PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES. UNA PROPUESTA PARA EL CUARTO AÑO DE SECUNDARIA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADO POR

ROCÍO ELIZABETH FIGUEROA VERA

ASESOR DE TESIS:

DR. ULDARICO MALASPINA

MIEMBROS DEL JURADO:

DR. FRANCISCO UGARTE GUERRA

DR. ULDARICO MALASPINA JURADO

MG. MIGUEL GONZAGA RAMÍREZ

LIMA – PERÚ

2013

Dedicatoria

A Juan Figueroa Alvarado
y Adriana Vera Carrión, mis
amados padres. Gracias por
haberme inculcado siempre al
estudio y al progreso.

A mi esposo
Alejandro Serquén, por
haberme brindado
siempre su amor,
paciencia y apoyo
incondicional.

Agradecimiento

Al Dr. Uldarico Malaspina, mi asesor de tesis, por su dedicación, paciencia y entusiasmo que le puso en cada asesoría. Estimado profesor, gracias por todo el apoyo brindado y por sus valiosas orientaciones durante el desarrollo de esta investigación.

A mis profesores de la Maestría Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por enseñarme el verdadero papel de un educador matemático.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación, detalla la elaboración, aplicación y análisis de los resultados de una secuencia didáctica orientada a estimular en los estudiantes de cuarto año de secundaria el desarrollo de la capacidad de resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y contribuir a que superen las dificultades que suelen presentarse.

La secuencia didáctica fue diseñada teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, donde se propusieron actividades de modo que los estudiantes pasen por situaciones de acción, formulación y validación, al resolver problemas relacionados con sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Como proceso metodológico se utilizó la Ingeniería Didáctica. En el análisis de los resultados se usa también la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval. La secuencia didáctica se aplicó a los alumnos del cuarto año del nivel secundario del colegio Weberbauer, y se recopiló y analizó los resultados obtenidos.

Consideramos que una manera de reforzar la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales, es mediante la creación de problemas y el uso del GeoGebra, que es un software dinámico.

El objetivo general del trabajo es diseñar una propuesta didáctica para fortalecer en los alumnos las habilidades de resolución de problemas relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y algunas de las conclusiones obtenidas son:

- La creación de problemas cuya solución se obtenga resolviendo un sistema de ecuaciones lineales dado, es una actividad que contribuye a estimular la habilidad de resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones. A pesar de no ser usual, la actividad es asumida con entusiasmo por los estudiantes.
- En el marco de los sistemas de ecuaciones lineales, el GeoGebra puede usarse no sólo para visualizar las ecuaciones y para resolver los sistemas, sino para resolver problemas, contextualizados o no; en particular, problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación surge a raíz de la experiencia en las aulas de educación secundaria y universitaria, al notar que los alumnos no están siendo motivados para resolver problemas de matemáticas en general y específicamente, problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales. Están más orientados a resolver sistemas de forma rutinaria y algorítmica, usando los métodos de forma mecánica y resuelven problemas típicos y sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo.

Es muy importante la labor del docente, específicamente en la dimensión didáctica, para la concepción de una propuesta de enseñanza que provoque en el alumno la participación activa en su proceso de aprendizaje y la motivación para el estudio de las matemáticas, en especial de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Es por ello que consideramos como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, para proponer una situación didáctica que permita establecer un ambiente propicio, donde se pueda conectar los contenidos con los intereses de los estudiantes.

Hemos decidido estudiar los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables por su gran utilidad en muchos problemas contextualizados y su aplicación a otros campos como la economía, en donde es frecuente encontrar puntos de equilibrio, por ejemplo entre la oferta y la demanda.

La particularidad del trabajo está en: i) haber introducido en el diseño de la secuencia didáctica actividades con el uso del GeoGebra, que es un software dinámico y lo usamos inclusive para la resolución de problemas considerando variación de parámetros en el sistema de ecuaciones; y ii) considerar actividades en las que el alumno debe crear problemas relacionados con el objeto matemático en estudio y eventualmente, usando el GeoGebra.

La investigación consta de siete capítulos, divididos en dos partes: la primera parte señala los aspectos teóricos y la segunda parte se detalla el desarrollo de la ingeniería didáctica.

En los capítulos 1 y 2 se desarrolla los aspectos teóricos de la investigación donde se presentan: el problema de investigación, que incluye los antecedentes, la definición, delimitación y justificación del problema y los objetivos; como marco teórico resaltamos los aspectos más importantes de la Teoría de las Situaciones Didácticas, y como método de investigación presentamos las principales concepciones de la Ingeniería didáctica.

En el capítulo 3 se desarrolla el Análisis Preliminar, que abarca la componente epistemológica, cognitiva y didáctica acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables; y se complementa esta fase con el análisis del campo de restricciones referido a las características de los estudiantes involucrados en la investigación.

El capítulo 4 comprende: la concepción de la secuencia didáctica y el análisis a priori, donde se definen las variables didácticas, los comportamientos esperados y el diseño de las cuatro actividades.

El capítulo 5 comprende el desarrollo de la fase de experimentación, donde se presentan los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica, se describen de manera detallada las acciones, los comportamientos y los logros y dificultades de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

El capítulo 6 presenta el análisis a posteriori, que es la comparación entre los comportamientos esperados y los observados en la experimentación. Posteriormente, en base al análisis de resultados se presentan los argumentos para el rediseño o conservación de la situación didáctica.

Finalmente el capítulo 7, comprende el cierre de la investigación con las conclusiones obtenidas en relación a los objetivos planteados y se proponen algunas recomendaciones y perspectivas para abordar otras investigaciones relacionadas al objeto matemático.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Los bajos resultados en las evaluaciones internacionales como PISA (2009), señalan que los estudiantes peruanos obtuvieron el menor puntaje en la escala de alfabetización matemática al haber ocupado el puesto 63 de 65 países participantes. Según la Unidad de Medición de la Calidad – UMC (2010), la descripción de los niveles de desempeño en Matemática indican que un 25,9% de estudiantes peruanos se encuentran en el nivel 1 (el más bajo), en este nivel los estudiantes responden a preguntas relacionadas a contextos cotidianos, en los que está presente toda la información necesaria y las preguntas están claramente definidas; son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas de situaciones explícitas; realizan acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. Por otro lado un 26,3% de estudiantes peruanos se ubican entre los niveles 2, 3, 4 y 5, mientras solo un 0,1% se ubica en el nivel 6 (el más alto), donde los estudiantes deberían poseer un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. En base a esta información, podemos argumentar que los estudiantes no están preparados para resolver problemas con contextos no familiares, justificar sus procedimientos de solución y reflexionar sobre sus resultados, están más orientados a resolver los problemas de forma algorítmica, usando métodos de forma mecánica, sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo.

Investigadores como Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz (2007), revelan que la enseñanza de resolución de problemas se realiza por lo general mediante estrategias de transferencia, es decir que se resuelve y se explica un conjunto de problemas y después se pide a los estudiantes que resuelvan otros problemas análogos.

Por otro lado, los docentes de educación secundaria se rigen mucho a libros de texto, muchas veces porque la Institución educativa lo exige, y por lo general estos textos están sujetos a los principios tradicionales, donde se siguen procedimientos rígidos y algorítmicos. La mayoría de los texto inician con una breve explicación de los conceptos, definiciones, propiedades, resuelven algunos ejemplos y hablan muy poco de la resolución de problemas; es más, lo hacen de tal manera que no hay una secuencia didáctica que ayude a los docentes y a los propios alumnos a motivarse por aprender las matemáticas de una manera diferente a la tradicional. Por otra parte, de acuerdo con Malaspina (2011) la mayoría de los textos de secundaria proponen más ejercicios que problemas de contexto real. Además, generalmente, tales problemas no ayudan a estimular el aprendizaje de los alumnos.

En particular, cuando se enseñan los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), no se enfatiza adecuadamente la resolución de problemas relacionados con este objeto matemático y por consiguiente no se está contribuyendo a que los estudiantes exploren y consoliden sus conocimientos, lo cual ayudaría al desarrollo del pensamiento matemático.

Por otra parte, Malaspina (2011) señala que:

> La creación de problemas es muy importante para los profesores y para los alumnos, pues la actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada. Los profesores de cualquier nivel educativo pueden incluir la creación de problemas en las actividades programadas para el aprendizaje de los alumnos (p. 162)

El mismo autor, en el 2012, realizó otro estudio sobre el tema en mención, el cual confirma lo expuesto anteriormente: la gran relación que hay entre resolver y crear problemas.

Estas investigaciones, muestran lo importante que es estimular la competencia de crear problemas ya que ello nos conduce a la resolución de problemas de una manera natural y con entusiasmo.

Garcés (2009), desde su experiencia ha notado la desmotivación, el desinterés y la apatía de las nuevas generaciones frente a los modelos de formación y educación que el sistema tradicional les ha ofrecido. Esto exige a docentes, investigadores, directivos y a toda la sociedad a asumir el reto de crear nuevas opciones de enseñanza y de estar en permanente actualización con los avances pedagógicos y tecnológicos. Es necesario desarrollar materiales, estrategias metodológicas y ambientes para diseñar procesos de enseñanza –aprendizaje que motiven y comprometan el espíritu y la voluntad de nuestros alumnos. Frente a estos retos, las nuevas tecnologías de la información y la comunicación son de mucha ayuda, por ejemplo el uso del software matemático GeoGebra.

Las investigaciones a las que hemos hecho mención, muestran claramente el problema y la relevancia para realizar esta investigación, surgiendo el interés por diseñar una secuencia didáctica que permita una construcción más sólida y usar adecuadamente el concepto de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones en problemas contextualizados, apoyados mediante la creación de problemas y el software de geometría dinámica GeoGebra.

Las investigaciones de Garcés (2009) y las características propias del GeoGebra – en particular el movimiento de los gráficos de rectas y la disponibilidad del deslizador – nos llevan a considerar que emplear este recurso tecnológico puede ser de mucha ayuda para la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y para la solución de problemas relacionados con este objeto matemático. Por otra parte, las investigaciones y recomendaciones hechas sobre la importancia de la creación de problemas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Ilfi and Nor Bakar, 2011; Malaspina, 2011; NCTM, 2000; Polya, 1969), nos llevan a considerar esta actividad como una manera de estimular las competencias de los alumnos para resolver problemas vinculados a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

A raíz de todo esto, nos planteamos como problema, responder a la siguiente pregunta de investigación: Para una resolución adecuada de problemas que involucren a los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables ¿es posible formular una propuesta didáctica basada en la TSD, que incluya el uso del GeoGebra y la creación de problemas?

1.2 Antecedentes

La mayoría de las investigaciones revisadas, están relacionadas con la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales. A continuación presentamos algunas de estas investigaciones.

En el año 2002, Oaxaca en su investigación señala que los alumnos del primer semestre de ingeniería tienen dificultades al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ellos conocen los métodos de solución, pero tienen dificultades para interpretar modelos matemáticos a partir de su gráfica o expresiones algebraicas lineales. Además, afirma que existe una separación entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico aritmético, para que los alumnos lo usen sin ninguna dificultad. Entre sus conclusiones, señala lo siguiente:

- El alumno tiene la creencia de que la solución gráfica de una ecuación está en la intersección con los ejes X y Y.
- La solución del sistema de ecuaciones lo asocia con el valor de x o de y pero no interpretan el punto que forma esta pareja.
- Los profesores debemos ayudar a nuestros alumnos a desarrollar las formas de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético para que ellos puedan transitar en ambas formas.
- El profesor en el aula induce a los alumnos a conocer los diferentes métodos que existen para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero se olvida de instruirlos en sus representaciones geométricas para obtener su ecuación a partir de su gráfica.
- Los libros de texto de bachillerato se inclinan por el pensamiento analítico-aritmético o únicamente dan una introducción a las representaciones de situaciones gráficas y continúan resolviendo los problemas en forma algorítmica provocando que el alumno memorice o mecanice los métodos.

Esta investigación, refuerza nuestra preocupación sobre la manera como se está enseñando a resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales y sobre las dificultades que tienen los alumnos en el cambio de registros, y nos induce a orientar nuestro trabajo en la búsqueda de mejorar esta situación.

Por otro lado, Segura (2004), en su investigación señala que existen dificultades para trabajar problemas dados en registro verbal que involucran sistemas de ecuaciones, menciona que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales. Además, en este trabajo se puede apreciar cómo se puede facilitar el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales planteando al estudiante actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación. El mencionado trabajo presenta como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de Registro de Representación Semiótica y la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, los mismos que serán usados en nuestra investigación.

Por otro lado, Ochoviet (2009) en su investigación propone dos objetivos, el primero se basa en estudiar qué concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos (de 14-15 años y 17-18 años) cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2×2. Como segundo objetivo se propuso diseñar una secuencia de enseñanza y de actividades, para los estudiantes de 14-15, del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que tenga en cuenta los datos obtenidos a partir del primer objetivo. De acuerdo al trabajo realizado, concluye que en la mayoría de los estudiantes con los que experimentó la forma de enseñanza propuesta, fue posible alcanzar un modo de pensamiento estructural en este nivel de escolarización y que el estudio del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales requiere de avances en este modo de pensamiento. Entre sus conclusiones, señala que: las actividades que diseñó fueron de gran utilidad en la construcción del concepto por parte de los estudiantes y consideramos importante continuar trabajando en el desarrollo y diseño de este tipo de actividades que, como ya señalamos, se tratan de formulación de preguntas, actividades de construcción, actividades de "dar un ejemplo", preguntas de reflexión (Zazkis y Hazzan, 1998) y actividades novedosas (Oktaç et al., 2007). Estas situaciones ponen en juego diferentes modos de pensamiento, procuran su articulación y tiene por objetivo que el alumno construya el concepto de solución de un sistema.

En el año 2009, Garcés en su trabajo de investigación Incidencia del GeoGebra en la resolución de problemas con sistemas lineales, analiza las ventajas y desventajas que puede tener la resolución de problemas con sistema de ecuaciones lineales 2x2 mediante el uso de herramientas tradicionales como lápiz, gráficas en papel milimetrado, métodos algebraicos y la herramienta tecnológica, software de geometría dinámica GeoGebra. Entre sus conclusiones señala que trabajar con el software Geogebra favorece el desarrollo de la competencia visual en los estudiantes, permite la articulación de los diferentes registros de representación, favorece el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes a través de la resolución de problemas, motiva a los estudiantes, ya que les ofrece otras alternativas para aprender, lo cual se complementa con los métodos tradicionales y contribuye al logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo, nos dice también que trabajar con el software

GeoGebra no permite ver los procesos paso a paso, esto limita la posibilidad de conocer con precisión los momentos de errores y aciertos de los estudiantes a través de su proceso.

En el año 2012, Trigueros en su trabajo de investigación analiza las muchas dificultades que los estudiantes de secundaria y bachillerato enfrentan al resolver sistemas de ecuaciones. Muestra de ello es que suelen memorizar estrategias de solución sin comprender su significado, ni tampoco el conjunto solución. Además, los estudiantes avanzados o de nivel universitario siguen teniendo dificultades para entender el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, así como para decidir el número de soluciones que tiene un sistema dado, y para representar las soluciones geométricamente. Este trabajo estuvo enfocado hacia el análisis de la comprensión de los estudiantes de enseñanza media e inicios de la enseñanza universitaria, así como en la naturaleza de sus dificultades. Para enfrentar esta problemática utiliza dos marcos teóricos: la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y el Modelo 3UV (3 usos de la variable), para proponer un conjunto de construcciones mentales o esquema que el estudiante puede desarrollar con el fin de comprender el significado de los sistema de ecuaciones, su procedimiento y conjunto solución. En base a estas construcciones presenta una estrategia de enseñanza para mejorar el aprendizaje de este concepto basada en el uso de modelos. Los resultados muestran las dificultades en el proceso de modelación, por ejemplo, definir las variables y plantear hipótesis.

Todo lo anterior guarda relación con la problemática de nuestra investigación y sus propuestas nos servirán de referente en el planteamiento de situaciones y actividades que permitan al estudiante enfrentarse a problemas contextualizados con sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, la creación de problemas y la ayuda de una herramienta tecnológica como el software GeoGebra.

1.3 Delimitación del problema de investigación

Tenemos el propósito de diseñar una propuesta didáctica que ayude a consolidar los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, apoyados en la creación de problemas y en el uso adecuado del software de geometría dinámica GeoGebra. Debido a la relevancia que tiene la parte didáctica es pertinente que esta se desarrolle con la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas y usando como metodología de investigación la ingeniería didáctica.

La teoría de situaciones didácticas, es un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para diseñar secuencias didácticas que ayude a generar la construcción del conocimiento matemático. Esta teoría sostiene que el conocimiento matemático se va construyendo a partir de la interacción del estudiante con situaciones problemáticas, el estudiante va poniendo a prueba sus propios conocimientos, va profundizándolos, rechazando formas erradas de aplicarlo, o promoviendo otros nuevos a partir de la interpretación de los resultados de sus acciones.

El profesor debe tener cuidado en diseñar o crear las actividades; éstas deben estar enfocadas en provocar que el alumno asuma la responsabilidad de construir su propio conocimiento, interactuando con los problemas. Para la construcción de estos aprendizajes se conciben momentos, donde el alumno se enfrenta solo a la resolución del problema, sin la intervención del profesor, quien solo se limita a dar orientaciones para que el estudiante se encamine a encontrar la solución del problema; tales momentos son la continuación de situaciones de acción, formulación y validación, ordenados en forma razonable para la construcción de un conocimiento.

Por otro lado, como queremos que el alumno realice conversiones entre los registros: verbal, algebraico y gráfico, en algunos momentos de la investigación nos apoyaremos en los aportes de Raymond Duval sobre la Teoría de Registro de Representaciones Semiótica. La conversión o transformación es cambiar la forma de representar un objeto. Este enfoque, basado en la noción semiótica de registro, sostiene que no es posible acceder a los objetos matemáticos, que no son accesibles por la percepción ni manipulables como un objeto físico, fuera de un sistema semiótico. En este sentido considera que un problema clave en el aprendizaje de la matemática es la distinción que debe hacerse entre un objeto y su representación.

Pretendemos, a través de nuestro trabajo, resaltar la importancia que debe tener la dimensión didáctica en la concepción de una propuesta de enseñanza sobre la resolución de problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; es por ello que consideramos que la Teoría de Situaciones Didácticas y la ingeniería didáctica son el marco teórico idóneo para proponer una situación didáctica que permita la interacción entre el alumno, los problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales y el maestro.

De esta manera, poniendo énfasis en las condiciones didácticas y cognitivas que una secuencia didáctica debe tener, se analizará el aprendizaje matemático en cuestión y se hará una propuesta.

1.4 Objetivos de la investigación

Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica para fortalecer en los alumnos las habilidades de resolución de problemas relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

1. Diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que ayuden a consolidar los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas que involucra a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
2. Diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que estimulen en los alumnos la habilidad de crear problemas relativos a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
3. Diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que estimulen la habilidad de resolver y crear problemas relativos a sistema de ecuaciones lineales con dos variables haciendo uso del GeoGebra.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentamos algunos aspectos de la Teoría de la Situaciones Didácticas, que es la que usaremos como marco teórico en nuestra investigación. También, presentaremos un resumen de la Ingeniería Didáctica, la cual utilizaremos como metodología en nuestra investigación para hacer el diseño, análisis, aplicación y validación de las secuencias didácticas.

2.1 La teoría de situaciones didácticas (TSD)

2.1.1 Fundamentos

En la década de los sesenta del siglo XX, Guy Brousseau, perteneciente a la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas propone la Teoría de Situaciones Didácticas. Esta teoría sostiene que la enseñanza es un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos.

Según Panizza (2004) "se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea" (p.60).

Es así que, esta teoría permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase, concebidas por el profesor, con el fin de disponer de un medio para realizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento nuevo.

La teoría de Situaciones Didácticas está sustentada en una concepción constructivista, en el sentido Piagetano del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (2007): "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje" (p.30).

En ese sentido, el aprendizaje por adaptación es producto de la interacción del sujeto con el medio o situaciones problemáticas, sin la intervención del profesor, logrando que el alumno desarrolle sus propias producciones matemáticas. Es muy importante tener en cuenta esta concepción de aprendizaje para el diseño de las actividades didácticas, ya que servirá para que el profesor diseñe el medio con la intención de que el estudiante adquiera un conocimiento matemático.

Bajo estos aspectos, el profesor debe proponer a los alumnos situaciones matemáticas reales que ellos puedan vivir, y que provoquen la emergencia de auténticos problemas matemáticos.

2.1.2 Conceptos básicos

a. Medio

Son todos los recursos que dispone el estudiante para provocar un aprendizaje nuevo, incluyendo el espacio, el profesor, los materiales y la presencia o ausencia de otros estudiantes.

b. Situación didáctica

Es un conjunto de interrelaciones en la que intervienen el profesor, el estudiante y un medio didáctico y es preparada o construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado.

Brousseau (1986), la define de esta manera:

> Un conjunto de relaciones establecidas entre un grupo de alumnos, el medio y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido. (Citado en Reaño, p.13)

c. Situación a-didáctica

Es el proceso donde solo interviene el estudiante y el medio. El profesor le plantea al estudiante un problema contextualizado y el alumno es capaz de poner en funcionamiento y utilizar por sí mismo sus conocimientos previos sin la intervención directa o indirecta del profesor, sobre el conocimiento que se pretende que el estudiante adquiera.

Representan los momentos más importantes del aprendizaje, pues el éxito del alumno en las mismas significa que él, por su propio mérito consiguió sintetizar un conocimiento. Al respecto Brousseau (2007) afirma:

> Concepciones actuales de la enseñanza van a exigir al maestro que provoque en el alumno, por medio de los problemas, las adaptaciones deseadas. Esos problemas deben lograr que el alumno pueda aceptarlos, y que por su propio movimiento, que actué, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que él produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer (p.31).

El alumno debe generar la acción, reflexión, aceptar y producir las respuestas para construir un conocimiento matemático. El profesor debe limitar sus intervenciones para garantizar el aprendizaje y evitar que el alumno renuncie a resolver el problema, asegurándose de que comprenda lo que se espera que logre e identifique algunas acciones.

d. Devolución

Es una etapa esencial en el juego didáctico. Es la acción mediante la cual el profesor transfiere al alumno un problema o la realización de alguna tarea con relación a un determinado conocimiento, aceptando él la responsabilidad de esta transferencia.

Brousseau (2007) señala que:

> La devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a didáctico) o de un problema y acepte el mismo las consecuencias de esta transferencia (p. 87).

e. Variable didáctica

Son aquellos elementos que son susceptibles de tomar diferentes valores y que, al tomarlos provocan cambios y hacen variar las estrategias de solución del conocimiento matemático, para llegar a construir el saber nuevo. Se llama variable didáctica si sus valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor.

Bartolomé y Fregona, (1993) afirma:

> (…) las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación (citado en Panizza, p.10)

En consecuencia, una variable didáctica permite generar un tipo de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de resolución.

f. Contrato didáctico

Es un sistema de obligaciones recíprocas entre profesor y alumno referentes al conocimiento matemático que se busca enseñar. Comprende un conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y comportamientos que el alumno espera del profesor, que regula el funcionamiento de la clase definiendo los roles y la repartición de tarea. Sadovsky (2005) señala que:

> Es la relación didáctica - que el docente va comunicando, a veces explícitamente, pero muchas veces de manera implícita, a través de palabras pero también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemáticos que se está tratando en la clase. Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático, se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan normas matemáticas, es el contrato didáctico. (p.11)

2.1.3 Tipos de interacciones con el medio

Las relaciones de un alumno con el medio pueden ser clasificadas, al menos, en tres grandes categorías (Brousseau (2007), p. 23):

- Intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje (acciones y decisiones).
- Intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (formulación).
- Intercambios de juicios (validación).

a. Situación de acción

Es una situación a-didáctica que consiste en que el alumno, sin la intervención del profesor, actúa sobre un problema, haciendo uso de sus conocimientos previos y analizando los resultados, aceptando o rechazando modelos o estrategias de solución, permitiéndole juzgar al alumno el resultado de su acción hasta lograr aprender un método de resolución. Una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar resultados de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación. (Chevallard (2005), p.236)

b. Situación de formulación

Es una situación a-didáctica de comunicación, donde el alumno intercambia informaciones con una o varias personas, comunica lo que ha encontrado a un interlocutor o grupo de alumnos que le devuelven la información, intercambian mensajes escritos u orales con simbologías matemáticas, para crear un modelo explícito. Panizza (2006), sostiene al respecto:

> Un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.

c. Situación de validación

En una situación a-didáctica de discusión y validación, donde el alumno debe demostrar que el modelo que ha elegido o creado es válido. "El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración" (Brousseau, 2007, p. 23).

Es así que, el alumno emisor se convierte en proponente y el alumno receptor se convierte en oponente, y ambos tienen la información necesaria para discutir y ayudar en la búsqueda de la verdad. El proponente debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo y proporcionar si es posible, una validación. El oponente puede pedir explicaciones o rechazar en las que no está de acuerdo. Además, para llevar a cabo una situación de validación no es necesario pasar por las situaciones de acción y formulación.

d. Institucionalización

Es una situación de formalización de un conocimiento matemático producido por los alumnos y el saber cultural. Durante esta situación se deben sacar conclusiones, recapitular, sistematizar, ordenar y vincular lo que produjeron los alumnos en el desarrollo de las secuencias didácticas. La institucionalización es de alguna manera complementaria a la devolución. Brousseau (1986) sostiene al respecto, los principales roles del maestro:

> En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a-didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno, con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un estatus (citado en Panizza, p.70).

2.2 La ingeniería didáctica

La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de la matemática Francesa, a principios de la década de los 80. Se usó este término por analogía con la forma de trabajo didáctico de un ingeniero. Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), comentan al respecto:

> Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (p.33).

La ingeniería didáctica desarrollada en el área de Educación Matemática es utilizada como metodología de investigación específica y como método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Nosotros utilizaremos la ingeniería didáctica como metodología de investigación, por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en el aula, es decir, analiza los procesos de construcción, realización y análisis; y para validar las secuencias de enseñanzas, haremos una comparación entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió durante el desarrollo de la clase.

2.2.1 Fases de la ingeniería didáctica

El proceso de investigación Según Artigue et al. (1995) consta de cuatro fases:

- ✓ Análisis preliminar.
- ✓ Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
- ✓ Experimentación.
- ✓ Análisis a posteriori y validación.

FASE 1: Análisis Preliminar

Tiene como objetivo identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los análisis preliminares están constituidos por un conjunto de análisis en relación al objeto matemático: la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va situar la realización didáctica efectiva teniendo en cuenta los objetivos de la investigación. Para Artigue et al. (1995) el análisis de esta fase es necesario hacerlo bajo tres dimensiones:

- <u>Epistemológica</u>: Aquí se analizará las características del saber en juego, una reseña histórica y los aspectos teóricos del objeto matemático en estudio.
- <u>Cognitiva</u>: Aquí se analizan las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. Se analizará la forma como los alumnos interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados anteriormente.
- <u>Didáctica</u>: Aquí se analizará las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Se analizará la forma cómo se desarrolla el proceso de enseñanza

del objeto matemático, así como los recursos didácticos (libros, guías, etc.) que utilizan los profesores donde se está realizando el estudio.

Análisis del campo de las restricciones

Aquí se va a situar la realización didáctica, describiendo al grupo de estudiantes con los que se experimentará la situación diseñada. Implica tener información correspondiente en cuanto a la edad de los alumnos, sexo, conocimiento anteriores sobre el tema y los recursos que presenta la institución donde se está realizando la investigación. Esta información no puede ser modificada por el maestro y por ende no se consideran variables didácticas de la situación, sin embargo, juegan un papel muy importante para el diseño de la situación didáctica.

FASE 2: La concepción y el análisis a priori

El investigador toma la decisión de trabajar con un determinado número de variables del sistema, no fijadas por las restricciones llamados variables de comando. Artigue et al. (1995) considera dos tipos de variables de comando:

a. Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.

b. Las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir la organización de una secuencia o fase (p.42).

Esta fase, tiene dos objetivos: El primero, concerniente a la concepción, que es diseñar situaciones o actividades que nos ayude analizar los procesos de construcción y comunicación del saber. Además, para la construcción de las actividades debe tener en cuenta lo siguiente:

- En un primer momento, los alumnos deben tener estrategias de solución que les permitan abordar el problema con sus conocimientos disponibles.

- Las actividades deben ser diseñadas teniendo en cuenta los resultados de estudios previos.

El segundo objetivo, concerniente al análisis a priori, que es señalar cómo la manipulación de las variables didácticas permitirá controlar los comportamientos de los alumnos antes de la experimentación. Se debe considerar dos aspectos: el análisis matemático y el análisis didáctico del objeto matemático, y para ello debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Los resultados que se esperan de los alumnos.
- Planificar las intervenciones del profesor.
- Identificar las variables del estudio.
- Prever y analizar las dificultades que los alumnos podrían enfrentar en la resolución de las actividades.

FASE 3: Experimentación

Esta fase es la puesta en marcha de las actividades diseñadas. Inicia en el momento en que el investigador, profesor y observador entra en contacto con la población de estudiantes.

De Faria (2006), señala que consta de las siguientes etapas:

- ✓ La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- ✓ El establecimiento del contrato didáctico.
- ✓ La aplicación de los instrumentos de investigación.
- ✓ El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Si la experimentación se lleva a cabo en más de una sesión, se recomienda hacer un análisis a posteriori parcial, para realizar las correcciones necesarias y continuar con la siguiente sesión de clase.

FASE 4: Análisis a posteriori y validación

El análisis a posteriori está constituido por el conjunto de datos recogidos durante la realización didáctica (experimentación), como son las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella y la frecuencia de ciertas actitudes. Estos datos se complementan con la utilización de metodologías externas, como cuestionarios y entrevistas aplicadas en distintos momentos de la enseñanza.

En cuanto a la validación, Artigue et al. (1995) sostienen: *"la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación"* (p. 48). Esta comparación es entre los comportamientos esperados, con los que sucedieron realmente durante la clase.

2.3 La resolución de problemas en la TSD

Una síntesis importante sobre la resolución de problemas en la TSD está dada por Artigue y Houdement (2007), las que tomaremos como referencia fundamental.

Aportes de matemáticos como Polya e investigadores educativos como Schoenfeld, sobre la resolución de problemas, son bien reconocidos y valorados por muchos investigadores y educadores matemáticos. Uno de los pilares fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y en especial en países como Francia, es la resolución de problemas, que toma un papel central tanto en la investigación didáctica como en sus perspectivas curriculares.

Los problemas matemáticos juegan un papel fundamental en la TSD. Artigue y Houdement nos dicen que un supuesto epistemológico que subyace en la teoría, es que el conocimiento matemático emerge de la solución de problemas matemáticos. Pero, ¿qué tipo de problemas matemáticos debemos plantear a los alumnos? Brousseau (2006) deja en claro que la resolución de problemas en la TSD está necesariamente integrada en el proceso de aprendizaje de conocimientos matemáticos, y que la matemática a ser aprendida es la que tiene que proporcionar soluciones óptimas a estos problemas.

Según Brousseau (2006, p.2), "la noción de situación incluye, extiende, agranda y diversifica la noción de problema". Y Artigue y Houdement nos dicen que "Cualquier problema establecido en un aula es explícita o implícitamente parte de una situación, y la situación es considerada la unidad mínima de análisis para comprender lo que podría estar o realmente está en juego desde el punto de vista cognitivo en el proceso de resolución".

Al considerar la resolución de problemas, debe tenerse en cuenta lo que nos dicen Artigue y Houdement – comentando la teoría de Brousseau – que el aprendizaje significativo de las matemáticas no se puede lograr si la solución de los problemas son muy dependientes del profesor. Esto supone un desempeño especialmente cuidadoso del profesor, al cual se refiere Brousseau al tratar la devolución, la interacción con el medio y la dualidad entre las situaciones didácticas y a- didácticas. En las situaciones a-didácticas es muy importante el trabajo propio de los estudiantes, haciendo diversos intentos, conjeturando, rechazando o verificando conjeturas y así adaptar y perfeccionar progresivamente su modelo de solución sin depender de las orientaciones del profesor, y sin tratar de adivinar las expectativas del profesor.

