

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

## Escuela de Posgrado



Optimización de pago de dividendos bajo una tasa de interés estocástica considerando el tiempo de ruina

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Matemáticas Aplicadas con mención en Procesos Estocásticos que presenta:

**Luis Miguel Peres Malarin**

Asesor:

**Dr. Jonathan Samuel Farfán Vargas**

Lima, 2024


## Informe de Similitud

Yo, Jonathan Samuel Farfán Vargas, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis titulada(o) "Optimización de pago de dividendos bajo una tasa de interés estocástica considerando el tiempo de ruina", de el autor Luis Miguel Peres Malarin, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 15%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 30/09/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de investigación, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 30 de Setiembre de 2024.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Farfán Vargas, Jonathan Samuel	
DNI: 40984028	Firma 
ORCID: 0000-0002-1873-2635	

# Dedicatoria

*Dedico este trabajo a mis queridos padres que han sido mi mayor inspiración. Su fe en mi ha sido el pilar de mi esfuerzo y dedicación. Su ejemplo me motiva a ser mejor cada día.*



# Agradecimientos

*A mis padres, por su apoyo constante, respaldo y consejos durante toda mi etapa académica y en particular durante la maestría.*

*A mi asesor el Dr. Jonathan Farfán Vargas por su apoyo continuo y sus recomendaciones durante todo el proceso del trabajo de tesis que fueron de gran ayuda para poder cumplir mis objetivos.*



# Resumen

En el presente trabajo de tesis estudiaremos el problema de optimización de pago de dividendos para una compañía de seguros. El excedente de la empresa y la tasa de interés de descuento son modelados por procesos de difusión. Además, en la función de valor clásica se considera un término que depende de la vida útil de la compañía. Este término representa el valor presente que una compañía gana mientras se encuentra en actividad. El objetivo principal del problema es encontrar la función de valor y una estrategia óptima para el pago de dividendos que maximice el valor esperado de los dividendos descontados acumulados hasta el tiempo de ruina de la compañía.

Para este trabajo consideraremos dos escenarios:

**(I) Cuando la tasa de dividendos es acotada.**

En este primer escenario tenemos dos subescenarios que se originan por los parámetros iniciales asociados al modelo. En el primero, encontramos la forma explícita de la función de valor y la estrategia de pago de dividendos óptima. En este caso, se debe pagar la máxima tasa durante la vida útil de la compañía. Además, demostramos un teorema de verificación asociado a nuestro problema. En el segundo caso, encontramos la solución de la ecuación HJB asociada al modelo, la cual a través de un teorema de verificación demostramos que es efectivamente la función de valor asociada a nuestro problema. La estrategia de pago de dividendos óptima es de tipo barrera. Es decir, se debe pagar la máxima tasa cuando el excedente de la compañía supera una cierta barrera y no se debe pagar dividendos cuando el excedente está por debajo de esta barrera. En ambos subescenarios se muestran ejemplos numéricos para diferentes valores de los parámetros iniciales de nuestro modelo.

**(II) Cuando la tasa de dividendos no es acotada.**

En este caso, encontramos la solución de la ecuación HJB asociada a nuestro modelo y a través de un teorema de verificación demostramos que la solución obtenida es

efectivamente la función de valor asociada a nuestro problema. Además, encontramos de forma explícita la función de valor y la estrategia óptima de pago de dividendos. Esta estrategia consiste en pagar en cada instante el máximo de los excesos del excedente de la compañía sobre una cierta barrera hasta dicho instante, caso contrario no se paga dividendos. Finalmente, se muestran ejemplos numéricos para poder visualizar los resultados obtenidos.

**Palabras clave:** Distribución óptima de pago de dividendos, procesos de difusión, ecuación HJB, tasa de interés de descuento estocástica, teorema de verificación.



# Abstract

In this thesis work we will study the dividend payout optimization problem for an insurance company. The company's surplus and the discount interest rate are modeled by diffusion processes. In addition, in the classic value function is considered a term that depends on the useful life of the company. This term represents the present value that a company earns while it is in activity. The main objective of the problem is to find the value function and an optimal dividend payment strategy that maximizes the cumulated value of expected discounted dividends until the time of the company's ruin.

We will consider two scenarios for this work:

- (I) **When the dividend rate is bounded:** In this first scenario we have two sub-scenarios that originate from the initial parameters associated with the model. In the first one, we find the explicit form of the value function and the optimal dividend payment strategy. In this case, the maximum rate should be paid over the lifetime of the company. In addition, we prove a verification theorem associated with our problem. In the second one, we find the solution of the HJB equation associated with the model, which through a verification theorem we prove is indeed the value function to our associated problem. The optimal dividend payment strategy is of the barrier type. That is, the maximum rate should be paid when the company's surplus exceeds a certain barrier and no dividends should be paid when the surplus is below this barrier. In both sub-scenarios numerical examples are shown for different values of the initial parameters of our model.
- (II) **When the dividend rate is unbounded.** In this case, we find the solution of the HJB equation associated with our model and through a verification theorem we prove that the solution obtained is indeed the value function associated with our problem. In addition, we explicitly find the value function and the optimal dividend payment strategy. This strategy consists of paying at each instant the maximum of the excess of the company's surplus over a certain barrier up to that instant, otherwise no dividends

are paid. Finally, numerical examples are shown to visualize the results obtained.

**Keywords:** Optimal dividend payment distribution, diffusion processes, HJB equation, stochastic discount interest rate, verification theorem.





# Contents

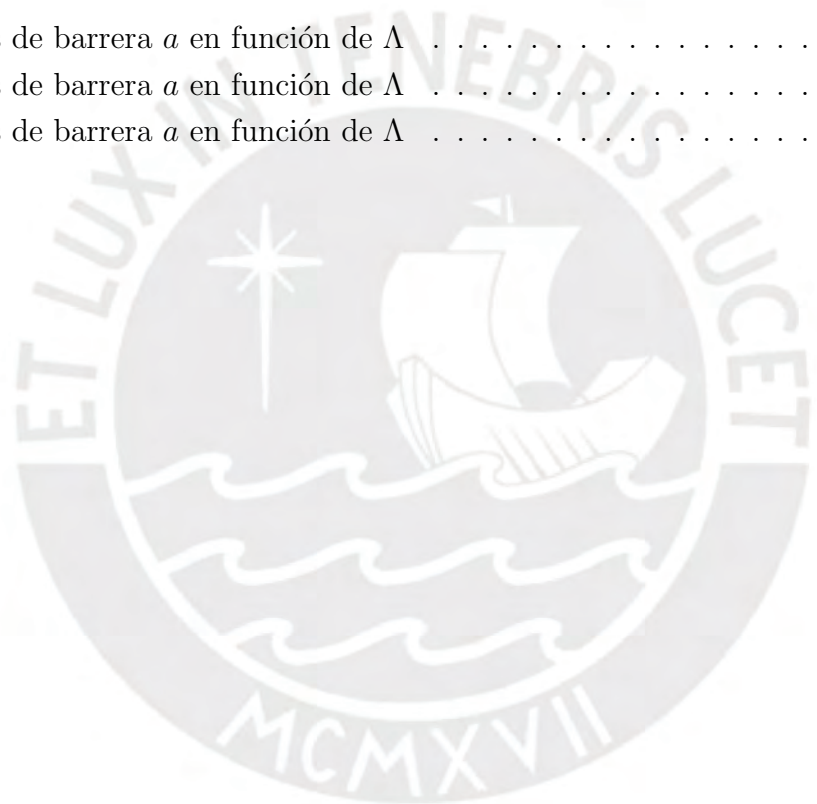
<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Optimización de dividendos</b>	<b>5</b>
2.1 Modelo matemático . . . . .	5
2.2 Formulación del problema . . . . .	7
<b>3 Optimización con tasas de dividendos acotadas</b>	<b>9</b>
3.1 Construcción de soluciones de la ecuación HJB . . . . .	13
3.1.1 Cuando $\phi \leq 1$ : . . . . .	13
3.1.2 Cuando $\phi > 1$ : . . . . .	15
3.2 Teorema de verificación . . . . .	27
3.3 Ejemplos numéricos . . . . .	38
3.3.1 Cuando $\phi \leq 1$ . . . . .	38
3.3.2 Cuando $\phi > 1$ . . . . .	40
<b>4 Optimización con tasas de dividendos no acotadas</b>	<b>42</b>
4.1 Construcción de una solución . . . . .	43
4.2 Teorema de verificación . . . . .	53
4.3 Ejemplos Numéricos . . . . .	71
<b>5 Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>6 Recomendaciones</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>

# List of Figures

3.1	Función de valor y concavidad en $x$ para $r = 0.1$ y $M = 1.5$ . . . . .	38
3.2	Función de valor y concavidad en $x$ para $r = 0.1$ y $M = 1.7$ . . . . .	39
3.3	Función de valor y concavidad en $x$ para $r = 0.1$ y $M = 10$ . . . . .	39
3.4	Valores de barrera en función de $\Lambda$ cuando $M = 5$ . . . . .	40
3.5	Valores de barrera en función de $\Lambda$ cuando $M = 3$ . . . . .	41
4.1	Valores de barrera en función de $\Lambda$ . . . . .	72
4.2	Función de valor para $\Lambda = 0.5$ . . . . .	72
4.3	Función de valor para $\Lambda = 0.1$ . . . . .	73
4.4	Valores de barrera en función de $\Lambda$ . . . . .	73
4.5	Valores de barrera en función de $\Lambda$ . . . . .	74
4.6	Función de valor para $\Lambda = 1$ . . . . .	74

# List of Tables

3.1	Valores de $a$ y $\phi$ en función de $\Lambda$ cuando $M = 5$ . . . . .	41
3.2	Valores de $a$ y $\phi$ en función de $\Lambda$ cuando $M = 3$ . . . . .	41
4.1	Valores de barrera $a$ en función de $\Lambda$ . . . . .	71
4.2	Valores de barrera $a$ en función de $\Lambda$ . . . . .	73
4.3	Valores de barrera $a$ en función de $\Lambda$ . . . . .	74



# Chapter 1

## Introducción

La teoría moderna del riesgo se remonta a principios del siglo pasado y fue introducida por primera vez por Filip Lundberg. Desde ese entonces muchos autores han trabajado en esta área. El problema de optimización de pago de dividendos es uno de los temas más importantes en la teoría del riesgo. Fue abordado por primera vez por el italiano Bruno de Finetti en 1957 en su trabajo *“Su un’impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio”*, en el cual utilizó un modelo de tiempo discreto.

Los modelos de difusión con las que las aseguradoras controlan su exposición al riesgo mediante el pago de dividendos han despertado un interés significativo en la literatura reciente. En 1997, S. Asmussen y M. Taksar en su trabajo *“Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out”* utilizaron un modelo que se rige por una ecuación diferencial estocástica que involucra el movimiento Browniano y el pago de dividendos. En dicha investigación encontraron que la estrategia óptima para tasas acotadas era no pagar cuando la reserva está por debajo de un cierto nivel crítico y pagar la tasa de dividendos máxima cuando la reserva está por encima de ese cierto nivel crítico.

