PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

MEDIACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en la Enseñanza de las Matemáticas

AUTOR:

Judith Beatriz Bello Durand

ASESOR:

Mg. Mariano González Ulloa

JURADOS

Dra. Jesús Flores

Mg. Francisco Ugarte

Mg. Mariano González

LIMA – PERÚ

2013

DEDICATORIA

A mi pequeña hijita, Adriana Irene, por compartir nuestro tiempo en prepararme profesionalmente, además por haberme alentado y acompañado, con su bondad, cariño y comprensión en el desarrollo de la misma.

A mi papá, el Sr. Ramón Bello, por sus consejos, amor y apoyo incondicional.

A mi madre, la Sra. Emilia Irene, porque aún en el cielo guía mis pasos.

A mis seis hermanos: Raphael, Mario, Verónica, Ramón, Karim y Jessica por confiar en mí y valorar mis éxitos.

A ti Ernesto Málaga por alentarme y orientarme en la recta final.

AGRADECIMIENTOS

Al Magister Mariano González, por sus: exigencias, perseverancia, dedicación, orientación y apoyo en el desarrollo de la investigación.

A la Dra. Jesús Flores por enseñarme que el camino del éxito puede ser fácil si uno lucha diariamente hasta conseguirlo, por apoyarme alentándome en mi trabajo y por enseñarme a ser mejor profesional, práctica e investigadora.

A la Magister Cecilia Gaita por su confianza y ánimo en seguir siempre hacia adelante, con dignidad y responsabilidad.

Al Dr. Uldarico Malaspina, por sus sabios consejos y por haberme orientado y aconsejado oportunamente en seguir una trayectoria académica con mucha nobleza y esfuerzo constante.

Al Dr. Francisco Ugarte, por confiar en que demostraría siempre lo mejor de mí.

Al Lic. Armando Blanco, mi buen amigo, por su apoyo y amistad incondicional en todo momento.

A mis colegas y alumnos de la I.E.N° 1136 "John F. Kennedy"

RESUMEN

La investigación está centrada en la enseñanza de la Programación Lineal mediada por el software GeoGebra con alumnos del quinto grado de educación secundaria, de la Institución Educativa N° 1136 “John F. Kennedy”. Este tema forma parte del Diseño Curricular Nacional y por tanto del libro texto de quinto grado de educación secundaria; sin embargo, o bien no se considera en la programación curricular anual o bien se enseña la haciendo construcciones geométricas usando lápiz y papel. Investigaciones como Malaspina (2008) y Moreno (2011), detectaron que la mayoría de alumnos no tiene nociones sobre Programación Lineal, porque no las estudiaron en el colegio, esto se debe a que la mayoría de docentes no las incluyeron en su programación curricular anual. Moreno (2011) y Reaño (2011) propusieron usar lápiz y papel para enseñar Programación Lineal, mientras que Paiva (2008), propuso usar calculadoras gráficas y el programa matemático Solver aplicado en Excel, por otra parte Sánchez & López (1999) y Coronado (2012) trabajaron con diseños y aplicaciones interactivas en Programación Lineal para internet. Nosotros proponemos usar GeoGebra como mediador de la enseñanza de la Programación Lineal, pues pensamos que con este software y las situaciones de aprendizaje propuestas a través de una serie de actividades lograremos que los alumnos puedan manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones mientras construyen el conocimiento sobre este tema y transitar por los Registros de Representación verbal, algebraico y gráfico de manera natural y espontánea, de ahí que el marco teórico elegido sea la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y el método de investigación propuesto es cualitativo y está basado en Hernández, Fernández & Baptista. (2007). Finalmente, los alumnos usando algunos comandos de GeoGebra mostraron habilidad y destreza al resolver problemas de Programación Lineal, modelaron matemáticamente situaciones reales, lograron tener mayor precisión en la intersección de regiones evitando distorsiones en los mismos, graduaron escalas y visualizaron las representaciones algebraicas de las inecuaciones a través de las representaciones gráficas vistas en la ventana de GeoGebra mostrando así un tránsito coordinado y adecuado de registros de manera natural y espontánea.

Palabras claves:

Programación lineal, Registros de Representación Semiótica y GeoGebra.

ABSTRACT

The research is focused on teaching the mediated Linear Programming with GeoGebra software fifth grade secondary education, of School No. 1136 "John F. Kennedy " This topic is part of the National Curriculum Design and therefore the fifth grade textbook high school, however, either not considered in the annual curriculum or program is taught by geometric constructions using pencil and paper. Research such as Malaspina (2008) and Moreno (2011) found that most students do not have notions of linear programming, because they didn’t studied it in school, this is because the majority of teachers not included in their annual curricular programming . Moreno (2011) and Reano (2011) proposed to use pencil and paper to teach linear programming, while Paiva (2008), proposed using graphing calculators and mathematical program implemented in Excel Solver, moreover Sanchez & Lopez (1999) and Coronado (2012) worked with designs and linear programming interactive applications for the Internet. We propose to use GeoGebra as a mediator of the teaching of Linear Programming, because we think that with this software and learning situations proposals through a series of activities that students can achieve manipulate, conjecture, outline and propose possible solutions while building the knowledge on this subject and transit through the records verbal representation, algebraic and graph naturally and spontaneously, hence the theoretical framework chosen is the Representation Theory Semiotics Records Duval (1995) and the proposed research method is qualitative and is based on Hernandez, Fernandez & Baptista. (2007). Finally, students using GeoGebra commands showed some skill and ability to solve linear programming problems, real situations mathematically modeled, managed to have greater accuracy at the intersection of regions avoiding distortions in them, graduated scales and algebraic representations visualized the inequalities through view graphical representations in GeoGebra window showing well coordinated and adequate transit records naturally and spontaneously.

Keywords:
Linear Programming, Semiotics and Representation Records GeoGebra

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO

CAPITULO IV: ANÁLISIS DEL EXPERIMENTO

CONCLUSIONES

SUGERENCIAS

REFERENCIAS

APÉNDICES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación trata sobre la mediación del software "GeoGebra", en la enseñanza de la Programación Lineal.

Hoy en día, los alumnos deben de familiarizarse y utilizar la Programación Lineal desde la educación secundaria, pues así lo establece el Diseño Curricular Nacional, y porque se encuentran aplicaciones de Programación Lineal en la solución de problemas de dietas, transporte, flujo de redes, flujo de mercancías, en microeconomía, administración de empresas, publicidad, inversiones, etc. Lo que justifica por sí misma su inclusión.

La investigación se ha dividido en cinco capítulos: en el Primer Capítulo se presentan los antecedentes, analizando algunos aspectos del Diseño Curricular Nacional así como el libro texto utilizado en quinto grado de educación secundaria donde aparece el tema de Programación Lineal (segundo capítulo); luego se presentan las investigaciones previas realizadas así como las características e importancia del software GeoGebra en la enseñanza de la Programación Lineal. Posteriormente, se desarrollan algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, creada en 1995, para terminar con la formulación de la pregunta de investigación y los objetivos de la misma.

En el Segundo Capítulo, se desarrollan aspectos fundamentales de la Programación Lineal, tomando como base el libro de Grossman (1992a, 1992b). Se hacen referencias sobre los aspectos históricos, la revisión de conocimientos previos, tales como: el concepto de rectas, ecuaciones e inecuaciones lineales con dos variables, las definiciones y teoremas a utilizar y el desarrollo de los problemas de Programación Lineal. Posteriormente, se presenta el método cualitativo, los procedimientos de la investigación y se detallan los pasos metodológicos que se aplicaron|.

En el Tercer Capítulo, se describe el escenario a nivel de los alumnos y el lugar donde se aplica el experimento; posteriormente, se presenta el diseño de las situaciones de aprendizaje para lo que se han elaborado cinco actividades en las que se relacionan en forma progresiva la adquisición de conocimientos básicos sobre Programación Lineal con problemas contextualizados y el uso y aplicación de algunos comandos de GeoGebra. Se presentan también los instrumentos de recolección de datos de la investigación.

En el Cuarto Capítulo, se realiza un análisis del experimento, comparando los aprendizajes supuestos y los aprendizajes obtenidos para realizar la validación de la propuesta. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo de investigación respondiendo a la pregunta de investigación, se analizan los objetivos propuestos y el nivel de éxito alcanzado en la secuencia de contenidos de Programación Lineal utilizados con la mediación de GeoGebra. Se mencionan también las dificultades que se han presentado en la investigación y se dan sugerencias a aplicarse, dentro del marco de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

CAPÍTULO 1: LA PROBLEMÁTICA

En este Capítulo, empezamos con la descripción de los antecedentes de la investigación analizando algunos aspectos del Diseño Curricular Nacional (D.C.N) y por ende el análisis del libro texto de quinto grado de educación secundaria según los criterios propuestos por Méndez (2012), de ahí continuamos con la justificación de nuestra investigación a través de la mención de investigaciones previas a la nuestra, describimos el software GeoGebra, sus características e importancia, luego mencionamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (R.R.S.) usado como marco teórico de nuestra investigación en el cual nos basamos para formular nuestra pregunta de investigación así como el objetivo general y los objetivos específicos realizados en la I.E. N° 1136 John F. Kennedy en Salamanca de Ate (I.E.)

1.1 Antecedentes:

Interesados en recolectar información pertinente sobre el uso de tecnologías en el Perú y la manera como está organizado la enseñanza de Programación Lineal (P.L.) en la educación secundaria, decidimos buscar las propuestas que el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) considera en el D.C.N. (2009) y hallamos que si se fomenta el uso de tecnologías apareciendo estos en los fines, objetivos y propósitos de la educación peruana.

Uno de los fines de la educación peruana que aparece en el D.C.N. es formar personas capaces de afrontar los incesantes cambios de la sociedad y el conocimiento, es decir, se debe ir a la par con el uso de tecnologías y con el conocimiento actualizado del saber.

Uno de los objetivos de la educación peruana es desarrollar aprendizajes que permitan al educando un buen uso y usufructo de las nuevas tecnologías.

Uno de los propósitos de la educación peruana es el dominio de las tecnologías de la Información y Comunicación. (T.I.C.)

Es decir, hoy en día, estamos en la obligación de usar y brindarles a los alumnos la oportunidad de usar tecnologías, es por ello que hemos elegido como una propuesta de la enseñanza de P.L. el uso del software GeoGebra, creemos que con este software los alumnos podrán manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones, mediante la técnica del arrastre con ensayo y error de sus conjeturas lo que los llevará a construir su propio conocimiento, este trabajo realizado por los alumnos coincide con el principio de construcción de los propios aprendizajes, propuesto por el MINEDU en el D.C.N.

Además, el D.C.N. organiza el área de la matemática en función a tres conocimientos: Número, Relaciones y Funciones, Geometría-Medición y Estadística- Probabilidad.

En los conocimientos de: Número, relaciones y funciones, analizamos la parte en que aparece la Programación Lineal, observemos la figura 1, donde se muestra la información sobre las capacidades del área de matemática.

En Razonamiento y Demostración: Establece la validez o la veracidad de argumentos **En comunicación matemática**: **Resolución de Problemas**: Resuelve sistema de ecuaciones mediante métodos gráficos y de Gauss Resuelve problemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas mediante métodos gráficos. Resuelve problemas de programación lineal con dos variables mediante métodos gráficos. **Contenidos o Conocimientos**: Algebraicos: Método gráfico y método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones. Inecuaciones lineales de dos incógnitas. Introducción a la programación lineal.

Figura 1. Capacidades en el D.C.N. sobre Programación Lineal
Fuente: MINEDU, 2009, p. 337

En la figura 1 observamos que en la competencia de razonamiento y demostración, se espera que los alumnos formulen conjeturas matemáticas, desarrollen y evalúen argumentos, eligiendo varios tipos de razonamientos y métodos de demostración al desarrollar el tema de P.L., por ejemplo al desarrollar sistemas de ecuaciones lineales pueden aplicar varios métodos algebraicos.

En la competencia de comunicación matemática, está en blanco, debieron indicar que los alumnos deben de organizar y comunicar su pensamiento con coherencia y claridad, expresar ideas con precisión, reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y la realidad, y aplicar lo aprendido en situaciones reales.

Esto se logra cuando los alumnos son capaces de expresar la secuencia de las estrategias que usan al desarrollar un ejercicio o problema propuesto o cuando con sus propias palabras interpretan las características de los objetos matemáticos tratados en clase pudiéndolo representar y organizar a través de mapas mentales, mapas conceptuales, resúmenes, etc.

Finalmente, observamos que en la competencia de resolución de problemas no se indica ni escribe que se deba de hacer una aplicación del tema de P.L. en problemas de la vida real, esta observación también lo corrobora el investigador Malaspina (2008) indicando que en otras área de la matemática si se realiza mas no en P.L. Este autor destaca la importancia del tema de P.L. porque brinda excelentes oportunidades de relacionar en manera creativa, formal, e intuitiva: ecuaciones e inecuaciones lineales con dos variables, funciones, geometría plana y finalmente geometría analítica, además muestra que algunos temas no son ampliados y se tratan en forma aislada en el D.C.N.

Por ejemplo, se indica que en el tercer grado de secundaria, se debe desarrollar el tema de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con dos variables, pero no aparece por escrito que deben de realizarse sus representaciones gráficas.

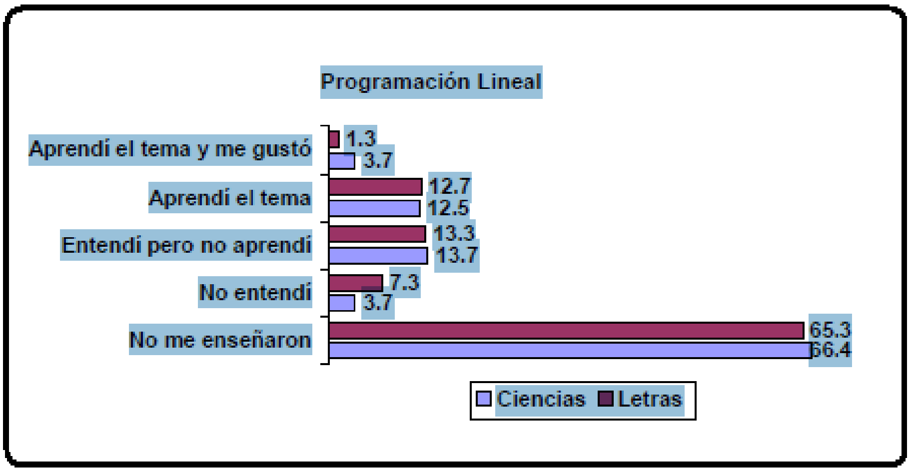
En cuanto a los contenidos relacionados con P.L. tratados en cuarto grado de secundaria tenemos que a pesar de que se trabaja con rectas y se realiza una introducción a la geometría analítica, no se trabaja con regiones en el plano determinadas por dichas rectas, finalmente, cuando se desarrolla el tema de funciones, los docentes no lo relacionan con el cálculo del máximo o en mínimo de dichas funciones en su dominio o en subconjuntos de este.

Este autor obtuvo un indicador indirecto de la brecha que había entre la enseñanza planificada y escrita en los libros de texto para quinto grado de secundaria y en el D.C.N. con lo que realmente se enseñaba o no en los colegios.

Él analizó los resultados de una población de 1610 alumnos ingresantes en el ciclo 2007-1 de esta universidad, donde el 65,3% del grupo de alumnos que ingresaron al área de letras indicaron que el tema de P.L. no se le había enseñado en su colegio de procedencia, del mismo modo, el 66.4% de alumnos del grupo de alumnos que se dirigían al área de ciencias manifestó que el tema de P.L. tampoco se les había enseñando en sus respectivos colegios de Educación Secundaria.

Esta información se muestra en la tabla 1:

Tabla1. Conocimiento previo de P.L. muy poco frecuente en los colegios de E.S.



Fuente: Malaspina, 2008 p.195

En la tabla 1, se muestra la poca atención que se le brinda al tema de P.L. en la E.S., este investigador señala que el tema de P.L. fue introducido para el quinto grado de E.S. por el MINEDU, a través del D.C.N. en el 2003, es por ello que justifica de alguna manera que por ser un contenido casi actual existan aún docentes con poca experiencia en el desarrollo de este tema.

Se buscó investigaciones en didáctica de la matemática que fundamenten nuestra investigación, así se tuvo la investigación realizada por Paiva (2008), al utilizar calculadoras gráficas y el programa matemático Solver en Excel, para enseñar Programación Lineal. Esta investigadora observó que el uso de estos recursos, en el desarrollo de su investigación, facilitaba la resolución de problemas de P.L., pero indicó que el uso de estas tecnologías no implicaba que los alumnos conocieran necesariamente procedimientos de cálculo básico en su desarrollo, por ejemplo presentar algunos errores al desarrollar operaciones aritméticas básicas.

Existen investigaciones donde se usan determinados softwares en el desarrollo de algunos temas de matemáticas, esto en respuesta a la clara necesidad de acercar a los alumnos al uso de tecnologías que pueden facilitar el aprendizaje de objetos matemáticos como las realizadas por Sánchez & López (1999) y Coronado (2012), ellos diseñaron material didáctico para internet usando el programa Java y aplicaciones interactivas para desarrollar con la ayuda o mediación de estos softwares algunos temas matemáticos.

Al concluir sus investigaciones indicaron que existe una fuerte influencia de los softwares matemáticos en el aprendizaje de determinados conceptos, finalmente los alumnos con quienes trabajaron matemática haciendo uso de tecnologías ya no querían regresar a la enseñanza tradicional de lápiz o papel o bien del uso de pizarras sino preferían usar software en aulas de clase de matemática equipadas con recursos tecnológicos.

Otra investigación que referenciamos es la de Reaño (2011), quien realizó una secuencia didáctica con lápiz y papel en el desarrollo del tema de P.L. y buscaba impulsar en los alumnos de Educación Superior, la intuición optimizadora al resolver problemas propuestos.

Del mismo modo, Moreno (2011), también realizó un estudio didáctico del tema de sistema de inecuaciones y su aplicación en P.L. usando lápiz y papel, además su investigación lo aplicó con alumnos de Educación Superior.

Esta autora también detectó a través de un sondeo a algunos docentes de Lima y Callao, que tenían poco o ningún conocimiento de P.L., por ende varios docentes decidieron quitar de su programación anual el tema de P.L. y por ello la mayoría de alumnos ingresantes al Instituto Superior Tecnológico Particular: “Simón Bolívar” en el 2007, demostraron que no lo habían trabajado en sus colegios de origen.

Consideramos importante las investigaciones referenciadas debido a que plantearon una buena secuencia de actividades utilizando lápiz y papel, así como nos permitieron detectar que en la mayoría de colegios, no se enseñaba el tema de Programación Lineal.

También, existen investigaciones donde ya se proponen evaluar en clase los aprendizajes obtenidos sobre cualquier contenido matemático usando tecnologías, Gómez (2007).

A continuación realizaremos una revisión del libro texto utilizado por los alumnos en el capítulo de P.L.

1.2 Análisis del Texto: 5 Matemática utilizado para la enseñanza de programación Lineal. (MINEDU, 2012a)

Para realizar el estudio del texto de matemática de 5to de secundaria del MINEDU (2012a) utilizaremos el modelo propuesto por Méndez (2012), quien propone nueve criterios para el análisis de los libros texto y que presentamos a continuación:

1. Objetivos. Deben presentarse con claridad y variedad para transmitir información, motivar a los alumnos, facilitar los aprendizajes, potenciar la comprensión de los procesos, suscitar actitudes, evaluar conocimientos, desarrollar la expresión y creatividad, despertar el interés por un trabajo de investigación, provocar debates, etc.

2. Contenidos. Han de ser actualizados, científicamente completos, equilibrados en sus partes, interesantes, simples y amplias. Debe utilizarse un lenguaje claro y progresivo en nuevos conceptos, evitando los párrafos largos.

3. Estilo. No debe ser rebuscado y debe tender a la claridad y sencillez, lo que no está reñido con el rigor científico. Es importante dotarle de un aire de comunicación personal y de un enfoque informal, evitando textos largos.

4. Estructura. Se debe caracterizar por una ordenada división y subdivisión de los contenidos, destacándose los títulos, las ideas claves, los términos más importantes, utilizándose la letra negrita y cuidándose el tamaño de las letras, el uso del color, etc. Se debe comenzar con frases introductoras que ofrezcan visiones de conjunto. Cada apartado debe contener ideas simples con información suficiente que incluye referencias bibliográficas y selección de textos.

5. Ilustraciones. Constituyen una parte importante, cuya finalidad es suministrar información, aclarar contenidos, hacer atractivo el texto, desarrollar la formación estética, etc., es muy importante contar con el centro de interés visual. El color, debe estar en función de la información que aporta y, por último, destacar su realismo, para que conecte con los lectores.

6. Actividades. Su planificación debe estar en relación con el desarrollo de los contenidos. Algunos autores señalan la importancia de que los ejercicios vayan marcados gráficamente en función del tipo de actividad a desarrollar. Por otro lado, se considera un elemento crucial la variedad en el tipo de actividades, combinando las de carácter individual con las grupales.

7. Adecuación al alumno que aprende. Se debe tener presente las características de los alumnos a quienes van dirigidos, sus posibilidades, limitaciones y sus problemas de aprendizaje. Esta adecuación se puede observar en la claridad, la precisión de conceptos, la rigurosidad y riqueza del lenguaje, el grado de dificultad, las técnicas de trabajo intelectual que requieren, etc.

8. Materiales adicionales. Se pueden utilizar materiales complementarios como los audiovisuales: audios, casetes, vídeos, etc.

9. Impresión del texto. Debe ser atractiva, sugerente y clara, con el fin de atraer la atención de los alumnos de secundaria.

Esta información propuesta por Méndez (2012), la utilizaremos para analizar el texto utilizado para el quinto grado de educación secundaria

Analizaremos el segundo capítulo del libro texto de quinto grado de E.S. donde aparece el tema de P.L. según los nueve criterios de análisis de libro texto propuesto por Méndez (2012) para ello empezamos con el criterio de objetivo.

Según el análisis de criterio de **objetivos**, observamos que aparece tanto en la lectura introductoria: “El Perú está de moda” así como en la descripción de aprendizajes esperados que deben lograr los alumnos para el desarrollo de este tema.

Consideramos que los alumnos deben conocer esta información, antes de empezar con el desarrollo de este contenido, así conocerán qué aprendizaje deben de potenciar y dominar en forma prioritaria, y así ellos brindarán en forma oportuna la importancia de estos temas. Ver esta información en la figura 2:

El Perú está de moda

En los últimos años, la economía peruana ha evidenciado un crecimiento claro y sostenido. Actualmente, la gastronomía, minería, industria textil, agricultura y turismo son los sectores que contribuyen en mayor medida al desarrollo del país, ya que, a su vez, benefician a otras industrias, por ejemplo, el transporte de alimentos, fábricas de menaje, fábricas agro exportadoras, industrias del acero y la madera, industria hotelera, etc.
Este crecimiento ha permitido que seamos considerados un país con una economía emergente, y esto exige conocer modelos o fórmulas que nos ayuden a establecer los precios y ofrecer la mejor oferta de un producto de calidad según su demanda. Es así que van apareciendo expresiones algebraicas para modelar situaciones relacionadas con la economía.

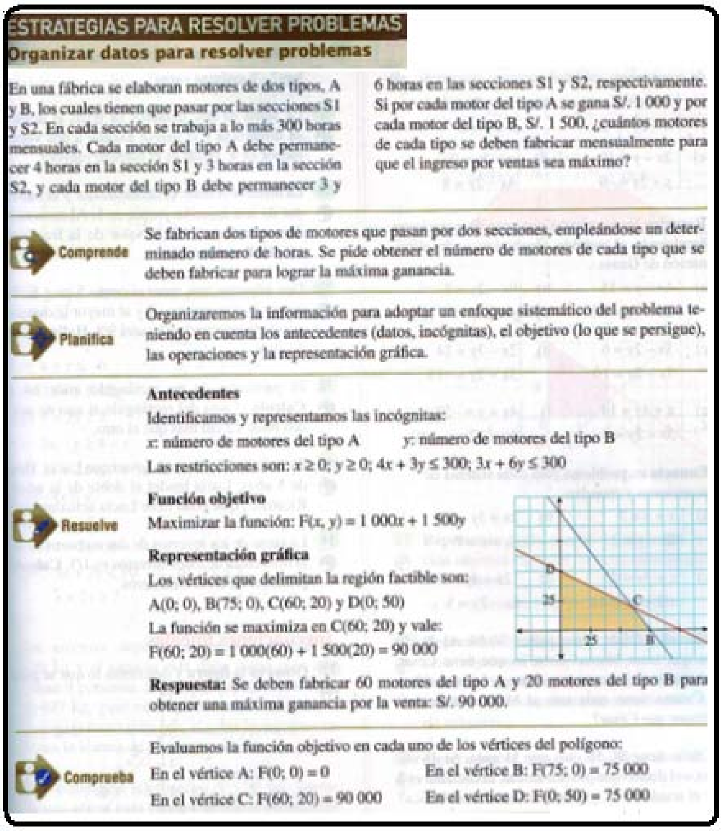
Figura 2. Criterio de Objetivos, en la lectura introductoria de P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 42

En cuanto a los aprendizajes esperados en el D.C.N. sobre P.L. lo tenemos desagregado en las capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática, resolución de problemas y actitudes como se puede ver en la figura 3:

APRENDIZAJES ESPERADOS			
Razonamiento y demostración	Comunicación Matemática (C.M.)	Resolución de Problemas (R.P.)	Actitudes
Identificar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos conjuntos. Aplicar el método de Gauss en la solución de un sistema de ecuación lineales con dos incógnitas. Evaluar la solución óptima de un problema de programación lineal.	Representar algebraicamente situaciones de conteo que involucran el uso de sistemas de ecuaciones lineales. Representar gráficamente el recinto de las restricciones de un problema de programación lineal.	Resolver sistemas de ecuaciones mediante métodos algebraicos, gráficos y de Gauss. Resolver problemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas mediante métodos gráficos. Resolver problemas de programación lineal con dos incógnitas mediante métodos gráficos.	Valorar aprendizajes desarrollados en el área como parte de su proceso formativo

Figura 3. Objetivos de la P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 43

El libro brinda además una secuencia de estrategias para que los alumnos puedan resolver adecuadamente problemas. Veamos la muestra de esta información en la figura 4:


ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Organizar datos para resolver problemas

En una fábrica se elaboran motores de dos tipos, A y B, los cuales tienen que pasar por las secciones S1 y S2. En cada sección se trabaja a lo más 300 horas mensuales. Cada motor del tipo A debe permanecer 4 horas en la sección S1 y 3 horas en la sección S2, y cada motor del tipo B debe permanecer 3 y 6 horas en las secciones S1 y S2, respectivamente. Si por cada motor del tipo A se gana S/. 1 000 y por cada motor del tipo B, S/. 1 500, ¿cuántos motores de cada tipo se deben fabricar mensualmente para que el ingreso por ventas sea máximo?

Comprende Se fabrican dos tipos de motores que pasan por dos secciones, empleándose un determinado número de horas. Se pide obtener el número de motores de cada tipo que se deben fabricar para lograr la máxima ganancia.

Planifica Organizaremos la información para adoptar un enfoque sistemático del problema teniendo en cuenta los antecedentes (datos, incógnitas), el objetivo (lo que se persigue), las operaciones y la representación gráfica.

Resuelve

Antecedentes

Identificamos y representamos las incógnitas:

x: número de motores del tipo A $\quad$ y: número de motores del tipo B

Las restricciones son: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $4x + 3y \leq 300$; $3x + 6y \leq 300$

Función objetivo

Maximizar la función: $F(x, y) = 1\,000x + 1\,500y$

Representación gráfica

Los vértices que delimitan la región factible son:

A(0; 0), B(75; 0), C(60; 20) y D(0; 50)

La función se maximiza en C(60; 20) y vale:

$F(60; 20) = 1\,000(60) + 1\,500(20) = 90\,000$

Respuesta: Se deben fabricar 60 motores del tipo A y 20 motores del tipo B para obtener una máxima ganancia por la venta: S/. 90 000.

Comprueba Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices del polígono:

En el vértice A: F(0; 0) = 0 $\quad$ En el vértice B: F(75; 0) = 75 000

En el vértice C: F(60; 20) = 90 000 $\quad$ En el vértice D: F(0; 50) = 75 000

Figura 4. Objetivos como estrategias de P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 63

En cuanto al criterio de **contenido**, observamos que el concepto de P.L. no está completo, en Grossman (1992b) se indica que la programación lineal, es un método que trata de optimizar: maximizar o minimizar una función lineal con “n” variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales en “n” variables.

Un problema de programación lineal tiene la siguiente forma estándar:

> Problema estándar de programación lineal:
>
> Determínese el vector $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ en Rn que maximícese o minimícese la función lineal $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n,$
> Sujetas a las $m + n$ inecuaciones lineales:
>
> $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \leq b_1$$
> $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \leq b_2$$
> $$. \quad . \quad . \quad .$$
> $$. \quad . \quad . \quad .$$
> $$a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leq b_m$$
> $$x_1 \geq 0,$$
> $$x_2 \geq 0$$
> $$\ldots \quad \ldots$$
> $$\ldots \quad \ldots$$
> $$x_n \geq 0$$
>
> F, recibe el nombre de función objetivo del problema de P.L. Al conjunto solución de las inecuaciones lineales, se le llama conjunto restricción del problema. (p.27)

Trabajaremos en la presente investigación el caso de $n=2$

Mientras que en la figura 5 podemos ver que solo se dice que la P.L. facilita la resolución de problemas de producción, economía, rendimiento, etc. mas no que sea un MÉTODO matemático. Observe lo mencionado en la figura 5:

Introducción a la programación lineal

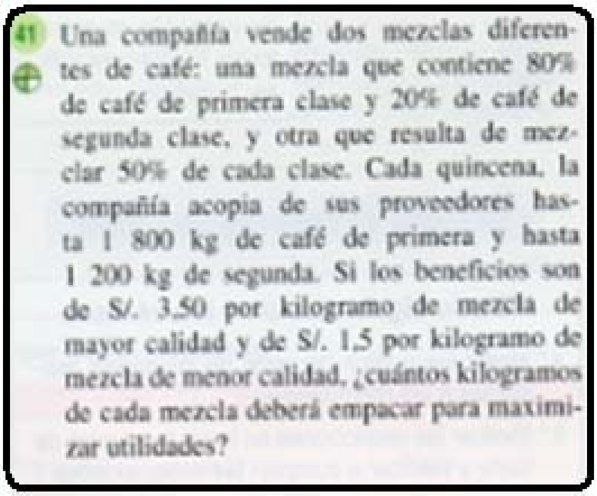
La programación lineal facilita la resolución de problemas de producción, economía, rendimiento, etc. Resolver un problema de programación lineal consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada función objetivo, estando las variables sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales. El conjunto de todas las soluciones posibles se denomina conjunto solución factible. Para resolver problemas de programación lineal se siguen tres pasos: planteamiento, determinación de la región factible y determinación de la solución óptima.

Figura 5. Criterio de contenido: definición de P.L, en el libro texto de quinto. Fuente: MINEDU, 2012a, p. 55

Es decir que no se hace la diferencia entre objeto matemático y el concepto de método o estrategias utilizado en la resolución de problemas. De ahí que

En cuanto al criterio de **estilo**, hemos observado que se presentan una gran cantidad de ejercicios y problemas propuestos al final del capítulo, son 41 problemas, redactados en párrafos largos, sin espacios entre ellos, en consecuencia la lectura no es sencilla ni clara convirtiéndola en su lugar en una lectura tediosa. El aire de comunicación personal a los alumnos de forma ágil y sencilla presentada al inicio en las explicaciones se pierde en esta parte operativa.

Observemos este análisis en la figura 6:



41 Una compañía vende dos mezclas diferentes de café: una mezcla que contiene 80% de café de primera clase y 20% de café de segunda clase, y otra que resulta de mezclar 50% de cada clase. Cada quincena, la compañía acopia de sus proveedores hasta 1 800 kg de café de primera y hasta 1 200 kg de segunda. Si los beneficios son de S/. 3.50 por kilogramo de mezcla de mayor calidad y de S/. 1.5 por kilogramo de mezcla de menor calidad, ¿cuántos kilogramos de cada mezcla deberá empacar para maximizar utilidades?

Figura 6. Criterio de estilo en problemas de P.L. en el libro texto de quinto
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 67

En cuanto al criterio de **estructura,** analizamos los contenidos y vimos que existe una apropiada secuencia de contenidos.

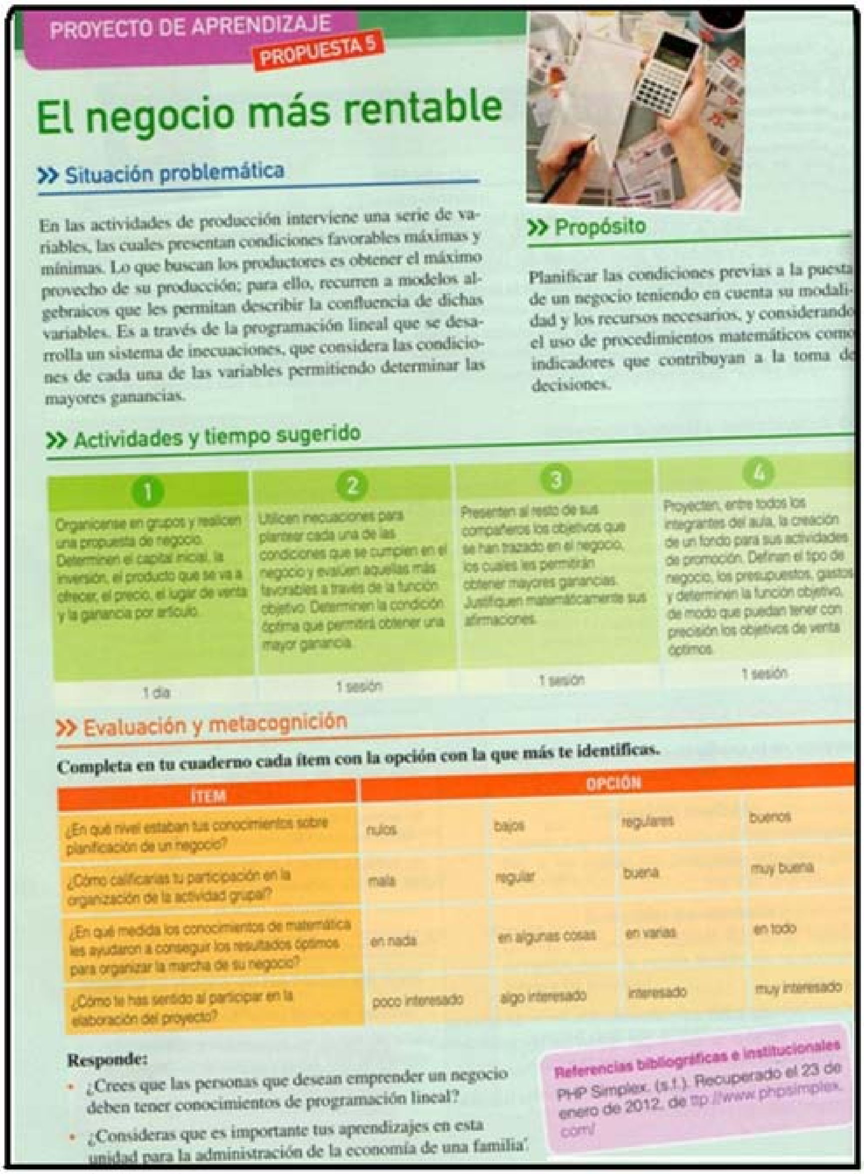
El orden de la secuencia temática que propone el libro texto es el siguiente:

- ✓ Lectura Motivadora: El Perú está de moda.
- ✓ Ecuaciones lineales con una incógnita.
- ✓ Regiones en el plano determinadas por rectas.
- ✓ Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales, método gráfico, método de reducción, de igualación y método de Gauss Jordán. Inecuaciones lineales con dos incógnitas
- ✓ Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Introducción a la P.L.
- Métodos de Optimización Lineal: método algebraico o de los vértices y método gráfico o de las rectas de nivel.
- Tipos de soluciones: Solución única, solución múltiple, solución no acotada, solución no factible.
- La estrategia para resolver problemas: Organización de datos.
- Proyecto de aprendizaje, como el conocer la obtención del índice de masa corporal, el negocio más rentable y la economía que crece.

Observamos que el libro texto en comparación con otros libros de quinto de secundaria no desarrolla el tema de intervalos así como operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento de intervalos, debido a que no se utilizan en P.L.

Finalmente, se observa luego de desarrollar el tema de P.L. que se propone tres proyectos de aprendizaje donde se determina el índice de masa corporal de los alumnos, se conoce el negocio más rentable y se aplica a una economía que crece, Veamos el proyecto del negocio más rentable en la figura 7:


PROYECTO DE APRENDIZAJE

PROPUESTA 5

El negocio más rentable

Situación problemática

En las actividades de producción interviene una serie de variables, las cuales presentan condiciones favorables máximas y mínimas. Lo que buscan los productores es obtener el máximo provecho de su producción; para ello, recurren a modelos algebraicos que les permitan describir la confluencia de dichas variables. Es a través de la programación lineal que se desarrolla un sistema de inecuaciones, que considera las condiciones de cada una de las variables permitiendo determinar las mayores ganancias.

Propósito

Planificar las condiciones previas a la puesta de un negocio teniendo en cuenta su modalidad y los recursos necesarios, y considerando el uso de procedimientos matemáticos como indicadores que contribuyan a la toma de decisiones.

Actividades y tiempo sugerido

1	2	3	4
Organícense en grupos y realicen una propuesta de negocio. Determinen el capital inicial, la inversión, el producto que se va a ofrecer, el precio, el lugar de venta y la ganancia por artículo.	Utilicen inecuaciones para plantear cada una de las condiciones que se cumplen en el negocio y evalúen aquellas más favorables a través de la función objetivo. Determinen la condición óptima que permitirá obtener una mayor ganancia.	Presenten al resto de sus compañeros los objetivos que se han trazado en el negocio, los cuales les permitirán obtener mayores ganancias. Justifiquen matemáticamente sus afirmaciones.	Proyecten, entre todos los integrantes del aula, la creación de un fondo para sus actividades de promoción. Definan el tipo de negocio, los presupuestos, gastos y determinen la función objetivo, de modo que puedan tener con precisión los objetivos de venta óptimos.
1 día	1 sesión	1 sesión	1 sesión

Evaluación y metacognición

Completa en tu cuaderno cada ítem con la opción con la que más te identificas.

ÍTEM	OPCIÓN			
¿En qué nivel estaban tus conocimientos sobre planificación de un negocio?	nulos	bajos	regulares	buenos
¿Cómo calificarías tu participación en la organización de la actividad grupal?	mala	regular	buena	muy buena
¿En qué medida los conocimientos de matemática les ayudaron a conseguir los resultados óptimos para organizar la marcha de su negocio?	en nada	en algunas cosas	en varias	en todo
¿Cómo te has sentido al participar en la elaboración del proyecto?	poco interesado	algo interesado	interesado	muy interesado

Responde:

- ¿Crees que las personas que desean emprender un negocio deben tener conocimientos de programación lineal?
- ¿Consideras que es importante tus aprendizajes en esta unidad para la administración de la economía de una familia?

Referencias bibliográficas e institucionales

PHP Simplex. (s.f.). Recuperado el 23 de enero de 2012, de tp://www.phpsimplex.com/

Figura 7. Criterio de estructura con proyectos de aprendizaje en el libro texto de quinto
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 70

Continuando con el criterio de **estructura**, indicamos que se observa ideas claves, términos importantes y se usa color solo en la explicación de nuevos contenidos y procedimientos de solución, cabe señalar que cuando se presentan ejercicios y problemas en la parte final del capítulo, las características de este criterio se pierde, debido a que no hay color ni ayuda en ideas claves. Veamos este análisis en la figura 8:

Determinación de la región factible

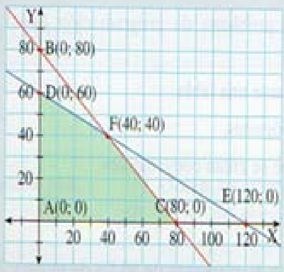
La solución de un problema de programación lineal debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de región factible, y puede estar o no estar acotada. Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.

