PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

"ANÁLISIS DE LAS TRANSFORMACIONES DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN LA EDUCACIÓN ESCOLAR"

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

ZENÓN EULOGIO MORALES MARTÍNEZ

ASESORA DE TESIS:

MAG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

MIEMBROS DEL JURADO:

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

MAG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

MAG. ELIZABETH ADVÍNCULA CLEMENTE

LIMA – PERÚ

2013

DEDICATORIA

A Dios por darme las bendiciones día a día.

A mi padre Zenón, que desde el cielo se regocija ante mis logros.

A mi madre Hilda, por el cariño de magnitud infinita.

A Caty, mi compañera que mi "amigo el destino" la eligió para el logro de mis triunfos, con infinito amor.

A mis hijos Renato y Rodrigo, mis tesoros y la razón de mi vida.

A mis hermanos: Enrique, Alex, Luis, Doris, Catalina, Jaime, Josefina y Yovani; unidos por siempre.

A mis colegas, grandes maestros que transforman jóvenes para el progreso de nuestra patria.

A todos mis alumnos, son parte fundamental en mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A la Profesora Magister Cecilia Gaita Iparraguirre, por la paciencia, dedicación, comprensión durante el asesoramiento y orientación de este trabajo y por haber proporcionado momentos de discusión para el fortalecimiento de mi actitud hacia la investigación.

A la Profesora Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por la orientación en el plan de tesis, formando las bases de la metodología de esta investigación y por sus ricas sugerencias que contribuyeron a la finalización de este trabajo.

A la Profesora Magister Elizabeth Advíncula Clemente, por las valiosas sugerencias, comentarios y críticas que contribuyeron a la culminación de esta investigación.

A mis profesores de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas – PUCP, de manera especial al Dr. César Carranza, al Dr. Uldarico Malaspina y a todos aquellos profesores que impartieron sus saberes y experiencias en esta Maestría, de los cuales tengo los mejores recuerdos.

Al Dr. Raymond Duval, por sus magistrales exposiciones sobre su teoría cognitiva, en las ponencias de Brasil y Perú, que motivaron la elección del marco teórico de esta investigación.

A todos los colegas educadores de matemáticas del Perú, formadores de las mejores generaciones de jóvenes que construyen el progreso de mi país. De manera especial a los educadores matemáticos Magister Juan Carlos Sandoval y Magister Enrique Huapaya con los que comparto esta magna experiencia de hacer investigación en la educación matemática.

A la comunidad internacional de educación matemática o matemática educativa, con las que he compartido notables experiencias en congresos en diversos países, mi reconocimiento porque me han permitido conocer la investigación matemática como una forma de mejorar nuestra práctica docente. De manera especial a las comunidades de educadores matemáticos: IREM-PUCP, ICME, CIBEM, JAEM, CIAEM y RELME.

Muy agradecido a todos. ZENÓN E. MORALES MARTÍNEZ

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar las dificultades que se presentan cuando el alumno realiza actividades de aprendizaje sobre la función logarítmica, estas dificultades son analizadas a través de los registros de representación semiótica y las transformaciones que se realizan sobre estas representaciones. Con este trabajo pretendemos mostrar el fundamento cognitivo de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la función logarítmica, este se basa en las dificultades que tienen los alumnos al realizar tratamientos y conversiones entre registros que nos muestran las distintas formas en la que se representa un concepto matemático. Empleamos como soporte teórico a la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas propuesta por Duval (1995), que nos propone un enfoque cognitivo aplicado sobre la actividad matemática en búsqueda de encontrar las fuentes de las dificultades o la incomprensión del aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación, realizada con alumnos del quinto año de educación secundaria de un colegio privado del Perú, se pudo comprobar que las mayores dificultades se presentaron cuando los alumnos debían realizar conversiones no congruentes que involucraran algún registro multifuncional como el registro verbal o registro gráfico. En estos registros, los alumnos presentaron mayores dificultades porque deben realizar una aprehensión perceptiva sobre los registros gráficos, así como una comprensión lingüística sobre los registros verbales en los cuales se plantean las actividades contextualizadas sobre la función logarítmica. En este trabajo pudimos comprobar una de las hipótesis de Duval, aquella que menciona que la actividad matemática se fundamenta en las transformaciones sobre los registros semióticos, también comprobamos que las mayores dificultades se presentan cuando la actividad matemática se realiza sobre registros multifuncionales (registros verbal y gráfico) y que los tratamientos son los más abundantes en la actividad matemática, siendo la conversión aquella transformación semiótica que permite el paso de un registro de mayor dificultad cognitiva a otro de menor dificultad cognitiva, con la finalidad de realizar tratamientos con mayor facilidad.

Palabras claves: registros semióticos, transformaciones semióticas, dificultades cognitivas, función logarítmica.

ABSTRACT

This paper aims to analyze the difficulties that arise when the student has been operating on the logarithmic function; these difficulties are analyzed through the registers of semiotic representation and transformations that take place on these representations. In this paper we show the cognitive basis of the difficulties involved in learning the logarithmic function, this is based on the difficulties students to perform conversions among treatments and records that show the different ways in which it represents a mathematical concept. We used as theoretical support to the theory of semiotic representations records given by Duval (1995); we proposed this cognitive approach applied mathematical activity in search of finding the sources of difficulties or misunderstanding of learning mathematics. In this research, conducted with students of the fifth year of secondary education at a private school in Peru, it was found that the greatest difficulties arose when students were not consistent conversions that involved some record multifunctional as registration verbal or graphic recording. In these records, the students presented more difficulties because they must perform a perceptual apprehension about graphic records and linguistic comprehension on verbal records which arise contextualized activities on the logarithmic function. In this work we saw one of the hypotheses of Duval, one that mentions that the activity is based on mathematical transformations on semiotic registers, we also found that the greatest difficulties arise when mathematical activity is performed on multifunctional records (records verbal and graph) and that treatments are most abundant in mathematical activity, with conversion semiotic transformation that allows the passage of a more difficult record to a lower cognitive difficulty, in order to make treatment more easily.

Keywords: semiotic records, semiotic transformations, cognitive difficulties, logarithmic function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación se realiza en el marco de la Didáctica de la Matemática, es una investigación cualitativa realizada en el contexto de la Educación Básica, con la participación de alumnos de 16 y 17 años del quinto año de educación secundaria. El objetivo de la misma es analizar los problemas del aprendizaje de la Matemática, específicamente los relacionados con el objeto matemático: la función logarítmica. Para ello, se hará un análisis de las posibles dificultades que puedan presentarse empleando la Teoría de las Representaciones Semióticas como soporte teórico, centrando la observación en las transformaciones que deben producirse cuando se aprende el objeto matemático en estudio. El éxito en el aprendizaje se verá reflejado cuando los alumnos logren las transformaciones adecuadas sobre el objeto matemático. Esta investigación espera que los alumnos recurran a la diversidad de registros semióticos en el aprendizaje de la función logarítmica, que según propone Duval (2005) “la manera matemática de razonar y visualizar está intrínsecamente ligada a la utilización de las representaciones semióticas, y toda comunicación en matemática se establece en base a esas representaciones” (p. 8). Esto les permitirá formarse como personas con capacidades matemáticas que aseguren su éxito en la vida profesional que les espera. Este logro mostrará que el profesor ha logrado romper el “muro” que impedía el aprendizaje de las matemáticas. Esta propuesta didáctica basada en la teoría de Duval, implica un cambio en el enfoque de la enseñanza de la función logarítmica, así como una reforma curricular que centre la enseñanza en una mirada a las transformaciones que debe realizar el alumno sobre los registros que representan los objetos matemáticos; también nos invita a reflexionar sobre el encuentro de dos mundos que ocurre cuando se realiza el proceso de enseñanza y aprendizaje: la vieja cultura de nosotros los maestros con la nueva cultura de los jóvenes alumnos, la cultura digital de ellos que con toda la influencia de las redes sociales virtuales, de alguna manera nos invita a replantear nuestra forma tradicional de enseñar matemática.

A manera de conclusión, citamos que nosotros los maestros tenemos el compromiso de orientar nuestra actividad docente a formar alumnos que tengan la capacidad de actuar sobre los objetos matemáticos y transformarlos superando las dos fuentes de la incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas, que según Duval (2006) son: La primera fuente: La complejidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional y la segunda fuente: La complejidad de la conversión de las representaciones o el cambio de registro. (p. 116).

La investigación se desarrolla en seis capítulos:

- En el capítulo 1 se trata sobre el problema de investigación, donde se expone la importancia de la investigación en el currículo, la importancia de la función logarítmica dentro de la estructura matemática. Estas justificaciones fundamentan la determinación de la pregunta y objetivos de la investigación.
- En el capítulo 2 se determina el marco teórico que nos permitirá analizar las dificultades en el aprendizaje de la función logarítmica, consideramos que la teoría de Duval nos permitirá analizar dichas dificultades a través de las representaciones semióticas aplicadas a la función logarítmica y las transformaciones que se pueden realizar sobre ellas. En este capítulo también se define el método de investigación a seguir señalando las actividades de investigación que permitirán encontrar las dificultades en la comprensión del objeto matemático elegido.
- En el capítulo 3, se estudia el objeto matemático: la función logarítmica, se realiza un estudio histórico-epistemológico de los logaritmos desde su creación por Napier a principios del siglo XVII, hasta su presentación actual en los libros de educación básica. Se toma como referencia la propuesta del estudio de este objeto matemático propuesto en el texto de Lima (1999).
- En el capítulo 4 se analizan los posibles problemas de aprendizaje en el estudio de la función logarítmica, se analizan investigaciones anteriores sobre las dificultades en la compresión de la noción de logaritmos. Así mismo se analiza el desarrollo del concepto de logaritmo en los libros didácticos, se eligieron dos libros empleados por alumnos y profesores en el quinto año de educación secundaria, el análisis se centra en las transformaciones semióticas que ocurre sobre el objeto matemático en estudio.
- En el capítulo 5 se presenta el análisis de las actividades de experimentación, se presenta los análisis preliminares sobre la prueba diagnóstica con la presentación y análisis de los resultados de las respuestas planteadas por los alumnos investigados; se presentan los resultados de la entrevista al Profesor del curso y el análisis preliminar de las actividades del segundo instrumento que permitirá la identificación de las dificultades en las transformaciones respecto a la función logarítmica. Se muestran también los resultados de la aplicación de estas actividades.
- Al finalizar, en el capítulo 6 se presenta el contraste entre los resultados esperados y los resultados obtenidos en la experimentación. Se hace un contraste entre los

resultados sobre los libros didácticos, los resultados de la entrevista del Profesor del curso, el análisis previo realizado por el investigador y los resultados obtenidos en las actividades experimentales aplicadas sobre los alumnos investigados. En este capítulo también se presentan las consideraciones finales a las que se llega al concluir esta investigación. Se presentan las respuestas a las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo de esta investigación, como producto de los resultados de la investigación realizada en el segundo experimento.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN.

La presente investigación se realiza luego de una larga experiencia en la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase; haremos una reflexión sobre nuestra práctica docente dirigiendo una mirada a la actuación de los alumnos frente al objeto matemático que nos hemos propuesto analizar: la función logarítmica. Apoyados en la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas de Duval estudiaremos las dificultades cognitivas que se presentan en el aprendizaje de la función logarítmica. En nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas, encontramos que las dificultades sobre la comprensión de las nociones matemáticas se presentan en el alumno y en muchos casos el profesor no puede explicar la causa de estas dificultades y nosotros los profesores le hacemos muchas preguntas al alumno, como: ¿Por qué no estudias? ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué no te concentras? Y muchas interrogantes nos hacemos los profesores cuando nuestros alumnos no tienen éxito en el aprendizaje del objeto matemático enseñado. En la búsqueda de un marco teórico encontramos que la causa de estas dificultades según la teoría de Duval tienen dos fuentes principales: la complejidad de los tratamientos en los registros multifuncionales y la complejidad cognitiva de las conversiones de un registro a otro. Esperamos comprobar, mediante actividades experimentales aplicadas a un grupo de alumnos de quinto año de educación secundaria del Perú, que las causas propuestas por Duval nos permiten explicar las dificultades que se presentan cuando los alumnos realizan transformaciones sobre la función logarítmica.

1.2 IMPORTANCIA DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN EN EL CURRÍCULO.

Los parámetros curriculares en la Educación Secundaria sobre la enseñanza de la Matemática apuntan que:

> Es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones, relaciones y funciones, de manera real. Asimismo, deben desarrollar habilidades para usar modelos matemáticos para comprender y representar relaciones cuantitativas. Desarrollar estos procesos

> implica que los docentes propongan situaciones que permitan a cada estudiante valorar tanto los procesos matemáticos como los resultados obtenidos (DCN, p. 317)

En nuestro país, el Diseño Curricular Nacional del Ministerio de Educación, considera que en la enseñanza de Matemática para alumnos de quinto grado de Educación Secundaria, se debe realizar el estudio de las funciones, en particular de la función logarítmica y modelos logarítmicos. Así mismo nos plantea que los alumnos deben alcanzar la capacidad matemática de resolver problemas que involucran modelos exponenciales y logarítmicos. (DCN, 2009, p. 339). Esto refleja la pertinencia de esta investigación en el contexto de nuestra realidad educativa.

En el programa curricular del DCN (2009), en el Área de Matemática cuando se fundamenta la necesidad del estudio de Números, relaciones y funciones se propone que:

> Es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones, relaciones y funciones, de manera real. Así mismo deben desarrollar habilidades para usar modelos matemáticos para comprender y representar relaciones cuantitativas. (p. 317).

A partir del párrafo anterior, podemos mencionar que nuestro objeto matemático de investigación: la función logarítmica, corresponde a esta área citada por el DCN (2009), así mismo cuando nos menciona que "utilicen varias formas de representar", entendemos que esta idea es importante para la comprensión de un concepto matemático, pues cuando el alumno emplea distintas formas de representaciones para realizar su aprendizaje, puede internalizar y comprender mejor la noción del concepto que se está enseñando. También dicho párrafo nos menciona que debemos "desarrollar habilidades para usar modelos matemáticos", nosotros aplicaremos actividades que presentan a la función logarítmica en contextos reales, para lo cual se utilizan diversas formas de representación como la forma verbal para presentar la descripción del modelo y forma simbólica para representar la herramienta sobre la que se aplicarán transformaciones necesarias para la solución del problema planteado en este modelo logarítmico.

El DCN (2009) en el área de Matemática en Quinto Grado de Educación Secundaria en el sub-área de Números, Relaciones y Funciones, nos muestra que con el estudio de la función exponencial y de la función logarítmica culmina el estudio de las funciones en la Matemática escolar. En el cuadro siguiente se fundamenta esta afirmación:

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
▪ Interpreta la relación entre una función y su inversa. ▪ Grafica funciones exponenciales y logarítmicas. ▪ Representa la función inversa de una función algebraica elemental. ▪ Resuelve problemas que involucran modelos exponenciales y logarítmicos.	**Funciones:** ▪ Función inyectiva, suryectiva y biyectiva. ▪ Función inversa. ▪ Función logarítmica. ▪ Función exponencial. ▪ Modelos exponenciales. ▪ Modelos logarítmicos.

Figura 01. Cuadro de Números, Relaciones y Funciones – Matemática 5to. Grado.

Fuente: DCN (2009) – Ministerio de Educación, Perú. (p. 337).

La enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica Regular de nuestro país, se apoya en textos escolares, como los textos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación que son utilizados en las escuelas públicas, así como otros textos elaborados por editoriales privadas que son utilizados en las escuelas privadas de nuestro país. En el texto del Ministerio de Educación, en la parte denominada: Organización del Texto del Estudiante, el autor nos menciona que este texto desarrolla los contenidos y actividades en concordancia con el Diseño Curricular de Educación Básica Regular. Así mismo, indica que este texto ha sido estructurado en seis unidades organizadas en los tres componentes de área:

COMPONENTES	UNIDADES
I. Números, Relaciones y Funciones.	1. Introducción a la Programación lineal 2. Funciones exponenciales y logarítmicas. 3. Razones Trigonométricas en el plano cartesiano y funciones trigonométricas.
II. Geometría y Medida.	4. Geometría del espacio: Superficies de revolución. 5. Introducción a la Geometría analítica plana: cónicas
III. Estadística y Probabilidad.	6. Estadística y Probabilidad.

Figura 02. Componentes del área de matemática – 5to. Grado de Secundaria.

Fuente: Texto oficial del Ministerio de Educación – Editorial El Nocedal. (p. 12).

En el texto elaborado por una editorial privada, encontramos que al finalizar la Unidad 1 denominada: Lógica y Funciones se presenta nuestro objeto de estudio: la función logarítmica. La tabla siguiente nos muestra los temas abordados de esta función:

Tema 4: Función Logarítmica
• Propiedades de los logaritmos • Sistemas de logaritmos • Cologaritmo y antilogaritmo • Función logarítmica • Características de las funciones logarítmicas • Ecuaciones logarítmicas • Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Figura 03. La función logarítmica en el texto: Matemática 5to. Grado.
Fuente: Libro Lógica-mente 5 (2008) – Grupo Editorial Norma. (p. 5).

En nuestra investigación haremos un análisis de los textos escolares para encontrar posibles dificultades didácticas en la presentación de la noción de función logarítmica, así como un análisis de las transformaciones aplicadas sobre este concepto matemático que nos servirán para una confrontación final a realizarse después de la aplicación de las actividades experimentales de esta investigación.

El estudio de las funciones, y de manera particular, el de las funciones logarítmicas, tiene una importancia en la enseñanza de las matemáticas en los currículos internacionales; esto se observa en particular en los estándares internacionales propuestos por la *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM (2002), cuando sobre la enseñanza de funciones, se indica que:

> El currículo de matemáticas debería incluir una continuación del estudio de funciones para que los estudiantes sean capaces de elaborar modelos de fenómenos del mundo real con diversos tipos de funciones; representar y analizar relaciones funcionales utilizando tablas, reglas orales, ecuaciones y gráficas; hacer traducciones entre representaciones tabulares, gráficas y analíticas de funciones; y para que, además los futuros universitarios puedan entender las operaciones con conjuntos de funciones, sus propiedades generales y su comportamiento. (p. 159).

En dicho documento, se presentan los Estándares Curriculares para los Niveles 9-12, correspondiente a estudiantes de 13 a 16 años, en este estándar la NCTM (2002) propone que:

> A lo largo de la historia, el objetivo de las matemáticas en la enseñanza secundaria ha sido ofrecer a los estudiantes la oportunidad de adquirir el conocimiento matemático, […] y preparar a los estudiantes para la enseñanza superior, en especial para la universidad. […] la educación matemática en la secundaria debe adoptar fines más amplios para todos los estudiantes. Debe presentar experiencias que animen y capaciten a los alumnos a valorar las matemáticas, adquirir confianza en su propia capacidad matemática, ser capaces de resolver problemas matemáticos, comunicarse matemáticamente y razonar matemáticamente. (p. 123)

Esto nos permite aseverar que la formación matemática que reciban los estudiantes en la Educación Básica debe prepararlos para enfrentar el nivel educativo superior.

En este mismo documento para los niveles 9-12, encontramos que se presentan catorce estándares curriculares, estos "componen una estructura para el currículo base que refleja las necesidades de todos los estudiantes", que les permitan desarrollar capacidades matemáticas, orientándolos a que "han de pasar su vida como adultos en una sociedad que está cada vez dominada por la tecnología y los métodos cuantitativos" (p. 123). De los catorce estándares, el estándar 3 denominado "Las matemáticas como razonamiento" propone que "los estudiantes deben examinar los patrones numéricos que resulten de las transformaciones algebraicas, formular hipótesis sobre propiedades algebraicas generales a partir de las observaciones […] Las propiedades de los logaritmos ofrecen un contexto que deja claro lo que queremos decir". (p. 148). Así mismo se menciona que las propiedades de los logaritmos permiten dichas transformaciones. Propone que utilizando las propiedades de los exponentes y la propiedad $\log ab = \log a + \log b$, los estudiantes pueden explorar casos como el siguiente:

$$\text{Log } 5^2 = \log(5.5) = \log 5 + \log 5 = 2\log 5$$

$$\text{Log } 5^3 = \log(5^2.5) = \log 5^2 + \log 5 = 2\log 5 + \log 5 = 3\log 5$$

$$\text{Log } 5^4 = \log(5^3.5) = \log 5^3 + \log 5 = 3\log 5 + \log 5 = 4\log 5$$

Observamos que a partir de los casos particulares expuestos se busca la generalización de la propiedad del logaritmo de la potencia de un número. Se puede pedir a los estudiantes que examinen el patrón que se va creando y que generalicen a $\log 5^n = n \log 5$ para el caso de cualquier número entero no negativo. Los estudiantes entonces podrían usar las teclas $\boxed{y^x}$ y $\boxed{\log}$ de una calculadora para confirmar esta generalización con varios valores numéricos como n = 9, 14 y 0. Como en la situación anterior, los procesos algebraicos conducen a una generalización, los estudiantes pueden observar que las transformaciones algebraicas que hicieron no dependían del número 5 en particular, y por lo tanto llegar a un enunciado más general: $\log a^n = n.\log$ a para el caso de cualquier a>0.

Mediante los estándares se puede identificar la concepción sobre la materia en la que se basa un currículo matemático. Así, a través del estándar 3 se observa una visión en la que la matemática se constituye, pues propone que "un matemático o un estudiante que está haciendo matemáticas generaliza con frecuencia a partir de una muestra de observaciones de casos particulares". (p. 147). Desde esta perspectiva, más adelante, se podrán presentar las principales propiedades de los logaritmos de una manera inductiva, esto contribuirá a formar la noción de la función logarítmica en base a sus particularidades.

Sobre el razonamiento a seguir en el NCTM (2002) se propone que:

> Para demostrar la hipótesis de que $\log a^n = n.\log$ a para el caso de a>0 y de cualquier entero n no negativo, los estudiantes tendrían que usar el principio de inducción de esta forma:
>
> 1) Para $n = 0$, $\log a^0 = \log 1 = 0 = 0.\log a$, para todo a>0. Por tanto, cuando n=0, la igualdad es cierta.
>
> 2) Se supone que la igualdad es cierta para n = k donde k es cualquier entero positivo, o sea, $\log a^k = k \log a$. Luego para se mostrará que la igualdad es cierta para el caso $n = k+1$. Esto se establece en la cadena de razonamiento siguiente:
>
> $$\log a^{k+1} = \log(a^k a^1) = \log a^k + \log a = k \log a + \log a = (k+1) \log a$$

Por tanto, si la igualdad es cierta para $n = k$, entonces es cierta para $n = k+1$.

Por el principio de inducción se tiene que $\log a^{n} = n \log a$ para a>0 y para todo entero n no negativo.

La importancia de esta demostración intuitiva de una de las propiedades de los logaritmos es la de mostrar los distintos tratamientos posibles que permite esta propiedad, así mismo, así el alumno puede apreciar las posibles transformaciones correctas que él puede realizar sobre los logaritmos. Es importante que el alumno conozca qué transformaciones son correctas. Ya que este conocimiento nos permitirá lograr una disminución de las dificultades cuando se realice el aprendizaje de la función logarítmica.

1.3 IMPORTANCIA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DENTRO DE LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA.

En esta parte presentaremos aportes y comentarios de investigadores que muestran la importancia de la función logarítmica en la Educación Básica en general. Una parte fundamental en el estudio de las matemáticas son las funciones, ellas han inspirado muchas investigaciones a lo largo de los tiempos. Estas han sido definidas por matemáticos de todos los tiempos en distintas formas o presentaciones. La definición de función que proporcionó Serret en 1894 en su libro Análisis es la siguiente:

> En toda cuestión donde se tenga que considerar varias variables, se pueden atribuir a algunas de ellas valores arbitrarios; entonces, las otras variables toman valores determinados. Las primeras son llamadas variables independientes, las otras son nombradas variables dependientes o funciones de las variables independientes. (Citado en Hitt, 2002, p.73).

Así mismo, las funciones presentan distintos formas de clasificación, según Hitt (2002) en su estudio de las Funciones en Contextos, clasifica a las funciones: Funciones lineales y Funciones no lineales, dentro de estas últimas se encuentran las Funciones cuadráticas (polinomios de segundo grado), cúbicas (polinomios de tercer grado), las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. Hitt sugiere esta clasificación según los contextos o situaciones a las que se aplican las funciones, por esto, las funciones lineales representan a situaciones de comportamiento lineal como la relación entre los grados Celsius (C) y los grados Fahrenheit (F): $C = 5\left(F-32\right)/9$; y otras funciones de comportamiento no lineal como la función que relaciona la altura de un avión f(x) que depende de la presión del aire (x) en el exterior de un avión, cuyo comportamiento se modela con una función logarítmica: $f(x) = -18{,}6028.\log(x/76)$, donde el número 18,6028 es una constante experimental.

En nuestra investigación consideramos que las matemáticas, y de manera particular las funciones, no deben alejarse de la realidad cotidiana o científica, que según Hitt (2002) esta nueva forma de estudiar las funciones nos permite vincular las matemáticas con otras ramas científicas y de esta manera el estudiante puede realizar aprendizajes matemáticos más significativos.

Nosotros elegimos la función logarítmica porque según el DCN (2009), esta función se ubica al finalizar el estudio de las funciones en la etapa escolar, es con la que culmina el estudio de las funciones en la educación básica y es la función que requiere de mayor cantidad de conocimientos previos como las nociones de función exponencial, criterios de función inversa, descomposición canónica de los números, así como presentar propiedades muy particulares como las que permiten convertir un producto en adición, un cociente en una diferencia o una expresión exponencial en otra expresión no exponencial. También cabe mencionar que existe una menor cantidad de investigaciones sobre funciones exponenciales y logarítmicas, realizadas por investigadores en Educación Matemática, respecto a investigaciones sobre funciones lineales o cuadráticas. Esta afirmación se fundamenta en la investigación de Ardenghi (2008) cuando analiza investigaciones realizadas en el periodo de 1970 a 2005 en Brasil, “el investigador realizó un levantamiento bibliográfico y en un total de 46 producciones científicas, observó que existen muchas investigaciones sobre función afín y cuadrática, y pocas sobre función exponencial y logarítmica”. (Citado en Santos, 2011, p. 22).

También podemos citar que los logaritmos tienen una importancia histórica en el desarrollo de las matemáticas, estos aparecen en el siglo XVII, inicialmente como una tabla con el objetivo de facilitar los cálculos numéricos y complicados, y a pesar de la aparición de máquinas que desarrollan los mismos cálculos en forma más rápida, este objeto matemático, ahora transformado en una noción más completa, sigue siendo de gran importancia, porque según Eves (1995):

> La función logaritmo nunca morirá, por la simple razón de que las variaciones exponencial y logarítmica son partes vitales de la naturaleza y de su análisis. Consecuentemente, un estudio de las propiedades de función logarítmica y de su inversa, la función exponencial, será siempre una parte importante de la enseñanza de la Matemática. (p.347)

Otro investigador que realza la importancia de los logaritmos es Hogbem (1970) que nos hace un comentario sobre la importancia histórica y aplicativa de este objeto cuando afirma que:

> Los logaritmos son números inventados para posibilitar a solución más rápida de los problemas aritméticos y geométricos […]. Por su intermedio se evitan multiplicaciones y divisiones trabajosas, se efectúan todos los cálculos por adición en lugar de multiplicación y sustracción en lugar de división. También la curiosa y trabajosa extracción de raíces es efectuada con gran facilidad […]. En suma, todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino además los de astronomía, son resueltos con más simplicidad y facilidad. (p. 485).

Este investigador nos muestra las distintas transformaciones, principalmente numéricas que pueden lograrse con el uso de las propiedades de los logaritmos, y también, la disminución de la complejidad operativa en los cálculos aplicados a las distintas disciplinas científicas.

1.4 DIFICULTADES COGNITIVAS IDENTIFICADAS EN INVESTIGACIONES SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

En nuestra práctica docente en la enseñanza de matemáticas, encontramos que cuando el alumno aprende matemáticas, tiene dificultades para realizar transformaciones en los distintos registros en que el objeto matemático está representado. En nuestra investigación, analizaremos dichas dificultades y las observaremos cuando el alumno estudia la función logarítmica. Citamos que investigadores que nos anteceden han explicado algunas de estas dificultades.

Sobre estas dificultades, Almouloud citado por Marques (2011) propone que “si en un nivel cognitivo, el alumno consigue realizar las transformaciones sobre los registros en la más variadas posibilidades para un determinado objeto matemático, entonces aprenderá Matemática”. (p. 18). En esta aseveración está *el norte* de nuestra investigación ya que nuestro foco de investigación está centrado en comprender el funcionamiento cognitivo en relación a los problemas de aprendizaje que tienen los alumnos en realizar las transformaciones entre los distintos registros semióticos que están presentes en el estudio de la función logarítmica.

> Con la intención de comprender los problemas que ocurren en el aprendizaje de los conceptos matemáticos por los alumnos, el investigador Grande (2006) nos propone que: "sería necesario realizar, no solamente un análisis desde el punto de vista matemático y epistemológico, sino también analizar desde el punto de vista cognitivo, las actividades matemáticas propuestas a los alumnos". (p. 62).

Dentro de la complejidad del funcionamiento cognitivo de los alumnos, el foco de investigación de esta investigación será analizar una característica específica del pensamiento matemático: las transformaciones de los distintos registros de representación que emplean los estudiantes cuando aprenden el concepto de función logarítmica.

Para ampliar nuestro análisis preliminar sobre los registros semióticos es importante señalar que la Matemática, a diferencia de otras disciplinas científicas, no dispone de objetos físicos manipulables, por esto tenemos acceso a sus objetos solamente por medio de su representación. Por ejemplo, un agrónomo, tiene la posibilidad de visualización de sus objetos de estudio como estructuras celulares, plantas y otros, sin la necesidad de recurrir a una representación semiótica. No ocurre lo mismo en Matemática, según Grande (2006):

> En el caso de los objetos matemáticos, surge la necesidad de utilizar un sistema de registros, símbolos y signos para su representación. Estos registros no son simplemente códigos, pues poseen una función de comunicación y caracterización del objeto representado. La importancia de la utilización de los registros de representación se refiere a una posible manera de facilitar un proceso de aprendizaje, además de ser un medio para que un profesor tome más accesible la comprensión de la Matemática. La noción de registro de representación se refiere al dominio de signos que sirven para designar cualquier objeto. (p. 62).

También mencionamos que investigaciones anteriores han analizado las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas empleando el enfoque cognitivo propuesto en la teoría de Raymond Duval, que se explicará más adelante. Analizando estas dificultades, Guzmán (1998) se propuso como objetivo:

> Poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación en las respuestas de los estudiantes, dado que distinguir y coordinar distintos registros es una actividad necesaria y natural en matemáticas. Estas actividades deberían construir objetos pedagógicos en la enseñanza de la matemática. Por otra parte, la distinción y coordinación de registros son fundamentales para el desarrollo del pensamiento, idea central en el enfoque mencionado, ha sido la perspectiva de análisis para numerosas investigaciones en didáctica de la matemática. (p. 6).

Considerando los trabajos revisados, nuestra investigación empleará la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) para analizar las transformaciones que realizan y las que no realizan un grupo de alumnos del quinto año de educación secundaria, cuando realizan el aprendizaje de la función logarítmica.

1.5 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo a las justificaciones planteadas, las preguntas de investigación en el presente trabajo son:

- ¿Qué problemas de aprendizaje se presentan en los alumnos cuando estudian la función logarítmica?
- ¿Qué transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica se deben realizar cuando se aprende la función logarítmica y cuáles presentan mayores dificultades?

1.6 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Para lograr responder la pregunta de investigación, nos planteamos el siguiente objetivo general:

Identificar los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de la función logarítmica, analizando la complejidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional y la complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones. Esto permitirá entender las dificultades en la comprensión de este tema.

Para alcanzar nuestro objetivo general, nos proponemos cumplir con los siguientes objetivos específicos:

- Elaborar una entrevista para el Profesor del curso, para recoger información sobre la identificación de las dificultades encontradas cuando los alumnos realizan el aprendizaje de la función logarítmica. La experiencia que tiene el Profesor en las aulas de clase, permitirá brindarnos una información consistente sobre los problemas de aprendizaje encontrados y que será tomada en cuenta en el diseño de las actividades que conforman los instrumentos de investigación.
- Diseñar actividades para identificar los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de la función logarítmica, centrando nuestra atención en las transformaciones y de manera especial, en analizar la complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones. que se emplean en el estudio de la función logarítmica.

Luego de presentar el problema de investigación que motivó a este trabajo, donde se mostró la importancia de esta investigación en el currículo nacional y estándares internacionales, la importancia del objeto matemático en la estructura matemática y un análisis previo de las dificultades cognitivas encontradas en el aprendizaje de la función logarítmica, a continuación se presentará el marco teórico que sustenta este trabajo de investigación así como el método de investigación que presentará las actividades a seguir en la búsqueda cumplir los objetivos y de encontrar respuesta a las preguntas de investigación planteadas.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

.

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO Y MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Para responder a nuestras preguntas de investigación: *¿Qué problemas de aprendizaje se presentan en los alumnos cuando estudian la función logarítmica? ¿Qué transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica se deben realizar cuando se aprende ese tema y cuáles presentan mayores dificultades?* emplearemos la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (1995), debido a que dado que este enfoque cognitivo pone especial atención a la identificación de los registros semióticos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función logarítmica, y esto nos permitirá explicar los fenómenos relacionados con la actividad matemática y los problemas de incomprensión matemática de este tema.

2.1 TEORÍA DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS.

La Teoría de Registros de Representación Semiótica ha sido desarrollada por Raymond Duval (1995), quién es filósofo y psicólogo de formación. Trabajó en el Instituto de Investigación en Educación Matemática (IREM) de Estrasburgo, en Francia, de 1970 a 1995, donde desarrolló estudios fundamentales relativos a Psicología Cognitiva, que lo llevó a producir, dentro de otras publicaciones, su obra *Sémiosis et pensé humaine*. Tal obra ha logrado hasta la actualidad servir de marco teórico a numerosas investigaciones de corte cognitivo en diversos países de nuestro continente y de Europa.

Según Duval (2006), este “estudio propone que las representaciones semióticas, incluidas cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir nuevos conocimientos y no sólo para la comunicación de cualquier representación mental en particular” (p. 02). El papel desempeñado por los signos, o más exactamente por los sistemas semióticos de representación, no es sólo para designar objetos matemáticos, sino también para trabajar con ellos. Lo importante no es la representación de un objeto matemático sino las transformaciones que se pueden realizar sobre ellos.

Nuestra investigación analizará las dificultades en el aprendizaje que presenten los alumnos a la luz de la teoría de Duval, buscando encontrar la naturaleza que las origina, dónde se localizan y entenderlas para el logro de la comprensión matemática de la noción de logaritmos.

Las ideas de Duval (2006) sobre las dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos parten por entender las dificultades que los estudiantes tienen en la comprensión matemática, cuál es la naturaleza de dichas dificultades y donde se localizan. En estas tres interrogantes se basa el enfoque cognitivo de las dificultades según la teoría de Duval aplicado a la comprensión de los conceptos matemáticos, como se muestra en el siguiente esquema:

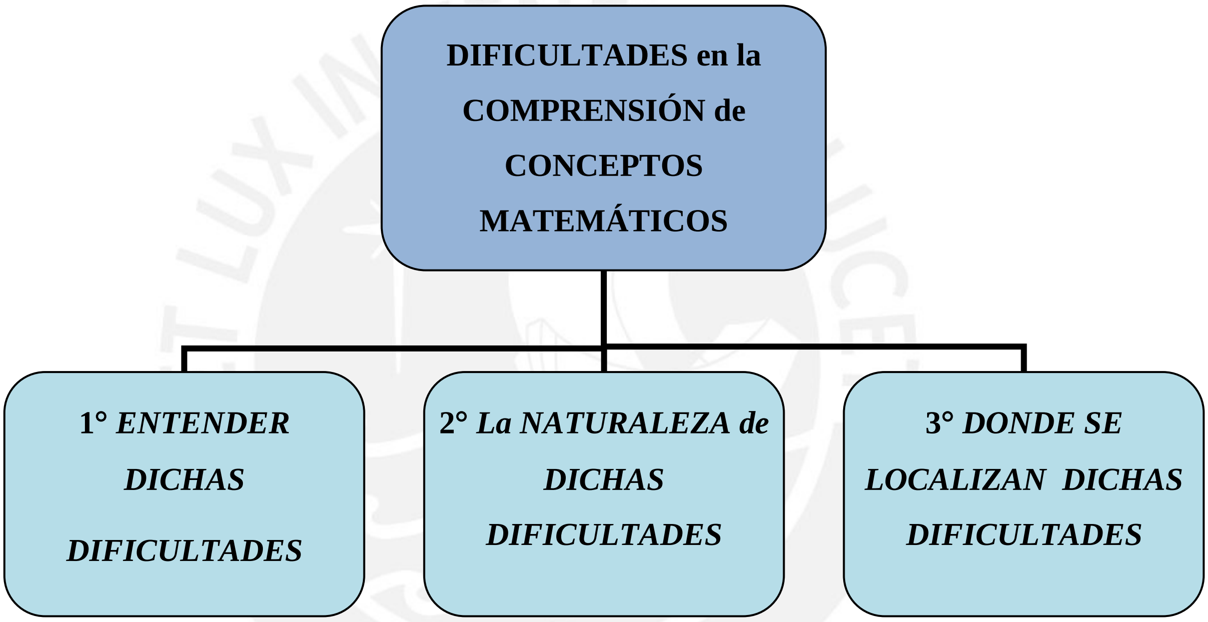


Figura 04. Esquema del análisis de las dificultades en la comprensión de matemáticas, según el enfoque cognitivo de Duval.

Elaborado por el autor, tomando las ideas de Duval (2006).

2.1.1 CARACTERÍSTICAS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DESDE EL PUNTO DE VISTA COGNITIVO.

Con la finalidad de analizar los problemas de aprendizaje con que el alumno se enfrenta en el estudio de la función logarítmica, empleamos la Teoría de Duval en la nos presenta las tres características que permiten analizar la actividad matemática desde el punto de vista cognitivo:

1° La importancia primordial de las representaciones semióticas

Los sistemas semióticos de representación no sólo permiten designar los objetos matemáticos, también permiten realizar transformaciones entre ellos. Toda transformación o actividad matemática requiere utilizar un sistema semiótico de representación; según Duval (2006), "lo que importa no es la representación, sino su transformación. A diferencia de las otras áreas de conocimiento científico, los signos y la transformación de la representación semiótica se encuentran en el corazón de la actividad matemática". (p. 3)

2° La paradoja cognitiva del acceso a los objetos de conocimiento

Partimos de que los objetos matemáticos, en comparación con otras disciplinas científicas como la astronomía, la física, la química, la biología, etc. no son percibidos por instrumentos o aparatos de medición. La única manera de acceder a ellos es con el uso de signos y representaciones semióticas. Pero, ocurre que, a menudo estas representaciones semióticas son confundidas con el objeto matemático que representan. Según Duval (2006), el problema de la comprensión en matemática, surge del siguiente conflicto cognitivo: ¿cómo se pueden distinguir los objetos representados de la representación semiótica utilizada si no se puede tener acceso al objeto matemático, sin recurrir a las representaciones semióticas? Eso se manifiesta en la capacidad de cambiar de sistema de representación a otro; esto es considerado como el umbral de la comprensión.

Según Duval (2009):

> Lo primero es que no se puede tener una comprensión en matemática, si nosotros no distinguimos un objeto de su representación. Es esencial, jamás debemos confundir los objetos matemáticos como los números, las funciones, las rectas, etc., con sus representaciones; es decir, con las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, porque un mismo objeto matemático puede ser dado a través de representaciones muy diferentes. (p. 14).

3° La gran variedad de representaciones semióticas utilizadas en las matemáticas

La actividad matemática debe disponer de diferentes sistemas de representación semióticas para realizar todas las acciones o procesos que involucra esta actividad. Algunos procesos son más fáciles en un sistema semiótico que en otro, esto implica que el estudiante debe "migrar" a otro sistema en búsqueda de una solución más sencilla, o incluso puede realizar la actividad en un solo sistema. Al respecto, Duval (2006) nos propone que las matemáticas son el campo en el que nos encontramos con la más amplia gama de sistemas semióticos de representación, tanto aquellos comunes a cualquier área del conocimiento como el lenguaje natural como aquellos sistemas específicos a las matemáticas como notaciones algebraicas y formales. Es crucial para un investigador plantearse la pregunta de que si para cualquier objeto matemático se pueden utilizar diversos tipos de representación semiótica, entonces ¿cómo pueden los alumnos reconocer el mismo objeto representado a través de las representaciones semióticas que se producen dentro de sistemas de representación diferentes?

En el siguiente esquema resume lo antes dicho sobre las tres características de la actividad matemática desde el punto de vista cognitivo, según la Teoría de Duval (2006):

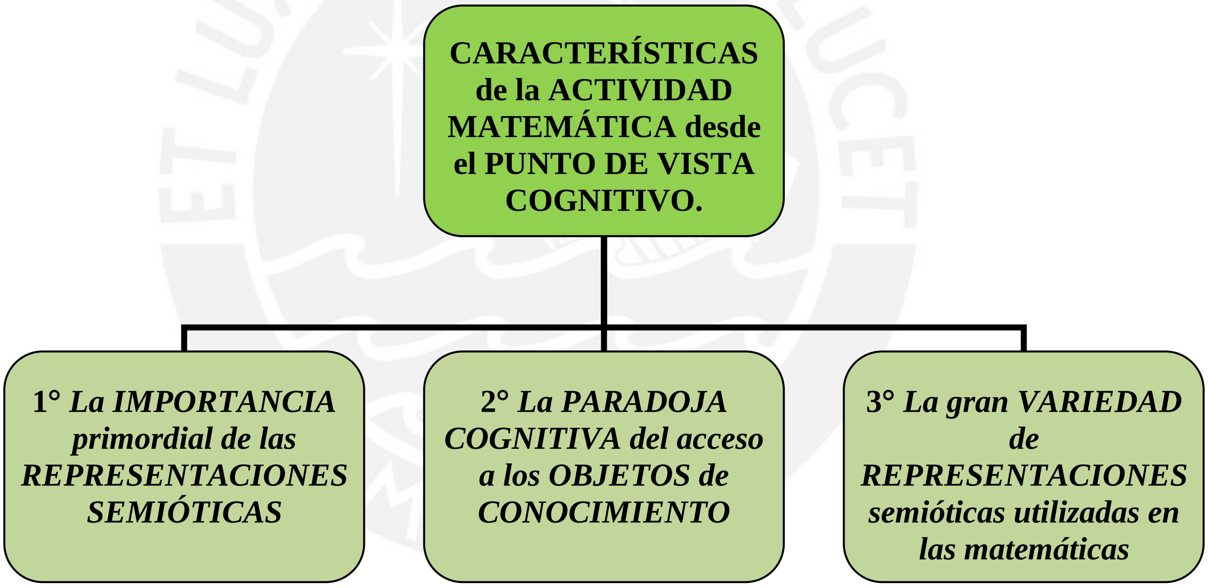


Figura 05. Esquema de las características de la actividad matemática desde el punto de vista cognitivo.

