál es la relación, entonces, que existe ahora entre lo empinado que es una recta y estos valores que tú has encontrado en la variación del gasto? ¿Qué puede deducir? Uno va de 2 en 2 y el otro va de 3 en 3... y me has dicho que una es “más paradita” y la otra es “menos paradita”... Entonces, ¿qué tiene que ver esos valores con esto que tú has dicho “esta es ‘más paradita’ y ésta es ‘menos paradita’”?</i>
U499	J: <i>Ah...</i>
U500	P-I: <i>Por ejemplo, ¿la bodega va de 2 en 2 ó de 3 en 3?</i>
U501	J: <i>De 3. (La alumna sonrío)</i>
U502	P-I: <i>De 3 en 3... y es la “más paradita”...</i>
U503	J: <i>Sí.</i>
U504	P-I: <i>En el Mercado Mayorista...</i>
U505	J: <i>De 2 en 2...</i>
U506	P-I: <i>De 2 en 2... Y es la “menos paradita” o “menos empinada”, también se le dice... ¿cuál es la deducción, entonces?</i>
U507	J: <i>Que mientras el valor crece... el valor aumenta...</i>
U508	P-I: <i>¿Cuál valor?... de la varia...</i>
U509	J: <i>... de la variación aumen...</i>
U510	P-I: <i>... del... del gasto...</i>
U511	J: <i>... de la variación del gasto...</i>
U512	P-I: <i>Ajá... cuanto más es la variación del gasto... ¿qué pasa?</i>
U513	J: <i>Ehhh... la recta es más empinada.</i>
U514	P-I: <i>... Más empinada...</i>

BLOQUE III: Análisis de la relación unívoca entre variables.

U515	P-I: <i>Vamos al tercer bloque y vamos a hacer otra vez... vamos a analizar las rectas y nos vamos a la bodega.</i>
U516	J: <i>Ajá. (En estos momentos, la alumna palpa las rectas y se ubica en la intersección de ambas)</i>
U517	P-I: <i>... vamos a considerar las condiciones de la situación dada, o sea, lo que yo te he dado por escrito... la situación de la bodega en este caso...</i>
U518	J: <i>Ajá.</i>

U519	P-I: <i>Si compras 3 kilos de papa, el gasto es de S/.9. Te pregunto, y si quieres verificalo bien en tu gráfico, examínalo en tu gráfico... (La alumna rastrea con sus dedos los tres primeros puntos que están sobre la recta y se ubica en el punto (3; 9). Se observa que ella se asegura de encontrarse en este punto al rastrear varias veces los puntos anteriores.)... ¿habría la posibilidad de que al comprar en esa bodega 3 kilos de papa, el gasto resulte otro valor? Pero considerando la situación dada, o sea, no hay otra cosa más que lo que yo te he dado por escrito el problema, ¿ok?</i>
U520	J: <i>Solamente eso...</i>
U521	P-I: <i>Sí, esa es la situación dada.</i>
U522	J: <i>... habría la posibilidad...</i>
U523	P-I: <i>Entonces, te pregunto ¿habría la posibilidad de que al comprar 3 kilos de papa, el gasto ya no fuera de S/.9 sino otro valor?</i>
U524	J: <i>Mmmm...</i>
U525	P-I: <i>¿Habría esa posibilidad? Sabiendo que tú me has dicho que cuesta S/.3 el kilo de papa, ¿no?</i>
U526	J: <i>No.</i>
U527	P-I: <i>¿O sea que el gasto sería único?</i>
U528	J: <i>Sí.</i>
U529	P-I: <i>¿Para los 3 kilos de papa, el gasto sería único?</i>
U530	J: <i>Sí.</i>
U531	P-I: <i>O sea, no va a ser ni más de ni menos de 9 kilos, eso es lo que me estás diciendo.</i>
U532	J: <i>Sí, porque el gasto es de S/.3 cada kilo.</i>
U533	P-I: <i>Ya.</i>
U534	J: <i>Y si yo pido 3 kilos de papa, me saldría S/.9.</i>
U535	P-I: <i>Ya, no es que me cobren S/.10 ni nada... porque si me cobran de más, yo reclamo, ¿no es cierto?</i>
U536	J: <i>Sí.</i>
U537	P-I: <i>...claro, porque las condiciones están dadas... ¿está bien?</i>
U538	J: <i>Sí.</i>
U539	P-I: <i>Y si compras 7 kilos, el gasto asciende a S/.21, ¿no es cierto?... en la bodega... estamos en la bodega... (La alumna rastrea con sus dedos hacia el punto (7; 21).)</i>
U540	J: <i>Ah... sí...</i>
U541	P-I: <i>Estamos a S/.21.</i>
U542	J: <i>Sí, claro.</i>
U543	P-I: <i>Igual te pregunto, ¿este gasto con las condiciones que ya están dadas, puede tener otro valor o es único?</i>
U544	J: <i>Único.</i>
U545	P-I: <i>¿Por...?</i>
U546	J: <i>Porque el gasto de cada kilo, como repito, ¿no?, es de S/.3. No importa si aumenta en 2 ó 3 kilos, siempre será multiplicado por 3.</i>
U547	P-I: <i>Entonces, en este caso, para 7 kilos siempre serán...</i>
U548	J: <i>S/.21.</i>

U549	P-I: <i>Lo que tú me acabas de responder, te lo iba a preguntar... ¿Y sucederá lo mismo con el gasto en cualquier kilo de papas? ¿Tú qué dices? (La alumna se encuentra en la intersección de rectas.)</i>
U550	J: <i>Con cualquier...</i>
U551	P-I: <i>O sea, claro, yo puedo comprar cualquier cantidad de kilos de papa... dime una cosa, ¿el valor que yo consiga con esa cantidad de kilos que he encontrado va a suceder que...?</i>
U552	J: <i>Siempre se va a multiplicar por 3.</i>
U553	P-I: <i>Ah, ya. Entonces, podemos decir que para cualquier número de kilos de papa que se compre, el gasto correspondiente siempre es... ¿qué?</i>
U554	J: <i>3.</i>
U555	P-I: <i>¿Es 3 el gasto correspondiente?</i>
U556	J: <i>Para cualquier...</i>
U557	P-I: <i>Claro, para cualquier... el gasto que... para cualquier kilo de papa que yo compre el gasto siempre va a ser, ¿cómo?</i>
U558	J: <i>Multiplicado.</i>
U559	P-I: <i>¿Multiplicado por...?</i>
U560	J: <i>3.</i>
U561	P-I: <i>3. O sea, que va a ser ¿diferente o es único?</i>
U562	J: <i>Único</i>
U563	P-I: <i>O sea, es único para cada kilo de papa, ¿estamos de acuerdo?</i>
U564	J: <i>Sí.</i>
U565	P-I: <i>Ok. Escoge, ahora, un número cualquiera de kilo de papas en tu tablero de correspondencias de la bodega...</i>
U566	J: <i>Ah, en mi tablero.</i>
U567	P-I: <i>... en tu tablero... Y ya me lo has explicado pero vuélvemelo a... verificámelo... lo que tú me acabas de decir... explica esta respuesta que tú has dado a lo anterior que hemos analizado. Siempre sucede eso, ¿no es cierto?</i>
U568	J: <i>Sí.</i>
U569	P-I: <i>¿Siempre sucede eso o no?... que para kilo yo tengo un valor único para cada uno de ellos... (La alumna lee con sus dedos y confirma que a cada valor de kilo de papa le corresponde un único valor en el gasto.)</i>
U570	J: <i>... sí...</i>
U571	P-I: <i>¿Encuentras alguno que, por ejemplo, en 7 kilos aparecen dos valores?</i>
U572	J: <i>No.</i>
U573	P-I: <i>No, es...</i>
U574	J: <i>Es la misma cantidad.</i>
U575	P-I: <i>¿Y es...?</i>
U576	J: <i>...multi...</i>
U577	P-I: <i>...único... ¿no?</i>
U578	J: <i>Sí.</i>
U579	P-I: <i>... es único.</i>
U580	J: <i>Sí.</i>
U581	P-I: <i>Y eso está bajo las condiciones que se te han dado del problema.</i>

