PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS BASADA EN EL MODELO VAN HIELE

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Presentada por:

ALBERT THOMY MAGUIÑA ROJAS

Asesorado por:

ELIZABETH MILAGRO ADVÍNCULA CLEMENTE

Jurados:

JESUS VICTORIA FLORES SALAZAR

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

Lima – Perú

2013

¿Cómo puede ser que la Matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad?

Albert Einstein.

DEDICATORIA

A mi hermano Wilfredo Pier Maguiña Rojas

por su ejemplo de perseverancia y constancia,

que lo caracteriza y que me ha infundado siempre,

por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

AGRADECIMIENTOS

A la profesora Magíster Elizabeth Advíncula Clemente, mi asesora, por la paciencia y dedicación que tuvo durante el desarrollo de este trabajo. Estimada profesora, agradezco por todo el apoyo brindado en esta extensa jornada de conducción por el camino de la investigación.

A mi familia, gestora de mi autoformación personal, sobre todo a mi hermano Wilfredo Pier Maguiña Rojas por el apoyo e incentivo que me dieron durante el desarrollo de mis estudios.

A la directora, profesores y alumnos de la institución educativa Buenas Nuevas por su colaboración desinteresada.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por finalidad diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele con apoyo del software de geometría dinámica GeoGebra. La elección del modelo de Van Hiele como marco teórico permitirá proponer niveles de desarrollo del pensamiento geométrico para la adquisición de conocimientos y habilidades en relación a los cuadriláteros, así como, identificar el nivel de razonamiento en el que se encuentran nuestros estudiantes; y además servirá para señalar las fases de aprendizaje que se deben seguir para promover el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediato superior. Además, las propiedades de recursividad y de secuencialidad que son propias de estas fases garantizan el desarrollo de las actividades, las cuales permitirán alcanzar mayores grados de adquisición en los distintos niveles de razonamiento. Con este trabajo pretendemos que los estudiantes del cuarto grado de secundaria alcancen el nivel 3, de deducción informal, de acuerdo al modelo de Van Hiele. La metodología que usamos para este trabajo está basada en la propuesta de Jaime (1993), que consiste en describir el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento y describe una forma de evaluar las respuestas de los alumnos. En esta experiencia se presentaron 10 estudiantes, en forma voluntaria, a quienes se les tomó una prueba de entrada para identificar el nivel de razonamiento en el que se encontraban respecto al objeto matemático cuadriláteros. Luego se trabajó con ellos varias actividades diseñadas según las fases de aprendizaje de Van Hiele con el objetivo de promover el desarrollo del pensamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y ayudarlos a avanzar a un nivel de razonamiento superior. Finalmente se les aplicó una prueba de salida para verificar si habían incrementado su nivel de razonamiento respecto a los cuadriláteros. Según los resultados obtenidos, la propuesta didáctica permitió que los estudiantes lograrán un grado de adquisición alta en el nivel 1, un grado de adquisición intermedia en el nivel 2 y se encuentren desarrollando habilidades en el nivel 3, pasando de un nivel de adquisición nula a una adquisición baja.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta tesis tiene por objetivo diseñar una propuesta didáctica, basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, con el objeto de promover el desarrollo del pensamiento geométrico en el objeto matemático cuadriláteros. Para observar el desarrollo del pensamiento geométrico y el nivel alcanzado por los estudiantes, de acuerdo al modelo de Van Hiele, respecto al objeto matemático cuadriláteros, se diseñó una secuencia didáctica que incluyó actividades para cada una de las fases de aprendizaje. Algunas de las actividades se diseñaron para ser realizadas con lápiz y papel, y otras con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, el cual facilitó la visualización y manipulación de las representaciones del objeto matemático.

La memoria del trabajo de investigación realizado se presenta en cinco capítulos:

En el capítulo 1 presentamos los aspectos generales del trabajo, tales como los antecedentes de la investigación, justificación, delimitación del problema de investigación y objetivos.

En el capítulo 2 presentamos los elementos principales del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, que constituye el marco teórico en el que se basa esta tesis para estructurar las actividades que se han diseñado y aplicado, así como para llevar a cabo la evaluación y el análisis de estas actividades. Además, describimos la metodología que utilizamos en esta investigación, que se basa en el trabajo de Jaime (1993), que consiste en describir el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento y describe una forma de evaluar las respuestas de los alumnos. Para la descripción de los niveles en este trabajo se ha considerado la descripción propuesta por Corberán et al. (1994).

En el capítulo 3 presentamos al objeto matemático cuadriláteros, haciendo énfasis en la clasificación de los cuadriláteros convexos, que utilizaremos en el diseño de las actividades de la secuencia didáctica propuesta.

En el capítulo 4 presentamos el diseño e implementación de los instrumentos como la prueba de entrada, las actividades que fueron diseñadas según las fases de aprendizaje y la prueba de salida. Estos instrumentos fueron diseñados teniendo en cuenta los tres primeros niveles del modelo de Van Hiele. Además, presentamos los resultados de la aplicación de estos instrumentos, así como el análisis de los mismos. Finalmente, comparamos los resultados de la prueba de entrada y de la prueba de salida con la finalidad de comparar el nivel de razonamiento inicial y final de los estudiantes, identificando si se dio un desplazamiento hacia un nivel de razonamiento superior.

Finalmente, en el capítulo 5 presentamos las conclusiones y algunas cuestiones abiertas buscando contribuir con una reflexión en los docentes sobre cómo enfocar la enseñanza de la geometría, específicamente de los cuadriláteros.

CAPÍTULO 1

LA PROBLEMÁTICA

Capítulo 1: La problemática

Presentamos los antecedentes de la investigación, el problema de investigación y los objetivos de la investigación.

1.1. Antecedentes

El presente trabajo de investigación surge como una preocupación por la enseñanza de la geometría, en particular de los cuadriláteros, ya que observamos que los estudiantes presentan muchas dificultades para adquirir conocimientos básicos de geometría, tales como:

- La noción de paralelismo y perpendicularidad.
- Definición de líneas notables: altura y bisectriz.
- Teorema de la base media.
- Propiedades de los cuadriláteros.
- Área de figuras planas.

A continuación, presentamos los resultados obtenidos por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y por el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes o Informe PISA respecto al desempeño de los estudiantes peruanos en relación al área de las matemáticas.

La OCDE señala que el desempeño promedio de los estudiantes peruanos está por debajo de aquellos obtenidos por los estudiantes de la OCDE, con menor desempeño, lo cual evidencia la gran brecha que existe entre las habilidades de los estudiantes peruanos en relación con los de los países desarrollados (MINEDU, 2001).

Por su parte, el Informe PISA, muestra que entre todos los estudiantes de los países que participaron en el estudio PISA, los estudiantes peruanos fueron los que, en promedio, obtuvieron el menor puntaje en la escala de alfabetización matemática (MINEDU, 2001).

Por otro lado, presentamos los resultados obtenidos por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC), en relación al desempeño de los estudiantes respecto a la Geometría.

La UMC (2001) encargada de realizar periódicamente la medición de los rendimientos escolares a escala nacional, presentó los resultados del área de matemática en cuarto grado de secundaria basadas en tres competencias: sistemas numéricos y funciones, geometría y, organización y gestión de datos. Señalando que la segunda competencia, geometría, presenta el menor rendimiento, con aproximadamente un 3% de los alumnos en el nivel suficiente y aproximadamente un 92% de los alumnos en el nivel por debajo del básico. En la siguiente tabla se detallan estas cifras.

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes según Niveles de Desempeño

COMPETENCIA 2: GEOMETRÍA		
NIVELES DE DESEMPEÑO	PORCENTAJES DE ESTUDIANTES	
SUFICIENTE	2,6%	
BÁSICO	5,9%	
POR DEBAJO DEL BÁSICO	91,6%	
	GRUPO 1	GRUPO 2
	59,6%	32%

Fuente: Unidad de Medición de la Calidad Educativa (2001, p. 40).

Según el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (2003) y tomando en cuenta nuestra experiencia docente vemos que los dos temas esenciales para el aprendizaje de la geometría en la educación básica son, por un lado, los triángulos dado que sobre este tema existen muchos trabajos previos y, por otro lado, los cuadriláteros. Escogimos este último tema como objeto matemático de nuestra investigación por la preponderancia que ejerce sobre los demás tópicos de la geometría. Tal es así que al abordar este objeto matemático revisaremos, por ejemplo, nociones de paralelismo y perpendicularidad (rectángulo, rombo, etc.) así como la noción de punto medio (teorema de la base media, la diagonales se bisecan, etc.,). Es decir, desarrollaremos un conjunto de nociones y propiedades que son fundamentales para temas posteriores.

Por lo anterior, diversos investigadores han centrado su interés en la identificación y análisis de las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros, como es el caso de Renzulli y Scaglia (2006, c.p. Morales y Majé, 2011) quienes en su investigación sobre clasificación de cuadriláteros, mencionan que una de las características más relevantes en relación a los esquemas mentales que se forman los estudiantes es que estos están supeditadas por figuras prototipos. Además, mencionan que estos prototipos se forman por el uso de características irrelevantes desde el punto de vista conceptual. Más adelante veremos que esta realidad no es ajena en nuestras aulas, dado que inicialmente las respuestas de los estudiantes también estaban supeditadas por figuras prototipo.

Morales y Majé (2011) estudiaron el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes, desde la enseñanza de los cuadriláteros y el uso del software GeoGebra. El mencionado estudio, presenta como marco teórico el modelo de Van Hiele. Este proyecto se dividió en dos fases. La fase I denominada diagnóstico, en la cual los autores mencionan que los errores y dificultades más frecuentes en los estudiantes están relacionados con el uso de estereotipos y el déficit para realizar clasificaciones inclusivas. La fase II que constituye la propuesta didáctica en torno al tema cuadriláteros. Las actividades propuestas en este trabajo guiarán el diseño de nuestras actividades, dadas que estas también fueron diseñadas bajo el enfoque del modelo de Van Hiele, y más aún, estas están orientadas hacia el tema cuadriláteros, el cual también es nuestro objeto de estudio.

Por otro lado, tomamos en cuenta a Patricio (2010) quien realizó una investigación cuyo objetivo fue diseñar actividades para el aprendizaje de los conceptos de mediatriz y circuncentro. El mencionado estudio, presenta como marco teórico el modelo de Van Hiele; además, para el diseño de las actividades utilizó el software GeoGebra. Este estudio reveló que el aprendizaje de los conceptos matemáticos con la ayuda de un software de geometría dinámica genera en el estudiante un nuevo tipo de expectativa que se caracteriza por el cambio de actitud de este frente a un problema, el cual queda reflejado cuando un estudiante pasa de formularse preguntas como ¿por qué? a preguntas como ¿qué pasa si? Asimismo, en un corto tiempo se accede a infinidad de posiciones y formas, las cuales son manipuladas por el estudiante y que le permiten descubrir características y propiedades de objetos matemáticos.

Esta última investigación señala cómo la utilización de las Tics, en particular del software matemático, contribuyen de manera positiva en el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, confiamos en que el uso del software GeoGebra aplicado a los cuadriláteros obtendrán los mismos resultados positivos, que obtuvo esta investigación. Por lo que incluimos el uso de este recurso en nuestras actividades.

Por último, Corberán et al. (1994) ofreció una propuesta curricular para la enseñanza de la geometría basada en el modelo Van Hiele. Esta propuesta tuvo como objetivo principal diseñar, aplicar y analizar actividades sobre Polígonos, Triángulos y Cuadriláteros. Sobre los cuadriláteros mencionan que el error más frecuente que presentan los alumnos está relacionado con respuestas supeditadas por prototipos visuales. Por otro lado, los autores mencionan que sus alumnos han logrado un notable incremento en sus grados de adquisición respecto a los niveles 1 y 2 de Van Hiele después de haber trabajado con las unidades de enseñanza experimentales que formaron parte de la propuesta curricular. En nuestro trabajo utilizaremos la metodología propuesta por Jaime (1993), ya que esta metodología nos permitirá describir el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento, asimismo, describe una forma de evaluar las respuestas de los alumnos.

Por tanto, en este trabajo, pretendemos abordar el tema de los cuadriláteros a partir de una secuencia didáctica que contribuya con el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes respecto a los cuadriláteros. Para esto, el modelo de Van Hiele nos proporcionará las herramientas necesarias para observar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes así como identificar el nivel de razonamiento alcanzado. Asimismo, haremos uso del software GeoGebra, el cual facilitará en los alumnos la visualización y manipulación de las representaciones del objeto matemático. Es decir, la capacidad de arrastre del software GeoGebra le permitirá al alumno diferenciar entre lo que se denomina dibujo y figura de un objeto geométrico.

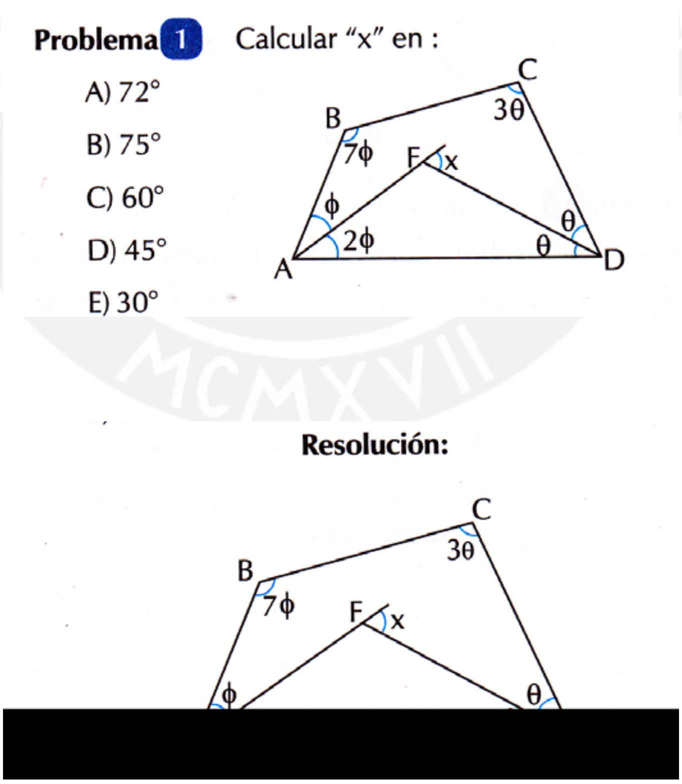
1.2. Problema de investigación

Generalmente, la presentación de los diversos contenidos en la escuela y en los libros se realiza bajo la siguiente forma, tal como lo anotan Jaime (1993):

- Se enuncia una definición matemática del concepto en cuestión y se hace una descripción de sus características. Finalmente, se plantea ejercicios de memorización, de resolución algorítmica y de reconocimiento de figuras concretas.

En este contexto situamos la manera en que se presenta el objeto matemático cuadriláteros, teniendo en cuenta que en nuestra institución educativa el único material con el que cuenta el docente para desarrollar sus clases es un compendio de matemática, en el cual sólo presenta problemas matemáticos, es decir, la parte teórica de los contenidos no está presente.

En este sentido, citamos a modo de ejemplo algunos de los problemas propuestos en este compendio de geometría.

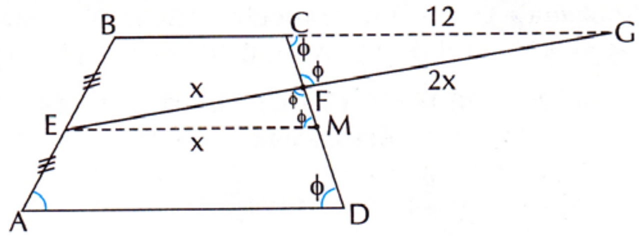


[redacted]

Problema 5 En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, por el punto medio E del lado $\overline{AB}$ se traza una recta que corta al lado $\overline{CD}$ en F y a la prolongación del lado $\overline{BC}$ en G, tal que, $FG = 2 \cdot EF$. Calcular la mediana del trapecio ABCD, si CG = 12, además m ∢ EFD = m ∢ ADC.

A) 2 B) 3 C) 8 D) 6 E) 4

Resolución:



[redacted]

Problema 9 Sobre la prolongación del lado $\overline{AB}$ de un paralelogramo ABCD se toma un punto E, de modo que, AE=AD y el cuadrilátero BECD sea un trapecio isósceles. Calcular la altura del paralelogramo, si CD = 6.

A) $4\sqrt{3}$ B) 4 C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

Resolución:

[redacted]

Observamos que todos los ejercicios propuestos en este compendio están enfocados de la misma manera, es decir, se proponen ejercicios de tipo algorítmico en los cuales se deja de lado la interpretación geométrica de los cálculos.

Por otro lado, el docente debe abrir paso a la interacción en la enseñanza, a partir de hacer, examinar, predecir, evaluar y generalizar. En este sentido Barrios et al. (2008) menciona que si el docente ofrece a los estudiantes una visión dinámica de la geometría, los estudiantes estarán en la capacidad de desarrollar un pensamiento deductivo.

Contradictoriamente, este contexto no está presente en nuestras aulas. Por el contrario, se sigue encaminando la enseñanza de manera tradicional basada, por un lado, en la presentación de los contenidos como un producto final y, por otro lado, se presenta un sinnúmero de ejercicios cuyas soluciones se basan en algoritmos preestablecidos.

En este sentido, la forma de enfocar la enseñanza de los contenidos geométricos tanto por parte de los docentes como del compendio utilizado en aula, motivaron la presente investigación motivo por el cual diseñamos una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros.

Por lo expuesto anteriormente, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿El diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros permitirá que los estudiantes alcancen el nivel 3, de deducción informal, de acuerdo al modelo de Van Hiele?

1.3. Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación es:

Diseñar una propuesta didáctica, según el modelo de Van Hiele, para promover que los estudiantes del cuarto grado de secundaria alcancen el nivel 3, de deducción informal, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra.

Para alcanzar el objetivo general nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Identificar el grado de adquisición inicial en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal que poseen los estudiantes de cuarto año de educación secundaria.
- ✓ Facilitar la compresión de los cuadriláteros y mejorar los grados de adquisición en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal, teniendo en cuenta las fases del modelo de Van Hiele.
- ✓ Identificar el grado de adquisición final en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal que poseen los estudiantes de cuarto año de educación secundaria, luego de la secuencia diseñada para tal fin.
- ✓ Identificar si se produjo una evolución entre el grado de adquisición inicial y final de los estudiantes en relación a los cuadriláteros.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodología de la investigación

En esta parte presentaremos el marco teórico de la investigación basada en el Teoría de Van Hiele y describiremos la metodología de investigación que utilizaremos.

2.1. El Modelo Van Hiele

El presente trabajo de investigación toma como marco teórico el modelo de los esposos Van Hiele, ya que este modelo presenta una categorización para los diferentes niveles de pensamiento geométrico que poseen los estudiantes. Además, nuestro problema de investigación es mejorar los grados de adquisición en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal del modelo Van Hiele. Para ello diseñamos una propuesta didáctica con la intención de mejorar estos grados de adquisición. En este sentido, encontramos que esta teoría es indispensable para tal propósito. Dado que por un lado, explica cómo se produce el desarrollo de los niveles del pensamiento geométrico y por otro lado, sus fases de aprendizaje guían el trabajo del docente, de manera que, este pueda facilitar el ascenso de estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediato superior.

Según esta teoría, en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes, el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. El primero, implica que los niveles y su adquisición, van unidos al lenguaje adecuado y; el segundo, que sólo se asimila aquello que se presente en el nivel de razonamiento que le corresponde a la persona. Si no es así, se debe esperar a que lo alcance para enseñar un nuevo contenido matemático.

Los componentes principales del modelo de Van Hiele son los niveles de razonamiento, y las fases de aprendizaje.

2.1.1. Propiedades del Modelo Van Hiele

El modelo Van Hiele, al igual que otros modelos, está caracterizado por determinadas propiedades. En este sentido, Jaime (1993), mencionan que las principales propiedades de modelo son:

Recursividad: Los conocimientos de los alumnos están caracterizados por elementos, tanto implícitos como explícitos, pero al transitar de un nivel a otro los elementos implícitos se hacen explícitos en el nuevo nivel adquirido.

Secuencialidad: Un alumno no puede alcanzar un determinado nivel sin haber superado de forma ordenada los niveles inferiores. Esto garantiza que los alumnos obtengan mayores grados de adquisición en los distintos niveles de razonamiento.

Especificidad del lenguaje: El lenguaje de los estudiantes está intrínsecamente relacionado al vocabulario matemático que este posee. Es decir, el lenguaje del alumno le permite al docente determinar el nivel en el que se encuentra su aprendiz. En este sentido, el docente deberá situarse en el mismo nivel de sus estudiantes.

Continuidad: El paso de un nivel a otro se produce de forma continua y pausada. Si bien es cierto, los tres primeros niveles pueden alcanzarse rápidamente, el proceso de adquisición de los dos últimos es lento. Se puede dar el caso de que el individuo no llegue a alcanzar estos niveles de razonamiento.

Localidad: A menudo sucede que un alumno no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en relación a todos los objetos geométricos, pues sus saberes previos son un elemento determinante en su habilidad de razonamiento. Es decir, un alumno puede encontrarse en el nivel 3, respecto a los triángulos pero no necesariamente se encontrará en el mismo nivel respecto a las circunferencias, por ejemplo.

Estas propiedades están presentes en cada una de las actividades diseñadas en nuestra propuesta didáctica ya que con ello lograremos que los estudiantes transiten ordenadamente de un nivel a otro. Además, para que nuestros estudiantes puedan actuar con éxito en un determinado nivel deben haber adquirido las estrategias de los niveles precedentes.

2.1.2. Los niveles de razonamiento en el estudio de los cuadriláteros

La descripción que aquí presentamos de los niveles de razonamiento fue tomada de Corberán et al. (1994). Cabe mencionar que elegimos la descripción de este autor porque para cada nivel de razonamiento presenta ejemplos relacionados con nuestro tema de investigación.

Nivel 1: Reconocimiento

- Los estudiantes identifican varios tipos de cuadriláteros, tales como: cuadrados, rombos, trapecios, etc. por su aspecto físico. Sin embargo, consideran cada clase disjunta con las demás, es decir, una figura es vista de manera aislada.
- Los estudiantes pueden reproducir los diferentes tipos de cuadriláteros conocidos. También puede reconocer cuadriláteros en diferentes contextos y utilizar sus nombres estándar. No obstante, este reconocimiento está supeditado a la posición de la figura en el plano.

Nivel 2: Análisis

- Los estudiantes definen los cuadriláteros mediante una enumeración exhaustiva de sus propiedades. Por ejemplo, identifican un rectángulo como una figura de 4 lados, paralelos dos a dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales, etc. Es decir, no son capaces de establecer propiedades mínimas para caracterizar a una figura.
- Los estudiantes no relacionan todavía los diferentes tipos de cuadriláteros. Es decir, las siguen percibiendo de manera aislada. No obstante, es capaz de deducir propiedades mediante experimentación y eventualmente puede generalizar estas propiedades.

Nivel 3: Deducción informal

- Los estudiantes son capaces de hacer clasificaciones lógicas de las figuras en base a sus propiedades. También pueden reconocen que cualquier cuadrado es un rombo pero que no todos los rombos son cuadrados, etc.
- Los estudiantes pueden deducir, aunque de manera informal, unas propiedades a partir de otras. Por ejemplo, paralelismo implica igualdad de lados, perpendicularidad implica paralelismo de lados opuestos, etc.
- Los estudiantes ya son capaces de definir correctamente los diferentes tipos de cuadriláteros que conocen, mediante condiciones necesarias y suficientes. También pueden seguir una demostración pero no comprenden el significado de la misma.

Nivel 4: Deducción formal

- Los estudiantes pueden manejar las propiedades de los cuadriláteros dentro de un contexto formal. En este nivel, un estudiante es capaz de construir una demostración, por ejemplo.

- Los estudiantes pueden comprender y aceptar la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas entre sí. Por ejemplo:
  - ✓ Un rectángulo es un cuadrilátero con los ángulos interiores rectos.
  - ✓ Un rectángulo es un cuadrilátero con diagonales congruentes que se cortan en el punto medio.
  - ✓ Un rectángulo es un paralelogramo que posee un ángulo interior recto.

2.1.3. Las fases de aprendizaje

La descripción que aquí presentamos de las fases de aprendizaje fue tomada de Corberán et al. (1989).

Es importante resaltar que el objetivo principal de las fases de aprendizaje es ayudar al docente a organizar la estructura de sus clases de tal manera que esta secuencia le permita a su aprendiz progresar en su nivel de razonamiento.

Fase 1: Encuesta/ Información

En esta primera fase el docente debe determinar los saberes previos de sus estudiantes, ya sea mediante el diálogo o a través de un test con ítems de respuestas abiertas. Además, el docente debe exponer qué dirección tomará el estudio del objeto matemático en cuestión. También, es importante resaltar que en esta fase, el docente debe introducir el vocabulario específico del nivel que se trate.

Fase 2: Orientación dirigida

Una vez determinado los saberes previos de los estudiantes sobre el objeto matemático en cuestión, los aprendices exploran dicho concepto a través de las actividades que de forma secuencializada les presenta el docente. Estas actividades deben estar organizadas de tal manera que le permitan al estudiante adquirir nuevas estructuras mentales. Las actividades a plantear por el docente deben ser precisas y sin ninguna ambigüedad de tal manera que estas revelen las propiedades que los estudiantes deben aprender.

Fase 3: Explicitación

Por lo general, se recomienda que esta fase se desarrolle en parejas o en grupos con el fin de promover el diálogo. Es decir, los estudiantes a partir de sus experiencias previas expresan e intercambian sus opiniones acerca de los nuevos conocimientos adquiridos. En este sentido, el docente debe estar alerta en relación al lenguaje empleado por los estudiantes ya que este debe ser apropiado de acuerdo al nivel en el que se encuentre.

Fase 4: Orientación libre

El objetivo de esta fase es consolidar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en las fases anteriores. Para ello, el docente debe proponer actividades mucho más complejas pero de estructura comparable a las estudiadas en las fases previas.

Fase 5: Integración

En esta fase los estudiantes deben establecer una visión global de todo lo aprendido sobre el objeto matemático en cuestión. El docente, por su parte debe presentar un resumen de los todos los conocimientos ya adquiridos, es decir, en esta fase el docente no debe presentar ninguna actividad la cual implique nuevos conocimientos.

En este trabajo de investigación, tomaremos en cuenta las cinco fases de aprendizaje, sin embargo sólo consideraremos los tres primeros niveles de razonamiento.

2.2. Metodología de la investigación

Para el logro de los objetivos propuestos en el presente trabajo, hemos considerado seguir los siguientes pasos:

- Diseñar y aplicar una prueba de entrada para identificar el grado de adquisición inicial en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal que poseen los estudiantes de cuarto año de educación secundaria.
- Diseñar y aplicar actividades para facilitar la compresión de los cuadriláteros y mejorar los grados de adquisición en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal, teniendo en cuenta las fases del modelo de Van Hiele.

- Diseñar y aplicar una prueba de salida para identificar el grado de adquisición final en los niveles de reconocimiento, análisis y deducción informal que poseen los estudiantes de cuarto año de educación secundaria, luego de aplicar la secuencia diseñada para tal fin.

Para analizar el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento y evaluar las respuestas de los alumnos utilizaremos la metodología propuesta por Jaime (1993).

2.2.1. Justificación de la metodología

Por lo general cuando se trabaja un tema teniendo como referencia al modelo de Van Hiele, la mejor herramienta para la evaluación es la entrevista, sin embargo esta requiere disponer de un tiempo más extenso del que se dispuso para realizar esta investigación.

Como alternativa a este hecho, frecuentemente se suele utilizar pruebas escritas con ítems de respuestas abiertas, los cuales permiten que el estudiante pueda proporcionar justificaciones, argumentaciones o comentarios. Esta situación, le permite al docente identificar el tipo de lenguaje que utilizan los estudiantes en la exposición de sus ideas.

Para realizar la evaluación de estas pruebas escritas, se ha seguido las consideraciones presentadas por Jaime (1993) en su Tesis Doctoral "Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele", en donde plantea una forma de evaluar pruebas como las consideradas en este caso.

2.2.2. Evaluación de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele

Jaime (1993) encuentran en varias investigaciones que existe una oscilación entre dos niveles consecutivos. Por ejemplo, una transición del nivel 2 al 3 supone alcanzar un criterio alto en los niveles 1 y 2 y algún criterio intermedio en el nivel 3. Determinan entonces que existe un progreso continuo en la adquisición de un nivel de razonamiento. Así definen el concepto de Grado de Adquisición de un nivel de Van Hiele, que detallamos más adelante.

2.2.2.1. Grados de adquisición

Para la evaluación de un nivel de razonamiento se considera que este tiene un grado de adquisición, el cual permite observar el mayor o menor dominio de un determinado nivel de razonamiento. Este dominio va desde un dominio nulo hasta un dominio completo.

A cada uno de estos dominios se le ha asignado un nivel, que Jaime (1993, pp. 265-266) caracteriza de la siguiente manera:

- **Adquisición nula:** no se emplean las características de este nivel de razonamiento.
- **Adquisición baja:** empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellas. Es frecuente que el estudiante abandone el nivel para trabajar en el nivel anterior.
- **Adquisición intermedia:** el empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso, sin embargo, ante la aparición de alguna dificultad y considerando que el dominio no es completo, se realiza un retroceso al nivel anterior intentando regresar al actual luego. Por lo tanto, en este proceso encontramos saltos entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
- **Adquisición alta:** se tiene como nivel de trabajo habitual el actual, aunque muy de vez en cuando se produce el retroceso al nivel anterior. En algunas ocasiones se hace uso inadecuado de las herramientas propias del nivel de razonamiento.
- **Adquisición completa:** hay dominio total de las herramientas y métodos de trabajos propios de este nivel de razonamiento.

Jaime (1993) asume como límites razonables para los diferentes grados de adquisición (Gr) los siguientes:

Tabla 2. Grados de Adquisición de los niveles.

Grados de adquisición	Porcentajes asignados
Adquisición nula	$0\% \leq Gr \leq 15\%$
Adquisición baja	$15\% \leq Gr \leq 40\%$
Adquisición intermedia	$40\% \leq Gr \leq 60\%$
Adquisición alta	$60\% \leq Gr \leq 85\%$
Adquisición completa	$85\% \leq Gr \leq 100\%$

Fuente: Jaime (1993, p.266).

Los porcentajes propuestos y la cantidad de divisiones son subjetivos, pero se basan en los resultados de diversas experimentaciones realizadas en investigaciones anteriores.

2.2.2.2. Tipos de respuestas

Jaime (1993) hace una diferenciación de los tipos de respuestas que los estudiantes pueden presentar. Para ello, define unos Tipos de Respuestas, los cuales están enmarcados dentro de los parámetros del nivel de razonamiento que se está analizando.

Los tipos de repuestas, según Jaime (1993, c.p. Corberán et al., 1994, pp. 107-108) son:

- **Tipo 1:** respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporciona ninguna información sobre los niveles inferiores.
- **Tipo 2:** respuestas incorrectas e incompletas en las que se puede reconocer indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.
- **Tipo 3:** respuestas correctas pero incompletas en las que se puede reconocer indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.
- **Tipo 4:** respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento diferentes. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles de razonamiento consecutivos en sus repuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.
- **Tipo 5:** respuestas bastante completas pero incorrectas que reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de la respuesta puede deberse a errores matemáticos o a que siguen líneas que no llevan a la solución del problema planteado.
- **Tipo 6:** respuestas bastante completas y correctas que reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema por completo, porque hay saltos en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.
- **Tipo 7:** respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente un nivel de razonamiento.

En el presente trabajo haremos uso de esta clasificación, el cual servirá de guía para clasificar las respuestas que proporcionan los alumnos a cada uno de los ítems de las pruebas, sobre el objeto matemático cuadriláteros.

2.2.2.3. Asignación de los grados de adquisición

Jaime (1993) asignan los grados de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele considerando la ponderación de cada tipo de repuesta, que se muestra a continuación:

Tabla 3. Ponderación de los diferentes tipos de respuesta.

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

Fuente: Jaime (1993, p. 269).

Jaime (1993) considera que las respuestas de los estudiantes pueden encontrarse en más de un nivel, motivo por el cual se debe ponderar dicha respuesta en cada uno de los niveles de razonamiento que el estudiante utilizó. Además, menciona que: "si un ítem puede ser contestado en un rango de niveles N_1 a N_2, y es contestado en un nivel $N(N_1 \leq N \leq N_2)$" (p. 269), se considerará la ponderación siguiente:

100% en los niveles de esos rangos menores a N

0% en los niveles de esos rangos mayores a N

El valor que le corresponde al tipo de respuesta de dicho nivel.

Se halla la media aritmética de todas las ponderaciones asignadas a los ítems de determinado nivel, para cada uno de los niveles. Esta media aritmética se hace para cada uno de los estudiantes, de esta manera se le asigna su grado de adquisición en el nivel respectivo.

2.2.2.3. Coeficiente de Guttman

El coeficiente de Guttman nos permitirá validar los ítems utilizados en nuestras pruebas, con relación a los niveles. Para el cálculo de estos coeficientes se consideran los vectores formados por los grados de adquisición de los tres niveles considerados en la prueba (g_1, g_2, g_3). La situación ideal es $g_1 > g_2 > g_3$, se considera que hay un error cuando $g_x < g_y$ siendo $y > x$ (Jaime, 1993).

El coeficiente de Guttman está dado por la siguiente formula:

$$G = 1 - \frac{\textit{número total de errores}}{\textit{número total de respuestas}}$$

Cuando no hay un error se debe obtener un valor de G = 1, y se considera como límite inferior para aceptar la jerarquización G = 0,90 (Mayberry, 1983)

Más adelante, en el capítulo 5, usaremos este coeficiente con la intención de observar si existe jerarquización entre cada uno de los ítems propuestos en las pruebas de este trabajo.

CAPÍTULO 3

EL OBJETO MATEMÁTICO: CUADRILÁTEROS

Capítulo 3: Objeto Matemático: Cuadriláteros

La definición, clasificación y propiedades que se presentan a continuación de los cuadriláteros, son algunos de los contenidos que el estudiante debe saber para afrontar con éxito la prueba de salida. En este sentido Godino et al. (2004) menciona que: "realizar clasificaciones de estos objetos geométricos no solo ayuda a entender mejor sus propiedades sino a establecer relaciones entre ellos" (p. 468)

Las actividades de la propuesta didáctica están diseñadas para abordar, de manera completa, estos contenidos y eventualmente lograr un mayor éxito en la prueba de salida.

3.1. Los cuadriláteros

A continuación presentamos los referentes conceptuales sobre el objeto matemático cuadriláteros, a partir de las unidades diseñadas por: Merklen (1993), Verástegui (2003) y Miller, Heeren y Hornsby (2006).

En base a la revisión de estas unidades proponemos una forma de presentar este objeto matemático, de manera que esta presentación facilite la comprensión y desarrolle capacidades en los estudiantes.