Luego de presentar las características la actividad matemática desde un enfoque cognitivo, a continuación, con la intención de analizar la naturaleza y localización de las dificultades en la comprensión matemática, haremos un análisis de los procesos matemáticos centrando nuestra atención en los tratamientos y conversiones que se realizan en la actividad matemática.

2.1.2 ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO PRESENTES EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA.

Como hemos visto, el rol de las representaciones semióticas no se limita a designar o presentar los objetos matemáticos, la importancia de estas representaciones está en que permiten realizar transformaciones, como tratamientos y conversiones sin las cuales no existiría la actividad matemática. Según Duval (2006) "estas transformaciones dependen del sistema semiótico en el que las representaciones semióticas se producen". (p. 6). Presentaremos tres aspectos a considerar cuando se analicen los procesos de pensamiento presentes en la actividad matemática:

1° Los procesos matemáticos

Los procesos matemáticos se producen por el carácter funcional de las representaciones semióticas. Algunos sistemas semióticos pueden ser utilizados sólo para una función cognitiva, como el tratamiento matemático; sin embargo, otros sistemas semióticos pueden cumplir una diversidad de funciones cognitivas: como comunicar, informar, procesar, entre otros. Según Duval (2006) en un sistema semiótica monofuncional la mayoría de procesos toman la forma de algoritmos, mientras que dentro de un sistema semiótico multifuncional los procesos nunca pueden ser convertidos en algoritmos. Lo esencial para entender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es centrarse en el nivel de los sistemas de representación semióticos y no en la representación particular producida. Así, con respecto a la propiedad de las representaciones semióticas que es básica para la actividad matemática, podemos distinguir cuatro tipos bien diferenciados de sistemas semióticos: dos sistemas multifuncionales como el sistema lenguaje natural o verbal y el sistema figural, y dos sistemas monofuncionales: el sistema simbólico (numérico o simbólico) y el sistema de gráficos cartesianos.

2° Los dos tipos de transformaciones de las representaciones semióticas

Ya hemos visto que la actividad matemática consiste en la transformación de las representaciones semióticas que son muy diferentes: tratamientos y conversiones.

Los tratamientos son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro donde se ha formado, estas transformaciones ocurren con las únicas reglas propias de dicho sistema semiótico, de modo que a partir de estas representaciones iniciales de se obtengan otras representaciones que muestran una ganancia de conocimientos en comparación con las representaciones iniciales: por ejemplo, cuando realizamos un cálculo que se desarrolla en el mismo sistema de notación que representan los números, o cuando resolvemos una ecuación en el registro simbólico o cuando resolvemos un problema de congruencia de triángulos en el registro figural o gráfico. Según Duval (2006): "Los tratamientos, pueden ser llevados a cabo, dependiendo principalmente de las posibilidades de transformación semiótica, que son específicos al registro empleado" (p. 8). Esto ocurre, por ejemplo, cuando al alumno se le pide resolver la ecuación logarítmica $\log(x+2) = 2$, vemos que el registro de partida es simbólico y se realizan tratamientos en el mismo registro: $\log(x+2) = 2 \rightarrow x+2 = 10^2 \rightarrow x = 98$. El registro de llegada (x = 98) es también un registro simbólico.

Las Conversiones son las transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro a otro, sin cambiar el objeto denotado: esto ocurre cuando una función logarítmica f(x) = log x representada en registro simbólico se convierte a su representación gráfica lográndose reconocer la relación entre el registro de partida y el registro de llegada. Según Duval (2006) la conversión es una transformación de la representación, que es más complejo que el tratamiento porque cualquier cambio de registro primero requiere el reconocimiento del mismo objeto representado entre dos representaciones cuyos contenidos muy a menudo no tienen nada en común.

3° Reconocimiento del mismo objeto matemático a través de dos representaciones cuyo contenido es heterogéneo

Ahora estamos frente a un criterio de reconocimiento en que se requiere de una capacidad de observación a los signos matemáticos, donde haciendo uso de la paradoja cognitiva del acceso a los objetos matemáticos, debemos diferenciar entre el contenido de una representación (el registro) y lo que refiere dicha representación (el objeto). Así, Duval (2006) propone que entre el contenido de una representación y el objeto representado no hay otra relación que la denotación. Ahora, y esta es la consecuencia decisiva que apenas es tomada en cuenta, el contenido de una representación depende más del registro de la representación que del objeto representado. Esta es la razón porque pasando desde un registro a otro, en los cambios no sólo importa la manera de realizar la conversión, sino también las propiedades que permiten su realización.

En el siguiente esquema se muestran las tres actividades que según la Teoría de Duval (2006) permiten analizar los procesos de pensamiento cuando se realiza una actividad matemática:

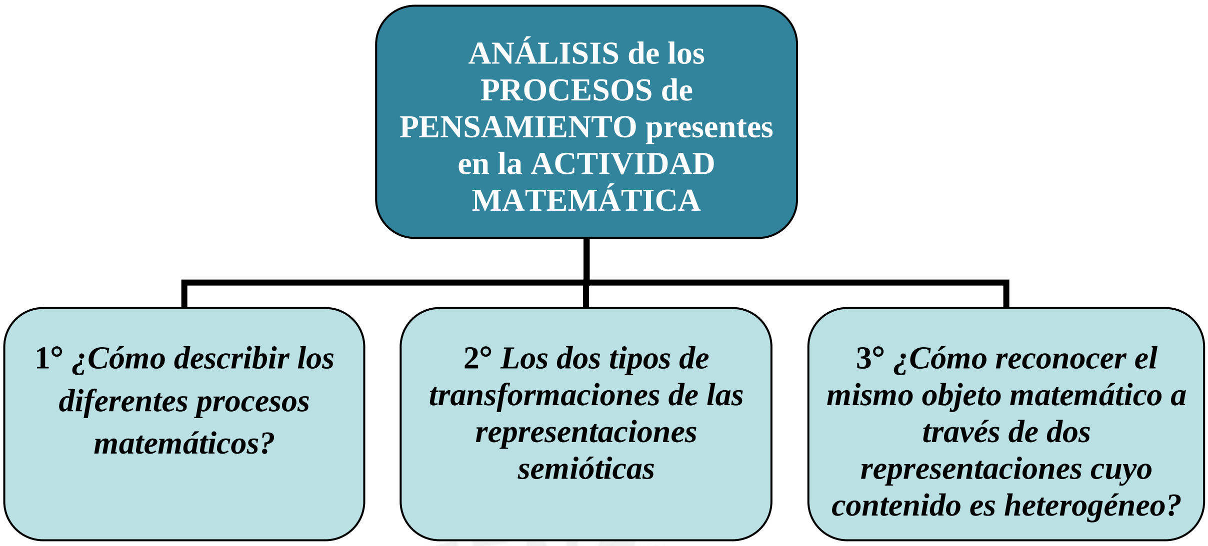


Figura 06. Esquema del análisis de los procesos de pensamiento en la actividad matemática.

Con la presentación de la actividad matemática vista desde el punto de vista cognitivo y el análisis de los procesos de pensamiento, nos hemos permitido entender la existencia de las dificultades en la comprensión matemática, así como la naturaleza y localización de estas dificultades. A continuación centraremos nuestro análisis en los dos tipos de transformaciones y las dificultades que éstas causan en la comprensión matemática, a la luz de la teoría de Duval (2006).

2.1.3 LAS DOS FUENTES PRINCIPALES DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Según el análisis sobre los procesos de pensamiento que ocurren cuando nuestros alumnos realizan una actividad matemática, encontramos que en la realización de los dos tipos de transformaciones: los tratamientos y las conversiones, se encuentran las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Según Duval (2006) estas son principalmente, las dificultades más globales que se pueden encontrar en todos los niveles de la enseñanza y en todos los ámbitos de las matemáticas.

1° Una primera fuente de las dificultades: la complejidad y especificidad de los tratamientos llevados a cabo en un registro multifuncional.

Duval (2006) nos plantea que el uso del lenguaje natural no se puede evitar y sabemos que está presente en todas las áreas del conocimiento. La comprensión en matemáticas requiere la articulación de este registro multifuncional con las representaciones producidas dentro de los registros monofuncionales, como el registro simbólico empleado para nuestro estudio de la función logarítmica. Para comprender la complejidad cognitiva de los tratamientos, debemos analizar por separado la manera en que los tratamientos se llevan a cabo, respectivamente, en el registro discursivo y el registro gráfico, aun cuando se funden en el mismo proceso matemático. En el caso del registro gráfico, se requiere de una visualización de las unidades significativas de dicho registro, aquí estamos frente a una fuerte discrepancia entre la forma habitual de ver las figuras, generalmente en una forma icónica, y la manera matemática que ellas esperan ser miradas. Duval (2004) nos señala que hay muchas maneras de "ver" cuando analiza las unidades constitutivas de una figura geométrica (p. 157).

2° Una segunda fuente de las dificultades: la complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones o el cambio de registro.

Las dificultades producidas por la conversión en una actividad matemática, son observadas de acuerdo a los pares de registros que son intercambiados en esta transformación; tenemos el caso más conocido cuando ocurre una simple "traducción" de términos de un problema literal es convertido en una expresión algebraica, este es un caso que muchos estudiantes no logran realizar con éxito. Según Duval (2004) concluye que la conversión posee dos características: la primera señala que la conversión puede ser o no congruente, y la segunda hace referencia a que la conversión tiene una orientación o sentido, lo cual permite señalar al registro de partida como al registro de llegada.

El primer fenómeno de la complejidad cognitiva de la conversión se debe a la no congruencia de la conversión. Los tres criterios de convergencia son: 1) Correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Si tenemos: "*el logaritmo decimal de un número sumado al logaritmo decimal del número consecutivo equivale al logaritmo decimal del mismo número elevado al cuadrado*", aquí tenemos tres unidades significantes simples cuyas unidades significantes elementales son: $\log x$, $\log(x+1)$ y $\log x^2$ $(\forall x>0)$; se entiende por unidades significantes a los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación. 2) Univocidad "semántica" terminal, esto significa que las unidades significantes de cada registro están en relación de uno a uno; y 3) Orden de las unidades significantes, esto indica que las unidades conservan el mismo orden en las dos representaciones. Cuando no se cumple alguna de estos criterios se dice que la conversión es no congruente. Según Duval (2004) “la dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada”. (p. 53). Según estudios anteriores hay evidencias de un gran fracaso en la conversión de un gráfico cartesiano hacia la ecuación correspondiente y que dicho fracaso es muy independiente de la comprensión del concepto de función.

La conversión de la representación requiere de aprehensión cognitiva del objeto representado: para el registro gráfico llamaremos aprehensión perceptiva al acto que permite otorgar un significado en otro registro a la unidad significante simple de dicha representación. En Duval (2004) para la siguiente imagen se menciona que:

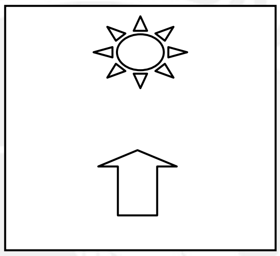


Figura 07. Figura para el análisis de congruencia entre imagen y frase.
Tomado de Duval (2004, p. 51)

> Esta imagen tiene cuatro unidades: las dos formas dibujadas y sus respectivas posiciones sobre el eje vertical. La determinación perceptiva de la posición de un objeto se hace en relación con el otro: en la dimensión vertical, y en ausencia de línea de horizonte, es el objeto más bajo el que sirve de anclaje para la aprehensión perceptiva de la imagen. (p. 51).

Este ejemplo nos aclara que el término “aprehensión perceptiva” de la imagen es aplicado a un registro gráfico, así mismo es mediante esta aprehensión que el alumno logra la determinación de las unidades significantes: las dos figuras y sus posiciones.

Luego siguiendo con el análisis de esta imagen, Duval (2004) menciona que:

> La descripción lingüística de esta imagen implica dos cosas. De una parte, el sujeto de la frase puede referirse tanto al objeto más alto como al objeto más bajo de la imagen. De otra parte, la expresión de la posición depende del objeto tomado como referencia: “encima de …” o “debajo de …”, según corresponda. (p. 51).

En este mensaje encontramos que el término “descripción lingüística” hace referencia a la construcción de registros en lengua natural, para hacer referencia a la posición de los objetos en la imagen. Así también, en analogía al término “aprehensión preceptiva” aplicado al registro gráfico, emplearemos el término “aprehensión lingüística” aplicado al registro verbal, para hacer referencia a los procesos cognitivos que permiten la determinación de las unidades significantes de este registro.

El segundo fenómeno es la dirección de la conversión. Ocurre cuando se invierten los roles del registro de partida y del registro de llegada dentro de la conversión en una representación semiótica, al ocurrir esta inversión el problema cambia radicalmente para los estudiantes. Según Duval (2006) podemos observar la magnitud del fracaso cada vez que se invierte la dirección de la conversión. Las conversiones varían según los pares de registro de partida y de registro de llegada.

En el siguiente esquema se muestran las dos fuentes principales de las dificultades en la comprensión de las matemáticas y que serán tomadas en cuenta cuando analicemos las actividades que se aplicarán al grupo de alumnos que son parte de esta investigación:

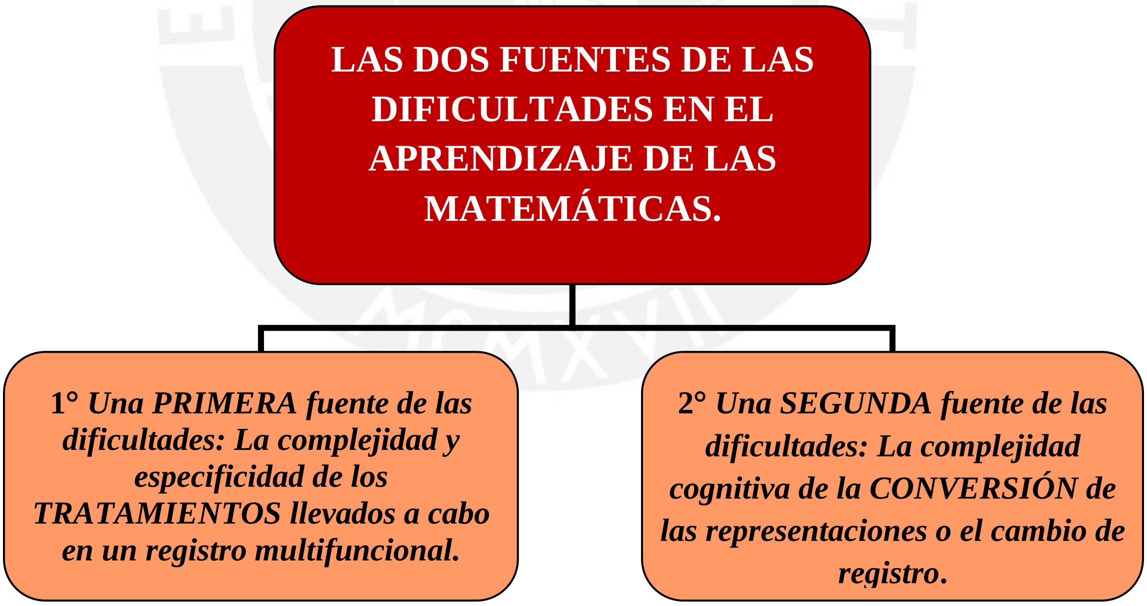


Figura 08. Esquema de las dos fuentes principales de las dificultades en el aprendizaje.

El esquema anterior muestra la naturaleza y localización de las principales dificultades cuando el alumno se enfrenta a una actividad matemática, en nuestro caso, cuando realiza el aprendizaje de la función logarítmica. Advierte la presencia de dificultades cognitivas, en primer lugar cuando realiza tratamientos en los registros verbales y gráficos, y en segundo lugar cuando tenga que realizar conversiones de un registro a otro.

Según el marco teórico elegido: la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas (Duval, 1995), la función logarítmica puede representar en tres registros, principalmente:

1) REGISTRO SIMBÓLICO: Utiliza el símbolo (log), la base del logaritmo y el número al cual se aplica dicho logaritmo. Ejemplo: $f(x) = \log_2 (x+4)$

2) REGISTRO GRÁFICO: Utiliza el sistema cartesiano para representar la función logarítmica correspondiente a una regla de correspondencia dada en registro simbólico. En este registro el alumno debe observar las características del gráfico, obtenidas a través de la aprehensión perceptiva de la imagen, mencionado en Duval (2004, p. 51).

3) REGISTRO VERBAL: Presentado en lengua natural o lengua materna. Utiliza palabras para expresar la conexión de la función logarítmica con la realidad, así como también para describir una representación simbólica o una representación gráfica. Sobre la importancia de este registro, Duval (2004) propone que: "La lengua natural aparece como un registro de representación en el plano discursivo, que depende de una intencionalidad de enunciación". (p. 20). Según esta aseveración este registro nos permitirá designar los objetos matemáticos y reales, así como la construcción de enunciados sobre contextos donde se aplique la función logarítmica.

El marco teórico también ha definido las dos transformaciones semióticas:

1) LOS TRATAMIENTOS: que realizarán los alumnos cuando desarrollen las actividades dada en el registro simbólico sin realizar un cambio de registro.

2) LAS CONVERSIONES: que realizarán los alumnos cuando realicen transformaciones de un registro a otro; pueden realizar una conversión directa: del registro simbólico al registro gráfico; o deban realizar una conversión inversa: del registro gráfico al registro simbólico. Es importante señalar lo que Duval (2004) propone sobre las conversiones entre registros numéricos:

> Aunque los alumnos sepan efectuar la adición de los números en su escritura decimal o en su escritura fraccionaria, a algunos alumnos ni se les ocurre pensar las posibilidad de convertir la escritura decimal de un número en su escritura fraccionaria (o a la inversa) […] En realidad, la escritura decimal, la

> escritura fraccionaria, la escritura con exponentes, constituyen tres registros diferentes de representación de números. En efecto, en la escritura de un número es necesario diferenciar entre la significación operatoria vinculada al significante y el número representado. Así la significación operatoria no es la misma para 0,25, para 1/4 y para 25.10^{-2} puesto que no son los mismos procedimientos de tratamiento los que permiten efectuar las siguientes tres adiciones: 0,25+0,25=0,50; 1/4+1/4=1/2; y $25.10^{-2}+25.10^{-2}=25.10^{-2}$. (p. 46).

2.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN.

Por la naturaleza del problema planteado, la investigación a realizar será cualitativa y nos permitirá dar respuesta a las preguntas de investigación que nos hemos planteado.

Este tipo de investigación cualitativa se caracteriza por la observación de la actuación de los alumnos investigados cuando se enfrentan a las actividades diseñadas en el primer y segundo experimento, también se recoge la opinión del Profesor del curso sobre su intervención didáctica en la formación del concepto de logaritmo; esto permitirá obtener información necesaria para el análisis de los problemas de aprendizaje que surgen cuando se estudia este objeto matemático.

Sobre este tipo de investigación, Martínez (2006) opina que:

> El investigador cualitativo está muy de acuerdo con la famosa afirmación de Protágoras: “El hombre es la medida de todas las cosas”. En efecto, el hombre crea, evalúa y arregla los mismos instrumentos que utiliza, y debe juzgar su buen o mal funcionamiento y la credibilidad de sus datos. En el caso de las investigaciones cualitativas, sin despreciar la ayuda que pueden ofrecerle muchos buenos instrumentos, el observador frecuentemente se convierte en su principal instrumento. (p. 16).

Comentando a este autor afirmamos que nosotros haremos observaciones sobre personas, que nos aportarán información sobre su actitud frente a actividades diseñadas para que encuentren dificultades. Es así que nosotros creamos, evaluamos y arreglamos (si no funcionan como queremos) los instrumentos creados para un fin específico.

2.2.1 Procedimientos de investigación.

Con la finalidad de identificar los procesos involucrados en el aprendizaje de la función logarítmica, de manera particular, la complejidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional y la complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones, nos planteamos el método de investigación que presenta los siguientes pasos a seguir:

1. Análisis de los Libros didácticos para observar posibles dificultades didácticas en la presentación de la definición de logaritmos así como de las actividades propuestas analizando las transformaciones presentadas. Estos resultados serán tomados en cuenta en el diseño de las actividades del primer y segundo instrumento de investigación.
2. Análisis de investigaciones anteriores que hayan investigado los problemas de aprendizaje de la función logarítmica. Se tomarán en cuenta los aportes y conclusiones de estas investigaciones para el diseño de las actividades del primer y segundo instrumento de investigación, que se detallan más adelante.
3. Diseño y aplicación de la Prueba diagnóstica, que es el primer instrumento de investigación, que será aplicado a los alumnos participantes y nos permitirá saber si ellos poseen los conocimientos previos, necesarios para el estudio de la función logarítmica. Estos conocimientos son las propiedades básicas de la teoría de exponentes y las nociones básicas de la definición de logaritmos en la forma exponencial.
4. Elaboración de las preguntas para la entrevista al Profesor del curso. Esta entrevista nos permitirá obtener información sobre las dificultades encontradas en los alumnos cuando realizan el aprendizaje de la función logarítmica. Es muy importante tener la apreciación del Profesor del curso, basada en su experiencia en la enseñanza de matemáticas; sus comentarios serán tomados en cuenta en el diseño del segundo instrumento de investigación.
5. Diseño y aplicación de las actividades del segundo instrumento de investigación. Este instrumento es el que nos permitirá contestar nuestras preguntas de investigación. Su diseño tomará en cuenta los resultados del análisis de Libros didácticos, de los resultados de la prueba diagnóstica y de las respuestas obtenidas en la entrevista al Profesor del curso.

6. Análisis de los resultados obtenidos en las actividades del segundo instrumento de investigación y su contraste con los análisis preliminares basados en los resultados del análisis de Libros didácticos, en los resultados de la Prueba diagnóstica y en las respuestas del Profesor del curso.
7. Presentación de conclusiones y recomendaciones finales.

2.2.2 Instrumentos de investigación.

Para lograr los propósitos de esta investigación consideramos los siguientes instrumentos de investigación:

1) Prueba diagnóstica sobre conocimientos previos: primer instrumento.

La Prueba diagnóstica contiene nueve preguntas, que se muestran en el apéndice de esta investigación, esta prueba permitirá conocer al investigador si el alumno que participa en la investigación, tiene los conocimientos previos que se requieren para el estudio de las funciones logarítmicas. Estos conocimientos requeridos tratan básicamente sobre las propiedades de los exponentes, determinación del dominio y rango de funciones en registro gráfico y obtención del valor numérico $f(x_o)$ para $x_o \in R$, dada una función $f(x)$ en registro simbólico. Esta prueba se aplicará en el primer encuentro con los alumnos participantes de esta investigación, y tendrá un tiempo de duración de 45 minutos.

2) Actividades para el segundo instrumento de investigación.

El foco de investigación que nos hemos propuesto es analizar las dificultades que tienen los alumnos para realizar las transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica, para observar estas dificultades, elaboraremos unas actividades que contengan a la función logarítmica con la intención de comprobar si el alumno logra realizar las transformaciones esperadas por el investigador, lo que comprobará que se ha logrado el aprendizaje de la noción de logaritmos, de sus propiedades y de las características de la función logarítmica. Este conjunto de cinco actividades se muestran en el apéndice de esta investigación.

La aplicación de los dos instrumentos de investigación ocurrirá en dos sesiones, como se indica a continuación:

Sesión I: Aplicación de la Prueba diagnóstica: Primer Instrumento (45 minutos).

Sesión II: Aplicación de las Actividades: Segundo Instrumento (45 minutos).

3) **Fichas de observación**

Según Barton et. al. (Citados por Aparecida, 2008), la observación es un proceso que posee partes para su desarrollo, como un objeto observado, un sujeto, las condiciones, los medios y un sistema de conocimientos, a partir de los cuales se formula un objetivo de observación. (p. 34).

Sobre la observación, Ledesma y Sepúlveda (1999) propone que:

> La observación es uno de los procedimientos más importantes para obtener información objetiva acerca del comportamiento del proceso, objeto o fenómeno del estudio […]. En la experimentación el investigador interviene para producir artificialmente los procesos que estudia, a fin de encontrar la verdad, el grado de influencia, la duración, etc. de un fenómeno. (p.6).

En nuestro trabajo, emplearemos la observación en la fase de experimentación donde los alumnos desarrollan el conjunto de actividades diseñadas que nos permitirán encontrar dificultades en el aprendizaje de la función logarítmica.

Una ficha de observación contiene la fecha de la observación, nombre del observador, nombre del alumno observado y se indica lo que investigador considera que se debe observar, como por ejemplo:

- Describir detalladamente las acciones del alumno de manera secuencial durante el desenvolvimiento de cada actividad.
- Focalizar especialmente en las acciones en las cuales el alumno va realizando tratamientos y conversiones en los distintos registros semióticos. Observe cuando cambia de un registro simbólico a un registro numérico o a un registro gráfico anotando el instante y modo en que ocurre dichas transformaciones.

En la etapa de la experimentación, cuando los alumnos desarrollen las actividades los profesores observadores realizarán las observaciones dirigidos por el Profesor investigador. Para realizar estas observaciones se elaborarán Fichas de observación, cuyo modelo se presenta en el apéndice de esta investigación, donde se anotarán las acciones que realiza el alumno observado cuando desarrolla las actividades propuestas.

4) Entrevista semi-estructurada al Profesor del curso

En nuestra investigación entrevistaremos al Profesor de Matemáticas de quinto año de secundaria de la escuela a la que pertenecen los alumnos investigados, para que nos proporcione información sobre las dificultades observadas en la sesión de clase en la que se realizó la enseñanza de la función logarítmica. Aplicaremos una entrevista semi-estructurada porque "está direccionada por una ruta previamente elaborada, compuesta generalmente por preguntas abiertas". (Manzini, 2004, p. 45). El modelo de esta entrevista se presenta en el apéndice de esta investigación.

En este capítulo se han presentado los fundamentos de nuestro marco teórico y el método de investigación con los procedimientos e instrumentos a aplicar en esta investigación. Luego haremos un estudio de nuestro objeto matemático: la función logarítmica, haciendo un breve análisis histórico, así como la definición y principales propiedades de esta función transcendental en las matemáticas. En el capítulo siguiente mostraremos un estudio del objeto matemático empleado en esta investigación, su desarrollo histórico y su presencia actual en los textos escolares.

CAPÍTULO 3

EL OBJETO MATEMÁTICO: LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

CAPÍTULO 3

ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

3.1 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Nuestra investigación tiene como objetivo identificar los procesos involucrados en el aprendizaje de la función logarítmica, con la intención de entender las dificultades que se presentan en la comprensión de este tema. En este capítulo analizaremos la evolución histórica del estudio de los logaritmos, así como su presentación de este concepto en los libros didácticos empleados en las escuelas de nuestro país y un análisis de las dificultades que presenta este objeto en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el nivel escolar.

Para iniciar el estudio de nuestro objeto matemático en la presente investigación, resaltamos la importancia de desarrollo histórico como un recurso de aprendizaje del objeto matemático en estudio. En la Historia de las Matemáticas ha ocurrido que los objetivos que motivaron la creación de un conocimiento matemático, debido al progreso de la ciencia, ya no es el objetivo actual de su estudio, esta evolución de objetivos a ocurrido con los logaritmos, que surgieron inicialmente para resolver complicados cálculos aritméticos con sus tablas numéricas, y ahora tiene otros objetivos de estudio como describir fenómenos físicos o químicos o aplicaciones de contexto de la vida real.

En el siglo XVI, un problema fundamental en las Matemáticas, era la búsqueda de un método que simplificase los cálculos aritméticos complicados, que actualmente se resuelven mediante calculadoras y computadoras. Esta búsqueda era un requerimiento de la astronomía y navegación, para la simplificación y obtención de cálculos rápidos y eficientes. En el libro de “Historia de las Matemáticas” de Bell (1999) se menciona que “El cálculo quedó muy simplificado a principios del siglo XVII con la invención (1614) de los logaritmos”. (p.131). Napier, citado en Boyer (1987) nos dice que había trabajado durante veinte años en su invención de los logaritmos antes de publicar sus resultados, afirmación que nos permite situar los orígenes de sus ideas hacia el año 1594. Napier con la influencia de John Craig sobre cálculos que se hacían en el observatorio de astronomía, redobla sus esfuerzos y llega a publicar finalmente en 1614 su principal obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (“Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos”).

Así iniciamos un recorrido histórico de los logaritmos, porque según Santos (2011) "es importante que los alumnos sepan como se desarrolló la Matemática con el pasar del tiempo y no verla como una ciencia "lista y acabada" o "exacta" como generalmente es afirmada por el sentido común". (p. 78).

Lima (1999) nos relata una síntesis del descubrimiento de los logaritmos de esta manera:

> A fines del siglo XVI, en el desarrollo de la Astronomía y Navegación se planteaban cálculos aritméticos muy largos y laboriosos. Se tenía como un problema fundamental encontrar formas de realizar multiplicaciones, divisiones, potenciaciones y radicaciones de forma más rápida. Dentro de esta búsqueda aparecen los trabajos de Jost Bürgi (1552-1632) y de John Napier (1550-1617), quienes en forma independiente publicaron las primeras tablas de logaritmos. Una tabla de logaritmos consiste esencialmente de dos columnas de números. Posteriormente a la publicación de la primera tabla de logaritmos de Napier, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1631), elaboró en colaboración con Napier, una nueva tabla de uso más sencillo, conteniendo los llamados logaritmos decimales o logaritmos ordinarios, que se aplican al sistema de numeración decimal. (p. 1).

Sobre la importancia histórica de nuestro objeto matemático, Lima (1999) opina que:

> Los logaritmos, que durante tres siglos y medio desempeñaron exitosamente el papel de un instrumento maravilloso para simplificar el cálculo aritmético, permitiéndose la multiplicación de dos números con muchas cifras, o una potenciación con exponente fraccionario, han perdido desde hace tiempo esa función de eficiente calculador, cumplida hoy con gran éxito por las máquinas electrónicas. A pesar de ello, los logaritmos continúan ocupando una posición destacada en la enseñanza de la Matemática, debido al lugar destacado que ocupan en esta ciencia y en sus aplicaciones. Esta posición es permanente porque la función logarítmica y su inversa, la función exponencial, constituyen la única manera de describir matemáticamente la evolución de una magnitud cuya tasa de crecimiento (o de decrecimiento) es proporcional al valor que tiene dicha magnitud en el instante considerado. (p. 6).

En el libro de Bell (1999) se propone que la invención de los logaritmos, invento del barón de Napier o Neper de Murchiston (escocés, 1550-1617) se basa en la idea fundamental de la correspondencia entre dos series de números, una en progresión aritmética y otra en progresión geométrica, esta correspondencia la explica Neper tomando el movimiento de dos puntos que se mueven por distintas líneas rectas, una con velocidad uniforme, y el otro punto con velocidad acelerada, como se muestra en la Tabla 01:

Tipos de Movimiento	Tipos de Progresión	Sucesión de Números									
A velocidad constante	Progresión Aritmética (P.A.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
A velocidad variable	Progresión Geométrica (P.G.)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	…

Tabla 01. Comparación de las progresiones que fundamentan la noción de logaritmo.

Esta tabla muestra la idea básica del cálculo logarítmico: la existencia de una regla de correspondencia entre dos progresiones de números, una geométrica y otra aritmética.

Se observó que el producto de términos de la progresión geométrica poseía una correspondencia con la adición de términos de la progresión aritmética, como se indica:

Producto de los tres primeros términos de la $\text{P.G.}: 1.2.4 = 2^0.2^1.2^2 = 2^{0+1+2} = 2^3$

Adición de los tres primeros términos de la $\text{P.A.}: 0+1+2 = 3$

La correspondencia encontrada está entre el exponente del producto de la P.G. y la suma obtenida de los términos de la P.A. Esta correspondencia se probará más adelante con el desarrollo de las propiedades de los logaritmos. Aquí haremos la prueba con logaritmos en base 2:

$$\text{Log}_2 1.2.4 = \text{Log}_2 1 + \text{Log}_2 2 + \text{Log}_2 4 = \text{Log}_2 2^0 + \text{Log}_2 2^1 + \text{Log}_2 2^2 = 0 + 1 + 2 = 3$$

Así mismo, podrá probarse para progresiones geométricas con otra base n para n>0.

3.2 DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN LOS TEXTOS.

Actualmente predominan dos definiciones para los logaritmos: la forma exponencial y la forma a través de áreas, estas se encuentran en el libro tomado como referencia titulado “Logaritmos” elaborado por el autor Lima (1999), más adelante se hace un análisis de dos libros escolares donde encontramos preferentemente la primera definición.

3.2.1 Definición de logaritmos en la forma exponencial.

Dado un número real $a > 0 \wedge a \neq 1$, el logaritmo de un número x > 0 en la base *a* es el exponente *y* al que debe elevarse *a*, de manera que se cumpla $a^y = x$. Se escribe $y = \log_a x$, y se lee: "*y* es el logaritmo de *x* en la base *a*". (Lima, 1999, p. 9).

Según esta definición, se cumple la equivalencia: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

La siguiente tabla muestra ejemplos de esta equivalencia donde vemos la transformación de la forma exponencial a la forma logarítmica y el cálculo del logaritmo correspondiente:

Ecuación en forma exponencial	Ecuación en forma logarítmica	Cálculo del logaritmo
$2^x = 8$	$\log_2 8 = x$	x = 3
$5^x = 125$	$\log_5 125 = x$	x = 3
$10^x = 100$	$\log_{10} 100 = x$	x = 2
$2^x = 32$	$\log_2 32 = x$	x = 5
$3^x = 243$	$\log_3 243 = x$	x = 5

Tabla 02. Relación entre ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

A continuación mostramos que los logaritmos se pueden caracterizar por dos propiedades extremadamente simples y naturales, así daremos la definición de la función logarítmica, estableciendo sus propiedades básicas:

Una función real L: $\Re^+ \rightarrow \Re$, cuyo dominio es el conjunto $\Re^+$ de los números reales positivos, es llamada una función logarítmica o un sistema de logaritmos cuando tiene las siguientes propiedades:

A) L es una función creciente, es decir, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para cualesquiera x, y $\in \Re^+$.

Para todo $x \in \Re^+$, el número L(x) es llamado el logaritmo de x.

Ahora presentamos una lista de propiedades de las funciones logarítmicas, es decir, de propiedades que son consecuencias de A) y B) enunciadas anteriormente.

Propiedad 1. Una función logarítmica L: $\Re^+ \rightarrow \Re$ es siempre inyectiva, es decir, números positivos diferentes tienen logaritmos diferentes.

En efecto, si x, y $\in R^+$ son diferentes, entonces $x < y$ ó $y < x$. En el primer caso, de

A), resulta que $L(x) < L(y)$. En el segundo caso se tiene que $L(y) < L(x)$. En cualesquiera de los casos como: x ≠ y, concluimos que $L(x) \neq L(y)$.

Propiedad 2. El logaritmo de 1 es cero. En efecto, de la propiedad B) tenemos:

$$L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1), \text{ luego } L(1) = 0.$$

Propiedad 3. Los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos y los números menores que 1 tienen logaritmos negativos.

En efecto, siendo L creciente, de $0 < x < 1$ y resulta que $L(x) < L(1) < L(y)$, es decir,

$$L(x) < 0 < L(y).$$

Propiedad 4. Para todo $x > 0$ se cumple que $L(1/x) = -L(x)$. En efecto, de $x.(1/x) = 1$ resulta que $L(x) + L(1/x) = L(1) = 0$. De donde: $L(1/x) = -L(x)$.

Propiedad 5. Para cualesquiera x, y $\in \Re^+$ se cumple: $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

En efecto, $L(x/y) = L(x.(1/y)) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y)$.

Propiedad 6. Para todo x $\in \Re^+$ y todo número racional r = p/q, se cumple que:

$$L(x^r) = r.L(x)$$

En efecto, $L(x^r) = L(\underbrace{x.x.x.x.x\ldots.x}_{r\ \text{veces}}) = \underbrace{L(x) + L(x) + L(x) + \ldots\ldots + L(x)}_{r\ \text{veces}}$

Luego: $L(x^r) = r\,.\,L(x)$.

Propiedad 7. Una función logarítmica $L : \Re^+ \to \Re$ no está acotada, ni superior ni inferiormente.

Ahora continuamos con la Historia de los Logaritmos, respecto la interpretación gráfica de la función logarítmica. Los primeros fueron, Gregory Saint Vincent, en 1647, y después Isaac Newton, en 1660, quienes evidenciaron una relación estrecha entre el área de una franja de hipérbola y los logaritmos. “Sus observaciones pioneras muestran que la concepción geométrica de una función logarítmica es una idea muy antigua. Además de antigua, ella es natural, intuitiva e instructiva porque constituye una excelente introducción al Cálculo Integral". (Lima, 1999, p. 26).

A continuación mostramos la gráfica de la función logarítmica f(x) = log(x):

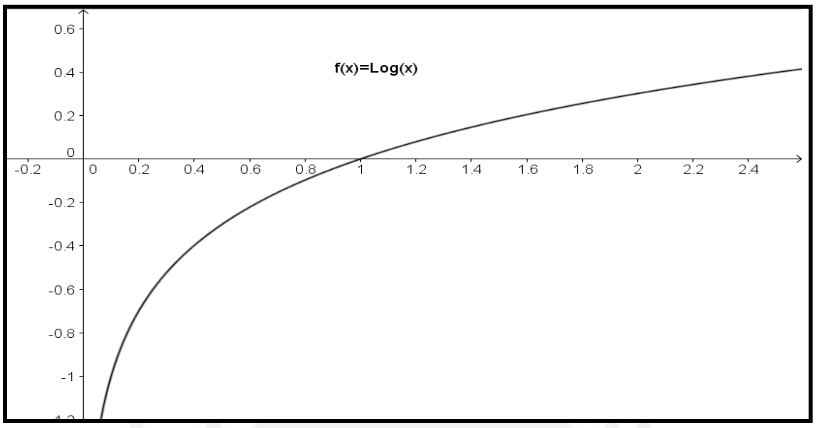


Figura 09. Gráfica de la función logarítmica: $f(x) = \log(x)$

Observamos que en esta gráfica se cumplen las propiedades fundamentales antes presentadas: la función $f(x) = \log(x)$ es creciente; se cumple que para $0 < x < 1$ se tienen logaritmos de valores negativos, para $x > 1$ se tienen logaritmos de valores positivos. También cumple la propiedad 7 que indica que la función logarítmica no está acotada ni superior ni inferiormente. Observamos que el dominio de la función es $\Re^+ = [0\,;\ +\infty>$. El rango de la función es $\Re$.

Sobre la función logarítmica, Hitt (2002) nos indica que:

> La función logarítmica está estrechamente relacionada con la función exponencial. Sin embargo, el comportamiento de la función logarítmica sigue un patrón totalmente diferente al de la función exponencial. Si pusiéramos un espejo exactamente a la mitad de los cuadrantes I y III del plano cartesiano (véase figura 03), a partir de la función exponencial obtendríamos reflejada una función con ciertas características manifiestas en la expresión algebraica $f(x) = \log_a(x)$. En el caso de la función logarítmica asociada a la exponencial con base e, se le denomina función logaritmo natural y se denota por $f(x) = \log_a(x) = \ln(x)$.

En la figura 10 mostramos dos funciones logarítmicas asociadas a sus funciones exponenciales correspondientes. (p. 126).

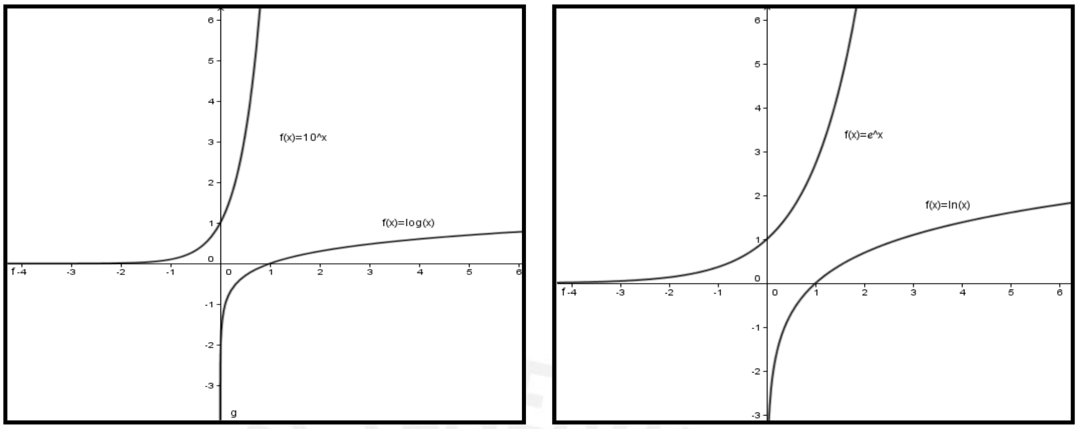


Figura 10. Comparación gráfica de la función logarítmica y de la función exponencial.