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS PRELIMINAR

La fase preliminar de esta investigación se hará de forma sistémica, se hará un análisis del objeto matemático (Sistema de ecuaciones lineales con dos variables), teniendo en cuenta las siguientes dimensiones:

- Epistemológica: En esta dimensión, se analizará una reseña histórica y los fundamentos teóricos del objeto matemático, la finalidad es dar una explicación sobre las características del contenido matemático.
- Cognitiva: En esta dimensión, se analizarán los conocimientos previos de los alumnos del colegio "Weberbauer", observaremos la forma de interpretar el objeto matemático en estudio, las dificultades y errores comunes en el proceso de resolución de ejercicios y problemas, donde los alumnos tendrán como única base sus conocimientos previos.
- Didáctica: En esta última dimensión, se analizará las características de cómo se desarrolla el proceso de enseñanza – aprendizaje del objeto matemático en estudio, así como los recursos didácticos y las estrategias de enseñanza que utilizan los profesores de dicha Institución Educativa, finalizando con el análisis de algunos libros de texto utilizados en dicha enseñanza.

3.1 Análisis epistemológico

Este análisis consiste en presentar una referencia histórica relacionada al objeto matemático en estudio y en sus fundamentos teóricos.

3.1.1 Referencia histórica

La referencia histórica estará basada en el enfoque expuesto en el libro "Historia de la matemática" páginas 55-56, escrito por Carl Boyer (1987). El autor expone que:

Los babilonios casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a. de C. a 300 d. de C.). Quizás por considerarlas demasiado elementales, debido a la flexibilidad de las operaciones algebraicas que habían desarrollado. No utilizaban letras para representar las cantidades incógnitas porque no estaba inventando aún el alfabeto, pero sí utilizaron palabras como: longitud, anchura, área y volumen.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\frac{1}{4}\text{anchura} + \text{longitud} = 7 \text{ manos}$$
$$\text{longitud} + \text{anchura} = 10 \text{ manos}$$

Para resolverlo asignaban el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: $\text{anchura} = 20$ y $\text{longitud} = 30$.

Para comprobarlo, utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, si consideramos variables ($y = \text{anchura}$, $x = \text{longitud}$) y $\text{manos} = 5$, entonces:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y + x = 7(5) \\ x + y = 10(5) \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} y + 4x = 140 \\ y + x = 50 \end{cases}$$

Luego, basta restar la segunda ecuación de la primera, obteniendo $3x = 90$, es decir $x = 30$ y $y = 20$.

Como podemos apreciar en el ejemplo, los babilónicos no tenían dificultad para resolver sistemas de ecuaciones lineales, y las ecuaciones las consideraba demasiadas elementales como para prestarle mucha atención. Por otro lado, también podemos ver que lo babilónicos conocían el método de eliminación por medio de una combinación lineal; expresando todas las dimensiones en términos de manos, y llamando x e y a la longitud y anchura respectivamente.

El álgebra egipcia se centró exclusivamente en las ecuaciones lineales. Los griegos también usaron los sistemas de ecuaciones, pero uti1izando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.), encontró una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Diophante, resolvió problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero los transformaba en una ecuación lineal, él solo aceptaba las soluciones positivas pues lo que buscaba era resolver problemas y no simples ecuaciones. Utilizó un álgebra sincopada (intermedio entre el álgebra retórica y el álgebra simbólica), sin embargo, una de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos distintos muy ingeniosos.

El libro "El arte matemático", de autor chino desconocido (siglo III a. de C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por métodos matriciales.

3.1.2 Los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Sistema de ecuaciones lineales con dos variables

El desarrollo y el contenido matemático de nuestro objeto en estudio estará basado en el enfoque expuesto en el libro "La Matemática de la Enseñanza Media " – Capítulo 3 – páginas 97-100, escrito por Elon Lima, Paulo Pinto, Eduardo Wagner y Augusto Morgado (2000), ellos describen:

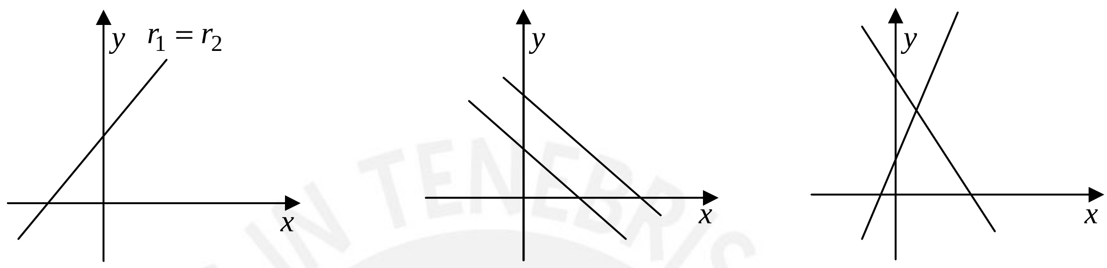
Al escribir una ecuación $ax+by=c$, estaremos admitiendo tácitamente que $a^2+b^2 \neq 0$, es decir que los coeficientes a y b no se anulan simultáneamente.

Una *solución* del sistema lineal

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

es un par $(x;y) \in \mathbf{R}^2$ cuyas coordenadas x y y satisfacen ambas ecuaciones.

El sistema se dice indeterminado, imposible o determinado cuando admite más de una solución, ninguna solución o una única solución, respectivamente. Cada ecuación tiene como soluciones las coordenadas $(x; y)$ de los puntos de una recta, de modo que el sistema es indeterminado, imposible o determinado, conforme las rectas r_1 y r_2, representadas por las dos ecuaciones, coincidan, sean paralelas o sean concurrentes, respectivamente.



a. Infinitas soluciones   b. Ninguna solución   c. Única solución

Figura 1: Posiciones de las rectas

Para decidir en cuál de esas 3 alternativas se encuentra el sistema, se debe examinar el cuadro de los coeficientes

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Esto es un ejemplo del objeto matemático llamado matriz. Más específicamente, una matriz con dos filas y tres columnas, es decir una matriz de orden 2×3.

Sus filas son los vectores $F_1 = (a_1; b_1; c_1)$ y $F_2 = (a_2; b_2; c_2)$ pertenecientes a $\mathbf{R}^3$, y sus columnas son les vectores $C_1 = (a_1; a_2)$, $C_2 = (b_1; b_2)$ y $C_3 = (c_1; c_2)$ de $\mathbf{R}^2$. A la matriz m se llama matriz aumentada del sistema.

Dos rectas que poseen más de un punto en común deben coincidir. Luego, el sistema es indeterminado si y solo si sus ecuaciones definen la misma recta, esto ocurre si y solo si existe un número real $k \neq 0$ tal que

$$a_2 = ka_1,\ b_2 = kb_1 \text{ y } c_2 = kc_1.$$

Es decir, si los vectores fila F_1 y F_2 de la matriz m son colineales (múltiplos uno del otro), en este caso $F_2 = kF_1$.

Una forma práctica de escribir las igualdades anteriores $a_2 = ka_1$ y $b_2 = kb_1$, sin referirse al número k, es decir que $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Análogamente, los otros dos pares de igualdades equivalen a $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ y $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$. En conclusión, el sistema es indeterminado sin referirse al número k, si se cumple

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0\,.$$

El sistema es imposible cuando las rectas $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$ son paralelas. Para que esto suceda, es necesario y suficiente que exista $k \neq 0$ con $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ y $c_2 \neq kc_1$. Equivalentemente, el sistema es imposible si y solo si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ y por lo menos uno de los números $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ es diferente de cero.

El número $a_1b_2 - a_2b_1$ se llama determinante de la matriz del sistema

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, el sistema es determinado cuando no es indeterminado o imposible. Esto ocurre cuando las rectas $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$ son concurrentes, o sea cuando el determinante es $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Dicho de otro modo, cuando los vectores fila $l_1 = (a_1; b_1)$ y $l_2 = (a_2; b_2)$ de la matriz no son múltiplos uno del otro

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Se dice que un vector w es combinación lineal de dos vectores u y v cuando existen números reales x y y tales que $w = xu + yv$.

El sistema fue analizado anteriormente sobre el punto de vista de sus filas, también puede ser visto en términos de sus columnas $u = (a_1; a_2)$, $v = (b_1; b_2)$ y $w = (c_1; c_2)$ de su matriz aumentada. Desde este punto de vista, afirmar que $(x; y)$ es una solución del sistema, equivale a decir que $w = xu + yv$, como veremos a continuación:

Dado un sistema lineal

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(*)$$

y considerando los vectores: $u = (a_1; a_2)$, $v = (b_1; b_2)$, $w = (c_1; c_2)$, se tiene:

Si $(x,\ y)$ es solución de $(*)$, entonces

$$\begin{aligned} xu + yv &= x(a_1; a_2) + y(b_1; b_2) \\ &= (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \\ &= (c_1; c_2) \\ &= w \end{aligned}$$

lo que indica que w es combinación lineal de u y v.

Recíprocamente, si w es combinación lineal de u y v, entonces existen $x,\ y \in R$, tales que $w = xu + yv$, entonces $w = x(a_1; a_2) + y(b_1; b_2) \Rightarrow (c_1,\ c_2) = (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

lo que indica que $(x,\ y)$ es solución de (*). Por ejemplo: En el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

tenemos los vectores: $u = (3; 2)$, $v = (-5; 3)$, $w = (2; 14)$, $(x; y) \in R^2$ es solución del sistema si y solo si $w = xu + yv$ (w es combinación lineal de u y v). Además, se puede ver que: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, es solución del sistema y que $w = (2; 14) = 4(3; 2) + 2(-5; 3)$ es combinación lineal de u y w. Por lo tanto, el sistema posee solución si y sólo si w es combinación lineal de dos vectores u y v.

De lo visto anteriormente resulta que si los vectores $u = (a_1; a_2)$ y $v = (b_1; b_2)$ son tales que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entonces cualquier vector $w = (c_1; c_2)$ en $\mathbf{R}^2$ se escribe (de modo único) como combinación lineal de ellos. En este caso (esto es, cuando u y v no son múltiplos uno del otro) se dice que los vectores u y v son linealmente independientes.

Finalmente, formalizamos un concepto que se emplea en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y que también ha sido empleado en esta investigación.

Dos sistemas se dicen que son equivalentes cuando admiten las mismas soluciones. Cuando se sustituye una de las ecuaciones por la suma de esta ecuación con un múltiplo de la otra, se obtiene un sistema equivalente. En otras palabras, para todo $k \in R$, los dos sistemas siguientes poseen las mismas soluciones:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_2)y = c_2 + kc_1 \end{cases}$$

Para resolver el sistema por el método de eliminación se escoge el número k de modo que uno de los coeficientes $a_2 + ka_1$ o $b_2 + kb_1$ sea cero. Esto da inmediatamente el valor de una de las incógnitas, el cual es sustituido en la primera ecuación para encontrar el otro valor. Por ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$ es equivalente al sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 19x = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

3.2 Análisis cognitivo

Con la finalidad de poder analizar los procesos cognitivos, hemos diseñado y aplicado una evaluación de conocimientos previos a los alumnos del cuarto año de secundaria – sección B del colegio “Weberbauer”, donde se ha considerado conocimientos y habilidades que el alumno debe manejar para el aprendizaje de nuestro objeto matemático (sistema de ecuaciones lineales con dos variables).

Para trabajar la actividad propuesta y lograr los objetivos trazados, es necesario que los alumnos muestren tener los siguientes conocimientos previos:

i. Expresar en forma algebraica un enunciado verbal y viceversa.
ii. Resolver ecuaciones de primer grado.

iii. Ubicar puntos en el plano cartesiano.
iv. Resolver problemas cuyo modelo matemático involucre ecuaciones lineales.
v. Crear enunciados (problemas) a partir de ecuaciones lineales dadas.
vi. Graficar rectas.
vii. Reconocer la ecuación de una recta a partir de su gráfica.
viii. Determinar el punto de intersección de dos rectas no paralelas.
ix. Determinar la ecuación de una recta a partir de dos puntos dados.

3.2.1 Análisis de conocimientos previos

A fin de lograr mayor objetividad en el análisis de los conocimientos previos que poseen dichos alumnos, presentamos en detalle los resultados de la evaluación de conocimientos previos que se les aplicó. La evaluación denominada "*Exploración Académica*" (Anexo 1), se aplicó el 04 de octubre del 2012, se evaluaron nueve (9) preguntas de respuestas abiertas con una duración de 50 minutos, y se aplicó a un total de 15 alumnos.

A continuación presentamos las respuestas por alumno de cada una de las preguntas realizadas (Tabla 1) y el resultado general (Tabla 2), indicando la cantidad de alumnos que llegaron a:

A. Respuestas correctas.
B. Respuestas en proceso.
C. Respuestas incorrectas.
D. Respuestas en blanco.

Tabla 1: Respuestas por alumno en cada pregunta

Alumno		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
N° Pregunta	**Ítem**															
	a)	A	A	A	A	A	C	A	A	A	A	A	A	A	A	A
	b)	A	A	B	A	C	B	B	B	A	B	C	A	A	B	A

1	c)	A	B	A	A	C	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
	d)	A	B	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	B	B	A
	e)	A	A	A	A	B	A	C	B	A	A	A	A	A	B	A
	f)	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A
	g)	A	B	A	B	B	D	B	A	A	B	A	A	A	B	B
	h)	A	B	A	D	B	D	B	B	A	B	A	A	A	B	B
	i)	A	A	C	A	D	C	C	A	C	A	A	C	A	A	A
	j)	A	A	D	B	B	A	B	C	D	B	A	A	B	A	A
2	a)	A	C	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
	b)	A	A	A	A	A	A	A	A	C	A	A	B	A	B	B
3	a)	A	A	A	A	A	A	C	A	C	A	A	A	A	A	A
	b)	A	A	A	A	A	A	A	A	A	C	A	A	A	A	A
	c)	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
	d)	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
4		D	C	D	A	C	C	B	C	D	B	C	D	A	A	A
5	a)	A	A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	A	A	B	C
	b)	A	A	D	A	B	B	A	A	A	B	A	B	A	B	A
	c)	B	D	A	C	C	D	C	A	A	A	C	C	C	C	A
6	a)	A	B	A	C	C	C	C	A	C	C	C	C	C	D	A
	b)	A	A	A	C	C	C	C	A	A	C	D	C	C	D	D
7	a)	A	A	A	C	D	C	C	A	A	C	C	A	A	C	A
	b)	A	A	A	C	D	C	C	A	A	C	C	A	A	C	A
8		A	C	D	D	B	D	B	A	A	C	D	A	D	D	D
9		B	C	D	D	C	B	C	C	D	B	B	B	D	D	D

Tabla 2: Resultado general por pregunta

Preguntas	Ítem	A	%	B	%	C	%	D	%
1	a)	14	93%	0		1	7%	0	
	b)	7	47%	6	40%	2	13%	0	
	c)	13	86%	1	7%	1	7%	0	
	d)	5	33%	10	67%	0		0	
	e)	11	73%	3	20%	1	7%	0	
	f)	12	80%	3	20%	0		0	
	g)	7	47%	7	47%	0		1	7%
	h)	6	40%	7	47%	0		2	13%
	i)	9	60%	0		5	33%	1	7%
	j)	7	47%	5	33%	1	7%	2	13%
2	a)	14	93%			1	7%	0	
	b)	11	73%	3	20%	1	7%	0	
3	a)	13	86%	0		2	13%	0	
	b)	14	93%	0		1	7%	0	
	c)	15	100%	0		0		0	
	d)	15	100%	0		0		0	
4		4	27%	2	13%	5	33%	4	27%
5	a)	12	80%	3	20%	0		0	
	b)	9	60%	5	33%			1	7%
	c)	5	33%	1	7%	7	47%	2	13%
6	a)	4	27%	1	7%	9	60%	1	7%
	b)	5	33%	0		7	47%	3	20%
7	a)	8	53%	0		6	40%	1	7%
	b)	8	53%	0		6	40%	1	7%
8		4	27%	2	13%	2	13%	7	47%
9		0		5	33%	4	27%	6	40%

A continuación presentamos cada una de las 9 preguntas del examen de conocimientos previos y algunos comentarios del resultado general por pregunta (Tabla 2). Finalmente, mostramos un ejemplo que ilustra cómo fue abordada la pregunta por uno de los alumnos.

Pregunta 1: Completa la siguiente tabla:

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
a. El triple de un número, aumentado en 5 es 110.	
b. La suma de dos números enteros y consecutivos es igual a 17.	
c. El doble de la suma de un número y su mitad es igual a 54.	
d.	$x-4=15$
e. El doble de la edad de Ana dentro de 4 años será 14.	
f. El triple de un número, aumentado en su mitad es igual a 21.	
g.	$\frac{x+3}{2}=6$
h.	$\frac{x}{2}+3=6$
i. El perímetro de un rectángulo mide 24 cm y su base mide el triple de su altura.	
j. Juan tiene 3 nuevos soles más que María	

Conocimiento previo evaluado: Expresar en forma algebraica una expresión verbal y viceversa.

Análisis: La mayoría de los ítems fueron respondidos correctamente, ello muestra que los alumnos tienen habilidades para expresar en forma algebraica un enunciado verbal. Sin embargo, se pudo observar que, algunos alumnos tuvieron mayores dificultades en expresar en lenguaje algebraico un enunciado verbal, por ejemplo en el ítem (d), solo el 33% de los alumnos respondieron correctamente y el ítem (h), un 40% logró expresar correctamente. Se observó que expresan tal y como se va describiendo y no tienen en cuenta la coma o no le están dando un sentido lógico a las expresiones dadas. Un 47% de los ítems fueron abordados por los alumnos de manera favorable sin llegar a ser terminados en su totalidad, demostrando que entendieron en parte las expresiones dadas pero les faltó seguridad para terminar, quizás por la falta de práctica en este tipo de problemas. Otra de las dificultades que se pudo observar, la podemos visualizar en el ítem i, que pide expresar en lenguaje algebraico una expresión verbal con contexto geométrico (perímetro de un rectángulo). A pesar de que un 60% lo expresó correctamente, el 33% tuvo respuestas incorrectas y un 7% lo dejó en blanco. Más adelante, veremos que este tipo de dificultad se repite.

Solución realizada por uno de los estudiantes

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
a. El triple de un número, aumentado en 5 es 110.	$3x+5=110$
b. La suma de dos números enteros y consecutivos es igual a 17.	$x+y=17$
c. El doble de la suma de un número y su mitad es igual a 54.	$2(x+y)+\frac{xy}{2}=54$
d. un número restaido en 4 es 15.	$x-4=15$
e. El doble de la edad de Ana dentro de 4 años será 14.	$2x+4=14$
f. El triple de un número, aumentado en su mitad es igual a 21.	$3x+\frac{3x}{2}=21$
g. La mitad de dos números aumentado en 3 es 6.	$\frac{x+3}{2}=6$
h. La mitad de un número aumentado en 3 es 21.	$\frac{x}{2}+3=6$
i. El perímetro de un rectángulo mide 24 cm y su base mide el triple de su altura.	
j. Juan tiene 3 nuevos soles más que María	$x=X+3$

Figura 2: Algunas respuestas a la pregunta 1

Pregunta 2: Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $5x+24=2x+15$

b. $2x+2(3x+4)=30$

Conocimiento previo evaluado: Resolver ecuaciones de primer grado.

Análisis: En forma general, podemos decir que los alumnos no tuvieron dificultades para resolver las ecuaciones de primer grado demostrando que el grupo presenta habilidades para resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo en el ítem (a), el 93% respondió correctamente y el 7% no resolvió correctamente, observándose que tienen dificultades para realizar operaciones con números enteros. En el ítem (b), el 73% resolvió correctamente, pero el 7% de los alumnos no logró resolver correctamente, observándose que tuvieron errores de cálculo como se aprecia en la figura 3. Finalmente, ningún alumno dejo algún ítem de esta pregunta en blanco (0%).

Solución realizada por uno de los estudiantes

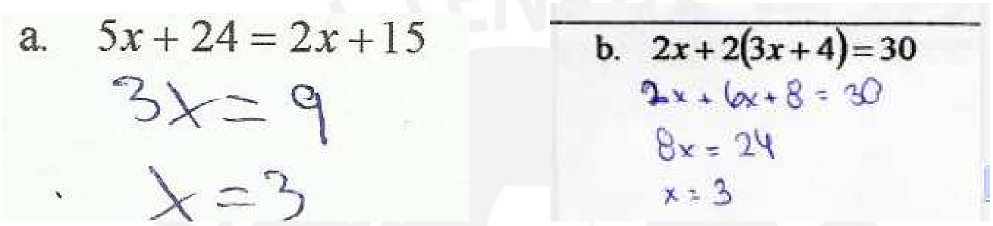


Figura 3: Algunas respuestas a la pregunta 2

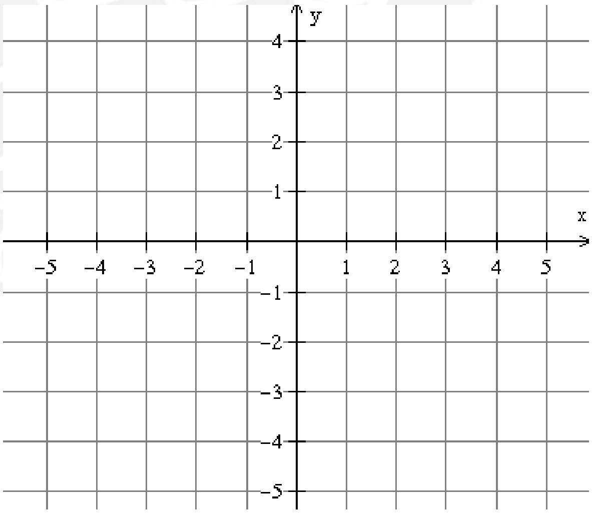
Pregunta 3: Ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

a. $A(-2;4)$

b. $B(4;2)$

c. $C(0;-5)$

d. $D(-2;2)$



Conocimiento previo evaluado: Ubicar puntos en el plano cartesiano.

Análisis: Esta pregunta consta de cuatro ítems, que multiplicados por los 15 alumnos hacen un total de 60 respuestas. De este total, el 95% de las respuestas fueron correctas; esto quiere decir que la mayoría de los alumnos evaluados manejan habilidades para ubicar puntos en el plano cartesiano. El 5% de los ítems fueron respondidos incorrectamente, esto se debió a que no se fijaron bien en los signos de los números en los pares ordenados como se aprecia en la figura 4, dejando notar que probablemente no conocen los signos en cada cuadrante.

Solución realizada por uno de los estudiantes

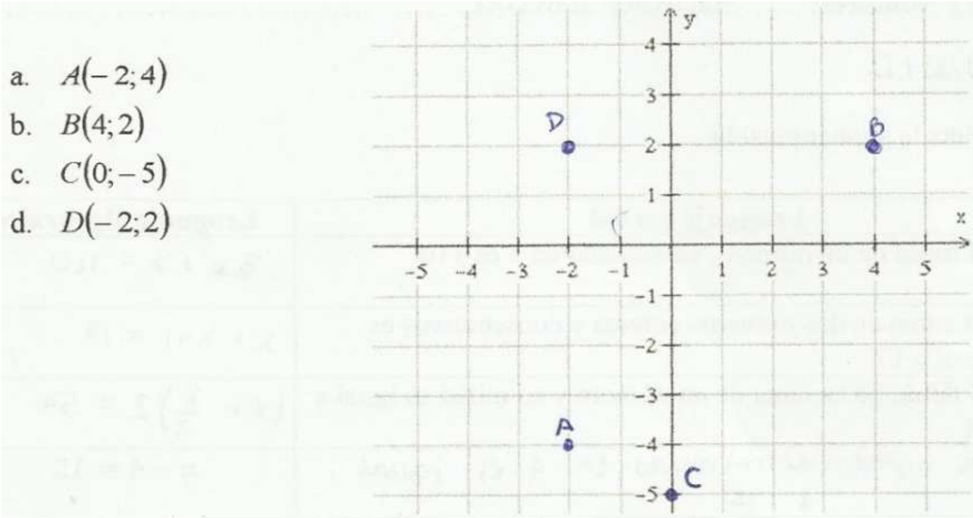


Figura 4: Algunas respuestas a la pregunta 3

Pregunta 4: Un comerciante recibió 130 prendas, entre polos y pantalonetas. El precio de costo de cada polo es 10 nuevos soles y de cada pantaloneta es 8 nuevos soles. Si pagó por todo el pedido 1190 nuevos soles, ¿cuántos polos y cuántas pantalonetas recibió?

Conocimiento previo evaluado: Resuelve problemas contextualizados que involucran a las ecuaciones lineales.

Análisis: Los resultados muestran que solo un 27% de los alumnos evaluados respondieron correctamente, demostrando que no están familiarizados con la resolución de problemas. Estos resultados reflejan que los alumnos tienen serias dificultades en este tipo de habilidades. Un 33% de los estudiantes mostró desconocimiento de cómo resolver estos problemas, pues trataron de resolverlo por tanteo, no definieron variables (figura 5), etc. Otro indicador del desconocimiento, es que el 27% de los estudiantes no intentaron resolver el problema.

Soluciones realizadas por dos de los estudiantes

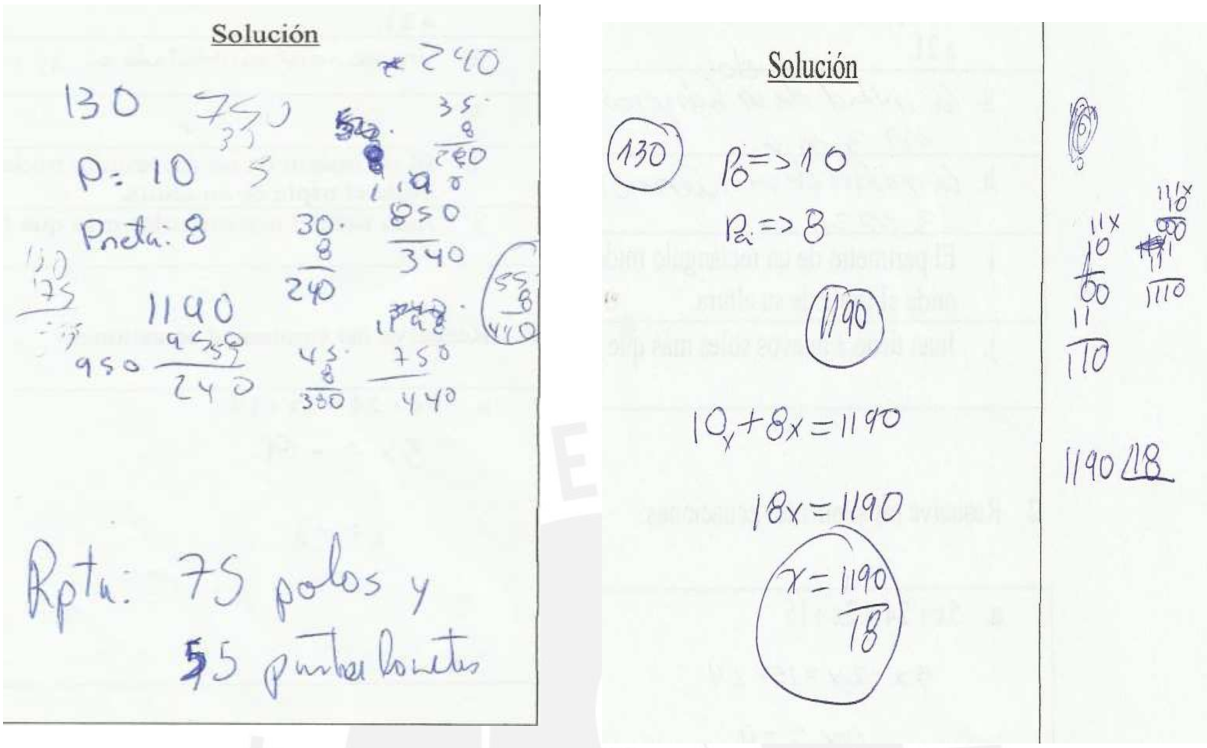


Figura 5: Algunas respuestas a la pregunta 4

Pregunta 5: Crea enunciados de problemas

a) María resolvió correctamente un problema relacionado con la edad de un niño y planteó la siguiente ecuación

$$x+3=10$$

Escribe un posible texto del problema.

b) Carlitos resolvió correctamente un problema relacionado con la compra de un lapicero y planteó la siguiente ecuación

$$x+3=10$$

Escribe un posible texto del problema.

c) Jaimito resolvió correctamente un problema sobre rectángulos y comenzó planteando la siguiente ecuación

$$2[x+(x+3)]=48$$

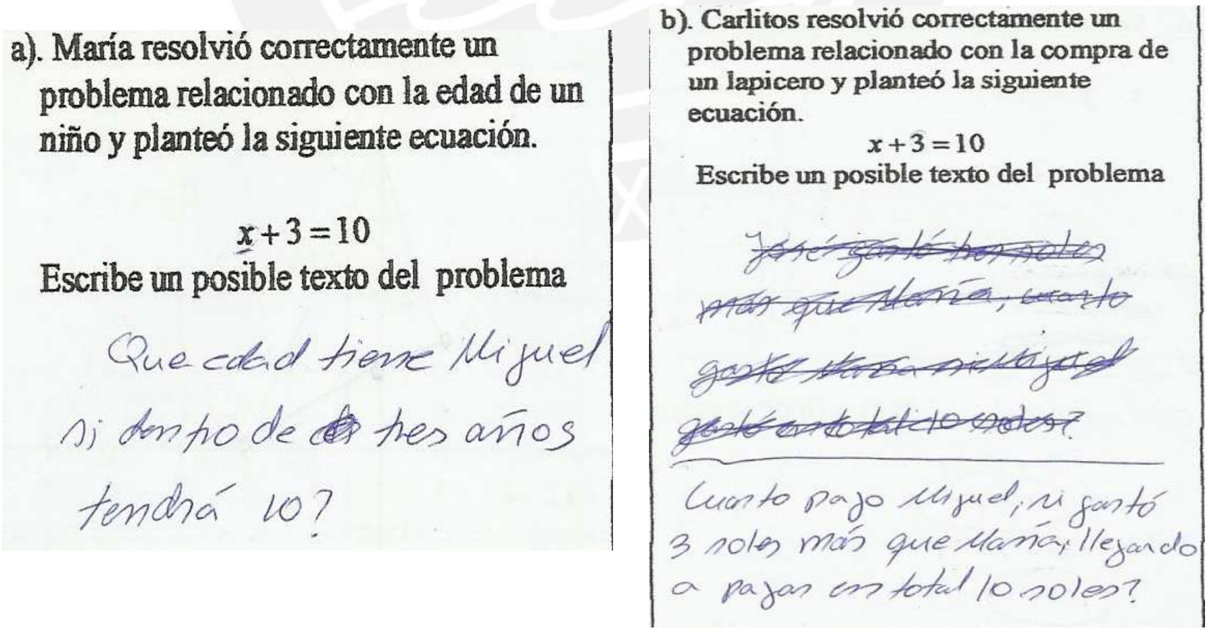
Escribe un posible texto del problema que resolvió Jaimito.

Conocimiento previo evaluado: Crear enunciados (problemas) a partir de ecuaciones lineales dadas.

Análisis:

En cuanto al paso del registro algebraico al verbal, con la exigencia de escribir un texto que sea un problema correspondiente a una ecuación dada, se advierten mayores dificultades en la expresión algebraica más compleja (ítem (c)) (figura 7), a pesar de darse explícitamente el contexto geométrico. No siendo habitual este tipo de exigencia, es importante reconocer el potencial existente en los alumnos, pues en el ítem más difícil (c) el 33% de los alumnos lo resolvió correctamente. Curiosamente, en el ítem (a) hay un 80% de respuestas correctas, 20% mayor a la situación similar presentada en el ítem (b), a pesar de que en el ítem (b) se sugiere un contexto más habitual o cotidiano (de compra) en comparación con el ítem (a) que es más artificial (comparación de edades) (figura 6). La explicación podría estar en que los problemas sobre edades son de uso más común en los centros educativos.

Solución realizada por uno de los estudiantes


a). María resolvió correctamente un problema relacionado con la edad de un niño y planteó la siguiente ecuación.

$x+3=10$

Escribe un posible texto del problema

Que edad tiene Miguel si dentro de ~~de~~ tres años tendrá 10?

b). Carlitos resolvió correctamente un problema relacionado con la compra de un lapicero y planteó la siguiente ecuación.

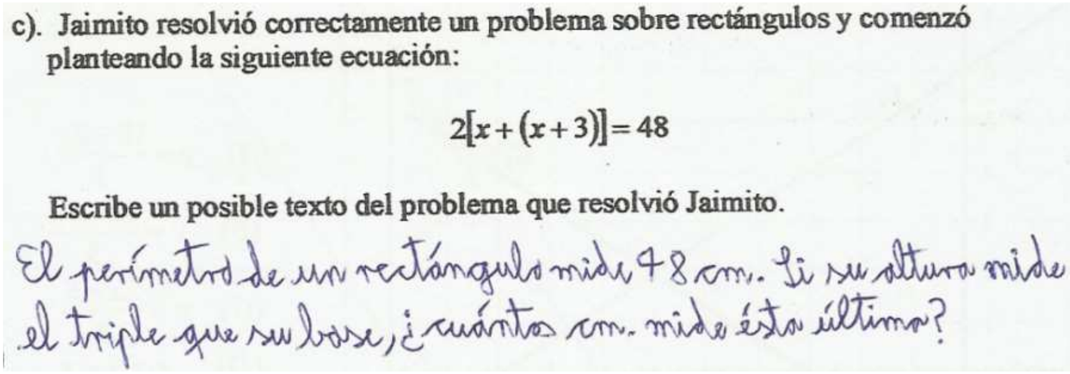
$x+3=10$

Escribe un posible texto del problema

~~José gastó tres soles más que María, cuanto gastó María si llegó al gasto en total 10 soles?~~

Cuanto pago Miguel, si gastó 3 soles más que María, llegando a pagar en total 10 soles?