En el año 2006, H. Albrecher y S. Thonhauser en su investigación *“Dividend maximization under consideration of the time value of ruin”* utilizaron el modelo de Cramér-Lundberg e introdujeron una función de valor que consideró el pago de dividendos y el tiempo de ruina de la compañía. Los autores concluyeron que la estrategia óptima para el pago de dividendos no acotados es una estrategia de barrera; es decir, la compañía paga dividendos a sus accionistas cuando el excedente está por encima de un cierto nivel y no se paga dividendos si el excedente está por debajo de dicho nivel. Mientras que para el pago de dividendos acotados es una estrategia de tipo umbral; es decir, se paga la máxima tasa posible durante

la vida útil de la compañía.

En el año 2006, H. Gerber y E. Shiu en su trabajo *“On optimal dividends: From reflection to refraction”* modelaron el excedente de una compañía de seguros a través de un proceso de Wiener. El excedente de la compañía no se invierte, por lo cual, no genera un retorno estocástico. Los autores concluyeron que para tasas de dividendos acotadas la estrategia óptima es una estrategia de barrera.

En el año 2006, J. Cai, H. Gerber y H. Yang en su investigación *“Optimal dividends in an Ornstein-Uhlenbeck type model with credit and debit interest”* utilizaron un modelo de Ornstein-Uhlenbeck con retorno estocástico sobre las inversiones. En esta investigación se paga a los accionistas bajo una estrategia de barrera. Si el excedente de la compañía supera un valor crítico entonces se paga dividendos. En su trabajo muestran diversos ejemplos donde calculan explícitamente los valores de las barreras para diferentes parámetros iniciales de su modelo.

En el año 2010, H. Dai, Z. Liu y N. Luan en su trabajo *“Optimal dividend strategies in a dual model with capital injections”* estudiaron tres tipos de problemas de optimización que una empresa puede enfrentar. En el primer problema, consideraron el problema clásico de dividendos sin emisión de acciones. En el segundo problema, el objetivo fue maximizar los pagos de dividendos descontados esperados teniendo en cuenta los costos de transacción por la emisión de acciones y teniendo en cuenta que las reservas son acotadas. En el tercer problema, se considera el mismo objetivo que en el problema anterior añadiendo que ya no se tiene limitaciones en las reservas. En cada uno de los problemas se identifican las funciones de valor y las estrategias óptimas.

En el año 2010, W. Wang y C. Zhang en su investigación *“Optimal dividend strategies in the diffusion model with stochastic return on investments”* utilizaron un modelo de difusión con retorno estocástico sobre las inversiones. Además, los autores toman en cuenta el tiempo de ruina de la compañía, la cual se ve reflejada en la función de valor. Los autores concluyen que para el caso de pago de dividendos no acotado la estrategia óptima es de tipo barrera y para el caso de pago de dividendos acotado es de tipo umbral.

En el año 2012, X. Zhang y M. Song en su trabajo *“Optimization of risk policy and dividends with fixed transaction costs under interest rate”* abordaron el problema de optimización de dividendos para una corporación financiera con costos de transacción. Además,

la corporación contrata un reaseguro proporcional para reducir el riesgo y el excedente gana intereses a través de una tasa de interés constante. Los autores resuelven el problema y muestran la función de valor y la estrategia óptima asociada.

Todos los autores, anteriormente mencionados, consideran diferentes modelos de difusión con o sin retorno estocástico sobre las inversiones con la diferencia que los autores W. Wang, C. Zhang y H. Albrecher, S. Thonhauser introducen un término en la función de valor relacionado con el tiempo de ruina de la compañía, el cual es interpretado como el valor presente de una cantidad que la compañía de seguros gana mientras se encuentra en actividad. Además, en todos los estudios anteriores la tasa de descuento con la que se trabaja es constante.

Las tasas de interés constituyen una parte integral de la economía de mercado, influyendo en la inversión de grandes empresas, así como en los hogares pequeños y en sus decisiones de gasto. Perturbaciones aleatorias en los mercados financieros pueden cambiar drásticamente el comportamiento monetario de un inversor y conducen a un resultado totalmente diferente al esperado bajo el supuesto de una tasa de interés constante. Intuitivamente, es claro que una tasa de interés estocástica comparada con una tasa determinística refleja mucho mejor las fluctuaciones del mercado.

En el año 2015, J. Eisenberg en su trabajo "*Optimal dividends under a stochastic interest rate*" considera una compañía de seguros con una reserva modelada bajo un proceso de difusión. La tasa de interés se modela a través de dos procesos estocásticos (Movimiento Browniano geométrico y Ornstein–Uhlenbeck) y se busca maximizar el valor esperado de los dividendos acumulados descontados hasta la ruina de la compañía. La autora encuentra una forma explícita para la función de valor y una estrategia óptima de barrera cuando la tasa de interés está regida por el Movimiento Browniano geométrico.

En el presente trabajo de tesis, el excedente de una compañía de seguros estará modelado por un proceso de difusión y se utilizará una tasa de descuento estocástica (Movimiento Browniano geométrico). En comparación con la función de valor clásica, incluiremos un término adicional relacionado con el tiempo de ruina de la compañía como en el trabajo de H. Albrecher y S. Thonhauser mencionado líneas arriba. De esta manera, el principal aporte del presente trabajo de tesis es resolver el problema de optimización de pago de dividendos usando un modelo que usa una tasa de descuento no determinística y que tiene en cuenta la vida útil de la compañía. En particular el modelo trabajado es una extensión del modelo



utilizado en [6].

El presente trabajo de tesis está conformado por 6 capítulos, los cuales están estructurados de la siguiente forma: en el capítulo 2 se describirá el modelo matemático por el cual está regido el excedente de la compañía de seguros. Para ello, se mostrará el proceso de difusión asociado al modelo, la función de pago y la función de valor a maximizar. Luego, se describirá detalladamente la formulación del problema el cual consiste en encontrar la función de valor y la estrategia óptima de pago de dividendos.

En el capítulo 3, estudiaremos la optimización de dividendos con tasas acotadas en el cual utilizaremos estrategias admisibles para la construcción de una solución. Para ello, nos apoyaremos en la ecuación HJB asociada al problema. La solución de esta ecuación nos brindará la función de valor, lo cual será corroborado más adelante. Este capítulo será dividido en dos casos de acuerdo a las condiciones que cumplan los parámetros iniciales de nuestro modelo. Se encontrará las funciones de valor y las estrategias óptimas de pago de dividendos en cada uno de estos casos. Posteriormente, se demostrará a través de teoremas de verificación que las soluciones de las ecuaciones HJB son efectivamente las funciones de valor correspondientes. Este capítulo finaliza con ejemplos numéricos donde se presentarán tablas y gráficos para comprender mejor los resultados obtenidos.

En el capítulo 4, estudiaremos la optimización de pago de dividendos con tasas no acotadas. A diferencia del capítulo anterior, el problema no se dividirá en casos. De la misma forma que en el capítulo anterior, se encontrará la función de valor y la estrategia óptima. Concluiremos este capítulo con ejemplos numéricos en los que mostraremos gráficos de la función de valor y la relación que existe entre los parámetros del modelo y los valores de barrera.

Finalmente, en los capítulos 5 y 6 se enunciarán las conclusiones y recomendaciones más relevantes de este trabajo, respectivamente.

## Chapter 2

# Optimización de dividendos

### 2.1 Modelo matemático

En el desarrollo del presente trabajo de tesis consideraremos un espacio de probabilidad filtrado completo  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ . También, asumiremos las siguientes condiciones:

- $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  es una filtración que satisface las condiciones usuales.
- $\{W_t^{(1)}; t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano unidimensional estándar con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ .
- $\{W_t^{(2)}; t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano unidimensional estándar con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ .
- $\{B_t^{(1)}; t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano unidimensional estándar con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ .
- $\{W_t^{(1)}; t \geq 0\}$ ,  $\{W_t^{(2)}; t \geq 0\}$  y  $\{B_t^{(1)}; t \geq 0\}$  son movimientos Brownianos independientes.
- $\mu, \sigma_1, r_1, \sigma_2$  son constantes positivas y  $\rho \in (-1, 1)$  es una constante real.
- $m, \theta$  y  $r$  son constantes positivas que cumplen la relación  $m > \frac{\theta^2}{2}$ .

Consideramos un modelo de difusión para el excedente de la compañía de seguros. Si no hay inversión, el excedente de la compañía está dado por:

$$\begin{aligned}dX_t^{(1)} &= \mu dt + \sigma_1 dW_t^{(1)}, t \geq 0 \\ X_0^{(1)} &= x > 0\end{aligned}$$



$x$  : excedente inicial de la compañía.

Luego, se invierte el excedente de la compañía en un proceso con riesgo el cual tiene un retorno estocástico y está regido por,

$$dX_t^{(2)} = r_1 dt + \sigma_2 dB_t, t \geq 0$$

Donde  $B_t = \rho W_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^{(2)}$ . Note que  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano unidimensional estándar con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  y  $\rho$  es el coeficiente de correlación entre  $W_t^{(1)}$  y  $B_t$ .

Entonces, se tiene,

$$dX_t^{(2)} = r_1 dt + \sigma_2 \rho dW_t^{(1)} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)}, t \geq 0$$

Ahora, nos centraremos en el pago de dividendos. Una *estrategia de pago de dividendos* consiste en un proceso estocástico  $L = \{L_t; t \geq 0\}$  el cual representa la cantidad acumulada de dividendos pagados hasta la ruina de la compañía. En nuestro problema, consideraremos que la compañía de seguros invierte el excedente en un proceso con riesgo con retorno estocástico y paga dividendos a los accionistas de la compañía. De esta manera, el excedente de la compañía está regida por la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} dX_t &= (\mu + r_1) dt + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho) dW_t^{(1)} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} - dL_t, t \geq 0 \\ X_0 &= x - L_0 \end{aligned}$$

Consideramos que la estrategia de pago de dividendos es admisible si el proceso  $L_t$  es cadlag, adaptado con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  y satisface algunas condiciones que serán detalladas en los próximos capítulos de acuerdo al contexto. Sea  $\{L^\pi, \pi \in \mathcal{A}\}$  la familia de estrategias admisibles.

Denotamos a  $\tau^\pi$  como el tiempo de ruina del proceso bajo la estrategia admisible  $L^\pi$ .

$$\tau^\pi := \inf \{t \geq 0; X_t^\pi \leq 0\}$$

donde  $X_t^\pi$  es el proceso de reserva de la compañía bajo la estrategia  $L^\pi$ :

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= (\mu + r_1) dt + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho) dW_t^{(1)} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} - dL_t^\pi, t \geq 0 \\ X_0^\pi &= x - L_0^\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto, después del tiempo de ruina el análisis de nuestro proceso es irrelevante pues el pago de dividendos de la compañía es nula. Así, consideraremos  $X_t^\pi = 0$  para  $t \in [\tau^\pi, \infty)$ .

