PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE GRADUADOS

UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL, DIRIGIDA A ESTUDIANTES DE LAS CARRERAS DE HUMANIDADES

TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

QUE PRESENTA:
ELIZABETH MILAGRO ADVÍNCULA CLEMENTE

ASESOR DE TESIS:
DR. ULDARICO MALASPINA

MIEMBROS DEL JURADO:
MARIANO GONZALEZ
ULDARICO MALASPINA
NORMA RUBIO

LIMA, 2010

A la memoria de mi querida madre.

A mis queridos padre y hermano

por su apoyo incondicional.

ÍNDICE

ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación surge a partir de mi preocupación por contribuir con la enseñanza de la Matemática, en particular con la enseñanza de la Matemática dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades, quienes tienen en su plan de estudio un curso de Matemática que cumple un papel formativo fundamental, considerando las exigencias y demandas de la sociedad en la que nos encontramos. El curso requiere especial atención, máxime teniendo en cuenta el poco gusto por el estudio de esta materia y de las dificultades que presentan muchos alumnos de humanidades para aprender los conceptos matemáticos.

La propuesta de este trabajo parte de una reflexión sobre mi tarea docente, en la que se requiere tener presente que se aprende matemática haciendo matemática; es decir, en la interacción activa del alumno con el saber matemático a través de la resolución de problemas, de modo que los estudiantes construyan los conceptos matemáticos. También es parte de esta reflexión tener presente que la enseñanza de la Matemática en la universidad, en particular en las carreras de humanidades, dentro de un marco de interdisciplinariedad, busca vincular esta materia no solo con las otras materias de estudio sino también con la tecnología y la cultura de nuestra sociedad, convirtiéndose en una herramienta útil para resolver problemas cotidianos.

En este trabajo, específicamente, me interesa el estudio de la función exponencial por dos razones. La primera, debido a la importancia que tiene la presencia de esta función dentro del campo de las Matemáticas y fuera de ella, en aplicaciones que modelan fenómenos reales vinculados con la economía, la medicina, la química o la física, como son el crecimiento de algunas poblaciones, la inflación, la capitalización de una cantidad de dinero colocado a un interés compuesto, la desintegración de una sustancia radiactiva, etc. La segunda, debido a las dificultades que presentan los estudiantes de las carreras de humanidades para aprender este concepto.

A través de este trabajo pretendo poner de manifiesto la importancia que debería tener la dimensión didáctica en la enseñanza de la Matemática; es decir, la importancia que se le debe asignar al uso de una teoría didáctica al proponer alternativas de enseñanza para esta materia. Por ello, la propuesta de este trabajo se basa en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, en la que se propone una situación didáctica que permita, en la interacción entre alumno, concepto matemático y docente, que los estudiantes participen y construyan el concepto de la función exponencial. Resaltando que es el docente el encargado de crear las condiciones adecuadas que favorezcan el aprendizaje del concepto de función exponencial por parte de los alumnos, a través de actividades individuales o grupales que promuevan la participación activa de los mismos en la construcción de dicho conocimiento, respondiendo a los retos y demandas de nuestra universidad y de la sociedad al exigir profesionales altamente calificados.

El presente trabajo tiene por objetivo general proponer una situación didáctica que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial. Para ello, los objetivos específicos son: diseñar una situación didáctica basada en la teoría de situaciones didácticas; elaborar el análisis a priori de la situación didáctica diseñada para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades, utilizando la ingeniería didáctica; realizar la experimentación en aula de la situación didáctica diseñada para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades; y finalmente, rediseñar la situación didáctica diseñada originalmente, teniendo en cuenta el análisis a priori y los resultados de la experimentación en aula de dicha situación, de modo que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial.

Este trabajo consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo, se presenta el problema de investigación que incluye los antecedentes, la definición del problema, los objetivos e hipótesis de investigación. En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico y la metodología de investigación utilizada, el marco teórico que está basado en la teoría de situaciones didácticas propuesto por Brousseau y la metodología de investigación que es la ingeniera didáctica. En el tercer capítulo, se presenta la situación didáctica propuesta para la enseñanza de la función exponencial dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades, que incluye el análisis preliminar, la concepción de la situación didáctica, el análisis a priori, la experimentación en aula y la situación didáctica modificada que es la propuesta de este trabajo. En el cuarto capítulo, se presentan las conclusiones de la investigación y algunas recomendaciones que podrían ser parte de futuros trabajos de investigación.

Finalmente, espero que este trabajo sea un punto de referencia para otros trabajos de investigación similares en los que se reconozca la importancia de utilizar una teoría didáctica que respalde las propuestas; y agradezco a todas las personas que me apoyaron, en especial al profesor Uldarico Malaspina por su asesoría y apoyo en la elaboración de este trabajo y a la profesora Cecilia Gaita por su apoyo y orientación durante mi investigación.

Capítulo 1:
Problema de investigación

En este capítulo presentaremos los antecedentes de este trabajo de investigación, la definición del problema que le dio origen, así como los objetivos e hipótesis de investigación.

1.1 Antecedentes

La noción de función es de suma importancia en el currículo de Matemática de nuestro país, tanto en el nivel secundario como en el superior. Una muestra de ello es que a partir del concepto de función se articulan todas las nociones fundamentales del cálculo diferencial e integral, así como de otras disciplinas científicas.

Dada la importancia de la noción de función, se registran numerosas investigaciones que muestran que la enseñanza de este concepto, en las etapas iniciales del aprendizaje del cálculo, es problemática. Entre las investigaciones mencionadas se encuentran las realizadas por: Soto (1988); Quiroz (1989); Farfán (1991); Harel y Dubinsky (1992), quienes señalan que la complejidad de la enseñanza de las funciones se refleja en las diversas concepciones y representaciones de este concepto; Trujillo (1995); Albert y Farfán (1997); Cantoral y Farfán (1998); Lezama (1999), quien señala que los estudiantes presentan dificultades para identificar distintas funciones, discriminar sus propiedades, reconocer sus aplicaciones, identificar los fenómenos que modelan, representarlas gráfica, tabular y analíticamente, así como el poder transitar entre dichas representaciones eficientemente; y Maldonado (2005), quien señala que una de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función es la forma aislada en la que los estudiantes reciben los diferentes enfoques y representaciones de este concepto.

Ante esta problemática, cabe tener presente a Eisenberg[1] (1992) quien señala que la función es un concepto crucial en la comprensión de la matemática y desarrollar en los estudiantes una sensibilidad hacia las funciones debería ser un objetivo principal del currículo de la escuela media y universitaria.

En el presente trabajo de investigación, abordaremos el tema de la función exponencial, considerando la dificultad que presentan los estudiantes para entender la noción y el comportamiento de esta función tal como lo señalan De Faria (1997) y Rivera (2009), en sus investigaciones. De Faria (1997), menciona tres dificultades que tienen los estudiantes para construir la noción de esta función: dificultades para elevar números a distintas potencias e interpretar el significado de esas operaciones, dificultades para interpretar la naturaleza y estructura de la función exponencial y dificultades para relacionarla con la función logarítmica. Rivera (2009), en su análisis sobre el comportamiento de la función exponencial $y = a^x$, para valores reales de a, señala que los estudiantes tienen dificultades para representar esta función en forma gráfica, tabular o analítica; las mismas que presentan al estudiar la función $f(x) = e^{ax}$, para valores de a que pertenecen al campo de los números complejos.

Además, en este trabajo de investigación nos interesa el estudio de la función exponencial debido a la importancia que tiene su presencia dentro del campo de las Matemáticas y también fuera de ella, en aplicaciones que modelan fenómenos reales vinculados con la economía, la medicina, la química o la física, como por ejemplo la reproducción de las bacterias, el crecimiento de algunas poblaciones, la inflación, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, la desintegración de una sustancia radiactiva, etc. Sobre este punto Ferrari (2001), en su estudio sobre una

[1] Tomado de: http://www.fismat.umich.mx/mateduca/Carlos/mem9sem/monsoy/monsoy.htm. Recuperado el 12 de diciembre de 2009.

visión socio epistemológica de la función logaritmo, menciona la necesidad de proponer una alternativa de enseñanza que permita que los estudiantes participen en la construcción del concepto de la función a partir de situaciones que los acerque a algunas de sus aplicaciones; y Lezama (1999), en su estudio sobre el fenómeno de reproducibilidad de la función exponencial, desde la perspectiva socioepistemológica, menciona la necesidad de proponer una situación didáctica que le permita al estudiante dotar de un significado propio y útil al conocimiento que se desea impartir, así como percatarse de que el conocimiento adquirido pueda ser utilizado en la resolución de otros problemas, no solo dentro del campo de las Matemáticas.

1.2 Definición del problema

Desde nuestra experiencia docente en la enseñanza de las funciones, en particular de la función exponencial, con estudiantes de las carreras de humanidades, observamos que en las clases se presentan las dificultades señaladas en las investigaciones citadas anteriormente. A lo mencionado, añadimos que la mayoría de estudiantes asocia la función exponencial con crecimiento, pero tienen dificultades para reconocer esta característica de crecimiento en los problemas, pues la mayoría representa dicho crecimiento con líneas rectas crecientes.

Por otro lado, revisamos algunos textos en los que se presenta la función exponencial para tener información de cómo se desarrolla este tema en dichos textos, lo que incluye observar: cuál es la secuencia de contenidos, cómo se define a la función exponencial, qué propiedades se presentan, qué ejemplos se utilizan para mostrar sus características y qué ejercicios o problemas de aplicación se proponen.

A continuación describimos brevemente lo que encontramos en cada texto ya que, posteriormente, en el análisis preliminar presentado en el capitulo 3 de este trabajo, mostraremos información más detallada sobre esta revisión.

- Advíncula, E., Barrantes, E., Gaita, C., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). Matemáticas para no matemáticos. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

  En este texto, se empieza comentando sobre la presencia de la función exponencial en situaciones reales, tales como el crecimiento de poblaciones, la velocidad de propagación de algún tipo de virus o enfermedad o virus informático, la depreciación del costo de un vehículo a través del tiempo, etc. Luego, se propone una situación problema, cuya solución requiere de una función de tipo exponencial; y se presenta un problema resuelto cuya solución involucra a una función de tipo exponencial.

  También, se presenta la definición de función exponencial, su representación gráfica y se señalan algunas características de esta función.

  Finalmente, se propone una lista de ejercicios y situaciones relacionadas con las aplicaciones de la función exponencial en fenómenos reales.

- Haeussler, S. (2003). Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía. México, D.F.: Pearson Educación.

  En este texto, se empieza comentando algunas aplicaciones de la función exponencial como es la propagación de virus biológicos a través de los organismos o virus de computadoras por medio de redes o correo electrónico. Luego, se presenta la definición de función exponencial, se comenta sobre los valores irracionales que puede tomar x en la expresión 2^x, se les recuerda algunas reglas de los exponentes, y se presenta dos ejemplos resueltos para evaluar funciones exponenciales.

  A continuación, se presenta las gráficas de funciones exponenciales a partir de dos ejemplos con bases diferentes, se describe las características de los gráficos obtenidos, las propiedades fundamentales de la función exponencial, se da algunos ejemplos resueltos en los que se utiliza transformaciones, y otros ejemplos relacionados con interés compuesto y crecimiento poblacional.

Luego, se describe como se realiza las aproximaciones para el número e y se presenta la función exponencial natural con ejemplos de crecimiento poblacional o decaimiento radioactivo.

Después se propone una lista de ejercicios y problemas de modelación con funciones exponenciales. Luego, se desarrolla la función logarítmica.

Por último, se presenta una aplicación más de la función exponencial relacionada con la dosis de medicamento en el organismo de una persona.

- Lima, E., Morgado, A., Pinto, P. y Wagner, E. (2000). La Matemática de la Enseñanza Media. Lima: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines.

En este texto, se presenta la definición de función exponencial, las propiedades de la función exponencial demostrando cada una de ellas. Luego, se grafica funciones exponenciales presentando dos casos.

A continuación, se compara una función exponencial $y = 2^x$ con una función polinómica $y = x^{10}$, utilizando sus respectivos gráficos.

Además, se presenta las características que son propias de una función exponencial relacionadas con la variación relativa que es constante (no depende de x) y con las progresiones.

Posteriormente, se presenta la función logarítmica, la función exponencial de base e y ejemplos relacionados con el capital a interés fijo, desintegración radiactiva y concentración de una solución.

Finalmente, se propone una lista de problemas de modelación.

- Stewart, J. (2001). Precálculo. México D. F.: Thomson

En este texto, se empieza comentando la rapidez con la que crecen los valores de la función $f(x) = 2^x$ y señalando que es apropiada para modelar el crecimiento poblacional. Luego, se define a^x para valores irracionales de x, utilizando aproximaciones con potencia racionales; y se presenta la definición de función exponencial, comentando que pasaría si la base es 1.

Después, se presenta ejemplos para evaluar funciones exponenciales utilizando la calculadora, ejemplos de gráficos de funciones exponenciales y otros ejemplos resueltos en los que se utilizan transformaciones.

Luego, se compara una función exponencial $f(x)=2^x$ con una función cuadrática $g(x)=x^2$, utilizando sus respectivos gráficos.

También, se presenta la función exponencial natural, utilizando ejemplos relacionados con interés compuesto u otros modelos exponenciales. Luego, se propone una lista de ejercicios y problemas de modelación.

Finalmente, se presenta un proyecto de descubrimiento relacionado con el crecimiento exponencial explosivo.

De esta revisión de textos, observamos que en ninguno de ellos se incluye una actividad inicial que permita descubrir la característica propia de la función exponencial y a partir de ella construir el concepto de esta función. En la mayoría de ellos, como en muchos otros, primero se presenta la definición de la función exponencial y luego se comentan algunas características relacionadas con su dominio, su rango, su representación gráfica y su presencia en fenómenos de la realidad.

Por todo lo anterior, surge el interés por diseñar una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades participen en la construcción del concepto de esta función, a partir de situaciones que los acerque a algunas de sus aplicaciones en fenómenos reales y cuyas soluciones requieran necesariamente del uso de esta función.

Por tanto, en el problema de investigación de este trabajo nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué situación didáctica se podría diseñar para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades, de manera que participen en la construcción de dicho conocimiento?
- ¿Qué secuencia didáctica se recomienda seguir para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades, de manera que en la interacción con el profesor y la situación didáctica puedan construir el concepto de la función exponencial?

1.3 Objetivos

El objetivo general del presente trabajo de investigación es proponer una situación didáctica, que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial.

Los objetivos específicos de este trabajo de investigación son:

1. Diseñar una situación didáctica basada en la teoría de situaciones didácticas, que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial.
2. Elaborar el análisis a priori de la situación didáctica diseñada para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades, utilizando la ingeniería didáctica.
3. Realizar la experimentación en aula de la situación didáctica diseñada para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de humanidades.
4. Rediseñar la situación didáctica diseñada originalmente, teniendo en cuenta el análisis a priori y los resultados de la experimentación en aula de dicha situación, de modo que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial.

1.4 Hipótesis

Las hipótesis de este trabajo de investigación son:

1. La experimentación en aula de la situación didáctica diseñada brindará información sobre las estrategias de solución o dificultades que presentan los estudiantes al resolver los problemas propuestos en cada situación.
2. La comparación entre los comportamientos esperados descritos en el análisis a priori y los comportamientos observados en la experimentación en aula de la situación didáctica diseñada originalmente permitirá proponer una situación didáctica a través de la cual los estudiantes de las carreras de humanidades puedan construir el concepto de la función exponencial.

Capítulo 2:
Marco teórico y Metodología de la investigación

2.1 Teoría de situaciones didácticas

El marco teórico de esta investigación se basa en la Teoría de situaciones didácticas, que surgió en Francia a fines del siglo XX y fue concebida por Guy Brousseau bajo una hipótesis sobre la construcción del significado de una noción. Brousseau desarrolló la teoría de las situaciones didácticas basándose en algunas ideas de Piaget, quien considera que un individuo aprende en la medida en que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a su estructura cognitiva a través de un proceso de asimilación y acomodación, en un medio que es factor de desequilibrios y dificultades.

Brousseau (1986), influenciado por el constructivismo, postula que el sujeto aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Es decir, el sujeto produce conocimiento o adquiere un saber como resultado de la adaptación a un medio resistente con el que interactúa y lo manifiesta por medio de respuestas nuevas.

Asimismo, Brousseau (1986) postula que para todo conocimiento matemático existe una situación fundamental cuya problemática permita la emergencia de dicho conocimiento. Es decir, es una situación en la que este conocimiento se constituye en la estrategia óptima para resolver el problema involucrado.

Brousseau (1986) también señala que un medio sin intenciones didácticas es insuficiente para inducir en el alumno los conocimientos culturales que se desea que adquiera. Por ello, postula la necesidad de un medio que sea pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica.

Para Brousseau (2000), una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas de modo explícito o implícito entre el saber matemático, el profesor y el alumno con el objetivo de hacer que el alumno construya un conocimiento previamente establecido. Además, señala que el profesor es el encargado de elaborar el medio didáctico en el que ocurrirá la interacción entre los tres elementos de la situación didáctica de modo que se lleve a cabo la construcción del conocimiento.

La situación didáctica comprende el proceso en el que el docente proporciona el medio didáctico donde el estudiante construye el conocimiento. Además, engloba las situaciones a-didácticas, en las que una vez que el estudiante ha construido el conocimiento, se le plantea un problema diferente a lo trabajado en la situación didáctica, que debe afrontar y resolver sin la intervención del docente.

En esta teoría, una situación es a-didáctica cuando el alumno asume el problema planteado como propio y entra en un proceso de búsqueda autónoma de la solución, sin la intervención directa del profesor. En una situación a-didática no aparece explícita la intención de enseñar, pero dicha intención existe de manera implícita. Para Brousseau (1986), una situación es a-didáctica cuando el alumno tiene la posibilidad de leer sus relaciones con los elementos del sistema didáctico como nuevas situaciones y de ese modo aportar respuestas apropiadas.

Brousseau, en la teoría de situaciones didácticas, señala que en todo proceso de enseñanza se requiere de la participación activa del alumno; es decir, se requiere de la interacción cognitiva del alumno con el objeto de conocimiento que se desea enseñar. Así también, dado que en todo proceso de enseñanza hay una intención de que el alumno se apropie de un saber, señala que durante dicha interacción se requiere una acción y supervisión permanente por parte del profesor.

El alumno construye o adquiere un conocimiento en su adaptación a situaciones didácticas que le son propuestas; es decir, cuando asume personalmente la resolución de los problemas que se proponen en estas situaciones. De allí que el docente debe proponer a los alumnos situaciones que les permitan interactuar con el saber; es decir, que les permitan formular, probar y construir modelos, lenguajes, conceptos y teorías que intercambie con otros.

En el proceso de interacción del alumno con el saber aparece la idea de la devolución. Para Brousseau (1986) la devolución se define como el acto a través del cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (situación a-didáctica) y acepte al mismo tiempo las consecuencias de esta transferencia.

La devolución se da en la comunicación entre el profesor y el alumno frente a un objeto de conocimiento, en ambos sentidos. La devolución es el acto mediante el cual el profesor le devuelve al alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje; es decir, le delega la exploración, la búsqueda y la necesidad de hallar respuestas y de avanzar de manera tal que esto sea aceptado quizás sin ser percibido por el mismo alumno. A su vez, el alumno al involucrarse con el problema, le devuelve al profesor el papel de mediador entre los saberes sociales y los producidos en el aula, produciéndose así el proceso de aprendizaje en ambos sentidos (Ferrari, 2001).

Por otro lado, para la realización de la devolución entre el profesor y el alumno aparecen obstáculos, que según Perrín-Glorian[2] (1997) son:

- Falta de establecimiento de los conocimientos previos, ya sea en lo concerniente a su utilización o ya sea por la posibilidad de una eventual puesta en discusión.
- Falta de confiabilidad de las técnicas operatorias, lo que acarrea una distracción de la atención del objetivo principal y un alto costo para los procedimientos complejos.
- Falta de capacidad para una lectura global del problema para identificar lo que se pide, que comúnmente se sustituye con una lectura selectiva y local con la finalidad de dar una pronta respuesta.

En el acto de devolución de alumno a profesor o viceversa, se debe tener en cuenta la presencia de un contrato pedagógico, que busque reglamentar los cambios entre dos partes tomando para ello un sistema de derechos y deberes recíprocos por un periodo limitado. El cumplimiento de este contrato es un acto que supone un consentimiento mutuo de ambas partes ya que se funda en el enunciado de reglas de juego a las que cada una de ellas debe someterse libremente.

Brousseau plantea las situaciones didácticas como una forma para modelar el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, dentro de la interrelación entre profesor, alumno y medio didáctico, hay dos conceptos que vienen a integrarse: la transposición didáctica y el contrato didáctico. En esta parte nos ocuparemos del contrato didáctico, ya que al igual que la situación a-didáctica es una componente de una situación didáctica.

Para Brousseau (1986), el contrato didáctico es un conjunto de reglas, con frecuencia no enunciadas explícitamente, que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de una clase de Matemática.

[2] Tomado de: Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Brousseau, construye esta noción para explicar las relaciones entre profesores y alumnos, las cuales son condicionadas por un proyecto social exterior a ambos, que se les impone y les da razón de ser; y que además, evoluciona y se transforma a la par de los conocimientos puestos en juego.

Como el profesor de Matemáticas tiene una dimensión social que se le impone, le corresponde lograr el aprendizaje de cada alumno y asegurar la homogeneidad de la construcción de los saberes y su coherencia a nivel de toda la clase. Por ello, todo contrato debe garantizar la devolución pues de no ser así, se producen las rupturas y se hace necesaria la búsqueda de nuevos contratos.

También, podemos decir que el contrato didáctico comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del profesor en la interacción que se da entre ellos. Cabe señalar que las cláusulas de este contrato tienen un carácter implícito y no rigen todos los aspectos de la relación que se da entre el profesor y el alumno, sino solo lo referente a la construcción del conocimiento matemático involucrado.

Por otro lado, dado que la teoría de las situaciones didácticas es una teoría, de tipo constructiva, en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas, y el conocimiento matemático incluye no solo conceptos sino también sistemas de representación simbólica, no solo procesos de desarrollo, sino también validaciones de nuevas ideas matemáticas, debemos considerar las siguientes fases o tipos de situaciones:

Fase de acción, en la que el alumno interactúa con el medio didáctico que favorecerá el surgimiento de teorías implícitas que posteriormente funcionarán como modelos matemáticos. En esta fase el alumno adquiere un modelo implícito, ya que la situación propuesta sugiere que éste tome una decisión o use algún algoritmo con lo que provoca un intercambio de información no codificada. Sin embargo, el alumno puede mejorar su modelo implícito ya que puede actuar sobre la situación problema, evaluar el resultado de su acción y modificarla sin la intervención del profesor, a partir de la información que recibe de la misma situación, y así llegar a la resolución del problema y adquisición del conocimiento.

Fase de formulación, en la que se favorece la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. El uso de un lenguaje explícito permite producir mensajes e intercambiar informaciones codificadas según dicho lenguaje. Es decir, el alumno intercambia información y comunica sus observaciones a sus compañeros, utilizando un vocabulario y un lenguaje matemático común (información codificada). En esta fase, para que el alumno pueda explicitar su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, tiene que necesariamente utilizarla para obtener o hacer obtener a otro compañero un resultado.

Fase de validación, en la que se requiere por parte de los alumnos la explicitación de pruebas; es decir, en la que se requiere explicaciones de las teorías utilizadas y procedimientos seguidos en los procesos de demostración. El conocimiento de las teorías utilizadas permite que el alumno construya sus propios juicios y pueda intercambiarlos.
En esta fase, el alumno debe demostrar ante otros compañeros por qué el modelo que construyó es válido.

Fase de institucionalización, que tiene como objetivo establecer y dar un status oficial al conocimiento que aparece durante la actividad en el aula de clase. Generalmente, se refiere al conocimiento que se debe tener en cuenta para su utilización en un trabajo posterior. La institucionalización consiste en articular los conocimientos que los alumnos ponen en juego en la resolución de problemas, conocimientos que resultan de saberes precedentes que han fracasado en un intento de adaptarse a una situación nueva y que han encontrado una nueva ocasión de uso. De allí que la institucionalización del conocimiento se podría decir que es un proceso complementario al de la devolución, ya que los estudiantes deben cambiar el status de sus conocimientos aún no oficiales al conocimiento utilizable oficialmente. Esta fase cae bajo la responsabilidad del profesor, quien debe presentar los resultados en forma ordenada para lograr pasar de un conocimiento a un saber oficial.

Brousseau (1986) entiende el aprendizaje como adaptación al medio, lo que implica: rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos o concepciones implícitas y cambio de lenguajes o sistemas cognitivos. Estas rupturas son tan necesarias como para tener que ser previstas por el estudio directo de las situaciones e indirectamente por los comportamientos de los alumnos. A partir de estas ideas contradictorias, Brousseau introduce el término obstáculo.

Para Bachelard[3] (1938) la idea de un obstáculo epistemológico debe comprenderse como el efecto limitativo de un sistema de conceptos sobre el desarrollo del pensamiento, y para ello da un listado extenso de los mismos, que impiden que un modo de pensamiento pre-científico conciba asimismo el enfoque científico. Brousseau, retoma las ideas de Bachelard, y considera obstáculos a los errores que no son imprevisibles; es decir, a los errores que no son efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, sino a los que son efecto de conocimientos previos que se revelan falsamente o inadaptados.

Según Brousseau (1986) un obstáculo es un conocimiento que ha sido en determinado momento eficiente para resolver algún tipo de problemas, pero que falla cuando se aplica a otro problema. Debido a su éxito previo en cierto tipo de problemas se resiste a ser modificado o a ser rechazado y se convierte en una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes.

[3] Tomado de: Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría no publicada, Área de educación superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Brousseau[4] distingue tres tipos de obstáculos: de origen ontogenético, de origen didáctico y de origen epistemológico. Los obstáculos ontogenéticos, llamados también obstáculos psicogenéticos, se deben a las características del desarrollo del sujeto; los obstáculos didácticos, resultan de las elecciones didácticas realizadas para establecer la situación de enseñanza; y los obstáculos epistemológicos, están intrínsecamente relacionados con el propio concepto a enseñar.

La superación de un obstáculo implica el diseño de acciones racionales que se concreten en una situación didáctica susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno mediante un proceso dialéctico que le permita confrontar sus concepciones anteriores y recrear el nuevo conocimiento. Es decir, se requiere de situaciones didácticas diseñadas de modo tal que los alumnos sean conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y puedan lograrlo.

En la teoría de situaciones didácticas, otro elemento importante es la variable didáctica, que puede ser modificada por el profesor y que afecta a la jerarquía de las estrategias de la solución que sigue el alumno, sea por el costo, por la validez, por la complejidad, etc. (Brian[5], 1996). En otras palabras, las variables didácticas son elementos, de la situación didáctica, que el profesor modifica con la finalidad de provocar un cambio de estrategia en el alumno y de esa manera este pueda llegar al saber deseado. De allí que resulta esencial la elección y gestión de variables didácticas por parte del profesor, al igual que la identificación de los obstáculos inherentes al conocimiento.

Asimismo, es importante tener en cuenta que uno de los principales problemas de investigación de la teoría de situaciones didácticas es el estudio de las condiciones

---

4 Tomado de: http://s3.amazonaws.com/lcp/didactica24/myfiles/teoria_situaciones-1-.pdf. Recuperado el 20 de diciembre de 2009.

5 Tomado de: Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada. Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones e Intercambio Científico, Jaén España.

en las cuales se constituye el saber matemático, a fin de lograr que estas sean las más favorables para la enseñanza aprendizaje del concepto matemático en cuestión y puedan ser reproducidas en distintas situaciones de enseñanza escolar. El estudio de las condiciones o fenómenos que ocurren dentro del aula durante el proceso de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático, incluye el análisis de los conocimientos impartidos, la forma en la cual se enseña, la forma mediante la cual aprenden los alumnos y las posibles restricciones bajo las cuales se llevan a cabo las actividades propuestas.

En este trabajo de investigación, la situación didáctica propuesta ha sido diseñada buscando las condiciones favorables para que los alumnos puedan construir y adquirir los conceptos relacionados con la función exponencial.

2.2 Ingeniería didáctica

En este trabajo se empleará como metodología de investigación la Ingeniería didáctica, que surge en Francia a principios de los años ochenta, como una metodología asociada a la teoría de Situaciones didácticas de Brousseau (1997) y a la teoría de la Transposición didáctica de Chevallard (1991).

El nombre de ingeniería didáctica surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue (1998, p. 33), para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.

El término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo de investigación, la ingeniería didáctica se utilizará como metodología de investigación.

Sobre la ingeniería didáctica como producción de situaciones de enseñanza, Douady[6] (1996, p. 241) señaló que:

> "el *término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para lograr un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático, dado para un grupo específico de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase*".

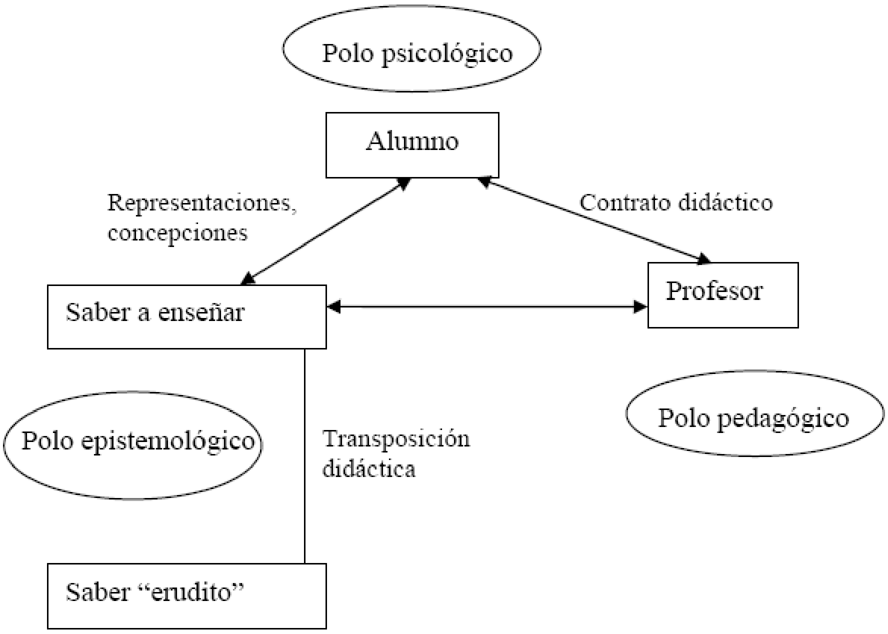
Artigue (1998, p. 40) distingue tres dimensiones relacionadas con los procesos de construcción de la ingeniería didáctica: la dimensión epistemológica, asociada a las características del saber puesto en funcionamiento; la dimensión cognitiva, asociada a las características cognitivas de los alumnos a quienes se dirige la enseñanza; y la dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

La ingeniería didáctica es una metodología que tiene como referentes a la teoría de Situaciones didácticas de Brousseau (1997) y a la teoría de la Transposición didáctica de Chevallard (1991), ya que ambas tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre el saber, el

---

6 Tomado de: Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1998). Ingeniería didáctica en educación matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

sistema educativo y el alumno, mostrado en el siguiente esquema[7], con el objetivo de optimizar los modos de apropiación del saber por parte del alumno (Brousseau, 1997).



En este esquema, cabe señalar que Chevallard (1991) lo denomina sistema didáctico, siendo de su interés el estudio de la transposición didáctica, que es un proceso de adaptación en el que el saber erudito pasa a ser un saber a enseñar, luego de ser validado por una noosfera que le confiere el status de conocimiento al ser aprobado en la escuela; con la finalidad de evitar que la enseñanza transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos que constituyen el saber que se desea enseñar.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza, en primer lugar, por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en el aula, que incluye la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. En segundo lugar, basada en la experimentación en clase, se caracteriza por

[7] Tomado de: De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 1, Número 2. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Universidad de Costa Rica. Asociación de Matemática Educativa.

ubicarse en el registro de los estudios de caso y por su validación, esencialmente interna, teniendo en cuenta la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

Dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación, se distinguen dos niveles para la ingeniería didáctica: nivel de micro-ingeniería y nivel de macro-ingeniería. Las investigaciones al nivel de micro-ingeniería son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema, son locales y toman en cuenta la complejidad de los fenómenos en el aula. Las investigaciones a nivel de macro-ingeniería son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Ambos niveles son importantes y se complementan, sin embargo, las investigaciones de micro-ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, mientras que las de macro-ingeniería implican dificultades metodológicas e institucionales.

El presente trabajo de investigación se ubica en el nivel de micro-ingeniería ya que solo nos interesa observar y analizar la complejidad de los fenómenos que se dan en el aula de clase al enseñar la función exponencial.

Por otro lado, la Ingeniería didáctica como metodología de investigación presenta las siguientes fases[8]:

Análisis preliminar. En esta fase luego de definir los objetivos específicos de la investigación, se analizan y determinan cada uno de los elementos del sistema didáctico así como las relaciones que existen entre ellos, para lo cual se toma en cuenta tres componentes: el componente cognitivo, el componente didáctico y el componente socio-cultural. Este análisis incluye: el conocimiento matemático que se desarrolla en

[8] Tomado de: Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1998). Ingeniería didáctica en educación matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica

las escuelas y el devenir de este saber (componente epistemológico), las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos a los que se deben enfrentar y superar para apropiarse de las nociones puestas en escena por la situación implementada (componente cognitivo), cómo vive el contenido matemático dentro de la escuela y los efectos que ocasiona (componente didáctico).

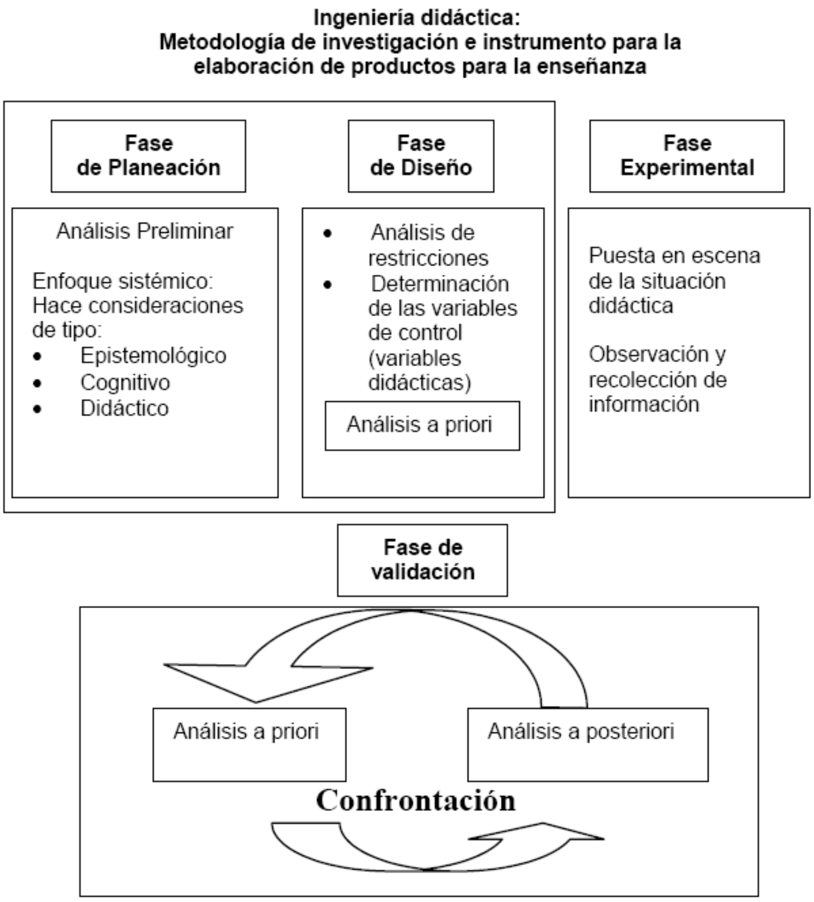
Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. En esta fase se eligen las variables didácticas que serán modificadas y la forma en que serán controladas y manipuladas. En esta fase, también, se elaboran las hipótesis de trabajo considerando los resultados que se esperan de la interacción de los alumnos con la situación didáctica diseñada al tratar de resolverla. Es decir, en esta fase se intenta predecir el comportamiento y la forma de conducirse de los alumnos al enfrentarse a la situación diseñada. Luego de determinar las variables didácticas, y teniendo claro el objetivo, se diseña una situación didáctica que sea capaz de crear un medio adecuado para que el alumno pueda actuar y se sienta desafiado a apropiarse del saber matemático que se desea.