Cuadriláteros

Definición: Es un polígono que tiene 4 lados y 2 diagonales. Sea el cuadrilátero ABCD, como se muestra en la figura 1.

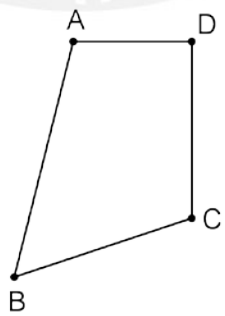


Figura 1. Cuadrilátero.

De acuerdo a la figura 1, tenemos lo siguiente:

- $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son los lados del cuadrilátero.

- A, B, C y D son los vértices del cuadrilátero.
- $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ son los ángulos del cuadrilátero.

Propiedades de los cuadriláteros:

- Los lados opuestos son los que no tienen ningún vértice en común; en la figura 1, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son pares de lados opuestos.
- Los lados consecutivos son los que tienen un vértice común; en la figura1, $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$; $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$; $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ son pares de lados consecutivos.
- Los vértices opuestos son los que no pertenecen a un mismo lado; los ángulos opuestos son los que tienen vértices opuestos. A y C; B y D son pares de vértices opuestos.
- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.
- Desde un vértice sólo se puede trazar una diagonal.

Clasificación de los cuadriláteros:

Los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos y no paralelogramos.

- Los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sus dos pares de lados opuestos paralelos. Se clasifican en rectángulos, cuadrados, rombos y romboides.
- Los no paralelogramos son cuadriláteros que tienen sólo un par de lados paralelos. Se clasifican en trapecios y trapezoides.

Rectángulo: Es un paralelogramo cuyos lados consecutivos no son congruentes, además tiene 4 ángulos rectos.

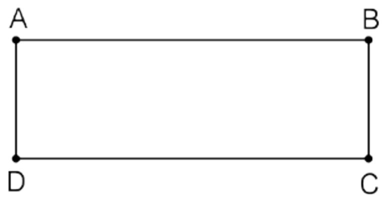


Figura 2. Rectángulo.

De acuerdo a la figura 2, tenemos lo siguiente:

- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

- $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
- $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$
- Sus diagonales son congruentes.

Cuadrado: Es un paralelogramo que tiene sus 4 lados congruentes, además tiene cuatro ángulos rectos.

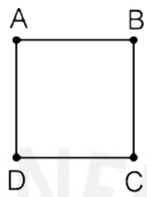


Figura 3. Cuadrado.

De acuerdo a la figura 3, tenemos lo siguiente:

- $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ y $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$
- $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$
- $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
- $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{CD}$
- Sus diagonales son congruentes.
- Sus diagonales son perpendiculares entre sí.
- Sus diagonales son bisectrices de sus ángulos.

Rombo: Es un paralelogramo que tiene sus 4 lados congruentes.

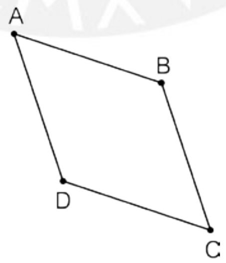


Figura 4. Rombo.

De acuerdo a la figura 4, tenemos lo siguiente:

- $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{CD}$
- $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ y $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$
- $\angle A = \angle C$ y $\angle B = \angle D$

- Sus diagonales no son congruentes.
- Sus diagonales son perpendiculares entre sí.
- Sus diagonales son bisectrices de sus ángulos.

Romboide: Es un paralelogramo que tiene los lados y los ángulos consecutivos de diferente medida (no congruentes).

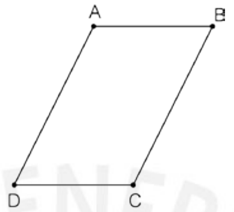


Figura 5. Romboide.

De acuerdo a la figura 5, tenemos lo siguiente:

- $\overline{AB} \, // \, \overline{CD}$ y $\overline{AD} \, // \, \overline{BC}$
- Los lados opuestos son congruentes.
- Los lados consecutivos no son congruentes.
- Los ángulos opuestos son congruentes
- Los ángulos consecutivos son suplementarios.

Trapecio: Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos llamados bases y dos lados no paralelos. Además, a la distancia entre las bases se denomina altura.

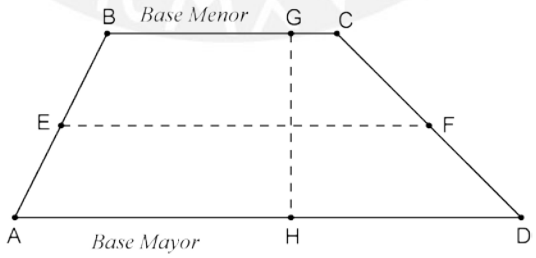


Figura 6. Trapecio.

De acuerdo a la figura 6, tenemos lo siguiente:

- La distancia $\overline{GH}$ es la altura y $\overline{EF}$ es la base media.

Clasificación de los trapecios:

- **Trapecio escaleno:** Todos sus lados son de diferente medida (no congruentes).

$\overline{AD} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB} \neq \overline{CD}$

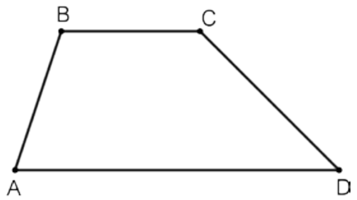


Figura 7. Trapecio escaleno.

- **Trapecio rectángulo:** Tiene 2 ángulos consecutivos rectos.

$\angle A = \angle B = 90°$

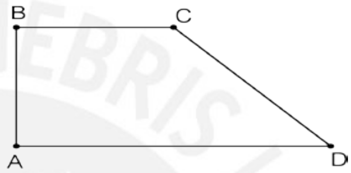


Figura 8. Trapecio rectángulo.

- **Trapecio isósceles:** Tiene los lados no paralelos congruentes.

$\overline{AD} = \overline{BC}$

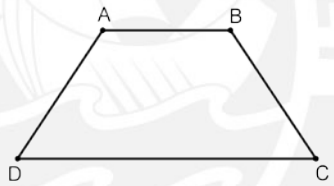


Figura 9. Trapecio isósceles.

Propiedades en los trapecios:

- El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, es paralela a la base e igual a la semi suma de ellas.
- El segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio, es paralela a las bases e igual a la semi diferencia de ellas.

Trapezoide: Es un cuadrilátero en el cual ningún par de lados opuestos son paralelos. Se clasifican en trapezoides simétricos y trapezoides asimétricos.

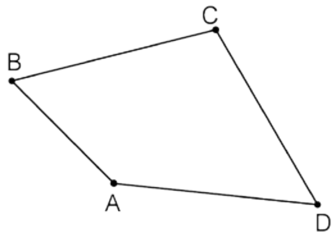


Figura 10. Trapezoide.

Clasificación de los trapezoides:

- **Trapezoide simétrico:** Si una de sus diagonales es mediatriz de la otra diagonal.

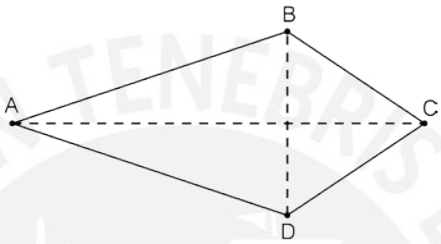


Figura 11. Trapezoide simétrico.

- **Trapezoide asimétrico:** No tiene lados congruentes.

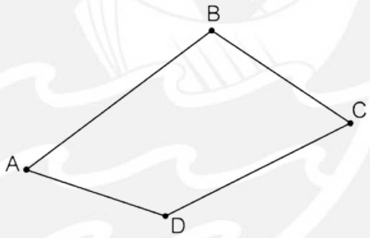


Figura 12. Trapezoide asimétrico.

En el siguiente capítulo, presentamos el experimento y análisis de la propuesta didáctica.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

Capítulo 4: Experimento y análisis

En este capítulo presentaremos la descripción de la muestra, el diseño de los instrumentos de investigación, la implementación de los instrumentos de investigación, y la presentación y análisis de los resultados.

4.1. Descripción de la muestra

Los que formaron parte de la muestra de esta investigación son los estudiantes del cuarto año de educación secundaria de la Institución Educativa Particular Buenas Nuevas – UGEL 03 ubicada en el distrito de San Miguel, Lima – Perú, en el año lectivo 2012. De un total de 30 estudiantes matriculados en este grado trabajamos con un grupo de 10 alumnos.

Cabe señalar que, inicialmente, fueron 13 los estudiantes que se presentaron de manera voluntaria para participar de esta experiencia. Sin embargo, 3 de ellos sólo asistieron a las primeras sesiones, lo cual dificultaba la recogida de datos de los mismos. Motivo por el cual decidimos analizar sólo a los 10 restantes quienes asistieron a todas las sesiones.

Es importante resaltar que los estudiantes trabajaron de manera individual cada una de las actividades propuestas, excepto, en aquellas sesiones de trabajo que correspondían a la fase de explicitación a fin de promover la discusión y el intercambio de información.

Estos alumnos según el Diseño Curricular Nacional de Educación Básico Regular (2003), tienen conocimientos previos sobre:

- Relaciones de las medidas de los lados y ángulos en los triángulos isósceles y equilátero.
- Congruencia y semejanza de triángulos.
- Relación entre los ángulos formados por dos rectas paralelas y una tercera que las corta.
- Bisectriz de un triángulo.

Sin embargo, en la institución educativa no se ha trabajado el tema de los cuadriláteros en el año correspondiente debido a factores relacionados con la falta de organización del equipo docente del área de matemática. Esta información fue recogida al entrevistar a los profesores involucrados. Es más, estos nos manifestaron que los estudiantes presentan dificultades en los conceptos geométricos en general, como por ejemplo en la noción de perpendicularidad, de paralelismo, el significado del término bisecar entre otros.

4.2. Diseño de los instrumentos de investigación

En esta parte presentaremos el diseño de los instrumentos utilizados en esta investigación como son: prueba de entrada, actividades que forman parte de la secuencia didáctica y prueba de salida. Todas diseñadas tomando en cuenta los distintos niveles de razonamiento que pueden adquirir los alumnos respecto a los cuadriláteros y como es una secuencia también se recurrirá a las fases que propone el modelo de Van Hiele.

En esta parte también presentaremos el diseño del taller de introducción al software GeoGebra que hemos considerado necesario incluir debido a que los estudiantes no tenían ningún conocimiento sobre este software.

4.2.1. Diseño de la prueba de entrada

La prueba de entrada se diseñará y aplicará con el objeto de determinar los saberes previos que los estudiantes poseen sobre el tema cuadriláteros. Para el diseño de esta prueba se tomará en cuenta los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele.

Esta prueba consta de 10 ítems, a través de los cuales se busca identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre los cuadriláteros. Para el desarrollo de esta prueba los estudiantes sólo podrán utilizar lápiz y papel. Esta prueba se encuentra en el anexo 1.

Es importante mencionar que los ítems 1, 3 y 4 de la prueba de entrada, del presente trabajo de investigación, fueron tomadas de la Tesis propuesta por Lastra (2005, p. 143. 145 y 146) porque estos ítems permiten identificar si los estudiantes son capaces o no de argumentar sus respuestas. Además, permite identificar si los estudiantes recurren o no a figuras prototipo para justificar su respuesta. Estos ítems 1, 3 y 4 corresponden a los ítems 13, 6 y 17 de la prueba de entrada propuesta por Lastra.

A continuación presentamos el nivel en el que se ubica y el objetivo de cada ítem de la prueba de entrada.

Tabla 4. Descripción de la prueba de entrada a partir del Modelo Van Hiele.

Nivel	Ítem	Objetivo
Reconocimiento	1	Reconocer un cuadrilátero por su forma global.
	2	Agrupar cuadriláteros, de acuerdo a sus formas globales.
Análisis	3	Establecer las propiedades principales que caracterizan a los cuadriláteros.
	4	Identificar y describir las propiedades de un paralelogramo.
	5	Establecer relaciones entre los elementos de un rombo.
	6	Identificar y definir las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.
Deducción informal	7	Promover que el estudiante explique y justifique sus argumentos, asimismo, promover la utilización de notación matemática.
	8	Establecer relaciones entre los elementos y las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.
	9	Realizar demostraciones sencillas, a partir de los datos explícitos que proporciona el problema, así como también, justificar los argumentos de sus demostraciones, en base a las propiedades implícitas presentes en el problema.
	10	Resolver problemas contextualizados que impliquen la organización de datos.

4.2.2. Diseño del Taller de introducción al software GeoGebra

Como estábamos enterados de que ninguno de los 10 estudiantes había trabajado anteriormente con ningún software de geometría dinámica, preparamos un taller de introducción al GeoGebra para que los estudiantes se familiaricen con el uso de los comandos básicos y así poder desarrollar las actividades propuestas en la secuencia didáctica con mayor facilidad.

Este taller se dividió en tres sesiones. La sesión 1, denominada Nociones Básicas, estuvo compuesta por cuatro actividades. La actividad 1, tuvo por objetivo que el estudiante conozca la barra de herramientas del software GeoGebra. La actividad 2, buscaba que el estudiante realice construcciones sencillas como un segmento y una circunferencia. De este modo, el estudiante empezó a utilizar algunas herramientas del software, tales como: *nuevo punto, muestra rótulo, segmento entre dos puntos, circunferencia y compás.* La actividad 3, buscaba que el estudiante desplace un punto sobre un objeto. La actividad 4, buscaba que el estudiante trace rectas paralelas y perpendiculares.

La sesión 2, denominada Construcciones de Diferentes Figuras, estuvo compuesta por 10 ítems, los cuales están encaminados a realizar construcciones sencillas, a fin de que el estudiante utilice conceptos básicos de geometría plana previos al tema cuadriláteros.

La sesión 3, denominada Actividades Complementarias, estuvo dedicada a la construcción de cinco mosaicos, con la intención de que los estudiantes utilicen todas las herramientas que usamos en las sesiones anteriores. Es decir, esta sesión sirve para reforzar los conocimientos adquiridos, respecto al uso de los comandos básicos del software GeoGebra.

El desarrollo de este taller tuvo como objetivo, por un lado, que los estudiantes retomaran sus conocimientos sobre relaciones de las medidas de los lados y ángulos en los triángulos, que es el capítulo previo al de los cuadriláteros. Por ejemplo, en la sesión 2 se le solicita al alumno que realice la siguiente actividad: dado un segmento construir un triángulo equilátero. Para ello, el alumno tendrá que recurrir a conceptos sobre bisectriz, mediatriz y altura en un triángulo equilátero. Por otro lado, buscaba que los alumnos aprendan las nociones básicas sobre los cuadriláteros, como por ejemplo rectas paralelas y rectas perpendiculares. Por ejemplo, en la sesión 3, se le solicitaba al alumno que construya un campo de fútbol y realice la construcción de algunos mosaicos donde tenía que usar las herramientas recta paralela y recta perpendicular.

De otro lado, cabe señalar que de los 10 alumnos, 6 de ellos no tuvieron mayores dificultades en el desarrollo de estas actividades. Sin embargo, en los 4 restantes se presentó muchas dificultades para el logro de estas actividades. Pero la mayor dificultad estuvo relacionada al manejo del software GeoGebra, dado que aún no estaban lo suficientemente familiarizados con este programa.

De manera genérica, el desarrollo de estas actividades les ha permitido a los alumnos retomar sus saberes previos sobre los triángulos. Conocimiento necesario para poder desenvolverse de manera adecuada en el tema cuadriláteros, asimismo, adquirieron nociones sobre paralelismo y perpendicularidad.

4.2.3. Diseño de las actividades a partir de la Teoría de Van Hiele

Las actividades que forman parte de la propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros fueron diseñadas bajo el enfoque de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, dado que estas fases constituyen la secuencia didáctica, propuesta por los propios esposos Van Hiele, indispensables para transitar de un nivel de razonamiento geométrico a otro superior. Asimismo, para el diseño de estas actividades tomamos en cuenta, los resultados de la prueba de entrada que nos sirvió como punto de partida para la elaboración de la misma. Respecto al diseño de las actividades, cabe resaltar que unas fueron adaptadas del trabajo propuesto por Morales y Majé (2011), otras fueron adaptadas del trabajo propuesto por Corberán et al. (1994) y las restantes fueron diseñadas por el investigador. En la siguiente tabla se presenta esta información de manera detallada:

Tabla 5. Autoría de las actividades propuestas.

Diseño de la actividad	N° de actividad
Propuestas por Corberán et al. (1994) y adaptadas por el investigador.	✓ Actividad 1, 12 y 15
Propuestas por Morales y Majé (2011) y adaptadas por el investigador.	✓ Actividad 2, 3, 6, 10, 13, 16 y 17
Propuestas por el investigador.	✓ Actividad 4, 5, 7, 8, 9, 11, 14, 18 y 19

Algunas actividades han sido diseñadas para ser trabajadas con lápiz y papel y otras con la ayuda del Software GeoGebra, de modo que el estudiante pueda interactuar, construir, manipular y descubrir todo lo relacionado con el objeto matemático cuadriláteros.

En la fase de información diseñamos actividades con la intención de recoger los saberes previos de los estudiantes para luego introducir conceptos nuevos. En la fase de orientación dirigida, diseñamos actividades con la intención de que el alumno aprenda los componentes básicos de la red de relaciones que debe formar. En la fase de explicitación, diseñamos actividades con el objetivo de que los alumnos expresen de forma oral y/o escrita los resultados que ha obtenido en las actividades propuestas. En la fase de orientación libre, diseñamos actividades en las que los estudiantes tengan que emplear los conocimientos construidos durante las fases anteriores. Para lograr este fin diseñamos actividades mucho más complejas a las trabajadas en las fases anteriores. Y en la fase de integración, diseñamos actividades de cierre que permita que los estudiantes tengan una visión global de todo lo aprendido sobre el objeto matemático cuadriláteros.

A continuación hacemos una descripción de las actividades según los niveles y fases del modelo Van Hiele propuestas por Corberán et al. (1994), así como también presentamos los objetivos y el tiempo requerido para cada una de las actividades diseñadas.

La actividad 2, 3, 4, 15 y 18 se desarrollaron usando el software GeoGebra. Estas actividades y las restantes se encuentran en el anexo 3.

Tabla 6. Descripción de las actividades a partir del Modelo Van Hiele.

Niveles	Fases	Actividades	Objetivo	Tiempo
Nivel 1: Reconocimiento	Información	1	Reconocer un cuadrilátero por su forma global.	10’
	Orientación dirigida	2	Establecer relación entre paralelismo y perpendicularidad en un cuadrilátero.	45’
		3	Reconocer que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano.	15’
	Explicitación	4	Mostrar que la construcción de una figura responde a propiedades matemáticas.	20’
	Orientación libre	5	Reconocer y nombrar diversos tipos de cuadriláteros por su forma global en una situación práctica.	30’

	Integración	6	Establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros.	30’
Nivel 2: Análisis	Información	7 y 8	. Promover la lectura y el uso adecuado de símbolos o notación matemática.	25’
	Orientación dirigida			45’
	Explicitación	9	Justificar, explicar o parafrasear las principales propiedades de los cuadriláteros.	30’
	Orientación Libre	10	Deducir propiedades implícitas de los cuadriláteros a partir de propiedades explicitas.	10’
		11	Realizar generalizaciones sobre las propiedades de los cuadriláteros a partir de la inducción geométrica.	70’
	Integración	12	Establecer y definir elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.	40’
Nivel 3: Deducción Informal	Información	13	Caracterizar a los cuadriláteros, según sus lados, ángulos o diagonales.	30’
	Orientación dirigida	14	Establecer relaciones de inclusión y establecer las principales propiedades que pueden caracterizar un cuadrilátero.	50’
		15	Establecer interrelaciones entre las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.	40’
	Explicitación	16	Realizar demostraciones de manera intuitiva e informal y formular ejemplos y/o contraejemplos sobre las propiedades de los cuadriláteros.	40’
	Orientación libre	17	Realizar demostraciones sencillas y establecer las interrelaciones entre las propiedades de los cuadriláteros.	45’
		18 y 19	Resolver problemas contextualizados sobre cuadriláteros que impliquen la organización de datos.	45’

4.2.4. Diseño de la prueba de salida

En cuanto a la prueba de salida esperamos recoger información sobre los conocimientos adquiridos sobre cuadriláteros, luego de haber desarrollado las actividades propuestas.

Dado que los resultados de la prueba de entrada muestran que los estudiantes presentan deficiencias y dificultades para resolver las preguntas relacionadas con los cuadriláteros, que más adelante detallaremos, se ha considerado tomar como prueba de salida, la misma prueba que se tomó al inicio. Esto con el fin de comparar el nivel de razonamiento inicial y final de los estudiantes, reconociendo si se dio un desplazamiento hacia un nivel superior de razonamiento.

4.3. Implementación de la propuesta didáctica

En esta parte describiremos cómo se realizó la aplicación de la prueba de entrada, de las actividades y de la prueba de salida.

La propuesta didáctica se llevó a cabo durante 6 sesiones de clase. Cada sesión tuvo una duración de 2 horas pedagógicas (90 minutos).

La siguiente tabla muestra la distribución de cada una de las sesiones de clase.

Tabla 7. Distribución de las sesiones de clase.

N° de sesión	¿Qué se hizo?	Nivel
Sesión 1	Se desarrolló la actividad 1 correspondiente a la fase de información; las actividades 2 y 3 correspondientes a la fase de orientación dirigida y; la actividad 4 correspondiente a la fase de explicitación.	Nivel 1: Reconocimiento
Sesión 2	Se desarrolló la actividad 5 correspondiente a la fase de orientación libre y la actividad 6 correspondiente a la fase de integración.	
Sesión 3	Se desarrolló la actividad 7 correspondiente a la fase de información; la actividad 8 correspondiente a la fase de	

	orientación dirigida y; la actividad 9 correspondiente a la fase de explicitación.	Nivel 2: Análisis
Sesión 4	Se desarrolló la actividad 10 y 11 correspondiente a la fase de orientación libre y la actividad 12 correspondiente a la fase de integración.	
Sesión 5	Se desarrolló la actividad 13 correspondiente a la fase de información; las actividades 14 y 15 correspondiente a la fase de orientación dirigida y; la actividad 16 correspondiente a la fase de explicitación.	Nivel 3: Deducción informal
Sesión 6	Se desarrolló la actividad 17, 18 y 19 correspondiente a la fase de orientación libre.	

A continuación presentamos el desarrollo de estas sesiones:

- **Sesión 1**

La actividad 1 se desarrolló de manera individual y lo que buscaba era determinar los tipos de cuadriláteros que conocen los estudiantes, asimismo, buscaba determinar si su elección estuvo supeditada por prototipos visuales. Las respuestas de los estudiantes muestran que si bien reconocen los diferentes tipos de cuadriláteros, ellos mencionan que aquellos están girados. Por citar un ejemplo, se le presentó en esta actividad un cuadrado rotado 90°; algunos alumnos mencionaron que era un rombo, otros que era un cuadrado pero volteado, haciendo énfasis en esta característica, por demás visual.

Dejando de lado momentáneamente esta situación, pasamos a la actividad 2 la cual también se desarrolló de manera individual y usando el software GeoGebra y lo que buscaba era determinar si los alumnos conocían la noción de paralelismo y perpendicularidad. Lamentablemente sólo un estudiante construyó cuadriláteros con las características mencionadas. El resto sólo se limitó a construir trapezoides.

Al término de la segunda actividad estábamos frente a dos situaciones realmente preocupantes. Por un lado, la actividad 1 mostró que sus respuestas estaban supeditadas por figuras prototipos y por otro lado, la actividad 2 mostró que los alumnos no estaban familiarizados con la noción de paralelismo y perpendicularidad. No obstante esta situación estuvo prevista, motivo por el cual se diseñó la actividad 3.

La actividad 3 se desarrolló de manera individual y haciendo uso del software GeoGebra. En ella se solicitaba al alumno que construyera un cuadrado y un rectángulo y que luego rotará la figura. Por un lado, esta actividad permitió que el estudiante se diera cuenta de que un cuadrado o un rectángulo no dejan de serlo a pesar de rotarlo o encontrarlo en su forma "no habitual", en el sentido de que en muchas ocasiones nuestros profesores recurren, también, en su presentación a figura prototipos. Por otro lado, tanto en la construcción del cuadrado como del rectángulo se pudo mostrar el paralelismo y la perpendicularidad y, más aun, se pudo ver cómo estas características o propiedades no cambian a pesar de que rotemos la figura.

En consecuencia, la actividad 3 apuntaba hacia que el alumno reconociera que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano.

Finalmente, culminamos esta sesión con el desarrollo de la actividad 4, la cual se realizó en parejas a fin de promover el diálogo. En esta actividad se le solicitaba al estudiante que observara las construcciones realizadas en GeoGebra y que a partir de esta observación determine y comente con su compañero que sucede en cada caso luego de arrastrar los vértices de estas construcciones.

En un debate inicial los alumnos mencionaron que todos los cuadriláteros presentados en esta actividad representaban un cuadrado porque tienen sus 4 lados iguales y sus ángulos iguales, incluso expresaron lo siguiente: "es un cuadrado y aunque esté volteado sigue siendo un cuadrado". Esta clase de argumentos muestran que se ha producido un avance respecto a las respuestas de los estudiantes en comparación a sus respuestas iniciales, cuando mencionaban es un cuadrado volteado.

Sin embargo y para sorpresa de todos los estudiantes al arrastrar uno de los vértices del cuadrilátero este se deformaba, es decir, dejaba de ser un cuadrado para convertirse en un trapezoide. Esta situación generó un interesante debate en los estudiantes, desde respuestas simples como "este se deforma por lo tanto deja de ser un cuadrado" hasta respuestas no tan simples como "si fuera un cuadrado no dejaría de serlo así lo agrandemos o achiquemos". Aunque su vocabulario no es el más apropiado, lo que quiso decir es que los ángulos no dependen de la longitud de sus lados. Este tipo de respuesta es un indicio de encontrarse en el nivel 2, de análisis.

- **Sesión 2**

La actividad 5, se desarrolló de manera individual. En ella se le solicitaba al estudiante que construyera un figura con la condición de que esta sólo esté compuesta por cuadriláteros, señalando además, en dicho gráfico que cuadriláteros había empleado. De esta manera se pudo observar dos hechos importantes. Por un lado, si el alumno sigue usando figura prototipos y, por otro lado, si es capaz de utilizar las nociones aprendidas sobre paralelismo y perpendicularidad. Para lograr este objetivo, el gráfico del estudiante tenía que pasar la prueba de arrastre del software GeoGebra.

Lo que se observó es que si bien ningún estudiante vuelve a mencionar es una figura volteada/girada todavía no son capaces de trazar rectas paralelas o perpendiculares, motivo por el cual no pudieron pasar la prueba de arrastre.

En la parte final de la sesión 2, se propuso la actividad 6 que corresponde a la fase de integración. A lo largo de las fases anteriores, los alumnos han aprendido nuevos conocimientos y habilidades, pero aún deben adquirir una visión global de lo aprendido. En este sentido esta actividad tuvo como objetivo establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros.

- **Sesión 3**

La actividad 7, se desarrolló de manera individual. En ella se le solicitaba al estudiante que observe un conjunto de cuadriláteros y señale el nombre de cada cuadrilátero y, justifique su respuesta. Esto sirvió como retroalimentación para afianzar los conocimientos alcanzados en el nivel anterior. Aunque en términos generales los estudiantes no tuvieron dificultades en el desarrollo de esta actividad se observó un error común en ellos, respecto a los paralelogramos y trapecios, confundiéndolos entre sí.

Respecto a la actividad 8, esta se realizó de manera individual. El propósito de esta actividad fue promover la lectura y el uso adecuado de símbolos o notación matemática. Al inicio de esta actividad los alumnos mostraban un conocimiento muy pobre sobre la notación matemática.

Ello se evidenció al revisar rápidamente las respuestas de cada uno de los estudiantes, motivo por el cual se hizo un breve paréntesis en el desarrollo de esta actividad. Lo que encontramos, en relación a las respuestas proporcionadas, fue lo siguiente:

- Sólo usan los símbolos $<, >, =, \neq$
- No usan símbolos como $//, \perp, \cong, \square$

Su vocabulario, también es pobre. En lugar de decir son lados congruentes dicen son lados iguales; en lugar de emplear los términos complementarios o suplementarios dicen es igual a 90° o 180°. Esta situación nos obligó a adelantar la fase de explicitación, en el sentido de que se dio inicio a un debate, que duró entre 10 y 15 minutos, para unificar criterios en el uso de los símbolos. Esto no quiere decir que se desarrolló esta actividad con el alumno. Por el contrario, el único papel del docente fue darle las herramientas necesarias para que ellos culminaran con mayor éxito esta actividad. Luego de esta intervención se observó mejoras en las respuestas de los estudiantes:

- Empiezan a usar símbolos como $\perp$ y $//$ aunque en algunos casos no lo hagan de manera adecuada.
- Aunque no todos usan los términos suplementarios o complementarios al menos mencionan estos ángulos suman 180° o 90°. Esto representa un avance respecto a sus repuestas iniciales, donde por ejemplo cuando se les dio dos ángulos uno de 150° y otro de 30° en lugar de decir que estos eran suplementaros decían estos son diferentes.

En la actividad anterior el error común era que los estudiantes confunden los paralelogramos con los trapecios y el error común encontrado en esta actividad era que nadie menciona que las diagonales de los cuadrados, rombos y trapezoides simétricos son perpendiculares.

Dejando de lado momentáneamente esta situación, pasamos a la actividad 9 la cual se realizó en parejas a fin de promover el diálogo. Esta actividad tuvo varios propósitos en sí, los cuales mencionamos a continuación:

- Identificar si el estudiante era capaz o no de traducir el enunciado de un problema.
- Identificar sus saberes previos respecto a las líneas notables.
- Debatir argumentos y justificaciones.

Además el desarrollo de esta actividad es de suma importancia dado que la prueba de salida se planteó una pregunta similar a esta.

Respecto al enunciado del problema, todos tuvieron dificultades para hacer un buen gráfico porque la altura del trapecio fue confundida con sus lados no paralelos o con sus diagonales.

Estos errores, junto a los errores encontrados en las actividades 7 y 8, se discutieron en esta fase. Para superar estos obstáculos y aprovechando que estábamos en la sala de cómputo, se propuso una actividad muy interesante que consistió en lo siguiente:

- Se construyó un paralelogramo, no con segmentos paralelos, sino con rectas paralelas, de modo que, se conserve el paralelismo al aplicar la prueba de arrastre. Lo que se hizo a continuación fue arrastrar los vértices del paralelogramo, de modo que este en algún momento se convirtiese en un rectángulo, cuadrado o rombo. Con ello, el estudiante se dio cuenta de que tanto el rectángulo, cuadrado o rombo pertenecían al grupo de los paralelogramos por tener dos pares de lados paralelos. Luego de esta observación se le solicitó a los estudiantes que arrastraran los vértices del paralelogramo de tal modo que se convirtiera en un trapecio; recién allí los estudiantes se percataron de que son dos tipos de cuadriláteros diferentes, dado que los trapecios sólo tiene un par de lados paralelos. Posteriormente, se le solicitó al estudiante que analice el ángulo que determinan las diagonales de un cuadrado y un rombo. Luego de experimentar, una y otra vez, se convencieron de que sus diagonales son perpendiculares entre sí.

- **Sesión 4**

Las actividades 10 y 11, se realizaron de manera individual. El principal propósito de estas actividades fue realizar generalizaciones sobre las propiedades de los cuadriláteros a partir de la inducción geométrica.

Uno de los ítems de estas actividades decía: ¿Qué figura se forma al unir los puntos medios de los lados de un rombo? Respecto a este ítem, en todos los estudiantes existe un preconcepto sobre las diagonales de un rombo. Como ejemplo, citamos la respuesta de un estudiante: “sus diagonales son iguales porque sus lados son iguales, como en el caso del cuadrado”.

En este sentido fue necesaria la intervención del docente, no para proporcionarle al estudiante la solución de problema, sino para hacerle algunas preguntas de tal modo que sea el propio estudiante quien llegue a la respuesta del problema. Como ejemplo, citamos un fragmento de este diálogo entre docente y alumno: el docente pregunta ¿las diagonales de un rectángulo son iguales? A lo que el estudiante responde claro que sí, porque si aplico el teorema de Pitágoras ambas diagonales miden iguales. Enseguida el docente hace el siguiente comentario: “tú afirmaste que si los lados de un cuadrilátero son iguales, sus diagonales también lo son”, entonces ¿qué ocurrió con el rectángulo? Sus 4 lados no son iguales, sin embargo sus diagonales son congruentes.

Luego de este breve diálogo, fue decisión de cada estudiante reconsiderar y superar el preconcepto sobre las diagonales de un rombo. Este cambio se evidenció al comparar las respuestas entre la prueba de entrada y la prueba de salida.

La actividad 12 se realizó de manera individual. Esta se desarrolló sin mayores dificultades gracias a los diálogos y debates que se establecieron con los estudiantes, como fue el caso de la construcción del paralelogramo en base a rectas paralelas y este último caso para superar el preconcepto de las diagonales de un rombo. No obstante y a pesar de haber superado estos obstáculos, nos chocamos con un nuevo obstáculo en relación a la caracterización del trapecio.

- **Sesión 5**

La actividad 13, se realizó en parejas a fin de promover la discusión y el intercambio de información. El objetivo de esta actividad fue caracterizar los cuadriláteros según sus lados, ángulos o diagonales. El debate en cada una de las parejas proporcionó resultados interesantes. Por ejemplo, inicialmente los estudiantes proporcionaban toda una lista de propiedades para caracterizar un cuadrilátero, pero eventualmente empezaron a reducir esta lista hasta lograr una lista de propiedades suficientes y necesarias.

La actividad 14 y 15, se realizó de manera individual. Los propósitos de esta actividad fueron varios, entre los que mencionamos a continuación:

- Establecer relaciones entre las propiedades de los cuadriláteros.
- Establecer ejemplos y contraejemplos.
- Justificar las propiedades de los cuadriláteros.

Corberán et al. (1994), mencionan que en este nivel los estudiantes "saben cómo razonar de acuerdo a un sistema lógico deductivo, pero esto no equivale a razonar con la fuerza de la lógica formal. En particular, no distinguen con claridad una implicación $p \rightarrow q$ de su recíproca $q \rightarrow p$" (p.17) Esto se evidenció en uno de los ítems propuestos en esta actividad, el cual decía:

Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ entonces ABCD es un rombo ($p \rightarrow q$)

Todos mencionaron que este enunciado era verdadero, lo cual no es cierto. Seria verdadero si agregamos la condición de que se corten en su punto medio. No es lo mimo decir:

Si ABCD es un rombo entonces $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ($q \rightarrow p$)

En este caso, la respuesta siempre es verdadera. Citaremos otro ejemplo donde se observa que los estudiantes distinguen una implicación, pero en un sólo sentido. El enunciado de este ítem decía: si: $AB = CD$ y $\overline{AB} // \overline{CD}$ entonces ABCD es un paralelogramo. Aunque las repuestas de los estudiantes no fueron directas estas fueron mucho más interesantes por la naturaleza de las misma. Es decir, son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y deducir esas implicaciones. Por ejemplo, citamos la respuesta de un alumno:

…no, no es un paralelogramo es un rectángulo… pero un rectángulo es un paralelogramo… entonces si es verdadero el enunciado.