EJEMPLO 15

Determina la región factible del problema de la página anterior (ejemplo 14)

- El sistema que se va a graficar es:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \\ 0{,}2x + 0{,}4y \leq 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \\ x + 2y \leq 120 \end{cases}$$



- Determinamos las soluciones de los seis sistemas que se forman:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ A(0; 0) B $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 80 \end{cases}$ B(0; 80)

C $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 80 \end{cases}$ C(80; 0) D $\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$ D(0; 60) E $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$ E(120; 0) F $\begin{cases} x + y = 80 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$ F(40; 40)

La solución es una región factible acotada. Su representación gráfica es el polígono ACFD.

Ten en cuenta

- $x \geq 0$ e $y \geq 0$ indican que la región está en el primer cuadrante.
- La zona coloreada pertenece a la región factible. Los lados son los segmentos por los que pasan las rectas $x = 0$, $y = 0$; $x + y = 80$ y $x + 2y = 120$. Los vértices son los puntos A(0; 0), C(80; 0), F(40; 40) y D(0; 60).

Figura 8. Criterio de estructura en la presentación de contenidos sobre P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 56

En cuanto al criterio de **ilustraciones** se suelen usar solo en las explicaciones de nuevos problemas y ejercicios en forma clara y apropiada, veamos este análisis en la figura 9:

	Insumos por panetón		Disponibilidad por día (kg)
	Especial	Premium	
Masa (kg)	1	1	80
Frutas (kg)	200 g = 0,2 kg	400 g = 0,4 kg	24
Precio (S/.)	18	24	

Identificamos y representamos las incógnitas:

x: número de panetones especiales y: número de panetones premium

Determinamos las restricciones:

– De insumos: masa ▸ $x + y \leq 80$ frutas ▸ $0{,}2x + 0{,}4y \leq 24$

– De no negatividad, x e y son valores enteros no negativos: $x \geq 0$; $y \geq 0$

Como $18x$ es el ingreso total por la venta de los panetones especiales y $24y$ por la de los panetones premium, entonces la función objetivo que determina el máximo ingreso es: $F(x; y) = 18x + 24y$.

Ten en cuenta

La función objetivo está determinada por la relación lineal existente entre el precio de cada producto y la cantidad que se prepara de él.

Figura 9. Criterio de Ilustración en el libro texto de quinto sobre P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 55

En el libro texto se ha utilizado una tabla y se explica paso a paso el procedimiento a seguir para ubicar los datos y deducir la función objetivo.

Lamentablemente, cuando evalúan en los vértices de la región factible, presentan una tabla para rellenar con un: “si cumple” o “no cumple”, esto puede generar en los alumnos confusiones, porque ellos solo tendrían una representación verbal redactada en la tabla, pero no una representación gráfica de lo que representa en el plano cartesiano. Observemos este análisis en la figura 10:

Determinamos los vértices de la región factible. Para ello, evaluamos las restricciones en todos los puntos obtenidos y verificamos si cumplen las desigualdades:

	$x \geq 0$	$y \geq 0$	$x + y \leq 80$	$3x + 2y \leq 180$
A (0; 0)	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple
B (0; 80)	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple
C (20; 60)	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple
D (60; 0)	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple
E (80; 0)	Sí cumple	Sí cumple	Sí cumple	No Cumple
F (0;90)	Sí cumple	Sí cumple	No Cumple	Sí cumple

Figura 10. Criterio de Ilustración en el l libro texto de quinto sobre P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 57

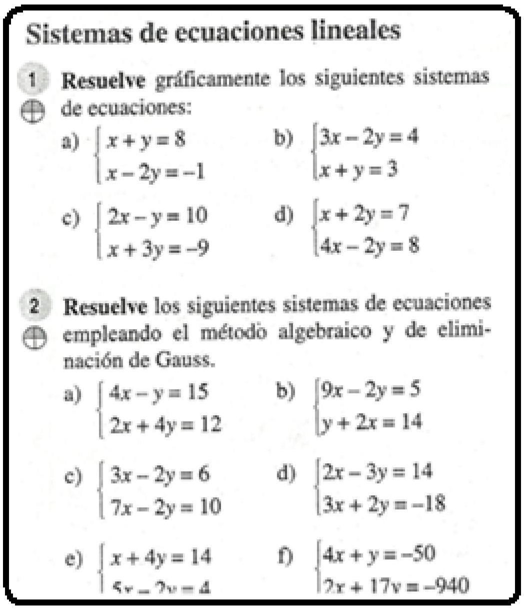
En cuanto al criterio de **actividades** programadas: Estas son excesivas como se mencionó en el criterio de estilo, y no presentan a los alumnos la respuesta de dichos ejercicios ni en ese capítulo ni al final del libro, limitando así, las posibilidades de algunos alumnos que suelen adelantarse al desarrollo de ejercicios y obligarlos a que estén supeditados únicamente al constante apoyo del docente en clase. Veamos en la siguiente figura 11, estas actividades excesivas sin clave de respuestas:

41. Una compañía vende dos mezclas diferentes de café: una mezcla que contiene 80% de café de primera clase y 20% de café de segunda clase, y otra que resulta de mezclar 30% de cada clase. Cada quincena la compañía acopia de sus proveedores hasta 1800 kg de café de primera y hasta 1200 kg. de segunda. Si los beneficios de S/. 3,50 por kilogramo de mezcla de mayor calidad y de S/.1,5 por kilogramo de mezcla de menor calidad ¿Cuántos kilogramos de cada mezcla deberá de empacar para maximizar las utilidades?

Figura 11. Criterio de actividades en el libro texto de quinto sobre P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 67

Como se puede observar no se tiene las soluciones de los problemas propuestos, vemos que son varios problemas, en total cuarenta y uno, que se presentan muy aglomerados, sin espacio para realizar dibujos y sin la posibilidad de verificar que las respuestas obtenidas por los alumnos sean correctas o no dependiendo mucho de la asistencia de los profesores.

Aquí otro grupo de ejemplos donde tampoco se presentan las soluciones. Ver figura 12



Sistemas de ecuaciones lineales

1 **Resuelve** gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y=8 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=10 \\ x+3y=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 4x-2y=8 \end{cases}$

2 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método algebraico y de eliminación de Gauss.

a) $\begin{cases} 4x-y=15 \\ 2x+4y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x-2y=5 \\ y+2x=14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 7x-2y=10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y=14 \\ 3x+2y=-18 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+4y=14 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x+y=-50 \\ 2x+17y=-940 \end{cases}$

Figura 12. Criterio de actividades en el libro texto de quinto sobre P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 58

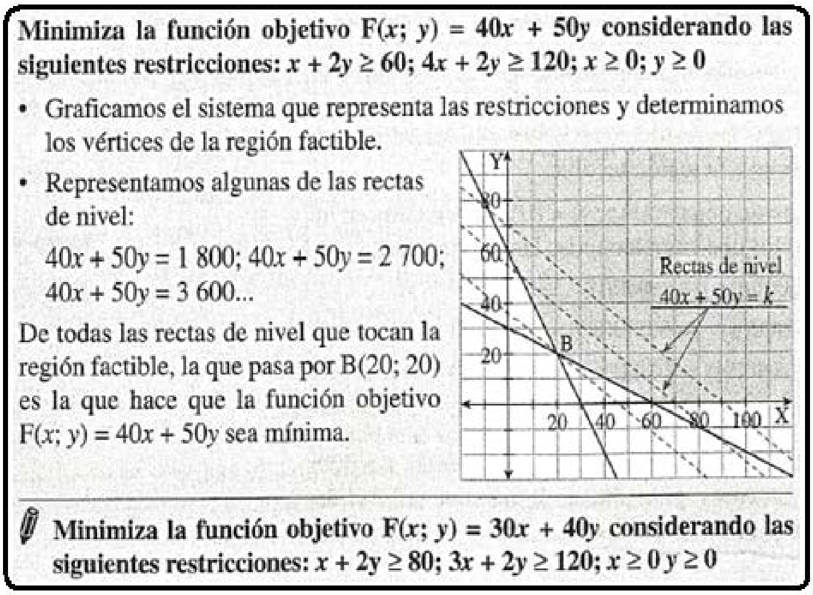
En cuanto al criterio de **adecuación** de la definición de Programación Lineal sólo faltó precisar que la P.L.es un método matemático el cual ya lo hemos tratado en el criterio de contenidos, por lo demás si es apropiada la definición de P.L.

Por otro lado nos parece que el método gráfico utilizado para resolver problemas de P.L. con rectas de nivel, podría crear dificultades en los alumnos de quinto grado debido a que es el procedimiento de mover y desplazar la recta de nivel es parte de la geometría dinámica y no de una geometría plana.

Entendemos por geometría dinámica cundo en tempo real se pueden mover ciertos elementos de alguna construcción luego de haberlo dibujado en un programa informático, en el cual se altera las condiciones iniciales de esta figura a través del arrastre, este concepto fue introducido por Nick Jackiw y Steve Rasmussen, mientras que el concepto de

Geometría Plana se dan en construcciones en forma estáticas cuando se usan solo regla y compás.

Veamos en la figura 13 como se le pide a los alumnos mover las rectas de nivel y graficarlos en el plano cuando se está trabajando en geometría plana y no en geometría dinámica sin entender por qué lo hace y para qué sirve esto y mucho menos el saber qué representa?



Minimiza la función objetivo F(x; y) = $40x + 50y$ considerando las siguientes restricciones: $x + 2y \geq 60$; $4x + 2y \geq 120$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

- Graficamos el sistema que representa las restricciones y determinamos los vértices de la región factible.
- Representamos algunas de las rectas de nivel:
  $40x + 50y = 1\,800$; $40x + 50y = 2\,700$; $40x + 50y = 3\,600$...

De todas las rectas de nivel que tocan la región factible, la que pasa por B(20; 20) es la que hace que la función objetivo F(x; y) = $40x + 50y$ sea mínima.

Minimiza la función objetivo F(x; y) = $30x + 40y$ considerando las siguientes restricciones: $x + 2y \geq 80$; $3x + 2y \geq 120$; $x \geq 0$ $y \geq 0$

Figura 13. Criterio de adecuación en el libro texto de quinto sobre P.L.
Fuente: MINEDU, 2012a, p. 58

1.3 Justificación del tema de investigación

Consideramos importante esta investigación, porque en la práctica profesional, hemos detectado que el tema de P.L. es desconocido por la mayoría de alumnos en la E.S., limitándose el desempeño de los alumnos.

La P.L. ha sido enseñada en el Perú usando secuencias de lápiz y papel, pero existen investigaciones donde se usan otros recursos por ejemplo las calculadoras gráficas, Excel y aplicaciones interactivas para internet. Por ello, proponemos enseñar este tema a través de la mediación del software de geometría dinámica: GeoGebra.

Como resultado de esta investigación pensamos que los ambientes tecnológicos en el proceso de enseñanza aprendizaje influyen de una manera favorable en el aprendizaje de

P.L., por eso escogimos GeoGebra, porque a través de este, los alumnos tendrán la posibilidad de: manipular, conjeturar, esbozar y probar hipótesis de solución mientras construyen el conocimiento sobre el tema al resolver problemas en forma analítica y gráfica. Como observamos estamos en un mundo de constantes cambios muchos de los cuales proponen software que favorecen la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje y nuestro sistema educativo debe de tomar dichos aportes para lo cual los docentes deben de conocerlos y adaptarse a dichos cambios.

Veamos una cita de la investigadora Gómez (2007), quien comentó al respecto:

> Basta con voltear a nuestro alrededor para constatar no solo este acelerado desarrollo sino la forma en que se ha modificado nuestro entorno: hogar, trabajo, transporte, comunicación y espacios educativos; si lo comparamos con cinco o diez años atrás veremos que ahora encontramos computadoras ligadas a nuestra vida. (p.7)

Otra de las razones del por qué se considera este un tema importante a ser desarrollado en la presente investigación es por la poca o casi nula valoración que se le ha dado al tema de P.L durante su enseñanza en el quinto grado de E.S., ya que este no se considera en la programación anual de trabajo del docente a pesar de que está consignado en el D.C.N.

Coronado, citado por Moreno (2011), menciona:

> Actualmente la utilidad de los métodos de la Programación Lineal es de tal magnitud que se han estimado de una manera general que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de programación lineal entonces su Producto Bruto Interno (PBI) aumentaría entre un 10 y un 15 % en tan solo un año. (p.38)

Este aporte se debe a la experiencia realizada en 1958 cuando se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador *Strena* durante 10 días del mes de junio, observándose que se rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Hasta el momento no se ha desarrollado alguna investigación donde se plantee enseñar P.L. mediado con GeoGebra y consideramos que puede haber resultados favorables en el proceso de enseñanza y aprendizaje en los alumnos, de ahí que tenemos interés en desarrollar esta investigación.

En este sentido, el desarrollo de la presente investigación puede traer muchos beneficios en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática a nivel escolar para alumnos de E.S. en el tema de P.L con la mediación de GeoGebra.

Para ello nos basamos en los aportes de las investigaciones realizadas por Sánchez & López (1999), Gómez (2007), Malaspina (2008), Paiva (2008), Reaño (2011), Moreno (2011) y Coronado (2012), los cuales ya fueron tratados en los antecedentes de la investigación.

Todos ellos nos motivaron a formular nuestra propia sugerencia de enseñar P.L. a través de la mediación del software GeoGebra, que es un software de geometría dinámica aplicado en todos los niveles de educación y dirigido tanto para profesores como para alumnos; este programa fue creado por los esposos Markus y Judith Hohenwarter, quienes trabajaron con este software desde el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y posteriormente en la Universidad de Atlantic, Florida, Estados Unidos.

Algunas características del software GeoGebra:

1. Es un software de uso libre para desarrollar matemática.

2. Es un software de geometría dinámica que facilita la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en temas como Geometría, Aritmética, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística.

3. Es un software portátil, porque está realizado en Java 6, por ello, los alumnos lo pueden grabar en un USB.

4. Este software se puede ejecutar en Windows, Mac 0S X, Linux o Solaris.

5. El espacio destinado al usuario está dividida en tres partes, llamadas ventanas o vistas distribuidas de la siguiente manera: observamos que la ventana algebraica se ubica a la izquierda y la ventana gráfica se ubica a la derecha de la pantalla mientras que debajo de estas aparece la ventana de entrada.

En la parte superior de la ventana algebraica y de la gráfica aparece la barra de menús (arriba) y la de herramientas (abajo). Ver esta información en la figura 14:

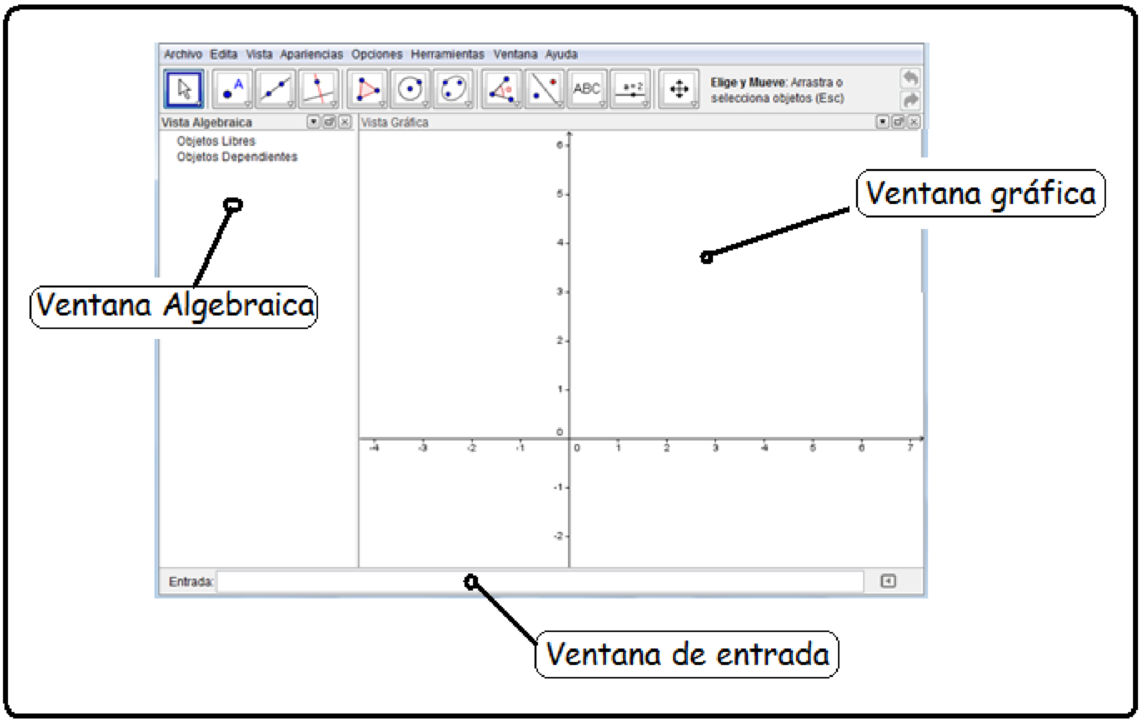


Figura 14. Ventana principal de GeoGebra.

7. Para fines de nuestra investigación hemos usamos la versión de GeoGebra 4.2, la cual nos permite visualizar en la pantalla de GeoGebra los conceptos matemáticos escritos de forma algebraica y representarlos simultáneamente en forma gráfica a través de su ventana gráfica, de ahí que los alumnos pueden experimentar con las matemáticas.

Importancia de usar GeoGebra en la enseñanza de la P.L.

El software brinda diversas posibilidades a los alumnos para mejorar su aprendizaje en la enseñanza de la P.L, por ejemplo el uso de este software facilita la posibilidad de visualizar objetos matemáticos y sus conexiones tanto en una ventana gráfica como en una ventana algebraica, a través de la manipulación de objetos usando la ventana de entrada del GeoGebra, de esta manera, se disminuye la memorización de conceptos.

Del mismo modo, los alumnos pueden hacer uso de la propiedad del “arrastre”, con lo cual es posible determinar la región factible, también hacen uso del cambio de escalas con el zoom de GeoGebra, de este modo obtienen gráficos precisos y no distorsionados de un problema al resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

Otra de las bondades es que al ser portátil y libre, los alumnos tendrán la posibilidad de reforzar en casa sus tareas según su propio ritmo de aprendizaje, además los profesores tendrán más tiempo en dar un significado adecuado a los conceptos de los alumnos y validar las respuestas de ellos en clase.

Algunos comandos de GeoGebra:

Para el desarrollo de las actividades elaboradas sobre problemas de P.L., se debe presentar algunos comandos que se usará del software GeoGebra y que los puede ver en la Actividad N°1 del Apéndice.

MARCO TEÓRICO

1.3.3 Teoría de Registro de Representación Semiótica:

El trabajo se basa en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, creada en 1995, este investigador define a los Registros de Representaciones Semiótica (R.R.S.), como producciones constituidas por el medio que disponen los individuos para exteriorizar las representaciones mentales, a fin de hacerlos visibles o accesibles a otros, ya que estos son procesos cognitivos.

Veamos la información expuesta en la figura 15:

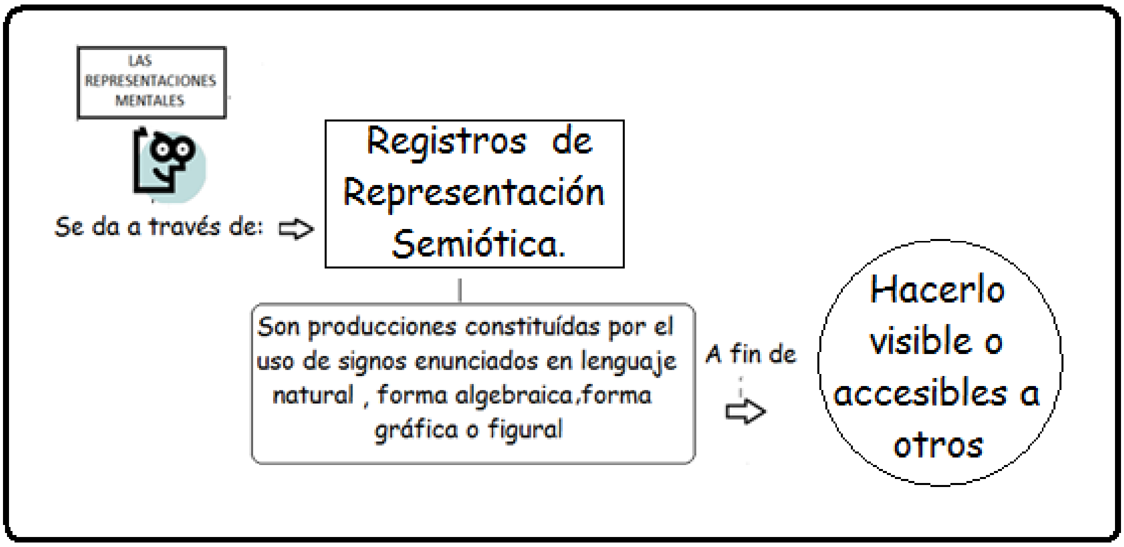


Figura 15. Concepto de Registro de Representación Semiótica

Así, las Representaciones Semióticas, en el sentido de Duval (1995), están subordinadas a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación, este autor indica que las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, una situación y sobre lo que está asociado.

El investigador afirma, que en matemática los R.R.S. no solamente se usan para fines de comunicación, sino también son utilizados en toda actividad cognitiva del pensamiento al realizar matemática.

La actividad matemática sobre un objeto determinado se realiza a través de Registros de Representación Semióticas, ver la figura 16, la relación entre actividades matemáticas con dichos R.R.S.:

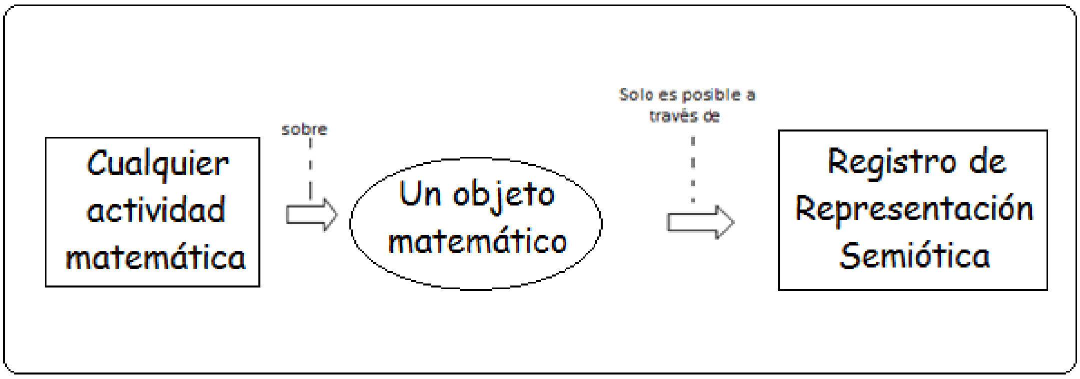


Figura 16. Relación de actividades matemáticas y los Registros de Representación Semióticas

Los Registros de Representación Semiótica, propuestos por este autor, son clasificados en registros discursivos y los registros no discursivos; en la primera clasificación encontramos los R.R.S. de forma verbal y algebraica, mientras que en la segunda clasificación encontramos los R.R.S. de forma gráfica y figural. Ver esta información esquematizada en la figura 17:

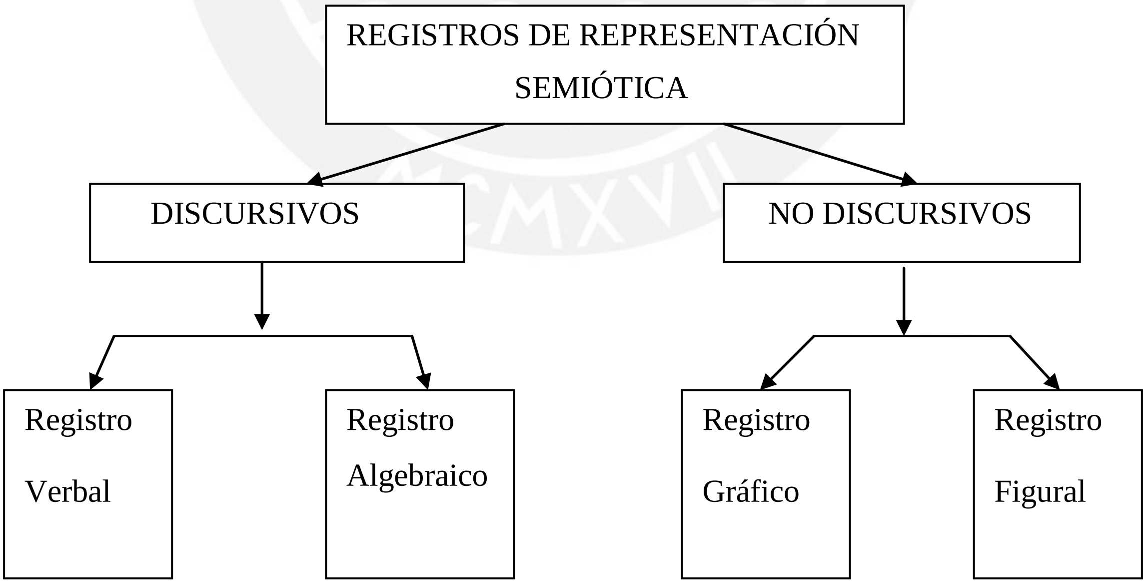


Figura 17. Clasificación de Registros de Representación Semiótica

De aquí, se trabaja en general, con la clasificación de los R.R.S. de Duval (1995), en cuatro tipos de R.R.S. siendo esto: verbal, algebraico, gráfica y figural. Ver esta información en la figura 18:

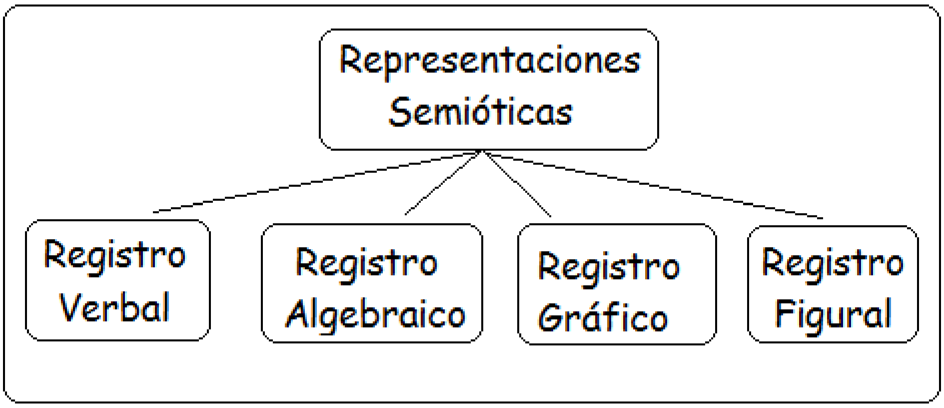


Figura 18. Tipos de Registros de Representación Semiótica

Duval afirma que en matemática hay que distinguir los objetos de sus respectivas representaciones, por ejemplo son algunos objetos matemáticos: las funciones lineales, las funciones cuadráticas, las ecuaciones, las inecuaciones, los sistemas de ecuaciones, los sistemas de inecuaciones etc., mientras que para representarlos tenemos la grafica de funciones, grafica de parábolas , grafica de líneas rectas, la grafica de regiones, etc.

Por ejemplo en la siguiente figura 19, se representa los tipos de Registros de Representación Semiótica para un ejercicio del tema de inecuaciones lineales, como objeto matemático.

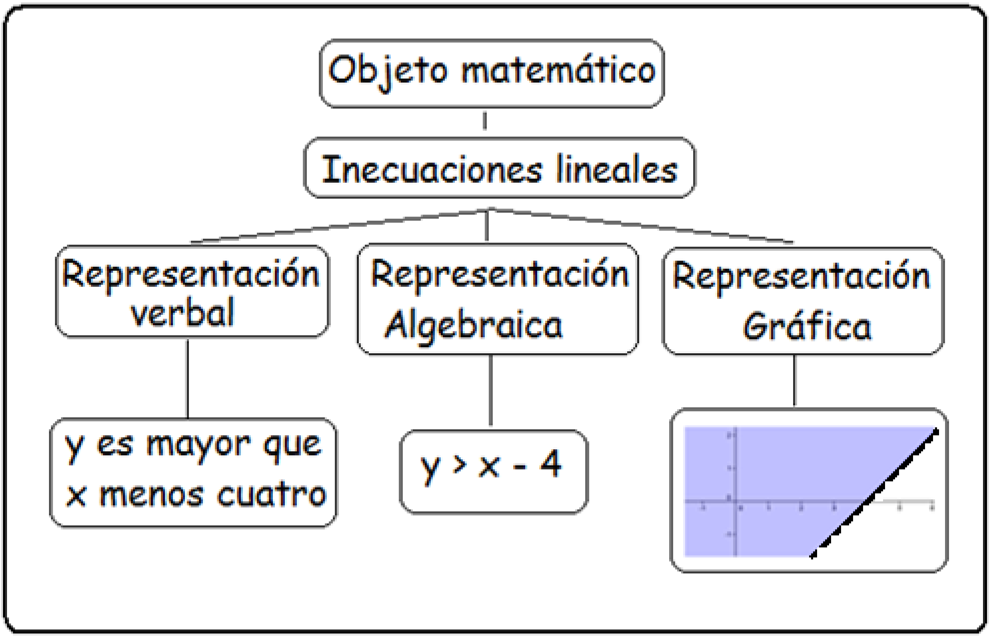


Figura 19. Ejemplo de tipos de Registro de Representación Semiótica con inecuaciones

Para Duval (2004), el tránsito entre los diferentes Registros de la T.R.R.S. que mostramos en la figura 27, tiende a favorecer las actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos, es por ello que los alumnos deben de transitar entre varios tipos de registros, por lo menos dos, a fin de afirmar que se aprendió un determinado concepto matemático, una situación o un proceso.

Para el autor, este tránsito entre Registros de Representación Semiótica, debe hacerse en forma natural y espontánea, y se logran cuando los diferentes Registros de Representación Semiótica representan para el alumno el mismo objeto.

Para Duval los Registros de Representación Semiótica pasan por dos transformaciones: los tratamientos y las conversiones.

a) **El tratamiento** de una representación: es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquí se utiliza las reglas de funcionamiento, no se moviliza más que un sólo registro de representación.

   Lo observamos cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro. Observemos esta afirmación en el siguiente ejemplo sobre expresiones equivalentes en forma algebraica de una inecuación lineal con dos variables en la figura 20:

$$2x+3y \leq 1500$$

$$3y \leq 1500 - 2x$$

$$y \leq \frac{1500-2x}{3}$$

Figura 20. Ejemplo de tratamiento

b) **La conversión** de una representación, es una transformación que hace pasar de un registro a otro, requiere de su coordinación por parte del sujeto que la efectúa, es decir, que la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

En la figura 21, se presenta un problema propuesto por Moreno (2009) sobre "Naranjos y manzanos", donde apreciamos la producción de diferentes Registros de Representaciones Semiótica frente a la percepción o comprensión del enunciado verbal del problema.

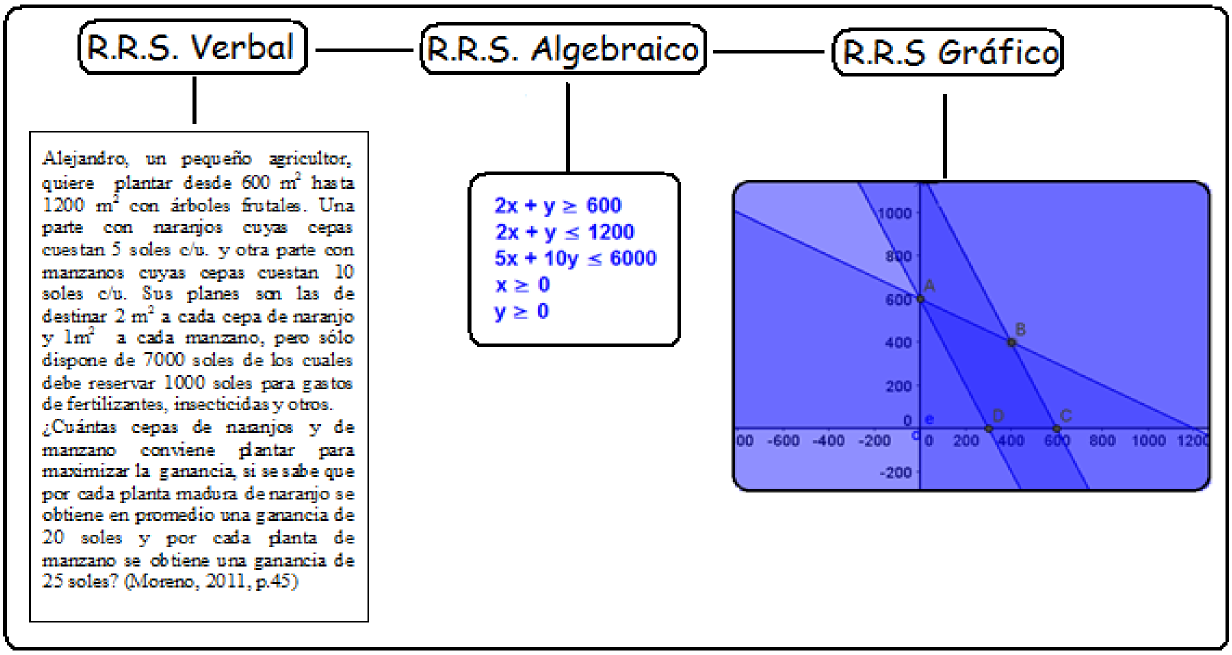


Figura 21. Ejemplo de conversión entre Registros de Representación Semiótica.

En el aprendizaje de las matemáticas, lamentablemente, los objetos matemáticos no son fácilmente accesibles a la percepción de los alumnos, por ello son necesarios los Registros de Representación Semiótica en la formación del pensamiento humano.

A diferencia de otros campos del conocimiento, no existe en matemática otra manera de acceder a dichos objetos matemáticos sino es, a través de, la producción de Registros de Representación Semiótica.

Para el aprendizaje de la matemática es necesario que los alumnos tengan la habilidad para cambiar el Registro de Representación Semiótica de forma espontánea o natural pero es aquí donde aparecen las dificultades en los alumnos, porque en la coordinación dichos Registros de Representación Semiótica presentan dificultades u obstáculos y esta transformación ya no es evidente, porque no reconocen el objeto en diferentes Registros de Representación Semiótica, en consecuencia son llevados al fracaso o bien al desinterés por esta materia.

La buena coordinación entre los Registros de Representación Semiótica, llevará a los alumnos un buen desarrollo cualitativo en el logro de sus competencias de aprendizaje en matemática, demostrando tener habilidad para usar los conocimientos adquiridos con flexibilidad en diferentes contextos a lo que en el D.C.N se lo llama competencia en matemática.

Hemos finalizado la revisión de la literatura pertinente a nuestra investigación con el tema de Registros de Representación Semiótica ahora formularemos el problema de investigación y los propósitos de nuestra investigación indicando lo que pretendemos lograr al finalizar la investigación.

1.4. Preguntas de investigación y Objetivos

La problemática analizada muestra que existen obstáculos en el aprendizaje del tema de Programación Lineal, ya que los docentes usan como un único recurso el lápiz y papel, o bien al no dominar este tema los docentes lo excluyen de la programación curricular anual, también hemos observado en el aprendizaje de este tema que el tránsito de R.R.S no es evidente ni natural. La enseñanza tradicional demuestra que el método de lápiz y papel tiene limitaciones, la cual no favorece las diferentes representaciones sobre un mismo objeto en una misma actividad intelectual, y sólo están centrados en los contenidos en el desarrollo de las clases.

Creemos que la presencia del GeoGebra podría facilitar en los alumnos una correspondencia entre algunos R.R.S. Es así que nos planteamos la siguiente pregunta y objetivos de la investigación.

Pregunta de investigación:

¿La mediación del software GeoGebra favorece el aprendizaje de Programación Lineal transitando por los Registro de Representación: verbal, algebraico y gráfico en alumnos del quinto grado de Educación secundaria?

Objetivos Generales:

Diseñar una propuesta de actividades mediadas por el software GeoGebra que favorece el aprendizaje de la Programación Lineal y que permita a los alumnos transitar entre los Registros de Representación verbal, algebraico y gráfico al resolver problemas contextualizados en alumnos de quinto grado de E.S. de la I.E.

Objetivo Específicos:

1. Construir actividades mediadas por el software GeoGebra para el aprendizaje de Programación Lineal que favorezcan la solución de problemas contextualizados.
2. Analizar el tránsito de registros de representación verbal, algebraico y gráfico al resolver problemas contextualizados de Programación Lineal

CAPÍTULO II: PROGRAMACIÓN LINEAL, MÉTODO Y PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

En el desarrollo de este Capítulo, presentamos los aspectos históricos del tema de P.L., basados en Taborda (2010) y Coronado (2012), luego nos basamos en Grossman (1992a, 1992b) para desarrollar los fundamentos matemáticos sobre programación lineal. Finalmente, terminamos con la presentación del método y de los procedimientos para el desarrollo de la presente investigación.

2.1. Programación Lineal:

2.1.1 Aspectos históricos.

Para el desarrollo sobre la historia de la Programación lineal se ha utilizado los aportes de Taborda (2010) y Coronado (2012) a fin de conocer y valorar el origen de la P.L. y su influencia en la historia de este siglo.

En el siglo XVII y XVIII, Newton, Leibniz, Bernouilli y La Grange estudiaron los máximos y mínimos de las funciones al estudiar el cálculo infinitesimal, luego, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768- 1830) estudió imprecisamente, el método de P.L. y resolvió sistemas lineales de inecuaciones con el método de eliminación llamado: Fourier Motzkin. Finalmente, en 1776 el matemático Gaspar Monge (1746- 1818) se interesó en realizar estudios sobre P.L.

En cuanto al estudio de fundamentos matemáticos en P.L. estos se deben al matemático John Von Neuman (1903- 1957), quien en el año 1928, publicó su famosa teoría de Juegos, este matemático realizó conjeturas sobre la equivalencia de los problemas de P.L. y la teoría de matrices.

En los años 1941 y 1942 el ruso Leonidas Vitalyevich Kantarovitch formula el problema de transporte al que se le llamó problema de Koopmans y Kantarovitch, luego Stigler estudió otro problema particular llamado problema del régimen alimenticio óptimo.

Posteriormente, en 1946 el mundo vivió las consecuencias de la guerra fría, ahí apareció George Dantzig quien en 1947 publicó el método simplex y le dió un mayor impulso al estudio de la P.L., el cual estaba estrechamente ligado a estrategias militares y años más tarde usaría modelos de ordenadores de la IBM.

Dantzig junto a una serie de investigadores del United States Department of Air Force, forman el grupo llamado SCOOP cuyas iniciales proviene de la palabra: Scientific Computation of Optimum Programs, y aplicaron dicho método en el famoso puente aéreo de Berlín.

Este episodio se dio cuando Stalin ordenó a sus tropas que el 24 de Junio de 1948 bloquearan las comunicaciones terrestres entre las zonas alemanas que quedaron en poder de los aliados con la ciudad de Berlín occidental, iniciando de esta manera el bloqueo de Berlín. Los aliados sólo tenían dos caminos, el primero era romper con este bloqueo empleando la fuerza, el segundo camino era hacerlo por el aire. Así fue que el poder americano se demostró en 1948 cuando se puso un puente aéreo entre las zonas alemanas con la ciudad de Berlín transportando en Diciembre de 1948 la cantidad de 4500 toneladas de productos por día y luego en Marzo de 1949 llegaron a 8000 toneladas por día igualando de esta manera el equivalente por tierra (carretera y ferrocarril) que existió antes del corte de las comunicaciones.

El método de Programación Lineal era hasta 1948 un secreto militar donde se utilizaba en la planificación de suministros, pero durante la guerra fría se usó para poder suministrar a la ciudad de Berlín con alimentos, combustible y otros suministros que ya no tenían por el bloqueo terrestre.

Finalmente, el 12 de Mayo de 1949 los soviéticos levantaron el bloqueo. En la postguerra la mayoría de las industrias a nivel mundial utilizaron este método de P.L., en la planificación diaria de trabajo, porque se detectó que existía una eficaz coordinación entre las energías y recursos de la nación y que la solución a esta complejidad pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la P.L.