Experimentación. En esta fase se procede a la puesta en aula de la situación didáctica diseñada, en condiciones que deben ser estrictamente controladas por el investigador. En esta fase es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la siguiente fase.

Análisis a posteriori y validación. En esta fase se hace una exhaustiva revisión de los sucesos ocurridos durante la experimentación en aula de la situación didáctica diseñada. Asimismo, se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida fueron alcanzadas las expectativas o cuán alejadas están de los resultados observados.

De estas fases, se deducen dos aspectos relevantes: la precisión que se debe tener en el análisis preliminar y el estricto control que se debe ejercer durante la experimentación.

A continuación mostramos de forma esquemática la relación entre las fases de la ingeniería didáctica según Lezama (2003), quien considera a la ingeniería como metodología de investigación e instrumento para la elaboración de productos para la enseñanza.



En este trabajo de investigación solo se desarrollarán las dos primeras fases de la Ingeniería didáctica, pues el objetivo es proponer una situación didáctica que permita que los estudiantes de las carreras de humanidades construyan el concepto de la función exponencial. Sin embargo, se realizará una experimentación en aula de la situación didáctica diseñada, con estudiantes de las carreras de humanidades, a fin de observar el comportamiento de los alumnos al intentar resolver los problemas propuestos y luego con esta información rediseñar la situación didáctica original.

Capítulo 3:
Situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades

3.1 Análisis preliminar

En el análisis preliminar de este trabajo se incluirá el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza de la función exponencial, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, teniendo en cuenta los objetivos del trabajo de investigación. Este análisis incluye tres dimensiones: la dimensión epistemológica, asociada a las características propias de la función exponencial que se quiere enseñar; la dimensión cognitiva, asociada a las características cognitivas de los estudiantes de las carreras de humanidades; y la dimensión didáctica, asociada a las características del sistema de enseñanza en la Facultad de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

a. Análisis epistemológico

Considerando que el objetivo de la situación didáctica es que el estudiante construya la noción de la función exponencial, es indispensable que a partir de ella emerjan las características propias de esta función, como su monotonía e inyectividad, de modo que permita al estudiante diferenciarla de otras funciones.

En este análisis tomaremos en cuenta la revisión de algunos textos utilizados en la enseñanza de la función exponencial dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades y las dificultades epistemológicas encontradas en otras investigaciones relacionadas con esta función.

Revisión de textos

En este análisis incluiremos la revisión de cuatro textos que son utilizados en la enseñanza de la función exponencial dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades, con la finalidad de conocer las definiciones y propiedades que presentan sobre esta función. Estos textos son:

- Texto 1:
  Advíncula, E., Barrantes, E., Gaita, C., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). Matemáticas para no matemáticos. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Texto 2:
  Haeussler, S. (2003). Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía. México, D.F.: Pearson Educación.
- Texto 3:
  Lima, E., Morgado, A., Pinto, P. y Wagner, E. (2000). La Matemática de la Enseñanza Media. Volumen 1. Lima: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines.
- Texto 4:
  Stewart, J. (2001). Precálculo. México D. F.: Thomson.

A continuación mostramos información detallada sobre la definición y propiedades de la función exponencial tal como se presentan en cada uno de los textos revisados.

- **Texto 1:**

Advíncula, E., Barrantes, E., Gaita, C., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). Matemáticas para no matemáticos. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

En este texto, sobre la función exponencial se presenta una definición, algunas características y su representación grafica, tal como se muestra a continuación.

Definición

¿Qué es una función exponencial?

Una función exponencial es una correspondencia de variable real y de valor real definida por:

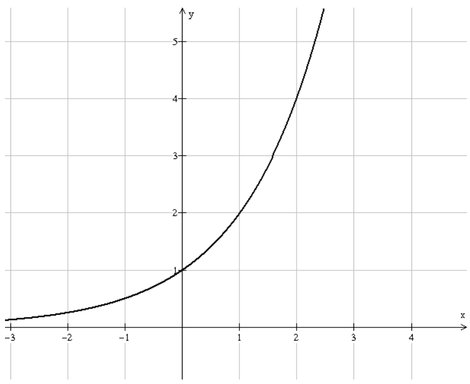
$$f : \Re \rightarrow \Re$$
$$x \mapsto f(x) = Ka^x$$

donde $a > 0, a \neq 1$; Dom(f) = $\Re$ y K es una constante positiva.

Si se considera $K = 1$, se pueden presentar los siguientes casos, de acuerdo con el valor que tome la constante a.

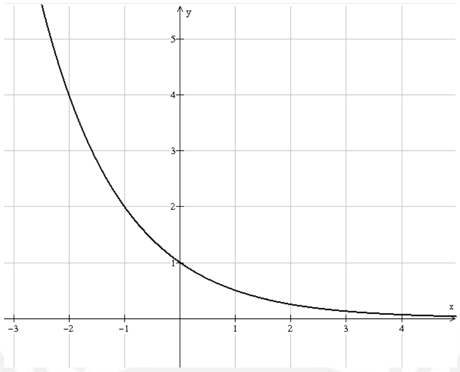
Caso 1: Si $a > 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente.

Se analizará, a manera de ejemplo, $f(x) = 2^x$



Caso 2: Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente.

Se analizará, a manera de ejemplo, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



En ambos casos, según las gráficas, se observa que el dominio de f es $\Re$.

- **Texto 2:**

Haeussler, S. (2003). Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía. México, D.F.: Pearson Educación.

En este texto, sobre la función exponencial se presenta una definición, algunas características, su representación gráfica, sus principales propiedades y la definición de función exponencial con base e, tal como se muestra a continuación.

Definición

La función f definida por

$$f(x) = b^x$$

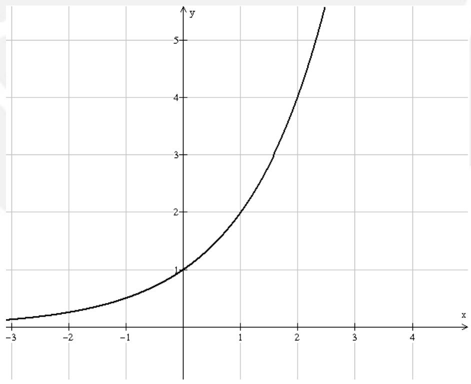
donde $b > 0, b \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se llama función exponencial con base b.

Observación. Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$ conocida como función constante.

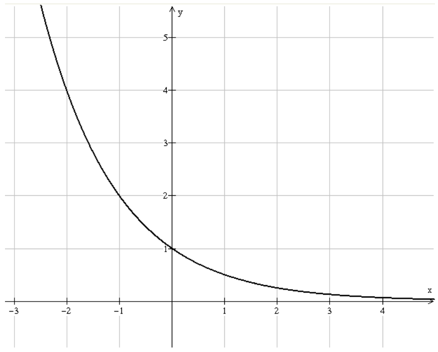
Graficas de funciones exponenciales

Existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales y dependen de la base involucrada.

Si $b > 1$, la gráfica de $f(x) = b^x$ asciende de izquierda a derecha.



Si $0 < b < 1$, la gráfica de $f(x) = b^x$ desciende de izquierda a derecha.



Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

1. El dominio de una función exponencial consiste de todos los números reales.

   El rango consiste de todos los números positivos.
2. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene intersección con el eje Y en (0; 1).

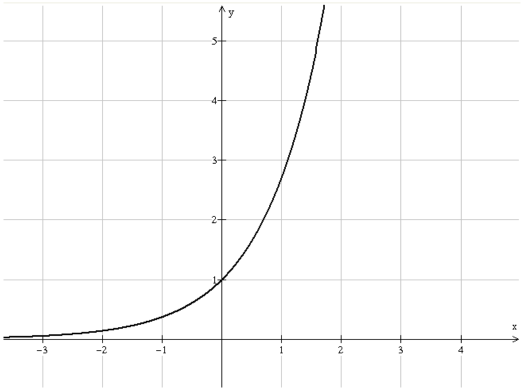
   No hay intersección con el eje X.
3. Si $b > 1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha.

   Si $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha.
4. Si $b > 1$, la gráfica se acerca al eje X conforme x se vuelve más y más negativa.

   Si $0 < b < 1$, la gráfica se acerca al eje X y x se vuelve más y más negativa.

Función exponencial con base e

El número $e \approx 2{,}718281828459$ donde la aproximación dada es correcta hasta 12 decimales, se usa como la base para una función exponencial. La función exponencial con base e se conoce como función exponencial natural.



- **Texto 3:**

  Lima, E., Morgado, A., Pinto, P. y Wagner, E. (2000). La Matemática de la Enseñanza Media. Volumen 1. Lima: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines.

En este texto, sobre la función exponencial se presenta una definición, sus principales propiedades, su representación gráfica, su característica fundamental y su relación con las progresiones aritmética y geométrica, tal como se muestra a continuación.

Definición

Sea a un número real positivo, que supondremos siempre diferente de 1. La función exponencial de base a, $f:\Re \to \Re^+$, indicada por la notación $f(x)=a^x$, debe ser definida de modo que tenga las siguientes propiedades, para cualquier $x, y \in \Re$:

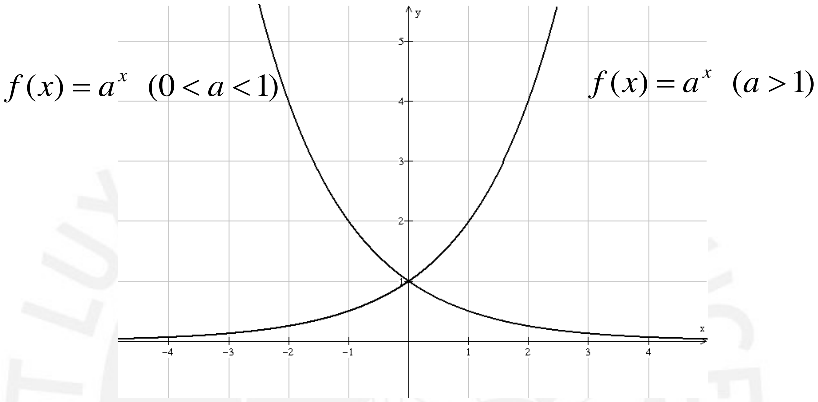
1. $a^x.a^y = a^{x+y}$
2. $a^1 = a$
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ cuando $a > 1$

   $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ cuando $0 < a < 1$

Definida a^x, para todo $x \in \Re$, que cumple las propiedades anteriores, también cumple las siguientes propiedades:

4. La función $f : \Re \to \Re^+$ definida por $f(x) = a^x$, es ilimitada superiormente.
5. La función exponencial es continua.
6. La función exponencial $f : \Re \to \Re^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, es sobreyectiva.

En la siguiente figura se muestra el gráfico de $f(x) = a^x$ en los casos $a > 1$ y $0 < a < 1$.



Caracterización de la función exponencial

Teorema. Sea $f : \Re \to \Re^+$ una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in Z$ y todo $x \in \Re$.
2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \Re$, donde $a = f(1)$.
3. $f(x + y) = f(x).f(y)$, para cualquier $x, y \in \Re$.

Observación. El teorema de la caracterización puede ser enunciado de modo diferente, sustituyendo la hipótesis de monotonicidad por la suposición de que f sea continua.

En general, se dice que una función $g:\Re\to\Re$ es de tipo exponencial cuando se tiene que $g(x)=ba^x$ para todo $x\in\Re$, donde a,b son constantes reales positivos. Si $a>1$, g es creciente y si $0<a<1$, g es decreciente.

Si la función $g:\Re\to\Re$ es de tipo exponencial, entonces para cualquier $x,h\in\Re$, los cocientes:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=a^h-1 \quad \text{y} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)}=a^h$$

dependen de h, y no de x.

Observación. También se cumple la recíproca que se muestra en el siguiente teorema.

Teorema. Sea $g:\Re\to\Re^+$ una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente) tal que, para cada $x,h\in\Re$ cualesquiera, el incremento relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h, y no de x. Entonces, si $b=g(0)$ y $a=\frac{g(1)}{g(0)}$, se tiene $g(x)=ba^x$ para todo $x\in\Re$.

Funciones exponenciales y progresiones

Sea $f:\Re \to \Re$ tal que $f(x) = ba^x$ una función de tipo exponencial.

Si $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ es una progresión aritmética de razón h, estos es, $x_n = x_{n-1} + h$, entonces los valores

$$f(x_1) = ba^{x_1},\ f(x_2) = ba^{x_2},\ f(x_3) = ba^{x_3},\ \dots,\ f(x_n) = ba^{x_n},\ \dots$$

forman una progresión geométrica de razón a^h pues

$$f(x_2) = ba^{x_2} = ba^{x_1+h} = ba^{x_1}a^h = f(x_1)\,a^h$$

$$f(x_3) = ba^{x_3} = ba^{x_2+h} = ba^{x_2}a^h = f(x_2)\,a^h$$

.

.

$$f(x_{n-1}) = ba^{x_{n-1}} = ba^{x_{n-2}+h} = (ba^{x_{n-2}})\,a^h = f(x_{n-2})\,a^h$$

$$f(x_n) = ba^{x_n} = ba^{x_{n-1}+h} = (ba^{x_{n-1}})\,a^h = f(x_{n-1})\,a^h$$

En conclusión, como el n-ésimo término de la progresión aritmética dada es $x_n = x_1 + nh$, el n-ésimo término de la progresión geométrica se puede escribir de la forma $f(x_n) = f(x_1)(a^h)^n$.

En particular, si $x_1 = 0$, entonces $f(x_1) = ba^0 = b$. Además, si $A = a^h$, la progresión geométrica está dada por:

$$b,\ bA,\ bA^2,\ \dots,\ bA^n,\ \dots$$

Esta propiedad es característica de las funciones de tipo exponencial, de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema. Sea $f:\Re \to \Re^{+}$ una función monótona inyectiva, esto es, creciente o decreciente, que transforma toda progresión aritmética $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ es una progresión geométrica $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$ Si ponemos $b = f(0)$ y $a = f(1)/f(0)$ para todo $x \in \Re$.

Función exponencial con base e

La función exponencial con base e es una función $f:\Re \to \Re$ de la forma $f(x) = be^{ax}$.

- **Texto 4:**

  Stewart, J. (2001). Precálculo. México D. F.: Thomson.

En este texto, sobre la función exponencial se presenta una definición, algunas características, su representación gráfica y la función exponencial natural, tal como se muestra a continuación.

Definición

La función exponencial con base a se define para todos los números reales x por

$$f(x) = a^{x}$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Observación. Se supone que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^{x} = 1$ es una función constante.

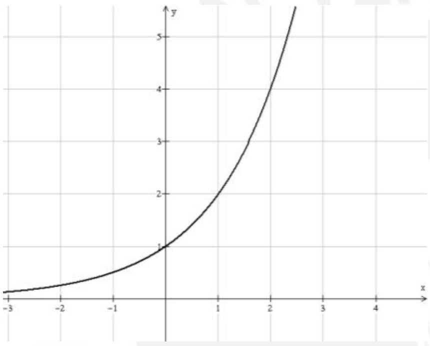
Gráficas de funciones exponenciales

La función exponencial

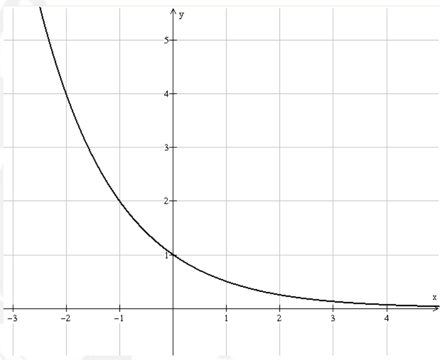
$$f(x) = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

tiene dominio $\Re$ y rango $]0;\infty[$. La recta $y = 0$ (eje X) es una asíntota horizontal de f.

La gráfica de f tiene una de las formas siguientes:



$f(x) = a^x$ para $a > 1$



$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

Función exponencial natural

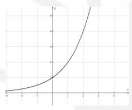
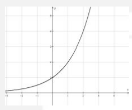
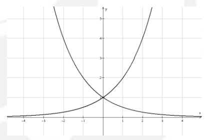
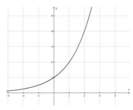
La función exponencial natural es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

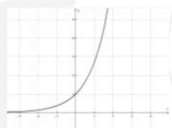
con base e. Es común referirse a ella como la función exponencial.

Comentarios sobre la revisión de textos

Luego de la revisión de los cuatro textos señalados anteriormente presentamos un cuadro resumen que nos permitirá comparar la información encontrada en cada uno de ellos, considerando cuatro aspectos: definición, representación gráfica, propiedades y otras definiciones.

Aspectos	**Texto 1**	**Texto 2**	**Texto 3**	**Texto 4**
Definición	$f:\Re \to \Re$ $x \mapsto f(x) = Ka^x$ $a > 0,\ a \neq 1,$ $K > 0$	$f(x) = b^x$ $b > 0,\ b \neq 1, x \in \Re$	$f(x) = a^x$ $a > 0,\ a \neq 1,$ $x \in \Re$	$f(x) = a^x$ $a > 0,\ a \neq 1$
Representación gráfica	Caso 1: $a > 1$  $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente. Caso 2: $0 < a < 1$  $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente.	Si $b > 1$:  La gráfica de $f(x) = b^x$ asciende de izquierda a derecha. Si $0 < b < 1$:  La gráfica de $f(x) = b^x$ desciende de izquierda a derecha.	La función $f(x) = a^x$ presenta dos casos: $a > 1$ y $0 < a < 1$. $f(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$ $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ 	$f(x) = a^x$ para $a > 1$  $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ 

Propiedades	No se menciona ninguna propiedad.	• El dominio es $\Re$. • El rango es $\Re^+$. • La gráfica de $f(x)=b^x$ interseca al eje Y en (0; 1). Pero no interseca al eje X. • Si $b>1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha. Si $0<b<1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha. • Si $b>1$, la gráfica se acerca al eje X conforme x se vuelve más negativa. Si $0<b<1$, la gráfica se acerca al eje X conforme x se vuelve más negativa.	Para $x,y\in\Re$. • $a^x.a^y=a^{x+y}$ • $a^1=a$ • Cuando $a>1$ $x<y \Rightarrow a^x<a^y$ Cuando $0<a<1$ $x<y \Rightarrow a^x>a^y$ • La función $f:\Re\to\Re^+$, $f(x)=a^x$, es ilimitada superiormente. • La función exponencial es continua. • La función exponencial $f:\Re\to\Re^+$, $f(x)=a^x$, $a\neq 1$, es sobreyectiva. **Caracterización de una función exponencial** • Si la función $g:\Re\to\Re$ es de tipo exponencial, para $x,h\in\Re$, entonces los cocientes: $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=a^h-1$ y $\frac{g(x+h)}{g(x)}=a^h$ no dependen de x, solo de h.	No se menciona ninguna propiedad.

			• Dada la función $f:\Re \rightarrow \Re$, $f(x)=ba^{x}$ de tipo exponencial, si $x_1;x_2;x_3...$ forman una progresión aritmética de razón h, entonces $f(x_1);f(x_2);f(x_3)...$ forman una progresión geométrica de razón a^{h}.	
Otras definiciones	No se presenta ninguna definición adicional.	Función exponencial con base e, $e \approx 2{,}718281828459$ 	Función exponencial con base e $f(x)=be^{ax}$	Función exponencial natural $f(x)=e^{x}$

Con la información encontrada en la revisión de textos y considerando los cuatro aspectos indicados en el cuadro anterior, señalamos lo siguiente:

1. Sobre la definición de función exponencial, solo en los textos 1 y 3 se presenta una regla de correspondencia para definir a esta función, con una diferencia en el orden de aparición. En el texto 1, se define la función exponencial de la forma $f(x)=Ka^{x}$, al empezar el tema; mientras que en el texto 3, primero se define la función exponencial de la forma $f(x)=a^{x}$, y luego se generaliza a la forma $f(x)=ba^{x}$. En los otros dos textos, solo se presenta la definición sencilla de la forma $f(x)=a^{x}$. Sobre este aspecto, creemos que en los textos se empieza presentando la definición de la forma $f(x)=a^{x}$ para facilitar la comprensión de las características de esta función por parte de los alumnos; sin embargo, consideramos importante presentar la forma general de una

función exponencial, tal como $f(x) = C\,a^{kx}$, pues es la forma que aparece con mayor frecuencia en los problemas que modelan fenómenos de la realidad.

2. Sobre la representación gráfica, en todos los textos se presentan dos casos para graficar a una función exponencial, y estos se muestran a partir de ejemplos específicos con diferentes bases. Sobre este aspecto, consideramos pertinente primero utilizar ejemplos sencillos para graficar funciones exponenciales que muestren los dos casos posibles, que involucran bases mayores que 1 y bases entre 0 y 1; y luego generalizar estas formas en dos casos.

3. Sobre las propiedades, solo en los textos 2 y 3 se enuncian las principales propiedades de una función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, con algunas diferencias en cuanto a la inclusión de demostraciones. En el texto 2 se presentan las características relacionadas con su continuidad y su comportamiento estrictamente creciente o decreciente, sin incluir demostraciones; mientras que en el texto 3 se presentan las mismas características, pero se agregan algunas demostraciones. En el texto 3, también se presenta la característica propia de la función exponencial, relacionada con la variación porcentual constante y las progresiones, que consideramos importante comentar.

4. Sobre la función exponencial y la variación porcentual

   Si $g : \Re \to \Re$ es una función de tipo exponencial de la forma $g(x) = ba^x$, entonces, para cualquier $x, h \in \Re$, los cocientes:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{y} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

   dependen de h, y no de x.

Consideramos importante señalar que en esta definición, si h representa un incremento constante que se da en la variable x, entonces $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ representa una variación porcentual (incremento o disminución) constante pues

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=\frac{ba^{(x+h)}-ba^{x}}{ba^{x}}=\frac{ba^{x}(a^{h}-1)}{ba^{x}}=a^{h}-1,$$

donde h es una constante real.

Asimismo, consideramos importante tener presente la forma del cociente $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$, ya que posteriormente aparecerá en el diseño de la situación didáctica como variación porcentual, definida de la siguiente manera:

$$\%Variación=\frac{Cantidad\ final-Cantidad\ inicial}{Cantidad\ inicial}\cdot 100\%$$

5. Sobre la función exponencial y las progresiones

Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ una función de tipo exponencial de la forma $f(x)=ba^{x}$. Si $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ forman una progresión aritmética de razón h, entonces $f(x_1),f(x_2),f(x_3),...,f(x_n)$ forman una progresión geométrica de razón a^{h}.

Consideramos importante reconocer que si h es la razón de la progresión aritmética: $x_1,x_2,x_3,...,x_n$, esta progresión se puede escribir de la forma:

$$x_1,x_1+h,x_2+h,...,x_{n-1}+h,\ \text{donde}\ x_k=x_{k-1}+h,\ \text{para}$$

$k=2,3,...,n$

o de la forma: $x_1,x_1+h,x_1+2h,...,x_1+nh$, donde $x_n=x_1+nh$, para $k=2,3,...,n$ lo que posteriormente permitirá reconocer que a^{h} es la razón de la progresión geométrica que forman $f(x_1),f(x_2),f(x_3),...,f(x_n)$, pues

$$ba^{x_1},ba^{x_2},ba^{x_3},...,ba^{x_n}$$

se puede escribir de la forma:

$$ba^{x_1}, ba^{x_1+h}, ba^{x_2+h}, ..., ba^{x_{n-1}+h}$$

o de la forma:

$$ba^{x_1}, ba^{x_1+h}, ba^{x_1+2h}, ..., ba^{x_1+nh}$$

que también es equivalente a: $ba^{x_1}, (ba^{x_1})a^h, (ba^{x_1+h})a^h, ..., (ba^{x_1+(n-1)h})a^h$, donde a^h es una constante real.

También, consideramos importante tener presente que h y a son valores reales constantes. Por ello, al formar la progresión aritmética $x_1, x_1+h, x_2+h, ..., x_{n-1}+h$, donde cada término (a partir del segundo) se obtiene sumando la constante h (razón aritmética) al término anterior, los valores de la función f forman la siguiente progresión geométrica $f(x_1), f(x_1)a^h, f(x_2)a^h, ..., f(x_{n-1})a^h$, donde cada término (a partir del segundo) es el producto del término anterior por la constante a^h (razón geométrica). Es decir,

$$f(x_k) = f(x_{k-1})a^h, \text{ para } k = 2,3,...,n$$

de donde obtenemos: $a^h = \dfrac{f(x_k)}{f(x_{k-1})}$

que también se puede escribir como: $a^h = \dfrac{f(x_{k-1}+h)}{f(x_{k-1})}$, para $k = 2,3,...,n$, que es un valor constante y hace evidente su relación con los resultados expuestos en el punto anterior.

Cabe señalar que este enfoque de las progresiones es muy útil en el análisis de las situaciones con variación discreta.

Finalmente, consideramos importante tener presente que a^h es un valor constante que aparecerá en el diseño de la situación didáctica asociado a la razón $\dfrac{Cantidad\ final}{Cantidad\ inicial}$ que es parte de la definición de variación porcentual, pues

$$\%Variación = \frac{Cantidad\ final - Cantidad\ inicial}{Cantidad\ inicial} \cdot 100\% = \left(\frac{Cantidad\ final}{Cantidad\ inicial} - 1 \right) \cdot 100\%$$

6. Sobre otras definiciones, en todos los textos, excepto en el texto 1, se presenta una definición para la función exponencial natural o función exponencial con base e, señalando la característica de número irracional para esta base e. En el texto 1, no se presenta una definición para la función $f(x) = e^x$, pero se incluye en los problemas propuestos

7. Tomando en cuenta los puntos 4 y 5, y reconociendo que el objetivo de la situación didáctica diseñada es que el estudiante construya el concepto de la función exponencial, consideramos indispensable que la situación didáctica diseñada en este trabajo permita que el concepto de la función exponencial surja asociada a su característica propia; es decir, que emerja relacionada con la variación porcentual y las progresiones.

Dificultades epistemológicas

En este análisis, incluiremos los resultados de tipo epistemológico ligados a la noción de función y en particular a la noción de función exponencial.

Cantoral y Farfán (1999), señalan que la falta de un dominio del contexto visual en la algoritmia, la intuición y la argumentación constituye una dificultad para el estudiante al transitar entre las diversas representaciones del concepto de función (algebraica, geométrica, numérica, verbal e icónica). Por ello proponen que, previo al estudio del cálculo, es preciso que el estudiante adquiera un lenguaje gráfico que le posibilite la transferencia de campos conceptuales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

Cabe mencionar que desde nuestra experiencia podemos confirmar que la dificultad señalada anteriormente por Cantoral y Farfán, relacionada con la noción y representación de una función, se presenta en el caso particular de la función exponencial.

Respecto a las dificultades epistemológicas que presentan los estudiantes para construir el concepto de función exponencial, tomaremos en cuenta las dificultades que señala De Faria (2006) en su investigación:

- Dificultades para elevar números a distintas potencias y en ocasiones dificultad para interpretar el significado de esas operaciones.
- Dificultades para interpretar la naturaleza y estructura en la función exponencial (estructura creciente, forma de crecimiento y la justificación del trazo continuo de su representación gráfica).
- Dificultades para relacionarla con la función logarítmica.

Sobre las dificultades mencionadas por De Faria, desde nuestra experiencia docente podemos señalar que estas se presentan en la enseñanza de la función exponencial con estudiantes de las carreras de humanidades. La primera dificultad, se presenta cuando los alumnos elevan bases a exponentes que son números racionales o irracionales que deben ser aproximados, o cuando aparece la base e que es un número irracional. La segunda dificultad, se presenta cuando se pide a los alumnos que describan o interpreten el comportamiento de la función exponencial presente en una situación que tiene un contexto real. La tercera dificultad, se presenta históricamente debido a la relación estrecha que existe entre la construcción de la noción de función exponencial y la noción de logaritmo, relación que en muchos casos los alumnos han adquirido de forma incorrecta constituyéndose de esta manera en un obstáculo para el aprendizaje.

Finalmente, respecto al conocimiento que se espera que alcancen los estudiantes de las carreras de humanidades sobre la función exponencial, consideramos que deberían: definir la función exponencial, reconocer su regla de correspondencia, graficarla, entender su comportamiento estrictamente creciente o decreciente y reconocer su importancia en la representación y/o predicción del comportamiento de diversos fenómenos reales relacionados con tasas de crecimiento o decrecimiento constantes, como por ejemplo el crecimiento de algunas poblaciones de seres vivos, el comportamiento de los intereses generados por un préstamo o los intereses acumulados en una cuenta de ahorros, etc.

b. Análisis didáctico

El concepto de la función exponencial es importante en la enseñanza de la Matemática debido a sus múltiples aplicaciones dentro y fuera del campo de la Matemática. Sin embargo, también es uno de los conceptos que presenta mayor dificultad para los estudiantes, tal como lo hemos señalado anteriormente y como también lo comentó Albert A. Bartlett (2005), profesor de Física Nuclear en la Universidad de Colorado en Boulder, al decir que: "La mayor limitación de la raza humana es nuestra incapacidad para entender la función exponencial"[9].

El tema de la función exponencial se encuentra presente en el currículo de Matemática, en los niveles de enseñanza media y superior. En los planes de estudio de las carreras de humanidades, que son nuestro interés, este contenido se encuentra presente en los cursos de Matemática del primer semestre de estudios universitarios. Por ello, en este análisis revisaremos el silabo del curso

[9] Tomado de: http://www.albartlett.org/about_al_bartlett/about_al_bartlett.html. Recuperado el 04 de enero de 2010.

Matemáticas del primer ciclo de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú (Ver anexo 1), en el que la función exponencial se encuentra ubicado en el capítulo 2, luego de haber revisado el concepto de función, sus distintas representaciones, la función lineal y la función cuadrática.

Desde nuestra experiencia podemos comentar que las dificultades que tienen los estudiantes en los procesos de adquisición y comprensión de los conceptos matemáticos, en muchos casos, se deben a la naturaleza de la enseñanza y al maestro. Por tanto, es importante organizar la enseñanza de la función exponencial a partir de tareas que provoquen la reflexión del alumno de forma tal que participe en el descubrimiento del concepto de la función exponencial.

En este análisis incluiremos la revisión de los cuatro textos, incluidos en el análisis epistemológico, pero con un énfasis en la forma en qué se presentan los contenidos relacionados con la función exponencial, considerando tres aspectos: secuencia del contenido, aplicaciones de la función exponencial y uso de recursos tecnológicos.

A continuación mostramos un cuadro resumen que contiene información encontrada en cada uno de los textos revisados.

Aspectos	Texto 1	Texto 2	Texto 3	Texto 4
Secuencia del contenido	• Se empieza comentando sobre la presencia de la función exponencial en situaciones reales, tales como: el crecimiento de poblaciones, la velocidad de propagación de algún tipo de virus o enfermedad o virus informático, la depreciación del costo de un vehículo a través del tiempo, etc. • Se propone una situación problema, cuya solución requiere de una función de tipo exponencial. • Se presenta un problema resuelto cuya solución involucra a una función de tipo exponencial. • Se presenta la definición de función exponencial, su representación gráfica y algunas características.	• Se empieza comentando algunas aplicaciones de la función exponencial como es la propagación de virus biológicos a través de los organismos o virus de computadoras por medio de redes o correo electrónico. Sobre este último caso, se presenta información detallada. • Se presenta la definición de función exponencial, se comenta sobre los valores irracionales que puede tomar x en la expresión 2^x y se recuerdan algunas reglas de los exponentes. • Se presentan dos ejemplos resueltos para evaluar funciones exponenciales.	• Se presenta la definición de función exponencial. • Se presentan las propiedades de la función exponencial demostrando cada una de ellas. • Se grafican funciones exponenciales presentando dos casos. • Se compara una función exponencial $y = 2^x$ con una función polinómica $y = x^{10}$, utilizando sus respectivos gráficos. • Se presenta la característica que es propia de una función exponencial, relacionada con la variación relativa que es constante (no depende de x) y con las progresiones. • Se presenta la función logarítmica.	• Se empieza comentando la rapidez con la que crecen los valores de la función $f(x) = 2^x$, señalando que es apropiada para modelar el crecimiento poblacional. • Se define a^x para valores irracionales de x, utilizando aproximaciones con potencia racionales. • Se presenta la definición de función exponencial comentando que pasaría si la base es 1. • Se presentan ejemplos para evaluar funciones, utilizando la calculadora. • Se presentan gráficos de funciones exponenciales a través de ejemplos resueltos.

	• Se termina el tema con una lista de ejercicios y situaciones relacionadas con aplicaciones de la función exponencial en fenómenos reales.	• Se presentan las graficas de funciones exponenciales, a partir de dos ejemplos con bases diferentes y se describen las características de los gráficos obtenidos. • Se presentan las propiedades fundamentales de la función exponencial. • Se presentan algunos ejemplos resueltos en los que utiliza transformaciones • Se presentan ejemplos relacionados con interés compuesto y crecimiento poblacional. • Se describe como se realizan las aproximaciones para el número e. • Se presenta la función exponencial natural con ejemplos de crecimiento poblacional o decaimiento radioactivo.	• Se presenta la función exponencial de base e. • Se presentan ejemplos relacionados con el capital a interés fijo, desintegración radiactiva y concentración de una solución. • Se propone una lista de problemas de modelación.	• Se presentan ejemplos resueltos utilizando transformaciones. • Se compara una función exponencial $f(x)=2^x$ con una función cuadrática $g(x)=x^2$, utilizando sus respectivos gráficos. • Se presenta la función exponencial natural, utilizando ejemplos relacionados con interés compuesto u otros modelos exponenciales. • Se propone una lista de ejercicios y problemas de modelación. • Se termina este tema con un proyecto de descubrimiento relacionado con el crecimiento exponencial explosivo.

		• Se propone una lista de ejercicios y problemas de modelación. • Se presenta la función logarítmica. • Se termina este tema con una aplicación más de la función exponencial relacionada con la dosis de medicamento en el organismo de una persona.		
Aplicaciones de la función exponencial	Se presenta solo un ejemplo resuelto relacionado con una aplicación de la función exponencial (creciente), pero se deja una lista de aplicaciones propuestas.	Se presenta ejemplos resueltos relacionados con aplicaciones de la función exponencial (creciente y decreciente) y se deja una lista de problemas propuestos con otras aplicaciones.	Se presenta ejemplos resueltos relacionados con aplicaciones de la función exponencial (creciente y decreciente), pero se deja una lista de problemas propuestos con otras aplicaciones.	Se presenta ejemplos resueltos relacionados con aplicaciones de la función exponencial (creciente y decreciente) y se deja una lista de problemas propuestos con otras aplicaciones.
Uso de recursos tecnológicos	Se sugiere el uso de una calculadora.	Se sugiere el uso de una calculadora.	No se hace ninguna indicación sobre el uso de algún recurso tecnológico.	Se sugiere el uso de una calculadora.

A partir de la información presentada en el cuadro anterior, observamos lo siguiente:

1. Sobre la secuencia del contenido, en todos los textos se empieza presentando la definición de función exponencial y luego se resuelven algunos ejercicios o problemas de modelación. En los textos 2 y 3 se presentan las principales propiedades de la función exponencial, pero solo en el texto 3 se incluyen las demostraciones de estas. Asimismo, solo en el texto 3 se presenta la característica propia de la función exponencial relacionada con la variación porcentual y las progresiones. En los demás textos no se enuncia ninguna propiedad.

2. Sobre las aplicaciones de la función exponencial, todos los textos incluyen aplicaciones de esta función relacionadas con fenómenos reales que mayormente están asociados con crecimientos porcentuales constantes y en una menor cantidad con decrecimientos porcentuales constantes.

3. Sobre el aspecto anterior, consideramos importante que en la enseñanza de la función exponencial se incluyan problemas que modelen fenómenos reales, ya que estos permitirán que los alumnos reconozcan la importancia de esta función para determinar ciertos comportamientos presentes o predecir algún comportamiento futuro. Asimismo, consideramos importante incluir una situación problema que presente una función exponencial con un comportamiento decreciente, ya que es poco mostrada en los ejemplos de los textos o es tratada en un segundo plano.