Sobre las funciones logarítmicas, Goodman y Hirsch (1996), nos indica que: "cuando una expresión se escribe en la forma $x = b^y$, está escrito en **forma exponencial**. Cuando una expresión está escrita de la forma $y = \log_b x$, está escrita en **forma logarítmica**. Todo nuestro trabajo con los logaritmos será más fácil si recordamos que, de acuerdo con la definición, un logaritmo es sólo un exponente". (p. 335).

3.2.2 Definición de logaritmos a través de áreas:

Una segunda definición del concepto de logaritmos puede ser desarrollado a partir de la siguiente definición:

Definición: Un logaritmo natural de un número $a \in \Re, a \geq 1$, es igual al área de la figura plana delimitada por la recta horizontal $y = 0$ (o eje x de las abscisas), por la hipérbola $y = 1/x$ y por las rectas verticales $x = 1$ y $x = a$; un logaritmo natural de un número $a \in \Re$, $0 < a < 1$, es igual al simétrico del área de la figura plana delimitada por la recta horizontal $y = 0$ (o eje x de las abscisas), por la hipérbola $y = 1/x$ y por las rectas verticales $x = a$ y $x = 1$.

Los autores que desarrollan un estudio de los logaritmos a partir de la definición tradicional:

$x = \log_a y \leftrightarrow y = a^x$, frecuentemente no mencionan las dificultades teóricas importantes que surgen cuando queremos justificar un significado de $y = a^x$ para x irracional, en cambio, la definición geométrica de los logaritmos presenta muchas ventajas para este caso.

La figura 11 nos muestra un gráfico que permite visualizar la definición geométrica del logaritmo natural de *a* para $a \geq 1$.

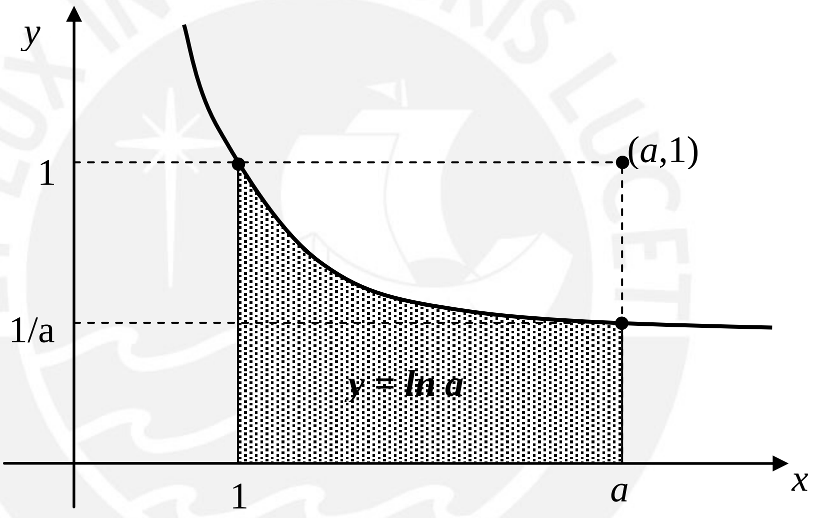


Figura 11. Gráfico de la definición geométrica del logaritmo natural $y = \ln a$.

En este capítulo se ha presentado nuestro objeto matemático en estudio, un breve desarrollo histórico así como las dos principales definiciones que existen sobre la función logarítmica. La definición basada en la forma exponencial es la forma que más se emplea en la enseñanza escolar, por su transformación sencilla a un registro numérico en forma exponencial y de allí le siguen unos tratamientos sencillos basados en las reglas propuestas por la teoría de exponentes. En el capítulo siguiente se analizan los problemas de aprendizaje, centrando nuestro análisis en investigaciones realizadas con el mismo objeto matemático y un análisis de dos Libros didácticos empleados en el Quinto grado de Educación secundaria de nuestro país.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE APRENDIZAJE EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE APRENDIZAJE EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

En nuestro trabajo para responder a nuestras preguntas de investigación: ¿qué problemas de aprendizaje se presentan en los alumnos cuando estudian la función logarítmica? y ¿qué transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica se deben realizar cuando se aprende la función logarítmica y cuáles presentan mayores dificultades? ya hemos definido como nuestro marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (1995), también hemos determinado el método de investigación, que guiará las actividades a realizar y también hemos realizado un estudio del objeto matemático: la función logarítmica. Ahora realizaremos dos análisis importantes que permitirán al investigador hacer el diseño y análisis preliminar de las actividades experimentales que se aplicarán a los sujetos a investigar. Estos análisis se realizan sobre cuatro investigaciones anteriores que estudiaron las dificultades en el aprendizaje de la función logarítmica, y sobre dos libros didácticos que emplean profesores y alumnos en el quinto año de educación secundaria de nuestro país.

4.1 RESULTADOS DE INVESTIGACIONES SOBRE LAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE LOGARITMOS.

Como hemos citado, en la presente investigación analizaremos las dificultades que tienen los alumnos para realizar las transformaciones sobre las representaciones semióticas cuando realizan el aprendizaje de la función logarítmica.

Un conjunto de investigaciones anteriores analizan los problemas sobre el aprendizaje de este objeto matemático, en distintos niveles educativos, y hacen unas propuestas didácticas que tomaremos en cuenta en las actividades que se propondrán en la parte experimental de nuestra investigación. A continuación presentamos un breve análisis sobre cada una de ellas:

4.1.1 Enseñanza de logaritmos utilizando calculadora

Una primera investigación fue realizada por Karrer (1999), la autora indica que “pudimos notar que existen problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ese contenido y, consecuentemente, en la formación de su concepto” (p. 1), como estrategia didáctica propone que el uso de la calculadora favorecería la formación del concepto de logaritmos. Emplea concepciones contenidas en la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la cual defiende que la resolución de problemas es parte integrante del proceso de formación de conceptos, para lograrlo se plantean situaciones-problemas con expresiones exponenciales, que conducen al uso de los logaritmos como un camino de solución. Por ejemplo, en una de las actividades se le pide al alumno que resuelva en $\Re$: $9^x = 20$; el alumno para obtener la solución aplica logaritmos a la expresión dada y hace uso de la calculadora para realizar los cálculos finales. La investigadora observó que los alumnos investigados preferían un abordaje basado en problemas, demostrando mayor interés en ese tipo de cuestiones que en aquellas con elección técnica y conceptual, factor que fuera comprobado por Vergnaud. A pesar de esta preferencia, todos presentaron grandes dificultades en la interpretación de los problemas propuestos, lo cual verificó la diferencia entre el número de cuestiones en las cuales se privilegia la memorización de algoritmos y la cantidad de situaciones-problema contextualizados.

En nuestro trabajo, consideraremos las conclusiones de esta investigación, por esto en las actividades que propondremos en la parte experimental incluiremos el uso de la calculadora científica y problemas contextuales ligados a aplicaciones logarítmicas, con la intención de analizar los transformaciones que realice el alumno y los problemas en el aprendizaje de la noción de logaritmos.

4.1.2 Estudio de la función logaritmo desde la Socioepistemología

Una segunda investigación fue realizada por Ferrari (2001), el tema central de esta investigación es “la falta de significación que los alumnos presentan ante el concepto de logaritmo” (p. 54). La autora propone elementos para explicar una cierta “dislexia” (dificultad en la lectura que imposibilita su comprensión correcta) entre los enfoques aritmético y funcional producida en la enseñanza de los logaritmos, aborda su investigación para dar respuesta a las preguntas: ¿cómo vive esta noción en estos días?, ¿qué elementos permitieron su incorporación a la estructura matemática actual?, ¿cómo fue su devenir en objeto a ser enseñado en nuestras aulas? Propone el estudio de los logaritmos en tres etapas históricas a la que denomina: los logaritmos como transformación, como modeladores y como objetos teóricos. El estudio de los logaritmos como transformación, se desarrolla en el contexto numérico con ideas intuitivas para transformar cantidades numéricas, logrando de esta manera facilitar las operaciones aritméticas. Luego sigue el estudio de los logaritmos *como modeladores*, en esta etapa se les dota de una gráfica que permite adecuarlos al nuevo registro “algebraico-geométrico”, esto permite la descripción de fenómenos físicos y el descubrimiento de las aplicaciones de los logaritmos en distintos contextos. Finaliza el tercer momento que identificamos como los *logaritmos como objetos teóricos*, que son conceptos trabajados en la enseñanza actual, prevalece el argumento de función inversa como la relación entre las funciones exponencial y logarítmica. Este concepto es muy aplicado en el nivel superior, pues se presentan los logaritmos como la inversa de la función exponencial o como: $\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dt$; x>0 para ser utilizados en la resolución de integrales o ecuaciones diferenciales. En esta investigación también encontramos que la autora considera tres aspectos fundamentales en el aprendizaje de la noción de logaritmos: 1° La diversificación de los registros de representación semiótica, 2° La diferenciación entre representante y representado, y 3° La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles. La autora introduce la componente social en este estudio y lo fundamenta de esta manera: los logaritmos como toda producción humana, nacen en el seno de una comunidad específica, por esto son una construcción sociocultural. La autora concluye que la “dislexia” en el aprendizaje de la noción logaritmo es producto de su enseñanza, de priorizar una presentación axiomática de su definición y de una excesiva algoritmización en su enseñanza en la culminación de la etapa escolar. En las consideraciones finales, la autora es consciente que la ingeniería didáctica se ha limitado al estudio de una variable didáctica como las limitaciones que tienen los alumnos al obtener construcciones geométricas que permiten el pasaje del registro gráfico-geométrico al numérico, para regresar al gráfico y explorar el posible traslado al registro algebraico.

En nuestro trabajo, consideraremos las conclusiones de esta investigación, por esto en la parte experimental se propondrán actividades que permitan al alumno el uso de diversos registros de representación semiótica y el logro de la coordinación entre los diferentes registros de representación.

4.1.3 Enseñanza de logaritmos empleando la Ingeniería Didáctica

Una tercera investigación fue realizada por Ferreira (2006), la autora observa que la mayoría de alumnos presentaban dificultades en la comprensión del concepto de logaritmos y ellos no entienden para que sirven, por esto, esta investigación considera la restructuración en los métodos de enseñanza de logaritmos, la forma de presentación de este conocimiento en un contexto que proporcione al alumno las aplicaciones de este concepto a la realidad, entonces, la autora verificará la utilización de una secuencia didáctica, elaborada según las etapas de la Ingeniería Didáctica que permita la construcción y comprensión del concepto de logaritmos por parte de los alumnos. Sobre las dificultades en el aprendizaje de la noción de logaritmo, la autora propone que la dificultad en la comprensión del concepto de logaritmo "consiste en el factor que los aspectos cognitivos exigidos para la adquisición de ese contenido, no puede ser generado simplemente a partir de la definición algebraica, definición que muchas veces es apenas memorizada". (p. 14). Sobre este enfoque tradicional de enseñanza, la autora propone que:

> Muchos alumnos salen de la Enseñanza Media sin entenderlo y sin lograr relacionarlo con aplicaciones prácticas y conocidas, sin saber que la teoría de los logaritmos se aplica a muchos tipos de situaciones-problema como la cuantificación de niveles de intensidad sonora, a la medición de la acidez o alcalinidad de una solución química, o en la escala de Richter para la medición de la intensidad de los terremotos. (Ferreyra, 2006, p. 14).

En nuestro trabajo, consideraremos las conclusiones de esta investigación, y en las actividades que propondremos en la parte experimental incluiremos actividades donde el alumno aplique la noción de logaritmo en distintos registros: simbólico, verbal y gráfico, principalmente, así mismo plantearemos actividades que muestren la importancia y aplicación de los logaritmos a situaciones de la vida real, para que los alumnos encuentren la conexión de las matemáticas con el mundo en que vivimos.

4.1.4 Enseñanza de la función logarítmica con uso del software GeoGebra

Una cuarta investigación fue realizada por Santos (2011), la autora propone que en su experiencia de aula, ha percibido muchas dificultades, como el tratamiento en el registro algebraico y numérico de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, la interpretación de situaciones-problema y reconocimiento de una función logarítmica en el registro gráfico como registro de partida. La pregunta de investigación propuesta fue: ¿Los alumnos con una secuencia didáctica propuesta en este trabajo consiguen reconocer algunos elementos fundamentales para el estudio de la función logarítmica, tales como dominio, imagen y un esbozo del gráfico? A fin de comprender algunos de los procesos que están involucrados en las dificultades del aprendizaje de la función logarítmica, este trabajo tiene como marco teórico la Teoría de los Registros de Representación Semiótica propuesto por Duval (1995). La secuencia didáctica propuso cuatro sesiones presentando situaciones-problema cuyos objetivos fueron: Explorar los conceptos fundamentales de las potencias; Explorar las características de la función exponencial; Explorar de los conceptos de función exponencial y logarítmica, con el uso de calculadora científica; y Explorar por medio de la representación en registro gráfico de los conceptos de simetría y de la función inversa, y concluir que la función logarítmica es una función inversa de la función exponencial, tal como se muestra en la figura 12.

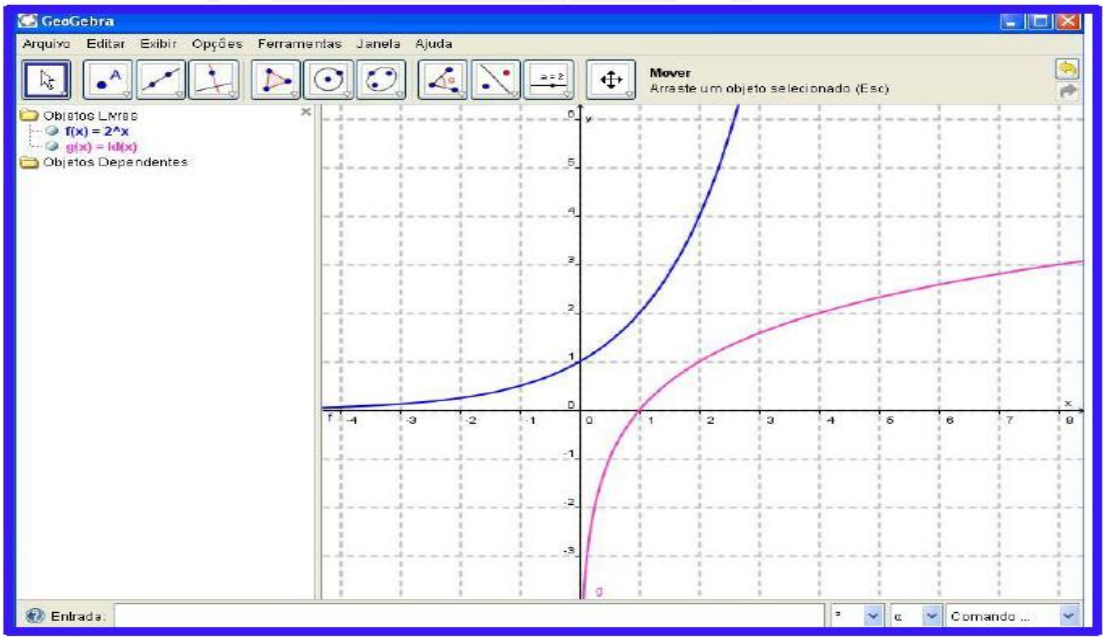


Figura 12. Comparación de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función $f(x) = \log x$.

Fuente: Santos (2011, p. 77).

Este trabajo de Santos (2011) concluye que “las principales dificultades que surgieron fueron en el tratamiento numérico y algebraico, principalmente cuando se les pidió completar tablas, pues eran necesarios conocimientos previos sobre las potencias. Otra dificultad encontrada fue cuando deberían dar una justificación en lengua natural” (p. 190). Sobre esta dificultad uno de los alumnos dice: “En las aulas de matemática en general, no somos motivados a justificar nuestras conclusiones con palabras, más apenas con números”. (p. 190).

En nuestro trabajo, consideraremos las conclusiones de esta investigación, que coinciden con la investigación de Ferrari (2001), respecto a que la actividad matemática requiere el uso de la diversidad de los registros dando especial importancia en el registro en lengua natural porque se forma con signos de nuestra lengua materna, ampliamente empleada en nuestra etapa escolar en distintas asignaturas del currículo escolar. Se pedirá que el alumno realice justificaciones a sus respuestas en el registro verbal, así desarrolla la actividad cognitiva de la argumentación, consideramos que nuestros alumnos deben tener capacidades desarrolladas para utilizar este registro en las situaciones-problema, en forma conjunta con otros registros de representación semiótica.

A manera de síntesis presentamos los principales resultados de las investigaciones analizadas, de ellas para nuestro trabajo nos interesa los problemas encontrados sobre el aprendizaje de logaritmos que condujeron a los objetivos de dichas investigaciones que se muestran en la Tabla 03 y que concluyeron en las propuestas didácticas que se muestran en la Tabla 04:

INVESTI-GACIÓN	Problemas Encontrados sobre el Aprendizaje de Logaritmos	Objetivos de la Investigación
KARRER (1999)	Problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, esto es, en la formación del concepto de logaritmos. Dificultades en la resolución de problemas.	Aplicar una secuencia didáctica significativa para introducir los logaritmos con ayuda de la calculadora para favorecer la formación de este concepto.
FERRARI (2001)	Falta de significación frente al concepto de logaritmo, Ocurre una “dislexia” producido por la enseñanza axiomática de su definición y excesiva algoritmización.	Resignificar las nociones de los logaritmos, como un saber validado social y culturalmente.
FERREIRA (2006)	Dificultades en la comprensión del concepto de logaritmos, por ser generada sólo a partir de la definición algebraica. Desconocimiento de las aplicaciones de logaritmos.	Determinar de las condiciones en las cuales se produce la apropiación de la noción de logaritmos, por parte de los alumnos.
SANTOS (2011)	Dificultades en el tratamiento algebraico y numérico de ecuaciones logarítmicas. Dificultades en la interpretación de situaciones-problema y reconocimiento de la función logarítmica en el registro gráfico como registro de partida.	Explorar la coordinación entre los diversos registros, para posibilitar el aprendizaje de los logaritmos.

Tabla 03. Resultados de investigaciones sobre logaritmos: Problemas y objetivos.

INVESTIGACIÓN ANALIZADA	ELEMENTOS considerados en el presente TRABAJO de INVESTIGACIÓN para el DISEÑO de las ACTIVIDADES
KARRER (1999)	Promover el uso de la calculadora científica en la aplicación de la noción de logaritmos. Plantear al alumno problemas contextuales que permitan la formación del concepto de logaritmos.
FERRARI (2001)	Estudiar los logaritmos en etapas históricas: logaritmos como transformación, como modeladores y como objetos teóricos. Plantear situaciones que permitan el uso de diversos registros de representación semiótica.
FERREIRA (2006)	Comprobar el aprendizaje de la noción de logaritmos en situaciones donde se apliquen distintos registros de representación. Aplicar los logaritmos a diversos tipos de situaciones que permitan conocer su relación con la realidad.
SANTOS (2011)	Aplicar situaciones donde se apliquen distintos registros de representación. Promover el uso del registro verbal en la argumentación de respuestas obtenidas en situaciones aplicadas a logaritmos.

Tabla 04. Resultados de investigaciones sobre logaritmos: Elementos a considerar.

4.1.5 Sobre aportes de las investigaciones anteriores.

El análisis de investigaciones anteriores tuvo como objetivo recoger los aportes propuestos por otros investigadores y sus conclusiones sobre las dificultades en el aprendizaje de la función logarítmica. Dentro de los principales aportes de estos investigadores, encontramos que Karrer (1999) propuso promover el uso de la calculadora científica en la aplicación de la noción de logaritmos y plantear al alumno problemas contextuales que permitan la formación del concepto de logaritmos. En nuestro diseño consideramos actividades de logaritmos en problemas contextuales.

Ferrari (2001) propuso estudiar los logaritmos en etapas históricas: logaritmos como transformación, como modeladores y como objetos teóricos, así como plantear situaciones que permitan el uso de diversos registros de representación semiótica. En nuestro diseño consideramos actividades que se proponen con distintos registros de representación. Ferreira (2006) propuso comprobar el aprendizaje de la noción de logaritmos en situaciones donde se apliquen distintos registros de representación, así como aplicar los logaritmos a diversos tipos de situaciones que permitan conocer su relación con la realidad. Finalmente Santos (2011) propuso aplicar situaciones donde se apliquen distintos registros de representación, así como promover el uso del registro verbal en la argumentación de respuestas obtenidas en situaciones aplicadas a logaritmos.

Nuestro diseño de actividades promueve el uso de distintos registros de representación y la realización de transformaciones sobre dichos registros; estas transformaciones son el fundamento de la actividad matemática, desde el punto de vista cognitivo propuesto por Duval (2006).

4.2 ANÁLISIS DEL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE LOGARITMO EN LOS LIBROS DIDÁCTICOS

Sobre la importancia de los libros de textos, Bravo (2007) nos dice que:

> "un objeto cultural tangible para el análisis del discurso matemático escolar lo constituye la figura del libro de texto, dado que es una guía imprescindible para la acción didáctica de profesores y alumnos en todo proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas". (p. 7)

Los textos cumplen un rol trascendente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, son medios de transferencia cultural entre el autor, maestros y alumnos, por esto, es importante señalar las características generales de los libros de texto, señaladas en Bravo (2007), lo que contribuirá a nuestro análisis posterior. Estas características generales son:

a) Los textos se elaboran con una clara y explícita intención didáctica, esto es, sus autores tienen el propósito de enseñar, y sus lectores el de aprender.

b) Los textos son una fuente central de consulta para la preparación de clases por parte del docente, y de estudio para los alumnos.

c) En los textos se desarrollan explicaciones de saberes a enseñar especificados en su contenido.

d) Los autores de los textos eligen y elaboran una forma específica de discurso explicativo de los conceptos. Forma que expresa su experiencia y conocimiento didácticos.

Así mismo sobre la presencia de la función logaritmo en los libros de texto, Ferrari (2001) menciona que cuando se analiza la componente didáctica de una investigación, los textos deben tenerse en cuenta porque "en ellos se refleja el enfoque dado a las nociones consideradas aptas para ser enseñadas […] Nuestra intención es recabar información sobre la existencia de elementos didácticos que pudieran propiciar la construcción de las nociones de función logaritmo y exponencial" (p. 154).

Para el análisis de los Libros didácticos, se consideraron dos de los libros más empleados en los colegios de Educación Secundaria del Perú. Esto nos permitirá tener un primer encuentro con las posibles dificultades en la comprensión del objeto matemático que estamos estudiando.

Los libros analizados en esta investigación fueron los siguientes:

1) **Manual de Matemática 5to. de Secundaria.** Texto Oficial del Ministerio de Educación. Perú. Ediciones El Nocedal S.A.C. – 2008.

Autor: Rubén Hildebrando Gálvez Paredes.

La elección de este libro se justifica porque es el libro empleado en las escuelas públicas de todo el país y es evaluado y aceptado por el Ministerio de Educación de Perú para los alumnos del Quinto año de educación secundaria. Nos permitirá una comparación didáctica con otro libro de uso en las escuelas privadas.

2) **Logica.mente - 5.** Grupo Editorial Norma – 2009.

Autores: Alfredo Alcántara Hernández, César Rosas Buendía, Isidoro Ruiz Arango, Daniel Proleón Patricio, Guillermo Effio Macavilca, Carlos Gutiérrez Curi, Arturo Balmaceda Puma.

Este Libro didáctico se elige porque es el libro empleado en la Institución Educativa Privada "San Agustín" de la ciudad de Lima, Perú, siendo la institución donde estudian los alumnos que participan en la presente investigación. El libro es aprobado y recomendado por el conjunto de profesores de la misma institución.

En los libros didácticos se analizarán los siguientes criterios:

1) La forma como el autor del libro propone la introducción al concepto de logaritmo.
2) Los tipos de actividades presentadas en el libro, según el criterio del registro de partida empleado (que puede ser simbólico, numérico o verbal).
3) Los tipos de transformaciones (tratamientos o conversiones de registros) empleados por el autor del libro didáctico en solución de las actividades; así como la determinación de los tipos de transformaciones posibles a aplicar en las actividades propuestas para el alumno.

4) Los recursos empleados, como el uso de tablas de logaritmos y/o uso de la calculadora científica, que permiten el estudio de los logaritmos en un registro numérico más amplio.

En relación al primer criterio considerado se propone observar la forma como el autor del Libro didáctico introduce el concepto de logaritmos, como primer objetivo observaremos si se realiza una forma constructiva del concepto, haciendo uso de distintos registros semióticos para presentar las definiciones y propiedades de los logaritmos: ¿cómo presenta el autor las definiciones de logaritmo?, ¿tendrá el autor un predominio del discurso simbólico, o hará uso de un discurso que mezcla lo simbólico con el uso y análisis de gráficos?. Se observará el grado en que se emplea el registro verbal o la lengua natural.

Este primer análisis tiene un segundo objetivo: observar si el autor muestra a los alumnos la importancia de los logaritmos en contextos reales, debido a que el alumno siempre se hace la pregunta: ¿Profesor, para qué sirven las matemáticas? Debemos despejar esta inquietud y conectar las matemáticas con hechos reales.

Para analizar el segundo criterio haremos una estadística de los ejercicios y problemas de aplicación de logaritmos observando el registro de partida en que se han propuestos, este es un análisis estático de las actividades propuestas, porque solo observaremos su presentación y no su funcionalidad.

El tercer análisis es un análisis dinámico de las actividades resueltas y propuestas, obtendremos datos de las actividades que se resuelven solo con la aplicación de tratamientos en un mismo registro de representación y de aquellos de mayor complejidad cognitiva y que requieren la conversión de registros de representación.

En el cuarto análisis, observaremos si el autor del Libro didáctico hace uso de tablas de logaritmos o promueve el uso de la calculadora científica para que alumno logre resultados en un registro numérico más amplio, no solo en el campo de los números enteros, sino también el empleo de números decimales; teniendo en cuenta que los resultados experimentales en otras disciplinas científicas en su mayoría se obtienen valores no enteros, principalmente.

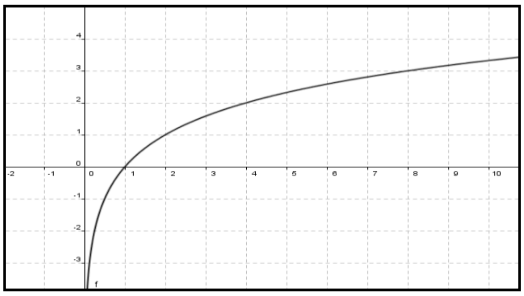
A continuación presentamos los resultados del análisis sobre los dos libros didácticos seleccionados. Denotaremos por L1 al libro empleado en las escuelas públicas y L2 al libro empleado en las escuelas privadas.

4.2.1 Análisis de la forma como se propone la introducción del concepto de logaritmo.

L1: El Libro didáctico 1, se hace una construcción del concepto de logaritmo partiendo de tres ecuaciones exponenciales: a) $2^{x+3} = 32 \rightarrow C.S. = \{2\}$; b) $a^3 = 27 \rightarrow$ C. S. $= \{3\}$ y c) $3^x = 8$, según el autor, este tercer ejemplo no puede ser resuelto como los casos anteriores, esta expresión la presenta como "x es el exponente que hay que elevar a la base 3 para obtener 8". Luego presenta el logaritmo como un operador para determinar el valor de "x": $x = \log_3 8$, que se lee como: "x es igual al logaritmo de 8 en base 3". Luego empleando el registro verbal, el autor define: El logaritmo de un número real positivo (N) en una base (a) positiva y diferente de uno, es el exponente (x) al cual se eleva la base (a) para obtener la potencia (N). Para luego presentar la definición en registro simbólico: $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$. Luego de haber presentado esta forma deductiva del concepto de logaritmo, aplica la misma estrategia didáctica para presentar la definición de función logarítmica, mostrando dos ejemplos en el registro simbólico $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = \log_{1/2} x$ para luego mediante una conversión obtener el registro gráfico, pasando por un registro tabular que permite reducir la complejidad de la conversión. El autor hace un análisis de cada gráfica haciendo uso del registro verbal, proponiendo que cuando: $f(x) = \log_2 x$ tiende a $-\infty$ cuando *x* se aproxima a cero por la derecha y $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando *x* tiende a $+\infty$, así como también, que $f(x) = \log_{1/2} x$ tiende a $-\infty$ cuando *x* tiende a $+\infty$ y $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando *x* se aproxima a cero por la derecha. Las gráficas propuestas son:

$f(x) = \log_2 x \qquad x > 0$

x	...	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	...
f(x)	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...



$f(x) = \log_{1/2} x \qquad x > 0$

x	...	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	...
f(x)	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...

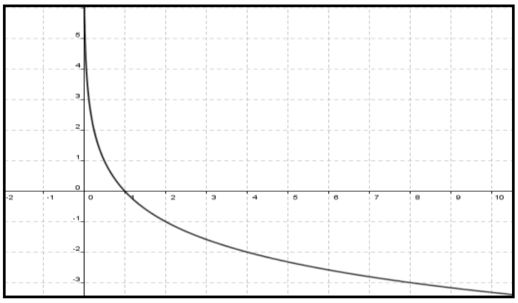


Figura 13. Gráficas de las funciones logarítmicas: $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = \log_{1/2} x$

En este Libro didáctico 1 encontramos que el autor relaciona la definición de logaritmos con contextos reales en una sección que denomina: “Aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica”, presentando situaciones aplicadas como el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva y la magnitud de un sismo, casos que motivan el interés del alumno hacia el tema.

Este libro hace una presentación de las propiedades generales de los logaritmos y de las características de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$, los cuales se muestran en la siguiente tabla:

Propiedades generales de los logaritmos	**Características de la función logarítmica** $f(x) = \log_a x$
P.1: $\log_a 1 = 0,\ a > 0,\ a \neq 0$ P.2: $\log_a a = 1,\ a > 0,\ a \neq 1$ P.3: $\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ a > 0,\ a \neq 1$; por ser una función inyectiva. P.4: $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ y $a > 1$, se cumple: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$; por ser la función logaritmo con a>1 una función creciente. P.5: $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ y $0<a<1$, se cumple: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$; por ser la función logaritmo con 0<a<1 una función decreciente.	➢ Dom(f) = $\Re^+$ ➢ Ran (f) = $\Re$ ➢ La gráfica de la función interseca siempre al eje X en el punto (1,0). ➢ Es una función continua para todo su dominio. ➢ Es una función univalente. ➢ Es una función decreciente si $a \in <0:1>$. ➢ Es una función creciente si a>1.

Tabla 05. Propiedades y características de la función logarítmica en el Libro 1.

Este Libro Didáctico 1 presenta una definición construida a partir de situaciones particulares, lo que permite dar significado al objeto función logarítmica. Además este libro emplea de diversos registros de representación como el registro simbólico, verbal y gráfico para presentar la noción de logaritmo. Esto favorece la comprensión matemática de este objeto, porque según Duval (2006) “la actividad matemática debe disponer de diferentes sistemas de representación semióticas para realizar todas las acciones o procesos que involucra esta actividad”. (p. 18).

L2: El Libro didáctico 2, inicia la presentación didáctica con un diálogo entre un profesor y un alumno, esta se aplica a la intensidad del sonido, el alumno pregunta: “Profesor, ¿existe alguna relación matemática que permita calcular los decibeles de la intensidad del sonido?” y el Profesor responde: “*Sí, la fórmula* $L = 10.\log(I/Io)$, donde: I = intensidad a estudiar, Io = intensidad de referencia.”. Este diálogo actúa como una motivación inicial antes de la presentación de definiciones. Luego el autor propone la definición de logaritmos en el registro verbal cuando propone: *Al exponente **y** al que hay que elevar la base a para obtener un número x se le denomina logaritmo de x en base a*. Para luego proponer la definición en registro simbólico: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$, donde x, $a \in \Re$, $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$. Luego el autor hace una presentación de las propiedades de los logaritmos en forma atomizada, en forma inconexa, con ejemplos con respuestas y ejemplos propuestos. Propone las dos primeras propiedades a las que denomina identidades fundamentales: $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$, luego propone cuatro propiedades: Logaritmo de la unidad: $\log_a 1 = 0$; Logaritmo de un producto: $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$; Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$ y Logaritmo de un cociente: $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$. Y culmina presentando las dos últimas propiedades: Logaritmo de una potencia: $\log_a (x)^n = n.\log_a (x)$ y Logaritmo de una raíz: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}(\log_a x)$. Estas propiedades son planteadas en un solo registro, el registro simbólico, esta limitación podría constituir un obstáculo didáctico para el alumno, sería recomendable emplear el registro verbal para comunicar al alumno lo que la propiedad permite realizar sobre el logaritmo. Por ejemplo la expresión en registro simbólico $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}(\log_a x)$ se puede expresar en registro verbal como: "el logaritmo de la raíz n-ésima de x en base a equivale al logaritmo de x en base a dividido entre n" o también, antes de presentar el registro verbal, pudo hacerse el tratamiento: $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{1/n} = \frac{1}{n}(\log_a x)$ que permite presentar esta propiedad de la raíz como un caso particular del logaritmo de una potencia.

Este libro didáctico, a diferencia del anterior, propone la propiedad del Cambio de base: Si x es un número real positivo y además a y b son números reales positivos diferentes de 1, se cumple: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

También podemos mencionar que ambos libros coinciden en proponer las definiciones para el cologaritmo y el antilogaritmo de un número: El libro didáctico 2, propone que el cologaritmo de un número es igual al logaritmo del inverso de dicho número, es decir, si x > 0, a > 0 y a ≠ 1, entonces: $\text{colog}_a x = \log_a (1/x) = -\log_a (x)$

Así mismo define el antilogaritmo como el número que corresponde a un logaritmo dado. Puede considerarse como la operación inversa de buscar el logaritmo de un número; se denota así: $\text{antilog}_a x = a^x$.

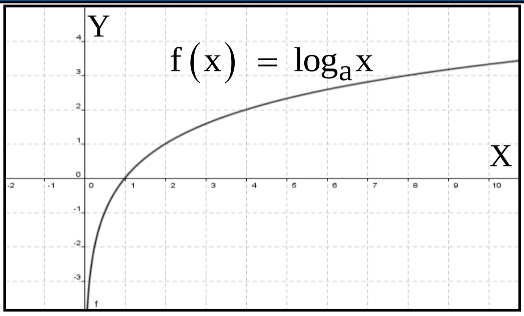
Este libro didáctico 2, también presenta la definición de función logarítmica como: La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Para los números reales **x** y **a**, con x > 0, a > 0 y a ≠ 1, se cumple que: $y = \log_a x \Leftrightarrow y = a^x$. Luego de esta definición en registro verbal y simbólico, presenta la extensión de la función logarítmica como sigue:

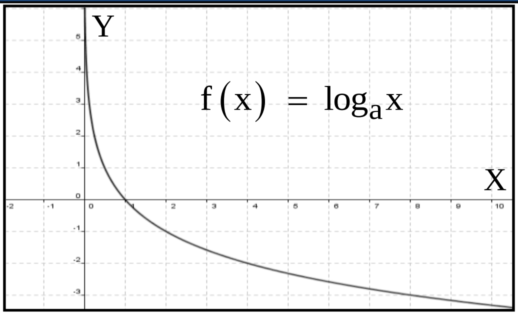
- Para $f(x) = \log_a x$, como x solo toma valores positivos, entonces, el dominio de f(x) es $\Re^+$.
- Para $f(x) = \log_a x$, como y toma valores reales, entonces, el rango de f(x) es $\Re$.

Esta combinación de registro simbólico y registro verbal, favorece a la comprensión de estas propiedades. Así mismo, empleando el registro verbal, el autor considera importante hacer la descripción de la variación de la función $\log_a(x)$, como sigue:

- Cuando a > 1, si los valores de x aumentan (o disminuyen), los valores de la función aumentan (o disminuyen) indefinidamente.
- Cuando 0 < a < 1, si los valores de x aumentan (o disminuyen), los valores de la función disminuyen (o aumentan) indefinidamente.
- Además, los valores de x disminuyen acercándose a cero por la derecha, pues x> 0.

Luego se presentan las características de las funciones logarítmicas, para los dos casos: cuando a es mayor que 1 y cuando 0 < a < 1. En estas características, a diferencia del anterior libro didáctico, se mencionan la intersección de la gráfica de la función con el eje X y la presencia de una asíntota vertical (eje Y), como se indica en la figura siguiente:

<table>
<tr><th></th><th>Cuando a > 1</th><th>Cuando 0 < a < 1</th></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Características</td><td>

- Es una función creciente y continua.
- El dominio de la función es $\Re^{+}$.
- El rango de la función es $\Re$.
- El punto de intersección de la función logarítmica con el eje X es (1,0).
- El eje Y es una asíntota vertical pues la gráfica de la función nunca corta al eje Y.

</td><td>

- Es una función decreciente y continua.
- El dominio de la función es $\Re^{+}$.
- El rango de la función es $\Re$.
- El punto de intersección de la función logarítmica con el eje X es (1,0).
- El eje Y es una asíntota vertical pues la gráfica de la función nunca corta al eje Y.

</td></tr>
</table>

Figura 14. Propiedades de la función logarítmica en el Libro didáctico 2.

Es importante la coordinación entre el registro gráfico y el registro verbal que muestra el autor, para la presentación de estas propiedades, lo que permite al alumno la visualización de este objeto matemático, lo que favorece a la comprensión matemática de esta función.

En este libro didáctico encontramos que el autor presenta una débil relación de la definición de logaritmos con contextos reales; sólo encontramos en una sección dedicada a la resolución de problemas, la presentación de dos aplicaciones de logaritmos: una sobre la intensidad de un sismo y otra sobre la tasa de crecimiento de una población de bacterias.

Concluimos que este Libro Didáctico 2 puede brindar varios recursos didácticos, al mismo tiempo que emplea una diversidad de registros de representación. Sin embargo ofrece una escasez en el uso del registro verbal cuando presenta las propiedades de los logaritmos y una escaza conexión del objeto matemático con la realidad.

4.2.2 Análisis de los tipos de actividades presentadas, según el registro de partida.

En este segundo análisis presentaremos un breve estudio sobre ejercicios y problemas resueltos y propuestos en los libros didácticos, observando el registro de partida en que han sido propuestos. En este análisis solo observaremos su presentación y no su funcionalidad.

L1: El Libro didáctico 1, presenta 42 preguntas sobre logaritmos de los cuales 13 de ellos han sido resueltas por el autor y 29 están propuestas para ser resueltas por los alumnos.

La totalidad de preguntas han sido presentadas en tres registros de partida: registro simbólico, registro gráfico y registro verbal.

L1: REGISTRO: SIMBÓLICO Total: 30 preguntas
➢ Empleando la Definición de Logaritmos: Por ejemplo, determine el logaritmo de 625 en base 5.
➢ Empleando Propiedades de Logaritmos: Por ejemplo, simplifique la expresión: $\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$
➢ Aplicando la Definición de Función Logarítmica: Por ejemplo, grafique la función *f*: $f(x)=\log(2x),\ x\in\langle 0;5]$

Figura 15. Actividades presentadas en el registro simbólico, en el Libro didáctico 1.

L1: REGISTRO: GRÁFICO Total: 1 pregunta

➢ Por ejemplo: ¿Qué gráficas representan a una función logarítmica: $f(x)=\log_a x$?

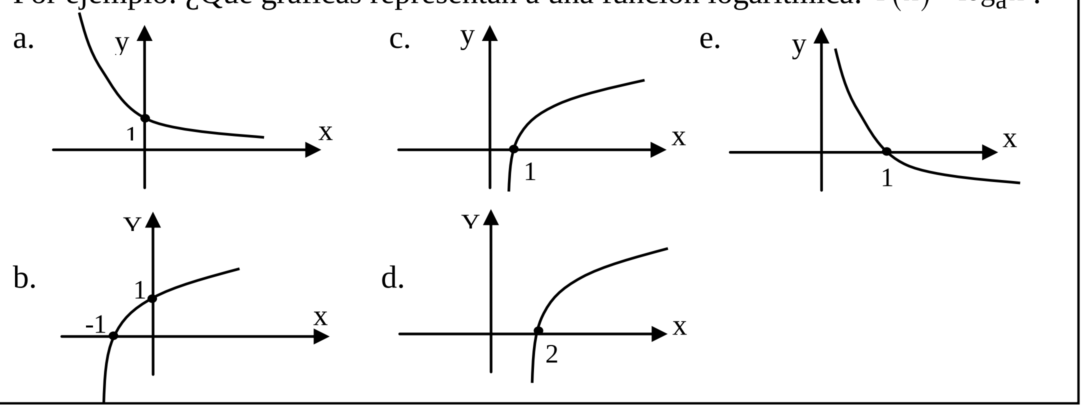


Figura 16. Actividades del Libro didáctico 1 en las que se recurre al registro gráfico.

L1: REGISTRO: VERBAL	Total: 11 preguntas

A manera de ejemplo:

- Empleando la Definición de Función Logarítmica:

Determine si es verdadero o falso, cada uno de los siguientes enunciados:
a. Toda función logarítmica es creciente.
b. Toda función logarítmica es decreciente.
c. La base de toda función logarítmica es mayor que 1.
d. Un número negativo puede ser base de una función logarítmica.
e. La gráfica de toda función logarítmica interseca al eje X.

- Aplicaciones de la Función Logarítmica a distintos contextos:

En 1935, Charles Richter definió la magnitud de un terremoto como:
M= log(I/Io), donde I es la intensidad del terremoto e Io es la intensidad de un terremoto estándar de referencia.
El terremoto de Lima de 1940 tuvo una magnitud de 8,2. ¿Qué tan intenso fue el sismo de Ica de agosto de 2007, si su magnitud fue de 7,9?

Figura 17. Actividades presentadas en el registro verbal, en el Libro didáctico 1.

Los resultados sobre el análisis del registro de partida empleado para presentar los ejercicios y problemas en Libro didáctico 1, proporciona un predominio del registro simbólico, como se muestra en la siguiente tabla:

TIPO de REGISTRO	Total de Ítems	Porcentaje
Registro Simbólico	30	71,42 %
Registro Verbal	11	26,19 %
Registro Gráfico	1	2,38 %

Tabla 06. Número de Actividades según Registro de Partida en el libro didáctico 1.