El valor esperado de los dividendos descontados bajo una tasa de interés estocástica  $r = \{r_t; t \geq 0\}$  es dado por,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-r_s} dL_s^\pi \right]$$

En el presente trabajo, la tasa de interés estocástica  $r = \{r_t; t \geq 0\}$  está regida por el movimiento Browniano  $B_t^{(1)}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dr_t &= mdt + \theta dB_t^{(1)}, t \geq 0 \\ r_0 &= r \end{aligned}$$

## 2.2 Formulación del problema

Diversos autores, en los últimos años, se han enfocado en encontrar la distribución óptima de pagos de dividendos bajo una tasa de interés constante de una compañía. Esto consiste en encontrar una estrategia de pago de dividendos que maximice el valor esperado de los dividendos descontados acumulados de la compañía. Sin embargo, debido a los factores de incertidumbre económica durante periodos largos de tiempo es recomendable trabajar con una tasa de interés estocástica, la cual modela de mejor manera las fluctuaciones económicas. Así, se desea maximizar la siguiente media,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-r_s} dL_s^\pi \right]$$

Donde denotaremos por  $\mathbf{P}_{r,x}$  a la medida  $\mathbf{P}$  condicionada a  $\{r_0 = r, X_0 = x\}$  y por  $\mathbb{E}_{r,x}$  a la esperanza con respecto a  $\mathbf{P}_{r,x}$ . También, denotamos por  $\mathbb{R}_+$  al conjunto de números reales no negativos.

También, en la función de pago consideraremos una cantidad constante  $\Lambda > 0$ , la cual es interpretada como el valor presente de una cantidad que la compañía de seguros gana mientras la misma está en actividad; es decir, tiene en cuenta la vida útil del proceso. De

este modo, la función de pago es dada por:

$$V^\pi(r, x) := \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} dL_s^\pi + \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} \Lambda ds \right]; (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Además, esta expresión representa lo que los accionistas de la compañía esperan recibir en el futuro gracias a su inversión.

La función de valor es dada por,

$$V(r, x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} V^\pi(r, x); (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

donde el supremo es tomado sobre el conjunto de estrategias admisibles.

En el presente trabajo de tesis nos enfocaremos en encontrar la forma explícita de una solución de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada a nuestro problema y se encontrará una estrategia admisible óptima que maximice la función de pago. Además, para poder corroborar que la solución obtenida de la ecuación HJB asociada a nuestro problema es efectivamente la función de valor, enunciaremos y demostraremos un teorema de verificación de acuerdo a las características de nuestro proceso.

De acuerdo a lo anteriormente mencionado, consideraremos dos situaciones: en la primera, utilizaremos tasas de pago de dividendos acotadas y en la segunda, utilizaremos tasas de pago de dividendos no acotadas, las cuales se trabajarán en detalle en los siguientes capítulos.

## Chapter 3

# Optimización con tasas de dividendos acotadas

En este capítulo, consideraremos una tasa de pago de dividendos acotada, la cual nos ayudará a tener un mejor control sobre el modelo matemático.

Fijamos una constante positiva  $M > 0$ . Luego, llamaremos *estrategias admisibles* a los procesos estocásticos  $L^\pi = \{L_t^\pi; t \geq 0\}$  que cumplan con las siguientes características:

- El proceso estocástico  $L^\pi = \{L_t^\pi; t \geq 0\}$  es de la forma  $L_t^\pi = \int_0^t l_s^\pi ds$ .  
Entonces  $dL_t^\pi = l_t^\pi dt$ .
- $l_t^\pi \in [0, M], \forall t \geq 0$ .
- El proceso estocástico  $l_t^\pi$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ .
- $l^\pi(t, \omega) = 0$  para cada  $(t, \omega) \in [\tau^\pi, \infty) \times \Omega$ .

Notemos que esta última característica se puede interpretar como la ausencia de pagos de dividendos por parte de la compañía después de la ruina.

Dado el contexto de este capítulo y sin peligro de confusión, a partir de ahora llamaremos *estrategia admisible* a  $l_t^\pi$ .

Así, cuando se utiliza una estrategia admisible  $l_t^\pi$ , se tiene que el excedente de la compañía

de seguros está dada por,

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= (\mu + r_1)dt + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}dW_t^{(2)} - dL_t^\pi, t \geq 0 \\ X_0^\pi &= x \end{aligned}$$

Es decir,

$$X_t^\pi = x + \int_0^t (\mu + r_1 - l_s^\pi)ds + \int_0^t (\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}dW_s^{(2)}$$

para cada  $t \in [0, \tau^\pi]$ .

Por lo tanto, en nuestro problema asociado debemos encontrar lo siguiente:

1. La función de valor

$$V(r, x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{r, x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right], (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$\text{donde } r_t = r + \int_0^t m ds + \int_0^t \theta dB_s^{(1)} = r + mt + \theta B_t^{(1)}$$

2. Una estrategia admisible  $l_t^*$  tal que:

$$V^{\pi^*}(r, x) = V(r, x)$$

Recordemos que  $m - \frac{\theta^2}{2} > 0$ .

Esta condición nos servirá para garantizar que la función de valor es acotada, como veremos en el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.** Sea  $r$  una constante real. Si  $l^\pi$  es una estrategia admisible, entonces:

$$V^\pi(r, x) \leq \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

En particular,  $V(r, x) \leq \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}_+$ .

*Demostración:*

Como  $0 \leq l_s^\pi \leq M$  entonces  $\Lambda \leq l_s^\pi + \Lambda \leq M + \Lambda$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
V^\pi(r, x) &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right] \leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} (M + \Lambda) ds \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^\infty e^{-rs} (M + \Lambda) ds \right] \\
&= (M + \Lambda) \int_0^\infty \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r - ms - \theta B_s^{(1)}} \right] ds \\
&= (M + \Lambda) \int_0^\infty e^{-r - ms} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-\theta B_s^{(1)}} \right] ds \\
&= (M + \Lambda) \int_0^\infty e^{-r - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)s} ds \\
&= \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}
\end{aligned}$$

Donde la igualdad de la tercera línea es por el teorema de Tonelli y la igualdad de la quinta línea es debido a que  $-\theta B_s^{(1)} \sim N(0, \theta^2 s)$ .

□

Así, la función de valor está acotada superiormente por la constante positiva  $\frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}$ .

Este resultado será de mucha utilidad en la demostración del teorema de verificación, el cual será tratado en la siguiente sección.

Consideremos la estrategia en la que la compañía de seguros paga la máxima tasa posible hasta la ruina. Así, usaremos  $l_t^\pi = M \mathbb{1}_{\{t < \tau\}}$ .

El tiempo de ruina del proceso  $X_t^\pi$  es dado por,

$$\tau^{\tilde{\pi}} := \inf \left\{ t \geq 0; x + \int_0^t (\mu + r_1 - M) ds + \int_0^t (\sigma_1 + \sigma_2 \rho) dW_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dW_s^{(2)} = 0 \right\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
V^{\bar{\pi}}(r, x) &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^{\bar{\pi}}} (M + \Lambda) e^{-r - ms - \theta B_s^{(1)}} ds \right] \\
&= (M + \Lambda) \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^{\bar{\pi}}} e^{-r - ms - \theta B_s^{(1)}} ds \right] \\
&= (M + \Lambda) \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^{\bar{\pi}}} \mathbb{E} \left( e^{-r - ms - \theta B_s^{(1)}} \right) ds \right] \\
&= (M + \Lambda) \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^{\bar{\pi}}} e^{-r + \left( \frac{\theta^2}{2} - m \right) s} ds \right] \\
&= \frac{(M + \Lambda) e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \mathbb{E}_{r,x} \left[ 1 - e^{-\left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) \tau^{\bar{\pi}}} \right] \\
&= \frac{(M + \Lambda) e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \left[ 1 - \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-\left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) \tau^{\bar{\pi}}} \right] \right] \\
&= \frac{(M + \Lambda) e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde la última igualdad se debe a la fórmula 2.0.1 en la sección *Stopping at first hitting time* de la parte II de [10], con

$$\eta = \frac{-(\mu + r_1 - M) - \sqrt{(\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} \tag{3.2}$$

*Observación:* Notemos que  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho$  es una constante positiva, ya que,

$$\begin{aligned}
-1 < \rho < 1 &\Rightarrow -2\sigma_1\sigma_2 < 2\sigma_1\sigma_2\rho < 2\sigma_1\sigma_2 \\
&\Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \\
&\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho < (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \\
&\Rightarrow 0 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho
\end{aligned}$$



Se puede verificar lo siguiente:

$$\text{Si } \mu + r_1 - M > 0 \Rightarrow \eta < 0$$

$$\text{Si } \mu + r_1 - M < 0 \Rightarrow \eta < 0$$

Luego,  $\eta < 0$ .

Esta constante será importante ya que será parte de la función de valor en el presente capítulo.

Además, cuando se paga la máxima tasa posible  $M$  la función de valor esta dada por,

$$V(r, x) = \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x})$$

### 3.1 Construcción de soluciones de la ecuación HJB

En la presente sección, construiremos una solución de la ecuación HJB asociada al problema, la cual corroboraremos, posteriormente, que es en efecto la función de valor a través de un teorema de verificación. Para ello, plantearemos la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada a nuestro problema, la cual es la siguiente:

$$\sup_{l \in [0, M]} \left\{ (\mu + r_1 - l)V_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)V_{xx} + mV_r + \frac{\theta^2}{2}V_{rr} + e^{-r}(l + \Lambda) \right\} = 0$$

O equivalentemente:

$$(\mu + r_1)V_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)V_{xx} + mV_r + \frac{\theta^2}{2}V_{rr} + e^{-r}\Lambda + \sup_{l \in [0, M]} \{l(e^{-r} - V_x)\} = 0$$

Sea

$$\phi = \frac{-(M + \Lambda)\eta}{m - \frac{\theta^2}{2}} \quad (3.3)$$

#### 3.1.1 Cuando $\phi \leq 1$ :

Recordemos que  $\eta$  está definida en (3.2).

En este caso veremos que  $Z^{\bar{\pi}}(r, x) = \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\eta x})$  es una solución de la ecuación



HJB asociada a nuestro problema.