U582	J: ... sí...
U583	P-I: <i>No se te ha dicho más.</i>
U584	J: <i>Sí.</i>
U585	P-I: <i>Muy bien. Entonces, ya está claro pues. Ya me aclaraste esto muy bien. Me has explicado que siempre está multiplicado por 3, ¿no?</i>
U586	J: <i>Ajá.</i>
U587	P-I: <i>Entonces lo mismo sucederá, pues, con el Mercado Mayorista, ¿no es cierto? (La alumna coge su tablero de correspondencias del Mercado Mayorista y confirma que para cada valor en kilos le corresponde un único valor en el gasto).</i>
U588	J: <i>Sí.</i>
U589	P-I: <i>Sucederá que si yo estoy en una cantidad de kilos que compre, el valor... el gasto que yo encuentre ¿es único o puedo tener varios valores para una misma cantidad de kilos?</i>
U590	J: <i>Es único.</i>
U591	P-I: <i>Es único, ¿no es cierto? Porque las condiciones ya están dadas.</i>
U592	J: ... sí...
U593	P-I: <i>¿Cuál es la condición?</i>
U594	J: <i>Que... cualquier... este número... o sea, de kilo de papa siempre será multiplicado por 2.</i>
U595	P-I: <i>¿y...en el Mercado Mayorista... qué más?</i>
U596	J: ... y aumentado... sumando 5.
U597	P-I: <i>Ese es el gasto por...</i>
U598	J: <i>Ese es el gasto por los pasajes.</i>
U599	P-I: <i>Ya, muy bien.</i>

BLOQUE IV: Análisis de la conveniencia de comprar en un lugar o en el otro.

U600	P-I: <i>Vamos al último bloque, ¿ok?</i>
U601	J: <i>Sí.</i>
U602	P-I: <i>Y vamos a ver la conveniencia de comprar en un lugar u otro. Entonces, vamos a ver. Analicemos en los gráficos. ¿Cuál es el número de kilos de papa, que ya me lo has dicho cientos de veces...ja, ja, ja...</i>
U603	J: <i>Ja, ja, ja. (En este momento, la alumna espontáneamente ubica sus manos sobre la intersección de las rectas.)</i>
U604	P-I: <i>... me lo has dicho varias veces... ¿cuál es el número de kilo de papa para el cual el gasto al comprarlos en la bodega es el mismo que al comprarlos en el Mercado Mayorista? Te vuelvo a preguntar, ¿cuál es el número de kilos de papa para el cual el gasto al comprarlos en la bodega es el mismo que al comprarlos en el Mercado Mayorista?</i>

U605	J: 5.
U606	P-I: 5 kilos, ¿no?
U607	J: Sí.
U608	P-I: ¿Y... a qué gasto le corresponde?
U609	J: A 15.
U610	P-I: S/.15 le corresponde a los 5 kilos, ¿no es cierto?
U611	J: Sí.
U612	P-I: Analiza, ahora, qué sucede con el gasto cuando compras una cantidad de kilogramos menor al que has encontrado en esta pregunta que te acabo de hacer. O sea, tú has encontrado que es lo mismo si lo compro en la bodega o lo compro en el Mercado Mayo...
U613	J: Sí.
U614	P-I: ... rista...
U615	J: Sí.
U616	P-I: Entonces, ¿qué pasa si tú compras kilos menor a los 5? O sea, por ejemplo, si compras 2 kilos de papa, el gasto en la bodega, ¿cuánto es de 2 kilos?
U617	J: De S/.6.
U618	P-I: ¿y en el Mercado Mayorista?
U619	J: Mmmm... ¿2 kilos de papa?
U620	P-I: Ajá.
U621	J: De S/.9... sumando el pasaje.
U622	P-I: Ya. ¡Excelente! ¿Y si compras 3 kilos, ¿cuánto es en la bodega y cuánto en el Mercado Mayorista?
U623	J: Eh... ¿3 kilos?
U624	P-I: Sí. Si ahora son 3 kilos.
U625	J: Mmm... En la bodega sería S/.9.
U626	P-I: S/.9.
U627	J: Y en el Mercado sería 11.
U628	P-I: S/.11, entonces...
U629	J: ... sumando los pasajes
U630	P-I: ... sumándoles los pasajes. ¡Perfecto! Porque estamos hablando del gasto total, ¿no?
U631	J: Sí.
U632	P-I: Ok. Entonces, ¿dónde te conviene comprar, pues chica, cuando tienes menos de los 5 kilos?
U633	J: En la bodega.
U634	P-I: En la bodega...ja, ja... ¿dónde conviene comprar? En la bodega hay que comprar menos de 5 kilos, ¿no es cierto?
U635	J: Sí.
U636	P-I: Y, ahora, al revés. Cuando compras kilos más de 5. Si compras 6, ¿cuánto pagas en bodega y cuánto pagas en Mercado?
U637	J: Si compro 6 kilos... mmm... 6 kilos en mi bodega me costaría, pues, S/.18.
U638	P-I: Ya. ¿Y si compro...? Y en el Mercado, ¿cuánto?

U639	J: <i>Y si compro 6 en el Mercado me costaría... este... S/.17.</i>
U640	P-I: <i>Y si compro 8 kilos, ¿cómo sería en la bodega y cómo sería el gasto en el Mercado?</i>
U641	J: <i>En la bodega, 8 kilos me saldría S/.24.</i>
U642	P-I: <i>¿Y en el Mercado?</i>
U643	J: <i>Y en el Mercado me saldría 21.</i>
U644	P-I: <i>21. Entonces aquí, ¿dónde conviene comprar si compro más de 5 kilos?</i>
U645	J: <i>En el Mercado.</i>
U646	P-I: <i>¿En el Mercado, no?</i>
U647	J: <i>Sí.</i>
U648	P-I: <i>Y ¿qué observas... coloca tu dedito en el punto 5... 5 con 15... en el punto de 5 kilos...</i>
U649	J: <i>... 5 kilos... (La alumna rastrea la recta del Mercado Mayorista desde su primer punto y llega hasta la intersección de rectas)</i>
U650	P-I: <i>... que es el punto de intersección de las dos rectas, ¿no?</i>

La alumna vuelve a rastrear la recta del Mercado Mayorista desde el primer punto hasta llegar a la intersección.

U651	P-I: <i>¿Ya, no es cierto?</i>
U652	J: <i>Sí.</i>
U653	P-I: <i>Vámonos... tu mano derecha que coja ese punto...con tu mano izquierda fíjate cómo son las rectas ahí.</i>
U654	J: <i>Ya. ¿Hacia abajo?</i>
U655	P-I: <i>Sí. Cuando yo tomo menos de 5 kilos, ¿qué pasa con las rectas?, ¿cómo son? O sea, me refiero ¿quién está una más arriba y quién está más abajo?</i>
U656	J: <i>Ah, ya. Este... con el de la bodega...</i>
U657	P-I: <i>...el de la bodega, ¿está más arriba o más abajo?</i>
U658	J: <i>... más abajo.</i>
U659	P-I: <i>Está mas abajo.</i>
U660	J: <i>Sí.</i>
U661	P-I: <i>Entonces, el del Mercado está más arriba, ¿no es cierto?</i>
U662	J: <i>Sí.</i>
U663	P-I: <i>Y ¿tú que dijiste hace un ratito? Que si yo compro menos kilos ¿Dónde me conviene comprar?</i>
U664	J: <i>En la bodega.</i>
U665	P-I: <i>En la bodega. Entonces, ¿hay relación o no hay relación? O sea, si compro menos kilos la recta está...</i>
U666	J: <i>... más...</i>
U667	P-I: <i>... más abajo, ¿no?</i>
U668	J: <i>Sí.</i>
U669	P-I: <i>O sea, la bodega está abajo de la...</i>

U670	J: <i>De la... este... del Mercado.</i>
U671	P-I: <i>Del Mercado, ¿no es cierto?</i>
U672	J: <i>Sí.</i>
U673	P-I: <i>Y si yo me voy más de 5 kilos... fíjate cómo son tus rectas. ¿Qué pasa con tus rectas? ¿Quién está más arriba y quién está más abajo?</i>

La alumna palpa las dos rectas a partir de la intersección y hacia arriba.