4. Sobre el uso de recursos tecnológicos, todos los textos, excepto el texto 3, sugieren el uso de una calculadora para evaluar funciones u obtener algún resultado relacionado con la base e o los logaritmos. Consideramos que en el texto 3 no se sugiere el uso de una calculadora debido a que su enfoque está en el reconocimiento de las propiedades y características de la función exponencial más que en el cálculo.

   Sobre este último aspecto, consideramos importante el uso de una calculadora por parte de los alumnos, en la enseñanza de la función exponencial, de modo que permita realizar de forma rápida y sencilla los cálculos involucrados en los problemas y podamos dedicar más tiempo a la interpretación de los resultados obtenidos.

Finalizamos estas observaciones, teniendo presente que el objetivo de la situación didáctica diseñada es que el estudiante construya el concepto de la función exponencial. Por ello, consideramos de vital importancia que la aplicación de la situación didáctica siga una secuencia didáctica que permita al estudiante construir el concepto de esta función a partir de una situación problema que modele un fenómeno real, en el que no sea evidente la presencia de esta función, pero que a la vez sea el concepto necesario para resolverla; es decir, sea la mejor solución en las condiciones propuestas.

En este análisis, también incluiremos los comentarios registrados en el texto: Examen de textos: Análisis de livros de Matemática para o Ensine Médio, de Lima, E. (editor), Morgado, A., Durao, E., Wagner, E., Lima, E., Bosco, J., Quinhooes, J., Magalhaes, M. y Pinto, P; publicado en 2001. El informe presentado en este texto contiene el análisis de 36 textos que son parte de 12 colecciones de libros didácticos de Matemática utilizados en los tres años de enseñanza media de las escuelas brasileras. De este análisis nos interesa tomar en cuenta el enfoque que se le da a la función exponencial en cada uno de los textos analizados así como la crítica, sugerencias y propuestas ofrecidas por el equipo de profesores que participó en la elaboración de este informe. De esta revisión, señalamos algunas sugerencias didácticas que tomaremos en cuenta para el diseño de la situación didáctica propuesta en este trabajo, como son:

- Presentar aplicaciones de la función exponencial tanto en la vida diaria como en otras ciencias no propias de la Matemática.
- Presentar las características propias de la función exponencial, monótona e inyectiva, tal como se señala en el texto 3 revisado anteriormente.
- Señalar que en toda función de tipo exponencial de la forma $f(x)=cb^{kx}$, la característica propia de esta función significa que: cuando se toman, en x, los puntos $a, a+h, a+2h, \ldots$ igualmente espaciados, estos forman una progresión aritmética y los valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \ldots$ se obtienen multiplicando la cantidad anterior por una constate; es decir, forman una progresión geométrica. También, se puede decir que el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ depende de h (constante real), pero no de x, tal como se señala en el texto 3 revisado anteriormente.
- Presentar la característica propia de la función exponencial a partir de una función exponencial de la forma $f(x)=a^{x}$, para la cual los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ forman una progresión geométrica más sencilla que los valores que se obtienen de una función exponencial de la forma $f(x)=cb^{kx}$.
- Comentar que la característica propia de la función exponencial, presentada anteriormente, permite que esta función modele una gran cantidad de cuestiones físicas, químicas, biológicas, económicas y matemáticas.

- Comentar que la tasa de crecimiento no es lo mismo que la tasa de crecimiento relativo, entendiendo que la primera solo establece una variación entre dos cantidades, mientras que la segunda estable una variación porcentual entre dichas cantidades, asegurándose de esta manera que diferencien estas definiciones.
- Comentar que en la resolución de problemas, contextualizados o no, se debe tener presente la conexión que existe entre la función exponencial y las progresiones geométricas por ser ésta una característica propia de dicha función.

Finalmente, dado que nuestra propuesta está dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades, consideramos que es importante que la situación didáctica diseñada para que emerja el concepto de la función exponencial esté enmarcada dentro de una aplicación de dicha función, relacionada con un fenómeno real que sea cercano al entorno de estos alumnos, como es el caso de la cantidad de medicamento que permanece en el organismo de una persona después de un tiempo de haberlo ingerido.

c. Análisis cognitivo

En este análisis, empezaremos señalando que la actividad matemática se caracteriza por el uso de diversos sistemas de representación para cada noción, además del lenguaje natural. Estas representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes.

En esta parte, cabe tener en cuenta a Sastre (2008, p. 8) cuando señala la necesidad de reconocer las falencias que presentan los alumnos al ingresar al nivel universitario para resolver problemas matemáticos e identificar que estos conflictos en gran parte se deben al hecho de que no logran comprender claramente los enunciados y la consigna de dichos problemas.

Respecto a lo señalado por Sastre, desde nuestra experiencia docente podemos señalar que los estudiantes de las carreras de humanidades presentan dificultades al pasar de representaciones dadas en el registro de la lengua natural al registro simbólico, que es necesario para la resolución de problemas. Ante esto, debemos promover que los alumnos tengan una lectura comprensiva de los problemas propuestos para que así puedan superar la brecha que presentan entre el enunciado del problema y su resolución.

Asimismo, cabe citar a Duval[10] (1993) para quien: "Aprender Matemáticas consiste en el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación (…) Aprender Matemáticas es aprender a discriminar y coordinar los sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación".

Sin embargo, uno de los obstáculos en el aprendizaje de conceptos matemáticos es justamente la falta de conversión entre registros diferentes de representación, tal como lo sostiene Janvier[11] (1987) al señalar que no se integra el concepto de función hasta que no se es capaz de pasar de una de las representaciones (descripción verbal, diagramas de Venn, tablas, gráficas, fórmulas) a todas las demás.

[10] Tomado de: http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen22/digital22-1/Investigacion06/Concepciones%20de%20los%20alumnos%20de%20la%20noci%F3n%20de%20funci%F3n.pdf. Recuperado el 12 de diciembre de 2009.
[11] Ibídem

Duval[12] (1993, p. 2) entiende por representaciones semióticas a las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento". Además, considera que estas representaciones no son solo útiles para que exista comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

Duval (1993, p. 2) también señala que un objeto matemático no debe ser confundido con su representación, pues sólo a través de esta es aprehensible. A este hecho denomina "paradoja cognitiva del pensamiento matemático" que se refleja en su clásica frase "no hay noesis sin semiosis", ya que la aprehensión conceptual de un objeto (noesis) es inseparable de la aprehensión o producción de una representación semiótica (semiosis).

Asimismo, Duval también señala que la pluralidad de los sistemas semióticos de representación permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por lo tanto sus representaciones mentales. Por ello, es esencial movilizar varios registros de representación semiótica: lengua natural o verbal, escritura simbólica, gráficos, figuras, etc., lo que además ayudaría a evitar que los objetos matemáticos sean confundidos con sus representaciones.

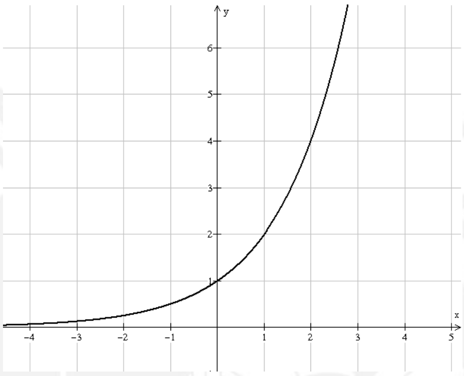
Por otro lado, la conversión entre registros de representación semióticas no es espontánea a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. Cuando hay congruencia entre los registros de representación, la conversión puede ser trivial, pero cuando no hay congruencia la

[12] Tomado de: Sastre, P., Boubée, C., Delorenzi, O. y Rey, G. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. Universidad Nacional Centro, Buenos Aires, Argentina. En: Revista Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).

conversión puede ser muy difícil e incluso inaccesible para muchos estudiantes. Para aclarar la congruencia o no congruencia que puede existir entre dos representaciones, mostraremos dos ejemplos relacionados con la función exponencial por ser de nuestro interés.

Ejemplo 1

Dada la gráfica de la función $f(x)=2^x$, ¿es f una función monótona?

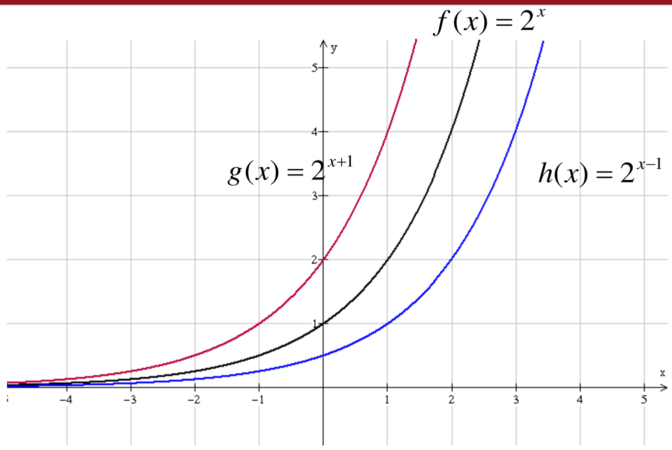


Ante esta pregunta sobre la monotonía de la función $f(x)=2^x$, la mayoría de estudiantes responde con éxito que f es una función estrictamente creciente, ya que aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función y la percepción de la noción de crecimiento asociada con la observación de que la gráfica sube de izquierda a derecha.

Ejemplo 2

A partir de la gráfica de la función $f(x)=2^x$, mostrada en el ejemplo 1, representa gráficamente la función $g(x)=2^{x+1}$.

Ante esta pregunta, muchos estudiantes no tienen éxito en sus respuestas ya que obtienen la gráfica de $g(x)=2^{x+1}$ trasladando una unidad a la derecha la gráfica que corresponde a $f(x)=2^x$, en lugar de trasladarla una unidad a la izquierda, tal como se muestra en el siguiente gráfico.



Esto posiblemente suceda porque el estudiante al ver el signo más en la expresión $g(x)=2^{x+1}$, supone una traslación de una unidad hacia la derecha. Aquí se presenta un fenómeno de no congruencia en el traslado del registro algebraico al gráfico.

Consideramos importante tener en cuenta el fenómeno de no congruencia que se presenta en la función exponencial al pasar del registro algebraico al gráfico, ya que esto se podría convertir en un obstáculo que dificultaría la construcción y adquisición del conocimiento de la función exponencial por parte de los estudiantes.

Considerando que la aprehensión de las representaciones está fuertemente ligada al proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, Duval (1993) según su categorización de tareas, concernientes a la aprehensión de las representaciones semióticas, propone realizar tareas de variaciones comparativas relacionadas con los significados de las distintas representaciones.

Reconociendo la importancia que tiene el hecho de pasar de una representación a otra para adquirir el concepto de función e identificándolo como una dificultad en los estudiantes, consideramos importante que la situación didáctica diseñada en este trabajo incluya el uso de las siguientes representaciones:

tablas de datos, gráficos cartesianos y expresiones simbólicas, consideradas por Swan[13] (1982) como las representaciones más útiles.

Desde nuestra experiencia docente, también consideramos importante que las actividades propuestas articulen el conocimiento del concepto de la función exponencial con los intereses de los estudiantes, de modo que esto los estimule a involucrarse en las tareas propuestas mostrando un análisis crítico y reflexivo sobre lo que hacen y los resultados que obtienen. Lo que posteriormente, les permita elaborar ideas y conocimientos matemáticos que puedan ser integrados en sus estructuras mentales, luego de intercambiar información con sus compañeros y validar sus resultados utilizando distintas representaciones.

Finalmente, en el diseño de la situación didáctica debemos tener en cuenta el uso de un lenguaje sencillo y claro que facilite la comprensión de los enunciados y preguntas de los problemas propuestos, evitando que este paso del lenguaje natural al simbólico o matemático se convierta en un obstáculo.

[13] Tomado de: http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen22/digital22-1/Investigacion06/Concepciones%20de%20los%20alumnos%20de%20la%20noci%F3n%20de%20funci%F3n.pdf. Recuperado el 12 de diciembre de 2009.

3.2 Concepción de la situación didáctica

La concepción de la situación didáctica que constituye nuestra propuesta incluye: el diseño de la situación didáctica, que permitirá la construcción del concepto de función exponencial, y el diseño de la secuencia didáctica, que debemos seguir para la aplicación de la situación didáctica en aula con estudiantes de las carreras de humanidades. Estos diseños se elaboraron en un mes aproximadamente, a partir de reflexiones sobre experiencias didácticas anteriores y un intercambio de ideas con otros colegas que han impartido cursos de Matemática con estudiantes de las carreras de humanidades.

Diseño de la situación didáctica

El diseño de la situación didáctica propuesta para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades, se basa en la teoría de situaciones didácticas y tiene por objetivo permitir que los estudiantes construyan el concepto de la función exponencial.

Para el diseño de la situación didáctica que proponemos en este trabajo, hemos tomado en cuenta todas las consideraciones presentadas en el análisis preliminar, en sus tres dimensiones, a fin de evitar generar obstáculos y por el contrario incluir las condiciones que puedan favorecer la construcción del concepto de la función exponencial.

La situación didáctica que diseñamos en este trabajo se divide en cuatro situaciones, numeradas del 1 al 4, que se llevarán a la práctica en aula siguiendo una secuencia didáctica que detallaremos más adelante. Cada una de estas situaciones tiene por objetivo colocar a los estudiantes frente a problemas, pensados de tal manera que estos apoyados en sus conocimientos previos puedan tener una estrategia inicial para resolverlos, pero que posteriormente dicha estrategia inicial resulte ineficaz y los obligue a utilizar otra estrategia o a realizar algunos cambios a su estrategia actual de modo que puedan obtener la respuesta óptima.

En el diseño de la situación didáctica que proponemos, también, se ha tomado en cuenta que para que el alumno construya el concepto de la función exponencial, es necesario que se interese de manera personal por la resolución de los problemas planteados en cada una de las cuatro situaciones que forman parte de la situación didáctica. Por ello, la situación propuesta gira en torno a dos contextos considerados de interés para los estudiantes, como son: la cantidad de medicamento que permanece en el organismo de una persona luego de un tiempo t, en horas, presentado en las situaciones 1, 2 y 3; y el monto de dinero acumulado en una entidad bancaria luego de un tiempo t, en años, presentado en la situación 4.

Finalmente, teniendo en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes al pasar de una representación en lenguaje natural a una representación simbólica o matemática, hemos considerado necesario elaborar el solucionario completo de la situación didáctica (Ver anexo 3) de modo que nos permita tener una revisión de la compresión de los enunciados y preguntas propuestas en cada situación.

A continuación mostramos el contenido de cada una de las cuatro situaciones que forman parte de la situación didáctica que diseñamos para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades.

Situación 1

Miguel, hace dos meses, presentó síntomas de gripe y fue a una consulta con el doctor para que le dé algún tratamiento. Debido a las noticias sobre la propagación del virus de la influenza, el doctor le recomendó quedarse en observación. Luego de unas horas, le indicó el siguiente tratamiento: tomar una dosis oral de 75 mg de Oseltamivir, un antiviral selectivo contra el virus de la influenza, dos veces al día durante 5 días.

Si la vida media del Oseltamivir es de 8 horas, entendiendo que la vida media de un medicamento es el tiempo necesario para que la concentración sanguínea del medicamento se reduzca a la mitad, y Miguel solo ha tomado la primera dosis, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 8, 16 y 24 horas de haber tomado dicho medicamento?
Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales.

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
8	
16	
24	

b) Complete la siguiente tabla calculando, en primer lugar, la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas y, posteriormente, la variación porcentual de dicho medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas. Anote sus resultados utilizando tres decimales.

Intervalo de tiempo $\lfloor t_i ; t_f \rfloor$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$[0;8]$				
$[8;16]$				
$[16;24]$				

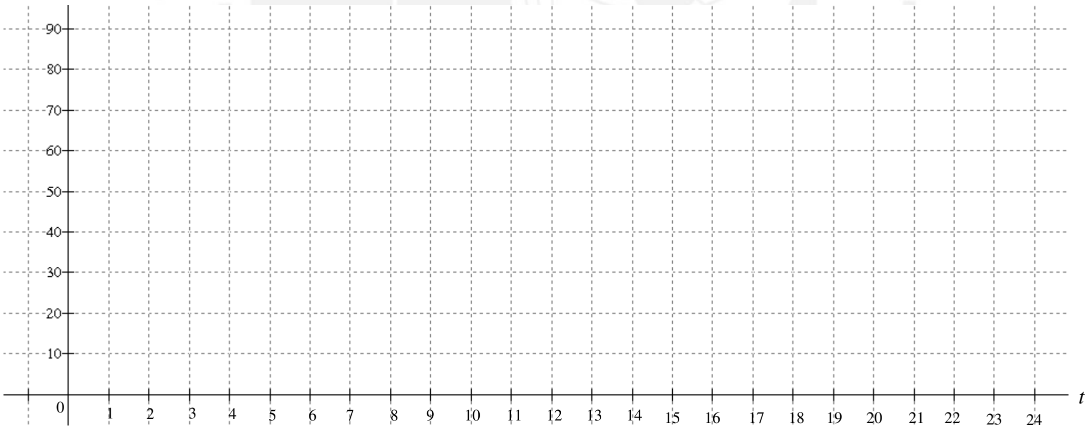
A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación es constante?

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación porcentual es constante?

c) Represente gráficamente los resultados obtenidos en la parte a) y determine si por estos puntos pasa una recta, justificando su respuesta.

Utilice la siguiente cuadrícula.



Situación 2

Considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis de Oseltamivir, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 1, 2, 3 y 4 horas de haber tomado dicho medicamento?

Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	
2	
3	
4	

b) Complete la siguiente tabla calculando, en primer lugar, la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada hora y, posteriormente, la variación porcentual de dicho medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora. Anote sus resultados utilizando tres decimales.

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$\left[0;1\right]$				
$\left[1;2\right]$				
$\left[2;3\right]$				
$\left[3;4\right]$				

A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

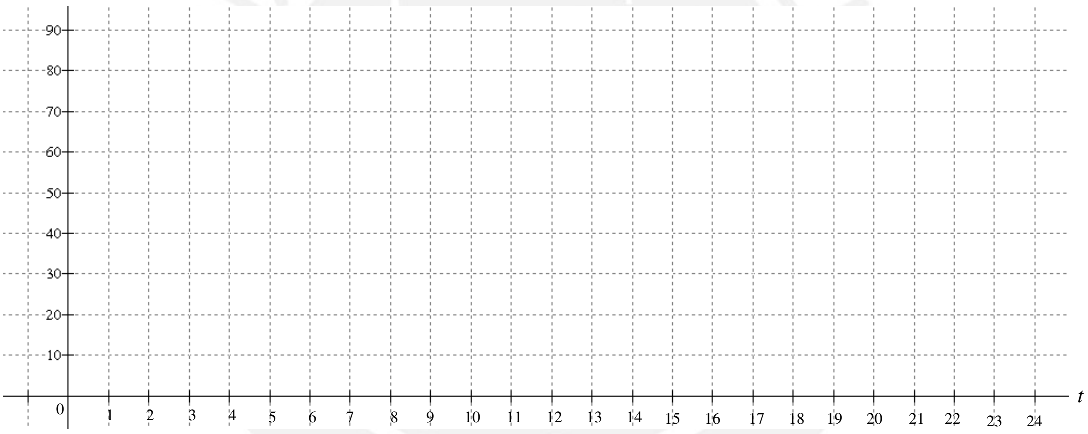
b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora?

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora?

c) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de Oseltamivir que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas. Comente las características de la expresión obtenida indicando su relación con la información dada en el problema y compruebe si la expresión obtenida es correcta.

d) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte c).

Utilice la siguiente cuadrícula.



Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: “A mayor cantidad de horas trascurridas, luego de ingerir el medicamento, Miguel eliminará por hora mayor cantidad de miligramos de Oseltamivir de su organismo”. Justifique su respuesta.

Situación 3

Posteriormente, Miguel sigue dos tratamientos diferentes contra la gripe, cuyas indicaciones se muestran a continuación:

- Tratamiento 1: El doctor le receta una dosis de 550 mg de apronax, que tiene una vida media de 12 horas, para ser tomado dos veces al día y así desinflamar su garganta.
- Tratamiento 2: El doctor le receta una dosis de 500 mg de panadol, que tiene una vida media de 2 horas, para ser tomado tres veces al día y así aliviar su dolor de cabeza.

Para cada tratamiento, considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis del medicamento, responda las siguientes preguntas:

a) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas. Explique cómo obtuvo esta expresión e indique qué representa la base de la misma en el problema dado.

b) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor.

c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte a).

Situación 4

Raúl recibe una gratificación de S/. 10 000 y decide depositarlo en una entidad bancaria que le ofrece una tasa de interés de 9,5% compuesto anualmente. Si Raúl no retira ni abona ninguna cantidad de dinero adicional a la depositada inicialmente y la entidad bancaria no le hace ningún descuento, responda las siguientes preguntas:

a) Raúl desea saber cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de cada año, durante los cuatro primeros años y para ello elabora la siguiente tabla.

Complete la tabla, utilizando tres decimales.

Año t	Cantidad de dinero al inicio del año t (en Nuevos Soles)	Interés obtenido al final del año t (en Nuevos Soles)	Cantidad de dinero al final del año t (en Nuevos Soles)
1	10 000		
2			
3			
4			

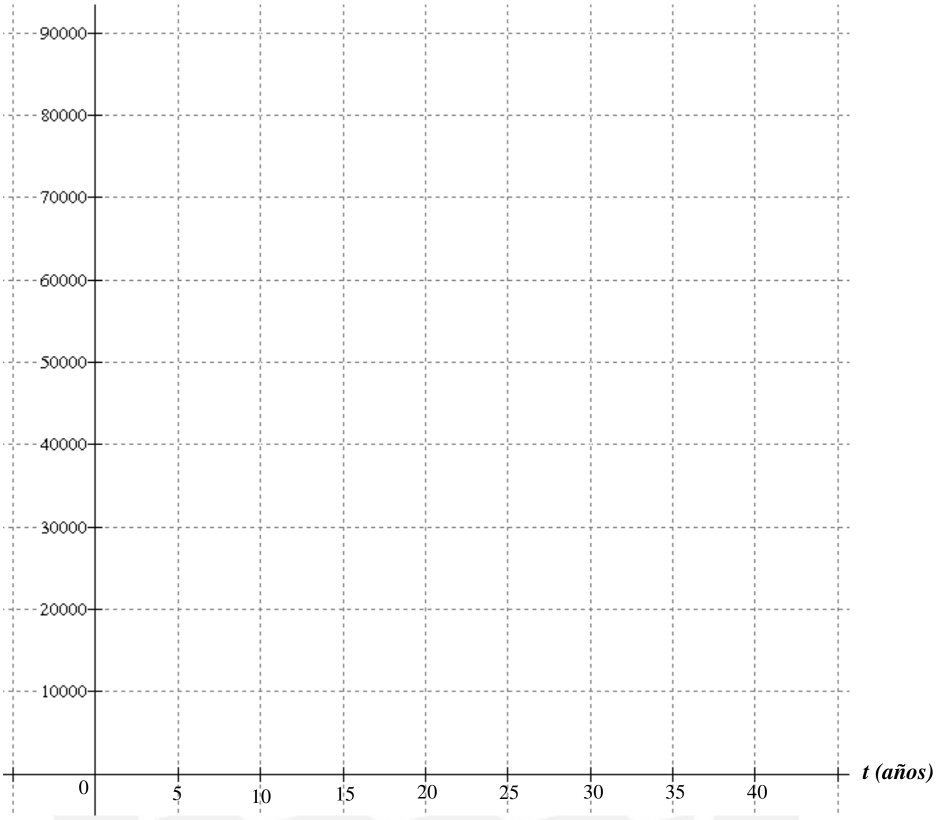
A partir de los resultados obtenidos en la tabla, responda las siguientes preguntas:

a1) ¿Cómo varía la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación es constante de un año a otro?

a2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación porcentual es constante de un año a otro?

b) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de dinero que tendrá Raúl en su cuenta luego de t años. Explique cómo obtuvo la expresión y comente sus características indicando su relación con la información dada en el problema.

c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte b).
Utilice la siguiente cuadrícula.



Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: “A mayor cantidad de años, Raúl acumulará por año mayor cantidad de dinero en su cuenta”. Justifique su respuesta.

Diseño de la secuencia didáctica

Para diseñar la secuencia didáctica que permitirá la aplicación en aula de la situación didáctica presentada anteriormente, dada las características de la función exponencial que incluye conceptos, propiedades y sistemas de representación simbólica, analítica y tabular, hemos seguido tres fases de la teoría de situaciones didácticas: acción, formulación y validación.

Esta secuencia tiene por objetivo proporcionar a los alumnos un proceso de construcción de la función exponencial. Para lo cual se propone la realización de cuatro actividades siguiendo indicaciones específicas para cada una de ellas, pero sin ninguna que mencione el concepto que se desea enseñar, permitiendo que los alumnos descubran que este concepto es la estrategia solución que necesitan para resolver los problemas propuestos en cada actividad y al utilizarlo logren la construcción del mismo.

Esta secuencia didáctica incluye el desarrollo de cuatro actividades, en las que se desarrollarán las cuatro situaciones propuestas, siguiendo la numeración asignada y la descripción dada para el desarrollo de cada una de ellas, con la finalidad de lograr los objetivos específicos propuestos para cada actividad. Estas actividades, por la duración de cada una de ellas, se sugiere desarrollarlas en dos sesiones de clases.

En el diseño de esta secuencia didáctica hemos tratado de no generar obstáculos que impidan la construcción del concepto de función exponencial, para lo cual planteamos un avance gradual en cuanto a la dificultad que presenta cada tarea propuesta; y una dinámica que permita al estudiante interactuar con sus compañeros de grupo, con el profesor y con toda la clase al exponer sus resultados justificando sus estrategias utilizadas.

A continuación mostramos un cuadro detallado con la secuencia didáctica que presenta para cada una de las actividades: los objetivos, la descripción de la actividad, el tiempo de duración y la fase en la que se encuentra esta actividad, según las fases de la teoría de situaciones didácticas.

Secuencia	Objetivos	Descripción	Duración	Fase en la que se ubica
Actividad 1: **Situación 1**	• Que los alumnos determinen como disminuye la cantidad de miligramos de medicamento en el organismo de Miguel luego de 8, 16 y 24 horas de haber ingerido la primera dosis de dicho medicamento. • Que los alumnos determinen cuál es la variación porcentual del medicamento en el organismo de Miguel luego de 8, 16 y 24 horas de haber ingerido la primera dosis de dicho medicamento.	Los alumnos, en parejas, resuelven la situación 1. Esta situación tiene una duración de 25 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 10 minutos para la discusión en parejas y 10 minutos para la puesta en común en la que algunas parejas (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la exposición a toda la clase, pedir que salgan a exponer parejas que han utilizado estrategias de solución diferentes o en todo caso que complementen la información presentada por la pareja anterior.	25 minutos	Acción

Actividad 2: Situación 2	• Que los alumnos determinen una expresión que les permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento en el organismo de Miguel luego t horas. • Que los alumnos representen gráficamente la expresión que les permitirá calcular la cantidad de miligramos de medicamento en el organismo de Miguel luego t horas. • Que los alumnos enuncien algunos teoremas.	Los alumnos, en grupos de 4, resuelven la situación 2. Esta situación tiene una duración de 35 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 20 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la resolución de la situación en los grupos, pedir que los alumnos justifiquen sus respuestas utilizando un lenguaje matemático adecuado. Durante la exposición a toda la clase, pedir que salgan a exponer grupos que han utilizado diferentes estrategias de solución e insistir en que justifiquen sus respuestas comentando las características de la expresión obtenida en la parte c) y analizando la afirmación dada en la parte d).	35 minutos	Formulación

Actividad 3: **Situación 3**	• Que los alumnos determinen expresiones matemáticas que correspondan a los cambios realizados a la situación presentada anteriormente (situación 2). • Que los alumnos representen gráficamente las expresiones matemáticas obtenidas según los cambios realizados a la situación presentada anteriormente (situación 2). • Que los alumnos enuncien algunos teoremas y los validen utilizando procedimientos analíticos o gráficos.	Los alumnos, en grupos de 4, resuelven la situación 3. Esta situación tiene una duración de 35 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 20 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la exposición a toda la clase, pedir que los grupos expliquen sus estrategias de solución, sea gráfica o analítica, usando la notación matemática correspondiente. Durante la resolución de la situación en los grupos y durante la exposición, insistir en que los alumnos justifiquen sus respuestas explicando como determinaron las expresiones y los valores pedidos en esta situación.	35 minutos	Formulación y validación

Actividad 4: Situación 4	• Que los alumnos determinen expresiones matemáticas para una situación diferente a las anteriores. • Que los alumnos representen gráficamente las expresiones matemáticas obtenidas para esta situación que es diferente a las anteriores. • Que los alumnos enuncien algunos teoremas y los validen utilizando procedimientos analíticos o gráficos.	Los alumnos, en grupos de 4, resuelven la situación 4. Esta situación tiene una duración de 35 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 20 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la exposición, pedir que los grupos expliquen sus estrategias de solución, sea gráfica o analítica, usando la notación matemática correspondiente. Durante la resolución de la situación en los grupos y durante la exposición, insistir en que los alumnos justifiquen sus respuestas usando los conceptos matemáticos involucrados.	35 minutos	Formulación y validación

3.3 Análisis a priori de la situación didáctica

En el análisis a priori se estudian las variables didácticas que permitirán controlar los comportamientos posteriores de los estudiantes y favorecerán la construcción del concepto de función exponencial.

En este análisis se describen las variables y su relación con la situación didáctica asociada, se analizan los aspectos que podrían estar en juego en esta situación para el alumno, en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las estrategias utilizadas durante la puesta en práctica de dicha situación con la poca presencia que tiene el profesor, solo durante las devoluciones; y se prevén los comportamientos posibles de los alumnos para demostrar cómo este análisis permitirá controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Respecto al estudio de la función exponencial, consideramos que las variables didácticas involucradas están relacionadas con la siguiente expresión:

$$f(t) = b\,a^{k\,t}$$

donde b, a y k son constantes reales, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Observamos que las diversas características de esta función se reflejan por la variación de a, b, k y por la naturaleza de su variable t. Por ello, en la situación didáctica diseñada consideramos las siguientes variables didácticas:

1. Valor inicial

   En la expresión $f(t) = b\,a^{k\,t}$, el valor inicial está dado por $b = f(0)$.

   En la situación didáctica, el valor inicial está dado por la dosis o cantidad inicial de medicamento que ingiere Miguel. En la situación 1, aparece asociada a la dosis inicial de 75 mg de Oseltamivir que ingiere Miguel. En la situación 3, la dosis inicial cambia para cada uno de los dos tratamientos indicados por el doctor, como se indica a continuación:

   - En el primer tratamiento, la dosis inicial cambia a 550 mg de apronax.
   - En el segundo tratamiento, la dosis inicial cambia a 500 mg de panadol.

2. Monotonía de la función

En la expresión $f(t) = b\,a^{k\,t}$, la monotonía de la función está dada por el valor que toma a, pues

- si $a > 1$, la función es estrictamente creciente.
- si $0 < a < 1$, la función es estrictamente decreciente.

En la situación didáctica, la monotonía de la función está asociada a la disminución porcentual constante de medicamento (estrictamente decreciente) o al incremento porcentual constante de dinero en una cuenta bancaria (estrictamente creciente). En la situación 1, aparece una disminución porcentual constante de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas; en la situación 2, una disminución porcentual constante de medicamento cada hora; en la situación 3, una disminución porcentual constante cada hora, en los dos tratamientos. Pero, en la situación 4, aparece un incremento porcentual constante de dinero en una cuenta bancaria cada año.

3. Variación porcentual constante, considerando intervalos de variación constante (o intervalos de igual longitud)

En la expresión $f(t) = b\,a^{k\,t}$, considerando intervalos de variación constante, de longitud h, la variación porcentual está dada por $a^{k\,h}$ pues

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)} = \frac{b\,a^{k\,(t+h)} - b\,a^{k\,t}}{b\,a^{k\,t}} = a^{kh} - 1$$

donde $(a^{kh} - 1)$ es un valor constante.

En la situación didáctica, la variación porcentual constante, considerando intervalos de igual longitud, aparece como una disminución porcentual (variación porcentual negativa) asociada a la vida media del medicamento, en las situaciones 1, 2 y 3; o como un aumento porcentual (variación porcentual positiva) asociado a una tasa de interés compuesto anualmente, en la situación 4. En la situación 1, la disminución porcentual cada 8 horas (intervalos de tiempo iguales, de 8 horas) es del 50%, debido a que la vida media del medicamento es de 8 horas. En la situación 2, la vida media del medicamento sigue siendo de 8 horas como en la situación 1, pero la disminución porcentual cada hora cambia a 8,3% debido a que en esta situación los intervalos de tiempo iguales son de 1 hora de longitud. En la situación 3, la disminución porcentual cada hora (intervalos de tiempo iguales, de 1 hora), cambia de la siguiente manera:

- Para el tratamiento 1, la disminución porcentual cambia a 5,6% pues está asociada a una vida media de 12 horas.
- Para el tratamiento 2, la disminución porcentual cambia a 29,3% pues está asociada a una vida media de 2 horas.

En la situación 4, el incremento porcentual por año es igual a 9,5% pues está asociado a una tasa de interés compuesto anualmente de 9,5% y a un incremento de tiempo constante e igual a 1 año (intervalos de tiempo iguales a 1 año).

4. Tipo de variable

En la expresión $f(t) = b\,a^{kt}$, la variable independiente t aparece asociada a casos de variación discreta (variable discreta) o casos de variación continua (variable continua). Cabe señalar que, en casos prácticos, se llega a una función con variación continua (o variable independiente continua) a partir de la consideración de casos discretos.

En la situación didáctica, la variable independiente es el tiempo y aparece asociada a valores discretos y continuos. En la situación 1, en las partes a) y c) el tiempo se presenta asociado a aumentos constantes de 8 horas (variación discreta); y en la parte b), aparece asociada a intervalos de 8 horas (variación continua). En la situación 2, en la parte a) el tiempo se presenta con un aumento constante de 1 hora (variable discreta); en la parte b), aparece asociado a intervalos de 1 hora; en las partes c) y d) aparece asociado a valores mayores o iguales que cero; es decir, $t \geq 0$ (variable continua). En la situación 3, el tiempo en horas ($t \geq 0$) es una variable continua. En la situación 4, el tiempo t en años ($t \geq 0$) aparece como una variable continua.

5. Tipo de representación

   En la expresión $f(t) = b\,a^{k\,t}$, los tipos de representación para la función f son: verbal, tabular, gráfica y algebraica o simbólica.

   En la situación didáctica, las representaciones para la función involucrada son: verbal, tabular, algebraica y gráfica. Estas representaciones se presentan en todas las situaciones, del 1 al 4, al pasar de un enunciado verbal a una representación simbólica que podría ser una tabla, una expresión algebraica o un gráfico. En la situación 1, en las partes a) y b) se presenta la necesidad de pasar de un enunciado verbal a una representación tabular; en la parte c), se presenta la necesidad de pasar de una representación tabular a un gráfico. En la situación 2, en las partes a) y b) se necesita pasar de un enunciado verbal a una representación tabular; en la parte c), se necesita pasar de una representación tabular a una expresión algebraica; y en la parte d), se necesita pasar de una representación algebraica a un gráfico. En la situación 3, en la parte a) se necesita pasar de un enunciado verbal a una expresión algebraica; y en la parte c), se necesita pasar de una expresión algebraica a un gráfico. En la situación 4, en la parte a) se necesita pasar de un enunciado verbal a una representación tabular; en la parte b), se necesita pasar de un enunciado verbal a una expresión algebraica; y en la parte c), se necesita pasar de una expresión algebraica a un gráfico.

En este trabajo controlaremos, a través de los cambios señalados, todas las variables didácticas, excepto la cuarta variable, porque consideramos que estas son indispensables para que emerja el concepto de función exponencial. En el caso de la cuarta variable didáctica, el paso de un caso discreto a uno continuo no será parte de este análisis pues el tipo de variable con la que debemos trabajar aparecerá indicado en los enunciados o preguntas de cada una de las situaciones.