Calculamos  $Z_x^{\tilde{\pi}}(r, x)$ :

$$Z_x^{\tilde{\pi}}(r, x) = \frac{-\eta(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}}$$

Como  $\phi \leq 1$  entonces,

$$e^{-r} - Z_x^{\tilde{\pi}}(r, x) = e^{-r} + \frac{\eta(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} = e^{-r} \left( 1 + \frac{\eta(M + \Lambda)e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \right) \geq 0$$

De este modo,  $Z_x^{\tilde{\pi}}(r, x)$  es solución de la ecuación HJB asociada a nuestro problema si y solo si  $Z_x^{\tilde{\pi}}(r, x)$  es solución de

$$(\mu + r_1)V_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)V_{xx} + mV_r + \frac{\theta^2}{2}V_{rr} + e^{-r}\Lambda + M(e^{-r} - V_x) = 0$$

o equivalentemente,

$$(\mu + r_1 - M)V_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)V_{xx} + mV_r + \frac{\theta^2}{2}V_{rr} + e^{-r}(M + \Lambda) = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} Z_{xx}^{\tilde{\pi}}(r, x) &= \frac{-\eta^2(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \\ Z_r^{\tilde{\pi}}(r, x) &= -\frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x}) \\ Z_{rr}^{\tilde{\pi}}(r, x) &= \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x}) \end{aligned}$$

Ahora, corroboremos que  $Z^{\tilde{\pi}}(r, x)$  es solución de la ecuación HJB asociada a nuestro problema. Sea

$$S = (\mu + r_1 - M)Z_x^{\tilde{\pi}} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)Z_{xx}^{\tilde{\pi}} + mZ_r^{\tilde{\pi}} + \frac{\theta^2}{2}Z_{rr}^{\tilde{\pi}} + e^{-r}(M + \Lambda)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
S &= -(\mu + r_1 - M) \frac{\eta(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \frac{\eta^2(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \\
&\quad - m \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\eta x}) + \frac{\theta^2}{2} \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\eta x}) + e^{-r}(M + \Lambda) \\
&= -(\mu + r_1 - M) \frac{\eta(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \frac{\eta^2(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \\
&\quad + (M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x} \\
&= \frac{(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \left[ -(\mu + r_1 - M)\eta - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)\eta^2 \right] + (M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}
\end{aligned}$$

Recordemos que  $\eta$  es dado por (3.2) y entonces,

$$-(\mu + r_1 - M)\eta - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)\eta^2 = -\left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Luego,

$$S = -\frac{(M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) + (M + \Lambda)e^{-r}e^{\eta x} = 0$$

Por lo tanto,  $Z^{\tilde{\pi}}(r, x)$  es solución de la ecuación HJB.

### 3.1.2 Cuando $\phi > 1$ :

Debemos resolver la ecuación HJB.

$$(\mu + r_1)V_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)V_{xx} + mV_r + \frac{\theta^2}{2}V_{rr} + e^{-r}\Lambda + \sup_{l \in [0, M]} \{l(e^{-r} - V_x)\} = 0$$

Notemos que la monotonía de la función lineal  $l \mapsto l(e^{-r} - V_x)$  depende del signo de  $e^{-r} - V_x$ .

Supongamos que hay una solución de la ecuación HJB asociada a nuestro problema de clase  $C^2$  de la forma  $Z(r, x) = e^{-r}F(x)$ .

Las derivadas parciales  $Z_x(r, x)$ ,  $Z_{xx}(r, x)$ ,  $Z_r(r, x)$  y  $Z_{rr}(r, x)$ , están dadas por,

$$\begin{aligned} Z_x(r, x) &= e^{-r} F'(x) \\ Z_{xx}(r, x) &= e^{-r} F''(x) \\ Z_r(r, x) &= -e^{-r} F(x) \\ Z_{rr}(r, x) &= e^{-r} F(x) \end{aligned}$$

Ahora, al reemplazar en la ecuación HJB y simplificar se obtiene,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu + r_1)F'(x) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)F''(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) F(x) \\ &+ \Lambda + \sup_{l \in [0, M]} \{l(1 - F'(x))\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Asumiremos que  $F(x)$  es estrictamente cóncava y que existe un valor  $a > 0$  tal que  $F'(a) = 1$ . En particular,  $F'(x) > 1$  cuando  $x < a$  y  $F'(x) < 1$  cuando  $x > a$ . Así, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} F_1(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} F_2(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} F_1'(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} F_2'(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} F_1''(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} F_2''(x) \end{aligned}$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x < a \\ F_2(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

**I) Cuando  $x < a$ :** Entonces  $F'(x) = F_1'(x) > 1$ .

Debemos encontrar en (3.4) el supremo de una función lineal decreciente; así, el supremo ocurrirá cuando  $l = 0$  y así la ecuación (3.4) se convierte en

$$(\mu + r_1)F_1'(x) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)F_1''(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) F_1(x) = -\Lambda$$

Se tiene una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. La solución de esta ecuación está dada por la suma de una solución particular y la solución

homogénea.

De esta manera, la solución de esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$F_1(x) = A + Be^{\alpha_1 x} + Ce^{\alpha_2 x}$$

Donde,

$$\alpha_1 = \frac{-(\mu + r_1) + \sqrt{(\mu + r_1)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} > 0$$

$$\alpha_2 = \frac{-(\mu + r_1) - \sqrt{(\mu + r_1)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} < 0$$

Notemos que,

$$0 = Z(r, 0) = e^{-r} F_1(0)$$

Entonces,

$$F_1(0) = 0$$

Luego, se tiene que  $C = -(A + B)$ .

Ahora, para la solución particular planteamos que  $F_{1p}(x) = A$ . Así, obtenemos que:

$$A = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}$$

Luego, para obtener el valor de  $B$ , utilizaremos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_1'(x) = F'(a) = 1$$

$$F_1(x) = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + Be^{\alpha_1 x} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B \right) e^{\alpha_2 x}$$

$$F_1'(x) = B\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B \right) \alpha_2 e^{\alpha_2 x}$$

Entonces,

$$1 = \lim_{x \rightarrow a^-} F_1'(x) = B\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B \right) \alpha_2 e^{\alpha_2 a}$$

Por lo tanto:

$$B = \frac{1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2} e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}$$

Así,  $F_1(x)$  está definida de la siguiente manera:

$$F_1(x) = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\alpha_2 x}) + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right), x < a$$

**II) Cuando  $x > a$ .** Entonces  $F'(x) = F_2'(x) < 1$ .

Debemos encontrar en (3.4) el supremo de una función lineal creciente; por lo tanto, el supremo ocurrirá cuando  $l = M$ . Así, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$(\mu + r_1 - M)F_2'(x) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)F_2''(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) F_2(x) = -(\Lambda + M)$$

Como se tiene una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, se plantea que la solución tiene la siguiente forma:

$$F_2(x) = P + Qe^{\beta_1 x} + Re^{\beta_2 x}$$

Donde,

$$\beta_1 = \frac{-(\mu + r_1 - M) + \sqrt{(\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} > 0$$

$$\beta_2 = \frac{-(\mu + r_1 - M) - \sqrt{(\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} < 0$$

Notemos que  $\beta_2 = \eta$ .

Supongamos que la función  $F_2(x)$  es acotada. Así, como  $\beta_1 > 0$  concluimos que  $Q = 0$ . Luego, para la solución particular planteamos que  $F_{2p}(x) = P$ . Así, obtenemos que:

$$P = \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} \text{ y } F_2(x) = \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + Re^{\eta x}$$

Luego, para obtener el valor de  $R$  utilizaremos que,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_2'(x) = F'(a) = 1$$

Entonces,

$$1 = \lim_{x \rightarrow a^+} R\eta e^{\eta x} = R\eta e^{\eta a}$$

Por lo tanto:

$$R = \frac{1}{\eta} e^{-\eta a}$$

Así, la solución  $F_2(x)$  está definida de la siguiente manera:

$$F_2(x) = \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\eta} e^{-\eta a} e^{\eta x}, x > a$$

Notemos que  $F_2(x)$  es creciente. Para demostrar que  $F_2(x)$  es acotada mostraremos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
1. \lim_{x \rightarrow a^+} F_2(x) &= \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\eta} \\
2. \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) &= \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\eta} < F_2(x) < \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}}$$

Ahora, para que la función  $F(x)$  sea de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}_+$  se debe cumplir que,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_1''(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} F_2''(x)$$

Esta condición es necesaria para poder utilizar el Lema de Itô en el teorema de verificación que desarrollaremos en la siguiente sección.

$$F_1'(x) = \frac{-\Lambda\alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 x} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right)$$

Entonces,

$$F_1''(x) = \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 x} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right)$$

También,

$$F_2'(x) = e^{-\eta a} e^{\eta x}$$

En consecuencia,

$$F_2''(x) = \eta e^{-\eta a} e^{\eta x}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_1''(a) = \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_2''(a) = \eta$$

Luego, se tiene,

$$\frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) = \eta$$

De esta forma, debemos hallar el valor de  $a$  de tal manera que  $F(x)$  sea de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}_+$ . Sin embargo, dada la forma de la ecuación no hallaremos el valor de  $a$  explícitamente sino que demostraremos que esta última ecuación tiene solución y es única. Para ello, definimos la función  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g(a) = \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right)$$

*Observación:* Notemos que  $\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a} > 0$  para todo  $a \geq 0$  y entonces  $g$  está bien definida en  $a \in \mathbb{R}_+$ .

Así, debemos probar que la ecuación  $g(a) = \eta$  tiene una única solución. Para tal fin, es suficiente que,

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) > \eta$
2.  $g(a) < \eta$
3.  $g'(a) > 0, \forall a \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} 1. \lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1) a}}{\alpha_1 - \alpha_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1) a}} \right) \end{aligned}$$



Como  $\alpha_2 < 0$  y  $\alpha_2 - \alpha_1 < 0$  entonces,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{\alpha_2 a} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)a} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{-\Lambda \alpha_2^2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)a}}{\alpha_1 - \alpha_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)a}} \right) = \alpha_1 > 0 > \eta$$

$$2. g(a) = \frac{-\Lambda \alpha_2^2}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \left( 1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1 - \alpha_2} \right)$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}}$$

Ahora, analicemos la monotonía de la función  $g(a)$ .

Al simplificar la función  $g(a)$  se tiene,

$$g(a) = \frac{\frac{\Lambda}{\theta^2} \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_1 a} + \alpha_1^2 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)a} - \alpha_2^2}{\alpha_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)a} - \alpha_2}$$

Utilizando la derivada de un cociente y simplificando, se obtiene,

$$g'(a) = \frac{\frac{\Lambda(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_1^2\alpha_2^2}{\theta^2} [e^{(2\alpha_1 - \alpha_2)a} - e^{\alpha_1 a}] - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \alpha_1 \alpha_2 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)a}}{[\alpha_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)a} - \alpha_2]^2}$$

Como  $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ ,  $\Lambda > 0$  y  $m - \frac{\theta^2}{2} > 0$ , entonces las siguientes expresiones son positivas.

- $\frac{\Lambda(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_1^2\alpha_2^2}{m - \frac{\theta^2}{2}}$

- $-(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \alpha_1 \alpha_2 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)a}$
- $\left(\alpha_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)a} - \alpha_2\right)^2$
- $e^{(2\alpha_1 - \alpha_2)a} - e^{\alpha_1 a}$

Así,  $g'(a) > 0, \forall a \geq 0$ . Por lo tanto,  $g(a)$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}_+$ .