Estos resultados muestran un alto porcentaje del uso del registro simbólico, porque este es un registro privilegiado en matemáticas que permite mayor comodidad o economía cognitiva para la realización de los tratamientos aplicando las definiciones y propiedades del objeto matemático en estudio. El registro verbal, en un menor porcentaje, es empleado principalmente para enunciar actividades que buscan averiguar si el concepto y las propiedades han sido aprendidos. El menor porcentaje asignado al registro gráfico se debe a que su empleo es principalmente para plantear actividades de conversión, que en casi toda la actividad matemática, son en menor número que los tratamientos.

<u>L2: El libro didáctico 2</u>, presenta 73 preguntas sobre logaritmos de los cuales 15 actividades han sido resueltas por el autor y 58 están propuestas para los alumnos.

Del análisis realizado sobre el registro de partida que presentan estas preguntas y problemas, encontramos que estas preguntas han sido presentadas en tres registros de partida: registro simbólico, registro gráfico y registro verbal.

L2: REGISTRO: SIMBÓLICO	Total: 60 preguntas
➢ <u>Empleando la Definición de Logaritmos</u>: Por ejemplo: Calcule: $\log_4 4^{16}$	
➢ <u>Empleando Propiedades de Logaritmos</u>: Por ejemplo: Simplifique la expresión: $-5(-\log c)-2(-\log b)+4\log_a \sqrt{a^3}-\log(c^5b^2)$	
➢ <u>Aplicando la Definición de Función Logarítmica</u>: Por ejemplo: Esboce la gráfica de la función *f*: $f(x)=\log_4(x),\ x\in[1/5;6>$	

Figura 18. Actividades presentadas en el registro simbólico, en el Libro didáctico 2.

L2: REGISTRO: GRÁFICO	Total: 3 preguntas

➢ Ejemplo: Determine la función logarítmica: $f(x) = \log_a x$ a partir del gráfico mostrado:

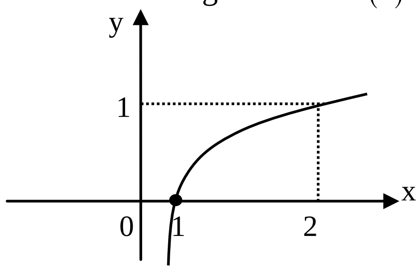


Figura 19. Actividades presentadas en el Registro Gráfico, en el Libro didáctico 2.

L2: REGISTRO: VERBAL	Total: 10 preguntas
A manera de ejemplo: ➢ <u>Empleando la Definición de Función Logarítmica</u>: Completa los espacios en blanco para que las proposiciones sean verdaderas: a. En una función logarítmica, si la base es mayor que 0 pero menor que 1, la función es ………… y si la base es mayor que 1, la función es ……………. b. La función logarítmica es la función …………………. de la función exponencial.	
➢ <u>Aplicaciones de la Función Logarítmica a contextos</u>: La intensidad de un sismo (R) en la escala Richter, se mide con la fórmula: R = log(A/P), donde A = amplitud en micrómetros; P = periodo (en segundos) que dura una oscilación de la superficie terrestre. Calcula la intensidad de un sismo en la escala de Richter, si la amplitud fue de 22 000 micrómetros y su periodo de 0.1 segundos.	

Figura 20. Actividades presentadas en el registro verbal, en el Libro didáctico 2.

Los resultados sobre el análisis del registro de partida empleado para presentar los ejercicios y problemas en Libro Didáctico 2, proporciona un predominio del registro simbólico, lo mismo que en el Libro Didáctico 1, pero porcentualmente mayor, como se muestra en la siguiente tabla:

TIPO de REGISTRO	Total de Actividades	Porcentaje
Registro Simbólico	60	82,19 %
Registro Verbal	10	13,70 %
Registro Gráfico	3	4,11 %

Tabla 07. Número de Actividades según Registro de Partida en el Libro didáctico 2.

Estos resultados muestran un alto porcentaje del uso del registro simbólico, porque al igual que los resultados sobre el Libro didáctico 1, los tratamientos permiten las transformaciones privilegiadas en la actividad matemática. El registro verbal, en un menor porcentaje, es empleado principalmente para presentar actividades en contextos de la realidad. El menor porcentaje asignado al registro gráfico que es empleado principalmente para plantear actividades de conversión, que en casi toda la actividad matemática, son en menor número que los tratamientos.

4.2.3 Análisis de los tipos de transformaciones empleadas en las actividades resueltas y posibles transformaciones en las actividades propuestas.

Este análisis nos permitirá averiguar sobre el número de tratamientos y conversiones que ocurren sobre los registros en los que se plantean las actividades resueltas por el autor del libro didáctico y sobre las actividades propuestas para que el alumno resuelva, con la intención de verificar los aprendizajes adquiridos.

L1: El Libro didáctico 1, presenta 42 ejercicios y problemas en el capítulo denominado Función Logarítmica, de los cuales 13 se encuentran resueltos por el autor aplicando una de las transformaciones de registros: 9 tratamientos y 4 conversiones de registros; de los 29 ejercicios y problemas propuestos para el alumno, se observa que 15 ejercicios se resolverán aplicando tratamientos y 14 ejercicios requieren la conversión de registros. En la tabla mostrada a continuación se presenta los resultados de este análisis:

TRANSFORMACIONES		Total Preguntas	Porcentaje
PREGUNTAS RESUELTAS POR EL AUTOR			
TRATAMIENTOS	Simbólico	9	21,42 %
CONVERSIONES	RP*: Verbal RLL*: Simbólico	3	7,14 %
	RP: Verbal RLL: Simbólico	1	2,38 %
PREGUNTAS PROPUESTAS PARA EL ALUMNO			
TRATAMIENTOS	Simbólico	15	35,71 %
CONVERSIONES	RP: Simbólico RLL: Gráfico	5	11,90 %
	RP: Gráfico RLL: Verbal	1	2,38 %
	RP: Verbal RLL: Simbólico	8	19,05 %

(*) RP = Registro de partida; RLL: Registro de llegada.

Tabla 08. Número de actividades resueltas y propuestas en el Libro didáctico 1.

Los resultados mostrados en la tabla muestran que los tratamientos en este libro solo ocurren en el registro simbólico, esto se debe a que la definición de los logaritmos y sus propiedades se realizan principalmente en dicho registro; para muchos investigadores es el registro preferente en la actividad matemática empleado en la enseñanza tradicional, al respecto Artigue (citado en Ferrari, 2001, p. 20) propone que en este tipo de enseñanza están las "causas de las dificultades cognitivas …, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico y el status infra-matemático asignado al registro gráfico, impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de uno a otro".

En primer lugar haremos un análisis de las transformaciones en las preguntas resueltas, teniendo en cuenta que nuestro objetivo es analizar los problemas de aprendizaje que tienen los alumnos, cuando realizan las transformaciones sobre la función logarítmica, haremos un análisis de las transformaciones empleadas por el autor del libro didáctico 1 en la presentación de la resolución de las actividades resueltas:

1) **<u>Análisis de un tratamiento en el registro simbólico</u>**

En este análisis presentaremos, primero la resolución propuesta por el autor del Libro didáctico 1, luego haremos el análisis de dichas transformaciones a la luz de la teoría de Duval (1995).

➢ ACTIVIDAD RESUELTA POR EL AUTOR DEL LIBRO DIDÁCTICO-1:

Ejemplo 2:

Simplificar la siguiente expresión $\dfrac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\dfrac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$

Resolución:

i. Para simplificar la expresión propuesta, los logaritmos deben estar en la misma base, por lo tanto, podemos elegir trabajar en la base 2 ó en la base 3.

ii. Transformemos los logaritmos de la expresión a la base 2, aplicando la propiedad operativa P_5; es decir:

Según (P_5), $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 2$, es decir: $\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}$,

$$\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\frac{1+\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}}{1-\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}} = \frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\frac{\dfrac{\log_2 3+1}{\log_2 3}}{\dfrac{\log_2 3-1}{\log_2 3}}$$

$$= \frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\frac{\log_2 3+1}{\log_2 3-1}$$

$$= \frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}-\frac{\log_2 3+1}{1-\log_2 3} = 0$$

iii. Luego, al simplificar la expresión obtenemos el valor de "0".

Figura 21. Actividad resuelta por el autor del Libro didáctico 1: Tratamientos.

Luego de observar esta solución del autor del Libro didáctico 1, a continuación planteamos una solución mostrando los distintos tratamientos realizados.

➢ NUESTRO ANÁLISIS DE LAS TRANSFORMACIONES PRODUCIDAS EN ESTA ACTIVIDAD:

Planteamos nuestra resolución de esta actividad aplicando el enfoque de Duval (1995) para luego compararla con la resolución realizada por el autor del libro didáctico:

La expresión: $\dfrac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\dfrac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$ está planteada en el registro simbólico como registro de partida, para obtener la simplificación total de este objeto se realizarán 8 tratamientos, como se indica a continuación:

i) Tratamiento simbólico que modifica la unidad significante $\log_2 3$:

(la flecha indica: T = tratamiento)

$\log_2 3 \xrightarrow{T} \dfrac{\log 3}{\log 2}$ ……….….… (Propiedad del cambio de base)

ii) Tratamiento simbólico que modifica la unidad significante $\log_3 2$:

$$\log_3 2 \xrightarrow{T} \frac{\log 2}{\log 3}$$ …………..…. (Propiedad del cambio de base)

iii) Luego de ambos tratamientos, la expresión: $\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$ se transforma en:

$$\frac{1+\frac{\log 3}{\log 2}}{1-\frac{\log 3}{\log 2}}+\frac{1+\frac{\log 2}{\log 3}}{1-\frac{\log 2}{\log 3}}$$

A continuación, el 1 se transforma en:

$$1 \xrightarrow{T} \frac{\log 2}{\log 2}$$ …………..…. (Propiedad de la unidad)

$$1 \xrightarrow{T} \frac{\log 3}{\log 3}$$ …………..…. (Propiedad de la unidad)

Luego de ambos tratamientos, la expresión queda transformada en:

$$\frac{1+\frac{\log 3}{\log 2}}{1-\frac{\log 3}{\log 2}}+\frac{1+\frac{\log 2}{\log 3}}{1-\frac{\log 2}{\log 3}}=\frac{\frac{\log 2}{\log 2}+\frac{\log 3}{\log 2}}{\frac{\log 2}{\log 2}-\frac{\log 3}{\log 2}}+\frac{\frac{\log 3}{\log 3}+\frac{\log 2}{\log 3}}{\frac{\log 3}{\log 3}-\frac{\log 2}{\log 3}}$$

iv) Ahora se realizan los tratamientos, en los numeradores y en los denominadores, que permiten obtener la suma y diferencia, respectivamente:

$$\frac{\frac{\log 2}{\log 2}+\frac{\log 3}{\log 2}}{\frac{\log 2}{\log 2}-\frac{\log 3}{\log 2}}+\frac{\frac{\log 3}{\log 3}+\frac{\log 2}{\log 3}}{\frac{\log 3}{\log 3}-\frac{\log 2}{\log 3}} \xrightarrow{T} \frac{\frac{\log 2+\log 3}{\log 2}}{\frac{\log 2-\log 3}{\log 2}}+\frac{\frac{\log 3+\log 2}{\log 3}}{\frac{\log 3-\log 2}{\log 3}}$$

v) A continuación se realizan los tratamientos, en los numeradores y denominadores, que se logra al multiplicar por log 2 a ambos miembros del primer término y por log3 a ambos miembros del segundo término de la expresión:

$$\frac{\frac{\log 2+\log 3}{\log 2}}{\frac{\log 2-\log 3}{\log 2}}+\frac{\frac{\log 3+\log 2}{\log 3}}{\frac{\log 3-\log 2}{\log 3}} \xrightarrow{T} \frac{\log 2+\log 3}{\log 2-\log 3}+\frac{\log 3+\log 2}{\log 3-\log 2}$$

Luego de estos seis tratamientos, debemos entender que el objeto inicial es el mismo, sólo se están produciendo transformaciones sobre él, que lo expresan en una representación más simple, pero en el mismo registro simbólico.

vi) Ahora realizamos el tratamiento simbólico que modifica la unidad significante $(\log 3 - \log 2)$ que se presenta en el denominador del segundo término:

$$(\log 3 - \log 2) \xrightarrow{T} -(\log 2 - \log 3) \text{ ……..…. (Propiedad distributiva)}$$

Luego de este tratamiento simbólico, la expresión queda transformada en:

$$\frac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3} + \frac{\log 3 + \log 2}{\log 3 - \log 2} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3} + \frac{\log 3 + \log 2}{-(\log 2 - \log 3)}$$

vii) En este último tratamiento, la expresión queda reducida a cero:

$$\frac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3} + \left(-\frac{\log 3 + \log 2}{\log 2 - \log 3}\right) \xrightarrow{T} 0 \text{ ……… (Adición de cantidades opuestas)}$$

Luego de observar estas dos resoluciones de una misma actividad, se puede apreciar como en el segundo análisis se aplica el enfoque cognitivo de una actividad matemática, en este caso se muestran los distintos tratamientos realizados en el registro simbólico hasta llegar a la solución final. En comparación con la resolución realizada por el autor del libro didáctico donde no aplica la teoría de Duval (1995), es decir no hace un análisis de los procesos que realiza en esta actividad.

2) <u>Análisis de una conversión de registros</u>:

Ahora haremos un segundo análisis, esta vez sobre las transformaciones que ocurren en las conversiones entre registros. En primer lugar presentamos la resolución propuesta por el autor del Libro didáctico 1, luego haremos el análisis de dichas transformaciones a la luz de la teoría de Duval (1995).

- RESOLUCIÓN PROPUESTA POR EL AUTOR DEL LIBRO DIDÁCTICO-1:

Ejemplo:
El terremoto de Lima de 1940 tuvo una magnitud de 8,2. ¿Qué tan intenso fue el sismo de Ica de 15 de agosto de 2007, si su magnitud fue de 7,9?

Resolución:
Consideramos $M_{1940} = 8,2$; $M_{2007} = 7,9$

$$\log\left(\frac{I_{2007}}{I_{1940}}\right) = \log\left(\frac{I_{2007}/I_0}{I_{1940}/I_0}\right) \rightarrow \log\left(\frac{I_{2007}}{I_0}\right) - \log\left(\frac{I_{1940}}{I_0}\right)$$

$$\log\left(\frac{I_{2007}}{I_{1940}}\right) = M_{2007} - M_{1940} \rightarrow \log\left(\frac{I_{2007}}{I_{1940}}\right) = 7,9 - 8,2 = -0,3$$

$$\frac{I_{2007}}{I_{1940}} = 10^{-0,3} \rightarrow \frac{I_{2007}}{I_{1940}} = 0,501$$

Luego, el sismo de 2007 fue aproximadamente la mitad de intenso que el sismo de 1940.

Figura 22. Actividad resuelta por el autor del Libro didáctico 1: conversión de registros

La actividad anterior está presentada en el registro verbal como registro de partida, luego el autor realiza las conversiones hacia el registro simbólico, en el que realiza algunos tratamientos para luego obtener la solución.

- Nuestro análisis de las transformaciones producidas en esta actividad:

A continuación mostramos un ejemplo de una actividad propuesta en el registro verbal:

> En 1935, Charles Richter definió la magnitud de un terremoto como:
>
> $M = \log(I/Io)$, donde I es la intensidad del terremoto e Io es la intensidad de un terremoto estándar de referencia.
>
> El terremoto de Lima de 1940 tuvo una magnitud de 8,2. ¿Qué tan intenso fue el sismo de Ica de agosto de 2007, si su magnitud fue de 7,9?

Realizamos la resolución de esta actividad analizando las transformaciones que se realizan:

i) Realizamos la conversión de la unidad significante en el registro verbal: "magnitud de 8,2" hacia el registro simbólico M_1, así como la unidad significante "magnitud de 7,9" hacia el registro simbólico M_2, como se muestra:

Unidad significante: Magnitud 8,2 $\xrightarrow{C}$ $M_1 = \log\left(\frac{I_1}{Io}\right) \rightarrow 8,2 = \log\left(\frac{I_1}{Io}\right)$

Unidad significante: Magnitud 7,9 $\xrightarrow{C}$ $M_2 = \log\left(\frac{I_1}{Io}\right) \rightarrow 7,9 = \log\left(\frac{I_1}{Io}\right)$

ii) Ahora realizamos dos tratamientos en el registro simbólico, aplicando la definición de logaritmo que permite obtener una expresión exponencial, como se indica:

$8,2 = \log\left(\frac{I_1}{Io}\right) \xrightarrow{T} \frac{I_1}{Io} = 10^{8,2}$ ….. (Por definición de logaritmos)

$7,9 = \log\left(\frac{I_2}{Io}\right) \xrightarrow{T} \frac{I_2}{Io} = 10^{7,9}$ ….. (Por definición de logaritmos)

iii) Luego se realizan tres tratamientos en registro numérico en forma exponencial para obtener la comparación entre intensidades I_1/I_2:

$\frac{I_1}{Io} = 10^{8,2} \xrightarrow{T} I_1 = 10^{8,2}\,Io$ … (Multiplicar por Io, ambos miembros)

$\frac{I_2}{Io} = 10^{7,9} \xrightarrow{T} I_2 = 10^{7,9}\,Io$ …. (Multiplicar por Io, ambos miembros)

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{8,2}.I_o}{10^{7,9}.I_o} \xrightarrow{T} \frac{I_1}{I_2} = 10^{8,2-7,9}I_o$ …. (Exponentes de bases iguales)

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,3} \xrightarrow{T} \frac{I_1}{I_2} = 1{,}9952$$ …. (Uso de la calculadora científica)

<u>L2: El Libro didáctico 2</u>, presenta 73 ejercicios y problemas en el capítulo denominado Función Logaritmo, de los cuales 15 se encuentran resueltos por el autor aplicando una de las transformaciones de registros: 10 tratamientos y 5 conversiones de registros; de los 58 ejercicios y problemas propuestos para el alumno, se observa que 36 se resolverán aplicando tratamientos y 22 requieren la conversión de registros. En la tabla 09 mostrada a continuación se presenta los resultados de este análisis:

TRANSFORMACIONES		Total Preguntas	Porcentaje
PREGUNTAS RESUELTAS por el AUTOR			
TRATAMIENTO	Simbólico	10	13,70 %
CONVERSIONES	RP*: Simbólico RLL*: Gráfico	2	2,74 %
	RP: Gráfico RLL: Verbal	1	1,37 %
	RP: Verbal RLL: Simbólico	1	1,37 %
	RP: Gráfico RLL: Simbólico	1	1,37 %
PREGUNTAS PROPUESTAS para el ALUMNO			
TRATAMIENTO	Simbólico	33	45,20 %
	Gráfico	3	4,11 %
CONVERSIONES	RP: Simbólico RLL: Gráfico	8	10,96 %
	RP: Verbal RLL: Simbólico	7	9,58 %
	RP: Gráfico RLL: Simbólico	3	4,11 %
	RP: Gráfico RLL: Verbal	2	2,74 %
	RP: Simbólico RLL: Verbal	2	2,74 %

(*) RP = Registro de partida; RLL: Registro de llegada.

Tabla 09. Número de actividades resueltas y propuestas en el Libro didáctico 2.

Los resultados de la tabla 09 muestran que los tratamientos que los alumnos deben realizar para resolver las actividades propuestas en este libro no solo ocurren en el registro simbólico como en el libro anterior, sino también se presentan tres tratamientos en el registro gráfico, dos de ellos tienen como registro de partida al gráfico de una función logarítmica f(x) y piden al alumno que trace la función inversa g(x), empleando la simetría respecto a la recta y = x, la actividad 11 propuesta en este libro es:

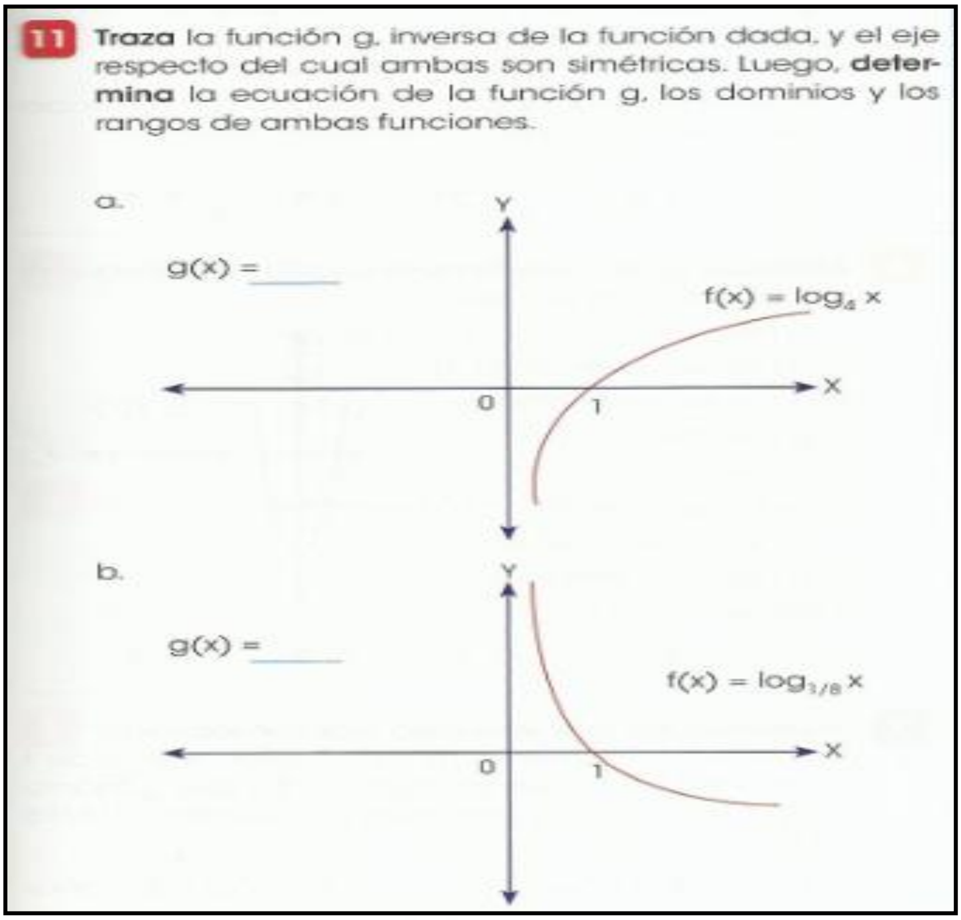


Figura 23. Actividad propuesta en registro gráfico en el libro didáctico 2.

Este tratamiento gráfico muestra la estrecha relación entre la función logarítmica $f(x) = \log_4(x)$ y su función inversa, la función exponencial $g(x) = 4^x$; así como también ocurre entre la función logarítmica $f(x) = \log_{1/8}(x)$ y su función inversa, la función exponencial $g(x) = (1/8)^x$, ambas mostradas en esta actividad. Aquí parece corroborarse la hipótesis de Duval (2009) cuando menciona que “los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de la percepción visual”, dentro de estas tenemos las leyes de la simetría, que nos permiten lograr este tratamiento.

Otro tratamiento gráfico presentado en este libro ocurre por una traslación horizontal de la gráfica $g(x) = \log(x)$ hacia la izquierda para obtener la gráfica $f(x) = \log(x+1)$, como se pide en la actividad 15 planteada a continuación:

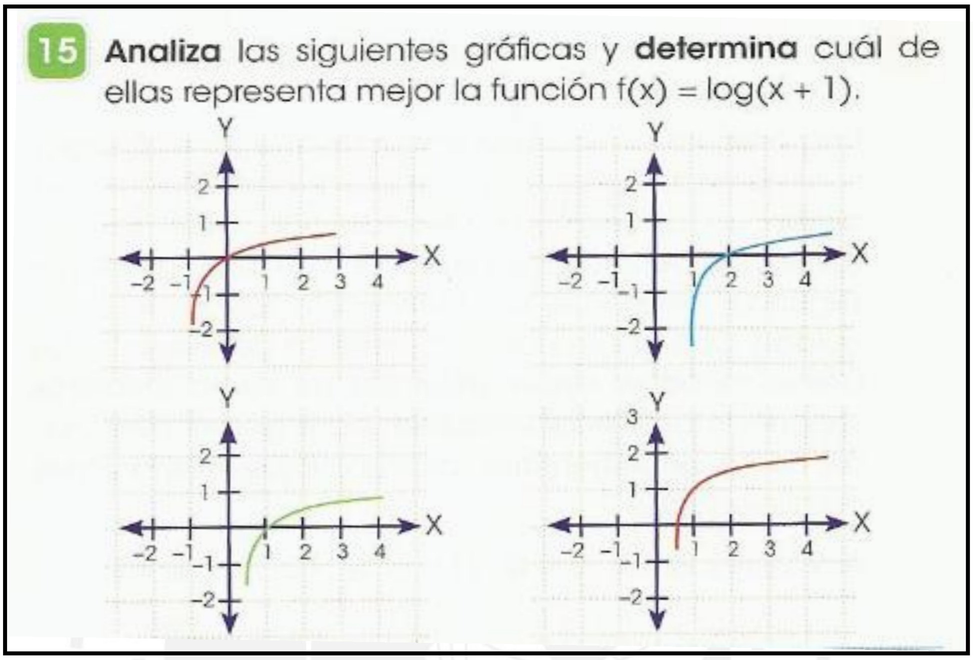

15 **Analiza** las siguientes gráficas y **determina** cuál de ellas representa mejor la función f(x) = log(x + 1).

Figura 24. Actividad propuesta para un tratamiento gráfico en el Libro didáctico 2.

Para obtener la solución de esta actividad propuesta se espera que el alumno realice el siguiente tratamiento gráfico:

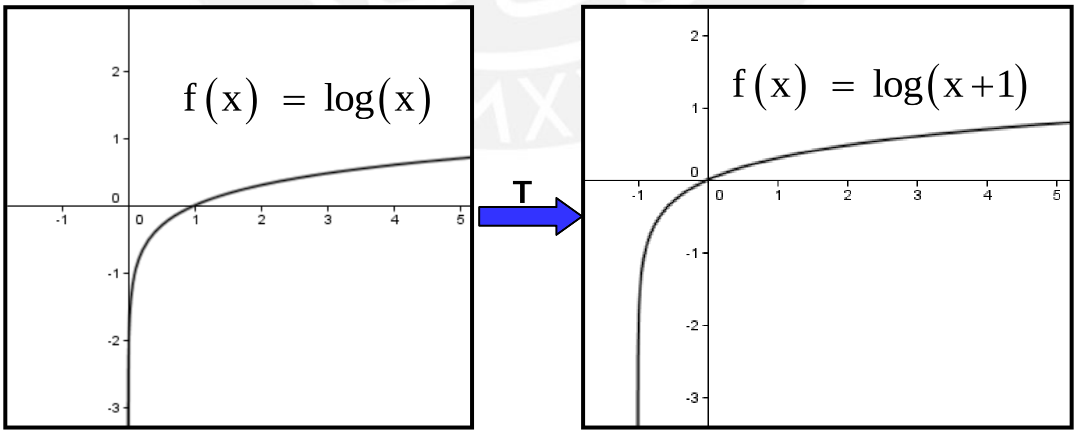


Figura 25. Tratamiento en registro gráfico: traslación de gráfica de función logaritmo.

El alumno ha aprendido que para obtener la gráfica $f(x) = \log(x+1)$ a partir de la gráfica f(x) sólo debe realizar una traslación de la gráfica hacia la izquierda en una unidad. Los valores de las abscisas de los nuevos puntos se ven disminuidos en una unidad.

Sobre esta actividad este libro no realiza actividades que sirvan de modelo para que alumno tome como referencia las transformaciones a realizar. Pareciera que el autor del texto dejase esta responsabilidad al Profesor del curso quien deba guiar al alumno a la realización de estos tratamientos gráficos y sobre otras actividades que han sido planteados en las actividades propuestas para el alumno.

4.2.4 Análisis de los recursos empleados, como el uso de las tablas de logaritmos y/o uso de la calculadora científica.

Este análisis permite observar la utilización de recursos tecnológicos que promueven los libros didácticos, acorde a esta era digital que estamos viviendo, y que permitirán ampliar el campo numérico en las actividades relacionadas a los logaritmos. Sobre el uso de estas herramientas en la enseñanza, diversas investigaciones han brindado aportes positivos como Mirón (2000) que propone que:

> La utilización de calculadoras graficadoras o de computadoras personales en la enseñanza, debido a que permiten acceder a distintos registros de representación por medio de ventanas múltiples, […] Algunas evidencias sugieren que el uso de calculadoras graficadoras ayuda a desarrollar una comprensión más global del concepto de función pues permite visualizar sus gráficas y establecer relaciones entre éstas y las funciones correspondientes. A su vez, los registros gráfico y numérico adquieren un nuevo status, pues los alumnos comprenden que los problemas algebraicos se pueden resolver gráfica o numéricamente tan bien como la manipulación algebraica. (Citado por Ferrari, 2001, p. 21).

A continuación mostraremos los resultados sobre el análisis de recursos empleados en los libros didácticos elegidos.

<u>L1: El libro didáctico 1</u>, cuando propone sus actividades para el alumno como la siguiente:

1. Dadas las funciones logarítmicas f y g cuyas reglas de correspondencia son:
   $f(x) = \log(2x)$; $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$;
   determina los siguientes valores hasta 5 dígitos decimales:
   a. $f(3{,}7)$ b. $g(0{,}2)$

Figura 26. Actividad propuesta que promueve el uso de la calculadora.

El alumno debe hacer uso de la calculadora científica para obtención de los resultados pedidos por el autor de este libro didáctico.

La resolución de la primera actividad requiere de tres tratamientos en el registro simbólico, como se muestra a continuación:

$$f(x) = \log(2x) \xrightarrow{T} f(3{,}7) = \log(2(3.7)) \xrightarrow{T} \log(7.4) \xrightarrow{T} 0.86923$$

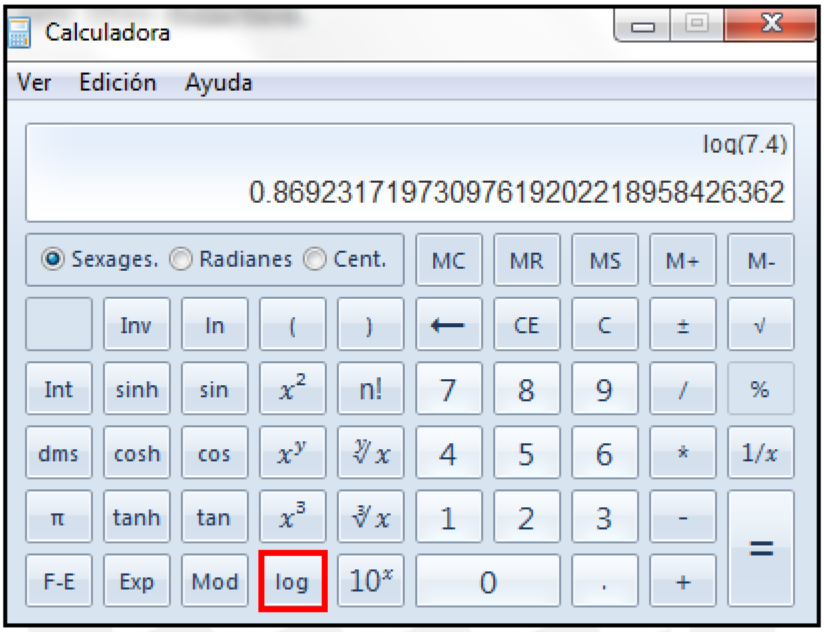
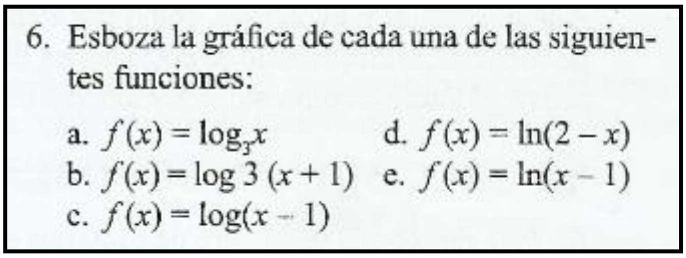


Figura 27. Uso de la calculadora científica, para obtener log (7.4).

Vemos que el uso de la calculadora remplaza a la tabla de logaritmos que se usaba en tiempos que no se disponía de la tecnología actual. Este libro didáctico 1 no menciona ni presenta la tabla de logaritmos decimales de Briggs (1561-1530).

Así mismo, en otra actividad propuesta para el alumno, el autor del libro didáctico, propone el trabajo en equipo y escribe: “Organizados en equipos de cuatro integrantes y al hacer uso de la calculadora, elaboren una tabla de valores para representar gráficamente cada una de las funciones propuestas”. Y propone la siguiente actividad:


6. Esboza la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log_3 x$

b. $f(x) = \log 3\,(x+1)$

c. $f(x) = \log(x-1)$

d. $f(x) = \ln(2-x)$

e. $f(x) = \ln(x-1)$

Figura 28. Actividad para graficar funciones logarítmicas en el Libro didáctico 2.

En esta actividad se requiere la conversión de registros, teniendo como registro de partida al registro simbólico $f(x) = \log_3 x$, para luego elaborar un registro tabular, cuyos valores de *x* y *f(x)* permiten la conversión hacia el registro gráfico y obtener la gráfica de la función. Los valores de f(x) se obtienen con la ayuda de la calculadora científica.

L2: El Libro Didáctico 2, este libro al igual que el Libro didáctico 1, propicia el uso de la calculadora científica para la obtención de valores numéricos de logaritmos en las actividades propuestas para el alumno. Como lo menciona en la actividad siguiente:

AHORA TÚ

Emplea la calculadora y **halla** log 60, ln 60, log 70 y ln 70. Luego, **comprueba** que se cumpla la relación de equivalencia entre ambos.

Figura 29. Actividad para el uso de la calculadora en el Libro didáctico 2.

Antes de proponer esta actividad, en el libro se han propuesto dos equivalencias que relacionan los logaritmos naturales (ln N) con los logaritmos en base 10 (log N):

- $\ln N = 2.3025 \log N$; $\log N = 0.43433 \ln N$

Entonces, en esta actividad propone que el alumno utilice la calculadora y verifique una de las equivalencias propuestas.

En este libro didáctico también se indica cómo obtener en la calculadora, el logaritmo de un número N en una base distinta de 10. Para estos casos propone que se realice como el cociente de dos logaritmos decimales, como se indica en el ejemplo:

- $\log_6 216 = \log 216 \ / \ \log 6$

En otra actividad observamos que el autor del libro didáctico hizo uso de la calculadora para obtener el valor numérico del log 1500 y log 700, como se muestra a continuación:

La expresión $R = \log \frac{I}{I_0}$ nos da la magnitud R de un sismo de intensidad I en la escala de Richter, donde I_0 es la intensidad mínima. **Halla** R si la intensidad es:

a. $1\,500\ I_0$

$R = \log \frac{1500 I_0}{I_0} = \log 1500 = 3{,}17$

b. $700\ I_0$

$R = \log \frac{700 I_0}{I_0} = \log 700 = 2{,}84$

Figura 30. Actividad que empleó la calculadora en el Libro didáctico 2.

Entonces, concluimos que ambos libros didácticos no hacen uso de la tabla de logaritmos decimales, observamos que este uso ha sido remplazado por el uso de la calculadora científica que permite la obtención de logaritmos decimales y logaritmos naturales para todo número N positivo.

4.2.5 A manera de conclusión sobre el análisis de los Libros didácticos.

Nuestro objetivo propuesto en la investigación está centrado en analizar los problemas de aprendizaje que surgen en el estudio de la función logarítmica, observados sobre las transformaciones que ocurren sobre los registros de representación semiótica y en esta parte de la investigación, nuestra observación estuvo centrada en los libros didácticos elegidos para tal fin. Luego del análisis de los libros didácticos, se concluye que:

- Los libros presentan la definición de la función logarítmica en un solo registro. Se emplea de manera predominante el registro simbólico para las definiciones y propiedades. Sin embargo, lo que si resulta positivo es que los ejercicios planteados se representan en diversos registros, como el simbólico, el gráfico y en menor grado el registro verbal.
- Los libros presentan muy poca conexión del objeto matemático con la realidad, con los contextos cotidianos, a pesar de las múltiples aplicaciones que presentan los logaritmos en diversas disciplinas científicas, como en la química para la determinación del pH de una solución. El caso que hemos encontrado en ambos libros es la determinación de la intensidad de los sismos en la escala de Richter.
- Los libros muestran un número reducido de actividades resueltas, en las cuales se muestran a los alumnos diversos tratamientos y conversiones que contribuyen al aprendizaje de la definición de la función logarítmica y de sus propiedades.
- Los libros presentan pocas actividades de conversiones del registro simbólico al registro gráfico y de su conversión inversa, lo que puede causar una dificultad cuando el alumno se enfrente a este tipo de actividades. Recordemos que según la teoría de Duval (2006) estas conversiones son no congruentes, lo que causa una mayor dificultad en el desarrollo de estas transformaciones semióticas, principalmente porque el alumno no ha logrado desarrollar la aprehensión perceptiva que se requiere cuando se va a realizar la conversión inversa: del registro gráfico al registro simbólico.
- Como un aspecto positivo tenemos que los libros promueven el uso de la calculadora científica para la determinación del valor numérico de los logaritmos, de esta manera este

instrumento tecnológico reemplaza al uso de las tablas de logaritmos decimales elaboradas en un principio por Briggs.

- Otro aspecto positivo, es la descripción que hacen los libros de las características de la función logarítmica, como su dominio y rango, el criterio de función creciente y decreciente y otras propiedades que se enuncian en el registro verbal.

4.2.6 Sobre aportes del análisis de libros didácticos para las actividades de la etapa de la experimentación.

Los libros de Matemática, destinados a la Enseñanza Secundaria, tienen como intención contribuir a un mejor trabajo del Profesor en el aula de clases. Nuestro análisis sobre estos libros didácticos tuvo objetivos de responder algunas indagaciones como: ¿Cómo es introducido el concepto de logaritmos? así como: ¿Son empleados diversos registros de representación en la presentación de este concepto? Luego del análisis de los libros didácticos, llegamos a algunas conclusiones que serán tomadas en cuenta en el diseño de las actividades de experimentación, tales como:

- Como los libros analizados presentan la definición de la función logarítmica en un solo registro: el registro simbólico. En las primeras actividades de aplicaremos la definición de logaritmos en este registro.
- Como los libros analizados presentan muy poca conexión del objeto matemático con la realidad; cuando se planteen actividades contextuales que involucren el uso de diversos registros, se espera que el alumno encuentre mayores dificultades, porque así lo prevé una de las hipótesis de Duval (2006) referente a la dificultad cognitiva cuando es necesaria la coordinación de diversos registros.
- Como los libros presentan pocas actividades de conversiones del registro simbólico al registro gráfico y de su conversión inversa, esto puede causar una dificultad cuando el alumno se enfrenta a este tipo de actividades. En el diseño de actividades consideramos esta, como una de las principales dificultades cognitivas presentadas en la teoría de Duval (2006) porque la no congruencia de estas conversiones, es la causa de mayor dificultad en la realización de estas transformaciones semióticas.

- En el diseño también consideramos el aspecto positivo de los libros que promueven el uso de la calculadora científica para la determinación del valor numérico de los logaritmos, porque sabemos que este instrumento tecnológico reemplaza al uso de las tablas de logaritmos decimales elaboradas en un principio por Briggs.

Al culminar este capítulo y luego de centrar nuestra atención sobre los resultados de investigaciones anteriores que analizaron las dificultades en la comprensión de las nociones y propiedades de la función logarítmica, así como el análisis del desarrollo del concepto de logaritmos en los libros didácticos, con estos dos análisis hemos logrado los recursos necesarios para iniciar la etapa de experimentación que sigue a continuación. Los aportes logrados en este capítulo que culmina, nos permitirán el diseño y análisis de las actividades que se aplicarán a los alumnos que participan en la etapa de experimentación de la presente investigación.

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentaremos nuestra propuesta para identificar los problemas en el aprendizaje de la función logarítmica, analizando las transformaciones necesarias que se producen en las representaciones semióticas. Haremos una descripción de los sujetos de investigación y el desarrollo de la parte experimental con la aplicación de una prueba diagnóstica y las actividades que analizaremos previo al experimento.

El diseño de las actividades empleadas en la experimentación de este trabajo, toma en cuenta los resultados obtenidos en el análisis de libros didácticos y los aportes de las investigaciones anteriores.

5.2 PROPUESTA Y OBJETIVOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Las actividades experimentales serán planteadas con la intención de encontrar respuestas a nuestras preguntas de investigación: ¿Qué problemas de aprendizaje se presentan en los alumnos cuando estudian la función logarítmica? ¿Qué transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica se deben realizar cuando se aprende ese tema y cuáles presentan mayores dificultades? Estas actividades surgen como consecuencia de dos análisis previos realizados en este trabajo: el análisis de investigaciones anteriores sobre los problemas de aprendizaje de la función logarítmica y del análisis realizado sobre los libros didácticos. Luego de la realización de estos análisis previos se diseña la prueba diagnóstica, que es nuestro primer instrumento de investigación y nuestro primer encuentro con los alumnos a investigar.

El objetivo de la aplicación de nuestro primer instrumento denominado: la Prueba diagnóstica, es determinar si los alumnos poseen los conocimientos previos como la teoría de exponentes y las nociones básicas sobre los logaritmos. De la evaluación de estos resultados, de los dos análisis previos ya mencionados y de la entrevista del Profesor procedemos al diseño del segundo instrumento de evaluación como son las actividades experimentales aplicadas a sólo seis alumnos que también participaron en la aplicación del primer instrumento.

5.3 SOBRE LOS SUJETOS A INVESTIGAR

En la aplicación de los instrumentos de investigación participaron alumnos del quinto grado de educación secundaria de un colegio privado de Lima.

En el primer instrumento denominado “la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos” participaron 20 alumnos de los distintos niveles de rendimiento académico en el curso de Matemáticas: alumnos del tercio inferior, del tercio intermedio y del tercio superior. Esta clasificación se ha realizado según sus calificaciones del curso de Matemáticas en los grados anteriores. Se espera observar que los alumnos del tercio inferior presenten mayores dificultades en las actividades planteadas y los alumnos del tercio superior tengan mayor éxito frente a los problemas posibles en la resolución de las actividades propuestas en el experimento.