Como lo mencionamos en el capitulo anterior en 1958 el método de P.L. se aplicó a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de la construcción de las obras de edificación de la ciudad de Moscú. Se trataba de un problema con 10 puntos de partida diferente y 230 puntos de llegada, se calculó el plan óptimo de transporte con el ordenador Strena y durante el transcurso de 10 días del mes de Junio se observó una disminución del 11 % en los gastos previstos en el transporte con el uso de la P.L. y el ordenador Strena, existiendo en forma generalizada una disminución porcentual del Producto Bruto Interno de un país.

En 1984, el matemático Hindú Narendra Karmarkar introduce el método de punto interior para resolver problemas de P.L. con un gran número de variables.

Finalmente, los problemas de P.L., pueden tener cuatro principales tipos de enfoques: El de insumo producto de W. Leontiez, el problema de la dieta de Stigler, el problema del transporte de Hitchcock y el método Simplex en industrias y negocios de George Dantzig. En la figura 22, se muestra algunas aplicaciones de la P.L., existiendo aún muchas otras:

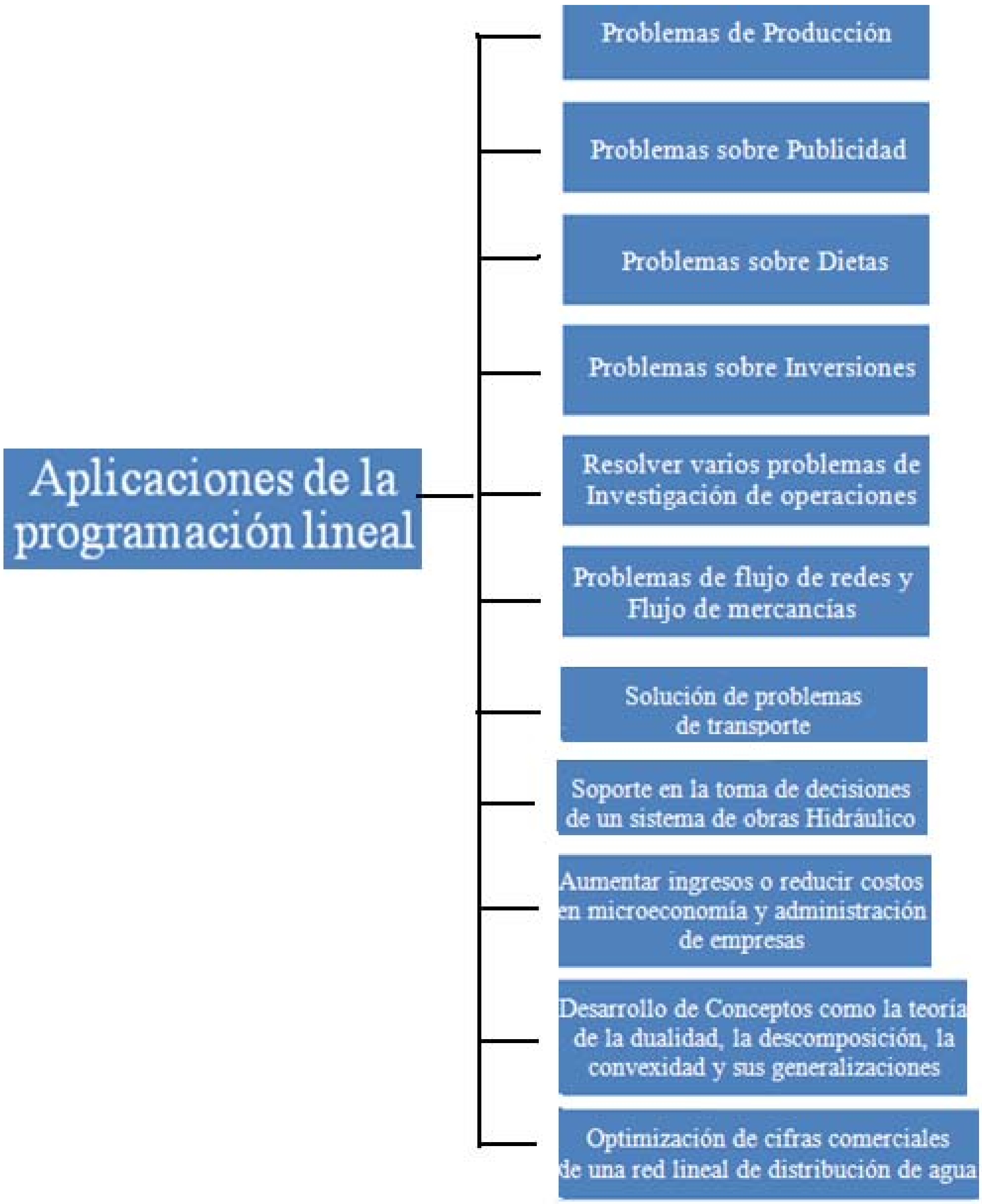


Figura 22. Algunas aplicaciones de la Programación Lineal

Como podemos observar en esta figura, son amplios y variados los campos en que se aplica el método de solución de problemas de P.L.

En nuestro trabajo de investigación solo aplicaremos la solución de problemas de P.L. a problemas con dos restricciones en el plano, porque en hemos decidido trabajar en nuestra investigación con dos variables las cuales si se pueden representar gráficamente en GeoGebra.

En la siguiente parte se aborda el tema de fundamentos de líneas rectas, sistema de ecuaciones lineales con dos variables, inecuaciones lineales con dos variables, P.L. y su desarrollo.

2.1.2. Fundamentos de líneas rectas:

En esta parte daremos las nociones importantes sobre Programación Lineal basándonos en el libro de Grossman (1992a, 1992b).

La Real academia de la lengua española define la palabra "lineal" como: adj. (Lat. linealis),relativo a las líneas, pero en matemáticas, la palabra "lineal" tiene un significado mucho más amplio. Gran parte de la teoría del álgebra lineal elemental es una generalización de las propiedades de las líneas rectas.

A continuación se dan a manera de repaso, algunos fundamentos relativos a las líneas rectas:

1. La pendiente m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la ecuación 1:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \quad , \text{si } x_1 \neq x_2$$

Ecuación 1

2. Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$ entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente no está definida.
3. Toda recta (excepto aquella cuya pendiente no esté definida) se puede expresar escribiendo su ecuación en la forma $y = mx + b$, siendo m la pendiente de la recta y b es su intersección con el eje y.
4. Si la ecuación de una recta se escribe en la forma: ax + by +c = 0,

$b \neq 0$, entonces $m = -a/b$.

5. Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$,
   a) L_1 y L_2 son perpendiculares si y solo si $m_1 \times m_2 = -1$.
   b) L_1 es paralela a L_2 si y solo si $m_1 = m_2$

En la sección que sigue se mostrará la relación que hay entre resolver sistemas de dos ecuaciones y hallar los puntos de intersección de pares de líneas rectas.

2.1.3 Sistema de ecuaciones lineales con 2 variables

Considérese el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con las dos incógnitas x e y en la expresión de la ecuación 2:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Ecuación 2

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son números reales. Cada una de estas ecuaciones como se mencionó en la sección anterior, representa una línea recta. La pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y la pendiente de la segunda recta es $-a_{21}/a_{22}$ (si $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$). Una solución de este sistema es un par de números, denotado por (x, y), que satisface las ecuaciones de la ecuación 2. Sería natural preguntarse si la ecuación 2 tiene alguna solución o soluciones, y si las tiene, ¿Cuántas son? Se darán respuestas a estas preguntas después de ver algunos ejemplos. En ellos se hará uso de dos propiedades del álgebra elemental:

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$

Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$

<u>Ejemplo: sistema con solución única:</u>

Consideremos el sistema de la ecuación 3:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Ecuación 3

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene la ecuación siguiente: $2x = 12$, es decir $x = 6$. Entonces, de la segunda ecuación $y = 5 - x = 5 - 6 = -1$. Por tanto, el par (6,-1) satisface este sistema. Por la forma en que se ha encontrado la solución, se ve que no existe ningún otro par que satisfaga ambas ecuaciones. Por tanto, este sistema, tiene una única solución.

Ejemplo: sistema con un número infinito de soluciones.

Consideremos el sistema de la ecuación 4:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$$

Ecuación 4

Es obvio que estas dos ecuaciones son equivalentes. A fin de comprobar esta afirmación, multiplíquese la primera por 2. De $x - y = 7$ se obtiene $y = x - 7$, por lo tanto, el par

`(x, x-7)` es solución del sistema de la ecuación 4, lo que permite afirmar que el sistema tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, los pares siguientes `(7,0); (0,-7); (8,1); (1,-6); (3,-4) y (-2, -9)` son también soluciones del sistema.

Ejemplo: sistema sin solución.

Consideremos el sistema de la ecuación 5:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 13 \end{cases}$$

Ecuación 5

Multiplicando la primera ecuación por 2, se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación, entonces este sistema no tiene solución.

Es fácil explicar los resultados de los ejemplos anteriores si se adopta un punto de vista geométrico. Primero, cabe repetir que las ecuaciones del sistema de la ecuación 2 son las ecuaciones de líneas rectas. Una solución de este sistema es un punto (x, y) que esté en ambas rectas. Si éstas no son paralelas, entonces se deben cortar en un solo punto. Si son paralelas, entonces no tienen puntos en común o bien son la misma recta.

En el ejemplo con solución única, las pendientes de las rectas son 1 y -1, respectivamente. Eso quiere decir que no son paralelas. El único punto que tienen en común es el $(6,-1)$. En el segundo ejemplo, las rectas son paralelas y distintas.

Todas estas relaciones se ilustran en la figura 23:

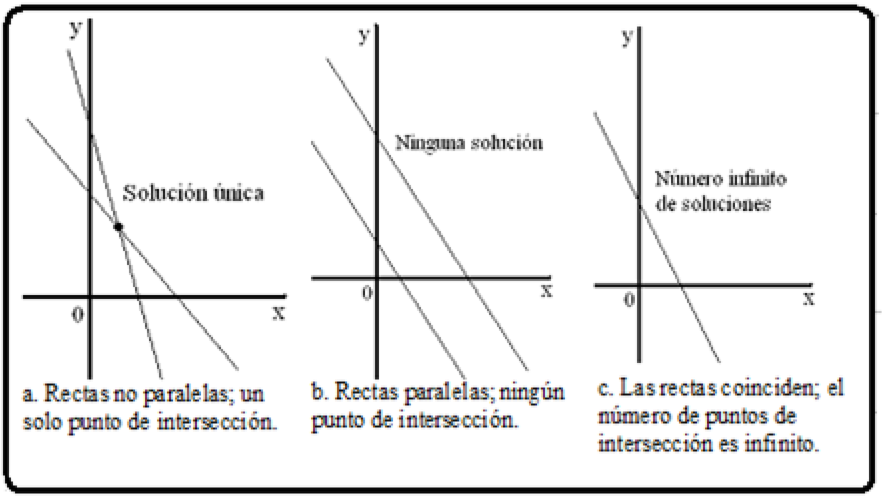


Figura 23. Gráfica del tipo de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Volviendo al sistema dado en la ecuación 2, se define el determinante: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$

donde:

i) Si $\Delta \neq 0$, el sistema tiene una única solución.

ii) Si $\Delta = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

2.1.4 Inecuaciones lineales con dos variables

Una inecuación lineal con dos variables es una expresión que se puede escribir en una de las siguientes cuatro formas:

$$ax+by>c\,,\qquad ax+by\geq c\,,\qquad ax+by<c\,,\qquad ax+by\leq c$$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Comentario: En realidad existen sólo dos formas distintas, ya que si $ax+by<c$ entonces $-ax-by>-c$ y si $ax+by\leq c$ entonces $-ax-by\geq -c$.

A continuación se graficarán algunas inecuaciones con dos variables.

Ejemplo: conjunto solución de una inecuación del tipo estricta: "y > f(x)"

Grafiquemos el conjunto de puntos que satisfacen la inecuación $y>-2x+3$

Para ello se grafica la recta y = -2x+3, Veamos su representación gráfica en la figura 24:

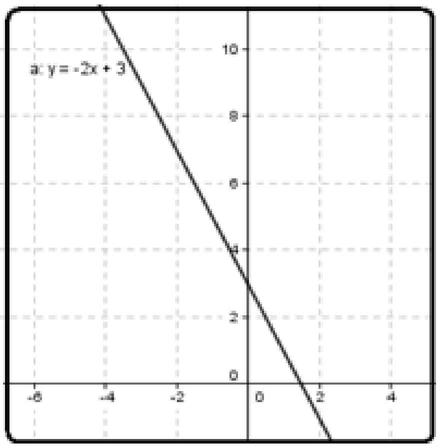


Figura 24. Gráfica de y= - 2x+3

Se observa que la recta y = -2x+3 divide el plano xy en dos semiplanos, como esta recta se extiende infinitamente en ambas direcciones, divide el plano en dos semiplanos. En la siguiente figura 25, estos semiplanos se indican como semiplano superior y semiplano inferior representados por A y B.

El conjunto $L = \{(x, y) : y = -2x + 3\}$ es el conjunto de los puntos que se hallan en la recta. Se define otros dos conjuntos mediante:

$$A = \{(x, y) : y > -2x + 3\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y) : y < -2x + 3\}$$

Como toda pareja (x, y) satisface $y = -2x + 3$, $y > -2x + 3$, o bien $y < 2x + 3$, se ve que todo punto de R^2 se encuentra exactamente en uno de los conjuntos L, A o B; es decir: $R^2 \subseteq L \cup A \cup B$ y como obviamente $L \cup A \cup B \subseteq R^2$ entonces $R^2 = L \cup A \cup B$

Se puede ver que A es precisamente el semiplano superior en la figura 25, para entender ¿por qué? Supóngase que (x*, y*) está en A, entonces, por la definición de A,

y* > -2x*+3, de manera que el punto (x*, y*) se encuentra “arriba” de la recta y = -2x+3.

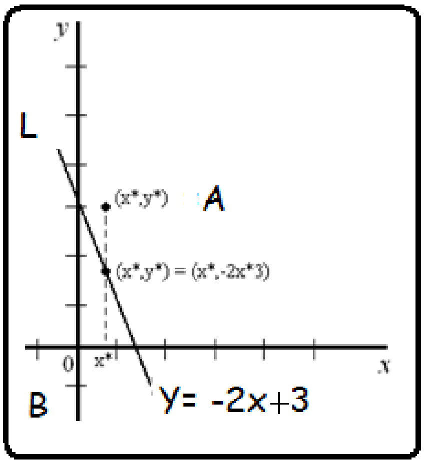


Figura 25. Gráfica de la región superior de y= - 2x+3

Por tanto, el conjunto de los puntos que satisfacen la inecuación y > -2x+3 es justamente sólo el semiplano superior que se muestra sombreado en la figura 26:

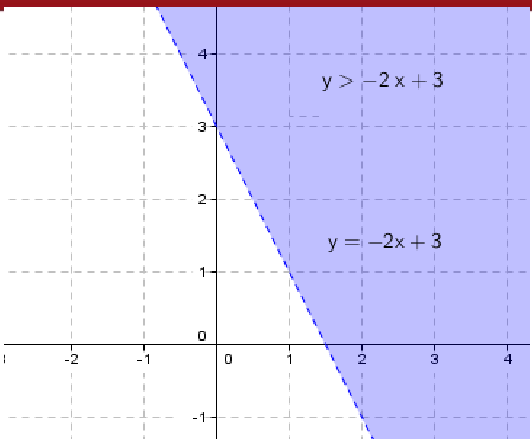


Figura 26. Gráfica de y > -2x + 3

Todo punto que se encuentra en el semiplano sombreado satisface la inecuación `y > -2x+3`, pero la recta `y = -2x+3` se ha dibujado a trazos para indicar que los puntos que están en ella, no satisfacen la inecuación.

<u>Ejemplo: conjunto solución de una inecuación del tipo no estricto</u> “$y \geq f(x)$”

Grafiquemos el conjunto de los puntos que satisfacen la inecuación $y \geq -2x+3$.

<u>Solución</u>: La única diferencia entre este conjunto y el del ejemplo 1 que acabamos de desarrollar, es que en este caso, los puntos que están en la recta $y = -2x+3$ también satisfacen la inecuación. La gráfica se indica dibujando una línea continua, como se ve en la figura 27 y sombreando la parte del semiplano superior de la recta.

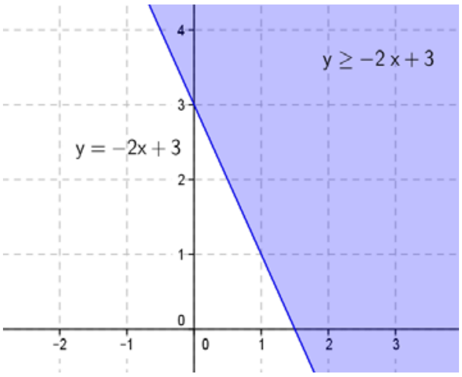


Figura 27. Gráfica de y ≥ - 2x + 3

Todo punto que se encuentra en el semiplano sombreado satisface la inecuación $y \geq -2x+3$, mientras que la recta $y=-2x+3$ se ha dibujado continua para indicar que los puntos que están en ella satisfacen la inecuación.

Ejemplo: conjunto solución de una inecuación del tipo estricto "y < f(x)"

Grafiquemos el conjunto de los puntos que satisfacen la inecuación $y < -2x + 3$

Solución:

Todo punto que se encuentra en el semiplano sombreado satisface la inecuación

$y < -2x + 3$, mientras que la recta $y=-2x+3$ se ha dibujado discontinua para indicar que los puntos que están en ella no satisfacen la inecuación.

Veamos esta afirmación en la figura 28:

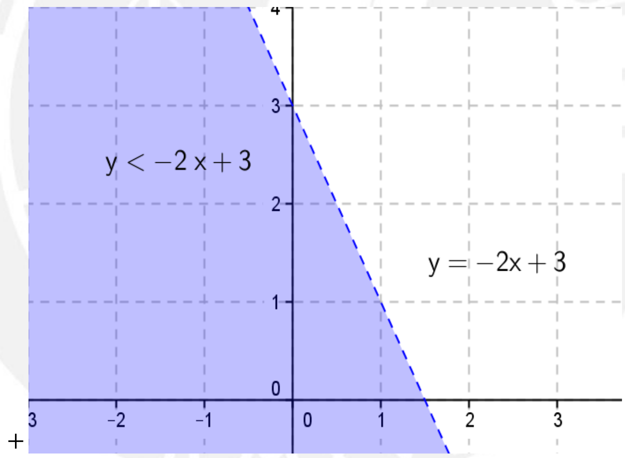


Figura 28. Gráfica de $y < -2x + 3$

Ejemplo: conjunto solución de una inecuación del tipo no estricto "y $\leq f(x)$"

Grafiquemos el conjunto de los puntos que satisfacen la inecuación $y \leq -2x + 3$

Solución:

Todo punto que se encuentra en el semiplano sombreado satisface la inecuación

y $\leq -2x + 3$, mientras que la recta $y=-2x+3$ se ha dibujado continua para indicar que los puntos que están en ella también satisfacen la inecuación. Veamos esta representación gráfica en la figura 29:

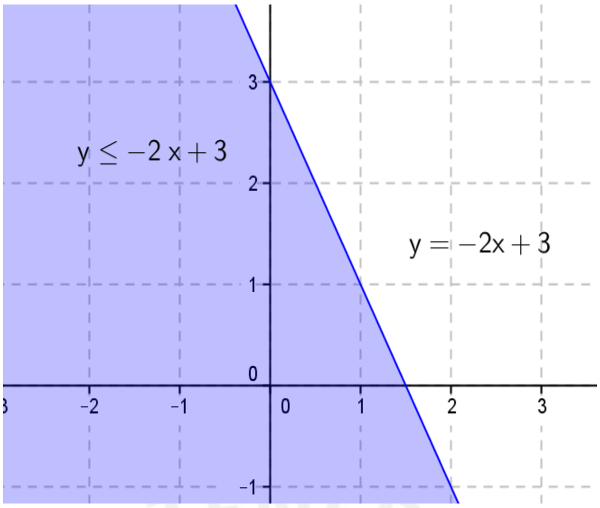


Figura 29. Gráfica de $y \leq -2x + 3$

A continuación daremos las herramientas para trazar una inecuación que tenga una de las formas >, <, ≥, ≤

Método para representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen una inecuación de las formas: >, <, ≥, ≤

1. Dibújese la recta $ax + by = c$. Empléese una línea a trazos si no se incluye la igualdad y una línea continua si la igualdad se incluye como en : ≥ , ≤
2. Elíjase cualquier punto de R^2 que no esté en la recta "L" empleándolo como punto de prueba. Si las coordenadas del punto de prueba satisfacen la inecuación, entonces el conjunto buscado es el semiplano que contiene el punto de prueba en A. En caso contrario, es el otro semiplano B, porque este punto representa al conjunto de puntos de R^2 que está conformado por la unión de los subconjuntos:

   L ∪ A ∪ B,

Semiplanos abiertos y cerrados: Ya se ha visto que el conjunto de los puntos que satisface una inecuación lineal es un semiplano. Si la igualdad se excluye, el semiplano se llama semiplano abierto. Si la igualdad se incluye, entonces se tiene un semiplano cerrado. También se puede comprender de la siguiente manera: La gráfica de una inecuación lineal es una región plana, la cual puede o no incluir a la recta que se ubica en su frontera.

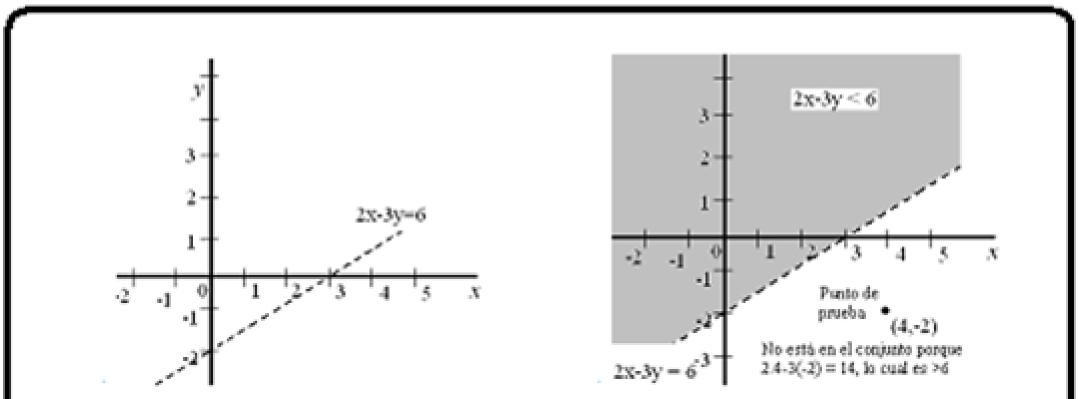
Veamos un ejemplo práctico. Graficar: **2x - 3y < 6**

Solución:

En la figura 30 parte a, se ha trazado la recta 2x-3y = 6. Como ningún punto de la recta satisface la inecuación, se dibuja una línea a trazos. Ahora se busca en uno de los dos semiplanos en los que se ha dividido el plano xy por medio de la recta.

¿Cuál de los dos corresponde a la inecuación? La forma más sencilla de decidir consiste en tomar **un punto de prueba**, tal como el (0, 0). Como 2(0) - 3(0) = 0 < 6, entonces (0, 0) está en el conjunto $\{(x, y): 2x - 3y < 6\}$. Por tanto, el conjunto que se busca es el semiplano que contiene a (0, 0), como se indica en la figura 30 parte b.

¿Por qué se eligió el punto (0, 0)? Porque éste es el punto con el que las operaciones resultan más sencillas. No obstante, cualquier otro punto puede servir como punto de prueba. Por ejemplo, utilicemos el punto (4,-2). Se tiene entonces. $2(4) - 3(-2) = 14 > 6$ Así, el semiplano que contiene a (4,-2) no es el semiplano que se busca. Esto lleva al mismo resultado que antes. Ver figura 30:



a. La recta 2x-3y= 6

b. El semiplano sombreado es el conjunto solución de 2x-3y< 6

Figura 30. Gráfica de 2x- 3y=6 y gráfica de 2x - 3y < 6

A continuación revisaremos el tema de sistema de inecuaciones lineales con dos variables.

2.1.5 Sistema de inecuaciones lineales con 2 variables: Entenderemos esta parte con el siguiente ejemplo:

Ejemplo: conjunto solución de dos inecuaciones lineales.

Dibújese el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones de la inecuación 1:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ -2x + 3y < 6 \end{cases}$$

Inecuación 1

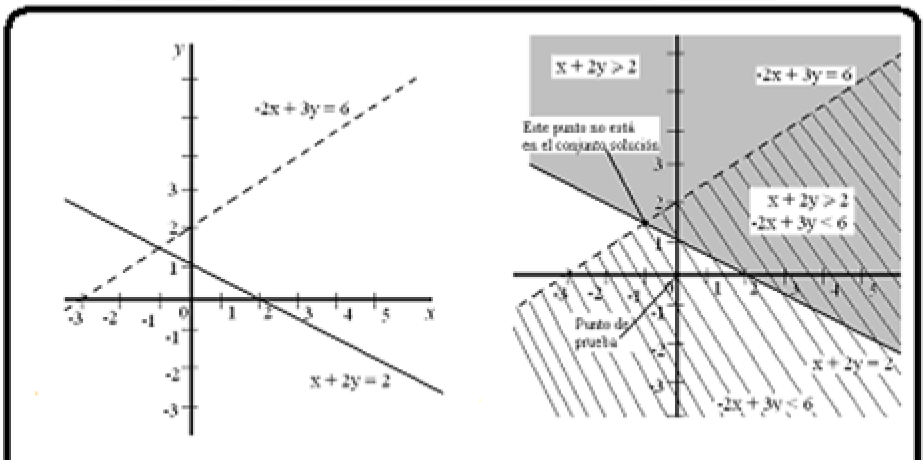
SOLUCIÓN:

En primer lugar se trazan las rectas cuyas ecuaciones están dadas por: $x+2y=2$, y $-2x+3y=6$ (figura 31 parte a), luego se elige un punto de prueba, por ejemplo $(0,0)$, se ve que satisface la segunda inecuación, pero no la primera (figura 31 parte b).

Esto significa que el semiplano $\{(x,y): -2x+3y<6\}$, que contiene el punto $(0, 0)$, es el conjunto de los puntos que están debajo de la recta $-2x+3y=6$, mientras que el semiplano $\{(x,y): x+2y\geq 2\}$, el cual no contiene el punto $(0, 0)$, es el conjunto de los puntos que se hallan arriba de la recta $x+2y=2$.

Por consiguiente, el conjunto de los puntos que satisfacen ambas inecuaciones, es la intersección de estos dos semiplanos que constituyen la solución del sistema.

Observemos esta información en la figura 31



a. Las rectas $x + 2y = 2$ y $-2x + 3y = 6$

b. La región sombreada es el conjunto solución de $x+2y\geq 2$ y $-2x+3y<6$

Figura 31. Gráfica de inecuación 1

Ejemplo: conjunto solución vacío.

Dibújese el conjunto de los puntos que satisfacen las inecuaciones   dadas en la inecuación 2:

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ 2x + 2y \geq 6 \end{cases}$$

Inecuación 2

Solución: En la figura 32, se han dibujado los dos semiplanos que son los conjuntos solución de estas dos inecuaciones. Como los dos conjuntos son disjuntos, su intersección es vacía y por lo tanto no existe un solo punto que satisfaga ambas inecuaciones.

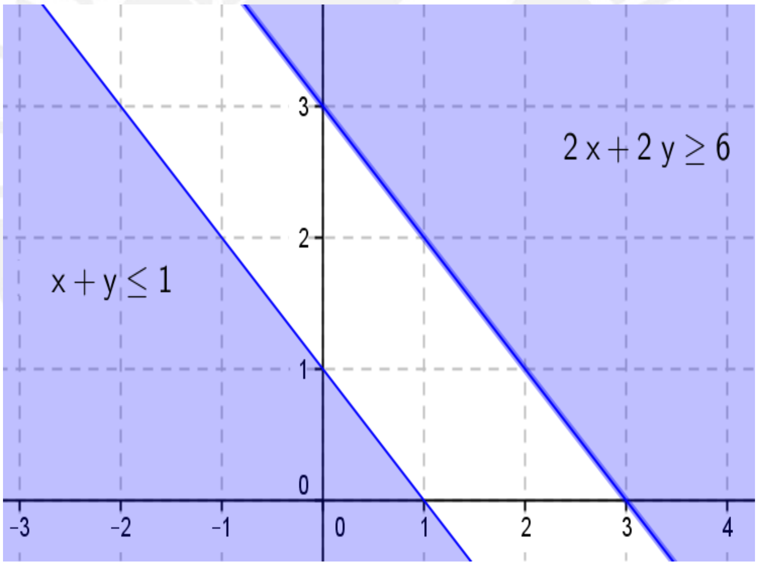


Figura 32. Gráfica de la inecuación 2

No existen puntos que satisfagan simultáneamente las inecuaciones:

$$x + y \leq 1\ ;\ \ 2x + 2y \geq 6$$

Observemos finalmente el siguiente ejemplo donde habrá cuatro inecuaciones lineales, ¿cómo será el conjunto solución de la inecuación 3?

Ejemplo**:** conjunto solución de varias inecuaciones

Dibújese el conjunto solución de las inecuaciones dadas en la inecuación 3:

$$\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 3 \\ -3x + 8y \geq 4 \end{cases}$$

Inecuación 3

<u>Solución</u>:

En la figura 33, se muestra el conjunto solución de estas cuatro inecuaciones.

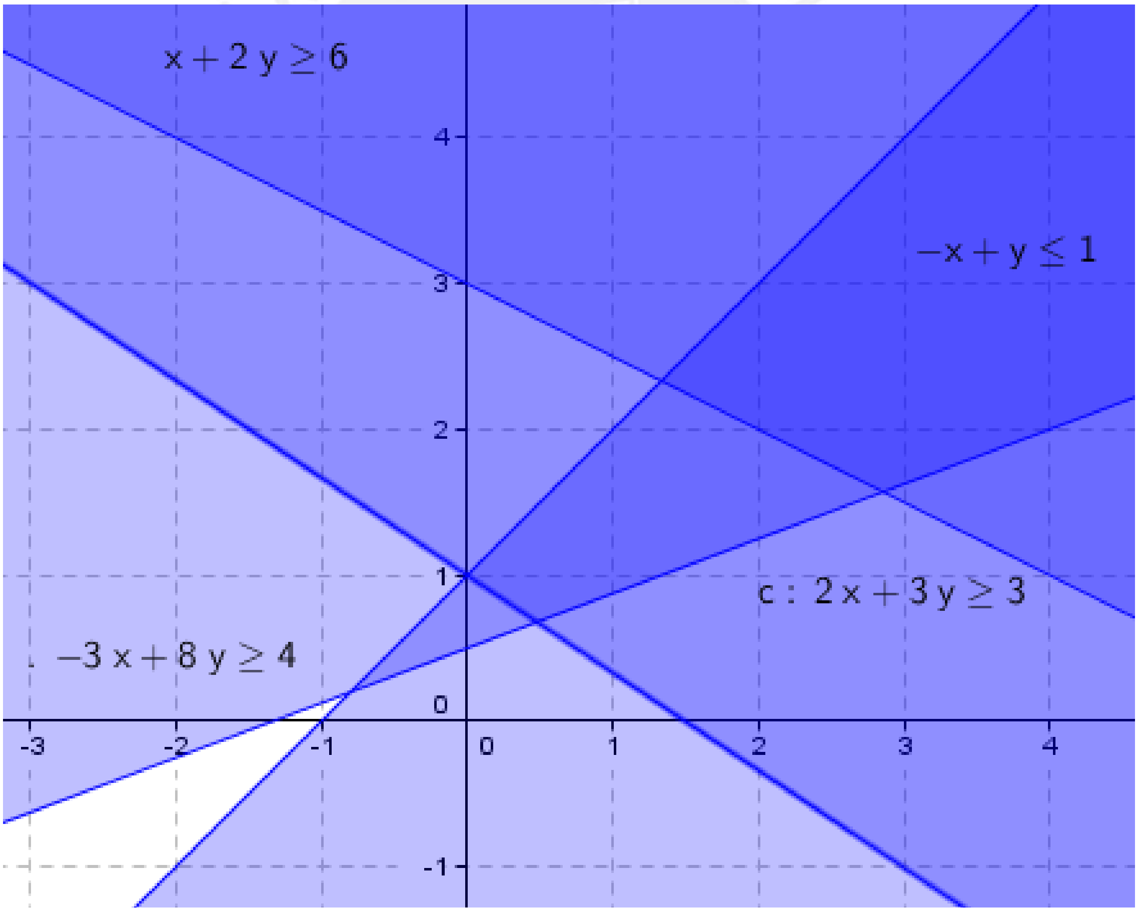


Figura 33. Gráfica de inecuación 3

La región con mayor sombreado, corresponde al conjunto solución de las cuatro desigualdades: $-x+y \leq 1,\quad x+2y \leq 6,\quad 2x \geq 3y = 3,\quad -3x+8v \geq 4$.

A continuación indicaremos que es la P.L., según Grossman (1992b).

2.1.6 Programación Lineal

Grossman (1992b) indica que la programación lineal, es un método que trata de optimizar: maximizar o minimizar una función lineal con "n" variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales en "n" variables.

Un problema de programación lineal tiene la siguiente forma estándar:

> Problema estándar de programación lineal:
>
> Determínese el vector x= $(x_1,\ x_2,\ldots\ldots,x_n)$ en R^n que maximícese o minimícese la función lineal $F(x) = c_1x_1+c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n$,
> Sujetas a las $m + n$ inecuaciones lineales:
>
> $$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \leq b_2 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n \geq 0 \end{array}$$
>
> F, recibe el nombre de función objetivo del problema de P.L. Al conjunto solución de las inecuaciones lineales, se le llama conjunto restricción del problema. (p.27)

Trabajaremos el caso de n=2 es decir las funciones lineales de dos variables y las restricciones dadas por inecuaciones lineales de dos variables.

A continuación conoceremos algunas definiciones y teoremas importantes en la P.L.

2.1.7 Definiciones y teoremas:

Se ha realizado la aplicación directa de varias definiciones y teoremas en la secuencia de las actividades propuestas haciéndose una demostración intuitiva de las mismas las cuales están escritas en el libro de Grossman (1992a, 1992b) y que se invita al lector leerlo en dichos libros.

Existen diversos problemas en donde se pide determinar el máximo o el mínimo de una función dada, estos aparecen en muchas de las aplicaciones de las matemáticas, en los negocios, en la economía, en la biología y en otras disciplinas.

Los problemas de optimización están sujetos a restricciones o límites de las variables, por ejemplo un negociante está limitado por una cantidad fija de capital, un almacenista tendrá limitaciones de espacio, otras restricciones son obvias como por ejemplo cuando un gerente de un supermercado no puede pedir cantidades negativas de kilogramos de tomates para surtir la tienda.

Para resolver problemas de P.L se tiene dos métodos: el método gráfico y el método de las esquinas.

Método Gráfico para la solución de problemas de P.L.se realiza los siguientes pasos:

1. Construir la región factible.
2. Construir la gráfica de la función objetivo.
3. Para el caso de funciones de más de dos variables resulta muy poco práctico y difícil de manejar.

Método de las esquinas:

Veremos a continuación algunas definiciones y teoremas previos, según Grossman (1992b), para poder abordar el método de las esquinas.

Definición 1: “Sea S un subconjunto de R^2, entonces S es convexo si todo punto del segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de S es un punto de S” (Grossman, 1992b, p.11).

Ver esta información en la figura 34

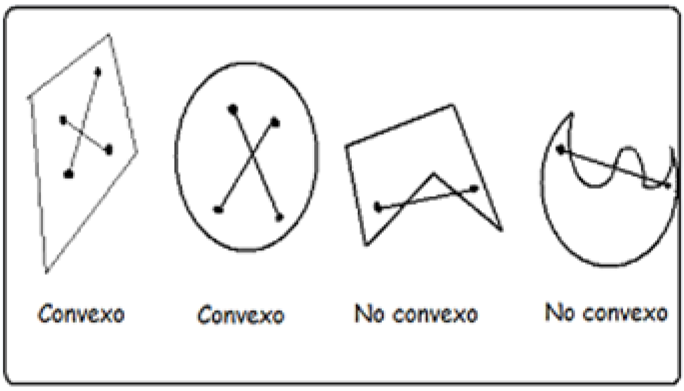
“Conjunto Convexo en R^2 Sea S un subconjunto de R^2.Decimos que S es convexo si y sólo si todo punto del segmento de recta que una dos puntos cualesquiera de S es un punto de S.” (Grossman 1992b, p.11)


Figura 34. Definición verbal y gráfica de Conjuntos Convexos

Teorema 1: La intersección de dos conjuntos convexos cualesquiera de R^2 es un conjunto convexo (Grossman, 1992b, p.12).

Definición 2:

Semiplanos abiertos y cerrados en R^2. Dados los conjuntos:
$\{x = (x_1, x_2): a_1x_1 + a_2x_2 < b\}$ y
$\{x = (x_1, x_2): a_1x_1 + a_2x_2 > b\}$
Reciben el nombre de semiplanos abiertos. Mientras que los semiplanos cerrados corresponden a los conjuntos:
$\{x = (x_1, x_2): a_1x_1 + a_2x_2 \leq b\}$ y
$\{x = (x_1, x_2): a_1x_1 + a_2x_2 \geq b\}$. (Grossman, 1992b, p.13)

En conclusión, el conjunto de puntos que satisfacen una desigualdad lineal es un semiplano. Si se excluye la igualdad, el semiplano se llama semiplano abierto mientras que si se incluye la igualdad, entonces se llama semiplano cerrado.

Teorema 2: Los semiplanos en R^2 son conjuntos convexos (Grossman, 1992b, p.14).

Definición 3: Conjunto Convexo Poliédrico: La intersección C de un número finito de semiplanos cerrados recibe el nombre de conjunto convexo poliédrico (Grossman, 1992b, p.14).

Finalmente, ya podemos definir lo que significa **punto esquina.**

Definición 4: **<u>Punto esquina</u>**

> Punto de esquina de un conjunto convexo poliédrico: Un punto x en R^2 se llama **punto de esquina** de un conjunto convexo poliédrico C si $x \in C$ y si x es el punto de intersección de 2 rectas frontera que determinan a C. Un punto de esquina también recibe el nombre de punto extremo o vértice del conjunto convexo poliédrico. (Grossman, 1992b, p.14)

Un punto esquina posible es la intersección de dos rectas que determinan el conjunto restricción. Un punto de esquina posible es un punto de esquina real si es una solución factible.

De ahí podemos dar el siguiente teorema:

Teorema 3:

> Los valores máximo y mínimo de la función objetivo de cualquier problema de programación lineal siempre ocurren en los puntos de esquina (Grossman, 1992b, p.23).

<u>Método del punto esquina</u>: Según el mismo autor: Grossman (1992b), los pasos son:

> **<u>Paso 1</u>**.
> Determínense todos los puntos de esquina posible del conjunto restricción. Estos puntos se obtiene tomando exactamente n de las $n + m$ inecuaciones o restricciones convirtiéndolas en igualdades y resolviendo el sistema resultante de n ecuaciones con n incógnitas.
> **<u>Paso 2</u>**
> Determínense los puntos esquinas reales probando cada punto de esquina posible, viendo si satisface o no las m inecuaciones restantes de las planteadas.
> **<u>Paso 3</u>**.
> Evalúese $f(x)$ en cada punto esquina.
> Determínense los puntos de esquina donde la $f(x)$ toma sus valores máximo y mínimo. Si $f(x)$ toma su valor máximo en dos puntos de esquina, entonces toma este valor en todo punto de la recta que une estos dos puntos de esquina. (p.29)

Función Objetivo, Conjunto Solución y Solución factible: Según Grossman (1992b),

> La función lineal dada por la ecuación a optimizar recibe el nombre de función objetivo. Al conjunto de puntos en el plano xy que satisface las inecuaciones del problema se llama conjunto restricción del problema.
> Todo punto que este en el conjunto restricción recibe el nombre de solución factible. Los problemas de optimización consisten en hallar el punto o puntos en el conjunto restricción en los cuales la función objetivo tenga un máximo o un mínimo según lo que pidan. (p.3)

2.1.8 Pasos para resolver problemas de Programación Lineal. El método empleado en la investigación es el método de las esquinas donde se ha insertado tablas de determinación de variables y tablas de evaluación de la función objetivo, finalmente se grafica de la región factible y los puntos de las esquinas en un plano cartesiano, que se hallaran con GeoGebra.