El análisis a priori de la situación didáctica, diseñada en este trabajo de investigación, empieza con indicaciones generales para los alumnos, pero luego muestra el análisis detallado de cada una de las cuatro situaciones en las que se divide la situación didáctica. El análisis de cada situación incluye: las indicaciones que deben ser dadas por el profesor antes de iniciar la tarea, los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea, el análisis de la tarea y los comportamientos esperados por parte de los alumnos durante la aplicación en aula.

Respecto a las indicaciones dadas por el profesor antes de iniciar cada tarea, estas se relacionan con la dinámica de cada actividad e incluye: el tipo de trabajo a realizar (individual y/o grupal), los recursos que pueden utilizar (como la calculadora) y los tiempos asignados para cada parte de la actividad. Los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea incluye la lista de contenidos matemáticos que podrían utilizar los alumnos para resolver los problemas propuestos en cada actividad. El análisis de la tarea incluye: los comportamientos que se espera de los alumnos en relación con su participación frente al trabajo individual o grupal, la fase en la que se encuentra, las estrategias de solución, las variables didácticas con las modificaciones realizadas, los obstáculos que se podrían presentar y las devoluciones entre el profesor y el alumno. Los comportamientos esperados por parte de los alumnos durante la aplicación en aula incluyen una lista con: las hipótesis sobre los procedimientos matemáticos seguidos por los alumnos para resolver el problema, las estrategias de solución que podrían utilizar y los obstáculos o dificultades que podrían presentarse.

A continuación presentamos el análisis a priori de la situación didáctica diseñada.

Indicaciones iniciales para los alumnos

Al inicio, se menciona a toda la clase que la actividad propuesta para ese día se divide en cuatro actividades, cada una de las cuales presenta una situación problema para resolver. Para ello, en un primer momento se organizarán en parejas, para trabajar la situación 1, y luego en grupos de 4 integrantes, para trabajar las tres situaciones restantes.

Además, se menciona que la dinámica para trabajar cada situación consiste en leer individualmente el enunciado del problema; luego, buscar estrategias de solución para resolverla, las mismas que deben discutirse dentro de cada grupo; luego, responder las preguntas propuestas; y finalmente, exponer a toda la clase los resultados obtenidos, explicando las estrategias de solución utilizadas y justificando cada uno de ellos.

Situación 1

Indicaciones para los alumnos

- La tarea consiste en responder las preguntas de la situación 1, para lo cual primero deben trabajar en forma individual y luego agruparse con un compañero para intercambiar opiniones y elaborar sus respuestas finales.
- Para realizar esta tarea, utilizar una calculadora y aproximar los resultados con tres decimales.
- Esta tarea tiene un tiempo de duración de 25 minutos, distribuido de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 10 minutos para la discusión y resolución en parejas y 10 minutos para la puesta en común en la que algunas parejas saldrán a exponer sus resultados a toda la clase.

Conocimientos matemáticos implicados

Los conocimientos matemáticos implicados son:

- El significado de vida media de un medicamento, que es el tiempo que debe transcurrir para que se elimine del organismo la mitad de la cantidad de medicamento ingerido en determinado momento.
- Las distintas representaciones de un número racional y la conversión de una a otra (fracciones, decimales y porcentajes).
- El concepto de variación, que permitirá determinar la diferencia entre la cantidad final e inicial de medicamento que permanecerá en la sangre de Miguel, en intervalos iguales de 8 horas.
- El concepto de variación porcentual, que permitirá determinar el porcentaje de variación del medicamento en el organismo de Miguel, en intervalos iguales de 8 horas.
- Las representaciones tabular y gráfica que tiene una función así como el tránsito de una a otra, para lograr graficar en el plano cartesiano la información presentada inicialmente en una tabla.

Análisis de la tarea

- La realización de esta tarea exige que los alumnos entiendan el significado de la vida media de un medicamento para poder así determinar la cantidad de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel luego de 8 horas, la variación y la variación porcentual de la cantidad de medicamento cada 8 horas.
- La puesta en común a toda la clase de los resultados obtenidos por las parejas de trabajo, debe permitir identificar distintas estrategias de solución para el problema propuesto.

- Esta tarea se encuentra en la fase acción, según la teoría de situaciones didácticas, ya que en ella el alumno se relacionará con una situación que favorecerá el posterior surgimiento del concepto de la función exponencial. Además, al resolverla recurrirá a sus conocimientos previos y a la información dada en el enunciado del problema.
- La variable didáctica en esta tarea es el tipo de representación, al pasar de una representación tabular a un gráfico.
- Los obstáculos que pueden presentarse en esta tarea son: no diferenciar variación de variación porcentual, no saber pasar de una representación tabular a una representación gráfica en el plano cartesiano. Cabe mencionar que estos obstáculos ya fueron reconocidos como tales en el análisis preliminar.
- En esta tarea la intervención del profesor consiste en remitirlos al texto en busca del significado de vida media de un medicamento o la cantidad de dosis que ingiere Miguel.

Comportamientos esperados

En la pregunta a)

- Se espera que algunos alumnos asuman una interpretación incorrecta del significado de vida media del medicamento y completen la tabla de forma incorrecta, indicando 0 mg luego de 16 ó 24 horas. Esta dificultad puede deberse a que los alumnos no están involucrándose con la tarea propuesta o presentan dificultades para pasar de un enunciado de texto a una representación simbólica, señalada en el análisis preliminar.
- Se espera que algunos alumnos pregunten por el significado de vida media del medicamento y el profesor les devuelva la responsabilidad de la solución del problema indicando que dicha información se encuentra en el enunciado del problema.

- Se espera que algunos alumnos entiendan el significado de la vida media del medicamento y respondan lo correcto, indicando que luego de 8 horas, queda 37,5 mg en el organismo; luego de 16 horas, queda 18,75 mg; y luego de 24 horas, queda 9,375 mg.
- Se espera que algunos alumnos completen la tabla correctamente reconociendo que para tiempos igualmente espaciados, cada 8 horas, la cantidad de medicamento que va quedando en el organismo de Miguel se obtiene multiplicando la cantidad anterior por $\frac{1}{2}$. En este caso, se podría decir que estarían utilizando la característica propia de la función exponencial como estrategia de solución, señalado anteriormente en el análisis epistemológico.

En la pregunta b)

- Se espera que algunos alumnos confundan variación con variación porcentual del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas. Cabe mencionar que este obstáculo ha sido señalado anteriormente en el análisis preliminar.
- Se espera que algunos alumnos no asocien el signo negativo de los resultados de la tabla con la presencia de una disminución o disminución porcentual de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas.
- Se espera que algunos alumnos logren establecer la diferencia entre la variación y la variación porcentual del medicamento en el organismo, en intervalos iguales de tiempo.
- En b1) se espera que algunos alumnos indiquen que hay una disminución de la cantidad del medicamento inicial, indicando que esta disminución no es constante en intervalos iguales de 8 horas.
- En b2) se espera que algunos alumnos determinen que hay una disminución porcentual constante en intervalos iguales de 8 horas.

En la pregunta c)

- Se espera que algunos alumnos grafiquen en forma incorrecta la curva de una función exponencial decreciente en lugar de ubicar los puntos correspondientes; esto debido a que no logran determinar el dominio de la función involucrada. Cabe mencionar que este obstáculo ha sido señalado en el análisis preliminar.
- Se espera que algunos alumnos grafiquen funciones lineales por tramos para intervalos de 8 horas. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada en el análisis preliminar.
- Se espera que algunos alumnos grafiquen correctamente los puntos en el plano cartesiano.
- Respecto a la afirmación que se pide analizar, se espera que algunos alumnos manifiesten que si están de acuerdo porque en la pregunta anterior graficaron tramos lineales, pero también se espera que algunos señalen que no están de acuerdo ya que es imposible trazar una recta que pase por dichos puntos, lo que verifican utilizando una regla e intentando realizar el trazo.

Situación 2

Indicaciones para los alumnos

- La tarea consiste en responder las preguntas de la situación 2, para lo cual cada alumno debe permanecer junto a su compañero con el que trabajo la situación 1, tomar unos minutos para una lectura individual del enunciado del problema propuesto en esta parte, luego formar un grupo de 4 integrantes para discutir e intercambiar estrategias de solución y finalmente elaborar sus respuestas.
- Para realizar esta tarea utilizar una calculadora y aproximar los resultados con tres decimales.

- Esta tarea tiene un tiempo de duración de 35 minutos, distribuido de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 20 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos salen a exponer sus resultados a toda la clase.

Conocimientos matemáticos implicados

Los conocimientos matemáticos implicados son:

- El concepto de progresiones y su clasificación en progresiones aritméticas o geométricas.
- El concepto de la progresión geométrica, para reconocer que la cantidad de medicamento que permanecerá en la sangre de Miguel luego de cada hora se puede obtener multiplicando la cantidad anterior por un factor k constante, como se muestra a continuación:

$$75, 75k, 75k^2, 75k^3, 75k^4, \ldots$$

- El concepto de función y sus distintas representaciones: tabular, algebraica y gráfica, que permitirán determinar una expresión que relacione la cantidad de medicamento que permanecerá en la sangre de Miguel y el tiempo transcurrido luego de haber ingerido la primera dosis, así como graficarla en el plano cartesiano.
- El concepto de variación porcentual, para determinar el porcentaje de variación del medicamento en el organismo de Miguel luego de cada hora y reconocer que corresponde a una disminución porcentual constante.

Análisis de la tarea

- La realización de esta tarea exige que los alumnos tengan en cuenta que la variación porcentual de la cantidad de medicamento luego de t horas es constante. Cabe señalar que esta información será dada en forma verbal al iniciar esta actividad comentando el comportamiento que presenta el medicamento en la situación 1, en la que su disminución porcentual cada 8 horas es constante.
- Durante la discusión verbal en cada grupo y en la puesta en común a toda la clase, será necesario utilizar un mismo lenguaje simbólico y gráfico relacionado con las notaciones que se utilizan en las funciones.
- La puesta en común a toda la clase de los resultados obtenidos en los grupos de trabajo, debe permitir identificar distintas estrategias de solución para el problema propuesto con la finalidad de favorecer la discusión grupal y así verificar si estas estrategias son correctas o no, o en todo caso saber si hay una que sea óptima.
- Esta tarea se encuentra en la fase de formulación y validación, según la teoría de situaciones didácticas, porque a través de las explicaciones o verificaciones que se piden en las partes b), c) y d), los alumnos estarán enunciado algunos teoremas relacionados con la variación variable de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora y variación porcentual constante de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora; los que serán justificados a partir de los valores obtenidos en la tabla de la parte b).

- Las variables didácticas en esta tarea son:
  - La variación porcentual constante del medicamento que se presenta como una disminución porcentual constante de 8,3%, considerando intervalos iguales de 1 hora, en lugar de intervalos iguales de 8 horas donde la disminución porcentual constante fue del 50% (situación 1).
  - El tipo de representación, al pasar de una representación tabular a una expresión algebraica y de una expresión algebraica a un gráfico.
- Los obstáculos de esta tarea podrían ser: no reconocer la dependencia entre las variables tiempo y cantidad de medicamento en el organismo, no lograr determinar la regla de correspondencia asociada a la situación propuesta, no lograr determinar el dominio de la función obtenida, no reconocer que la progresión geométrica que se forma con los valores de la función obtenida esta asociada con una función de tipo exponencial, no reconocer que la gráfica de la función obtenida corresponde a la curva de una función exponencial decreciente. Cabe mencionar que estos obstáculos fueron reconocidos como tales en el análisis preliminar.
- En esta tarea las devoluciones del profesor podrían darse a través de algunas preguntas verbales realizadas a los alumnos al acercarse a los grupos, durante la resolución del problema propuesto, como por ejemplo: ¿Qué significa variación porcentual constante? ¿Cuál es la diferencia entre variación y variación porcentual? ¿Para qué valores de t se cumple la expresión obtenida?

Comportamientos esperados

En la pregunta a)

- Se espera que algunos alumnos encuentren valores incorrectos al asumir que la disminución de medicamento por hora es constante e igual a $\frac{37,5}{8} = 4,6875$ mg.

- Se espera que algunos alumnos al reconocer que hay un porcentaje de disminución constante, expresen la cantidad de medicamento que queda en el organismo luego de cada hora como la cantidad anterior multiplicada por un factor k; es decir, se espera que formen una progresión geométrica con razón k (valor que se determinaría a partir de la información dada por la vida media del medicamento). Esta característica propia de la función exponencial ha sido señalada en el análisis epistemológico y es la que permitirá que emerja el concepto de esta función.
- Se espera que algunos alumnos determinen que el porcentaje constante de disminución del medicamento en el organismo luego de cada hora es igual a 8,3% utilizando la fórmula de variación porcentual y la vida media del medicamento.

En la pregunta b)

- Se espera que algunos alumnos confundan variación con variación porcentual del medicamento en el organismo de Miguel luego de cada hora. Cabe mencionar que este obstáculo ha sido señalado en el análisis preliminar.
- Se espera que los alumnos determinen que hay una disminución o disminución porcentual de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora debido a los resultados obtenidos en la tabla de esta parte (signo negativo).
- En b1) se espera que algunos alumnos respondan que la variación de medicamento en el organismo de Miguel es diferente después de cada hora, apoyándose en los resultados obtenidos en la tabla de esta parte.
- En b2) se espera que algunos alumnos respondan que la variación porcentual de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora es constante a partir de los resultados obtenidos en la tabla de esta parte.

En la pregunta c)

- Se espera que algunos alumnos determinen expresiones matemáticas para funciones lineales por tramos considerando que la disminución de medicamento es constante en cada hora. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada anteriormente a partir de nuestra experiencia docente.
- Se espera que los alumnos utilicen el dato de variación porcentual constante por hora y a partir de ello formen una progresión geométrica que les permita obtener la siguiente expresión $f(t) = 75(0{,}917)^t$. Esta característica propia de la función exponencial relacionada con las progresiones, señalada en el análisis epistemológico, permitirá el surgimiento del concepto de esta función.
- Se espera que algunos alumnos determinen en forma directa la presencia de una expresión matemática de tipo exponencial de la forma $f(t) = ka^t$ y calculen los valores de a y k a partir de los valores obtenidos en la tabla de la parte b). Es decir, se espera que obtengan la siguiente expresión $f(t) = 75(0{,}917)^t$.
- Respecto a las características de la expresión obtenida $f(t) = 75(0{,}917)^t$ se espera que comenten lo siguiente: la cantidad inicial igual a 75 es un valor constante que corresponde a la dosis inicial de medicamento; la variable t está en el exponente y toma valores reales mayores o iguales que 0 por indicar el tiempo (en horas); y la base $a = 0{,}917$ es un valor real entre 0 y 1 que está asociado al comportamiento estrictamente decreciente de la función, y es igual al porcentaje constante de la cantidad de medicamento que se queda en el organismo de Miguel después de cada hora o para intervalos iguales de 1 hora. También, se podría esperar que indiquen que $0{,}917 - 1 = -0{,}083$ es igual a la disminución porcentual constante de medicamento después de cada hora o para intervalos iguales de 1 hora.

- Para comprobar si la expresión obtenida es correcta, se espera que realicen alguno de los siguientes reemplazos: t = 0 con lo que obtienen $f(0) = 75$ ó t = 8 con lo que obtiene $f(8) = 37{,}5$. Con lo que estarían verificando la validez de esta expresión.

En la pregunta d)

- Se espera que algunos alumnos representen gráficos de funciones lineales por tramos. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada anteriormente a partir de nuestra experiencia docente.
- Se espera que algunos alumnos grafiquen la curva que corresponde a una función exponencial decreciente.
- Respecto a la afirmación que se pide analizar, se espera que los alumnos concluyan que con el transcurrir del tiempo, Miguel continúa eliminando medicamento de su organismo, pero cada vez en una menor cantidad, y que justifiquen su respuesta a partir del gráfico obtenido en esta parte o de la expresión obtenida en la parte c).

Situación 3

Indicaciones para los alumnos

- La tarea consiste en responder las preguntas de la situación 3, para lo cual debe permanecer en el grupo con el que trabajo la situación 2, tomar unos minutos para una lectura individual del enunciado del problema propuesto en esta parte, luego discutir e intercambiar estrategias de solución con sus compañeros y elaborar sus respuestas finales.
- En esta tarea se permite utilizar una calculadora y aproximar los resultados con tres decimales.

- Esta tarea tiene un tiempo de duración de 35 minutos, distribuido de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 10 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos salen a exponer sus resultados a toda la clase.

Conocimientos matemáticos implicados

Los conocimientos matemáticos implicados son:

- El concepto de función, su representación analítica y gráfica así como el paso de una representación a otra, para determinar, para cada tratamiento, la expresión matemática que permitirá obtener la cantidad de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel en función del tiempo t (en horas) y luego graficarla.
- El concepto de variación porcentual para determinar, para cada tratamiento, el porcentaje de variación de la cantidad de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel luego de t horas.

Análisis de la tarea

- La realización de esta tarea exige que los alumnos puedan explicar en forma clara como se determina la expresión matemática que permitirá calcular la cantidad de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel luego de t horas, para cada tratamiento.
- La puesta en común a toda la clase de los resultados obtenidos en los grupos de trabajo, debe permitir no solo identificar distintas estrategias de solución para el problema propuesto, sino que debe permitir que los alumnos enuncien y validen teoremas a partir de la explicación que presenten de como obtuvieron las expresiones analíticas o gráficos pedidos.

- Esta tarea se encuentra en la fase de formulación y validación, según la teoría de situaciones didácticas, pues durante la puesta en común los alumnos, para cada tratamiento, enunciarán y validaran en forma grafica o analíticamente algunos teoremas relacionados con la base de la expresiones de tipo exponencial obtenidas, con la variación porcentual de la cantidad de medicamento que eliminará Miguel después de t horas.
- Las variables didácticas en esta tarea son:
    - La variación porcentual constante que se presenta como una disminución porcentual constante para intervalos iguales de 1 hora, en lugar de intervalos iguales de 8 horas, pero para medicamentos con vida media diferentes; es decir:

      En el tratamiento 1, la disminución porcentual es de 5,6% cada hora para un medicamento de vida media igual a 12 horas.

      En el tratamiento 2, la disminución porcentual es de 29,3% cada hora para un medicamento de vida media igual a 2 horas.
    - La dosis inicial de medicamento que cambia para cada tratamiento, siendo de 550 mg, para el tratamiento 1, y de 500 mg, para el tratamiento 2.
    - El tipo de representación, al pasar de una representación verbal a una expresión algebraica y de una expresión algebraica a un gráfico.
- Los obstáculos de esta tarea podrían ser: no tener claro como se obtiene la variación porcentual después de cada hora, no reconocer la relación que existe entre el porcentaje de medicamento que queda en el organismo y el porcentaje de medicamento que se elimina de esta. Estos obstáculos serían epistemológicos.
- En esta tarea las devoluciones del profesor podrían darse a través de algunas preguntas verbales realizadas a los alumnos al acercarse a los grupos, durante la resolución del problema propuesto, como por ejemplo: ¿Qué representa 0,944 en la expresión obtenida para el tratamiento 1? ¿Qué representa 0,707 en la expresión obtenida para el tratamiento 2? ¿A qué tipo de funciones corresponden las expresiones obtenidas en cada uno de los tratamientos?

Comportamientos esperados

En la pregunta a)

- Se espera que algunos alumnos no logren determinar ninguna expresión o que obtengan expresiones incorrectas porque no han entendido la relación entre la cantidad de medicamento en el organismo y el tiempo t en horas. Estas expresiones incorrectas podrían deberse a errores de cálculo o por considerar que la variación es constante, dificultad señalada anteriormente en el análisis preliminar.
- Se espera que algunos alumnos determinen las expresiones matemáticas correspondientes a cada uno de los tratamientos, reconociendo que también son funciones exponenciales pero con algunos cambios respecto a las funciones obtenidas en la situación 2. En este caso, podríamos decir que los alumnos estarían utilizando el concepto de la función exponencial como estrategia de solución para resolver el problema propuesto en esta parte luego de realizar cambios en las variables didácticas.
- Se espera que obtengan las siguientes expresiones para cada uno de los tratamientos:

  Para el tratamiento 1: $f(t) = 75(0{,}944)^t$

  Para el tratamiento 2: $f(t) = 75(0{,}707)^t$

  En ambos tratamientos, se espera que indiquen que las bases de sus expresiones representan el porcentaje de la cantidad de medicamento que queda en el organismo de Miguel después de cada hora o para intervalos iguales de 1 hora.

En la pregunta b)

- Se espera que algunos alumnos den como respuesta el porcentaje que queda en el organismo de Miguel luego de cada hora, lo cual es incorrecto.

- Se espera que algunos alumnos indiquen, para cada tratamiento, que la disminución porcentual por hora del medicamento en el organismo de Miguel se obtiene restando de 1 el valor de la base de la expresión obtenida en la parte a).
- Se espera que algunos alumnos, para cada tratamiento, obtengan la respuesta restando del 100% el porcentaje de medicamento que queda en el organismo de Miguel hallado en la expresión pedida en la parte a).
- Se espera que algunos alumnos, para cada tratamiento, determinen el porcentaje de disminución de medicamento por hora utilizando la fórmula de variación porcentual para dos cantidades de medicamento en horas consecutivas. En este caso, podríamos decir que los alumnos estaría utilizando la característica propia de la función exponencial reconociendo que para intervalos iguales de una hora, la variación porcentual es constante.

En la pregunta c)

- Se espera que algunos alumnos grafiquen funciones lineales por tramos o rectas con pendientes negativas. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada anteriormente a partir de nuestra experiencia docente.
- Se espera que algunos alumnos grafiquen curvas que corresponden a funciones exponenciales decrecientes a partir de las expresiones obtenidas en la parte a).

Situación 4

Indicaciones para los alumnos

- La tarea consiste en responder las preguntas de la situación 4, para lo cual debe permanecer en el grupo con el que trabajo la situación 3, tomar unos minutos para leer individualmente el enunciado del problema propuesto en esta parte, luego discutir e intercambiar estrategias de solución y elaborar sus respuestas finales.
- En esta parte también se permitirá utilizar una calculadora y aproximar los resultados con tres decimales.
- Esta tarea tiene un tiempo de duración de 35 minutos, distribuido de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 10 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos salen a exponer sus resultados a toda la clase.

Conocimientos matemáticos implicados

Los conocimientos implicados son:

- El significado de tasa de interés compuesto anualmente, asociado a un incremento porcentual constante respecto a una cantidad inicial que va variando por año.
- El concepto de función y sus distintas representaciones: tabular, analítica y gráfica, así como el paso de una representación a otra, que permitirán establecer la relación que existe entre la cantidad de dinero acumulada por Raúl y el tiempo t en años, y luego graficarla.
- El concepto de variación y variación porcentual, asociada a un aumento porcentual constante en intervalos iguales de tiempo.

Análisis de la tarea

- La realización de esta tarea exige que los alumnos tengan claro que significa tasa de interés compuesto anualmente así como su relación con el incremento porcentual por año.
- En la comunicación verbal y la puesta en común, será necesario utilizar un mismo lenguaje simbólico y gráfico asociado a las funciones.
- La puesta en común a toda la clase de los resultados obtenidos en los grupos de trabajo, debe permitir no solo identificar distintas estrategias de solución para el problema propuesto, sino que debe permitir que los alumnos enuncien y validen teoremas a partir de la explicación que presenten de como obtuvieron sus respuestas.
- Las variables didácticas en esta tarea son:
    - Monotonía de la función, que se presenta asociada al valor que toma la base en la expresión algebraica de la función exponencial involucrada. En este caso la base toma un valor mayor que 1, mientras que las situaciones anteriores la base tomaba valores entre 0 y 1.
    - La variación porcentual constante que se presenta como un incremento porcentual constante de 9,5% por año (intervalos iguales de 1 año) en lugar de disminuciones porcentuales constantes para intervalos de tiempos iguales, obtenidas en las situaciones anteriores.
    - El tipo de representación, al pasar de una representación verbal a una tabla o a una expresión algebraica y de una expresión algebraica a un gráfico.
- Los obstáculos de esta tarea podrían ser: no utilizar una escala adecuada para graficar en el plano cartesiano la función obtenida, no relacionar el incremento porcentual constante con una función exponencial creciente.
- Esta tarea se encuentra en las fases de formulación y validación, según la teoría de situaciones didácticas, porque los alumnos intercambian información y elaboran teoremas que justifican de forma gráfica o analítica.

- En esta tarea las devoluciones del profesor a los alumnos podrían darse a través de algunas preguntas verbales realizadas durante la resolución del problema propuesto, como por ejemplo: ¿Qué relación existe entre la base 1,095 de la expresión obtenida y la forma del gráfico? ¿Qué sucede con la cantidad de dinero en el banco luego de t años?

Comportamientos esperados

En la pregunta a)

- Se espera que algunos alumnos completen la tabla incorrectamente debido a errores de cálculo.
- En a1) y a2) se espera que algunos alumnos confundan aumento con aumento porcentual. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada en el análisis preliminar.
- Se espera que los alumnos completen correctamente la tabla realizando los cálculos que se indican para cada columna.
- Se espera que algunos alumnos utilicen la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$ para determinar el monto acumulado por año (cuarta columna de la tabla) de un capital depositado en una entidad bancaria a una tasa de interés compuesto anualmente y luego por diferencia calculen el interés por año (tercera columna de la tabla).
- En a1) se espera que algunos alumnos determinen que el aumento de dinero no es constante de un año a otro a partir de los valores obtenidos en la tabla de esta parte.

- En a2) se espera que algunos alumnos determinen que el aumento porcentual es constante de un año a otro a partir de los valores obtenidos en la tabla de esta parte calculando la variación entre un par de años consecutivos o utilizando directamente la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$.

En la pregunta b)

- Se espera que algunos alumnos determinen expresiones incorrectas debido a que asumen una disminución porcentual constante en lugar de un incremento porcentual constante.
- Se espera que algunos alumnos determinen la expresión pedida asociándolo a una función de tipo exponencial que exprese el monto acumulado en la cuenta de Raúl luego de t años; es decir, se espera que obtengan la siguiente expresión $f(t) = 10000(1{,}095)^t$. En este caso, podríamos decir que los alumnos estarían utilizando el concepto de función exponencial para resolver un problema propuesto en un contexto diferente resultado de los cambios realizados en la variable didáctica.
- Se espera que algunos alumnos determinen la expresión pedida asociándolo a la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$ que se utiliza para calcular el monto total de una cantidad depositada en un banco a una tasa de interés compuesto anualmente, obteniendo la siguiente expresión: $P(t) = 10000(1+0{,}095)^t$.
- Respecto a las características de la expresión obtenida, se espera que indiquen lo siguiente: la cantidad constante e igual a 10000 corresponde al deposito inicial de Raúl en la entidad bancaria; el tiempo t es una variable que se ubica como exponente en la expresión; y la base $1{,}095$ es un valor real mayor que 1 que está asociado al comportamiento estrictamente creciente de la función obtenida, y corresponde al porcentaje de la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año pues $0{,}095$ ó $9{,}5\%$ (tasa de interés compuesto anualmente) es el porcentaje de aumento constante por año.

En la pregunta c)

- Se espera que algunos alumnos grafiquen una recta con pendiente positiva o varios tramos lineales con pendientes positivas. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada anteriormente desde nuestra experiencia docente.
- Se espera que algunos alumnos representen gráficamente la curva de una función exponencial creciente.
- Respecto a la afirmación dada, se espera que algunos alumnos estén de acuerdo con ella y justifiquen su respuesta a partir del grafico presentado en esta parte.

3.4 Experimentación en aula

En esta parte del trabajo, se describirán los comportamientos observados en los estudiantes de las carreras de humanidades de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, matriculados en el curso Matemáticas en el semestre académico 2009.2, durante la aplicación de la situación didáctica diseñada.

Características de los alumnos que formaron parte de la observación

La situación didáctica diseñada fue puesta en práctica en el aula con 7 grupos de estudiantes de las carreras de humanidades de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, matriculados en el curso Matemáticas en el semestre 2009.2. Cada uno de estos grupos tenía 50 alumnos en promedio.

Los estudiantes de dos de los grupos observados eran jóvenes que acababan de ingresar a la universidad y tenían entre 16 y 17 años de edad. Como estos alumnos eran ingresantes, se encontraban matriculados en el curso Matemáticas por ser este un curso obligatorio del primer semestre académico, según su plan de estudios. Respecto a los conceptos previos que tenían estos alumnos al empezar el curso Matemáticas, podemos señalar los contenidos revisados en la etapa escolar o en su preparación para postular a la universidad, relacionadas con habilidades de razonamiento matemático y que ellos tenían presentes debido a la cercanía entre su etapa de preparación y el inicio de sus estudios en la universidad.

Los estudiantes de los otros cinco grupos observados eran jóvenes que ya llevaban de uno a tres semestres académicos en la universidad y tenían entre 18 y 20 años de edad. Estos alumnos ya habían llevado el curso Matemáticas (desde su origen exclusivo para estudiantes de las carreras de humanidades) o el curso Matemática 1 (actualmente exclusivo para estudiantes de las carreras de Economía, Gestión y Alta dirección de empresas o Contabilidad) y lo desaprobaron, en cualquiera de los casos, porque les resultó difícil. Otros lo desaprobaron o se retiraron de estos cursos antes de terminar el semestre.

En 5 de los grupos observados, el registro de la información se llevó a cabo a partir de unas fichas de observación (Ver anexo 2) que fueron llenadas por el profesor del horario y sus dos asistentes, lo que nos permitirá comentar algunos resultados cualitativos. En los otros 2 grupos, el registro de la información nos permitirá tener resultados cuantitativos además de los resultados cualitativos, pues se cuenta con las hojas de trabajo de cada uno de los alumnos que participaron en la aplicación de la situación didáctica en el aula. A estos dos últimos grupos los designaremos como: grupo A conformado por 44 estudiantes y grupo B conformado por 57 estudiantes.

Respecto a los estudiantes que formaron parte de la observación, se sabe que en el curso Matemáticas sobre las funciones han revisado los siguientes temas: el concepto de función y sus diferentes representaciones (tabular, gráfica y analítica), la función lineal, la función cuadrática y la función exponencial.

A continuación describimos los comportamientos observados cuando los alumnos resuelven cada una de las situaciones en las que se divide de la situación didáctica diseñada.

Situación 1

Comportamientos observados

A continuación mostramos los resultados de la observación en los 5 primeros grupos.

En la pregunta a)

- Algunos alumnos, al inicio, no tenían claro si Miguel había tomado una o dos dosis de medicamento; otros, no tenían claro el significado de vida media del medicamento. Pero hicieron la consulta al profesor, quien les indico que esta información se encontraba en el enunciado del problema, devolviéndoles de esta manera la responsabilidad de encontrar los datos necesarios para resolver esta pregunta.
- Algunos alumnos asumieron incorrectamente el significado de vida media de un medicamento y completaron las dos últimas filas de la tabla con ceros, tal como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
8	37,5
16	0
24	0

En este caso, el error consistió en asumir que el medicamento disminuía en una cantidad constante e igual a 37,5 mg cada 8 horas. Este error esta asociado a la dificultad que presentan algunos alumnos para tener una lectura comprensiva de enunciados de texto y luego pasar de esa representación en lenguaje natural a una representación diferente como la tabular que es parte de esta pregunta.

- Algunos alumnos entendieron el significado de vida media de un medicamento y completaron la tabla correctamente, tal como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
8	37,5
16	18,75
24	9,375

A continuación mostramos los procedimientos de solución seguidos por tres alumnos al resolver esta pregunta.

Alumno 1	**Alumno 2**	**Alumno 3**
El alumno completó la tabla realizando las siguientes divisiones: $75 : 2 = 37{,}5$ $37{,}5 : 2 = 18{,}75$ $18{,}75 : 2 = 9{,}375$	El alumno completó la tabla realizando las siguientes divisiones: $75 : 2 = 37{,}5$ $75 : 4 = 18{,}75$ $75 : 8 = 9{,}375$	El alumno completó la tabla realizando las siguientes divisiones: $75 : 2^1 = 37{,}5$ $75 : 2^2 = 18{,}75$ $75 : 2^3 = 9{,}375$

En los tres procedimientos anteriores, los alumnos están formando una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, para intervalos iguales de 8 horas. Es decir, están utilizando la característica propia de la función exponencial para resolver el problema, que posteriormente permitirá el surgimiento del concepto de esta función, tal como lo hemos señalado en el análisis epistemológico.

En la pregunta b)

- Algunos alumnos al completar la tabla olvidaban colocar el signo negativo o lo omitían porque pensaban que habían cometido algún error de cálculo e inclusive preguntaron al profesor ¿por qué estos resultados eran negativos?

- En b1) algunos alumnos afirmaban que la variación cada 8 horas era constante indicando que las cantidades disminuían siempre a la mitad. Cabe mencionar que esta dificultad ha sido señalada en el análisis cognitivo.
- En b1) algunos alumnos reconocieron que la variación no era constante a partir de los resultados obtenidos en la tabla de esta parte.
- En b2) respecto a la variación porcentual cada 8 horas, la mayoría de alumnos afirmaba que había una disminución porcentual constante.
- En b2) algunos alumnos no asociaban el signo negativo de los resultados obtenidos en la tabla con la disminución de medicamento en el organismo de Miguel.
- Algunos alumnos preguntaron al profesor ¿por qué la variación porcentual es constante y por qué la variación no lo es?

En la pregunta c)

- Algunos alumnos tenían problemas para graficar y algunos no lograron realizar ningún trazo. En este caso, los alumnos presentaron dificultades para pasar de una representación tabular a una representación gráfica tal como lo hemos señalamos en el análisis cognitivo.
- Algunos alumnos graficaron tramos lineales cada 8 horas, uniendo en forma consecutiva los puntos ubicados en el plano cartesiano. En este caso, los alumnos también presentaron dificultades cognitivas para pasar de una representación tabular a una representación gráfica.
- Algunos alumnos graficaron una curva correspondiente a la gráfica de una función exponencial decreciente, uniendo los puntos ubicados en el plano cartesiano. En este caso, los alumnos también presentaron dificultades cognitivas para pasar de una representación tabular a una representación gráfica.
- Algunos alumnos graficaron solo cuatro puntos en el plano cartesiano.

- Ante la pregunta si por los cuatro puntos ubicados en el plano cartesiano pasa una recta, la mayoría de alumnos responde que no. Algunos justifican su respuesta señalando que es imposible trazar con una regla una recta que pase por dichos puntos, otros lo hacen verificando que los puntos ubicados en el plano cartesiano no satisfacen una ecuación de la forma $f(t) = mt + b$.

A continuación mostramos los resultados de la observación en los grupos A y B.

Grupo A						
Pre gunta	**Estrategias de solución frecuentes**			**Dificultades o errores frecuentes**		
	Cantidad de alumnos	**Porcentaje**	**Descripción de estrategias de solución**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje**	**Descripción de dificultades o errores**
a	44	100%	Obtuvieron los resultados dividiendo la cantidad anterior entre dos o dividiendo la cantidad inicial entre 2,4 y 8.	0	0%	
b	39	88,6%	Obtuvieron los resultados trasladando los valores de la tabla de la parte a) y realizando los cálculos correspondientes.	5	11,4%	No colocaron el signo negativo en los resultados de la variación o variación porcentual. No reconocieron la presencia de una disminución porcentual.
b1	31	70,5%	Determinaron que la variación de la cantidad de medicamento no era constante porque para intervalos de tiempos iguales los resultados eran diferentes.	13	29,5%	8 alumnos confundieron variación con variación porcentual. Estos alumnos afirmaban que la variación era constante señalando que la cantidad de medicamento siempre se reducía a la mitad. 5 alumnos no respondieron la pregunta.
b2	31	70,5%	Determinaron que la variación porcentual de la cantidad de medicamento era constante porque para intervalos de tiempos iguales los resultados obtenidos eran iguales a -50%.	13	29,5%	8 alumnos confundieron variación con variación porcentual y afirmaban que la variación porcentual no era constante. 5 alumnos no respondieron la pregunta.

c	5	11,4%	Ubicaron los puntos correspondientes en el plano cartesiano, utilizando los resultados obtenidos en la tabla de la parte a). Afirmaron que por estos puntos no pasa una recta porque estos no satisfacían una ecuación de la forma $f(t) = mt + b$.	39	88,6%	34 alumnos graficaron curvas de funciones exponenciales decrecientes 1 alumno grafico tramos lineales cada 8 horas. 4 alumnos no realizaron ningún trazo.