Solo nos faltaría probar que

$$\eta > g(0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}}$$

Notemos que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} = -\frac{2(\mu + r_1 + \Lambda)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}$$

Entonces debemos probar que

$$\frac{-(\mu + r_1 - M) - \sqrt{(\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho} > -\frac{2(\mu + r_1 + \Lambda)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}$$

Esta última inecuación es equivalente a

$$M > \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}{2(\mu + r_1 + \Lambda)} - \Lambda$$

Probaremos que  $\phi > 1$  es equivalente a  $M > \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}{2(\mu + r_1 + \Lambda)} - \Lambda$

$$\frac{(M + \Lambda) \left[ (\mu + r_1 - M) + \sqrt{(\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)} \right]}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)} > 1$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{(\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)} > \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}{M + \Lambda} - (\mu + r_1 - M)$$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la última ecuación se tiene,

$$\begin{aligned} (\mu + r_1 - M)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) &> \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)^2 \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)^2}{(M + \Lambda)^2} \\ &- \frac{2(\mu + r_1 - M)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}{M + \Lambda} + (\mu + r_1 - M)^2 \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos,

$$2 > \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}{(M + \Lambda)^2} - \frac{2(\mu + r_1 - M)}{M + \Lambda}$$

De esta forma,

$$2(M + \Lambda)^2 > (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) - 2(\mu + r_1 - M)(M + \Lambda)$$

Por consiguiente,

$$2(M + \Lambda)(\Lambda + \mu + r_1) > (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Finalmente:

$$M > \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}{2(\mu + r_1 + \Lambda)} - \Lambda$$

De esta forma, concluimos que la ecuación  $g(a) = \eta$  tiene una única solución. Por lo tanto, podemos afirmar que la función  $F(x)$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}_+$  y está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\alpha_2 x}) + \left(1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}}e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right), & \text{si } 0 \leq x < a \\ \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\eta}e^{-\eta a}e^{\eta x}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Como  $F(x)$  es continua en  $[0; a[$  entonces  $F(x)$  es acotada en  $[0; a[$ . También, notemos que  $F(x)$  es acotada para  $x \geq a$  ya que,

$$\left| \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\eta}e^{-\eta a}e^{\eta x} \right| \leq \left| \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} \right| + \left| \frac{1}{\eta}e^{-\eta a}e^{\eta x} \right| \leq \left| \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} \right| + \left| \frac{1}{\eta} \right| \leq C_1$$

Así,  $F(x)$  es acotada en  $\mathbb{R}_+$ .

Luego, calculamos  $F'(x)$ .

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{-\Lambda\alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}}e^{\alpha_2 x} + \left(1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}}e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right), & \text{si } 0 \leq x < a \\ e^{-\eta a}e^{\eta x}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Como  $F'(x)$  es continua en  $[0; a[$  entonces  $F'(x)$  es acotada en  $[0; a[$ . También, notemos que  $F'(x)$  es acotada para  $x \geq a$ , ya que  $\eta(x - a) < 0$  entonces:

$$\left| e^{-\eta a}e^{\eta x} \right| \leq 1$$

Así,  $F'(x)$  es acotada en  $\mathbb{R}_+$ .

Por lo tanto, el candidato a función de valor está dada por:

$$Z(r, x) = e^{-r}F(x)$$

$$Z(r, x) = \begin{cases} e^{-r} [A(1 - e^{\alpha_2 x}) + B(e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x})], & \text{si } 0 \leq x < a \\ e^{-r} \left[ \frac{\Lambda + M}{m - \frac{\theta^2}{2}} + \frac{1}{\eta} e^{-\eta a} e^{\eta x} \right], & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

donde,

$$A = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} \quad \text{y} \quad B = \frac{1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{\theta^2} e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \quad (3.5)$$

y  $a$  es la única solución de la ecuación:

$$\frac{-\Lambda \alpha_2^2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) = \eta$$

Además, en la siguiente sección veremos que la estrategia óptima está dada por:

$$l_t^* = M \mathbb{1}_{\{X_s^* \geq a\}}$$

### 3.2 Teorema de verificación

La principal finalidad del teorema de verificación es encontrar condiciones suficientes que nos garanticen que la solución encontrada en la ecuación HJB asociada a nuestro problema es, efectivamente, la función de valor y además, verificar que la estrategia admisible encontrada es óptima.

Recordemos que  $\phi$  está dado por la ecuación (3.3).

**Teorema 3.2.1** Supongamos que  $\phi \leq 1$ . Sea  $Z(r, x) = \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x})$ .

Entonces,

- a)  $Z(r, x) = V(r, x), \forall (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .
- b)  $l_t^{\tilde{\pi}} = M \mathbb{1}_{\{t < \tau^{\tilde{\pi}}\}}$  es una estrategia óptima. Es decir,  $V^{\tilde{\pi}}(r, x) = V(r, x)$ .

*Demostración:*

Sea  $l^\pi$  una estrategia admisible y  $\tau^\pi$  el tiempo de ruina del proceso.

Note que  $Z(r, x) = e^{-r} H(x)$ , donde:

$$H(x) = \frac{(M + \Lambda)}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x})$$

Además,  $Z(r, x)$  es de clase  $C^2$ . Por la fórmula de Itô generalizada:

$$\begin{aligned} dZ(r_t, X_t) &= \frac{\partial Z(r_t, X_t)}{\partial r} dr_t + \frac{\partial Z(r_t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial r^2} (dr_t)^2 + \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial x \partial r} (dX_t)(dr_t) \end{aligned}$$

Note que,

- $\frac{\partial Z(r, x)}{\partial x} = e^{-r} H'(x)$
- $\frac{\partial Z(r, x)}{\partial r} = -e^{-r} H(x)$
- $\frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial x^2} = e^{-r} H''(x)$

- $\frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial r^2} = e^{-r} H(x)$
- $\frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial r \partial x} = -e^{-r} H'(x)$
- $(dX_t)^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)dt$
- $(dr_t)^2 = \theta^2 dt$
- $(dr_t)(dX_t) = 0$

La última igualdad se debe a que los procesos  $W_t^{(1)}$ ,  $W_t^{(2)}$  y  $B_t^{(1)}$  son independientes.

Luego, al reemplazar estos valores en la fórmula de Itô, se tiene,

$$\begin{aligned} dZ(r_t, X_t^\pi) &= -e^{-r_t} H(X_t^\pi) \left( mdt + \theta dB_t^{(1)} \right) \\ &\quad + e^{-r_t} H'(X_t^\pi) \left( (\mu + r_1 - l_t^\pi)dt + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(2)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{-r_t} H''(X_t^\pi)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)dt + \frac{1}{2}e^{-r_t} H(X_t^\pi)\theta^2 dt \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} dZ(r_t, X_t^\pi) &= e^{-r_t} H'(X_t^\pi)(\mu + r_1 - l_t^\pi)dt + \frac{1}{2}e^{-r_t} H''(X_t^\pi)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)dt \\ &\quad + e^{-r_t} H'(X_t^\pi)(\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_t^{(1)} + e^{-r_t} H'(X_t^\pi) \left( \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \right) dW_t^{(2)} \\ &\quad - e^{-r_t} H(X_t^\pi) \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) dt - \theta e^{-r_t} H(X_t^\pi) dB_t^{(1)} \end{aligned}$$

Luego, integrando de 0 a  $t \wedge \tau^\pi$  la última ecuación, se tiene,

$$\begin{aligned} e^{-r_{t \wedge \tau^\pi}} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) &= e^{-r} H(x) + \int_0^{t \wedge \tau^\pi} (\mu + r_1 - l_s^\pi) e^{-r_s} H'(X_s^\pi) ds \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H''(X_s^\pi) ds \\ &\quad + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H'(X_s^\pi) dW_s^{(1)} \\ &\quad + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H'(X_s^\pi) dW_s^{(2)} \\ &\quad - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H(X_s^\pi) ds - \theta \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H(X_s^\pi) dB_s^{(1)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Recordemos que  $Z(r, x)$  es la solución de la ecuación HJB. Entonces, se cumple la siguiente igualdad:

$$\sup_{l \in [0, M]} \left\{ (\mu + r_1 - l)Z_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)Z_{xx} + mZ_r + \frac{\theta^2}{2}Z_{rr} + e^{-r}(l + \Lambda) \right\} = 0$$

Por consiguiente, para todo  $l \in [0, M]$  :

$$(\mu + r_1 - l)e^{-r}H'(x) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r}H''(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)e^{-r}H(x) + e^{-r}(l + \Lambda) \leq 0$$

En consecuencia, para todo  $l \in [0, M]$  :

$$(\mu + r_1 - l)e^{-r}H'(x) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r}H''(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)e^{-r}H(x) \leq -e^{-r}(l + \Lambda)$$

Así, se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} -e^{-rt}(l_t^\pi + \Lambda) &\geq (\mu + r_1 - l_t^\pi)e^{-rt}H'(X_t^\pi) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-rt}H''(X_t^\pi) \\ &\quad - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)e^{-rt}H(X_t^\pi) \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $t \wedge \tau^\pi$  la última inecuación,

$$\begin{aligned} - \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}(l_s^\pi + \Lambda)ds &\geq \int_0^{t \wedge \tau^\pi} (\mu + r_1 - l_s^\pi)e^{-rs}H'(X_s^\pi)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}H''(X_s^\pi)ds \\ &\quad - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}H(X_s^\pi)ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

De (3.6) y (3.7) se tiene,

$$\begin{aligned} e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) &\leq e^{-r}H(x) - \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}(l_s^\pi + \Lambda)ds \\ &\quad + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}H'(X_s^\pi)dW_s^{(1)} \\ &\quad + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}H'(X_s^\pi)dW_s^{(2)} \\ &\quad - \theta \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs}H(X_s^\pi)dB_s^{(1)} \end{aligned}$$



Al tomar esperanza a ambos lados de la última desigualdad, se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r_{t \wedge \tau^\pi}} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \right] &\leq e^{-r} H(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right] \\
&\quad + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho) \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H'(X_s^\pi) dW_s^{(1)} \right] \\
&\quad + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H'(X_s^\pi) dW_s^{(2)} \right] \\
&\quad - \theta \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H(X_s^\pi) dB_s^{(1)} \right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, se analizará  $(\sigma_1 + \sigma_2 \rho) \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H'(X_s^\pi) dW_s^{(1)} \right]$ .

Se afirma que,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} H'(X_s^\pi) dW_s^{(1)} \right] = \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-r_s} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dW_s^{(1)} \right] = 0$$

Sea  $\mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$  la familia de procesos estocásticos  $f(s)$  que satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $f$  es  $\mathcal{F}_s$ -adaptado.

2.  $f \in L^2([0, t] \times \Omega)$ . Es decir,  $\int_0^t \mathbb{E}[(f(s))^2] ds < \infty$ .