U674	J: <i>Ah. La bodega. (La alumna señala la recta de la bodega que se encuentra arriba)</i>
U675	P-I: <i>La bodega está más arriba...</i>
U676	J: <i>Sí.</i>
U677	P-I: <i>Y el Mercado está más abajo.</i>
U678	J: <i>Sí.</i>
U679	P-I: <i>Y ¿qué dijiste... que era?</i>
U680	J: <i>Que era conveniente comprar en el Mercado.</i>
U681	P-I: <i>Ya. Entonces, ¿qué cosa quiere decir? Que si la recta... ¿Cómo podemos generalizar eso? ¿Qué deducimos? Si la recta está más abajo...</i>
U682	J: <i>... el valor es...menor...</i>
U683	P-I: <i>Ya... el valor...</i>
U684	J: <i>... el valor del...</i>
U685	P-I: <i>...del gasto...</i>
U686	J: <i>... el gasto, sí...</i>
U687	P-I: <i>... es menor. O sea, es más barato comprar allí, ¿no es cierto?</i>
U688	J: <i>Sí.</i>
U689	P-I: <i>¿Estamos de acuerdo?</i>
U690	J: <i>Sí.</i>
U691	P-I: <i>Ya. Muy bien, Janet, muchas gracias. Eso es todo.</i>
U692	J: <i>Gracias a ti, señorita.</i>
U693	P-I: <i>¿Sí?</i>
U694	J: <i>Sí.</i>
U695	P-I: <i>Ya. No, gracias a ti... bastante... Me has ayudado mucho, mucho.</i>
U696	J: <i>Yo he aprendido bastante, también.</i>
U697	P-I: <i>Ambas... ambas hemos aprendido bastante... y los que vean esto... van a aprender, también, mucho más. Que no te quepa duda. ¿Ya?</i>
U698	J: <i>Aja.</i>
U699	P-I: <i>Gracias, hija. Bendiciones.</i>
U700	J: <i>Gracias.</i>

**ANEXO 4: Aplicación de Hoja Guía en
Ernesto (11 noviembre 2012)**



ACTIVIDAD

5 año secundaria 11 de noviembre de 2012

TOMANDO DECISIONES:

SITUACIÓN:

En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/2 pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/5.

BLOQUE I:

01. Elabora la tabla de correspondencia Peso en kg – Gasto en soles para la bodega y para el Mercado Mayorista, respectivamente. Desarrolla esta tabla para 0 kg, 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg, 9 kg y 10 kg.

$f(x) = 3x$

Bodega de la esquina	
Peso (en kg)	Gasto (en soles)
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24
9	27
10	30

$g(x) = 2x + 5$

Mercado mayorista	
Peso (en kg)	Gasto (en soles)
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15
6	17
7	19
8	21
9	23
10	25

Cada valor lo reemplazo en la fórmula de la función.

02. Teniendo en cuenta la tabla de correspondencia de la bodega:

- a. Si vas a la bodega y no encuentras papas, gastas 0 soles
- b. Cuando compras 1 kg, el gasto es 3 solo
- c. Cuando compras 9 kg, el gasto es 27 soles
- d. Cuando compras 20 kg, gastas 60 soles
- e. Y cuando compras x kg de papa, tu gasto es $3x$ soles
- f. Considerando que has simbolizado al gasto con la variable y , ¿cómo relacionarías la cantidad x kilos de papa con el gasto y en soles?

Se relacionan ambas variables mediante la función lineal
 $y = 3x$

Donde: y es el gasto en soles
 x (es) son los kilos de papa

03. Teniendo en cuenta la tabla de correspondencia respecto al Mercado Mayorista:

- a. Si vas al Mercado y no encuentras papas, gastas 5 soles
- b. Cuando compras 1 kg, el gasto es 7 soles
- c. Cuando compras 9 kg, el gasto es 23 soles
- d. Cuando compras 20 kg, gastas 45 soles
- e. Y cuando compras x kg de papas, tu gasto es $2x+5$
- f. Considerando que has simbolizado al gasto con la variable y , ¿cómo relacionarías la cantidad x kilos de papa con el gasto y en soles?

Se relacionan mediante la función lineal
 $y = 2x + 5$ (se le suma el 5 por el gasto extra en el pasaje)

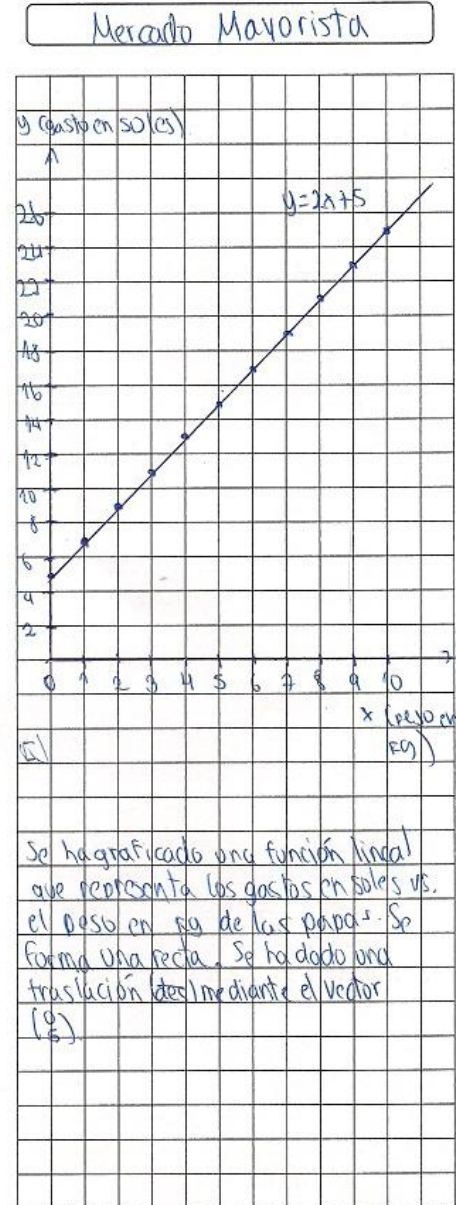
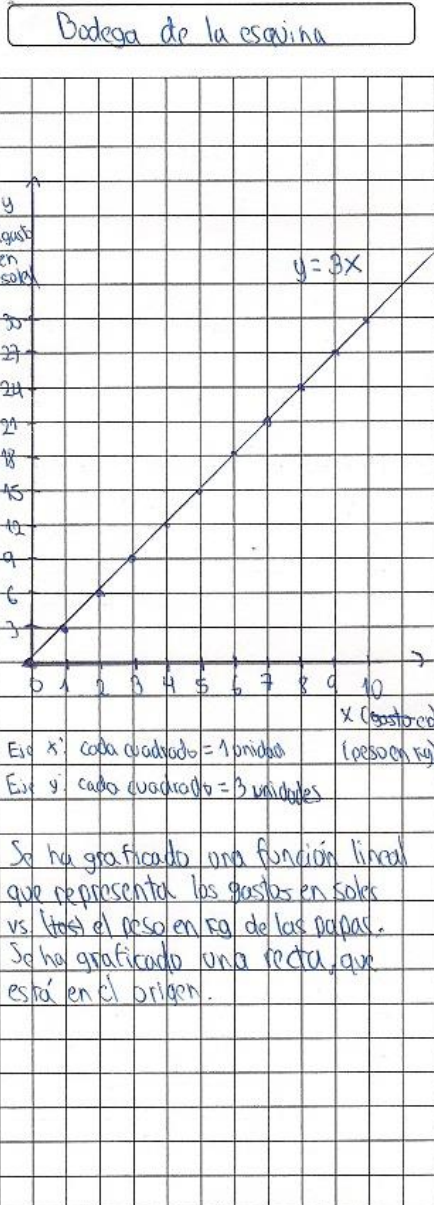
Donde
 y es el gasto en soles
 x (es) son los kilos de papa

Una función lineal es una regla de correspondencia de la forma

$f(x) = ax + b$, donde a : pendiente
 b : constante real

BLOQUE II:

04. Construye en el plano cartesiano las dos relaciones de correspondencia respectivas. Une los puntos con una línea e indica qué figuras geométricas has graficado.