La actividad 16, se realizó en parejas a fin de promover la discusión y el intercambio de información. El diálogo les permitió intercambiar ideas, experiencias, preconceptos, etc. De este modo se apoyaban para buscar ejemplos y contraejemplo que validen sus argumentos.

Uno de los obstáculos presentes en estas 3 últimas actividades (14, 15 y16) fue que todos los estudiantes entendían lo que significaba "de un ejemplo", pero no entendían el significado sobre "de un contraejemplo". En este sentido, se hizo un alto para pasar a explicar el término contraejemplo. Luego de esta aclaración, el desarrollo de esta actividad fue mucho más fluido.

- **Sesión 6**

Las actividades 17, 18 y 19, estaban encaminadas a evaluar los conocimientos adquiridos en los niveles anteriores. Además de los problemas para realizar demostraciones se propusieron problemas contextualizados. Respecto al desarrollo de estas actividades no puede decirse que fue abordada por todos los estudiantes ya que la mayoría no pudo resolverlas de manera adecuada, además, algunos de ellos ni siquiera la contestaron. Esto se debe a que sus razonamientos se siguen apoyando en la manipulación y sus demostraciones son de tipo informal. No obstante, encontramos indicios en sus respuestas que muestran que han mejorado en varios aspectos, como por ejemplo:

- Ya no confunden la altura del trapecio con sus lados no paralelos o con sus diagonales.
- Mayor riqueza en su vocabulario geométrico. Por ejemplo, antes decían los ángulos suman 180° ahora dicen los ángulos son suplementarios; antes decían diagonales iguales ahora dicen diagonales congruentes.

En suma, durante el desarrollo de cada una de las actividades propuestas los alumnos tuvieron que dar justificaciones a la mayoría de las respuestas que presentaban. Estas justificaciones fueron mejorando con el progreso del nivel 1 al nivel 2 y del nivel 2 al nivel 3.

4.3.1. Implementación de la prueba de entrada

La prueba de entrada, que consta de 10 preguntas, fue aplicada a 10 estudiantes en forma individual y tuvo una duración de 80 minutos.

La tabla que se presenta a continuación resume los ítems y los niveles que podrían alcanzar las respuestas de los estudiantes. En la prueba de entrada los ítems se presentaron en el orden mencionado en la tabla indicada.

Tabla 8. Distribución de los ítems de la prueba de entrada.

Ítem	Niveles		
	1	2	3
1	✓	✓	
2	✓		
3		✓	
4	✓	✓	
5		✓	✓
6		✓	
7		✓	✓
8		✓	✓
9		✓	✓
10		✓	

Cabe señalar que para el análisis de la prueba de entrada, se ha considerado contabilizar 8 de los 10 ítems propuestos, dado que tanto el ítem 2 como en el ítem 6 no fueron contestados por todos. Esta situación quizás se presentó por cuestiones de tiempo o quizás les pareció muy tedioso resolverlo, lo cual no indica que no lo hayan podido resolver. En ambos casos el hecho de no haber contestado estos ítems, no es lo importante y más aún como lo mencionan Corberán et al. (1994): “la determinación del nivel de razonamiento de un estudiante no debe deducirse de qué cuestiones conteste, sino de cómo las conteste” (p.101)

A continuación describiremos, en líneas generales, algunos errores, dificultades y limitaciones que presentaron los estudiantes en sus respuestas. Las justificaciones de sus respuestas se basan en lo visual y son insuficientes, por ejemplo, al considerar sólo lados o sólo ángulos para caracterizar a un cuadrilátero. Si bien es cierto, conocen la respuesta, sin embargo no la justifican de manera adecuada. Por otro lado, tienden a confundir los paralelogramos o romboides con los trapecios y viceversa. También, observamos errores comunes en las respuestas de los estudiantes, como por ejemplo, el hecho de no considerar las diagonales desiguales de un rombo al momento de justificar su respuesta, dando una respuesta parcialmente correcta. Tampoco toman en cuenta que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, lo cual provoca argumentos incorrectos. En cuanto a los ítems 9 y 10, cabe señalar que los estudiantes no tienen los recursos y argumentos necesarios para resolver los problemas, que no son cuestiones de tiempo. En suma, los estudiantes, no recurren a las propiedades intrínsecas de los cuadriláteros para justificar sus respuestas. Por el contrario, se basan en justificaciones visuales.

Por lo expuesto, anteriormente, se deduce que inicialmente los estudiantes se encontraban en el nivel de reconocimiento, dado que sus respuestas reflejan que usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas Asimismo, hacen referencia a prototipos visuales para caracterizar figuras. Y se encuentren desarrollando habilidades en el nivel de análisis, dado que sus respuestas reflejan que todavía no pueden explicar cómo se relacionan las propiedades, es decir, no ven las relaciones lógicas entre las propiedades de una figura.

4.3.2. Implementación de las actividades según las fases de aprendizaje

Las actividades propuestas para el nivel 1, de reconocimiento, son las actividades 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ubicadas en el anexo 3.

La actividad 1 que corresponde a la fase de información, tiene por objetivo reconocer los cuadriláteros por su forma global. Si bien es cierto, los estudiantes no tuvieron dificultades para desarrollar esta actividad, sin embargo, es importante señalar que las figuras prototipo/estereotipos están fuertemente marcadas en sus respuestas. La actividad 2 que corresponde a la fase de orientación dirigida, tiene por objetivo establecer relación entre paralelismo y perpendicularidad de un cuadrilátero. Es importante señalar, que sólo 2 de los

10 estudiantes construyen cuadriláteros con lados paralelos y/o perpendiculares. En los 8 restantes, no aparece en sus construcciones ningún cuadrilátero con lados paralelos y/o perpendiculares. Motivo por el cual, las repuestas de los estudiantes se desarrollaron sin mayores dificultades. Excepto en aquellos 2 estudiantes, que no tienen clara la noción de perpendicularidad, en cambio, si poseen una buena noción de paralelismo. La actividad 3 que corresponde a la fase de orientación dirigida, tiene por objetivo mostrar que las propiedades de los cuadriláteros, se mantienen al cambiar su posición. El desarrollo de esta actividad, no presentó mayores dificultades. La actividad 4 que corresponde a la fase de explicitación, busca básicamente generar debate sobre lo que están observando, y de esta manera enriquecer el lenguaje del estudiante. La actividad 5 que corresponde a la fase de orientación libre, tiene por objetivo reconocer y nombrar diversos cuadriláteros por su forma global, en una situación práctica. El desarrollo de esta actividad, no presentó mayores dificultades. La actividad 6 que corresponde a la fase de integración, sobre la clasificación de los cuadriláteros, busca establecer relaciones de inclusión, lo cual formará el entramado básico para proseguir con el desarrollo de los otros niveles de razonamiento.

Las actividades propuestas para el nivel 2, de análisis, son las actividades 7, 8, 9, 10 11, 12.

Las actividades 7 y 8 que corresponden a las fases de reconocimiento y orientación libre respectivamente, tienen por objetivo, por un lado, retomar las ideas fundamentales que se desarrollaron en el nivel previo y, por otro lado, la familiarización con los símbolos matemáticos necesarios para contribuir al desarrollo del lenguaje formal. Los estudiantes han mejorado su reconocimiento de los cuadriláteros, pero en cuanto al uso de símbolos matemáticos/geométricos presentan serias carencias en su uso. Esto se evidencia porque sólo usan los símbolos $=,\ \neq,\ <,\ >$ en sus respuestas y son muy pocos aquellos estudiantes que usan símbolos como por ejemplo $\perp$ y $//$. La actividad 9 que corresponde a la fase de explicitación, al igual que la actividad 4, del nivel 1, busca generar debate. En término generales, esta actividad ayudó al estudiante a mejorar no sólo su lenguaje, sino también, la utilización de símbolos y el desarrollo de sus argumentos. La actividad 10 que corresponde a la fase de orientación libre, busca básicamente que el estudiante se enfrente a nuevas actividades y de mayor grado de dificultad. La actividad 11 que corresponde a la fase de orientación libre, tiene por objetivo deducir propiedades implícitas a partir de propiedades explícitas, así como también, realizar generalizaciones a partir de la manipulación. Para el logro de este último objetivo, se hará uso del software GeoGebra. Por otro lado, el hecho de plantear problemas basados en los puntos medios, exige del estudiante la capacidad de que este tenga clara las propiedades de las figuras. Es por ello, que muchas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes son básicamente visuales, ya que no han considerado, por ejemplo, las diagonales desiguales del rombo. La actividad 12 que corresponde a la fase de integración, tiene por objetivo, básicamente, a establecer las propiedades elementales que caracterizan a los cuadriláteros.

Las actividades propuestas para el nivel 3, de deducción informal, son las actividades 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19.

La actividad 13 que corresponde a la fase de información, tiene por objetivo que el estudiante aprenda a caracterizar un cuadrilátero de manera pertinente promoviendo en él su capacidad de minimizar un conjunto de propiedades a condiciones suficientes y necesarias. Los estudiantes caracterizan las figuras de forma visual, lo cual provoca respuestas muy incompletas. Las actividades 14 y 15 que corresponden a la fase de orientación dirigida, tienen por objetivo establecer interrelaciones entre las propiedades de los cuadriláteros. Lo rescatable de estas actividades fue el hecho de que los alumnos mostraran ejemplos y contraejemplos para justificar sus respuestas. La actividad 16 que corresponde a la fase de explicitación, tiene por objetivo, por un lado, realizar demostraciones sencillas y, por otro lado, generar debate sobre condiciones mínimas para caracterizar un cuadrilátero (en este caso un rombo). Es importante señalar que todos los estudiantes consideran que es suficiente que las diagonales de un cuadrilátero sean perpendiculares para que este sea un rombo. Asimismo, asumen que las diagonales se bisecan. Las actividades 17 y 18 que corresponden a la fase de orientación libre, tienen por objetivo, por un lado, realizar demostraciones sencillas y, por otro lado, establecer interrelaciones entre las propiedades de los cuadriláteros. Lo rescatable de esta actividad es que, si bien es cierto, todos contestaron estas actividades, sin embargo, nadie usa símbolos en la justificación de sus respuestas. Es decir, todas las respuestas son visuales y de argumentos verbales. La actividad 19 que corresponde a la fase de orientación libre, tiene por objetivo a resolver problemas de contexto real y matemático, que implica la organización de datos, a partir de inferencias deductivas.

4.3.3. Implementación de la prueba de salida

Dado que como prueba de salida hemos considerado la misma prueba de entrada, su aplicación fue similar a la aplicación de la prueba inicial. En esta prueba observamos que los estudiantes evidenciaban lo siguiente:

- El uso de un vocabulario más apropiado.
- Un mejor criterio para clasificar cuadriláteros.
- El uso de una notación matemática más apropiada.
- El uso de ejemplo y contraejemplo para justificar sus argumentos.
- Dificultades para explicar las relaciones entre las propiedades de los cuadriláteros.

4.4. Presentación de los resultados

En esta parte presentaremos los resultados obtenidos luego de la aplicación de la prueba de entrada, la prueba de salida y las actividades propuestas según la secuencia didáctica diseñada para la enseñanza de los cuadriláteros.

4.4.1. Descripción de las respuestas a los ítems de la prueba de entrada.

Para realizar una mejor identificación de los niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele, es fundamental elaborar los descriptores de cada ítem de la prueba de entrada a partir de las respuestas dadas por los alumnos, asignando además el tipo de respuesta que le corresponde según lo indicado en la metodología de la investigación. Para de esta manera poder caracterizar las respuestas de los estudiantes y ubicar el nivel de razonamiento en el que se encuentra.

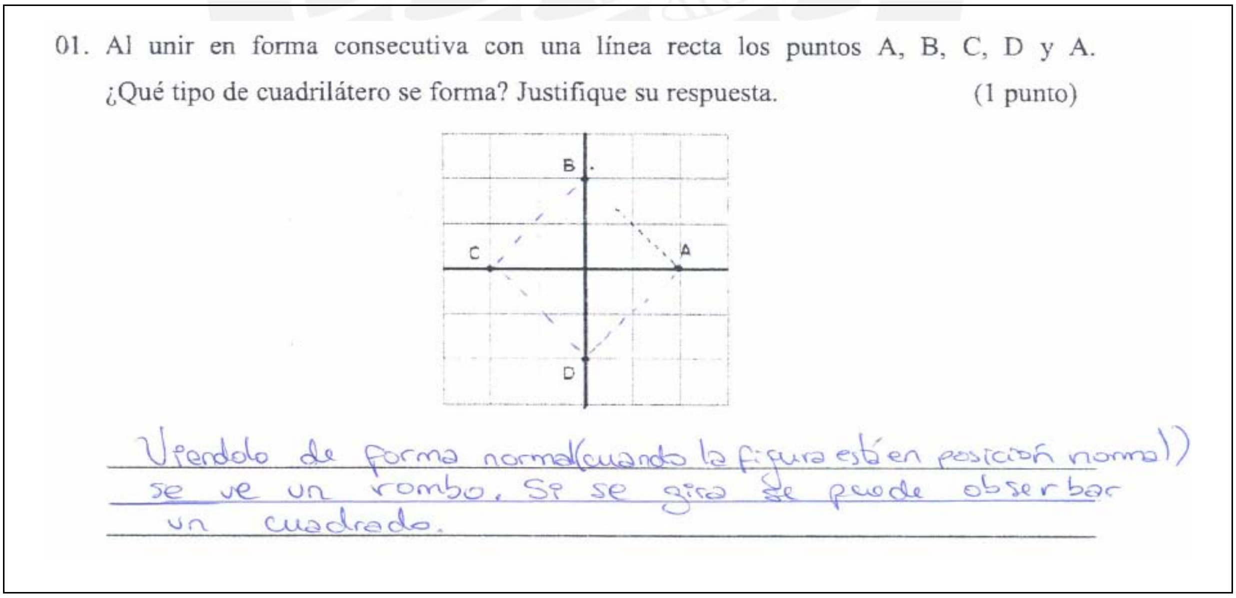
Tabla 9. Descripción del ítem 1 (Nivel 1 y 2)

Descriptor	Tipo
Sólo gráfica, no indica el nombre del cuadrilátero.	1
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero, aunque de manera incorrecta. Además, no justifica su respuesta.	2

Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero de manera correcta. Pero, no justifica su respuesta.	3
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Pero sólo se basa en una de sus propiedades (o bien lados o bien ángulos) para justificar su respuesta.	5
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Además, justifica su respuesta recurriendo a ambas propiedades (lados y ángulos)	6 y 7

Comentario de las respuestas del ítem 1:

La mitad de los estudiantes, es decir 5 de los 10, consideran que la figura que se forma al unir los puntos de manera consecutiva es un rombo. La otra mitad, considera que es un cuadrado. En ambos casos, sólo mencionan los lados como única propiedad para caracterizar a la figura. Por otra parte, 2 de los 5 estudiantes que consideraron que la figura era un cuadrado mencionan lo siguiente:


01. Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta. (1 punto)

Viendolo de forma normal(cuando la figura está en posición normal) se ve un rombo, si se gira se puede observar un cuadrado.

Figura 13. Muestra del ítem 1, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja por una parte, que los estudiantes necesitan girar la figura para determinar a qué grupo pertenece, lo cual muestra que en sus esquemas mentales existen figuras estereotipadas/prototipos. Por otra parte, en términos generales, queda en evidencia que su respuesta está guiada por lo que observan, es decir, por lo visual.

Tabla 10. Descripción del ítem 2 (Nivel 1)

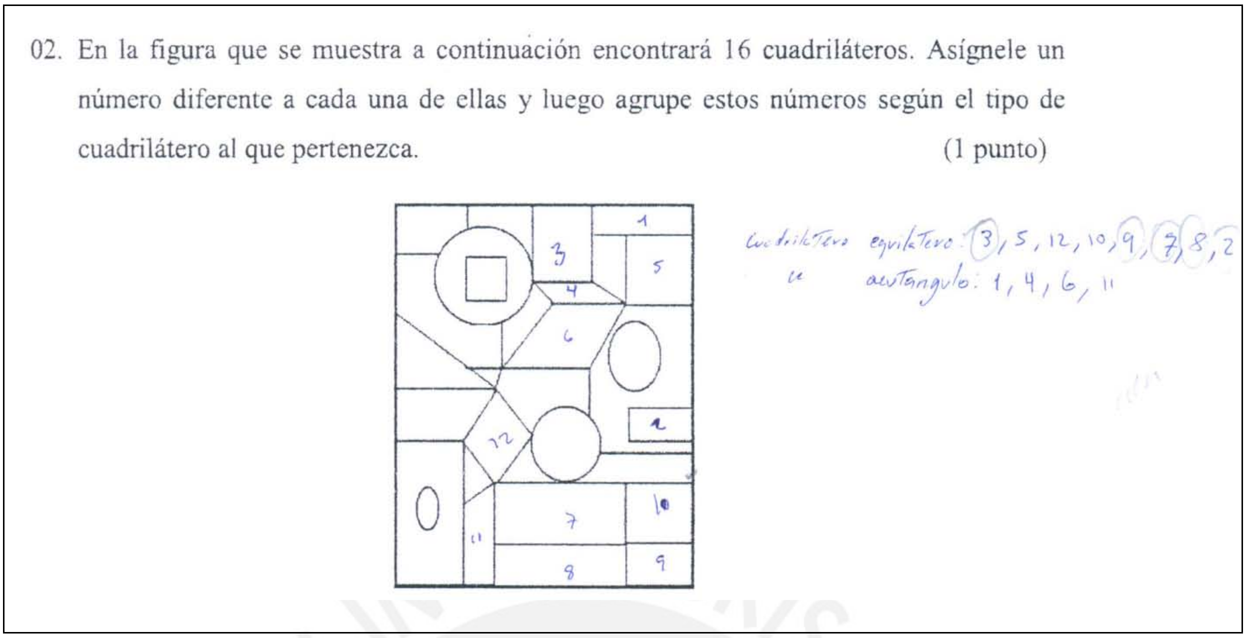
Descriptor	Tipo
No logra ninguna clasificación. Sólo se limita a enumerar los cuadriláteros.	1
No logra agrupar de manera correcta los cuadriláteros o hace clasificaciones parciales, sin incluir a todos los elementos pertenecientes a dicha clase de cuadriláteros.	2 y 3
Clasifica los cuadriláteros completamente, pero de manera incorrecta en algún caso.	5
Clasifica cuadriláteros de manera correcta y completa.	6 y 7

Comentario de las respuestas del ítem 2:

Con este ítem se pudo identificar que los estudiantes no poseen una idea clara de los diferentes cuadriláteros que existen, es decir, las agrupaciones que realizaron no fueron totalmente correctas. Por ejemplo, 4 de los 10 sólo se limita a hacer dos tipos de agrupaciones, las referidas a los cuadrados y a los rectángulos. Asimismo, confunden los trapecios con los paralelogramos, es decir, los consideran en el mismo grupo. Aparentemente, las agrupaciones que realizaron estuvieron guiadas, nuevamente, por lo visual, como ocurrió en el ítem 1.

Por otra parte, sólo un estudiante obtiene una respuesta completa y correcta, al agrupar de manera pertinente los diferentes cuadriláteros que se le presentaron en el ítem 2.

Es importante mencionar la siguiente agrupación/clasificación que realiza un estudiante:



02. En la figura que se muestra a continuación encontrará 16 cuadriláteros. Asígnele un número diferente a cada una de ellas y luego agrupe estos números según el tipo de cuadrilátero al que pertenezca. (1 punto)

Figura 14. Muestra del ítem 2, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja que este estudiante emplea de manera incorrecta el término cuadrilátero equilátero (que corresponde a un cuadrado o un rombo) dado que lo emplea para referirse a los cuadrados y a los rectángulos. Aún más grave es el hecho de que considera que existe el término cuadrilátero acutángulo. Esto no es posible dado que la suma de los ángulos interiores sería inferior a 360°. Asimismo, cabe señalar que estos términos son empleados continuamente por el estudiante, mostrándose un lenguaje inapropiado por su parte.

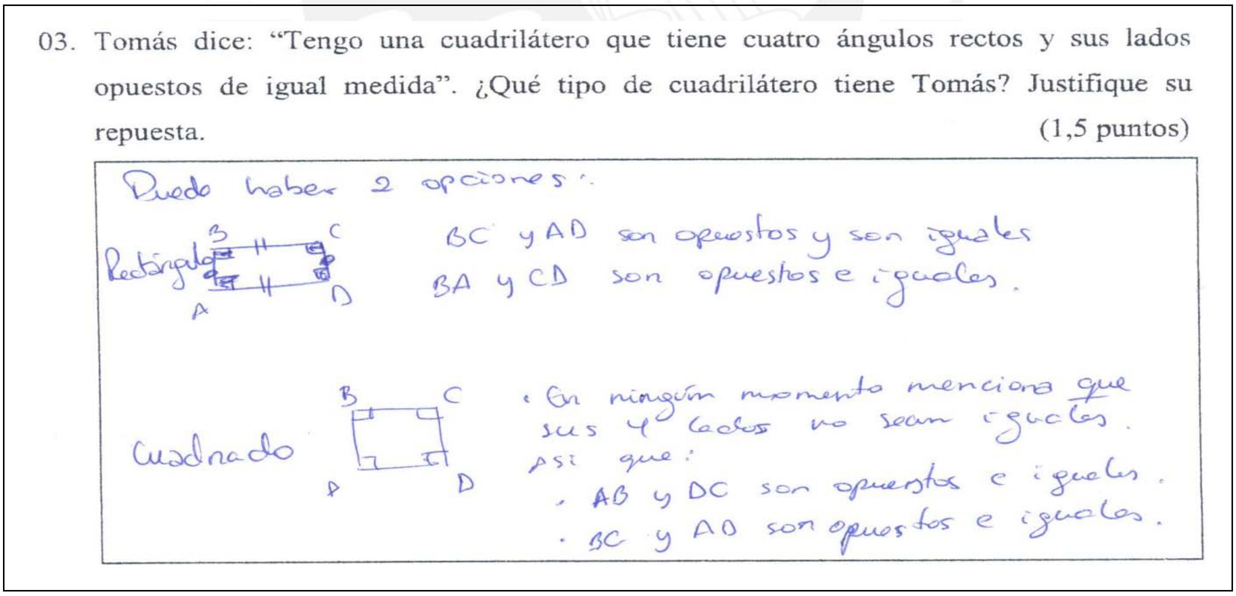
Tabla 11. Descripción del ítem 3 (Nivel 2)

Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero, aunque de manera incorrecta. Además, no justifica su respuesta.	2
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero de manera correcta. Pero, no justifica su respuesta.	3
Gráfica, indica el nombre y justifica su respuesta.	

Sin embargo, utiliza un vocabulario inadecuado, como lados cortos, lados largos, etc.	5
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Aunque sólo considera un caso (o es un rectángulo o es un cuadrado), justifica de manera adecuada su respuesta.	6
Gráfica, indica el nombre y justifica su respuesta de manera correcta. Además, considera ambos casos (rectángulo y cuadrado).	7

Comentario de las respuestas del ítem 3:

Si bien es cierto, todos responden de manera correcta este ítem, sin embargo tres de ellos no justifican su respuesta. En cambio los otros siete si justifican su respuesta, aunque sólo consideran un caso. Además, sólo un estudiante considera ambos casos, como se muestra en la siguiente respuesta:


03. Tomás dice: "Tengo una cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos de igual medida". ¿Qué tipo de cuadrilátero tiene Tomás? Justifique su repuesta. (1,5 puntos)

Puedo haber 2 opciones:

Rectángulo B C A D

BC y AD son opuestos y son iguales

BA y CD son opuestos e iguales.

Cuadrado B C A D

· En ningún momento menciona que sus 4 lados no sean iguales. Asi que:

· AB y DC son opuestos e iguales.

· BC y AD son opuestos e iguales.

Figura 15. Muestra del ítem 3, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja que este estudiante es capaz de establecer las propiedades esenciales de los conceptos. Asimismo, utiliza vocabulario apropiado, como lados opuestos, por ejemplo.

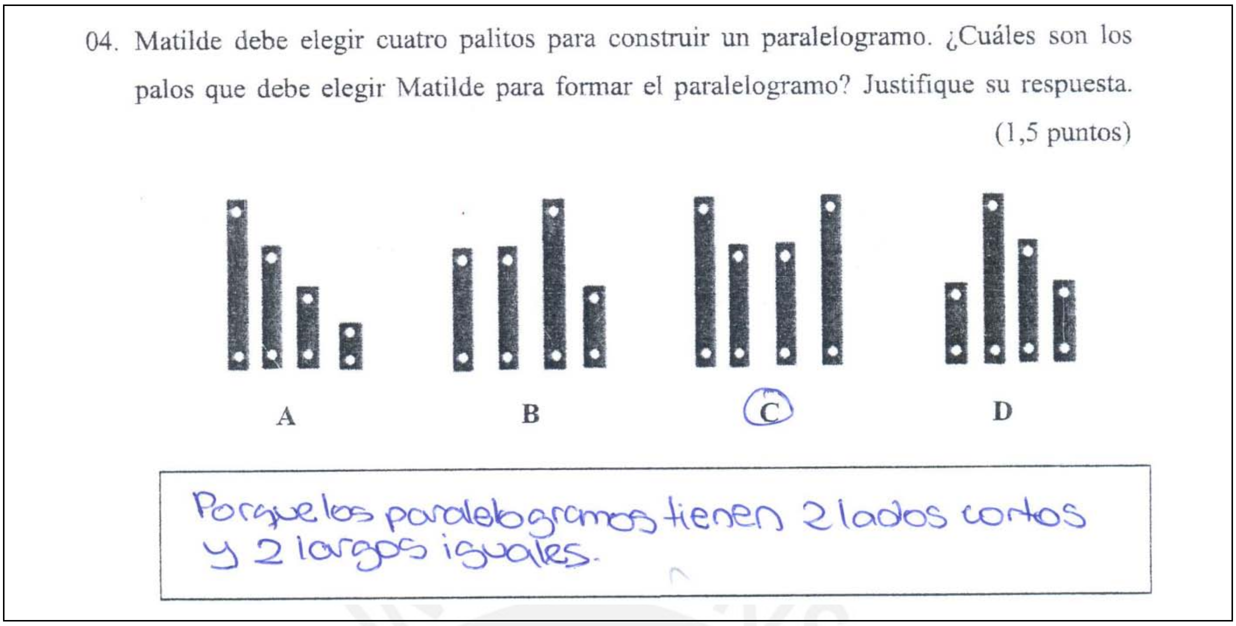
Tabla 12. Descripción del ítem 4 (Nivel 1 y 2)

Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Marca la alternativa correcta y muestra un gráfico adecuado para referirse a un paralelogramo, pero no justifica su elección.	2 y 3
Marca la alternativa correcta, además, realiza un gráfico para justificar su respuesta. Sin embargo, utiliza vocabulario inadecuado, como lados cortos, lados largos, etc.	5
Marca la alternativa correcta, además, realiza un gráfico para justificar su respuesta. Aunque, considera ambas propiedades (lados y ángulos) para caracterizar la figura, este no usa símbolos adecuados.	6
Señala la alternativa correcta. Asimismo, utiliza símbolos matemáticos adecuados para justificar su repuesta. Por ejemplo, dice porque AB = CD, AB//CD, etc.	7

Comentario de las respuestas del ítem 4:

Cinco de los diez estudiantes consideran que la alternativa A es la respuesta correcta. Sin embargo, al realizar el gráfico correspondiente, este no corresponde ya que para ello grafican un trapecio. Nuevamente, se observa que los estudiantes confunden los trapecios con los paralelogramos y viceversa.

La otra mitad, si bien es cierto, marca la respuesta correcta y realiza un gráfico adecuado, sin embargo, no justifica adecuadamente su respuesta. Asimismo, el vocabulario que utilizan no es apropiado. Esto se puede evidenciar en la siguiente respuesta:



04. Matilde debe elegir cuatro palitos para construir un paralelogramo. ¿Cuáles son los palos que debe elegir Matilde para formar el paralelogramo? Justifique su respuesta.

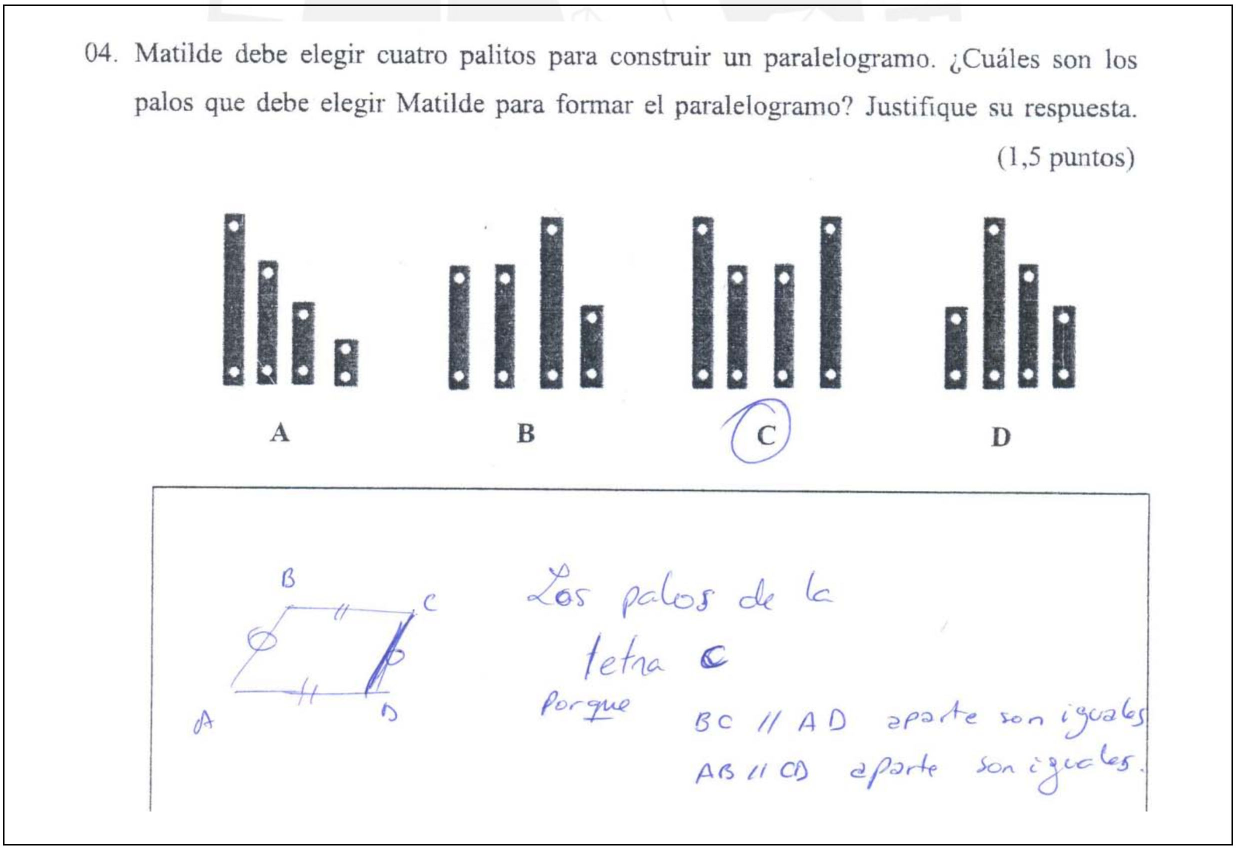
(1,5 puntos)

A B C D

Porque los paralelogramos tienen 2 lados cortos y 2 largos iguales.

Figura 16. Muestra del ítem 4, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja un lenguaje inapropiado por parte de este estudiante. Por otro lado, sólo un estudiante justifica correctamente su respuesta, de la siguiente manera:



04. Matilde debe elegir cuatro palitos para construir un paralelogramo. ¿Cuáles son los palos que debe elegir Matilde para formar el paralelogramo? Justifique su respuesta.

(1,5 puntos)

A B C D

B C A D

Los palos de la letra C

Porque

BC // AD aparte son iguales

AB // CD aparte son iguales.

Figura 17. Muestra del ítem 4, prueba de entrada.

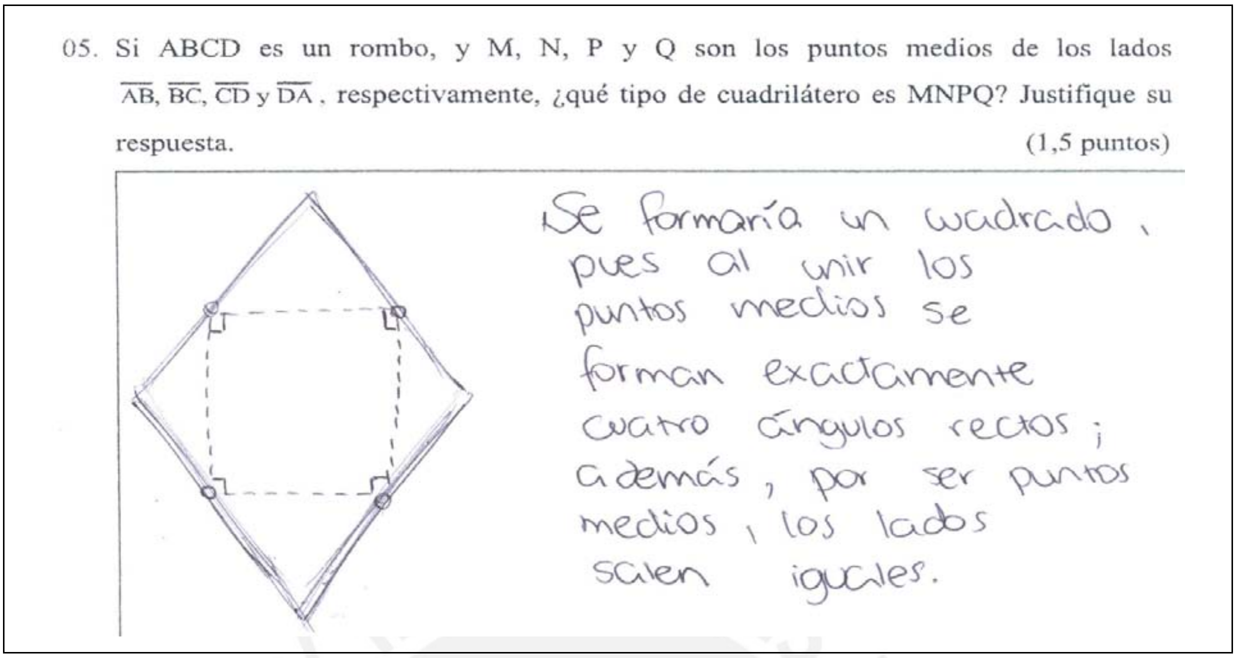
Esta respuesta refleja que este estudiante es capaz de establecer las propiedades esenciales de los conceptos. Asimismo, utiliza vocabulario y símbolos apropiados, como $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $BC = AD$ para indicar lados paralelos y lados iguales, por ejemplo.