En efecto, demostraremos que  $e^{-r_t} H'(X_t^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$ , para todo  $t > 0$ .

Sabemos que,

$$0 \leq H'(x) = -\frac{(M + \Lambda)\eta e^{\eta x}}{m - \frac{\theta^2}{2}} \leq -\frac{(M + \Lambda)\eta}{m - \frac{\theta^2}{2}}, \forall x \geq 0.$$

Entonces,

$$H'(x) \leq R_1, \forall x \geq 0 \text{ con } R_1 = -\frac{(M + \Lambda)\eta}{m - \frac{\theta^2}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \begin{cases} = 0, & \text{si } s \geq \tau^\pi \\ \leq R_1 e^{-rs}, & \text{si } s < \tau^\pi \end{cases}$$

En consecuencia,  $e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \leq R_1 e^{-rs}$ .

Luego, se tiene,

$$\left[ e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right]^2 \leq R_1^2 e^{-2r} - 2ms - 2\theta B_s^{(1)}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left( \left[ e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right]^2 \right) &\leq R_1^2 \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2r} - 2ms - 2\theta B_s^{(1)} \right] \\ &= R_1^2 e^{-2r} - 2(m - \theta^2)s \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left( \left[ e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right]^2 \right) ds &\leq R_1^2 \int_0^t e^{-2r} - 2(m - \theta^2)s ds \\ &= -\frac{R_1^2 e^{-2r}}{2(m - \theta^2)} \left( e^{-2(m - \theta^2)t} - 1 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left[ \left( e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right)^2 \right] ds < \infty, \forall t > 0$ .

Entonces,  $\int_0^t e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dW_s^{(1)}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.

Así,  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dW_s^{(1)} \right] = 0$ .

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, podemos concluir que:

$$\int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs} H'(X_s^\pi) dW_s^{(2)} = \int_0^t e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dW_s^{(2)} \text{ es una } \mathcal{F}_t\text{-martingala.}$$

Así,  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dW_s^{(2)} \right] = 0$ .

Ahora, se analizará  $\theta \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs} H(X_s^\pi) dB_s^{(1)} \right]$ .

Afirmamos que:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs} H(X_s^\pi) dB_s^{(1)} \right] = \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} H(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dB_s^{(1)} \right] = 0$$

En efecto, demostraremos que  $e^{-rt} H(X_t^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$ , para todo  $t > 0$ .

Sabemos que  $H(x)$  es acotada, pues

$$0 \leq H(x) = \frac{(M + \Lambda)}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\eta x}) \leq \frac{(M + \Lambda)}{m - \frac{\theta^2}{2}}, \forall x \geq 0$$

Entonces,  $H(x) \leq R_2, \forall x \geq 0$  con  $R_2 = \frac{(M + \Lambda)}{m - \frac{\theta^2}{2}}$

Por lo tanto,

$$e^{-rs} H(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \begin{cases} = 0, & \text{si } s \geq \tau^\pi \\ \leq R_2 e^{-rs}, & \text{si } s < \tau^\pi \end{cases}$$

En consecuencia,  $e^{-rs} H'(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \leq R_2 e^{-rs}$ .

Luego, se tiene,

$$\left[ e^{-rt} H(X_t^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right]^2 \leq R_2^2 e^{-2r - 2ms - 2\theta B_s^{(1)}}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left[ \left( e^{-rt} H(X_t^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right)^2 \right] &\leq R_2^2 \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2r - 2ms - 2\theta B_s^{(1)}} \right] \\ &= R_2^2 e^{-2r - 2(m - \theta^2)s} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left[ \left( e^{-rt} H(X_t^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right)^2 \right] ds &\leq R_2^2 \int_0^t e^{-2r - 2(m - \theta^2)s} ds \\ &= -\frac{R_2^2 e^{-2r}}{2(m - \theta^2)} \left( e^{-2(m - \theta^2)t} - 1 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left[ \left( e^{-rs} H(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} \right)^2 \right] ds < \infty, \forall t > 0$ .

Entonces,  $\int_0^t e^{-rs} H(X_s^\pi) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dB_s^{(1)}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.

Así,  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} H(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau^\pi\}} dB_s^{(1)} \right] = 0$ .

Luego, de (3.8) se tiene,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \right] \leq e^{-r} H(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-rs} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right] \quad (3.9)$$

Ahora, se analizará  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \right]$ .

Si  $t \geq \tau^\pi \Rightarrow t \wedge \tau^\pi = \tau^\pi \Rightarrow H(X_{t \wedge \tau^\pi}) = H(X_{\tau^\pi}) = H(0) = 0$ . En particular:

$$e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) = e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \mathbb{1}_{\{\tau^\pi > t\}}$$

Sabemos que,

$$e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \mathbb{1}_{\{\tau^\pi > t\}} \leq R_2 e^{-rt \wedge \tau^\pi} \mathbb{1}_{\{\tau^\pi > t\}} \leq R_2 e^{-rt}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \right] &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt \wedge \tau^\pi} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \mathbb{1}_{\{\tau^\pi > t\}} \right] \\ &\leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ R_2 e^{-rt} \right] \\ &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ R_2 e^{-r - mt - \theta B_t^{(1)}} \right] \\ &= R_2 e^{-r - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) t} \end{aligned}$$

Así, se tiene,

$$0 \leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r_{t \wedge \tau^\pi}} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \right] \leq R_2 e^{-r - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) t}$$

Recordemos que  $m - \frac{\theta^2}{2} > 0$  entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r_{t \wedge \tau^\pi}} H(X_{t \wedge \tau^\pi}) \right] = 0$$

Ahora, analizamos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right]$$

Notemos que  $e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) \geq 0$  y entonces

$$\int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \geq 0 \quad c.s$$

También, cuando  $t \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \uparrow \int_0^{\tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \quad c.s$$

Luego, por el Teorema de convergencia monótona, cuando  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right] \uparrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right]$$

Luego, cuando  $t \rightarrow +\infty$  en la ecuación (3.9) se tiene,

$$0 \leq e^{-r} H(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right]$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-r_s} (l_s^\pi + \Lambda) ds \right] \leq e^{-r} H(x)$$

Entonces,  $V^\pi(r, x) \leq Z(r, x)$ , para todo control admisible  $l_t^\pi$ . Así,  $V(r, x) \leq Z(r, x)$ .

Además, de (3.1),  $Z(r, x) = V^{\bar{\pi}}(r, x) \leq V(r, x)$ .

En conclusión, la función de valor es

$$V(r, x) = Z(r, x) = \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{\theta^2} (1 - e^{\eta x}) \quad \text{y} \quad l_t^{\hat{\pi}} = M \mathbb{1}_{\{t < \tau^{\hat{\pi}}\}}$$

es una estrategia óptima. □

### Teorema 3.2.2

Supongamos que  $\phi > 1$ .

Sea  $f(r, x) = e^{-r}F(x)$  una función de clase  $C^2$  tal que:

- $F(0) = 0$
- $F(x)$  y  $F'(x)$  son acotadas.
- $f(r, x) = e^{-r}F(x)$  es solución de la ecuación HJB asociada a nuestro problema.

Entonces se cumple,

1.  $f(r, x) = V(r, x), \forall (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .
2.  $l_t^* = M \mathbb{1}_{\{X_s^* \geq a\}}$  es una estrategia óptima.

Es decir,  $f(r, x) = V^{\pi^*}(r, x) = V(r, x)$ .

*Demostración:*

1. La prueba es exactamente la misma que la primera parte del **Teorema 3.2.1** cambiando  $H$  por  $F$ .

Ahora, para la segunda parte del teorema de verificación se procederá de la siguiente manera:

2. Sea la estrategia admisible óptima  $l_t^* = M \mathbb{1}\{X_s^* \geq a\}$ .

De la demostración de la parte a), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
e^{-r t \wedge \tau^*} F(X_{t \wedge \tau^*}) &\leq e^{-r} F(x) - \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-r} (l^* + \Lambda) ds \\
&\quad + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho) \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(1)} \\
&\quad + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(2)} \\
&\quad - \theta \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-r_s} F(X_s) dB_s^{(1)}
\end{aligned}$$

Además, como  $f(r, x)$  es solución de la ecuación HJB se tiene,

$$\sup_{l^* \in [0, M]} \left\{ (\mu + r_1 - l^*) f_x + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) f_{xx} + m f_r + \frac{\theta^2}{2} f_{rr} + e^{-r} (l^* + \Lambda) \right\} = 0$$

Como  $l^* = M \mathbb{1}\{x_s^* \geq a\}$ , entonces se cumple la igualdad.

$$(\mu + r_1 - l^*) e^{-r} F'(x) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) e^{-r} F''(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) + e^{-r} (l^* + \Lambda) = 0$$

O equivalentemente,

$$(\mu + r_1 - l^*) e^{-r} F'(x) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) e^{-r} F''(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) = -e^{-r} (l^* + \Lambda)$$

Por lo tanto, el proceso que se seguirá es el mismo que en la demostración de la parte a). La diferencia radica en que en la primera parte se tiene una desigualdad, pero ahora se tiene una igualdad.

De esta forma,

$$\begin{aligned}
e^{-r} F(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-r} (l^* + \Lambda) ds \right] &= 0 \\
\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-r} (l^* + \Lambda) ds \right] &= e^{-r} F(x) \\
V^{\pi^*}(r, x) &= f(r, x)
\end{aligned}$$



Finalmente, se tiene:

$$f(r, x) = \begin{cases} \geq V^\pi(r, x) & , \quad l^\pi \text{ arbitrario} \\ = V^{\pi^*}(r, x) & , \quad l^\pi = l^* \end{cases}$$

A partir de lo demostrado se puede concluir lo siguiente:

$$V(r, x) \geq V^{\pi^*}(r, x) = e^{-r} F(x) \geq \sup_{l \in l^\pi} V^\pi(r, x) = V(r, x)$$

Por lo tanto,  $V(r, x) = f(r, x)$  y  $l_t^* = M \mathbb{1}_{\{X_s^* \geq a\}}$  es una estrategia óptima. □



### 3.3 Ejemplos numéricos

A continuación, mostraremos resultados obtenidos a partir de diferentes valores para los coeficientes de las ecuaciones diferenciales estocásticas que involucran nuestro modelo matemático.

Recordemos que  $\phi$  está dado por (3.3).