Siguiendo el procedimiento de Grossman (1992b) se elaboró nuestro procedimiento para resolver problemas de programación lineal:

1. Elegir las **incógnitas**
2. Elaborar una tabla de especificaciones
3. Escribir la **función objetivo** en función de los datos del problema.
4. Escribir las **restricciones** en forma de sistema de inecuaciones.
5. Averiguar el conjunto de **soluciones factibles** representando gráficamente las restricciones.
6. Calcular las coordenadas de los vértices de la región factible (si son pocos).
7. Evaluar **la función objetivo** en cada uno de los vértices. Esto será consignado en una tabla de evaluación de la función objetivo.

Ahí observamos que se pueden presentar valores **máximo o mínimo** según nos pida el problema (hay que tener en cuenta aquí la posible no existencia de solución si la región no está acotada).

A continuación veremos ejemplos de problemas de P.L., las cuales pueden tener: solución única, infinitas soluciones o bien no tener solución

Problema de P.L. con solución única:

Dada la región definida por el sistema de inecuaciones, de la inecuación 4:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Inecuación 4

Hallar en dicha el valor máximo de la función $f(x, y) = 30x + 20y$

Solución:

En la figura 35, tenemos la gráfica de la región del problema propuesto:

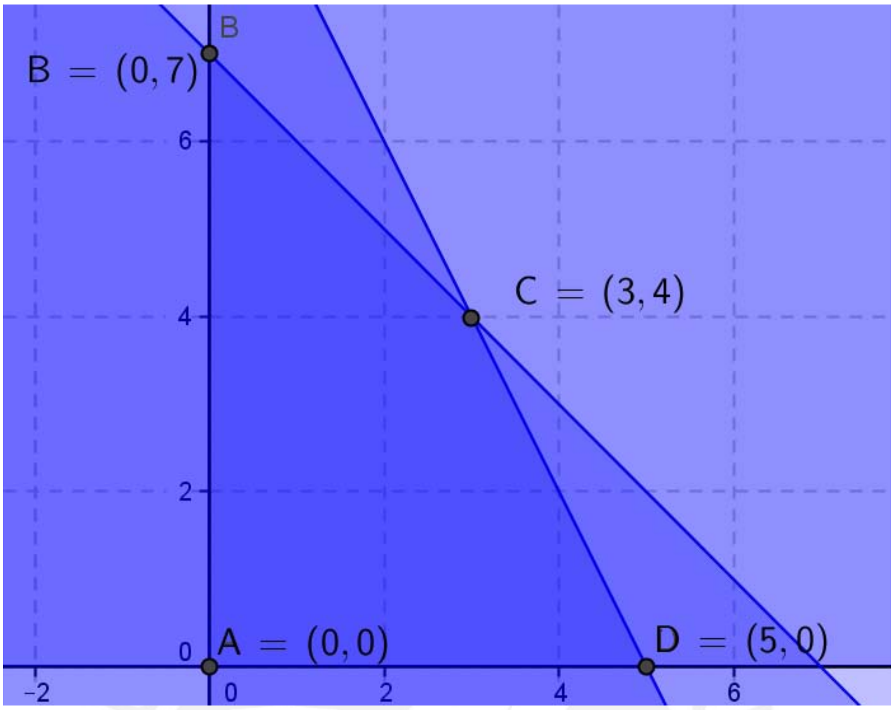


Figura 35. Región factible de la inecuación 4

A continuación añadimos la siguiente nota, porque facilita la rápida ubicación de la región factible cuando analizamos las restricciones de no negatividad:

Nota : **Restricciones $x \geq 0,\ y \geq 0$** Prácticamente en todos los problemas de Programación lineal se exige que las variables **x** e **y** sean mayores o iguales que cero; en estos casos, la región factible se dibuja directamente en el 1er cuadrante

Figura 36. Restricciones de no negatividad

Recordemos que en un problema de programación lineal, la función objetivo es la función lineal en dos variables que se desea optimizar. Se representa por:

$f(x, y) = ax + by$

En nuestro caso, la función objetivo es: $f(x, y) = 30x + 20y$

Recordemos que la solución óptima se obtiene en los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza su valor óptimo, es decir, el máximo o el mínimo. Si la solución óptima es única, está ubicada en uno de los vértices de la región factible. Si existen varias soluciones, entonces son todos los puntos que están sobre uno de los lados de la región factible.

Analíticamente, para hallar la solución óptima, se evalúa la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.

Continuando con el ejemplo dado, este procedimiento se presenta en una tabla donde se evalúa la función objetivo en los puntos de las esquinas:

Tabla 2. Evaluando los vértices de la región factible de la inecuación 4

Puntos de las esquinas	Evaluando la función objetivo: $f(x, y) = 30x + 20y$	Valores finales:
A= (0, 0)	$f(0, 0) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0$	= 0
B= (0, 7)	$f(0, 7) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 7$	= 140
C= (3, 4)	$f(3, 4) = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 4$	= 170 **Máximo**
D= (5, 0)	$f(5, 0) = 30 \cdot 5 + 20 \cdot 0$	= 150

Aquí observamos, que la solución máxima se obtiene en C (3, 4), optimizando así nuestro problema.

<u>Problema de P.L. con infinitas soluciones</u>:

Un problema de programación lineal tiene **infinitas soluciones** si tiene la solución óptima en dos vértices de la región factible. En este caso, todos los puntos del lado que une dichos vértices son soluciones óptimas.

Maximiza la función: $f(x, y) = 30x + 60y$ bajo las restricciones de la inecuación 5:

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Inecuación 5

1) Región factible. Observemos la figura 37

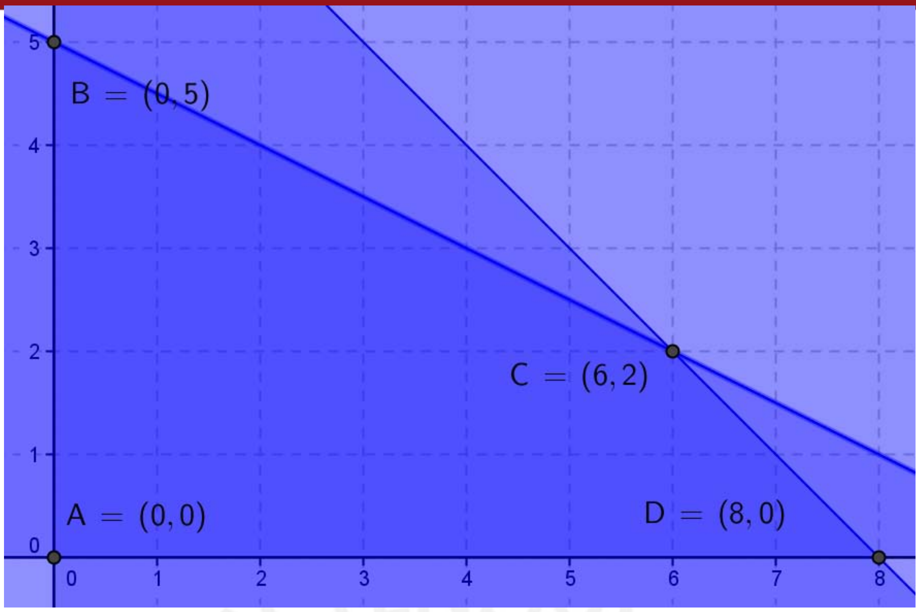


Figura 37. Región Factible de la inecuación 5

2) Los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible son mostrados en la tabla 3:

Tabla 3. Evaluando los vértices de la región factible de la desigualdad 5

Coordenadas de los Vértices	Evaluando la función Objetivo f(x, y) = 30x + 60y	Valores Finales
A= (0, 0)	f (0, 0) = 30 · 0 + 60 · 0	0
B= (8, 0)	f (8, 0) = 30 · 8 + 60 · 0	240
C= (6, 2)	f (6, 2) = 30 · 6 + 60 · 2	300 **Máximo**
D= (0, 5)	f (0, 5) = 30 · 0 + 60 · 5	300 **Máximo**

3) La solución se alcanza en los vértices C= (6, 2) y B= (0, 5), por tanto, también se alcanza en todos los puntos del lado que une los puntos C= (6, 2) y B= (0, 5), es decir, tiene infinitas soluciones.

<u>Problema de P.L. sin solución</u>:

Un problema de P.L. puede que no tenga solución debido a dos razones, porque la región factible:

a) es vacía.

b) no esté acotada y no se alcance nunca en ella la solución óptima.

Veamos un ejemplo para el caso de ser vacía la región factible:

Ejemplo: Dada la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones, de la inecuación 6:

$$\begin{cases} x + y \geq 7 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Inecuación 6

Halla en dicha región el valor mínimo de la función: `f(x, y) = 17x + 35y`

Solución:

Se observa en la figura 38, que la región factible es vacía, es decir, no hay ningún punto en el plano que verifique las restricciones del enunciado del problema.

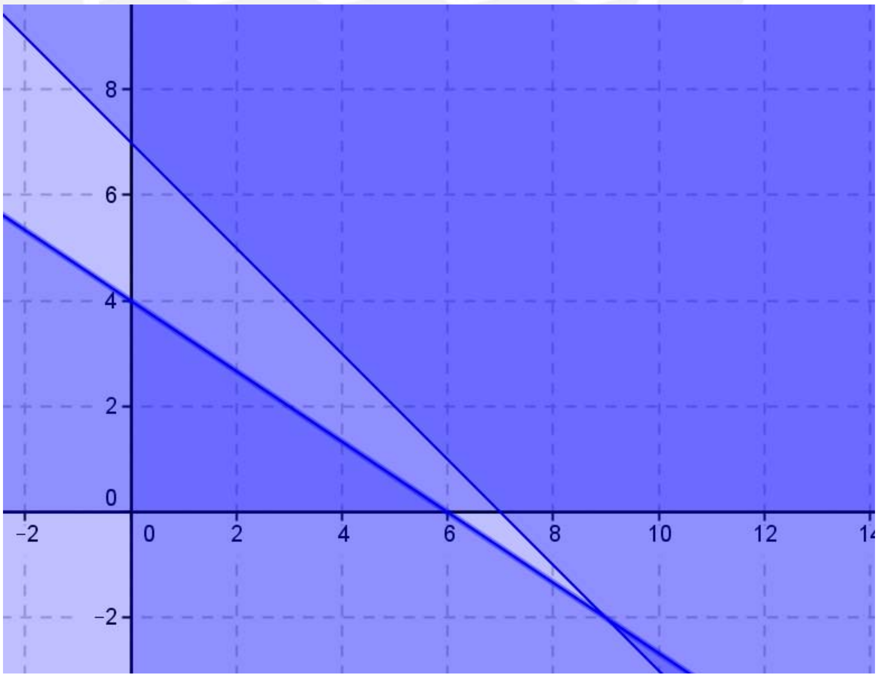


Figura 38. Región Factible de la inecuación 6

A continuación presentaremos otro caso, cuando la región no está acotada y no se alcanza en ella la solución óptima.

Ejemplo: Dado la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones de la inecuación 7:

$$\begin{cases} x \leq y \\ x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Inecuación 7

Halla en dicha región factible el valor máximo de la función: f(x, y) = 10x + 20y

Solución:

Grafiquemos la región factible de la inecuación 7. Ver figura 39:

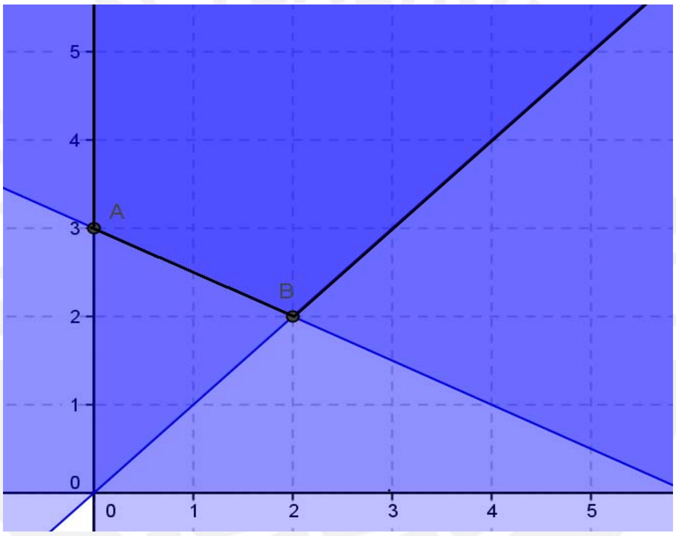


Figura 39. Región factible de la inecuación 7

Se observa que la región factible no está acotada y, por tanto, la función `f(x, y)= 10x+20y` no alcanza un valor máximo.

Observe que si se trata de minimizar una función objetivo en una región no acotada, si puede tener solución.

En la figura 40, se observa lo trabajado hasta el momento en P.L.:

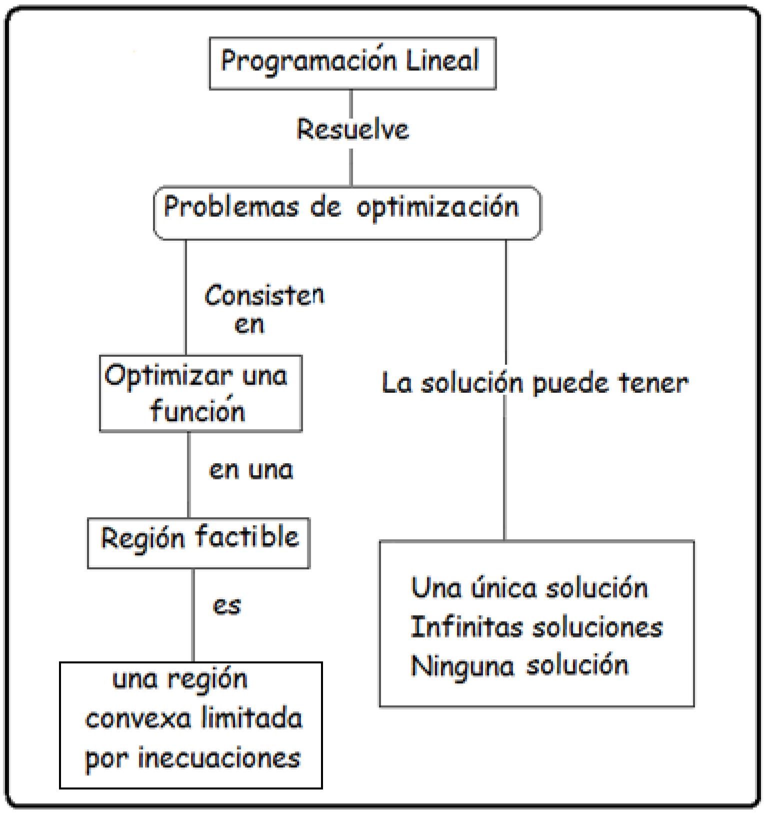


Figura 40. Mapa conceptual sobre Programación Lineal.

Con esto ejemplificamos que la P.L. brinda respuesta a situaciones en las que se exige maximizar o minimizar funciones sujetas a determinadas limitaciones, que se denominan restricciones.

A continuación veremos los procedimientos metodológicos de la investigación:

1.2 Método y procedimientos Metodológicos:

El presente estudio se basa en el método utilizado por las investigaciones cualitativas o llamadas también naturalista, fenomenológica, interpretativa o etnográfica propuesta por Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2007), debido a que :

1. Se plantea un problema cuya característica primordial es no ser tan específico como la de los enfoques cuantitativos, además no induce a tener un proceso claramente definido.
2. Se usa para descubrir y refinar preguntas de investigación.
3. El investigador analiza su entorno social.

Procedimientos utilizados en la presente investigación:

1. Revisión de la literatura es decir los antecedentes de la investigación que justifiquen la existencia del problema, debido a que estos referentes justifican en gran parte la existencia de problemas similares a los del colegio donde realizamos la investigación y los investigadores que abordan su estudio proponen alternativas de solución que sirven de referente a nuestra investigación.
2. Formulación del problema de investigación. Con ello centramos el interés de nuestra investigación indicando nuestro accionar frente al problema propuesto en el contenido matemático elegido dentro de una realidad concreta.
3. Formulación de los objetivos de la investigación. Aquí se enuncian los propósitos de la investigación e identifica claramente lo que se pretende lograr al finalizar el proyecto, aquí encontramos dos tipos: el general, referido al propósito general de la investigación y el específico referidos a las componentes del objetivo general.
4. Elección del marco teórico y del método de investigación. Es una fase importante en una investigación, estos sustentan el desarrollo de la investigación. En el caso del marco teórico este fundamenta la investigación basada en el planteamiento del problema. El marco teórico lo integran teorías y antecedentes referidos al problema de investigación y nos permite visualizar como ha sido tratado el problema específico de investigación, mientras que el método de investigación nos da las pautas de procedimientos metodológicos con los cuales el investigador podrá desarrollar todo su trabajo de investigación.
5. Estudio de la Programación Lineal. Aquí se dan los lineamientos específicos y acordes a nuestro tema de investigación el cual lo desarrollaremos como un saber sabio y que lo encontramos en libros de orientación canónica para lo cual hemos elegido el de Grossman (1992a, 1992b).
6. Elección y descripción del software GeoGebra. Este es el instrumento elegido para apoyar y mediar en la resolución de problemas de P.L.
7. Diseño de las actividades. Aquí se indica la organización interna, estas orientan la forma en que se presentarán en forma secuencial nuestras actividades de experimentación, estos deben de facilitar la comprensión del tema de P.L. la resolución de problemas así como la selección de algunos comandos básicos del software GeoGebra.

8. Elaboración de las actividades, que respondan a los objetivos propuestos, a fin de facilitar la comprensión del conocimiento del objeto matemático, así como la elaboración simultánea de actividades en el manejo de algunos comandos de GeoGebra aplicados a la P.L.
9. Descripción de los sujetos, es importante describir el tipo de alumnos con los que se trabaja y las características de la realidad física del lugar donde se desarrollan ya que en situaciones similares se puede replicar esta investigación.
10. Selección y Elaboración de Instrumentos para la recolección de datos, como son las fichas de observación de actividades y las fichas de actividades propuestas. Con estos instrumentos recogeremos información para la triangulación en el análisis de datos.
11. Aplicación del experimento a través de la aplicación de las actividades de aprendizaje propuestas para Programación Lineal con el uso del software GeoGebra como recurso mediador para el aprendizaje de este tema.
12. Análisis del experimento. Se analizan los resultados obtenidos teniendo presente los aprendizajes esperados y los aprendizajes finalmente logrados por los alumnos.

Gracias a estos procedimientos metodológicos que nos ha brindado el método de investigación elegido se ha podido desarrollar toda la investigación.

A continuación mencionaremos en forma detallada todos los aspectos correspondientes a nuestro experimento y que serán presentados en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO

Se indica la descripción del escenario a través de las personas con quienes se aplica la presente investigación, el diseño de actividades y se describe brevemente los instrumentos de la investigación, las características de su entorno y los instrumentos de recolección de datos.

3.1. Descripción del escenario

Características generales de los alumnos:

La investigación se aplica en alumnos del quinto grado de E.S. del turno tarde, de la I.E. estos alumnos tienes edades que bordean en promedio los quince a dieciséis años, teniendo solo una alumna de dieciocho años de edad. No hay alumnos repitentes y la mayoría de ellos son alumnos inscritos en el plantel desde el primer grado de E.S.

Los alumnos están distribuidos en tres secciones de quinto: A, B y C, la información consignada en la tabla 4:

Tabla 4. Distribución de alumnos por sexo y sección en quinto grado de E.S. de la I.E.

	Total	Mujeres	Porcentaje de hombres %	Hombres	Porcentaje de mujeres %
5A	26	15	57,7	11	42.3
5B	27	18	66.7	9	33.3
5C	28	12	42.9	16	57.1
Total	81	45	55.6	36	44.4

Además, los alumnos han trabajado en clases de educación para el trabajo en el aula de innovaciones con programas de office, photoshop, Windows movie maker, robótica, etc. pero no han tenido la oportunidad de usar algún software matemático.

Los alumnos no han trabajado lógica matemática ni el tema de inecuaciones o sistema de inecuaciones lineales con dos variables en años anteriores. La docente del curso afirma que no usa el libro texto y solo han llevado trigonometría, invitándonos a que desarrollemos el tema de P.L.

Características académicas de los alumnos:

Los alumnos de quinto grado de E.S., sujetos de nuestra investigación sólo revisaron sistema de ecuaciones lineales con dos variables en tercero de secundaria, es decir hace dos años atrás trabajándolo sólo en forma algebraica más no en forma gráfica, según lo conversado en la encuesta con la profesora del curso de aquella época. Ahora en quinto grado de E.S. los alumnos han trabajado trigonometría y han iniciado el tema de sólidos geométricos, pero no el tema de P.L.de ahí que hemos decidido desarrollar todo el contenido desde la revisión de requisitos y no tomamos la prueba de entrada, porque los alumnos tenían muy lejanos aquellos conocimientos.

Los alumnos seleccionados para nuestra investigación, fueron elegidos al azar, solo dos alumnos por sección, sus trabajos serán analizados en forma individual y a continuación mencionaremos los nombres de dichos alumnos en la tabla 5:

Tabla 5. Relación de alumnos seleccionados para la observación de actividades

En el 5to A	**En el 5 to B**	**En el 5to C**
Karem y Lucero.	Mónica y Cristhian.	Jeffrey y Andres.

Características del profesor investigador:

La profesora investigadora, quien realizó la experiencia, no es docente de aula, su labor en la I.E. es ser administradora de las aulas de innovaciones y labora en este cargo desde el 2009, pero en su formación profesional es profesora de matemática y física.

Características del equipo de matemáticas de la I.E.:

Los docentes de matemática, muestran un desconocimiento en el uso de software matemático, pero expresaron querer ser capacitadas al final de la presente investigación para no estar en desventaja frente a los alumnos.

Las docentes tienen presente que el MINEDU (2012b) indica que la sociedad actual pide a los educadores se preparen ante los desafíos de una sociedad futura aún en construcción, es por ello que saben que deben capacitarse.

3.2. Diseño de las actividades. Las actividades han sido graduadas desde los conocimientos básicos de matemática relacionándolos a la par con el uso de comandos de GeoGebra para facilitar el trabajo de los alumnos y el aprendizaje del tema de P.L.

En las actividades 1, 2 y 3, revisamos conocimientos previos a la P.L., empezamos con la actividad N°1 usando lápiz y papel, posteriormente, los alumnos conocieron GeoGebra y aplicaron algunos comandos del mismo para resolver ejercicios en forma simultánea trazando puntos, rectas y ecuaciones lineales con dos variables donde verificaron e interpretaron la información que obtuvieron en papel.

En la actividad N°2, los alumnos determinaron diferencias entre ecuaciones e inecuaciones lineales con la mediación de GeoGebra, luego graficaron inecuaciones con lápiz y papel, finalmente determinaron la solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos variables e identifican los vértices del polígono convexo al aplicar algunos comandos de GeoGebra.

En la actividad N° 3, los alumnos evaluaron la función objetivo en los vértices del conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales con dos variables, optimizando la función objetivo trabajando primero con lápiz y papel y luego con GeoGebra. Finalmente, se realizó una introducción a P.L., reconociéndolo como un método matemático para resolver determinados problemas, identificar una región factible, optimizar la función objetivo e identificar el tipo de solución.

Por otro lado, cabe señalar que una característica que presentaron las actividades 1,2 y 3 es que propiciaban la metacognición al hacer reflexionar a los alumnos sobre la forma como lograban su aprendizaje a través de comentarios o preguntas sobre las actividades.

Creemos que esta secuencia permitirá a los alumnos la organización de su aprendizaje, por ello, nos preocupamos en orientar y guiar la formación de conocimientos en el tema de P.L. así como la solución de ejercicios propuestos.

Finalmente, en la actividad N° 4 y la actividad N° 5, esperamos que los alumnos demuestren el manejo de algunos comandos de GeoGebra así como el manejo de información matemática adquirida para poder utilizarlos en la resolución de problemas propuestos titulados: “producción de bicicletas: montañera y de paseo” y “producción de: pantalones y chaquetas”. En ambas actividades los alumnos identifican los datos del problema y las restricciones y los representan uno a uno en forma algebraica consignándolas en una tabla donde esperamos que de manera natural y espontánea deduzcan y determinen la función objetivo junto con las restricciones con precisión y acierto. De ahí se pide a los alumnos que grafiquen con GeoGebra la solución del sistema de inecuaciones, identifiquen los vértices de la región factible y la optimicen. Luego se les pide que transcriban el gráfico obtenido con GeoGebra en sus hojas y determinen la respuesta a la pregunta solicitada para lograr el valor óptimo.

Entre el desarrollo de las actividades, se propuso el desarrollo de actividades de enlace, siendo en total tres, estos tuvieron por finalidad medir el logro de los aprendizajes a través de las actividades 1, 2, 3, 4 y 5.

Aquí se registraron preguntas sobre el tema tratado en la última actividad realizada, haciendo que los alumnos transiten por los diferentes registros de representación semiótica, solo con el uso de lápiz y papel.

Finalmente, elaboramos un control interno de los alumnos en el desarrollo de las actividades, así se sintieron apoyados y valorados en lo que hacían tanto al inicio como durante y al final de las experiencias.

Creemos que los alumnos frente a otros distractores como internet on line, la posibilidad de ingresar a facebook o a Hi 5 o a juegos de red, se dan cuenta que realizan un trabajo serio y gratuito donde se les brinda la actividad más noble que existe en educación, en mejorar la enseñanza de la matemática aprendiéndola en un ambiente agradable con tecnologías es decir con uso de computadoras y software.

Incluimos en el proceso el siguiente indicador de observación de trabajo en clase, pensamos que los alumnos podrían así concentrase mejor y responder a nuestras expectativas. Veamos esta afirmación en la figura 41:

Figura 41. Control interno del trabajo de los alumnos en las actividades

El cuadro de supervisión de su trabajo tiene dos espacios en blanco para ser rellenado por el docente, cuando trabajen o no sus actividades. El docente debe tener presente el tipo de resultado que debe lograr los alumnos, para ello se sugiere haber leído previamente el resultado de las actividades y haber realizado un ensayo de las posibles respuestas que emitirán los alumnos para poder orientar su trabajo.

Organización Interna de las actividades propuestas:

La organización interna de las actividades podemos analizarlas en función de:

Conocimientos matemáticos:

Partimos de la determinación de conocimientos básicos de matemática al realizar las actividades propuestas.

a) Conocimientos matemáticos asociados al campo algebraico:

- ✓ Tipo de inecuación lineal con dos variables según el signo de desigualdad: $>$, $<$, $\leq$, $\geq$.
- ✓ Número de restricciones de un problema de P.L.
- ✓ Tipo de registros que determina un problema en forma algebraica, verbal, o gráfico.
- ✓ Tipo de optimización: Maximización o minimización.
- ✓ Tipo de soluciones de un problema de P.L.: entero, no negativo o real Positivo con una solución, con múltiples soluciones o con ninguna solución.

b) Conocimientos matemáticos asociados al campo geométrico:

- ✓ Semiplanos.
- ✓ Clases de semiplanos.
- ✓ Intersección de semiplanos.
- ✓ Número de semiplanos.
- ✓ Tipo de intersecciones de semiplanos.
- ✓ Tipo de región factible.

Competencias:

Con la selección de estas variables, elaboramos 5 experiencias, esperamos que al finalizar los alumnos estén en condiciones de:

- ✓ Representar puntos, rectas, ecuaciones e inecuaciones.
- ✓ Identificar el conjunto solución de una ecuación lineal con dos variables y de una inecuación lineal con dos variables.

- ✓ Representar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales.
- ✓ Determinar las diferencias entre ecuaciones e inecuaciones lineales de primer grado con dos variables.
- ✓ Representar gráficamente el conjunto factible determinado por las restricciones de un problema de P.L.
- ✓ Dominar conceptos y definiciones básicas para ecuación, sistema de ecuaciones, inecuaciones y P.L.
- ✓ Comprender que P.L. es un método matemático que nos brinda un procedimiento de solución de un problema de P.L.
- ✓ Dominar procedimientos para resolver un problema de P.L.

<u>Organización del aprendizaje en cada actividad:</u>

Observemos la organización de los aprendizajes a través de todas las actividades consignadas en la siguiente tabla 6:

Tabla 6. Organización del aprendizaje en cada actividad

ACTIVIDAD	CONTENIDO	APRENDIZAJES ESPERADOS
ACT. N° 1	Rectas en el plano y aplicación de algunos comandos con GeoGebra	1. Realizar gráficos de puntos en el plano. 2. Realizar operaciones algebraicas para hallar el conjunto solución. 3. Representar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano. 4. Representar puntos en la ventana Gráfica 5. Representar rectas en la ventana Gráfica. 6. Determinar las coordenadas del C.S. de las ecuaciones.
ACT. N° 2	Manejo de algunos comandos del software GeoGebra Inecuaciones en el plano y Vértices de la Región Factible	1. Establece las diferencias entre las gráficas de ecuaciones e inecuaciones lineales con dos variables. 2. Grafica Inecuaciones lineales con dos variables usando lápiz y papel 3. Grafica inecuaciones lineales con dos variables usando GeoGebra 4. Reconoce los vértices de las regiones poligonales al interceptar inecuaciones lineales con dos variables en el plano

		utilizando el software GeoGebra
ACT N° 3	Manejo de algunos comandos del software GeoGebra. Evaluar una función F(x, y) en los vértices de la región	1. Determina el valor óptimo de la función en los vértices de la solución gráfica de un sistema de inecuaciones lineales con dos variables presentados en papel. 2. Determina gráficamente los vértices de la solución de un sistema de inecuaciones usando GeoGebra y halla el valor óptimo de la función.
ACT N° 4	Plantear y resolver un problema contextualizado de programación lineal: "Producción de tipos de bicicletas: montañeras y de paseo"	1. Plantea inecuaciones lineales 2. Halla la región factible usando GeoGebra. 3. Determina los vértices de la región factible usando GeoGebra
ACT. N° 5	Plantear y resolver un problema contextualizado de programación lineal: "Producción de: pantalones y chaquetas".	a. Identifica las variables b. Identifica las restricciones. c. Identifica la función objetivo d. Grafica la región factible con GeoGebra e. Esboza la región factible en el papel , graficándolo f. Sombrea la región factible g. Grafica las coordenadas de los puntos en el papel h. Identifica los vértices del polígono convexo con el GeoGebra i. Evalúa la función objetivo. j. Realiza operaciones aritméticas. k. Identifica el tipo de optimización a realizar. l. Determina la venta máxima. m. Determina la cantidad requerida de cada producto.

<u>Duración de las actividades</u>:

Se planificó que el desarrollo de las tres primeras actividades se deberían de hacer en tres horas pedagógicas cada una, mientras que para el desarrollo de las dos últimas actividades 4 y 5 se debería invertir dos horas pedagógicas, pudiéndose extender un poco más, debido a que los alumnos ingresaban a un nuevo ambiente de trabajo: las aulas de innovaciones, también debemos considerar el tiempo de adaptación requeridos por los alumnos para reconocer algunos comandos del GeoGebra, usarlos para resolver problemas de P.L. así como tiempo necesario para producir y organizar sus propias representaciones sobre los conocimientos matemáticos planteados por cada actividad.

La realidad mostró otro resultado, veamos:

Tiempo real y alumnos participantes la aplicaciones de las actividades fueron distribuidas y organizadas como se muestra en la tabla 7:

Tabla 7. Alumnos participantes y tiempo real requerido en cada actividad

Grado y Seccion	**Cantidad de alumnos**	**Sesión 1**	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**
		T = 4 horas pedagógicas	**T = 6 horas pedagógicas**	**T = 6 horas pedagógicas**	**T = 2 horas pedagógicas**	**T=20 minutos**
5A	26	22	22			
5B	27	22	20	22	22	22
5C	28	24	13			

Se coordinó con algunas docentes que cedieran algunas de sus horas de clase efectiva con los alumnos de quinto grado de E.S., ya que nuestra investigadora al no ser docente de aula no tenía disposición de horas de clases efectivas, así que tres docentes nos brindaron la posibilidad de ingresar y dirigir a los salones durante sus horas sin necesidad de cortarlas. Debemos comentar que ingresamos a cada sección un día antes de iniciar el desarrollo de nuestras actividades haciéndoles un comentario breve sobre nuestra investigación y lo que esperábamos al final de la misma.

Se observó que, los alumnos mostraron mucho agrado, entusiasmo y curiosidad por trabajar un tema matemático en el aula de innovaciones, pero observamos que nadie sabía que era un software matemático y mucho menos ¿para qué servían? Además más de uno se hizo la pregunta de ¿cómo podía ayudar este software GeoGebra a resolver problemas de matemática?

Finalmente, en la siguiente tabla 8 se muestra los días en que se aplicó cada actividad.

Tabla 8. Registro de los días de aplicación de las actividades

Año y Sección	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5	Actividad de enlace N°1	Actividad de enlace N°2
5 A	6 de nov.	20 -21 de Nov.				20 Nov.	23 de Nov.
5B	13de Nov	14 – 15 y 16 de Nov.	23-26 y 27 de Nov	28 de Nov	29 de Nov	14 Nov.	23 de Nov.
5C	6 de Nov.	16 -19 de Nov.				16 de Nov.	23 de Nov.

Características generales de las actividades, estas deben de tener en forma clara la:

- Información sobre las capacidades a lograr en los alumnos por cada tema.
- Información sobre los contenidos matemáticos a lograr por cada tema.
- Información sobre los comandos de GeoGebra a utilizar en cada actividad.

Características generales en la solución de problemas propuestos de P.L:

La forma de solución de los problemas propuestos que se observan en las actividades 3 y 4 no solo se basan en lo presentado por Grossman (1992b) sino que realizamos una adaptación **de la forma de trabajo que tiene** Díaz (2005), y realizamos una producción de trabajo mejorada. Observemos esta información en la figura 42:

Problema propuesto:

Barcos de clase Preferencial (A)	Barcos de clase Estándar (B)
	

Figura 42. Tipos de barcos según forma de pago del pasajero

Una compañía naviera dispone de dos barcos para realizar un determinado crucero: barcos de clase preferencial (A) y barcos de clase Estándar (B). El Barco A debe hacer tantos viajes o más que el Barco B, pero no puede sobrepasar los 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20 viajes. La naviera obtiene un beneficio de: 18 000 Soles por cada viaje del Barco Preferencial y de 12 000 soles por cada viaje del Barco Estándar, entonces, se sabe que las ganancias serán las máximas, luego:

Expresa:

a) La función objetivo.
b) Describe mediante inecuaciones las restricciones del problema.
c) Determina gráficamente la región factible.
d) Completa la tabla y halla el número de viajes que debe de efectuar cada Barco para obtener el máximo beneficio.
e) Calcular el beneficio Máximo.

<u>**Solución**</u>:

Datos:

2. Hay dos tipos de Barcos: Preferencial y Estándar.
3. La naviera obtiene un beneficio de:
   18 000 Soles por cada viaje del Barco Preferencial y de 12 000 soles por cada viaje del Barco B.

Restricciones:

El Barco A debe hacer tantos viajes o más que el Barco B.

El Barco A no puede sobrepasar los 12 viajes.

Entre los dos Barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20 viajes.

Función Objetivo: Solicitan el máximo beneficio, sabiendo que la naviera obtiene un beneficio de: 18 000 Soles por cada viaje del Barco Preferencial y de 12 000 soles por cada viaje del Barco Estándar.

Completa la siguiente Tabla 9:

Tabla 9. Consignación de datos y restricciones del problema propuesto

Tipos de Barcos	Número de viajes realizado	Variables de no negatividad	Beneficio por cada viaje en miles de soles (s/.1000)	Beneficio Total por cada tipo de viaje
Barco Preferencial	x	$x \geq 0$	18	$18x$
Barco Estándar	y	$y \geq 0$	12	$12y$
Función Objetivo: $f(x\ ,\ y)=$				$18x+12y$

a) **Función Objetivo :** $F(x\ ,y)= 18x + 12y$

b) **Las restricciones del problema son:**

$x \geq y$

$x \leq 12$

$6 \leq x + y \leq 20$, es decir: $6 \leq x + y \quad \wedge \quad x + y \leq 20$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

c) **La región es factible,** se muestra en la figura 43 :

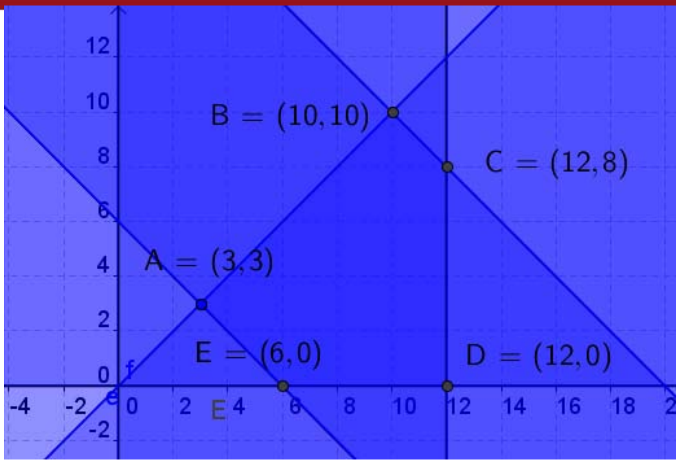
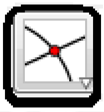


Figura 43. Región factible del problema propuesto

d) Utiliza el comando:  Intersección entre dos objetos y halla los vértices. Recuerda que debes trabajar con las rectas frontera de la región factible y no con las inecuaciones:

$x = y$
$x = 12$
$6 = x + y$
$x + y = 20$
$x = 0$
$y = 0$

e) Completa la tabla 10

Tabla 10. Evaluando los vértices de la región factible del problema propuesto

Coordenadas de los vértices	Evaluando las coordenadas en la función objetivo F(x, y) = 18x+12y	Beneficio final x 1000 soles
A(3,3)	18(3) +12(3) = 54 + 36	90
B(10,10)	18(10) +12(10)= 180 + 120	300
C(12,8)	18(12) +12(8)= 216 +96	312
D(12,0)	18(12) +12(0)= 216 + 0	216
E=(6,0)	18(6) +12(0)= 108 + 0	108

f) El valor óptimo se logra con las coordenadas del vértice C (12,8) con el cual se hace la siguiente interpretación para dar respuesta al problema.

Se tiene que realizar 12 viajes con el Barco Preferencial y 8 viajes con el barco estándar.

Indicaciones previas al desarrollo de la investigación:

Cabe señalar las siguientes indicaciones para que el trabajo sea óptimo:

- ✓ El docente debe tener instalado el software GeoGebra en todas las computadoras que se encuentran ubicadas en la sala: las computadoras compatibles o las Laptops XO, así los alumnos podrían elegir libremente la máquina y la posición donde puedan trabajar cómodamente.

3.3. Instrumentos de la recolección de datos: hemos trabajado con:

- Ficha de entrevista no estructurada
- Ficha de observación de clase
- Ficha de actividades

1. **Ficha de entrevista no estructurada:** Recordemos según Salazar (2009), esta se define como: una entrevista cuyo contenido está preestablecido, mas no la forma de las preguntas**.**

Características:

- ✓ La especificidad de este tipo de entrevista, está en la individualidad de los temas y del itinerario de la entrevista.
- ✓ El entrevistador tiene como único cometido el de sacar, a lo largo de la conversación, los temas que desea abordar.
- ✓ El entrevistador dejará que el entrevistado desarrolle su visión del tema y mantenga la iniciativa de la conversación, limitándose a animarlo o a incitarlo a que profundice cuando toque temas que parezcan interesantes.
- ✓ El entrevistador, además de esta función de estímulo, desempeña también una función de control: atajando las divagaciones excesivas. Además vigila que la entrevista no degenere hacia cuestiones totalmente carentes de conexión con el tema analizado.
- ✓ El entrevistador deberá reconducirla al núcleo principal.

La entrevista no estructurada se hizo en el laboratorio de química de la I.E, el día lunes 29 de Octubre desde las 10 am hasta las 12 am.

Se abordó temas como: La característica académica y actitudinal de los alumnos, los problemas del curso y las limitaciones con los materiales de trabajo haciendo inclusive sugerencias a las fichas de actividades y el compromiso de apoyo a los colegas en el manejo de este software por su desconocimiento en su uso.