Una recta es una figura geométrica. Sean dos puntos A y B ubicados en el plano, una recta es aquella línea que une a los dos puntos en la menor distancia posible y luego se ~~extiende~~ prolonga infinitamente por ambos.

05. En el gráfico que representa la relación Peso en kg – Gasto en soles referente a la bodega, analiza lo siguiente:

- a. Por 1 kg de papa gastas 3 soles. Por 2 kg de papa gastas 6 soles.
¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 1 kg a 2 kg?
Aumenta en 3 soles
- b. Por 4 kg de papa gastas 12 soles. Por 5 kg de papa gastas 15 soles.
¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 4 kg a 5 kg?
Aumenta en 3 soles.
- c. Por 9 kg de papa gastas 27 soles. Por 10 kg de papa gastas 30 soles.
¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuánto varía el gasto al cambiar de 9 kg a 10 kg?
Aumenta en 3 soles
- d. En los tres resultados anteriores, ¿la variación del gasto es la misma o son diferentes?
Es la misma (en 3 soles)
- e. Examina en tu gráfico si la variación en el gasto se sigue manteniendo cuando escoges un número cualquiera de kilos de papa y luego consideras un kilo más. En tus palabras, generaliza lo que sucede con el gasto cuando comparas lo que gastas en una cantidad cualquiera de kilos de papa con lo que gastas en esa cantidad de kilos aumentada en uno.
Si se sigue manteniendo. Cuando compro una cantidad cualquiera y se compara con lo que gasto cuando compro esa cantidad aumentada en uno hay una variación de 3. El gasto varía en 3 soles, puesto que aumenta. Esto se debe a que la pendiente de la recta es 3.
-debe con respecto a Δy
Pendiente. Es una tasa de cambio, la derivada de una función (en un punto, pero en la recta es constante)
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

06. En el gráfico que representa la relación Peso en kg – Gasto en soles referente al Mercado Mayorista, analiza lo siguiente:

- a. Por 1 kg de papa gastas 7 soles. Por 2 kg de papa gastas 9 soles.
¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuanto varía el gasto al cambiar de 1 kg a 2 kg?
Varía en 2 soles (aumenta)
- b. Por 4 kg de papa gastas 13 soles. Por 5 kg de papa gastas 15 soles.
¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuanto varía el gasto al cambiar de 4 kg a 5 kg?
Aumenta en 2 soles
- c. Por 9 kg de papa gastas 23 soles. Por 10 kg de papa gastas 25 soles.
¿Aumenta o disminuye el gasto? ¿En cuanto varía el gasto al cambiar de 9 kg a 10 kg?
Aumenta en dos soles
- d. En los tres resultados anteriores, ¿la variación del gasto es la misma o son diferentes?
Si, aumento en 2 soles.
- e. Verifica con otros puntos de tu gráfico si la variación se sigue manteniendo para todos ellos.
Si se sigue manteniendo.

- f. Examina en tu gráfico si la variación en el gasto se sigue manteniendo cuando escoges un número cualquiera de kilos de papa y luego consideras un kilo más. En tus palabras, generaliza lo que sucede con el gasto cuando comparas lo que gastas en una cantidad cualquiera de kilos de papa con lo que gastas en esa cantidad de kilos aumentada en uno.

Si se sigue manteniendo, como la pendiente de la recta es 2, cuando sucede lo indicado el gasto varía en 2 soles.

07. Analiza en los gráficos que has elaborado y responde:

- a. ¿Cuál de las rectas es más “paradita” o más empinada? La primera
- b. ¿Cuál de las rectas es menos “paradita” o menos empinada? La segunda
- c. Compara tus respuestas con las deducciones que elaboraste sobre la variación del gasto en las preguntas 6 y 7. ¿Cuál es la relación que existe entre lo empinada que es una recta y la variación entre el gasto en una cantidad cualquiera de kilos de papa y el gasto en esa cantidad de kilos aumentada en uno?

Que a mayor pendiente (si varía más), la recta va a estar más empinada y a menor pendiente (si varía menos), la recta va a estar menos empinada.

BLOQUE III:

08. Analiza en la recta que representa al modelo de la bodega.

- a. Considerando las condiciones de la situación dada, si compras 3 kg de papa, el gasto es de S/9. ¿Habría la posibilidad de que al comprar 3 kg de papa el gasto resulte otro valor? ¿O es único? El valor es único (por concepto de función).
- b. Si compras 7 kg, el gasto asciende a S/21. ¿Este gasto puede tener otro valor? ¿O es único? (Igual) por definición de función. No, es único.
- c. ¿Sucederá lo mismo con el gasto en cualquier cantidad de kilos de papa? SI
Entonces, podríamos decir que, para cualquier número de kilos de papa que se compre, el gasto correspondiente siempre es único.

- d. Escoge un número cualquiera de kilos de papa en tu tablero de correspondencias de la bodega y explica tu respuesta a la pregunta anterior.

(El par (8, 24)) No hay otro valor, (esto se debe a) por ejemplo cuando quiero comprar 8 kilos. Esto se debe a que no vuelve a aparecer el 8, los kilos siguen aumentando, (El) son distintos los números. Cada valor del eje x sólo tiene una imagen.

- e. Escoge un número cualquiera de kilos de papa en tu gráfico que representa los gastos en la bodega y explica la respuesta que diste en la (c).

24 soles. A 24 sólo le corresponde un valor de x. Esto es porque es una recta y no otra figura. Además por la definición de función a cada elemento de x le corresponde un único elemento de y. Si no fuera lo contrario habría otra relación.

BLOQUE IV:

09. Analiza en los gráficos: ¿Cuál es el número de kilos de papa para el cual el gasto, al comprarlos en la bodega, es el mismo que al comprarlos en el mercado mayorista?

$3x = 2x + 75$ | En el par (15, 15) - 5 soles.
 $x = 5$ | el punto de
 la intersección de ambas rectas

10. Analiza qué sucede con el gasto cuando compras una cantidad de kilogramos menor al que has encontrado en la pregunta anterior.

a. Si compras 2 kg de papa, el gasto en la bodega es de 6 soles y el gasto en el Mercado Mayorista es de 9 soles.

b. Si compras 3 kg de papa, el gasto en la bodega es de 9 soles y el gasto en el Mercado Mayorista es de 11 soles.

c. ¿Dónde te conviene comprar si compras menos de 5 kilos?
 Bodega: si. 15 ; 21.2 ; si. 11 ; 16
 Mercado: si. 15 ; si. 13 ; si. 9 ; si. 9.

En la bodega.

11. Analiza qué sucede con el gasto cuando compras una cantidad mayor de kilogramos de papas al que has encontrado en la pregunta 10.

a. Si compras 6 kg de papa, el gasto en la bodega es de 18 soles y el gasto en el Mercado Mayorista es de si. 17.