#### 3.3.1 Cuando $\phi \leq 1$ .

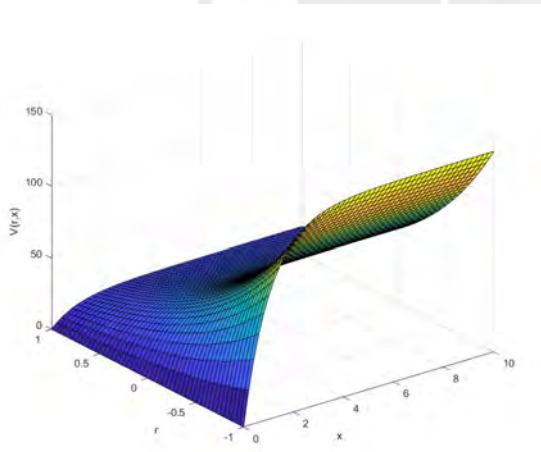
Recordemos que

$$\eta \text{ está definida por (3.2) y } V^{\bar{\pi}}(r, x) = \frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{\theta^2} \left(1 - e^{\eta x}\right)^{m - \frac{1}{2}}$$

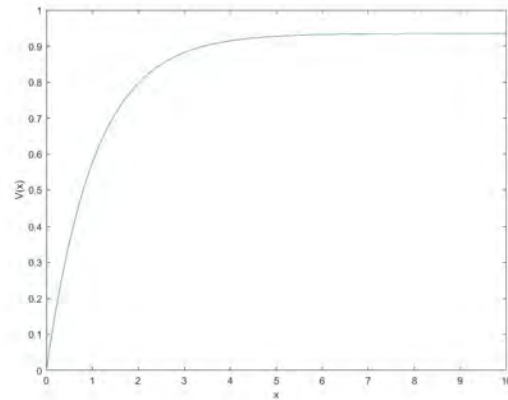
a) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu = 0.15; & \quad \sigma_1 = 0.4; & \quad r_1 = 0.1; & \quad \sigma_2 = 0.6; & \quad \rho = 0.3; \\ m = 2; & \quad \theta = 1; & \quad M = 1.5; & \quad \Lambda = 0.05 \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene  $\eta = -0.9568$  y  $\phi = 0.9887$ .



(a) Función de valor



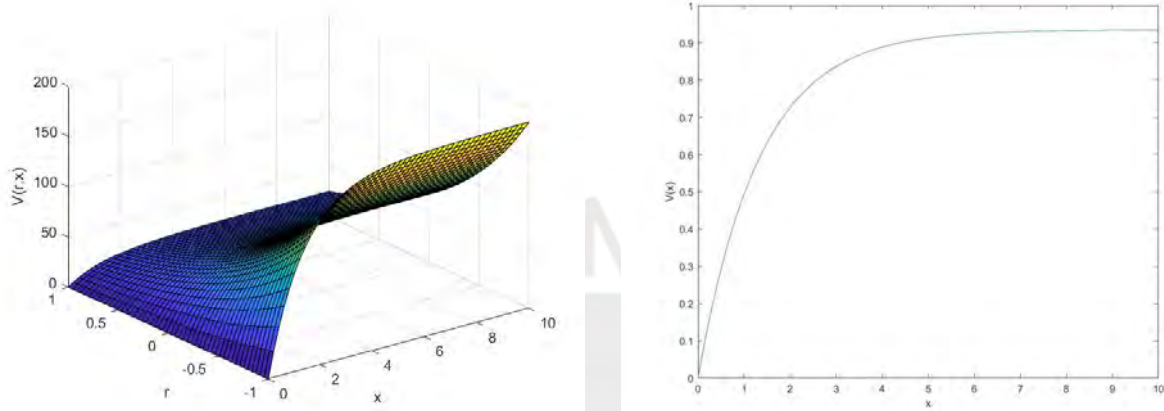
(b) Concavidad en  $x$  de la función de valor

Figure 3.1: Función de valor y concavidad en  $x$  para  $r = 0.1$  y  $M = 1.5$

b) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu = 0.15; & \quad \sigma_1 = 0.4; & \quad r_1 = 0.1; & \quad \sigma_2 = 0.6; & \quad \rho = 0.3; \\ m = 2; & \quad \theta = 1; & \quad M = 1.7; & \quad \Lambda = 0.05 \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene  $\eta = -0.8089$  y  $\phi = 0.9437$ .



(a) Función de valor

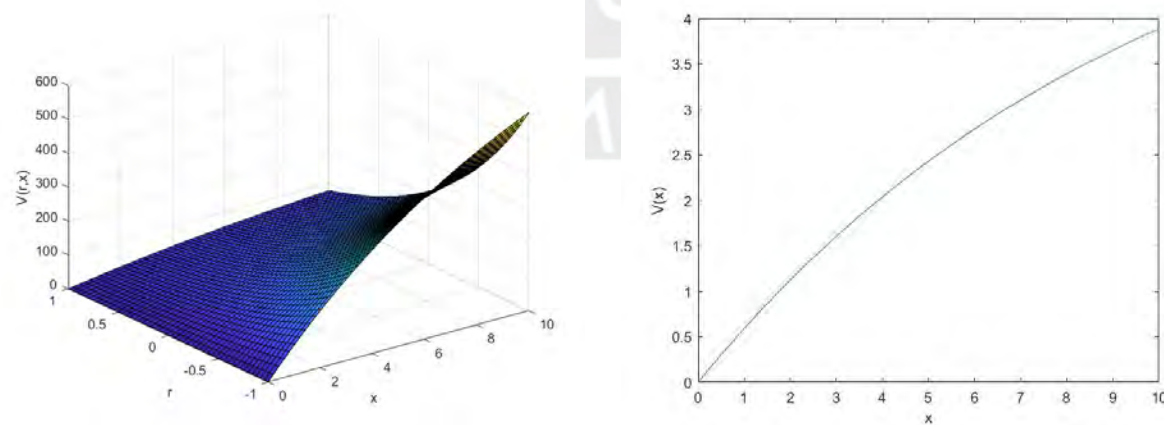
(b) Concavidad en  $x$  de la función de valor

Figure 3.2: Función de valor y concavidad en  $x$  para  $r = 0.1$  y  $M = 1.7$

c) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu = 0.15; & \quad \sigma_1 = 0.2; & \quad r_1 = 0.1; & \quad \sigma_2 = 0.2; & \quad \rho = 0.3; \\ m = 2; & \quad \theta = 1; & \quad M = 10; & \quad \Lambda = 0.05 \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene  $\eta = -0.1025$  y  $\phi = 0.6868$ .



(a) Función de valor

(b) Concavidad en  $x$  de la función de valor

Figure 3.3: Función de valor y concavidad en  $x$  para  $r = 0.1$  y  $M = 10$

En las *figuras 3.1, 3.2 y 3.3* para diferentes valores iniciales de los coeficientes de nuestro modelo podemos observar las funciones de valor y la concavidad en  $x$  de la función de valor correspondiente. En estas últimas gráficas se utilizó  $r = 0.1$ .

### 3.3.2 Cuando $\phi > 1$ .

Recordemos que  $a$  es la única solución de la ecuación:

$$\frac{-\Lambda\alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{m - \frac{1}{2}} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{1}{2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) = \eta$$

y  $\eta$  está definida en (3.2).

A continuación, analizaremos la relación que existe entre los valores de  $\Lambda$  y  $a$ . Mostraremos tres ejemplos donde se encontrarán los valores de  $a$  a partir de diferentes valores de  $\Lambda$ . Estos valores representan las barreras a partir de las cuales se debe pagar la tasa de dividendos  $M$  a los accionistas de la compañía de seguros. Los resultados obtenidos se muestran en las diferentes tablas y se representan gráficamente para poder visualizar la relación entre  $\Lambda$  y  $a$ . Además, en las tablas respectivas se hallaran los valores de  $\phi$  correspondientes.

a) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{lllll} \mu = 0.1; & \sigma_1 = 0.5; & r_1 = 0.05; & \sigma_2 = 0.7; & \rho = 0.15 \\ & m = 0.2; & \theta = 0.4; & M = 5 & \end{array}$$

Entonces,  $\eta = -0.0247$ .

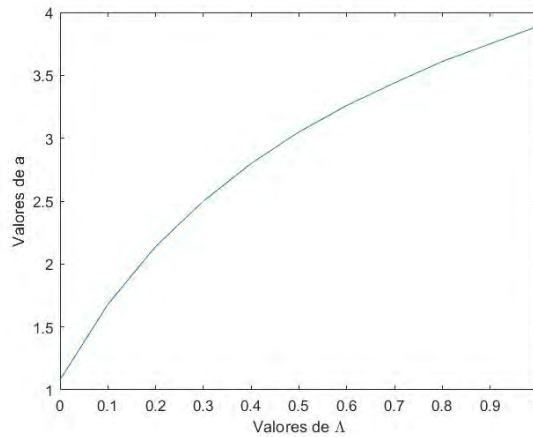


Figure 3.4: Valores de barrera en función de  $\Lambda$  cuando  $M = 5$

$\Lambda$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$a$	1.08	1.68	2.14	2.50	2.80	3.05	3.26	3.44	3.61	3.75	3.89
$\phi$	1.03	1.05	1.07	1.09	1.11	1.13	1.15	1.17	1.19	1.21	1.24

Table 3.1: Valores de  $a$  y  $\phi$  en función de  $\Lambda$  cuando  $M = 5$

b) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{lllll} \mu = 0.15; & \sigma_1 = 0.4; & r_1 = 0.1; & \sigma_2 = 0.6; & \rho = 0.3 \\ & m = 0.3; & \theta = 0.7; & M = 3 & \end{array}$$

Entonces,  $\eta = -0.020$ .

$\Lambda$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$a$	2.87	3.35	3.7	3.97	4.19	4.37	4.53	4.66	4.79	4.90	5
$\phi$	1.09	1.13	1.16	1.2	1.24	1.27	1.31	1.34	1.38	1.42	1.45

Table 3.2: Valores de  $a$  y  $\phi$  en función de  $\Lambda$  cuando  $M = 3$

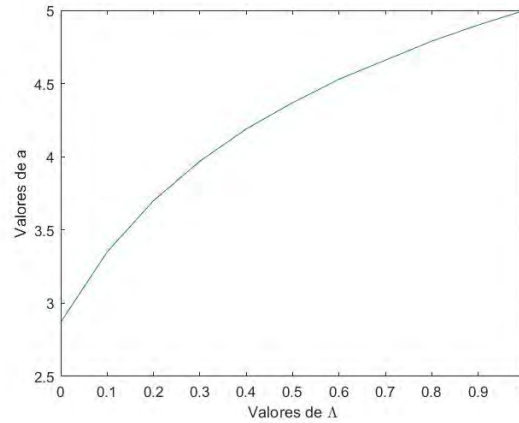


Figure 3.5: Valores de barrera en función de  $\Lambda$  cuando  $M = 3$

Como podemos observar en las *Figuras 3.4 y 3.5* a medida que los valores de  $\Lambda$  aumentan los valores de barrera  $a$  también aumentan; es decir, existe una relación directa entre las variables.

## Chapter 4

# Optimización con tasas de dividendos no acotadas

En este capítulo consideraremos el caso en el que las estrategias admisibles son procesos crecientes y continuos por derecha con límites por la izquierda donde existe la posibilidad de saltos.