Figura 6: Algunas respuestas a la pregunta 5


c). Jaimito resolvió correctamente un problema sobre rectángulos y comenzó planteando la siguiente ecuación:

$$2[x+(x+3)]=48$$

Escribe un posible texto del problema que resolvió Jaimito.

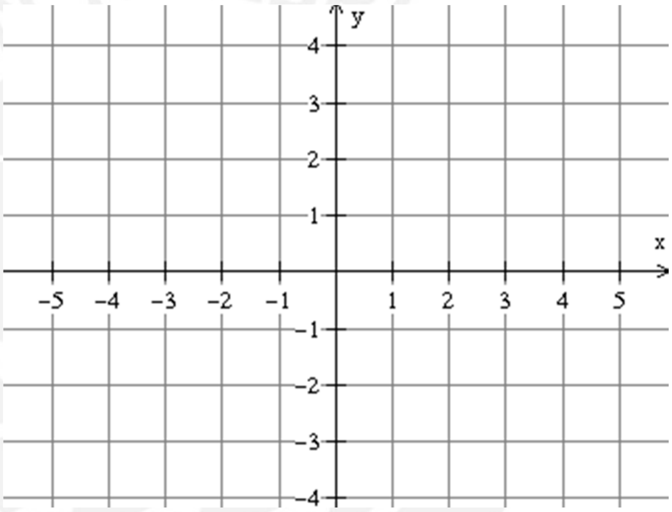
El perímetro de un rectángulo mide 48 cm. Si su altura mide el triple que su base, ¿cuántos cm. mide ésta último?

Figura 7: Algunas respuestas a la pregunta 5

Pregunta 6: Grafica las siguientes ecuaciones:

a. $y = 2x + 1$

b. $y + 2x = 4$



Conocimiento previo evaluado: Graficar rectas.

Análisis: Los resultados muestran que los alumnos presentan serias dificultades para graficar rectas. En el ítem (a) solo un 27% logró graficar correctamente las ecuaciones dadas y el 60% de los alumnos no sabe graficar rectas. En el ítem (b) solo un 33% de alumnos realizaron correctamente la gráfica de las ecuaciones y el 47% no hizo el trazado de la recta correctamente. El 20% de los alumnos no tuvo idea de cómo graficar (lo dejaron en blanco). Estos porcentajes son realmente preocupantes, porque a pesar de que demostraron saber ubicar puntos en el plano cartesiano, indican no saber qué relación hay entre las variables x e y presentes en las ecuaciones dadas. Es notorio que algunos alumnos no tienen idea del significado (geométrico) de una ecuación de la forma $y = mx + b$, otros muestran tener idea sobre la tabulación pero no concretan con una buena gráfica. Finalmente, los ítems que fueron dejados en blanco, probablemente se deba a que no logran relacionar la parte algebraica (ecuación) con la parte geométrica (gráfica); es decir, por la poca práctica en el registro gráfico, esto lo podemos apreciar en la figura 8.

Solución realizada por uno de los estudiantes

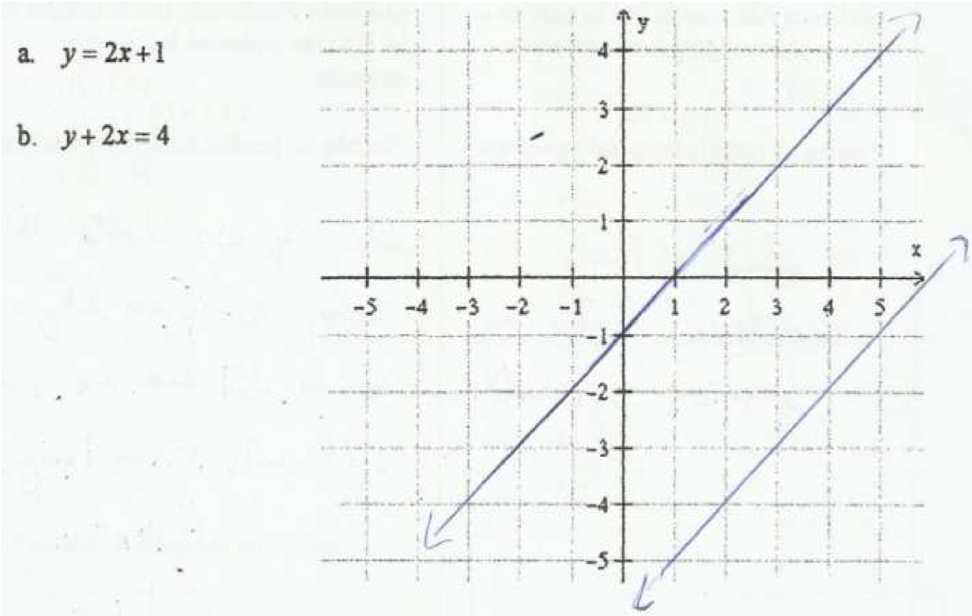
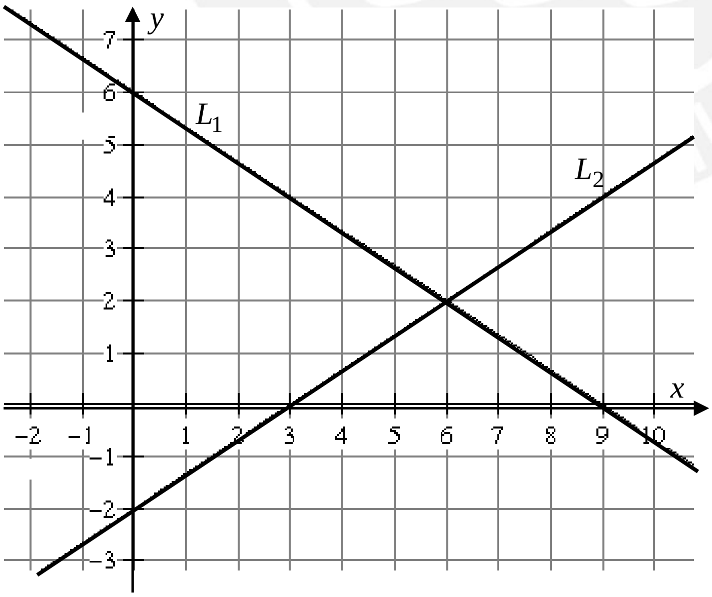


Figura 8: Algunas respuestas a la pregunta 6

Pregunta 7: A continuación se muestra los gráficos de las rectas L_1 y L_2.



Examina cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a tales rectas:

$(A)\quad y = \dfrac{18-2x}{3}$

$(B)\quad y = \dfrac{18+5x}{3}$

$(C)\quad y = \dfrac{2x-6}{3}$

$(D)\quad y = 9-x$

Respuesta:

a. Ecuación de L_1: ______________________________

b. Ecuación de L_2: ______________________________

Conocimiento previo evaluado: Reconocer la ecuación de una recta a partir de su gráfica.

Análisis: Los resultados muestran que en ambos ítems el 53% fueron respondidos correctamente, es decir lograron identificar la ecuación a partir de su gráfica. Además, se pudo observar que los alumnos que graficaron las rectas correctamente de la pregunta anterior (6), fueron los que respondieron correctamente esta pregunta y que resolvieron la situación por tabulación. Un 40% de los ítems tuvieron respuestas incorrectas, quizás por la falta de coordinación entre el registro gráfico y el registro algebraico o por la poca familiaridad con este tipo de registro. Finalmente, un 7% de los ítems fueron dejados en blanco, dando a entender que no tiene idea cómo graficar rectas ni el método de tabulación.

Pregunta 8: Dada las siguientes rectas, halla el punto de intersección:

$$2x + y = 4$$
$$x - y = 2$$

Conocimiento previo evaluado: Determinar el punto de intersección de dos rectas.

Análisis: Los resultados muestran que solo un 27% de los alumnos determinó correctamente las coordenadas del punto de intersección de dichas rectas, es decir entendieron que bastaba resolver algebraicamente las ecuaciones dadas. Un 13% de los alumnos mostraron algunos avances, encontrando solo una de las coordenadas, quizás porque no les quedó claro que hallar el punto de intersección era hallar un par ordenado de la forma $(x; y)$, es decir un valor para x y un valor para y. Un 13% de los alumnos cometieron errores graves, aquí muchos alumnos en lugar de resolver la pregunta de manera algebraica lo hicieron usando el registro geométrico, trazando las rectas y tratando de intuir las coordenadas del punto de intersección, encontrando errores de todo tipo, sin embargo, algunos llegaron a la respuesta correcta ya que el punto de intersección era $(2; 0)$ como se parecía en la figura 13, es decir un punto sobre el eje X, considero que la pregunta debió ser de tal manera que el punto de intersección no este sobre uno de los ejes coordenados (ver solución de uno de los estudiantes). Finalmente, el 47% de los alumnos dejaron esta pregunta en blanco, fueron muchos los alumnos que no tuvieron idea de cómo resolver esta pregunta, quizás por falta de experiencia en este tipo de preguntas ya que estamos seguros que si la pregunta hubiera dicho resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, el registro algebraico hubiera salido a flote en ellos y no hubiera visto tantos ítems en blanco.

Solución realizada por uno de los estudiantes

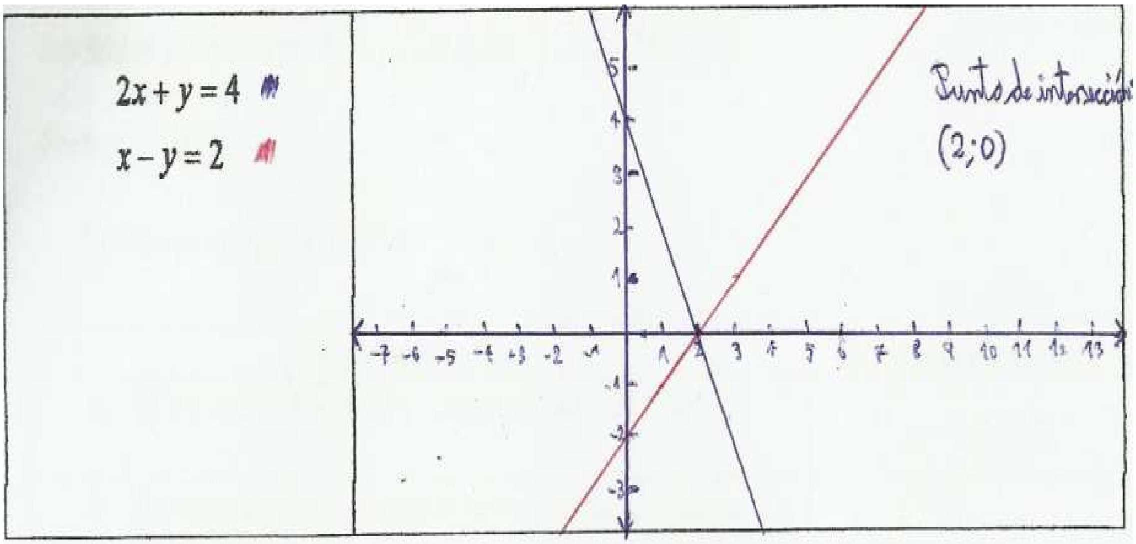


Figura 9: Algunas respuestas a la pregunta 8

Problema 9: Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0;8)$ y $(5;0)$.

Conocimiento previo evaluado: Determinar la ecuación de una recta a partir de dos puntos dados.

Análisis: Los resultados nos indican que ningún alumno (0%) contestó correctamente, lo más probable es que no conocían el tema. Un 33% de los alumnos trazaron la recta que pasa por los dos puntos dados, pero no encontraron la ecuación que se les pidió. El 27% de los alumnos presentaron respuestas equivocadas, por ejemplo ubicaron mal los puntos dados. Finalmente, el 40% de los alumnos dejaron la pregunta en blanco, probablemente por temor a equivocarse o por tener conocimiento de este tema.

Conclusión general:

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el análisis presentado, concluimos que las dificultades que más destacaron son:

- ✓ Definir variables (incógnitas) para la resolución de un problema contextualizado.
- ✓ Escribir textos que expresen lo enunciado en lenguaje algebraico.
- ✓ Resolver ecuaciones con más de una variable o incógnita.
- ✓ Interpretar la relación que existe entre una expresión algebraica (ecuación lineal) y su representación geométrica (gráfica – recta).
- ✓ Representar en registro algebraico la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados.

Es importante señalar que, las dificultades encontradas en este grupo de estudiantes, confirman las dificultades señaladas por otros investigadores, como Oaxaca (2002), quien señala que los estudiantes tienen dificultades para interpretar modelos matemáticos, la cual podemos observar en la pregunta 4 (pág. 43). Los resultados de nuestra investigación muestran que los alumnos no tienen idea de cómo resolver problemas con sistema de ecuaciones lineales, ya que ni siquiera definieron las variables, y como lo dice Trigueros (2012), los alumnos presentan dificultades en el proceso de modelación, por ejemplo, definir las variables y plantear hipótesis. Por otro lado, los alumnos también presentan dificultades para realizar los cambios de registros; Segura (2004), concluye que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico, esto lo podemos verificar en la pregunta 1 (pág. 40) y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales; una muestra de esta dificultad la podemos ver en la pregunta 8 (pág. 48), pues se esperaba que esta pregunta la resolvieran usando el método gráfico, sin embargo algunos resolvieron algebraicamente el sistema de ecuaciones, y los pocos que usaron el método gráfico, encontraron la solución probando valores. Hubo muchos alumnos que no tuvieron idea de cómo resolver el sistema de ecuaciones.

3.3 Análisis didáctico

3.3.1 Los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) con dos incógnitas en los libros de texto

En esta sección, se hará el análisis didáctico de los libros de texto que se toman en cuenta en el colegio “Weberbauer”, para evaluar cómo presentan el objeto matemático en estudio. Entre estos libros tenemos:

Texto	Autor	Editorial	Año
Matemática 3	Coveñas, Manuel	Editorial Bruño	2003
Matemática 3	Santillana	Ediciones Santillana	2008

Para este análisis didáctico, se ha evaluado la manera en que los autores de estos libros introducen el tema, cómo lo abordan y qué tipo de ejercicios y problemas utilizan y cómo son resueltos.

MATEMÁTICA 3 – SANTILLANA (2008)

En la página 203 de este libro, el autor trabaja el objeto matemático en estudio. Es importante señalar que casi siempre un tema se inicia exponiendo elementos como una reseña histórica u otro tipo de información complementaria, además se hace una descripción de los aprendizajes esperados, las actitudes a desarrollar y pone de manifiesto el desarrollo didáctico como sugerencia metodológica, es decir, expone la manera (paso a paso), como se abordará el tema.

Para el desarrollo del objeto matemático, comienza recordando cómo solucionar ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas, así como su representación geométrica (rectas). En seguida explica dos ejemplos, el primero es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que es resuelto mediante tabulación hasta encontrar un punto en común entre ambas ecuaciones y en paralelo muestra una gráfica con las dos rectas en donde deja claro que el punto de intersección es la solución del sistema, el otro ejemplo es un problema contextualizado, pero ambos ejemplos son usados con la finalidad de definir formalmente un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Posteriormente, explica los métodos de solución como reducción, sustitución y de igualación; explica los tipos de sistemas y los clasifica: compatibles determinados, aquellos que tienen una única solución, compatibles indeterminados los que tienen infinitas soluciones y sistemas incompatibles los que no tienen solución.

Finalmente, se resuelven 4 problemas contextualizados dejando en claro que el método de solución es el explicado líneas arriba (pág. 40), refuerza el tema con varios ejercicios y problemas resueltos y deja una lista para resolver.

MATEMÁTICA 3 – COVEÑAS, MANUEL (2003)

En la página 337 de este libro, se encuentra el capítulo denominado sistema de ecuaciones e inecuaciones con dos y tres incógnitas, aquí se abarca el objeto matemático en estudio. El autor comienza definiendo el concepto de ecuaciones simultáneas, y afirma que "*Son dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas que se han de resolver simultáneamente*", en otras palabras simplemente es otra manera de definir los sistemas de ecuaciones de cualquier orden (no necesariamente de 2×2). En seguida, nos recuerda cómo abordar la solución de una ecuación lineal o de primer grado, así como su significado geométrico (recta), aquí al igual que el autor anterior usa el método de tabulación para encontrar pares ordenados por donde pasa la recta.

Sin más preámbulos se inicia el estudio del objeto matemático, resuelve un ejemplo tabulando puntos para ambas ecuaciones dadas, hasta lograr un punto en común (solución) y aprovecha esto para definir un sistema de ecuaciones dos incógnitas y con única solución, al cual llama sistema consistente, luego propone otro ejemplo para resolverlo de manera gráfica, incide en la tabulación y define al punto de intersección como la solución del sistema. Luego, propone dos ejemplos más, uno para definir cuando un sistema tiene infinitas soluciones, al cual llama sistema de ecuaciones equivalentes, y el otro para definir cuando un sistema no tiene solución, en este caso lo llama sistema incompatible o absurdo, como antes lo aborda mediante tabulación y mostrando las gráficas. En seguida, mediante ejemplos explica los métodos de reducción, sustitución, igualación y por determinantes, en este último define el concepto de matriz y determinante de orden 2×2, propone algunos ejemplos de sistemas consistentes para ser resueltos mediante la regla de Cramer. Finalmente, refuerza lo anterior con varios ejercicios resueltos y una lista de ejercicios propuestos con sus respectivas respuestas.

En la solución de problemas contextualizados, el autor directamente propone y resuelve 19 problemas, 8 problemas los propone con espacios en blanco para reforzar los problemas trabajados anteriormente y finalmente deja una lista de problemas clasificados en nivel I y II. Este autor también deja claro usar el método estudiado (pág. 41).

A partir de la revisión de los dos textos usados en el colegio Weberbauer para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, los autores Coveñas y Santillana desarrollan este objeto matemático mediante tres métodos en paralelo: tabulando, graficando y mediante un problema contextualizado.

Los autores usan el método de tabulación para encontrar un punto común del sistema de ecuaciones lineales (SEL) dado, lo cual no contribuye a la comprensión de este objeto matemático. Al tratar el método gráfico para la resolución de problemas relacionados con SEL con dos variables, no se plantean preguntas que induzcan al alumno a un análisis más profundo, como interpretar qué ocurre cuando varían los parámetros de los SEL. Además, no hacen preguntas relacionadas con el uso de herramientas tecnológicas como el GeoGebra, el cual consideramos muy importante para la enseñanza y aprendizaje de los SEL. Por otro lado, los problemas son resueltos sin una secuencia que induzca al alumno a ir interpretándolo y por ende ir formando un sistema de ecuaciones que le ayude a resolver el problema. En general, se plantean situaciones donde se le pide al alumno resolver problemas de SEL usando de manera mecánica los métodos de solución de SEL (sustitución, eliminación, igualación). Es importante señalar que después de una breve explicación teórica, los autores plantean una cierta cantidad de ejercicios y problemas con preguntas donde el alumno aplica los métodos estudiados anteriormente, pero no existen preguntas que estimulen la creatividad del alumno, como, por ejemplo crear problemas a partir de un SEL con dos variables, o tenga que usar un software matemático como el GeoGebra para resolver un problema.

3.3.2 Análisis de restricciones

Esta investigación se llevará a cabo con 15 alumnos del cuarto año de secundaria del colegio “Weberbauer. Para el diseño de las situaciones didácticas tomaremos en cuenta algunos datos que hemos obtenido de parte de algunos profesores y de los mismo alumnos, tales como: los alumnos son adolescentes de clase media, fluctúan entre los 14 y 15 años de edad, 3 son mujeres y 12 son varones. Por otro lado, en la parte académica nos informaron que dichos alumnos, en años anteriores, han visto el objeto matemático en estudio, quizás de una manera poco profunda pero nos permitirá hacer nuestra investigación, con la única finalidad de mejorar el aprendizaje en alumnos.

CAPITULO 4: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En este capítulo, describiremos las variables macro y micro didácticas que se pondrán en escena en la fase experimental, detallaremos las cuatro actividades diseñadas para la secuencia didáctica, luego identificaremos las variables en las actividades de aprendizaje y finalmente haremos un análisis a priori, describiendo los tipos de interacciones con el medio y los comportamientos esperados.

4.1 Determinación de las variables

4.1.1 Variables macro didácticas

Al poner en escena las situaciones diseñadas, estaremos en la fase experimental de la Ingeniería Didáctica y se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- La formación de los grupos será libremente, en 5 grupos de 3 integrantes cada uno.
- Las aulas de la institución educativa cuenta con la infraestructura adecuada, sus carpetas son movibles y cuentan con equipo multimedia. Además, tiene dos salas de cómputo.
- La entrega del material con las situaciones didácticas será al inicio de cada actividad, donde se detallará las acciones que deben seguir los alumnos de forma individual y grupal.
- Se ha previsto realizar una clase en el laboratorio de cómputo, para que conozcan algunos comandos del GeoGebra.
- Se ha considerado los resultados de la evaluación de exploración del grupo, para la elaboración de las actividades de aprendizaje, situaciones concretas que permitan comprender el concepto y realizar los procedimientos adecuados.

4.1.2 Variables micro didácticas

Teniendo en cuenta que la finalidad de las situaciones didácticas es estudiar el conjunto de condiciones para la construcción de un conocimiento matemático, y que estas condiciones pueden variar de tal manera que según los valores que toma, provoca en el alumno un cambio de estrategia de resolución y por lo tanto el conocimiento para resolver la situación, hemos considerado las siguientes variables, que ciertamente, no son las únicas que existen.

a) Interdependencia de variables:

Interdependencia de variables	Casos
Ambas ecuaciones con función afín implícita (VMFI)	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ Donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son números reales diferentes de 0, llamados coeficientes, mientras que los números reales c_1 y c_2 son llamados términos independientes.
Una o ambas ecuaciones con función afín explicita (VMFE)	$\begin{cases} y=a_1x+b_1 \\ y=a_2x+b_2 \end{cases}$ Donde a_1 y a_2 son números reales diferentes de 0, llamados coeficientes, mientras que b_1 y b_2 son números reales llamados términos independientes. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ y=a_2x+b_2 \end{cases}$ Donde a_1, a_2 y b_1 son números reales diferentes de 0, llamados coeficientes, mientras que b_2 y c_1 son números reales llamados términos independientes.

b) Tipo de Parámetros:

Tipo de Parámetros	Descripción	Ejemplo
Parámetro Fijo (VMPF)	Los coeficientes y los términos independientes toman valores fijos.	$\begin{cases} 2x+3y=53 \\ x+y=21 \end{cases}$
Parámetro Variable (VMPV)	Variación de un término independiente (VMPV-Ti)	$\begin{cases} 2x+3y=c_1 \\ x+y=21 \end{cases}$ Donde c_1 toma diversos valores reales
		$\begin{cases} 2x+3y=53 \\ x+y=c_2 \end{cases}$ Donde c_2 toma diversos valores reales
	Variación de un coeficiente (VMPV-C)	$\begin{cases} a_1x+3y=53 \\ x+y=21 \end{cases}$ Donde a_1 toma diversos valores reales
		$\begin{cases} 2x+b_1y=53 \\ x+y=21 \end{cases}$ Donde b_1 toma diversos valores reales
		$\begin{cases} 2x+3y=53 \\ a_2x+y=21 \end{cases}$ Donde a_2 toma diversos valores reales

		$\begin{cases} 2x+3y=53 \\ x+b_2y=21 \end{cases}$ Donde b_2 toma diversos valores reales

En esta investigación, se trabajará solamente con coeficientes y términos independientes (parámetros) que toman valores enteros.

4.2 Diseño de la secuencia didáctica

4.2.1 Panorama general

La secuencia didáctica ha sido elaborada de acuerdo a la Teoría de Situaciones Didácticas. Se presentan problemas contextualizados donde los alumnos en forma individual y grupal, partiendo de sus conocimientos previos, deberán enfrentar nuevas situaciones.

La secuencia didáctica consiste de cuatro actividades relacionadas, usando las variables micro didácticas descritas. En las dos primeras se resolverán problemas contextualizados, en la tercera se resolverá una situación problemática con ayuda del GeoGebra y en la cuarta se estimulará a la creación de problemas.

Cabe mencionar que el diseño de las actividades propuestas, inducen a pasar progresivamente por situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

4.2.2 Identificación de variables en las actividades de aprendizaje

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE “MEDIOS DE TRASPORTE”	**VARIABLES MICRO DIDÁCTICAS**
Actividad 1: Situación en tres partes, relacionada con un sistema de ecuaciones lineales, que permite descubrir diversas relaciones gráficas y	• Ambas ecuaciones con función afín implícita (FI). • Parámetros fijos (PF).

algebraicas.	
Actividad 2: Situación relacionada con un sistema de ecuaciones lineales que permite reforzar las relaciones gráficas y algebraicas descubiertas en la actividad anterior, con trabajos grupales.	• Ambas ecuaciones con función afín explicita (FE). • Parámetros fijos (PF).
Actividad 3: Situación en tres partes, relacionada con un sistema de ecuaciones lineales, que estimula, con el uso del GeoGebra, el descubrimiento del manejo de la variación de parámetros.	• Ambas ecuaciones con función afín implícita (FI). • Parámetro variable (PV): - Variación de un coeficiente. - Variación de un término independiente.
Actividad 4: Situación que estimula la creación de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, considerando diversos casos, y el eventual uso de GeoGebra.	• Una de las ecuaciones con función afín explícita (FE). • Parámetros fijos (PF). • Parámetros variables (PV). - Variación de un término independiente

En todas las actividades se consideran dificultades graduadas. Las actividades 1 y 3 están diseñadas para trabajos individuales y grupales. Las actividades 2 y 4 solo para grupales. Los grupos son de a lo más tres integrantes y en la actividad 4, todos los grupos son de dos y disponen de una computadora.

4.2.3 Actividades diseñadas

La secuencia didáctica ha sido diseñada teniendo en cuenta el análisis que hicimos en los capítulos anteriores, la cual consta de cuatro actividades, donde se espera que los alumnos valoren la importancia de resolver problemas de contexto real, respetando los procesos de aprendizaje que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

A continuación presentamos las cuatro actividades diseñadas en base a los análisis previos.

ACTIVIDAD 1

Situación

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, utiliza dos medios de transporte: El metropolitano y el tren eléctrico. El pasaje en el metropolitano es 2 soles y en el tren eléctrico 3 soles y sus gastos semanales por movilidad son de 53 soles. Además, se sabe que realiza en total 21 viajes a la semana.

Se desea saber el número de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano y el número de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico.

Parte I: Trabajo Individual

a. Identifica y completa los datos conocidos.
   La tarifa en el metropolitano es 2 soles

   ____

   ____

   ____

b. María dice que Alejandro hace 6 viajes en el metropolitano y 15 viajes en el tren eléctrico, pero Juan dice que no puede ser, porque así Alejandro no gastaría 53 soles en total. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

c. Pedro dice que entonces Alejandro hace 13 viajes en el metropolitano y 9 viajes en el tren eléctrico porque eso explica que gasta en total 53 soles, pero Teresa dice que no puede ser, porque en ese caso Alejandro habría hecho más de 21 viajes. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

d. Identifica y define dos variables que representen los datos desconocidos.

x : ____

y : ____

e. Utilizando las variables definidas en (d), expresa algebraicamente:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano: _________________

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico: _________________

f. Escribe en cada caso una ecuación que exprese:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro: _________________________________

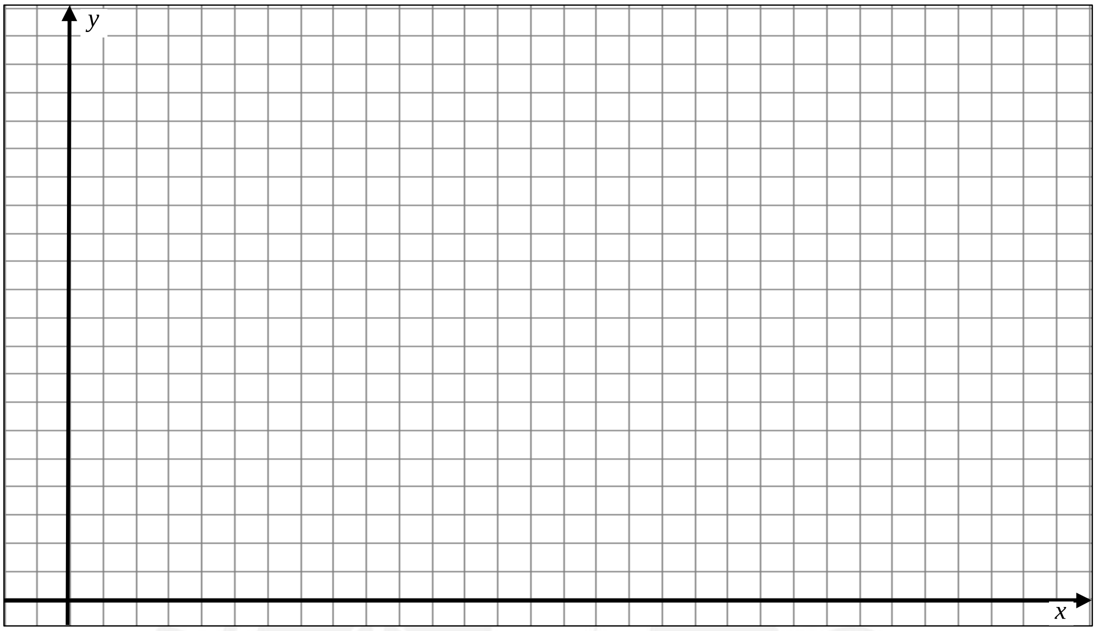
Número total de viajes semanales de Alejandro: _______________________________

g. Completa la tabla con valores para x y para y que sean solución de las ecuaciones que se dan.

Ecuación 1: $x+y=21$			**Ecuación 2:** $2x+3y=53$		
x	y	$(x;y)$	x	y	$(x;y)$
1	20	$(1;20)$	1	17	$(1;17)$
3			3		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7			7		
10			10		

h. Observando la tabla anterior, identifica un par ordenado que es solución de las dos ecuaciones $\boxed{(\quad;\quad)}$

i. Grafica en el siguiente sistema de coordenadas la **Ecuación 1** y la **Ecuación 2** consideradas en (g).



j. Escribe las coordenadas del punto de intersección de las gráficas: (;)

k. El par ordenado (;) resuelve la Ecuación 1 y también resuelve la Ecuación 2

l. ¿Qué relación tiene el punto de intersección de las gráficas con el problema propuesto?

____

____

Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo formado deben comparar sus resultados obtenidos en la parte individual.

a. Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo, en las partes g, h, i, j, k, l.

b. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema.

c. Resolver el sistema de ecuaciones de (b)

d. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (c) con el problema propuesto.

____

____

Parte III: Trabajo grupal

Situación:

Un grupo de jóvenes de una Institución Educativa, organizaron un evento musical con la finalidad de recaudar fondos para la TELETÓN. Se sabe que, al evento asistieron adultos y niños por lo que el precio de las entradas no son las mismas.