Se indica también que a pedido de los requerimientos de la investigación se le envió una copia de la ficha en blanco de dicha entrevista a fin de que lo complete y así poder tener un informe físico de dicho documento, siendo entregado el 29 de Noviembre del 2012.

Ver la ficha de entrevista no estructurada en el APÉNDICE.

2. Ficha de Observación de actividades: Hemos elaborado esta ficha de trabajo y pediremos a los profesores colaboradores registren los logros, dificultades e incidencias en el desarrollo de la clase, evitando influenciar en el trabajo de los alumnos al sugerirle cualquier procedimiento, de ahí que su función solo sea de simples observadores de clase. Ver ficha de observación de actividades en el APÉNDICE.

3. Ficha de actividades: Hemos elaborado 5 actividades a realizar con los alumnos, sobre su diseño ya se explicó en la sección 3.2 en ellos se relaciona el conocimiento y aplicación de contenidos básicos de matemática y así como el manejo de comandos básicos de GeoGebra.

Las actividades mencionadas, estas serán distribuidas en dos etapas, aunque ya se explicó observamos de manera general que en la primera etapa se inicia a los alumnos en el desarrollo del conocimiento y el uso de algunos comandos de GeoGebra así como en la construcción de conceptos matemáticos previos como el trazo de punto, rectas, ecuaciones e inecuaciones y la solución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, debido a que los alumnos no tienen conocimiento sobre este software y además el tema de estos objetos matemáticos fue visto para ellos hace mucho tiempo atrás en tercer grado de secundaria y no en el quinto grado del mismo nivel esta etapa consta de tres actividades: 1,2 y 3.

Empezamos con afianzar la gráfica de punto y la interpretación de las coordenadas en el plano ya que esta misma tendrá en el futuro una interpretación más amplia en los problemas de P.L. luego graficamos rectas, sistema de ecuaciones lineales con dos variables, inecuaciones y sistema de inecuaciones lineales con dos variables y finalmente optimizar la función objetivo en la región factible. Para ello propusimos realizar actividades usando al principio lápiz y papel y posteriormente usando el software GeoGebra.

En la segunda etapa trabajamos dos problemas de programación lineal la primera fue para resolver un problema sobre "producción de bicicletas: montañeras y de paseo" aquí se les enseñó a utilizar a los alumnos toda información que ya habían aprendido para resolver un problema contextualizado sobre P.L. guiado con la profesora y finalmente resolvieron solos un problema en forma individual sobre "producción de pantalones y chaquetas", usando lápiz y papel y la mediación de GeoGebra.

En veamos el siguiente gráfico de la figura 44 las etapas a las que hemos hecho referencia:

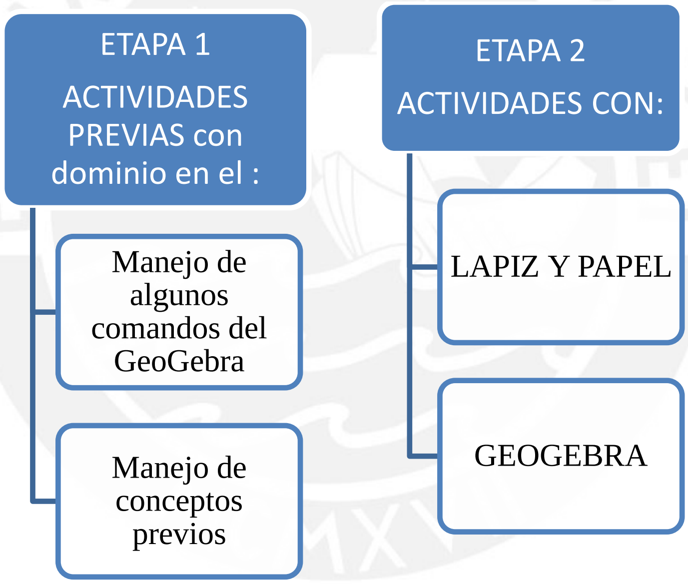


Figura 44. Etapas en la aplicación de nuestras actividades con y sin GeoGebra

Como ya lo mencionamos en la primera etapa se han desarrollado 3 actividades con los alumnos mientras en la segunda etapa se han desarrollado dos actividades. Ver estas actividades 1, 2, 3, 4 y 5 así como las actividades de enlace 1, 2 y 3 en el APÉNDICE

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DEL EXPERIMENTO

En este Capítulo, indicaremos nuestra propuesta de aprendizajes esperados que proponíamos lograr con el desarrollo de las actividades N°1 y N°5. Antes de describir los aprendizajes obtenidos en dichas actividades, mencionaremos brevemente los problemas o dificultades matemáticas encontradas en la aplicación de las actividades y las apreciaciones respectivas de los alumnos. De ahí, enunciaremos los aprendizajes obtenidos en las actividades N°1 y N°5, y realizaremos el análisis de esta información para validar los objetivos planteados y por ende responder nuestra pregunta de investigación.

<u>4.1 Aprendizajes esperados</u>

1. Realizar gráficos de puntos en el plano, aquí observaremos la conversión ($\Longrightarrow$), del Registro de Representación Semiótica Algebraico (R.R.S.A) al Registro de Representación Semiótica Gráfico (R.R.S.G), usando lápiz y papel :
   R.R.S.A. $\Longrightarrow$ **R.R.S.G.**
2. Realizar operaciones algebraicas para hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aquí observaremos el tratamiento ( ) del Registro de Representación Semiótica Algebraico, usando lápiz y papel:
   R.R.S.A.
3. Representar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano, aquí observaremos la conversión de Registros de Representación Semiótica Algebraico al Registros de Representación Semiótica de tipo Gráfico, usando lápiz y papel: **R.R.S.A.** $\Longrightarrow$ **R.R.S.G.**
4. Representar puntos en la Ventana Gráfica del GeoGebra ingresando datos a través de la ventana de entrada, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraico al Registro de Representación Semiótica Gráfico, usando GeoGebra: **R.R.S.A.** $\Longrightarrow$ **R.R.S.G.**
5. Representar rectas en la ventana Gráfica del GeoGebra ingresando la ecuación de rectas a través de la ventana de entrada, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraico al Registro de Representación Semiótica Gráfico, usando GeoGebra: **R.R.S.A.** $\Longrightarrow$ **R.R.S.G.**
6. Determinar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas si existe usando el comando: intersección de dos objetos, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Gráfico al Registro de Representación Semiótica Algebraico, usando GeoGebra: **R.R.S.G.** $\Longrightarrow$ **R.R.S.A.**

Mientras que al finalizar la actividad N° 5 esperamos que los alumnos puedan lograr:

1. Identificar variables, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Verbal al Registro de Representación Semiótica Algebraico, usando lápiz y papel: **R.R.S.V.** ⟹ **R.R.S.A.**
2. Identificar las restricciones, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Verbal al Registro de Representación Semiótica: Algebraico, usando lápiz y papel: **R.R.S.V.** ⟹ **R.R.S.A.**
3. Identificar la función objetivo, aquí observaremos la conversión de Registro del Representación Semiótica Verbal al Registro de Representación Semiótica: Algebraico, usando lápiz y papel: **R.R.S.V.** ⟹ **R.R.S.A.**
4. Graficar la región factible con GeoGebra aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraico al Registro de Representación Semiótica Gráfico usando GeoGebra: **R.R.S.A.** ⟹ **R.R.S.G.**
5. Esbozar la región factible, aquí observaremos el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Gráfico, usando lápiz y papel: **R.R.S.G.**
6. Sombrear la región factible, aquí observaremos el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Gráfico, usando lápiz y papel: **R.R.S.G.**
7. Graficar las coordenadas de los puntos en el papel, aquí observaremos el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Gráfico: **R.R.S.G.**
8. Identificar los vértices del polígono convexo con el GeoGebra, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Gráfico al Registro de Representación Semiótica Algebraico: **R.R.S.G.** ⟹ **R.R.S.A**.
9. Evaluar la función objetivo en los vértices, aquí observaremos el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Algebraico, usando lápiz y papel: **R.R.S.A**.
10. Realizar operaciones aritméticas, usando lápiz y papel, aquí observaremos un tratamiento del Registro de Representación Semiótica Algebraico. **R.R.S.A.**
11. Identificar el tipo de optimización a realizar, aquí observaremos el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Verbal: **R.R.S.V.**
12. Determinar la venta máxima, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraico al Registro de Representación Semiótica Verbal, usando lápiz y papel: **R.R.S.A.** ⟹ **R.R.S.V**.
13. Determinar la cantidad requerida de cada producto, aquí observaremos la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraica al Registro de Representación Verbal, usando lápiz y papel: **R.R.S.A.** ⟹ **R.R.S.V.**

4.2. Aprendizajes obtenidos:

Problemas o dificultades matemáticas encontradas en cada actividad realizada:

Sesión 1

En los tres grupo se encontró un promedio de 4 alumnos por aula quienes no podían ubicar los puntos en el plano y ese mismo grupo de chicos mas otros dos alumnos presentaban dificultades al manejar escalas, por ejemplo estos alumnos invertían el orden de las componentes, pero el resto del salón no tenian dificultad en digitar correctamente los pares ordenados en GeoGebra. Al final de la clase solo dos alumnos por aula determinaron erróneamente la gráfica de puntos, porque lo representaron en coordenadas polares (reglas de GeoGebra).

Dos alumnos en la clase no prestaron atención a la explicacion de las diferencias del uso entre el punto, coma y el punto y coma, llegando a gráficar coordenadas polares

Lucero, alumna del 5to A, indicó que el programa GeoGebra le facilita la construcción de gráficas, porque al usar lápiz y papel el tiempo en desarrollar un ejercicio era el doble del normal empleando el software GeoGebra, es decir se mostraba la mediacion de GeoGebra en P.L.

Karem del 5to A, comentó que era un forma más rápida de aprender usando el software GeoGebra, ya que se obtenía los resultados correctos de manera rápida.

A todos los alumnos les resultó fácil hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones propuesta en la actividad N° 2 usando el comando ***interseccion de dos objetos,*** porque demostraron destreza y exactitud al hallar las coordenadas del sistema de ecuaciones propuesto en dicha subactividad y con la mediación de este comando de GeoGebra lograron tener la respuesta correcta.

A continuación indicaremos algunas apreciaciones de los alumnos observados: Mónica y Cristhian frente a esta actividad:

- ✓ Mostramos bastante curiosidad sobre el uso de un software nuevo.
- ✓ Sospechamos que este software nos ayudará a reforzar nuestros conceptos matemático.

- ✓ Notamos que el desarrollo de la clase fue creativa, sencillo de entender y comprender, porque repondimos a todas las preguntas y salimos bien en la prueba de enlace número 1.
- ✓ Comentaban que la docente encargada de aplicar las actividades mostraba un buen dominio del tema de P.L. y en general de matemática debido a que reflejaba en su trabajo dinámico que estaba capacitada y actualizada, manejando mejor al grupo.

A pesar que originalmente la primera ficha diseñada no tenían un recuadro para controlar y supervisar firmando el avance interno, algunos alumnos pidieron que se les firme su avance y luego generaron competencia entre ellos. Los alumnos comentaron que les agradaba estar supervisados constantemente con su trabajo personal ya que generan además de concentración en el tema de programción lineal mucha motivación en clase.

La sesión 2

Los alumnos demoraron en verbalizar el trabajo realizado en la parte de comentarios.

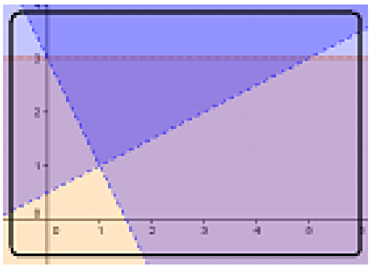
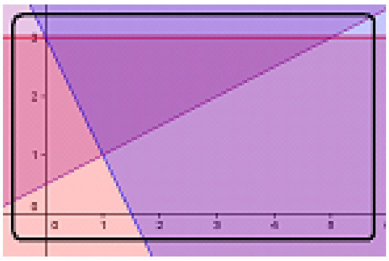
Los alumnos observados brindaron rápidamente una respuesta no esperada en la pregunta mostrada en la figura 45, aquí se les pidió determinar el conjunto solución de un sistema de inecuaciones, originalmente esperamos que se demoracen, pero identificaron la respuesta al analizar solo los bordes de la región obtenida, asi identificaron en las gráficas de las respuestas posibles que una presentaba el borde continuo y la otra el borde es punteado e interpretaron rapidamente la relacion de estas con el signo de desigualdades no estrictas con la de las desigualdades estrictas. Verificandose el libre tránsito del Registros de Representación algebraico al gráfico de forma espontánea y natural.

5 .Determina el conjunto solución de inecuaciones marcando la siguientes opciones::

$2x + y - 3 > 0$

$x - 2y + 1 < 0$

$y - 3 < 0$

a) Opciones:.1  2 

b) ¿Dichos vértices son la solución del sistema?¨(Adaptado de Moreno, 2011, p.86

Figura 45. Ausencia de vértices en la región factible con desigualdades estrictas
Fuente: Actividad N°2

Observamos que los alumnos detectaron rápidamente en un solo golpe de vista la respuesta correcta analizando el símbolo de esta desigualdad, al final observamos que los alumnos establecieron fácilmente la respuesta de este item porque realizan la conversion de registros de representacion algebraico al gráfico.

A continuación indicaremos algunas apreciaciones de los alumnos observados Mónica y Cristhian del 5to B frente a esta actividad.

- ✓ Los alumnos descubrieron que sus intervenciones eran aceptadas y consideradas y que podían participar sugeriendo que procedimiento iban a realziar asi como algunos trucos, por ejemplo para determinar la región de plano correcta de una inecuacion propuesta, aquí 6 alumnso sugirieron introducir un dibujo o caricatura de un conejito sorpresa o conejito de indias, porque para graficar inecuaciones había que escoger un punto de prueba igual a fin de indicar cual de los dos semiplanos determinados por una recta se debería de seleccionar y pintar en la solucion de la inecuación.
- ✓ Nadie tuvo dificultad en graficar inecuaciones siendo incluso divertido para ellos, esto se observó que en la actividad de enlace N° 2 nadie se equivocó en graficar

inecuaciones, incluso utilizaron colores. Los alumnos comentaron que era mas fácil graficar inecuaciones que ecuaciones lineales con dos variables.

Es decir los alumnos no mostraron dificultad en la conversión de Registros de Representación algebraica al gráfico.

Dos alumnos pidieron que las preguntas tuvieran opciones para marcar ya que se observó que tenían problemas de verbalizar los procedimientos.

Los alumnos observados de cada salón, mostraron una mejoría rápida en su rendimiento académico frente al grupo debido a que ellos intervenian constantemente y manejaban las máquinas principales: la laptop del docente investigador como la máquina del administardor de recursos tecnologicos de la I.E. la cual estaba conectada a la pantalladel proyector multimedia

Creemos que si los alumnos son afianzados y reforzados constantemente en su trabajo personal muestran mayor seguridad y dominio del tema.

En esta actividad se evidenció la conversión de Registros de Representación algebraica a la gráfica

La sesión 3

Los alumnos mostraron mucha claridad y dominio de la aplicación del comando de ***intersección de dos objetos***, al determinar los vértices de la región factible propuesta en los ejercicios.

Comprendieron rápidamente el concepto de valor óptimo al maximizar o minimizar funciones, relacionando su significado con la mayor ganancia o el menor valor obtenido al evaluar la función objetivo en los vértices del polígono obtenido en la solucion gráfica de inecuaciones.

Se observó que antes de finalizar la sesión los alumnos no tuvieron dificultad en determinar el valor óptimo de la función objetivo en la region factible.

A continuación indicaremos algunas apreciaciones de los alumnos frente a esta actividad:

Indicaron que con el uso previo del GeoGebra les ayudaban a visualizar las regiones obtenidas mostrando seguridad al resolverlo con lápiz y papel.

Varios alumnos al comprobar sus resultados con GeoGebra indicaron que se sentían "geniales" y "contentos" al comparar y contrastar rápidamente resultados obtenidos con lápiz y papel con los obtenidos con GeoGebra .

La alumna Mónica del 5to B, por ejemplo exclamó con voz fuerte frente a sus amigas : "He aprendido a gráficar inecuaciones y colorear regiones y lo puedo verificar con GeoGebra" .

El alumno Cristhian del 5to B, se mostró contento en tratar de dar las respuestas antes que sus compañeros, porque sabía que era uno de los elegidos, demostró un cambio de actitud, era muy tímido al inicio pero poco a poco habló de su trabajo frente a sus compañeros. Cristhian detectó rapidamente que habían dos inecuaciones dentro de una desigualdad, esta tenía doble signo de desigualdad, y dijo a sus amigos "yo también puedo" y su aporte fue muy notorio en clase a pesar de su timidez.

Veamos a continuación la pregunta donde intervino el alumno Cristhian durante la clase, la cual está consignada en la figura 46:

4 Maximiza la función: $F_{(x;y)} = 6x + 10y + 3000$, sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1000 \\ 0 \leq y \leq 700 \\ 0 \leq x + y \leq 800 \end{cases}$$

Opciones:
a) 7 800 b) 500 c) 4 200 d) 10 600 e) 5 000

Figura 46. Planteo de dobles inecuaciones en una desigualdad
Fuente: Actividad N°3

Se observó que el uso de tablas para maximizar o minimizar funciones facilitó un orden en sus operaciones matemáticas.

Es decir, los alumnos siempre necesitan reforzar su trabajo teórico práctico en clase, y se observó que la mayoría de alumnos logró obtener la respuesta solicitada.

Para ellos es un reto avanzar cada día nuevos temas que relacionaban los contenidos matemáticos y comandos de GeoGebra que anteriormente fueron tratados, los alumnos hicieron uso constante de tablas o gráficos que orientan adecuadamente sus procedimientos.

Había mucha expectativa al trabajo a realizar el siguiente día, solo se les decían: “para ello tienes que venir”.

La sesión 4

“Problema de Produccion de Tipos de bicicletas: Montañeras y de paseo”.

Para el desarrollo de este problema solo contamos con la participación del 5to B, debido a que el permiso de ingreso a las aulas de quinto ya iba a acabar.

Todos los alumnos estuvieron atentos cuando realizaban la solución del problema propuesto. Modelaron el problema a través de las desigualdades lineales y constantemente ser los notaba realizar la conversión de datos representados de forma verbal a su forma algebraica, indicando en esa parte que otros profesores no le ubieran prestado la atención debida y lo ubieran pasado por alto.

Tres alumnos del grupo no ubicaron adecuadamente las coordenadas del punto que optimiza la función en la región factible observándose que existia confusión al ubicar puntos a escala en el plano cartesiano.

Hubieron otros tres alumnos que no pintaron la región factible, solo pusieron las coordenadas de los vértices hallados con GeoGebra, pero no repararon en la importancia de sombrear toda la región, a pesar que lograron la respuesta correcta.

Se detectó problemas en las operaciones aritméticas con cuatro alumnos, multiplicando de la siguiente manera : 90(0) + 12(0)= 102 asi como en este caso: 90(30) + 120 (20) = 2700+ 120 = 2820 +20= 2840, mostrándose una confusión entre el elemento neutro de la suma con el de la multiplicación, es decir se quedaron en el empleo de operaciones aritméticas básicas.

Caso parecido sucedió con otros cuatro alumnos que no vieron necesario el procedimiento de sombrear la región factible, porque reconocían los vértices de región factible y evaluaban la funcion objetivo en cada uno de ellos.

A continuación, indicaremos algunas apreciaciones de los alumnos Mónica y Cristhian frente a esta actividad.

- ✓ Todos los alumnos se mostraron sorprendidos el análisis de cada frase del problema planteado en froma verbal y de este modo les resultaba fácil y espontáneo convertirlos al Registro de Representación Semiótica Algebraico.
- ✓ Por otro aldo la presencia de tablas y de un plano cartesiano impreso en sus hojas permitieron organizar mejor la secuencia de aprendizaje que estaban experimentando los alumnos en el desarrollo de las actividades.
- ✓ Todos los alumnos estuvieron de acuerdo que con esta forma de trabajo, se les facilitaba el ahorro de tiempo, porque ya no hacían trazos inadecuados o procedimientos matemáticos erroneos, es decir los alumnos comprobaban rapidamente y en forma simultánea la informacion algebraica con la gráfica a través de la mediación del software GeoGebra.
- ✓ Cuando aparecía el recurso de la tabla propuesta para validar la función objetivo en los vértices de la región factible dieron de forma natural y espontánea el valor óptimo.
- ✓ Los alumnos pudieron verificar su trabajo con el GeoGebra sorprendiéndose de la velocidad con que este les daba sus resultados, además mostraron un uso adecuado de la ***ventana de entrada*** y el comando: ***interseccion de dos objetos***.
- ✓ Se observó que cuatro alumnos obtaron por utilizar la calculadora de las computadoras para pero dos alumnos de este grupo erraron en sus procedimientos, porque no respetaron el orden de las operacones aritméticas del problema, ante la diferencia de respuestas obtaron por retornar a su trabajo usando lápiz y papel.

<u>La sesión 5</u>

“**Problema de Producción de Pantalones y chaquetas**”

Observamos en la actividad 5, que 6 alumnos presentaron cierta dificultad en esbozar resultados gráficos obtenidos con GeoGebra, suponemos que no pudieron reproducirlos en el papel por la presencia de una nuevo contenido matemático “ uso de escalas en el plano cartesiano”.

Todos los alumnos lograron dar con el resultado del problema a pesar que tuvvieron algunas dificultades en su trabajo.

El tiempo para desarrollar esta actividad fue mucho menor al esperado, cinco alumnos de veintidos lo terminaron en tan solo 20 minutos y no en dos horas pedagógicas como lo habíamos planteado mientras que el resto del grupo lo hizo dentro de la media hora de trabajo.

A continuación indicaremos algunas apreciaciones de los alumnos observados: Mónica y Crsithian del 5to B frente a esta actividad:

- ✓ Fue un reto romper el temor de los alumnos en la interpretacion de la lectura del propblema propuestaor, los alumnos se dieron cuenta que si podían leer y comprender problemas redactados verbalmente y realizar el respectivo Registro de Representación Semiótica Algebraico. Sólo un alumno de veintidos no pudo definir las variables del problema propuesto.
- ✓ Los alumnos mostraron que una vez superado la comprensión de lectura hicieron rápidamente los pasos correspondientes para desarrollar un problema de P.L. y usaron inmediatamente GeoGebra.
- ✓ Se observó que cuatro alumnos, al inicio no podían graficar la región factible, debido a cierta dificultad con la escala, realizaron varios arrastres y al final con estos vértices evaluaron la función objetivo.
- ✓ Los alumnos, entre ellos los dos observados, se dieron cuenta que debían de hacer las operaciones aritméticas solo con los valores del punto que a simple vista maximizaba sus ganancia y así presentaron su respuestas.
- ✓ Cristhian del 5to B, Indicó que los demás valores de los vértices que ponían en la tabla no los iba a trabajar puesto que no optimizaban la función.
- ✓ Mónica del 5to B, indicó que hubo una buena secuencia en el trabajo realizado y no tuvo dificultad en determinar las respuestas pedidas.
- ✓ La mayoría halló con facilidad la respuesta del problema propuesto a pesar que hubieron dificultades en el proceso como el ubicar los vértices de la región factible del problema propuesto, sombrear la región factible así como realizar las operaciones aritméticas en forma correcta,
- ✓ Los alumnos en su totalidad se sintieron muy contentos, porque comentaron que plantearon sin ninguna dificultad las restricciones y la función objetivo, aquí la existencia de las tablas ayudaba a organizar la información. En conclusión ya habían aprendido el procedimiento para resolver problemas de Programación Lineal y aplicarlo en futuros negocios.

Ahora con este registro de información de cómo se ejecutaron las actividades podemos sintetizar nuestros resultados.

Registro de resultados matemáticos obtenidos en la actividad N° 1 y N° 5 mediados con GeoGebra

A continuación presentamos los resultados de los alumnos en la actividad N° 1, donde se trabajó con el trazo de puntos y rectas en el plano y la aplicación de algunos comandos con GeoGebra.

Actividad N°1:

Se concluye que, tanto Cristhian como Mónica del 5to B, tenían un adecuado conocimiento entre las diferencias de los conceptos matemáticos trabajados en esta actividad, además la mayoría de alumnos del grupo también reconocían las características y diferencias de: punto, recta, ecuaciones, sistema de ecuaciones cuando se supervisó sus trabajos.

Dedujeron rápidamente que trabajar con los puntos interceptos para graficar una recta hacía su trabajo más fácil.

Observamos algunos alumnos con cierto desconocimiento en ubicar puntos en el plano así como al ubicar coordenadas de los puntos en la ventana gráfica de GeoGebra, más aun si eran puntos con alguna coordenada con números decimales.

El trabajo tuvo resultados parecidos cuando tenían que ingresar en la ***ventana de entrada*** los puntos con coordenadas decimales confundiendo el punto con la coma, cuando tenían que separar las componentes de un par ordenado.

Los alumnos graficaron sin dificultad puntos y rectas, tanto Mónica como Cristhian utilizaron las coordenadas de dos puntos elegidos al azar para luego trazar rectas sobre estos.

Veamos la figura 47, la gráfica que elaboró Mónica al trazar una recta dados dos puntos.

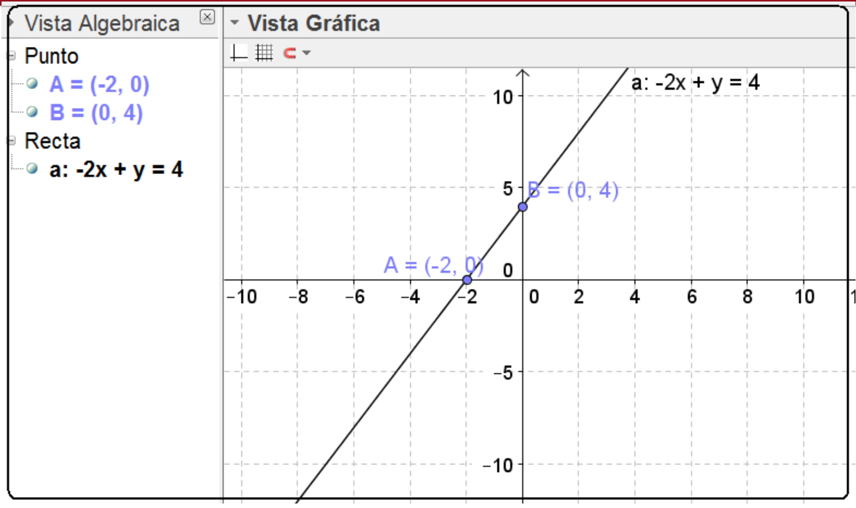


Figura 47. Trabajo realizado por Mónica

En esta parte se observa que Mónica del 5to B, mostró detalles en el trazo de rectas porque nombró cada objeto matemático y utilizó colores a diferencia de lo que hizo su compañero Cristhian que solo trazó rectas y no uso colores. Aquí Mónica demostró que transitaba indistintamente por los Registros de Representación algebraica al gráfico y viceversa con la mediación de GeoGebra, obsérvese las representaciones de punto y recta dados de manera algebraica con su debida interpretación en el Registro de Representación gráfica en la ventana del GeoGebra.

A continuación, observemos en la figura 48, el trabajo realizado por Cristhian del 5to B. al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables mediados con GeoGebra, utiliza también colores como lo hizo en otro trabajo previo su compañera.

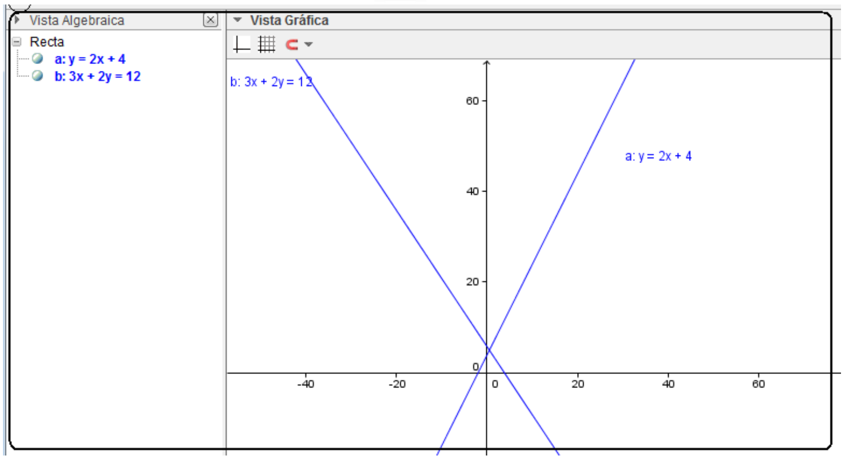


Figura 48. Trabajo realizado por Cristhian

Aquí Cristhian del 5to B, demostró que transitaba indistintamente por los registros de representación algebraica al gráfico y viceversa con la mediación de GeoGebra.

A continuación el mismo alumnos Cristhian, determina las coordenadas del punto de intersección de dos rectas en el plano usando el comando de intersección de dos objetos. Ver la figura 49.

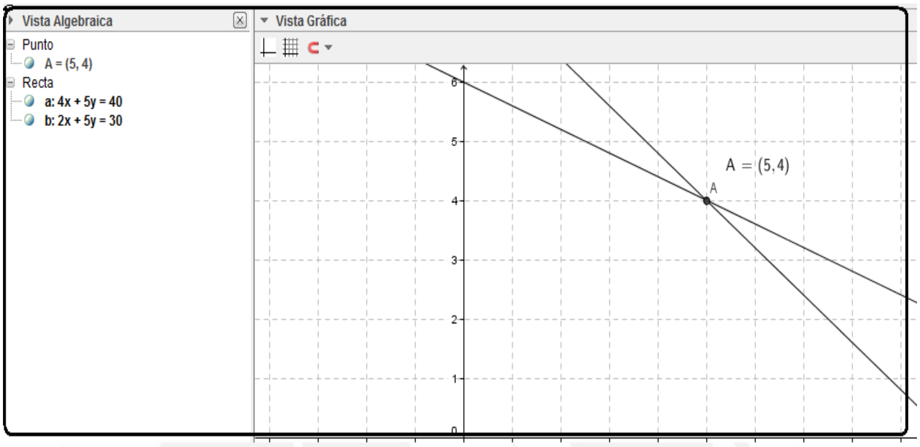


Figura 49. Trabajo realizado por Cristhian

A continuación presentamos la resolución de un sistema de ecuaciones utilizando el software GeoGebra, realizado por Mónica en la actividad N° 1. Ver la figura 50.

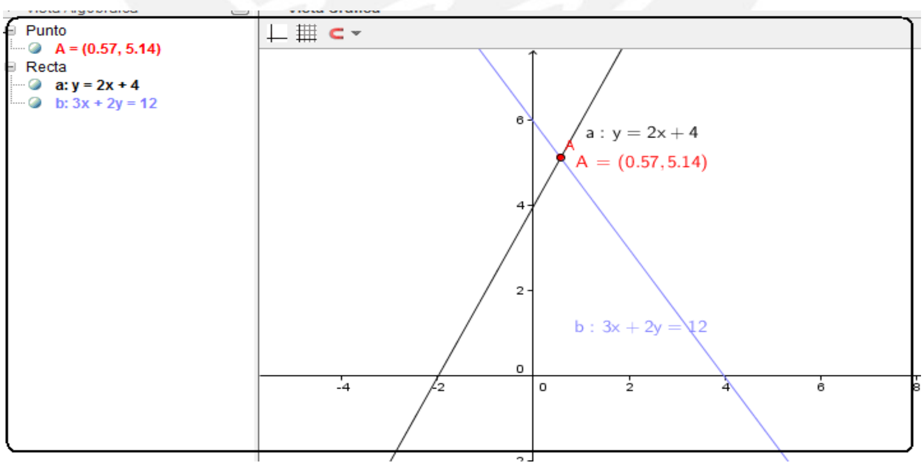


Figura 50. Trabajo realizado por Mónica.

Concluimos con los resultados de la actividad N°1, que los alumnos pudieron:

1. Representar puntos en la Ventana Gráfica del GeoGebra, efectuando sin dificultad la conversión del R.R.S.A. al R.R.S.G., usando GeoGebra. Ver figuras: 57, 58, 59, 60

2. Representar rectas en la ventana Gráfica del GeoGebra ingresando la ecuación de rectas a través de la ventana de entrada, efectuando sin dificultad aquí observaremos la conversión del R.R.S.A. al R.R.S.G., usando GeoGebra. Ver figuras 57, 58, 59, 60
3. Determinar las coordenadas del punto de corte de dos rectas usando el comando: "intersección de dos objetos", efectuándose sin dificultad la conversión del R.R.S.G. al R.R.S.A, usando GeoGebra. Ver figura 59 y 60

Al analizar los resultados que obtuvieron los alumnos en las actividades de enlace N°1 que se dio por escrito donde sólo usaron lápiz y papel se obtuvo como resultados que todos los alumnos lograron responder a las preguntas propuestas que fueron parecidas a las realizadas con la mediación de GeoGebra realizando el transito adecuado de forma espontánea y natural del Registro de Representación algebraico al gráfico.

Es decir, los alumnos pudieron:

1. Realizar gráficos de puntos y rectas en el plano, efectuando sin dificultad la conversión del R.R.S.A. al R.R.S.G, usando lápiz y papel en su actividad de enlace N°1
2. Realizar operaciones algebraicas para hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, efectuando sin dificultad el tratamiento del R.R.S.A, usando lápiz y papel en su actividad de enlace N°1
3. Representar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano efectuando sin dificultad la conversión de R.R.S.A. al R.R.S.G. usando lápiz y papel.

Es decir, los alumnos demostraron haber aprendido a graficar puntos, rectas y determinar las coordenadas de corte a través de métodos de lápiz y papel así como obtenerlos a través de la mediación de GeoGebra.

A continuación presentamos los resultados de los alumnos en la actividad N° 5.

Actividad N°5:

Para el desarrollo de esta actividad hemos analizado también como fue el comportamiento de todo el grupo de alumnos debido a que ya no contábamos con ninguno de los otros dos salones y por ello queríamos comparar el trabajo de nuestros alumnos Mónica y Cristhian del 5to B en comparación a su salón de clase como trabajo adicional a nuestra investigación.

Observemos la información recogida sobre los resultados de aprendizaje obtenidos por todos los alumnos agrupados en tres partes para efectos de presentación aquí en la investigación. Empezamos con los nueve primeros alumnos donde se incluye a los dos alumnos observados.

Tabla 11. Respuestas obtenidas con nueve alumnos, incluyendo los observados

	Nota	17	16	17	19	16	18	18	19	20
	Indicadores	**Francis -1**	**Salazar -2**	**Quispe -3**	**Baique -4**	**Ushuñahua -5**	**Deydi -6**	**Alexandra-7**	**Cristhian -8 muestra**	**Mónica -9_muestra**
1.	**Identifica variables**	si	si	si	si	no	si	si	si	si
2	**Identifica las restricciones**	si	si	si	si	no	si	si	si	si
3	**Identifica la función objetivo**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
4	**Grafica la región factible con GeoGebra**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
5	**Esboza la región factible en el papel.**	no	si	si	si	no	si	si	si	si
6	**Sombrea la región factible**	no	no	no	si	no	no	no	si	si
7	**Grafica las coordenadas de los puntos a escala en el papel**	no	no	no	no	no	si	si	no	si
8	**Identifica los vértices del polígono convexo con el GeoGebra.**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
9	**Evalúa la función objetivo**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
10	**Realiza operaciones aritméticas**	no	no	no	si	no	no	no	si	si
11	**Identifica el tipo de optimización a realizar.**	si	no	no	si	si	si	si	si	si
12	**Determina la venta máxima.**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
13	**Determina la cantidad requerida.**	si	no	si	si	si	no	si	si	si

Continuamos con los resultados de otros 9 alumnos. Ver tabla 12:

Tabla 12.Respuestas obtenidos con otros nueve alumnos

	Nota	19	19	19	13	17	17	17	19	19
	Indicadores	Challco 10	Lazo 11	Dulanto 12	Miranda 13	Vivas 14	Montes 15	Rosales 16	Ichpas 17	Gutarra 18
1.	**Identifica variables**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
2	**Identifica las restricciones**	si	si	si	no	si	si	no	si	si
3	**Identifica la función objetivo**	si	si	si	no	si	si	si	si	si
4	**Grafica la región factible con GeoGebra**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
5	**Esboza la región factible en el papel.**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
6	**Sombrea la región factible**	si	si	si	no	si	no	si	si	si
7	**Grafica las coordenadas de los puntos a escala en el papel**	no	si	no	no	no	no	no	no	no
8	**Identifica los vértices del polígono convexo con el GeoGebra.**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
9	**Evalúa la función objetivo**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
10	**Realiza operaciones aritméticas**	si	no	si	si	si	no	no	si	si
11	**Identifica el tipo de optimización a realizar.**	si	si	si	no	no	si	si	si	si
12	**Determina la venta máxima.**	si	si	si	si	si	si	si	si	si
13	**Determina la cantidad requerida.**	si	si	si	no	si	si	si	si	si

Finalmente, observemos en la tabla 13 los aprendizajes obtenidos por cuatro alumnos:

Tabla 13. Respuestas obtenidos con los últimos cuatro alumnos

	Nota:	19	08	18	10
	Indicadores	Jarumi -19	Arias -20	Rodriguez-21	Pauccar -22
1.	**Identifica variables**	si	si	si	si
2	**Identifica las restricciones**	si	no	si	no
3	**Identifica la función objetivo**	si	no	si	si
4	**Grafica la región factible con GeoGebra**	si	no	si	no
5	**Esboza la región factible en el papel**	si	no	si	no
6	**Sombrea la región factible**	si	no	no	no
7	**Grafica las coordenadas de los puntos a escala en el papel**	si	no	no	no
8	**Identifica los vértices del polígono convexo con el GeoGebra.**	si	no	si	no
9	**Evalúa la función objetivo**	si	no	si	no
10	**Realiza operaciones aritméticas**	no	no	no	no
11	**Identifica el tipo de optimización a realizar.**	si	no	si	si
12	**Determina la venta máxima**	si	no	si	no
13	**Determina la cantidad requerida.**	si	no	si	no

Se observa en estas tablas que:

1. En cuanto a **la identificación de variables**, solo uno de veintidós no logró hacerlo, es decir, los otros veintiún alumnos si pudieron transitar y sin dificultad del Registro de Representación Semiótica Verbal al Algebraico.
2. En cuanto a **la identificación de restricciones**, sólo cinco alumnos no lograron hacerlo, es decir, los otros diecisiete alumnos si pudieron transitar y sin dificultad en la conversión del Registro de Representación Semiótica Verbal al Algebraico.
3. En cuanto a **la identificación de la función objetivo**, sólo dos alumnos no lograron hacerlo, es decir, los otros veinte alumnos si pudieron transitar y sin dificultad en la conversión del Registro de Representación Semiótica Verbal al Algebraico.
4. En cuanto a **graficar la región factible con GeoGebra**, sólo dos alumnos no lograron hacerlo, es decir, los otros veinte alumnos si pudieron transitar y sin dificultad en la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraica a al Gráfico
5. En cuanto a **esbozar la región factible en papel**, sólo cuatro alumnos no lograron hacerlo, es decir, los otros dieciocho alumnos si pudieron realizar y sin dificultad el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Gráfico.
6. En cuanto a **sombrear la región factible**, observamos que once alumnos no lograron hacerlo, esta cifra nos muestra que la mitad del salón no otorga la debida importancia de tener una región factible, por el momento no es un trabajo fundamental e importante ya que si reconocieron los vértices y evaluaron la función objetivo en cada uno de ellos. En conclusión, no se muestra dificultad al realizar el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Gráfica obtenida por el GeoGebra y plasmada en el papel, a pesar de cierta confusión al pasar a papel su trabajo gráfico, pero esto no fue fundamental en nuestro investigación.
7. En cuanto a **graficar las coordenadas de los puntos a escala en el papel**, observamos que, diecisiete alumnos no tuvieron mucha exactitud al transcribir y ubicar puntos observados en la pantalla del GeoGebra y plasmarlo en su papel debido a la presencia de un contenido temático el de las “escalas”, pero esta dificultad no es fundamental, debido a que sólo transcribían la gráfica obtenida en GeoGebra al papel, esta respuesta no influyó en la solución del problema, debido a que dibujaron los puntos en el papel lo más cercano posible y sin alejarse de la

región factible, ellos ya habían identificado la región factible y sus vértices, porque trabajaron con estos puntos al evaluar la función objetivo. Es por ello que podemos afirmar que no existe dificultad en realizar el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Gráfico.