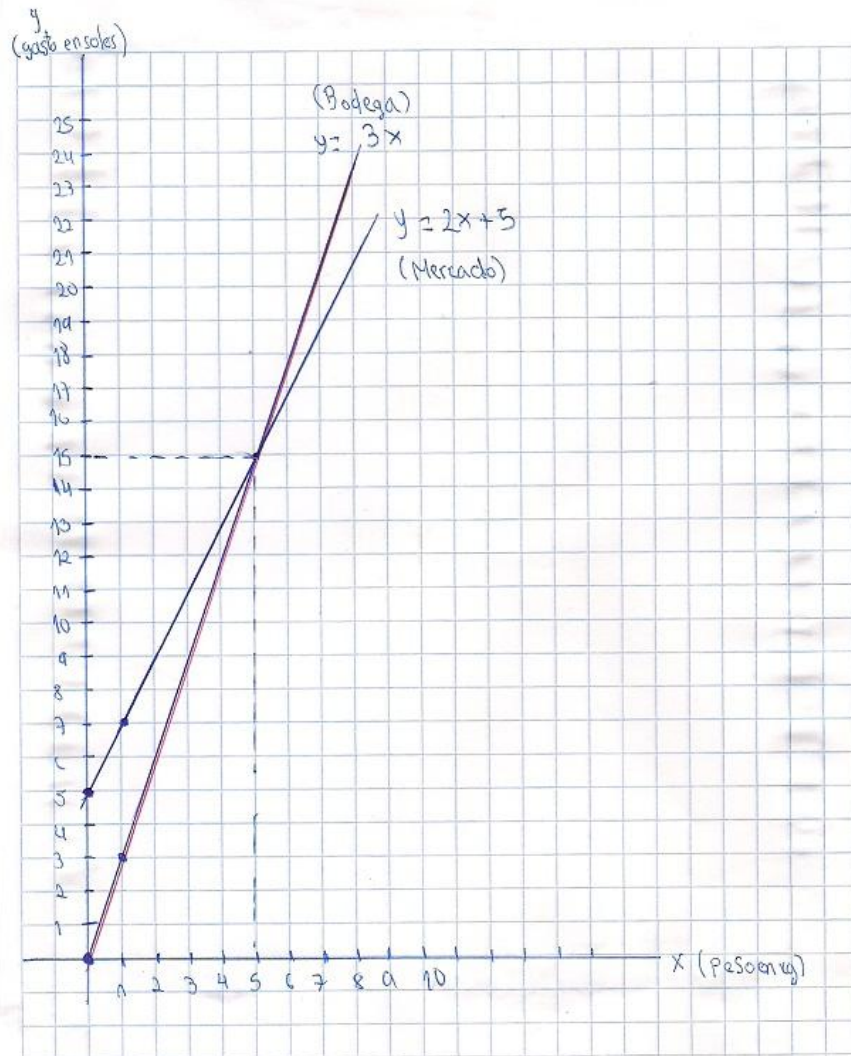
b. Si compras 8 kg de papa, el gasto en la bodega es de S/ 24 y el gasto en el Mercado Mayorista es de S/ 21.

c. ¿Dónde te conviene comprar si compras más de 5 kilos?

Bodega: S/ 19, S/ 24

Mercado: S/ 17, S/ 21

En el mercado



7



ILUSTRACIONES





ILUSTRACIÓN 1: Hoja de la Situación “Tomando decisiones”

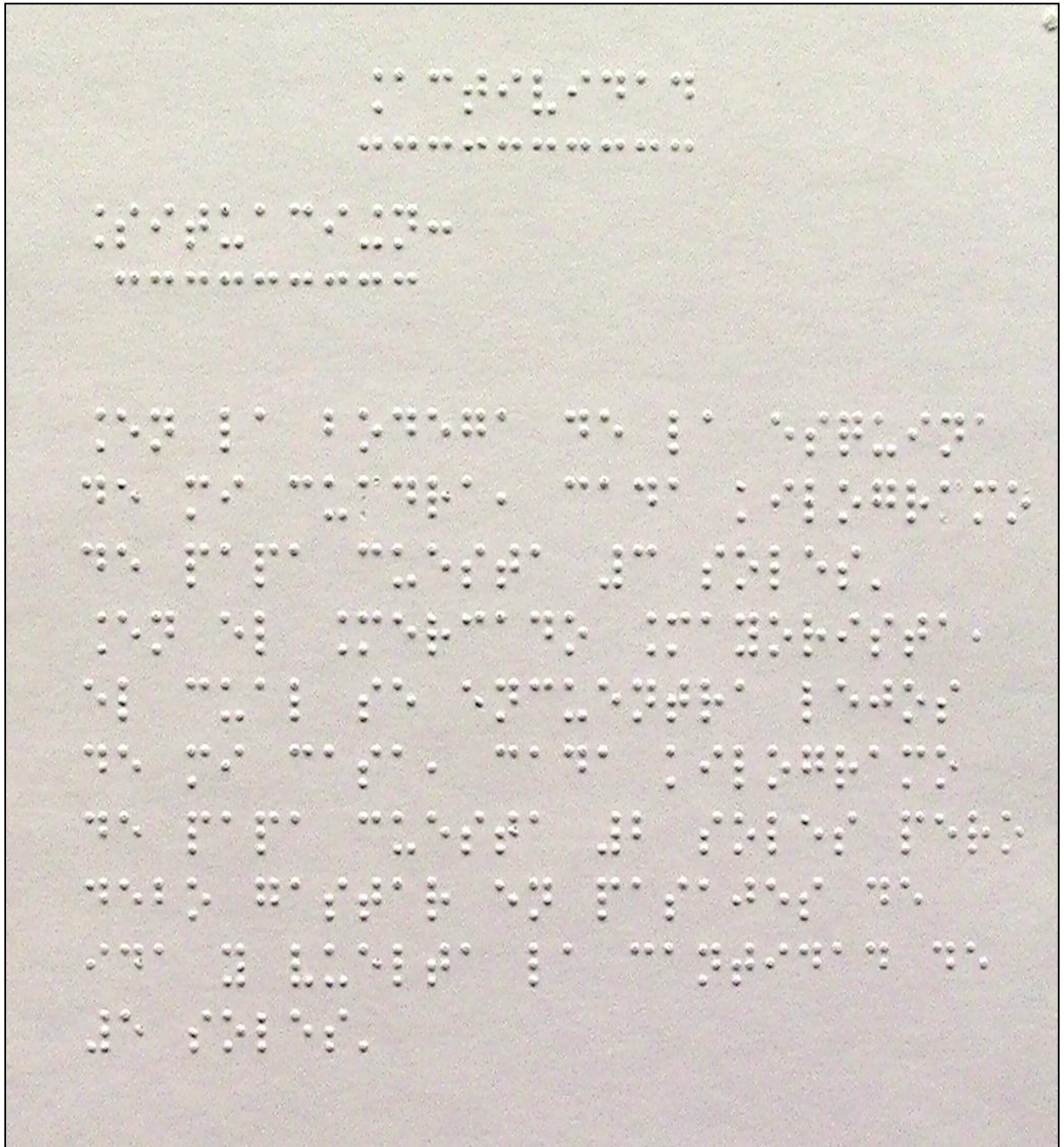




ILUSTRACIÓN 2: Tabla de correspondencia (Bodega)