Marta y Carmen asistieron al evento, pero ellas no saben cuál fue el precio de las entradas, pero sí recuerdan cuanto pagaron en total: Marta pagó S/.96 por 3 niños y 5 adultos y Carmen, pagó S/.73 por 4 niños y 3 adultos.

a. Definir dos variables que representen los datos desconocidos:

x : ____

y : ____

b. Utilizando las variables definidas en (a), expresa algebraicamente lo siguiente:

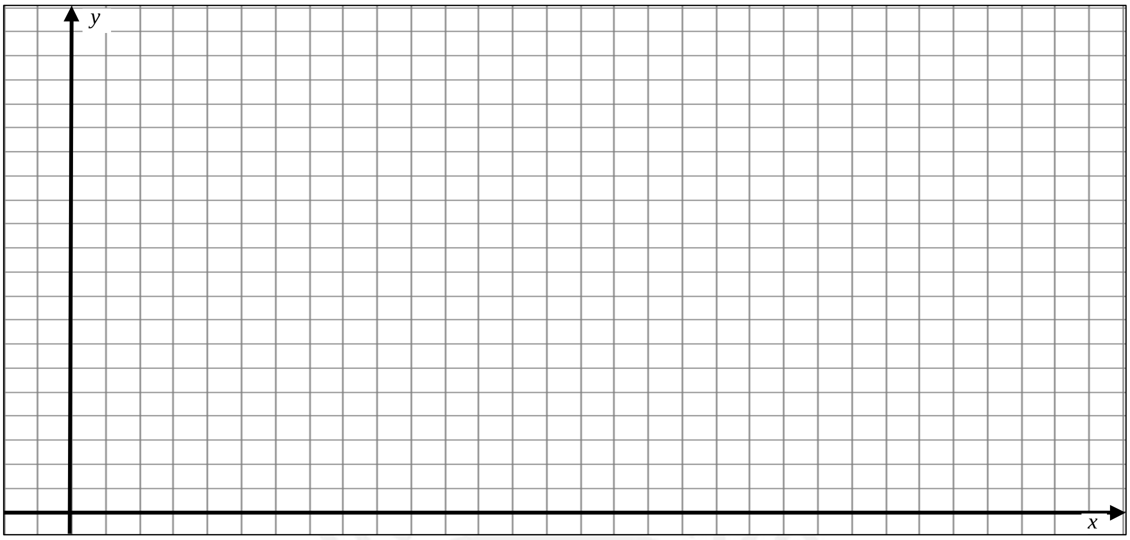
Marta pagó por 3 niños y 5 adultos, S/.96: ______________________

Carmen pagó por 4 niños y 3 adultos, S/.73: ______________________

c. Completar la tabla.

Ecuación 1: ....+........= 96			**Ecuación 2:** ....+........= 73		
x	y	$(x; y)$	x	y	$(x; y)$
1			1		
2			2		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6			6		
7			7		

d. Graficar en un sistema de coordenadas las ecuaciones consideradas en (c)



e. Escribir las coordenadas del punto de intersección de las gráficas y responder: ¿Qué relación tiene el punto de intersección con el problema propuesto?

Las coordenadas son: (;)

f. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema y resolverlo empleando un método diferente al usado en (c) de la Parte II.

Sistema de ecuaciones	**Resolver**

g. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (f) con el problema propuesto.

ACTIVIDAD 2

Trabajo Grupal

Situación:

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, decide utilizar otros medios de transporte (combi, taxi, ómnibus, etc.) y solo uno de los dos medios de transporte de la actividad 1 (el metropolitano o el tren eléctrico). Analizando la manera de transportarse, él considera dos posibles rutas:

Ruta 1: Tomar primero el metropolitano y en seguida otros medios de trasporte.

Ruta 2: Tomar primero el tren eléctrico y en seguida otros medios de transporte.

En base a esta información él ha podido determinar el gasto semanal en pasajes, según el número de días que vaya al trabajo. La ruta 1 le genera un gasto de S/.30 por el uso de otros medios de transporte más S/.2 por el número de días que vaya al trabajo y la ruta 2 le genera un gasto de S/.26 por el uso de otros medios de transporte más S/.3 por el número de días que vaya al trabajo.

a. Definir una variable x :

x : ____

b. Utilizando la variable definida en (a), representar algebraicamente:

- Gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 1, según el número de días que vaya al trabajo: ____
- Gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 2, según el número de días que vaya al trabajo: ____

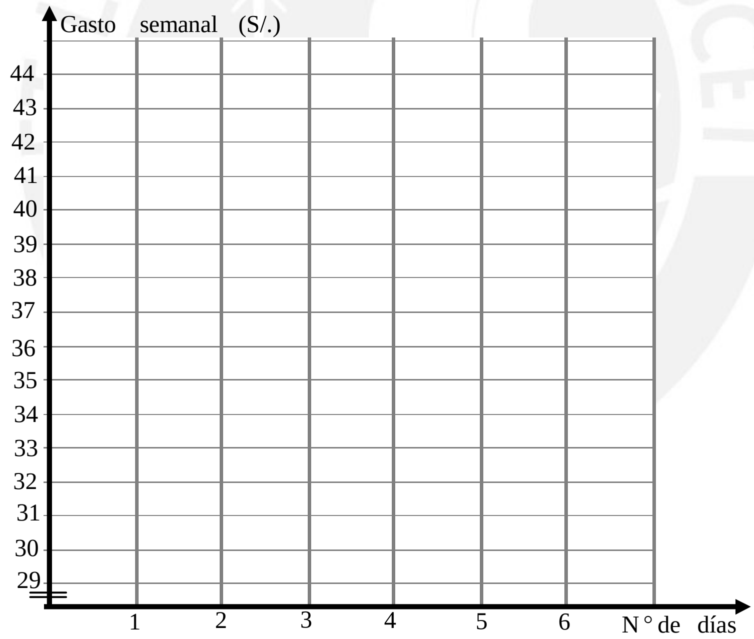
c. Si la próxima semana Alejandro solo irá tres días al trabajo, ¿cuál de las dos rutas le conviene si su objetivo es ahorrar? Justificar la respuesta.

d. ¿Cuántos días debe ir Alejandro al trabajo para que el gasto semanal sea el mismo ya sea yendo únicamente en la ruta 1 o en la ruta 2? ¿Cuál es tal gasto semanal?

e. Completar la siguiente tabla para obtener diferentes valores del gasto semanal (y) según el número de días que Alejandro vaya al trabajo.

Nº de días	Gasto semanal (y) por usar la ruta 1 (S/.)	Gasto semanal (y) por usar la ruta 2 (S/.)
x	Ecuación:	Ecuación:
1		
2		
3		
4		
5		

f. Graficar en un sistema de coordenadas las dos rectas obtenidas en (b), que representan a ambas rutas.



g. Observando las gráficas, determinar las coordenadas del punto de intersección:

$$\boxed{(\quad ; \quad)}$$

h. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema y resolverlo empleando dos métodos diferentes.

Sistema de ecuación	Resolución

i. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (h) con el problema propuesto.

____

____

ACTIVIDAD 3

Situación:

Alejandro se ha enterado que el precio del pasaje en el metropolitano va a cambiar, pero el número total de viajes (21), el gasto total semanal (S/.53) y el precio del pasaje en tren (S/.3) no variarán.

Parte I: Trabajo individual

Alejandro desea saber: ¿cuántos viajes en metropolitano y cuántos en tren eléctrico haría en cada uno de los siguientes casos:

i. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 1

ii. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 3

iii. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 4

Escribir en cada caso un sistema de ecuaciones que represente el número total de viajes y el gasto total semanal y resolverlo por cualquier método.

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema
Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		

Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Escribir una respuesta para cada caso, respecto al número de viajes en metropolitano y en tren eléctrico. Justificar.

CASOS	Respuesta	Justificación
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo formado deben comparar sus resultados obtenidos en la parte individual (d, e, f). Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo.

CASOS	Respuesta	Justificación
d. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		
e. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
f. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Parte III: Trabajo grupal

Con el uso del GeoGebra representar gráficamente las ecuaciones correspondientes a los casos *a*, *b* y c y completar el siguiente cuadro:

Precio en el metropolitano	Sistema de ecuaciones	¿Las rectas se intersecan?	¿En qué cuadrante se ubica el punto de intersección? (En caso exista)	Coordenadas del punto de intersección (En caso exista)	
				x	*y*
a. S/.1					
b. S/.3					
c. S/.4					

d. Según el contexto del problema, ¿en todos los casos, las coordenadas del punto de intersección dan la solución del problema? ¿Por qué?

____

____

____

e. Si el precio del pasaje en el metropolitano puede ir aumentando o disminuyendo de S/.0,50 en S/.0,50 ¿existe algún precio que lleve a una solución del problema? Explicar.

____

____

____

f. Resolver un problema similar, considerando que se mantienen fijos el precio del pasaje del metropolitano (S/.2), el número total de viajes (21) y el gasto total en pasajes (S/.53), pero el precio del pasaje en tren eléctrico variará. Examinar los casos de aumentos o disminuciones de /.0,10 en S/.0,10. ¿Para qué precios del pasaje en tren eléctrico existen soluciones?

____

____

____

g. Alejandro tiene la posibilidad de hacer un gasto total en pasajes mayor a los S/.53. Encontrar todas las soluciones correspondientes a estos gastos considerando aumentos de S/.1 en S/.1 y manteniendo fijos el número total de viajes (21) y los precios de los pasajes en metropolitano (S/.2) y en tren eléctrico (S/.3).

____

____

____

h. Para algún gasto menor de S/.53, ¿Alejandro viajará solamente en metropolitano?

____

____

i. Considerando cambios en el número total de viajes semanales y manteniéndose fijo todo lo demás, ¿cuál es el mínimo y el máximo número de viajes semanales en total que podría hacer Alejandro?

____

____

____

ACTIVIDAD 4

Trabajo grupal

Situación:

Alejandro realiza viajes en metropolitano y viajes en tren eléctrico.

(Pueden usar GeoGebra cuando lo consideren necesario)

a. ¿Es verdad que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases},$$

la solución es (3; 2)? Justificar

b. Encontrar un sistema de ecuaciones que tenga como solución (3; 2)

c. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza en un día 3 viajes en metropolitano y 2 viajes en tren eléctrico y se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (b).

d. Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+a \end{cases}$$

¿Para qué valor o valores de "*a*", el sistema tiene como solución $(5;0)$?

e. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza 5 viajes en metropolitano y ningún viaje en tren eléctrico y que se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (d).

f. Juan dice que inventó un problema relacionado con el número de viajes de Alejandro en metropolitano y en tren eléctrico, cuya solución la obtuvo resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+8 \end{cases}$$

María afirma que es imposible inventar un problema como el que dice Juan.

¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

g. Encontrar todos los valores de *a* para los cuales el siguiente sistema tiene como solución un punto cuyas coordenadas son números enteros NO negativos.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+a \end{cases}$$

4.2.4 Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados

ACTIVIDAD 1

Parte I: Trabajo individual

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Acción	Se espera que identifiquen los datos conocidos: el costo

		del pasaje en tren eléctrico (S/.3), el gasto semanal por movilidad (S/.53) y el número total de viajes a la semana (21).
b	Acción	Se espera que calculen el gasto total semanal en ambos transportes, es decir: en el metropolitano (S/.12) y en el tren eléctrico (S/.45), sumar dichos resultados (S/.57) y comparar con el gasto total semanal (S/.53), dato dado en el enunciado del problema. La conclusión debe ser que Juan tiene razón. Es posible que tengan errores de cálculo.
c	Acción	Se espera que determinen el número total de viajes de Alejandro (22 viajes) y comparen con el dato del problema (21 viajes). La conclusión debe ser que Teresa tiene la razón. Es probable que tengan errores de cálculo.
d	Acción	Se espera que definan a las variables x e y como el número de viajes semanales de Alejandro en el Metropolitano y el número de viajes semanales de Alejandro en el Tren Eléctrico (sin importar el orden al definirlas). Es probable que tengan dificultades en definir estas variables.
e	Acción	Se espera que representen en lenguaje algebraico, el gasto total semanal que Alejandro pueda tener al usar el metropolitano (por ejemplo $2x$) y el gasto total semanal que Alejandro pueda tener al usar el tren eléctrico (por ejemplo $3y$). Es probable que tengan dificultades en relacionar el precio del pasaje con el número total de viajes para expresar el gasto total semanal en cada transponte, es decir: Costo total = (Costo por unidad)*(cantidad)
f	Acción	Se espera que representen algebraicamente, mediante ecuaciones, el gasto total en viajes por semana y el número

		total de viajes por semana de Alejandro. Por ejemplo $2x+3y=53$ y $x+y=21$, ambas ecuaciones deben quedar definidas en términos de las variables definidas en el ítem (d). Se espera que la aclaración de las dificultades de los ítems anteriores ayude a tener menos dificultades en éste.
g	Acción	Dadas las ecuaciones $2x+3y=53$ y $x+y=21$, se espera que determinen valores para "y" cuando x toma valores dados, escribiendo los pares ordenados $(x;y)$ encontrados, respectivamente. Hasta que encuentren el par ordenado que coincide en ambas ecuaciones. Es probable que los errores solo sean de cálculo.
h	Acción	En base a lo realizado en el ítem (g), se espera que identifiquen el par ordenado $(10;11)$ como solución de ambas ecuaciones.
i	Acción	Se espera que representen gráficamente las ecuaciones $2x+3y=53$ y $x+y=21$, usando los pares ordenados de la tabla hecha en el ítem (g). Considerando los resultados de la exploración académica, es probable que tengan dificultades en trazar las rectas y demoren más de lo previsto. Cabe destacar que por la naturaleza del problema las gráficas de estas ecuaciones no son rectas propiamente dichas sino conjunto colineales de puntos de coordenadas enteras. Sin embargo, como es usual se trabajara gráficamente con rectas, lo cual simplifica los gráficos y los análisis.
j	Acción	Se espera que identifiquen el punto de intersección de las rectas trazadas, expresándolo como par ordenado $(10;11)$.

k	Acción	Se espera que escriban $(10;11)$.
l	Acción	Al identificar el punto $(10;11)$, se espera que identifiquen a 10 como el número de viajes en el metropolitano y a 11 como el número de viajes en el tren eléctrico. Es probable que tengan dificultades en interpretar y relacionar el punto obtenido con las variables desconocidas x e y.

Parte II: Trabajo grupal

Ítem	**Tipo de Interacción**	**Comportamientos esperados**
a	Validación	Se espera que comparen, verifiquen y mejoren los resultados de la parte individual. En la tabla, se espera que observen al punto $(10;11)$ como el único que se repite en ambas ecuaciones, lo mismo debe suceder en la gráfica y por último deben interpretar los valores del punto con las variables desconocidas "x" e "y", concluyendo que el número de viajes en el metropolitano es 10 y que el número de viajes en el tren eléctrico es 11 para que la interrogante al problema sea resuelta.
b	Formulación	Se espera que comparen, verifiquen y escriban dos ecuaciones: una que represente al número total de viajes semanales y la otra que represente el gasto total semanal. Por ejemplo $x+y=21$ y $2x+3y=53$.
c	Formulación	Se espera que resuelvan el sistema por cualquier método que ellos conozcan.
d	Formulación	Se espera que comparen los valores de la solución encontrada en el ítem (c), con el punto $(10;11)$ discutido en el ítem (a), llegando a la conclusión de que ambos

		resultados resuelven el problema de Alejandro y que lo resolvieron de dos maneras distintas (geométrica y algebraica).

Parte III: Trabajo grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Formulación	En base a lo trabajado en las actividades anteriores, se espera que no tengan dificultades en definir las variables desconocidas del nuevo problema, una alternativa es que definan a la variable "*x*" como el precio de una entrada para adultos y a la variable "*y*" como el precio de una entrada para niños.
b	Formulación	Se espera que representen en registro algebraico (ecuaciones), las expresiones que indiquen el pago que hacen Marta $(3x+5y=96)$ y Carmen $(4x+3y=73)$ por las entradas de los niños y de los adultos que los acompañan al evento, respectivamente.
c	Acción	A partir de las ecuaciones definidas en el ítem (b), se espera que completen la tabla dada, encontrando el par ordenado que coincida con ambas ecuaciones.
d	Formulación	Tomando como referencia los pares ordenados encontrados en el ítem (c), se espera que representen gráficamente las ecuaciones $3x+5y=96$ y $4x+3y=73$.
e	Formulación	Se espera que a partir de la gráfica identifiquen el punto de intersección $(7;15)$ e interpreten a 7 como el precio de una entrada para niños y a 15 como el precio de una entrada para adultos.

f	Acción	Se espera que formen un sistema con las ecuaciones: $3x+5y=96$ y $4x+3y=73$, y lo resuelvan usando un método diferente al que emplearon en el ítem (c) de la parte II.
g	Formulación	Se espera que comparen los valores de la solución encontrada en el ítem (f), con el punto $(7;15)$ discutido en el ítem (e), llegando a la conclusión de que ambos resultados resuelven el problema de la TELETÓN y que fueron conducidos de dos formas distintas (geométrica y algebraica) para resolver un mismo problema.

ACTIVIDAD 2

Trabajo Grupal

Ítem	**Tipo de Interacción**	**Comportamientos esperados**
a	Acción	En base a la información proporcionada en el problema, se espera que definan a la variable x como el número de días a la semana que Alejandro va al trabajo.
b	Formulación	Se espera que expresen el gasto total correspondiente al uso de cada ruta, en registro algebraico, empleando la variable x. El gasto total por usar la ruta 1: $30+2x$; el gasto total por usar la ruta 2: $26+3x$
c	Acción	Se espera que le asignen el valor de 3 a la variable x, que calculen el gasto semanal que generan ambas rutas y que finalmente comparen los resultados para concluir que la ruta más económica es la 2.
d	Formulación	Se espera que determinen el número de días a la semana que Alejandro puede ir al trabajo (x), ya sea usando la ruta 1 o la ruta 2. Esto se logrará igualando las

		ecuaciones encontradas en el ítem (b). Es probable que encuentren por tanteo e intuición el valor para x.
e	Acción	Se espera que completen la tabla e identifiquen el valor de x, en el cual el gasto semanal en ambas rutas sea el mismo.
f	Formulación	A partir de los datos tabulados en el ítem (e), se espera que representen gráficamente, mediante rectas, las ecuaciones: $y = 30 + 2x$; $y = 26 + 3x$
g	Acción	A partir de la gráfica hecha en el ítem (f), se espera que identifiquen al par ordenado $(4;38)$ como el punto de intersección.
h	Formulación	Se espera que expresen el sistema $\begin{cases} y = 30 + 2x \\ y = 26 + 3x \end{cases}$ y lo resuelvan usando dos métodos algebraicos distintos. Es muy probable que uno de los métodos sea el de igualación.
i	Formulación	Se espera que de la solución encontrada en el ítem (h), se concluya que 4 es el número de días por semana que Alejandro va al trabajo y que S/.38 es su gasto semanal.

ACTIVIDAD 3

Parte I: Trabajo individual

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Formulación	Se espera que planteen el sistema $\begin{cases} x + 3y = 53 \\ x + y = 21 \end{cases}$, y lo

		resuelvan por cualquier método, encontrando como solución $x=5$ y $y=16$.
b	Formulación	Se espera que planteen el sistema $\begin{cases}3x+3y=53\\x+y=21\end{cases}$, y lo resuelvan por cualquier método, llegando a la conclusión de que el sistema no tiene solución. Aquí es probable que concluyan que el sistema tiene alguna solución debido a posibles errores de interpretación algebraica.
c	Formulación	Se espera que planteen el sistema $\begin{cases}4x+3y=53\\x+y=21\end{cases}$, y lo resuelvan por cualquier método, llegando a la conclusión de que el sistema tiene como solución $x=-10$ y $y=31$.
d	Formulación	Se espera que donde dice respuesta, analicen la solución hallada en el ítem (a), mientras que donde dice justificación deben explicar la respuesta en el contexto del problema, y responder: si el precio del pasaje en metropolitano baja a S/.1 entonces Alejandro semanalmente podría realizar 5 viajes en el metropolitano y 16 viajes en el tren eléctrico.
e	Formulación	Se espera que donde dice respuesta, analicen la solución hallada en el ítem (b), mientras que donde dice justificación deben explicar la respuesta en el contexto del problema y responder: Al aumentar el pasaje del metropolitano a S/.3, Alejandro no podría definir el número de viajes en el metropolitano ni en el tren eléctrico. Es deseable que hagan un análisis gráfico. Es probable que den respuestas incoherentes.
f	Formulación	Se espera que donde dice respuesta, analicen la solución hallada en el ítem (c), mientras que donde dice justificación deben explicar la respuesta en el contexto

		del problema y responder: Al aumentar el pasaje del metropolitano a S/.4, Alejandro no podría hacer viajes en el metropolitano ni en el tren eléctrico ya que uno de los valores obtenidos es un número negativo. Es probable que den respuestas incoherentes.

Parte II: Trabajo Grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
d	Validación	Se espera que concluyan: Alejandro puede realizar semanalmente 5 viajes en el metropolitano y 16 en el tren eléctrico.
e	Validación	Se espera que concluyan: Alejandro debe variar el número de viajes semanales, el gasto total semanal o debe variar el costo del pasaje en tren, de lo contrario el problema no tiene solución. Es probable que tengan dificultades.
f	Validación	Se espera que concluyan: el contexto del problema debe variar debido a que no es posible realizar un número negativo de viajes, de lo contrario el problema no tiene solución. Es probable que tengan dificultades.

Parte III: Trabajo Grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Validación	Se espera que revaliden lo concluido en el ítem (d) – parte II, usando el GeoGebra
b	Validación	Se espera que revaliden lo concluido en el ítem (e) – parte

		II, usando el GeoGebra
c	Validación	Se espera que revaliden lo concluido en el ítem (f) – parte II, usando el GeoGebra
d	Validación	Se espera que analicen los resultados de los ítems anteriores y reconozcan que no todos los casos solucionan el problema. También se espera que reconozcan que la solución de un problema no puede tener valores negativos y que la solución de estos problemas de contexto real tiene soluciones no negativas.
e	Formulación	Se espera que al manipular el comando "*deslizador*" del GeoGebra, observen que si el precio del pasaje en el metropolitano es S/0.5, S/.1 o S/2.5 entonces existe una solución coherente para el problema propuesto. Pueden concluir que: • Si el precio del pasaje aumenta de S/.2.00 a S/.2.50 el punto de intersección entre las rectas es $(20;1)$, es decir Alejandro puede realizar 20 viajes en metropolitano y 1 viaje en tren eléctrico, sin variar el gasto total semanal. • Si el precio es S/. 0.50, Alejandro puede realizar 4 viajes en metropolitano y 17 viajes en tren eléctrico. • Si cuesta S/.1.00, Alejandro puede realizar 5 viajes en metropolitano y 16 viajes en tren eléctrico. Es probable que al inicio tengan dificultades de interpretación por la variación de parámetros y para el uso de los comandos del GeoGebra, debido a la poca práctica con la herramienta "deslizador".
f	Formulación	Se espera que al manipular el deslizador, observen que si el precio del pasaje en el tren eléctrico es S/3.10, S/.4.20 o S/7.50, entonces existe una solución coherente para el

<table>
<tr><td></td><td></td><td>problema propuesto. Pueden concluir que:
Si el pasaje cuesta S/.3.1, Alejandro puede realizar 11 viajes en metropolitano y 10 viajes en tren eléctrico
Si el pasaje en tren eléctrico cuesta S/.4.2, Alejandro puede realizar 16 viajes en metropolitano y 5 viajes en tren eléctrico.
Si cuesta S/.7.5, Alejandro puede realizar 19 viajes en tren eléctrico y 2 viajes en metropolitano.
Es probable que no relacionen los valores del punto de intersección dado por el GeoGebra con el contexto real del problema.</td></tr>
<tr><td>g</td><td>Formulación</td><td>Se espera que al manipular el deslizador y hagan variar el gasto total (mayor a 53 soles), observen que pueden tener las siguientes soluciones:
<table><tr><th>Para un gasto de:</th><th>La solución es:</th></tr><tr><td>S/.63</td><td>(0; 21)</td></tr><tr><td>S/.62</td><td>(1; 20)</td></tr><tr><td>S/.61</td><td>(2; 19)</td></tr><tr><td>S/.60</td><td>(3; 18)</td></tr><tr><td>S/.59</td><td>(4; 17)</td></tr><tr><td>S/.58</td><td>(5; 16)</td></tr><tr><td>S/.57</td><td>(6; 15)</td></tr><tr><td>S/.56</td><td>(7; 14)</td></tr><tr><td>S/.55</td><td>(8; 13)</td></tr><tr><td>S/.54</td><td>(9; 12)</td></tr></table>Es probable que no consideren todas las posibilidades.</td></tr>
</table>

h	Formulación	Se espera que al manipular el deslizador, observen que si el gasto total semanal es S/.42, la intersección será un punto del eje X y en consecuencia Alejandro solo podría viajar en el metropolitano.
i	Formulación	Se espera que al hacer variar el número total de viajes en el deslizador, observen que para obtener coordenadas no negativas del punto de intersección, el mínimo número de viajes que puede realizar Alejandro es 18 y el máximo 26.

ACTIVIDAD 4

Trabajo Grupal

Ítem	Tipo de Interacción	Comportamientos esperados
a	Formulación	Se espera que al resolver el sistema respondan que la solución no es $(3;2)$, sino $\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$ o que verifiquen que (3; 2) no satisface una de las ecuaciones. Es probable que resuelvan el sistema usando el GeoGebra.
b	Formulación	Se espera que modifiquen los coeficientes o los términos independientes del sistema dado en el ítem (a), por ejemplo la ecuación $y=2x-3$ cambiarla por $y=2x-4$. Se espera que usen el GeoGebra: primero ubiquen el punto $(3;2)$ en la ventana gráfica y luego tracen dos rectas que pasen por ese punto; de esta manera podrán encontrar infinitos sistemas de ecuaciones, con funciones afines implícitas o explícitas.
c	Formulación	Se espera que redacten un problema contextualizado a partir del registro algebraico (sistema de ecuaciones lineales con dos variables) encontrado en el ítem (b). Se espera que la presencia de una función afín explícita

<table>
<tr><td></td><td></td><td>ayude a formular el problema.</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Formulación</td><td>Se espera que reemplacen los valores del punto $(5;0)$ en ambas ecuaciones del sistema y observen que de la ecuación $y = 2x + a$ se obtiene el valor de $a = -10$. Es probable que opten por usar el GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>e</td><td>Formulación</td><td>Se espera que redacten un problema contextualizado a partir del registro algebraico (sistema de ecuaciones lineales con dos variables) encontrado en el ítem (d). Se espera que la presencia de una función afín explícita ayude a la formulación del problema.</td></tr>
<tr><td>f</td><td>Formulación</td><td>Se espera que resuelvan el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$, obtengan como solución $(-1;6)$ y respondan que María tiene la razón porque Alejandro no puede realizar un número negativo de viajes en metropolitano; es decir Juan no puede inventar un problema con el sistema propuesto.</td></tr>
<tr><td>g</td><td>Formulación</td><td>Se espera que usen el comando deslizador del GeoGebra y encuentren los siguientes valores para a:
<table>
<tr><td>Valor de a</td><td>Solución</td></tr>
<tr><td>-10</td><td>$(5;0)$</td></tr>
<tr><td>-7</td><td>$(4;1)$</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>$(3;2)$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$(2;3)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$(1;4)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$(0;5)$</td></tr>
</table>
Es probable que encuentren valores para a y no verifiquen</td></tr>
</table>

		que los valores de la solución al sistema deben ser enteros no negativos. Puede haber errores en la explicitación del rango de variación de a, incluyendo valores de a que no dan coordenadas enteras no negativas. Por ejemplo, podrían decir, que a puede tomar todos los valores desde -10 hasta 5.

4.2.5 Información complementaria

Para orientar las secuencias didácticas fue necesario obtener y dar información complementaria, iniciando con una evaluación denominada "Exploración Académica" y haciendo recapitulaciones al inicio de una nueva actividad.

Instrumento	**Descripción**
Conocimientos previos	✓ 9 preguntas. ✓ Se consideró temas estudiados en años anteriores. ✓ Trabajo individual. ✓ Reforzamiento de conocimientos previos.
Recapitulaciones	✓ Recapitulación 1: Lo realiza la profesora al inicio de la sesión 2, repasando y complementando lo trabajado en la sesión 1. ✓ Recapitulación 2: Lo realiza la profesora al inicio de la sesión 3, repasando y complementando lo trabajado en la sesión 2. ✓ Recapitulación 3: Lo realiza la profesora al inicio de la sesión 4, repasando y complementando lo trabajado en la sesión 3. ✓ Recapitulación 4: Se realiza posterior a la sesión 4, donde la profesora complementa lo trabajado en la sesión.

4.2.6 Programación de actividades

A continuación presentamos detalladamente la secuencia de las actividades, la forma de trabajo y el tiempo de duración.

Sesión	Actividad	Forma de trabajo	Duración (en minutos)
Previa a la sesión 1	Exploración académica	Individual	50
Sesión 1	Indicaciones Actividad 1	Realizada por la profesora Parte I: Individual Parte II: Grupal Parte III: Grupal	8 35 30 25
Sesión 2	Recapitulación 1 Actividad 2	Realizada por la profesora Trabajo grupal	20 40
Sesión 3	Recapitulación 2 Actividad 3	Realizada por la profesora Parte I: Individual Parte II: Grupal (Laboratorio) Parte III: Grupal (Laboratorio)	20 20 20 80
Sesión 4	Recapitulación 3 Actividad 4	Realizada por la profesora Trabajo grupal: Laboratorio	20 60
Posterior a la sesión 4	Recapitulación 4	Realizada por la profesora	30

CAPITULO 5: FASE EXPERIMENTAL

En esta fase de experimentación, realizaremos la aplicación o la puesta en escena de las actividades diseñadas y el recojo de la información respecto al desempeño, dificultades y logros de los alumnos en cada una de las actividades.

5.1 Puesta en escena de las situaciones didácticas

En esta fase, aplicaremos las actividades diseñadas, en 4 sesiones de 90 minutos cada una y en los respectivos horarios establecidos para el dictado del curso de matemáticas en la Institución Educativa. En el siguiente cuadro presentamos las fechas y horas de experimentación de cada una de las actividades:

ACTIVIDADES	FECHA	HORA
Actividad 1	Miércoles, 21 de noviembre del 2012	07:45- 09:15 a.m.
Actividad 2	Viernes, 23 de noviembre del 2012	09:15– 10:55 a.m.
Actividad 3	Miércoles, 28 de noviembre del 2012	07:45- 09:15 a.m.
Actividad 4	Viernes, 30 de noviembre del 2012	09:15– 10:55 a.m.

Con la finalidad de recoger información relevante de la interacción de los alumnos con las situaciones planteadas, se utilizó una guía de observación para cada una de las actividades, tanto individuales como grupales. Para el buen desarrollo de las actividades se contó con la valiosa colaboración de la profesora Cecilia Gómez Mendoza, profesora del curso de la institución educativa Weberbauer y con la observación de la profesora Flor Carrillo Lara, estudiante de la maestría "Enseñanza de la Matemática" de la PUCP.

La colaboración de dichas profesoras permitió que los estudiantes trabajen sin ninguna dificultad, al contrario, permitió un normal desenvolvimiento en el desarrollo de las actividades propuestas.

En las actividades que duraron más de una sesión, se realizó un análisis a posteriori local, con el fin de hacer las correcciones pertinentes de una sesión a otra y continuar las recapitulaciones antes de empezar la siguiente actividad.

El proceso de experimentación se realizó conforme se había planificado, corrigiendo los errores y las dificultades detectadas después de cada actividad.

5.2 Logros y dificultades encontradas en el desarrollo de las actividades

Teniendo como información las guías de observación utilizadas en cada actividad y las soluciones obtenidas de los alumnos tanto de forma individual como grupal, a continuación se presentan los resultados obtenidos en cada actividad y el análisis respectivo a los logros y dificultades encontrados.

5.2.1 Resultados y análisis de la actividad 1

En esta parte se presenta una tabla con los resultados obtenidos de la actividad 1, tanto individual como grupal, señalando el número de alumnos o grupos que llegaron a:

A. Respuestas correctas.
B. Respuestas en proceso.
C. Respuestas incorrectas.
D. Respuestas en blanco.

De un total de 12 alumnos, se formaron 4 grupos de 3.

Tabla 3: Resultados de la actividad 1

PARTE I: TRABAJO		A	B	C	D
a		9	3		
b		11		1	
c		12			
d		6		6	
e		6	2	4	
f		6	3	3	
g		12			
h		10		1	1
i		7	2	3	
j		11			1
k		11			1
l		0	6	5	1
PARTE II: TRABAJO		**A**	**B**	**C**	**D**
a	g, h, i, j, k	4			
	l		2	2	
b		4			
c		4			
d		3	1		
PARTE III: TRABAJO		**A**	**B**	**C**	**D**
a		4			
b		3	1		
c		4			
d		3	1		
e		3		1	
f		4			
g		1	1	1	1

En base a esta tabla, la ficha de observación y las soluciones de los estudiantes, se analizan los logros y dificultades encontradas en esta actividad.

ACTIVIDAD 1

La actividad se inicia con 12 alumnos, dándoles las indicaciones iniciales de la forma de trabajo (al inicio individual y luego 2 grupales), se les indicó que las consultas que hagan, serán respondidas con otra pregunta o con alguna reflexión. Se inició el trabajo individual y duró 40 minutos. No llegaron más alumnos, faltando 3 de los 15 que inicialmente pensábamos tener, luego se realizó el trabajo grupal I y II con 4 grupos de 3 integrantes, el cual tuvo una duración de 60 minutos.

Los alumnos iniciaron la actividad leyendo la siguiente situación problemática:

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, utiliza dos medios de transporte: El metropolitano y el tren eléctrico. El pasaje en el metropolitano es 2 soles y en el tren eléctrico 3 soles y sus gastos semanales por movilidad son de 53 soles. Además, se sabe que realiza en total 21 viajes a la semana.