8. En cuanto a **identifica los vértices del polígono convexo** con GeoGebra, sólo dos alumnos se disculparon de no poder seguir trabajando, es por ello que no lograron realizarlo, es decir, los otros veinte alumnos si pudieron transitar y sin dificultad en la conversión del Registro de Representación Semiótica Gráfica al Algebraico, usando el Software GeoGebra y plasmarlo en el papel.
9. En cuanto **a evaluar la función objetivo** en los vértices, sólo dos alumnos no lograron hacerlo, es decir, los otros veinte alumnos si pudieron realizar y sin dificultad un tratamiento del Registro de Representación Semiótica Algebraico.
10. En cuanto a **realizar operaciones aritméticas**, trece alumnos tuvieron algunos problemas al evaluar algún vértice de la región factible realizando operaciones aritméticas. Debemos tener presente, que los alumnos están en quinto y por ende debieron superar estas dificultades, es decir, si se observa que los alumnos presentan cierta dificultad en el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Algebraica**.**
11. En cuanto a **identificar el tipo de optimización a realizar**, sólo cinco alumnos tuvieron problemas al realizar esta tarea, es decir, los otros diecisiete alumnos pudieron realizar el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Verbal.
12. En cuanto a **determinar la venta máxima**, sólo dos alumnos tuvieron problemas al determinar la venta máxima, es decir, los otros veinte alumnos, si pudieron transitar y sin dificultad en la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraico al Verbal.
13. En cuanto a **determinar la cantidad requerida,** sólo cinco alumnos tuvieron dificultad al interpretar la respuesta obtenida, es decir los otros diecisiete alumnos si pudieron transitar y sin dificultad en la conversión del Registro de Representación Semiótica Algebraico al Verbal.

A continuación realizaremos el análisis de estos resultados con nuestros dos alumnos observados y realizaremos la comparación y validación de nuestros objetivos a fin de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

4.3 Análisis, comparación y validación de Supuestos:

Escogimos para realizar el análisis de nuestra investigación los resultados de nuestros alumnos observados Mónica y Cristhian del 5to B, dados en las actividades N°1 y N°5.

En la Actividad N°1 situamos a los alumnos en una primera interrelación con el software y el aprendizaje de algunos comandos y la forma efectiva que tuvieron ellos para usarlo en el desarrollo de conceptos matemáticos previos al tema de P.L.

Escogimos la Actividad N° 5 debido a que los alumnos nos demostrarán el dominio de algunos comandos del software matemático GeoGebra, además del dominio de conceptos de P.L. así como la puesta en escena de su capacidad de organización de la información en un problema propuesto de P.L. relacionándolo con la producción de “Pantalones y Chaquetas” este problema ha permitido al alumno transitar por los Registros de Representación verbal al algebraico, del algebraico al gráfico, del gráfico al algebraico, del gráfico al verbal y viceversa a través de la mediación del GeoGebra.

A pesar de que hubo algunas deficiencias en el sombreado de regiones sujetas a varias restricciones al transcribir un resultado grafico obtenido en GeoGebra al papel, no fue fundamental para determinar el valor óptimo de la función objetivo, porque si identificaron los vértices. Ver figura 51:

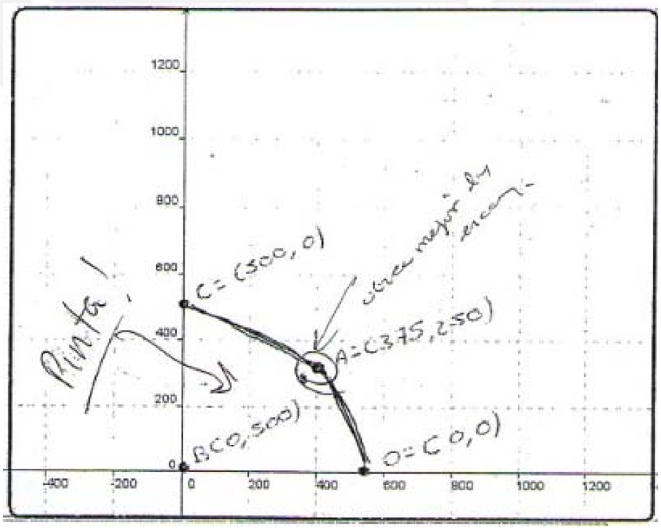


Figura 51. Algunas deficiencias en el sombreado de la región factible.

Aunque no modificó la respuesta obtenida en la transcripción del resultado gráfico obtenido en la pantalla de GeoGebra al papel, se observó que 17 alumnos presentaban algunas imperfecciones pero que no eran determinantes para dar solucion a problemas de P.L. Ver figura 52.

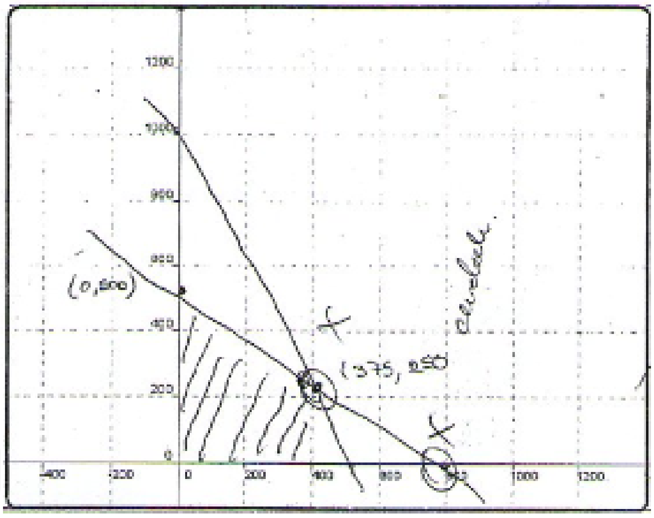
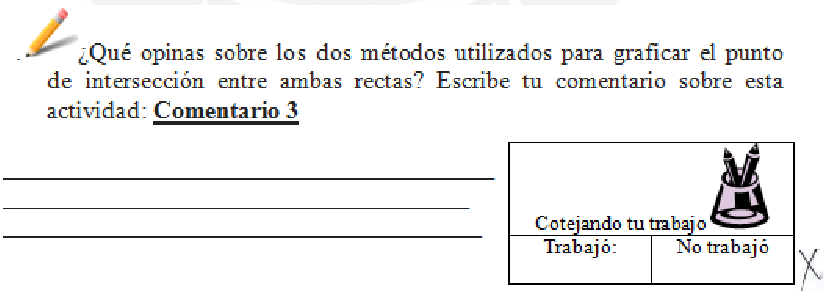


Figura 52. Algunas deficiencias en ubicar algunos vértices

Existieron inicialmente algunos problemas en la verbalización de relaciones entre conceptos después de manipular el GeoGebra, pero esto se fue reduciendo conforme se desarrollaban las actividades propuestas. Ver figura 53:


¿Qué opinas sobre los dos métodos utilizados para graficar el punto de intersección entre ambas rectas? Escribe tu comentario sobre esta actividad: **Comentario 3**

Cotejando tu trabajo

Trabajó:	No trabajó

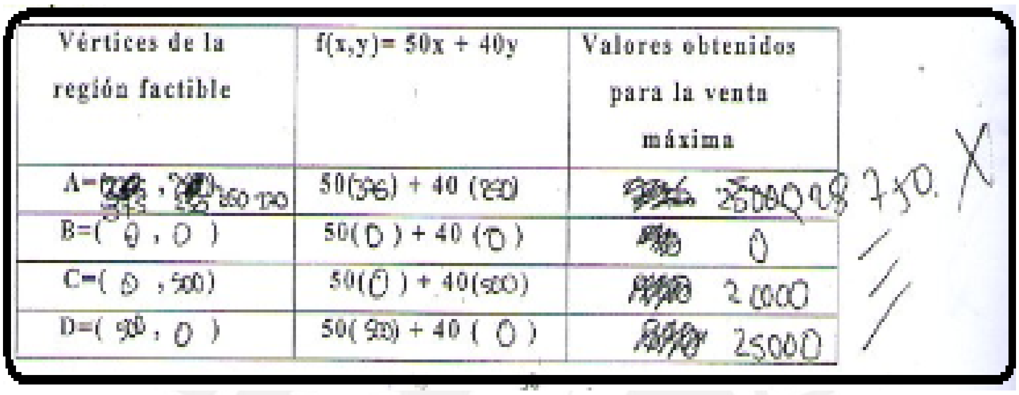
X

Figura 53. Algunas deficiencias en la verbalización de procedimientos

Muchos alumnos comentaban que debería haber una tabla de opciones a fin de que ellos solo escogieran la respuesta más cercana a lo que pedía la actividad en cada parte interna de las preguntas o comentarios propuestos.

A pesar que pocos alumnos tuvieron algunas dificultades al desarrollar procedimientos aritméticos evidenciándose en la evaluación de la función objetivo en cada vértice, los alumnos se esforzaron por tratar de llegar a la respuesta correcta.

Ver figura 54.



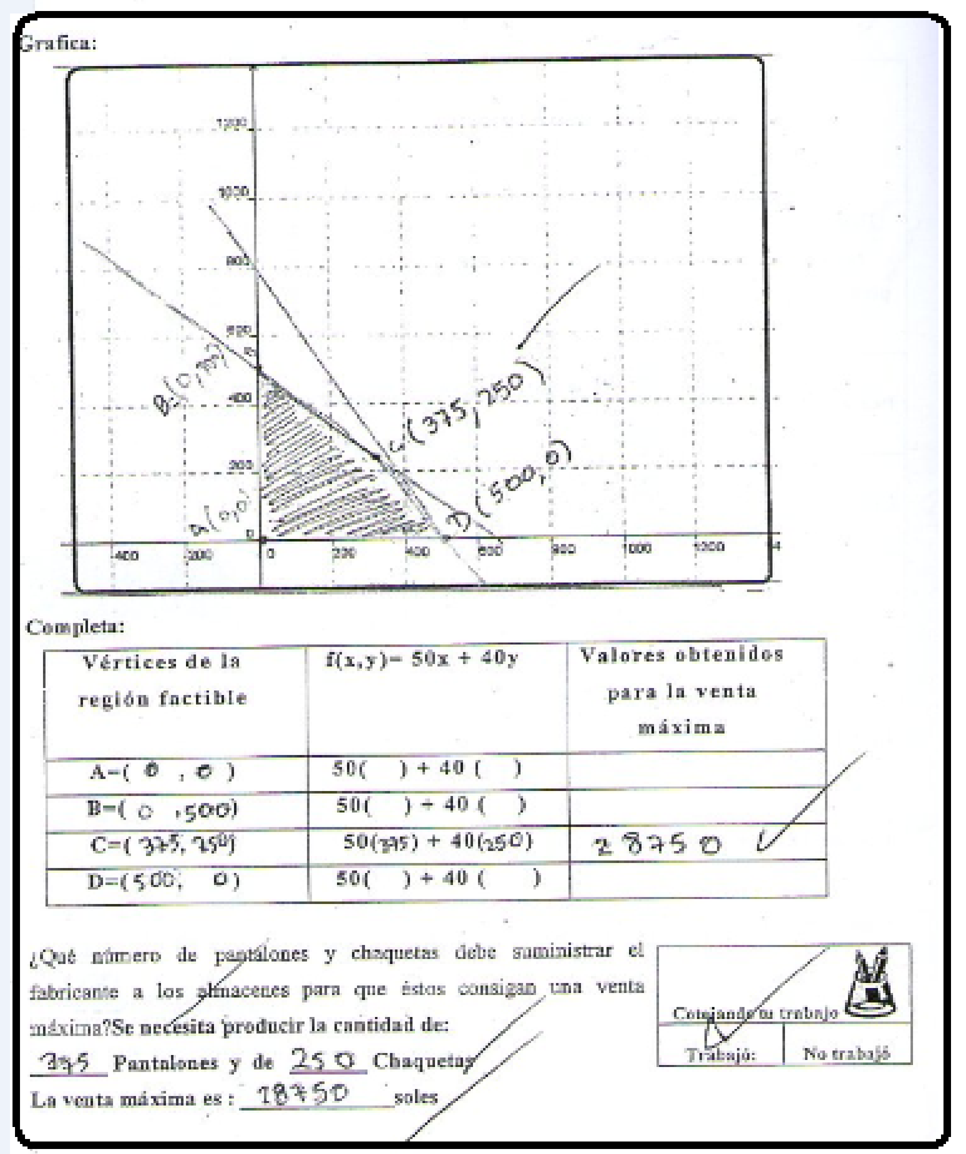
Vértices de la región factible	f(x,y)= 50x + 40y	Valores obtenidos para la venta máxima
A=([illegible] , [illegible]) 350 120	50([illegible]) + 40 ([illegible])	25000 28 750
B=(0 , 0)	50(0) + 40 (0)	0
C=(0 , 500)	50(0) + 40(500)	2 000
D=(500 , 0)	50(500) + 40 (0)	25000

Figura 54. Algunas dificultades en procedimientos aritméticos

Aquí observamos dificultad en el tratamiento de registro de Representación Algebraico Creemos que esta dificultad se debe a que no recuerdan el orden de las operaciones básicas y más aún se observa cierto descontento cuando tiene que realizar operaciones con valores grandes, observando así que existen algunas dificultades en el tratamiento interno de operaciones aritméticas ubicadas en el Registro de Representación Semiótica de tipo Algebraico.

Observamos, que la mayoría de alumnos desarrollaron rápidamente el problema propuesto sobre producción de: "pantalones y chaquetas" aplicando P.L. llegando a las dar la respuesta solicitada sobre el requerimiento de producción de cada producto. Algunos alumnos se dieron cuenta con que vértice se lograba a maximizar la función por lo que evitaron realizar las demás operaciones aritméticas.

Ver figura 55:


Grafica:

Completa:

Vértices de la región factible	f(x,y)= 50x + 40y	Valores obtenidos para la venta máxima
A=(0 , 0)	50( ) + 40 ( )	
B=(0 ,500)	50( ) + 40 ( )	
C=(375, 250)	50(375) + 40(250)	28750
D=(500, 0)	50( ) + 40 ( )	

¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?Se necesita producir la cantidad de:

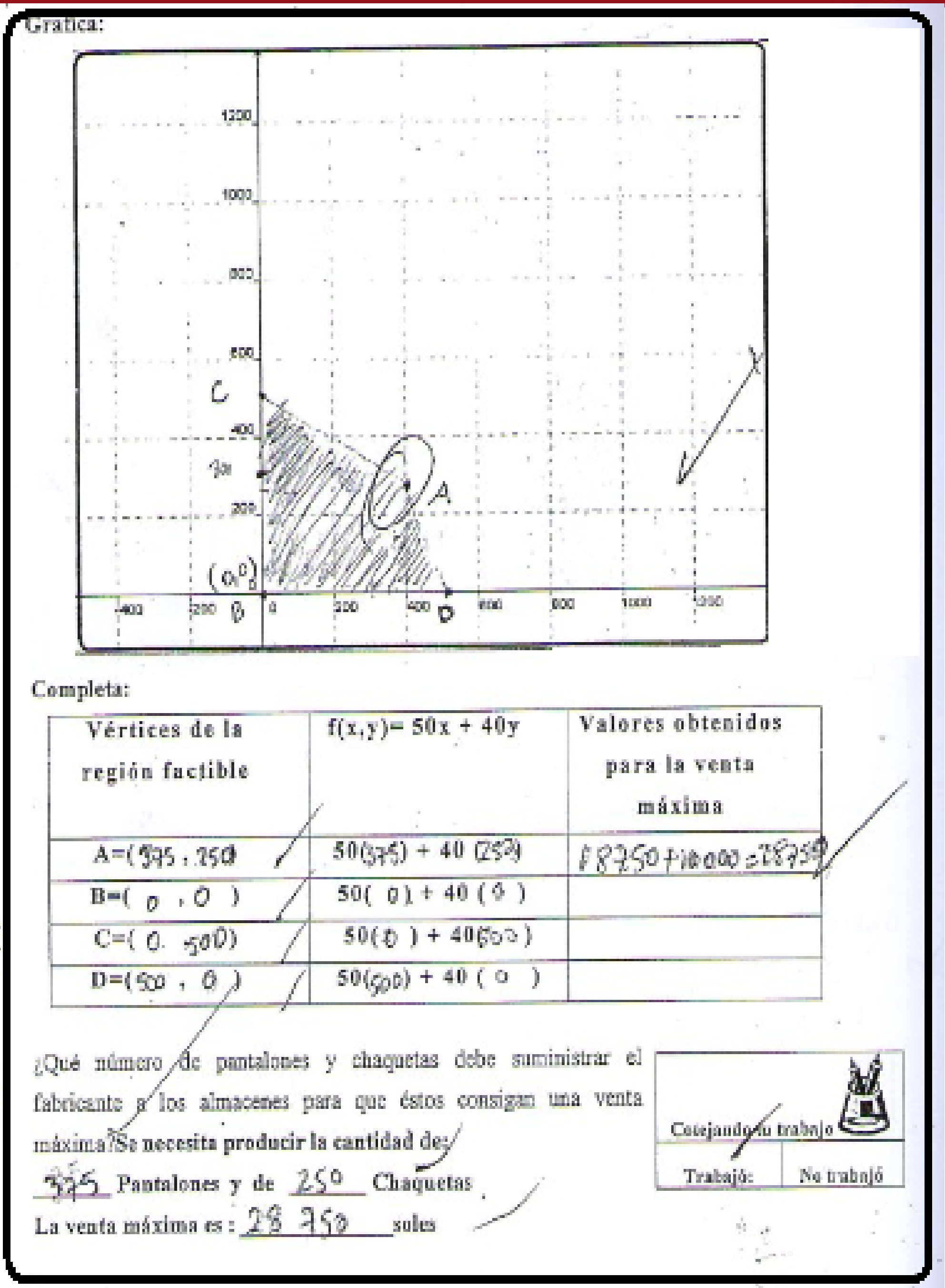
375 Pantalones y de 250 Chaquetas

La venta máxima es : 18750 soles

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

Figura 55. Respuestas de la mayoría de alumnos en la solución de la actividad N° 5

A continuación, mostramos un tipo de respuesta común en los alumnos inclusive en uno de los observados, ver figura 56.


Grafica:

Completa:

Vértices de la región factible	f(x,y)= 50x + 40y	Valores obtenidos para la venta máxima
A=(375 ; 250	50(375) + 40 (250)	18750+10000=28750
B=(0 , 0)	50(0) + 40 (0)	
C=(0. 500)	50(0) + 40(500)	
D=(500 , 0)	50(500) + 40 (0)	

¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima? Se necesita producir la cantidad de:

375 Pantalones y de 250 Chaquetas

La venta máxima es : 28 750 soles

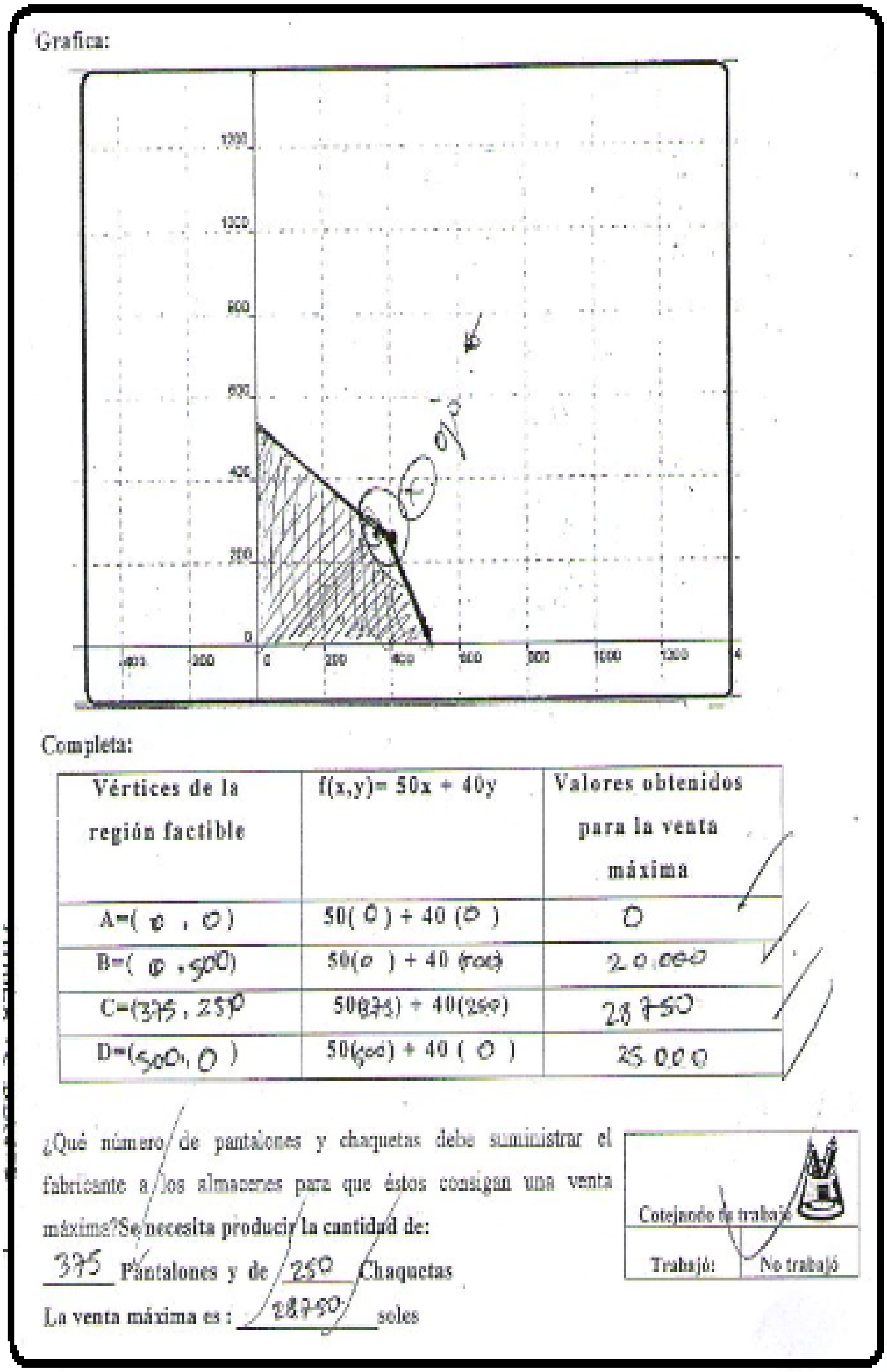
Cotejando su trabajo

Trabajó:	No trabajó

Figura 56. Respuestas emitidas por Cristhian en la actividad N° 5

Observamos, 17 alumnos tuvieron cierta dificultad al transcribir y graficar puntos donde solo 11 de ellos si realizaron un buen esbozo del problema, mientras que la otra mitad no pudo hacerlo, esta afirmación se verifica cuando los alumnos lograron evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible. Es decir realizaron un buen tratamiento en el

Registro de Representación Algebraico, como se indicó esta parte no influenciaba en nuestro trabajo. Ver figura 57.



Grafica:

Completa:

Vértices de la región factible	f(x,y)= 50x + 40y	Valores obtenidos para la venta máxima
A=(0 , 0)	50(0) + 40 (0)	0
B=(0 , 500)	50(0) + 40 (500)	20 000
C=(375 , 250)	50(375) + 40(250)	28 750
D=(500, 0)	50(500) + 40 (0)	25 000

¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima? Se necesita producir la cantidad de:

375 Pantalones y de 250 Chaquetas

La venta máxima es : 28750 soles

Cotejando de trabajo	
Trabajó:	No trabajó

Figura 57. Gráfica de coordenadas, tratamiento interno en el R.R.S. Gráfico.

Se observó gran acogida por parte de los alumnos al desarrollo de la presente investigación, por ejemplo captamos el interés de varios alumnos inquietos como el caso de Miguel, este alumno tiene problemas de concentración y que suele retirarse de varias clases, pero demostró su constante interés en trabajar matemática en forma interactiva con GeoGebra en el aula de innovaciones como se puede observar en la figura 58.

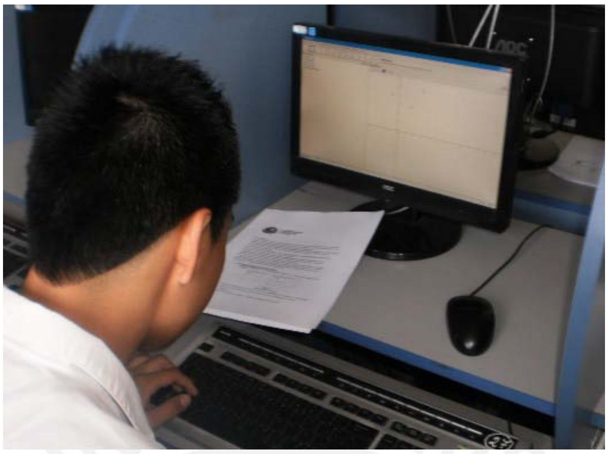


Figura 58. Alumno concentrado en el desarrollo de las clases

Creemos que el uso de recursos como tablas y planos cartesianos propuestas en las actividades, también orientaron a los alumnos a organizar la información y mostrar mayor confianza en su trabajo.

Hemos observado que trece alumnos deben de dominar las operaciones aritméticas básicas, ya que pueden confundirse y no llegar a la respuesta, nos preocupa porque esta cantidad refleja a más de la mitad del salón de clase. También indicamos que los alumnos Mónica y Cristhian no tuvieron dificultad en realizar las operaciones aritméticas respectivas y demostraron poder realizar el tratamiento interno en el Registro de Representación Algebraico. Ver figura 66 y 69.

Hemos observado que al inicio los alumnos presentaron ciertas dificultades en la verbalización de los procedimientos realizados con GeoGebra, porque dejaban en blanco la parte de realización de comentarios o bien faltaba estructurar las respuestas emitidas, pero después con el tiempo estos fueron desapareciendo y los alumnos tendían a escribir sus repuestas.

Los alumnos fueron capaces de establecer las diferencias gráficas entre rectas e inecuaciones lineales con dos variables haciendo uso del GeoGebra, pero cuando se pedía que las verbalizaran surgían limitaciones, formulaban frases cortas no muy bien elaboradas, pero como se mencionó esto fue mejorándose en el transcurso de las actividades.

En el desarrollo de la presente investigación no se había considerado la presencia de la siguiente variable: “escalas”. A pesar de esto, los alumnos realizaron un buen esbozo de su región factible y continuaron con la evaluación de la función objetivo.

Diecisiete de veintidós alumnos llegaron a la respuesta de (375,250) el cual daba una venta máxima de 28750 y lograron interpretar la respuesta de que se necesitaba producir trescientos setenta y cinco pantalones y doscientas cincuenta chaquetas.

Ver esta información en la figura 59, donde Mónica resuelve sin dificultad este problema:

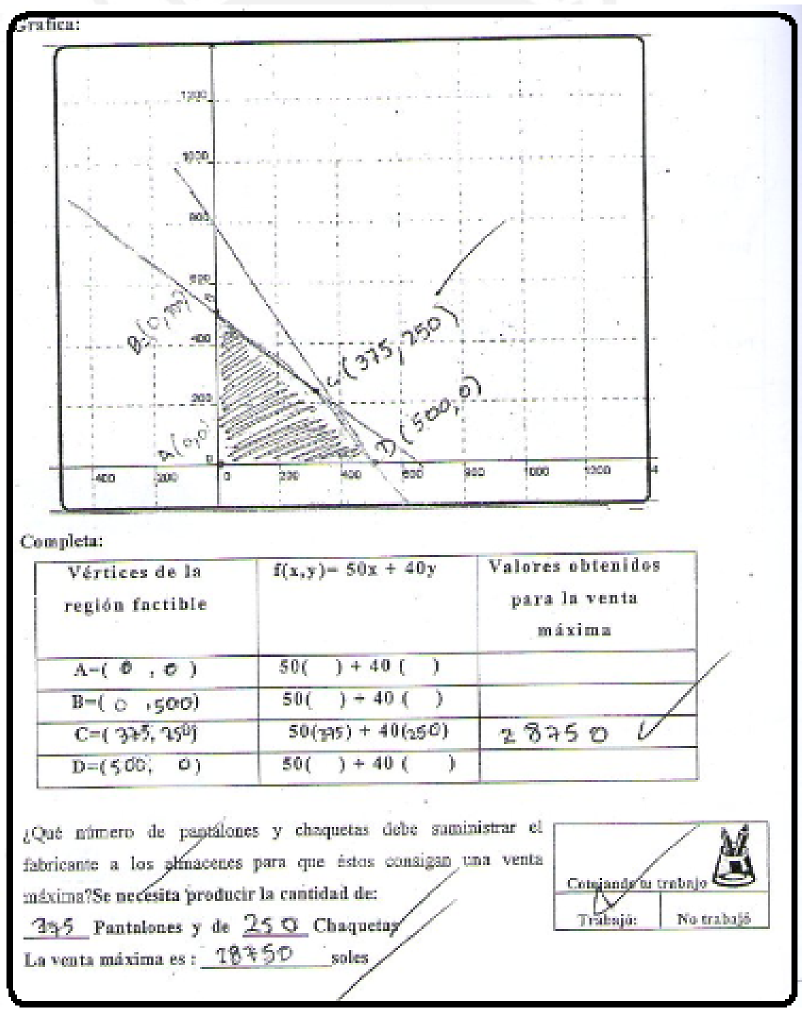


Figura 59. Respuestas emitida por Mónica en la actividad N° 5

Se sugiere antes de terminar este análisis y pasar a contestar los objetivos y abordar la pregunta de investigación hacer unas breves recomendaciones.

Se sugiere realizar operaciones de matemática básica con alumnos de quinto grado de E.S., debido a que trece de los veintidós alumnos mostraron tener algunas deficiencias en el tratamiento del Registro de Representación Semiótica Algebraica.

Se debe trabajar en clase de matemática haciendo uso de software matemático como el GeoGebra, porque se brinda a los alumnos otro tipo de metodología de trabajo no encapsulándolos en una único aprendizaje tradicional el cual no le permite transitar por varios Registros de Representación verbal, algebraico y gráfico de manera simultánea y por ende no aumentan los Registros de Representación Semiótica sobre un determinado objeto matemático, no fomentando la capacidad cognitiva del alumno.

El uso de otros recursos como graficas, tablas y figuras que se incluyeron en las actividades las cuales ayudaron a organizar mejor el aprendizaje de este tema, guiando a los alumnos realizar un trabajo espontáneo y natural.

Se debe supervisar constantemente el trabajo de los alumnos en las aulas de innovación debido a que estos fácilmente pueden distraerse con la presencia de otros programas en las computadoras.

Tener a la mano el programa de GeoGebra en un U.S.B en caso que los alumnos por error borren del escritorio dicho software o bien este no pueda abrirse.

Finalmente, es el momento de contestar nuestra pregunta de investigación tenemos que analizar si se cumplieron o no nuestros objetivos específicos luego al cumplirse el objetivo general se cumplirá por ende nuestra pregunta de investigación.

Se elaboró cinco actividades mediadas por el software GeoGebra para el aprendizaje de Programación Lineal. Estas actividades favorecieron la solución de problemas contextualizados del mismo y se evidenciándose primero el procedimiento y respuestas adecuadas de nuestros dos alumnos observados Mónica y Cristhian durante la actividad N° 5 y que fueron referenciados en el análisis anterior así como se analizó los procedimientos efectuados por todos los alumnos de 5to B en cada tipo de aprendizaje esperado en la solución del problema propuesto de Programación Lineal observándose que diecisiete alumnos de un grupo de veintidós quienes lograron obtener la respuesta correcta al problema propuesto con la mediación del software GeoGebra.

Por otro lado los resultados obtenidos en el desarrollo de la actividad N°1, también mostraron a pesar de haber tomado más tiempo de lo programado, los alumnos si lograron alcanzar los aprendizajes esperados con la mediación del software GeoGebra.

Hemos analizado también la forma como realizaron el tránsito de registros de representación verbal, algebraico y gráfico al resolver problemas contextualizados de Programación Lineal concluimos que si se logro, porque a la luz de los resultados obtenidos en la solución del último problema de P.L. de la actividad N°5 tanto del grupo de alumnos del 5toB como el análisis realizado de nuestros dos alumnos observados Mónica y Cristhian realizaron transito de registros verbal , algebraico y grafico cuando identificaron variables, restricciones , la función objetivo, graficaron la región factible con el GeoGebra, esbozaron al región factible, sombrearon la región factible, graficaron las coordenadas de puntos, identificaron los vértices del polígono convexo, evaluaron la función objetivo, realizaron operaciones aritméticas, identificaron la optimización a realizar , determinaron la venta máxima y finalmente enunciaron la cantidad requerida solicitada en el problema mostrando así que estos problemas permiten que se den en varias etapas el tratamiento interno y la conversión entre registros. Por otro lado en la actividad N° 1 tanto Mónica como Cristhian evidenciaron ser capaces de transitar por los registros algebraico y gráficos indistintamente.

Hemos observado que se cumplen los dos objetivos específicos de nuestra investigación y en consecuencia nuestro objetivo general también se cumple.

Habiéndose demostrado que se cumplieron los objetivos propuestos podemos responder al cumplimento de nuestro objetivo general el de haber diseñado una propuesta de actividades mediadas por el software GeoGebra que favores el aprendizaje de la Programación Lineal y que permite a los alumnos transitar entre los Registros de Representación verbal, algebraico y gráfico al resolver problemas contextualizados de este tema en alumnos de quinto grado de E.S. de la I.E.

Concluímos que la mediación del software GeoGebra si favorece el aprendizaje de Programación Lineal transitando por los Registro de Representación verbal, algebraico y gráfico en alumnos del quinto grado de Educación Secundaria.

CONCLUSIONES

Concluimos además que las situaciones de aprendizaje plasmadas a través de nuestras actividades, permitieron a los alumnos:

Estar familiarizados con el uso de un vocabulario nuevo especializado en Matemática sobre Programación lineal: Grafica de ecuaciones e inecuaciones, región factible, vértices de la región factible, cambios de escalas, optimización de la función objetivo.

Estar familiarizados con el uso de un vocabulario nuevo especializado en Geometría Dinámica con GeoGebra.

Obtener gráficos completos y no gráficos distorsionados al representar inecuaciones, haciendo el arrastre para visualizar la región factible mediante el zoom de GeoGebra.

Incorporar otra forma metodológica de enseñar, porque no se dejó de lado el uso de lápiz y papel sino que se brindó la oportunidad que el conocimiento se lograra de manera diferente a través de la mediación de GeoGebra y las situaciones de aprendizaje propuestas a través de las actividades, esto favoreció el tratamiento y conversión del aprendizaje de Programación Lineal porque los alumnos representaron algebraicamente los problemas presentados, luego realizaron una representación gráfica, una representación algebraica y finalmente realizaron una representación verbal concluyendo por escrito la respuesta a la pregunta planteada.

Los estudiantes realizaron dos actividades de modelación de las restricciones de problemas de Programación Lineal así como de la función objetivo, estos problemas se llamaron "problema de producción de bicicletas montañeras y de paseo" como también el "problema de producción de pantalones y chaquetas" además se añadieron tablas impresas en las actividades de aprendizaje que permitieron el tránsito y la coordinación de Registros de Representación verbal al algebraico, dándose este proceso de forma natural, sin dificultad y de forma espontánea.

La sistematización de las ideas fue progresivamente presentándose en forma adecuada, al principio les era difícil verbalizar lo que verificaban y concluían con sus trabajos interactuando con el software pero poco a poco mejoraron su capacidad de verbalizar sus ideas, procedimientos y conclusiones de sus trabajos, porque habían interiorizado los conceptos y procedimientos a través del trabajo que realizaban con el software.

.

Los conceptos que formaban eran más duraderos, porque los resultados en las actividades de enlace y en la solución de la actividad final, mostraron que los alumnos resolvieron sin ninguna dificultad los ejercicios y problemas propuestos.

El método de solución de problemas de Programación Lineal fue captado con mucha facilidad, evidenciándose en la solución acertada de los problemas propuestos.

El tránsito entre los Registros de Representación Semiótica de tipo verbal, algebraico y gráfico usando GeoGebra y actividades de aprendizaje lograron que los alumnos resolvieran problemas de P.L. en forma natural y espontánea

Aumentó las capacidades cognitivas de los sujetos brindándoles la posibilidad de producir un mayor número de Registros de Representación Semiótica en el tema de Programación Lineal.

Aumentó el interés por las actividades realizadas y una modificación acertada en la calidad de las producciones de este modo se desarrolló las competencias de aprendizaje para el tema de Programación Lineal que nos habíamos propuesto.

Los alumnos mostraron haber desarrollado destrezas y habilidades en el uso y manejo del software GeoGebra usando apropiadamente los comandos y los códigos propios de este software.

Los alumnos pudieron comprender y aplicar estrategias: modelar las restricciones del problema, graficar la región factible de las restricciones obtenidas mediante la mediación de Geogebra, evaluar la función objetivo e interpretar la respuesta obtenida realizando el tránsito coordiando de registros verbales, algebraico y gráfico.

La mediación de GeoGebra influye el aprendizaje de programación lineal porque facilita el diseño de estrategias de solución a problemas propuestos.

La estrategia propuesta en las actividades de aprendizaje permitió a los alumnos transitar con fluidez entre los registros de representación verbal, algebraico y gráfico mejorando y organizando la estructura cognitiva sobre este tema el cual favoreció su aprendizaje sobre Programación Lineal.

Le metodología empleada permitió organizar nuestros trabajo de investigación y nuestras actividades mediadas con GeoGebra y validar nuestros resultados.

SUGERENCIAS DE INVESTIGACIONES FUTURAS

Sugerimos se realice investigaciones sobre la aplicación de rectas de nivel a través de la mediación de este software de geometría dinámica: GeoGebra, porque no se incluyó en este trabajo previo de investigación debido a que no respondia a nuestros objetivos además teníamos la limitación del tiempo.

Hacer una réplica de esta investigación en alumnos de enseñanza preuniversitaria y universitaria.

Trabajar en la capacitación de docentes a fin de que no exista una brecha tan alejada entre lo que exige el D.C.N y el libro texto y lo que realmente se dá en el aula.

Diseñar nuevos problemas sobre distribución de recursos, transporte y dietas adaptados a la realidad peruana.

REFERENCIAS

Centro de Escritura Javeriano de la PUJ Cali. *Normas APA*. Recuperado de http://centrodeescritura.javerianacali.edu.co/index.php?option=com_content&view article&id=138:normas-apa&catid=45:referencias-bibliograficas&Itemid=66

Coronado. T. (2012). *Programación Lineal*. Recuperado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/matematicas-29.html

Díaz, M. (2005). *Modelo de Matemáticas aplicadas a CC.SS. Selectividad 2005, Metodología de Resolución*. Universidad Pública de Madrid, España: Editorial S.M Porfes.net

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento Humano*. Universidad Del Valle, Colombia: Impreso en editorial del Instituto de Educación y pedagogía.

Geogebra (2012a). *Descarga gratuita*. Recuperado de www.geogebra.org

GeoGebra (2012b). *Manual*. Recuperado de: http://wiki.geogebra.org/es/Manual:P%C3%A1gina_Principal

Gómez, A. (2007). *La Evaluación en las actividades de aprendizaje con uso de tecnología*. (Tesis de maestría). IPN, México D.F.

Grossman, S. (1992a). *Álgebra Lineal, Tercera Edición en Español*. México, D.F.: Impresora y Maquiladora de Libros MIG. S.A.

Grossman, S. (1992b). *Aplicaciones de Álgebra Lineal, Cuarta Edición en Español*. México. México, D.F.: Graf América.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2007). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial Ultra.

Losada, R. (2012). *GeoGebra en la enseñanza de la matemática*. Recuperado de http://geogebra.es/cvg/presentacion/intro.html

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de Optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e Instrucción matemática*. (Tesis doctoral). Universidad PUCP, Lima, Perú.

Recuperado de

http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/05/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

Méndez, J. (2012). *Pautas y criterios para el análisis y evaluación de materiales Curriculares.* Universidad de Huelva, España. Recuperado de http://www.uhu.es/agora/version01/digital/numeros/02/02articulos/monografico/mendez.htm

Ministerio de Educación del Perú. MINEDU. (2009). *Diseño Curricular Nacional de la educación Básica Regula.* Lima, Perú: Word Color Perú S.A. Recuperado de

http://www.minedu.gob.pe/

Ministerio de Educación del Perú .MINEDU. (2012a). *5 Matemática*. Lima, Perú: Santillana S. A.