Tabla 13. Descripción del ítem 5 (Nivel 2 y 3)

Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Reconoce e indica el nombre del cuadrilátero que se forma al unir los puntos medios. Pero, no justifica su respuesta.	2 y 3
Reconoce e indica el nombre del cuadrilátero. Justifica su repuesta, pero de manera visual. Esto se evidencia al no considerar las diagonales no congruentes del rombo.	5
Reconoce e indica el nombre del cuadrilátero. Asimismo, justifica su respuesta de manera correcta, recurriendo para ello, a los puntos medios (Teorema de la base media) y teniendo en cuenta que un rombo se caracteriza por tener diagonales no congruentes.	6 y 7

Comentario de las respuestas del ítem 5:

Todos los estudiantes mencionan que la figura que se forma al unir los puntos medios de los lados de un rombo es un cuadrado. Esto demuestra que ningún estudiante consideró las diagonales no congruentes del rombo, motivo por el cual la respuesta correcta sería se forma un rectángulo. Lo rescatable en este ítem es que, al menos, la mitad mencionó lados y ángulos para tratar de justificar su respuesta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:



05. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? Justifique su respuesta. (1,5 puntos)

Se formaría un cuadrado, pues al unir los puntos medios se forman exactamente cuatro ángulos rectos; además, por ser puntos medios, los lados salen iguales.

Figura 18. Muestra del ítem 5, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja que este estudiante es capaz de enunciar propiedades, aunque lo hace aún de manera informal. Asimismo, es capaz de utilizar vocabulario apropiado como ángulo recto y puntos medios, por ejemplo.

Tabla 14. Descripción del ítem 6 (Nivel 2)

Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Reconoce e indica el nombre de las figuras, pero no justifica su respuesta.	2 y 3
Reconoce e indica el nombre de las figuras. Justifica su repuesta, pero de manera visual. Esto se evidencia, cuando sólo ha considerado una de sus propiedades (o bien sus lados o bien sus ángulos).	5
Reconoce e indica el nombre de las figuras. Asimismo, justifica su respuesta de manera	

correcta, recurriendo para ello, a ambas propiedades: lados (paralelismo y perpendicularidad) y ángulos (rectos).	6 y 7

Comentario de las respuestas del ítem 6:

Los alumnos tuvieron muchas dificultades para contestar este ítem. Esta dificultad, básicamente fue porque no entendieron el enunciado del problema, lo cual generó respuestas erradas, aunque en muchos casos hubieran caracterizado bien la figura formada. El otro problema, respecto a este ítem fue que sólo se limitan a mencionar el nombre del cuadrilátero, sin justificar su respuesta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

06. Observe la mesa de billar que se muestra a continuación. Se trata de una mesa de billar algo extraña pues el tapete está dividido en cuadrados y solo hay cuatro agujeros. Además, se sabe que la bola golpea los bordes de la mesa siempre con la misma inclinación de 45°. La bola se encuentra, inicialmente, en el punto P y al golpearla bajo un ángulo de 45° se dirige hacia el punto Q, este rebota sobre la banda $\overline{BC}$ bajo un ángulo de 45° y se dirige hacia el punto R, y así sucesivamente, hasta llegar al agujero ubicado en C.

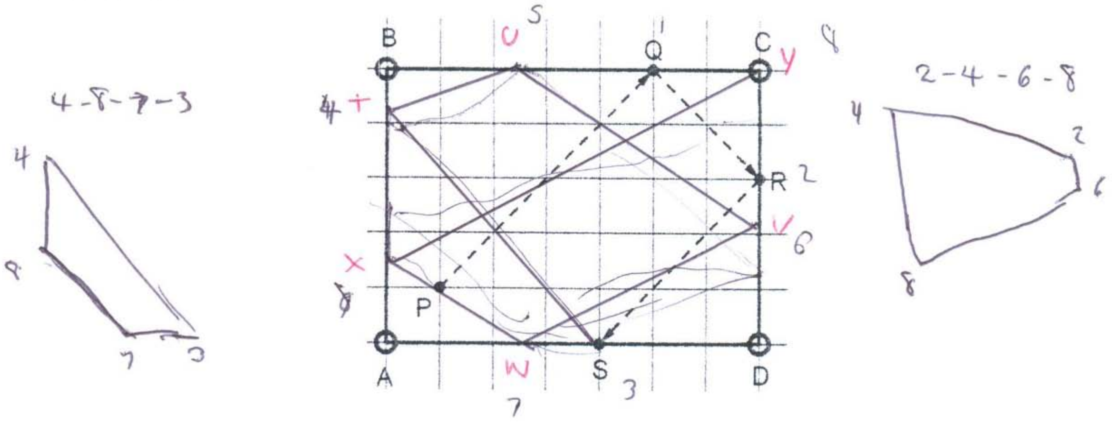


Figura 19. Muestra del ítem 6, prueba de entrada

Esta respuesta muestra que los estudiantes tienen dificultades para resolver problemas con enunciados. Por otro lado, en el mejor de los casos, un estudiante menciona lo siguiente: se forma un paralelogramo, porque al unir los cuatro puntos se ven dos lados iguales cortos y dos lados iguales largos, quedando en evidencia el uso de un lenguaje inapropiado.

Tabla 15. Descripción del ítem 7 (Nivel 2 y 3)

Descriptor	Tipo
No plantea situación alguna para resolver el problema.	1
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado. Pero, no justifica su respuesta. Además, reconoce la figura que se forma.	2 y 3
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado. Además, reconoce la figura que se forma. Asimismo, justifica su repuesta, pero de manera visual.	5
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado. Además, justifica de manera correcta su respuesta al considerar puntos medios (traza la diagonales), al recurrir a la fórmula de área de un trapecio. Por otro lado, se evidencia el uso de símbolos matemáticos en su explicación.	6 y 7

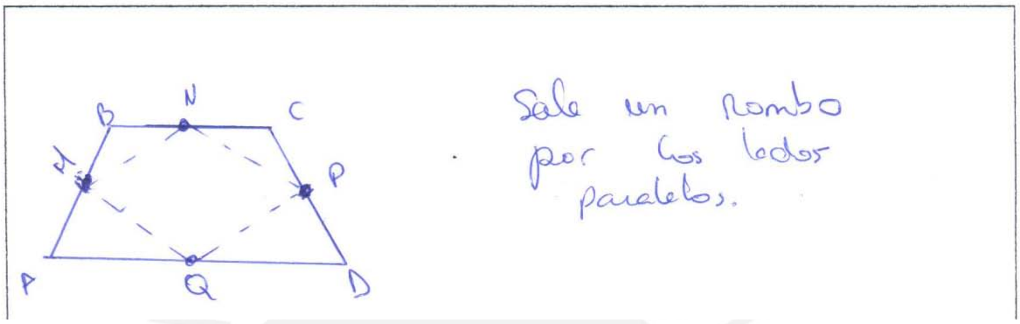
Comentario de las respuestas del ítem 7:

En cuanto a la parte a) de este ítem, todos los estudiantes proporcionaron respuestas correctas. Sin embargo, sólo dos estudiantes justifican de manera parcial sus respuestas, las cuales se muestran a continuación:

Respuesta del alumno 1:

07. Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.

a) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q? (1,5 puntos)



Respuesta del alumno 2:

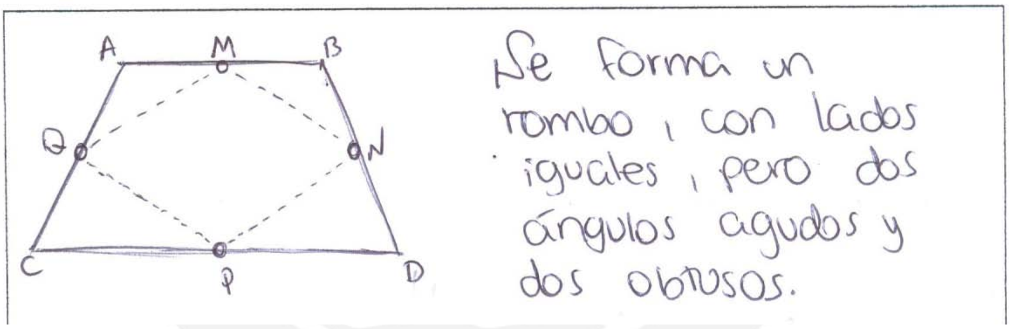


Figura 20. Muestra del ítem 7, prueba de entrada.

Esto refleja que ambos estudiantes son capaces de reconocer las propiedades esenciales de las figuras geométricas mediante la observación de los dibujos que ellos mismos han plasmado para representar objeto matemático en cuestión. Aunque, el uso de las propiedades no es del toda explícito. Este tipo de respuesta caracteriza al nivel 2.

En cuanto a la parte b) de este ítem, tuvieron muchas dificultades para buscar una justificación o argumento que valide su repuesta. Básicamente, se limitaron a realizar el gráfico del enunciado del problema. Además, esta tarea no fue conseguida por todos.

Tabla 16. Descripción del ítem 8 (Nivel 2 y 3)

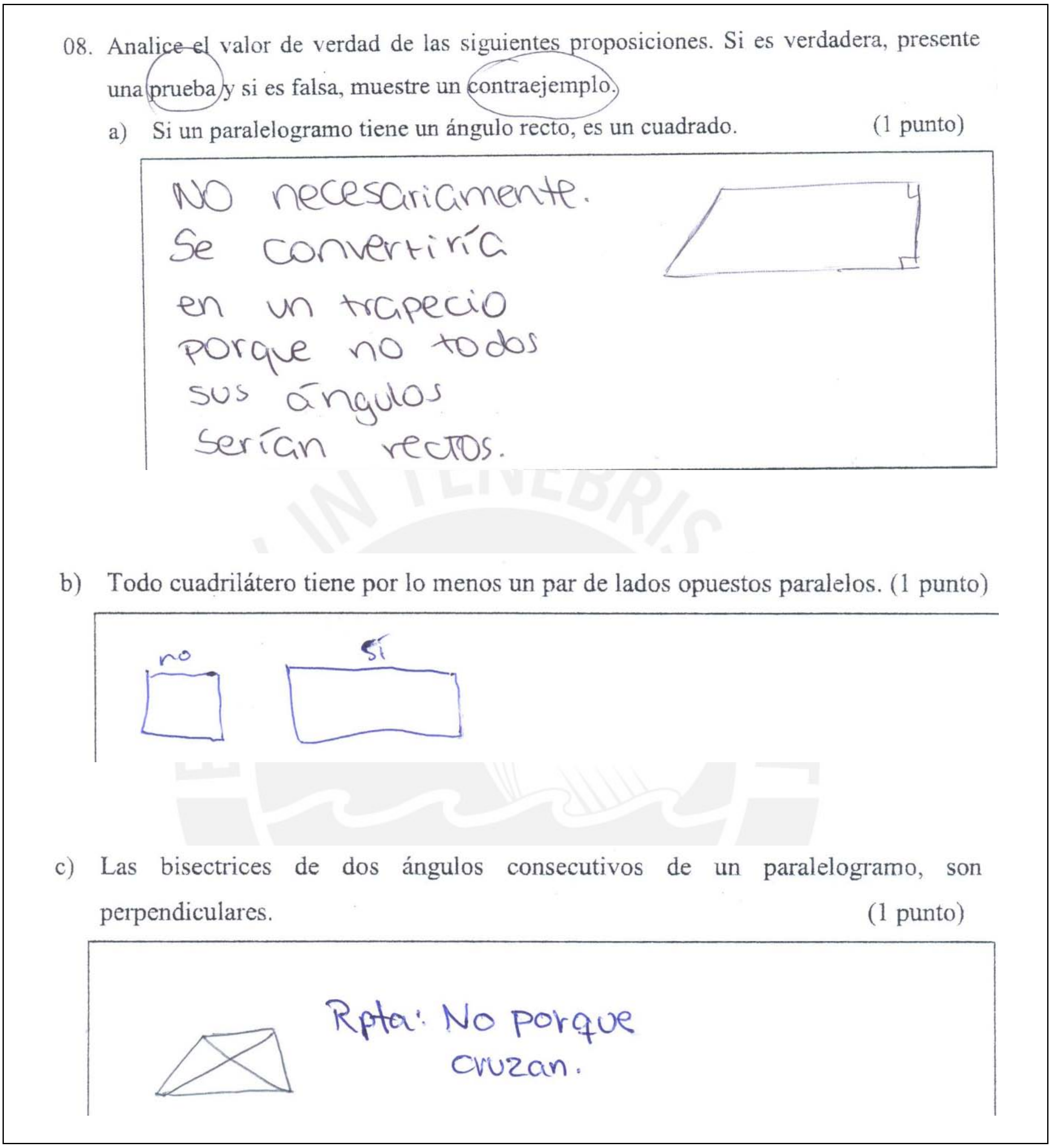
Descriptor	Tipo
No plantea situación alguna para resolver el problema.	1
Realiza gráficos adecuados. Además, da ejemplos mostrando una respuesta parcialmente correcta.	2 y 3
Proporciona varios ejemplos y contraejemplos, evidenciando que conoce la solución. Sin embargo, su respuesta es incompleta o presenta un pequeño error.	5
Basta mostrar un sólo ejemplo y/o contraejemplo para afirmar o negar un enunciado. Además, justifica su respuesta.	6 y 7

Comentario de las respuestas del ítem 8:

En cuanto a la parte a) y b) de este ítem, las respuestas de los estudiantes están guiadas por lo visual, es decir no utilizan propiedades en sus argumentos, por ejemplo, en la parte a) no consideran que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes y en la parte b) si bien es cierto recurren a ejemplos y/o contraejemplos estos están guiadas por figuras estereotipadas, que limitan la respuesta del estudiante. Este tipo de respuesta caracteriza al nivel 2.

Por otra parte, en la parte c) se observan que todos los estudiantes tienen serias dificultades para trazar una bisectriz, al parecer no conocen este término y en el mejor de los casos esta línea notable es confundida con las diagonales del cuadrilátero.

A continuación se muestra las respuestas de un estudiante, reafirmándose de esta manera lo descrito líneas arriba.



08. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestre un contraejemplo.

a) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un cuadrado. (1 punto)

NO necesariamente. Se convertiría en un trapecio porque no todos sus ángulos serían rectos.

b) Todo cuadrilátero tiene por lo menos un par de lados opuestos paralelos. (1 punto)

no sí

c) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo, son perpendiculares. (1 punto)

Rpta: No porque cruzan.

Figura 21. Muestra del ítem 8, prueba de entrada

Esta respuesta refleja, por un lado, que los estudiantes no tienen clara ni la definición de paralelogramo ni la de bisectriz. Pero, por otro lado son capaces de elaborar ejemplos y/o contraejemplos para justificar sus respuestas.

Tabla 17. Descripción del ítem 9 (Nivel 2 y 3)

Descriptor	Tipo
No plantea situación alguna para resolver el problema.	1
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Sin embargo, no justifica su respuesta.	2 y 3
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Si bien es cierto justifica su repuesta, pero, asume que AN=BN=CN=DN, siendo una respuesta parcial.	5
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Además, considera AN = BN y CN = DN como condiciones independientes. Si bien es cierto justifica su respuesta, pero la realiza de manera visual.	6
Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Además, justifica su respuesta de manera adecuada, al considerar las condiciones anteriores como independientes. Para ello, también, utiliza propiedades tales como: paralelismo, perpendicularidad y congruencia.	7

Comentario de las respuestas del ítem 9:

Sólo 2 de los 10 estudiantes respondieron este ítem, pero de manera incorrecta. Los demás, ni siquiera respondieron la pregunta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

09. Dados los segmentos AC y BD, los cuales se cortan en N. Si $\overline{AN} = \overline{BN}$ y $\overline{CN} = \overline{DN}$, ¿qué tipo de cuadrilátero es ABCD? Explique su respuesta. (3 puntos)

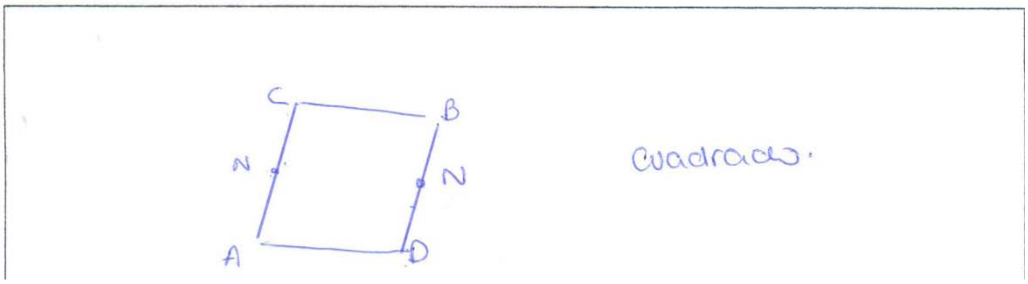


Figura 22. Muestra del ítem 9, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja que los estudiantes no tienen los argumentos necesarios para resolver el problema, al parecer, no es una cuestión de tiempo. Esta información fue recogida al entrevistar a los estudiantes involucrados. Es más, estos nos manifestaron que los problemas de geometría, rara vez, son con enunciados.

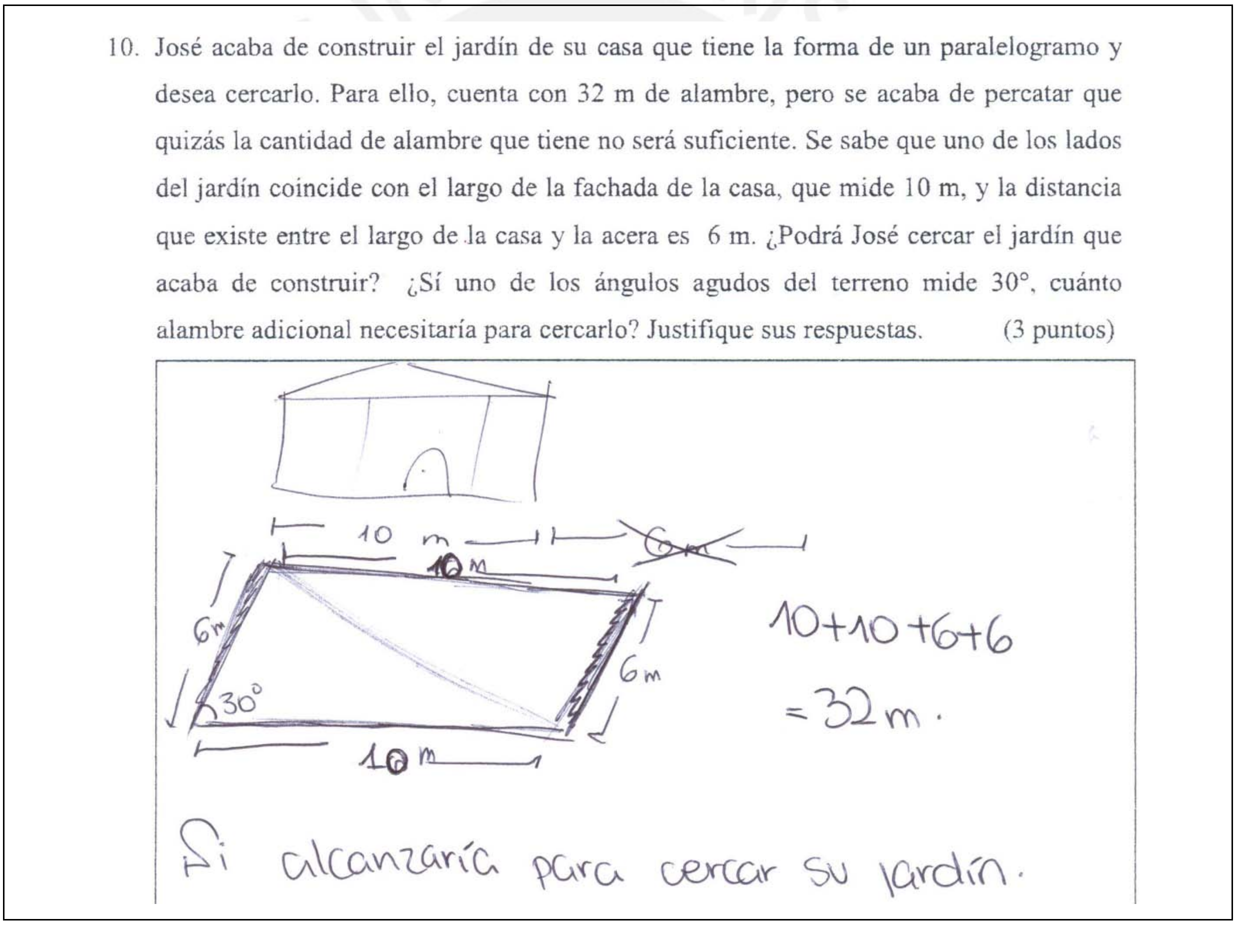
Tabla 18. Descripción del ítem 10 (Nivel 2)

Descriptor	Tipo
No plantea situación alguna para resolver el problema.	1
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado. Sin embargo, no justifica su respuesta.	2 y 3
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado. Si bien es cierto justifica su repuesta, pero lo hace de manera visual, convirtiéndose en una respuesta parcial.	5
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado. Además, justifica su respuesta de manera adecuada. Pero, responde sólo una pregunta o en todo caso, ambas, pero con pequeños errores.	6

Gráfica e indica el nombre del cuadrilátero. Además, justifica su respuesta de manera adecuada al responder ambas preguntas y, sobretodo, al utilizar propiedades para tal fin.	7

Comentario de las respuestas del ítem 10:

Nuevamente, al igual que sucedió en el ítem 9, sólo 2 de los 10 estudiantes respondieron la pregunta. Sin embargo, las respuestas que proporcionan son incorrectas, asimismo, confunden paralelogramo con trapecio. Otro error en sus gráficos es considerar como altura del paralelogramo uno de sus lados. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:



10. José acaba de construir el jardín de su casa que tiene la forma de un paralelogramo y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 32 m de alambre, pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre que tiene no será suficiente. Se sabe que uno de los lados del jardín coincide con el largo de la fachada de la casa, que mide 10 m, y la distancia que existe entre el largo de la casa y la acera es 6 m. ¿Podrá José cercar el jardín que acaba de construir? ¿Sí uno de los ángulos agudos del terreno mide 30°, cuánto alambre adicional necesitaría para cercarlo? Justifique sus respuestas. (3 puntos)

Figura 23. Muestra del ítem 10, prueba de entrada.

Esta respuesta refleja que los estudiantes no tienen los argumentos necesarios para resolver el problema, al parecer, no es una cuestión de tiempo. Esta información fue recogida al entrevistar a los estudiantes involucrados. Es más, estos nos manifestaron que los problemas de geometría, rara vez, son con enunciados.

4.4.2. Descripción de las respuestas a los ítems de las actividades

La propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de los cuadriláteros según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele está compuesta por 19 actividades que deberán ser desarrolladas con sesiones de trabajo en el aula.

Por motivos de tiempo, hemos considerado analizar sólo 8 actividades, consideradas las más relevantes para recoger información sobre el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes en los tres niveles que nos interesa investigar.

Las actividades seleccionadas son:

Las actividades 1 y 6, que corresponden al nivel 1, de reconocimiento; las actividades 9, 10 y 11, que corresponden al nivel 2, de análisis y; las actividades 13, 14 y 19, que corresponden al nivel 3, de deducción informal.

A continuación mostramos los descriptores de las actividades elegidas para ser analizadas.

Descripción de las respuestas de los estudiantes a las actividades.

Elegimos la actividad 1 porque esta permite identificar si el estudiante es capaz o no de reconocer en forma global a los cuadriláteros. Asimismo, permite identificar si el estudiante posee o no, en sus esquemas mentales, figuras prototipo/estereotipos. Esta es la principal razón por la cual fue elegida esta actividad.

Tabla 19. Descripción de la Actividad 1.

Descriptor	Tipo
No plantea situación alguna para resolver el problema. Es decir, dejó en blanco esta actividad.	1
Colorea sólo algunas figuras, pero de manera incorrecta.	2
Colorea sólo algunas de las figuras. Aunque su respuesta es correcta, es muy incompleta.	3

Colorea los cuadriláteros completamente, pero, de manera incorrecta en algún caso.	5
Colorea los cuadriláteros de manera completa y correcta.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

En términos generales, los estudiantes no tuvieron muchas dificultades para desarrollar esta actividad.

Siete de los diez estudiantes proporcionaron una respuesta correcta y completa. Mientras que los tres restantes proporcionaron, si bien es cierto, respuestas correctas, sin embargo, muy incompletas mostrando en sus respuestas sólo figuras conocidas, es decir, figuras estándar y/o prototipo/estereotipadas guiadas por lo visual.

A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

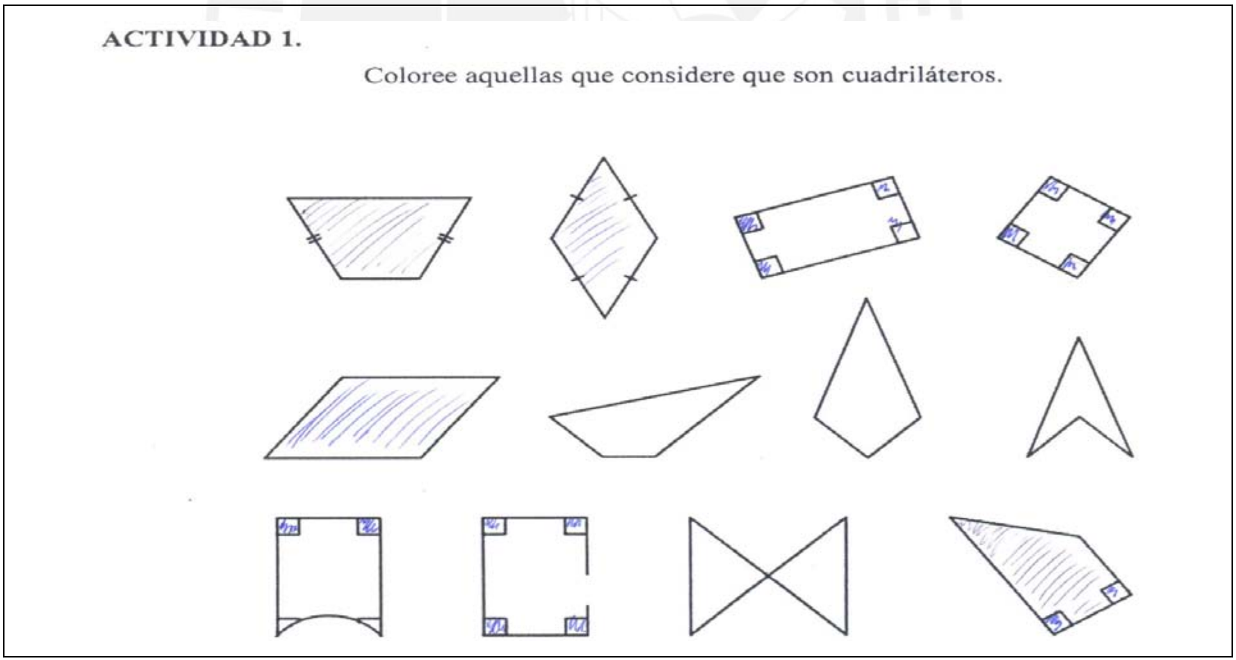


Figura 24. Muestra de la actividad 1.

Esta respuesta refleja que este estudiante sólo reconoce figuras conocidas. Por otro lado, no reconoce el símbolo geométrico para el ángulo recto, cometiendo un error grave al pintarlos y en consecuencia considerarlos como cuadriláteros.

Además, elegimos la actividad 6, porque esta permite identificar si el estudiante es capaz o no de clasificar cuadriláteros, de acuerdo a sus formas globales. Asimismo, permite identificar los errores de definición al confundir, por ejemplo, los trapecios con los paralelogramos, como efectivamente sucedió en el desarrollo de esta actividad.

Tabla 20. Descripción de la Actividad 6.

Descriptor	Tipo
No logra ninguna clasificación. Sólo se limita a enumerar los cuadriláteros.	1
No logra agrupar de manera correcta los cuadriláteros o hace clasificaciones parciales y sin incluir a todos los elementos pertenecientes a dicha clase.	2 y 3
Clasifica los cuadriláteros completamente, pero de manera incorrecta en algún caso.	5
Clasifica cuadriláteros de manera correcta y completa.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

En líneas generales esta actividad no presentó demasiadas dificultades para los estudiantes, excepto un estudiante que considera lo siguiente:

> *"… al trapezoide como paralelogramo y al rombo como no paralelogramo, además, escribe cuadrilátero = cuadrado + rectángulo"*

Observamos que, este estudiante no es capaz de proporcionar una clasificación correcta de los cuadriláteros. Por otro lado, tres estudiantes proporcionan respuestas correctas y completas. Por su parte, los seis restantes, proporcionan respuestas completas, pero parcialmente correctas. Por ejemplo, consideran que: Romboide = *cuadrado* + *rombo*

Cabe señalar que este error está presente en las respuestas de estos seis estudiantes, convirtiéndose de esta manera en un error común.

A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

Figura 25. Muestra de la actividad 6.

Esta respuesta refleja que las figuras geométricas aún son vistas de manera aislada dado que los estudiantes no son capaces de generalizar sus propiedades.

Elegimos la actividad 9 porque esta permite identificar si el estudiante recurre o no a las propiedades de los cuadriláteros para justificar sus argumentos o es que sólo se basa en argumentos visuales para justificar su respuesta. Asimismo, permite identificar si el estudiante utiliza, de manera adecuada o no, los símbolos geométricos o es que prefiere usar los nombres de estos símbolos, en lugar de estas para justificar su respuesta.

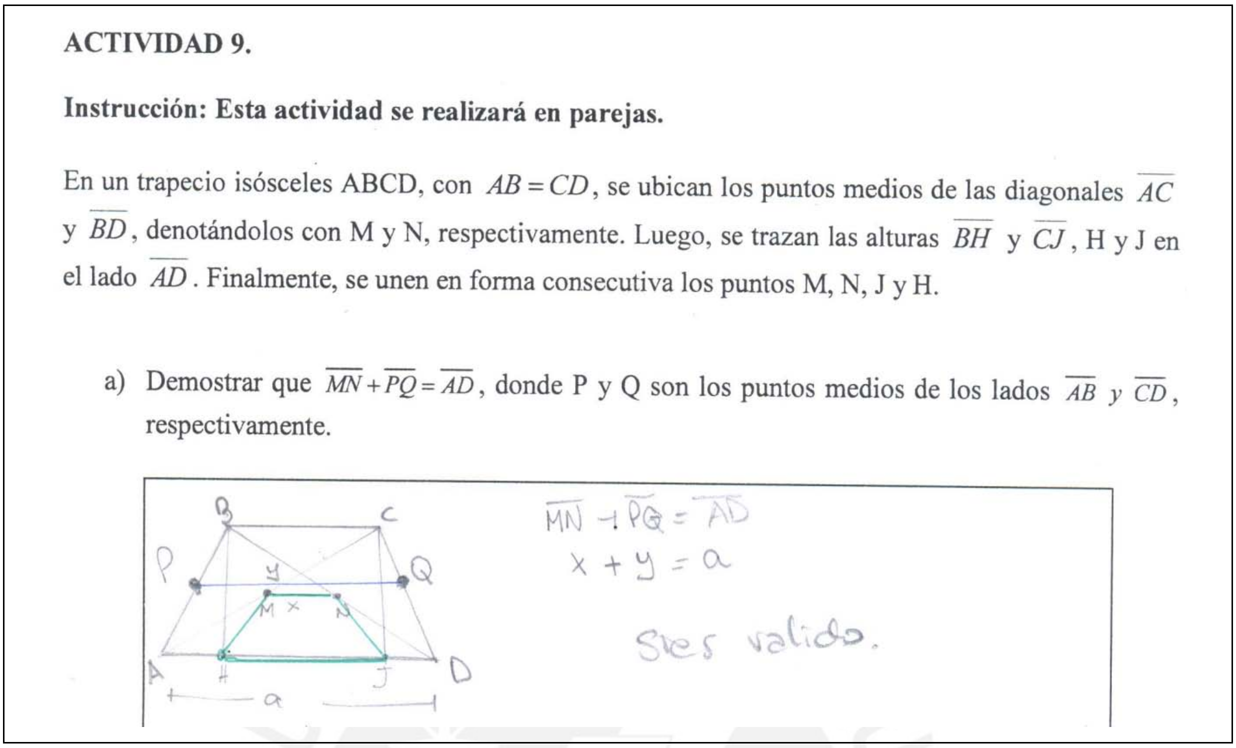
Tabla 21. Descripción de la Actividad 9.

Descriptor	Tipo
No plantea situación alguna para resolver el problema.	1
Realiza un gráfico inadecuado para traducir el enunciado del problema. Además, no justifica su respuesta.	2

Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema, pero no justifica su respuesta.	3
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica su respuesta, pero de manera visual. Esto se puede evidenciar al considerar los puntos medios como única propiedad para caracterizar la figura.	5
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica de manera adecuada su respuesta, al usar varias propiedades (puntos medios, teorema de la base media, diagonales, áreas) para explicar su respuesta.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

En esta actividad los alumnos tuvieron muchas dificultades para justificar sus respuestas, sólo proporcionan justificaciones basadas en lo visual. No obstante, todos los alumnos realizaron un gráfico adecuado del enunciado del problema. Cabe señalar que en la prueba de entrada se planteó un problema similar al planteado en esta actividad. Además, recordemos que en dicha pregunta los estudiantes tuvieron muchas dificultades, incluso para realizar el gráfico del enunciado. De esta manera, observamos un pequeño avance en el desarrollo de esta actividad. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:



ACTIVIDAD 9.

Instrucción: Esta actividad se realizará en parejas.

En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, denotándolos con M y N, respectivamente. Luego, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, H y J en el lado $\overline{AD}$. Finalmente, se unen en forma consecutiva los puntos M, N, J y H.

a) Demostrar que $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{AD}$, donde P y Q son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.

Figura 26. Muestra de la actividad 9.

Esta respuesta refleja que los estudiantes son capaces de traducir el enunciado del problema, pero al mismo tiempo refleja que todavía siguen percibiendo las propiedades de las figuras geométricas de manera aislada, dado que los estudiantes no son capaces de relacionarlas entre si y generalizarlas. Sólo por citar un ejemplo un alumno pudo haber dado la siguiente respuesta: dado que el trapecio es isósceles implica que sus diagonales son iguales y como estas son iguales entonces sus puntos medios están ubicados a la misma distancia respecto a la base, de ello se deduce que la mediana MN es paralela a la base AD.

También, elegimos la actividad 10, porque esta permite identificar si el estudiante es capaz o no de reconocer y utilizar de manera correcta los símbolos geométricos. Asimismo, permite identificar si el estudiante conoce o no las propiedades geométricas, tales como: *ángulos complementarios y suplementarios, suma de ángulos internos de un cuadrilátero.*

Tabla 22. Descripción de la Actividad 10.

Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Plantea una solución incorrecta e incompleta del enunciado del problema. Además, no justifica su respuesta.	2
Plantea una solución correcta del enunciado del problema, pero, no justifica su respuesta.	3
Plantea una solución correcta del enunciado del problema. Asimismo, justifica su respuesta, aunque de manera visual, mencionando sólo una característica (o bien lados o bien ángulos)	5
Plantea una solución correcta del enunciado del problema. Además, justifica su respuesta de manera correcta. Esto se puede evidenciar al mencionar ángulos complementarios, ángulos opuestos iguales y lados paralelos.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

Si bien es cierto, para el desarrollo de esta actividad los estudiantes no presentaron muchas dificultades, es necesario mencionar algunos errores presentes en la misma. Por ejemplo, dos estudiantes no entendieron el enunciado del problema y asumieron que todos los ángulos del cuadrilátero median 63°, incluso uno de ellos mencionó que se trata de un cuadrilátero acutángulo. En ambos casos, no se percataron de que tal cuadrilátero no existiría, porque su suma resultaría (4) x (63°) < 360°.

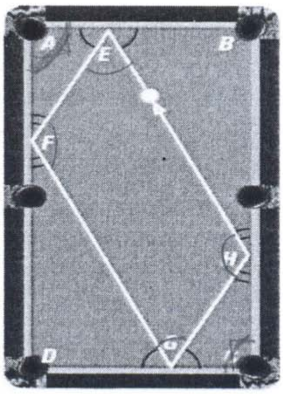
Otro de los errores que se observó fue respecto a la utilización de los símbolos para nombrar a los ángulos. Por ejemplo, un estudiante consideró que el $\angle AFE$ se refería al $\angle A$. Pero una situación mucho más crítica es la proporcionada por otro estudiante al considerar que el

$\measuredangle AFE$ es igual al $\measuredangle A + \measuredangle F + \measuredangle E$, es decir, $\measuredangle AFE = \measuredangle A + \measuredangle F + \measuredangle E$. Estos tipos de respuestas caracterizan al nivel 1.

A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

ACTIVIDAD 10.

Durante un juego de billar, entre dos amigos, uno de ellos tira una bola de billar como se muestra en el gráfico: sale del punto H hacia el punto E, de allí va al punto F, luego al punto G y de allí regresa al punto H. Además, la bola impacta sobre la primera pared $\overline{AB}$ a un ángulo de 63° y rebota de cada una de las paredes con el mismo ángulo con el que impacta sobre ellas.



a) Calcule la medida de los ángulos $\measuredangle AFE$ y $\measuredangle GHC$. Explique.

∡AFE y ∡GHC miden 90° ya que son ángulos rectos.

b) Halle la medida de los ángulos internos del cuadrilátero EFGH e indique qué tipo de cuadrilátero es. Justifique su respuesta.

La medida de los ángulos internos es de 63° ya que con esa medida dice el enunciado que rebotan. El tipo de cuadrilatero es romboide.

Figura 27. Muestra de la actividad 10.

Esta respuesta refleja, por un lado, que los estudiantes no están familiarizados con el uso de la notación matemática propia de la geometría y, por otro lado, que los estudiantes no conocen la definición de romboide. Tampoco consideran que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero sea igual a 360°

Además, elegimos la actividad 11, porque esta permite identificar si el estudiante conoce o no las propiedades y/o teoremas de los cuadriláteros, tales como: *ángulos opuestos congruentes, diagonales desiguales, diagonales ortogonales, teorema de la base media, lados paralelos, entre otras.*

Tabla 23. Descripción de la Actividad 11.

Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Realiza un gráfico inadecuado para traducir el enunciado del problema. Si bien es cierto, menciona el nombre de los cuadriláteros, sin embargo no justifica su respuesta.	2
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Pero, no justifica su respuesta.	3
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica su respuesta, pero, de manera visual. Esto se puede evidenciar al considerar como única propiedad para caracterizar la figura (o bien sus lados o bien sus ángulos).	5
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica de manera adecuada su respuesta, al usar varias propiedades (lados, ángulos, diagonales) para explicar su respuesta.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

Básicamente, las respuestas de los estudiantes están guiadas por lo visual. Esto se observa en el hecho de que ningún alumno, por ejemplo, considera las diagonales no congruentes del rombo. Además, este mismo error se presentó en la prueba de entrada. No obstante, lo rescatable de esta actividad fue que los estudiantes han mejorado la manera de caracterizar a un cuadrilátero, ya que inicialmente consideraban sólo una de sus dos propiedades; es decir, o bien señalaban los lados o bien señalaban los ángulos. Ahora, consideran ambas propiedades. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

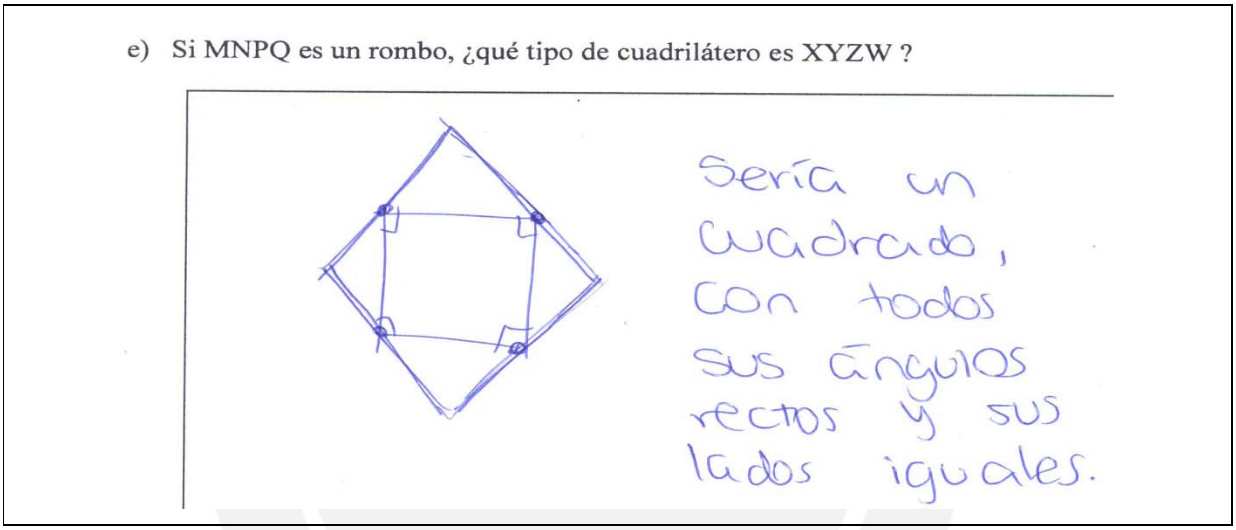


Figura 28. Muestra de la actividad 11.

Esta respuesta refleja que este estudiante empieza a establecer las propiedades esenciales de las figuras, aunque todavía es incapaz de ver relación entre propiedades y entre figuras, motivo por el cual no consideró las diagonales desiguales del rombo.

Elegimos la actividad 13, porque esta permite identificar si el estudiante es capaz o no de caracterizar las distintas clases de cuadriláteros. Asimismo, permite identificar los errores de definición. Por ejemplo, en el desarrollo de las actividades todos los estudiantes han considerado que las diagonales de un rombo son congruentes.

Tabla 24. Descripción de la Actividad 13.

Descriptor	Tipo
No logra caracterizar ninguna figura.	1
No logra caracterizar de manera correcta los cuadriláteros. Además, su respuesta es bastante incompleta.	2
Logra caracterizar de manera correcta los cuadriláteros. Sin embargo, su respuesta es bastante incompleta. Es decir, realiza caracterizaciones parciales.	3
Logra caracterizar los cuadriláteros completamente, pero de manera incorrecta en algún caso.	5
Logra caracterizar los cuadriláteros de manera correcta y completa.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

En líneas generales la caracterización que realizan los estudiantes de los cuadriláteros es parcial. En muchos casos, basada sólo en lo que observan en la figura, motivo por el cual sólo consideran lados y ángulos, dejando de lado las propiedades de las diagonales como: estas se bisecan o estas son bisectrices. Como era de esperarse los cuadriláteros que mejor caracterizan los estudiantes son los cuadrados y los rectángulos. Respecto al rombo, aún cometen el error de considerar que este tiene diagonales congruentes. Por otra parte, algunos de los errores encontrados son los siguientes:

Ningún estudiante caracteriza pertinentemente al trapezoide simétrico. Algunos lo confunden con el trapecio isósceles, quizás este error más que de caracterización sea un error de tipo lingüístico, ya que este nombre "simétrico" podría confundirse con "isósceles".

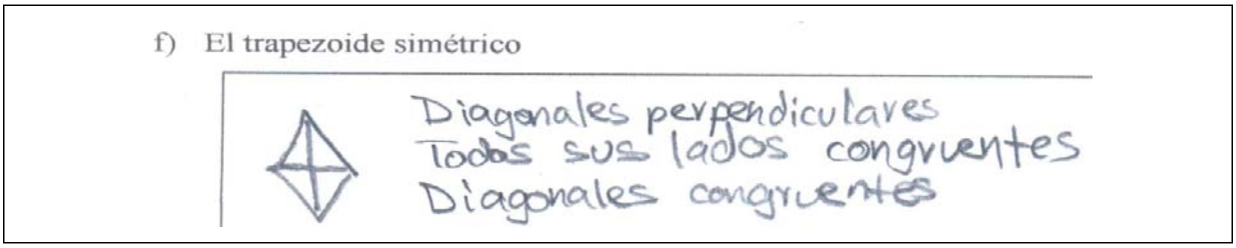


Figura 29. Muestra de la actividad 13.

De acuerdo al gráfico presentado por el estudiante, este representaría a un rombo, confundiéndolo con el trapecio simétrico. Aun asumiendo que la respuesta es correcta, el rombo no estaría caracterizado correctamente, dado que este no posee diagonales congruentes.

Además, elegimos la actividad 14, porque esta permite identificar si el estudiante es capaz o no de identificar conjuntos mínimos de propiedades que pueden caracterizar a un cuadrilátero, tales como, si $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BD}$, entonces es un rombo, entre otras. Asimismo, permite identificar si el estudiante es capaz o no de recurrir a ejemplos y/o contraejemplo, para defender sus argumentos.

Tabla 25. Descripción de la Actividad 14.

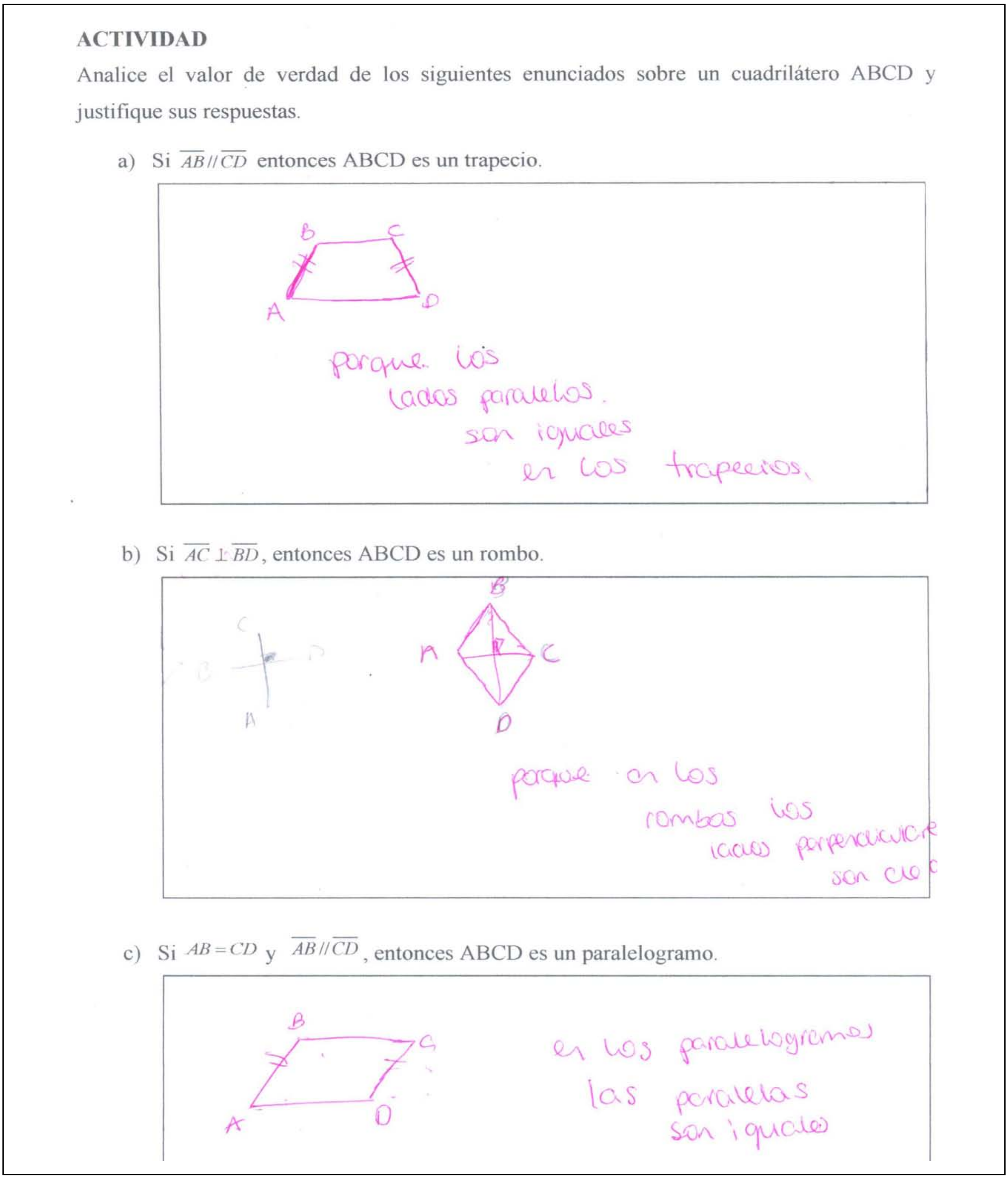
Descriptor	Tipo
No plantea respuesta alguna a la pregunta.	1
Realiza un gráfico inadecuado para traducir el enunciado del problema. Además, no justifica su respuesta.	2
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Pero, no justifica su respuesta.	3
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica su respuesta, pero de manera visual. Esto se puede evidenciar al considerar como única propiedad para caracterizar la figura (o bien sus lados o bien sus ángulos).	5

Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica de manera adecuada su respuesta, mostrando ejemplos y contraejemplos.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

Lo rescatable de esta actividad es que todos la contestaron. Sin embargo, asumen muchas cosas lo cual hace que sus repuestas sean parcialmente correctas. Por ejemplo, en la parte b) que menciona lo siguiente: Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo. Aquí se observa que todos los estudiantes asumen que estas rectas se bisecan en su punto medio. Por otro lado, se observó un error común en ocho estudiantes, lo cual indica, aparentemente, que estos alumnos confunden el símbolo “//” con el símbolo “=”, esto ocurrió en la parte a) de la actividad.

Por otra parte, la mitad de los estudiantes respondieron de manera correcta y completa la parte c) de esta actividad. A continuación mostramos la respuesta de un estudiante.



ACTIVIDAD

Analice el valor de verdad de los siguientes enunciados sobre un cuadrilátero ABCD y justifique sus respuestas.

a) Si $\overline{AB} // \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio.

porque los lados paralelos son iguales en los trapecios.

b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo.

porque en los rombos los lados perpendiculare son c

c) Si $AB = CD$ y $\overline{AB} // \overline{CD}$, entonces ABCD es un paralelogramo.

en los paralelogramos las paralelas son iguales

Figura 30. Muestra de la actividad 14.

Esta respuesta refleja, al igual que la actividad 10, que los alumnos no están familiarizados con los símbolos geométricos. Asimismo, refleja que los alumnos no recurren a ejemplos y/o contraejemplos para defender sus argumentos.

También, elegimos la actividad 19, porque esta permite identificar si el estudiante es capaz o no de ordenar lógicamente las propiedades, los conceptos. Por otro lado, permite identificar si es capaz o no de resolver problemas de contexto real o matemático.

Tabla 26. Descripción de la Actividad 19.

Descriptor	Tipo
No plantea situación para resolver el problema.	1
Realiza un gráfico inadecuado para traducir el enunciado del problema. Además, no justifica su respuesta.	2
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Pero, no justifica su respuesta.	3
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica su respuesta, pero de manera visual. Esto se puede evidenciar al considerar como única propiedad para caracterizar la figura (o bien sus lados o bien sus ángulos).	5
Realiza un gráfico adecuado para traducir el enunciado del problema. Asimismo, justifica de manera adecuada su respuesta, recurriendo para ello a varias propiedades.	6 y 7

Comentario de las observaciones del trabajo en clase:

Esta actividad es similar a la propuesta en el ítem 10 de la prueba de entrada. En la mencionada prueba, sólo tres respondieron dicho ítem, pero lamentablemente lo hicieron de manera incorrecta. En cambio, en esta actividad la mitad respondió de manera correcta.

Mientras que la otra mitad, no planteó ninguna solución al problema. Este pequeño avance servirá de mucho para el desarrollo del ítem 10, en la prueba de salida.

A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

b) Un jardinero acaba de construir un jardín en forma de trapecio isósceles y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 42 metros de alambre Pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre con la que cuenta no sea suficiente. Se sabe que la base menor del trapecio coincide con el largo de su casa que es 10 metros y que la distancia que existe entre su casa y la acera de 6 metros. Además, la base mayor del trapecio es el doble de la base menor ¿Podrá este jardinero cercar el jardín que acaba de construir? ¿Sí uno de los ángulos adyacentes a la base mayor fuese 30° cuanto alambre adicional necesitaría? Explica su repuesta en cada caso.

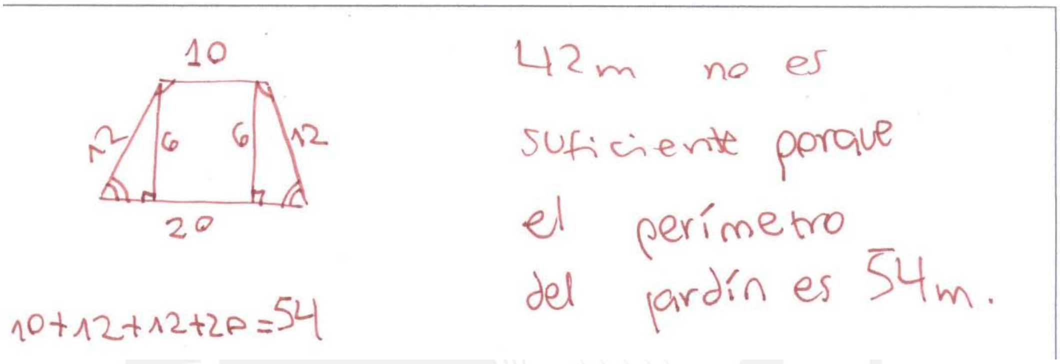


Figura 31. Muestra de la actividad 19.

Los alumnos se limitaron a responder la segunda cuestión, es decir, si el ángulo adyacente fuese 30°. Cabe señalar que cuando se les preguntó porque no respondieron a la primera cuestión, ellos mencionaron que sin un ángulo no sería posible responder dicha cuestión, lo cual es incorrecto dado que la altura, el lado no paralelo y la base mayor del trapecio determinan un triángulo, siendo factible utilizar el teorema del existencialismo o desigualdad triangular para hallar el valor del lado no paralelo del trapecio.

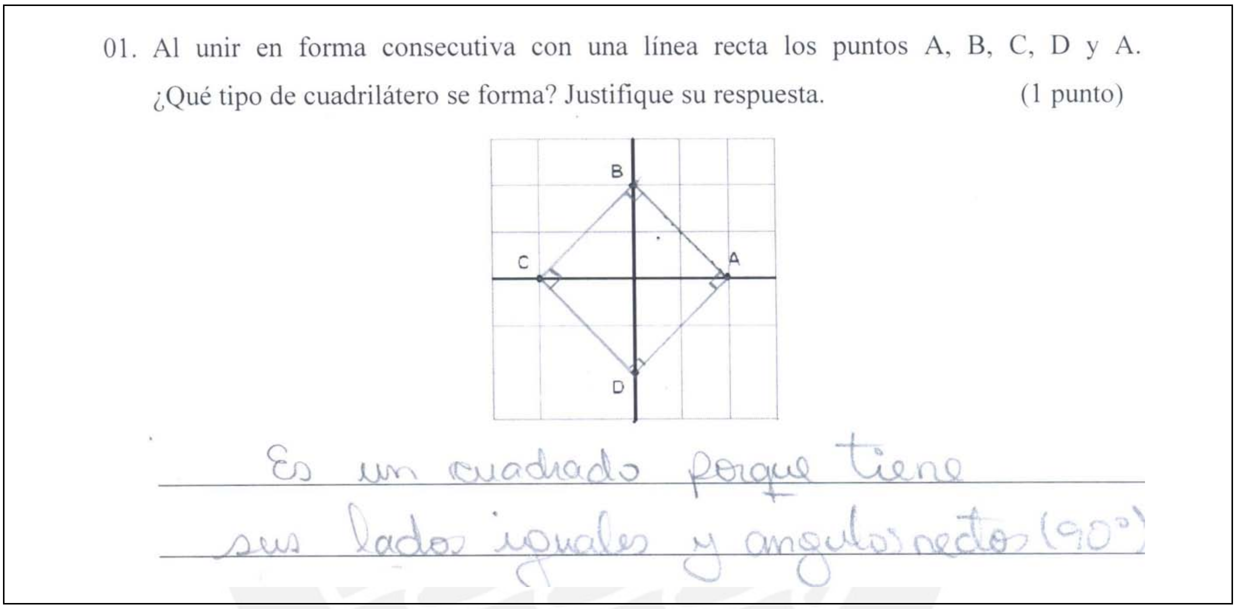
4.4.3. Descripción de las respuestas a los ítems de la prueba de salida.

En esta parte hemos considerado como descripción de los ítems de la prueba de salida la misma que hemos realizado para la prueba de entrada ya que estas pruebas fueron la misma. Pero si presentamos los comentarios de las respuestas de los alumnos a cada ítem de la prueba de salida, ya que hay diferencias respecto a las respuestas dadas por los alumnos en la prueba de entrada.

Comentario de las respuestas del ítem 1

Seis de los diez estudiantes consideran que es un cuadrado la figura que se forma al unir los puntos de manera consecutiva. Mientras que los otros 4 consideran que es un rombo.

Los que mencionaron cuadrado, hacen referencia a los lados y ángulos. Por su parte, los que mencionaron rombo, sólo toman en cuenta los lados para justificar su respuesta. En ambos casos, se observa un avance en sus respuestas respecto a las respuestas de la prueba de entrada. A continuación mostramos la respuesta de un estudiante:


01. Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta. (1 punto)

Es un cuadrado porque tiene sus lados iguales y angulos rectos (90°)

Figura 32. Muestra del ítem 1, prueba de salida

Esta respuesta refleja que el estudiante es capaz de determinar propiedades necesarias y suficientes para caracteriza a una figura.

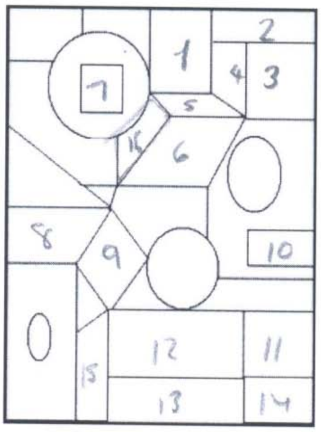
Comentario de las respuestas del ítem 2

Sólo 2 de los 10 estudiantes, presentan dificultades al momento de agrupar o clasificar los cuadriláteros. Ellos aún confunden los paralelogramos con los trapecios y viceversa.

Los 8 restantes proporcionaron una respuesta bastante completa y correcta. Observándose, también, un avance en sus respuestas respecto a las respuestas de la prueba de entrada.

A continuación mostramos la respuesta de un estudiante:

02. En la figura que se muestra a continuación encontrará 16 cuadriláteros. Asígnele un número diferente a cada una de ellas y luego agrupe estos números según el tipo de cuadrilátero al que pertenezca. (1 punto)



Cuadrados: 1, 3, 7, 11, 14 rombo: 9 RECTANGULO: 2, 10, 12, 13,

Paralelogramos: 4, 5, 6, 8, 15, 16

Figura 33. Muestra del ítem 2, prueba de salida.

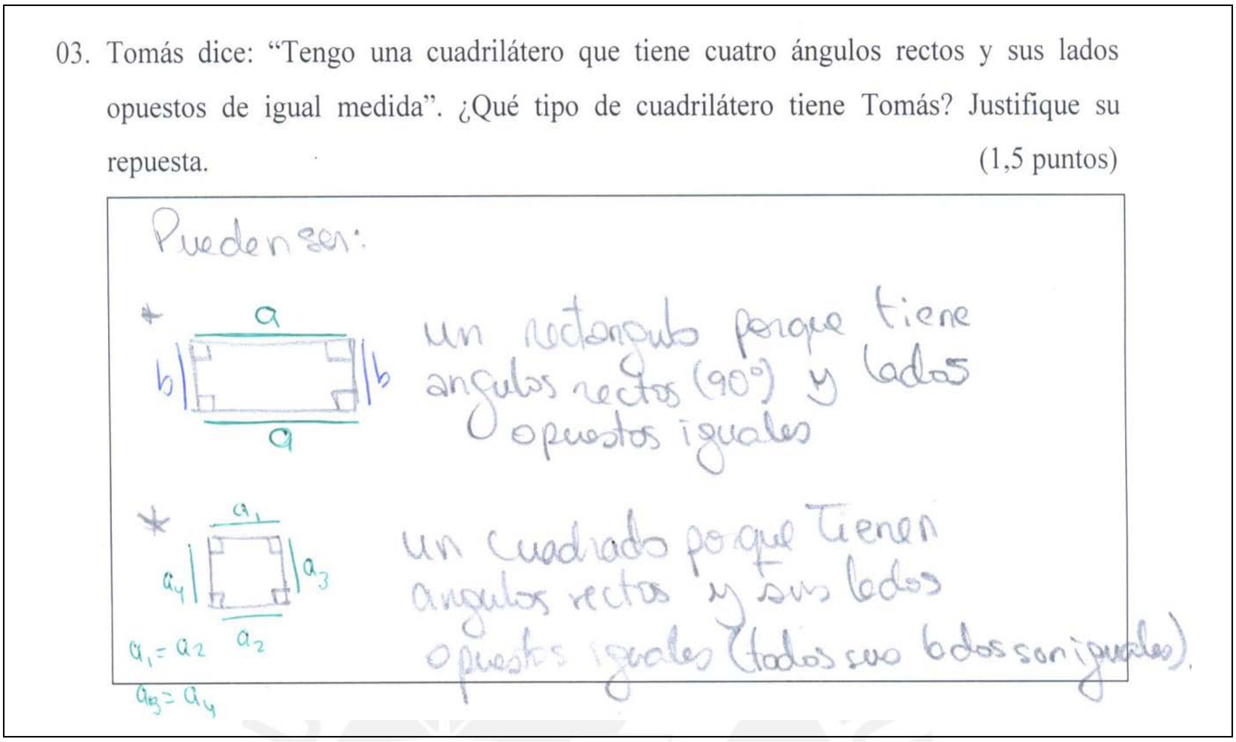
Esta respuesta muestra que el estudiante no tiene clara la definición de trapecio ni la de paralelogramo. Más aún, estos dos tipos de cuadriláteros pertenecen a tipos distintos de cuadriláteros.

Comentario de las respuestas del ítem 3

Sólo tres de los diez estudiantes consideran ambos casos, además, justifican de manera pertinente su respuesta, a continuación mostramos una de ellas:

Un rectángulo porque tiene ángulos rectos (90°) y lados opuestos iguales. Un cuadrado porque tiene ángulos rectos y sus lados opuestos iguales (todos sus lados son iguales)

Por su parte, los 7 restantes consideran sólo un caso. De estos 7 estudiantes sólo 2 no justifican su respuesta. Observándose, también, un avance en sus respuestas respecto a las respuestas de la prueba de entrada. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:


03. Tomás dice: "Tengo una cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos de igual medida". ¿Qué tipo de cuadrilátero tiene Tomás? Justifique su repuesta. (1,5 puntos)

Pueden ser:

* un rectangulo porque tiene angulos rectos (90°) y lados opuestos iguales

* un cuadrado porque tienen angulos rectos y sus lados opuestos iguales (todos sus lados son iguales).

Figura 34. Muestra del ítem 3, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que este estudiante es capaz de establecer las propiedades esenciales de los conceptos. Asimismo, utiliza vocabulario apropiado, como lados opuestos, ángulos rectos, etc., por ejemplo.

Comentario de las respuestas del ítem 4

Sólo dos estudiantes se limitan a marcar la respuesta, es decir, no justifican su respuesta. Por otro lado, aún hay un estudiante que confunde paralelogramo con trapecio.

Los siete restantes, marcan y justifican correctamente su respuesta. Esto se observa en el hecho de considerar lados y ángulos en su explicación. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

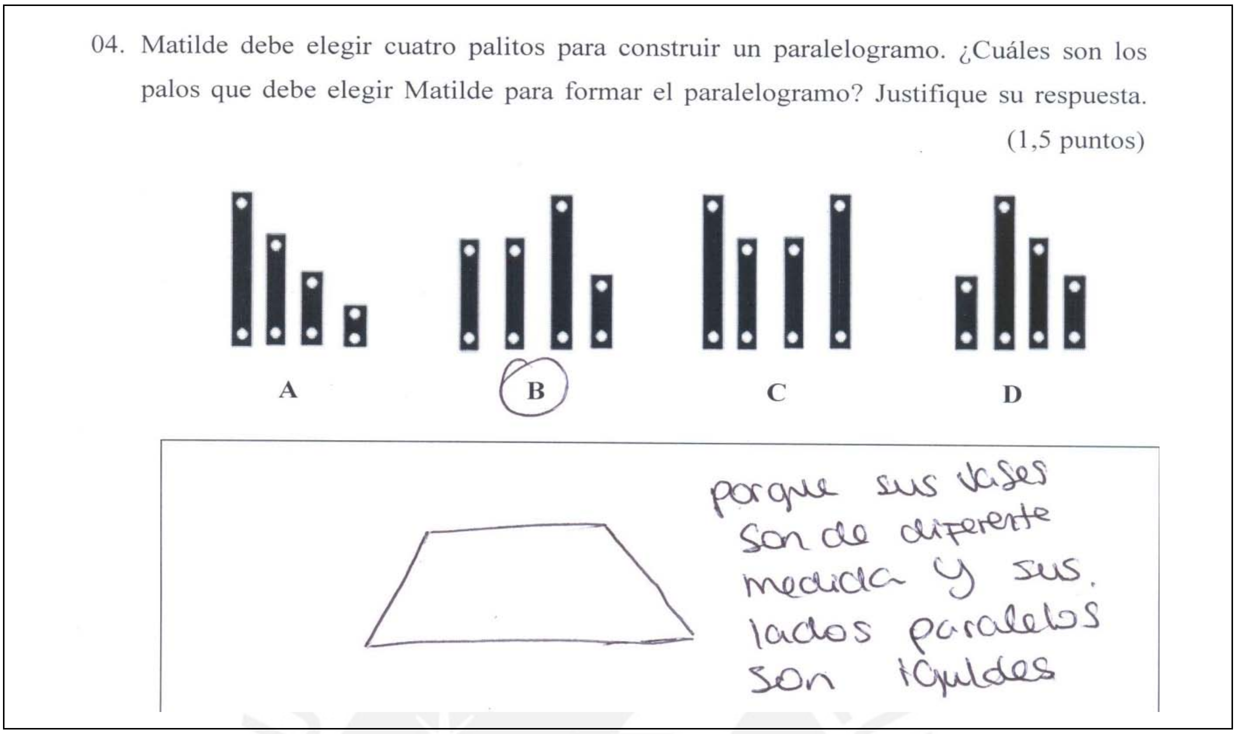

04. Matilde debe elegir cuatro palitos para construir un paralelogramo. ¿Cuáles son los palos que debe elegir Matilde para formar el paralelogramo? Justifique su respuesta. (1,5 puntos)

Figura 35. Muestra del ítem 4, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que este estudiante confunde a los paralelogramos con los trapecios. Asimismo, se observa que la imagen que tiene de un trapecio está supeditada por prototipos visuales. Por otro lado, la definición que proporciona no es acorde con el gráfico que plantea.