En el segundo instrumento de investigación se aplicó sobre un grupo reducido de alumnos que también había participado en el primer experimento. Los alumnos conformaron tres duplas (6 alumnos) para ser observados por igual número de profesores bajo la supervisión del Profesor-investigador.

5.4 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE CONOCIMIENTOS PREVIOS.

La prueba diagnóstica sobre conocimientos requeridos para el desarrollo de las actividades del segundo experimento, tratarán básicamente sobre las propiedades de los exponentes, la determinación del dominio y rango de funciones a partir de sus representaciones gráficas y de la obtención del valor numérico $f(x_o)$ para $x_o \in \Re$, dada una función $f(x)$ en registro simbólico. Se aplicará en el primer encuentro con los alumnos participantes de esta investigación. Esta prueba tendrá un tiempo de duración de 45 minutos.

5.4.1 Ítems propuestos en la Prueba diagnóstica e Identificación de posibles dificultades

En este primer instrumento de investigación, se platearon nueve ítems, de los cuales los cinco primeros fueron propuestos para que los alumnos los resuelvan sin el uso de calculadora luego una segunda parte de esta prueba contenía cuatro ítems donde los alumnos podían hacer uso de la calculadora.

A continuación se presenta cada ítem de esta prueba diagnóstica acompañado de una posible solución y de las dificultades esperadas:

Parte I: En las siguientes preguntas los alumnos no podían hacer uso de una calculadora.

01. Resolver en $\Re$: $9^x = 729$

POSIBLE SOLUCIÓN: Se espera que el alumno realice la conversión del registro numérico entero al registro numérico exponencial del numeral 729: $729 = 3^6 = 9^3$, luego que aplique la propiedad de bases iguales: $9^x = 9^3$, y que concluya que: x = 3.

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno con deficiente dominio de las representaciones de números en el registro numérico exponencial, tendrá un fracaso en esta resolución debido a alguna de las posibles dificultades:

D1: Que el numeral 729 no lo pueda convertir a otro numeral exponencial en base 3 o base 9, debido a que no realiza la descomposición del numeral en factores primos.

D2: Que el numeral $729 = 3x3x3x3x3x3 = 3^6$ no pueda ser transformado por un tratamiento de 3^6 para obtener 9^3.

D3: Que el alumno no aplique la propiedad exponencial de las bases iguales.

Las dificultades D1 y D2 son dificultades de tipo semiótica, debido al uso de las representaciones y la dificultad D3 es de tipo conceptual, por desconocimiento de las propiedades del objeto matemático: la función exponencial.

02. Calcule sin usar calculadora:

a) $\log_5 625$

POSIBLE SOLUCIÓN: Se espera que el alumno realice la conversión del registro numérico entero al registro numérico exponencial del numeral 625: 625 = 5^4, es decir: $\log_5 625 = \log_5 5^4$. Luego, se espera que el alumno realice un tratamiento aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia: $\log_5 5^4 = 4.\log_5 5$ y finalmente realice un tratamiento aplicando la propiedad de logaritmo de la base: $4.\log_5 5 = 4.(1) = 4$

Otro camino de solución puede ser, que el alumno aplique la definición de logaritmos:

$\log_5 625 = x$; si realiza este procedimiento, entonces se trataría de una conversión del registro simbólico de logaritmos al registro simbólico exponencial: $5^x = 625$, luego el alumno realiza otra conversión del registro numérico entero al registro numérico exponencial del número 625: $5^x = 5^4$ y finalmente aplicando la propiedad de bases iguales realiza el tratamiento que conduce a la solución esperada: x = 4.

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno con deficiente dominio de las representaciones de números en el registro exponencial, tendrá un fracaso en esta resolución debido a alguna de las posibles dificultades:

D1: Que el numeral 625 no lo convierta a otro numeral en base 5, realizando la descomposición en sus factores primos: $625 = 5x5x5x5 = 5^4$.

D2: Que el alumno no aplique la propiedad exponencial de las bases iguales.

D3: Que no aplique la definición y propiedades de los logaritmos.

La dificultad D1 es una dificultad de tipo semiótica, debido al uso de las representaciones y las dificultades D2 y D3 son de tipo conceptual, por desconocimiento de las propiedades de la función exponencial y de logaritmos.

b) $\log_{27}(1/3)$

POSIBLE SOLUCIÓN: Se espera que el alumno realice la conversión del registro simbólico de logaritmos hacia el registro numérico exponencial aplicando la definición de logaritmos: $\log_{27}(1/3) = x \rightarrow 1/3 = 27^x$, luego realice la conversión del registro numérico fraccionario al registro numérico exponencial del numeral 1/3: $1/3 = 3^{-1}$ y del numeral $27 = 3^3$, con estas dos conversiones de registros, la expresión queda transformada a: $3^{-1} = (3^3)^x$. Luego se espera que el alumno realice el tratamiento del producto de exponentes: $3^{-1} = 3^{3x}$, finalmente aplicando la propiedad de bases iguales realice el tratamiento que conduce a la solución esperada: $-1 = 3x$ y por un tratamiento final obtenga: $x = -1/3$.

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno con deficiente dominio de las representaciones de números en el registro exponencial y conocimiento de la definición de logaritmos, tendrá un fracaso en esta resolución debido a alguna de las posibles dificultades:

D1: Que el alumno no aplique la definición de los logaritmos para realizar la primera conversión hacia el registro exponencial: $\log_{27}(1/3) = x \rightarrow 1/3 = 27^x$

D2: Que los numerales 1/3 y 27 no puedan ser convertidos al registro numérico exponencial: $1/3 = 3^{-1}$ y $27 = 3^3$.

D3: Que no aplique la propiedad del producto de exponentes en la expresión exponencial.

D4: Que no aplique la propiedad de bases iguales en la expresión exponencial.

Las dificultades D1, D3 y D4 son dificultades de tipo conceptual, debido desconocimiento del objeto matemático y la dificultad D2 es de tipo semiótica por la realización de la conversión congruente.

c) log 0.0001

POSIBLE SOLUCIÓN: Se espera que el alumno realice la conversión del registro simbólico de logaritmos hacia el registro numérico exponencial aplicando la definición de logaritmos: $\log 0.0001 = x \rightarrow 0.0001 = 10^x$, luego realice la conversión del registro numérico decimal al registro numérico exponencial del numeral 0.0001: $0.0001 = 10^{-4}$, con esta conversión de registros, la expresión queda transformada a: $10^{-4} = 10^x$ y finalmente aplicando la propiedad de bases iguales realice el tratamiento que conduce a la solución esperada: x = -4.

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno tendrá un fracaso en esta resolución debido a alguna de las posibles dificultades:

D1: Que el alumno no aplique la representación de los logaritmos decimales, porque se omite la escritura de esta base 10: $\log 0.0001 = \log_{10} 0.0001$

D2: Que no aplique la definición de los logaritmos para realizar la primera conversión hacia el registro exponencial: $\log 0.0001 = x \rightarrow 0.0001 = 10^x$

D3: Que el numeral 0.0001 no pueda ser convertido al registro numérico exponencial: $0.0001 = 10^{-4}$.

D4: Que no aplique la propiedad de bases iguales en la expresión exponencial.

Las dificultades D1, D2 y D4 son dificultades de tipo conceptual, debido al desconocimiento del objeto matemático y la dificultad D3 es de tipo semiótica por la realización de la conversión congruente.

03. Use la definición de la función logarítmica para calcular "x":

a) $\mathbf{\log_3 x = 4}$

POSIBLE SOLUCIÓN: Se espera que el alumno realice la conversión del registro simbólico de logaritmos hacia el registro numérico exponencial aplicando la definición de logaritmos: $\log_3 x = 4 \rightarrow x = 3^4$, luego realice la conversión del registro numérico exponencial al registro numérico entero del numeral 3^4: $3^4 = 81$, por esta conversión de registros, obtenga la solución: x = 81.

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno no obtendrá la solución debido a alguna de las posibles dificultades:

D1: Que el alumno no aplique la definición de los logaritmos para realizar la conversión hacia el registro exponencial: $\log_3 x = 4 \rightarrow x = 3^4$

D2: Que el numeral 3^4 no pueda ser convertido al registro numérico natural: $3^4 = 81$.

La dificultad D1 es una dificultad de tipo conceptual, debido al desconocimiento del objeto matemático y la dificultad D2 es de tipo semiótica, por la no realización de la conversión congruente.

b) $\mathbf{\log_x 6 = 1/2}$

POSIBLE SOLUCIÓN: Se espera que el alumno realice la conversión del registro simbólico de logaritmos hacia el registro numérico exponencial aplicando la definición de logaritmos: $\log_x 6 = 1/2 \rightarrow 6 = x^{1/2}$, luego realice el tratamiento de elevar al cuadrado a ambos miembros de la ecuación: $6^2 = (x^{1/2})^2$ y finalmente realizando tratamientos en cada miembro de la ecuación obtenga la solución: x = 36.

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno no obtendrá la solución debido a alguna de las posibles dificultades:

D1: Que el alumno no aplique la definición de los logaritmos para realizar los tratamientos en el registro simbólico:

$$\log_x 6 = 1/2 \rightarrow 6 = x^{1/2}$$

D2: Que el alumno no eleve al cuadrado ambos miembros de la ecuación, lo que impediría que despeje la incógnita *x*. Esto evidenciaría dificultades en el manejo de las propiedades de las ecuaciones exponenciales, lo que corresponde a un tratamiento en el registro simbólico.

La dificultad D1 es una dificultad de tipo conceptual, debido al desconocimiento del objeto matemático y la dificultad D2 es de tipo semiótica, por la realización de los tratamientos que permiten transformar el exponente 1/2.

04. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halle:

$$\log_2 40 + \log_2 25 - \log_2 20$$

POSIBLE SOLUCIÓN: En esta actividad se trata de averiguar si el alumno ha aprendido las siguientes propiedades de logaritmos:

P.1 Propiedad del Producto de Números: $\log_b M.N = \log_b M + \log_b N$

P.2 Propiedad del Cociente de Números: $\log_b M.N = \log_b M - \log_b N$

Aplicando la primera propiedad, realizamos el primer tratamiento en el registro simbólico:

$$\log_2 40 + \log_2 25 - \log_2 20 = \log_2 40x25 - \log_2 20$$

Luego multiplicamos 40x25 = 1000 que corresponde de un tratamiento en el registro simbólico:

$$\log_2 40x25 - \log_2 20 = \log_2 1000 - \log_2 20$$

Aplicando la segunda propiedad, se transforma en un solo logaritmo, esto corresponde a un tratamiento en el registro simbólico:

$$\log_2 1000 - \log_2 20 = \log_2 1000/20$$

Luego obtenemos el cociente de 1000/20 que corresponde a un tratamiento en el registro numérico: $\log_2 1000/20 = \log_2 50$

Como el alumno no dispone de calculadora para esta pregunta, su respuesta es la obtenida en este último tratamiento: $\log_2 50$

POSIBLES DIFICULTADES: En esta actividad se espera que las posibles dificultades sean del tipo conceptual por el desconocimiento de las propiedades de logaritmos que son las reglas de juego en ese sistema de representación. Estas propiedades se presentan a continuación:

D1: Que no realice el primer tratamiento, aplicando la primera propiedad.

P.1 Propiedad del Producto de Números: $\log_b M.N = \log_b M + \log_b N$

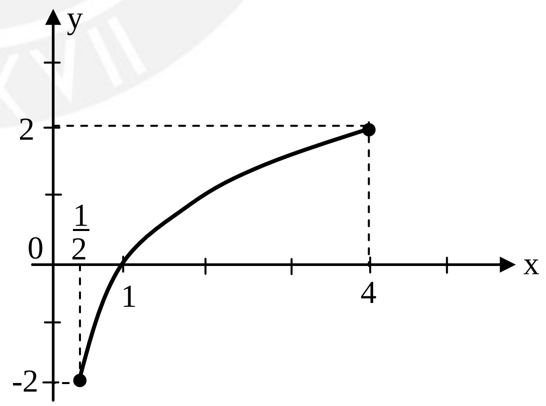
D2: Que no realice el segundo tratamiento aplicando la segunda propiedad.

P.2 Propiedad del Cociente de Números: $\log_b M/N = \log_b M - \log_b N$

D3: Que los logaritmos en base 2 sean tratados con las mismas propiedades de los logaritmos decimales.

05. Indique el dominio y rango de las funciones representadas en las gráficas:

a) Sea la gráfica de la función f(x):



POSIBLE SOLUCIÓN: Esta pregunta evalúa la aprehensión perceptiva del alumno sobre un registro gráfico. Es determinante la visualización de las unidades significantes que componen esta representación en el gráfico cartesiano: como los ejes de coordenadas, el trazo de la gráfica y los valores numéricos registrados en cada eje, correspondientes a los extremos de la curva representada. Se espera que el alumno haya aprendido la definición de dominio de una función, como el conjunto de valores de *x*, luego debe observar los valores en el eje *x* e indicar el dominio como: $\text{Dom}(f)=[1/2\,;\,4]$. Para hallar el rango, el alumno debe saber que este es el conjunto de valores de *y* que toma la función dada, luego debe observar los valores en el eje *y* e indicar el rango: $\text{Ran}(f) = [-2\,;\,2]$.

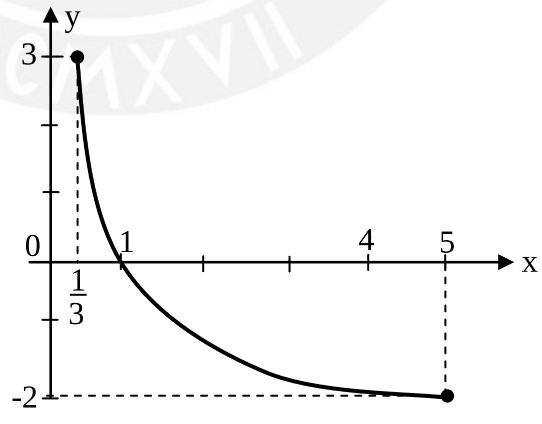
POSIBLES DIFICULTADES: Debido a que estamos frente a un registro gráfico (registro multifuncional) que requiere que el alumno haya desarrollado una aprehensión perceptiva, es posible que se presenten dificultades muy particulares que señalamos a continuación:

D1: Que el alumno no aplique la definición de dominio o rango de una función.

D2: Que el alumno no identifique la extensión de la representación en el gráfico cartesiano, porque no ha desarrollado la aprehensión perceptiva para determinar los valores de *x* o valores de *y* que correspondan a la gráfica de la función.

D3: Que el alumno tenga dificultades para escribir una representación numérica que indique la extensión de la gráfica, porque puede tener problemas para designar intervalos de números reales con el uso de corchetes o llaves.

b) Sea la gráfica de la función g(x):



POSIBLE SOLUCIÓN: Esta pregunta al igual que anterior evalúa la aprehensión perceptiva del alumno sobre un registro gráfico. Es determinante la visualización de las unidades significantes que componen esta representación en el gráfico cartesiano: como los ejes de coordenadas, el trazo de la gráfica y los valores numéricos registrados en cada eje, correspondientes a los extremos de la curva representada. Se espera que el alumno haya aprendido la definición de dominio de una función, como el conjunto de valores de *x*, luego debe observar los valores en el eje *x* e indicar el dominio como: $\text{Dom}(f) = [1/3\ ;\ 5]$. Para hallar el rango, el alumno debe saber que este es el conjunto de valores de *y* que toma la función dada, luego debe observar los valores en el eje *y* e indicar el rango: $\text{Ran}(f) = [-2\ ;\ 3]$.

POSIBLES DIFICULTADES: Debido a que estamos frente a un registro gráfico (registro multifuncional) que requiere que el alumno haya desarrollado una aprehensión perceptiva, es posible que se presenten dificultades muy particulares que señalamos a continuación:

D1: Que el alumno no aplique la definición de dominio o rango de una función.

D2: Que el alumno no identifique la extensión de la representación en el gráfico cartesiano, porque no ha desarrollado la aprehensión perceptiva para determinar los valores de *x* o valores de *y* que correspondan a la gráfica de la función.

D3: Que el alumno tenga dificultades para escribir una representación numérica que indique la extensión de la gráfica, porque puede tener problemas para designar intervalos de números reales con el uso de corchetes o llaves.

D4: Debido a que es una función decreciente, es posible que la representación de los intervalos para el dominio y rango tengan los valores invertidos.

<u>Parte II</u>: En las siguientes preguntas los alumnos podían hacer uso de una calculadora

Debemos citar que estas preguntas no intentan evaluar el manejo de la calculadora por parte de los alumnos, sino mostrar al alumno que este instrumento tecnológico puede brindarnos valores de logaritmos de números reales positivos que en tiempos anteriores se obtenían con las tablas de Briggs. En estas preguntas no interviene el enfoque cognitivo de las dificultades en la actividad matemática propuesta por Duval (2006). Debemos resaltar que en adelante, cuando el alumno se enfrente en otras disciplinas científicas como la física, química u otras, él accederá a los valores de logaritmos que necesite a través de la calculadora científica.

06. Resolver en $\Re$: $9^x = 20$

POSIBLE SOLUCIÓN: En esta actividad, el alumno se enfrenta a una expresión exponencial que no puede resolverse con la propiedad exponencial de las bases iguales, porque no es posible expresar el numeral 20 en un exponencial de base 9. Se debe realizar aplicar logaritmos a ambos miembros de la expresión, se trata de un tratamiento en el registro simbólico. Se aplica la propiedad:

P1: Si: M = N, entonces: $\log_b M = \log_b N$

Como: $9^x = 20 \rightarrow \log(9^x) = \log(20)$

Este nuevo registro simbólico ofrece una mayor "economía" cognitiva que permite realizar tratamientos más sencillos empleando las propiedades de los logaritmos:

$$\log(9^x) = \log(20) \rightarrow x.\log(9) = \log(20) \rightarrow x = \log(20) \,/\, \log(9)$$

Luego el alumno hace uso de la calculadora para obtener el valor de *x* en el registro numérico, obtiene: $\log 20 = 1.30103$ y $\log 9 = 0.95424$

$$x = \log(20) \,/\, \log(9) \rightarrow x = (1.30103)/(0.95424) \rightarrow x = 1{,}3634$$

POSIBLES DIFICULTADES: Esta actividad requiere de un cambio de registro de una representación exponencial hacia una representación logarítmica, es posible que esta sea la dificultad determinante que el alumno haya encontrado. También es posible que se hayan presentado otras dificultades que a continuación señalamos:

D1: Que el alumno no realice el tratamiento en el registro simbólico, aplicando la propiedad:

P1: Si: M = N, entonces: $\log_b M = \log_b N$

D2: Que el alumno no aplique la propiedad del logaritmo de una potencia:

P2: $\log_b N^a = a.\log_b N$

D3: Que el alumno no pueda usar o haga mal uso de la calculadora para hallar valores numéricos de logaritmos.

07. Use calculadora para dar el valor de los logaritmos, con una aproximación de cuatro decimales.

a) log (2/3)

POSIBLE SOLUCIÓN: El uso de la calculadora, reemplaza al uso de las tablas de logaritmos decimales creadas por Briggs. El alumno debe conocer el orden en las instrucciones para manipular este instrumento tecnológico. Para el caso del $\log\left(2/3\right)$ debe obtener el valor de $2/3 = 0.6666\ldots$, luego teniendo este valor en la pantalla de la calculadora, debe oprimir la tecla de $\left[\log\right]$ y obtendrá el valor de: -0.1761

POSIBLES DIFICULTADES: El alumno se enfrenta a conocimientos relativos al manejo del artefacto electrónico para la obtención de valores de logaritmos que anteriormente se presentaban en tablas. Las posibles dificultades que se presenten dependerán del manejo de la calculadora y de la secuencia correcta en la que deben usarse los botones de la calculadora.

b) $\log_9$ (3/2)

POSIBLE SOLUCIÓN: Como algunas calculadoras no disponen de teclas para obtener logaritmos de otras bases distintas a los logaritmos decimales [log] o logaritmos naturales [ln], el alumno debe conocer la propiedad del cambio de base de un logaritmo de base *b* a logaritmo de base decimal:

P1: $$\log_b N = \frac{\log N}{\log b}$$

Luego: $$\log_9(3/2) = \frac{\log(3/2)}{\log 9}$$

Entonces, en la calculadora debemos obtener el log (3/2) y dividirlo entre el log 9:

$$\log\left(3/2\right) = 0.1761 \quad \text{y} \quad \log 9 = 0.9543$$

Luego: $\log_9\left(3/2\right) = 0.1761 \;/\; 0.9543 = 0.1845$

POSIBLES DIFICULTADES: La principal dificultad a presentarse en este caso es que el alumno no aplique la propiedad del cambio de base. Otra dificultad sería obtener en la calculadora un cociente de logaritmos.

08. ¿Cuál de los dos números es mayor: 10^3 o 3^{10}? (Dato: $\log 3 = 0.47712$)

Debemos señalar que esta actividad, el alumno la debe realizar sin el uso de la calculadora, teniendo como dato a emplear el valor de log 3 = 0,47712.

POSIBLE SOLUCIÓN: El método de solución es calculando los logaritmos de dichos números:

$$10^3 \to \log 10^3 \to 3.\log 10 = 3$$

$$3^{10} \to \log 3^{10} = 10.\log 3 = 10.(0.47712) = 4.7712$$

Se concluye que: como $\log 3^{10} > \log 10^3$; entonces: $3^{10} > 10^3$.

Si al alumno se le permitiera el uso de la calculadora, podría convertir estos números exponenciales a números enteros, así compararlos y determinar el mayor de ellos. Los cálculos realizados con la calculadora dan los resultados siguientes:

$$10^3 = 1000 \quad y \quad 3^{10} = 59049 \quad \to \quad 3^{10} > 10^3.$$

Para obtener el valor de 3^{10} oprimimos las teclas: [3] luego [x^y] luego [10].

POSIBLES DIFICULTADES: para la solución sin usar calculadora, que es el método de solución pedido para este caso, nos permite mostrar una de las utilidades de la función logarítmica de base 10, basada en la propiedad de una función creciente:

Si la función es creciente: Si $\log M > \log N \to M > N.$

La dificultad está en que el alumno no conozca esta propiedad y que el alumno no realice la conversión de registro numérico exponencial al registro simbólico de logaritmos.

09. Un virus epidémico dobla el número de víctimas a cada año. Si hoy existen 400 infectados, determine:

a) El número de infectados después de un año: ……………………………………..

POSIBLE SOLUCIÓN: Como cada año duplica el número de infectados, después del primer año habrá: 400x2 = 800 infectados.

POSIBLES DIFICULTADES: Una posible dificultad está en que el problema se plantea en el registro verbal y el alumno debe lograr la aprehensión lingüística de la unidad significante "dobla el número de víctimas", esta unidad convertida al registro numérico equivale a "multiplica por 2". Entonces, el alumno debe realizar una conversión semiótica del registro verbal o lingüístico al registro simbólico o numérico.

b) El número de infectados después de dos años:……………………………………

POSIBLE SOLUCIÓN: Como duplica cada año, luego de dos años habrá duplicado dos veces: $400x2x2 = 1600$ infectados. Se va generando una progresión geométrica de razón 2.

POSIBLES DIFICULTADES: Que el alumno no entienda que se duplica dos veces, podría entender que se suma dos veces: (400 + 400). Es posible que la dificultad persista debido a la "traducción" del registro verbal hacia el registro numérico.

c) El número de infectados después de cinco años:…………………………………

POSIBLE SOLUCIÓN: Como duplica cada año, en cinco años, habrá duplicado cinco veces: $400x2x2x2x2x2 = 400x2^5 = 400x32 = 12\ 800$ infectados.

POSIBLES DIFICULTADES: Si el alumno no ha tenido éxito en las primeras actividades a y b, es posible que la dificultad se mantenga en esta actividad, que también requiere que el alumno haya convertido la unidad significante "duplica" en la unidad significante "por 2".

5.4.2 Resultados totales de la Prueba diagnóstica

La aplicación de esta prueba se realiza en una de las instituciones educativas elegidas para este fin y se contó con la participación entusiasta de 20 alumnos. En la tabla mostrada a continuación se presentan los resultados totales indicando la cantidad de alumnos que acertaron en cada ítem propuesto, así como la cantidad de alumnos que tuvieron dificultades. Observe que el ítem 3-a fue resuelto de manera acertada por todos los alumnos y los ítems 5-a y 7-b presentaron mayor dificultad para los alumnos participantes:

ACTIVIDAD PROPUESTA	ALUMNOS QUE ACERTARON	TUVIERON DIFICULTAD	PORCENTAJE DE ACIERTOS
Pregunta 1	18	2	90%
Pregunta 2-a	18	2	90%
Pregunta 2-b	18	2	90%
Pregunta 2-c	15	5	75%
Pregunta 3-a	20	0	100%
Pregunta 3-b	19	1	95%
Pregunta 4	13	7	65%
Pregunta 5-a: Dominio	12	8	60%
Pregunta 5-a: Rango	9	11	45%
Pregunta 5-b: Dominio	13	7	65%
Pregunta 5-b: Rango	14	6	70%
Pregunta 6	15	5	75%
Pregunta 7-a	16	4	80%
Pregunta 7-b	10	10	50%
Pregunta 8	17	3	85%
Pregunta 9-a	15	5	75%
Pregunta 9-b	15	5	75%
Pregunta 9-c	13	7	65%
PROMEDIO DE ACIERTOS:			75%

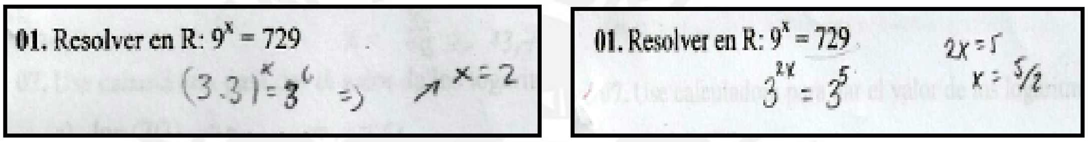
Tabla 10. Resultados de la Prueba diagnóstica sobre conocimientos previos.

5.4.3 Análisis de las dificultades encontradas en la aplicación de la Prueba diagnóstica

Haremos un análisis de las dificultades recurrentes encontradas por los alumnos en cada una de las actividades propuestas

01. Resolver en R: $9^x = 729$

DIFICULTADES ENCONTRADAS: En esta actividad, la mayoría de alumnos procedió según se esperaba; sólo dos alumnos obtuvieron respuestas incorrectas, como x=2 y x=5/2. Estos alumnos realizaron tratamientos incorrectos en el registro numérico con exponentes, como se muestra a continuación:


01. Resolver en R: $9^x = 729$

$(3.3)^x = 3^6 \Rightarrow \quad x = 2$

01. Resolver en R: $9^x = 729$

$3^{2x} = 3^5 \quad 2x = 5 \quad x = 5/2$

Figura 31. Dificultades encontradas en la actividad 1 de la Prueba diagnóstica.

El primer error se debe a un tratamiento exponencial incorrecto, el alumno debió obtener: $3^{2x} = 3^6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3.$

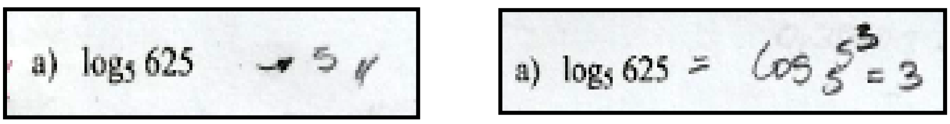
El segundo alumno tuvo la dificultad D2 que habíamos previsto.

D2: Que el numeral $729 = 3x3x3x3x3x3 = 3^6$ no pueda ser transformado por un tratamiento para obtener 9^3.

02. Calcule sin usar calculadora:

a) $\log_5 625$

DIFICULTADES ENCONTRADAS: En esta actividad la mayoría de los alumnos resolvió la actividad en forma correcta, sólo dos alumnos tuvieron dificultades debido a tratamientos incorrectos en el registro numérico con exponentes, como se muestran a continuación:


a) $\log_5 625 \rightarrow 5$

a) $\log_5 625 = \log_5 5^3 = 3$

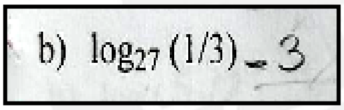
Figura 32: Dificultades encontradas en la actividad 2-a de la Prueba diagnóstica.

El primer alumno hace un tratamiento incorrecto sobre el numeral 625, a pesar que no lo registra, él asume que: $625 = 5^5$, por esto: $\log_5 625 = 5$. El segundo alumno sí registra el tratamiento incorrecto que realiza con el numeral 625, él afirma que: $625 = 5^3$. Ambas dificultades estaban previstas en nuestro análisis preliminar y corresponden a la dificultad D1:

D1: Que el numeral 625 no lo convierta a otro numeral en base 5, realizando la descomposición en sus factores primos, puesto que: $625 = 5x5x5x5 = 5^4$.

b) $\log_{27}$ (1/3)

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Esta actividad fue realizada por la mayoría de alumnos según lo esperado; sólo dos alumnos tuvieron dificultades debido a tratamientos incorrectos ocasionados porque el numeral (1/3) expresado en registro numérico fraccionario ofrece mayor dificultad para expresarlo en forma exponencial que un numeral entero. Las respuestas incorrectas sobre esta actividad fueron:



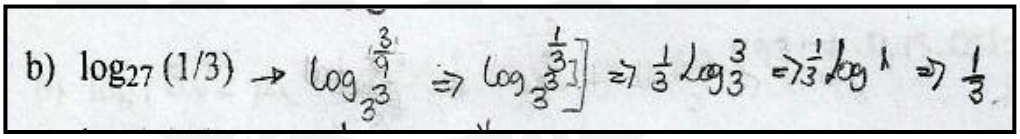


Figura 33. Dificultades encontradas en la actividad 2-b de la Prueba diagnóstica.

El primer alumno presenta la respuesta incorrecta (-3), aunque no muestra los procedimientos realizados; en cambio el segundo alumno muestra un tratamiento incorrecto cuando considera a 1/3 como exponente y aplica la propiedad de logaritmo de una potencia. No se había considerado esta situación en el análisis preliminar de dificultades.

c) log 0.0001

DIFICULTADES ENCONTRADAS: El registro numérico en forma decimal requiere con frecuencia ser convertido a un registro numérico en forma exponencial, que ofrece una economía cognitiva en los tratamientos. Cinco alumnos no lograron hacer esta conversión lo que originó que en lugar de la respuesta esperada x = –4, dieran respuestas incorrectas como: $x = 10^{-4}$; $x = -5$; $x = -3$; también observamos que un alumno no respondió. A continuación mostramos la dificultad más recurrente en esta actividad propuesta:

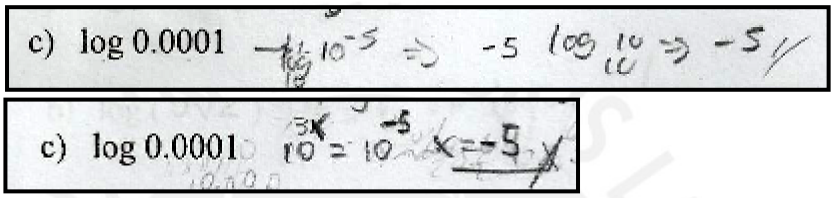


Figura 34. Dificultades encontradas en la actividad 2-c de la Prueba diagnóstica.

Ambos alumnos realizan un tratamiento incorrecto previsto en la dificultad D3:

D3: Que el numeral 0.0001 no pueda ser convertido al registro numérico exponencial, porque: $0.0001 = 10^{-4}$.

03. Use la definición de la función logarítmica para calcular “x”:

a) $\log_3 x = 4$

DIFICULTADES ENCONTRADAS: En esta actividad, los alumnos no encontraron dificultad. Todos han respondido x = 81, lo cual muestra que los alumnos conocían la definición de logaritmos, que les ha permitido hacer una conversión del registro simbólico de logaritmos hacia el registro numérico en forma exponencial, como se muestra a continuación:

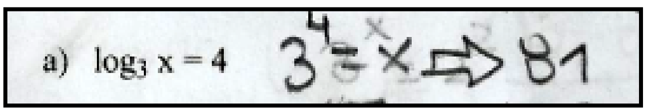


Figura 35. Resultados correctos en la actividad 3-a de la Prueba diagnóstica.

b) $\log_x 6 = 1/2$

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Sólo un alumno no realiza la conversión correcta del registro simbólico de logaritmo hacia el registro numérico en forma exponencial, como se muestra a continuación:

Figura 36. Dificultades encontradas en la actividad 3-b de la Prueba diagnóstica.

Esta dificultad estuvo prevista en el análisis preliminar realizado sobre esta actividad y corresponde a la dificultad D1:

D1: Que el alumno no aplique la definición de los logaritmos para realizar la conversión al registro exponencial: $\log_x 6 = 1/2 \rightarrow 6 = x^{1/2}$.

04. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halle:

$$\log_2 40 + \log_2 25 - \log_2 20$$

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Esta actividad tuvo tres tipos de respuestas aceptadas como correctas, como se muestra en la siguiente tabla:

RESPUESTAS CORRECTAS			RESPUESTAS INCORRECTAS
$1+\log_2 25$	$1+ 2\log_2 5$	$\log_2 50$	$1;\ 50;\ 2;\ 1-2\log_2 5;\ 1+\log 5;\ 2\log 10$
4	8	1	7

Tabla 11. Resultados sobre actividad No. 4 de la Prueba diagnóstica.

Las principales dificultades presentadas se originan porque el alumno no realiza los tratamientos aplicando las propiedades de logaritmos citadas en la dificultad D3:

D3: Que los logaritmos en base 2 sean tratados con las mismas propiedades de los logaritmos decimales.

A continuación mostramos la dificultad más recurrente en esta actividad:

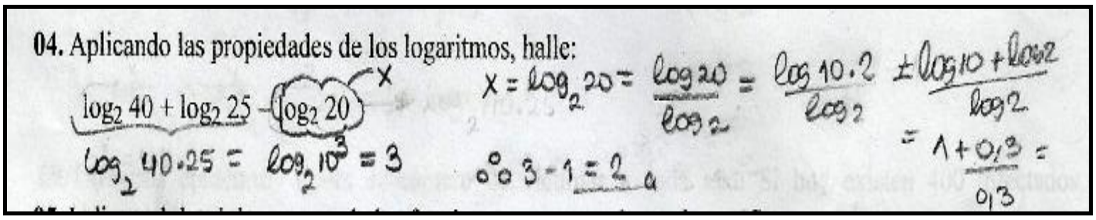


Figura 37. Dificultades encontradas en la actividad 4 de la Prueba diagnóstica.

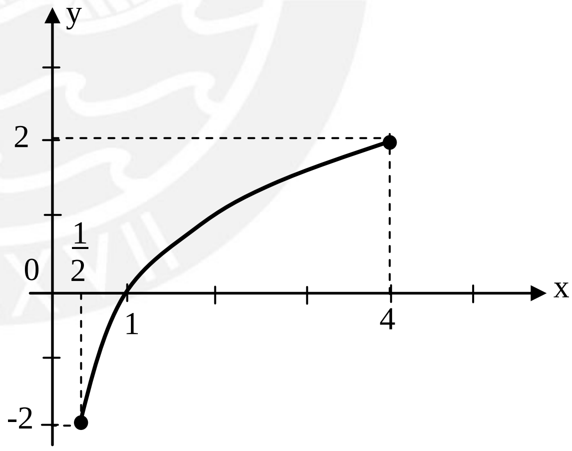
En esta actividad, el alumno realiza un tratamiento incorrecto, porque: $\log_2 10^3 \neq 3$. El alumno hace el tratamiento como si fuese un logaritmo decimal. También realiza un tratamiento numérico incorrecto cuando realiza la siguiente transformación:

$$\frac{\log 10 + \log 2}{\log 2} = \frac{1 + 0.3}{0.3}$$

El alumno considera que es el resultado de esta expresión es 1, porque finaliza esta actividad proponiendo que: 3 – 1 =2. Que es una respuesta incorrecta.

05. Indique el dominio y rango de las funciones representadas en las gráficas:

a) Sea la gráfica de la función f(x):



DIFICULTADES ENCONTRADAS: Las dificultades esperadas se presentaron y los resultados lo demuestran: un 60% de alumnos indican el dominio correcto y un 45% de ellos indican el rango correcto. Ocho alumnos no han desarrollado la visualización de los valores de ***x*** para la función f(x) y once de ellos no han desarrollado la visualización para observar los valores de ***y*** de dicha gráfica. Esto puede haber ocurrido porque ellos no han realizado la correcta aprehensión perceptiva de los valores de x e y en el registro gráfico dado, para la determinación del dominio y el rango, respectivamente.

A continuación mostramos una de las dificultades más recuentes en esta actividad:

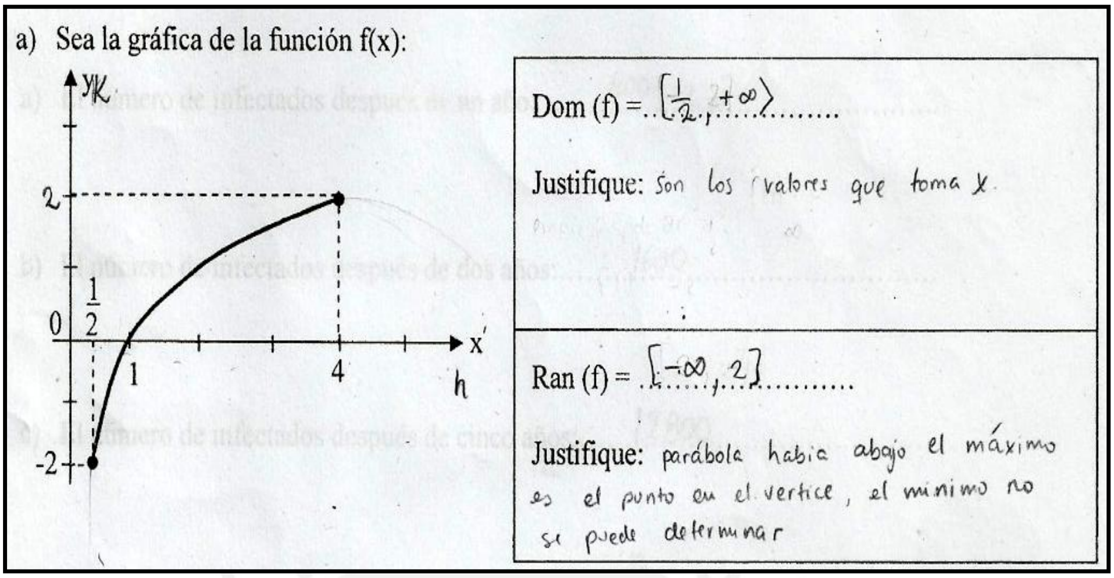
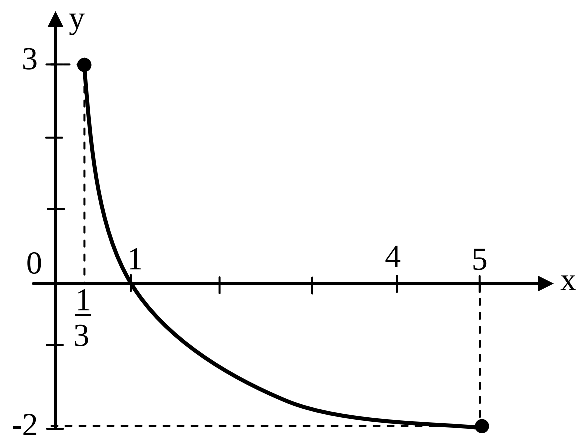


Figura 38. Dificultades encontradas en la actividad 5-a de la Prueba diagnóstica.

En esta respuesta observamos que el alumno "extiende" la gráfica hacia el infinito, su aprehensión perceptiva no acota la gráfica en el tramo dado, por esto afirma que el dominio es: $[1/2\ ;\ +\infty>$ y el rango es: $[-\infty;\ 2]$. En el rango muestra otra dificultad cuando se proyecta hacia el infinito; lo considera como intervalo cerrado, debiendo ser un intervalo abierto. Estas dificultades han sido previstas en el análisis preliminar como una dificultad D3:

D3: Que el alumno no haya desarrollado la aprehensión perceptiva para determinar los valores de *x* o valores de *y* que correspondan a la gráfica de la función.

b) Sea la gráfica de la función g(x):



DIFICULTADES ENCONTRADAS: Esta gráfica produjo menos dificultad que la gráfica anterior, porque los resultados muestran un 5% mayor de acierto en el dominio para la función g(x) respecto a la gráfica f(x) y un 25% mayor de acierto para el rango de la función g(x) respecto a la función f(x).

A continuación presentamos la dificultad más recurrente en esta actividad:

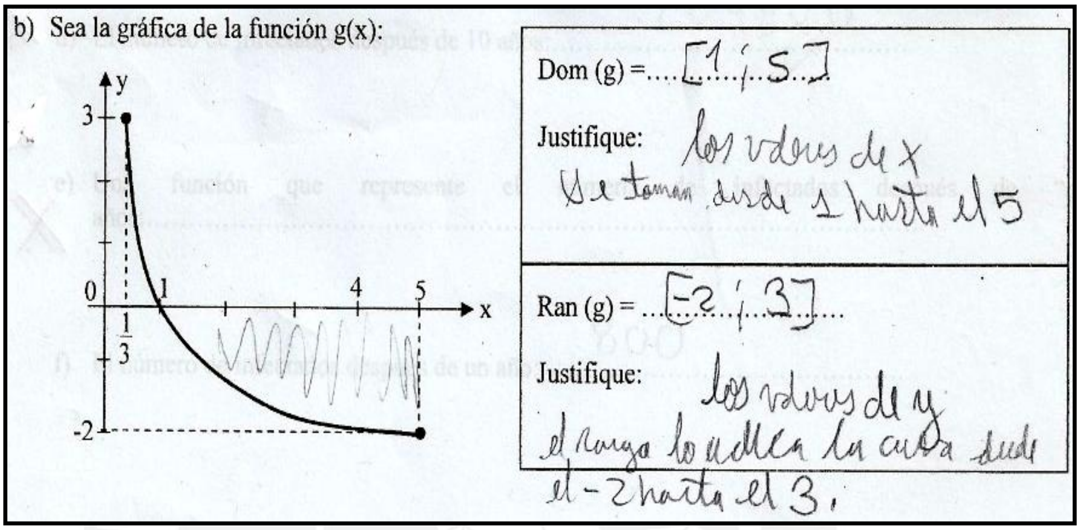


Figura 39. Dificultades encontradas en la actividad 5-b de la Prueba diagnóstica.