Grupo B						
Pregunta	**Estrategias de solución frecuentes**			**Dificultades o errores frecuentes**		
	Cantidad de alumnos	**Porcentaje**	**Descripción de estrategias de solución**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje**	**Descripción de dificultades o errores**
a	57	100%	Obtuvieron los resultados dividiendo la cantidad anterior entre dos o dividiendo la cantidad inicial entre 2, 2^2 y 2^3.	0	0%	
b	57	100%	Obtuvieron los resultados trasladando los valores de la tabla de la parte a) y realizando los cálculos adecuados incluyendo los signos correspondientes.	0	0%	
b1	55	96,5%	Determinaron que la variación de la cantidad de medicamento no era constante porque cada 8 horas la cantidad anterior se reducía a la mitad.	2	3,5%	Confundieron variación con variación porcentual.
b2	55	96,5%	Determinaron que la variación porcentual de la cantidad de medicamento era constante porque cada 8 horas disminuía en 50%.	2	3,5%	Confundieron variación con variación porcentual.

c	0	0%		57	100%	54 alumnos graficaron curvas de funciones exponenciales decrecientes 3 alumnos graficaron tramos lineales cada 8 horas. Respecto a la afirmación, respondieron que por estos puntos no pasa una recta.

A partir de los resultados mostrados en las tablas anteriores, observamos dos dificultades frecuentes en los alumnos. Una de ellas es que confunden variación con variación porcentual, asumiendo que es lo mismo o intercambiando sus definiciones, lo que podría ser un obstáculo cognitivo o didáctico. La otra dificultad se presenta cuando los alumnos intentan graficar los resultados obtenidos en la tabla de la parte a) de esta situación, pues realizan trazos lineales por tramos cada 8 horas o grafican curvas de funciones exponenciales decrecientes en lugar graficar los puntos que corresponden. Aquí se hace evidente la dificultad cognitiva que tienen los alumnos para pasar de una representación tabular a una representación gráfica.

Por otro lado, también podemos señalar que los comportamientos observados en los estudiantes frente a cada pregunta de esta situación, registrados durante la experimentación, corresponden en gran medida con los comportamientos esperados señalados en el análisis a priori.

Situación 2

Comportamientos observados

A continuación mostramos los resultados de la observación en los 5 primeros grupos.

En la pregunta a)

- Algunos alumnos tuvieron dificultad para utilizar la información que indicaba que la variación porcentual era constante por hora y realizaron lo siguiente: dividieron $\frac{50\%}{8} = 6{,}25\%$ y calcularon $6{,}25\%(75) = 4{,}6875$. Luego, completaron las filas de la tabla disminuyendo 4,6875 mg a la cantidad anterior, tal como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	70,3125
2	65,625
3	60,9375
4	56,25

En este caso, se presentaron dos errores, primero calcularon incorrectamente el porcentaje de disminución y luego asumieron que la variación era constante. El último error podría ser es considerado como una dificultad cognitiva o didáctica.

- Algunos alumnos dividieron $\frac{75}{8} = 9{,}375$ mg y completaron las filas de la tabla restando 9,375 mg a la cantidad anterior, tal como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	65,625
2	56,625
3	46,875
4	37,5

En este caso, el error consistió en asumir que existía una variación constante y por ello obtuvieron valores incorrectos como los mostrados en la tabla anterior. Este error debería ser de fácil reconocimiento por parte de los alumnos pues según esta tabla, luego de 4 horas habría 37,5 mg de medicamento en el organismo de Miguel, lo cual no es correcto porque de ser así no existiría correspondencia con la vida media del medicamento, que indica que habría esta cantidad de medicamento en el organismo de Miguel luego de 8 horas.

- Algunos alumnos dividieron $\frac{50\%}{8} = 6{,}25\%$ y completaron las filas de la tabla utilizando este porcentaje de disminución constante por hora, tal como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	70,31
2	65,92
3	61,8
4	57,94

En este caso, el error consistió en asumir que la disminución porcentual constante es igual a 6,25%, lo cual es incorrecto porque este porcentaje no corresponde al porcentaje de disminución constante después de cada hora que es igual a 8,3%. Como podemos observar aquí se presenta una dificultad cognitiva.

- Algunos alumnos multiplicaron por una constante k la cantidad anterior y completaron la tabla formando la siguiente progresión geométrica:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	$75k$
2	$75k^2$
3	$75k^3$
4	$75k^4$
5	$75k^5$
6	$75k^6$
7	$75k^7$
8	$75k^8$

Luego, utilizando la información de la vida media dada en la situación 1, igualaron $75k^8 = 37{,}5$ y obtuvieron $k = 0{,}917$. Finalmente, con este valor de k reemplazaron en las filas de la tabla y la completaron tal como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	68,775
2	63,067
3	57,832
4	53,032

En este caso, los alumnos completaron la tabla utilizando $k = 0{,}917 = 91{,}7\%$, que corresponde al porcentaje constante de medicamento que queda en el organismo de Miguel luego de cada hora, sin necesidad de calcular la disminución porcentual de medicamento luego de cada hora que también es constante e igual a $100\% - 91{,}7\% = 8{,}3\%$. Cabe señalar que estos alumnos, al formar una progresión geométrica, están utilizando como estrategia de solución la característica propia de la función exponencial.

A continuación mostramos los procedimientos de solución presentados por dos alumnos al resolver esta pregunta.

<table>
<tr><th>Alumno 1</th><th>Alumno 2</th></tr>
<tr>
<td>
El alumno formó una progresión geométrica de la siguiente manera:
75
$75\left(\frac{x}{100}\right)$
$75\left(\frac{x}{100}\right)^2$
$75\left(\frac{x}{100}\right)^3$
$\vdots$
$75\left(\frac{x}{100}\right)^8$
Luego, resolvió la siguiente ecuación $75\left(\frac{x}{100}\right)^8 = 37{,}5$ y obtuvo $x = 91{,}7$.
Luego, con este valor de x completó la tabla tal como se muestra a continuación:
<table>
<tr><th>Tiempo t (en horas)</th><th>Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>75</td></tr>
<tr><td>1</td><td>68,775</td></tr>
<tr><td>2</td><td>63,067</td></tr>
<tr><td>3</td><td>57,832</td></tr>
<tr><td>4</td><td>53,032</td></tr>
</table>
</td>
<td>
El alumno formó una progresión geométrica de la siguiente manera:
75
$75(x\%)$
$75(x\%)^2$
$75(x\%)^3$
$75(x\%)^4$
$\vdots$
$75(x\%)^8$
Luego, resolvió la siguiente ecuación $75(x\%)^8 = 37{,}5$ y obtuvo $x = 91{,}7$.
Luego, con este valor de x completó la tabla tal como se muestra a continuación:
<table>
<tr><th>Tiempo t (en horas)</th><th>Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>75</td></tr>
<tr><td>1</td><td>68,775</td></tr>
<tr><td>2</td><td>63,067</td></tr>
<tr><td>3</td><td>57,832</td></tr>
<tr><td>4</td><td>53,032</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

En ambos casos, los alumnos completaron la tabla considerando que el porcentaje de medicamento que quedaba en el organismo de Miguel luego de una hora era constante. Por ello formaron una progresión geométrica de razón igual a $\frac{x}{100}$ ó $x\%$, para valores de t que formaban una progresión aritmética de razón igual a 1. Cabe señalar que estos alumnos están utilizando como estrategia de solución la característica propia de la función exponencial, que permitirá que emerja el concepto de esta función.

En la pregunta b)

- Algunos alumnos confundieron variación con variación porcentual y concluyeron que ambas eran constantes o que solo la variación era constante. Esta dificultad podría ser un obstáculo cognitivo o didáctico.
- Algunos alumnos no reconocieron que el signo negativo de los resultados estaba asociado a una disminución o disminución porcentual de medicamento luego de cada hora.
- En b1) algunos alumnos asumieron que había una disminución de medicamento constante.
- En b2) algunos alumnos reconocieron que había una disminución porcentual, pero afirmaron que no era constante debido a errores de cálculo o de aproximación decimal en los resultados de la tabla.

A continuación presentamos los procedimientos de solución seguidos por tres alumnos:

Alumno 1

Este alumno completó la tabla de la siguiente manera:

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \frac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$\left[0;1\right]$	75	70,3125	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{75}\times 100\% = -6,25\%$
$\left[1;2\right]$	70,3125	65,625	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{75}\times 100\% = -6,25\%$
$\left[2;3\right]$	65,625	60,9375	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{75}\times 100\% = -6,25\%$
$\left[3;4\right]$	60,9375	56,25	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{75}\times 100\% = -6,25\%$

En este caso, en la cuarta columna de esta tabla el error se debe a que asumieron una disminución constante de medicamento después de cada hora y en la quinta columna, además de asumir una variación constante de medicamento por hora, cometen errores en el cálculo de la variación porcentual al considerar para todos los intervalos de tiempo la misma cantidad inicial igual a 75 mg. Aquí, el alumno concluye que tanto la variación como la variación porcentual de medicamento por hora son constantes, lo que corresponde a un obstáculo cognitivo.

Alumno 2

Este alumno completó la tabla de la siguiente manera:

Intervalo de tiempo $[t_i;t_f]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \frac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$[0;1]$	75	70,3125	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{75} \times 100\% = -6,25\%$
$[1;2]$	70,3125	65,625	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{70,3125} \times 100\% = -6,67\%$
$[2;3]$	65,625	60,9375	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{65,625} \times 100\% = -7,14\%$
$[3;4]$	60,9375	56,25	$-4,6875$	$-\frac{4,6875}{60,9375} \times 100\% = -7,69\%$

En este caso, en la cuarta columna el error se debe a que asumen una disminución constante igual a $\frac{18,75}{4} = 4,6875$ mg y en la quinta columna utilizando esta disminución constante obtienen una disminución porcentual variable. Aquí, el alumno concluye que la variación es constante y que la variación porcentual es variable, lo que no corresponde con la información dada al inicio de esta actividad en la que se indica que la variación porcentual por hora es constante. Cabe señalar que esta confusión entre variación y variación porcentual corresponde a una dificultad cognitiva.

Alumno 3

Este alumno completó la tabla de la siguiente manera:

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$\left[0;1\right]$	75	70,31	$-4{,}69$	$-6{,}25\%$
$\left[1;2\right]$	70,31	65,92	$-4{,}39$	$-6{,}24\%$
$\left[2;3\right]$	65,92	61,8	$-4{,}12$	$-6{,}25\%$
$\left[3;4\right]$	61,8	57,94	$-3{,}86$	$-6{,}25\%$

En este caso, en la cuarta columna la variación es variable y en la quinta columna la variación porcentual también es variable debido al resultado obtenido en la segunda fila de la quinta columna de la tabla, diferente a los demás. Aquí, el alumno concluye que tanto la variación como la variación porcentual de medicamento por hora son variables, lo que evidencia la presencia de un obstáculo cognitivo.

- En b1) algunos alumnos determinaron que la variación de medicamento después de cada hora era variable a partir de los resultados obtenidos en la tabla de esta parte.
- En b2) algunos alumnos determinaron que la disminución porcentual de medicamento después de cada hora era constante e igual a 8,3% a partir de los resultados obtenidos en la tabla de esta parte.
- Algunos alumnos trasladaron los datos de la tabla de la parte a) y obtuvieron los resultados correctos, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo $[t_i;t_f]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \frac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$[0;1]$	75	68,775	$-6{,}225$	$-\frac{6{,}225}{75} \times 100\% = -8{,}3\%$
$[1;2]$	68,775	63,067	$-5{,}708$	$-\frac{5{,}708}{68{,}775} \times 100\% = -8{,}3\%$
$[2;3]$	63,067	57,832	$-5{,}235$	$-\frac{5{,}235}{63{,}067} \times 100\% = -8{,}3\%$
$[3;4]$	57,832	53,032	$-4{,}8$	$-\frac{4{,}8}{57{,}832} \times 100\% = -8{,}3\%$

En este caso, los alumnos concluyeron que la disminución de medicamento por hora era variable, pero que la disminución porcentual de medicamento por hora era constante. Aquí podríamos señalar que los alumnos estarían comprobando la presencia de la característica propia de la función exponencial relacionada con la variación porcentual constante para intervalos de tiempo constantes, señalada en el análisis epistemológico.

En la pregunta c)

- Algunos alumnos no lograron determinar ninguna expresión. En este caso, los alumnos presentan una dificultad cognitiva al intentar pasar de una representación a otra.
- Algunos alumnos determinaron expresiones de funciones lineales tales como: $f(t) = 75 - (75 - 6{,}25t)$ ó $f(t) = at + b$ ó $f(t) = -4{,}6875t + 75$, $0 \le t \le 8$, donde t es el tiempo trascurrido luego de que Miguel ingirió la primera dosis de medicamento. En este caso, los alumnos no lograron reconocer la relación que existe entre la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel en miligramos y el tiempo t en horas, evidenciando una dificultad epistemológica.
- Algunos alumnos determinan expresiones de funciones de tipo exponencial pero con errores como por ejemplo: $C(t) = 75(91{,}7)^t$. Cabe señalar que aquí se presenta un obstáculo cognitivo.

- Algunos alumnos determinaron la expresión pedida descartando la posibilidad de que correspondiera a una función lineal de la forma $f(t) = mt + b$ o una función cuadrática de la forma $f(t) = at^2 + bt + c$, para lo cual reemplazaron un par de puntos en dichas expresiones y resolvieron el sistema de ecuaciones que se formaba. Cabe señalar que aquí se presenta un obstáculo epistemológico.

  Algunos alumnos reconocieron que el porcentaje de medicamento que queda en el organismo después de cada hora era constante y determinaron la expresión pedida utilizando un factor constante k que indicaba el porcentaje de medicamento que iba quedando en el organismo después de cada hora, obteniendo la siguiente progresión geométrica:

  $$75; 75k; 75k^2; 75k^3; 75k^4; 75k^5; 75k^6; 75k^7; 75k^8$$

  donde k es la razón geométrica de la progresión.

  Luego, igualaron $37{,}5 = 75a^8$ y obtuvieron $a = \sqrt[8]{\dfrac{1}{2}} = 0{,}917$.

  Finalmente, obtuvieron la expresión pedida igual a : $C(t) = 75(0{,}917)^t$.

  En este caso, los alumnos utilizaron como estrategia de solución la característica propia de la función exponencial, relacionada con las progresiones, que permitirá que emerja el concepto de esta función.

- Algunos alumnos reconocieron que la expresión matemática pedida estaba asociada a una función exponencial de la forma $f(t) = ka^t$. Luego, reemplazaron los siguientes valores: $C(0) = 75$ y $C(8) = 37{,}5$ y obtuvieron la siguiente expresión: $C(t) = 75\left(\sqrt[8]{\dfrac{1}{2}}\right)^t$.

- Respecto a las características de la expresión obtenida, $C(t) = 75(0{,}917)^t$, los alumnos reconocieron que 75 era la cantidad inicial de medicamento en el organismo, 0,917 era el porcentaje de la cantidad de medicamento que queda en la sangre, t es el tiempo transcurrido luego de haber tomado la primera dosis.

En la pregunta d)

- Algunos alumnos graficaron la curva de una función exponencial decreciente.
- Algunos alumnos graficaron tramos lineales cada 8 horas. Cabe mencionar que esta es una dificultad señalada a partir de nuestra experiencia docente.
- Algunos alumnos graficaron una recta de pendiente negativa.
- Algunos alumnos no realizaron ningún trazo. Aquí podríamos señalar que los alumnos tienen dificultades cognitivas para pasar de una representación algebraica a una representación grafica.
- Algunos alumnos graficaron una sucesión de puntos por los que podría pasar una recta.
- Algunos alumnos graficaron puntos que pertenecen a una curva exponencial decreciente.

A continuación mostramos los resultados de la observación en los grupos A y B.

Grupo A						
Pregunta	**Estrategias de solución frecuentes**			**Dificultades o errores frecuentes**		
	Cantidad de alumnos	**Porcentaje**	**Descripción de estrategias de solución**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje**	**Descripción de dificultades o errores**
a	25	56,8%	Formaron una progresión geométrica multiplicando la cantidad anterior por $\frac{x}{100}$ y obtuvieron la siguiente ecuación $75\left(\frac{x}{100}\right)^8 = 37{,}5$, de donde $x = 91{,}7\%$. Luego, reemplazaron este valor y completaron la tabla. Formaron una progresión geométrica multiplicando la cantidad anterior por a y obtuvieron la siguiente ecuación $37{,}5 = 75a^8$, de donde $a = \sqrt[8]{0{,}5}$. Luego, reemplazaron este valor y completaron la tabla. Formaron una progresión geométrica multiplicando la cantidad anterior por $(1+r)$ y obtuvieron la siguiente ecuación $37{,}5 = 75(1+r)^8$, de donde $r = -0{,}082$. Luego, reemplazaron este valor y completaron la tabla.	19	43,2%	Dividieron 50%: 8 = 6,25% y utilizaron este resultado como el porcentaje de disminución de medicamento después de cada hora. Dividieron 37,5 : 8 = 4,6875 y utilizaron este valor para disminuir la cantidad de medicamento después de cada hora.

b	18	40,9%	Trasladaron los datos de la tabla de la parte a) y obtuvieron los resultados correctos, indicando el signo negativo en cada resultado.	26	59,1%	16 alumnos utilizaron los resultados incorrectos de la tabla de la parte a) y determinaron que la variación era constante y que la variación porcentual era variable. 10 alumnos reconocieron que había una disminución porcentual, pero afirmaron que no era constante debido a errores de cálculo o de aproximación decimal. 1 alumno determinó que la variación era constante e igual a -4,68 y que la variación porcentual también era constante e igual a -6,25%.
b1	18	40,9%	Determinaron que había una disminución de medicamento variable después de cada hora.			Confundieron variación con variación porcentual y afirmaron que la variación de medicamento después de cada hora era constante e igual a -4,68 mg.
b2	18	40,9%	Determinaron que la disminución porcentual de medicamento después de cada hora era constante e igual a 8,3%.			Confundieron variación con variación porcentual y afirmaron que la variación porcentual de medicamento después de cada hora era variable.

c	20	45,5%	Utilizaron la ecuación de la parte a) igual a $37{,}5 = 75\,a^8$, donde $a = \sqrt[8]{\frac{1}{2}} = 0{,}917$. Luego, obtuvieron alguna de las siguientes expresiones: $C(t) = 75(0{,}917)^t$ ó $C(t) = 75\left(\sqrt[8]{\frac{1}{2}}\right)^t$ Reconocieron que había una función exponencial de la forma $C(t) = k\,a^t$. Luego, reemplazaron $C(0) = 75$ y $C(8) = 37{,}5$, y obtuvieron la siguiente expresión: $C(t) = 75\left(\sqrt[8]{\frac{1}{2}}\right)^t$ No comentaron las características de la expresión obtenida.	24	54,5%	1 alumno obtuvo la expresión: $f(t) = 75 - (75 - 6{,}25t)$ 1 alumno obtuvo la siguiente expresión: $f(t) = at + b$ 1 alumno obtuvo la siguiente expresión: $f(t) = -4{,}6875t + 75$ 11 alumnos reconocieron que había una función exponencial involucrada, pero no la determinaron. 10 alumnos no determinaron ninguna expresión. No comentaron las características de la expresión obtenida.
d	33	75%	Trazaron una curva exponencial decreciente. No señalaron su acuerdo o desacuerdo con la afirmación que se pedía analizar.	11	25%	3 alumnos graficaron una recta con pendiente negativa. 7 alumnos no realizaron ningún trazo. 1 alumno dibujó una sucesión de puntos por los que podría pasar una recta. No señalaron su acuerdo o desacuerdo con la afirmación que se pedía analizar.

Grupo B						
Pre gunta	**Estrategias de solución frecuentes**			**Dificultades o errores frecuentes**		
	Cantidad de alumnos	**Porcentaje**	**Descripción de estrategias de solución**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje**	**Descripción de dificultades o errores**
a	47	82,5%	Formaron una progresión geométrica multiplicando la cantidad anterior por $x\%$ y obtuvieron la siguiente ecuación $75(x\%)^8 = 37{,}5$, de donde $x = 91{,}7$. Luego, reemplazaron este valor y completaron la tabla. Formaron una progresión geométrica multiplicando la cantidad anterior por $\left(\frac{k}{100}\right)$ y obtuvieron la siguiente ecuación: $37{,}5 = 75\left(\frac{k}{100}\right)^8$, de donde $k = 91{,}7$. Luego, reemplazaron este valor y completaron la tabla. Formaron una progresión geométrica multiplicando la cantidad anterior por k y obtuvieron la siguiente ecuación: $37{,}5 = 75k^8$, de donde $k = \sqrt[8]{0{,}5}$. Luego, reemplazaron este valor y completaron la tabla.	10	17,5%	Dividieron 37,5 : 8 = 4,6875 y utilizaron este valor para disminuir la cantidad de medicamento después de cada hora.

b	47	82,5%	Trasladaron los datos de la tabla de la parte a) y obtuvieron los resultados correctos, indicando el signo negativo en cada resultado.	10	17,5%	Confundieron variación con variación porcentual, argumentando que la cantidad siempre se reducía a la mitad e interpretando dicha afirmación como una disminución constante en lugar de un decrecimiento porcentual constante.
b1	47	82,5%	Determinaron que había una disminución de medicamento variable después de cada hora.	10	17,5%	4 alumnos concluyeron que la variación no era constante porque no utilizaban aproximaciones decimales. 2 alumnos afirmaron que la variación era constante e igual a -4,6875.
b2	47	82,5%	Determinaron que la disminución porcentual de medicamento después de cada hora era constante e igual a 8,3%.	10	17,5%	4 alumnos concluyeron que la variación porcentual no era constante porque no aproximaron con la misma cantidad de decimales. 2 alumnos afirmaron que la variación porcentual no era constante, pero la variación si lo era.

c	41	71,9%	Utilizaron la ecuación de la parte a) igual a $37,5 = 75a^8$, donde $a = \sqrt[8]{\frac{1}{2}} = 0,917$. Luego, obtuvieron alguna de las siguientes expresiones: $C(t) = 75(0,917)^t$ ó $C(t) = 75\left(\sqrt[8]{\frac{1}{2}}\right)^t$ Utilizaron la ecuación de la parte a) igual a $37,5 = 75\left(\frac{k}{100}\right)^8$, donde $k = 91,7$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $C(t) = 75\left(\frac{91,7}{100}\right)^t$ Reconocieron que había una función exponencial de la forma $C(t) = k\,a^t$. Reemplazaron los valores $C(0) = 75$ y $C(8) = 37,5$, resolvieron el sistema que se formó y obtuvieron la siguiente expresión: $C(t) = 75\left(\sqrt[8]{\frac{1}{2}}\right)^t$ No comentaron las características de la expresión obtenida.	16	28,1%	2 alumnos obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = -4,6875t + 75$, $0 \le t \le 8$ 4 alumnos obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 75\left(1 - \frac{1}{16}\right)^t$ No comentaron las características de la expresión obtenida.

d	37	64,9%	Trazaron la curva de una función exponencial decreciente. No manifestaron su acuerdo o desacuerdo con la afirmación que se les pedía analizar.	20	35,1%	6 alumnos graficaron una recta con pendiente negativa. 1 alumno graficó puntos que pertenecían a una curva exponencial decreciente. No manifestaron su acuerdo o desacuerdo con la afirmación que se pedía analizar.

A partir de los resultados mostrados en las tablas anteriores, observamos que en el grupo A los alumnos presentan mayores dificultades para determinar la expresión matemática pedida, llegando a expresiones que corresponden a funciones lineales debido a que consideran que la variación de medicamento después de cada hora es constante, evidenciando dificultades epistemológicas y cognitivas.

También, observamos que en ambos grupos, los alumnos logran presentar una gráfica correcta en la parte d) a pesar de no tener la expresión que se pide en la parte c) debido a que utilizan los resultados obtenidos en la tabla de la parte a) y a partir de ella realizan el trazo continuo de una función exponencial decreciente. En este caso, podemos señalar que a pesar de no lograr una representación algebraica para la función pedida, logran pasar de una representación tabular a una representación gráfica.

Por otro lado, también observamos que los comportamientos observados en los estudiantes frente a cada pregunta, durante la experimentación de esta situación, tienen gran correspondencia con los comportamientos esperados, señalados en el análisis a priori.

Situación 3

Comportamientos observados

A continuación mostramos los resultados de la observación en los 5 primeros grupos.

En la pregunta a)

- Algunos alumnos determinaron expresiones de funciones exponenciales, para cada tratamiento, pero con errores en las bases, evidenciando dificultades epistemológicas.
- Algunos alumnos determinaron expresiones de funciones exponenciales, para cada tratamiento, utilizando la misma estrategia de solución utilizada en la parte c) de la situación 2. A continuación presentamos los procedimientos seguidos por dos alumnos:

  Alumno 1

  Para el tratamiento 1, el alumno determinó la siguiente ecuación: $550k^{12} = 275$ y al resolverla obtuvo $k = 0{,}9438$. Luego, escribió como respuesta la siguiente expresión: $f(t) = 550(0{,}9438)^t$.

  Para el tratamiento 2, el alumno determinó la siguiente ecuación: $500k^2 = 250$ y al resolverla obtuvo $k = 0{,}707$. Luego, escribió como respuesta la siguiente expresión: $f(t) = 500(0{,}707)^t$.

  Alumno 2

  Para el tratamiento 1, el alumno determinó la siguiente ecuación: $550\left(\frac{k}{100}\right)^{12} = 275$ y al resolverla obtuvo $k = 94{,}38$. Luego, escribió como respuesta la siguiente expresión: $f(t) = 550\left(\frac{94{,}38}{100}\right)^t$.

Para el tratamiento 2, el alumno determinó la siguiente ecuación: $500\left(\dfrac{k}{100}\right)^2 = 250$ y al resolverla obtuvo $k = 70,7$. Luego, escribió como respuesta la siguiente expresión: $f(t) = 500\left(\dfrac{70,7}{100}\right)^t$.

En estos casos, los alumnos están utilizando a la función exponencial como estrategia de solución para resolver la situación propuesta, que resulta de realizar cambios a las variables didácticas. Lo que nos permitiría decir que los alumnos están construyendo el concepto de función exponencial.

- Algunos alumnos obtuvieron las expresiones pedidas cambiando los valores correspondientes en la expresión obtenida en la parte c) de la situación 2, reconociendo en esta expresión la cantidad constante es igual a la dosis inicial de medicamento y que la base de dicha expresión es igual al porcentaje de medicamento que queda en el organismo luego de t horas. Es decir:

  Para el tratamiento 1, en la expresión obtenida en la situación 2c, los alumnos reemplazaron la cantidad inicial de 75 mg por 550 mg y el valor de la base de 0,917 por 0,9438; siendo este último valor hallado al resolver la siguiente ecuación $550k^{12} = 275$. Luego, obtuvieron la expresión pedida igual a: $f(t) = 550(0,9438)^t$.

  Para el tratamiento 2, en la expresión obtenida en la situación 2c, los alumnos reemplazaron la cantidad inicial de 75 mg por 500 mg y el valor de la base de 0,917 por 0,707; siendo este último valor hallado al resolver la siguiente ecuación $500k^2 = 250$. Luego, obtuvieron la expresión pedida igual a: $f(t) = 500(0,707)^t$.

  En este caso, los alumnos están utilizando a la función exponencial como estrategia de solución para resolver la situación propuesta, reconociendo los cambios realizados a las variables didácticas de la situación didáctica y realizando por analogía los reemplazos correspondientes en las expresiones obtenidas en la situación 2c. Lo que nos permitiría decir que los alumnos están construyendo el concepto de función exponencial.

En la pregunta b)

- Algunos alumnos obtuvieron porcentajes de disminución incorrectos porque utilizaron expresiones incorrectas halladas en la parte a) para cada tratamiento.
- Algunos alumnos, para cada tratamiento, realizaron el cálculo de la variación porcentual reemplazando dos valores consecutivos de t en las expresiones obtenidas en la parte a) y luego reemplazando dichos valores en la siguiente fórmula: $Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$.

A continuación mostramos los procedimientos seguidos por dos grupos de alumnos.

Grupo 1

Para el tratamiento 1, los alumnos realizaron los siguientes reemplazos:

Para $t = 1$: $f(1) = 519{,}09$

Para $t = 2$: $f(2) = 489{,}91$

Luego, calcularon la variación porcentual reemplazando los valores correspondientes en la fórmula de variación porcentual obteniendo lo siguiente:

$$Variación\ porcentual = \frac{489{,}91 - 519{,}09}{519{,}09} \times 100\% = -5{,}62\%\,.$$

En este caso, los alumnos están utilizando la característica propia de la función exponencial, relacionada con la variación porcentual constante, como estrategia de solución, construyendo de esta manera el concepto de dicha función.

Grupo 2

Para el tratamiento 1, los alumnos realizaron los siguientes reemplazos:

Para $t = 1$: $f(1) = 519{,}09$

Para $t = 2$: $f(2) = 489{,}91$

Luego, calcularon la variación porcentual reemplazando los valores en la fórmula de variación porcentual de la siguiente manera:

$$Variación\ porcentual = \frac{489{,}91 - 519{,}09}{489{,}91} \times 100\% = -5{,}956\%$$

En este caso, los alumnos cometen el error de dividir la variación entre la cantidad final en lugar de dividirla entre la cantidad inicial, obteniendo un resultado incorrecto y evidenciando dificultades epistemológicas.

- Algunos alumnos obtuvieron el porcentaje de medicamento que elimina Miguel de su organismo, en cada tratamiento, restando el porcentaje de medicamento que queda en el organismo de Miguel del 100%, tal como se muestra a continuación:

  Para el tratamiento 1, los alumnos obtuvieron los siguientes resultados: $1-0{,}94=0{,}06=6\%$ ó $1-0{,}9438=0{,}0562=5{,}62\%$, dependiendo de las aproximaciones realizadas.

  Para el tratamiento 2, los alumnos obtuvieron el siguiente resultado: $1-0{,}707=0{,}293=29{,}3\%$.

  En este caso, los alumnos reconocieron los elementos de la expresión obtenida en la parte a) de esta situación y obtuvieron sus respuestas realizando los reemplazos correspondientes a partir de la nueva información recibida.

En la pregunta c)

- Algunos alumnos, para cada tratamiento, representaron graficas de funciones exponenciales decrecientes.
- Algunos alumnos, para cada tratamiento, representaron rectas con pendientes negativas o tramos lineales cada hora. Cabe mencionar que esta dificultad fue reconocida en nuestra experiencia docente.

A continuación mostramos los resultados de la observación en los grupos A y B.

Grupo A						
Pre gunta	**Estrategias de solución frecuentes**			**Dificultades o errores frecuentes**		
	Cantidad de alumnos	**Porcentaje**	**Descripción de estrategias de solución**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje**	**Descripción de dificultades o errores**
a	34	77,3%	Utilizaron una estrategia de solución similar a la empleada en la situación 2c) y obtuvieron, para el tratamiento 1, la siguiente ecuación: $275 = 550\left(\frac{k}{100}\right)^{12}$, donde $k = 94$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 550(0{,}94)^t$. De manera similar, para el tratamiento 2, obtuvieron la siguiente ecuación: $250 = 500\left(\frac{k}{100}\right)^{2}$, donde $a = 70{,}7$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 500(0{,}707)^t$ Otros, para el tratamiento 1, utilizaron la ecuación $275 = 550k^{12}$, donde $k = 0{,}9438$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 550(0{,}9478)^t$. De manera similar, para el tratamiento 2, utilizaron la ecuación: $250 = 500k^2$ donde $k = 0{,}707$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 500(0{,}707)^t$	10	22,7%	No lograron determinar ninguna expresión o determinaron expresiones de funciones exponenciales con errores en los valores de las bases como por ejemplo: $f(t) = 75(0{,}5)^t$

b	34	77,3%	Calcularon la variación porcentual utilizando la fórmula $\%Variación = \frac{C_f - C_i}{C_i} \cdot 100\%$ y evaluando la expresión obtenida en la parte a) para dos valores consecutivos de t. Para el tratamiento 1, realizaron los siguientes reemplazos $t = 1 : f(1) = 519{,}09$ $t = 2 : f(2) = 489{,}91$ y luego determinaron $\%Variación = -5{,}62\%$. Calcularon, para el tratamiento 1, la variación porcentual a partir de la expresión obtenida en la parte a) de la siguiente manera: $1 - 0{,}94 = 0{,}6 = 6\%$ Para el tratamiento 2, calculan la variación porcentual de la siguiente manera: $1 - 0{,}707 = 0{,}293 = 29{,}3\%$	10	22,7%	Hallaron valores incorrectos para la variación porcentual debido a que utilizaron las expresiones incorrectas que obtuvieron en la parte a).
c	32	72,7%	Graficaron curvas de funciones exponenciales decrecientes para cada tratamiento.	12	27,3%	Graficaron curvas de funciones exponenciales crecientes. No realizaron ningún gráfico.

Grupo B						
Pregunta	Estrategias de solución frecuentes			Dificultades o errores frecuentes		
	Cantidad de alumnos	Porcentaje	Descripción de estrategias de solución	Cantidad de alumnos	Porcentaje	Descripción de dificultades o errores
a	39	68,4%	Utilizaron una estrategia de solución similar a la empleada en la situación 2c) y obtuvieron, para el tratamiento 1, la siguiente ecuación: $550(k\%)^{12} = 275$, donde $k = 94{,}38$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 550(0{,}9438)^t$. De manera similar, para el tratamiento 2, obtuvieron la siguiente ecuación: $500(k\%)^2 = 250$, donde $k = 70{,}7$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 500(0{,}707)^t$.	18	31,6%	No determinaron ninguna expresión.

b	39	68,4%	Calcularon, para el tratamiento 1, la variación porcentual reconociendo que $0{,}9438 = 94{,}38\%$ era el porcentaje que quedaba en el organismo después de cada hora. Por tal, el porcentaje que se elimina del organismo después de cada hora era igual a $100\% - 94{,}38\% = 5{,}62\%$. De manera similar, para el tratamiento 2, , reconocieron que $70{,}7\%$ era el porcentaje de medicamento que quedaba en el organismo después de cada hora y $100\% - 70{,}7\% = 29{,}3\%$ era el porcentaje que se eliminaba del organismo después de cada hora.. Calcularon la variación porcentual reemplazando dos valores de t consecutivos, $t = 1$ y $t = 2$, en las expresiones obtenidas en la parte a) y obtuvieron, para el tratamiento 1, -6% ó -5,62%, y para el tratamiento 2, -29,3%, dependiendo de la aproximación decimal que utilizaron.	18	31,6%	9 alumnos no respondieron la pregunta. 4 alumnos consideraron que había una variación porcentual constante e igual a 50%
c	31	54,4%	Graficaron curvas de funciones exponenciales decrecientes para cada tratamiento..	26	45,6%	1 alumno graficó la curva de una función exponencial creciente. 19 alumnos no realizaron ningún gráfico.

A partir de los resultados mostrados en las tablas anteriores, al realizar cambios a las variables didácticas; es decir, a la cantidad inicial de medicamento y al tiempo de vida del medicamento, los alumnos logran reajustar sus estrategias de solución y en un porcentaje mayor al 50% obtienen los resultados esperados indicados en el análisis a priori.

Por otro lado, observamos que los comportamientos observados en los estudiantes frente a cada pregunta de esta situación corresponden en gran medida con los comportamientos esperados señalados en el análisis a priori.

Situación 4

Comportamientos observados

A continuación mostramos los resultados de la observación en los 5 primeros grupos.

En la pregunta a)

- Algunos alumnos completaron la tabla con errores, tal como se muestra a continuación:

Año t	Cantidad de dinero al inicio del año t (en Nuevos Soles)	Interés obtenido al final del año t (en Nuevos Soles)	Cantidad de dinero al final del año t (en Nuevos Soles)
1	10 000	950	10950
2	10950	2179,32	13129,32
3	13129,32	4108,59	17237,9
4	17237,91	7544,36	24782,25

En este caso, el error consistió en utilizar un aumento porcentual de 19% para el segundo año, de 31,29% para el tercer año y de 43,76% para el cuarto año. Aquí podríamos decir que se esta presentando un obstáculo cognitivo.