Se desea saber el número de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano y el número de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico.

Parte I: Trabajo Individual

Esta parte duró 40 minutos. Hubo diferencia en cuanto al tiempo que les tomó comprender el texto y empezar a responder los ítems; algunos iban avanzando más que otros. Si terminaban la parte individual antes del tiempo establecido, podían juntarse en grupos e iniciar la parte grupal. A partir de las respuestas se ha hecho el siguiente análisis.

a. Identifica y completa los datos conocidos.

La tarifa en el metropolitano es 2 soles

____

____

Observaciones:

- ✓ Nueve alumnos respondieron correctamente, logrando identificar los tres datos restantes, un alumno no identificó uno de los datos, otro alumno repitió el dato ya dado, tal vez porque no se percató que estaba en el enunciado y uno de ellos escribió que Alejandro gasta semanalmente S/.51, cuando realmente el gasto semanal es de S/.53.

Reformulación del enunciado:

a. Identifique y complete los datos conocidos **que faltan**:

- La tarifa en el metropolitano es 2 soles.
- ________________________________
- ________________________________
- ________________________________

b. María dice que Alejandro hace 6 viajes en el metropolitano y 15 viajes en el tren eléctrico, pero Juan dice que no puede ser, porque así Alejandro no gastaría 53 soles en total. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

Observaciones:

- ✓ Once alumnos respondieron correctamente, logrando identificar la operación $6(2) + 15(3) = 12 + 45 = 57$ y compararon correctamente este resultado con el gasto semanal de Alejandro (S/53), mientras que solo un alumno hizo las siguientes operaciones incorrectas:
  - 1 día $\Rightarrow$ 3 viajes en tren $\Rightarrow$ S/.$9\times7 = 63$
  - 1 día $\Rightarrow$ 3 viajes en metropolitano $\Rightarrow$ S/.$6\times7 = 42$

Lo más probable es que no haya comprendido el problema, ya que no dio respuesta a las preguntas realizadas.

- ✓ Este ítem fue respondido en el menor tiempo posible.
- ✓ Se evidenció que los alumnos presentan habilidades aritméticas.

c. Pedro dice que entonces Alejandro hace 13 viajes en el metropolitano y 9 viajes en el tren eléctrico porque eso explica que gasta en total 53 soles, pero Teresa dice que no puede ser, porque en ese caso Alejandro habría hecho más de 21 viajes. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

Observaciones:

- ✓ Este ítem fue respondido en el menor tiempo posible y todos los alumnos lograron responder correctamente, dejando claro que lograron identificar la operación 13 + 9 = 22.
- ✓ Queda claro que los alumnos manejan un pensamiento aritmético.

d. Identifica y define dos variables que representen los datos desconocidos.

Observaciones:

- ✓ Esta pregunta hizo reflexionar a los alumnos porque demoraron más tiempo de lo previsto.
- ✓ Después de haber comprendido el texto, solo seis alumnos contestaron correctamente. Se muestra un caso en la figura 10.

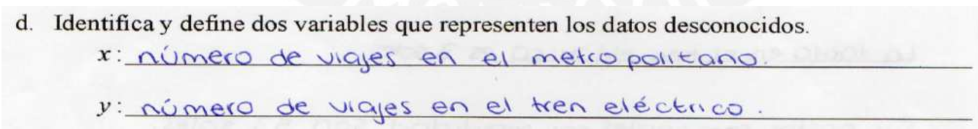

d. Identifica y define dos variables que representen los datos desconocidos.
x: número de viajes en el metropolitano.
y: número de viajes en el tren eléctrico.

Figura 10: Algunas respuestas al problema de la actividad 1

- ✓ Mientras que los otros seis alumnos, tuvieron problemas en definir las variables. Algunas respuestas incorrectas fueron:

  x : Tarifa en el metropolitano.

  y : tarifa en el tren eléctrico.

  x : veces que viajó en el metropolitano.

y : veces que viajo en el tren eléctrico.

- ✓ Es importante que los alumnos aprendan a definir correctamente las variables, ya que es uno de los pasos más importantes en la resolución de problemas, por ejemplo hay una diferencia marcada entre decir "veces que viaja en . . ." y "número de veces que viaja en …".
- ✓ Se percibe la dificultad de pasar un enunciado verbal a un registro algebraico.

Devolución:

- ✓ Algunos alumnos preguntaron si en la definición de variables podían escribir números, ante esta pregunta se les sugirió leer las condiciones y los datos desconocidos del problema para que reflexionen y puedan mejorar sus respuestas.

e. Utilizando las variables definidas en (d), expresa algebraicamente:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano: _________________

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico: _________________

Observaciones:

- ✓ Como era de esperarse, trabajar con variables conlleva dificultades de los alumnos en relacionar un texto con su representación algebraica. En este ítem solo seis alumnos respondieron correctamente, dos alumnos no relacionaron los datos conocidos con los desconocidos, y cuatro alumnos expresaron incorrectamente lo que se pedía.
- ✓ A pesar de que algunos alumnos, definieron correctamente las variables del ítem anterior, no lograron relacionarlas con los datos proporcionados en este ítem. Por otra parte, unos cuantos alumnos que no lograron definir correctamente cada variable, sí dieron una respuesta correcta, lo cual hace pensar en un uso mecánico de las variables.
- ✓ Algunos alumnos respondieron con facilidad, otros tuvieron dificultades y demoraron un poco más de lo previsto.

Devolución:

- ✓ Algunos alumnos preguntaron si sus respuestas eran correctas y en vista de que habían errores se les preguntó: ¿cuánto gasta en una semana Alejandro si por ejemplo realiza 3, 4 o 5 viajes en el metropolitano? Esto les sirvió para darse cuenta que solo tenían que relacionar el precio del pasaje con el número total de viajes x e y.

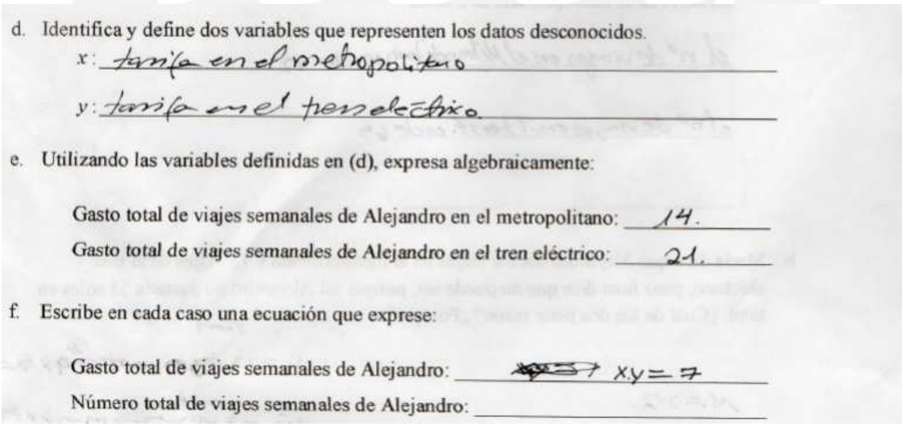
f. Escribe en cada caso una ecuación que exprese:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro:

Número total de viajes semanales de Alejandro:

Observaciones:

- ✓ Solo seis alumnos interpretaron el texto y escribieron correctamente las ecuaciones $2x+3y=51$ y $x+y=21$, tres alumnos no lograron expresar las ecuaciones y en su lugar escribieron $2x+3y$ y $x+y$, mientras que otros tres alumnos no respondieron satisfactoriamente.
- ✓ Es necesario mencionar que de alguna manera los ítems (d), (e) y (f) están relacionados, esto hizo que algunos alumnos arrastren errores y no les permitió comprender el texto, llegando a planteamientos incorrectamente como se aprecia en la figura 11.



d. Identifica y define dos variables que representen los datos desconocidos.

x: tarifa en el metropolitano

y: tarifa en el tren eléctrico

e. Utilizando las variables definidas en (d), expresa algebraicamente:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano: 14.

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico: 21.

f. Escribe en cada caso una ecuación que exprese:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro: ~~[illegible]~~ xy = 7

Número total de viajes semanales de Alejandro:

Figura 11: Algunas respuestas al problema de la actividad 1

g. Completa la tabla.

Ecuación 1: $x+y=21$			Ecuación 2: $2x+3y=53$		
x	y	$(x;y)$	x	y	$(x;y)$
1	20	$(1;20)$	1	17	$(1;17)$
3			3		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7			7		
10			10		

Observaciones:

✓ Todos los alumnos evaluaron y completaron la tabla correctamente, utilizando el tiempo establecido.

h. Observando la tabla anterior, identifica un par ordenado que es solución de las dos ecuaciones

(;)

Observaciones:

✓ A pesar de que el 100% de los alumnos respondió correctamente el ítem g, hubo un alumno que no respondió este ítem y otro alumno respondió un par ordenado incorrecto $(8;13)$. Diez alumnos identificaron correctamente a $(10;11)$ como el par ordenado que soluciona a ambas ecuaciones a la vez.

i. Grafica en el siguiente sistema de coordenadas la **Ecuación 1** y la **Ecuación 2** consideradas en (g).

Observaciones:

✓ Siete alumnos ubicaron los puntos y trazaron las rectas correctamente, dos alumnos ubicaron algunos de los puntos pero no hicieron las gráficas, mientras tres alumnos solo ubicaron el punto $(10;11)$.

- ✓ En este ítem los alumnos usaron un poco más del tiempo previsto.

Devolución:

- ✓ Hubo preguntas como: ¿se debe graficar las dos ecuaciones por separado? Respondiéndoles con otra pregunta: ¿cuántos planos cartesianos tienes? Esto sirvió para que el alumno se dé cuenta de que tenía que hacer las gráficas en un mismo plano cartesiano. Por otro lado, hubo inconvenientes a la hora de ubicar un punto con coordenadas decimales; preguntaban: ¿cómo puedo ubicar 15,6? La respuesta fue "acuérdate de las aproximaciones".

j. Escribe las coordenadas del punto de intersección de las gráficas: (;)

Observaciones:

- ✓ De doce alumnos once lograron identificar el punto de intersección, a pesar que algunos no hicieron la representación gráfica completa.

k. El par ordenado (;) resuelve la Ecuación 1 y también resuelve la Ecuación 2

Observaciones:

- ✓ De doce alumnos, once lograron identificar el par ordenado que resuelve a ambas ecuaciones. Un alumno no escribió nada, a pesar que respondió correctamente el ítem anterior.

l. ¿Qué relación tiene el punto de intersección de las gráficas con el problema propuesto?

Observación:

- ✓ La mayoría de los alumnos tuvo dificultad para interpretar y relacionar los valores de las coordenadas del punto de intersección con la solución del problema, dando respuestas como:
  - El punto es la solución del problema propuesto.
  - Es el par ordenado con el cual se resuelven las dos ecuaciones propuestas.
  - Es el resultado (la solución) de las dos ecuaciones al mismo tiempo.

Devolución:

- ✓ Pocos alumnos hicieron preguntas. Al ver sus respuestas observamos que relacionaban el punto de intersección con la solución de ambas ecuaciones y no con los valores de las variables que resuelven el problema. En este caso se les preguntó: ¿qué representa o que significa cada una de las coordenadas del punto de intersección? Esto ayudó a que dieran una mejor respuesta, sin embargo, los alumnos que no consultaron dieron respuestas interpretadas a su manera y no la que nosotros esperábamos.

Reformulación del enunciado:

l. **Explique,** ¿qué relación tiene **las coordenadas** del punto de intersección de las gráficas con **la solución** del problema propuesto?

Parte II: Trabajo grupal

Para el desarrollo de esta actividad, se contó con la presencia de los 12 alumnos anteriores. Se formaron 4 grupos de 3 integrantes de diferente nivel académico. Esta actividad tuvo dos momentos: primero se tenía que discutir los logros de la parte individual para llegar a una mejor conclusión y un segundo momento para resolver el problema mediante sistemas de ecuaciones lineales. Esta actividad tuvo una duración de 30 minutos.

Primer momento:

a. Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo, en las partes g, h, i, j, k, l.

Observaciones:

- ✓ Todos los grupos mejoraron al 100% los ítems (g), (h), (i), (j) y (k) respecto a la parte individual; es decir, graficaron e identificaron el punto de intersección correctamente. Mientras que el ítem (l), no obtuvo mejoras, lo hecho en la parte individual se volvió a repetir. Es decir, estamos convencidos de que los alumnos no comprendieron la pregunta y que ésta debe ser reformulada, como se mencionó al hacer el análisis en la parte individual.

Reformulación del enunciado:

l. **Explique,** ¿qué relación tiene **las coordenadas** del punto de intersección de las gráficas con **la solución** del problema propuesto?

Segundo momento:

b. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema

Observaciones:

- ✓ En esta pregunta hubo algunos grupos que tuvieron dificultades para representar un sistema de ecuaciones y se hacían preguntas como: ¿Qué debo escribir aquí? ¿Qué es un sistema?

Devolución:

- ✓ Ante esta dificultad, se les preguntó: ¿Cómo representaron al gasto total de viajes semanales y el número total de viajes semanales de Alejandro?, esto les ayudó a comprender que el sistema estaba conformado por dos ecuaciones.
- ✓ El 100% de los alumnos respondieron correctamente.

c. Resolver el sistema de ecuaciones de (b)

Observaciones:

- ✓ Tres grupos respondieron correctamente. Los métodos que más utilizaron son: sustitución y eliminación.
- ✓ Un grupo tuvo dificultad para resolver el sistema y preguntaron: ¿reemplazamos los valores del par ordenado $(10;11)$ en las ecuaciones de la pregunta b?

Devolución:

- ✓ Ante esta dificultad, se les contestó con la siguiente pregunta: ¿qué sucedería si no conocen los valores de x e y? ¿de qué manera resolverían el sistema de ecuaciones? Esto hizo que reflexionaran y ayudó a darse cuenta que tenían que resolver el sistema usando los métodos que conocían.

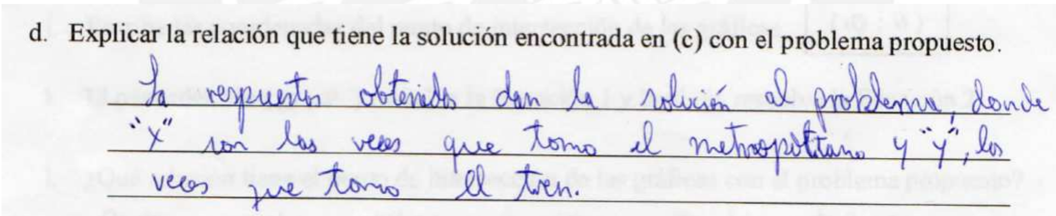
d. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (c) con el problema propuesto.

____

____

Observaciones:

- ✓ Tres grupos relacionaron correctamente la solución encontrada con la solución del problema propuesto. Mientras que solo un grupo no pudo comprender el significado de los valores encontrados con la solución del problema.
- ✓ Consideramos que la manera de preguntar es importante para obtener respuestas esperadas, si nos fijamos en los ítems (l) (parte individual) y (d) (parte grupal). La solución en (c) usualmente se da como valores de las incógnitas y no como un par ordenado, que fue el caso del punto de intersección en la parte individual. Por otra parte, la palabra "explicar" influyó para que las respuestas en ambos ítems fueran totalmente diferentes. En este ítem se obtuvo la respuesta esperada, como se aprecia en la figura 12.


d. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (c) con el problema propuesto.

La respuestas obtenidas dan la solución al problema, donde "x" son las veces que tomo el metropolitano y "y", las veces que tomo el tren.

Figura 12. Algunas respuestas al problema de la actividad

Devolución:

- ✓ Hubo un grupo que no entendió la pregunta, y ante esta situación se les comentó: "tenemos un problema al inicio de la actividad entonces ¿cómo relacionamos las respuestas obtenidas con la solución del problema propuesto?"

Reformulación del enunciado:

d. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (c) con la **solución** del problema propuesto.

Parte III: Trabajo grupal

Esta actividad fue diseñada con la finalidad de hacer que los alumnos vivencien lo trabajado anteriormente pero con una situación problemática diferente. Se trabajó con los mismos grupos y con la misma dinámica durante un tiempo de 30 minutos. Se pudo observar que los alumnos trabajaron con más confianza y seguridad, y algunos grupos terminaron antes del tiempo previsto.

Situación:

Un grupo de jóvenes de una Institución Educativa, organizaron un evento musical con la finalidad de recaudar fondos para la TELETÓN. Se sabe que, al evento asistieron adultos y niños por lo que los precios de las entradas no son los mismos.

Marta y Carmen asistieron al evento, pero ellas no saben cuál fue el precio de las entradas, pero sí recuerdan cuánto pagaron en total: Marta pagó S/.96 por 3 niños y 5 adultos y Carmen, pagó S/.73 por 4 niños y 3 adultos.

a. Definir dos variables que representen los datos desconocidos:

Observaciones:

✓ Los grupos trabajaron en forma entusiasta, participativa y discutiendo sobre lo presentado. El 100% de los alumnos identificaron y definieron correctamente los datos desconocidos:

x : Precio del boleto para niños.

y : Precio del boleto para adultos.

b. Utilizando las variables definidas en (a), expresa algebraicamente lo siguiente:

Marta pagó por 3 niños y 5 adultos, S/.96: ________________________________

Carmen pagó por 4 niños y 3 adultos, S/.73: ______________________________

Observaciones:

✓ Tres grupos relacionaron correctamente los datos conocidos y desconocidos del problema mediante ecuaciones. Solo a un grupo le faltó completar la expresión, dando como respuesta:

- $3x+5y$
- $4x+3y$

✓ Se evidencia que algunos alumnos aún presentan dificultades para pasar un enunciado verbal a un registro algebraico.

c. Completar la tabla.

Ecuación 1: ....+........$=96$			**Ecuación 2:**		
x	y	$(x;y)$	x	y	$(x;y)$
1			1		
2			2		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6			6		
7			7		

d. Graficar en un sistema de coordenadas las ecuaciones consideradas en (c)

Observaciones:

✓ Todos los grupos completaron correctamente la tabla y solo un grupo no terminó de graficar las rectas, pero sí ubicó correctamente el punto de intersección.

e. Escribir las coordenadas del punto de intersección de las gráficas y responder: ¿Qué relación tiene el punto de intersección con el problema propuesto?

Las coordenadas son: (;)

____

____

Observaciones:

✓ Tres de los grupos respondió de manera esperada, interpretando cada valor de las coordenadas del punto $(7;15)$, mientras que solo un grupo no pudo explicar lo esperado, dando como respuesta:

- *La relación es de que resuelve los dos problemas.*

Reformulación del enunciado:

e. Escribir las coordenadas del punto de intersección de las gráficas y **explicar**: ¿Qué relación tiene el punto de intersección con la **solución** del problema propuesto?

Las coordenadas son: (;)

f. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema y resolverlo empleando un método diferente al usado en (c) de la Parte II.

Observaciones:

✓ Todos los grupos plantearon correctamente el sistema de ecuaciones que resuelve el problema y lo resolvieron usando un método diferente al usado en el ítem (c) de la parte II, los métodos que usaron fueron sustitución y eliminación.

✓ A pesar de que todos los grupos plantearon correctamente el sistema de ecuaciones, creemos conveniente reformular el enunciado, para una mayor claridad.

Reformulación del enunciado:

f. Escribir un sistema de ecuaciones **que sirva para resolver el** problema y resolverlo empleando un método diferente al usado en (c) la Parte II.

g. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (f) con el problema propuesto

Observaciones:

✓ Encontramos que solo un grupo respondió de la manera esperada y hubo un grupo que dejó en blanco esta parte. Esto muestra deficiencias en la relación de la parte algebraica con el contexto del problema. También consideramos conveniente reformular el enunciado de la pregunta.

Reformulación del enunciado:

g. **Responder:** ¿**qué** relación tiene la solución encontrada en (f) con la **solución** del problema propuesto?

COMENTARIO DE LA PRIMERA ACTIVIDAD

En el trabajo individual, al inicio se pudo observar que algunos alumnos no comprendían los enunciados, estaban un poco tímidos y esperaban que el profesor les ayude a resolver alguna situación, poco a poco fueron familiarizándose y entraron en más confianza; a pesar de la orientación proporcionada tuvieron dificultades en algunos ítems y sus respuestas no fueron las esperadas.

En la parte grupal, parte II, se pudo observar mayor confianza, hubo integración entre los miembros del equipo formado; comenzaron a discutir sus respuestas y trabajaron en forma ordenada. Hicieron menos consultas que las hechas en la parte individual, se les brindó apoyo pero a pesar de ello aún hubo respuestas no esperadas. Cabe destacar que hubo una mejora notable respecto a la parte individual.

En la parte grupal, parte III, la situación didáctica se hizo con la finalidad de comprobar el trabajo anterior, simplemente se les dio un problema diferente con menos preguntas, quizás más directas debido a que ya contaban con una experiencia previa; como era de esperarse el trabajo en equipo se notó, hubo mucho más entusiasmo y los resultados fueron mejores a los dos anteriores. Hubo menos consultas y el tiempo empleado fue menor. Se percibe la influencia positiva de lo trabajado en las partes I y II.

Consideramos que algunas respuestas pudieron ser mejores, ya que es muy probable que algunos alumnos no hayan comprendido el texto de la pregunta, incluso algunos interpretaron de manera diferente a lo esperado, razón por la cual hemos reformulado algunos ítems.

5.2.2 Resultados y análisis de la actividad 2

En esta parte se presenta una tabla con los resultados obtenidos de la actividad 2, tanto individual como grupal, señalando el número de alumnos o grupos que llegaron a:

A. Respuestas correctas.
B. Respuestas en proceso.

C. Respuestas incorrectas.

D. Respuestas en blanco.

De un total de 14 alumnos, se formaron 4 grupos de 3 y 1 grupo de 2.

Tabla 4: Resultados de la actividad 2

PARTE I: TRABAJO GRUPAL	A	B	C	D
a	**5**			
b	**5**			
c	**5**			
d	**5**			
e	**5**			
f	**5**			
g	**5**			
h	**2**	**3**		
i	**2**	**3**		

En base a esta tabla, la ficha de observación y las soluciones de los estudiantes, se analizan los logros y dificultades encontradas en esta actividad.

ACTIVIDAD 2

Esta sesión se inició con una recapitulación de la actividad anterior, señalando los logros, las dificultades y los errores que tuvieron. Se enfatizó en explicar la relación que tiene la solución encontrada desde el punto de vista algebraico y gráfico con la solución del problema propuesto. La actividad se realizó con la presencia de 14 alumnos con una duración 40 minutos, de los cuales se formaron 4 grupos de 3 integrantes y un grupo formado por 2 integrantes debido a que faltó 1 alumno. Se les dio las indicaciones para el trabajo grupal, indicándoles que sus preguntas serán respondidas con otra pregunta que oriente a la respuesta o con una reflexión.

Los alumnos iniciaron la actividad leyendo la siguiente situación problemática:

Situación:

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, decide utilizar otros medios de transporte (combi, taxi, ómnibus, etc.) y solo uno de los dos medios de transporte mencionados en la actividad 1 (el metropolitano o el tren eléctrico). Analizando la manera de transportarse, él considera dos posibles rutas:

Ruta 1: Tomar primero el metropolitano y en seguida otros medios de trasporte.

Ruta 2: Tomar primero el tren eléctrico y en seguida otros medios de transporte.

En base a esta información él ha podido determinar el gasto semanal en pasajes, según el número de días que vaya al trabajo. La ruta 1 le genera un gasto de S/.30 por el uso de otros medios de transporte más S/.2 por cada día que vaya al trabajo, y la ruta 2 le genera un gasto de S/.26 por el uso de otros medios de transporte más S/.3 por cada día que vaya al trabajo.

Trabajo Grupal

a. Definir una variable x :

Observaciones:

✓ Todos los grupos lograron identificar el dato desconocido y lo definieron de la siguiente manera:

x : Número de días que Alejandro va al trabajo.

✓ Uno de los grupos demoró en comprender el problema, sin embargo, logró identificar y definir la variable solicitada.

b. Utilizando la variable definida en (a), representar algebraicamente:

- Gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 1, según el número de días que vaya al trabajo: ____
- Gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 2, según el número de días que vaya al trabajo: ____

Observaciones:

✓ En este ítem, los alumnos al inicio tuvieron algunas dificultades, hicieron consultas y demoraron más tiempo de lo establecido. Finalmente, todos los grupos lograron relacionar la variable x con los datos conocidos del problema, respondiendo:

- $30+2x$ para el gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 1.
- $26+3x$ para el gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 2.

Consideramos que el haber trabajado representaciones algebraicas de un enunciado verbal en la actividad anterior, ayudó a mejorar esta habilidad, ya que en un principio se había detectado dificultades.

Devolución:

✓ Los integrantes de algunos grupos no se ponían de acuerdo y llamaron al profesor para ver quien tenía la razón, y ante esta situación el profesor pidió que cada uno justifique su procedimiento ante sus compañeros. Se pudo observar que la mayor dificultad estuvo en relacionar los datos del problema con la variable x .

c. Si la próxima semana Alejandro solo irá tres días al trabajo, ¿cuál de las dos rutas le conviene si su objetivo es ahorrar? Justificar la respuesta.

Observaciones:

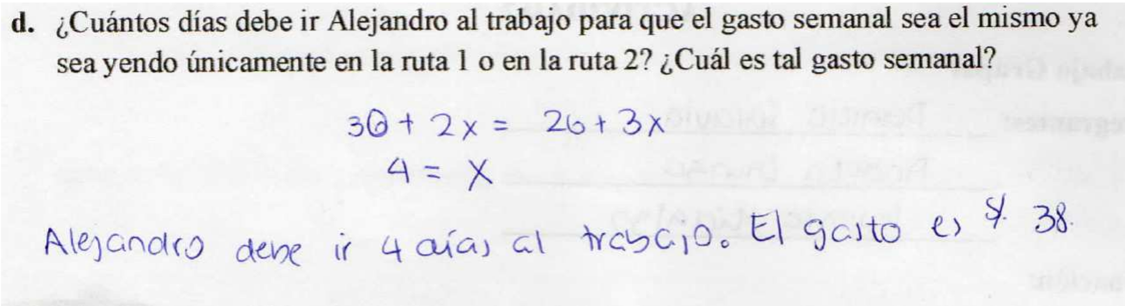
✓ En este ítem no se presentaron inconvenientes, los 5 grupos usaron lo trabajado en la parte (b) y lograron determinar que la ruta 2 es la más conveniente para Alejandro.

✓ Se mostró un adecuado manejo del registro verbal y los registros algebraicos que conllevan.

d. ¿Cuántos días debe ir Alejandro al trabajo para que el gasto semanal sea el mismo ya sea yendo únicamente en la ruta 1 o en la ruta 2? ¿Cuál es tal gasto semanal?

Observaciones:

✓ Este ítem tampoco presentó inconvenientes, todos los grupos lograron determinar el valor igualando las expresiones algebraicas correspondientes en cada ruta y resolvieron la ecuación (figura 13).



d. ¿Cuántos días debe ir Alejandro al trabajo para que el gasto semanal sea el mismo ya sea yendo únicamente en la ruta 1 o en la ruta 2? ¿Cuál es tal gasto semanal?

$$30 + 2x = 26 + 3x$$
$$4 = x$$

Alejandro debe ir 4 días al trabajo. El gasto es S/. 38.

Figura 13: Algunas respuestas al problema de la actividad 2

✓ Demostraron un adecuado tratamiento de los registros algebraico y verbal.

e. Completar la siguiente tabla para obtener diferentes valores del gasto semanal (y) según el número de días que Alejandro vaya al trabajo.

Nº de días	Gasto semanal (y) por usar la ruta 1 (S/.)	Gasto semanal (y) por usar la ruta 2 (S/.)
x	Ecuación:	Ecuación:
1		
2		
3		
4		
5		

Observaciones:

✓ Todos los grupos completaron correctamente la tabla con los gastos semanales para las rutas 1 y 2 según el número de días.

Devolución:

✓ Al inicio algunos grupos consultaron: ¿cómo obtenemos los gastos semanales? Ante esta consulta, se les pidió mirar la tabla con el propósito de hacer notar que debían usar las ecuaciones encontradas anteriormente.

f. Graficar en un sistema de coordenadas las dos ecuaciones obtenidas en (e), que representan a ambas rutas.

Observaciones:

- ✓ En este ítem, los grupos trabajaron con mucha confianza y rapidez. Se percibe la influencia la experiencia vivida en la actividad 1.
- ✓ Todos los grupos demostraron que saben relacionar las variables número de días y el gasto semanal como un par ordenado (figura 14)
- ✓ Todos los grupos trazaron correctamente las dos rectas señalando el punto de intersección, notándose un manejo adecuado del registro gráfico.

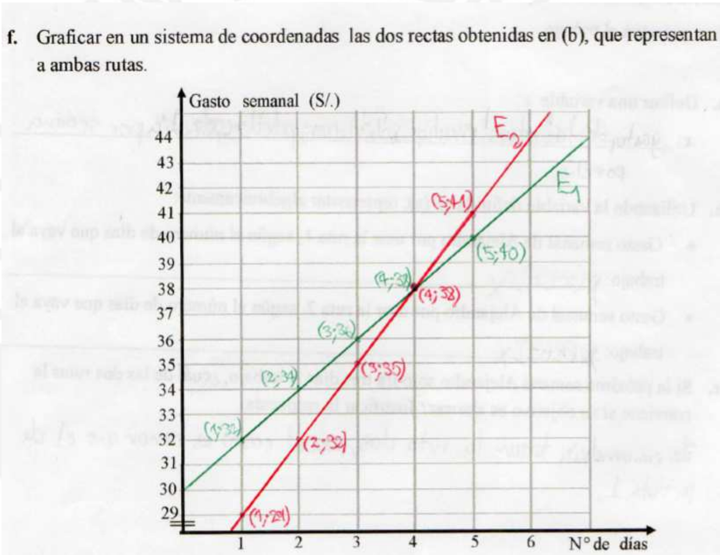


Figura 14: Algunas respuestas al problema de actividad 2

g. Observando las gráficas, determinar las coordenadas del punto de intersección:

(;)

Observaciones:

- ✓ Los 5 grupos escribieron $(4;38)$ como las coordenadas del punto de intersección.
- ✓ No hubo dificultades. Consideramos que es consecuencia de las soluciones correctas del ítem anterior.

h. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema y resolverlo empleando dos métodos diferentes.

Observaciones:

- ✓ Todos los grupos lograron plantear correctamente el sistema de ecuaciones, a pesar que al inicio tuvieron dificultades.
- ✓ En cuanto a la resolución del sistema, todos los grupos utilizaron el método de igualación. Como segundo método, tres grupos usaron el método de eliminación y uno el de sustitución.
- ✓ Dos grupos lograron determinar el número de días y el gasto semanal, lo que nos hace pensar que manejan la resolución de sistemas de ecuaciones con función afín explícita. Por otra parte, tres grupos solo encontraron el número de días. Consideramos que resolver este tipo de sistemas de ecuaciones, no permitió al alumno recordar que existen dos variables que están relacionadas y que deben encontrar valores específicos de ambas (figura 15).

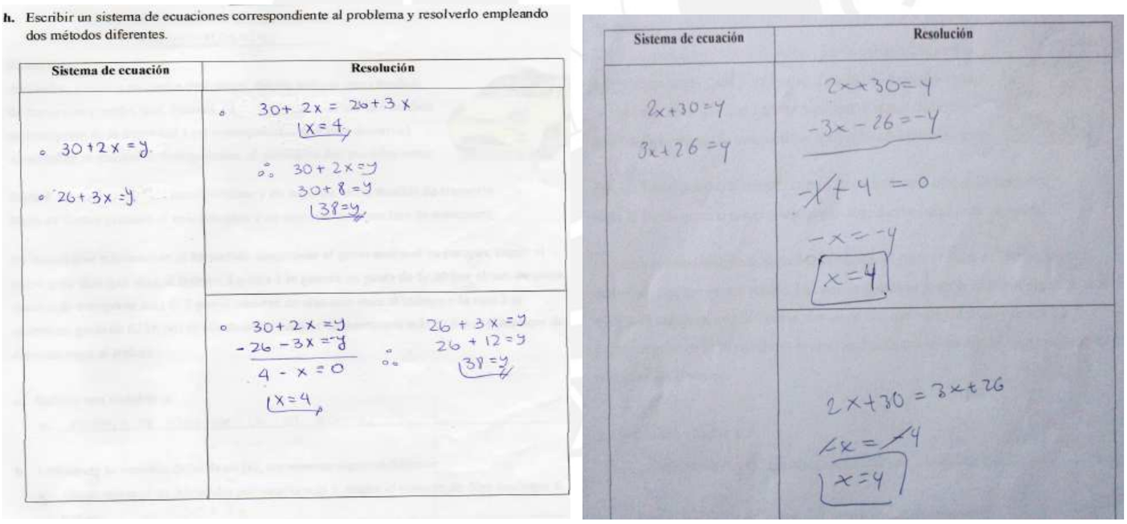


Figura 15: Algunas respuestas al problema de la actividad 2

Reformulación del enunciado:

h. Escribir un sistema de ecuaciones **que conduzca a la solución del** problema y resolverlo empleando dos métodos diferentes.

i. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (h) con el problema propuesto

Observaciones:

- ✓ En este ítem, algunos grupos tuvieron dificultad para responder lo solicitado; se notó que los integrantes de los grupos no se ponían de acuerdo en la respuesta que debían dar, ellos se hacían preguntas como: ¿qué pide el problema? ¿cuál es la pregunta del problema?