Comentario de las respuestas del ítem 5

La respuesta es básicamente visual, dado que ningún estudiante ha considerado las diagonales no congruentes del rombo (este mismo error se observó en la prueba de entrada) en su explicación. Por otro lado, 4 de los 10 estudiantes sólo realiza el gráfico del enunciado del problema, sin justificar su respuesta. El resto del alumnado, que son 6, grafican y justifican su respuesta, aunque de manera parcial. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

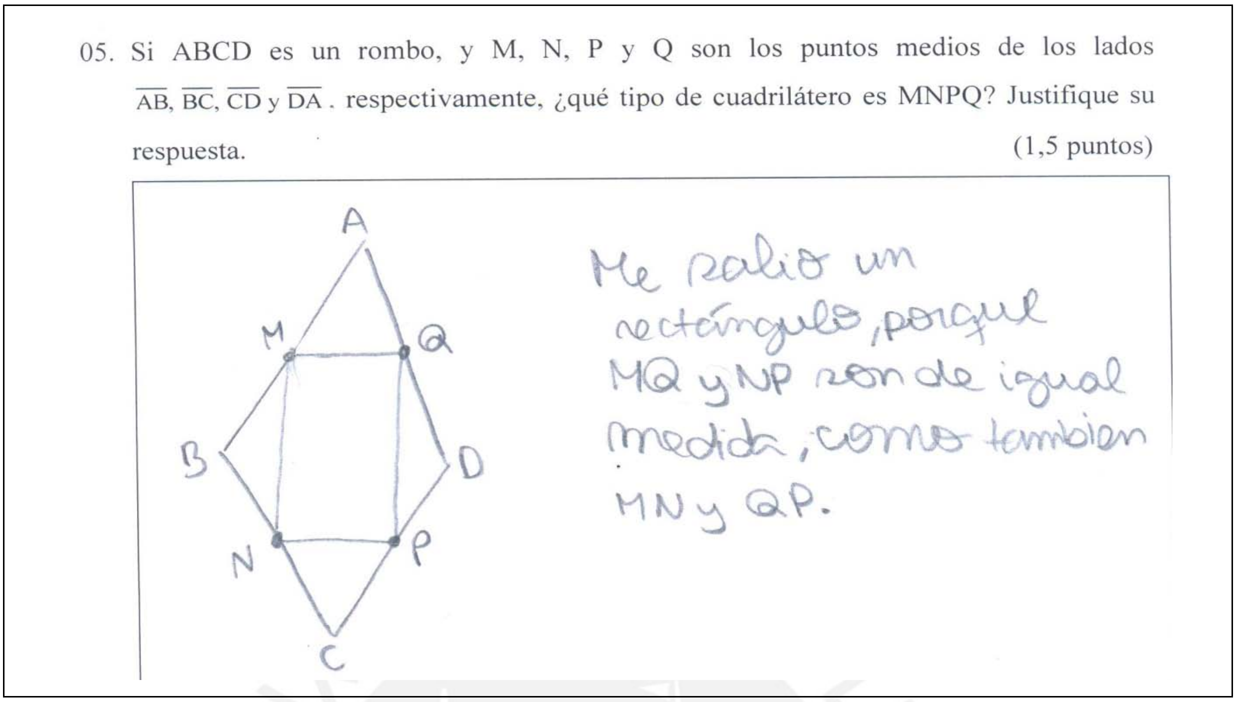


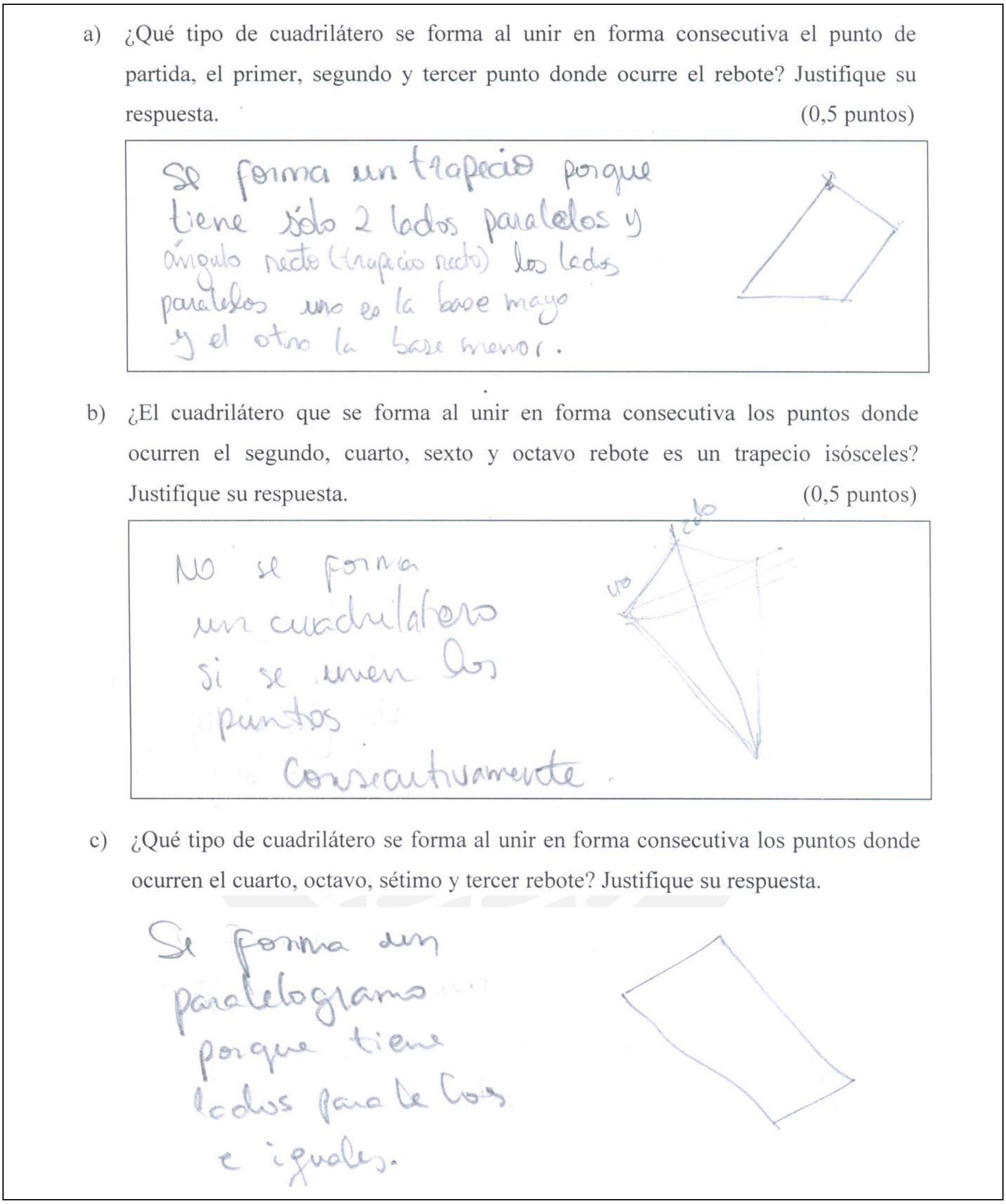
Figura 36. Muestra del ítem 5, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que el estudiante es capaz de enunciar propiedades, aunque lo hace aún de manera informal. Asimismo, el asumir que las diagonales del rombo son congruentes, se ha transformado en un error común que está presente tanto en la prueba de entrada como en la prueba de salida.

Comentario de las respuestas del ítem 6

Más de la mitad de los estudiantes tuvieron muchas dificultades para contestar este ítem. Sólo 4 de los 10 estudiantes responden de manera correcta y además justifican su respuesta.

Por su parte, los 6 restantes sólo grafican y no justifican su respuesta, asimismo, 3 de estos 6 ni siquiera mencionan el nombre del cuadrilátero que se forma. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:



a) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva el punto de partida, el primer, segundo y tercer punto donde ocurre el rebote? Justifique su respuesta. (0,5 puntos)

Se forma un trapecio porque tiene sólo 2 lados paralelos y ángulo recto (trapecio recto) los lados paralelos uno es la base mayo y el otro la base menor.

b) ¿El cuadrilátero que se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el segundo, cuarto, sexto y octavo rebote es un trapecio isósceles? Justifique su respuesta. (0,5 puntos)

No se forma un cuadrilátero si se unen los puntos consecutivamente.

c) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el cuarto, octavo, sétimo y tercer rebote? Justifique su respuesta.

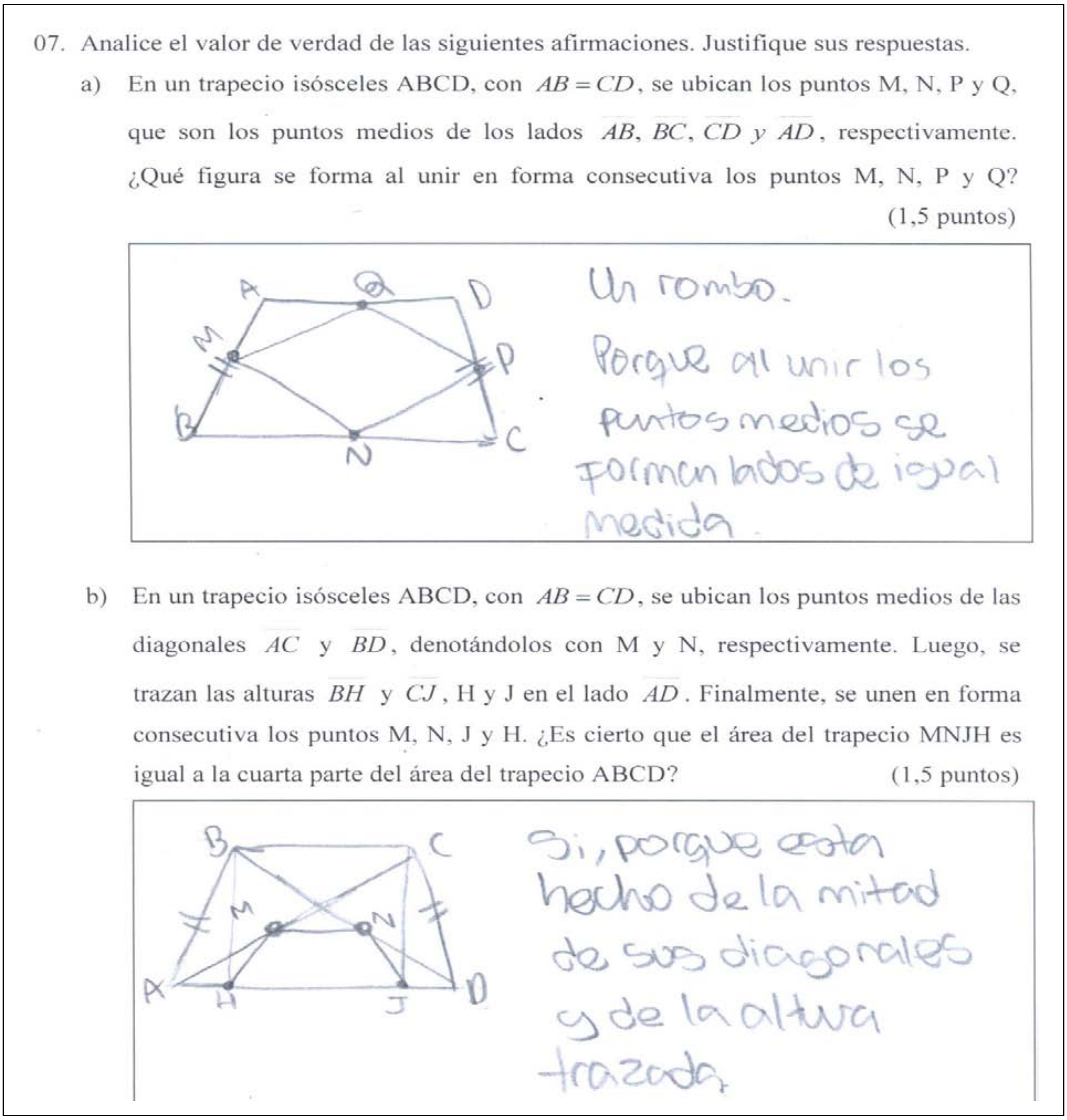
Se forma un paralelogramo porque tiene lados paralelos e iguales.

Figura 37. Muestra del ítem 6, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que los estudiantes son capaces de reconocer las propiedades esenciales de las figuras geométricas mediante la observación de los dibujos que ellos mismos han plasmado para representar objeto matemático en cuestión. Aunque, el uso de las propiedades no es del toda explícito.

Comentario de las respuestas del ítem 7

Sólo cuatro estudiantes responden y justifican parcialmente este ítem. Mientras que, el resto sólo se limitó a graficar e indicar el nombre de la figura sin justificar su respuesta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:



07. Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.

a) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q? (1,5 puntos)

Un rombo.
Porque al unir los puntos medios se forman lados de igual medida.

b) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, denotándolos con M y N, respectivamente. Luego, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, H y J en el lado $\overline{AD}$. Finalmente, se unen en forma consecutiva los puntos M, N, J y H. ¿Es cierto que el área del trapecio MNJH es igual a la cuarta parte del área del trapecio ABCD? (1,5 puntos)

Si, porque esta hecho de la mitad de sus diagonales y de la altura trazada.

Figura 38. Muestra del ítem 7, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que este estudiante es capaz de reconocer las propiedades esenciales de las figuras geométricas mediante la observación de los dibujos que ellos mismos han plasmado para representar objeto matemático en cuestión.

Comentario de las respuestas del ítem 8

Sólo tres estudiantes responden de manera correcta este ítem, mostrando ejemplos y contraejemplos para afirmar o negar el enunciado, respectivamente. Además, entienden la noción de bisectriz. A continuación, mostramos la respuesta que proporciona uno de estos estudiantes (refiérase a la parte b) del ítem 8):

No todos los cuadriláteros tienen lados paralelos… para ello el estudiante graficó un cuadrilátero cóncavo, (contraejemplo)

Por otro lado, tres estudiantes responden parcialmente el ítem. Básicamente, la pate b) es contestada de manera apropiada mientras que la parte a) y c) son contestadas de manera incorrecta, sobre todo, la parte c) por no saber que es una bisectriz.

Finalmente, seis estudiantes responden de manera incorrecta, tanto la parte a), b) y c).

A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

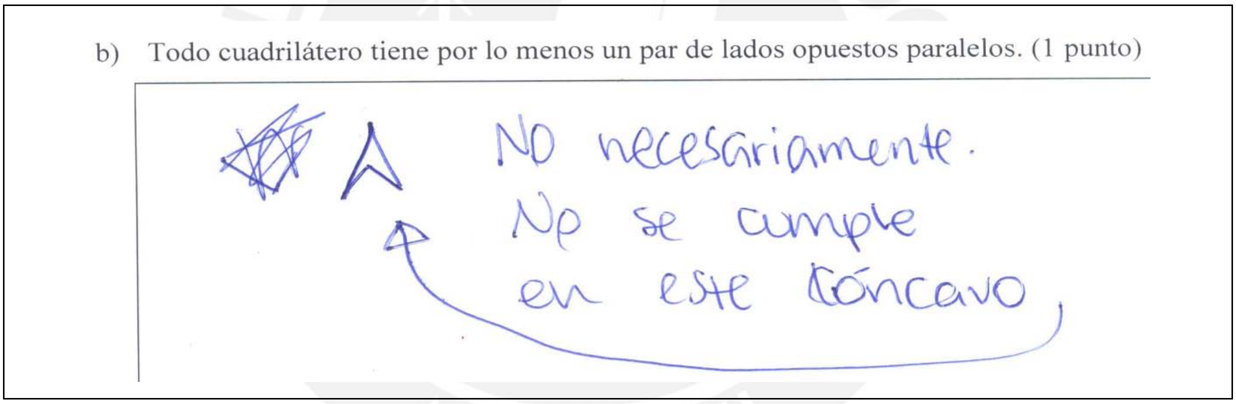


Figura 39. Muestra del ítem 8, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que este estudiante es capaz de elaborar ejemplos y/o contraejemplos para justificar su respuesta. Además, refleja el uso de un vocabulario apropiado al usar el término cóncavo, por ejemplo.

Comentario de las respuestas del ítem 9

En la prueba de entrada sólo tres respondieron este ítem y de manera incorrecta. En cambio, en la prueba de salida respondieron a esta pregunta nueve estudiantes, de los cuales cuatro lo hicieron de manera correcta o parcialmente correcta. Por su parte, los cinco que respondieron de manera incorrecta, aparentemente, no entienden el término interceptar. Asimismo, es importante señalar que los cuatro estudiantes que respondieron correctamente, asumen que AN = BN = CN = DN. En ambos casos, se observa un avance significativo en las respuestas de este ítem respecto a las respuestas de la prueba de entrada.

A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

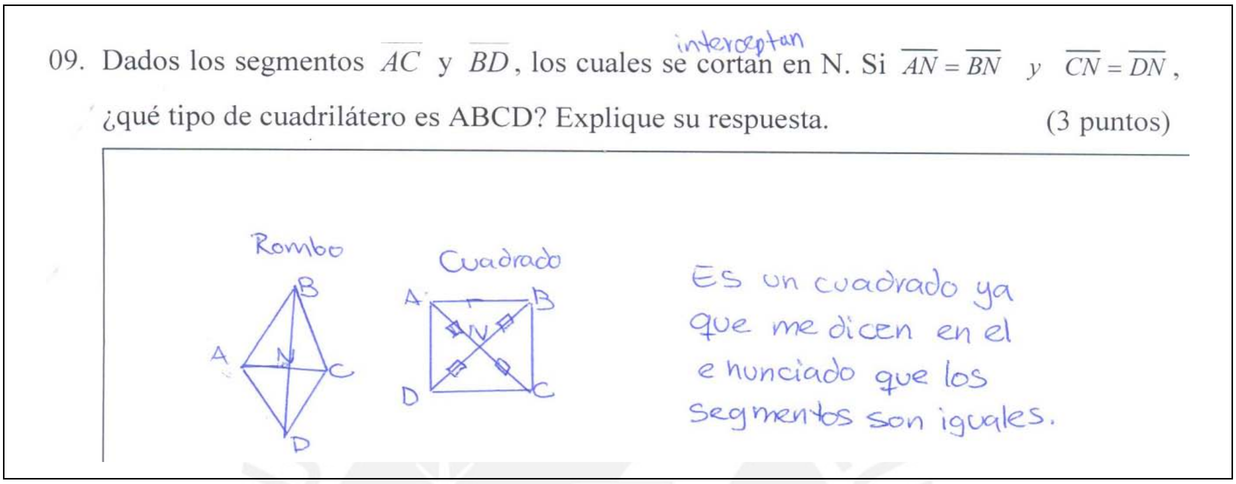


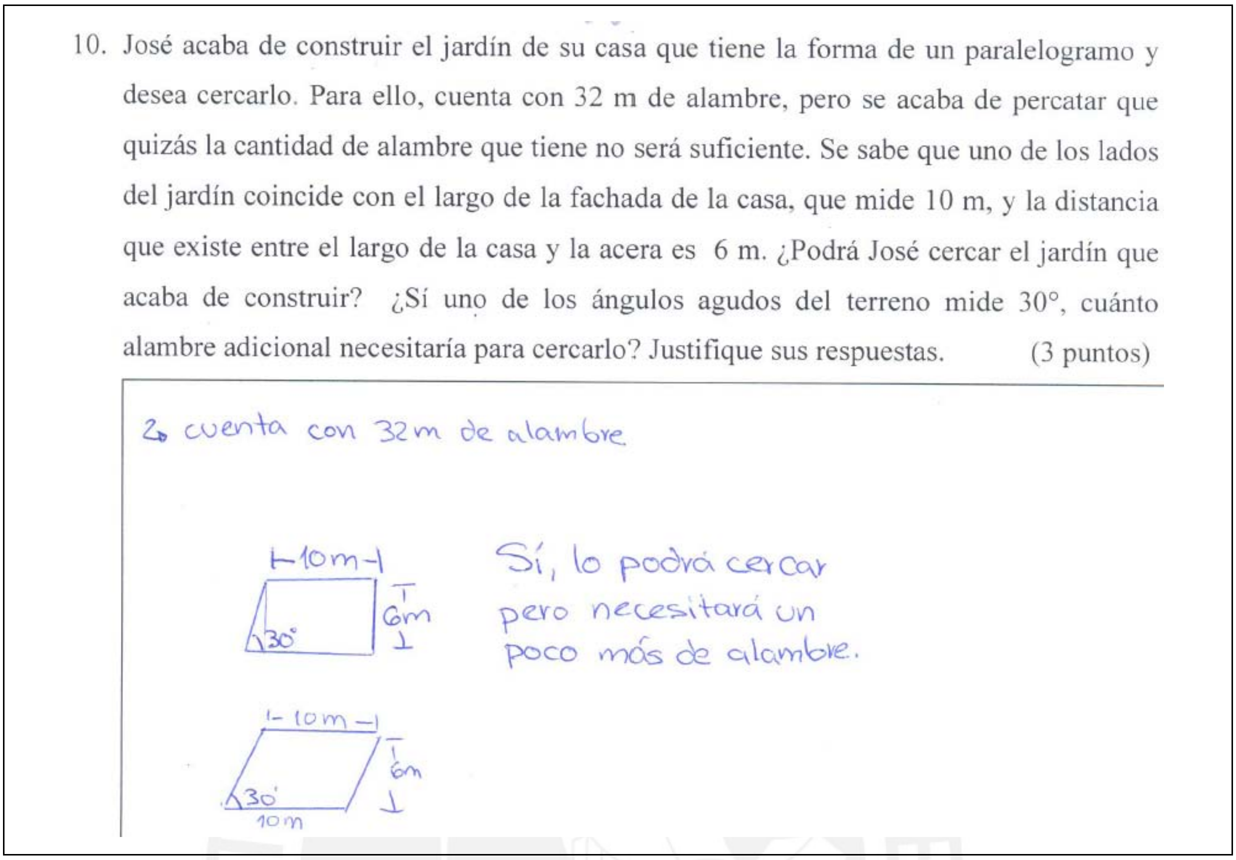
Figura 40. Muestra del ítem 9, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que los estudiantes son capaces de traducir el enunciado de un problema. Asimismo, son capaces de elaborar ejemplos y/o contraejemplos. Sin embargo, sus argumentos son insuficientes para justificar sus respuestas.

Comentario de las respuestas del ítem 10

En la prueba de entrada sólo tres respondieron este ítem y de manera incorrecta. En cambio, en la prueba de salida, cuatro de los diez estudiantes respondieron correctamente este ítem.

Los seis restantes, no responden la pregunta o en todo caso realizan un gráfico totalmente inadecuado lo cual inválida su respuesta. A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:



10. José acaba de construir el jardín de su casa que tiene la forma de un paralelogramo y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 32 m de alambre, pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre que tiene no será suficiente. Se sabe que uno de los lados del jardín coincide con el largo de la fachada de la casa, que mide 10 m, y la distancia que existe entre el largo de la casa y la acera es 6 m. ¿Podrá José cercar el jardín que acaba de construir? ¿Sí uno de los ángulos agudos del terreno mide 30°, cuánto alambre adicional necesitaría para cercarlo? Justifique sus respuestas. (3 puntos)

Figura 41. Muestra del ítem 10, prueba de salida.

Esta respuesta refleja que los estudiantes no tienen los argumentos necesarios para resolver el problema, al parecer, no es una cuestión de tiempo. Esta información fue recogida al entrevistar a los estudiantes involucrados. Es más, estos nos manifestaron que los problemas de geometría, rara vez, son con enunciados.

4.5. Análisis de los resultados

En esta parte presentaremos los resultados de la prueba de entrada y de la prueba de salida. Finalmente, compararemos los resultados de la prueba de entrada y la prueba de salida con el objetivo de comparar el nivel de razonamiento inicial y final de los estudiantes e identificando si se produjo una evolución en los grados de adquisición en los niveles 1, 2 y 3.

4.5.1. Resultados de la prueba de entrada

Si bien es cierto, la prueba de entrada estuvo compuesta por 10 ítems, sólo se contabilizaron 8 ítems dado que los ítems excluidos no fueron contestados por los estudiantes. Además, como mencionan Corberán et al. (1994): “la determinación del nivel de razonamiento de un estudiante no debe deducirse de qué cuestiones conteste, sino de cómo las conteste” (p.101)

Los resultados de la prueba de entrada se pueden observar en el anexo 4. Asimismo, se pueden observar las ponderaciones obtenidas por cada estudiante para cada nivel de razonamiento y el grado de adquisición que logra cada estudiante en los niveles propuestos, según los porcentajes asignados.

A partir de los resultados presentados en el anexo 4, elaboramos la siguiente tabla:

Tabla 27. Vectores resultantes correspondientes a los niveles 1, 2 y 3 de la prueba de entrada

Alumno	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	N° de errores
Rosemary	87,50	87,50	18,75	-
Débora	52,50	50	12,50	-
Valerie	62,50	20	21,25	1
Alonso	25	22,50	10	-
Cesia	100	77,50	41,25	-
Elizabeth	50	20	10	-
Enzo	22,50	10	15	1
Pavel	50	25	21,25	-
Cristina	50	10	5	-
Jair	25	22,50	16,25	-

A partir de la tabla anterior, observamos que:

- El porcentaje más alto, en el nivel 1, lo obtienen Rosemary y Cesia, con 87,50% y 100% respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición completa, en ambos casos. Respecto a este nivel, no hay mayores comentarios por la misma naturaleza de los resultados obtenidos por estos alumnos.

- El porcentaje más bajo, en el nivel 1, lo obtienen Enzo y Alonso, con 22,5% y 25%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición baja, en ambos casos. En el caso de Enzo, esto se debe a que, en el ítem 1, *menciona que se forma un cuadrilátero de 4 lados, parecido a un rombo.* (respuesta redundante y visual). Respecto al ítem 3, si bien es cierto agrupa de manera correcta los cuadriláteros, sin embargo, no señala los nombres de estos cuadriláteros (agrupación por características visuales). En el caso de Alonso, esto se debe a que, en el ítem 3, presentó un gráfico pero no justificó su elección ni caracterizo su gráfico.
- El porcentaje más alto, en el nivel 2, lo obtienen Rosemary y Cesia, con 87,50% y 77,50%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición completa y alta, respectivamente. Sin embargo, en ambos casos, en el ítem 5 no consideran las diagonales desiguales del rombo en la justificación de su respuesta. Además, Cesia en el ítem 4, no emplea símbolos en su justificación.
- El porcentaje más bajo, en el nivel 2, lo obtienen Enzo y Cristina, con 10% en ambos casos, lo cual es equivalente a un grado de adquisición nula, en ambos casos. Tanto en los casos de Enzo y Cristina esto se debe a que en los ítem 4 y 5 no justifican sus respuestas, solo elaboraron un gráfico el cual no fue justificado.
- El porcentaje más alto, en el nivel 3, lo obtienen Valerie y Cesia, con 21,25% y 41,25%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición baja e intermedia, respectivamente. En el caso de Valerie, esto se debe a que, en los ítems 7, 8, 9 y10 no justifica sus respuestas. En el caso de Cesia, esto se debe a que, si bien es cierto justifica sus respuestas, sin embargo, lo hace de manera parcial.
- El porcentaje más bajo, en el nivel 3, lo obtienen Elizabeth y Cristina, con 10% y 5%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición nula, en ambos casos. Tanto en los casos de Elizabeth y Cristina, esto se debe a que, en los ítems 7 y 8, no justifican sus respuestas. Además, los ítems 9 y 10, presentan un gráfico totalmente errado sobre el enunciado del ítem.

En la tabla 24 se observa, dos errores en total. Un error ocurre cuando $g_x < g_y$ siendo $y > x$.

Con respecto a los errores, es importante señalar que en el caso de Valerie, la diferencia es de 1,25%, lo cual representa un valor, prácticamente irrelevante. En el caso de Enzo, la diferencia es de 5%. Consideraremos como único error el porcentaje obtenido por Enzo. En base a esta información calculamos el coeficiente de Guttman:

$$G = 1 - \frac{\textit{número total de errores}}{\textit{número total de respuestas}} \qquad \Rightarrow \quad G = 1 - \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \qquad G = 0,90$$

Dado que se considera como límite inferior para aceptar la jerarquización G = 0,90. Por lo tanto, podemos validar los ítems de esta prueba.

4.5.2. Resultados de la prueba de salida

Los resultados de la prueba de salida se pueden observar en el anexo 5. Para completar esta tabla es necesario considerar los descriptores elaborados para la prueba de entrada, pues estos permiten asignar a cada ítem un nivel y un tipo de respuesta. Asimismo, se observan las ponderaciones obtenidas por cada estudiante y para cada nivel de razonamiento. En ella, también se indica el grado de adquisición que logra cada estudiante en los niveles propuestos, según los porcentajes asignados.

A partir de los resultados presentados en el anexo 5, elaboramos la siguiente tabla:

Tabla 28. Vectores resultantes correspondientes a los niveles 1, 2 y 3 de la prueba de salida

Alumno	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	N° de errores
Rosemary	100	87,50	68,75	-
Débora	52,50	77,50	48,75	1
Valerie	87,50	35	30	-
Alonso	77,50	52,50	20	-
Cesia	100	77,50	48,75	-
Elizabeth	77,50	75	16,25	-
Enzo	50	25	21,25	-
Pavel	52,50	37,50	22,50	-
Cristina	90	37,50	16,25	-
Jair	25	25	16,25	-

A partir de la tabla anterior, observamos que:

- El porcentaje más alto, en el nivel 1, lo obtienen Rosemary y Cesia, con 100%, en ambos casos, lo cual es equivalente a un grado de adquisición completa. Respecto a este nivel no hay mayores comentarios, por la misma naturaleza de los resultados.
- El porcentaje más bajo, en el nivel 1, lo obtienen Enzo y Jair, con 50% y 25%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición intermedia y baja, respectivamente. En el caso de Enzo, esto se debe a que, en el ítem 1, su respuesta es visual, además, no se percata de que las diagonales del “rombo” son congruentes, cayendo de esta manera en un error de definición. Asimismo, en el ítem 4, confunde trapecios con paralelogramos. En el caso de Jair, esto se debe a que, en el ítem 3, sólo se limitó a realizar agrupaciones, a partir, de características visuales. En ningún momento, señala los nombres de los cuadriláteros.
- El porcentaje más alto, en el nivel 2, lo obtienen Rosemary y Cesia, con 87,50% y 77,50%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición completa y alta, respectivamente. Sin embargo, en el caso de Rosemary, en el ítem 5, no considera las diagonales desiguales del rombo en la justificación de su respuesta. Mientras que, en el caso de Cesia, ella no considera las diagonales diferentes del rombo en la justificación de su respuesta. Además, en el ítem 4, no emplea símbolos en su justificación.
- El porcentaje más bajo, en el nivel 2, lo obtienen Enzo y Jair, con 25%, en ambos casos, lo cual es equivalente a un grado de adquisición baja, en ambos casos. En el caso de Enzo, esto se debe a que, en el ítem 5, no justifica su respuesta. Además, el ítem 7, lo desarrolló de manera incorrecta. No entendió el enunciado del problema. En el caso de Jair, esto se debe a que, el ítem 7, lo desarrolló de manera incorrecta.
- El porcentaje más alto, en el nivel 3, lo obtienen Rosemary y Débora, con 68,75% y 48,75%, respectivamente, lo cual es equivalente a un grado de adquisición alta e intermedia, respectivamente. En el caso de Rosemary, esto se debe a que, en el ítem 7, su respuesta es visual, ya que no está basada en propiedades, tales como puntos medios, diagonales congruentes, entre otras. Además, en el ítem 10, responde parcialmente. En el caso de Débora, esto se debe a que, en el ítem 8, no justifica su respuesta, además, confunde bisectriz con mediana (error de definición).

- El porcentaje más bajo, en el nivel 3, lo obtienen Elizabeth y Cristina, con 16,25%, en ambos casos, lo cual es equivalente a un grado de adquisición baja, en ambos casos. En el caso de Elizabeth, esto se debe a que, en el ítem 7, sólo se limitó a graficar el enunciado del problema, además, en el ítem 8, justifica parcialmente su respuesta. Finalmente, el ítem 10, no es contestado. En el caso de Cristina, se presentó la misma situación que la descrita para Elizabeth.

En la tabla 26 se observa sólo un error. Un error ocurre cuando $g_x < g_y$ siendo $y > x$.

Con respecto a este error, se observa que la diferencia es de 25%. En base a esta información calculamos el coeficiente de Guttman:

$$G = 1 - \frac{\textit{número total de errores}}{\textit{número total de respuestas}} \quad \Rightarrow \quad G = 1 - \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad G = 0{,}90$$

Dado que se considera como límite inferior para aceptar la jerarquización G = 0,90. Por lo tanto, podemos validar los ítems de esta prueba.

4.5.3. Comparación de los resultados de la prueba de entrada y la prueba de salida.

Para realizar esta comparación observaremos directamente los porcentajes obtenidos por cada estudiante tanto en la prueba de entrada como en la de salida (ver anexo 6).

Lo ideal es que el grado de adquisición se incremente entre una prueba y otra. Esto ocurrió en todos los estudiantes, naturalmente, unos incrementaron su grado de adquisición más que otros.

Tabla 29. Comparación entre la prueba de entrada y la prueba de salida

Alumno	Nivel 1			Nivel 2			Nivel 3		
	Prueba exploratoria	Prueba de salida	Diferencia	Prueba exploratoria	Prueba de salida	Diferencia	Prueba exploratoria	Prueba de salida	Diferencia
Rosemary	87,50	100	***12,50 %***	87,50	87,50	***0 %***	18,75	68,75	***50 %***
Débora	52,50	52,50	***0 %***	50	77,50	***27,50 %***	12,50	48,75	***36,25 %***
Valerie	62,50	87,50	***25 %***	20	35	***15 %***	21,25	30	***8,75 %***

Alonso	25	77,50	***52,50 %***	22,50	52,50	***30 %***	10	20	***10 %***
Cesia	100	100	***0 %***	77,50	77,50	***0 %***	41,25	48,75	***7,50 %***
Elizabeth	50	77,50	***27, 50 %***	20	75	***55 %***	10	16,25	***6,25 %***
Enzo	22,50	50	***27,50 %***	10	25	***15 %***	15	21,25	***6,25 %***
Pavel	50	52,50	***2,50 %***	25	37,50	***12,50 %***	21,25	22,50	***1,25 %***
Cristina	50	90	***40 %***	10	37,50	***27,50 %***	5	16,25	***11,25 %***
Jair	25	25	***0 %***	22,50	25	***2,50 %***	16,25	16,25	***0 %***
Promedios	57,13 %	71,25 %		34,50 %	53 %		17,13 %	28,63 %	
Gr	**Interm.**	**Alta**		**Baja**	**Interm.**		**Baja**	**Baja**	

A partir de la tabla anterior observamos que, en todos los casos, al comparar los porcentajes obtenidos en la prueba de entrada y en la prueba de salida, obtenemos diferencias porcentuales positivas. Haciendo un promedio de estas diferencias porcentuales obtenemos la siguiente información:

- Respecto al nivel 1, se mejoró en un 18,75%
- Respecto al nivel 2, se mejoró en un 18,50%
- Respecto al nivel 3, se mejoró en un 13,75%

En base a estos datos, se deduce que las actividades de la propuesta didáctica permitieron que se produzca un desplazamiento en los grados de adquisición en los niveles 1, 2 y 3. Además, esta afirmación está respaldada por lo expuesto tanto en la descripción como en el análisis de estas actividades, siendo uno de sus mayores logros haber contribuido a superar los errores comunes, obstáculos y preconceptos que presentaban los estudiantes.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Capítulo 5: Conclusiones y cuestiones abiertas.

En este capítulo presentamos las principales conclusiones a las que llegamos al finalizar el trabajo de investigación. Asimismo, proponemos algunas cuestiones abiertas como sugerencias para futuros trabajos.

5.1. Conclusiones

Entre las principales conclusiones a las que llegamos se encuentran las siguientes:

1. La prueba de entrada permitió reconocer los saberes previos que poseían los estudiantes de cuarto de secundaria sobre los cuadriláteros, que fueron insumos importantes para diseñar la propuesta didáctica basada en los niveles y fases del modelo de Van Hiele.

   Entre los saberes previos de los estudiantes, observamos los siguientes:

   - Conocen varios tipos de cuadriláteros como a los cuadrados, rombos, rectángulos, paralelogramos y trapecios. Aunque estos dos últimos frecuentemente son confundidos entre sí.
   - Emplean los términos como equilátero y acutángulo, pero lo usan de manera poco precisa. Por ejemplo, al mencionar cuadrilátero equilátero se refieren al cuadrado y al rectángulo (el término adecuado sería equiángulos). En el caso del término acutángulo, se sabe que existen triángulos acutángulos pero no cuadriláteros acutángulos, ya que la suma de sus ángulos sería menor a 360°.
   - Usan de manera precisa los términos lados paralelos, ángulos opuestos, punto medio y ángulo recto.
   - Conocen las líneas notables bisectriz y altura, sin embargo, lo usan de manera poco precisa. Frecuentemente, estas líneas son confundidas con las diagonales de un paralelogramo o con los lados no paralelos de un trapecio, respectivamente.

2. La propuesta didáctica diseñada, según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, permitió que los estudiantes logren un grado de adquisición alto en el nivel 1, un grado de adquisición intermedio en el nivel 2 y se encuentren desarrollando habilidades en el nivel 3, al pasar de un nivel de adquisición nula a un nivel de adquisición baja.