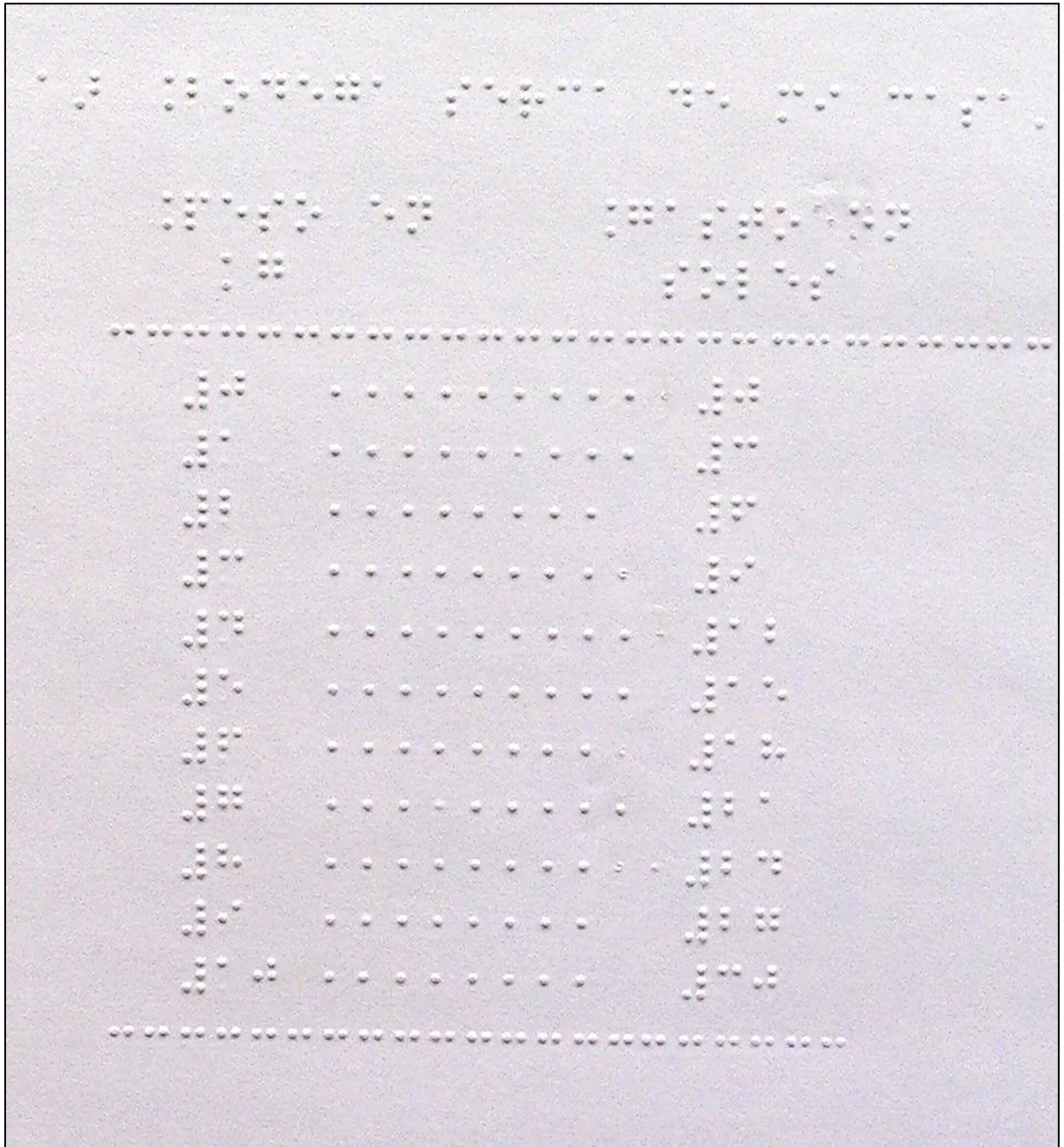




ILUSTRACIÓN 3: Tabla de correspondencia (Mercado Mayorista)