- En a1) y a2) algunos alumnos confundieron variación con variación porcentual.
- Algunos alumnos realizaron los cálculos correctos en cada columna y completaron la tabla tal como se muestra a continuación:

Año t	Cantidad de dinero al inicio del año t (en Nuevos Soles)	Interés obtenido al final del año t (en Nuevos Soles)	Cantidad de dinero al final del año t (en Nuevos Soles)
1	10 000	950	10950
2	10950	1040,25	11990,25
3	11990,25	1139,07375	13129,32375
4	13129,32375	1247,285756	14376,60951

En este caso, los alumnos utilizaron un incremento porcentual constante igual a la 9,5% indicado en el enunciado de la situación, tal como se esperaba.

- En a1) algunos alumnos concluyeron que la variación no era constante debido a que al calcular las diferencias entre los montos acumulados entre un par de años consecutivos, obtuvieron resultados diferentes, tal como se muestra a continuación:

  Del año 1 al año 2, la variación fue de $11990{,}25 - 10950 = S/.1040{,}25$

  Del año 2 al año 3, la variación fue de $13129{,}32 - 11990{,}25 = S/.1139{,}07$

  En este caso, los alumnos respondieron lo esperado utilizando los valores de la tabla que completaron anteriormente.

- En a2) algunos alumnos concluyeron que había un aumento porcentual constante e igual a 8,68% ó 8,6757% al realizar los cálculos entre un par de años consecutivos, tal como se muestra a continuación:

  Del año 1 al año 2, la variación fue de $\%Variación = \dfrac{11990{,}25 - 10950}{10950} \times 100\% = 8{,}68\%$.

  Del año 2 al año 3, la variación fue de $\%Variación = \dfrac{13129{,}32 - 11990{,}25}{11990{,}25} \times 100\% = 8{,}68\%$

- En a2) algunos alumnos concluyeron que había un aumento porcentual constante e igual a 9,5% a partir de la información sobre la tasa de interés compuesto anualmente que es igual a este porcentaje.

  En este caso, los alumnos también utilizaron los valores de la tabla que completaron anteriormente.

En la pregunta b)

- Algunos alumnos obtuvieron algunas expresiones incorrectas tales como $C(t) = 10000(0{,}095)^t$, en las que el error se presentaba en el valor de la base.
- Algunos alumnos determinaron la expresión pedida utilizando la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$, que permite calcular el monto total de un dinero inicial a una tasa de interés compuesto luego de t años, obteniendo algunas de las siguientes expresiones equivalentes:

  $$P(t) = 10000(1+0{,}095)^t$$

  $$P(t) = 10000(1{,}095)^t$$

  $$C(t) = 10000\left(\frac{109{,}5}{100}\right)^t$$

  En este caso, los alumnos recurrieron a sus conocimientos sobre interés compuesto y utilizaron la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$, que corresponde a la regla de correspondencia de una función de tipo exponencial. Ante esto podríamos decir que los alumnos están utilizando una función de tipo exponencial para resolver el problema.
- Algunos alumnos reconocieron la presencia de una función exponencial de la forma $f(t) = Ca^t$ y realizaron los reemplazos correspondientes, tal como se muestra a continuación:

  Para $t = 0$: $Ca^0 = 10000$

  Para $t = 1$: $Ca^1 = 10950$

De las ecuaciones anteriores obtuvieron $C = 10000$ y $a = 1{,}095$.

Luego, obtuvieron la expresión: $f(t) = 10000(1{,}095)^t$

En este caso, los alumnos utilizaron en forma directa una función de tipo exponencial como estrategia de solución para resolver el problema.

En la pregunta c)

- Algunos alumnos graficaron la curva de una función exponencial creciente a partir de la expresión obtenida en la parte b).
- Algunos alumnos graficaron curvas de funciones exponenciales decrecientes o rectas con pendientes positivas. En este caso, los alumnos todavía presentan dificultades cognitivas relacionadas con el paso de una representación analítica a una gráfica.
- Respecto a la afirmación dada para analizar, los alumnos manifestaron que estaban de acuerdo con ella justificando sus respuestas a partir de los resultados obtenidos en la tabla de la parte a) o a partir de los gráficos obtenidos en esta parte.

A continuación mostramos los resultados de la observación en los grupos A y B.

Grupo A						
Pre gunta	Estrategias de solución frecuentes			Dificultades o errores frecuentes		
	Cantidad de alumnos	Porcentaje	Descripción de estrategias de solución	Cantidad de alumnos	Porcentaje	Descripción de dificultades o errores
a	36	81,8%	Completaron la tabla correctamente.	8	18,2%	Cometieron errores de cálculos que los llevaron a resultados incorrectos.
a1	38	86,4%	Calcularon la variación para tres intervalos iguales de años y como obtuvieron resultados diferentes, concluyeron que la variación no era constante.	6	13,6%	Confundieron variación con variación porcentual.

a2	38	86,4%	Calcularon la variación porcentual para tres intervalos iguales de tiempo y concluyeron que había un aumento porcentual constante e igual a 9,5%.	6	13,6%	Confundieron variación con variación porcentual.
b	38	86,4%	Utilizaron la fórmula de interés compuesto que han trabajado en el primer capítulo de su curso de Matemática y obtuvieron alguna de las siguientes expresiones: $f(t)=1000(1{,}905)^t$ $f(t)=1000(1+0{,}905)^t$ $f(t)=1000\left(\frac{109{,}5}{100}\right)^t$	6	13,6%	2 alumnos obtuvieron la siguiente expresión: $f(t)=1000(0{,}905)^t$ 1 alumno obtuvo la siguiente expresión: $f(t)=1000+10000(0{,}8133)^t$ 1 alumno obtuvo la siguiente expresión: $f(t)=(1{,}905)^t$ Utilizaron las siguientes expresiones para cada año: 1°año: $P_0+P_0\times 0{,}095$ 2°año: $(P_0+P_0\times 0{,}095)+P_0\times 0{,}095$ y así sucesivamente, pero no llegaron a ninguna expresión para t años.
c	16	36,4%	Graficaron curvas de funciones exponenciales crecientes donde $t\geq 0$.	28	63,6%	1 alumno grafico una sucesión de puntos que son parte de una curva de una función exponencial decreciente. 1 alumno grafico dos tramos lineales, uno para $0\leq t<1$ y otro para $t\geq 1$. 16 alumnos graficaron curvas de funciones exponenciales crecientes con $t\geq 1$.

Grupo B						
Pre gunta	**Estrategias de solución frecuentes**			**Dificultades o errores frecuentes**		
	Cantidad de alumnos	**Porcentaje**	**Descripción de estrategias de solución**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje**	**Descripción de dificultades o errores**
a	40	70,2%	Completaron la tabla correctamente.	17	19,8%	Presentaron errores de cálculo.
a1	40	70,2%	Calcularon la variación para tres intervalos iguales de años y como obtuvieron resultados diferentes, concluyeron que la variación no era constante.	17	19,8%	2 alumnos obtuvieron la siguiente expresión: $f(t)=1000(0{,}905)^t$ 1 alumno obtuvo la siguiente expresión: $f(t)=1000(1{,}092)^t$ 14 alumnos no respondieron la pregunta.
a2	40	70,2%	Calcularon la variación porcentual para tres intervalos iguales de tiempo y concluyeron que había un aumento porcentual constante e igual a 9,5%.	17	19,8%	3 alumnos presentaron errores al calcular la variación entre un par de años. 1 alumno obtuvo una variación porcentual igual a 19% a partir de la siguiente ecuación: $10000k^4+10000=14376{,}60$ $k=0{,}8133=81{,}33\%$ Luego, $100\%-81{,}33\%=18{,}67\%=19\%$ 1 alumno obtuvo un aumento porcentual igual a 1,092%.

b	40	70,2%	Utilizaron los resultados de la tabla de la parte a) y plantearon la siguiente ecuación: $k^2 10000 = 11990{,}25$, donde $k = 1{,}095$. Luego, obtuvieron la siguiente expresión: $f(t) = 1000(1{,}905)^t$ Utilizaron los resultados de la tabla de la parte a) y plantearon la siguiente ecuación: $10000(x\%)^1 = 10950$, donde $x\% = 1{,}095$. Luego, obtuvieron alguna de las siguientes expresiones: $y = 10000(1{,}095)^t$ ó $y = 10000(1 + 0{,}095)^t$	17	19,8%	Obtuvieron las siguientes expresiones: $10000 + 10000(0{,}8133)^t$ $f(t) = 10000 + k^t$ $f(t) = 10000(0{,}095)^t$
c	23	40,4%	Graficaron curvas de funciones exponenciales para $t \geq 0$.	34	59,6%	4 alumnos graficaron rectas con pendientes positivas 1 alumno grafico una curva creciente de forma irregular. 1 alumnos grafico la curva de una función exponencial decreciente. 28 alumnos graficaron curvas de funciones exponenciales crecientes para $t \geq 1$.

A partir de los resultados mostrados en las tablas anteriores, podemos señalar que a pesar del cambio de la variable didáctica (cambio de la base de la función exponencial, relacionada directamente con la variación porcentual), los alumnos lograron reajustar sus estrategias de solución y obtuvieron los resultados esperados al determinar la expresión con un porcentaje superior al 50%. Sin embargo, no obtuvieron los mismos resultados al representar gráficamente dichas expresiones alcanzando un porcentaje inferior al 50%. Aquí podemos ver que los alumnos tienen dificultades para determinar el dominio de una función luego de determinar su expresión analítica así como dificultades para pasar de una representación analítica de una función exponencial a una representación gráfica, lo que se constituyen en obstáculos cognitivos.

Por otro lado, observamos que los comportamientos observados en los estudiantes frente a cada pregunta de esta situación corresponden en gran medida con los comportamientos esperados señalados en el análisis a priori.

3.5 Situación didáctica modificada

Teniendo en cuenta el análisis a priori y los comportamientos observados durante la experimentación en aula de la situación didáctica diseñada originalmente, realizamos algunos cambios a dicha situación con la finalidad de brindar de manera explícita toda la información necesaria para entender el comportamiento del fenómeno involucrado en esta problemática y lograr así la construcción del concepto de la función exponencial, evitando generar obstáculos didácticos.

Los cambios mencionados se realizarán en las situaciones 2 y 3. En la situación 2, los cambios son los siguientes:

- En el enunciado de esta situación, añadir que el porcentaje de medicamento que queda en el organismo de Miguel después de horas es constante, para cada $t > 0$, para que los alumnos no tengan dudas sobre el comportamiento del medicamento en el organismo con el paso del tiempo y esto permita que emerja el concepto de función exponencial a partir de su característica propia que se utilizará como estrategia óptima para resolver este problema. Cabe señalar que esta información fue dada verbalmente a los alumnos durante la experimentación de la situación original, pero de otra manera, al indicarles que deberían tener en cuenta que la variación porcentual de la cantidad de medicamento luego de t horas era constante. A partir de lo cual se esperaba que llegarán a la conclusión de que el porcentaje de medicamento que quedaba en el organismo luego de t horas también era constante. Sin embargo, esto generó cierta demora en el trabajo de algunos grupos que no estuvieron atentos a la indicación.

- En la parte a), ampliar la pregunta pidiendo que también determinen cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 5, 6, 7 y 8 horas de haberlo ingerido. Lo que implica hacer un cambio en la tabla original, agregando cuatro filas más para que sean completadas por los alumnos. Consideramos que esta ampliación hasta el tiempo igual a 8 horas, permitirá que los alumnos puedan verificar si sus respuestas son correctas al llegar a la última fila con un resultado igual a 37,5 en correspondencia con la vida media del medicamento.
- Invertir el orden de las preguntas b) y c), y reformular la pregunta c) resultante. Esta reformulación consiste en eliminar el cuadro que se le pedía completar originalmente para evitar condicionar la acción de los alumnos y sean ellos quienes decidan su propia estrategia de solución ante la siguiente pregunta:

  ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor y cuál su relación con el valor de la base de la expresión obtenida en la parte b).

  Cabe señalar que en la nueva pregunta c) se pide que expliquen la relación que existe entre el valor obtenido para la variación porcentual pedida en esta parte y el valor la base de la expresión obtenida en la parte b) para saber si logran reconocer la relación que existe entre el porcentaje de la cantidad de medicamento que elimina Miguel de su organismo después de cada hora y el porcentaje de la cantidad de medicamento que se queda en su organismo después de cada hora.

A continuación mostramos los cambios indicados para esta situación resaltando con negrita las partes involucradas.

Situación 2

Considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis de Oseltamivir **y que el porcentaje de medicamento que queda en su organismo después de t horas es constante, para cada t** > 0, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 1, 2, 3, 4**, 5, 6, 7 y 8** horas de haber tomado dicho medicamento?

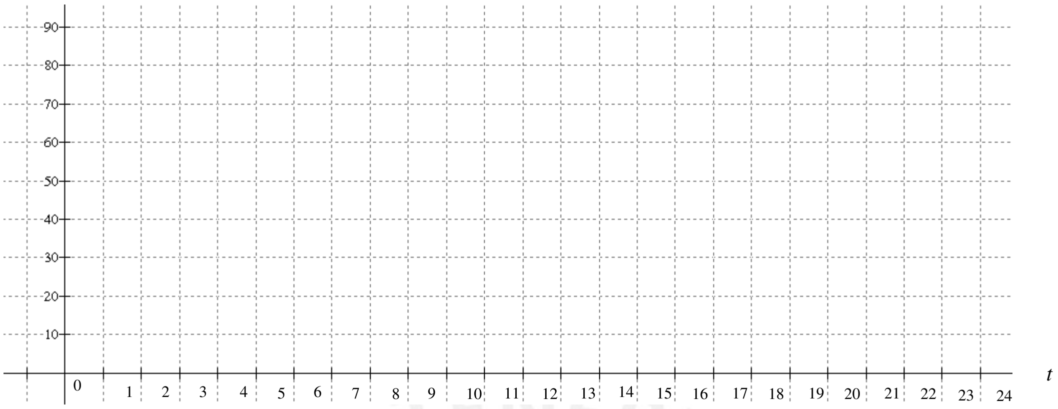
Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

b) **Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de Oseltamivir que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas, para cada t** > 0**. Comente las características de la expresión obtenida indicando su relación con la información dada en el problema y compruebe si la expresión obtenida es correcta.**

c) **¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor y cuál su relación con el valor de la base de la expresión obtenida en la parte b).**

d) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte c).
Utilice la siguiente cuadrícula.



Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: "A mayor cantidad de horas trascurridas, luego de ingerir el medicamento, Miguel eliminará por hora mayor cantidad de miligramos de Oseltamivir de su organismo". Justifique su respuesta.

En la situación 3, los cambios son los siguientes:

- En el enunciado de esta situación eliminar el tratamiento 2 presentado en la situación original y proponer solo el tratamiento 1 para Miguel, pero la solución de las preguntas para ambos tratamientos requiere un tiempo adicional al considerado en la secuencia didáctica. Además, como estos tratamientos presentan cambios similares, realizados a las variables didácticas, el trabajo con uno de ellos será suficiente.
- En la parte a) cuando se pide determinar una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas, agregar "para cada t > 0" para aclarar la pregunta.

- En la parte b) se añade que expliquen cuál es la relación que existe entre el valor obtenido para la variación porcentual pedida en esta parte y el valor de la base de la expresión obtenida en la parte a) para saber si logran reconocer la relación que existe entre el porcentaje de medicamento que se elimina del organismo de Miguel después de cada hora y el porcentaje de medicamento que se queda en el organismo después de cada hora.

A continuación mostramos los cambios indicados para esta situación resaltando con negrita las partes involucradas.

Situación 3

Posteriormente, Miguel sigue un tratamiento diferente contra la gripe debido a los síntomas que presenta en dicha oportunidad. En este caso, el doctor le indica que debe **tomar una dosis de 550 mg de apronax, que tiene una vida media de 12 horas, dos veces al día para de esta manera desinflamar su garganta.**

Para este nuevo tratamiento, considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis del medicamento, responda las siguientes preguntas:

a) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas, **para cada t > 0**. Explique cómo obtuvo esta expresión e indique que representa la base de la misma en el problema dado.

b) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor **y cuál es su relación con el valor de la base de la expresión obtenida en la parte a).**

c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte a).

A continuación presentamos la situación didáctica modificada acompañada de la secuencia didáctica también modificada, respecto a las diseñadas originalmente.

Situación didáctica modificada

La situación didáctica modificada incluye los cambios indicados anteriormente, tal como se muestra a continuación.

Situación 1

Miguel, hace dos meses, presentó síntomas de gripe y fue a una consulta con el doctor para que le dé algún tratamiento. Debido a las noticias sobre la propagación del virus de la influenza, el doctor le recomendó quedarse en observación. Luego de unas horas, le indicó el siguiente tratamiento: tomar una dosis oral de 75 mg de Oseltamivir, un antiviral selectivo contra el virus de la influenza, dos veces al día durante 5 días.

Si la vida media del Oseltamivir es de 8 horas, entendiendo que la vida media de un medicamento es el tiempo necesario para que la concentración sanguínea del medicamento se reduzca a la mitad, y Miguel solo ha tomado la primera dosis, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 8, 16 y 24 horas de haber tomado dicho medicamento?
   Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales.

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
8	
16	
24	

b) Complete la siguiente tabla calculando, en primer lugar, la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas y, posteriormente, la variación porcentual de dicho medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas. Anote sus resultados utilizando tres decimales.

Intervalo de tiempo $[t_i;t_f]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$[0;8]$				
$[8;16]$				
$[16;24]$				

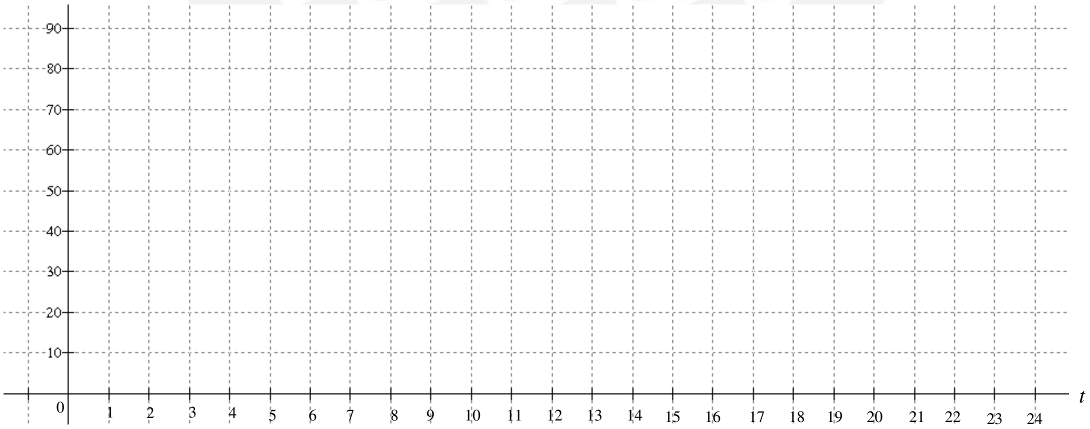
A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación es constante?

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación porcentual es constante?

c) Represente gráficamente los resultados obtenidos en la parte a) y determine si por estos puntos pasa una recta, justificando su respuesta.

Utilice la siguiente cuadrícula.



Situación 2

Considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis de Oseltamivir y que el porcentaje de medicamento que queda en su organismo después de t horas es constante, para cada $t > 0$, responda las siguientes preguntas:

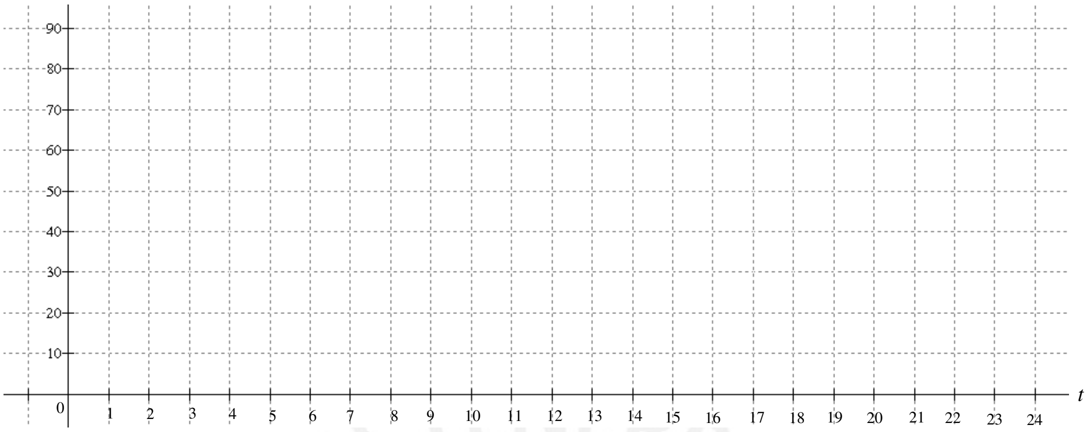
a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 horas de haber tomado dicho medicamento?
Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

b) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de Oseltamivir que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas, para cada $t > 0$. Comente las características de la expresión obtenida indicando su relación con la información dada en el problema y compruebe si la expresión obtenida es correcta.

c) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor y cuál su relación con el valor de la base de la expresión obtenida en la parte b).

d) Representa gráficamente la expresión obtenida en la parte c).
Utilice la siguiente cuadrícula.



Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: "A mayor cantidad de horas trascurridas, luego de ingerir el medicamento, Miguel eliminará por hora mayor cantidad de miligramos de Oseltamivir de su organismo". Justifique su respuesta.

Situación 3

Posteriormente, Miguel sigue un tratamiento diferente contra la gripe debido a los síntomas que presenta en dicha oportunidad. En este caso, el doctor le indica que debe tomar una dosis de 550 mg de apronax, que tiene una vida media de 12 horas, dos veces al día para de esta manera desinflamar su garganta.

Para este nuevo tratamiento, considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis del medicamento, responda las siguientes preguntas:

a) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas. Explique cómo obtuvo esta expresión e indique qué representa la base de la misma en el problema dado.
b) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor y cuál es su relación con el valor de la base de la expresión obtenida en la parte a).
c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte a).

Situación 4

Raúl recibe una gratificación de S/. 10 000 y decide depositarlo en una entidad bancaria que le ofrece una tasa de interés de 9,5% compuesto anualmente. Si Raúl no retira ni abona ninguna cantidad de dinero adicional a la depositada inicialmente y la entidad bancaria no le hace ningún descuento, responda las siguientes preguntas:

a) Raúl desea saber cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de cada año, durante los cuatro primeros años y para ello elabora la siguiente tabla.

Complete la tabla, utilizando tres decimales.

Año t	Cantidad de dinero al inicio del año t (en Nuevos Soles)	Interés obtenido al final del año t (en Nuevos Soles)	Cantidad de dinero al final del año t (en Nuevos Soles)
1	10 000		
2			
3			
4			

A partir de los resultados obtenidos en la tabla, responda las siguientes preguntas:

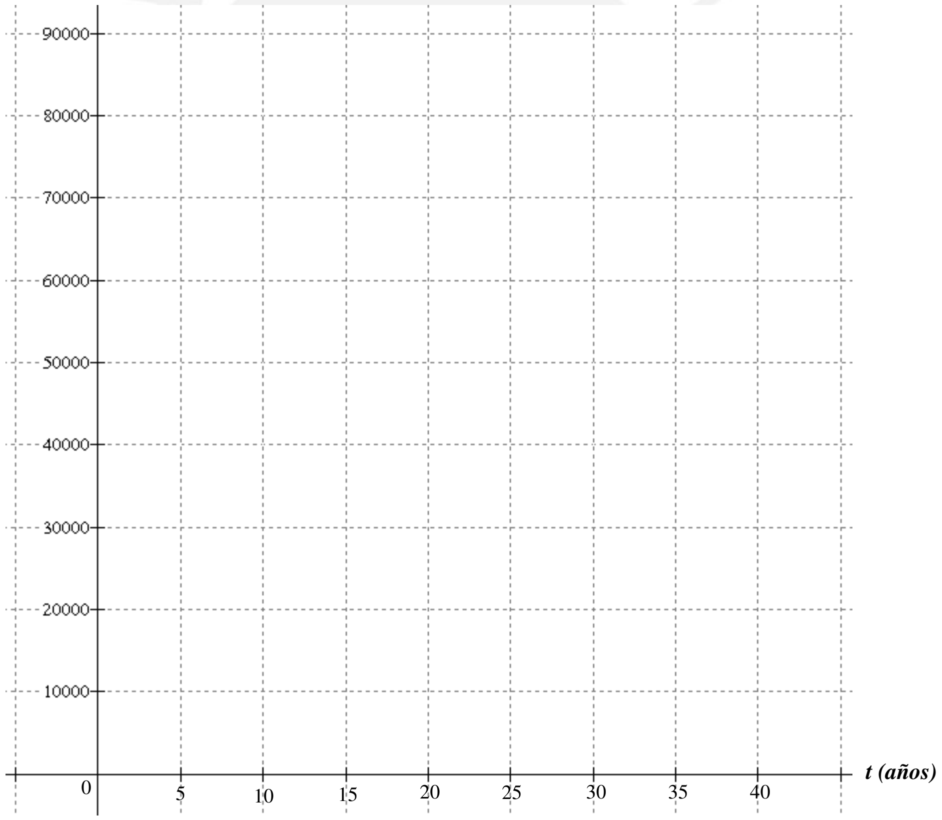
a1) ¿Cómo varía la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación es constante de un año a otro?

a2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación porcentual es constante de un año a otro?

b) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de dinero que tendrá Raúl en su cuenta luego de t años. Explique cómo obtuvo la expresión y comente sus características indicando su relación con la información dada en el problema.

c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte b).

Utilice la siguiente cuadrícula.



Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: "A mayor cantidad de años, Raúl acumulará por año mayor cantidad de dinero en su cuenta". Justifique su respuesta.

Secuencia didáctica modificada

La secuencia didáctica modificada, al igual que la original, sigue las fases de la teoría de situaciones didácticas, pero esta vez además de las cuatro primeras actividades, considerando los cambios realizados para las situaciones 2 y 3, que corresponden a las fases de acción, formulación y validación; se agrega una actividad más que cuenta con un material adicional para el alumno y corresponde a la fase de institucionalización. Estas actividades, a pesar del reajuste en el tiempo de duración de la actividad 3, se consideran que deben ser desarrolladas en dos sesiones de clases.

A continuación presentamos un cuadro en el que se explica con mayor detalle la secuencia didáctica modificada, incluyendo la actividad 5.

Secuencia	Objetivos	Descripción	Duración	Fase en la que se ubica
Actividad 1: Situación 1	• Que los alumnos determinen como disminuye la cantidad de miligramos de medicamento en el organismo de Miguel luego de 8, 16 y 24 horas de haber ingerido la primera dosis de dicho medicamento. • Que los alumnos determinen cuál es la variación porcentual del medicamento en el organismo de Miguel luego de 8, 16 y 24 horas de haber ingerido la primera dosis de dicho medicamento.	Los alumnos, en parejas, resuelven la situación 1. Esta situación tiene una duración de 25 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 10 minutos para la discusión en parejas y 10 minutos para la puesta en común en la que algunas parejas (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la exposición a toda la clase, pedir que salgan a exponer parejas que han utilizado estrategias de solución diferentes o en todo caso que complementen la información presentada por la pareja anterior.	25 minutos	Acción

Actividad 2: Situación 2	• Que los alumnos determinen una expresión que les permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento en el organismo de Miguel luego t horas. • Que los alumnos representen gráficamente la expresión que les permitirá calcular la cantidad de miligramos de medicamento en el organismo de Miguel luego t horas. • Que los alumnos enuncien algunos teoremas.	Los alumnos, en grupos de 4, resuelven la situación 2. Esta situación tiene una duración de 35 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 20 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la resolución de la situación en los grupos, pedir que los alumnos justifiquen sus respuestas utilizando un lenguaje matemático adecuado. Durante la exposición a toda la clase, pedir que salgan a exponer grupos que han utilizado diferentes estrategias de solución e insistir en que justifiquen sus respuestas comentando las características de la expresión obtenida en la parte c) y analizando la afirmación dada en la parte d).	35 minutos	Formulación

Actividad 3: Situación 3	• Que los alumnos determinen expresiones matemáticas que correspondan a los cambios realizados a la situación presentada anteriormente (situación 2). • Que los alumnos representen gráficamente las expresiones matemáticas obtenidas según los cambios realizados a la situación presentada anteriormente (situación 2). • Que los alumnos enuncien algunos teoremas y los validen utilizando procedimientos analíticos o gráficos.	Los alumnos, en grupos de 4, resuelven la situación 3. Esta situación tiene una duración de 25 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 10 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la exposición a toda la clase, pedir que los grupos expliquen sus estrategias de solución, sea gráfica o analítica, usando la notación matemática correspondiente. Durante la resolución de la situación en los grupos y durante la exposición, insistir en que los alumnos justifiquen sus respuestas explicando como determinaron las expresiones y los valores pedidos en esta situación.	25 minutos	Formulación y validación

Actividad 4: Situación 4	• Que los alumnos determinen expresiones matemáticas para una situación diferente a las anteriores. • Que los alumnos representen gráficamente las expresiones matemáticas obtenidas para esta situación que es diferente a las anteriores. • Que los alumnos enuncien algunos teoremas y los validen utilizando procedimientos analíticos o gráficos.	Los alumnos, en grupos de 4, resuelven la situación 4. Esta situación tiene una duración de 35 minutos, dividida de la siguiente manera: 5 minutos para una lectura inicial, 20 minutos para la discusión y resolución en grupos y 10 minutos para la puesta en común en la que algunos grupos (mínimo tres) salen a exponer sus resultados a toda la clase. Durante la exposición, pedir que los grupos expliquen sus estrategias de solución, sea gráfica o analítica, usando la notación matemática correspondiente. Durante la resolución de la situación en los grupos y durante la exposición, insistir en que los alumnos justifiquen sus respuestas usando los conceptos matemáticos involucrados.	35 minutos	Formulación y validación

Actividad 5	• Que los alumnos formalicen los contenidos y propiedades matemáticas relacionadas con la función exponencial. • Qué los alumnos enuncien algunos teoremas relacionados con la función exponencial. • Que los alumnos utilicen el concepto de función exponencial para resolver otras situaciones relacionadas con fenómenos de la vida real.	El profesor empieza esta parte haciendo algunas preguntas a toda la clase sobre las situaciones antes trabajadas, tales como: • ¿Qué significa tener una disminución porcentual constante de medicamento en el organismo luego de t horas, para cada t > 0? ¿Cuál es la disminución porcentual de medicamento en el organismo cada 8 horas? ¿Cuál es la disminución porcentual de medicamento en el organismo cada hora o cada dos horas? ¿Los porcentajes obtenidos son iguales? • ¿El porcentaje de disminución de medicamento cada 8 horas, cada hora, cada minuto, cada segundo es el mismo? ¿Por qué? • ¿Qué significa tener un aumento porcentual constante de dinero en una cuenta bancaria luego de t años? ¿Cuál es el aumento porcentual de dinero en el banco cada 2 años o cada 5 años o cada 10 años? ¿Los porcentajes obtenidos son los mismos? • ¿Existe alguna relación entre una variación porcentual constante (incremento o disminución) y una función exponencial? • ¿Qué característica podrías mencionar para las funciones exponenciales? El profesor en todo momento fomenta la participación de los	60 minutos	Institucional iza ción

		alumnos en la discusión de las respuestas a las preguntas anteriores de modo que sean ellos quienes elaboren algunos teoremas relacionados con la función exponencial. El profesor con la participación de los alumnos presenta la definición de la función exponencial, su representación gráfica, su característica propia, sus propiedades y algunos modelos de aplicación. El profesor puede utilizar el material para el alumno, propuesto para esta parte, dentro del aula como guía de trabajo y fuera de ella como material complementario para que los alumnos resuelvan otras situaciones diferentes.		

Material para el alumno

A continuación mostramos el material elaborado para el alumno, que se utilizará en la actividad 5, correspondiente a la fase de institucionalización. Este material contiene la información que consideramos deben revisar sobre la función exponencial los estudiantes de las carreras de humanidades.

Este material contiene: una introducción sobre las aplicaciones de la función exponencial relacionados con fenómenos de la realidad, un ejemplo resuelto de una situación problema relacionada con la Salmonelosis, la definición de función exponencial $f(x) = C\,a^{kx}$, la definición de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, la representación gráfica de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, las principales propiedades de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, la definición de la función exponencial de base e, las aplicaciones de la función exponencial y una lista de ejercicios propuestos que presenta diversos fenómenos de la realidad modelados con funciones exponenciales. Esto último debido a nuestro interés de que los estudiantes de las carreras de humanidades reconozcan la importancia de la característica propia que presenta esta función, la misma que permite explicar el comportamiento de fenómenos de la realidad.

La introducción, el ejemplo resuelto, las definiciones, las representaciones gráficas y las principales propiedades han sido diseñados a partir de una revisión de textos señalada en el análisis preliminar y a partir de nuestra experiencia, no perdiendo de vista el público objetivo y los alcances que estos estudiantes deben tener sobre la función exponencial. Respecto a los ejercicios propuestos, algunos son aportes de nuestra experiencia docente, pero la mayor cantidad de ellos han sido tomados de un sitio web de Matemática y Temas educativos, de Costa Rica, ubicado en http://www.matebrunca.com/, de Problemas de Aplicación de Funciones Exponencial y Logarítmica, elaborado por Waldo Márquez, recuperado el 20 de diciembre de 2009, de http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/expo-log-aplicac.pdf. Cabe señalar que la mayor parte de los problemas tomados de esta página web han sido modificados con la finalidad de incorporar preguntas adicionales que permitan utilizar la característica propia de la función exponencial como estrategia de solución. Sin embargo, algunos problemas también han sufrido modificaciones en la redacción, a fin de aclarar los enunciados y evitar generar obstáculos cognitivos al pasar de un enunciado en lenguaje natural a una representación simbólica o matemática.

A continuación mostramos el contenido de este material.

La función exponencial

Empezaremos mencionando que las situaciones trabajadas hasta el momento, relacionadas con el decrecimiento porcentual de la cantidad de miligramos de un medicamento en el organismo de una persona o el crecimiento porcentual de una cantidad de dinero, invertida en una entidad bancaria a una tasa de interés compuesto, no son los únicos fenómenos de la vida real que pueden ser representados a través de una función exponencial. Entre otros fenómenos relacionados con una función exponencial se encuentran: el crecimiento de un cultivo de bacterias que se reproduce por mitosis, el crecimiento de algunas poblaciones, el decrecimiento de algunas sustancias radioactivas, etc. A continuación a modo de ejemplo presentamos el caso de la Salmonelosis.

La Salmonelosis es una enfermedad causada por una bacteria denominada Salmonella, que generalmente ocurre después de ingerir alimentos contaminados. La salmonella generalmente afecta la zona intestinal y algunas veces el torrente sanguíneo y se divide por mitosis en un intervalo de tiempo de 10 a 20 minutos, dependiendo de las condiciones de contaminación. Una persona infectada con Salmonella habitualmente presenta fiebre, dolor cólico abdominal y diarrea que se inicia de 12 a 72 horas después de ingerir el alimento o bebida contaminada. La enfermedad dura de 4 a 7 días, aunque a veces se prolongan mucho más, y la mayoría de los pacientes se recupera sin necesidad de tratamiento antibiótico ni de medicamento, solo necesitan líquidos para evitar la deshidratación.

Si una persona, al ingerir parte de un huevo contaminado, es infectada por una bacteria Salmonella que se divide en dos cada 10 minutos, averigüemos como se reproduciría esta bacteria en el organismo de dicha persona realizando las siguientes actividades:

a) Elabore una tabla que muestre la cantidad de bacterias Salmonella que habrá en el organismo de la persona después de 40 minutos, después de un día y, en general, después de t minutos.
b) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de bacterias Salmonella que habrá en el organismo de la persona luego de t minutos.
c) Represente gráficamente la cantidad de bacterias Salmonella que habrá en el organismo de la persona luego de t minutos. Comente el comportamiento del gráfico obtenido.