Consideramos que el modelo de Van Hiele fue pertinente para nuestro estudio porque creemos que por medio de ella pudimos observar y analizar de manera detallada como se produce el desarrollo en la calidad de razonamiento geométrico de los estudiantes.

El desarrollo de la propuesta didáctica ha permitido superar varios errores comunes y preconceptos que estaban presentes en las respuestas de los estudiantes. Como ejemplo, citamos los siguientes casos:

- El uso de figuras prototipos para ejemplificar o justificar sus respuestas.
- Consideran que un paralelogramo es un trapecio y viceversa.
- Consideran que el romboide = cuadrado + rombo.
- Escaso conocimiento sobre el la notación matemática propia de la geometría.
- Consideran que las diagonales de un rombo son congruentes.

3. Al comparar los grados de adquisición de los estudiantes, respecto a los cuadriláteros, antes de la aplicación de la propuesta didáctica con los recogidos luego de la implementación de la propuesta didáctica diseñada identificamos mejoras en los grados de adquisición de los niveles de razonamiento. Es decir, observamos en cada estudiante un desplazamiento de un nivel de razonamiento inferior a uno superior.

   A continuación presentamos los grados de adquisición obtenidos por los estudiantes antes y después de la aplicación de la propuesta didáctica.

Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3	
Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después
57,13 %	71,25 %	34,50 %	53 %	17,13 %	28,63
Interm.	**Alta**	**Baja**	**Interm.**	**Baja**	**Baja**

A partir de estos datos se deduce que la aplicación de la propuesta didáctica ha permitido mejorar los grados de adquisición de los niveles de razonamiento en los estudiantes.

4. A partir del análisis de los resultados de la experimentación de las actividades, podemos mencionar que los avances más notables de los estudiantes fueron:

    - El uso de un lenguaje matemático más apropiado.
    - Una mejor justificación y explicación de sus respuestas basadas en argumentos teóricos dejando de lado los argumentos visuales.
    - Formular ejemplos y contraejemplos para analizar enunciados.
    - Un mejor criterio para clasificar cuadriláteros.

5. El uso del GeoGebra facilitó la visualización y manipulación de las representaciones del objeto matemático cuadriláteros durante el desarrollo de las actividades.

    Es decir, la capacidad de arrastre del software GeoGebra le permitirá al alumno diferenciar entre lo que se denomina dibujo y figura de un objeto geométrico.

Respecto a los antecedentes, cabe resaltar que el trabajo propuesto por Renzulli y Scaglia (2006) respalda lo encontrado en las respuestas de los estudiantes sobre los preconceptos y figuras prototipo a los cuales recurren estos. Por otro lado, el trabajo presentado por Jaime (1993) orientó el diseño, la aplicación y el análisis de la propuesta didáctica, por esta razón se consideró pertinente establecer como metodología la propuesta por Jaime (1993), ya que en su trabajo indica como evaluar las respuestas de los estudiantes.

En cuanto al marco teórico empleado, consideramos que el modelo Van Hiele fue indispensable para analizar la evolución del pensamiento geométrico de los alumnos, asimismo, fue indispensable para lograr coherencia y secuencialidad en el diseño de cada una de las actividades que forman parte de la propuesta didáctica.

Por lo expuesto, se concluye que la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de los cuadriláteros, basada en el modelo de Van Hiele y con ayuda del software GeoGebra, ha logrado que los estudiantes incrementaran los grados de adquisición en el nivel de reconocimiento pasando de un grado de adquisición intermedia a un grado de adquisición alta respecto al objeto matemático cuadriláteros. De igual modo, ha logrado que los estudiantes incrementaran los grados de adquisición en el nivel de análisis pasando de un grado de adquisición baja a un grado de adquisición intermedia respecto al objeto matemático cuadriláteros. Sin embargo respecto al nivel 3, los grados de adquisición se mantuvieron aunque hubo un incremento porcentual dentro del mismo. Respecto a este punto Jaime (1993) menciona que el proceso de adquisición de los niveles 1 y 2 puede ser rápido, sin embargo, el proceso de adquisición del nivel 3 es lento.

Finalmente, consideramos que la pregunta ¿El diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros permitirá que los estudiantes alcancen el nivel 3, de deducción informal, de acuerdo al modelo de Van Hiele? Fue respondida, aunque no se logró un grado de adquisición completa en el nivel 3, si fue posible mejorar en cada uno de los niveles, además como menciona Jaime (1993) el proceso de adquisición del nivel 3 es lento.

5.2. Cuestiones abiertas.

Entre las cuestiones abiertas podemos señalar las siguientes:

1. Podría diseñarse secuencias didácticas similares para otros objetos matemáticos de Geometría.
2. Algunas de las actividades de la propuesta didáctica, necesitan ser reformuladas, de modo que puedan aportar, aún más, en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes.

REFERENCIAS

Barrios, E. & Muñoz, G. & Zetién, I. (2008). *El proceso cognitivo de la visualización por estudiantes de nivel superior mediante el uso de software dinámico (Cabri) en la resolución de problemas geométricos.* (Tesis de maestría), Universidad del Norte, Colombia.

Corberán et al. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* C.I.D.E., M.E.C.: Madrid.

Corberán, R., Huerta, P., Margarit, J., Peñas, P. & Ruíz, E. (1989). *Didáctica de la geometría: Modelo Van Hiele*. España: Colecció: Educació. Materials.

Coveñas, M. (2005). *Matemática 4.*Editorial bruño. Lima. Perú.

Godino, J., Batenero, C. & Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Recuperado de http://www.ugr.es/

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isomerías. La evaluación del nivel de razonamiento.* (Tesis de doctorado), Universidad de Valencia.

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas.* (Tesis de maestría), Universidad de Chile, Chile.

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate preservice teachers. *Journal of Researcg in Mathematics Education,* v. 14, n.1

Merklen, H. (1993). *Geometría.* Perú: Universidad Nacional de Ingeniería.

Ministerio de Educación del Perú (2001). *Cómo rinden los estudiantes peruanos en Comunicación y Matemática: Resultados de la Evaluación Nacional 2001 Cuarto grado de secundaria informe pedagógico.* Lima. Perú

Ministerio de Educación del Perú (2003). *Diseño Curricular Nacional*. Lima. Perú

Morales, C. & Majé, R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros*. (Tesis de maestría), Universidad de la Amazonia, Colombia.

Patricio, P. (2010). *El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje de los conceptos de mediatriz y circuncentro en estudiantes de tercero de secundaria, utilizando el GeoGebra.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Renzulli, F. & Scaglia, S. (2006). *Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 y futuros profesores de nivel inicial.* Educación matemática. Recuperado de http://www.famaf.unc.edu.ar/

Unidad de medición de la calidad educativa (2001). *Documento de trabajo 4. Informe pedagógico. Cuarto grado de secundaria.* Recuperado de: http://umc.minedu.gob.pe/

Verástegui, T. (2003). *Geometría Básica.* Perú: Editorial Moshera S.R.L.

ANEXOS

ANEXO 1

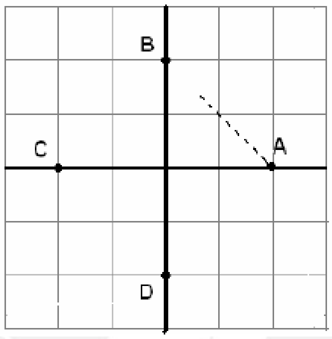
PRUEBA DE ENTRADA

PRUEBA DE ENTRADA

Apellidos y Nombres: ____

Instrucción: Lea con mucha atención antes de responder cada pregunta.

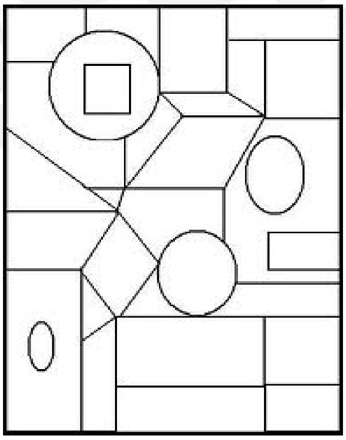
1. Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta.



____

____

2. En la figura que se muestra a continuación encontrará 16 cuadriláteros. Asígnele un número diferente a cada una de ellas y luego agrupe estos números según el tipo de cuadrilátero al que pertenezca.

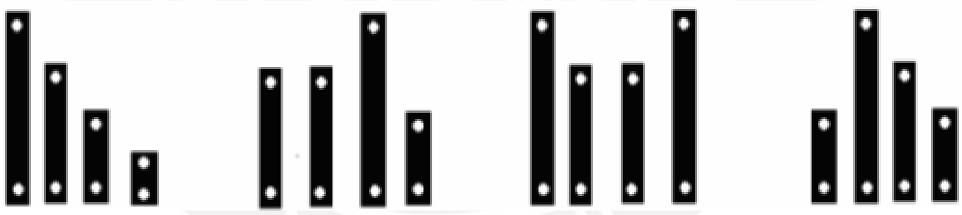


____

____

3. Tomás dice: “Tengo un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos de igual medida”. ¿Qué tipo de cuadrilátero tiene Tomás? Justifique su repuesta.

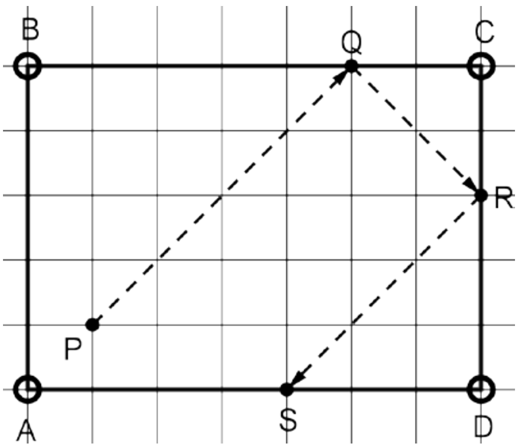
4. Matilde debe elegir cuatro palitos para construir un paralelogramo. ¿Cuáles son los palos que debe elegir Matilde para formar el paralelogramo? Justifique su respuesta.



A B C D

5. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? Justifique su respuesta.

6. Observe la mesa de billar que se muestra a continuación. Se sabe que el recorrido de la bola es a través de las diagonales de los cuadrados. La bola se encuentra, inicialmente, en el punto P y al golpearla se dirige hacia el punto Q, este rebota sobre la banda $\overline{BC}$ y se dirige hacia el punto R, y así sucesivamente, hasta llegar al agujero ubicado en C.



a) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva el punto de partida, el primer, segundo y tercer punto donde ocurre el rebote? Justifique su respuesta.

b) ¿El cuadrilátero que se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el segundo, cuarto, sexto y octavo rebote es un trapecio isósceles? Justifique su respuesta.

c) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el cuarto, octavo, sétimo y tercer rebote? Justifique su respuesta.

7. Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.

a) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q?

b) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, denotándolos con M y N, respectivamente. Luego, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, H y J en el lado $\overline{AD}$. Finalmente, se unen en forma consecutiva los puntos M, N, J y H. ¿Es cierto que el área del trapecio MNJH es igual a la cuarta parte del área del trapecio ABCD?

8. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestre un contraejemplo.

a) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un cuadrado.

b) Todo cuadrilátero tiene por lo menos un par de lados opuestos paralelos.

c) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo, son perpendiculares.

9. Dados los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, los cuales se interceptan en N. Si $\overline{AN} = \overline{BN}$ y $\overline{CN} = \overline{DN}$, ¿qué tipo de cuadrilátero es ABCD? Explique su respuesta.

10. José acaba de construir el jardín de su casa que tiene la forma de un paralelogramo y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 32 m de alambre, pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre que tiene no será suficiente. Se sabe que uno de los lados del jardín coincide con el largo de la fachada de la casa, que mide 10 m, y la distancia que existe entre el largo de la casa y la acera es 6 m. ¿Podrá José cercar el jardín que acaba de construir? ¿Sí uno de los ángulos agudos del terreno mide 30°, cuánto alambre adicional necesitaría para cercarlo? Justifique sus respuestas.

ANEXO 2

TALLER DE INTRODUCCIÓN AL GEOGEBRA

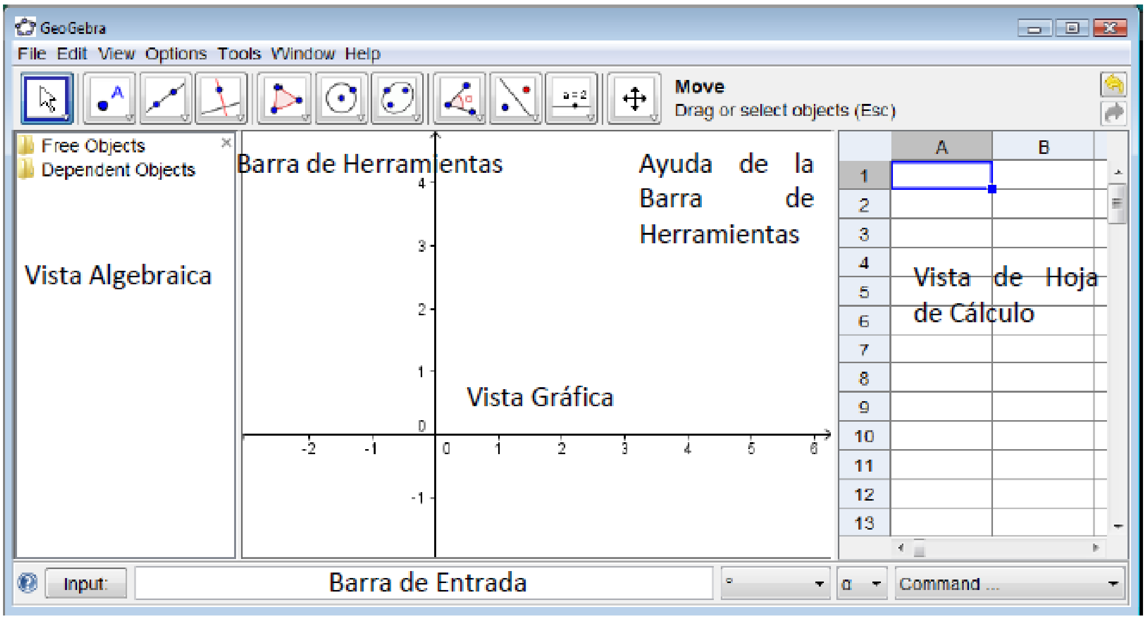
TALLER DE INTRODUCCIÓN AL GEOGEBRA

Hasta hace poco la geometría se ha servido del papel, el lápiz y otros instrumentos de dibujo como la regla y el compás. Sin embargo, hoy en día es posible sustituir estos instrumentos con la pantalla, el ratón y el teclado de un ordenador. En este sentido, el GeoGebra es uno de los software de geometría dinámica que permite estudiar y manipular las figuras.

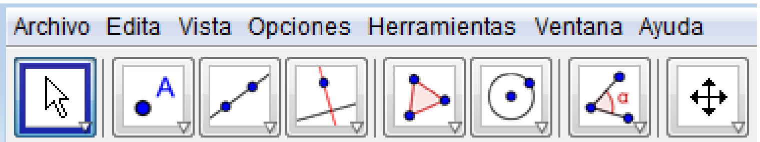
SESIÓN 1 – NOCIONES BÁSICAS

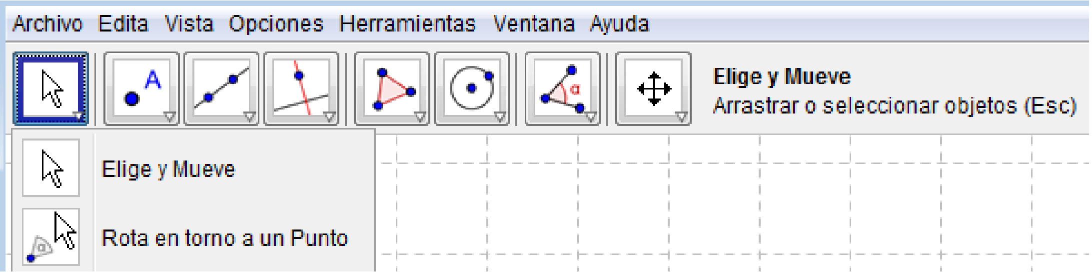
- El objetivo de esta primera sesión es identificar las principales herramientas y los comandos básicos del GeoGebra. Se sugiere que la siguiente actividad sea realizada de manera individual para alcanzar el objetivo propuesto.

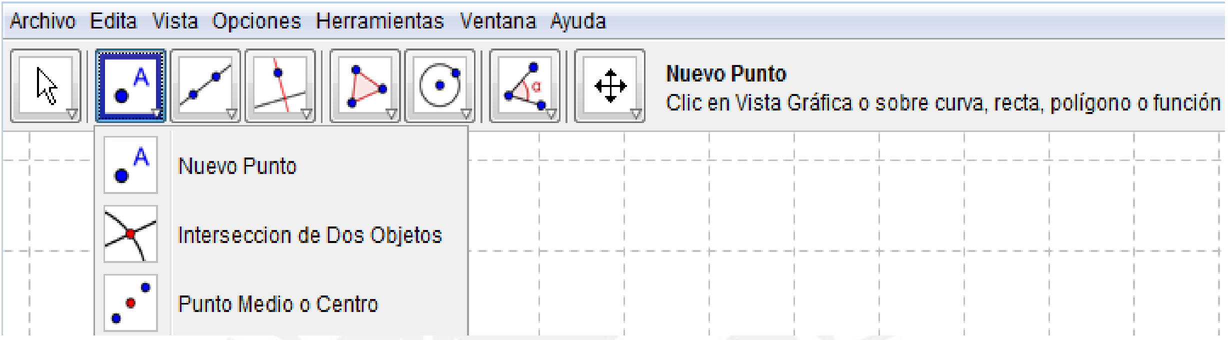
Vistas múltiples de los objetos matemáticos

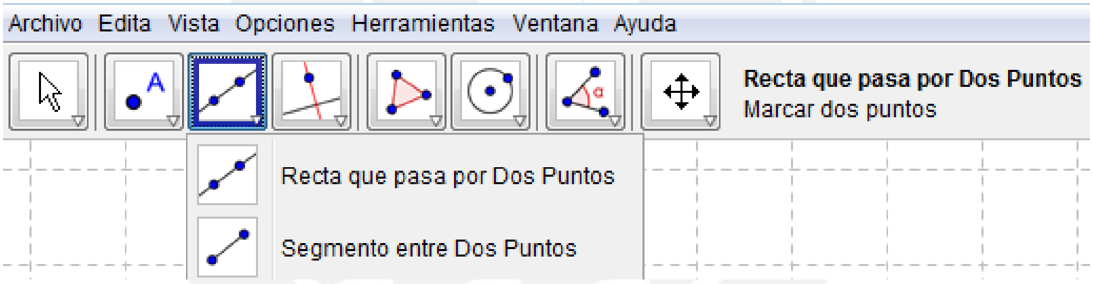


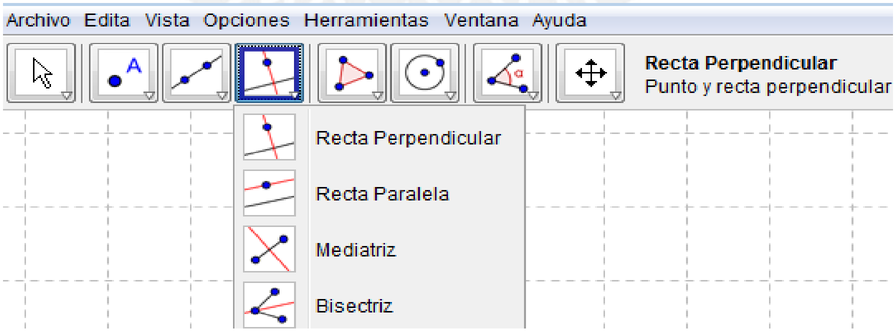
ACTIVIDAD 1: Conociendo la barra de herramientas del GeoGebra.

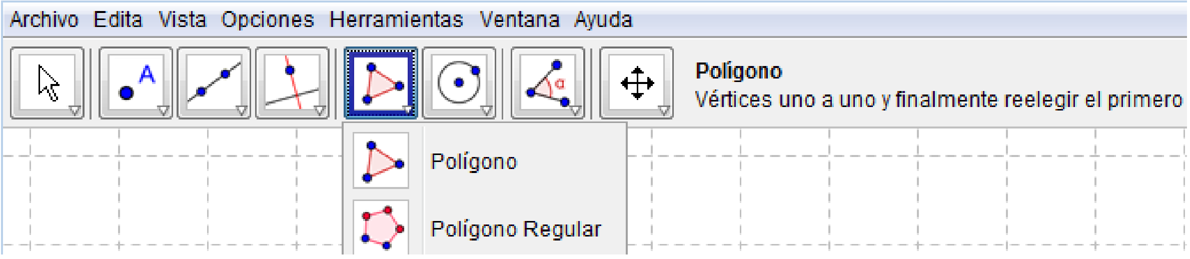


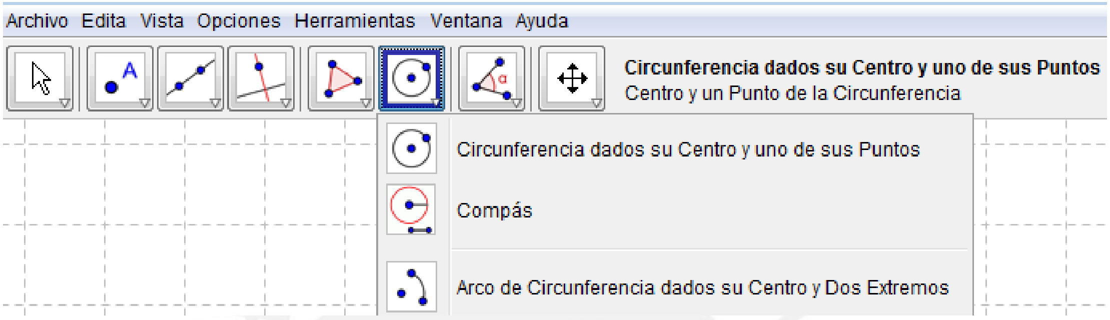

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Elige y Mueve
Arrastrar o seleccionar objetos (Esc)
Elige y Mueve
Rota en torno a un Punto


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Nuevo Punto
Clic en Vista Gráfica o sobre curva, recta, polígono o función
Nuevo Punto
Interseccion de Dos Objetos
Punto Medio o Centro

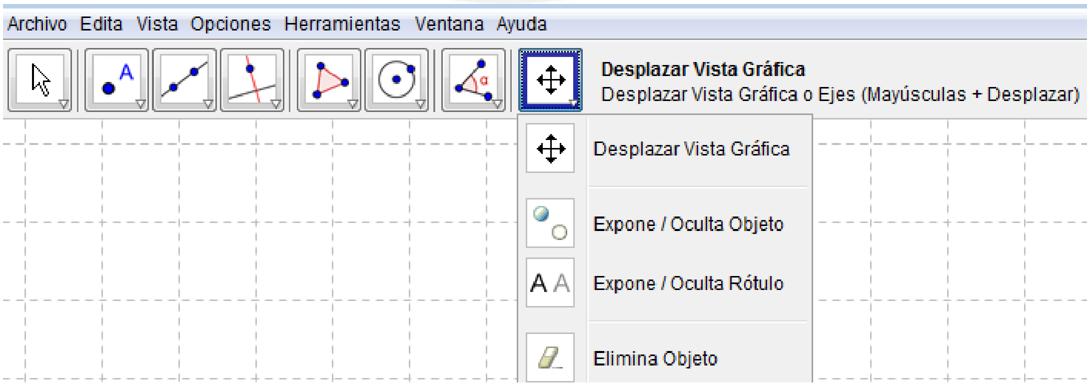

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Recta que pasa por Dos Puntos
Marcar dos puntos
Recta que pasa por Dos Puntos
Segmento entre Dos Puntos


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Recta Perpendicular
Punto y recta perpendicular
Recta Perpendicular
Recta Paralela
Mediatriz
Bisectriz


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Polígono
Vértices uno a uno y finalmente reelegir el primero
Polígono
Polígono Regular


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos
Centro y un Punto de la Circunferencia
Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos
Compás
Arco de Circunferencia dados su Centro y Dos Extremos


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Ángulo
Tres puntos o dos rectas
Ángulo
Ángulo dada su Amplitud
Distancia o Longitud
Área


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Desplazar Vista Gráfica
Desplazar Vista Gráfica o Ejes (Mayúsculas + Desplazar)
Desplazar Vista Gráfica
Expone / Oculta Objeto
Expone / Oculta Rótulo
Elimina Objeto

- La actividad 2, 3 y 4 de esta primera sesión corresponden a la fase 2, de orientación dirigida. El objetivo de estas actividades es que el estudiante realice construcciones sencillas para que se familiarice con el uso de las herramientas principales. Se sugiere que esta actividad sea realizada en parejas a fin de promover el diálogo.

ACTIVIDAD 2: Construcción de un segmento y de una circunferencia.

- Realizar la siguiente secuencia:
  - Con la opción ***Nuevo Punto*** ubicar dos puntos en el plano.
  - Dar clic derecho sobre cada uno de los puntos construidos y seleccionar la opción ***Muestra Rótulo***.
  - Con la opción ***Segmento entre Dos Puntos*** unir estos dos puntos.
  - Usando la opción ***Compás*** dar un clic sobre el segmento construido y trasladar la circunferencia que se ha formado a un lado del segmento.

  Guarde su construcción con el nombre Actividad 2_nombre.

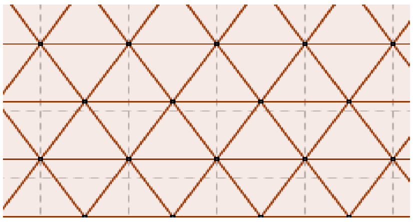
ACTIVIDAD 3: Desplazamiento de un punto sobre un objeto.

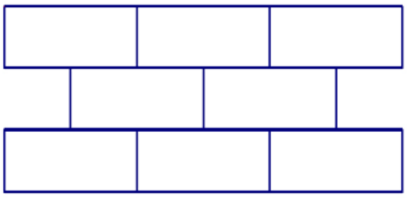
- Realizar la siguiente secuencia:
  - Con la opción ***Circunferencia dado su Centro y uno de sus Puntos*** construir una circunferencia.
  - Con la opción ***Nuevo Punto*** elegir un punto en la circunferencia construida anteriormente.
  - Señalar el punto y manteniendo presionado el botón izquierdo del mouse arrastrarlo sobre la circunferencia.

  Guarde su construcción con el nombre Actividad 3_nombre.

ACTIVIDAD 4: Trazar rectas paralelas y rectas perpendiculares.

- Reproducir los siguientes mosaicos utilizando las herramientas recta paralela y recta perpendicular.





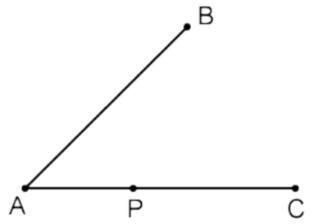
- Guardar su construcción con el nombre Actividad 4_nombre.

SESIÓN 2 – CONSTRUCCIÓN DE DIFERENTES FIGURAS.

- Los cinco primeros ítems de esta sesión corresponden a la fase de explicitación y los cinco últimos, corresponden a la fase de orientación libre. Se sugiere que esta actividad se realice en parejas a fin de promover la discusión y el intercambio de información.

Instrucciones: Esta actividad se realizará en parejas. No olvide guardar cada una de sus construcciones.

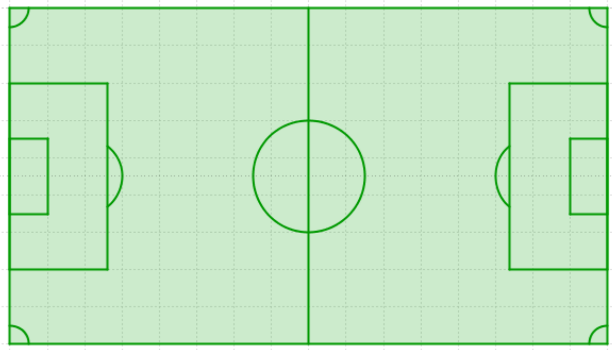
1. Dado un segmento, construir un triángulo equilátero que tenga como uno de sus lados el segmento dado.
2. Dado un segmento, construir un cuadrado que tenga como uno de sus lados el segmento dado.
3. Dado un segmento, construir el cuadrado que tenga como una de sus diagonales el segmento dado.
4. Dado un segmento dividirlo en tres partes iguales.
5. Dado un triángulo ABC, construir un triángulo isósceles que tenga la misma área que dicho triángulo.
6. Dado un triángulo ABC, construir la circunferencia inscrita en dicho triángulo.
7. Dado el triángulo ABC, construir la circunferencia que tiene su centro en el punto C y es tangente al lado $\overline{AB}$.
8. Dados tres puntos, construir la circunferencia que pasa por dichos puntos.
9. Dada una circunferencia C, construir la circunferencia inscrita en un cuadrante de C. ¿Cuál es la relación entre los radios de las dos circunferencias?
10. Dado la siguiente figura, construir la circunferencia tangente a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y que pase por el punto P.



SESIÓN 3 – ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS.

- Esta última sesión corresponde a la fase de integración, cuyo objetivo es adquirir una visión global de lo aprendido.

  ✓ Reproducir el dibujo del terreno de juego deportivo de fútbol que se muestra a continuación y describir el procedimiento empleado en su construcción. No olvide guardar cada una de sus construcciones.



  ✓ Reproducir las siguientes figuras y describir los procedimientos empleados para realizar sus construcciones. No olvide guardar cada una de sus construcciones.

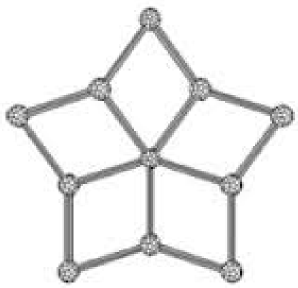


Figura 1

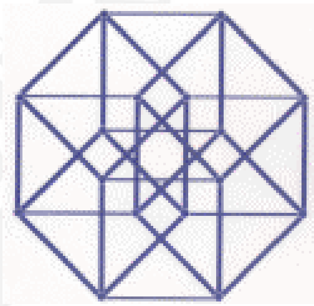


Figura 2

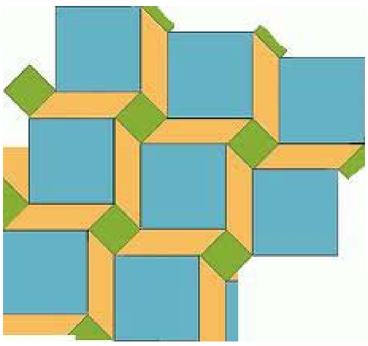


Figura 3

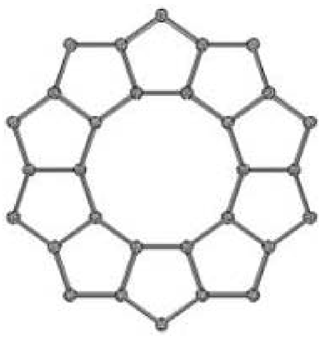


Figura 4

ANEXO 3

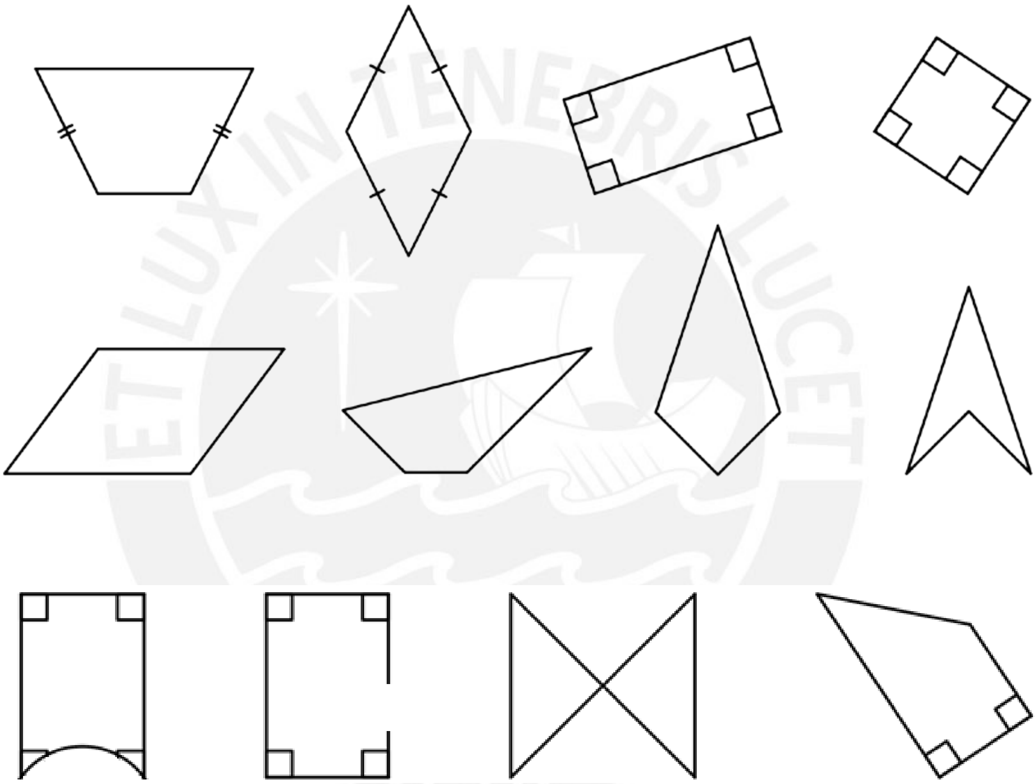
ACTIVIDADES DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

ACTIVIDADES DISEÑADAS PARA LAS SESIONES DE TRABAJO EN AULA

ACTIVIDAD 1 – FASE 1: INFORMACIÓN.

- **Objetivo:** Reconocer un cuadrilátero por su forma global.

A continuación se muestran 12 figuras geométricas diferentes. Coloree aquellas que considere que son cuadriláteros.



ACTIVIDAD 2 – FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA.

- **Objetivo:** Establecer relación entre paralelismo y perpendicularidad en un cuadrilátero.

Abra el programa GeoGebra, haciendo clic en el icono de acceso directo que se encuentra en el escritorio.

a) Utilizando la herramienta polígono construya 6 cuadriláteros diferentes. Luego, identifique si alguno de los cuadriláteros construidos cumple con alguna de las siguientes características:

a1) Tiene 4 ángulos rectos.

a2) Tiene 2 ángulos rectos.

a3) No tiene ningún ángulo recto.

a4) Tiene 2 pares de lados paralelos.

a5) Tiene un par de lados paralelos.

a6) No tiene ningún par de lados paralelos.

Guarde sus respuestas con el nombre Actividad 2_nombre del alumno.

ACTIVIDAD 3 – FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA.

- **Objetivo:** Reconocer que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano.