Ministerio de Educación del Perú. MINEDU (2012b). *Marco del buen desempeño docente*

Recuperado de

http://www.perueduca.pe/web/desarrollo-docente/marco-del-buen-desempeno-docente

Moreno, O. (2011). *Un estudio Didáctico de los Sistemas de inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal en el Instituto superior tecnológico Público ¨Simón Bolívar¨*. (Tesis de maestría). Universidad PUCP, Lima, Perú.

Paiva, S. (2008). *A programação linear no ensino Secundário. Universidade Portucalense Infante D. Henrique Departamento del novação, Ciência e Tecnología.* (Dissertação do grau de Mestre em matemática/ Educação). UPIDH, Lisboa, Portugal. Recuperado de

http://repositorio.uportu.pt/dspace/handle/123456789/62?mode=full

Reaño, C. (2011). Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas y problema de programación lineal. Una mirada desde la teoría de las situaciones didácticas. (Tesis de maestría). Universidad PUCP, Lima, Perú.

Salazar, J. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. (Tesis de Doctorado en educación matemática). Universidad PUCSP, Brasil. Recuperado de http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/jesus_flores_salazar.pdf

Sánchez Álvarez, I. y López Ares, S. (1999) Didáctica de la programación lineal con ordenador para estudiantes de administración y dirección de empresas. *Revista de de Enseñanza Universitaria 1999*, N° 14-15, 129-138.

Taborda, J. (2010). *Programación lineal, Historia*. Recuperado de http://taboxriveraa.blogspot.com/2010/09/historia.html

I.E.N° 1136 “John F. Kennedy”
Docente: Judith Bello **Nombre: _______________**

ACTIVIDAD N° 1

Querido alumno, el desarrollo de esta actividad N°1 será bajo dos modalidades, la primera parte utilizarás sólo lápiz y papel y en la segunda parte utilizarás el software GeoGebra.

1. Primera Parte: Trabajando con lápiz y papel

a) Completa el siguiente cuadro, para graficar ecuaciones:

<table>
<tr><th>Rectas</th><th>Selección de puntos</th><th>Tabulación</th><th>Pares ordenados</th></tr>
<tr><td>A: -2x+ y=4</td><td><u>valores cómodos :</u>
(puntos interceptos)

Si x=0, entonces y=

Si y=0, entonces x=</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table></td><td>A= (,)

B= (,)</td></tr>
<tr><td>B: 3x+2y=12</td><td><u>Otros valores</u>

Si x=2.5 , entonces y=

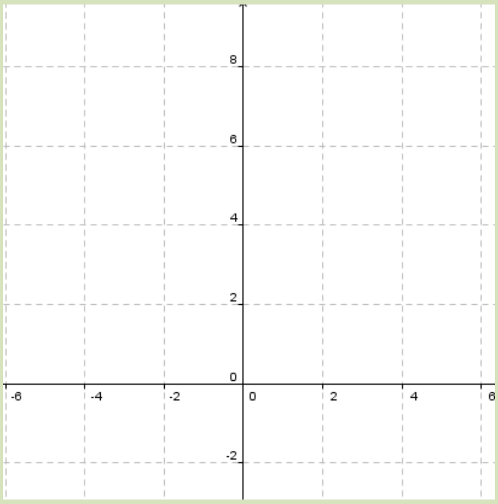
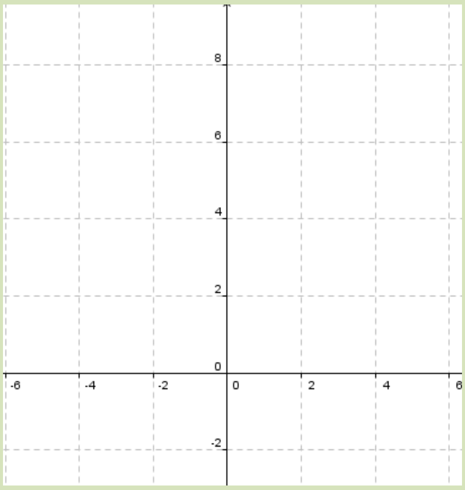
Si y=3.5 , entonces x=
.</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>2.50</td><td></td></tr><tr><td></td><td>3.5</td></tr></table></td><td>C= (,)

D= (,)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Cotejando tu trabajo </td></tr>
<tr><td>Trabajó:</td><td>No trabajó</td></tr>
</table>

b) Grafica cada ecuación en la tabla 1, obteniendo así líneas rectas.

Tabla 1. Gráficas de las ecuaciones A y B

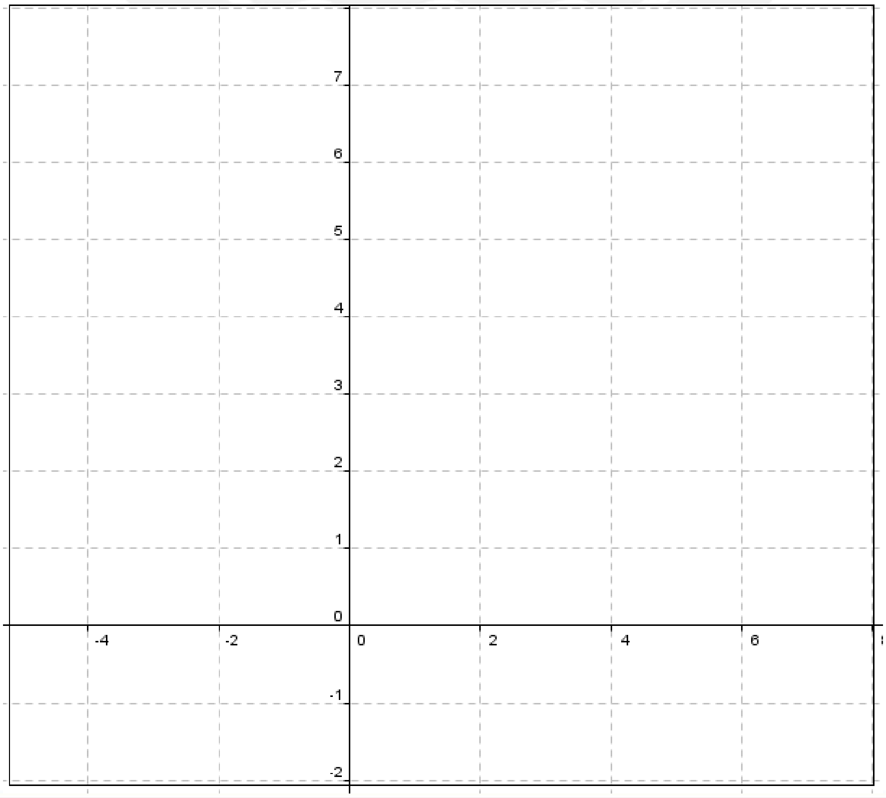
Gráfica de la ecuación A	Gráfica de la ecuación B
	

Al juntar ambas rectas tenemos: $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

Cotejando tu trabajo 	
Trabajó:	No trabajó

c) Ubica ambas rectas en el siguiente plano cartesiano e indica la solución en forma gráfica en la siguiente tabla 2

Tabla 2. Solución Gráfica del sistema de Inecuaciones lineales con dos variables



d) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por cualquier método:

$$\begin{cases} -2x + \ \ y &= 4 \\ \ \ 3x + 2y &= 12 \end{cases}$$

Solución algebraica

¿Qué representa ese par ordenado con respecto a las líneas trazadas en tu gráfico de la tabla 2? Escribe tu comentario sobre esta pregunta.

<u>Comentario 1:</u>

____

____

____

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

e) Resuelve y completa:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$$

Solución algebraica

f) Completa la tabla 3:

Tabla 3 .Solución Gráfica, del sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

$$\mathbf{4x + 5y = 40}$$

x	y

$$\mathbf{2x + 5y = 30}$$

x	y
0	
	0

Escribe tu comentario sobre esta actividad.

Comentario 4:

____

____

____

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

2. **Segunda Parte: Trabajando con GeoGebra:**

Antes de desarrollar esta parte conocerás que es GeoGebra, sus usos, y la presentación de algunos comandos que utilizaras en las actividades.

SOFTWARE GEOGEBRA:

Es un software de geometría dinámica para todos los niveles de educación, dirigido tanto para profesores como para alumnos, este programa fue creado por los esposos Markus y Judith Hohenwarter, quienes trabajaron con este software desde el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y posteriormente en la Universidad de Atlantic, Florida, Estados Unidos. La versión que usaremos es GeoGebra 4.2

Algunas características del software GeoGebra:

1. Es un software de uso libre para desarrollar matemática.
2. Es un software de geometría dinámica que facilita la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en temas como Geometría, Aritmética, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística.
3. Es un software portátil porque está realizado en Java 6, por ello, se puede grabar en un USB.
4. Este software se puede ejecutar en Windows, Mac 0S X, Linux o Solaris.
5. La pantalla de trabajo de los usuarios está dividida en 3 partes, llamadas ventanas o vistas distribuidas de la siguiente manera: la ventana algebraica se ubica a la izquierda y la ventana gráfica se ubica a la derecha de la pantalla mientras que debajo de estas aparece la ventana de entrada.

En la parte superior de la ventana algebraica y de la gráfica aparece la barra de menús (arriba) y la de herramientas (abajo). Ver figura 1.

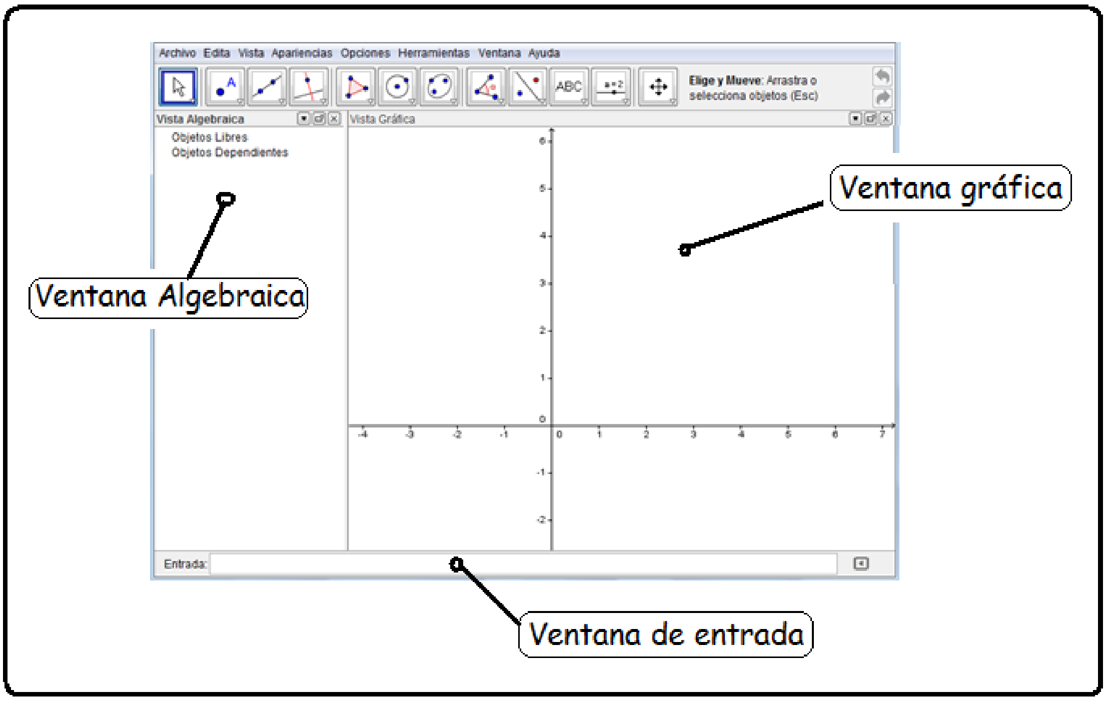


Figura 1. Ventanas del GeoGebra.

Importancia de usar GeoGebra en la enseñanza de la Programación Lineal

Este software brinda diversas posibilidades para mejorar su aprendizaje en dicho tema, por ejemplo, el uso de este software facilita la posibilidad de visualizar objetos matemáticos y sus conexiones tanto en una ventana gráfica como en una ventana algebraica a través de la manipulación de objetos usando la ventana de entrada del GeoGebra, de esta manera, se disminuye la memorización de conceptos.

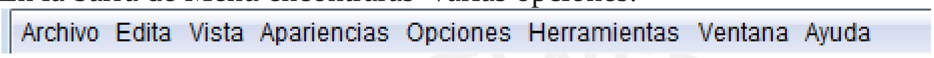
Del mismo modo, se pueden realizar "arrastres", con ello es posible determinar la región factible, también se pueden cambiar escalas con el zoom de GeoGebra, de este modo se obtienen gráficos precisos y no distorsionados de un problema al resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

Otra de las bondades que tiene el GeoGebra es que al ser portátil y libre brinda la posibilidad que se pueda reforzar en lugares diversos las tareas según el propio ritmo y tiempo del aprendiz. Otra de las ventajas es que los pueden manejar mejor los tiempos para dar un significado adecuado a los conceptos que se desean dar y validar las respuestas de se logren en las clases.

A continuación se describen algunos comandos que fueron introducidos en las actividades propuestas a los alumnos y que al final fueron utilizados por ellos para resolver los problemas**.**

COMANDOS EN GEOGEBRA:

En la barra de Menú encontrarás varias opciones:



a) Haz clic izquierdo en **Apariencias,** luego abre el menú desplegable y haz clic izquierdo en la opción **Algebra y gráficos**. Ver figura 2:

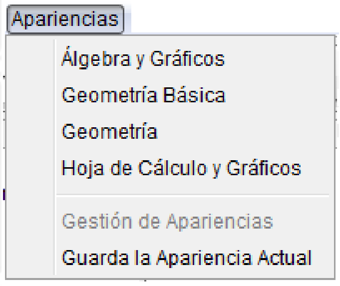


Figura 2. Comando: apariencia

Inmediatamente aparece en la pantalla de GeoGebra tres ventanas o vistas: *Vista Algebraica*, *Vista Gráfica* y *Ventana de Entrada*. Ver figura 3:

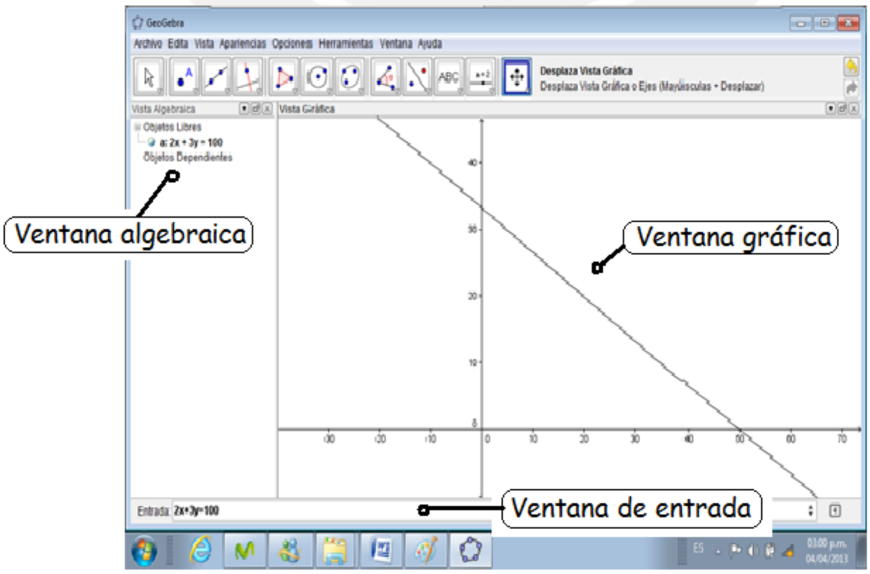
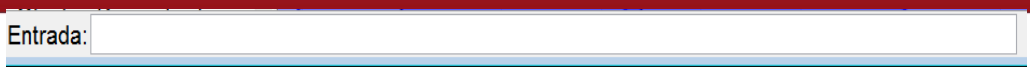
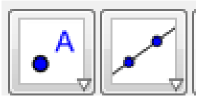


Figura 3 Ventanas de GeoGebra

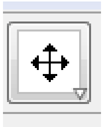
b) 

Ventana de entrada. Esta ventana permite el ingreso de datos escritos en forma algebraica de objetos matemáticos a fin de ser graficados por el GeoGebra.

c)  **Trazar:** *Punto y Recta.* Estos comandos permiten ubicar puntos encontrados en la tabla y trazar una recta.

d) 

: **Borrar**. Este comando permite borrar objetos, se ejecuta al hacer clic derecho sobre el objeto a ser borrado.

e) Otra manera de borrar es a través de seleccionar este ícono:  de ahí busca en el en el menú desplegable la opción: elimina objeto. Veamos esta información en la figura 4:

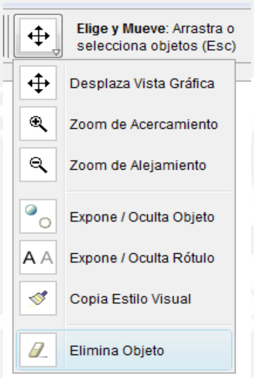
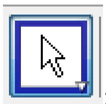
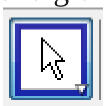
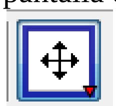


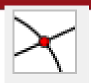
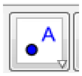
Figura 4. Comando: elimina objeto

f) **:Desactivar Ordenes**, Este comando sirve para mover los objetos de una gráfica así como también sirve para desactivar órdenes.

g)  : **Mover objetos matemáticos.** Este comando se ejecuta al hacer clic izquierdo sobre este ícono, luego arrastra el objeto matemático a mover en la pantalla de vista gráfica

h)  : **Mover pantalla.** Este comando se ejecuta al hacer clic izquierdo en este ícono finalmente haz un clic izquierdo sobre la gráfica a mover ubicada en la ventana gráfica.

i) ***ZOOM*****:** acercar o de alejar. Este comando se ejecuta al mover el botón giratorio del centro del mouse el cual acerca o aleja imágenes, por ende cambia constantemente de escala las gráficas obtenida.

j)  **: Intersección de dos objetos**. Este comando sirve para hallar la Intersección de rectas. Esta opción aparece en el menú desplegable de opciones del comando:  que está ubicado en la barra de herramientas. Veamos esta información en la figura 5:

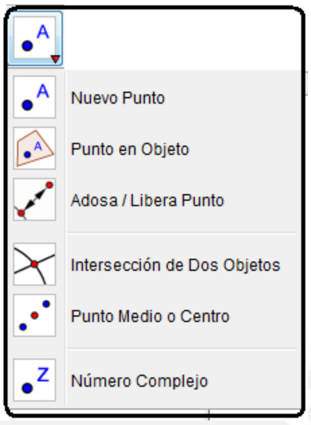
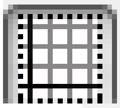


Figura 5. Comando: intersección de dos objetos

Con este comando podemos determinar las coordenadas exactas de cualquier punto al interceptar dos rectas previamente dibujadas.

Se ejecuta al hacer clic izquierdo sobre cada una de las rectas trazadas en la pantalla de GeoGebra, en nuestro caso sobre la recta A y luego un clic izquierdo sobre la recta B, de ahí aparecerá automáticamente el punto de intersección entre ambas, luego puedes rotularlo con el comando: Nombre y Valor.

k)  **: Cuadricular:** Este comando sirve para cuadricular la pantalla de vista gráfica y así observar los datos en forma precisa. Para ello debes de:

Hacer clic izquierdo sobre vista gráfica : 

, luego buscar la opción de cuadricular en su menú desplegable.

l)  *:* **Nombre y Valor** en Rectas o Puntos: Este comando sirve para escribir el rótulo o nomenclatura de puntos o rectas. Se logra a través de hacer doble clic derecho en Vista gráfica y luego busca la opción nombre y valor: Veamos esta afirmación en la figura 6:

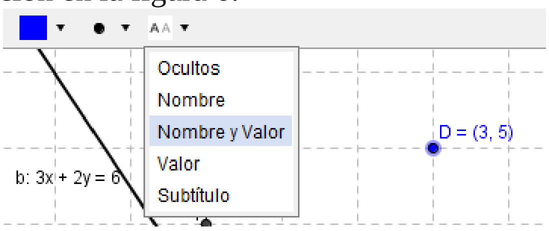
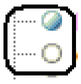


Figura 6. Comando: nombre y valor

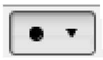
- Nota: se puede hacer clic sobre el rótulo y girarlo alrededor a fin de evitar sobre escrituras.

m) : **Copiar en Campo de Entrada.** Copia coordenadas de puntos, ecuaciones e inecuaciones del campo algebraico a la ventana de entrada.

n)  **: Activar o desactivar objetos matemáticos**. Este comando sirve para activar o desactivar objetos matemáticos en la pantalla sin necesidad de borrarlos de ella.

o) : **Símbolo matemático Alfa**, con este comando se ingresará los símbolos: $\geq$ $\leq$, $\wedge$

Algunos comando adicionales:

Tenemos:  Formas y Ancho del Punto: El menú de punto muestra diversas formas y su respectivo aumento y disminución de tamaño para definirlo. Veamos esta afirmación en la figura 7:

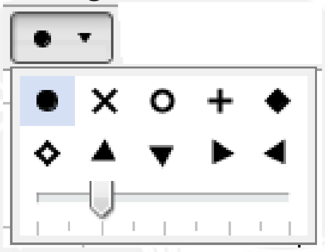


Figura 7. Comando: forma y ancho.

Fijación de color, en puntos. Hacer clic derecho sobre los puntos ubicados en la ventana gráfica de GeoGebra y luego hacer clic izquierdo en la fijación del color. Veamos esta afirmación en la figura 8:

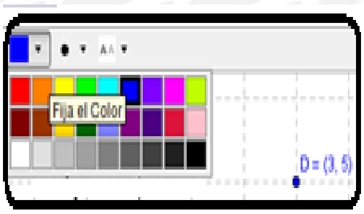


Figura 8. Comando: fijación del color sobre puntos

Fijación de color, en rectas: Hacer clic derecho sobre las rectas dibujadas en la ventana gráfica de GeoGebra, luego hacer clic izquierdo en la fijación del color. Veamos esta afirmación en la figura 9:

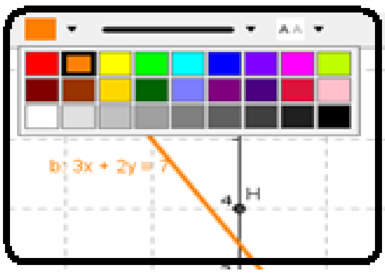


Figura 9. Comando: fijación del Color sobre rectas

2. CON PUNTOS:

Observa en la tabla 4, las coordenadas de los puntos.

Tabla 4. Coordenadas de puntos

Coordenadas de los Puntos	Coordenadas de los Puntos
A= (3 , 5)	C= (1.5 , 3)
B= (-1 , 4)	D= (-4.2 , 6.5)

a) Haz clic izquierdo en **Apariencia** y cuadricula la ventana de vista gráfica

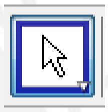
b) Grafica manualmente los puntos A,B,C,D en la ventana de **Vista Gráfica,**

c) **Borra** todos los puntos ¿Tienes problemas? , entonces:

d) Ingresa las coordenadas de los cuatro puntos anteriores en la **Ventana de Entrada**

*Ten cuidado con los decimales, estos se ingresan con punto.

*Observa: la coma se usa aquí para separar la componente x de la y.

e)  Haz clic izquierdo sobre en el comando  y ubícalo sobre el punto **A** arrastra el mouse y responde: ¿Qué observas en las ventanas de: vista grafica **y** algebraica mientras realizas el arrastre? Escribe tu comentario sobre esta pregunta**.** **<u>Comentario 2:</u>**

____

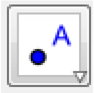
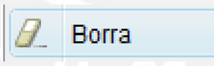
____

____

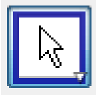
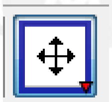
Cotejando tu trabajo 	
Trabajó:	No trabajó

<u>Para esta parte use los comandos</u>:

Apariencias: Algebra y gráficos

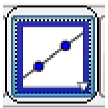
 **puntos** 

Borrar

 **Desactivar órdenes**  **Mover la pantalla**

3. CON RECTAS :

Cierra el archivo y abre un nuevo en GeoGebra.

a. Grafica **varias rectas** usando el comando: 

b. Grafica las rectas a y b simultáneamente usando la **Ventana de Entrada**

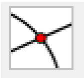
Recta a: **-2x + y = 4**

Recta b: **3x + 2y = 12**

c. ¿Cómo ubicarías el punto de intersección gráfico de las rectas a y b?, ambas rectas lo puedes escribir como un sistema de ecuaciones lineales con dos variables:

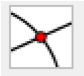
$$\begin{cases} -2x + y & = & 4 \\ 3x + 2y & = 12 \end{cases}$$

Respuesta: ________

d. Halla la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos variables usando *Ventana de Entrada* y el comando **intersección de dos objetos** 

$$\begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$$

Respuesta: _________

e. Halla la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos variables usando *Ventana de Entrada* y el comando **intersección de dos objetos** 

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Respuesta:__________

.f.  ¿Qué opinas sobre los dos métodos utilizados para graficar el punto de intersección entre ambas rectas? Escribe tu comentario sobre esta actividad: **<u>Comentario 3</u>**

____

____

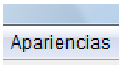
____

Cotejando tu trabajo 	
Trabajó:	No trabajó

I.E.N° 1136 "John F. Kennedy"
Docente: Judith Bello **Nombre: _______________**

ACTIVIDAD N° 2

Querido alumno, en el desarrollo de esta actividad N°2, realizarás un trabajo mixto con GeoGebra y el uso de lápiz y papel, también realizarás aportes a tu trabajo mediante tus comentarios.

1. Haz clic en 

y seleccionar `Álgebra y Gráficos`.

2. Haz doble clic izquierdo en vista gráfica y cuadricula el plano cartesiano

3. Ingresa en la ***ventana de entrada*** cada ecuación o inecuación que aparece por línea horizontal, luego desactiva el objeto.

<u>Para esta parte usa los comandos</u>:

 **Símbolo matemático:** así ingresará los símbolos: ≥ , ≤

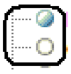
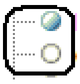
 **Activar y desactivar objetos matematicos**

Tabla 1. Ecuaciones e inecuaciones lineales con dos variables

Ecuaciones lineales	Inecuaciones Lineales	
	Usando símbolo > , <	**Usando el símbolo : ≥ ,≤**
En y = x – 4 ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? ______________	**En : y < x – 4** ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? ______________	**En : y ≤ x-4** ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? ______________
Usa: 	**¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua? ______________	**¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua? ______________
En x= 5	**En x < 5**	**En x ≤ 5**

¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **Usa:**	¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua?	¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua?
En y= -3 ¿Cómo es la gráfica obtenida : **Líneas** ó **Regiones** en el plano? **Usa:**	**En y > - 3** ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua?	**En y ≥ -3** ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua?
En x +3y=3 ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **Usa:**	**En x+3y > 3** ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua?	**En x +3y ≥ 3** ¿Cómo es la gráfica obtenida : Líneas ó regiones en el plano? **¿Observas algo más?** La línea en el borde de la región ¿es punteada o continua?

¿Qué diferencia existe entre las gráficas de ecuaciones con las Inecuaciones, ambas lineales de primer grado con dos variables. Escribe tu:

Comentario 1:

¿Qué diferencias hay en las gráficas de las **inecuaciones** que contiene los símbolos: $\leq, \geq$ con las **inecuaciones estrictas** que contienen los símbolos: <, >? Escribe tu comentario sobre esta actividad. Escribe tu:

Comentario 2:

____
____
____
____

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

4. Hemos observado según Grossman (1992b) :

> La gráfica de una inecuación lineal es una región plana, la cual puede o no incluir a la recta que se ubica en su frontera. Para efectos de nuestro trabajo entendemos por región plana un semiplano.

5. ¨ ¿Cómo graficas ¨**$y > -2x + 3$**? ¨ (Grossman, 1992b, p.3)
 Ingresa los datos en la ventana de entrada y así obtiene la respuesta rápidamente pero, ¿Cómo construyes la gráfica usando solo **lápiz y papel?**

 Veamos los siguientes procedimientos que aparecen en Grossman (1992b)

> Para representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen una desigualdad usando >, <, $\geq$, $\leq$ se realiza los siguientes procedimientos:
> 1. Dibújese la recta ax + by = c. luego se emplea una **línea recta a trazos** si no se incluye la igualdad, y una **línea continua** si la igualdad se incluye.
> 2. Elíjase cualquier punto de R^2 que no esté en la recta, empleándolo como punto de prueba. Si las coordenadas del punto de prueba satisfacen la desigualdad, entonces el conjunto buscado es el semiplano que contiene al punto de prueba. En caso contrario es el otro semiplano.(Grossman 1992b.p.6 y 7)

Ahora con lo expuesto grafica: **$y > -2x + 3$**

1. Cambia el símbolo de la inecuación por igualdad.

Los símbolos	Cambiar por :
>, < $\leq, \geq$	=

2. **Luego grafica la recta $y = -2x + 3$**

	y
0	
	0

3. **Grafica la recta en el siguiente plano Cartesiano observa los ítems 4, 5 y 6**

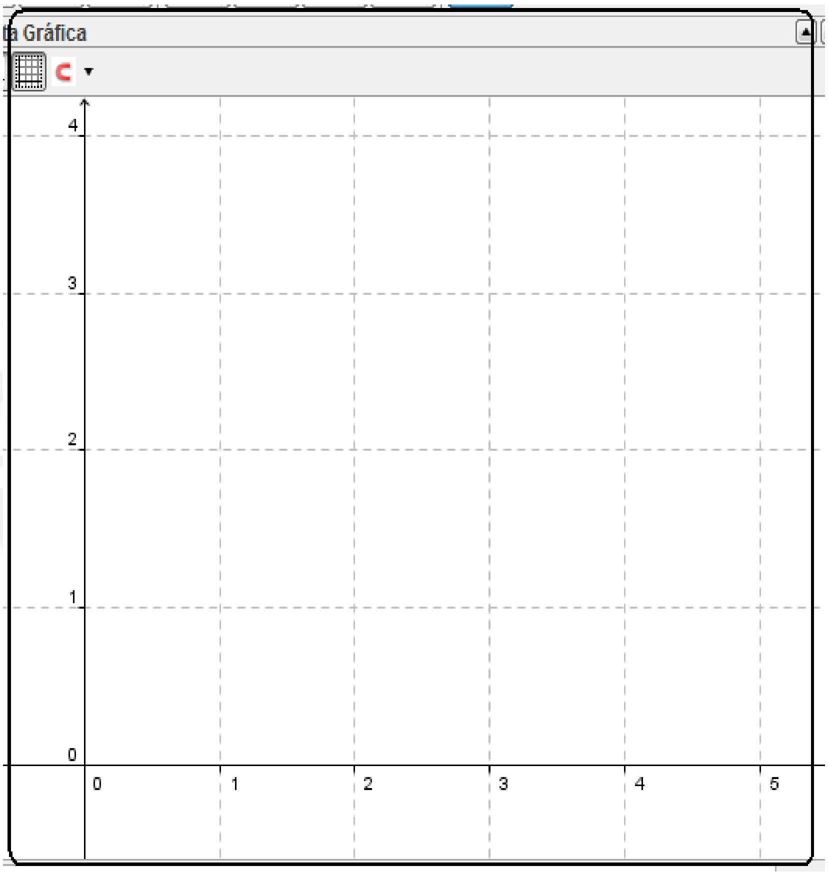


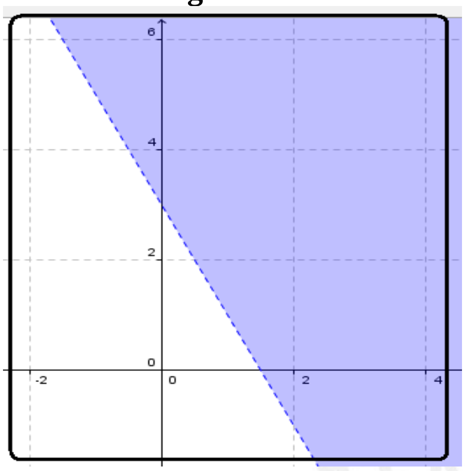
Figura 1. Plano cartesiano

4. **Recuerda:**
   a) **El borde de la región frontera es una línea continua** si el signo de la desigualdad es: $\geq$, $\leq$: obtienes una línea:

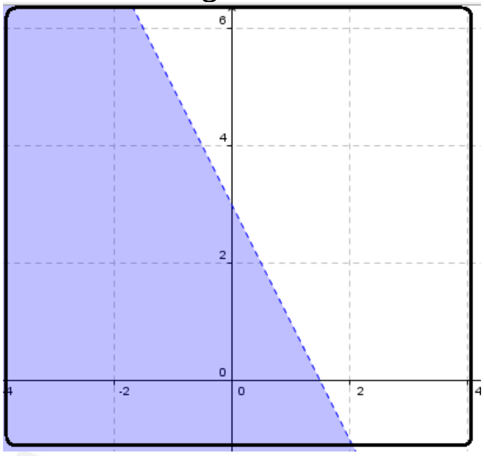
   b) **El borde de la región frontera es una línea punteada** si el signo de la desigualdad es estricta: > , < obtienes una línea - - - - - - - -

5.Tenemos **dos regiones**

Región N°1



Región N°2



6. ¿Cómo saber cuál de las dos regiones sombreadas es la respuesta de la inecuación solicitada?

7. Respuesta: Ubica un punto de prueba A (x, y), puede estar debajo o arriba de la línea punteada.

Luego evlúa este punto en la inecuación : **y > -2x +3**

Si cumple la desigualdad, entonces es la región del plano solicitado caso contrario, no es la región buscada.

Escoge un punto de prueba: (0,0) , lo evalúa en la inecuación : **y > -2x +3**

y > -2x +3

0 > -2(0)+3

0 > 0 + 3

0 > 3, **pero es Falso,** entonces la respuesta es la otra región del plano, ubicada encima de la línea punteada

Escoge otro punto de prueba.(4,4) lo evaluamos en la inecuación: y > -2x +3

4 > -2(4) + 3

4 > -8 + 3

4 > -5 **es Verdad.** Por lo tanto ,la región sombreada es la región N° 1

A continuación trabajaremos con un nuevo concepto el de Conjunto Convexo:

"Conjunto Convexo en R^2 Sea S un subconjunto de R^2.Decimos que S es convexo si y sólo si todo punto del segmento de recta que una dos puntos cualesquiera de S es un punto de S." (Grossman 1992b, p.11)

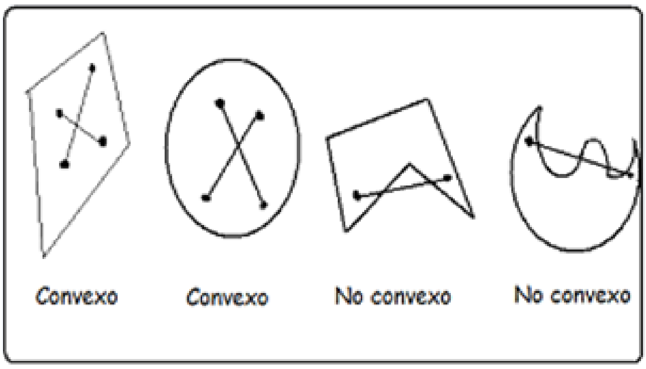


Figura 2.Ejemplos de conjuntos convexos
Fuente: Grossman 1992b, p.11

6. Graficando inecuaciones en el plano cartesiano, usando la *Ventana de Entrada* del GEOGEBRA

6.1 Dibújese el conjunto de puntos que satisface las desigualdades siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ -2x + 3y < 6 \end{cases}$$

(Grossman, 1992b, p.7)

- Apunta con el mouse las regiones poligonales haciendo clic sobre ellas
- ¿En qué región aparecen las dos regiones marcadas
- La región obtenida es un polígono convexo?

6.2 Cierra el archivo y abre otro en GeoGebra.

6.3 Grafica el siguiente sistema de tres inecuaciones lineales con tres variables

$$\begin{cases} y < -2x + 3 \\ -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} \geq 6 \\ \mathrm{x} > -8 \end{cases}$$

- Apunta con el mouse las regiones poligonales haciendo clic sobre ellas
- ¿En qué región aparecen las tres regiones marcadas
- La región obtenida es un polígono convexo?

6.4 Cierra el archivo y otro en GeoGebra

6.5 Grafica el siguiente sistema de inecuaciones lineales con cuatro variables:

$$\begin{cases} \mathrm{y} < x - 4 \\ \mathrm{x} \leq 5 \\ \mathrm{y} > -3 \\ \mathrm{x} \geq 0 \end{cases}$$

- Apunta con el mouse las regiones poligonales haciendo clic sobre ellas
- ¿En qué región aparecen las cuatro regiones marcadas?
- La región obtenida es un polígono convexo?

¿Qué característica tiene la solución grafica de un sistema de inecuaciones

. Escribe tu :

. **Comentario 3:**

____

____

____

____

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

6.6 Halla la solución gráfica medado por GeoGebra, de :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 5 \leq x + y \leq 7 \end{cases}$$

¿Qué hiciste para resolver y graficar esta ultima inecuación, encontraste alguna dificultad al ingresar los datos en la ventana de entrada? Escribe tu:

Comentario 4:

____

____

____

También puedes ingresar las inecuaciones de este modo, luego completa:

$0 \leq x \leq 4 \; equivale \; a$: $0 \leq x \;\; \wedge \;\; x \leq 4$ * El símbolo matemático$\wedge$ significa ¨**y**¨

$0 \leq y \leq 4$ equivale a :______________________________

$5 \leq x + y \leq 7$ equivale a: ______________________________

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

6.7 Halla la solución gráfica del siguiente sistema de inecuaciones lineales mediados por GeoGebra:

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$$

(Grossman, 1992b, p.8)

:

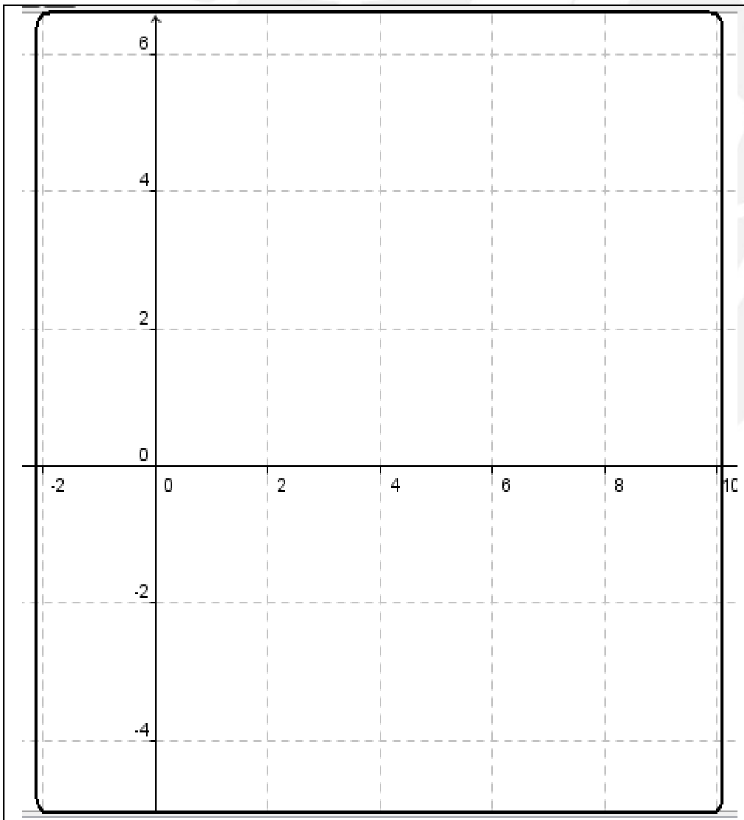
Un conjunto solución de un sistema de inecuaciones también puede ser vacio ¨(Grossman, 1992b, p.8)

6.8. HALLAR LOS VÉRTICES DEL POLÍGONO CONVEXO:

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones de forma gráfica usando lápiz y papel, finalmente halla los vértices del polígono:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y \geq 2} \\ \mathbf{y \leq 4} \\ \mathbf{2 \leq x \leq 6} \end{cases}$$

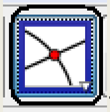
Tabla 2. Gráfica de las inecuaciones



Vértices del polígono :

puntos	(x	y)
A=	(	)
B=	(	)
C=	(	)
D=	(	)

Cotejando tu trabajo 	
Trabajó:	No trabajó

Nota: Para usar el comando: `Intersección de dos objetos`, estas inecuaciones deben de ser rectas es decir cambia el signo de inecuación por igualdad e ingrésalo por la ventana de entrada así
x + y = 2
y = 4
2 = x
x = 6

Solo así se podrán hallar los vértices, caso contrario no podrás conseguirlos.