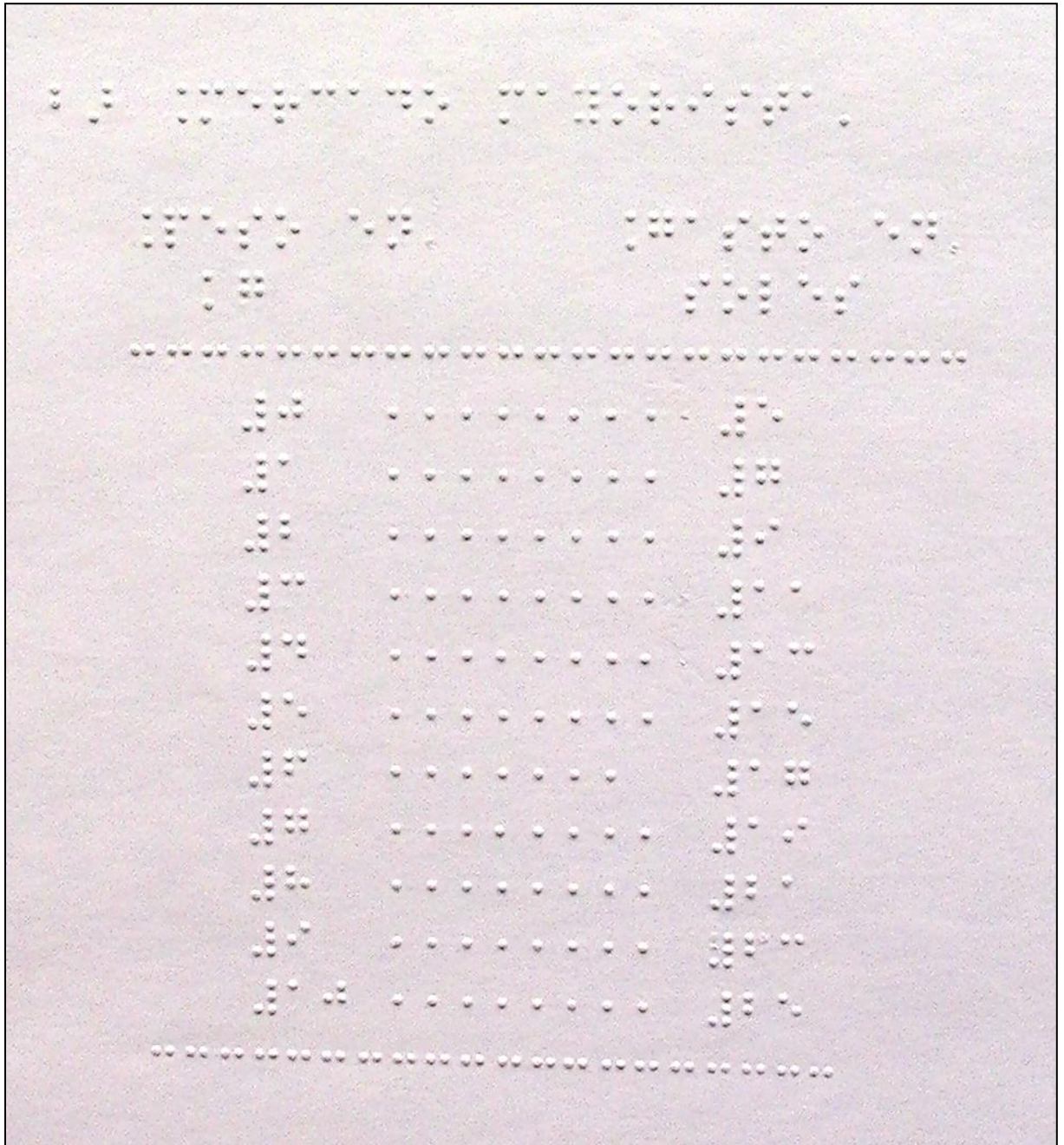




ILUSTRACIÓN 4: Representación gráfica en el plano cartesiano

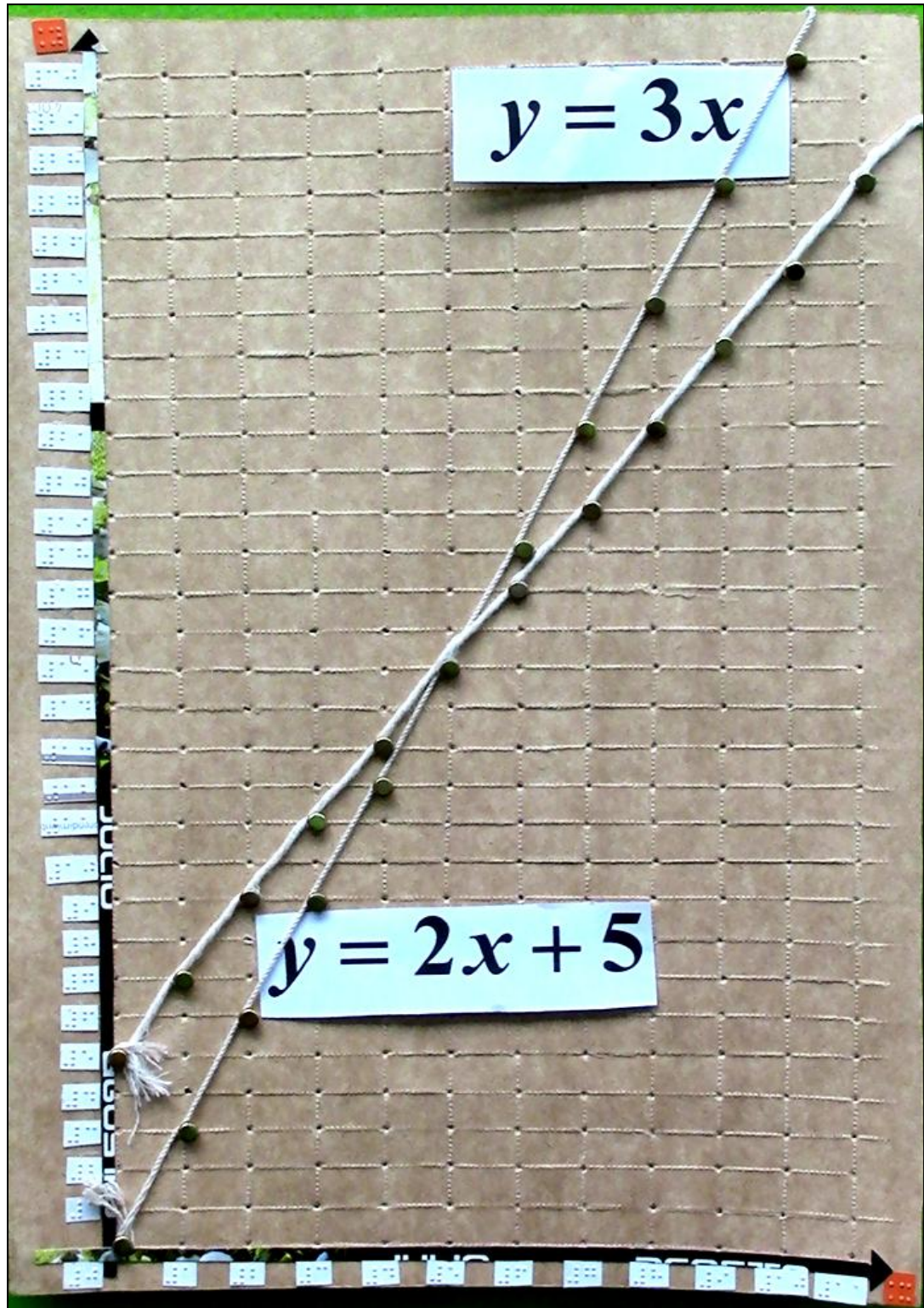




ILUSTRACIÓN 5: Planos Cartesianos en relieve (Modelo 1)

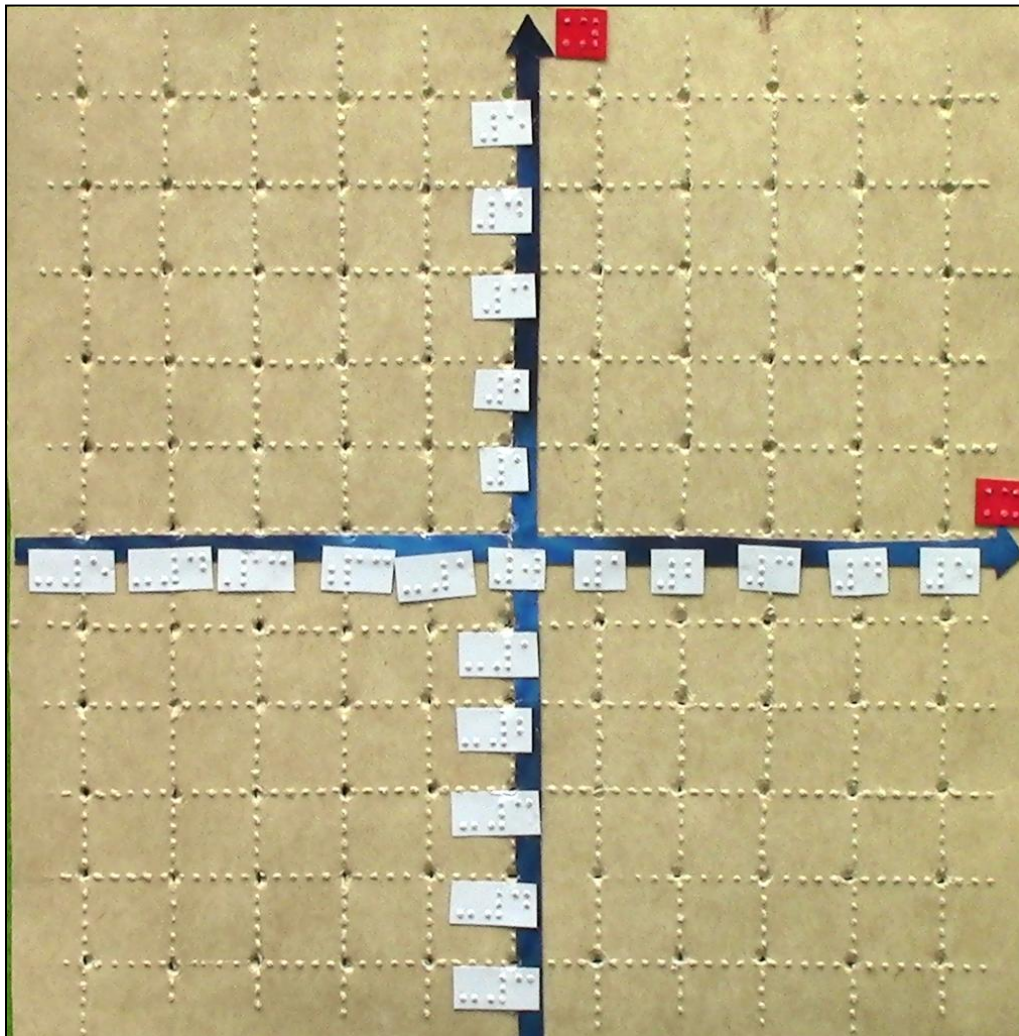




ILUSTRACIÓN 6: Planos Cartesianos en relieve (Modelo 2)