Devolución:

- ✓ Ante estas inquietudes, se les indicó que la pregunta al problema está propuesta en el ítem (d), ello hizo que algunos grupos respondieran correctamente lo solicitado tal como esperábamos, mientras que otros grupos, dieron respuestas como:
  - *La solución encontrada en (h) nos muestra que la variable “ x ” es igual a 4. Esta es la cantidad de días que se va a trabajar por semana.*
  - *Aquí tenemos tres maneras de resolver el problema, una usando funciones, al concluir en los mismos resultados que la variable x es igual a 4 y y es igual a 38.*

Las respuestas anteriores no son las esperadas y creemos que esto se debe, a que la pregunta al problema, no debió estar en el ítem (d) o de lo contrario debió especificarse en este ítem.

Reformulación del enunciado:

i. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (h) con **la pregunta planteada en (d)**.

COMENTARIO DE LA SEGUNDA ACTIVIDAD

En esta actividad, todos los grupos desarrollaron las situaciones planteadas con menor dificultad respecto a la primera actividad, conocían la dinámica de trabajo y demostraron interés por resolver el problema planteado. Se notó que los alumnos estuvieron más motivados; a pesar de las dificultades mencionadas anteriormente, los grupos terminaron en el tiempo previsto e incluso antes. Observamos que los alumnos aún presentan dificultades para relacionar datos conocidos con las variables e interpretar el significado de la solución de un sistema de ecuaciones con la solución del problema planteado.

5.2.3 Resultados y análisis de la actividad 3

En esta parte se presenta una tabla con los resultados obtenidos en la actividad 3, tanto individual como grupal, señalando el número de alumnos o grupos que llegaron a:

A. Respuestas correctas

B. Respuestas en proceso

C. Respuestas incorrectas

D. Respuestas en blanco

De un total de 12 alumnos, se formaron 4 grupos de 3 (parte II) y 6 grupos de 2 (parte III).

Tabla 5: Resultados de la actividad 3

PARTE I: TRABAJO GRUPAL	A	B	C	D
a	12			
b	2	7	3	
c	3	4	5	
d		8	3	1
e		5	5	2
f		5	5	2
PARTE II: TRABAJO	**A**	**B**	**C**	**D**
d	4			
e	2	2		
f	3	1		
PARTE III: TRABAJO	**A**	**B**	**C**	**D**
a	6			
b	6			
c	6			
d	5		1	
e	4	1	1	
f	1	3	2	
g	4		2	
h	4	1	1	
i	4	1	1	

En base a esta tabla, la ficha de observación y las soluciones de los estudiantes, se analizan los logros y dificultades encontradas en esta actividad.

ACTIVIDAD 3

En esta actividad se contó con la presencia de 12 alumnos, iniciamos con la recapitulación de la actividad anterior y una vez más señalamos sus logros y dificultades, resaltando que aún tienen dificultades para relacionar datos conocidos con las variables e interpretar el significado de la solución de un sistema de ecuaciones con la solución del problema planteado. La actividad tuvo dos momentos, en el primero se trabajó 2 partes, una individual y la otra grupal, ambas en el aula. El segundo momento se trabajó en la sala de cómputo, ya que usamos el software GeoGebra. Respecto a las regla de trabajo se les recalcó que serían las mismas de las actividades anteriores.

Los alumnos iniciaron la actividad leyendo la siguiente situación problemática:

Situación:

Alejandro se ha enterado que el precio del pasaje en el metropolitano va a cambiar, pero el número total de viajes (21), el gasto total semanal (S/.53) y el precio del pasaje en tren (S/.3) no variarán

Primer momento: Aula

Parte I: Trabajo individual

Alejandro desea saber: ¿cuántos viajes en metropolitano y cuántos en tren eléctrico haría en cada uno de los siguientes casos:

i. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 1
ii. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 3
iii. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 4

1. Escribir en cada caso un sistema de ecuaciones que represente el número total de viajes y el gasto total semanal y resolverlo por cualquier método.

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Observaciones:

- ✓ Todos los alumnos escribieron correctamente los sistemas de ecuaciones para cada caso. Inicialmente hubo algunas inquietudes para lograr el planteamiento.
- ✓ Respecto a la resolución:
  - En el ítem (a), los doce alumnos lograron encontrar la solución del sistema de ecuaciones $(5;16)$, como se puede apreciar en las figuras 16 y 17. No hubo dificultades.
  - En el ítem (b), dos alumnos lograron darse cuenta que el sistema no se podía resolver y uno de ellos expresó que el conjunto solución era vacío (figura 16). Siete alumnos usaron mecánicamente el método de eliminación o de sustitución (figura 23) y llegaron a expresiones como:

$$0 = -10 \text{ o } 63 = 53,$$

Que parece no haberlos sorprendido, por la ausencia de preguntas al respecto. Cuatro alumnos tuvieron serias dificultades, cometiendo errores de cálculo.

- En el ítem (c), tres alumnos lograron encontrar la solución de sistema de ecuaciones $(-10; 31)$, cuatro alumnos solo encontraron un valor como solución del sistema (figura 17) y cinco alumnos tuvieron errores de cálculo.

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1	$x+y=21$ $x+3y=53$	$x+3y=53$ $x+y=21$ $2y=32$ $y=16$ $x=5$
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3	$x+y=21$ $3x+3y=53$ $x+y=17{,}6$	$3x+3y=53$ $x+y=21$ $2x+2y=32$ $x+y=16$ $\emptyset$
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4	$x+y=21$ $4x+3y=53$	$4x+3y=53$ $3x+3y=63$ $x=-10$ $y=31$?

Figura 16: Algunas respuestas al problema de la actividad 3

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1	$x+y=21$ $x+3y=53$ $y=21-x$	$x+3(21-x)=53$ $x+63-3x=53$ $+2x=+10$ $y=16$ $x=5$
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3	$x+y=21$ $3x+3y=53$ $y=21-x$	$3x+3(21-x)=53$ $3x+63-3x=53$ $63=53$
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4	$x+y=21$ $4x+3y=53$ $y=21-x$	$4x+3(21-x)=53$ $4x+63-3x=53$ $x=-10$

Figura 17: Algunas respuestas al problema de la actividad 3

Devolución:

- ✓ Ante las inquietudes iniciales, se les sugirió leer nuevamente la situación planteada y recordar la forma de plantear sistemas de ecuaciones en las actividades anteriores.

2. Escribir una respuesta para cada caso, respecto al número de viajes en metropolitano y en tren eléctrico. Justificar.

CASOS	Respuesta	Justificación
d. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		
e. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
f. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Observaciones:

- ✓ En los ítems (d), (e) y (f), los alumnos no encontraban diferencia entre: esta tabla y la anterior, no sabían qué hacer donde dice **justificación**.
- ✓ Esto nos hizo pensar, y rápidamente nos dimos cuenta que no debimos considerar dos tablas. En ese momento decidimos hacer la siguiente aclaración: donde dice **respuesta** deben tener en cuenta los valores obtenidos en los ítems (a), (b) y (c), mientras donde dice **justificación** deben explicar la respuesta en el contexto del problema. A pesar de esta aclaración, las respuestas de algunos alumnos no fueron las esperadas.
- ✓ Como se puede observar, donde dice justificación el alumno volvió a resolver el problema o simplemente comprobó los valores.
- ✓ Consideramos pertinente reformular los enunciados 1 y 2 y fusionarlos presentando un solo cuadro y cuatro columnas.

Reformulación del enunciado:

2. **En el cuadro se presentan tres casos del nuevo precio del pasaje en metropolitano. Para cada uno de ellos escribir un sistema de ecuaciones que exprese el número total de viajes y el gasto total semanal. Resolverlo por cualquier método y dar una respuesta para cada caso, al problema de Alejandro de determinar el número de viajes en metropolitano y en tren eléctrico con el nuevo precio del pasaje en metropolitano que se especifica.**

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema	Respuesta al problema (Justifique)
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1			
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3			
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4			

Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo formado deben comparar sus resultados obtenidos en la parte individual (d, e, f). Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo.

CASOS	Respuesta	Justificación
d. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		
e. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
f. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Observaciones:

- ✓ En esta parte y después de haber hecho la aclaración (parte individual), las respuestas estuvieron mejor justificadas
- ✓ Los cuatro grupos respondieron y justificaron correctamente en el ítem (d), dando como respuesta:
  - *Si el precio del pasaje en metropolitano cuesta S/.1, Alejandro haría 5 viajes en metropolitano y 16 viajes en tren eléctrico.*
- ✓ En el ítem (e), dos grupos lograron darse cuenta que el sistema no era compatible y que por lo tanto no hay solución al problema (figura 18), y los otros dos grupos no terminaron de concluir su respuesta.
- ✓ En el ítem (f), tres grupos analizaron correctamente la solución del sistema de ecuaciones, relacionando las variables con la vida real, dando como respuesta:
  - *No se puede realizar – 10 viajes en el metropolitano, y por lo tanto el problema no tiene solución a menos que algunos de los datos varíe.*

Solo uno de los grupos no relacionó la solución del sistema con la solución del problema, como se muestra en la figura 19.

e. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3	Alejandro debe variar su presupuesto, número de viajes, o que el costo del tren eléctrico cambie.	Las ecuaciones no son compatibles, pues indican valores opuestos para la misma operación con las mismas incógnitas.

Figura 18: Algunas respuestas al problema de la actividad 3

f. el precio del pasaje en metropolitano es S/.4	$3x + 4y = 53$ $x + y = 61$ $y = \boxed{-10}$	El gasto semanal es mayor que 53 soles.

Reformulación del enunciado:

Todos los integrantes del grupo formado deben comparar sus resultados obtenidos en la parte individual **(a, b, c)**. Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo.

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema	Respuesta al problema (Justifique)
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1			
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3			
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4			

Segundo Momento: Laboratorio

Parte III: Trabajo grupal

Con el uso del GeoGebra representar gráficamente las ecuaciones correspondientes a los casos *a*, *b* y c y completar el siguiente cuadro:

Precio en el metropolitano	Sistema de ecuaciones	¿Las rectas se intersecan?	¿En qué cuadrante se ubica el punto de intersección? (En caso exista)	Coordenadas del punto de intersección (En caso exista)	
				x	*y*
d. S/.1					
e. S/.3					
f. S/.4					

Observaciones:

✓ Para esta parte, se les indicó que tomaran en cuenta los sistemas de ecuaciones del problema planteado en las partes I y II.

✓ En los ítems (a), (b) y (c), todos los alumnos completaron correctamente la tabla (figura 27), dejando indicios que conocían el software GeoGebra y además lograron relacionar e interpretar la parte geométrica con la algebraica.

d. Según el contexto del problema, ¿en todos los casos, las coordenadas del punto de intersección dan la solución del problema? ¿Por qué?

Observaciones:

✓ Esta es una de las preguntas que respondieron sin dificultad, cinco grupos lograron relacionar correctamente la solución del sistema de ecuaciones con la solución o respuesta del problema.

✓ Solo un grupo no logró dar la respuesta esperada.

e. Si el precio del pasaje en el metropolitano puede ir aumentando o disminuyendo de S/.0,50 en S/.0,50 ¿existe algún precio que lleve a una solución del problema? Explicar.

Observaciones:

✓ Al inicio algunos grupos tuvieron dificultad para comprender el enunciado, y usar el GeoGebra (herramienta – deslizador). Tres grupos lograron identificar a: S/.0,50; S/.1,00 y S/.2,50, como los precios del pasaje en el metropolitano que conducen a una solución razonable del problema. Mientras que otros grupos dieron respuestas como:

- *Sí se puede resolver desde S/0.50 hasta S/.2.50. A partir de S/.3.00 ya no se puede.*
- *Sí, los precios entre S/0.50 y S/.2.50; porque están entre los límites.*
- *No, debido a que mientras aumente el precio, aparecen valores que no pueden resolver el problema.*

✓ Estas respuestas se debieron a que no se especificó qué precios conducían a una solución coherente para el problema.

Devolución:

✓ Ante las dificultades en el uso del GeoGebra, se les preguntó: ¿qué herramienta del GeoGebra hace variar valores en un cierto rango? Enseguida los alumnos recordaron que la herramienta *deslizador* era lo que debían usar para resolver el problema.

✓ Por otro lado, también tuvieron dificultad para responder la pregunta, es por eso que se les preguntó: ¿qué representa la variable x y qué representa la variable y? Esto ayudó a reflexionar y a comprender que tenían que buscar precios para el pasaje en metropolitano donde la solución o punto de intersección tenga como coordenadas números enteros y positivos.

Reformulación del enunciado:

e. Si el precio del pasaje en el metropolitano puede ir aumentando o disminuyendo de S/.0,50 en S/.0,50 ¿**qué precios conducen** a la solución del problema? Explicar.

f. Resolver un problema similar, considerando que se mantienen fijos el precio del pasaje del metropolitano (S/.2), el número total de viajes (21) y el gasto total en pasajes (S/.53), pero el precio del pasaje en tren eléctrico variará. Examinar los casos de aumentos o disminuciones de S/.0,10 en S/.0,10. ¿Para qué precios del pasaje en tren eléctrico existen soluciones?

Observaciones:

- ✓ En este ítem, a pesar de que la situación planteada era similar a la del ítem anterior, los integrantes de algunos se mostraron confundidos y solicitaron ayuda del profesor.
- ✓ Solo un grupo respondió correctamente, es decir identificaron a: S/.3,10, S/.4,20 y S/.7,50, como los precios del pasaje en tren eléctrico que conducen a una solución razonable del problema. El resto de los grupos presentó dificultades en el análisis de sus respuestas, pues dieron algunos valores que no tenían sentido en el contexto del problema. Algunas respuestas fueron:
  - *Sí, si es 3; 3,1; 4,2; 7,5 y 13.*
  - *De S/.2,60 hacia delante, pues por mayor que sea el número, no volverá a ser negativo.*
  - *Desde 2,6 hasta S/.12.*

Devolución:

- ✓ Al ver que los grupos estaban un poco confundidos, se les preguntó: ¿en qué transporte variará el precio?, esto los ayudó a darse cuenta que debían plantear un sistema similar al del ítem anterior pero cambiando los valores en el precio del pasaje en tren eléctrico, luego comenzaron a explorar y a manipular el deslizador del GeoGebra.

g. Alejandro tiene la posibilidad de hacer un gasto total en pasajes mayor a los S/.53. Encontrar todas las soluciones correspondientes a estos gastos considerando aumentos de S/.1 en S/.1 y manteniendo fijos el número total de viajes (21) y los precios de los pasajes en metropolitano (S/.2) y en tren eléctrico (S/.3).

Observaciones:

- ✓ Para este ítem, los grupos estaban con más confianza en la manipulación de la herramienta deslizador del GeoGebra, comprendían mejor el uso de un parámetro en el sistema de ecuaciones que planteaban y su respectiva variación.
- ✓ Cuatro grupos lograron identificar correctamente los pares (figura 20) como todas las soluciones posibles al problema tal que Alejandro tenga un gasto total en pasajes mayor a S/.53,00. Mientras que dos grupos entendieron que solo debían indicar el mayor gasto de Alejandro, el cual no era lo solicitado.

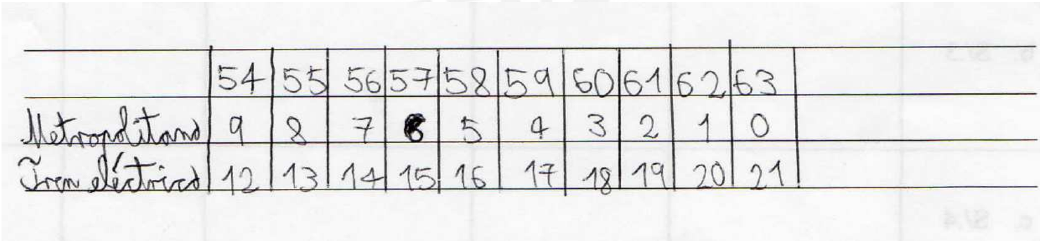


Figura 20: Algunas respuestas al problema de la actividad 3 (parte III)

Devolución:

- ✓ Una de las consultas fue: ¿mayor a S/.53 incluye a S/.53? Se les respondió: en lugar de mayor usa más de S/.53.

h. Para algún gasto menor de S/.53, ¿Alejandro viajará solamente en metropolitano?

Observaciones:

- ✓ En este ítem, los grupos trabajaron sin complicaciones pues entendieron que debían continuar con lo hecho en el ítem anterior pero bajo una nueva condición.
- ✓ Cuatro grupos lograron identificar que con un gasto de S/.42 Alejandro viajará solo en metropolitano. Un grupo respondió que sí, pero no señaló cual es el gasto y un grupo tuvo dificultades de interpretación de la pregunta.

i. Considerando cambios en el número total de viajes semanales y manteniéndose fijo todo lo demás, ¿cuál es el mínimo y el máximo número de viajes semanales en total que podría hacer Alejandro?

Observaciones:

- ✓ Cuatro de los seis grupos lograron responder que Alejandro haría como máximo 26 viajes y como mínimo 18 viajes. Algunos grupos agregaron a su respuesta la solución del sistema, el número de viajes que haría en metropolitano y en tren eléctrico, aunque no se les pidió. Un grupo logró encontrar el máximo pero en el mínimo se equivocó. El otro grupo no comprendió la pregunta.

COMENTARIO DE LA TERCERA ACTIVIDAD

El desarrollo de esta actividad se realizó en tres partes y en dos ambientes: en el aula y en el laboratorio. El primer momento corresponde al trabajo en el aula, en la parte individual hubo confusión por las tablas, algunos alumnos no encontraron diferencia entre una y la otra; sin embargo, se hizo la aclaración oportuna, lo que permitió un buen desarrollo de los ítems planteados. La mejora se vio reflejada en la parte grupal, y las conclusiones fueron mejores a las de la parte individual. En cuanto al trabajo en equipo se notó compromiso y entusiasmo.

El segundo momento, corresponde al trabajo en el laboratorio. Como era de esperarse, trabajar con un ambiente dinámico como es el software GeoGebra, motivó a los alumnos a resolver la actividad con mayor entusiasmo. Se pudo notar que tuvieron dificultades para resolver sistemas de ecuaciones con parámetro variable (variación de coeficientes y términos independientes), sin embargo, se puedo observar un debate profundo para defender sus respuestas y para corregir sus errores.

Cabe mencionar que este tipo de dificultades no se presenta en la secundaria ni en los cursos de matemáticas básicas de nivel superior; sin embargo corresponden a situaciones de la realidad y se ha verificado que su comprensión está al alcance de los estudiantes y que el software GeoGebra ayuda fuertemente a tal comprensión.

En esta actividad se está poniendo énfasis en la variable micro-didáctica VMPV, y observamos que la reacción ha sido favorable y se han podido superar.

5.2.4 Resultados y análisis de la actividad 4

En esta parte se presenta una tabla con los resultados obtenidos en la actividad 4, tanto individual como grupal, señalando el número de alumnos o grupos que llegaron a:

A. Respuestas correctas

B. Respuestas en proceso

C. Respuestas incorrectas

D. Respuestas en blanco

De un total de 13 alumnos, se formaron 6 grupos de 2 y 1 grupo de un alumno.

Tabla 6: Resultado de la actividad 4

PARTE I: TRABAJO GRUPAL	A	B	C	D
a	6			
b	6			
c	4	2		
d	6			
e	3	3		
f	3	1	2	
g	4	2		

En base a esta tabla, ficha de observación y las soluciones de los estudiantes, se analizan los logros y dificultades encontradas en esta actividad.

ACTIVIDAD 4

En esta actividad se contó con la presencia de los 12 alumnos, los mismos que participaron en todas las actividades anteriores, se empezó con la recapitulación de la actividad anterior, señalándoles sus dificultades y errores.

Toda la actividad se trabajó en el laboratorio, los grupos fueron los mismos que trabajaron en la actividad 3 – parte III.

Los alumnos iniciaron la actividad leyendo la siguiente situación problemática:

Situación:

Alejandro realiza viajes en metropolitano y viajes en tren eléctrico.

Trabajo grupal

(Pueden usar GeoGebra cuando lo consideren necesario)

a. ¿Es verdad que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

la solución es (3; 2)? Justificar

Observaciones:

- ✓ En este ítem los alumnos respondieron sin dificultad, todos los grupos respondieron correctamente a la pregunta. Algunos grupos justificaron sus respuestas de la siguiente manera:
  - *Resolvieron el sistema de ecuaciones y concluyeron que la solución no es (3, 2).*
  - *No porque el resultado sería decimal.*
  - *No, la solución es 2.67 y 2.33.*
  - *No, porque al reemplazar, la segunda ecuación sale desproporcionada.*
- ✓ Todas estas respuestas se consideran validas pues responden a la pregunta.
- ✓ Ningún grupo recurrió al uso del GeoGebra para resolver el sistema de ecuaciones.

b. Encontrar un sistema de ecuaciones que tenga como solución $(3;2)$.

Observaciones:

- ✓ En este ítem, todos los grupos respondieron correctamente. Algunos grupos se valieron del GeoGebra para descubrir un sistema de ecuaciones, graficando dos rectas cuyo punto de intersección era el punto $(3;2)$. Mientras que la mayoría de los grupos realizaron un procedimiento algebraico y hasta mental para llegar a un sistema de ecuaciones con la solución pedida.

- ✓ Dentro de las respuestas tenemos los siguientes sistemas de ecuaciones:
  - $\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x-4 \end{cases}$
  - $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$
  - $\begin{cases} x+y=5 \\ 2y+5=3x \end{cases}$

c. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza en un día 3 viajes en metropolitano y 2 viajes en tren eléctrico y se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (b).

Observaciones:

- ✓ En este ítem los alumnos trabajaron de forma ordenada y sin complicaciones, hicieron pocas consultas, mayormente nos pedían que les dijéramos si estaban bien o no.
- ✓ De los seis grupos, cuatro lograron pasar correctamente a un enunciado verbal, el registro algebraico encontrado en el ítem (b).
- ✓ Todos los grupos que tenían como sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x-4 \end{cases}$ respondieron:
  - *Alejandro utiliza el tren eléctrico y el metropolitano para ir a trabajar. Se desea saber cuántos viajes realiza en cada uno, si el número total de viajes es 5 y el número de viaje en tren eléctrico es el doble del número de viajes en metropolitano menos 4.*

En la figura Aquí uno de los grupos no hizo la pregunta: ¿cuántos viajes en metropolitano y tren eléctrico realizó Alejandro?, como se muestra en la siguiente figura.

- ✓ El grupo que tuvo como sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$, escribió un enunciado que no correspondía al sistema planteado (figura 21), pero su propuesta implicaba un sistema de ecuaciones que conduce a la solución pedida.

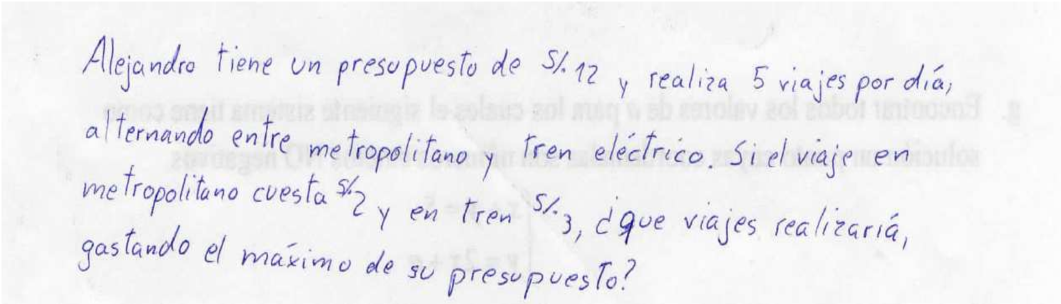

Alejandro tiene un presupuesto de S/. 12 y realiza 5 viajes por día, alternando entre metropolitano y tren eléctrico. Si el viaje en metropolitano cuesta S/. 2 y en tren S/. 3, ¿que viajes realizaría, gastando el máximo de su presupuesto?

Figura 21: Algunas respuestas al problema de la actividad 4

- ✓ Consideramos pertinente reformular el problema, poniendo énfasis en la vinculación del enunciado verbal con el sistema obtenido en la parte (b).
- ✓ Se observó que la presencia de una función afín explícita ayudó a formular el problema

Reformulación del enunciado:

c. Escribir un problema relacionado con los viajes de Alejandro, cuya solución se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (b).

g. Considerar el siguiente sistema:

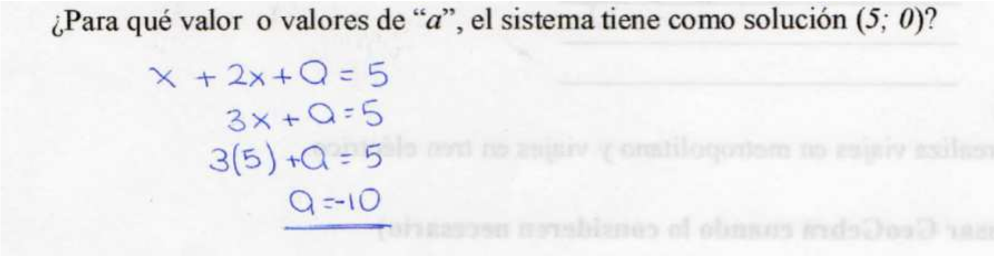
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x + a \end{cases}$$

¿Para qué valor o valores de "*a*", el sistema tiene como solución $(5;0)$?

Observaciones:

- ✓ Dos grupos encontraron el valor de a con ayuda del software GeoGebra. Haciendo uso de la herramienta deslizador.
- ✓ Cuatro grupos prefirieron reemplazar el punto $(5;0)$ en el sistema, resolverlo y encontrar el valor de a. Hubo un grupo que primero realizó procesos algebraicos, resolvió por sustitución el sistema de ecuaciones, con una función afín implícita y otra explícita, y luego reemplazó el valor de la abscisa en la ecuación simplificada. En la figura 22, observamos las respuestas de dos alumnos utilizando métodos algebraicos y

aritméticos.

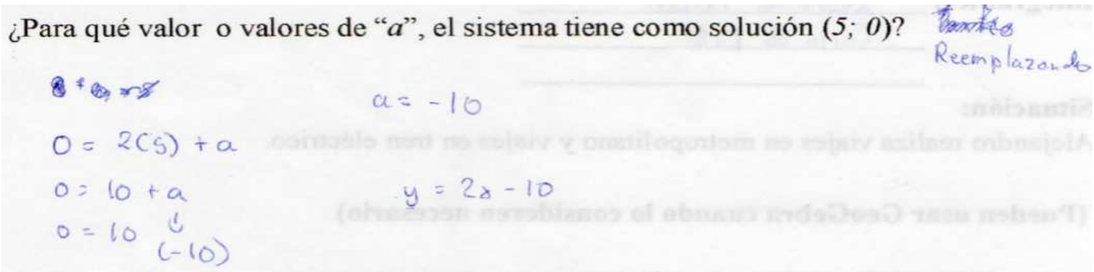

¿Para qué valor o valores de "*a*", el sistema tiene como solución (*5; 0*)?

$x + 2x + Q = 5$

$3x + Q = 5$

$3(5) + Q = 5$

$Q = -10$


¿Para qué valor o valores de "*a*", el sistema tiene como solución (*5; 0*)?

Reemplazando

$0 = 2(5) + a$

$0 = 10 + a$

$0 = 10 \quad (-10)$

$a = -10$

$y = 2x - 10$

Figura 22: Algunas respuestas al problema de la actividad 4

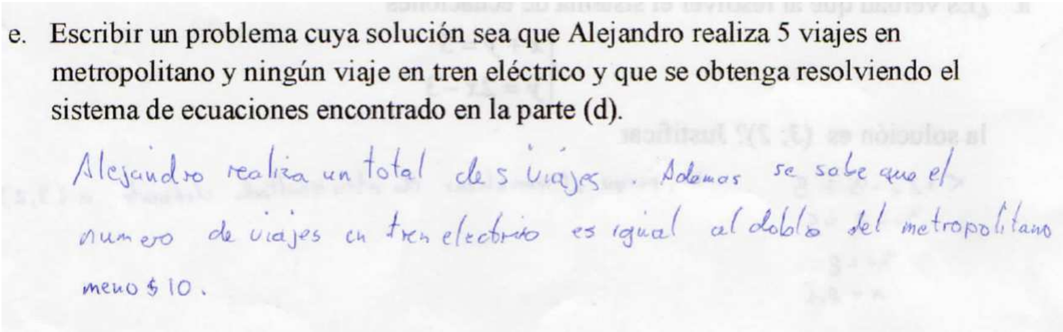
- ✓ Todos los grupos determinaron correctamente que para *a* = -10 el sistema tiene como solución el par (5; 0).
- ✓ Se aprecia una buena relación entre el tratamiento algebraico y las operaciones aritméticas.

h. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza 5 viajes en metropolitano y ningún viaje en tren eléctrico y que se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (d).

Observaciones:

- ✓ En este ítem, los grupos debían realizar algo similar a lo hecho en el ítem (c), es decir pasar del registro algebraico al registro verbal. Tres grupos escribieron adecuadamente un contexto para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x-10 \end{cases}$, dos grupos tuvieron errores de interpretación y redacción, y uno de los grupos hizo un enunciado correcto, pero olvidó hacer la pregunta a la situación problemática que estaban planteando (figura 23).
- ✓ Se percibe que hay más naturalidad al afrontar el paso del registro algebraico al verbal

✓ Consideramos que la función afín explícita en la segunda ecuación facilita el paso al registro verbal.



e. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza 5 viajes en metropolitano y ningún viaje en tren eléctrico y que se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (d).

Alejandro realiza un total de 5 viajes. Ademas se sabe que el numero de viajes en tren electrio es igual al doblo del metropolitano meno $ 10.

Figura 23: Algunas respuestas al problema de la actividad 4

i. Juan dice que inventó un problema relacionado con el número de viajes de Alejandro en metropolitano y en tren eléctrico, cuya solución la obtuvo resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+8 \end{cases}$$

María afirma que es imposible inventar un problema como el que dice Juan.
¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

Observaciones:

✓ Tres grupos resolvieron el sistema, utilizando los métodos de igualación , sustitución y eliminación; analizaron las soluciones encontradas y respondieron:

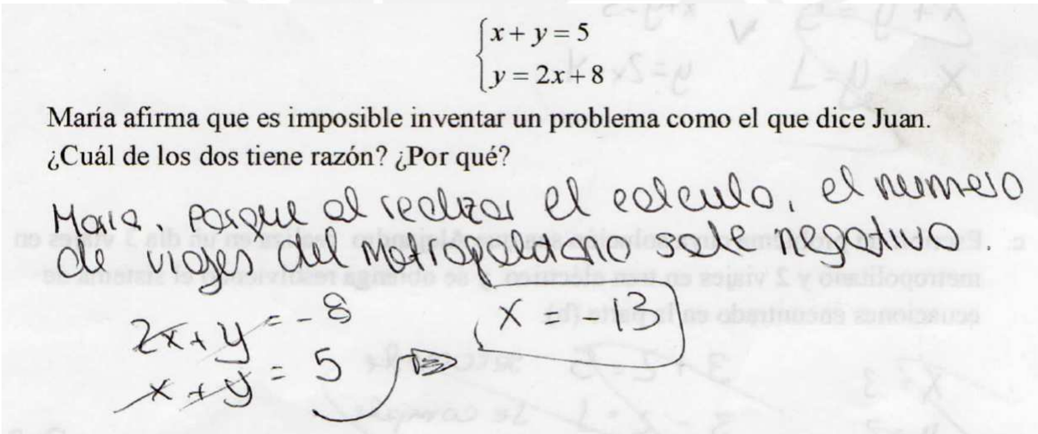
- *María tiene la razón ya que Alejandro no puede realizar viajes negativos.*
- *María tiene la razón porque es imposible que Juan realice* -1 *viajes en el metropolitano.*
- *María tiene la razón, pues indica a solución de Juan un viaje negativo, el cual sería imposible realizar en nuestra realidad.*

Estas respuestas son correctas y muestra que los alumnos están mejorando su capacidad de análisis.