En esta actividad, el alumno presenta una dificultad perceptiva, considera el dominio de la gráfica sólo en el cuarto cuadrante y da como dominio $[1\ ;\ 5]$ siendo el dominio correcto: $[1/3\ ;\ 5]$. Observamos que la misma dificultad no la presenta para los valores del rango, el cual lo expresa en forma correcta como $[-2\ ;\ 3]$. Como en la actividad anterior, también se presenta la dificultad D3.

<u>Parte II</u>: En las siguientes preguntas los alumnos podían hacer uso de una calculadora

06. Resolver en R: $9^x = 20$

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Sobre los 5 alumnos que tuvieron dificultades, observamos que la dificultad presentada por la mayoría de ellos es que no hicieron uso de las propiedades del cambio de base. Ellos lograron realizar la conversión del registro numérico con exponentes al registro logarítmico y sólo plantean esta solución:

A continuación presentamos la dificultad más recurrente en esta actividad:

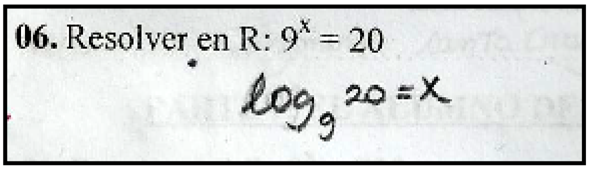


Figura 40. Dificultades encontradas en la actividad 6 de la Prueba diagnóstica.

La dificultad presentada corresponde a la dificultad D3 que habíamos previsto:

D3: Que el alumno haga mal uso o no pueda aplicar la calculadora para hallar valores numéricos de logaritmos en base diferente de 10.

07. Use calculadora para dar el valor de los logaritmos, con una aproximación de cuatro decimales.

a) log (2/3)

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Como habíamos previsto, las posibles dificultades que se presentaron se ocasionaron por el uso incorrecto de la calculadora para obtener los valores numéricos del $\log 2$ y $\log 3$. Uno de las respuestas incorrectas fue:

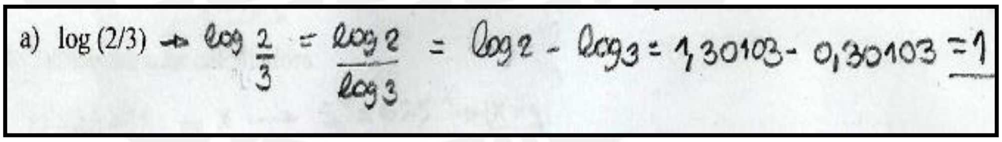


Figura 41. Dificultades encontradas en la actividad 7-a de la Prueba diagnóstica.

En esta respuesta, el alumno obtiene para log 2 un valor numérico de 1,30103 en lugar de su valor 0,30103. También el alumno también podía haber realizado el cálculo directo del logaritmo decimal de (2/3), como otro procedimiento aceptable, dado que disponía de la calculadora científica.

b) $\log_9$ (3/2)

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Los alumnos tuvieron dificultad porque el logaritmo planteado no está en base decimal o en base e (base de los logaritmos neperianos), muchos no recordaron la propiedad del cambio de base antes de emplear la calculadora para hacer los cálculos. En la figura 42 se muestra una dificultad sobre el cambio de base:

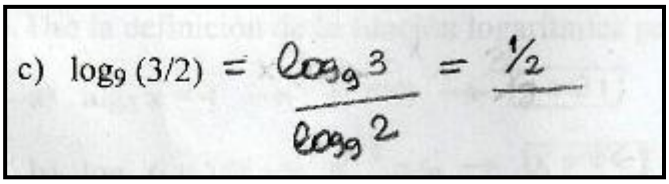


Figura 42. Dificultades encontradas en la actividad 7-b de la Prueba diagnóstica.

En este resultado observamos que el alumno realiza tratamientos incorrectos, pues no aplica correctamente la propiedad del cambio de base para un logaritmo.

08. ¿Cuál de los dos números es mayor: 10^3 o 3^{10}? (Dato: $\log 3 = 0.47712$)

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Esta actividad no tuvo mayores dificultades en la mayoría de los alumnos, sólo tres de los 20 alumnos no plantearon relaciones entre los números exponenciales planteados, la mayoría de alumnos (85% de los evaluados) pudo plantear la relación $3^{10} > 10^3$ que se esperaba:

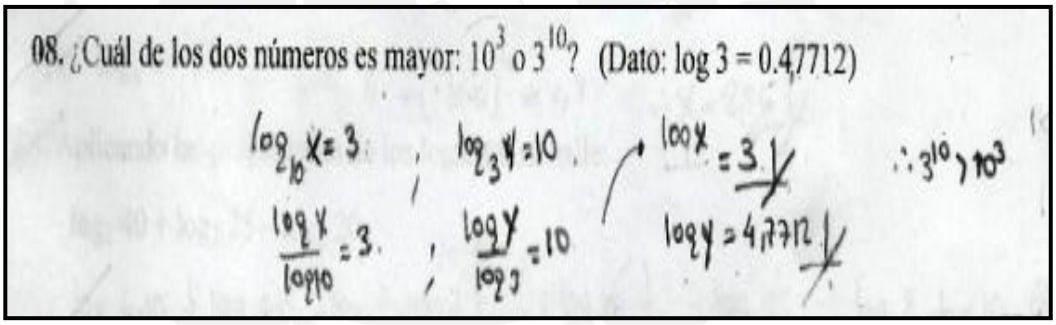


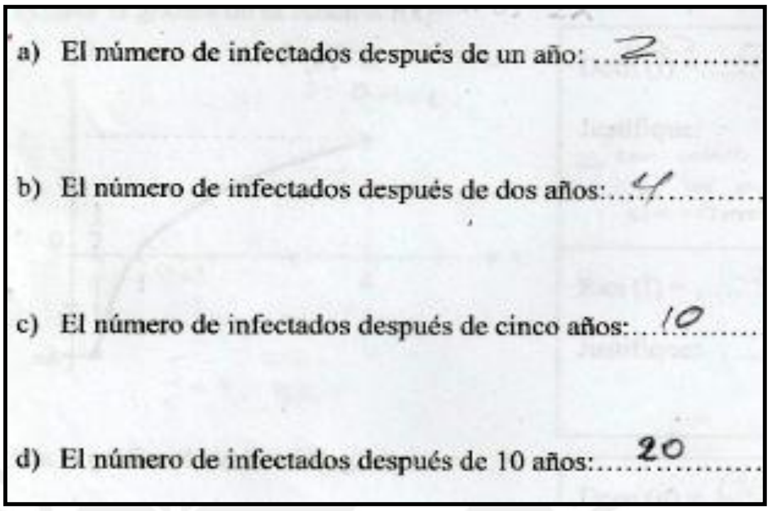
Figura 43. Solución correcta de la actividad 8 de la Prueba diagnóstica.

En esta solución correcta se aprecia que el alumno si conoce la definición de logaritmos en la forma exponencial, lo que permite la aplicación correcta de los tratamientos mostrados y que le permiten concluir que $3^{10} > 10^3$.

09. Un virus epidémico dobla el número de víctimas a cada año. Si hoy existen 400 infectados, determine:

a) El número de infectados después de un año: ……………………………………..

DIFICULTADES ENCONTRADAS: El término "dobla el número" no pudo ser convertido a una relación "por 2". Un alumno expresa de manera incorrecta estas respuestas, debido a que no lo aplica a la cantidad inicial:



a) El número de infectados después de un año: ....2..........

b) El número de infectados después de dos años:....4..........

c) El número de infectados después de cinco años:....10......

d) El número de infectados después de 10 años:....20...............

Figura 44. Dificultades encontradas en la actividad 9-a de la Prueba diagnóstica.

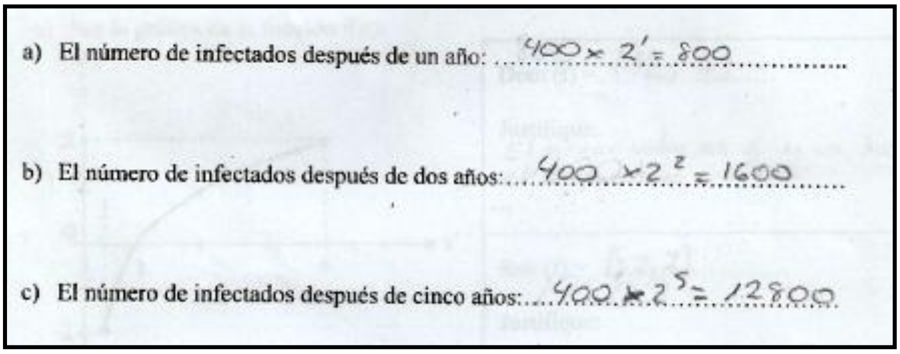
En esta solución el alumno no realiza una comprensión de la actividad planteada en el registro verbal, no observa el dato planteado (400) al cual le debe aplicar "el doble de dicho número".

b) El número de infectados después de dos años:……………………………………

DIFICULTADES ENCONTRADAS: La dificultad de la parte a) se asocia a la parte b), por esto ambas actividades tienen el mismo porcentaje de dificultad, un 25% de alumnos no logra convertir del registro verbal hacia el registro numérico.

c) El número de infectados después de cinco años:…………………………………

DIFICULTADES ENCONTRADAS: Esta actividad tiene mayor dificultad porque requiere una duplicación consecutiva por cinco veces, un 35% de alumnos no logra realizar estos tratamientos porque implica una multiplicación de cinco factores: $400x2x2x2x2x2 = 400x2^5$, un 65% de alumnos logra realizar la conversión y los tratamientos esperados, una de las respuesta de este éxito en los tratamientos es:



a) El número de infectados después de un año: $400 \times 2^1 = 800$

b) El número de infectados después de dos años: $400 \times 2^2 = 1600$

c) El número de infectados después de cinco años: $400 \times 2^5 = 12800$

Figura 45. Resultados correctos en la actividad 9-c de la Prueba diagnóstica.

En esta solución el alumno si realiza una comprensión de la actividad planteada en el registro verbal, él observa que es a 400 al cual le debe aplicar “el doble de dicho número”. Luego aplica base 2 elevado a un exponente, donde el exponente indica la cantidad de veces en la cual debe hacer el doble de dicho número.

Los resultados de esta prueba diagnóstica nos muestran que un 75% de los alumnos:

- Tienen un conocimiento adecuado de las leyes de los exponentes, que es necesario para realizar actividades en el registro numérico en forma exponencial, esto se observa en el éxito logrado en la actividad 1-a.
- Conocen la definición de logaritmos en su forma exponencial, lo que se refleja en el éxito en las actividades $2-a$, $2-b$ y $3-a$.
- Presentan dificultades en el reconocimiento de la extensión de una función cuando se le presenta el gráfico de la función, cuando se enfrentaron a las actividades $5-a$ y $5-b$.
- Presentan dificultades en el uso de la propiedad del cambio de base, cuando se enfrentan a logaritmos que no están en base decimal o en base de los logaritmos neperianos.
- Presentan dificultades en la interpretación de una situación planteado en forma verbal, es decir, tienen dificultad para realizar la conversión del registro verbal hacia el registro simbólico.
- Como habíamos previsto, cuando estuvieron frente a un gráfico de una función, presentaron dificultades como: Dificultad en la identificación de la extensión del gráfico cartesiano porque no habían desarrollado la aprehensión perceptiva para determinar los valores de *x* o valores de *y* que correspondan a la gráfica de la función.

5.5 RESULTADOS DE LA ENTREVISTA AL PROFESOR DEL CURSO

Continuando con nuestro trabajo, luego de obtener los resultados de la aplicación del primer instrumento: la prueba diagnóstica, procedemos a determinar elementos de análisis para el segundo instrumento: las actividades experimentales. Dentro de este análisis preliminar, consideramos que el Profesor del curso puede dar su aporte a esta investigación desde su experiencia en las aulas de clase, porque él puede haber observado en las interacciones con los alumnos, algunas dificultades que posiblemente coincidan con las dificultades analizadas en nuestro trabajo. Para realizar la entrevista, elaboramos un cuestionario de preguntas que el Profesor del curso contestó como se muestra más adelante. Sus observaciones y comentarios fueron considerados para el diseño de las actividades propuestas en el segundo instrumento de investigación. Las respuestas del Profesor del curso a las preguntas del cuestionario fueron:

1) Profesor, ¿Usted abordó el estudio de logaritmos con los alumnos de quinto grado de educación secundaria durante el año lectivo de 2012? Justifique porqué se estudia esta función en este año escolar.

Sí, porque esta función permite modelar y comprender muchos fenómenos naturales que implican números muy grandes, por ejemplo la intensidad del sonido, los movimientos sísmicos, la datación de restos arqueológicos, etc.

2) Relate Ud. la secuencia didáctica seguida en clase para lograr el aprendizaje de la noción de logaritmos, sus propiedades y su representación gráfica. Justifique la elección de esta secuencia.

1) Presentación de las funciones logarítmicas como inversa de la función exponencial.

2) Exploración y análisis de una situación contextualizada mencionada en la pregunta anterior.

3) Elaboración de tablas y gráficos para ayudar a su comprensión.

3) ¿Qué dificultades cree Ud. que tienen los alumnos cuando se enfrentan a esta actividad? Plantee una solución de esta actividad. Señale los posibles errores que cometerían los alumnos.

- ACTIVIDAD-1: Construya el gráfico de la siguiente función:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$$

- Convertir la estructura de la expresión logarítmica, a su equivale en la forma exponencial. También el asignar valores a la variable *y* en lugar de la variable *x*, puede generar cierta confusión.

- El manejo de la teoría de exponentes negativos. Un posible planteamiento de solución podría ser:

  – Escribir la forma exponencial $x = (1/9)^y$.

  – Construir una tabla y asignar valores a x e y.

  – Construcción de la gráfica de los pares ordenados (x,y) en el plano cartesiano, mediante la evaluación previa de los valores de y.

4) ¿Qué dificultades cree Ud. que tendrían los alumnos cuando se enfrenten a esta actividad? Plantee una resolución didáctica de esta actividad. Señale los posibles errores que cometerían los alumnos.

- ACTIVIDAD-2: Obtenga la regla de correspondencia de la función logarítmica cuyo gráfico se muestra a continuación:

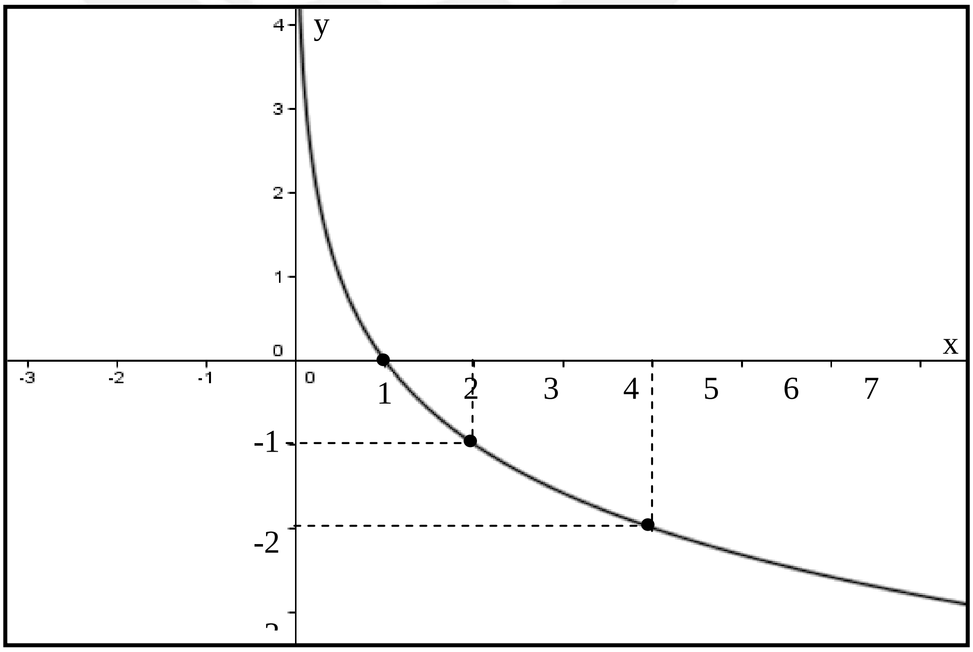


Figura 46. Gráfico de la función logarítmica propuesta al profesor del curso.

Los estudiantes podrían presentar dificultades al identificar los pares ordenados: $(1,\ 0);\ (2,-1);\ (4,-2)$ ya que algunos confunden los valores de x con los de y. Así también tienen dificultades para identificar que representan estos valores en la regla de correspondencia.

Una posible solución didáctica podría ser:

Sea $y = \log_a x$ la regla de correspondencia de la función dada:

Reemplazar los valores:

$$(1,\ 0) \to 0 = \log_a 1 \to a^0 = 1$$

$$(2,-1) \to -1 = \log_a 2 \to a^{-1} = 2 \to 1/a = 2 \to a = 1/2$$

Luego la regla de correspondencia será: $y = \log_a x \to y = \log_{1/2} x.$

5) Cuando Ud. propuso a los alumnos la resolución de problemas involucrando la noción de logaritmos, ¿surgieron dificultades cuando el alumno debía transformar la información en lenguaje verbal (textual) a las formas simbólicas (numéricas o algebraicas). Comente dichas dificultades.

Si, porque no tenía mucha práctica en la traducción de enunciados verbales al lenguaje simbólico. Otra dificultad es la identificación de los valores de los parámetros de la expresión logarítmica. Una de las maneras de salvar esta dificultad era proponerles que elaboren y organicen en una tabla los valores de x e y. Luego relacionar la información con la regla de correspondencia para poder obtener los valores de los parámetros.

6) ¿Qué dificultades cree Ud. que tendrían los alumnos cuando se enfrentan a esta actividad? Plantee una resolución didáctica de esta actividad. Señale los posibles errores que cometerían los alumnos.

- ACTIVIDAD-3: Los técnicos del Instituto Peruano del Medio Ambiente y Recursos Naturales, evaluando la velocidad de deforestación de cierta región, relacionaron a través de la siguiente fórmula, el número "x" de hectáreas que serán deforestadas en "t" años:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right), \quad \text{con} \quad x < 10000$$

a) Para un tiempo igual a 4 años, determine cuántas hectáreas fueron deforestadas.

La posible solución es:

$$\text{Si} \quad t = 4 \quad \rightarrow \quad 4 = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right)$$

Resolviendo: x = 9961 has.

b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas?

La posible solución es:

$$\text{Si} \quad x = 7500 \quad \rightarrow \quad t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - 7500}{10000}\right)$$

Resolviendo: t = 1 año

c) En el periodo de medio año a 1 año, ¿qué área fue deforestada?

La posible solución es:

$$\text{Si} \quad t = 0,5\,\text{año} \quad \rightarrow \quad 0.5 = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right)$$

Resolviendo: x = 5 000 has.

$$\text{Si} \quad t = 1 \text{ año} \quad \rightarrow \quad 1 = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right)$$

Resolviendo: x = 7 500 has.

Entonces, desde el periodo de medio año a 1 año, se ha deforestado:

$$7\,500 - 5\,000 = 2\,500 \text{ has.}$$

7) De las tres actividades propuestas ¿Qué actividad cree Ud. que presentaría mayor dificultad para los alumnos? Justifique su respuesta.

La tercera actividad presenta mayor dificultad pues requiere la comprensión del enunciado, luego la operatividad algebraica y la notación exponencial; así como el uso de unidades como las hectáreas Ha, que no es tan frecuente para los estudiantes.

Con respecto a las respuestas dadas por el Profesor del curso, a manera de síntesis expresamos que:

- La idea central de esta entrevista reside en las apreciaciones sobre las dificultades que se presentan en el estudio de la función logarítmica. Recibimos de forma muy acertada su comentario sobre la actividad de mayor dificultad: la tercera actividad en la que se requiere una coordinación de registros en lengua natural y de registros simbólicos. La experiencia del Profesor nos advierte que los alumnos tienen dificultades para interpretar situaciones en el lenguaje natural y convertirlas al lenguaje simbólico. Esta dificultad es analizada en la teoría de Duval (1995) cuando propone la conversión de registros de representaciones no congruentes.
- El Profesor propone la importancia de los logaritmos en diversos contextos. Así mismo muestra el empleo de diversos registros para lograr un mejor aprendizaje según su comentario sobre cómo realiza el proceso de enseñanza de la definición y propiedades de los logaritmos.
- Tomando en cuenta la experiencia del Profesor, se espera que los alumnos, cuando sean sometidos a situaciones que involucran diversos registros, como las actividades que presentan los logaritmos en contextos aplicados a la realidad, éstas ofrecerán mayor dificultad cognitiva debido a la necesidad de la coordinación entre los diversos registros empleados.

5.6 ANÁLISIS PRELIMINAR DEL SEGUNDO INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN: ACTIVIDADES PARA IDENTIFICAR LAS DIFICULTADES EN LAS TRANSFORMACIONES SOBRE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Estas actividades corresponden al segundo instrumento de investigación y su diseño se basó en los análisis previos como el análisis de investigaciones anteriores, el análisis de libros didácticos, los resultados de la prueba diagnóstica y los resultados de la entrevista del Profesor.

Las actividades experimentales que conforman este segundo instrumento de investigación constan de cinco actividades que se detallan a continuación:

Actividad I: Aplicaciones sobre las propiedades de los exponentes. Permitirá que el alumno realice tratamientos en el registro simbólico. Se observarán posibles dificultades que subyacen la significancia operativa asociada a las expresiones exponenciales. En esta observación verificaremos lo que Duval (2006) considera como uno de los procesos de pensamiento de la actividad matemática: los tratamientos en el registro numérico en forma exponencial.

Actividad II: Aplicaciones sobre las propiedades de los logaritmos. Permitirá que el alumno realice tratamientos en el registro simbólico. Se observarán las dificultades que se presenten en las transformaciones en el mismo registro con el uso las propiedades de los logaritmos. En esta observación verificaremos lo que Duval (2006) considera como uno de los procesos de pensamiento de la actividad matemática: los tratamientos en el registro simbólico en forma logarítmica.

Actividad III: Permitirá el análisis de las dificultades presentes en la conversión de registros semióticos: registro simbólico $\rightarrow$ registro gráfico. El alumno debe discriminar los valores escalares de la representación simbólica para luego de transitar por una representación auxiliar y obtener el gráfico en la que discrimine los valores visuales de esta representación. La existencia de la no congruencia entre estos registros, caracteriza la complejidad cognitiva de esta transformación. En esta observación verificaremos lo que Duval (2006) considera como uno de los procesos de pensamiento de la actividad matemática: las conversiones o cambio de registros: del registro simbólico al registro gráfico.

Actividad IV: Permitirá el análisis de las dificultades por la conversión inversa: registro gráfico $\rightarrow$ registro simbólico. En esta observación verificaremos si el alumno logra la determinación de los valores visuales de los gráficos de la función logarítmica que serán las unidades significativas que serán transformadas al registro simbólico. Según Duval (2004), “el alumno que no discrimina estas variables visuales, es como si fuera ciego para la conversión inversa a aquella que se enseña habitualmente”. (p. 60).

Actividad V: Aplicaciones sobre problemas de modelación de la función logarítmica. Al alumno se le propondrá una situación aplicada de logaritmos en un registro en lengua natural como registro de partida, donde el alumno deberá realizar una conversión y expresar su respuesta en un registro numérico como registro de llegada, luego de transitar por el registro simbólico, el cual permite una “economía” cognitiva en la resolución del problema. Duval (2006), propone que un problema de comprensión que es propio de las matemáticas “es la posibilidad de TRANSFERIR lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos, dentro y fuera de las matemáticas, y esto siempre implica la conversión de representación”. (p. 16).

En estas actividades se prestará especial atención a las transformaciones sobre los registros semióticos. A continuación se presentan cada una de las actividades de esta etapa de la investigación, así como los objetivos que nos proponemos alcanzar en cada una de ellas, seguida de la posible solución y de las posibles dificultades que podrían presentarse cuando los alumnos a investigar desarrollen dichas actividades:

ACTIVIDAD-1: Transformaciones semióticas frecuentes en el registro simbólico aplicado a logaritmos.

Objetivo general: Analizar las dificultades que encontrará el alumno cuando la actividad propuesta le exija realizar tratamientos sobre representaciones semióticas en el registro simbólico de logaritmos.

a) Halle el valor de *x* en la siguiente expresión: $\log_2(\log_4 x) = 4$

Objetivo específico: Analizar los tratamientos que se realizan en el registro simbólico aplicando la definición de logaritmos y en el registro exponencial para la obtención del valor numérico de una incógnita específica.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Aplicar la definición de logaritmos para realizar la conversión del registro simbólico en forma de logaritmos hacia el registro numérico en forma exponencial.

$$\log_2(\log_4 x) = 4 \xrightarrow{T} \log_4 x = 2^4 \qquad \text{(T = tratamiento)}$$

ii) Realizar un tratamiento del registro numérico en forma exponencial hacia el registro numérico en forma entera.

$$\log_4 x = 2^4 \xrightarrow{T} \log_4 x = 16$$

iii) Realizar por segunda vez la definición de logaritmos para realizar el tratamiento del registro simbólico en forma de logaritmos hacia el registro numérico en forma exponencial.

$$\log_4 x = 16 \xrightarrow{T} x = 4^{16}$$

iv) Realizar un tratamiento final del registro numérico en forma exponencial hacia el registro numérico en forma entera: $x = 4^{16} \xrightarrow{T} x = 2^{32}$

Posibles dificultades: Esta actividad parte de una expresión que presenta un “doble logaritmo”, lo que crea una dificultad en la aplicación de la definición de logaritmos en doble etapa, el alumno se enfrenta a las posibles dificultades que señalamos:

D1: Que el alumno tenga dificultad en identificar las unidades significativas del primer logaritmo como la base del logaritmo y el número positivo de este logaritmo.

D2: Que el alumno haga una aplicación incorrecta de la definición de logaritmos.

D3: Que el alumno encuentre dificultad en el tratamiento en el registro exponencial para la obtención de la incógnita *x*.

b) Halle el valor de *x* en la siguiente expresión: $\mathbf{\log(x+4) = \log x + \log 4}$

Objetivo específico: Analizar los tratamientos en el registro simbólico que exige esta actividad, dichos tratamientos se basan en la aplicación de las propiedades de los logaritmos, citadas a continuación:

P1: $\log A + \log B = \log A.B$ …… Propiedad del logaritmo de un producto.

P2: $\log A = \log B \rightarrow A = B$ …….. Propiedad reflexiva de los logaritmos.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Realizar un primer tratamiento en el registro simbólico de logaritmos basado en la propiedad P1:

$$\log\left(x+4\right) = \log x + \log 4 \xrightarrow{T} \log\left(x+4\right) = \log 4x$$

ii) Realizar un segundo tratamiento en el registro simbólico de logaritmos basado en la propiedad P2:

$$\log\left(x+4\right) = \log x + \log 4 \xrightarrow{T} x + 4 = 4x$$

iii) Realizar tratamientos en el registro algebraico para obtener el valor de la incógnita:

$$x + 4 = 4x \xrightarrow{T} 4 = 3x \xrightarrow{T} x = 4/3$$

Posibles dificultades: Esta actividad exige al alumno el aprendizaje del objeto matemático en estudio, principalmente de sus propiedades fundamentales, entonces las dificultades se presentarán en la imposibilidad de realización de los tratamientos previstos ocasionado por una dificultad conceptual. A continuación se citan las posibles dificultades:

D1: Que el alumno tenga dificultad en realizar la transformación de $\left(\log x + \log 4\right)$ a $\left(\log 4x\right)$ por no aplicar la propiedad P1 antes citada o una aplicación incorrecta de esta propiedad como transformar $\left(\log x + \log 4\right)$ a $\log\left(x+4\right)$.

D2: Que el alumno tenga dificultad en realizar la transformación de $\log\left(x+4\right) = \log 4x$ a la expresión $x+4=4x$, porque no aplica la propiedad P2. Esta dificultad D2 es de menor grado que la dificultad D1, porque resulta más intuitiva para el alumno, lo entiende como una "eliminación" de los logaritmos y queda la expresión $x + 4 = 4x$; también se justifica porque este tratamiento es más conocido, porque en temas anteriores ha realizado tratamientos semejantes, como ejemplo: $\text{sen } x = \text{sen } 10° \to x = 10°$, y el alumno suele asociar tratamientos anteriores con tratamientos actuales.

D3: Que el alumno tenga dificultad en la resolución de una ecuación de primer grado, para obtener el valor de la incógnita *x*. Esta dificultad es la de menor grado que las otras dos, porque un alumno de quinto de secundaria, en este nivel ya ha realizado este tipo de tratamiento en los años anteriores, resolviendo ecuaciones de distintos grados algebraicos.

<u>ACTIVIDAD-2</u>: Conversiones del registro simbólico al registro gráfico.

Objetivo general: Analizar las dificultades que encontrará el alumno para realizar la conversión del registro simbólico como registro de partida hacia el registro gráfico como registro terminal. Esta transformación corresponde a una conversión no congruente que presenta una mayor dificultad cognitiva que las conversiones congruentes, ya que el alumno debe elaborar un registro tabular como un registro intermediario para lograr el objetivo. Así mismo en esta actividad se analizará la aprehensión perceptiva del alumno sobre dos unidades significativas del registro figural en un gráfico cartesiano: el dominio y el rango.

Construya el gráfico de la siguiente función y determine su dominio y rango.

a) $\mathbf{f(x) = \log_2(x + 4)}$

Objetivo específico: Analizar las dificultades que se presenten cuando el alumno construya el registro tabular asignando valores a *x*, teniendo en cuenta que en el registro simbólico se tiene un logaritmo en base 2, por esto los valores asignados a la variable *x* debe permitir lograr que $(x + 4)$ sea una potencia de 2. Luego analizaremos la correspondencia entre los valores tabulados y los puntos respectivos en el registro cartesiano, se analizará también el trazado que une dichos puntos para la obtención del grafico de la función logarítmica. Se analizará la construcción de la representación para el dominio y rango en el registro numérico obtenido a partir del registro gráfico.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Asignar valores adecuados a la variable *x* para obtener valores de *f(x)* y construir la representación tabular con unos cinco valores:

$$x = -3 \rightarrow f(-3) = \log_2(-3 + 4) = 0$$

$$x = -2 \rightarrow f(-2) = \log_2(-2 + 4) = 1$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \log_2(0 + 4) = 2$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \log_2(4 + 4) = 3$$

$$x = 12 \rightarrow f(12) = \log_2(12 + 4) = 4$$

El registro tabular obtenido es:

x	–3	–2	0	4	12
f(x)	0	1	2	3	4

ii) Realizar la conversión del registro tabular al plano cartesiano, estos son los primeros signos del registro gráfico. Luego unimos los puntos para obtener la gráfica de la función logarítmica.

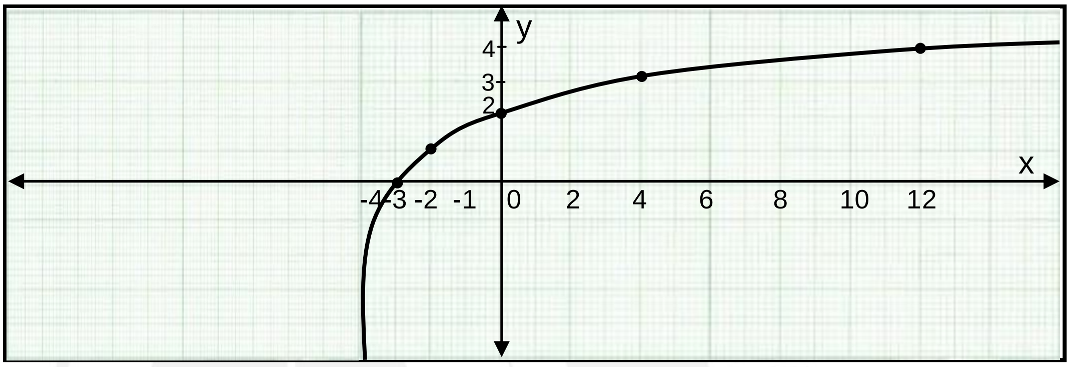


Figura 47. Gráfico de la función logarítmica de la actividad didáctica 2-a.

iii) Realizar una aprehensión perceptiva sobre el registro gráfico para la determinación de las unidades significativas del gráfico. Para los valores de *x* se cumple que: $x > -4$, por esto el dominio de la función es: $< -4; +\infty >$; los valores de *y* cumplen con todos los valores reales, por esto el rango de la función $f(x)$; es: $\Re$.

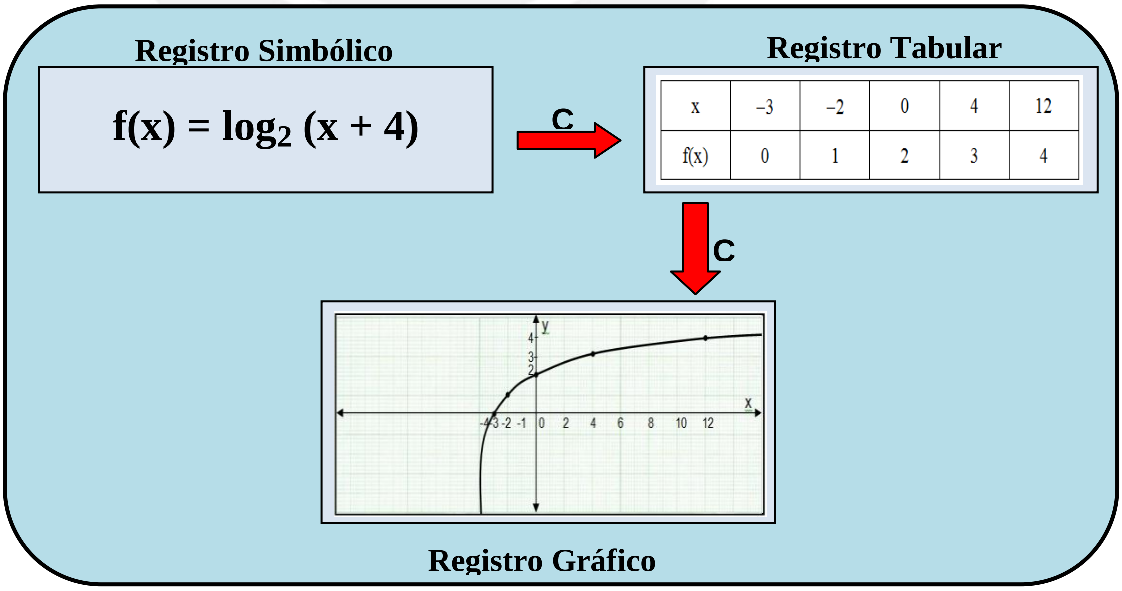


Figura 48. Conversión entre distintos registros de la actividad 2-a.

Posibles dificultades: En esta actividad el alumno se enfrenta a una conversión no congruente teniendo como registro de partida al registro simbólico $\mathbf{f(x) = \log_2(x + 4)}$ y como registro de llegada al registro gráfico. A continuación se citan las posibles dificultades:

D1: Que el alumno tenga dificultad en asignar valores adecuados para obtener el registro tabular. Es posible que no obtenga los logaritmos adecuados para obtener los valores numéricos de f(x).

D2: Que el alumno tenga dificultad en realizar la conversión del registro tabular al registro gráfico, porque al ser ambos registros bi-dimensionales, requieren de una coordinación de las dos dimensiones, tanto en la tabla de doble entrada horizontal así como en el gráfico cartesiano de dos ejes.

D3: Que el alumno tenga dificultad en lograr una aprehensión perceptiva del registro gráfico para determinar el dominio y rango de la función. Es posible que no discrimine sobre los extremos infinitos en los intervalos que determinan la extensión del registro gráfico de la función logarítmica.

Bosqueje el gráfico de la siguiente función y determine su dominio y rango.

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

Objetivo específico: Analizar las dificultades que se presenten cuando el alumno requiera elaborar un registro tabular, analizaremos los valores asignados a *x*, teniendo en cuenta que en el registro simbólico se tiene un logaritmo en base 1/9, por esto esta actividad presenta una mayor dificultad que la actividad anterior, pues la elección de los valores para *x* deben permitir tratamientos numéricos que permitan valores enteros para *g(x)*. Luego analizaremos la correspondencia entre los valores tabulados y los puntos respectivos en el registro cartesiano, se analizará también el trazado que une dichos puntos para la obtención del grafico de la función logarítmica. Se analizará la construcción de la representación para el dominio y rango en el registro numérico obtenido partir del registro gráfico.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Asignar valores adecuados a la variable *x* para obtener valores de *g(x)* y construir la representación tabular con unos cinco valores:

$$x = 1/9 \rightarrow g\,(1/9) = \log_{1/9}(1/9) = 1$$

$$x = 1/3 \rightarrow g\,(1/3) = \log_{1/9}(1/3) = 1/2$$

$$x = 1/3 \rightarrow g\,(1/3) = \log_{1/9}(1/3) = 1/2$$

$$x = 3 \rightarrow g\,(3) = \log_{1/9}(3) = -1/2$$

$$x = 9 \rightarrow g\,(9) = \log_{1/9}(9) = -1$$

El registro tabular obtenido es:

x	1/9	1/3	1	3	9
g(x)	1	1/2	0	-1/2	-1

ii) Realizar la conversión del registro tabular al plano cartesiano, estos son los primeros signos del registro gráfico. Luego unimos los puntos para obtener la gráfica de la función logarítmica.

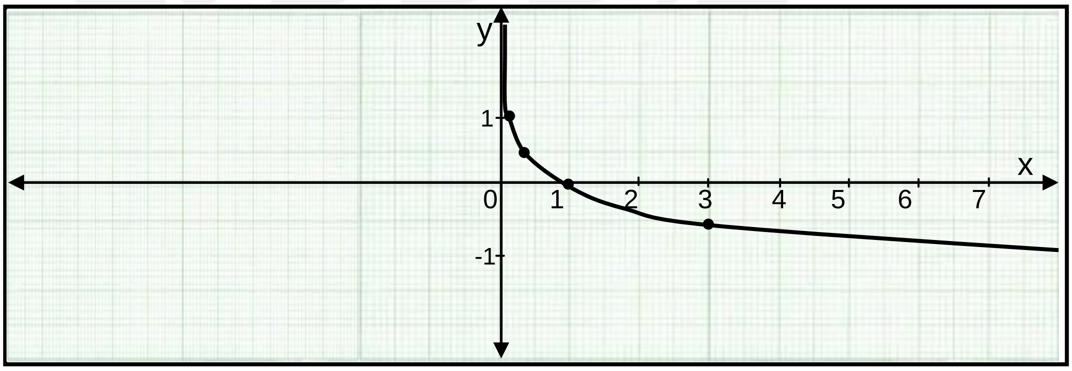
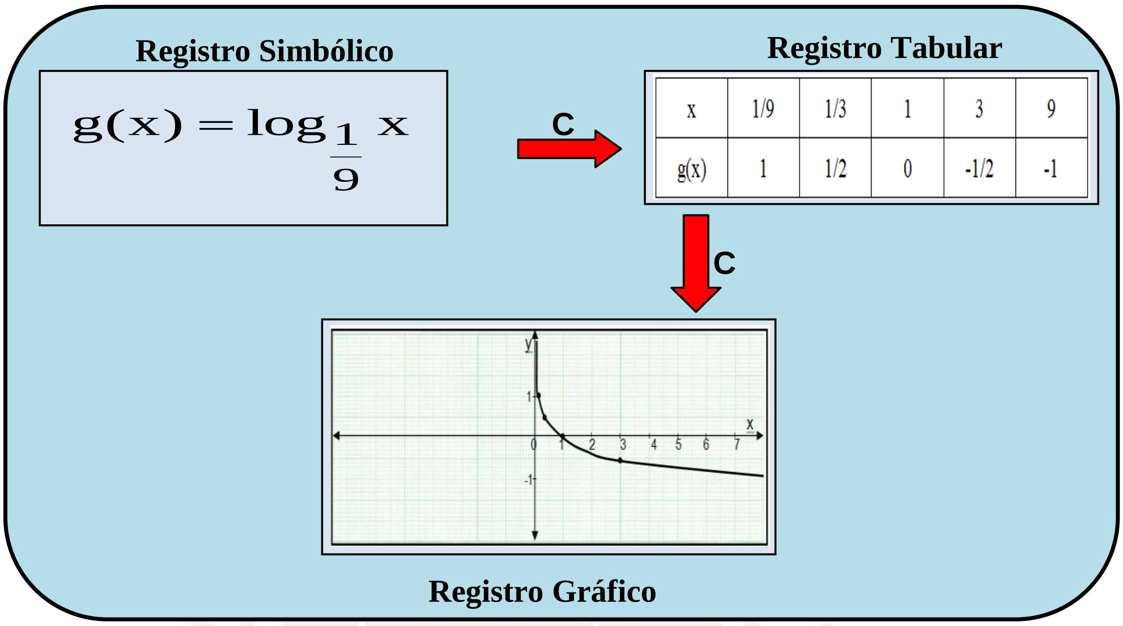


Figura 49. Gráfico de la función logarítmica de la actividad didáctica 2-b.

iii) Realizar una aprehensión perceptiva sobre el registro gráfico para la determinación de las unidades significativas del gráfico. Para los valores de *x* se cumple que: x > 0, por esto el dominio de la función *g(x)* es: $< 0;\ +\infty >$; los valores de *y* cumplen con todos los valores reales, por esto el rango de la función *g(x)* es: $\Re$.



x	1/9	1/3	1	3	9
g(x)	1	1/2	0	-1/2	-1

Figura 50. Conversión entre distintos registros de la actividad 2-b.