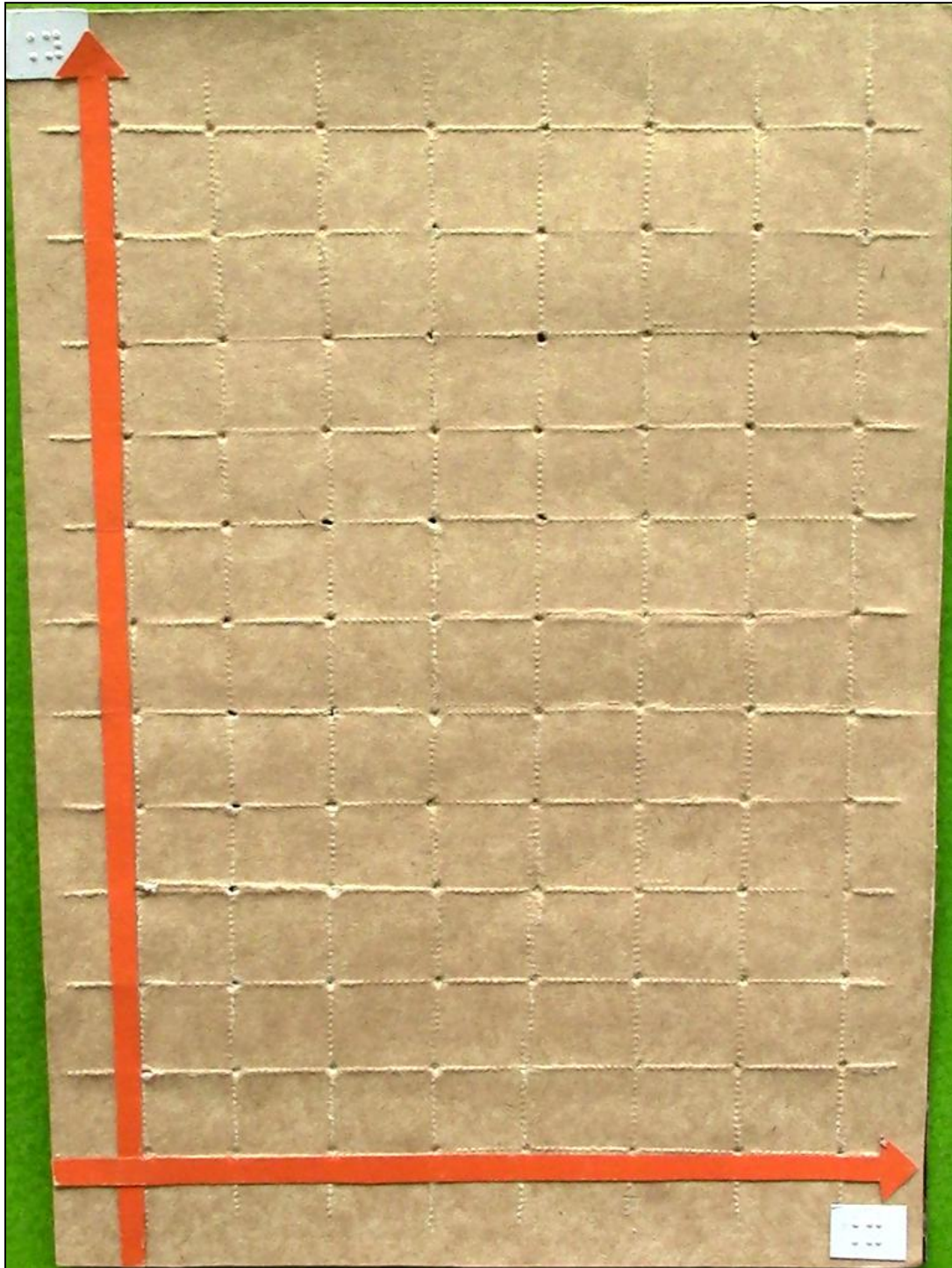




ILUSTRACIÓN 7: Instrumentos didácticos



**MÁQUINA
PERKINS**



**REGLETAS Y
PUNZONES**

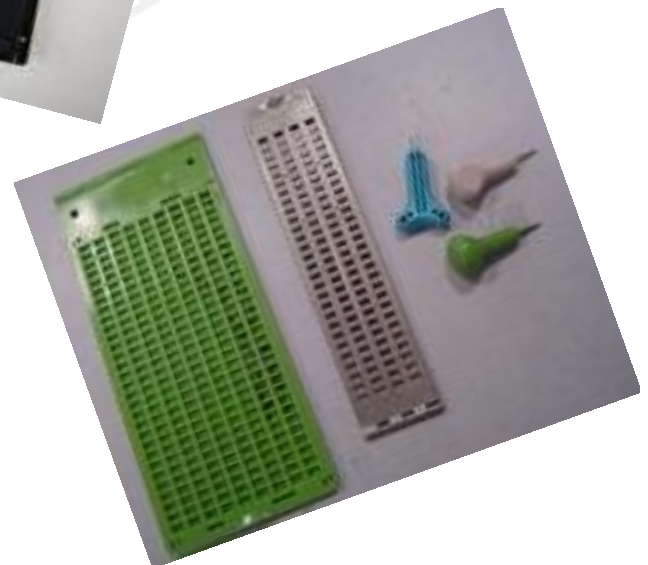




ILUSTRACIÓN 8: Instrumentos didácticos



ÁBACO



**TACTÓGRAFO Y
RULETA**

(Marcador de puntos)



GLOSARIO

Agudeza visual.

Es la capacidad del ojo para distinguir los detalles y las formas de los objetos, en distancia corta y larga. Se evalúa mediante optotipos o paneles de lectura situados a una distancia promedio de 6 metros. (Junta de Andalucía, 2010).

Campo visual.

Es la porción de espacio que una persona puede ver, sin realizar algún movimiento del ojo, y mirando fijamente un objeto en línea recta de la visión. Es medido en grados y abarca toda la visión periférica o indirecta. (Junta de Andalucía, 2010).

Ceguera.

Ausencia total de la visión o de simple percepción lumínica en uno o ambos ojos.

Conflicto cognitivo.

El conflicto cognitivo es un desequilibrio, ruptura o discrepancia, entre las estructuras o esquemas mentales de conocimientos que posee una persona frente a una nueva información que no conoce y que requiere de una reorganización de las ideas o nociones para acomodar y asimilar los nuevos conocimientos en su estructura mental.

Cubaritmo.

Es una caja rectangular, cuyo espacio interior está dividido en pequeños espacios cúbicos donde se pueden encajar hexaedros regulares. Estos cubos tiene en su superficie los números escritos en Braille. Con este material, las personas ciegas pueden realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división realizándola de la misma forma que si se hicieran en vista.

Dificultad.

Está relacionado con el grado de éxito que los alumnos alcanzan ante un contenido de estudio o una tarea (Font, 2012). La razón entre el número de respuestas correctas y el total de respuestas se le conoce como índice de dificultad.

Discapacidad visual.

Engloba cualquier tipo de problema visual grave, proveniente de patologías congénitas, o pueden ser adquiridas por accidentes o virus. (Junta de Andalucía, 2010).

Error.

Respecto al aprendizaje en matemáticas, el error es “una práctica matemática que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Font, 2012).

Herramienta.

Instrumento que ayuda a realizar un trabajo.

Herramientas materiales.

Son aquellos materiales elaborados o creados para ayudar a la formación de imágenes mentales entablandose entre ellas una red conceptual de objetos (Fernandes, 2004, p.76). El cubaritmo y el ábaco son ejemplos de estas materiales creados para lograr una mayor comprensión de conceptos matemáticos y sus relaciones.

Herramientas semióticas.

Son aquellas que facilitan la interacción entre el sujeto y el objeto, y la comunicación con los demás. El lenguaje, el diálogo, la escritura, la lectura, los gráficos o diagramas son ejemplos de este tipo de herramientas.

Indicialidad.

Término tomado de la lingüística por Harold Garfinkel (Firth, 2010) para referirse a la realización del lenguaje y la acción como situaciones mutables porque están inmersas en un contexto que se refleja en las prácticas sociales de las personas.

Instrumento.

Aquello de que nos servimos para hacer algo. Aquello que sirve de medio para hacer algo o conseguir un fin. (RAE)

Mediación.

En el pensamiento vygotskiano, la mediación es la utilización de un elemento intermediario en una relación (Fernandes, 2004, p.34). Estos elementos son los instrumentos y los signos que permiten al individuo tener un mayor control voluntario sobre alguna actividad.

Memoria.

Es el proceso por el cual el conocimiento es codificado, almacenado y, más tarde, recuperado. (Soriano et al., 2007)

Memoria a corto plazo.

Llamada también memoria inmediata, se caracteriza por la retención de información durante unos segundos o minutos, aunque algunos autores mencionan que también pueden ser horas. (Soriano et al., 2007).

Memoria a largo plazo.

Mencionada como memoria permanente por Ballesteros (2003). Es la retención de información o acontecimientos por días, meses o años, desde la infancia hasta la semana pasada. (Soriano et al., 2007)

Memoria declarativa o explícita.

Es un tipo de memoria a largo plazo. Está relacionada con el conocimiento de hechos y acontecimientos y sus significados. En esta memoria se relacionan informaciones diferentes. El recuerdo es deliberado y consciente. (Soriano et al., 2007). Está relacionada con la información o contenidos que son traídos a la memoria en forma de proposiciones e imágenes mentales (Ballesteros et al., 2003).

Memoria no declarativa o implícita.

Al igual que el anterior, es otra manifestación de la memoria a largo plazo. Consiste en saber cómo llevar algo a cabo. Se recuerda de manera inconsciente, es rígida y vinculada a las condiciones en las que se produjo el aprendizaje. Requiere repetición y práctica durante un período de tiempo. Ejemplos: montar bicicleta, comer con una cuchara, gesto de miedo ante un estímulo de peligro. También se le conoce como memoria procedimental porque está relacionada con el saber hacer las cosas (Ballesteros et al., 2003)

Memoria sensorial.

Está asociada a la retención de la información que proviene de lo que se percibe o estimula mediante los sentidos (lo que vemos, lo que olemos, lo que saboreamos, lo que tocamos, y lo que oímos). Su duración es muy breve (milisegundos o segundos) pero lo suficiente como para que sea transferida a la memoria de corto plazo. (McGras-Hill, 2012)

Plasticidad cerebral.

Adaptación funcional del sistema nervioso central (SNC) para minimizar los efectos de las alteraciones estructurales o fisiológicas sea cual fuere la causa originaria. (Pascual, 1996).

Sistema háptico.

Sistema de tacto activo que une la sensibilidad cutánea y la intencionalidad del individuo para captar información mediante la manipulación de objetos, orientado a la discriminación y el reconocimiento de los mismos.

Recurso.

Medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende. (Pl.) Conjunto de elementos disponibles para resolver una necesidad o llevar a cabo una empresa. (RAE).

Tactógrafo

Es una lámina de goma donde se puede elaborar, en papel bond o cartulina, gráficos en altorrelieve ayudado de una ruleta o marcador de puntos (rueda metálica con puntas).

Técnica

(f.) Conjuntos de procedimientos y recursos de que se sirve una ciencia o un arte. (f.) Pericia o habilidad para usar de esos procedimientos y recursos. (f.) Habilidad para ejecutar cualquier cosa, o para conseguir algo. (RAE).