Cabe mencionar que ninguno recurrió al registro gráfico, lo cual hace pensar en la necesidad de enfatizar las conversiones entre estos registros.

- ✓ Un grupo tuvo errores al resolver el sistema de ecuaciones lineales, pero analizó y respondió correctamente (figura 24)
- ✓ Dos grupos no mostraron haber resuelto el sistema de ecuaciones lineales, sin embargo, trataron de dar una respuesta, por ejemplo escribieron:
  - *María debido a que para que el de Juan sea verdadero una incógnita debe ser negativa.*

En esta respuesta se percibe la dificultad de escribir correctamente el resultado de un análisis del sistema. Este es un problema "extra matemático" que dificulta el paso del registro algebraico al verbal.



$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

María afirma que es imposible inventar un problema como el que dice Juan.
¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

María. Porque al realizar el calculo, el numero de viajes del Metropolitano sale negativo.

$2x + y = -8$

$\cancel{x} + y = 5$

$\boxed{x = -13}$

Figura 24: Algunas respuestas al problema de la actividad 4

j. Encontrar todos los valores de a para los cuales el siguiente sistema tiene como solución un punto cuyas coordenadas son números enteros NO negativos.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x + a \end{cases}$$

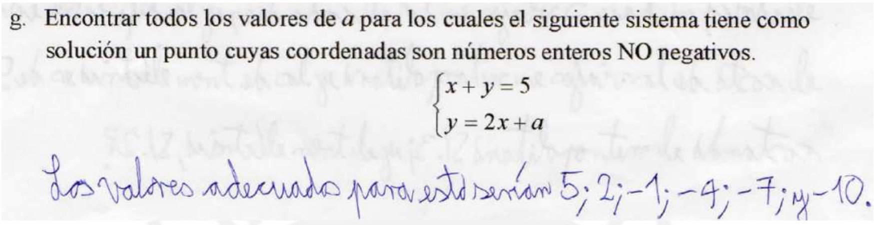
Observaciones:

- ✓ Al inicio, tuvieron dificultades de interpretación, pensaron que el valor de "a" es el que debía ser entero no negativo.

Devolución:

- ✓ Ante esta dificultad se solicitó a los alumnos que lean nuevamente el enunciado y descubran ¿quién debe ser entero no negativo? Esto ayudó a reflexionar e interpretar las soluciones y valores de “ a ”.

En la figura 4, observamos las respuestas de dos estudiantes; algunos verificaron sus respuestas demostrando su habilidad analítica.



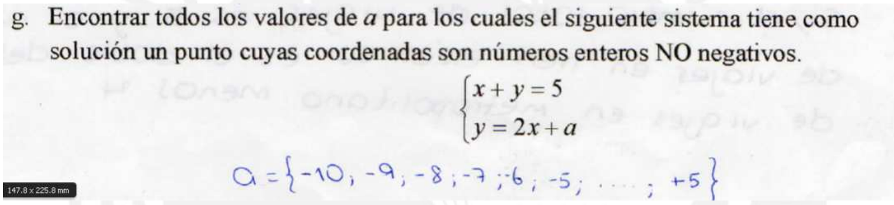


Figura 25: Algunas respuestas al problema de la actividad 4

- ✓ Todos los grupos se apoyaron en el software GeoGebra, específicamente usaron la herramienta deslizador. Esto permitió a cuatro grupos, encontraran correctamente todos los valores de “ a ” (figura 36). Mientras que los otros dos grupos, escribieron que los valores estaban comprendidos desde –10 hasta 5 como se aprecia en la figura 37, lo cual significa que no verificaron para valores de a como -9, -8, y otros, para los cuales las coordenadas del punto de intersección de las rectas correspondientes al sistema de ecuaciones, no son enteras.

COMENTARIO DE LA CUARTA ACTIVIDAD

Esta última actividad se trabajó en forma grupal, de dos integrantes cada grupo. Los alumnos trabajaron con más confianza, seguridad y rapidez, el haber trabajado las actividades 1, 2 y 3, ayudó a familiarizarse con los sistemas de ecuaciones con una función afín implícita y otra explícita; y con el software GeoGebra, utilizándolo cuando lo consideraban necesario.

Se observó que los alumnos presentan dificultades para expresar en forma verbal una ecuación con función afín implícita, sin embargo, para resolver el sistema no tenían ninguna dificultad, por el contrario lo resolvían con mucha facilidad.

Por otro lado, es pertinente señalar que para expresar enunciados verbales que correspondan a un sistema de ecuaciones lineales, los alumnos lo hacen con mayor facilidad cuando el sistema tiene una función afín explícita.

Luego de haber terminado las actividades, se hizo la última recapitulación de lo trabajado anteriormente, logrando resumir sus logros y las dificultades que tuvieron, para luego formalizar nuestro objeto de estudio, resolución de problemas con sistema de ecuaciones lineales con dos variables, y para ello se tuvo en consideración sus acciones, formulaciones para constituir todos los conocimientos y lograr la fase de institucionalización.

CAPÍTULO 6: ANÁLISIS A POSTERIORI

En esta última fase de la Ingeniería Didáctica, nos apoyaremos en los datos recolectados en la fase de experimentación, las producciones de los alumnos y los comportamientos esperados.

Se hará una comparación entre los análisis a priori y a posteriori de las situaciones didácticas, comparando los comportamientos esperados con los comportamientos que ocurrieron realmente en la clase. Finalmente se presentará la situación didáctica reformulada en base a lo encontrado en los análisis realizados.

6.1 Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en la experimentación

En el siguiente cuadro, detallaremos para cada ítem de las actividades, la comparación entre los comportamientos esperados y los comportamientos observados en la experimentación.

ACTIVIDAD 1

Parte I: Trabajo individual

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
a	▪ Se esperaba que los alumnos identificaran los datos conocidos del problema, como: el costo total del pasaje en tren eléctrico (S/.3), el gasto semanal por movilidad (S/.53) y el número total de viajes a la semana (21); sin embargo, de los 12 alumnos, solo 9 lograron responder correctamente, y el resto tuvo errores como repetir y confundir datos. ▪ Se reflejan las dificultades de comprensión lectora para una identificación adecuada de los datos.
b	▪ Tal como se esperaba, los alumnos realizaron los siguientes cálculos: $6\times 2=12$,

	$15 \times 3 = 45$ y $12 + 45 = 57$. Dándose cuenta que S/.57 sobrepasa al gasto real que hace Alejandro en una semana y concluyendo que Juan tiene razón. Los alumnos no tuvieron dificultad para resolverlo, excepto un alumno que no comprendió el texto, realizando operaciones incoherentes.
c	▪ Se esperaba que los alumnos identifiquen la operación $13 + 9 = 22$ para hallar el número total de viajes y concluir que Alejandro no realiza 22 viajes a la semana. Todos los alumnos identificaron la operación esperada y concluyeron correctamente. ▪ Este ítem fue resuelto con mayor facilidad y en un tiempo menor a lo establecido, posiblemente como consecuencia de la experiencia similar en el ítem (b).
d	▪ Tal como se esperaba, los alumnos tuvieron dificultad para definir las variables de los datos desconocidos: número de viajes en metropolitano y número de viajes en tren eléctrico. ▪ Para resolver problemas contextualizados, es primordial definir la variable o las variables de los datos desconocidos, por tal razón consideramos que es un punto a tomar especial atención. Los resultados confirman la gran dificultad que presentan los alumnos a la hora de resolver problemas, y esto se debe a que no pueden conectar los datos dados con las variables que conduzcan a la solución del problema. La dificultad fue generalizada a pesar de la devolución que realizamos.
e	▪ Se esperaba que los alumnos relacionen las variables definidas en el ítem (d) y los datos conocidos: el precio del pasaje de cada transporte (metropolitano y tren eléctrico), para expresar en un lenguaje algebraico el gasto total semanal que Alejandro pueda tener al usar el metropolitano $(2x)$ y el gasto semanal que Alejandro pueda tener al usar el tren eléctrico $(3y)$. Los resultados nos muestran que 6 alumnos presentaron serias dificultades para comprender lo que se les pedía, es decir relacionaron incorrectamente los datos conocidos con los desconocidos (variables). ▪ Esta dificultad siempre se presenta en alumnos de educación secundaria e

	incluso en alumnos universitarios, por lo tanto consideramos que es un punto relevante a trabajar a fin de obtener mejores resultados en la resolución de problemas.
f	▪ Se esperaba que los alumnos representen mediante ecuaciones, el gasto total en viajes por semana ($2x+3y=53$) y el número total de viajes por semana ($x+y=21$), sin embargo, debido a que los ítems (d), (e) y (f) están relacionados, los resultados muestran que varios alumnos no respondieron correctamente este ítem, tal como se esperaba, debido a los errores cometidos en los ítems (d) y (e). ▪ Este ítem, comprueba una vez más que los alumnos presentan serias dificultades para pasar de un registro verbal a un registro algebraico.
g	▪ Tal como se esperaba todos los alumnos determinaron correctamente los valores para “ y ” cuando “ x ” toma valores dados, encontrando un par ordenado que satisface ambas ecuaciones. ▪ Se pensó que era probable que algunos alumnos tuvieran errores de cálculo, pero esto no ocurrió.
h	▪ Se esperaba que no tengan dificultad para identificar el par ordenado $(10;11)$ como solución de ambas ecuaciones, sin embargo, hubo un alumno que no respondió y otro que escribió un par ordenado incorrecto.
i	▪ Se esperaba que representen gráficamente las ecuaciones $2x+3y=53$ y $x+y=21$. A pesar de la devolución que se hizo, 2 alumnos ubicaron algunos puntos pero no hicieron la gráfica de las rectas, mientras que 3 alumnos interpretaron equivocadamente que solo debían ubicar el punto de intersección $(10;11)$. Tal como se esperaba, los alumnos usaron un poco más del tiempo previsto.
j	▪ Tal como se esperaba los alumnos identificaron que el punto $(10;11)$ es el punto de intersección. Uno de los alumnos dejó este ítem en blanco.
k	▪ Tal como se esperaba los alumnos identificaron el punto $(10;11)$ como la solución del sistema. Uno de los alumnos dejó este ítem en blanco.

l	▪ Se esperaba que relacionen las coordenadas del punto $(10;11)$ con la solución del problema e interpreten esta solución como: "Alejandro realiza 10 viajes en metropolitano y 11 viajes en tren eléctrico". A pesar de la devolución que hicimos, los resultados demuestran que los alumnos tienen serias dificultades de interpretación. Las respuestas no fueron las esperadas, razón por la cual consideramos que es preferible que este ítem sea reformulado para facilitar su comprensión.

Parte II: Trabajo grupal

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados**
a	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos mejoraron al 100% los resultados de los ítems (g), (h), (i), (j) y (k), respecto a lo hecho en la parte individual. Mientras que el ítem (l) no obtuvo mejoras, las respuestas que dieron en la parte individual se volvió a repetir, lo cual confirma que el enunciado de este ítem no ayudó a responder lo que esperábamos.
b	▪ Se esperaba que los grupos escribieran el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=21 \\ 3y+2x=53 \end{cases}$ correspondiente al problema. Al inicio tuvieron dificultades, pero a través de la devolución el 100% de los grupos logró comprender y escribir las ecuaciones del sistema que resuelve al problema.
c	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos resolvieron el sistema de ecuaciones correctamente, 2 grupos resolvieron el sistema de ecuaciones usando el método de sustitución y los otros dos grupos lo resolvieron usando el método de eliminación.
d	▪ Se esperaba que comparen la solución $(10;11)$ del sistema discutido en el ítem (a), y lleguen a la conclusión que ambos resultados resuelven el problema, tanto de forma geométrica como algebraica. Además, el enunciado exigía interpretar el significado de las coordenadas de la solución. Solo un grupo tuvo dificultades

	para relacionar el punto $(10;11)$ con la solución del problema, a pesar que ya sea había trabajado en el ítem (a).

Parte III: Trabajo grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
a	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos lograron identificar los datos desconocidos y asignarles variables, tales como: x : Precio de entrada para niños. y : Precio de entrada para adultos.
b	▪ Se esperaba que representen en forma algebraica dos enunciados verbales, específicamente: $3x+5y=96$ y $4x+3y=73$. Solo uno de los grupos presentó dificultades para expresar los enunciados como ecuaciones, dejando evidencia que aún tienen dificultades para comprender un registro verbal y expresarlo algebraicamente.
c	▪ Tal como se esperaba, el 100% de los grupos completó correctamente la tabla e identificaron el par ordenado común a ambas ecuaciones.
d	▪ Se esperaba que los grupos ubiquen los puntos encontrados en el ítem (c) y que representen gráficamente las dos ecuaciones mediante dos rectas que pasen por dichos puntos. Solo uno de los grupos, ubicó algunos puntos pero no llegó a representar las gráficas de las rectas, notándose dificultades en usar un registro geométrico a partir de un registro algebraico dado.
e	▪ Se esperaba que a partir de la gráfica identifiquen el punto de intersección $(7;15)$ e interpreten a 7 como el precio de una entrada para niños y a 15 como el precio de una entrada para adultos. Todos los grupos lograron identificar las coordenadas del punto de intersección pero solo 3 grupos lograron relacionarlo correctamente con el problema planteado. El grupo que no lo relacionó correctamente es el mismo que se equivocó en el trabajo grupal parte II; además respondieron lo mismo.

f	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos plantearon y resolvieron el sistema de ecuaciones que resuelve el problema. Se observó que los grupos que utilizaron el método de sustitución en la parte II, utilizaron como nuevo método el de eliminación y los que usaron el método de eliminación en la parte II, usaron como nuevo método el de sustitución.
g	▪ Se esperaba que los grupos relacionen la solución encontrada en el ítem (f) con la solución del problema propuesto. Las respuestas encontradas no reflejaban lo que nosotros esperábamos, ya que los alumnos interpretaron el enunciado de este ítem de una manera diferente a la que nosotros habíamos pensado. En el último ítem de la parte I y II de esta actividad, se exigía la misma habilidad y debido a que esta actividad (parte I, II y III) se hizo en una misma clase, no dio tiempo para darnos cuenta que el enunciado escrito exigía una reformulación con la finalidad de obtener las respuestas que habíamos pensado.

ACTIVIDAD 2

Trabajo Grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
a	▪ Se esperaba que los grupos definan al dato desconocido como el número de días a la semana que Alejandro va al trabajo. Sin dificultad y con mayor seguridad todos los grupos respondieron correctamente. ▪ Consideramos que el haber practicado en la actividad anterior ayudó a mejorar sus respuestas.
b	▪ La mayoría de los grupos expresó en forma algebraica, el gasto semanal que hace Alejandro por la ruta 1 $(30+2x)$ y por la ruta 2 $(26+3x)$.
c	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos calcularon correctamente y sin dificultad el gasto semanal que generan ambas rutas por trabajar 3 días, y concluyeron que la ruta 2 es la más económica para Alejandro. Se mostró que existe una buena relación entre el registro algebraico y las operaciones aritméticas para ecuaciones explicitas.

d	▪ Tal como se esperaba, los grupos no tuvieron dificultad para determinar un valor para x y concluir que Alejandro debe ir 4 días al trabajo. ▪ Se consideró probable que encuentre un valor para x por tanteo e intuición, pero esto no se percibió, ya que todos los grupos desarrollaron tratamientos algebraicos en su hoja de respuestas.
e	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos completaron correctamente la tabla, aunque al inicio algunos grupos no identificaban las ecuaciones con las que debía trabajar. Con apoyo de la devolución que se hizo, el 100% de los grupos respondió correctamente.
f	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos ubicaron correctamente los puntos y trazaron las dos rectas, señalando el punto de intersección. Consideramos que el haber trabajado este ítem en la actividad 1, ayudó a que los alumnos manejaran estas gráficas (registro gráfico) con mayor facilidad.
g	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos identificaron correctamente las coordenadas del punto de intersección.
h	▪ Tal como se había previsto, todos los grupos escribieron y resolvieron correctamente el sistema de ecuaciones usando el método de igualación. Sin embargo, no todos los grupos resolvieron el problema mediante un segundo método y tres de estos grupos encontraron solo una de las componentes del par ordenado que resuelve el problema.
i	▪ A diferencia de lo que se consideró probable, en este ítem hubo dificultades para responder lo solicitado. La habilidad de interpretar la solución encontrada en el sistema resuelto en el ítem (h) con la solución que exigía el problema, una vez más salió a relucir en algunos grupos. A pesar de la devolución dada, las respuestas tuvieron un rumbo distinto a lo que nosotros habíamos pensado cuando se planteó el enunciado de este ítem.

ACTIVIDAD 3

Parte I: Trabajo Individual

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
a	▪ En este ítem, tal como se esperaba, todos los alumnos lograron escribir el sistema de ecuación $\begin{cases} x+y=21 \\ x+3y=53 \end{cases}$,lo resolvieron y encontraron la solución $(5;16)$. Debido a lo trabajado en las actividades anteriores, no hubo dificultades.
b	▪ En este ítem, todos los alumnos escribieron correctamente el sistema $\begin{cases} x+y=21 \\ 3x+3y=53 \end{cases}$, y tal como se esperaba, tratándose de ecuaciones de rectas paralelas, algunos alumnos tuvieron dificultades para resolverlo e interpretar la solución encontrada; hubo diversas respuestas y creemos que esto se deba a que en las actividades anteriores los sistemas de ecuaciones tenían solución única. ▪ Es destacable que en ningún caso se usó una conversión al registro gráfico para examinar la situación al encontrar algo extraño algebraicamente.
c	▪ Tal como se esperaba todos los alumnos escribieron correctamente el sistema $\begin{cases} x+y=21 \\ 4x+3y=53 \end{cases}$, pero solo tres alumnos lograron resolverlo correctamente, encontrando como solución $x=-10$ e $y=31$. Cuatro alumnos solo encontraron uno de los dos valores y los otros alumnos restantes tuvieron errores de cálculo. ▪ Se percibe procesos mecánicos y la falta de uso del registro gráfico para resolver sistema de ecuaciones con dos variables.
d	▪ Se esperaba que los alumnos escribieran la respuesta encontrada en el ítem (a), es decir: $x=5$ e $y=16$ e interpreten estos valores como los viajes que debe realizar Alejandro en el metropolitano y en el tren eléctrico, respectivamente. Pero a diferencia de lo que se esperaba, esto no ocurrió en algunos alumnos, debido a que los alumnos confundieron la primera tabla con la segunda pensando que se trataba de lo mismo.

e	▪ Se esperaba que los alumnos escribieran y analizaran la respuesta encontrada en el ítem (b), dando como respuesta: "bajo este contexto el problema no tiene solución". Pero a diferencia de lo que se esperaba, esto no ocurrió, debido a que los alumnos confundieron la primera tabla con la segunda pensando que se trataba de lo mismo y además porque este ítem dependía de la efectividad que se debía tener al resolver el sistema planteado en el ítem (b), y como se sabe no todos resolvieron correctamente este ítem.
f	▪ Se esperaba que los alumnos escribieran la respuesta encontrada en el ítem (c), es decir: $x = -10$ e $y = 31$ y analicen estos valores, dando como respuesta que no es posible determinar el número de viajes en el metropolitano ni en el tren eléctrico, debido a que uno de los valores es un número negativo. ▪ Cabe mencionar que resolver un sistema de ecuaciones no es lo mismo que resolver un problema con un sistema de ecuaciones.

Parte II: Trabajo Grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
d	▪ Se esperaba que los alumnos comparen y reflexionen las respuestas escritas en la parte individual, con la finalidad de uniformizar y dar una respuesta concreta. Todos los grupos completaron este ítem tal como esperábamos y eso gracias a las aclaraciones que surgieron en la actividad grupal, comparando sus resultados individuales.
e	▪ Se esperaba que los alumnos comparen y reflexionen las respuestas escritas en la parte individual, con la finalidad de uniformizar y dar una respuesta concreta. A pesar de la aclaración que hicimos respecto a las respuestas que observamos en la parte individual, en este ítem dos grupos no lograron concluir sus respuestas y es muy probable que sea por los errores cometidos en el ítem (e) parte individual.

	▪ Cabe destacar que el trabajo grupal ayudó a mejorar sus respuestas. Sin embargo, a pesar de trabajar grupalmente, no aflora el análisis gráfico, ante los resultados algebraicos.
f	▪ Se esperaba que los alumnos comparen y reflexionen las respuestas escritas en la parte individual, con la finalidad de uniformizar y dar una respuesta concreta. A pesar de la aclaración que hicimos respecto a las respuestas que observamos en la parte individual, en este ítem solo un grupo no logró relacionar la solución del sistema con la solución del problema. ▪ Todos los grupos demostraron conocer los procesos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones con dos variables y solo uno de los grupos no relacionó correctamente la solución encontrada del sistema con el problema propuesto. Es distinto encontrar la solución de un sistema que la solución de un problema. ▪ Cabe destacar que el trabajo grupal ayudó a mejorar la interpretación del resultado proveniente de procesos algebraicos. Sin embargo, no afloró en lo alumnos el uso de un registro gráfico.

Parte III: Trabajo Grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
a **b** **c**	▪ Tal como se esperaba, todos los alumnos validaron correctamente el trabajo realizado en los ítems (d), (e) y (f) – parte II. Se mostró un trabajo ordenado, dejando evidencia que conocen el software GeoGebra, logrando relacionar e interpretar los registros geométricos y algebraicos. ▪ Esta es una muestra de que el instrumento tecnológico GeoGebra contribuye a que los alumnos relacionen más y mejor los registros algebraico y gráfico.
d	▪ Tal como se esperaba, la mayoría de los grupos respondió que solo en el ítem (a) las coordenadas del punto de intersección daban la solución del problema y que en los otros dos casos se tenía que reformular o cambiar los datos para que el problema tenga soluciones coherentes. Solo un grupo dio una respuesta no

	esperada. ▪ Se corrobora lo afirmado anteriormente respecto al GeoGebra
e	▪ Se esperaba que al manipular el comando "deslizador" del GeoGebra, observen que si el precio del pasaje en el metropolitano es S/0.5, S/.1 o S/2.5 entonces existe una solución coherente para el problema propuesto. Tal como se esperaba, algunos de los grupos presentó dificultades al usar los comandos del GeoGebra, no logrando identificar los precios esperados. ▪ A pesar que conocían el software GeoGebra, la poca práctica con la herramienta "deslizador" para interpretar sistemas de ecuaciones con parámetro variable (variación de un coeficiente), hizo que se presentaran estas dificultades. Es evidente que el cambio de variable micro-didáctica influyó en sus respuestas. (De VMPF a VMPV)
f	▪ Se esperaba que al manipular el deslizador, observen que si el precio del pasaje en el tren eléctrico es S/3.10, S/.4.20 o S/7.50, entonces existe una solución coherente para el problema propuesto. A diferencia de lo que se esperaba, solo uno de los grupos respondió correctamente; el resto de grupos evidenció la falta de interpretación de los valores del punto de intersección obtenidos con el GeGeobra, dando respuestas fuera del contexto real del problema. (Uso de la VMPV-C)
g	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos mostraron más confianza para manipular la herramienta deslizador; la mayoría de los grupos lograron encontrar todos los pares ordenados que resolvían el problema, es decir que Alejandro tenga un gasto total en pasajes mayor a S/.53. Algunos grupos no lograron identificar todas las posibilidades de solución, demostrando que no relacionan la situación problemática con los valores obtenidos desde el GeoGebra. ▪ Se perciben las dificultades al pasar a la VMPV-Ti.
h	▪ Tal como se esperaba, la mayoría de lo grupos manipularon el deslizador correctamente y observaron que si el gasto total semanal es S/.42, Alejandro solo podría viajar en el metropolitano. Solo uno de los grupos presentó dificultades para interpretar la pregunta de este ítem.

	▪ Consideramos, que después de haber trabajado los ítems anteriores, los alumnos obtuvieron más confianza en el uso del GeoGebra y esto les permitió fortalecer su capacidad de análisis e interpretación.
i	▪ Tal como se esperaba, la mayoría de los grupos al usar la herramienta deslizador, identificaron correctamente que Alejandro debía realizar como máximo 26 viajes y como minino 18. Solo uno de los grupos dio una respuesta no esperada, ya que sus integrantes comprendieron equivocadamente que la pregunta exigía la solución del sistema de ecuaciones o el punto de intersección de las rectas. ▪ Se destaca la importancia del uso del deslizador para el manejo de la VMPV.

ACTIVIDAD 4

Trabajo Grupal

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados
a	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos resolvieron correctamente el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x-3 \end{cases}$, y responder que el punto $(3;2)$ no es la solución. Ninguno de los grupos evidencio haber usado el GeoGebra para obtener la solución, por lo que consideramos que solo hicieron uso de los métodos de eliminación o igualación usados en las actividades anteriores. ▪ Que no hayan usado el GeoGebra resulta positivo, pues revela que no hay un apego al instrumento tecnológico, ya que no lo usan para algo tan simple.
b	▪ Tal como se había previsto en este ítem algunos grupos hicieron uso del GeoGebra para encontrar un sistema que tenga como solución el punto $(3;2)$, mientras que la mayoría de los grupos encontró el sistema de ecuaciones realizando un procedimiento algebraico, modificando el sistema del ítem a. El 100% de los grupos encontró un sistema de ecuaciones correcto.
c	▪ Se esperaba redacten un problema contextualizado (registro verbal) a partir del

	sistema de ecuaciones y su solución encontrada en el ítem anterior (registro algebraico). La mayoría de los grupos redactó un problema, tal y como lo esperábamos. Un grupo redactó el problema sin explicitar la pregunta: ¿cuántos viajes en metropolitano y tren eléctrico realizó Alejandro? Y otro grupo redactó un problema correctamente pero no consideró el sistema que había encontrado en el ítem anterior; en su lugar consideró otro sistema pero que también tenía la solución exigida. ▪ Consideramos que la presencia de una función afín explícita ayudó a formular el problema. (Uso de la VMFE).
d	▪ Tal como se esperaba, todos los grupos encontraron que – 10 es el valor de a para que el sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+a \end{cases}$ tenga como solución el punto $(5;0)$. Se pudo observar que para encontrar el valor de a, algunos grupos usaron la herramienta *deslizador* del GeoGebra, mientras que otros reemplazaron el punto $(5;0)$ en el sistema de ecuaciones dado. (Uso de la VMPV-Ti) ▪ Es positivo que algunos alumnos no hayan usado GeoGebra.
e	▪ Se esperaba que redacten un problema contextualizado (registro verbal) a partir del sistema de ecuaciones y su solución encontrada en el ítem anterior (registro algebraico). A diferencia de lo que se esperaba, solo la mitad de los grupos redactó correctamente el problema, el resto cometió errores de interpretación y redacción. Esto nos señala la dificultad que tienen los alumnos para convertir a un registro verbal un registro algebraico expresado en un sistema lineal de ecuaciones, por más simple que éste parezca. En este caso, con VMFE.
f	▪ Se esperaba que resuelvan el sistema dado, obtengan como solución $(-1;6)$ y respondan que María tiene la razón porque Alejandro no puede realizar – 1 viaje en metropolitano. Solo dos de los grupos no respondió correctamente y esto se debió a que cometieron errores en la solución del sistema. ▪ Es pertinente señalar que debemos enfatizar más las conversiones entre el registro algebraico y el registro gráfico, ya que ninguno de los grupos recurrió al registro grafico para resolver el sistema.

	▪ El que no hayan usado el GeoGebra resulta positivo, pues revela que no hay un apego a este instrumento tecnológico, ya que no lo usan para algo tan simple.
g	▪ Tal como se esperaba y a pesar de la devolución que hicimos, algunos grupos presentaron dificultades de interpretación, específicamente, no tomaron en cuenta la indicación que las coordenadas de los puntos debían ser números enteros y no negativos. Sin embargo, la mayoría de los grupos usó correctamente el comando *deslizador* del GeoGebra y lograron describir todas las soluciones del sistema dado, mostrando dominio en la solución de los sistemas de ecuaciones con parámetros variables usando el software GeoGebra. ▪ Se advierte deficiencias en el conocimiento de los intervalos de números reales, pues responden que *a* debe variar entre -10 y 5, asumiendo que eso implica tomar solo los valores enteros. Más aún, no especifican que entre -10 y 5 hay algunos números enteros para los cuales el valor de *a* no lleva a un sistema cuya solución tenga coordenadas no negativas. ▪ Considerando que respondieron bien el ítem anterior y el ítem d de la actividad III, podría deducirse que todavía no se ha avanzado mucho en el manejo de casos no contextualizados como éste, cuando se tiene VMPV y el análisis de las soluciones relevantes.

LAS VARIABLES MICRO DIDÁCTICAS EN EL ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con respecto a las variables:

a. **Interdependencia de variables:** Ambas ecuaciones con función lineal implícita (VMFI) y una o ambas con función lineal explicita (VMFE).

Este tipo de variables se presentaron en todas las actividades que realizamos y las reacciones de los alumnos ante los cambios de la variable didáctica (interdependencia de variables), en términos generales, han sido las mismas en cada una de las actividades. No se han manifestado dificultades específicas con respecto al uso de estas variables. Cabe mencionar que previo a estas actividades, fue importante que su profesora de Matemática trabajara los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, esto permitió aclarar el concepto de sistemas de ecuaciones, variables, las formas de expresar un sistema (forma explícita e implícita) y métodos de resolución.

La VMFE facilitó la creación de problemas que se resuelvan con un sistema previamente dado.

b. Tipo de parámetros:

- Parámetro fijo (VMPF)
- Parámetro variable (VMPV)

- Variación de un coeficiente (VMPV-C).

- Variación de un término independiente (VMPV-Ti).

Este tipo de parámetros VMPF y VMPV fueron utilizados con mayor frecuencia en las actividades 3 y 4. Al inicio de la actividad 3 se trabajó con VMPV, en el cual los alumnos advirtieron algunas dificultades, ya que tenían que variar un coeficiente o un término independiente en el sistema de ecuaciones haciendo uso del GeoGebra. Para la actividad 4, los alumnos mostraron más confianza y conocimiento de la herramienta deslizador y esto facilitó resolver los sistemas con VMPV. Al final, se pudo observar dificultades sobre todo de interpretación de los enunciados, más que del conocimiento propio del GeoGebra y el uso de VMPV. Cabe mencionar que previo a estas actividades, su profesora realizo una clase, para que los alumnos conozcan algunos comandos del software dinámico y sobre todo la herramienta deslizador.

OBSERVACIONES

a. Semejanzas entre lo esperado y lo observado:

- Dificultad para definir una variable para datos desconocidos de un problema.
- Dificultad para representar algebraicamente una ecuación según el contexto del problema.
- Dificultad para representar gráficamente las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

- Dificultad para interpretar y relacionar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables en forma gráfica o algebraica con la solución del problema propuesto.
- Dificultad para determinar e interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales sin solución.
- Dificultad para interpretar los resultados obtenidos en el GeoGebra con la solución del problema propuesto.
- Dificultad para redactar un problema contextualizado, a partir de un sistema de ecuaciones lineales y su solución.

Como se había previsto, estas dificultades fueron disminuyendo conforme se iban desarrollando las actividades.

b. Diferencias entre lo esperado y lo observado:

- Poca claridad a la hora de definir las variables y relacionarlas con el contexto del problema, incluso en las actividades finales. Podría ser conveniente incluir más preguntas que refuercen esta habilidad.
- Demora, más allá de lo esperado, en entender los enunciados contextualizados.
- Habían preguntas donde se esperaba que interpreten la solución encontrada usando el registro gráfico o algebraico con la solución del problema, pero se obtuvieron respuestas inesperadas, lo cual nos hace pensar que hay que enfatizar la interpretación en diversos casos y reformular las preguntas de la actividad, buscando la mayor claridad posible para facilitar la capacidad de análisis e interpretación del alumno.

Por motivos de tiempo no se pudo aplicar entrevistas que hubiesen permitido indagar un poco más con respecto a sus respuestas.

Estos aspectos mencionados, deberían tenerse en cuenta en futuras investigaciones relacionadas con temas afines a la resolución de problemas.

6.2 Secuencia didáctica rediseñada

Teniendo en cuenta el análisis a priori, los comportamientos observados durante la experimentación y la comparación entre ambos, realizamos algunos cambios a la situación diseñada originalmente, cambios cuya justificación se explicó en los análisis mencionados.

ACTIVIDAD 1

Situación

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, utiliza dos medios de transporte: El metropolitano y el tren eléctrico. El pasaje en el metropolitano es 2 soles y en el tren eléctrico 3 soles y sus gastos semanales por movilidad son de 53 soles. Además, se sabe que realiza en total 21 viajes a la semana.

Se desea saber el número de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano y el número de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico.