Esperamos obtener las siguientes respuestas.

a) Como la bacteria Salmonella se divide en dos cada 10 minutos, obtenemos la siguiente tabla:

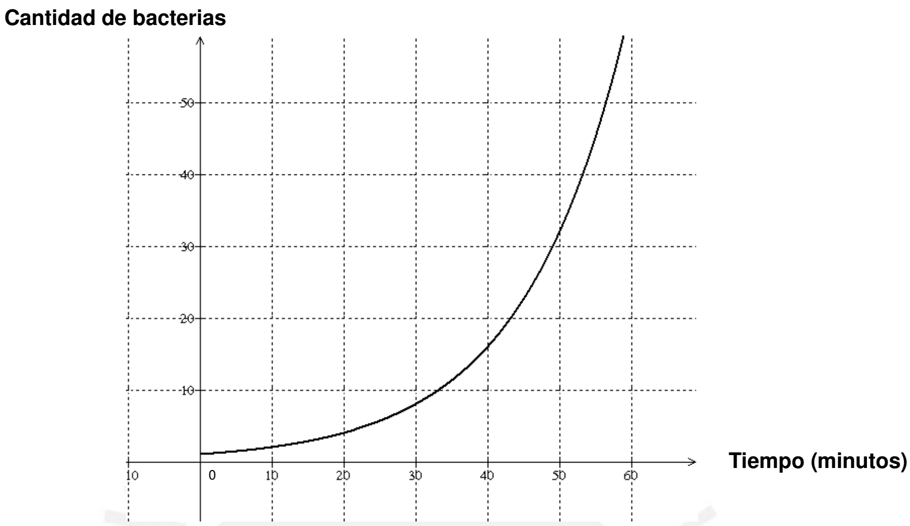
Tiempo t (en minutos)	0	10	20	30	40	…	1440	…	…	t
Número de bacterias Salmonella	1	2^1	2^2	2^3	2^4	…	2^{144}	…	…	$2^{\frac{t}{10}}$

De la tabla anterior se tiene que: después de 40 minutos, habrá 2^4 Salmonellas; después de 1 día = 24 horas = 1440 minutos, habrá 2^{144} Salmonellas; y después de t minutos, habrá $2^{\frac{t}{10}}$ Salmonellas.

b) La expresión que permitirá calcular la cantidad de bacterias Salmonella en el organismo de la persona infectada luego de t minutos es la siguiente:

$$f(t) = 2^{\frac{t}{10}}$$

c) La gráfica que representa la cantidad de bacterias Salmonella que habrá en el organismo de la persona luego de t minutos es la siguiente:



El gráfico obtenido presenta un comportamiento siempre creciente. Al inicio el crecimiento es lento, pero con el transcurrir del tiempo el crecimiento aumenta de manera exponencial.

Definición de función exponencial

Una función exponencial $f:\Re \rightarrow \Re^{+}$, está definida por:

$$f(x) = C\,a^{kx}$$

donde C, a y k son constantes reales y a es un número positivo diferente de 1 llamado base.

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos.

Así por ejemplo, son funciones exponenciales:

$f(x) = 100(2{,}5)^x$

$f(x) = 20(0{,}5)^x$

$f(x) = 1{,}2(5)^x$

$f(x) = 600\left(\frac{3}{4}\right)^x$

Función exponencial de la forma $f(x) = a^x$

En la definición de función exponencial dada anteriormente, si hacemos $C = 1$ y $k = 1$ y $a \in \Re^+ - \{1\}$, obtenemos la función exponencial $f : \Re \to \Re^+$ de la forma:

$$f(x) = a^x$$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos.

Así por ejemplo tenemos:

$f(x) = (2{,}5)^x$

$f(x) = (0{,}125)^x$

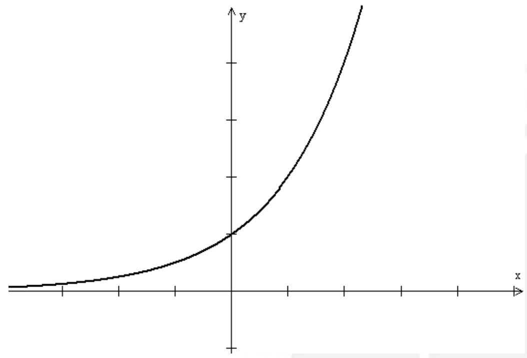
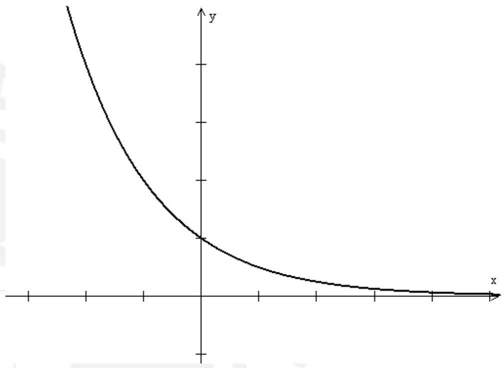
$f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$f(x) = \pi^x$

Representación gráfica de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$

En general, la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, dependiendo del valor de la base $a \in \Re^+ - \{1\}$ presenta un comportamiento particular, tal como se muestra a continuación:

Cuando $0 < a < 1$:	Cuando $a > 1$:
	

Caracterización de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$

1. Función exponencial y variación porcentual

Si $f : \Re \to \Re^+$ es una función de tipo exponencial de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, para cualquier $x, h \in \Re$, los cocientes:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = a^h - 1 \quad \text{y} \quad \frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

dependen de h (valor constante), y no de x.

Observaciones

- Si h representa un incremento constante que se da en la variable x, entonces $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ representa una variación porcentual (incremento o disminución) constante pues $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=\frac{ba^{(x+h)}-ba^{x}}{ba^{x}}=\frac{ba^{x}(a^{h}-1)}{ba^{x}}=a^{h}-1$, donde h es una constante real.
- El cociente $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ se relaciona con la variación porcentual definida por: $\%Variación=\frac{Cantidad\ final-Cantidad\ inicial}{Cantidad\ inicial}\cdot 100\%$ pues $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=\frac{Cantidad\ final-Cantidad\ inicial}{Cantidad\ inicial}$.

2. Función exponencial y progresiones

Sea $f:\Re\rightarrow\Re^{+}$ una función de tipo exponencial de la forma $f(x)=a^{x}$, con $a>0$ y $a\neq 1$.

Si $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ forman una progresión aritmética de razón h (valor constante), entonces $f(x_1),f(x_2),f(x_3),...,f(x_n)$ forman una progresión geométrica de razón a^{h}.

Observaciones

Sean h y a valores reales constantes.

- Si h es la razón de la progresión aritmética: $x_1,x_2,x_3,...,x_n$, esta progresión se puede escribir de la forma:

  $x_1,x_1+h,x_2+h,...,x_{n-1}+h$, donde $x_k=x_{k-1}+h$, para $k=2,3,...,n$

Observamos que en esta progresión cada término, a partir del segundo, se obtiene sumando la constante h (razón aritmética) al término anterior.

Luego, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$ se puede escribir de la forma:

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}$$

$$a^{x_1}, a^{x_1+h}, a^{x_2+h}, ..., a^{x_{n-1}+h}$$

$$a^{x_1}, (a^{x_1})a^h, (a^{x_2})a^h, ..., (a^{x_{n-1}})a^h$$

$$f(x_1), f(x_1)a^h, f(x_2)a^h, ..., f(x_{n-1})a^h$$

donde a^h es una constante real.

Observamos que $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$ forma una progresión geométrica donde cada término, a partir del segundo, es el producto del término anterior por la constante a^h (razón geométrica).

- En la progresión geométrica $f(x_1), f(x_1)a^h, f(x_2)a^h, ..., f(x_{n-1})a^h$, tenemos que:

$$f(x_k) = f(x_{k-1})a^h, \text{ para } k = 2,3,...,n$$

donde $$a^h = \frac{f(x_k)}{f(x_{k-1})}$$

que también se puede escribir como $a^h = \dfrac{f(x_{k-1}+h)}{f(x_{k-1})}$, para $k = 2,3,...,n$, haciendo evidente su relación con el cociente $\dfrac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$, presentado en el punto anterior como un valor constante.

- En la definición de variación porcentual dada por:

$$\%Variación = \frac{Cantidad\ final - Cantidad\ inicial}{Cantidad\ inicial} \cdot 100\% = \left(\frac{Cantidad\ final}{Cantidad\ inicial} - 1\right) \cdot 100\%$$

observamos que a^h es un valor constante asociado al cociente $\dfrac{Cantidad\ final}{Cantidad\ inicial}$ y $(a^h - 1)$ es un valor constante asociado a $\left(\dfrac{Cantidad\ final}{Cantidad\ inicial} - 1\right)$.

Propiedades de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$

La función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, donde $a \in \Re^+ - \{1\}$, tiene las siguientes características para todo $x, y \in \Re$.

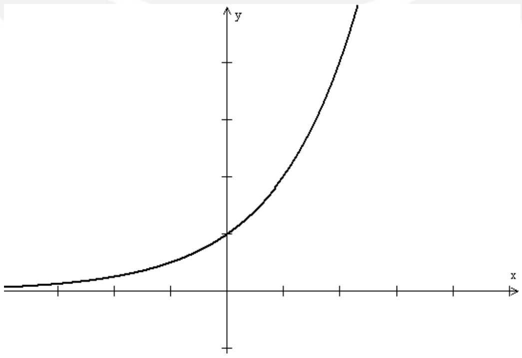
1. Si $a > 1$, la función f es creciente; es decir, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
2. Si $0 < a < 1$, la función f es decreciente; es decir, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
3. El dominio de f es el conjunto de los números reales; es decir, $Dom(f) = \Re$.
4. El rango de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $Ran(f) = \Re$
5. Las gráficas de f pasan por el punto (0; 1).
6. El eje de X es una asíntota horizontal de la función f.

Función exponencial de base e

Si se utiliza el número irracional e = 2,7182818284… como base, la función exponencial que resulta es la denominada función exponencial natural, definida por:

$$f(x) = e^x$$

cuya gráfica se muestra a continuación:



Aplicaciones de la función exponencial

Las funciones exponenciales pueden ser utilizadas modelar algunas situaciones de la vida real, como son: el crecimiento de bacterias en un cultivo, el crecimiento de la población de una ciudad, el tiempo que toma un objeto para llegar a cierta temperatura, etc. Entre los modelos[14] exponenciales más utilizados se encuentran los siguientes:

- Modelo de crecimiento y decrecimiento

$$A(t) = A_0.e^{kt}$$

donde A_0 es la cantidad inicial y k es la constante de crecimiento. Si $k > 0$, el modelo es de crecimiento y si $k < 0$, el modelo es de decrecimiento.

- Modelo logístico de crecimiento

$$P(t) = \frac{c}{1 + a\,e^{-bt}}$$

donde a, b y c son constantes reales, $c > 0$ y $b > 0$.

- Interés compuesto

$$M(t) = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde M es el monto acumulado o valor futuro, C es el capital o valor presente, r es la tasa de interés, $i = \frac{r}{n}$ es la tasa de interés periódica, t es el tiempo de inversión y n es el número de periodos de inversión.

[14] Estos modelos fueron tomados de: http://www.pupr.edu/cpu/talleres/Funciones%20Exponenciales%20y%20Logar%C3%ADtmicas.pdf. Recuperado el 30 de noviembre de 2009.

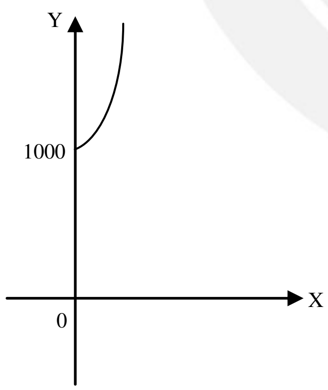
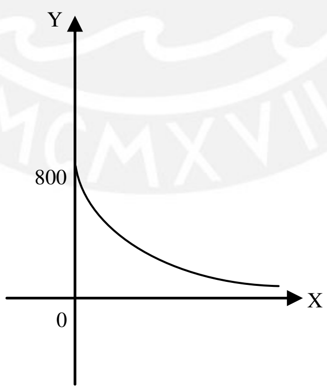
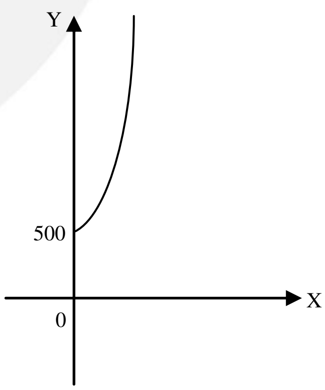
- Ley de enfriamiento de Newton.

$$u(t) = T + (u_0 - T)\,e^{kt}$$

donde T es la temperatura instantánea del cuerpo, u_0 es la temperatura del medio ambiente, k es la constante que define el ritmo de enfriamiento ($k < 0$) y t es el tiempo que dura el enfriamiento.

Ejercicios propuestos[15]

1. Relaciona los fenómenos de la realidad descritos a continuación con las expresiones y gráficas de funciones exponenciales que podrían describirlos, colocando la letra que corresponde en los paréntesis en blanco.
   a) El crecimiento de una población
   b) La desintegración de sustancias radioactivas
   c) El monto acumulado en una cuenta bancaria

<table>
<tr><td>(   )
$g(x) = 500(1{,}125)^x$</td><td>(   )
$f(x) = 1000.e^x$</td><td>(   )
$h(x) = 800(0{,}0125)^x$</td></tr>
<tr><td>(   )

</td><td>(   )

</td><td>(   )

</td></tr>
</table>

[15] Tomado de: http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/expo-log-aplicac.pdf. Recuperado el 20 de diciembre de 2009.

2. El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente ecuación: $A(t) = A_0 e^{kt}$. Si inicialmente había 1000 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 1800, responda lo siguiente:
   a) ¿Cuántos mosquitos habrá en la colonia después de 2 días?
   b) ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que la colonia tenga 5000 mosquitos?
   c) ¿Cuál es el incremento porcentual de mosquitos por día?

3. La población mundial al inicio del año 1990 era de 5,3 mil millones de habitantes. Si la población continua creciendo a una razón de aproximadamente 2% al año, responda lo siguiente:
   a) Determine la función que exprese la población mundial (en miles de millones) como función del tiempo, donde el tiempo igual a cero corresponde al año 2000.
   b) Según el modelo obtenido en la parte a), estime cuál sería la población mundial en el 2010.
   c) ¿Cuál será el porcentaje de habitantes en el 2010 respecto al 2009?

4. Cada año un empresario considera que el valor de su auto se deprecia en un 10% del valor del año anterior. Si un auto, que le costó \$ 5 000, vale actualmente \$ 200. ¿Cuántos años hace que lo compró?

5. Si la ecuación de demanda para un producto estaba dada por $p(x) = 2{,}500e^{x}$, donde x es el número de unidades demandadas a un precio unitario p, en Nuevos Soles, responda lo siguiente:
   a) Evalué cuál será el precio unitario para una demanda de 12 unidades.
   b) Determine cuál será la cantidad demandada para un precio de S/. 5.

6. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial de medicamento que toma una persona es de 10 mg y la cantidad $A(t)$ que queda en el organismo t horas después está dada por:

$$A(t) = 10(0,8)^t$$

Sabiendo que para que el medicamento haga efecto debe haber en el organismo por lo menos 2 mg, responda lo siguiente:

   a) ¿Después de cuánto tiempo quedan solo 2 mg en el organismo?
   b) ¿Cuál es la vida media del medicamento?
   c) ¿Cuál es el porcentaje de la cantidad de medicamento que queda en el organismo después de cada hora?
   d) ¿Cuál es la variación porcentual (incremento o disminución) de la cantidad de medicamento en el organismo después de cada hora?

7. Si un capital de \$ 5000 se invierte al 5% anual y el interés se capitaliza mensualmente, ¿cuál será el capital al final de cinco años?

8. Rebeca deposita \$ 2500 en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de 8% compuesto anualmente. Si Rebeca no realiza ningún retiro ni abono y el banco no le cobra ningún mantenimiento, responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuánto dinero tendrá Rebeca en dicha cuenta de ahorros después de dos años?
   b) ¿Cuánto dinero tendrá Rebeca en dicha cuenta de ahorros después de diez años?
   c) Encuentre una expresión que permita determinar la cantidad de dinero que tendrá Rebeca en el banco luego de t años.
   d) ¿En qué porcentaje aumenta la cantidad de dinero que tendrá Rebeca en el banco después de cada año?

9. Si deposita en una entidad bancaria \$ 12 000, a una tasa de interés compuesto del 10% anual, ¿qué cantidad tendrá en 48 meses?

10. Los padres de José Antonio han recibido una herencia de parte de uno de sus padres y quieren establecer un fondo de ahorro para la educación superior de su único hijo. Si ellos estiman que necesitarán S/. 150 000 000 en diez años, ¿qué cantidad de dinero deben colocar en el fondo, si quieren invertirlo al 9% anual compuesto semestralmente?

11. Actualmente la concentración de alcohol en la sangre de una persona puede medirse. Recientes investigaciones médicas sugieren que el riesgo R (dado en porcentaje) de tener un accidente al conducir un vehículo puede determinarse por medio de la siguiente expresión:

$$R(x) = 6e^{kx}$$

donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k es una constante. A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:

a) Suponiendo que una concentración de alcohol en la sangre de 0,04 da como resultado un riesgo del 10% de tener un accidente, encuentre el valor de la constante k en la expresión dada.

b) Con el valor de k hallado en a), determine cuál es el riesgo de tener un accidente si la concentración de alcohol es de 0,17.

c) Con el valor de k hallado en a), determine qué concentración de alcohol corresponde a un riesgo del 100%.

d) Si la ley establece que cualquier persona con un riesgo de tener un accidente del 20% o mayor no está autorizada para conducir, ¿qué concentración de alcohol en la sangre debe tener un conductor para ser arrestado? Considere el valor de de k hallado en a).

12. La osteoporosis es una deficiencia en la fijación de calcio en los huesos. Esta enfermedad ataca a las personas mayores, en especial a las mujeres después de la menopausia. En una clínica se realizó un seguimiento a una mujer de 55 años que medía 1,66 m y se observó que su estatura variaba cada año según la siguiente función:

$$E(x) = 166(0{,}85^{0{,}005t})$$

A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:

a) Si hoy la mujer tiene 60 años y se sabe que dentro de 6 años alcanzará su estatura límite, ¿cuál será la altura límite que alcanzará esta mujer?

b) ¿Cuánto medirá a los 65 años?

c) ¿Qué porcentaje de su estatura disminuye por año?

d) ¿Qué porcentaje de su estatura inicial habrá disminuido entre los 63 y 64 años?

13. La cicatrización normal de una herida puede obtenerse por medio de una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y A es igual al área de la herida después de n días, entonces la expresión $A(n) = A_0 e^{-0.35n}$ describe el área de la herida en el n-ésimo día después de ocurrida la lesión.

Suponiendo que una herida tenía inicialmente un área de 100 centímetros cuadrados, responda lo siguiente:

a) Una vez comenzada la cicatrización, ¿cuál será el área de la herida después de tres días?

b) ¿Cuál será el área de la herida después de 10 días?

c) ¿Cuál será el porcentaje del área de la herida que cicatriza por día?

14. Cuando un médico forense que investiga la causa de un fallecimiento llegó al mediodía al lugar del homicidio, descubrió que la temperatura del cuerpo de la víctima era de 31ºC y la habitación en la que se encontraba tenía una temperatura constante de 20ºC. Suponiendo que la constante k es -0,0044; utilizar la fórmula de la Ley de enfriamiento de Newton, dada por $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$, para determinar la hora aproximada de la muerte.

    Sugerencia: La temperatura normal de una persona viva es de 37ºC.

15. Después del escape de material radiactivo hacia la atmósfera en la planta nuclear de Chernobyl (Ucrania) en 1986, el heno en Austria estaba contaminado por yodo 131, el cual se desintegra según la ley:

$$A(t) = A_0 e^{-0.0871t}$$

    donde A_0 es la cantidad inicial presente de yodo 131 y A es la cantidad del mismo presente después de t días.
    Si se permite dar el heno al ganado cuando le quede un 10% del yodo 131, ¿cuánto tiempo deberán esperar los ganaderos para poder usar ese heno?

16. Pablo recibe una herencia de $ 36 000, por parte de su abuelo, y decide colocarlo en una entidad bancaria para incrementar su dinero y así poder solventar sus estudios en la universidad. Luego de algunas consultas, Pablo se queda con dos propuestas de entidades bancarias que le ofrecen abrir cuentas de ahorro que no cobran ningún mantenimiento:

    Entidad 1: Ofrece una tasa de interés de 8% anual capitalizada semestralmente
    Entidad 2: Ofrece una tasa de interés de 9% anual capitalizada mensualmente
    A partir de la información anterior, responda lo siguiente:

    a) ¿En cuál de las dos entidades bancarias le conviene a Pablo depositar su herencia si va a retirar todo su dinero dentro de 5 años?
    b) ¿En cuál de las dos entidades bancarias le conviene a Pablo depositar su herencia si va a retirar todo su dinero dentro de 10 años?

Sugerencia: Tener presente que si la tasa de interés anual es r, la tasa de interés mensual es igual a $\frac{r}{12}$ y la tasa de interés semestral es igual a $\frac{r}{2}$.

17. Fernando desea invertir una cantidad de dinero que acaba de recibir como liquidación por sus años de servicio en una empresa. Después de varias consultas tiene que decidir entre dos propuestas que ofrecen lo siguiente:

    Propuesta 1: Un interés simple del 10% mensual invirtiendo un capital de \$ 1000 como mínimo.

    Propuesta 2: Un interés compuesto del 10% mensual invirtiendo un capital de \$ 500 como mínimo.

    ¿Qué opción es la más conveniente invirtiendo el mínimo requerido?

Capítulo 4:
Conclusiones y recomendaciones

A continuación presentamos algunas conclusiones.

1. La aplicación en aula de la situación didáctica diseñada originalmente nos permitió identificar los obstáculos, descritos por Brousseau, que presentan con frecuencia los estudiantes frente a los problemas propuestos, como la dificultad para determinar una expresión analítica para la función exponencial, la dificultad para graficar funciones exponenciales a partir de sus expresiones analíticas o dentro de su dominio correspondiente y la dificultad para pasar de una representación a otra sea gráfica, analítica o tabular.

Sobre esta conclusión, cabe mencionar que los obstáculos aquí señalados ya han sido mencionados en trabajos de investigación realizados anteriormente, y además, responde a la primera hipótesis de nuestro trabajo de investigación.

2. Los comportamientos esperados en los estudiantes de las carreras de humanidades frente a cada tarea propuesta en la situación didáctica diseñada - indicados en el análisis a priori elaborado según la ingeniería didáctica - tuvieron gran correspondencia con los comportamientos observados durante la experimentación en aula de dicha situación didáctica.

Esta conclusión responde a la segunda hipótesis de este trabajo de investigación ya que la gran correspondencia que existe entre los comportamientos esperados en los estudiantes frente a la solución de la situación didáctica, descritos en el análisis a priori, y los comportamientos observados en la experimentación en aula de dicha situación, nos permite decir que es posible que los estudiantes de las carreras de humanidades logren construir el conocimiento de la función exponencial al enfrentarse a esta situación didáctica.

3. El análisis preliminar, realizado en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva, contribuyó al diseño de la situación didáctica y brindó información sobre los obstáculos que podrían presentar los alumnos para aprender el concepto de función exponencial. También brindó información para el uso de la variación porcentual y las progresiones geométricas, como estrategias de solución a los problemas propuestos y así emerja el concepto de función exponencial.

   Esta conclusión responde al primer y segundo objetivo específico de este trabajo de investigación.

4. Las observaciones registradas durante la experimentación en aula, de la situación didáctica diseñada, sobre los comportamientos de los estudiantes de las carreras de humanidades frente a cada una de las tareas propuestas, nos permitieron rediseñar la situación original de modo que facilite la construcción del concepto de función exponencial asociada a la característica propia de esta función como es la variación porcentual constante, en intervalos iguales de tiempo.

   Esta conclusión responde al tercer y cuarto objetivo específico de este trabajo de investigación y se alcanza cuando los estudiantes utilizan a la función exponencial como solución óptima de las situaciones 3 y 4, a pesar de los cambios que se hicieron a las variables didácticas involucradas.

5. La aplicación en aula de la situación didáctica diseñada originalmente permitió registrar que en todos los grupos observados, 7 grupos de 50 alumnos aproximadamente, las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas propuestos fueron similares. Cabe destacar el uso de la progresión geométrica, característica propia de la función exponencial, para resolver los problemas propuestos en cada situación, observando de esta manera como los estudiantes van construyendo el concepto de la función exponencial al utilizarla como estrategia de solución.

   Esta conclusión responde al objetivo general de este trabajo de investigación, pues el uso de la función exponencial como estrategia de solución, en todos los grupos observados, nos permite decir que esta situación facilita la construcción del concepto de función exponencial a partir de su característica propia asociada a la variación porcentual constante, en intervalos iguales de tiempo.

Finalmente, consideramos que este trabajo puede complementarse y enriquecerse con otras investigaciones. Así, algunas posibilidades son:

1. Realizar el análisis a posteriori y la validación de la situación didáctica propuesta, confrontando las hipótesis definidas en el análisis a priori con los resultados obtenidos en el análisis a posteriori y determinando en qué medida estas hipótesis fueron alcanzadas o cuan alejadas estuvieron de los resultados obtenidos.

2. Realizar la experimentación en aula de la situación didáctica modificada para comprobar si los obstáculos, epistemológicos, didácticos y cognitivos, registrados en este trabajo son reproducibles en otros grupos de estudiantes de las carreras de humanidades, al enfrentarse a la misma situación didáctica.

3. Realizar la experimentación en aula de la situación didáctica modificada en otras instituciones educativas, con estudiantes de las carreras de humanidades o de otras carreras, para comprobar si esta situación se podría considerar como una situación fundamental para la noción de función exponencial. Es decir, para averiguar si esta situación didáctica realmente permite que emerja el concepto de la función exponencial y tiene la característica de ser reproducible.

4. Utilizar la situación didáctica modificada, propuesta en este trabajo de investigación, como punto de partida para elaborar una situación didáctica para enseñar la función exponencial a estudiantes de las carreras de ciencias, de modo que permita que estos estudiantes construyan dicho concepto a partir de su característica propia y luego puedan profundizar en sus demás propiedades. También se puede usar como referencia para diseñar una situación didáctica que permita la construcción de la función logarítmica (inversa de la función exponencial), la derivada de la función exponencial, etc.

5. Utilizar el material elaborado en este trabajo sobre la función exponencial, para los estudiantes de las carreras de humanidades, como referencia para elaborar otros materiales relacionados con este concepto matemático debido a que en este documento se presenta la característica propia de la función exponencial.

Referencias bibliográficas

Textos

Advíncula, E., Barrantes, E., Gaita, C., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). Matemáticas para no matemáticos. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x. Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica, 19-23.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (ed.). (1998). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las Matemáticas. Revista de Educación Matemática 12. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, M., (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis, Epsilon, núm. 42: 353-369, Sociedad Thales, España.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. En: cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 1, Número 2. Escuela de Matemática. Universidad Nacional.

Chevallard, Y. (1991). La Transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. Traducción: Claudia Gilman (Original en francés, 1985). Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

Chevallard, Y. (1995). La transposición didáctica. Buenos Aires, Argentina: Aique.

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 1, Número 2. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Universidad de Costa Rica. Asociación de Matemática Educativa.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de la relación con el conocimiento matemático. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática educativa II. Université Luis Pasteur de Strasboug.

Farfán, R. y Ferrari, M. (2001). Ingeniería Didáctica. Un ejemplo construido para la función 2^x. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica, Volumen 14, 408-415.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría no publicada, Área de educación superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Haeussler, S. (2003). Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía. México D.F.: Pearson Educación.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Lezama, J. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. Tesis de doctorado no publicada. Área de Educación superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.

Lima, E., Morgado, A., Pinto, P. y Wagner, E. (2000). La Matemática de la Enseñanza Media. Lima: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines.

Lima, E.(editor), Morgado, A., Durao, E., Wagner, E., Lima, E., Bosco, J., Quinhooes, J., Magalhaes, M. y Pinto, P. (2001). Análisis de livros de Matemática para o Ensine Médio. Río de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.

Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la Función Trigonométrica. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. Tesis para obtener el grado de Magíster en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, no publicada. México, D.F.

Rivera, L. (2005). Ingeniería didáctica de la función exponencial. Uso específico de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tecnológico de Monterrey.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada. Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones e Intercambio Científico, Jaén España.

Sastre, P., Boubée, C., Delorenzi, O. y Rey, G. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. Universidad Nacional Centro, Buenos Aires, Argentina. En: Revista Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).

Stewart, J. (2001). Precálculo. México D. F.: Thomson.

Documentos electrónicos

Bartlett A., Professor Emeritus Physics. Recuperado el 04 de enero de 2010, de http://www.albartlett.org/about_al_bartlett/about_al_bartlett.html

Díaz, H., García, G. y Serrano, C. Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del cálculo. Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado el 04 de enero de 2010, de http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted05_07arti.pdf

Diáz, J. Taller: Funciones Exponenciales y Logarítmicas. Recuperado el 30 de noviembre de 2009, de http://www.pupr.edu/cpu/talleres/Funciones%20Exponenciales%20y%20Logar%C3%ADtmicas.pdf

Lávaque, J., Méndez, N. y Villarroel, Y. Concepciones de los alumnos de la noción de Función. Recuperado el 12 de diciembre de 2009, de http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen22/digital22-1/Investigacion06/Concepciones%20de%20los%20alumnos%20de%20la%20noci%F3n%20de%20funci%F3n.pdf

Márquez, W. Problemas de Aplicación de Funciones Exponencial y Logarítmica. Recuperado el 20 de diciembre de 2009, de http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/expo-log-aplicac.pdf.

Monzoy, J. El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. Memorias IX Seminario Nacional: Microcomputadoras en la Educación Matemática. UNAM. Recuperado el 12 de diciembre de 2009, de http://www.fismat.umich.mx/mateduca/Carlos/mem9sem/monsoy/monsoy.htm.

Rivera, L. (2009). Ingeniería didáctica de la función exponencial. Recuperado el 20 de agosto de 2009, de http://www.itesm.mx/va/dide2/enc_innov/3er08/memorias/pdfs/laura_rivera_01.pdf.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. Recuperado el 20 de diciembre de 2009, de http://s3.amazonaws.com/lcp/didactica24/myfiles/teoria_situaciones-1-.pdf

Anexos

Anexo 1

Silabo de Matemáticas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES LETRAS

SILABO

Nombre del curso	:	MATEMÁTICAS
Código del curso		MAT - 128
Período en que se dicta	:	AÑO 2009 –PRIMER SEMESTRE
Créditos	:	CUATRO (4)
Modalidad	:	APRENDIZAJE COLABORATIVO
Número de horas de clase	:	CUATRO HORAS SEMANALES
Requisito	:	NO TIENE
Profesor del curso	:	CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE
Horario	:	101
Área a que pertenece el curso	:	MATEMÁTICAS Y LÓGICA

****
***

1. SUMILLA

El curso permitirá a los estudiantes integrar las matemáticas a las diversas actividades de la vida cotidiana y contribuirá a su formación científica y a enriquecer su cultura general.

A partir de su intervención en actividades de resolución de problemas matemáticos, los estudiantes desarrollarán las capacidades de analizar, razonar y comunicar ideas de modo eficiente. Se presentarán situaciones que correspondan a contextos propios de las distintas especialidades, cuyo análisis requiera del empleo de instrumentos matemáticos.

Nota aclaratoria: Este curso está dirigido a los alumnos que no estén inscritos en las especialidades de Economía, Gestión y Alta Dirección o Contabilidad. No tiene requisitos, lo que implica que los alumnos que no vayan a las especialidades antes mencionadas no están obligados a dar el examen de clasificación en el área de Matemáticas. Del mismo modo, esto implica que el curso complementario de Fundamentos de Matemáticas está pensado solo para los alumnos de las especialidades de Economía, Gestión y Alta Dirección o Contabilidad.

2. DESCRIPCIÓN

El curso ha sido diseñado pensado en aquellos alumnos que no darán a las Matemáticas, de manera preeminente, un uso instrumental. Responde mas bien a la iniciativa de ofrecerles un contenido académico para su formación en el desarrollo del pensamiento matemático.

Se pondrá énfasis en la resolución de problemas, como punto de partida para estimular el uso de los conocimientos previos, para estimular las aproximaciones intuitivas, la capacidad de hacer conjeturas, la creatividad, la actitud científica y la formalización matemática.

3. OBJETIVOS GENERALES

A través del curso, los alumnos:

- Adquirirán conocimientos matemáticos que podrán ser empleados en la vida cotidiana.
- Desarrollarán habilidades que les permitan aplicar los conocimientos matemáticos en la interpretación de información sobre hechos sociales y económicos, resumida en gráficos y cuadros.
- Desarrollarán capacidades que les permitan usar adecuadamente el lenguaje y los recursos matemáticos para expresar sus ideas.
- Desarrollarán capacidades que les permitan resolver y proponer problemas que no requieran matemáticas avanzadas.
- Desarrollarán actitudes como la visión crítica, el cuestionamiento a afirmaciones sin fundamento, la búsqueda de la verdad y la apertura a nuevas ideas.

4. CONTENIDO PROGRAMÁTICO:

I. Números y operaciones

Fracciones, escalas, porcentajes, interés simple, compuesto y tasa efectiva. Uso de la calculadora y estimaciones.

II. Cambio y relaciones

Expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones. Funciones reales de una variable real: dominio, rango, funciones elementales: constante, lineal, cuadrática, exponencial y seccionadas. Análisis de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, interceptos e intersección de gráficos.

III. Análisis de datos

Organización de datos, tablas de frecuencia, gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de posición y notación sigma.

IV. Incertidumbre

Experimento aleatorio, espacio muestral, evento simple y evento compuesto. Posibilidad y probabilidad.

Adicionalmente, y como resultado del trabajo de investigación que realizarán los alumnos, se considerarán otros temas de Matemáticas que los estudiantes señalen como importantes para su formación profesional.

5. PLAN POR SESIONES

SEMANA Lunes a Sábado		TEMA	INDICAR LAS SEMANAS EN LA MODALIDAD ABP	FECHA DE EVALUACIÓN[16] DE LAS PRUEBAS Y/O "PRODUCTOS"	FERIADOS
01	**17 – 22 ago.**	Presentación del curso Clase de introducción **CAPÍTULO 1 NÚMEROS Y OPERACIONES** Uso de escalas	Porcentajes. Cálculo e interpretación	**18 y 21 agosto**	Sábado 22 de agosto Prueba orientación vocacional 2009-2. Cursos de 2º , 3º y 4º ciclo no se dictarán. Los cursos de primer ciclo se dictarán normalmente.
02	**24 – 29 ago.**	Interés simple e interés compuesto.	**CAPÍTULO 2 CAMBIO Y RELACIONES** Funciones. Dominio y rango de una función.	**25 y 28 agosto**	
03	**31 ago – 05 set.**	Función constante. Función lineal	**Evaluación individual 1**	**1 y 4 setiembre**	Lunes 31 de agosto Inician talleres dirigidos y prácticas calificadas.

[16] Se debe precisar la fecha de las prácticas, pruebas preparatorias o controles de lectura en los que se necesitará la colaboración de un controlador. Las fechas que se declaren en el Plan del curso no podrán ser modificadas durante el semestre.