Posibles dificultades: Así como en la actividad anterior, en esta actividad el alumno se enfrenta a una conversión no congruente teniendo como registro de partida al registro simbólico $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$ y como registro de llegada al registro gráfico. A continuación se citan las posibles dificultades:

D1: Que el alumno tenga dificultad en asignar valores adecuados para obtener el registro tabular. Teniendo en cuenta que la base es un número fraccionario, exige una mayor dificultad en los tratamientos con números exponenciales para obtener los valores numéricos de g(x).

D2: Que el alumno tenga dificultad en realizar la conversión del registro tabular al registro gráfico, esta actividad presenta una mayor dificultad porque se deben elegir puntos en el gráfico cartesiano con coordenadas con números fraccionarios.

D3: Que el alumno tenga dificultad en lograr una aprehensión perceptiva del registro gráfico para determinar el dominio y rango de la función. Esta función es decreciente con una asíntota en x=0 lo cual dificulta la discriminación sobre los extremos infinitos en los intervalos que determinan la extensión del registro gráfico de la función logarítmica.

ACTIVIDAD-3: Conversión del registro gráfico al registro simbólico y visualización sobre el registro gráfico.

Obtenga la regla de correspondencia de la función logarítmica cuyo gráfico se muestra a continuación y determine su dominio y rango:

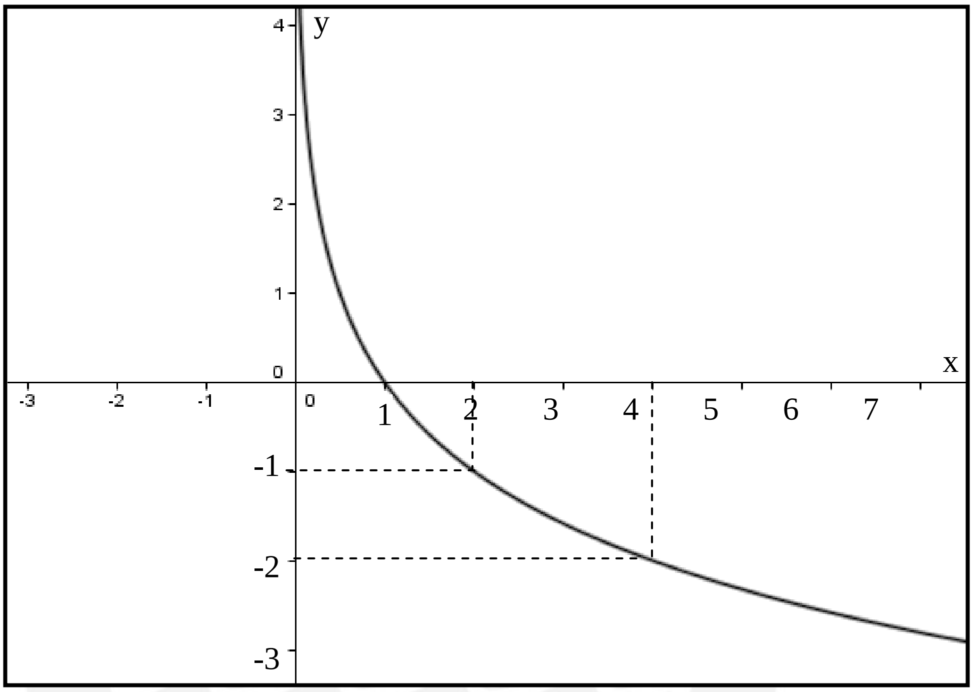


Figura 51. Gráfico de la función logarítmica de la actividad didáctica 3.

Objetivo general: Analizar las dificultades que encontrará el alumno para realizar la conversión inversa respecto a la actividad anterior. El alumno debe realizar una determinación perceptiva de las unidades significantes en el registro gráfico para luego darles un significado en el registro simbólico de logaritmos, con el propósito de lograr la regla de correspondencia $f(x)=\log_b x$ corresponde a la función dada en forma gráfica.

Objetivo específico: Analizar las dificultades que se presenten cuando el alumno realice la visualización del registro gráfico dado, para obtener signos determinantes como las coordenadas registradas, estas deben ser aplicadas al registro simbólico para que luego de algunos tratamientos se obtenga la regla de correspondencia de la función.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Realizar una aprehensión perceptiva sobre el registro gráfico para la obtención de coordenadas determinadas en el registro numérico. Las coordenadas obtenidas son: $(1,\ 0)$; $(2,-1)$ y $(4,-2)$.

ii) Reemplazar estas coordenadas en el registro simbólico de logaritmos: $f(x) = \log_b x$ para obtener el valor de la unidad significante en este registro como es la base *b* del logaritmo.

$$(1,\ 0) \to y = \log_b x \to 0 = \log_b(1) \to b^0 = 1 \to 1 = 1$$

$$(2,-1) \to y = \log_b x \to -1 = \log_b(2) \to b^{-1} = 2 \to b = 2^{-1} \to b = 1/21$$

$$(4,-2) \to y = \log_b x \to -2 = \log_b(4) \to b^{-2} = 4 \to b = 4^{-1/2} \to b = 1/2$$

iii) La regla de correspondencia obtenida es: $f(x) = \log_{1/2} x$

Posibles dificultades: En esta actividad el alumno se enfrenta a la dificultad del sentido de la conversión. Debe tener en cuenta que signos del registro gráfico permiten la obtención del registro simbólico que representa a la función logarítmica dada en el gráfico en un registro bi-dimensional. Las posibles dificultades en esta actividad son:

D1: Que el alumno tenga dificultad en la aprehensión perceptiva para la obtención de las coordenadas definidas en el registro gráfico.

D2: Que el alumno tenga dificultad en la comprensión del registro en lengua natural: "¿qué es una regla de correspondencia?". Que no comprenda que el nuevo registro es de la forma: $f(x) = \log_b x$.

D3: Que el alumno tenga dificultad en los tratamientos que deba realizar en el registro simbólico para la obtención de la base *b* del logaritmo representado en la regla de correspondencia.

ACTIVIDAD-4: Coordinación de registros con logaritmos decimales y conversión al registro numérico.

La ley de Ebbinghaus del olvido establece que si una tarea se aprende en un inicio a un nivel de desempeño ***Po***, entonces, después de cierto intervalo de tiempo ***t*** por efecto del olvido, el nivel del desempeño ***P*** cumple con la siguiente expresión:

$$\log P = \log Po - c.\log(t+1)$$

Siendo: c = constante que depende del tipo de tarea;

t = tiempo en meses.

Objetivo general: Analizar las dificultades que encontrará el alumno para realizar la coordinación de registros presentada en esta actividad, así como también analizar si el alumno logra la aprehensión lingüística del registro verbal y una aprehensión simbólica de la expresión logarítmica.

La actividad 4-a es:

a) Despeje la variable *P*.

Objetivo específico: Analizar las dificultades cuando el alumno realiza los tratamientos en el registro simbólico, y analizar también si se logró el aprendizaje de las propiedades fundamentales de los logaritmos.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia que permite realizar el primer tratamiento:

P1: $\log_b x^n = n.\log_b x$ ……….. Propiedad del logaritmo de una potencia

$$\log P = \log Po - c.\log(t+1) \xrightarrow{T} \log P = \log Po - \log(t+1)^c$$

ii) Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente que permite realizar el segundo tratamiento:

P2: $\log_b M/N = \log_b M - \log_b N$ ….. Propiedad del logaritmo de un cociente

$$\log P = \log Po - \log(t+1)^c \xrightarrow{T} \log P = \log Po/(t+1)^c$$

ii) Aplicar la propiedad reflexiva de los logaritmos que permite el tercer tratamiento en el registro simbólico:

P3: $\log A = \log B \rightarrow A = B$ …… Propiedad reflexiva de los logaritmos.

$$\log P = \log Po/(t+1)^{c} \xrightarrow{T} P = Po/(t+1)^{c}$$

Posibles dificultades: En esta actividad el alumno se enfrenta a dificultades sobre tratamientos en el registro simbólico que dependen del conocimiento de las propiedades de los logaritmos enunciadas como P1, P2 y P3.

La actividad 4-b es:

b) Si su puntuación en una prueba de biología es 16, ¿qué puntuación se espera obtener en una prueba similar después de un año? Asuma: c = 2.

Objetivo específico: Analizar las dificultades ocasionadas por una deficiente aprehensión lingüística, que es determinante para aplicar las transformaciones necesarias en el registro simbólico y obtener la puntuación pedida.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Lograr la aprehensión lingüística sobre el siguiente registro verbal: "*Si su puntuación en una prueba de biología es 16*". Esta unidad significante en este registro corresponde a *Po* en el registro simbólico. Otra conversión se presenta sobre la unidad significante "*¿qué puntuación se espera obtener en una prueba similar*" que corresponde a *P* en el registro simbólico y la unidad significante "*después de un año*" que debe transformarse a "*después de 12 meses*" y corresponde a *t* en el registro simbólico.

Luego de la conversión (C) de las unidades significantes, en el registro simbólico tenemos:

Si su puntuación en una prueba de biología es 16, ¿qué puntuación se espera obtener en una prueba similar después de un año? Asuma: c = 2	$\xrightarrow{C}$	$P = 16/(12+1)^{2}$
Registro Verbal		**Registro Simbólico**

ii) Realizar tratamientos en el registro numérico para obtener la solución:

$$P = 16/(12+1)^2 \xrightarrow{T} P = 16/(13)^2 \xrightarrow{T} P = 16/169 \xrightarrow{T} P = 0.0947$$

Posibles dificultades: En esta actividad el alumno se enfrenta a las dificultades que caracterizan a la resolución de problemas en la actividad matemática, la dificultad de convertir unidades lingüísticas a unidades simbólicas o numéricas, realizando la conversión de registros cuya finalidad principal es la resolver el problema con tratamientos de potente economía cognitiva. Las dificultades se pueden presentar como:

D1: La dificultad que encuentra el alumno en la conversión de un registro verbal que corresponde a un registro multifuncional hacia un registro simbólico, esta conversión es un caso de no congruencia, porque las unidades significativas de ambos registros no conservan el mismo orden de un registro a otro.

D2: Se presenta una dificultad de menor grado en los tratamientos numéricos finales que conducen a la obtención de la respuesta final.

<u>Actividad-5</u>: Coordinación de registros con logaritmos en base no decimal y conversión al registro numérico.

Los técnicos del Instituto Peruano del Medio Ambiente y Recursos Naturales, evaluando la velocidad de deforestación de cierta región, relacionaron a través de la siguiente fórmula, el número “x” de hectáreas que serán deforestadas en “t” años:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right), \quad \text{con } \; x < 10000$$

Objetivo general: Analizar las dificultades que encontrará el alumno en una situación contextual presentada con un registro verbal y un registro simbólico con logaritmo en base distinta a la base decimal. Al igual que la actividad anterior el alumno se enfrentará a una conversión no congruente y debe realizar tratamientos con mayor dificultad en el registro numérico decimal y fraccionario.

La actividad 5-a es la siguiente:

a) **Para un tiempo igual a 4 años, determine ¿cuántas hectáreas fueron deforestadas?**

Objetivo específico: Analizar las dificultades ocasionadas por una deficiente aprehensión lingüística, esta será determinante para lograr la conversión necesaria del registro verbal hacia el registro simbólico y obtener la puntuación pedida

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Lograr la aprehensión lingüística sobre el siguiente registro verbal planteado. Así tenemos que expresión: "*para un tiempo igual a 4 años*", esta unidad significante en este registro verbal corresponde a *t(x)* en el registro simbólico. Otra conversión se presenta sobre la unidad significante "*¿cuántas hectáreas fueron deforestadas?*" que corresponde a *x* en el registro simbólico.

Luego de la conversión (C) de las unidades significantes, en el registro simbólico tenemos:

Registro Verbal		Registro Simbólico
Para un tiempo igual a 4 años, determine ¿cuántas hectáreas fueron deforestadas?	C →	$4 = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right)$

ii) Realizar tratamientos en el registro numérico aplicando la definición de logaritmos para obtener la solución:

$$4 = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right) \xrightarrow{T} \frac{10000 - x}{10000} = (0,25)^4$$

$$\frac{10000 - x}{10000} = (0,25)^4 \xrightarrow{T} 10\ 000 - x = 39,0 \rightarrow x = 9960.9$$

En 4 años, aproximadamente 9961 hectáreas fueron deforestadas.

Posibles dificultades: En esta actividad, como en la anterior actividad, el alumno se enfrenta a las dificultades que caracterizan a la resolución de problemas en la actividad matemática. Los tratamientos en el registro numérico presentan una mayor dificultad operativa por presentarse en formas exponenciales y fraccionarias. Las dificultades se pueden presentar como:

D1: Que en la conversión del registro verbal hacia el registro simbólico, el alumno no identifique las unidades significantes de alguno de los registros o no realice la correspondencia correcta entre dichas unidades significantes.

D2: Que el alumno realice tratamientos numéricos incorrectos, asociados a la dificultad operativa que presentan los registros numéricos en forma decimal y por la representación del número del logaritmo que está en el registro numérico fraccionario.

La actividad 5-b es la siguiente:

b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas.

Objetivo específico: Analizar las dificultades que se presenten cuando el alumno realice la conversión del registro verbal hacia el registro simbólico en esta actividad contextualizada sobre la función logarítmica aplicada a una situación ecológica.

Posible solución: Esta actividad puede resolverse en los siguientes pasos:

i) Lograr la comprensión lingüística sobre el siguiente registro verbal planteado. Así tenemos la expresión: "*el tiempo de deforestación*", esta unidad significante en este registro verbal corresponde a *t(x)* en el registro simbólico. Otra conversión se presenta sobre la unidad significante "*7500 hectáreas*" que corresponde a *x* en el registro simbólico.

Luego de la conversión (C) de las unidades significantes, en el registro simbólico tenemos:

Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas.	$\xrightarrow{C}$	$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000-7500}{10000}\right)$
Registro Verbal		**Registro Simbólico**

ii) Realizar tratamientos en el registro numérico aplicando la definición de logaritmos para obtener la solución:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000-7500}{10000}\right) \xrightarrow{T} t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{2500}{10000}\right)$$

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{2500}{10000}\right) \xrightarrow{T} t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{T} t(x) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{T} t(x) = 1$$

Para deforestar 7500 hectáreas debe transcurrir 1 año.

Posibles dificultades: En esta actividad, como en la anterior actividad, el alumno se enfrenta a las dificultades que caracterizan a la resolución de problemas en situaciones contextualizadas. En esta actividad la conversión es cuasi-inmediata, por la facilidad en la determinación de las unidades significantes y su correspondencia en ambos registros; así mismo los tratamientos en el registro numérico presentan una menor dificultad operativa, respecto a la actividad anterior, por la posición de la incógnita *t(x)*. Las posibles dificultades son:

D1: Que en la conversión del registro verbal hacia el registro simbólico, el alumno no identifique las unidades significantes de alguno de los registros mencionados.

D2: Que en los tratamientos numéricos a realizar el alumno no aplique correctamente la significancia operativa asociada al registro o aplique de forma incorrecta la propiedad del logaritmo de la base que resulta la unidad, indicada en la propiedad:

P1: $\log_b b = 1$ ……………… Propiedad del logaritmo de la base

5.7 RESULTADOS OBTENIDOS DE LA APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DEL SEGUNDO INSTRUMENTO.

Estas actividades se aplicaron a un grupo de 6 alumnos que formaron tres duplas para realizar una intervención colaborativa. Estos alumnos de educación secundaria ya habían recibido la enseñanza de la enseñanza de la función logarítmica en sus respectivos colegios. Se contó con la participación entusiasta de los participantes. Haremos un análisis de las dificultades recurrentes encontradas por los alumnos en cada una de las actividades propuestas:

ACTIVIDAD PROPUESTA	DUPLAS QUE ACERTARON	TUVIERON DIFICULTAD	PORCENTAJE DE ACIERTOS
Pregunta 1-a	3	0	100 %
Pregunta 1-b	3	0	100 %
Pregunta 2-a	2	1	66.6 %
Pregunta 2-b	2	1	66.6 %
Pregunta 3	2	1	66.6 %
Pregunta 4-a	2	1	66.6 %
Pregunta 4-b	3	0	100 %
Pregunta 5-a	2	1	66.6 %
Pregunta 5-b	2	1	66.6 %
PROMEDIO DE ACIERTOS:			77.73%

Tabla 12. Resultados de las actividades didácticas sobre las duplas.

Los resultados de esta tabla muestran que las dos primeras actividades no presentaron dificultad para los alumnos, esto se justifica porque estas son actividades de tratamiento en el registro simbólico, que según Duval (2004) estas transformaciones tienen éxito si el alumno conoce las reglas del propio registro; en este caso se ha demostrado para la actividad 1-a que los alumnos conocen la definición de logaritmos en la forma exponencial, que desde el análisis de los libros didácticos, habíamos comprobado que es la forma que se enseña en el nivel escolar. También se ha probado en el caso de la actividad 1-b que los alumnos conocen las propiedades básicas de los logaritmos, este conocimiento les ha permitido la realización de los tratamientos de forma exitosa.

En las actividades 2-a y 2-b, se presentan las dificultades propias de la actividad de conversión. Se comprueba la hipótesis de Duval (2004) que respecto a esta transformación nos plantea que la conversión es la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de alcanzar para la mayoría de alumnos. También propone que: “la no congruencia de las representaciones tiene efectos de otro orden: con mucha frecuencia conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión”. (p. 56). La no congruencia entre las expresiones dadas en registro simbólico $f(x) = \log_2(x + 4)$, $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$ y los registros gráficos correspondientes a estas expresiones aumentaron la dificultad en esta actividad.

En la actividad 3 también se presentaron dificultades ocasionadas por el sentido u orientación de la conversión. Al proponerles a los alumnos la actividad en el registro gráfico para que obtengan el mismo objeto matemático, pero expresado en el registro simbólico, se presenta lo que Duval (2004) ha previsto como una dificultad cognitiva cuando menciona que: “todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa […] porque las unidades significantes del gráfico no están de ninguna manera determinadas por la relación con los puntos marcados […] esas unidades están determinadas por algunos valores visuales de la curva” (p. 60).

En las actividades 4 y 5, los alumnos tendrían dificultades creadas por la no congruencia de la conversión y principalmente por la coordinación que debían de realizar entre los distintos registros empleados en estas actividades. Duval (2004) propone que: “la consideración de varios registros de representación sólo se justifica en las situaciones en que se comprueba que es necesario un cambio de registro por razones de economía de tratamiento”. (p. 63). Así mismo hemos observado en el análisis de libros didácticos, los autores no recurren con frecuencia a la utilización de diversos registros en la formación de los conceptos matemáticos, esto crea una dificultad cuando al alumno se le propone actividades con diversos registros, como el registro verbal y registro simbólico. Duval, en su misma obra, señala que: “lo necesario para favorecer la coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación”. (p. 17).

A continuación haremos un análisis de las respuestas de las duplas sobre las actividades didácticas aplicadas:

<u>Actividad-1</u>: Análisis de las respuestas de las duplas.

Halle el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\mathbf{\log_2(\log_4 x) = 4}$

En vista que las tres duplas tuvieron respuestas acertadas sobre esta actividad, haremos el análisis de una de las duplas:

Dupla-1: Esta dupla logra los tratamientos previstos y nos dejan su comentario sobre las dificultades encontradas:

Stephanie: "Este problema me resultó sencillo, ya que había practicado con problemas de similar estructura"

Brigitte: "Tuve dificultad en la estructura, no estaba segura si el 2 era base o estaba en base 10 o el número era 2 elevado a $\log_4 x$"

La solución presentada por esta dupla fue la siguiente:

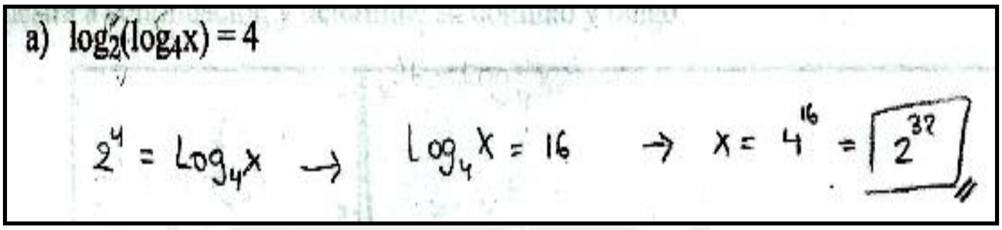


Figura 52. Respuesta correcta en la actividad didáctica 1-a.

Podemos comentar que Brigitte, tuvo dificultad en la identificación de las unidades significantes del registro simbólico, porque la base del logaritmo es una de las unidades significantes que ella no distinguía, tal como ella lo afirma en su comentario.

b) $\mathbf{\log(x + 4) = \log x + \log 4}$

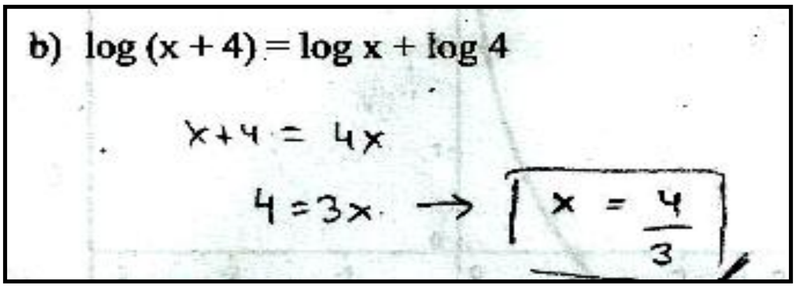
En vista que las tres duplas tuvieron respuestas acertadas sobre esta actividad, haremos el análisis de una de las duplas:

Dupla-1: Esta dupla logra los tratamientos previstos y nos dejan su comentario sobre las dificultades encontradas:

Stephanie: "Tuve un poco de dificultad para recordar una de las propiedades porque confundí la forma $\log(x+4) = \log x + \log 4$ y no sabía cuál era la propiedad correcta"

Brigitte: "Esta actividad si la resolví más rápidamente ya que me di cuenta que era una de las propiedades básicas de suma a multiplicación".

La solución presentada por esta dupla fue la siguiente:


b) $\log(x+4) = \log x + \log 4$

$x + 4 = 4x$

$4 = 3x \rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$

Figura 53. Respuesta correcta en la actividad didáctica 1-b.

Esta actividad no presenta mayor dificultad porque las transformaciones realizadas son tratamientos en el registro simbólico, basadas en las propiedades de los logaritmos que ellos han aprendido.

<u>Actividad-2</u>: Análisis de las respuestas de las duplas.

La actividad propuesta fue:

Bosqueje el gráfico de las siguientes funciones y determine su dominio y rango.

a) $f(x) = \log_2(x + 4)$

Las duplas 1 y 2 lograron presentar los bosquejos de las gráficas en forma correcta. La dupla 1 asigna los valores de: $x = 0;\ x = -3,\ x = -2$ y $x = -4$; en cambio la dupla 2 asigna los valores de $x = 0,\ x = 4$ y $x = -2$.

La dupla 1 nos deja su comentario sobre las dificultades de esta actividad:

Stephanie: “Me resultó difícil porque desconocía la forma que debía tener la función logaritmo pero me ayudé cuando reemplacé en x y en y”.

La dupla 2 nos deja su comentario sobre las dificultades de esta actividad:

Deysi: “No sabía como era la gráfica de logaritmos, más aún se me hace difícil graficar funciones, eso me confundió aún más”.

La gráfica obtenida por ambas duplas es similar, mostramos la gráfica obtenida por la dupla 2:

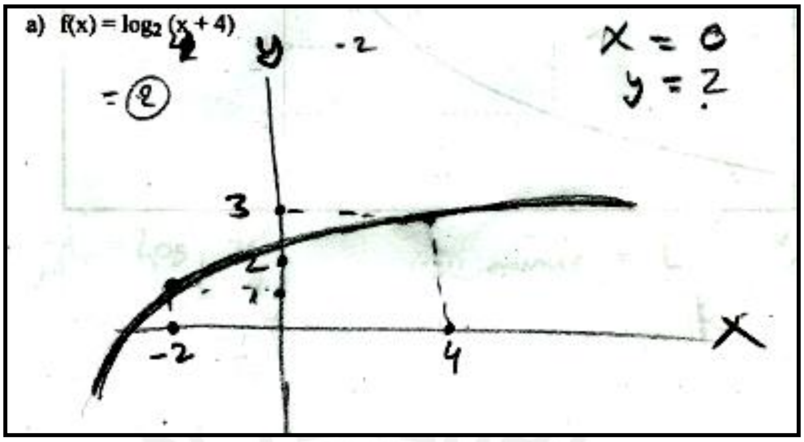


Figura 54. Respuesta correcta en la actividad didáctica 2-a.

En vista que estamos ente una conversión no congruente, la dupla 3 no logra obtener la gráfica correcta, porque no logra obtener el registro tabular correcto, asigna un valor x = 0 y obtiene y = 2; así también asigna x = 4 y obtiene y = 3.

La dupla 3 nos deja su comentario sobre las dificultades de esta actividad:

Nydia: "*En esta actividad, primero no me acordaba como desarrollarlo, una de mis dudas era cómo era una función logarítmica, hasta que preguntamos y el Profesor nos ayudó y nos recordó las gráficas y también nos dijo que teníamos que dar valores a x para poder encontrar los valores de y. Al dar los valores a x me salía un número fraccionario hasta que tuve que dar otros valores hasta llegar a la respuesta*"

La gráfica que obtuvo esta dupla 3 fue:

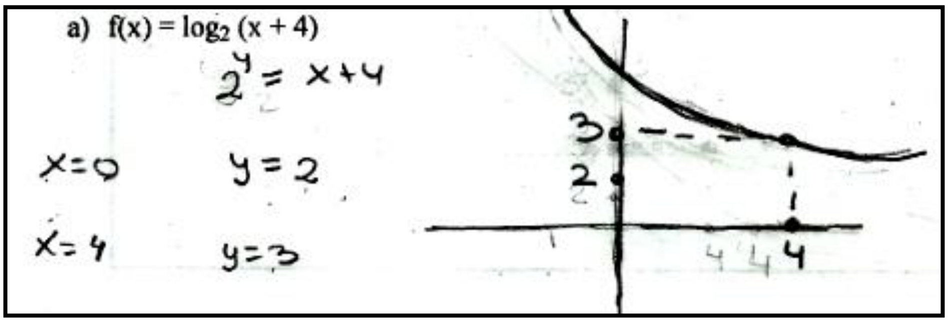


Figura 55. Respuesta incorrecta en la actividad didáctica 2-a.

Se observa que según el análisis preliminar de esta actividad logra superar la dificultad D1 y D2, es decir logra obtener los valores para x,y, pero no logra representar en forma correcta dichos valores obtenidos, lo esto no consigue la gráfica correcta.

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

Las duplas 1 y 2 lograron presentar los bosquejos de las gráficas en forma correcta. La dupla 1 asigna los valores de: $x = 1;\ x = 1/9,\ x = 1/81,\ x = 9$ y x = 81, en cambio la dupla 2 asigna los valores de x = 9, x = 1/9 y x = 81.

La dupla 1 nos deja su comentario sobre las dificultades de esta actividad:

Stephanie: "*Similar a lo anterior, sin embargo tuve mayor dificultad en hallar el dominio y el rango*"

La gráfica obtenida por ambas duplas es similar, mostramos la gráfica obtenida por la dupla 1:

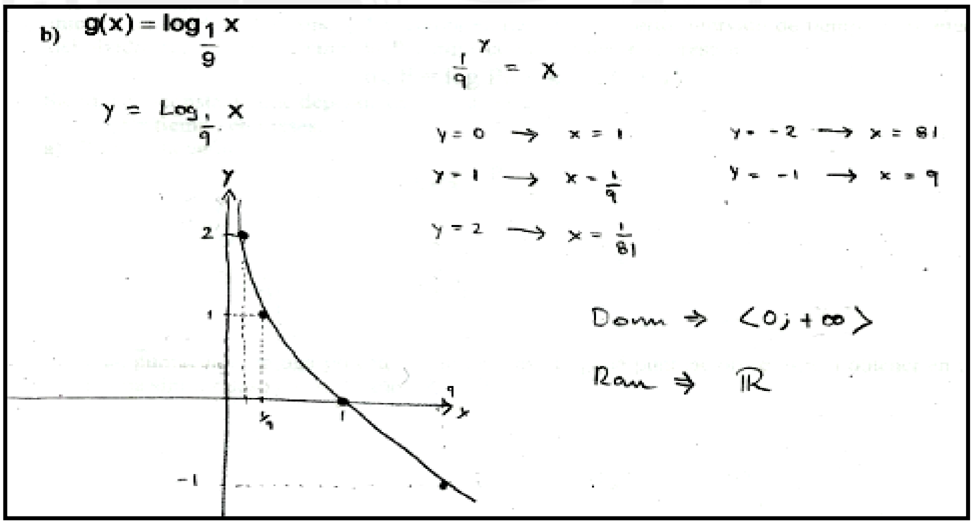


Figura 56. Respuesta correcta en la actividad didáctica 2-b.

Sobre la dupla 3 se observa que según el análisis preliminar de esta actividad no logran superar las dificultades prevista. Al respecto nos comentan:

Nydia: *"En este ejercicio, primero no me acordaba como desarrollarlo, o los principios que tenía que aplicar para hacerlo. Una de mis dudas era de cómo era una función logarítmica, hasta que el Profesor nos ayudó y nos recordó las gráficas y también nos dijo que para obtenerla teníamos que dar valores a x, para poder* *encontrar al mismo tiempo los valores de y. Al darles valores a x, me salía y un número fraccionario, así que tuve que darles otros valores hasta llegar a la respuesta".*

Cabe señalar que cuando revisamos sus resultados, el bosque de gráfica no era correcto, porque no obtuvo los puntos correctos, por error en los reemplazos y no lleva en forma correcta los puntos al sistema cartesiano. Esto verifica la complejidad cognitiva de las conversiones, según la teoría de Duval (1995).

<u>Actividad-3</u>: Análisis de las respuestas de las duplas.

Obtenga la regla de correspondencia de la función logarítmica cuyo gráfico se muestra a continuación y determine su dominio y rango:

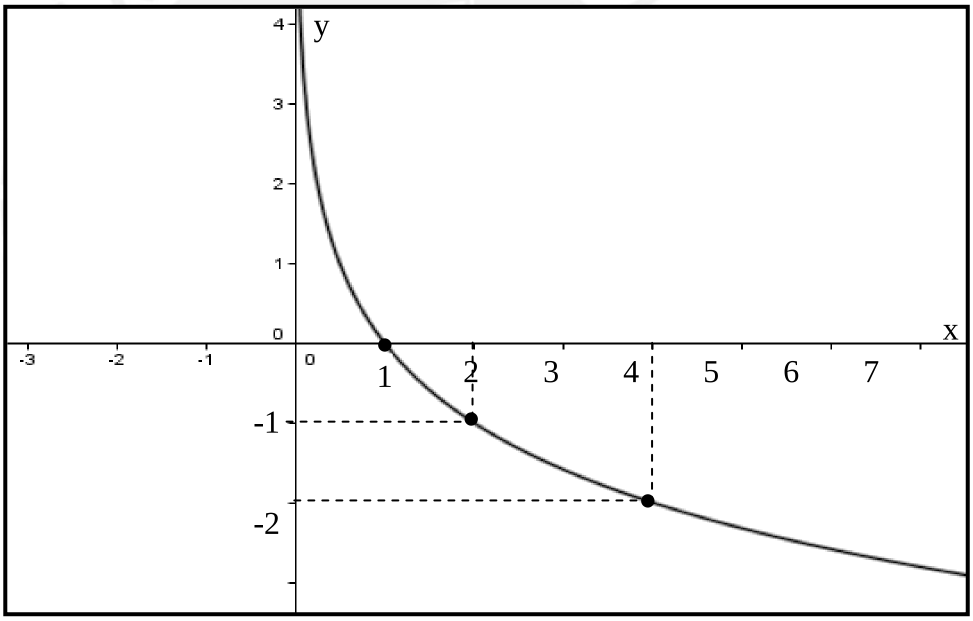


Figura 57. Gráfica de una función logarítmica de la Actividad 3.

Las duplas 1 y 2 lograron hallar la regla de correspondencia correcta. La dupla 1 asigna los valores de: y = -2; x = 4 para obtener a = 1/2, en cambio la dupla 2 asigna los valores de y = -1, x = 2 y obtiene b = 1/2.

La dupla 1 nos deja su comentario sobre las dificultades de esta actividad:

Stephanie: "*Me gustó este ejercicio porque sólo debía remplazar los datos en una función logarítmica*"

Los resultados obtenidos por la dupla 1 fueron los siguientes:

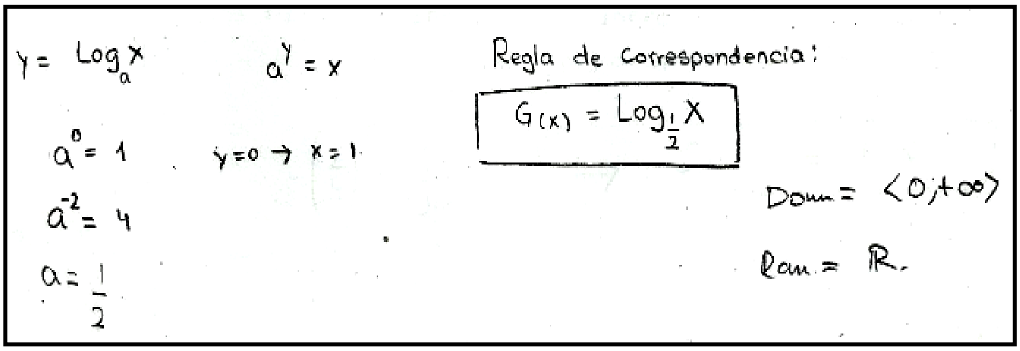


Figura 58. Respuesta correcta en la actividad didáctica 3.

Los alumnos de la dupla 3, que no tuvieron éxito en lograr la regla de correspondencia, señalan que:

Nydia: "*Me dificultó el gráfico y mucho más encontrar una función logarítmica. Así que empecé a dar valores a x y llegué a una respuesta*"

En este comentario, encontramos que la dificultad estuvo en lograr la aprehensión perceptiva que requiere el registro gráfico, que permite que el alumno, mediante una visualización correcta, logre determinar signos del gráfico, como las coordenadas que allí están expresadas.

<u>Actividad-4</u>: Análisis de las respuestas de las duplas.

La ley de Ebbinghaus del olvido establece que si una tarea se aprende en un inicio a un nivel de desempeño ***Po***, entonces, después de cierto intervalo de tiempo ***t*** por efecto del olvido, el nivel del desempeño ***P*** cumple con la siguiente expresión:

$$\log P = \log Po - c.\log(t+1)$$

Siendo: c = constante que depende del tipo de tarea;

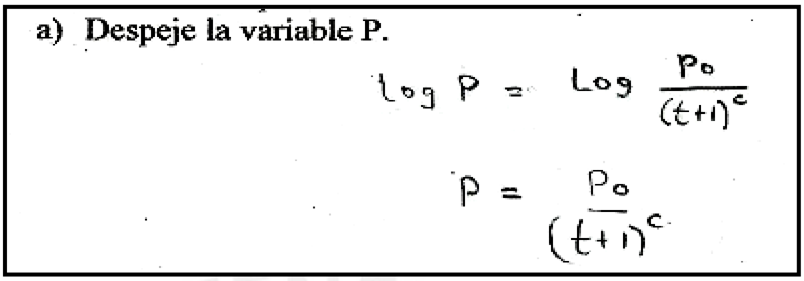
t = tiempo en meses.

a) Despeje la variable ***P***.

Las duplas 1 y 2 logran despejar ***P*** de manera correcta, analicemos los comentarios que hacen sobre esta actividad:

Stephanie: "*Me resultó difícil porque nunca había resuelto un problema así, sin embargo al pedir ayuda, pude darme cuenta que sólo debía conocer una de las propiedades básicas de logaritmos*".

Los resultados obtenidos por a dupla 1 fueron:


a) Despeje la variable P.

$$\log P = \log \frac{Po}{(t+1)^c}$$

$$P = \frac{Po}{(t+1)^c}$$

Figura 59. Respuesta correcta en la actividad didáctica 4-a.

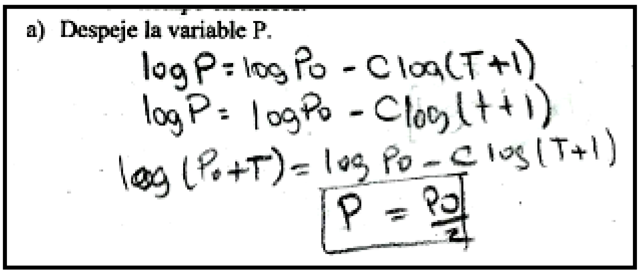
La dupla 3 realiza tratamientos incorrectos y comenta sus dificultades:

Nydia: "*Se me hizo difícil despejar la variable ya que no sabía como lo podía hacer. Así que la forma más rápida que encontré fue poner valores numéricos a las letras*"

b) Si su puntuación en una prueba de biología es 16. ¿qué puntuación se espera obtener en una prueba similar después de un año? Asuma: c = 2.

En esta actividad, las tres duplas obtienen soluciones correctas, observamos la dificultad que presenta la dupla 3, que en la actividad 4-a, no logra obtener un valor correcta para P pues la actividad se realiza en el registro simbólico con letras, pero para la actividad 4-b logra tener éxito pues los tratamientos los realiza en el registro numérico.

Las respuestas de ambas actividades obtenidas por la dupla 3 fueron:


a) Despeje la variable P.

$$\log P = \log Po - C \log(T+1)$$

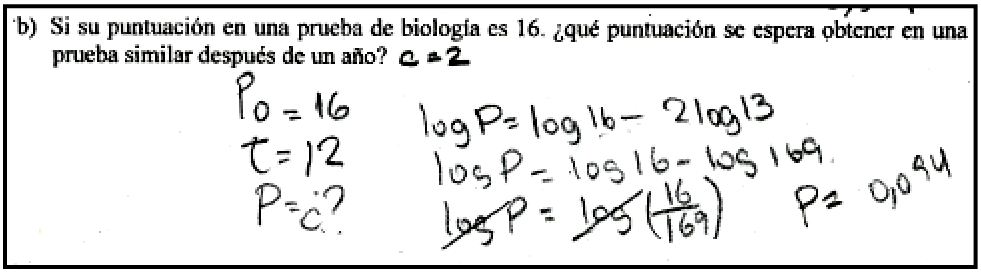
$$\log P = \log Po - C \log(t+1)$$

$$\log(Po+T) = \log Po - C \log(T+1)$$

$$\boxed{P = \frac{Po}{2}}$$

Figura 60. Respuesta incorrecta en la actividad didáctica 4-a.

Se observan tratamientos incorrectos, debido al desconocimiento de las propiedades básicas de los logaritmos.


b) Si su puntuación en una prueba de biología es 16. ¿qué puntuación se espera obtener en una prueba similar después de un año? c = 2

$P_0 = 16$
$t = 12$
$P = ¿?$

$\log P = \log 16 - 2\log 13$
$\log P = \log 16 - \log 169$
$\cancel{\log} P = \cancel{\log}\left(\frac{16}{169}\right)$ $P = 0{,}094$

Figura 61. Respuesta correcta en la actividad didáctica 4-b.

Se observa una coordinación adecuada entre el registro verbal en el cual se enuncia la actividad y un remplazo correcto de los valores dados en la expresión simbólica del logaritmo dado, lo cual le permite la realización de tratamientos aplicando de forma correcta las propiedades básicas de los logaritmos.

Actividad-5: Análisis de las respuestas de las duplas.

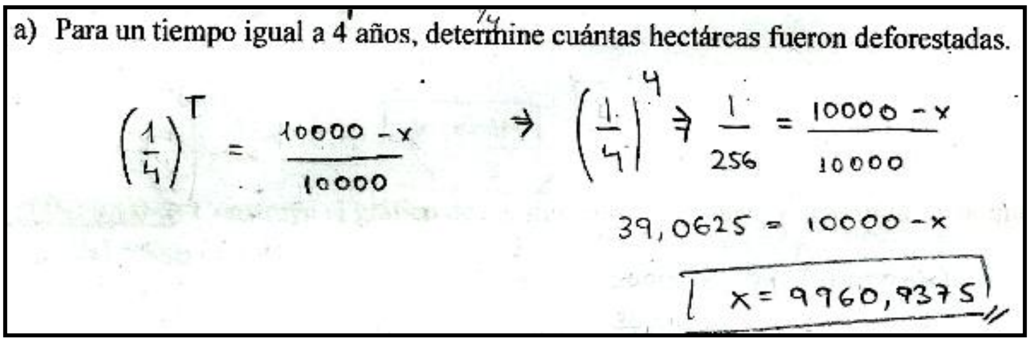
Los técnicos del Instituto Peruano del Medio Ambiente y Recursos Naturales, evaluando la velocidad de deforestación de cierta región, relacionaron a través de la siguiente fórmula, el número “x” de hectáreas que serán deforestadas en “t” años:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right), \quad \text{con} \quad x < 10000$$

a) Para un tiempo igual a 4 años, determine cuántas hectáreas fueron deforestadas.

Esta pregunta ha sido considera como la de mayor dificultad por las tres duplas, porque es un problema contextualizado presentado en el registro verbal y simbólico, lo que exige al alumno una doble aprehensión: lingüística y simbólica. Las duplas 1 y 2 lograron las respuestas correctas.

Los resultados obtenidos por la dupla 1 son:


a) Para un tiempo igual a 4 años, determine cuántas hectáreas fueron deforestadas.

$\left(\frac{1}{4}\right)^T = \frac{10000 - x}{10000} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^4 \Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{10000 - x}{10000}$

$39{,}0625 = 10000 - x$

$\boxed{x = 9960{,}9375}$

Figura 62. Respuesta correcta en la actividad didáctica 5-a.