6.9. HALLAR LOS VÉRTICES DEL POLÍGONO CONVEXO:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 42 \\ 3x + y \leq 24 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

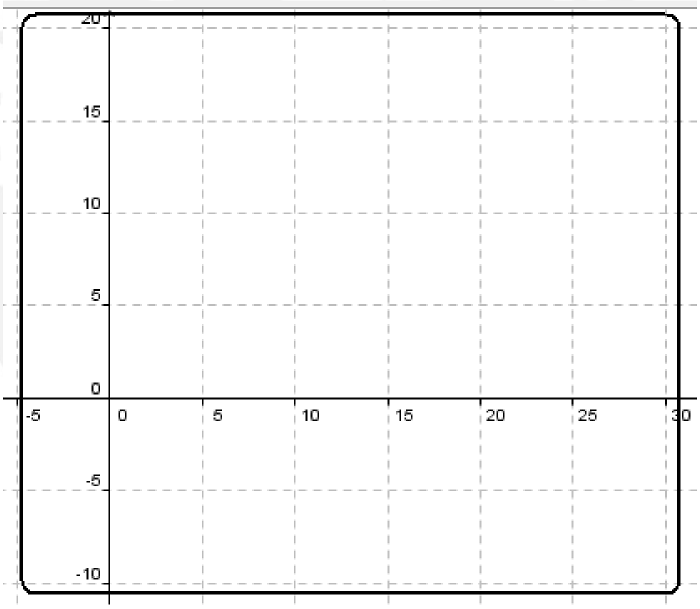


Figura 3. Plano cartesiano

Verifica tu resultado realzando los ejercicios 6.8 y 6.9 pero esta vez usando GeoGebra.

I.E.N° 1136 "John F. Kennedy"
Docente: Judith Bello **Nombre: _______________**

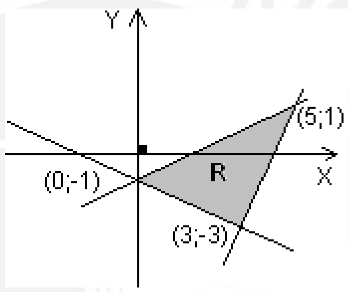
ACTIVIDAD N° 3

Querido alumno, en el desarrollo de esta actividad trabajarás con la maximización de funciones realizando actividades con lápiz y papel y luego con GeoGebra

Hoy se aprenderá: Como evaluar una función F(x, y) con las coordenadas de los vértices del polígono obtenido en el sistema de inecuaciones lineales con dos variables, se encontrará el valor óptimo de la función:

$$F_{(x;y)} = ax + by + c \ \rightarrow F_{(m;n)} = am + bn + c$$

1. **Trabajando con lápiz y Papel** :
   a. Minimiza la función: F(x,y) = 2x+5y , cuando el gráfico de las restricciones es el siguiente:



Opciones de respuesta:
a) -5 b) 15 c) 50 d) 21 e) -9

Para ello completa la siguiente tabla1

Tabla1.Evaluando los vértices del polígono en la función objetivo.

Coordenadas de los vértices del polígono	F(x, y)= 2x+5y	Valores
(0 , -1)	F(0,-1) =	
(5 , 1)	F(5,1) =	
(3 , 3)	F(3,3) =	

El valor mínimo es: _________________

Cotejando tu trabajo 	
Trabajó:	No trabajó

b. Dada la región poligonal S :

a) Determina el mínimo valor que toma la función **H= 7x-2y** en dicha región
b) ¿En qué punto de la región la función se maximiza?¨ (Moreno ,2011, p. 93)

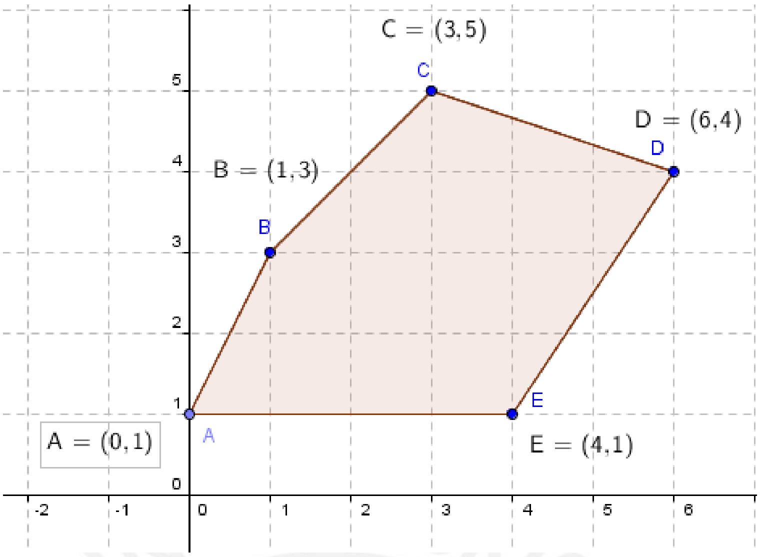


Figura 1.Región Poligonal S
Fuente: (Moreno, 2011, p. 93)

Para ello completa la tabla 2:

Tabla 2. Evaluando los vértices del polígono en la función objetivo de la actividad 2

Coordenadas de los vértices del polígono	**F(x,y)= 2x+5y**	Valores
A=(,)		
B=(,)		
C=(,)		
D=(,)		
E=(,)		

Respuestas:

a) El valor mínimo es: __________
b) El máximo valor es: __________

¿Qué entiendes por maximizar o minimizar una función? Realiza tú:

<u>Comentario 1</u>

____
____
____

Cotejando tu trabajo 	
Trabajó:	No trabajó

2. <u>Trabajando con GeoGebra:</u>

2.1. Optimiza la siguiente función: F(x, y)= 89x + 140y, sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 240 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a. Completa la siguiente figura 2, con la región final o solución de la inecuacion que observarás en el GEOGEBRA:

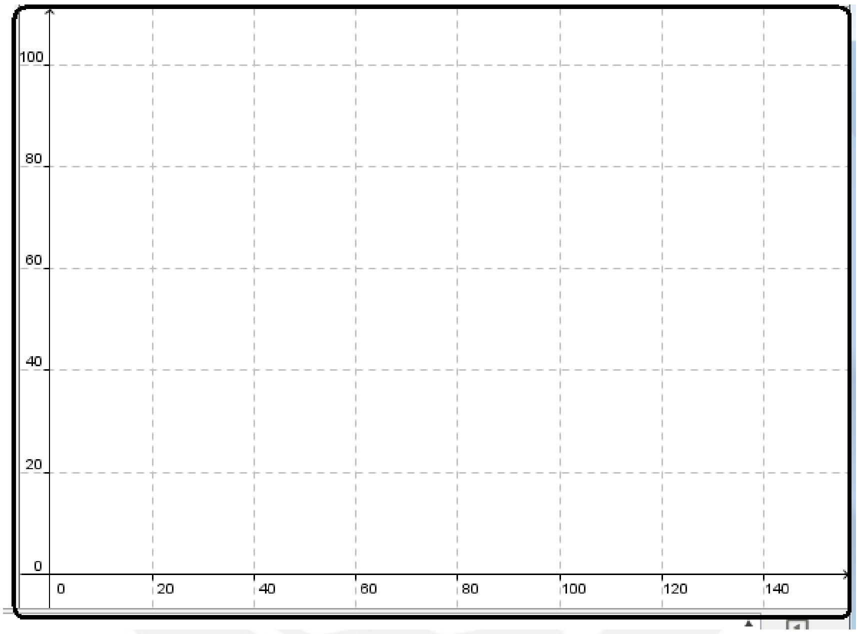


Figura 2. Plano cartesiano

b. Completa la tabla 3:

Tabla 3.

Coordenadas de los vértices del polígono	F(x, y)= 89x + 140y	Valores
A= (,)		
B= (,)		
C= (,)		
D= (,)		

c. **<u>Respuesta</u>**: **Mínimo es: _________**

Máximo es: _________

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

2.2.Maximiza la función: $F_{(x;y)} = 6x + 10y + 3000$, sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1000 \\ 0 \le y \le 700 \\ 0 \le x + y \le 800 \end{cases}$$

Opciones:

a) 7 800 b) 500 c) 4 200 d) 10 600 e) 5 000

a. Completa la siguiente figura 3, con la región final o solución de la inecuación que observarás en el GEOGEBRA:

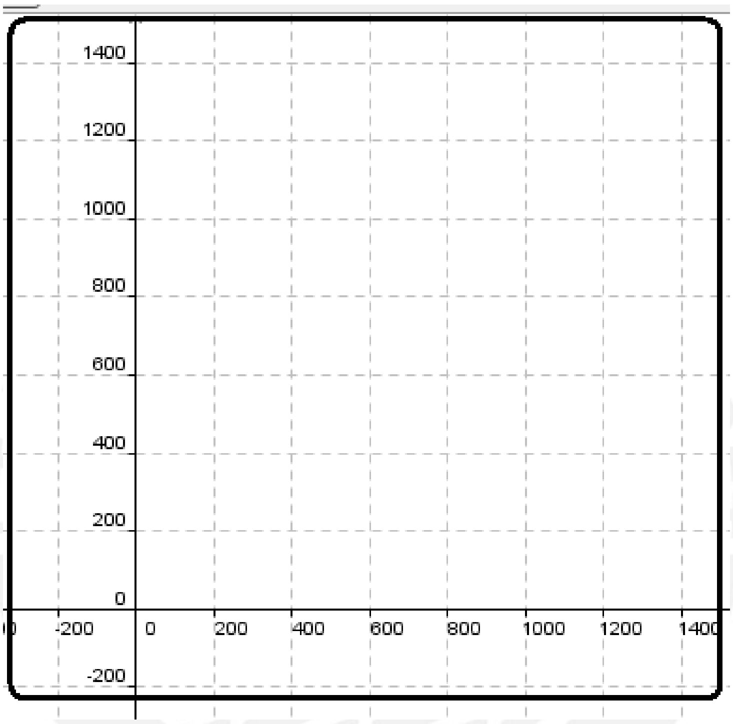


Figura 3. Plano cartesiano

b. Completa la tabla 4.

Coordenadas de los vértices del polígono	$F_{(x;y)} = 6x + 10y + 3000$	Valores
A= (,)		
B= (,)		
C= (,)		
D= (,)		

Tabla 4. Evaluando los vértices del polígono en la función objetivo.

c. Respuesta : El máximo valor de la función: $F_{(x;y)} = 6x + 10y + 3000$, sujeto a las restricciones anteriores es : ________________

¿Qué dificultades viste en este ejercicio? Realiza tú:

Comentario 2:

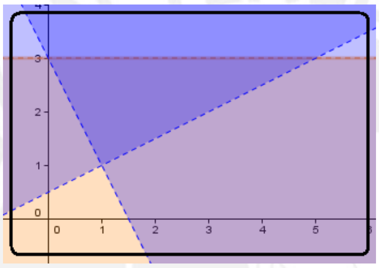
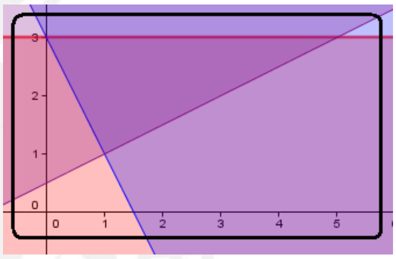
____

____

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

2.3. Determina el conjunto solución de inecuaciones marcando la siguientes opciones:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ x - 2y + 1 < 0 \\ y - 3 < 0 \end{cases}$$

a) Opciones: 1  2 

b) ¿Dichos vértices son la solución del sistema?¨(Adaptado de Moreno, 2011, p.86)

Escribe las respuestas a las preguntas. Realiza tú:

Comentario 3

____

____

____

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

La programación lineal, es un método que trata de optimizar: maximizar o minimizar una función lineal con "n" variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales en "n" variables.
Un problema de programación lineal tiene la siguiente forma estándar:

> Determínese el vector $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ en R^n que maximícese o minimícese la función lineal $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n,$
> Sujetas a las $m + n$ inecuaciones lineales:
>
> $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1$$
> $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \le b_2$$
> $$. \quad . \quad . \quad .$$
> $$. \quad . \quad . \quad .$$
> $$a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \le b_m$$
> $$x_1 \ge 0,$$
> $$x_2 \ge 0$$
> $$\ldots \quad \ldots$$
> $$\ldots \quad \ldots$$
> $$x_n \ge 0$$
>
> F, recibe el nombre de función objetivo del problema de P.L. Al conjunto solución de las inecuaciones lineales, se le llama conjunto restricción del problema. (p.27)

Aquí se trabajará con n=2, es decir las funciones lineales de dos variables y las restricciones dadas por inecuaciones lineales de dos variables, además:

- Los puntos de plano que cumplen el sistema de desigualdades forman una región convexo acotado (poligonal) o no acotado, llamados regiones factibles del problema.
- Todos los puntos de dicha región cumplen el sistema de inecuaciones. Se trata de buscar, entre todos esos puntos, aquel o aquellos que hagan el valor de " $F_{(x,y)}$ " máximo o mínimo", según sea el problema.
- Los puntos de la región factibles se denominan soluciones factibles.
- De todas esas soluciones factibles, aquellas que hacen óptima (máxima o mínima) la función objetivo se llaman soluciones óptimas.
- En general, un problema de programación lineal, puede tener una, infinitas o ninguna solución. Lo que sí se verifica es la siguiente propiedad:
- Si hay una única solución óptima, esta se encuentra en un vértice de la región factible, y si hay infinitas soluciones óptimas, se encontrarán en un lado de la región factible.
- Es posible que no haya solución óptima, pues cuando el recinto es no acotado, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.

Para resolver el problema, se puede abordar de dos formas, pero antes de aplicar cualquiera de ellas, siempre hay que dibujar la región factible, resolviendo el sistema de inecuaciones lineales correspondiente, como se ha visto en los epígrafes anteriores. (La región factible puede estar acotada o no) y se calculan los vértices de dicha región.

I.E.N° 1136 "John F. Kennedy"
Docente. Judith Bello **Nombre:_______________**

ACTIVIDAD N° 4

"Producción de bicicletas montañera y de paseo" Actividad mediada con GeoGebra
(Fuente: Universidad César Vallejo, ciclo 2010-1)

Querido alumno al resolver esta actividad pondrás en práctica las nociones básicas sobre Programación Lineal.

Un herrero tiene 80 kg de Acero y 120 kg de Aluminio para producir dos tipos de bicicletas: montañera y de paseo. Para producir cada bicicleta montañera se necesitan dos kg de cada material, mientras que para producir cada bicicleta de paseo se necesita 1kg de acero y 3 kg de Aluminio. Con la venta de cada bicicleta de paseo se gana 120 soles y con venta de cada bicicleta montañera se gana 90 soles. ¿Cuántas bicicletas de cada tipo debe de producir para obtener la máxima ganancia?

Solución.

1. Se identifican los datos del problema:

- ✓ Dos tipos de producción de bicicletas: montañera y de paseo
- ✓ La ganancia obtenida con l venta de la bicicleta de paseo es de 120 soles y con la bicicleta montañera es de 90 soles.

Datos : Representación Verbal		**Representación Algebraica :**	
Dos tipos de producción de bicicletas: montañera y de paseo	Cantidad total de bicicletas montañeras producidas :	x	
	Cantidad total de bicicletas de paseo Producidas	y	
		Ganancia individual	**Total :**
Ganancia total por tipo de venta:	Bicicletas montañeras	90 soles	90.x
	Bicicletas de paseo	120 soles	120y
Función Objetivo a maximizar :		F (x , y) =	90x+120y

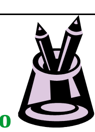
2. Se identifican las restricciones:

- ✓ Se dispone de 80 kg de Acero.
- ✓ Se dispone de 120 kg de Aluminio.
- ✓ Cada bicicleta montañera lleva dos kilo de cada material.
- ✓ Cada bicicleta de paseo lleva 1 kg de acero y 3 kg de aluminio.
- ✓ Con la venta de cada bicicleta de paseo se gana 120 soles.
- ✓ Con la venta de cada bicicleta montañera se gana 90 soles.
- ✓ Hallar la máxima ganancia.

Representación Verbal	**Interpretación**
Se dispone de 80 kg de Acero.	El acero usado $\leq$ 80 kg (La cantidad a usar es a lo más 80kg)
Se dispone de 120 kg de Aluminio.	El Aluminio usado $\leq$ 120 kg (La cantidad a usar es a lo más 80kg)
Cada bicicleta montañera lleva dos kilo de cada material.	Para fabricar una bicicleta montañera se requiere : 2kg. de Acero 2 kg. de Aluminio
Cada bicicleta de paseo lleva 1kg de Acero y 3 kg de Aluminio.	Para fabricar una bicicleta de paseo se requiere : 1kg. de Acero 3 kg. de Aluminio

3. Se completa la siguiente tabla general:

Tipo de Bicicletas	**Cantad de bicicletas producidas**	**Variables de no negatividad**	**Ganancia por cada Producto (s/.)**	**Ganancia total (s/.)**	**Insumo: Acero Para fabricar una bicicleta (kg)**	**Insumo: Aluminio para fabricar una bicicleta (kg)**	**Total de Acero usado** $\leq$ 80 kg	**Total de Aluminio usado:** $\leq$ 120 kg
Bicicletas Montañeras								
Bicicletas de Paseo								
Función Objetivo: **f(x, y) = ___________________**								

Cotejando tu trabajo 

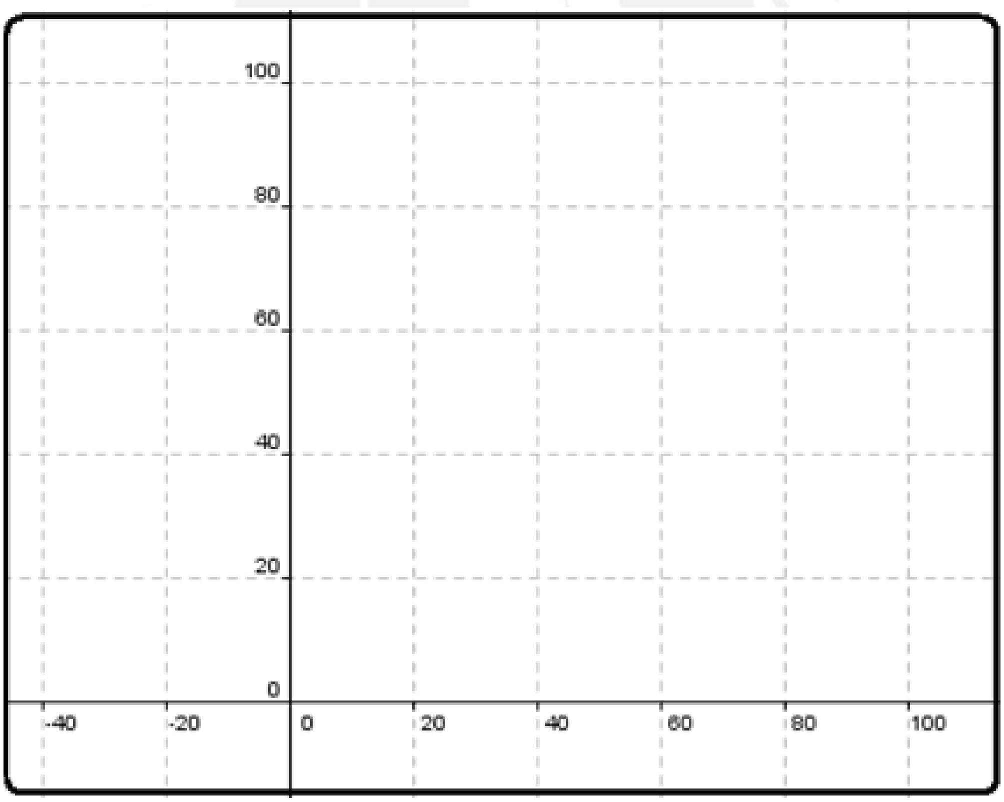
Trabajó:	No trabajó

4. **Se deduce la función objetivo y las restricciones**, con la ayuda de la tabla:

Función Objetivo: **f(x, y) = 90x+120y**

Restricciones $\begin{cases} \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{y \geq 0} \\ \mathbf{2x + 1y \leq 80} \\ \mathbf{2x + 3y \leq 120} \end{cases}$

5. **Se grafica:** Usando el GeoGebra, halla la solución gráfica del sistema de inecuaciones, identifica los vértices de la región factible y halla el máximo de la función objetivo en dicha región. Finalmente transcribe el gráfico obtenido de la pantalla de GeoGebra al plano cartesiano que se presenta a continuación:



Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

a. Indica las coordenadas de los vértices de la región factible y evalúa dichos puntos en la función objetivo:

Coordenadas de los vértices	**Función Objetivo f(x ,y) = 90x+120y**	**Valores**
A= (,)	90( ) +120( )	
B= (,)	90( ) +120( )	
C= (,)	90( ) +120( )	
D=(,)	90( ) +120( )	

b. ¿Cuántas bicicletas de cada tipo deben fabricarse para obtener el máximo beneficio?

c. Respuesta: Se deben producir las siguientes cantidades:

__________ bicicletas Montañeras.

__________ bicicletas de Paseo.

d. La ganancia máxima obtenida es de: ________________ soles.

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

I.E.N° 1136 “John F. Kennedy”

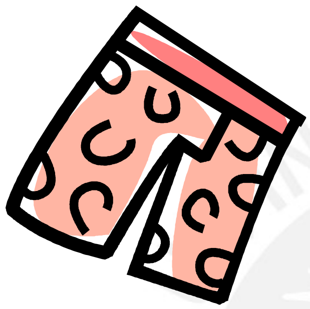
Docente. Judith Bello　　　　　　　　　　　　Nombre: __________________

ACTIVIDAD N° 5

“Producción de: pantalones y chaquetas”. Actividad mediada con GeoGebra

Querido alumno, hoy concluye nuestra investigación, esfuérzate en el desarrollo de este problema. Tienes dos horas pedagógicas para cumplir tu trabajo. Muchas gracias por tu colaboración.

TRABAJO INDIVIDUAL: “Producción de: pantalones y chaquetas”.



Una tienda por departamentos pide a un fabricante producir: pantalones y chaquetas deportivas. Para esto el fabricante dispone para la confección de: 1 500 m. de tela de algodón y **1 000** m de tela de poliéster. Para producir cada pantalón se necesita de **2** m. de tela de algodón y **2** m. de tela de poliéster. Mientras que para producir cada chaqueta se necesitan **3** m. de tela de algodón y **1** m. de tela de poliéster. Finalmente, se sabe que el precio de venta de cada pantalón se fija en **50** soles y el de la chaqueta en **40** soles, entonces, ¿qué cantidad de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?

Solución:

1. Elección de las incógnitas.

Cantidad de pantalones producidos: ____________

Cantidad de Chaquetas producidas: ____________

2. Completa la siguiente tabla:

Tipo de ropa deportiva producida	Cantidad total de ropa producida	Variables de no negatividad	Venta Unitaria (s/.)	Venta Total (s/.)	Cantidad Unitaria de Algodón usado (m)	Cantidad Unitaria de Poliéster usado (m)	Cantidad TOTAL de Algodón (m) ≤ -------1500	Cantidad TOTAL de Poliéster (m) ≤ -------1000
Pantalones								
Chaquetas								
Función Objetivo F (x,y)=								

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

3. Completa la función objetivo y restricciones observando la tabla anterior:

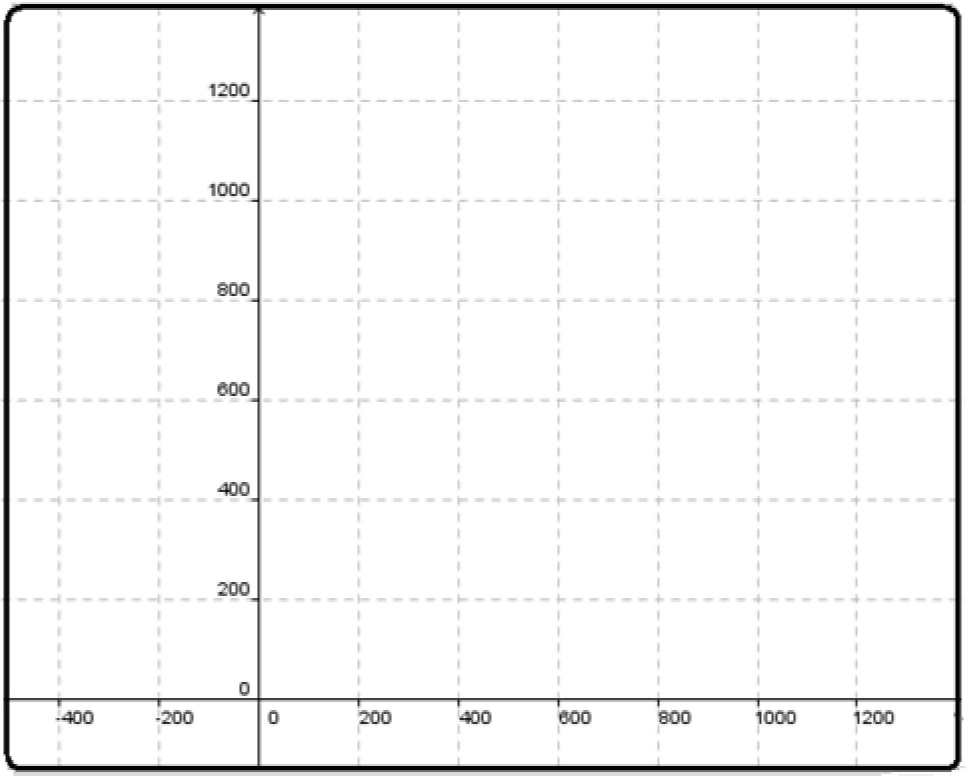
a. Restricciones: $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

b. Función Objetivo: ________________________

c. Optimización: $\begin{cases} \boldsymbol{Minimización}: \_\_\_\_ \\ \boldsymbol{Maximización}: \_\_\_\_ \end{cases}$

Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

4. Grafica la región factible. Usa GeoGebra:

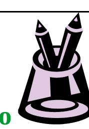


5. Completa el cuadro:

Vértices de la región factible	f(x,y)= 50x + 40y	Valores obtenidos para la venta máxima
A=(,)	50( ) + 40 ( )	
B=(,)	50( ) + 40 ( )	
C=(,)	50( ) + 40( )	
D=(,)	50( ) + 40 ( )	

5. Responde: ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?

Se necesitará producir _______ pantalones y de _______ chaquetas. Con una venta máxima de: ___________________



Cotejando tu trabajo	
Trabajó:	No trabajó

I.E.N° 1136 "John F. Kennedy" **Nombre : _________________**

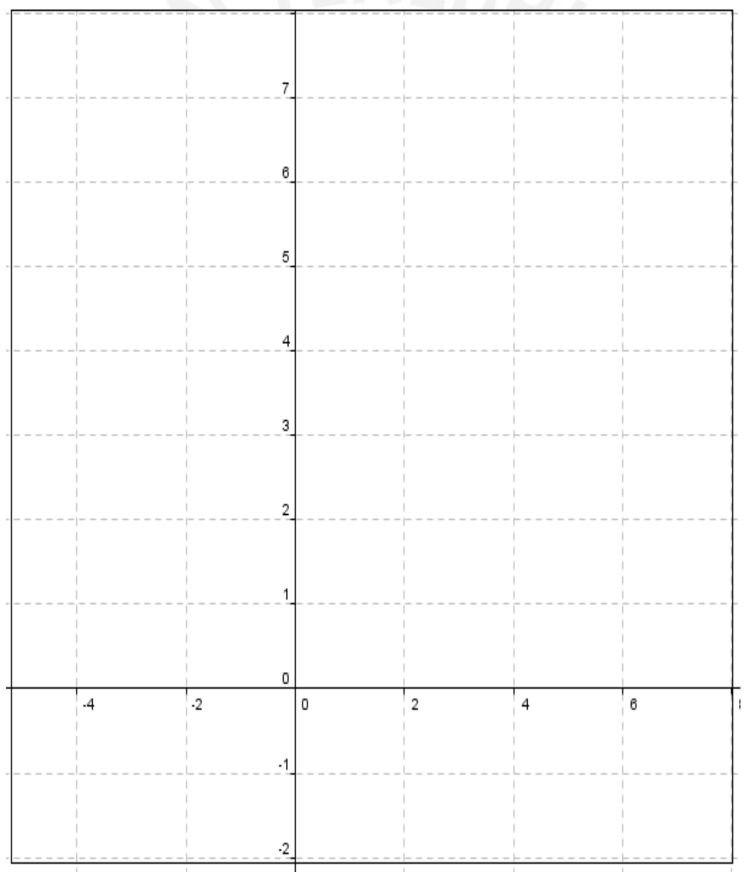
Docente: Judith Bello **Fecha: __________**

ACTIVIDAD DE ENLACE N° 1

Querido alumno, tienes una hora pedagógica para realizar este trabajo. Gracias:

1. Grafica los siguientes puntos en el plano :

A =(- 4 , 5)	C= (0 , 4.5)	E =(0 , -1)
B= (3 , 0)	D= (5 , -1)	F= (6 , 0)



2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables :

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

<table>
<tr><td>Solución Algebraica</td><td>Tabulando</td><td>Solución gráfica: Ubica ambas rectas en el plano</td></tr>
<tr>
<td>$x + y = 6$
$x - 2y = -3$

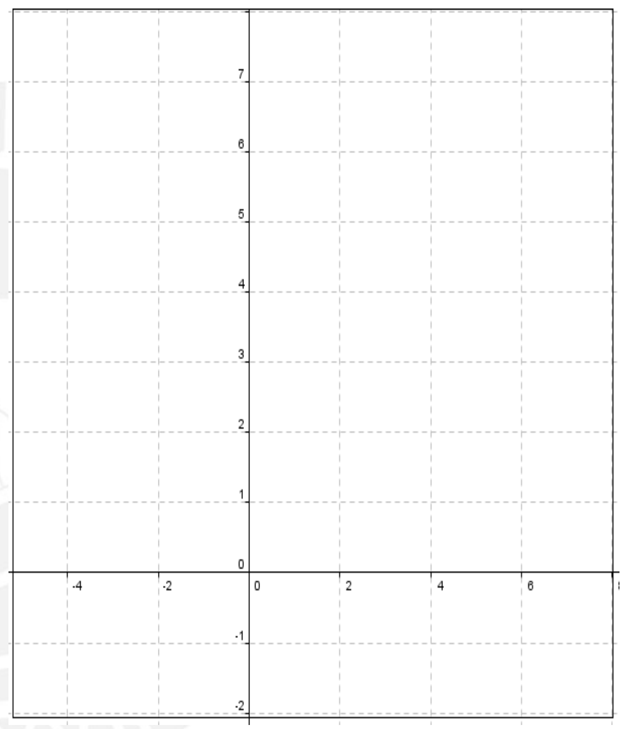
Respuesta:</td>
<td>$x + y = 6$
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table>
$x - 2y = -3$
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Tabla 01

Solución Algebraica y gráfica, del sistema de ecuaciones lineales con dos variables de la actividad 2

Escribe tu comentario sobre esta actividad. **Comentario 1 :**

____

____

I.E.N° 1136 "John F. Kennedy" **Nombre: _________________**
Docente: Judith Bello **Fecha: __________**

ACTIVIDAD DE ENLACE N° 2

Querido alumno, tienes una hora pedagógica para realizar este trabajo. Gracias

1. Completa la tabla con las siguientes oraciones:

a) Una región con línea recta en el borde
b) Una línea recta
c) Una región con línea punteada en el borde

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Símbolo</th><th>Su representación gráfica es :</th></tr>
<tr><td>ECUACIONES</td><td colspan="3">=</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">INECUACIONES</td><td rowspan="2">> , ≥ , <, ≤</td><td rowspan="2">Si se agrupa los</td><td>≤ ; ≥</td><td></td></tr>
<tr><td>>; <</td><td></td></tr>
</table>

2. Grafica **4y – 3x > 12**

<table>
<tr><td colspan="3">Grafica : 4y – 3x > 12</td></tr>
<tr><td>a. Cambia el símbolo de la inecuación por igualdad.
Veamos. 4y – 3x ☐ 12 , luego traza la recta</td><td>Los símbolos
>, <
≤, ≥</td><td>Cambian por :
=</td></tr>
<tr><td colspan="3">b. Ubica dos puntos para graficar la línea recta</td></tr>
<tr><td colspan="3">c. Grafica la recta en el plano Cartesiano, luego auméntale las modificaciones de "d y e"</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

x	y
0	
	0

d. Recuerda : ***La línea recta es continua** en el borde de la región
Frontera, si el símbolo $\geq$, $\leq$

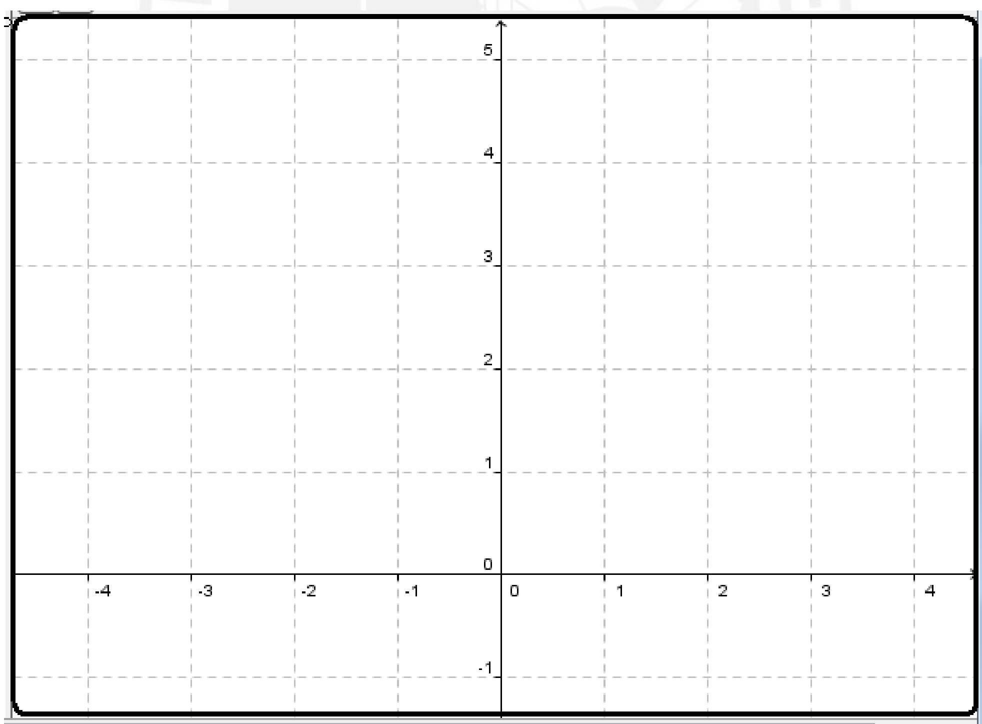
Observa :

***La línea recta es punteada en el** borde de la región
Frontera, si el símbolo es > , <
Observa: - - - - - - - -

e. ¿Cómo saber cuál de las dos regiones sombreadas es la respuesta de la inecuación solicitada?

EVALUA LA INECUACION CON UN PUNTO DE PRUEBA:
(x,y) = **4 y – 3x > 12**
4(   ) -3(   ) > 12

f. Finalmente, gráfica la inecuación: **4y – 3x > 12** :



I.E. N° 1136 “John F. Kennedy” **Nombre: __________________**
Profesora: Judith Bello **Fecha: ___________**

ACTIVIDAD DE ENLACE N° 3

Querido alumno, tienes una hora pedagógica para realizar este trabajo. Gracias

Dada la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

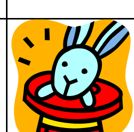
$x + y \leq 7$
$\mathbf{2x + y \leq 10}$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

1. Maximiza en dicha región el valor de la función f(x, y) = 30x + 20y

<table>
<tr>
<td>Grafica : x + y ≤ 7
Es una región</td>
<td>Grafica 2x + y ≤ 10
Es una región</td>
<td>Grafica: x ≥ 0 ^ y ≥ 0
Es una región</td>
</tr>
<tr>
<td>Cambiemos el símbolo
≤ por =
x + y □ 7

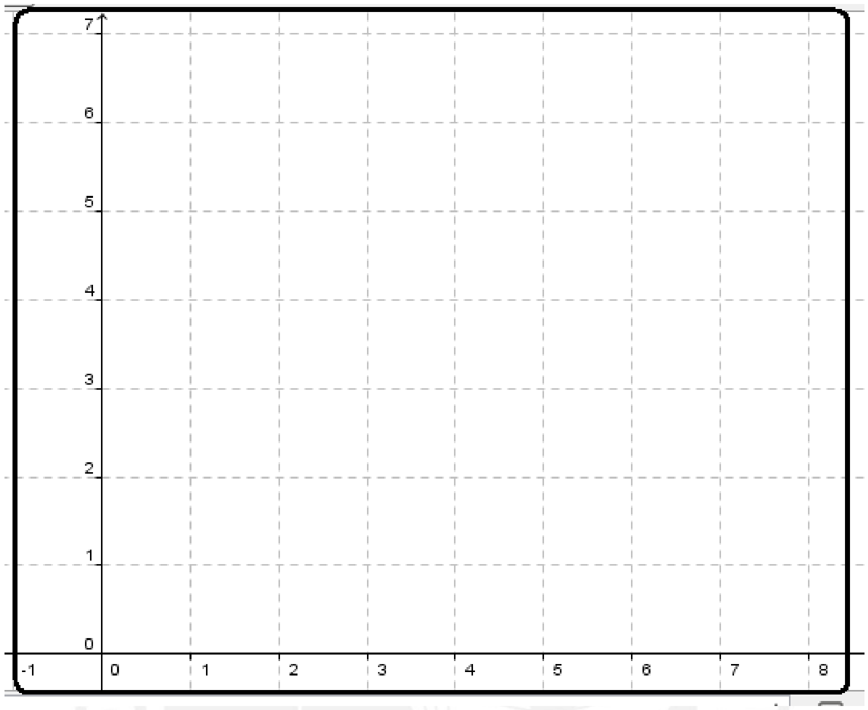
halla las coordenadas de dos puntos
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table></td>
<td>Cambiemos el símbolo
≤ por =
2x + y □ 10

halla las coordenadas de dos puntos
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>0</td></tr></table></td>
<td>Recuerda la solución de ambas restricciones
x ≥ 0, y ≥ 0
se encontrarán en el primer cuadrante.</td>
</tr>
<tr>
<td>Si tienes el símbolo ≤
El trazo de la línea en el borde de la región es:
………………</td>
<td>Si tienes el símbolo ≤
El trazo de la línea en el borde de la región es:
………………</td>
<td>Si tienes el símbolo ≥
El trazo de la línea en el borde de la región es:
………………</td>
</tr>
<tr>
<td> Punto de prueba :

y pinta la región</td>
<td> Punto de prueba :

y pinta le región :</td>
<td></td>
</tr>
</table>

2. Grafica:



3. Completa la tabla:

Coordenadas de los vértices del polígono	f(x, y) = 30x + 20y	Valores
A= (,)		
B= (,)		
C= (,)		
D= (,)		

4. Indica tu respuesta:

El valor Máximo de la función f(x, y) = 30x + 20y en la región factible es: ____________

I.E. N°1136 "John F. Kennedy"

FICHAS DE OBSERVACIÓN DE ACTIVIDADES

Docente: Judith Bello. Tema: _______________________________ Fecha: ___________ACT N° _______

LOGROS Capacidades que logran los alumnos	DIFICULTADES ¿En qué parte de la actividad necesitan apoyo?	REGISTRO DE INCIDENCIAS NO ESPERADAS

Modelo de la ficha de Observación

Observaciones generales, sugerencias:

____

____

____

Responsable de la observación: _____________________________________