Abra el programa GeoGebra, haciendo clic en el icono de acceso directo que se encuentra en el escritorio.

a) Utilizando la herramienta polígono regular construya un cuadrado y determine la medida de sus lados, ángulos y diagonales.

b) Utilizando la herramienta rota objeto entorno a un punto , rotar el cuadrado construido en el ítem b) en torno a uno de sus vértices considerando un ángulo de 30°. Luego verifique si las medidas de los lados, ángulos y diagonales de la figura rotada varían. Use la herramienta insertar texto ABC para escribir su respuesta.

c) Construya un rectángulo y repita lo que se indica en el ítem b)

Guarde las construcciones realizadas en un archivo con el nombre Actividad 3_nombre del alumno.

ACTIVIDAD 4 – FASE 3: EXPLICITACIÓN.

- **Objetivo:** Mostrar que la construcción de una figura responde a propiedades matemáticas.

Instrucción: Esta actividad se realizará en parejas.

Abra el archivo ***Cuadrados.ggb*** de la carpeta **ACTIVIDADES GEOGEBRA** que se encuentra en el escritorio y use la herramienta inserta texto ABC para escribir sus repuestas.

a) Observe los cuadriláteros: ABCD, EFGH e IJKL, e indique cuál es un cuadrado. Explique.

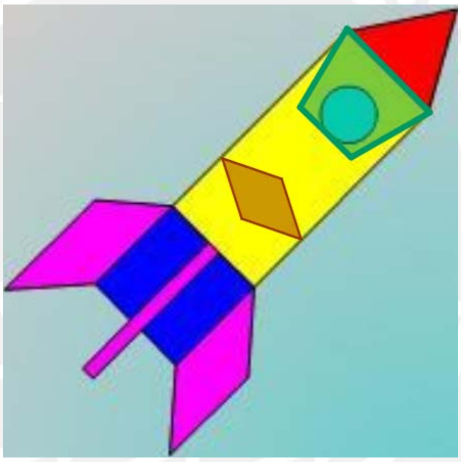
b) Arrastre sobre el plano todos los vértices de los cuadriláteros mostrados y observe cuál o cuáles de los cuadriláteros mostrados siguen siendo cuadrados. Comente con su compañero que sucede en cada caso.

ACTIVIDAD 5 – FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.

- **Objetivo:** Reconocer y nombrar diversos tipos de cuadriláteros por su forma global en una situación práctica.

Abra el programa GeoGebra, haciendo clic en el icono de acceso directo que se encuentra en el escritorio y use la herramienta inserta texto ABC para escribir sus repuestas.

a) Rusia enviará, en el 2014, a un grupo de astronautas para una expedición al planeta de Júpiter, para ello fue necesario construir un modelo especial de cohete. El modelo de este cohete es el que se muestra en la figura. Reconstruya este modelo y escriba los nombres de los cuadriláteros que ha empleado para realizar la construcción pedida.



Guarde su respuesta en un archivo con el nombre Actividad 5_nombre del alumno.

ACTIVIDAD 6 – FASE 5: INTEGRACIÓN.

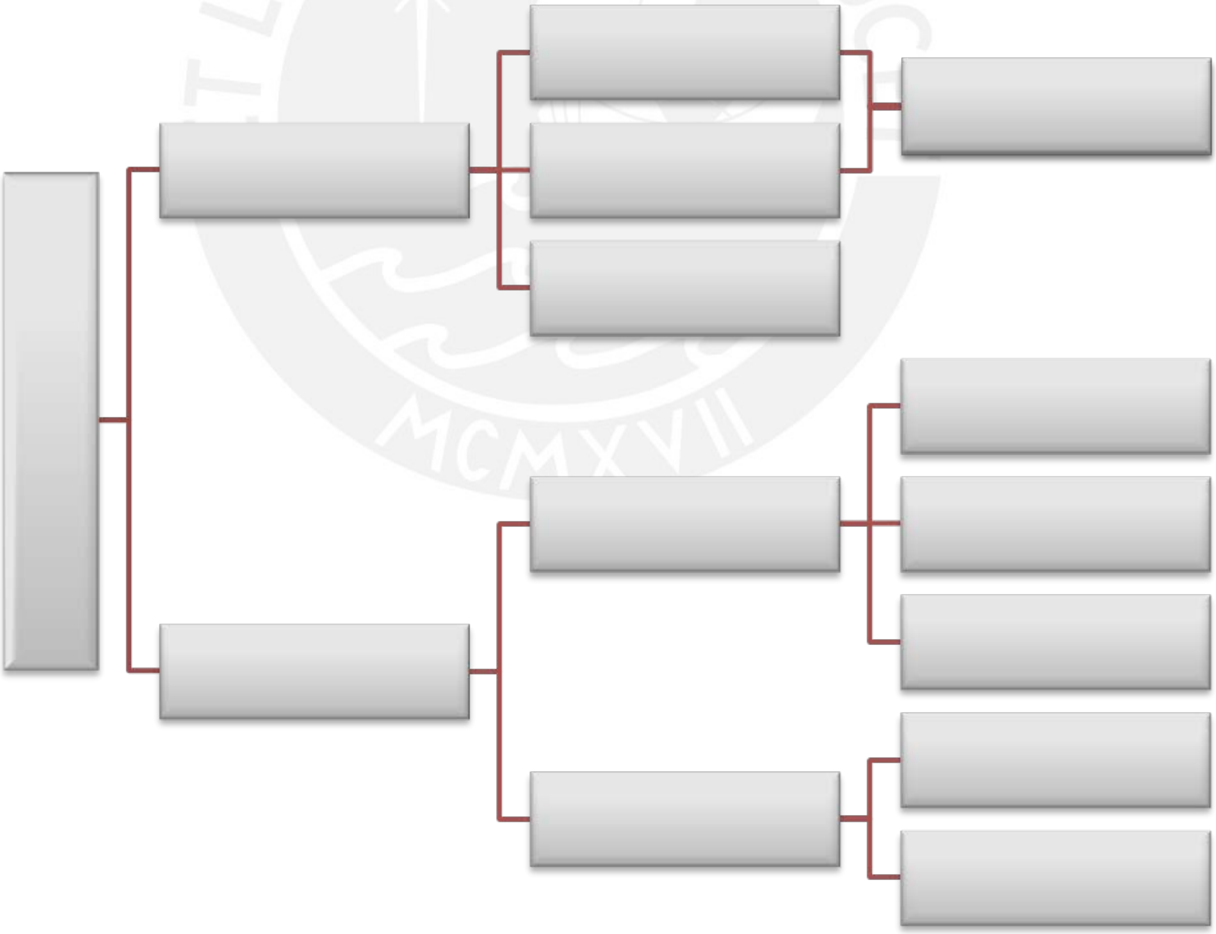
- **Objetivo:** Establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros.

Instrucción: Esta actividad será utilizada por el profesor para concluir con la presentación de los tipos de cuadriláteros.

Complete el diagrama mostrado con los nombres colocados en los recuadros de manera que se presente una clasificación de los cuadriláteros.

Trapecio Isósceles	Trapecio Rectángulo	Romboide	Rectángulo	Cuadriláteros
Paralelogramos	Cuadrado	Rombo	Trapecios	Trapezoides
Trapecio Escaleno	Trapezoide Simétrico	Trapezoide Asimétrico	No Paralelogramo	

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS



ACTIVIDAD 7 – FASE 1: EXPLIICTACIÓN.

- **Objetivo:** Promover la lectura y el uso adecuado de símbolos o notación matemática.

Abrir el archivo *Tipos de Cuadrilateros.ggb* que se encuentra en el escritorio y use la herramienta insertar texto ABC para escribir sus respuestas.

Observe los cuadriláteros mostrados y escriba el nombre de cada uno de ellos.

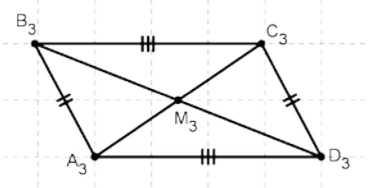
Guarde sus respuestas en un archivo con el nombre Actividad 7_nombre del alumno.

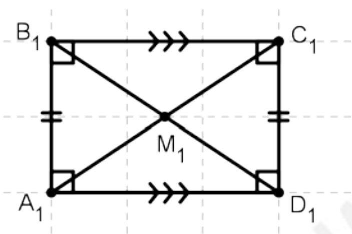
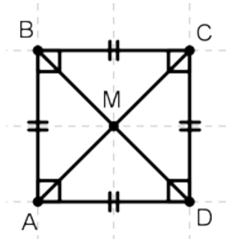
ACTIVIDAD 8 – FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA.

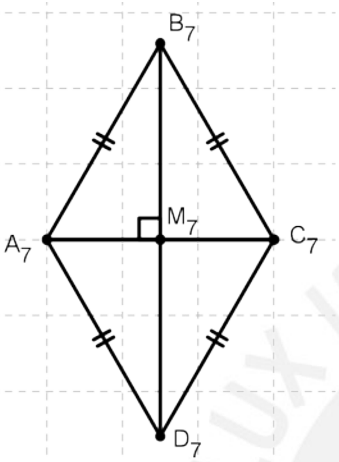
- **Objetivo:** Promover la lectura y el uso adecuado de símbolos o notación matemática.

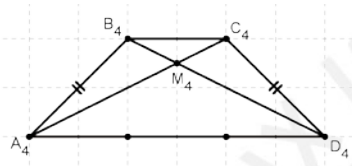
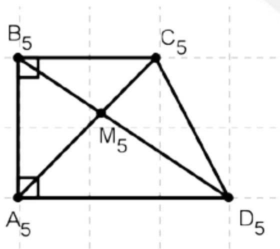
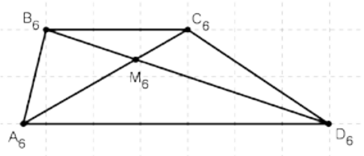
Abrir el archivo *Medidas en los Cuadrilateros.ggb* que se encuentra en el escritorio.

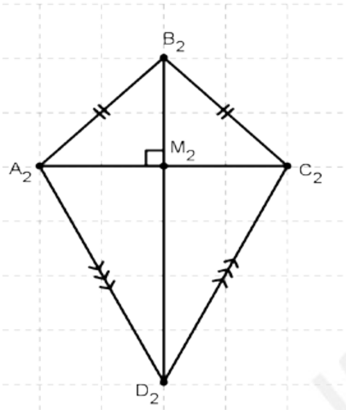
Observe las figuras mostradas y complete los espacios en blanco de la siguiente tabla, según corresponda.

PARALELOGRAMOS		
ROMBOIDE 	$\overline{A_3B_3}$ ____ $\overline{D_3C_3}$, $\overline{B_3C_3}$ ____ $\overline{A_3D_3}$ A_3B_3 ____ D_3C_3, B_3C_3 ____ A_3D_3	Sus lados son ____________________
	$m\angle B_3A_3D_3$ ______ $m\angle B_3C_3A_3$ $m\angle A_3B_3C_3$ ______ $m\angle A_3D_3C_3$	Sus ángulos opuestos son ____________
	$m\angle B_3A_3D_3$ ___ $m\angle A_3D_3C_3$ _____ $m\angle A_3B_3C_3$ __ $m\angle B_3C_3D_3$ _____	Dos ángulos consecutivos son ____________
	A_3C_3 ________ B_3D_3 A_3M_3 _____ M_3C_3 , B_3M_3 _____ M_3D_3 $m\angle B_3A_3C_3$ __ $m\angle C_3A_3D_3$	Sus diagonales son _____________

RECTÁNGULO 	$\overline{A_1B_1}$ ____ $\overline{D_1C_1}$, $\overline{B_1C_1}$ ____ $\overline{A_1D_1}$ A_1B_1 ____ D_1C_1, B_1C_1 ____ A_1D_1	Sus lados son ________________ ____
	$m\angle B_1A_1D_1$ ____ $m\angle A_1D_1C_1$ $m\angle D_1C_1B_1$ ____ $m\angle C_1B_1A_1$	Sus ángulos son __________
	$m\angle B_1A_1D_1$ ___ $m\angle A_1D_1C_1$ _____ $m\angle A_1B_1C_1$ __ $m\angle B_1C_1D_1$ _____	Dos ángulos consecutivos son __________
	A_1C_1 ________ B_1D_1 A_1M_1 _____ M_1C_1, B_1M_1 _____ M_1D_1 $m\angle A_1B_1D_1$ __ $m\angle D_1B_1C_1$	Sus diagonales son ___________
CUADRADO 	$\overline{AB}$ ____ $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ ____ $\overline{AD}$ AB ____ DC, BC ____ AD	Sus lados son ________________ ____
	$m\angle BAD$ ____ $m\angle ADC$ $m\angle DCB$ _____ $m\angle CBA$	Sus ángulos son __________
	$m\angle BAD$ ___ $m\angle ADC$ _____ $m\angle ABC$ __ $m\angle BCD$	Dos ángulos consecutivos son __________
	AC ________ BD $\overline{AC}$ ________ $\overline{BD}$ AM _____ MC, BM _____ MD $m\angle BAC$ __ $m\angle CAD$	Sus diagonales son ___________

<table>
<tr>
<td rowspan="4">ROMBO

</td>
<td>$\overline{A_7B_7}$ _____ $\overline{D_7C_7}$, $\overline{B_7C_7}$ _____ $\overline{A_7D_7}$
A_7B_7 _____ D_7C_7,
B_7C_7 _____ A_7D_7</td>
<td>Sus lados son ________________________</td>
</tr>
<tr>
<td>$m\angle B_7A_7D_7$ _____ $m\angle A_7D_7C_7$
$m\angle D_7C_7B_7$ _____ $m\angle C_7B_7A_7$</td>
<td>Sus ángulos son ______________</td>
</tr>
<tr>
<td>$m\angle B_7A_7D_7$ ___ $m\angle A_7D_7C_7$ _____
$m\angle A_7B_7C_7$ __ $m\angle B_7C_7D_7$</td>
<td>Dos ángulos consecutivos son ______________</td>
</tr>
<tr>
<td>A_7C_7 ________ B_7D_7
$\overline{A_7C_7}$ ________ $\overline{B_7D_7}$
A_7M_7 _____ M_7C_7 , B_7M_7 _____ M_7D_7
$m\angle A_7B_7D_7$ __ $m\angle D_7B_7C_7$</td>
<td>Sus diagonales son _______________</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Escriba 4 semejanzas y 4 diferencias que encuentras en los paralelogramos</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Semejanzas</td>
<td>Diferencias</td>
</tr>
</table>

NO PARALELOGRAMOS		
TRAPECIO ISÓSCELES 	$m\angle B_4A_4D_4$ ______ $m\angle A_4D_4C_4$	Sus ángulos adyacentes a la base mayor son ________________
	$m\angle A_4B_4C_4$ ______ $m\angle D_4C_4B_4$	Sus ángulos adyacentes a la base menor son ________________
	A_4C_4______B_4D_4 A_4M_4_____M_4D_4 M_4D_4_____B_4M_4	Sus diagonales son ________________
	B_4C_4_____A_4D_4 $m\angle A_4C_4B_4$ ______ $m\angle C_4A_4D_4$ $m\angle B_4D_4A_4$ ______ $m\angle D_4B_4C_4$	Sus bases son________
TRAPECIO RECTANGULAR 	B_5C_5_____A_5D_5 $m\angle A_5C_5B_5$ ______ $m\angle C_5A_5D_5$ $m\angle B_5D_5A_5$ ______ $m\angle D_5B_5C_5$	Sus bases son ________________
TRAPECIO ESCALENO 	B_6C_6_____A_6D_6 $m\angle A_6C_6B_6$ ______ $m\angle C_6A_6D_6$ $m\angle B_6D_6A_6$ ______ $m\angle D_6B_6C_6$	Sus bases son ________________

<table>
<tr><td>TRAPEZOIDE SIMÉTRICO
</td><td>A_2B_2_____B_2C_2
A_2D_2_____C_2D_2</td><td>Sus lados son______________</td></tr>
<tr><td></td><td>$m\angle A_2B_2D_2$ _____ $m\angle D_2B_2C_2$
$m\angle B_2A_2C_2$ _____ $m\angle D_2A_2C_2$</td><td>Sus diagonales son______________</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Semejanzas</td><td colspan="2">Diferencias</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 9 – FASE 3: EXPLICITACIÓN.

- **Objetivo:** Justificar, explicar o parafrasear las principales propiedades de los cuadriláteros.

Instrucción: Esta actividad se realizará en parejas.

En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, denotándolos con M y N, respectivamente. Luego, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, H y J en el lado $\overline{AD}$. Finalmente, se unen en forma consecutiva los puntos M, N, J y H.

a) Demostrar que $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{AD}$, donde P y Q son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.

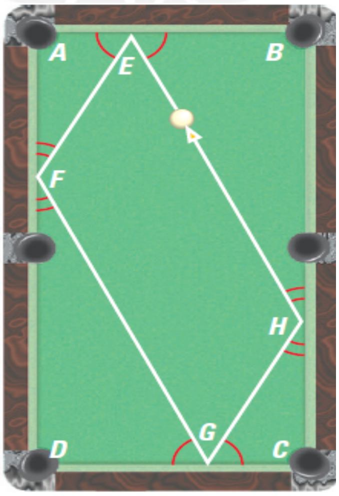
b) ¿Es cierto que el perímetro del trapecio MNJH es igual a la mitad del perímetro del trapecio ABCD? Justifique su respuesta.

c) ¿Es cierto que el área del trapecio MNJH es igual a la cuarta parte del área del trapecio ABCD? Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 10 – FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.

- **Objetivo:** Deducir propiedades implícitas de los cuadriláteros a partir de propiedades explicitas.

Durante un juego de billar, entre dos amigos, uno de ellos tira una bola de billar como se muestra en el gráfico: sale del punto H hacia el punto E, de allí va al punto F, luego al punto G y de allí regresa al punto H. Además, la bola impacta sobre la primera pared $\overline{AB}$ a un ángulo de 63° y rebota de cada una de las paredes con el mismo ángulo con el que impacta sobre ellas.



a) Calcule la medida de los ángulos $\angle AFE$ y $\angle GHC$. Explique.

b) Halle la medida de los ángulos internos del cuadrilátero EFGH e indique qué tipo de cuadrilátero es. Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 11 – FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

- **Objetivo:** Realizar generalizaciones sobre las propiedades de los cuadriláteros a partir de la inducción geométrica.

Construya el cuadrilátero MNPQ. Luego, ubique los puntos X, Y, Z y W, puntos medios de los lados $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QM}$, respectivamente. Trace el cuadrilátero XYZW.

Responda lo siguiente, justificando cada una de sus respuestas.

a) ¿Es cierto que $YZ = \frac{QN}{2}$?

b) ¿Es cierto que $XY = WZ$?

c) Si MNPQ es un rectángulo, ¿qué tipo de cuadrilátero es XYZW ?

d) Si MNPQ es un paralelogramo, ¿qué tipo de cuadrilátero es XYZW ?

e) Si MNPQ es un rombo, ¿qué tipo de cuadrilátero es XYZW?

f) Si MNPQ es un cuadrado, ¿qué tipo de cuadrilátero es XYZW?

g) Si MNPQ es un trapezoide simétrico, ¿qué tipo de cuadrilátero es XYZW?

ACTIVIDAD 12 – FASE 5: INTEGRACIÓN.

- **Objetivo:** Establecer y definir elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.

Complete la siguiente tabla marcando con un aspa (x) según corresponda.

	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Trapecio
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.					
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos.					
Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares.					
Cuadrilátero con diagonales congruentes.					
Cuadrilátero con diagonales que se bisecan.					
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes.					
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes.					
Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes.					

ACTIVIDAD 13 – FASE 1: INFORMACIÓN.

- **Objetivo:** Caracterizar a los cuadriláteros, según sus lados, ángulos o diagonales.

Sin ángulos internos congruentes	La suma de sus ángulos internos es 360°	Sólo dos ángulos internos son congruentes	Todos sus lados desiguales
Diagonales perpendiculares	Ángulos opuestos congruentes	Sus diagonales son bisectrices	Las diagonales se intersecan en su punto medio
Todos sus ángulos congruentes	Lados opuestos congruentes	Todos sus lados congruentes	Diagonales congruentes

Considerando las propiedades señaladas en los recuadros, indique qué propiedades cumple

a) El romboide

b) El rectángulo

c) El cuadrado

d) El rombo

e) El trapecio

f) El trapezoide simétrico

ACTIVIDAD 14 – FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA.

- **Objetivo:** Establecer relaciones de inclusión y establecer las principales propiedades que pueden caracterizar un cuadrilátero.

Analice el valor de verdad de los siguientes enunciados sobre un cuadrilátero ABCD y justifique sus respuestas.

a) Si $\overline{AB} // \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio.

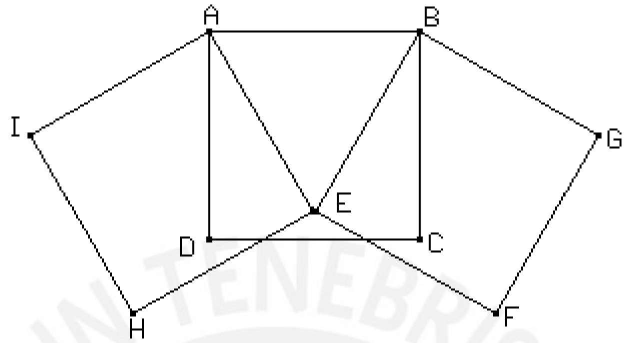
b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo.

c) Si $AB = CD \quad y \quad \overline{AB} // \overline{CD}$ entonces ABCD es un paralelogramo.

ACTIVIDAD 15 – FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA.

- **Objetivo:** Establecer interrelaciones entre las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.

Construya la figura mostrada utilizando GeoGebra, donde ABCD, AEHI y BEFG son cuadrados congruentes. Luego, halle la medida del ángulo BDF.



Mueva los vértices B y D y observe si la figura construida en el ítem a) mantiene sus propiedades iniciales. Explique qué pasa con cada movimiento.

a) Dado tres puntos A, B y C, construya el trapecio ABCD, donde $BC < AD$, $AB = CD$ y $\overline{BC} // \overline{AD}$. Luego, mueva los vértices del trapecio construido en el ítem c) y observe si mantiene sus propiedades iniciales. Explique cómo construyó el trapecio.

ACTIVIDAD 16 – FASE 3: EXPLICITACIÓN.

- **Objetivo:** Realizar demostraciones de manera intuitiva e informal y formular ejemplos y/o contraejemplos sobre las propiedades de los cuadriláteros.

Instrucción: Esta actividad se realizará en parejas.

Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestre un contraejemplo.

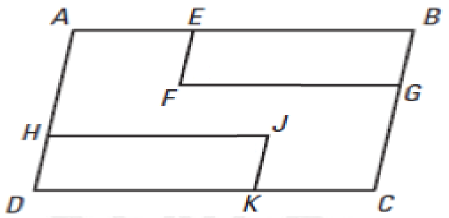
a) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos, de un paralelogramo, son perpendiculares.

b) Todo cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo.

ACTIVIDAD 17 – FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.

- **Objetivo:** Realizar demostraciones sencillas y establecer las interrelaciones entre las propiedades de los cuadriláteros.

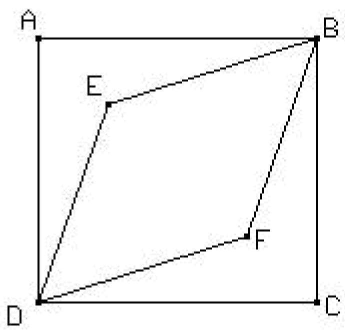
Si ABCD, EBGF y HJKD son paralelogramos, demuestre que los ángulos EFG y HJK son congruentes.



ACTIVIDAD 18 – FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.

- **Objetivo:** Resolver problemas contextualizados sobre cuadriláteros que impliquen la organización de datos.

Construya la figura mostrada usando GeoGebra, donde ABCD es un cuadrado y DEBF es un rombo cuya área es igual a la mitad del área del cuadrado.



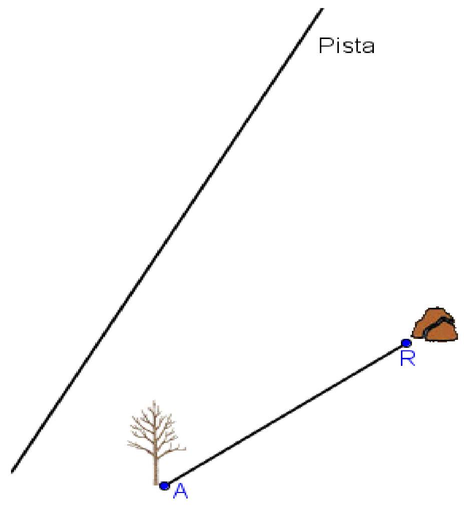
Mueva los vértices y observe si las propiedades iniciales del cuadrado y rombo se mantienen.

a) Dado el rombo ABCD, se construyen exteriormente los rombos ABEF, BCGH, CDIJ y ADKL. Demostrar que la figura que se forma al unir los centros de estos rombos es un rectángulo. Asimismo demostrar que el área de este rectángulo es el doble del área de rombo ABCD.

ACTIVIDAD 19 – FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.

- **Objetivo:** Resolver problemas contextualizados sobre cuadriláteros que impliquen la organización de datos.

  a) En un lugar lejano se ha enterrado un tesoro. Se sabe que A representa un árbol seco; R una roca y T el punto donde está enterrado el tesoro. Además, los puntos A, R y T son tres vértices de un rombo y el cuarto vértice está sobre la pista. ¿Dónde habría que cavar para buscar el tesoro?



b) Un jardinero acaba de construir un jardín en forma de trapecio isósceles y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 42 metros de alambre Pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre con la que cuenta no sea suficiente. Se sabe que la base menor del trapecio coincide con el largo de su casa que es 10 metros y que la distancia que existe entre su casa y la acera de 6 metros. Además, la base mayor del trapecio es el doble de la base menor ¿Podrá este jardinero cercar el jardín que acaba de construir? ¿Sí uno de los ángulos adyacentes a la base mayor fuese 30° cuanto alambre adicional necesitaría? Explica su repuesta en cada caso.

Anexo 4

Resultados de la Prueba de Entrada

CLASIFICACION DE LAS REPUESTAS POR ALUMNO

Ítem	Rosemary	Débora	Valerie	Alonso	Cesia	Elizabeth	Enzo	Pavel	Cristina	Jair
	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo
1	1/5	1/3	1/3	1/3	1/7	1/5	1/2	1/3	1/2	1/3
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	2/7	2/6	2/7	2/3	2/7	2/3	2/3	2/5	2/6	2/3
4	2/7	2/3	2/2	2/3	2/6	2/2	2/1	2/3	2/1	2/3
5	2/5	2/5	2/2	2/2	2/5	2/2	2/2	2/3	2/2	2/2
6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7	3/4	3/2	3/3	3/2	3/4	3/2	3/2	3/2	3/2	3/3
8	3/3	3/3	3/2	3/2	3/	3/1	3/2	3/3	3/1	3/2
9	3/1	3/2	3/2	3/1	3/2	3/2	3/2	3/2	3/1	3/1
10	3/1	3/1	3/2	3/1	3/2	3/1	3/1	3/2	3/1	3/2

GRADOS DE ADQUISICIÓN DE LOS NIVELES

Ítem	Rosemary			Débora			Valerie		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	75	-	-	25	-	-	25	-	-
2									
3	-	100	-	-	80	-	-	100	-
4	-	100	-	-	25	-	-	20	-
5	-	75	-	-	75	-	-	20	-
6									
7	-	-	50	-	-	25	-	-	25
8	-	-	25	-	-	25	-	-	20
9	-	-	0	-	-	0	-	-	20
10	-	-	0	-	-	0	-	-	20
Gr (n)	87,50	87,50	18,75	52,50	50	12,50	62,50	20	21,25
	Compl.	Compl.	Baja	Interm.	Interm.	Nula	Alta	Baja	Baja

Ítem	Alonso			Cesia			Elizabeth			Enzo		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	25	-	-	100	-	-	75	-	-	20	-	-
2												
3	-	25	-	-	100	-	-	25	-	-	25	-
4	-	25	-	-	80	-	-	20	-	-	0	-
5	-	20	-	-	75	-	-	20	-	-	20	-
6												
7	-	-	20	-	-	50	-	-	20	-	-	20
8	-	-	20	-	-	75	-	-	0	-	-	20
9	-	-	0	-	-	20	-	-	20	-	-	20
10	-	-	0	-	-	20	-	-	0	-	-	0
Gr (n)	25	22,50	10	100	77,50	41,25	50	20	10	22,50	10	15
	Baja	Baja	Nula	Compl.	Alta	Interm.	Interm.	Baja	Nula	Baja	Nula	Nula

Ítem	Pavel			Cristina			Jair		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	25	-	-	20	-	-	25	-	-
2									
3	-	75	-	-	80	-	-	25	-
4	-	25	-	-	0	-	-	25	-
5	-	25	-	-	20	-	-	20	-
6									
7	-	-	20	-	-	20	-	-	25
8	-	-	25	-	-	0	-	-	20
9	-	-	20	-	-	0	-	-	0
10	-	-	20	-	-	0	-	-	20
Gr (n)	50	25	21,25	50	10	5	25	22,50	16,25
	Interm.	Baja	Baja	Interm.	Nula	Nula	Baja	Baja	Baja

VECTORES RESULTANTES

Alumno	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	N° de errores
Rosemary	87,50	87,50	18,75	-
Débora	52,50	50	12,50	-
Valerie	62,50	20	21,25	1
Alonso	25	22,50	10	-
Cesia	100	77,50	41,25	-
Elizabeth	50	20	10	-
Enzo	22,50	10	15	1
Pavel	50	25	21,25	-
Cristina	50	10	5	-
Jair	25	22,50	16,25	-

Anexo 5

Resultados de la Prueba de Salida

CLASIFICACION DE LAS REPUESTAS POR ALUMNO

Ítem	Rosemary	Débora	Valerie	Alonso	Cesia	Elizabeth	Enzo	Pavel	Cristina	Jair
	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo
1	1/7	1/3	1/5	1/5	1/7	1/5	1/5	1/3	1/7	1/3
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	2/7	2/6	2/7	2/6	2/7	2/6	2/3	2/6	2/6	2/3
4	2/7	2/6	2/2	2/6	2/6	2/5	2/3	2/3	2/3	2/3
5	2/5	2/5	2/4	2/3	2/5	2/5	2/3	2/4	2/4	2/3
6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7	3/5	3/5	3/3	3/2	3/4	3/3	3/3	3/3	3/3	3/2
8	3/5	3/2	3/3	3/2	3/5	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2
9	3/5	3/4	3/4	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/3
10	3/4	3/4	3/2	3/2	3/4	3/1	3/2	3/3	3/1	3/1

GRADOS DE ADQUISICIÓN DE LOS NIVELES

Ítem	Rosemary			Débora			Valerie		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	100	-	-	25	-	-	75	-	-
2									
3	-	100	-	-	80	-	-	100	-
4	-	100	-	-	80	-	-	20	-
5	-	75	-	-	75	-	-	50	-
6									
7	-	-	75	-	-	75	-	-	25
8	-	-	75	-	-	20	-	-	25
9	-	-	75	-	-	50	-	-	50
10	-	-	50	-	-	50	-	-	20
Gr (n)	100	87,50	68,75	52,50	77,50	48,75	87,50	35	30
	Compl.	Compl.	Alta	Interm.	Alta	Interm.	Compl.	Baja	Baja

Ítem	Alonso			Cesia			Elizabeth			Enzo		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	75	-	-	100	-	-	75	-	-	75	-	-
2												
3	-	80	-	-	100	-	-	80	-	-	25	-
4	-	80	-	-	80	-	-	75	-	-	25	-
5	-	25	-	-	75	-	-	75	-	-	25	-
6												
7	-	-	20	-	-	50	-	-	25	-	-	25
8	-	-	20	-	-	75	-	-	20	-	-	20
9	-	-	20	-	-	20	-	-	20	-	-	20
10	-	-	20	-	-	50	-	-	0	-	-	20
Gr (n)	77,50	52,50	20	100	77,50	48,75	77,50	75	16,25	50	25	21,25
	Alta	Interm.	Baja	Compl.	Alta	Interm.	Alta .	Alta	Baja	Interm.	Baja	Baja

Ítem	Pavel			Cristina			Jair		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	25	-	-	100	-	-	25	-	-
2									
3	-	80	-	-	80	-	-	25	-
4	-	25	-	-	25	-	-	25	-
5	-	50	-	-	50	-	-	25	-
6									
7	-	-	25	-	-	25	-	-	20
8	-	-	20	-	-	20	-	-	20
9	-	-	20	-	-	20	-	-	25
10	-	-	25	-	-	0	-	-	0
Gr (n)	52,50	37,50	22,50	90	37,50	16,25	25	25	16,25
	Interm.	Baja	Baja	Compl.	Baja	Baja	Baja	Baja	Baja

VECTORES RESULTANTES

Alumno	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	N° de errores
Rosemary	100	87,50	68,75	-
Débora	52,50	77,50	48,75	1
Valerie	87,50	35	30	-
Alonso	77,50	52,50	20	-
Cesia	100	77,50	48,75	-
Elizabeth	77,50	75	16,25	-
Enzo	50	25	21,25	-
Pavel	52,50	37,50	22,50	-
Cristina	90	37,50	16,25	-
Jair	25	25	16,25	-

Anexo 6

Contraste entre los Resultados de la Prueba de Entrada y la Prueba de Salida

Alumno	Nivel 1			Nivel 2			Nivel 3		
	Prueba exploratoria	Prueba de salida	Diferencia	Prueba exploratoria	Prueba de salida	Diferencia	Prueba exploratoria	Prueba de salida	Diferencia
Rosemary	87,50	100	***12,50 %***	87,50	87,50	***0 %***	18,75	68,75	***50 %***
Débora	52,50	52,50	***0 %***	50	77,50	***27,50 %***	12,50	48,75	***36,25 %***
Valerie	62,50	87,50	***25 %***	20	35	***15 %***	21,25	30	***8,75 %***
Alonso	25	77,50	***52,50 %***	22,50	52,50	***30 %***	10	20	***10 %***
Cesia	100	100	***0 %***	77,50	77,50	***0 %***	41,25	48,75	***7,50 %***
Elizabeth	50	77,50	***27, 50 %***	20	75	***55 %***	10	16,25	***6,25 %***
Enzo	22,50	50	***27,50 %***	10	25	***15 %***	15	21,25	***6,25 %***
Pavel	50	52,50	***2,50 %***	25	37,50	***12,50 %***	21,25	22,50	***1,25 %***
Cristina	50	90	***40 %***	10	37,50	***27,50 %***	5	16,25	***11,25 %***
Jair	25	25	***0 %***	22,50	25	***2,50 %***	16,25	16,25	***0 %***
Promedios	57,13 %	71,25 %		34,50 %	53 %		17,13 %	28,63	
Gr	**Interm.**	**Alta**		**Baja**	**Interm.**		**Baja**	**Baja**	