04	**07 – 12 set.**	Función lineal	Función cuadrática	**8 y 11 setiembre**	
05	**14 – 19 set.**	Función cuadrática	Revisión sobre funciones	**15 y 18 setiembre**	
06	**21 – 26 set.**	Función exponencial	**Evaluación individual 2**	**22 y 25 setiembre**	
07	**28 set – 03 oct.**	**Presentación del trabajo por especialidad**	**Presentación del trabajo por especialidad**	**29 setiembre y 2 octubre**	
08	**05 – 10 oct.**	Función exponencial	Clase de revisión	**6 y 9 de octubre**	Feriado: Jueves 08 de octubre.
09	**12 – 17 oct.**	**EXAMEN PARCIAL (SUSPENSIÓN DE CLASES Y PRÁCTICAS)**			
10	**19 – 24 oct.**	Análisis de gráficas (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, interceptos, etc.)	**CAPÍTULO 3 ANÁLISIS DE DATOS** Definición de variables estadísticas, tipos de variables. Tablas de distribución de frecuencias.	**20 y 23 octubre**	
11	**26 – 31 oct.**	Gráficos de barras, de sectores circulares y de puntos. Medidas de tendencia central	Evaluación individual 3	**27 y 30 octubre**	
12	**02 – 07 nov.**	Medidas de tendencia central Medidas de dispersión	Medidas de dispersión	**3 y 6 noviembre**	
13	**09 – 14 nov.**	Percentiles	Evaluación individual 4	**10 y 13 noviembre**	Examen 1ra. Opción: Domingo 15 nov. (Sábado 14 nov. cierra PUCP a partir del medio día (12 m).

14	16 – 21 nov.	**CAPÍTULO 4 INCERTIDUMBRE** Experimento aleatorio, espacio muestral, evento simple y evento compuesto	Experimentos aleatorios donde el evento simple es un vector (n-upla). Evento simple y evento compuesto	**17 y 20 noviembre**	
15	**23 – 28 nov.**	Posibilidad y probabilidad Cálculo de probabilidades empleando el planteamiento clásico o el empírico	Revisión		Sábado 28 de noviembre Fin de clases y prácticas.
16 a 18	**30 nov. – 05 dic. 07 dic. – 14 dic.**	**EXAMEN FINAL EXAMEN DE REZAGADO**			
		FÓRMULA DEL SISTEMA DE EVALUACIÓN $NOTA\ FINAL = \frac{(2)EP+(4)EF+(4)EC}{10}$ **DONDE** ***EP*: EXAMEN PARCIAL** ***EF*: EXAMEN FINAL** ***EC:* EVALUACIÓN CONTINUA** Si $NOTA\ FINAL \geq 10{,}5$ entonces el alumno aprobará el curso.			

6. SISTEMA DE EVALUACIÓN

De acuerdo con el Reglamento del Sistema de Evaluación, capítulo II, el artículo 53 dice: "La evaluación se efectuará mediante exámenes y prácticas calificadas utilizando números enteros de cero(0) a veinte (20)".

La evaluación del curso comprende:

- ***Examen Parcial***
- ***Examen Final***
- ***Evaluación Continua***

Estas tres notas se ingresan al sistema redondeadas al entero más cercano.
A continuación se describe cada uno de estos instrumentos de evaluación.

<u>EXAMEN PARCIAL</u> (EP) **(20%)**
Es una prueba escrita que se tomará a mitad de ciclo, según rol publicado por Secretaría. Abarca todo lo trabajado en el curso hasta ese momento. Durante la semana de Exámenes Parciales se suspenderán las clases.

<u>EXAMEN FINAL</u> (EF) (40%)
Es una prueba escrita que se tomará al final del ciclo según rol publicado por Secretaría. Abarca la totalidad del curso.

<u>EVALUACIÓN CONTINUA</u> (EC) (40%)
Son evaluaciones distribuidas durante todo el ciclo, que evalúan conceptos y procedimientos adquiridos en las semanas previas de clase o que corresponden a trabajos de investigación. Constan de **Evaluaciones individuales** y de evaluaciones grupales (**Actividades** y **Trabajo por especialidad**).

EVALUACIONES INDIVIDUALES (20%)
Cada evaluación individual es una prueba escrita que consiste en el desarrollo de cuestiones tratadas en el curso desde el inicio hasta donde se señale oportunamente.

ACTIVIDADES (12%)
Por actividad se entiende una situación problema, una lista de ejercicios o un grupo de preguntas presentada a los estudiantes para ser resuelta en grupos.

TRABAJO POR ESPECIALIDAD (8%)
Los estudiantes deberán agruparse de preferencia por especialidad. Cada grupo debe tener 4 integrantes. El trabajo consiste en investigar sobre las relaciones existentes entre las Matemáticas y la especialidad a la que pertenecen los estudiantes del grupo. Los temas deberán ser seleccionados por los grupos y presentados al profesor en las sesiones previstas para ello en el plan de curso.

Existe un **EXAMEN DE REZAGADOS** únicamente para los alumnos que no han rendido el examen parcial, o el examen final (o ambos), según reglamento de la facultad. El examen de rezagados es una prueba escrita que abarca la totalidad del curso. La nota del examen de rezagados reemplaza indefectiblemente a la nota del examen que no se hubiera rendido (examen parcial o examen final), o a la nota del examen final en el caso que el alumno no hubiera rendido ambos exámenes.

Los alumnos están obligados a rendir las evaluaciones en las fechas previstas en el ciclo académico 2009-2. **No hay pruebas de rezagados para las evaluaciones que correspondan a la evaluación continua.**

El **Cronograma de las Evaluación Individuales** es el siguiente:

Evaluación Individual	*Fecha*
Nº 1	Viernes 4 de setiembre
Nº 2	Viernes 25 de setiembre
Nº 3	Viernes 30 de octubre
Nº 4	Viernes 13 de noviembre

7. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

[1] Advíncula, E., Barrantes, E., Gaita, C., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). Matemáticas para no matemáticos. Lima: PUCP.

[2] Guzmán, M. de; Colera, J. y Salvador, A. (1988). Bachillerato I y II. España: Grupo Anaya.

[3] Haeussler, S. (2003) Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía. México, D.F.: Pearson Educación.

[4] Johnson,R. y Kuby, P. (2004). Estadística elemental lo esencial. Thomson. México D. F.

[5] Stewart, J. (2001). Precálculo. México D. F.: Thomson.

8. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

[6] Arya J. (2002). Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía. México, D.F.: Pearson Educación.

[7] Leithold, L. (1994). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica. México, D.F.: Oxford University.

[8] Steen, L. (2001). La enseñanza agradable de las matemáticas. México: Editorial Limusa.

Anexo 2

Ficha de observación

Situación 1

Pregunta	Lo que hacen los alumnos	Intervenciones del profesor
a		
b		
b1		
b2		
c		

Situación 2

Pregunta	Lo que hacen los alumnos	Intervenciones del profesor
a		
b		
b1		
b2		
c		
d		

Situación 3

Pregunta	Lo que hacen los alumnos	Intervenciones del profesor
a		
b		
c		

Situación 4

Pregunta	Lo que hacen los alumnos	Intervenciones del profesor
a		
a1		
a2		
b		
c		

Anexo 3

Solucionario de la situación didáctica original

Situación 1

Miguel, hace dos meses, presentó síntomas de gripe y fue a una consulta con el doctor para que le dé algún tratamiento. Debido a las noticias sobre la propagación del virus de la influenza, el doctor le recomendó quedarse en observación. Luego de unas horas, le indicó el siguiente tratamiento: tomar una dosis oral de 75 mg de Oseltamivir, un antiviral selectivo contra el virus de la influenza, dos veces al día durante 5 días.

Si la vida media del Oseltamivir es de 8 horas, entendiendo que la vida media de un medicamento es el tiempo necesario para que la concentración sanguínea del medicamento se reduzca a la mitad, y Miguel solo ha tomado la primera dosis, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 8, 16 y 24 horas de haber tomado dicho medicamento?

Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales.

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	
8	
16	
24	

Solución

Como la vida media del Oseltamivir es de 8 horas, entonces cada 8 horas la cantidad de medicamento que queda en el organismo de Miguel es igual a la mitad de la cantidad de medicamento anterior. Por ello, para 8, 16 y 24 horas, completamos la tabla dividiendo entre 2 la cantidad anterior; o calculando el 50%

de la cantidad anterior, que es equivalente a dividir entre 2; obteniendo los siguientes resultados:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
8	37,5
16	18,75
24	9,375

b) Complete la siguiente tabla y responda cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora. Anote sus resultados utilizando tres decimales.

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$[0;8]$				
$[8;16]$				
$[16;24]$				

A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación es constante?

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación porcentual es constante?

Solución

Trasladamos los resultados obtenidos en la parte a), realizamos las operaciones de variación y variación porcentual indicadas en el encabezado de la tabla, y obtenemos los siguientes resultados:

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$\left[0;8\right]$	75	37,5	$-37,5$	-50%
$\left[8;16\right]$	37,5	18,75	$-18,75$	-50%
$\left[16;24\right]$	18,75	9,375	$-9,375$	-50%

A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

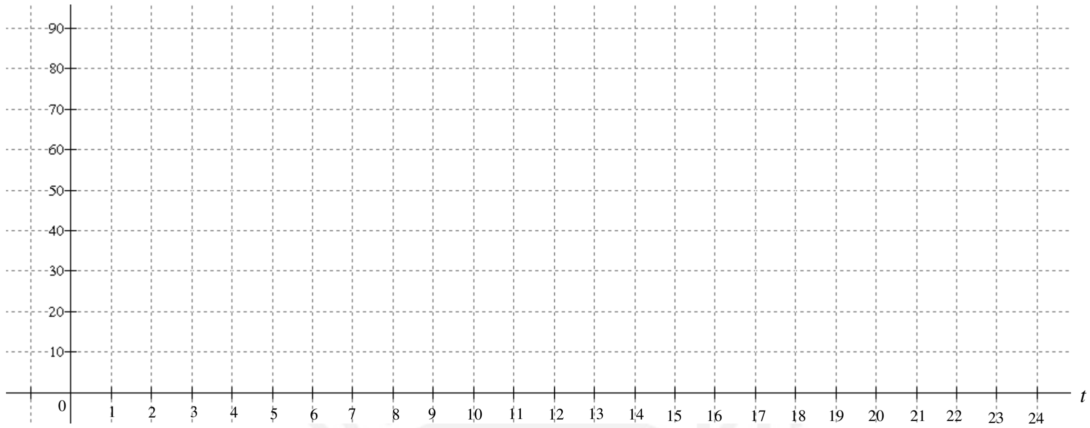
b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación es constante?

A partir de los resultados mostrados en la tabla anterior, observamos que cada 8 horas la disminución de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel no es constante sino variable pues en las primeras 8 horas, la cantidad de medicamento disminuye en 37,5 mg; en las siguientes 8 horas, disminuye en 18,75 mg; y en las siguientes 8 horas, disminuye en 9,375 mg.

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad del medicamento en el organismo de Miguel cada 8 horas? ¿Esta variación porcentual es constante?

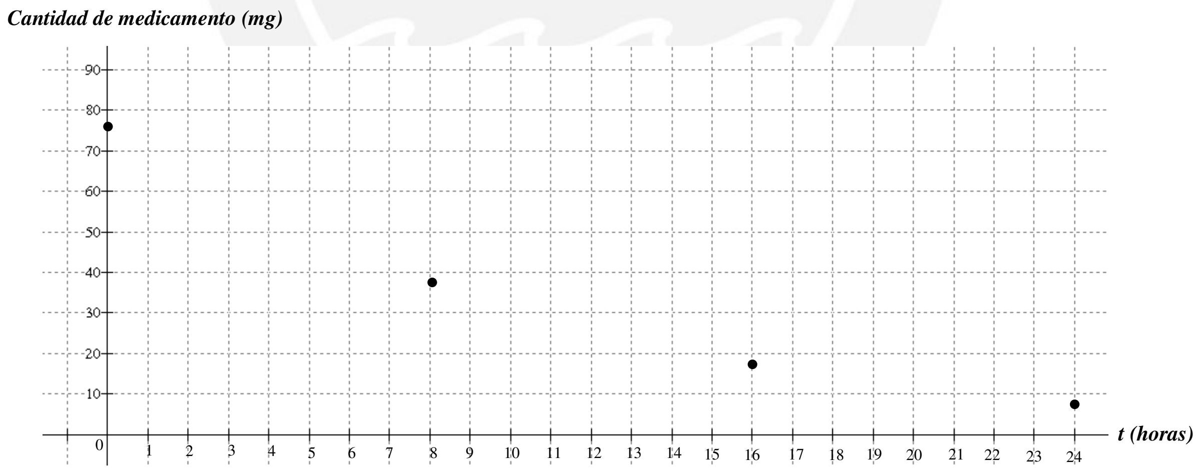
A partir de los resultados mostrados en la tabla anterior, observamos que cada 8 horas o para intervalos iguales de 8 horas hay una disminución porcentual constante de 50% de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel.

c) Represente gráficamente los resultados obtenidos en la parte a) y determine si por estos puntos pasa una recta, justificando su respuesta.
Utilice la siguiente cuadrícula.



Solución

Para realizar el gráfico pedido utilizamos los resultados obtenidos en la tabla de parte a) y ubicamos estos valores en el plano cartesiano que relaciona cantidad de medicamento (en mg) con el tiempo t (en horas), obteniendo solo cuatro puntos pues la variable toma valores discretos, como se muestra a continuación:



Como la disminución de la cantidad de medicamento en intervalos iguales de 8 horas no es constante, no existe un valor constante para la pendiente entre un par de puntos. Por tanto, por estos puntos no pasa una recta.

Otra explicación podría ser la siguiente:

Si calculamos la pendiente entre el primer y segundo mostrado en el gráfico obtenemos $m_1 = \dfrac{75-37{,}5}{0-8} = -4{,}6875$, pero si calculamos la pendiente entre el segundo y tercer punto obtenemos $m_2 = \dfrac{37{,}5-18{,}75}{8-16} = -2{,}34375$. Como m_1 y m_2 son diferentes, concluimos que por estos puntos no pasa una recta.

Situación 2

Considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis de Oseltamivir, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos miligramos de Oseltamivir permanecerán en el organismo de Miguel después de 1, 2, 3 y 4 horas de haber tomado dicho medicamento?

Anote sus resultados en la siguiente tabla, utilizando tres decimales:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	
1	
2	
3	
4	

Solución

Cabe señalar que al iniciar la aplicación de esta situación se dio la siguiente indicación verbal a los alumnos: “Consideren que la variación porcentual de la cantidad de medicamento luego de t horas es constante”.

A partir de la indicación anterior, podemos afirmar que como la variación porcentual de la cantidad de medicamento después de cada hora es constante, entonces el porcentaje de la cantidad de medicamento que queda en el organismo después de cada hora también es constante. Por ello, la cantidad de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de cada hora se puede obtener multiplicando la cantidad anterior por un factor k constante y formamos la siguiente progresión geométrica:

$$75, 75k, 75k^2, 75k^3, 75k^4, 75k^5, 75k^6, 75k^7, 75k^8, \ldots$$

donde k es la razón geométrica.

Esta progresión también se puede escribir verticalmente, aumentando las filas de tabla hasta la fila en la que se ubica el tiempo t = 8, como se muestra a continuación:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	$75k$
2	$75k^2$
3	$75k^3$
4	$75k^4$
5	$75k^5$
6	$75k^6$
7	$75k^7$
8	$75k^8$

Luego, utilizamos la información de la vida media del medicamento que es igual a 8 horas e igualamos $75k^8 = 37{,}5$ y obtenemos $k = 0{,}917$.

Finalmente, con este valor de k completamos la tabla obteniendo los siguientes resultados:

Tiempo t (en horas)	Cantidad de medicamento en el organismo después de t horas (en mg)
0	75
1	68,775
2	63,067
3	57,832
4	53,032

b) Complete la siguiente tabla calculando, en primer lugar, la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel cada hora y, posteriormente, la variación porcentual de dicho medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora. Anote sus resultados utilizando tres decimales.

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$\left[0;1\right]$				
$\left[1;2\right]$				
$\left[2;3\right]$				
$\left[3;4\right]$				

A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora?

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora?

Solución

Trasladamos los resultados obtenidos en la parte a), realizamos las operaciones de variación y variación porcentual indicadas en el encabezado de la tabla, y obtenemos los siguientes resultados:

Intervalo de tiempo $\left[t_i;t_f\right]$	Cantidad inicial C_i	Cantidad final C_f	$Variación = C_f - C_i$	$Variación\ porcentual = \dfrac{C_f - C_i}{C_i} \times 100\%$
$\left[0;1\right]$	75	68,775	$-6,225$	$-8,3\%$
$\left[1;2\right]$	68,775	63,067	$-5,708$	$-8,3\%$
$\left[2;3\right]$	63,067	57,832	$-5,235$	$-8,3\%$
$\left[3;4\right]$	57,832	53,032	$-4,8$	$-8,3\%$

A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, responda lo siguiente:

b1) ¿Cuál es la variación de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora?

A partir de los resultados mostrados en la tabla anterior, observamos que la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora no es constante sino variable pues en la primera hora, la cantidad de medicamento disminuye en 6,22 mg; en la siguiente hora, disminuye en 5,71 mg; en la siguiente hora, disminuye en 5,24 mg; y la última hora, disminuye en 4,8 mg.

b2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora?

A partir de los resultados mostrados en la tabla anterior, observamos que cada hora o para intervalos contantes de una hora hay una disminución porcentual constante de 8,3% de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel.

c) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de Oseltamivir que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas. Comente las características de la expresión obtenida indicando su relación con la información dada en el problema y compruebe si la expresión obtenida es correcta.

Solución

Para obtener la expresión que permitirá calcular la cantidad de miligramos de Oseltamivir que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas utilizamos la progresión geométrica que formamos en la solución de la parte c) y el valor hallado para k.

La expresión pedida es: $f(t) = 75(0{,}917)^t, \quad t \geq 0$

o en forma equivalente: $f(t) = 75\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}, \quad t \geq 0$

Respecto a las características de la primera expresión $f(t) = 75(0{,}917)^t$, podemos identificar lo siguiente: el valor inicial de 75 es un valor constante que corresponde a la dosis inicial de medicamento; la variable t está en el exponente y toma valores reales mayores o iguales que 0 por indicar el tiempo (en horas); la base 0,917 ó 91,7% es un valor real entre 0 y 1 que está asociado al comportamiento estrictamente decreciente de la función, y es el porcentaje constante de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de cada hora (intervalos iguales de 1 hora); y $0{,}917-1=-0{,}083$ ó $-8{,}3\%$ es igual a la disminución porcentual constante de la cantidad de medicamento que eliminará Miguel de su organismo después de cada hora (intervalos iguales de 1 hora).

Respecto a las características de la segunda expresión $f(t)=75\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, podemos identificar lo siguiente: el valor inicial de 75 es un valor constante que corresponde a la dosis inicial de medicamento; la variable t está en el exponente y toma valores reales mayores o iguales que 0 por indicar el tiempo (en horas); la base $\frac{1}{2}$ es la fracción que corresponde al porcentaje de medicamento (50%) que permanece o se elimina del organismo luego de una vida media; y el denominador del exponente fraccionario $\frac{t}{8}$ es igual a la vida media del medicamento que es 8 horas.

Para comprobar si la expresión obtenida es correcta, reemplazamos t = 8 en la ecuación anterior y obtenemos:

$$f(8)=75(0{,}917)^{8}=37{,}5$$

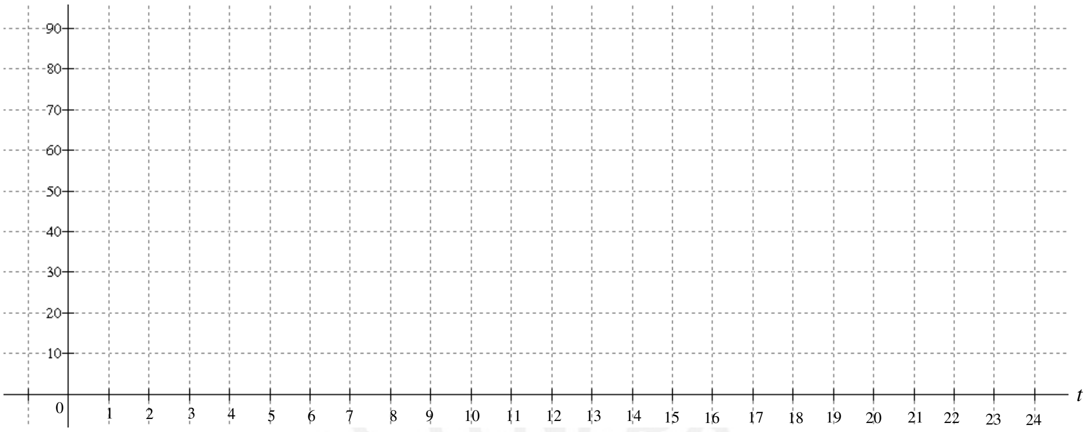
Este resultado coincide con la información de vida media del enunciado del problema.

También, podemos reemplazar para t = 0 y obtendremos la dosis inicial de medicamento igual a 75 mg.

Asimismo, podemos reemplazar t = 16 ó t = 24 y obtendremos los mismos valores obtenidos al utilizar el significado de vida media.

d) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte c).

Utilice la siguiente cuadrícula.

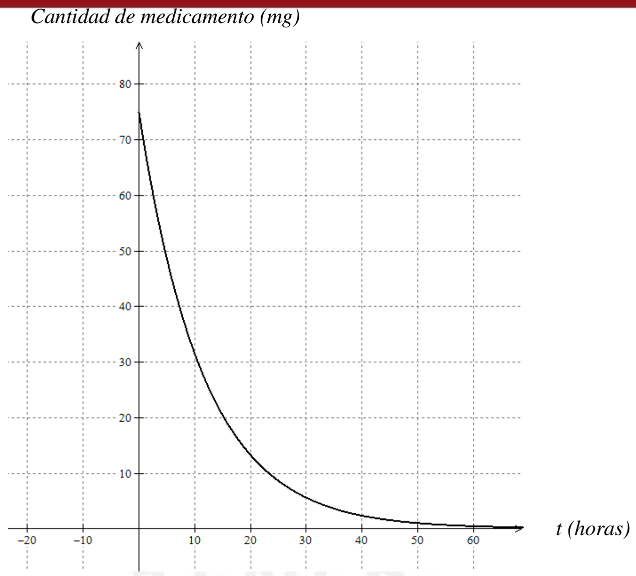


Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: "A mayor cantidad de horas trascurridas, luego de ingerir el medicamento, Miguel eliminará por hora mayor cantidad de miligramos de Oseltamivir de su organismo". Justifique su respuesta.

Solución

Graficamos cualquiera de las dos expresiones obtenidas en la parte c) reconociendo que son funciones exponenciales decrecientes y utilizando los valores que toma la función para $t=0$ y $t=8$.

También podemos utilizar los valores obtenidos en la tabla de la parte a) y obtenemos el gráfico mostrado a continuación:



Estamos en desacuerdo con esta afirmación porque a medida que transcurre el tiempo, Miguel elimina por hora cada vez una menor cantidad de medicamento de su organismo.

Situación 3

Posteriormente, Miguel sigue dos tratamientos diferentes contra la gripe, cuyas indicaciones se muestran a continuación:

- Tratamiento 1: El doctor le receta una dosis de 550 mg de apronax, que tiene una vida media de 12 horas, para ser tomado dos veces al día y así desinflamar su garganta.
- Tratamiento 2: El doctor le receta una dosis de 500 mg de panadol, que tiene una vida media de 2 horas, para ser tomado tres veces al día y así aliviar su dolor de cabeza.

Para cada tratamiento, considerando que Miguel solo ha tomado la primera dosis del medicamento, responda las siguientes preguntas:

a) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas. Explique cómo obtuvo esta expresión e indique qué representa la base de la misma en el problema dado.

Solución

Para obtener la expresión que permita calcular la cantidad de miligramos de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel después de t horas utilizamos una estrategia similar a la mostrada en la situación 2 parte c).

También, podemos utilizar una analogía con la pregunta de la situación 2 parte c) y reconocer los valores que cambian.

Utilizando cualquiera de las formas antes mencionadas, obtenemos las siguientes expresiones:

Para el tratamiento 1, la expresión pedida es: $f(t) = 75(0{,}944)^t$

$$f(t) = 550\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$$

Para el tratamiento 2, la expresión pedida es: $f(t) = 75(0{,}707)^t$

$$f(t) = 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$

En ambos tratamientos, las expresiones se han obtenido a partir de los datos del enunciado, luego de reconocer el comportamiento exponencial de la disminución porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel.

En ambos tratamientos, las bases de las expresiones obtenidas representan el porcentaje de la cantidad de medicamento que permanecerá en el organismo de Miguel luego de cada hora.

b) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de medicamento en el organismo de Miguel después de cada hora? Explique cómo obtuvo este valor.

Solución

Utilizamos las expresiones obtenidas en la parte a) para cada tratamiento y obtenemos lo siguiente:

Para el tratamiento 1, la disminución porcentual es de 5,6% de medicamento después de cada hora.

El resultado 5,6% (equivalente a 0,056) se obtiene de la siguiente manera: $0{,}944 - 1 = -0{,}056$, donde el signo negativo indica que hay una disminución porcentual.

Para el tratamiento 2, la disminución porcentual es de 29% de medicamento después de cada hora.

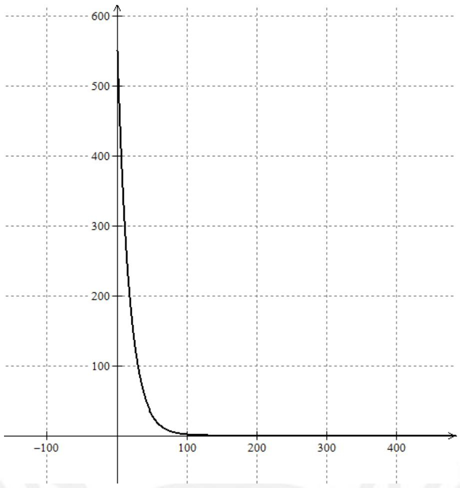
El resultado 29,3% (equivalente a 0,293) se obtiene de la siguiente manera: $0{,}707 - 1 = -0{,}293$, donde el signo negativo indica que hay una disminución porcentual.

c) Represente gráficamente la expresión obtenida en la parte a).

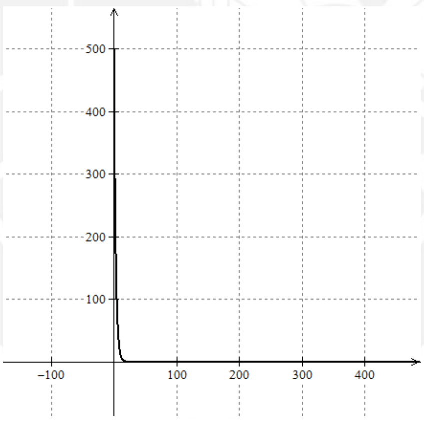
Solución

Utilizamos la expresión obtenida en la parte a) para cada tratamiento y tabulamos dos valores.

Para el tratamiento 1, la gráfica es la siguiente:



Para el tratamiento 2, la gráfica es la siguiente:



Situación 4

Raúl recibe una gratificación de S/. 10 000 y decide depositarlo en una entidad bancaria que le ofrece una tasa de interés de 9,5% compuesto anualmente. Si Raúl no retira ni abona ninguna cantidad de dinero adicional a la depositada inicialmente y la entidad bancaria no le hace ningún descuento, responda las siguientes preguntas:

a) Raúl desea saber cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de cada año, durante los cuatro primeros años y para ello elabora la siguiente tabla.

Complete la tabla, utilizando tres decimales.

Año t	Cantidad de dinero al inicio del año t (en Nuevos Soles)	Interés obtenido al final del año t (en Nuevos Soles)	Cantidad de dinero al final del año t (en Nuevos Soles)
1			
2			
3			
4			

A partir de los resultados obtenidos en la tabla, responda las siguientes preguntas:

a1) ¿Cómo varía la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación es constante de un año a otro?

a2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación porcentual es constante de un año a otro?

Solución

Usamos la tasa de interés compuesto anualmente igual a 9,5% dado en el enunciado y calculamos el interés obtenido al final del año 1 que es igual a $9{,}5\%(10000) = 950$. Luego, calculamos la cantidad de dinero al final del año 1 sumando la cantidad de dinero al inicio del año 1 más el interés obtenido en ese año; es decir, $10000 + 950 = 10950$. Con estos resultados completamos la primera fila de la tabla.

Luego, repetimos el procedimiento anterior para completar las demás filas y obtenemos los siguientes resultados:

Año t	Cantidad de dinero al inicio del año t (en Nuevos Soles)	Interés obtenido al final del año t (en Nuevos Soles)	Cantidad de dinero al final del año t (en Nuevos Soles)
1	10 000	950	10950
2	10950	1040,25	11990,25
3	11990,25	1139,07375	13129,32375
4	13129,32375	1247,285756	14376,60951

A partir de los resultados obtenidos en la tabla, responda las siguientes preguntas:

a1) ¿Cómo varía la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación es constante de un año a otro?

A partir de los valores obtenidos en la tabla anterior, podemos calcular la variación entre un par de años, como por ejemplo:

Entre los dos primeros años: $11990{,}25 - 10950 = 1040{,}25$

Entre el segundo y tercer año: $13129{,}32375 - 11990{,}25 = 1139{,}07375$

Como los resultados obtenidos son diferentes, podemos afirmar que el aumento no es constante de un año a otro, sino variable.

a2) ¿Cuál es la variación porcentual de la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año? ¿Esta variación porcentual es constante de un año a otro?

A partir del enunciado de la situación, podemos afirmar que la variación porcentual de la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl después de cada año es constante pues corresponde a un incremento porcentual constante de 9,5% por año, que es la tasa de interés compuesto anualmente.

Otra respuesta podría ser la siguiente:

A partir de los valores obtenidos en la tabla anterior, podemos calcular la variación porcentual entre un par de años, como por ejemplo:

Entre los dos primeros años: $\left(\frac{11990,25-10950}{10950}\right)100\% = 9,5\%$

Entre el segundo y tercer año: $\left(\frac{13129,32375-11990,25}{11990,25}\right)100\% = 9,5\%$

Como los resultados obtenidos son iguales, podemos afirmar que hay un aumento porcentual constante de dinero de un año a otro, igual a 9,5%.

b) Determine una expresión que permita calcular la cantidad de dinero que tendrá Raúl en su cuenta luego de t años. Explique cómo obtuvo la expresión y comente sus características indicando su relación con la información dada en el problema.

Solución

Para determinar la expresión pedida podemos utilizar la fórmula $P(t) = P_0(1+r)^t$, que permite calcular el monto total de un dinero inicial a una tasa de interés compuesto luego de t años, y obtener la siguiente expresión:

$$P(t) = 10000(1,095)^t$$

Otra forma para obtener la expresión pedida podría consistir en reconocer que las variables involucradas se relacionan a través de una función exponencial cuya expresión matemática tiene la forma $f(t) = Ca^t$ y luego realizar los siguientes reemplazos:

Para $t = 0$: $Ca^0 = 10000$ … (1)

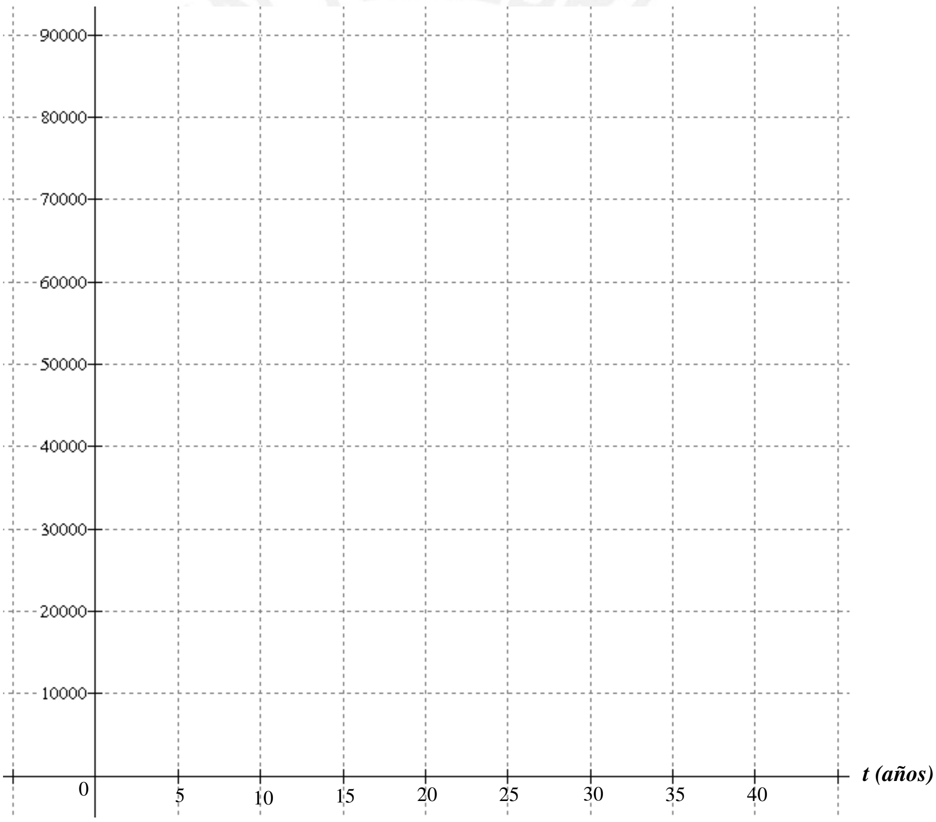
Para $t = 1$: $Ca^1 = 10950$ … (2)

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos: $C = 10000$ y $a = 1,095$.

Luego, formamos la siguiente expresión: $f(t) = 10000(1,095)^t$

Respecto a las características de la expresión obtenida, podemos decir lo siguiente: 10000 es una cantidad contante que corresponde al deposito inicial de Raúl, t es la variable que se ubica en el exponente y toma valores mayores o iguales a cero pues corresponde al tiempo (en años), y $a = 1{,}095$ es la base de la expresión que corresponde al porcentaje de dinero que habrá en la cuenta de Raúl después de cada año, que además indica el comportamiento estrictamente creciente de la función por ser un valor mayor que 1. Además, se puede decir que $1{,}095 = 1 + 0{,}095$ donde $0{,}095$ ó $9{,}5\%$ es el porcentaje de aumento de dinero constante por año pues es la tasa de interés compuesto anualmente.

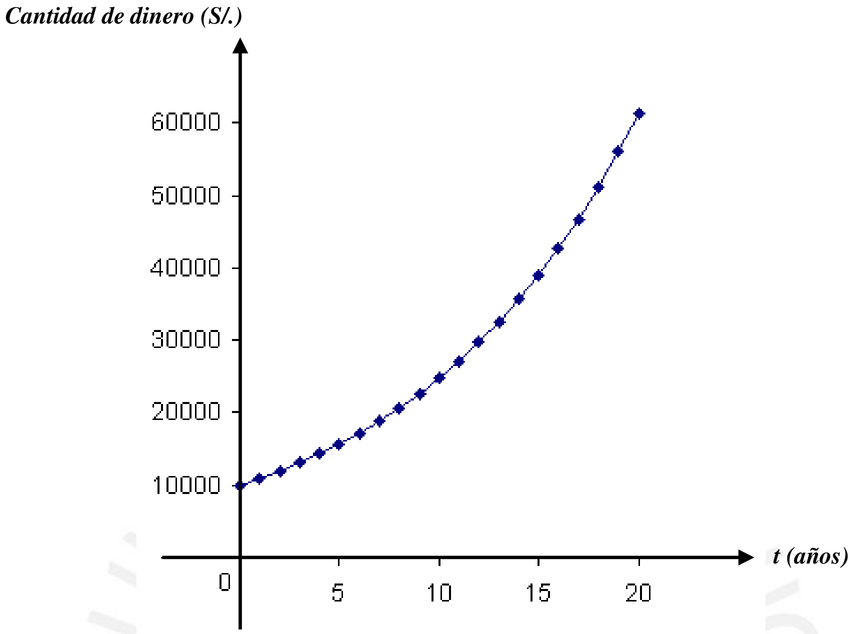
c) Representegráficamente la expresión obtenida en la parte b).
Utilice la siguiente cuadrícula.



Observe el gráfico anterior y exprese su acuerdo o desacuerdo con la siguiente afirmación: “A mayor cantidad de años, Raúl acumulará por año mayor cantidad de dinero en su cuenta”. Justifique su respuesta.

Solución

Utilizamos la expresión obtenida en la parte b) y obtenemos el siguiente gráfico:



Respecto a la afirmación podemos decir que estamos de acuerdo pues a medida que aumentan los años, como hay mayor cantidad de dinero acumulada en la cuenta de Raúl entonces el aumento por año es mayor.