Parte I: Trabajo Individual

a. Identifica y completa los datos conocidos que faltan.

- La tarifa en el metropolitano es
- ______________________________
- ______________________________
- ______________________________

b. María dice que Alejandro hace 6 viajes en el metropolitano y 15 viajes en el tren eléctrico, pero Juan dice que no puede ser, porque así Alejandro no gastaría 53 soles en total. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

c. Pedro dice que entonces Alejandro hace 13 viajes en el metropolitano y 9 viajes en el tren eléctrico porque eso explica que gasta en total 53 soles, pero Teresa dice que no puede ser, porque en ese caso Alejandro habría hecho más de 21 viajes. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

d. Identifica y define dos variables que representen los datos desconocidos.

x :____

y :____

e. Utilizando las variables definidas en (d), expresa algebraicamente:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el metropolitano:_______________

Gasto total de viajes semanales de Alejandro en el tren eléctrico:________________

f. Escribe en cada caso una ecuación que exprese:

Gasto total de viajes semanales de Alejandro: ________________________________

Número total de viajes semanales de Alejandro: ______________________________

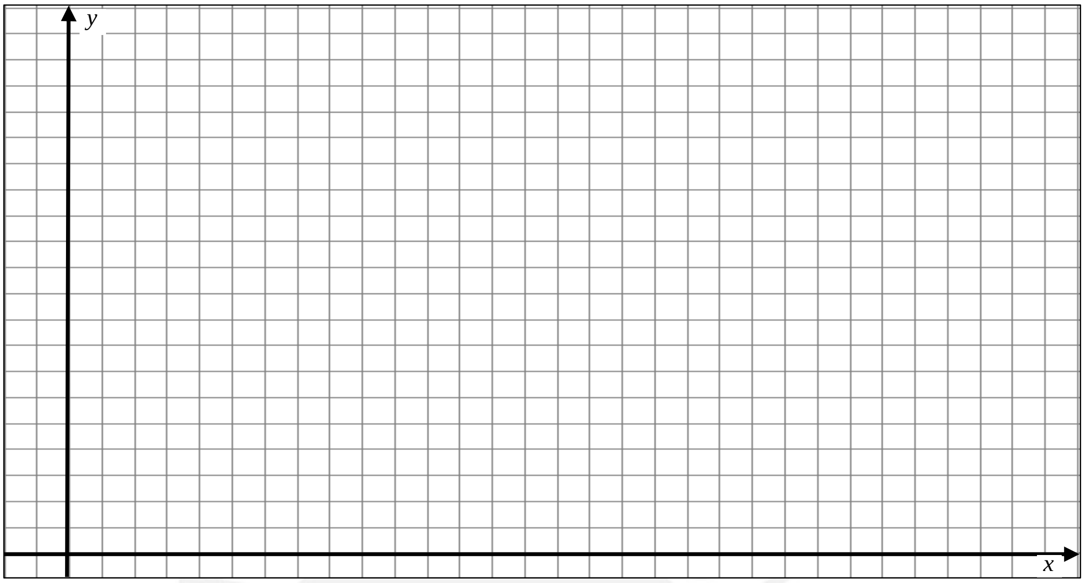
g. Completa la tabla con valores para x y para y que sean solución de las ecuaciones que se dan.

Ecuación 1: $x + y = 21$			**Ecuación 2:** $2x + 3y = 53$		
x	y	$(x; y)$	x	y	$(x; y)$
1	20	(1; 20	1	17	(1;17)
3			3		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7			7		
10			10		

h. Observando la tabla anterior, identifica un par ordenado que es solución de las dos ecuaciones

$\boxed{(\quad ; \quad)}$

i. Grafica en el siguiente sistema de coordenadas la **Ecuación 1** y la **Ecuación 2** consideradas en (g).



j. Escribe las coordenadas del punto de intersección de las gráficas: (;)

k. El par ordenado (;) resuelve la Ecuación 1 y también resuelve la Ecuación 2

l. Explique, ¿qué relación tiene las coordenadas del punto de intersección de las gráficas con la solución del problema propuesto?

____

____

____

Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo formado deben comparar sus resultados obtenidos en la parte individual.

a. Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo, en las partes g, h, i, j, k, l.

b. Escribir un sistema de ecuaciones correspondiente al problema.

c. Resolver el sistema de ecuaciones de (b)

d. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (c) con la solución del problema propuesto.

____

____

____

Parte III: Trabajo grupal

Situación:

Un grupo de jóvenes de una Institución Educativa, organizaron un evento musical con la finalidad de recaudar fondos para la TELETÓN. Se sabe que, al evento asistieron adultos y niños por lo que el precio de las entradas no son las mismas.

Marta y Carmen asistieron al evento, pero ellas no saben cuál fue el precio de las entradas, pero sí recuerdan cuanto pagaron en total: Marta pagó S/.96 por 3 niños y 5 adultos y Carmen, pagó S/.73 por 4 niños y 3 adultos.

a. Definir dos variables que representen los datos desconocidos:

____

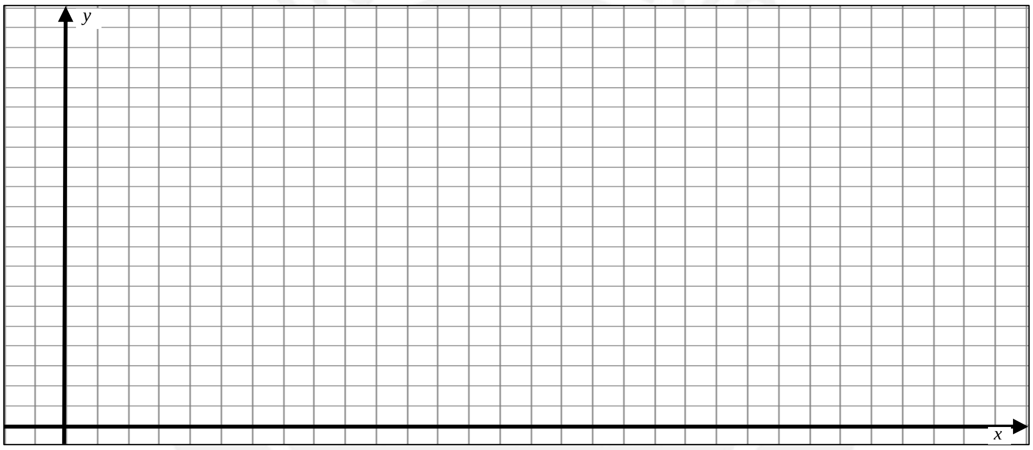
____

b. Utilizando las variables definidas en (a), expresa algebraicamente lo siguiente:
Marta pago por 3 niños y 5 adultos, S/.96:________________________________
Carmen pagó 4 niños y 3 adultos, S/.73:__________________________________

c. Completar la tabla.

Ecuación 1: ……..+……..= 96			**Ecuación 2:**		
x	y	$(x; y)$	x	y	$(x; y)$
1			1		
2			2		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6			6		
7			7		

d. Graficar en un sistema de coordenadas las ecuaciones consideradas en (c)



e. Escribir las coordenadas del punto de intersección de las gráficas y explicar: ¿Qué relación tiene el punto de intersección con la solución del problema propuesto?

Las coordenadas son: (;)

____

____

____

f. Escribir un sistema de ecuaciones que sirva para resolver el problema y resolverlo empleando un método diferente al usado en (c) de la Parte II.

Sistema de ecuaciones	Resolver

g. Responder: ¿qué relación que tiene la solución encontrada en (f) con la solución del problema propuesto.

____

____

____

ACTIVIDAD 2

Trabajo Grupal

Situación:

Alejandro, para ir a su centro de trabajo, decide utilizar otros medios de transporte (combi, taxi, ómnibus, etc.) y solo uno de los dos medios de transporte de la actividad 1 (el metropolitano o el tren eléctrico). Analizando la manera de transportarse, él considera dos posibles rutas:

Ruta 1: Tomar primero el metropolitano y en seguida otros medios de trasporte.

Ruta 2: Tomar primero el tren eléctrico y en seguida otros medios de transporte.

En base a esta información él ha podido determinar el gasto semanal en pasajes, según el número de días que vaya al trabajo. La ruta 1 le genera un gasto de S/.30 por el uso de otros medios de transporte más S/.2 por el número de días que vaya al trabajo y la ruta 2 le genera un gasto de S/.26 por el uso de otros medios de transporte más S/.3 por el número de días que vaya al trabajo.

a. Definir una variable x :

x : ____

b. Utilizando la variable definida en (a), representar algebraicamente mediante una ecuación:

- Gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 1, según el número de días que vaya al trabajo: ____
- Gasto semanal de Alejandro por usar la ruta 2, según el número de días que vaya al trabajo: ____

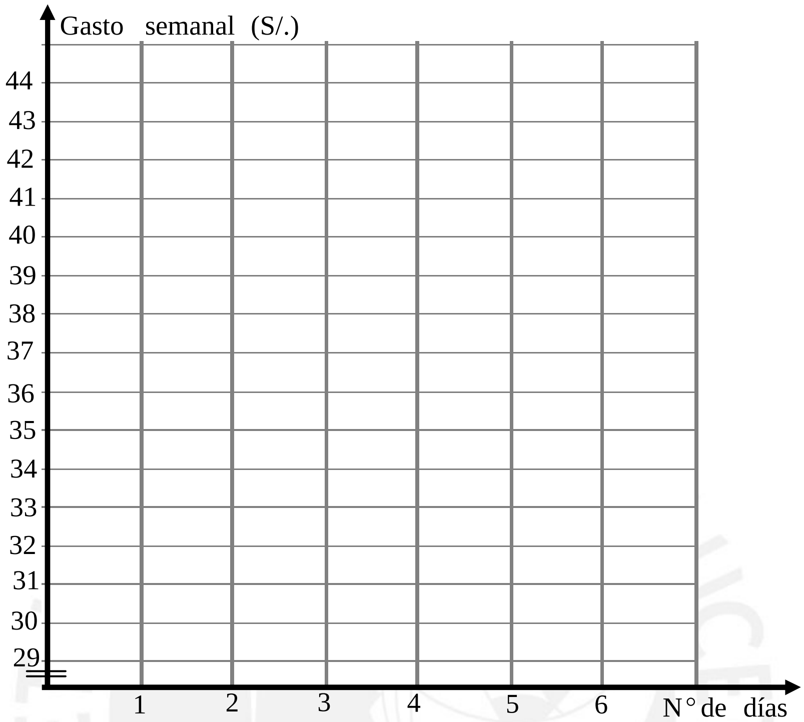
c. Si la próxima semana Alejandro solo irá tres días al trabajo, ¿cuál de las dos rutas le conviene si su objetivo es ahorrar? Justificar la respuesta.

d. ¿Cuántos días debe ir Alejandro al trabajo para que el gasto semanal sea el mismo ya sea yendo únicamente en la ruta 1 o en la ruta 2? ¿Cuál es tal gasto semanal?

e. Completar la siguiente tabla para obtener diferentes valores del gasto semanal (y) según el número de días que Alejandro vaya al trabajo.

Nº de días	Gasto semanal (y) por usar la ruta 1 (S/.)	Gasto semanal (y) por usar la ruta 2 (S/.)
x	Ecuación:	Ecuación:
1		
2		
3		
4		
5		

f. Graficar en un sistema de coordenadas las dos rectas obtenidas en (b), que representan a ambas rutas.



g. Observando las gráficas, determinar las coordenadas del punto de intersección:

(;)

h. Escribir un sistema de ecuaciones que conduzca a la solución del problema y resolverlo empleando dos métodos diferentes.

Sistema de ecuación	**Resolución**

i. Explicar la relación que tiene la solución encontrada en (h) con la pregunta planteada en (d).

ACTIVIDAD 3

Situación:

Alejandro se ha enterado que el precio del pasaje en el metropolitano va a cambiar, pero el número total de viajes (21), el gasto total semanal (S/.53) y el precio del pasaje en tren (S/.3) no variarán.

Parte I: Trabajo individual

Alejandro desea saber: ¿cuántos viajes en metropolitano y cuántos en tren eléctrico haría en cada uno de los siguientes casos:

i. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 1
ii. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 3
iii. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/. 4

En el cuadro se presentan tres casos del nuevo precio del pasaje en metropolitano. Para cada uno de ellos escribir un sistema de ecuaciones que exprese el número total de viajes y el gasto total semanal. Resolverlo por cualquier método y dar una respuesta para cada caso, al problema de Alejandro de determinar el número de viajes en metropolitano y en tren eléctrico con el nuevo precio del pasaje en metropolitano que se especifica.

CASOS	Sistema de ecuaciones	Resolución del sistema	Respuesta al problema (Justifique)
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1			
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3			
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4			

Parte II: Trabajo grupal

Todos los integrantes del grupo formado deben comparar sus resultados obtenidos en la parte individual (a, b, c). Entregar en una hoja adicional las conclusiones del grupo.

CASOS	Respuesta del sistema de ecuaciones	Respuesta al problema (Justificación)
a. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.1		
b. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.3		
c. Si el precio del pasaje en metropolitano es S/.4		

Parte III: Trabajo grupal

Con el uso del GeoGebra representar gráficamente las ecuaciones correspondientes a los casos *a*, *b* y c y completar el siguiente cuadro:

Precio en el metropolitano	Sistema de ecuaciones	¿Las rectas se intersecan?	¿En qué cuadrante se ubica el punto de intersección? (En caso exista)	Coordenadas del punto de intersección (En caso exista)	
				x	*y*
a. S/.1					
b. S/.3					
c. S/.4					

d. Según el contexto del problema, ¿en todos los casos, las coordenadas del punto de intersección dan la solución del problema? ¿Por qué?

____

____

e. Si el precio del pasaje en el metropolitano puede ir aumentando o disminuyendo de S/.0,50 en S/.0,50 ¿qué precios conducen a la solución del problema? Explicar.

____

____

____

f. Resolver un problema similar, considerando que se mantienen fijos el precio del pasaje del metropolitano (S/.2), el número total de viajes (21) y el gasto total en pasajes (S/.53), pero el precio del pasaje en tren eléctrico variará. Examinar los casos de aumentos o disminuciones de /.0,10 en S/.0,10. ¿Para qué precios del pasaje en tren eléctrico existen soluciones?

____

____

____

g. Alejandro tiene la posibilidad de hacer un gasto total en pasajes mayor a los S/.53. Encontrar todas las soluciones correspondientes a estos gastos considerando aumentos de S/.1 en S/.1 y manteniendo fijos el número total de viajes (21) y los precios de los pasajes en metropolitano (S/.2) y en tren eléctrico (S/.3).

h. Para algún gasto menor de S/.53, ¿Alejandro viajará solamente en metropolitano?

____

____

i. Considerando cambios en el número total de viajes semanales y manteniéndose fijo todo lo demás, ¿cuál es el mínimo y el máximo número de viajes semanales en total que podría hacer Alejandro?

____

____

ACTIVIDAD 4

Trabajo grupal

Situación:

Alejandro realiza viajes en metropolitano y viajes en tren eléctrico.

(Pueden usar GeoGebra cuando lo consideren necesario)

a. ¿Es verdad que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases},$$

la solución es (3; 2)? Justificar

b. Encontrar un sistema de ecuaciones que tenga como solución (3; 2).

c. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza en un día 3 viajes en metropolitano y 2 viajes en tren eléctrico y se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (b).

____

____

____

d. Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2x + a \end{cases}$$

¿Para qué valor o valores de "*a*", el sistema tiene como solución $(5;0)$?

e. Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza 5 viajes en metropolitano y ningún viaje en tren eléctrico y que se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (d).

____

____

____

f. Juan dice que inventó un problema relacionado con el número de viajes de Alejandro en metropolitano y en tren eléctrico, cuya solución la obtuvo resolviendo el sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+8 \end{cases}$

María afirma que es imposible inventar un problema como el que dice Juan.

¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

g. Encontrar todos los valores de a para los cuales el siguiente sistema tiene como solución un punto cuyas coordenadas son números enteros NO negativos.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=2x+a \end{cases}$$

CAPITULO 7: CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

En este capítulo enunciaremos las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos propuestos, luego daremos algunas recomendaciones y perspectivas para futuras investigaciones relacionados con el tema que se está abordando en esta investigación.

7.1 Conclusiones

A continuación, presentamos las conclusiones obtenidas en este trabajo de investigación en relación a los objetivos específicos planteados:

a. En relación al primer objetivo específico

“Diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que ayuden a consolidar los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas que involucra a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables”

1. Este objetivo se cumplió, pues se hizo el diseño de las situaciones didácticas, se aplicó y se hizo los análisis correspondientes. Todo esto, usando los elementos teóricos de la Teoría de Situaciones Didácticas y los aportes de la Ingeniería Didáctica.
2. Las situaciones didácticas diseñadas contribuyeron a consolidar los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas que involucran a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, porque advertimos lo siguiente:

   i. Los resultados de la pregunta 4 de conocimiento previos, revelan que un 73% de los alumnos presentaban serias dificultades para resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. El haber trabajado esta propuesta didáctica con problemas contextualizados contribuyó notablemente al aprendizaje de este objeto matemático; estas dificultades fueron disminuyendo conforme avanzaban las actividades. Esto se puede apreciar comparando los resultados de la actividad 1 y la actividad 2, pues todos los grupos mejoraron notablemente en definir una variable, y convertir un enunciado verbal a un registro algebraico. Desarrollaron la actividad con menor dificultad respecto a la primera actividad y los grupos terminaron en el tiempo previsto e incluso antes.

ii. Las dificultades graduadas adecuadamente y propuestas para trabajarlas individual y grupalmente, son parte importante de la propuesta didáctica. Esto se puede apreciar, por ejemplo, comparando los resultados de la actividad 1 parte I y II con la parte III. Es muy importante usar problemas contextualizados e ir pasando gradualmente a la descontextualización.

iii. El haber trabajado en forma grupal permitió a los alumnos pasar por las fases de formulación y validación al comparar sus resultados y tener que dar una única respuesta. Esto se puede apreciar más claramente en la actividad 1 (parte II) y en la actividad 3 (partes II y III). Las partes grupales II fueron diseñadas con este objetivo específico, pues las actividades no son diferentes a las de la parte individual sino seleccionadas de éstas para suscitar la discusión y llegar a una conclusión del grupo.

b. En relación al segundo objetivo específico

"*Diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que estimulen en los alumnos la habilidad de crear problemas relativos a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables*".

Las situaciones diseñadas contribuyeron también a estimular en los alumnos la habilidad de crear problemas relativos a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, como hemos explicitado en el análisis a posteriori y en la comparación de éste con el análisis a priori. Destacamos lo siguiente:

1. Hay diferencias notables entre los resultados de los ítems sobre creación de problemas en la prueba de conocimientos previos, con los resultados de los ítems de la actividad 4 diseñada para este fin.
2. Es importante que para una actividad como la creación de problemas, que no es usual en la educación básica, se diseñen secuencias didácticas grupales. Las experiencias observadas nos llevan a esta conclusión.

3. El reto de crear problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales llevó a una mejor comprensión del uso de este objeto matemático; así, observamos que en la actividad 4, específicamente en los ítems (c) y (e), los alumnos trabajaron la creación de problemas correspondientes a un sistema de ecuaciones dado, en forma ordenada, entusiasta y sin complicaciones; no fue necesario hacer una devolución para obtener respuestas correctas. Esta actividad se vio facilitada al proponerles un sistema formado por una función afín implícita y otra función afín explícita, teniendo en cuenta las variables micro-didácticas seleccionadas.

c. En relación al tercer objetivo especifico

"Diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que estimulen la habilidad de resolver y crear problemas relativos a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables haciendo uso del GeoGebra".

Este objetivo se cumplió, complementariamente al objetivo anterior, según lo hemos manifestado en los análisis correspondientes a las actividades 3 y 4, que fueron diseñadas en la perspectiva de creación y solución de problemas usando el GeoGebra. Destacamos lo siguiente:

1. El uso del instrumento contribuye a tener una visión más clara y dinámica de las representaciones gráficas de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, lo cual contribuye a su vez a resolver adecuadamente los sistemas y a crear problemas a partir de éstos. Por ejemplo en la actividad 4, en el ítem (b) se valieron de GeGogebra para encontrar un sistema de ecuaciones cuya solución sea un punto dado, para luego escribir un problema que se resuelva solucionando el sistema de ecuaciones obtenido con el GeoGebra. Se destaca la importancia del uso del deslizador para el manejo de la variable micro-didáctica parámetro variable.
2. El uso del GeoGebra ayuda a que los alumnos resuelvan y creen problemas considerando variaciones de los parámetros en un sistema de ecuaciones lineales de dos variables. Por ejemplo en el ítem (g) de la actividad 4, se destaca la importancia del uso de la herramienta deslizador para el manejo de la variable micro-didáctica de parámetro variable (término independiente). Cabe mencionar

que a pesar de la dificultad y el carácter atípico de este ítem, los alumnos mostraron interés por resolverlo y obtuvieron resultados satisfactorios con el uso del GeoGebra.

3. El GeoGebra no solamente puede ser usado para resolver sistemas de ecuaciones y visualizar sus representaciones gráficas, sino para resolver problemas. Esto lo podemos comprobar en la actividad 3 (parte III), donde los alumnos iban mejorando en la resolución de problemas contextualizados conforme se avanzaba en la actividad y en el ítem g de la actividad 4, en la que resuelven un problema atípico y no contextualizado.

Destacamos, finalmente dos conclusiones del trabajo desarrollado en esta investigación y relacionadas con las que acabamos de exponer:

1. La creación de problemas cuya solución se obtenga resolviendo un sistema de ecuaciones lineales dado, es una actividad que contribuye a estimular la habilidad de resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones. A pesar de no ser usual, la actividad es asumida con entusiasmo por los estudiantes.
2. En el marco de los sistemas de ecuaciones lineales, el GeoGebra puede usarse no sólo para visualizar las ecuaciones y para resolver los sistemas, sino para resolver problemas, contextualizados o no; en particular, problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema.

7.2 Recomendaciones

En base al trabajo realizado y a las conclusiones que hemos llegado, formularemos las siguientes recomendaciones:

1. Para el aprendizaje de las matemáticas en general, y en particular de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, incluir en las actividades situaciones que induzcan al alumno a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización con actividades individuales y grupales de dificultades graduadas. Es importante diseñar actividades grupales pensadas especialmente para propiciar el desarrollo de las fases de formulación y validación. En nuestra investigación, éstas fueron las partes II de las actividades 1 y 3.

2. En el diseño de actividades de aprendizaje para sistemas de ecuaciones lineales, enfatizar en las conversiones – en ambos sentidos – entre los registros gráfico y algebraico, para un mejor análisis de los resultados. Por ejemplo en la actividad 3, si el ítem (b) de la parte I, lo hubieran resuelto usando un registro gráfico, se hubiera obtenido un mayor número de respuestas correctas.
3. Estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas a partir de un registro algebraico.
4. Fomentar el uso de una herramienta tecnológica, preferentemente dinámica como el GeoGebra, para resolver problemas, contextualizados o no, que involucren sistemas de ecuaciones lineales.

7.3 Sugerencias para futuras investigaciones

Consideramos que el presente trabajo se complementará y enriquecerá con otros trabajos de investigación. A continuación sugerimos algunas ideas:

1. Continuar la presente investigación, considerando para la creación de problemas la variable didáctica “ambas ecuaciones con función afín implícita”; sabemos que es posible trabajarlo y que se puede seguir explorando.
2. Replicar la experimentación de la secuencia didáctica presentada en esta investigación, con otros grupos de estudiantes de Educación Secundaria e incluso con estudiantes de los primeros ciclos de Educación Superior, para observar si los comportamientos y dificultades son los mismos.
3. Luego de las experiencias de crear problemas, hacer una revaluación de los conocimientos anteriores para explicitar más la influencia de esta actividad (la de crear problemas) en la profundización de los aprendizajes.

REFERENCIAS BIBLIOFRÁFICAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano

Artigue, M., Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM Mathematics Education*, 39, 365–382

Boyer, C (1987). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial libros del zorzal

Coveñas, M. (2003). *Matemática 3*. Lima: Editorial Bruño

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (2005). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: Editorial Horsori

De Faria, E. (2006). *Ingeniería didáctica*, Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 2, Universidad de Costa Rica

Duval, R (1993). *Registros de represtación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Garcés, Elber. (2009). *Incidencia del GeoGebra en la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones linelaes 2x2*, Departament de Didàctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de www.uab.cat/servlet/BlobServer?blobtable=Document...

Ilfi,N. and Nor Bakar, M. (2011). Secondary School Students' Problem Posing Strategies: Implications to Secondary School Students' Problem Posing Performances. Journal of Edupres, 1, 1-8

Lima, E., Pinto, P., Wagner, E., Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*.Vol.3. Instituto de matemática y ciencias afines IMCA. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima-Perú

Malaspina, U. (2011). Sobre creación de problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 28, 155-160.*

Malaspina, U. (2012). Hacia la creación de problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 29*, 159-164.

Ministerio de Educación del Perú (2010). *Unidad de Medición de la Calidad Educativa*. Recuperado de

http://umc.minedu.gob.pe/

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM

Oaxaca, J., De la Cruz, J, Sánchez, J. (2009). *Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales*. Trabajo presentado en el Primer Congreso internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Cuautitlán Izcali, México.

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Instituto Politécnico Nacional. Centro de investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología avanzada. Unidad Legaria, Uruguay. Recuperado de

http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ochoviet_2009.pdf

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y Propuestas.* (p. 59-71). Buenos Aires: Paidós

Polya, G. (1969). *Cómo plantear y resolver problemas*. D.F, México: Trillas

Reaño, C. (2011). *Sistemas de Inecuaciones lineales con dos incógnitas y problemas de programación lineal. Una mirada desde la teoría de Situaciones Didácticas* (Tesis de maestría). Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática, Universidad de Burdeos su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de la Matemática. Recuperado de

http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/teoria_situaciones.pdf

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, C., Portalés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia, *Revista Electrónica de Enseñanza de las ciencias*, *6(3)*, 538-561. Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i Socials, Universitat de València

Santillana (2008). *Matemática 3*. Lima: Ediciones Santillana S.A

Segura, S. (2004). Sistema de inecuaciones lineales. Una secuencia didáctica, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7(1)*, 49-78. Recuperado de

http://dialnet.unirioja.es/servlet/et/articulo?codigo=2095347

Trigueros, María. (2012). Sistemas de ecuaciones: ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje?, En *Actas del VI Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. Didáctica de las Matemáticas: Avances y desafíos actuales*. Lima: IREM-PUCP

ANEXOS

ANEXO Nº 1: EXPLORACIÓN ACADÉMICA

1. Completa la siguiente tabla:

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
a. El triple de un número, aumentado en 5 es 110.	
b. La suma de dos números enteros y consecutivos es igual a 17.	
c. El doble de la suma de un número y su mitad es igual a 54.	
d.	$x - 4 = 15$
e. El doble de la edad de Ana dentro de 4 años será 14.	
f. El triple de un número, aumentado en su mitad es igual a 21.	
g.	$\frac{x+3}{2} = 6$
h.	$\frac{x}{2} + 3 = 6$
i. El perímetro de un rectángulo mide 24 cm y su base mide el triple de su altura.	
j. Juan tiene 3 nuevos soles más que María	

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $5x + 24 = 2x + 15$	b. $2x + 2(3x + 4) = 30$

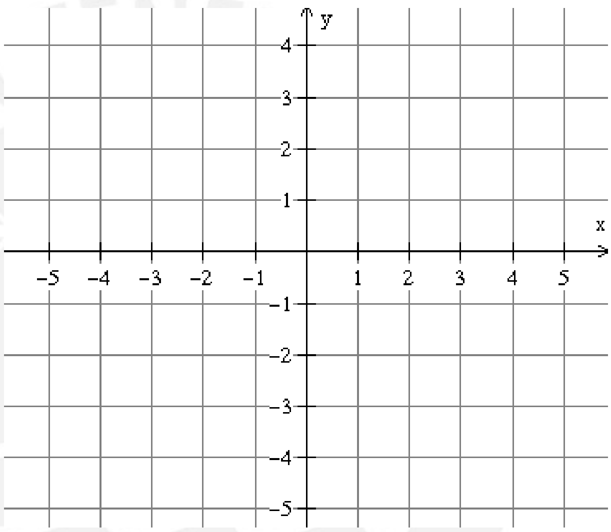
3. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos:

a. $A(-2;4)$

b. $B(4;2)$

c. $C(0;-5)$

d. $D(-2;2)$



4. Resuelve el siguiente problema:

Un comerciante recibió 130 prendas, entre polos y pantalonetas. El precio de costo de cada polo es 10 nuevos soles y de cada pantaloneta es 8 nuevos soles. Si pagó por todo el pedido 1190 nuevos soles, ¿cuántos polos y cuántas pantalonetas recibió?	<u>Solución</u>

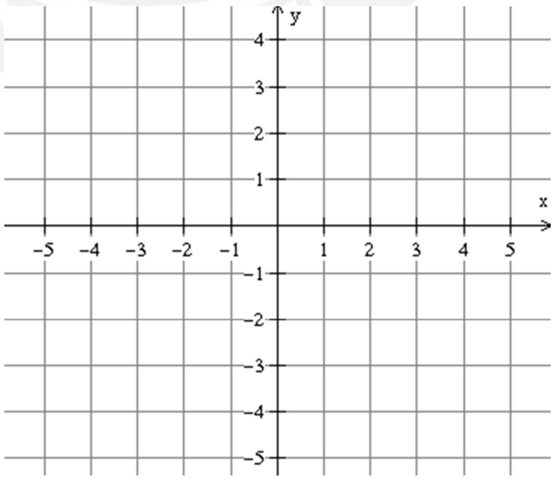
5. Crea enunciados de problemas

a. María resolvió correctamente un problema relacionado con la edad de un niño y planteó la siguiente ecuación $x+3=10$ Escribe un posible texto del problema	
b. Carlitos resolvió correctamente un problema relacionado con la compra de un lapicero y planteó la siguiente ecuación. $x+3=10$ Escribe un posible texto del problema	
c. Jaimito resolvió correctamente un problema sobre rectángulos y comenzó planteando la siguiente ecuación: $2[x+(x+3)]=48$ Escribe un posible texto del problema que resolvió Jaimito	

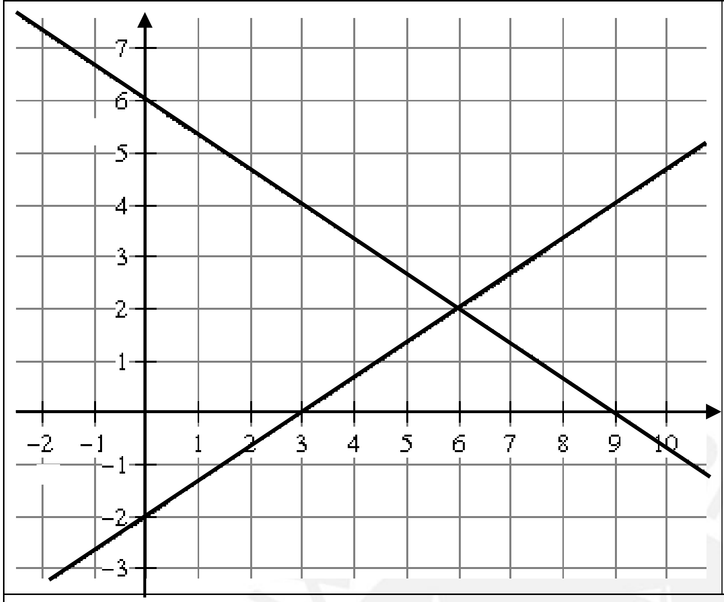
6. Grafica las siguientes ecuaciones:

a. $y = 2x + 1$

b. $y + 2x = 4$



7. A continuación se muestra los gráficos de las rectas L_1 y L_2.



Examina cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a tales rectas:

$(A)\quad y=\dfrac{18-2x}{3}$

$(B)\quad y=\dfrac{18+5x}{3}$

$(C)\quad y=\dfrac{2x-6}{3}$

$(D)\quad y=9-x$

<u>Respuesta</u>:

Ecuación de L_1:______________________________

Ecuación de L_2:______________________________

8. Dada las siguientes rectas, halla el punto de intersección:

$2x+y=4$ $x-y=2$	

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0;8)$ y $(5;0)$.

ANEXO Nº 2: GUÍA DE OBSERVACIÓN

Actividad: _______ Trabajo: ____________

Dificultades observadas que más destacan (comprensión, establecer relaciones lógicas, uso de variables, planteamiento de ecuaciones, representación gráfica, relacionar solución gráfica y solución algebraica, relacionar la solución de ecuaciones con la solución del problema)	Ítems que ofrecieron mayor dificultad	Ítems resueltos con mayor facilidad	Actitud durante el trabajo (negativa, indiferencia, entusiasmo)	Observaciones