Las alumnas que conforman la dupla 3 no pudieron superar las dificultades que esta actividad presentaba, sobre sus dificultades nos comentan lo siguiente:

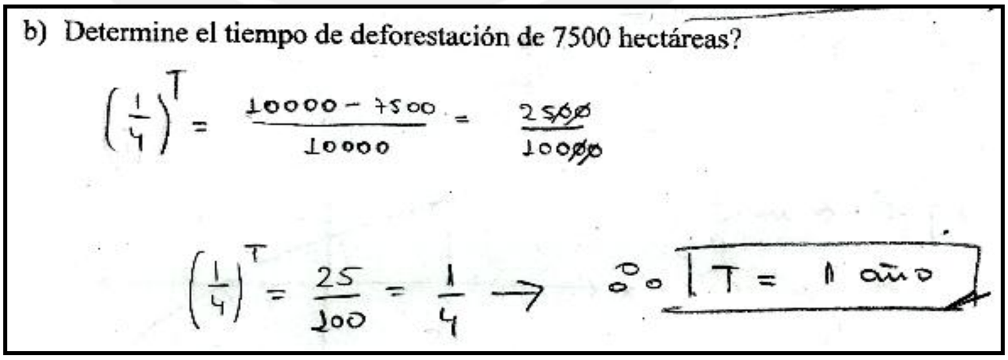
Camila: "*Para mí esta pregunta resultó complicada ya que hasta entonces no había resuelto una función logarítmica así, intenté resolverla, dialogamos con mi compañera pero no llegamos a ninguna solución hasta que lo resolvimos de manera logarítmica*"

En este comentario de la alumna se aprecia que no logran las dos aprehensiones exigidas por el problema, la dificultad "fuerte" la comentan sobre el registro simbólico, donde no logran distinguir las unidades significativas de dicho registro.

b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas.

Sobre esta actividad todas las duplas preguntaban qué significaba t(x), les resultaba difícil comprender que el tiempo estaba en función de una variable x. Porque para la mayoría de casos, el tiempo es la variable independiente. Como en los casos anteriores, las duplas 1 y 2 lograron realizar los tratamientos correctos. Una alumna de la dupla 1 nos comenta:

Stephanie: "*Para resolver este ejercicio, sólo necesité remplazar los datos en la función*".



b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas?

$$\left(\frac{1}{4}\right)^T = \frac{10000-7500}{10000} = \frac{25\cancel{00}}{100\cancel{00}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^T = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \rightarrow \therefore \boxed{T = 1 \text{ año}}$$

Figura 63. Respuesta correcta en la actividad didáctica 5-b.

Las alumnas de la dupla 3, a pesar de que esta actividad les pareció de menor dificultad, no lograron la respuesta debido a que remplazaron el valor de x = 7500 en la expresión t(x), por lo que concluyen que su respuesta es: t = 1/7500, como se muestra a continuación

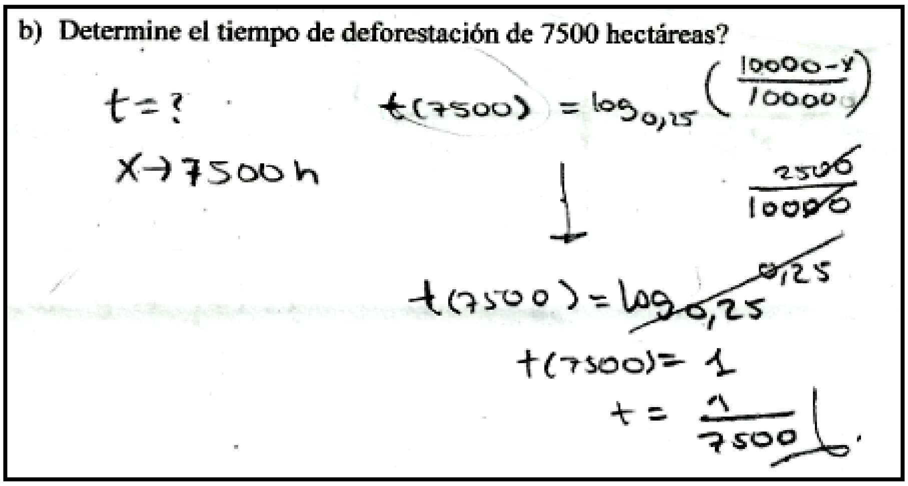


Figura 64. Respuesta incorrecta en la actividad didáctica 5-b.

5.8 CONCLUSIONES SOBRE LOS RESULTADOS DEL SEGUNDO EXPERIMENTO

Luego de analizar los resultados de este segundo experimento podemos mostrar las siguientes conclusiones:

- Los alumnos no tuvieron mayores dificultades cuando la actividad requería de transformaciones en un mismo registro, estos tratamientos se realizaron en el registro simbólico, lo cual demuestra que los alumnos conocían las definiciones y propiedades que subyacen a dicho sistema semiótico. Las actividades que los alumnos realizaron con éxito fueron las designadas como: 1-a, 1-b y 4-b. Esto comprueba una primera hipótesis de Duval (2004), aquella que nos plantea que los tratamientos no presentan mayor dificultad cognitiva cuando se conocen las reglas de dicho sistema semiótico. En este caso, los alumnos conocían la definición y las propiedades básicas de los logaritmos.
- Se comprueba una segunda hipótesis de Duval (1995), aquella que nos propone que: “la dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada”. (p.53). Encontramos que los alumnos fueron enfrentados a actividades con el más alto grado de no congruencia, porque al fragmentar el registro de partida como el registro simbólico dado, por ejemplo la función logarítmica propuesta en la actividad 2-a: $f(x) = \log_2(x+4)$ encontraremos que sus unidades significantes no cumplen con

ninguno de los tres criterios de congruencia con las unidades significantes del registro de llegada, en este caso el registro gráfico.

- Se comprueba una tercera hipótesis de Duval (1995) que nos propone que: “todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa”. (p. 60). Esto se ha presentado en la actividad 3 cuando los alumnos debían realizar la conversión gráfico $\rightarrow$ escritura simbólica de una ecuación. En la dupla que no tuvo éxito en esta actividad, también se presentó otra dificultad que Duval (2004) había advertido en su teoría: “las dificultades que se tienen por la no-congruencia de la conversión, pueden además agravarse por el desconocimiento de uno de los dos registros de representación”. (p. 60). Estos alumnos desconocían cómo debía expresarse una regla de correspondencia obtenida a partir de un gráfico cartesiano.
- Se comprueba una cuarta hipótesis de Duval (1995) que nos propone que cuando el aprendizaje de los alumnos se ha realizado, de manera preferente en un solo registro, “casi siempre los aprendizajes se quedan mono-registro […] sólo una comprensión fundada en la coordinación de los registros, da tales posibilidades de transferencia”. (p. 75). En las actividades 4 y 5, los alumnos se han enfrentado a situaciones contextuales que han requerido la presentación en varios registros: el registro verbal con la función de presentar los enunciados y el registro simbólico que presenta al objeto matemático: la función logarítmica. Una dupla no logra una coordinación adecuada entre el registro verbal en el que plantea los datos y el tratamiento correcto en el registro simbólico, no aplicando las reglas correctas en estos tratamientos.
- Como se había previsto, tomando en cuenta la experiencia del Profesor del curso, se comprobó que los alumnos, cuando se sometieron a situaciones que involucran diversos registros, como las actividades que presentan los logaritmos en contextos aplicados a la realidad, éstas ofrecieron mayor dificultad cognitiva debido a la necesidad de la coordinación entre los diversos registros empleados. Estas actividades que mostraron estas dificultades fueron las designadas como: 5-a, 5-b.

CAPÍTULO 6

CONTRASTES

Y

CONSIDERACIONES

FINALES

CAPÍTULO 6

CONTRASTES Y CONSIDERACIONES FINALES

6.1 CONTRASTE ENTRE LO ESPERADO Y LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA EXPERIMENTACIÓN.

Con el propósito de analizar las posibles dificultades que producen el estudio de la función logarítmica en nuestros alumnos, en nuestro trabajo seguimos los siguientes pasos:

- Realizamos una revisión de Libros didácticos, analizando las transformaciones realizadas en el aprendizaje de la función logarítmica, con la finalidad de identificar algunas dificultades en la enseñanza del tema.
- Realizamos una entrevista al Profesor del curso para recoger información sobre las dificultades encontradas cuando los alumnos realizan actividades sobre la función logarítmica.
- Diseñamos las actividades para cuya solución sea necesario realizar transformaciones entre distintos registros, con la finalidad de identificar los problemas de aprendizaje de los alumnos sobre la función logarítmica.

El esquema muestra que dificultades encontradas en los Libros didácticos, con las encontradas por el Profesor del curso y aquellas que fueron analizadas en investigaciones anteriores contribuyeron a nuestro objetivo de analizar las dificultades que se presentaron en la realización de las actividades propuestas en el segundo instrumento de investigación.

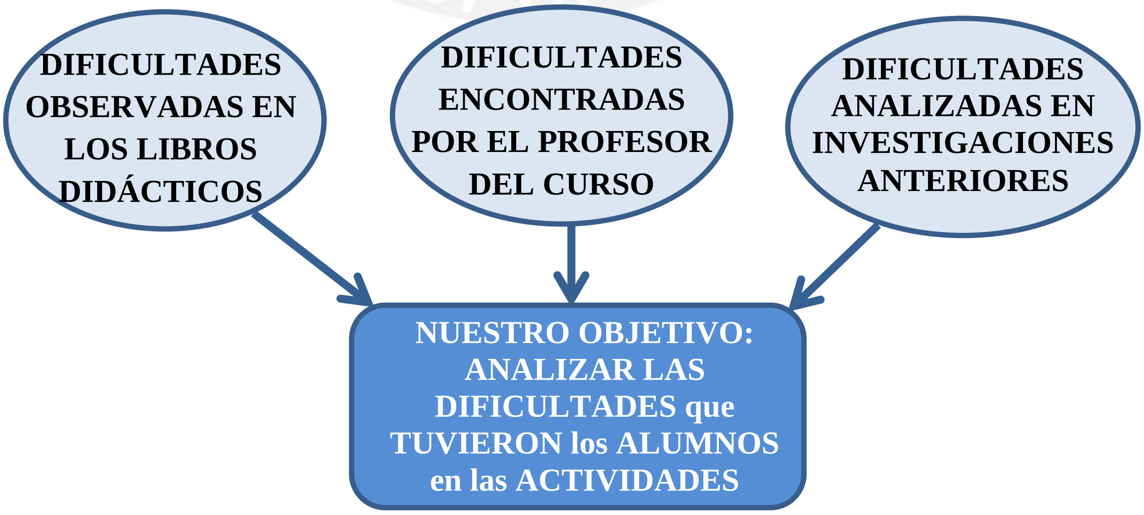


Figura 65. Triangulación sobre las dificultades encontradas en las actividades.

6.1.1 Sobre Libros didácticos vs. Actividades del segundo instrumento:

- En los Libros didácticos encontramos que la presentación de los contenidos está basada en la enseñanza con el predominio del registro simbólico para la presentación de la definición de función logarítmica con el predominio de transformaciones en un solo registro; esta limitación ha sido observado en las actividades 4 y 5 cuando al alumno se le proponen actividades que requieren la coordinación entre diversos registros. Los alumnos se enfrentan a los registros verbales que deben ser interpretados para ser utilizados en los registros simbólicos y numéricos.

- En los Libros didácticos se observó que el aprendizaje de logaritmos estuvo poco relacionado con los diversos contextos. Los alumnos fueron enfrentados a actividades relacionadas con las aplicaciones de los logaritmos a la realidad, como ha ocurrido con las actividades 4 y 5. Estas fueron las actividades de mayor dificultad por la diversidad de registros que se emplean.

- Los Libros didácticos contenían un número reducido de actividades resueltas que limitan la presentación de tratamientos y conversiones que contribuyan al aprendizaje de la función logarítmica. Por esto, en la realización de actividades como la actividad 3, algunos alumnos como Stephanie mencionaron que: "*Me resultó difícil porque nunca había resuelto un problema así …*", los libros didácticos pueden contribuir presentando actividades con tratamientos y conversiones que contribuyan al aprendizaje de la función logarítmica.

6.1.2 Sobre el Profesor del curso vs. Actividades del segundo instrumento:

- El Profesor del curso propuso que una de las dificultades que tiene el estudiante es la identificación de los pares ordenados; esta dificultad fue encontrada en la actividad 3, cuando se le propone el registro gráfico y en la que pide obtener la regla de correspondencia, esta aprehensión perceptiva en el registro cartesiano es necesaria para la conversión inversa del registro gráfico hacia el registro simbólico.

- El Profesor del curso señala así mismo que el alumno no tenía mucha práctica en la traducción de enunciados verbales al lenguaje simbólico, así como la identificación de los valores de los parámetros de la expresión logarítmica. Estas dificultades se presentaron en las actividades 4 y 5, donde la actividad se presenta en los registros verbal y simbólico. Algunos alumnos han encontrado la mayor dificultad en esta actividad, porque era necesaria una adecuada coordinación entre los registros mencionados.

- El Profesor del curso coincide con los alumnos en que la actividad 5 es la que presenta mayor dificultad, según afirma, pues requiere la comprensión del enunciado, luego la operatividad algebraica y la notación exponencial.

6.1.3 Sobre el Investigador vs. Actividades del segundo instrumento:

Haciendo el análisis comparativo entre las dificultades previstas por el investigador y las dificultades observadas en los alumnos cuando desarrollaron las actividades didácticas, podemos afirmar que:

- En la actividad 1 los alumnos no tuvieron dificultad, a pesar que el investigador había previsto algunas dificultades posibles debida a los tratamientos en el registro numérico en forma exponencial. Esto se debe a que las transformaciones en un mismo registro no presentan mayor dificultad cuando el alumno ha aprendido las propiedades del referido sistema semiótico.
- Las dificultades se presentan a partir de la actividad 2, donde el investigador coincide entre lo previsto y lo observado ya que el alumno presenta dificultad en asignar valores adecuados para obtener el registro tabular. Esto ocurrió principalmente en la actividad 2-b cuando se le propuso al alumno que graficara la función logarítmica: $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$. También se observó que el alumno no tuvo mayor dificultad en la actividad de colocar los puntos en el plano cartesiano y así dar un bosquejo de la función logarítmica que se le había pedido.
- En la actividad 3, se había previsto que el alumno tendría mayor dificultad pues se enfrenta a una conversión inversa, algunos alumnos preguntaban ¿qué es una regla de correspondencia? ¿cómo hago para obtenerla?. Algunos alumnos como Nydia comentaron: "*Se me hizo difícil despejar la variable ya que no sabía cómo lo podía hacer*".
- En la actividad 4 y 5, el alumno se enfrenta a diversos registros: registro verbal, registro simbólico y registro numérico. Estas actividades presentaron mayor dificultad, tal como se había previsto en el análisis de libros, así como en la opinión del Profesor del curso y en el análisis del investigador.

6.2 CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN.

Luego de concluir con el análisis de los resultados de la parte experimental, llegamos a las conclusiones que dan respuesta a nuestras dos preguntas de investigación:

- ***¿Qué problemas de aprendizaje se presentan en los alumnos cuando estudian la función logarítmica?***

  Principalmente los problemas de aprendizaje observados se presentaron según lo previsto en las hipótesis de Duval (2004): en primer lugar, las dificultades cuando los alumnos necesitan realizar conversiones entre registros, estas dificultades son ocasionadas por la no congruencia y el sentido de la conversión; y en segundo lugar, las dificultades cuando requiere la coordinación entre los diversos registros que involucran una situación contextual con aplicación de la función logarítmica. En menor grado se presentaron dificultades en los tratamientos, cuando las reglas de dichos sistemas semióticos eran desconocidas o presentaban dificultad propia de dicho sistema.

- ***¿Qué transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica se deben realizar cuando se aprende la función logarítmica y cuáles presentan mayores dificultades?***

  Cuando el alumno realiza su aprendizaje de la función logarítmica realiza tratamientos principalmente en el registro simbólico donde emplea la definición y las propiedades de los logaritmos para obtener otras representaciones en el mismo registro; además el alumno realiza transformaciones que involucran un cambio de registro conocidas como las conversiones de registros: con mayor frecuencia del registro simbólico al registro gráfico, y en menor grado la conversión inversa. También hemos observado la utilidad del registro verbal en situaciones contextualizadas donde la función logarítmica se emplea en la formación de conocimientos de otras disciplinas científicas. Así de esta manera logramos entender que la actividad realizada sobre la función logarítmica presenta dificultades para el alumno y que la naturaleza y localización de estas se encuentra principalmente, en la realización de las transformaciones semióticas: en menor grado en los tratamientos y en mayor grado en las conversiones.

6.3 CONSIDERACIONES FINALES.

En esta investigación nos propusimos identificar los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la función logarítmica, analizando los tratamientos realizados en un registro y la complejidad cognitiva de la conversión de las representaciones. A la luz de los análisis preliminares realizados para el diseño de las actividades propuestas y de los resultados obtenidos luego de aplicar el segundo experimento, planteamos las siguientes consideraciones finales de esta investigación:

- El aprendizaje de la función logarítmica se realiza mediante transformaciones sobre los registros semióticos. Las actividades planteadas sobre esta función se han desarrollado con el uso de los registros simbólicos, registros numéricos y los registros multifuncionales: registro verbal y el registro gráfico.
- El aprendizaje de la función logarítmica hace uso de registros multifuncionales empleados también en otras disciplinas científicas, como los registros verbales y los registros gráficos. En nuestro trabajo se han encontrado dos dificultades notables que comprueban la hipótesis de Duval (2006) quien plantea que las conversiones de registros presentan una mayor dificultad cognitiva.

La primera dificultad encontrada fue observada cuando los alumnos estaban obligados a realizar una conversión del registro gráfico al registro simbólico, ellos debían realizar una aprehensión perceptiva sobre el gráfico dado para obtener la información necesaria para realizar dicha conversión. En esta transformación se les presentó la primera dificultad notable. Esta dificultad es explicada por Duval (2006) porque estamos ante el caso de la conversión no-congruente. En la mayoría de casos la no congruencia puede ocasionar la incapacidad para el cambio de registro.

La segunda dificultad fue observada cuando a los alumnos se les presentó una actividad contextualiza en coordinación con los registros en lengua natural y el registro simbólico. Ellos debían realizar una aprehensión lingüística sobre el texto del problema planteado para así de esta manera poder interpretar la información dada el registro simbólico. Con esta coordinación entre los dos registros logrará la conversión al registro numérico donde se realizarían los tratamientos finales para obtener la respuesta esperada.

- Observamos que para la determinación de la extensión de una gráfica los alumnos requieren de una visualización que les permite discriminar las unidades significativas propias de este registro. En el gráfico de una función logarítmica, esta visualización permitió a los alumnos la obtención de las coordenadas en el registro cartesiano y de los elementos necesarios para la determinación del dominio y rango de las funciones graficadas.

- Este trabajo verifica que la actividad matemática se fundamenta en dos transformaciones semióticas: los tratamientos sobre un mismo registro y las conversiones sobre registros diferentes. La conversión es el paso a otro registro semiótico que permita la realización de tratamientos más sencillos o de mayor “economía cognitiva”. Esto se pudo observar en las actividades planteadas.

- En el análisis de libros didácticos pudimos comprobar que los tratamientos son más abundantes en la actividad matemática, estos requieren del conocimiento de las reglas o propiedades del objeto matemático que acepta como correctas los tratamientos realizados en uno u otro registro. Los profesores debemos asegurar que el alumno haya logrado el aprendizaje del objeto matemático para luego enfrentarlo a tratamientos sencillos o rigurosos. Existen tratamientos de mayor dificultad cognitiva dependiendo de las reglas del propio sistema semiótico. Nosotros observamos que en la actividad 5, además de las conversiones, también se presentaron tratamientos a realizarse en el registro simbólico con una mayor dificultad a los alumnos que las otras actividades, porque los numerales se presentaban en distintos registros, como el registro decimal y entero; además de una correcta aplicación de las leyes de números exponenciales.

- Esperamos que esta investigación propicie una reflexión sobre nuestra actividad docente, permitiéndonos realizar el tipo de enseñanza que permita la coordinación entre diversos registros para lograr un mejor aprendizaje de las matemáticas. Esperamos lograr que nuestros alumnos aprendan a darle el uso debido a las representaciones semióticas, no sólo empleadas para comunicar saberes matemáticos sino principalmente para realizar transformaciones sobre dichas representaciones semióticas. Entendiendo que estas transformaciones son el motor de la actividad matemática y que esperamos que nuestros alumnos realicen.

REFERENCIAS

Aparecida, R., Gimeniz, S., Neves, E., Ribeiro, P. (2008). *O uso de entrevista, observação e vide gravação em pesquisa qualitativa*. Cadernos de Educação. Pelotas (30): 187-199. Brasil.

Ardenghi, M. J. (2008). *Ensino e aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no periodo de 1970 a 2005 no Brasil*. Tese em Educação Matemática. Pontificia Universidade Católica, Sao Paulo. Brasil.

Bell, E. (1999). *Historia de las Matemáticas*. Traducción de R. Ortiz. Fondo de Cultura Económica. México.

Bianchini, B. L; Puga, L. Z. (2006). Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica. En: *REFREMAT – Revista Electrónica de Republicação em Educação Matemática*: UFSC, 5-16.

Brasil. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (1999). *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: Ministério de Educação.

Bravo, A. (2007). *Obstáculos Didácticos y el Discurso Explicativo de los Libros de Texto de Cálculo*. Tesis de Doctor em Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. D.F. México.

Castro, E. (2011). *Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do ensino fundamental*. Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontificia Universidade Católica de Sao Paulo. Brasil.

Chiroque, J. (2010). *Registros de Representación Semiótica del concepto de función real en estudiantes de humanidades*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Lima. Perú.

Clara, M. (2007). *Resolução de Inequações Logarítmicas: Um olhar sobre a produção dos alunos*. Tese Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

D´Ambrosio, U. (2012). *O estado do mundo e a Educação Matemática: Reflexões sobre o Futuro*. Conferencia Inaugural de la 26° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. RELME-26. Universidade Federal de Ouro Preto. 24 al 28 Julio 2012. Belo Horizonte. Estado de Minais Gerais. Brasil.

Duval, R. (2005). Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En: Alcántara S. (2005) *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Papirus editora. Sao Paolo. Brasil.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics. 103-131. Springer.

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano. Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.

Eves, H. (1983). *An Introduction of History of Mathematics*. Saunders College.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socio epistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría en matemática educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México D.F.

Fernández, P. y Díaz P. (2002). Investigación Cuantitativa y Cualitativa. Artículo de Investigación publicado en: *Cad Aten Primaria 2002*; 9: 76-78. Coruña, España.

Ferreira, R. (2006). *Uma sequencia de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática*. Tese Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, RS. Brasil.

Goodman, A. y HIRSCH L. (1996). *Álgebra y Trigonometría*. Queens College of the City University of New York. Rutgers University. Traducido del inglés de la obra: Precalculus. Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México.

Grande, A. (2006). *O Conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear*. Tese Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Marzo, número 1. Distrito Federal, México.

Hamazaki, A. (2010). *Análise da situação da aprendizagem sobre equações e inequações logarítmicas apresentada no Caderno do Professor de 2009 do Estado de São Paulo*. Tese em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. Departamento de Matemática educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Pearson Educación de México.

Hogbem, L. (1970). *Maravilhas da Matemática influencia e função da Matemática nos conhecimentos humanos*. Tradução: Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeofer. Porto Alegre. Brasil.

Karrer, M. (1999). *Logaritmos. Proposta de uma sequencia de ensino utilizando a calculadora*. Tese em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Ledesma, M. y Sepúlveda P. (1999). ¿Qué es investigar?. En: *Metodología de la Investigación*. 97 – 108. México: Limusa.

Lima, E. (1999). *Logaritmos*. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, IMCA. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima, Perú.

Lima, P. (2009). *Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Funções Logarítmicas*. Tese Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Machado, S. (2005). *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Câmara Brasileira do Livro. São Paolo. Brasil. Papirus Editora.

Martínez, M. (2006). *La Investigación Cualitativa (Síntesis Conceptual)*. En: Revista IIPSI. Facultad de Psicología. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima, Perú. Vol. 9, No. 1 – 2006. p. 123 – 146.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. (2002). Traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática. S.A.E.M. España.

Oliveira, A. (2005). *O ensino dos Logaritmos a partir de uma perspectiva histórica*. Tese em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, Brasil.

Saldanha, M. (2007). *Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio*. Tese Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Santos, A. (2011). *O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequencia didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra*. Tese em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Silva, F. T. da (2007). *Análise do processo de argumentação e prova em relação ao tópico "logaritmos", numa coleção de livros didáticos e numa sequencia de ensino*. Tese Profissional em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

APÉNDICES

1) **ENTREVISTA AL PROFESOR DEL CURSO.**

2) **PRUEBA DIAGNÓSTICA sobre CONOCIMIENTOS PREVIOS.**

3) **ACTIVIDADES DIDÁCTICAS para la EXPERIMENTACIÓN.**

APÉNDICES

1) CUESTIONARIO DE PREGUNTAS PARA LA ENTREVISTA AL PROFESOR DEL CURSO.

Las preguntas propuestas al Profesor del curso fueron las siguientes:

CUESTIONARIO DE PREGUNTAS

1) Profesor, ¿Usted abordó el estudio de logaritmos con los alumnos de quinto grado de educación secundaria durante el año lectivo de 2012? Justifique porqué se estudia esta función en este año escolar.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

2) Relate Ud. la secuencia didáctica seguida en clase para lograr el aprendizaje de la noción de logaritmos, sus propiedades y su representación gráfica. Justifique la elección de esta secuencia.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

3) ¿Qué dificultades cree Ud. que tendrían los alumnos cuando se enfrentan a esta actividad? Plantee una resolución didáctica de esta actividad. Señale los posibles errores que cometerían los alumnos.

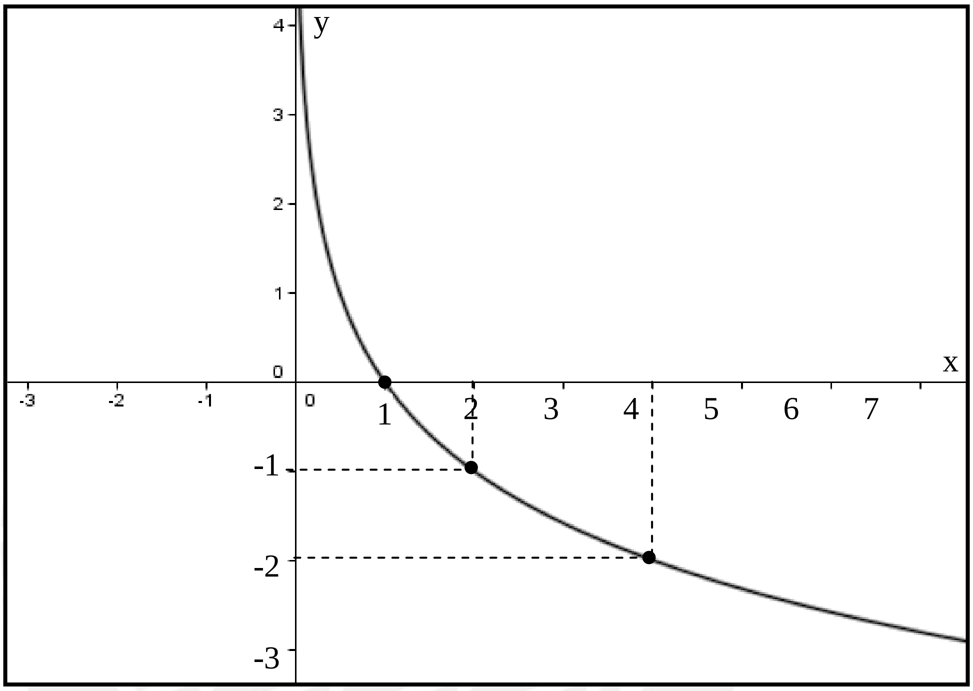
> ➢ ACTIVIDAD-1: Bosqueje el gráfico de la siguiente función:
>
> $$f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

4) ¿Qué dificultades cree Ud. que tendrían los alumnos cuando se enfrentan a esta actividad? Plantee una resolución didáctica de esta actividad. Señale los posibles errores que cometerían los alumnos.

- ACTIVIDAD-2: Obtenga la regla de correspondencia de la función logarítmica cuyo gráfico se muestra a continuación:



………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

5) Cuando Ud. propuso a los alumnos la resolución de problemas involucrando la noción de logaritmos, ¿surgieron dificultades cuando el alumno debía transformar la información en lenguaje verbal (textual) a las formas simbólicas (numéricas o algebraicas). Comente dichas dificultades.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

6) ¿Qué dificultades cree Ud. que tendrían los alumnos cuando se enfrentan a esta actividad? Plantee una resolución didáctica de esta actividad. Señale los posibles errores que cometerían los alumnos.

- ACTIVIDAD-3: Los técnicos del Instituto Peruano del Medio Ambiente y Recursos Naturales, evaluando la velocidad de deforestación de cierta región, relacionaron a través de la siguiente fórmula, el número “x” de hectáreas que serán deforestadas en “t” años:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right), \quad \text{con} \quad x < 10000$$

a) Para un tiempo igual a 4 años, determine cuántas hectáreas fueron deforestadas.

b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas?

c) En el periodo de medio año a 1 año, ¿qué área fue deforestada?

....

....

7) De las tres actividades propuestas ¿Qué actividad cree Ud. que presentaría mayor dificultad para los alumnos? Justifique su respuesta.

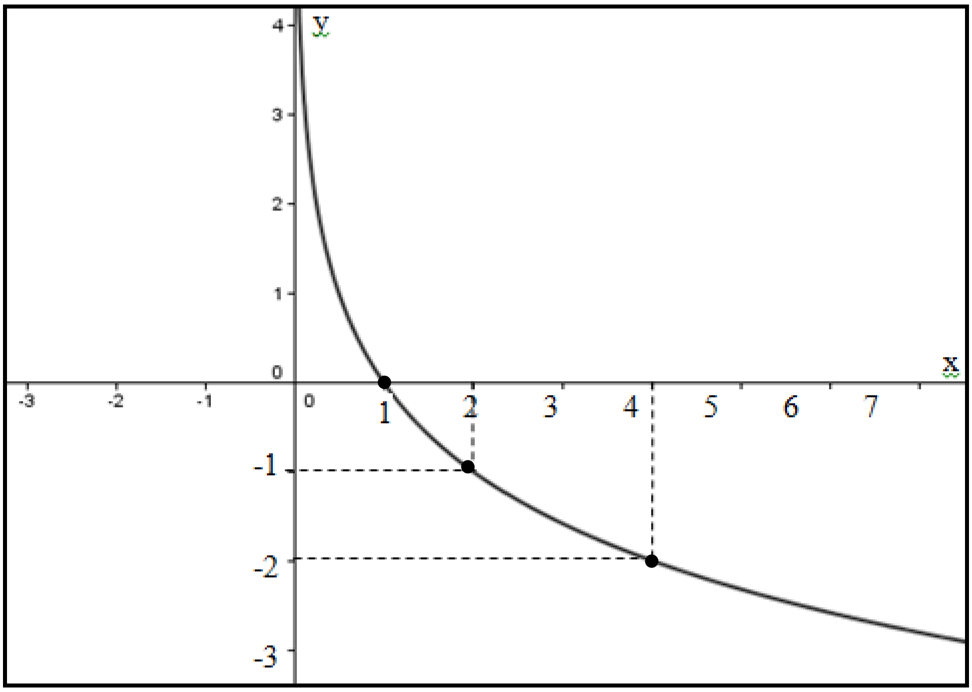
- ACTIVIDAD-1: Construya el gráfico de la siguiente función:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$$

....

....

- ACTIVIDAD-2: Obtenga la regla de correspondencia de la función logarítmica cuyo gráfico se muestra a continuación:



- ACTIVIDAD-3: Los técnicos del Instituto Peruano del Medio Ambiente y Recursos Naturales, evaluando la velocidad de deforestación de cierta región, relacionaron a través de la siguiente fórmula, el número "x" de hectáreas que serán deforestadas en "t" años:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right), \quad \text{con} \quad x < 10000$$

a) Para un tiempo igual a 4 años, determine cuántas hectáreas fueron deforestadas.

b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas?

c) En el periodo de medio año a 1 año, ¿qué área fue deforestada?

....

....

2) PRIMER INSTRUMENTO: PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE CONOCIMIENTOS PREVIOS

NOMBRE DEL ALUMNO: …………………………………………….……………..

FECHA:…………………………………………………………..……………

Parte I: En las siguientes preguntas los alumnos no podían hacer uso de una calculadora.

01. Resolver en $\Re:\ 9^{x} = 729$

02. Calcule sin usar calculadora:

a) $\log_{5}625$

b) $\log_{27}(1/3)$

c) $\log 0.0001$

03. Use la definición de la función logarítmica para calcular "x":

a) $\log_{3}x = 4$

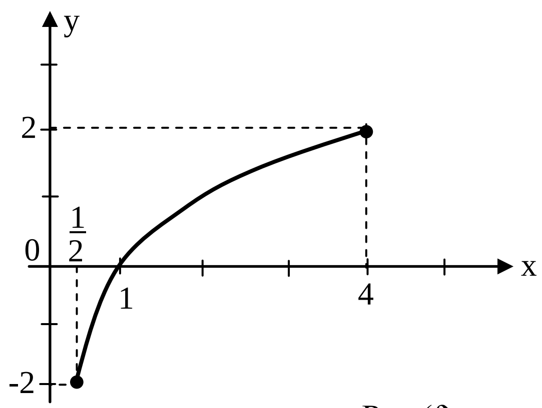
b) $\mathrm{lo}_{gx}6 = 1/2$

04. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halle:

$$\log_{2}40 + \log_{2}25 - \log_{2}20$$

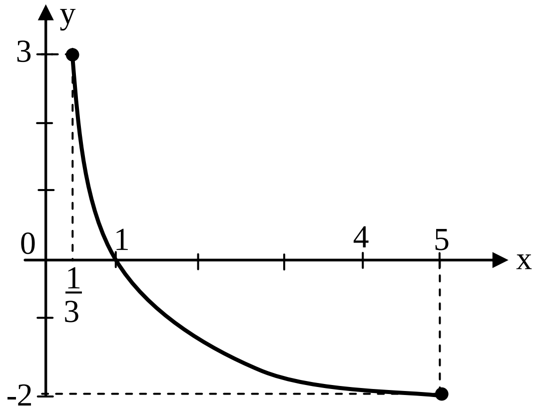
05. Indique el dominio y rango de las funciones representadas en las gráficas:

a) Sea la gráfica de la función f(x):



Dom (f) =………………..   Ran (f) = ……………………..

b) Sea la gráfica de la función g(x):



Dom (g) =……………….. Ran (g) =……………………..

Parte II: En las siguientes preguntas los alumnos podían hacer uso de una calculadora

06. Resolver en $\Re$: $9^x = 20$

…………………………………………………………………………………

07. Use calculadora para dar el valor de los logaritmos, con una aproximación de cuatro decimales.

a) $\log\left(2/3\right)$

b) $\log_9\left(3/2\right)$

…………………………………………………………………………………

08. ¿Cuál de los dos números es mayor: 10^3 o 3^{10}? (Dato: $\log 3 = 0.47712$)

…………………………………………………………………………………

09. Un virus epidémico dobla el número de víctimas a cada año. Si hoy existen 400 infectados, determine:

a) El número de infectados después de un año: ……………………………………..

b) El número de infectados después de dos años:……………………………………

c) El número de infectados después de cinco años:…………………………………

3) SEGUNDO INSTRUMENTO: ACTIVIDADES PARA IDENTIFICAR DIFICULTADES EN LAS TRANSFORMACIONES RESPECTO A LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Actividad-1: Tratamientos en el registro simbólico.

Halle el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_2(\log_4 x) = 4$

b) $\log(x + 4) = \log x + \log 4$

……………………………………………………………………………………..

Actividad-2: Conversiones del registro simbólico al registro gráfico y visualización sobre el registro gráfico.

Bosqueje el gráfico de las siguientes funciones y determine su dominio y rango.

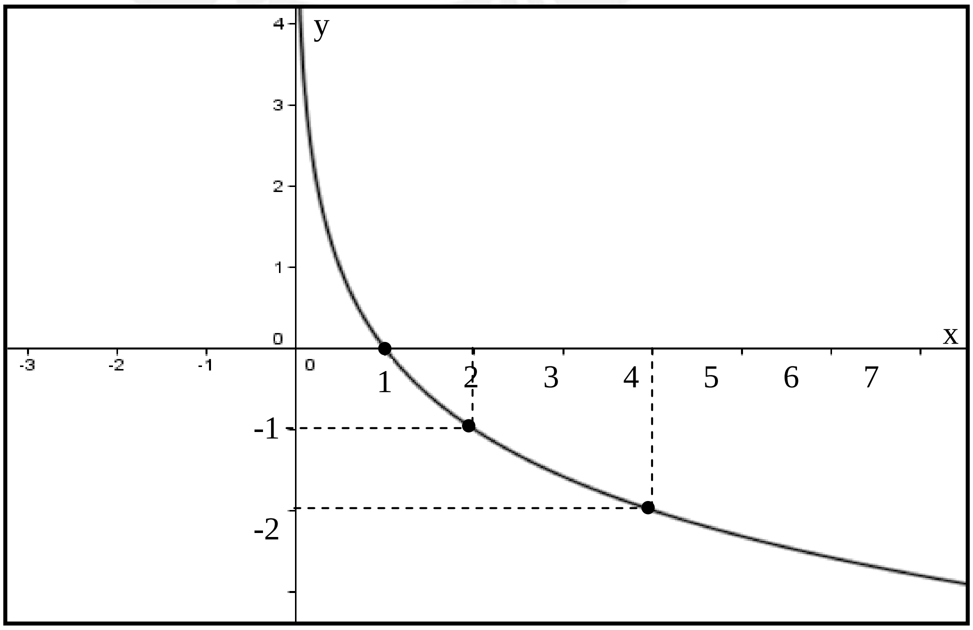
a) $f(x) = \log_2(x + 4)$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

…………………………………………………………………………………………

Actividad-3: Conversión del registro gráfico al registro simbólico y visualización sobre el registro gráfico.

Obtenga la regla de correspondencia de la función logarítmica cuyo gráfico se muestra a continuación y determine su dominio y rango:



Actividad-4: Coordinación de registros con logaritmos decimales y conversión al registro numérico.

La ley de Ebbinghaus del olvido establece que si una tarea se aprende en un inicio a un nivel de desempeño ***Po***, entonces, después de cierto intervalo de tiempo ***t*** por efecto del olvido, el nivel del desempeño ***P*** cumple con la siguiente expresión:

$$\log P = \log Po - c.\log\left(t + 1\right)$$

Siendo: c = constante que depende del tipo de tarea;

t = tiempo en meses.

a) Despeje la variable ***P***.

……………………………………………………………………………………….

b) Si su puntuación en una prueba de biología es 16. ¿qué puntuación se espera obtener en una prueba similar después de un año? Asuma: c = 2.

……………………………………………………………………………………….

Actividad-5: coordinación de registros con logaritmos en base no decimal y conversión al registro numérico.

Los técnicos del Instituto Peruano del Medio Ambiente y Recursos Naturales, evaluando la velocidad de deforestación de cierta región, relacionaron a través de la siguiente fórmula, el número “x” de hectáreas que serán deforestadas en “t” años:

$$t(x) = \log_{0,25}\left(\frac{10000 - x}{10000}\right), \quad \text{con} \quad x < 10000$$

a) Para un tiempo igual a 4 años, determine cuántas hectáreas fueron deforestadas.

………………………………………………………………………………………...

b) Determine el tiempo de deforestación de 7500 hectáreas.

……..………………………………………………………………………………

GLOSARIO

de

TÉRMINOS

GLOSARIO DE TÉRMINOS

1) SIGNIFICACIÓN OPERATORIA VINCULADA AL SIGNIFICANTE: formas de procedimientos de tratamiento asociada a un tipo de registro determinado, modo de realizar operaciones o transformaciones sobre un objeto determinado.

2) REGISTROS NUMÉRICOS: existen tres registros diferentes de representación: registro en escritura decimal, registro en escritura fraccionaria y registro en escritura con exponentes.

3) UNIDAD SIGNIFICANTE ELEMENTAL: cada registro de representación está compuesta de unidades que corresponden a variables lingüísticas (en el registro verbal), variables visuales (registro gráfico), variables simbólicas (registro simbólico).

4) REGISTROS MULTIFUNCIONALES: se refieren al registro discursivo o verbal o lingüístico y al registro figural o gráfico.

5) VISUALIZACIÓN: percepción de representaciones. Es la acción de producir una representación que permite mirarlos como si estuvieran verdaderamente delante de los ojos.

6) VISIÓN: percepción de objetos físicos. Ocurre en la acción de la vista sobre objetos materiales.

7) CONVERSIÓN CONGRUENTE: conversión que cumple tres condiciones: correspondencia semántica, univocidad semántica y orden de las unidades significantes.

8) CONVERSIÓN NO-CONGRUENTE: conversión de mayor dificultad cognitiva, que no cumple con uno, dos o los tres casos de la congruencia. Existen no-congruencia de distintos grados. La no-congruencia, con mucha frecuencia conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión.

9) CONVERSIÓN INVERSA: conversión de mayor dificultad, se presenta en la conversión gráfico $\rightarrow$ ecuación.

10) CONVERSIÓN CUASI-INMEDIATA: ocurre en la conversión congruente. Es una conversión de menor dificultad cognitiva.

11) ECONOMÍA COGNITIVA: procesos que pueden ser fácil y rápidamente efectuados. Esta economía justifica que se realice la conversión hacia un registro con tratamientos de menor dificultad. Ocurre que un registro puede permitir realizar ciertos tratamientos de una forma mucho más económica y más potente que otro registro.

12) APREHENSIÓN PERCEPTIVA: es la "comprensión" de la imagen y de las unidades significantes que la conforman.

13) Encapsulamiento de las representaciones: resulta del fenómeno de no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto. Se observa en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas. Este encapsulamiento impide el paso espontáneo de un sistema de representación a otro.

14) COORDINACIÓN DE LOS REGISTROS: ligados a la objetivación o al tratamiento de los conocimientos, no se da espontáneamente, incluso en el transcurso de una enseñanza que moviliza esta diversidad de registros.