De manera más precisa, llamaremos estrategias admisibles a los procesos estocásticos  $L^\pi = \{L_t^\pi; t \geq 0\}$  que cumplen con las siguientes características:

1. El proceso estocástico  $L_t^\pi$  tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda (Cadlag).
2. El proceso estocástico  $L_t^\pi$  es no negativo y tiene trayectorias crecientes.
3. El proceso estocástico  $L_t^\pi$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ .
4.  $dL_t^\pi = 0$  para cada  $(t, \omega) \in [\tau^\pi, \infty) \times \Omega$ .
5.  $X_{t-}^\pi \geq L_t^\pi - L_{t-}^\pi$  para todo  $t < \tau^\pi$ .

Así, bajo una estrategia admisible el excedente de la compañía de seguros está modelado por:

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= (\mu + r_1)dt + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}dW_t^{(2)} - dL_t^\pi, t \geq 0 \\ X_{0-}^\pi &= x - L_{0-}^\pi \end{aligned}$$

Asumiremos que  $L_{0-}^\pi = 0$ .

De esta manera, en nuestro problema asociado debemos encontrar lo siguiente:

1. La función de valor

$$V(r, x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} dL_s^\pi + \int_0^{\tau^\pi} e^{-rs} \Lambda ds \right], (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$\text{donde } r_t = r + \int_0^t m ds + \int_0^t \theta dB_s^{(1)} = r + mt + \theta B_t^{(1)}.$$

2. Una estrategia admisible  $L_t^{\pi^*}$  tal que:

$$V^{\pi^*}(r, x) = V(r, x)$$

Sea  $\Delta^\pi = \{s \geq 0, L_s^\pi \neq L_{s-}^\pi\}$  el conjunto de instantes donde  $L_t^\pi$  es discontinua. Este conjunto es numerable porque  $L_t^\pi$  tiene una cantidad numerable de saltos durante el tiempo de vida de la compañía de seguros.

Sea  $\hat{L}_t^\pi$  y  $\tilde{L}_t^\pi$  la parte discontinua y continua de  $L^\pi$ , respectivamente:

$$\hat{L}_t^\pi = \sum_{\substack{s \in \Delta^\pi \\ 0 \leq s \leq t}} (L_s^\pi - L_{s-}^\pi)$$

$$\tilde{L}_t^\pi = L_t^\pi - \hat{L}_t^\pi$$

De esta forma, podemos descomponer toda estrategia admisible de la siguiente forma:

$$L_t^\pi = \tilde{L}_t^\pi + \sum_{\substack{s \in \Delta^\pi \\ 0 \leq s \leq t}} (L_s^\pi - L_{s-}^\pi)$$

## 4.1 Construcción de una solución

De la misma forma que el capítulo anterior, construiremos una solución de la ecuación HJB asociada al problema, el cual corroboraremos posteriormente, que es en efecto la función de valor a través de un teorema de verificación. Para ello, plantearemos la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada a nuestro problema, la cual es la siguiente:

$$\max \left\{ (\mu + r_1)V_x + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)V_{xx} + mV_r + \frac{\theta^2}{2}V_{rr} + e^{-r}\Lambda, e^{-r} - V_x \right\} = 0 \quad (4.1)$$



Supongamos que la solución de la ecuación HJB que estamos buscando tiene la forma:

$$Z(r, x) = e^{-r} F(x)$$

Al calcular las derivadas parciales, se tiene,

$$\begin{aligned} Z_x(r, x) &= e^{-r} F'(x) \\ Z_{xx}(r, x) &= e^{-r} F''(x) \\ Z_r(r, x) &= -e^{-r} F(x) \\ Z_{rr}(r, x) &= e^{-r} F(x) \end{aligned}$$

Así,

$$\max \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)e^{-r} F(x) + \Lambda e^{-r}, e^{-r} - e^{-r} F'(x) \right\} = 0$$

O equivalentemente,

$$\max \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)F''(x) + (\mu + r_1)F'(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)F(x) + \Lambda, 1 - F'(x) \right\} = 0$$

Entonces,

$$1 - F'(x) \leq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 1$$

Asumiremos que  $F(x)$  es cóncava y que existe un punto  $a > 0$  tal que  $F(x)$  es estrictamente cóncava en  $[0, a)$  y  $F'(a) = 1$ . En particular,  $F'(x) > 1$  cuando  $x < a$ ,  $F'(x) = 1$  cuando  $x \geq a$ . Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x < a \\ x + A_2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Así, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^-} F_1(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} x + A_2 = a + A_2 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} F_1'(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} F_1''(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} 0 = 0\end{aligned}$$

Luego,  $F_1(x)$  es la solución de

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)F''(x) + (\mu + r_1)F'(x) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)F(x) + \Lambda = 0, x < a \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea de coeficientes constantes. La solución de esta ecuación está dada por la suma de las soluciones particular y homogénea.

Así, la solución de esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$F_1(x) = A_1 + B_1e^{\beta_1 x} + C_1e^{\beta_2 x}$$

donde

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{-(\mu + r_1) + \sqrt{(\mu + r_1)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} > 0 \\ \beta_2 &= \frac{-(\mu + r_1) - \sqrt{(\mu + r_1)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} < 0\end{aligned}$$

Notemos que del capítulo anterior se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2\end{aligned}$$

Notemos que  $Z(r, 0) = 0$ . Entonces,  $F_1(0) = 0$ . Luego, se tiene que  $C_1 = -(A_1 + B_1)$ .

Ahora, para la solución particular planteamos que  $F_{1p}(x) = A_1$ . Así, obtenemos que:

$$A_1 = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}$$

Notemos que del capítulo anterior en la subsección 3.1.2 se tiene,

$$A_1 = A$$

Luego, se tiene:

$$F_1(x) = A + B_1 e^{\alpha_1 x} - (A + B_1) e^{\alpha_2 x}$$

$$F_1(x) = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B_1 e^{\alpha_1 x} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B_1 \right) e^{\alpha_2 x}$$

Luego, para obtener el valor de  $B_1$ , utilizaremos que,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_1'(x) = 1$$

Así,

$$F_1'(x) = B_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B_1 \right) \alpha_2 e^{\alpha_2 x}$$

De este modo,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} B_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B_1 \right) \alpha_2 e^{\alpha_2 x} = 1$$

$$B_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \left( \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} + B_1 \right) \alpha_2 e^{\alpha_2 a} = 1$$

Por lo tanto:

$$B_1 = \frac{1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2}e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}$$

Notemos que del capítulo anterior en la subsección 3.1.2 se tiene,

$$B_1 = B$$

Así, cuando  $0 < x < a$ ,  $F_1(x)$  está definida de la siguiente manera:

$$F_1(x) = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\alpha_2 x}) + \left(1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2}e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right)$$

Luego, para obtener el valor de  $A_2$ , utilizaremos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_1(x) = a + A_2$$

Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\alpha_2 x}) + \left(1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2}e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right) = a + A_2$$

Entonces,

$$A_2 = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\alpha_2 a}) + \left(1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2}e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 a} - e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right) - a$$

Así, para  $x \geq a$ ,  $F(x)$  está definida de la siguiente manera:

$$F(x) = x + \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}}(1 - e^{\alpha_2 a}) + \left(1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{\theta^2}e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 a} - e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right) - a$$

Ahora, para que la función  $F(x)$  sea de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}_+$  se debe cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_1''(x) = 0$$

$$F_1''(x) = \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 x} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right)$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 x} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) = 0$$

$$\frac{-\Lambda\alpha_2^2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 a} + \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) = 0$$

Simplificando la última expresión,

$$\left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 a} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) - \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_1}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_1 a} \right) \left( \frac{\alpha_2^2 e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}} \right) = 0$$

Notemos que  $\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a} > 0$ , así,

$$\left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_2}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_2 a} \right) \alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \left( 1 + \frac{\Lambda\alpha_1}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{\alpha_1 a} \right) \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} = 0$$

Reduciendo esta expresión se tiene,

$$\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{2}{\theta^2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2)a} = 0$$

Para que la función  $F(x)$  sea dos veces diferenciable debemos hallar la solución de esta última ecuación. Así, por la forma que tiene la ecuación no la resolveremos sino que demostraremos que esta ecuación tiene solución y es única.

Sea  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$g(a) = \alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2) a}$$

Calcularemos los siguientes límites:

1.  $\lim_{a \rightarrow 0^+} g(a)$

2.  $\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a)$

Además, analizaremos la monotonía de  $g$ .

1. 
$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} g(a) &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2) a} \\ &= \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} = (\alpha_1 - \alpha_2) \left( \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} \right) < 0 \end{aligned}$$

Esto se debe a lo siguiente,

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \frac{2\sqrt{(\mu + r_1)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)} \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} > 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= -\frac{\mu + r_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} < 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 &= -\frac{2 \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho} < 0 \end{aligned}$$

2. 
$$\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2) a} = +\infty$$

Esto se debe a lo siguiente:

Como  $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$  entonces,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2)a} = 0$$

Como  $\alpha_2 < 0$  entonces,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} = 0$$

Como  $\alpha_1 > 0$  entonces,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} = +\infty$$

Luego, afirmamos que  $g(a)$  es estrictamente creciente pues  $g'(a) > 0$  para todo  $a \in \mathbb{R}_+$ .

$$g(a) = \alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2)a}$$

$$g'(a) = \alpha_1^3 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^3 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2)a} > 0$$

Esto se debe a lo siguiente:

Como  $\alpha_1 > 0$  entonces,

$$\alpha_1^3 e^{\alpha_1 a} > 0$$

Como  $\alpha_2 < 0$  entonces,

$$-\alpha_2^3 e^{\alpha_2 a} > 0$$

Como  $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$  y  $\alpha_1 \alpha_2 < 0$  entonces,

$$\frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2)a} > 0$$

De esta manera, concluimos que la ecuación  $g(a) = 0$  tiene solución y es única. Por lo tanto, podemos afirmar que la función  $F(x)$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}_+$  y está dada por:



$$F(x) = \begin{cases} (1 - e^{\alpha_2 x}) + \left(1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right), & \text{si } 0 \leq x < a \\ x + \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\alpha_2 a}) + \left(1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{e^{\alpha_1 a} - e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right) - a, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Como  $F(x)$  es continua en  $[0; a[$  entonces  $F(x)$  es acotada en  $[0; a[$ .

Además, notemos que  $F(x)$  tiene crecimiento lineal.

Luego, se tiene,

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{-\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 x} + \left(1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a}\right) \left(\frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}\right), & \text{si } 0 \leq x < a \\ 1, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Como  $F'(x)$  es decreciente en  $[0; a[$  entonces:

$$1 \leq F'(x) \leq F'(0) = K_2, \forall x \geq 0$$

Por lo tanto,  $Z(r, x) = e^{-r} F(x)$  es definida por:

$$Z(r, x) = \begin{cases} e^{-r} \left[ \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\alpha_2 x}) + B(e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}) \right], & \text{si } 0 < x < a \\ e^{-r} \left[ x + \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} (1 - e^{\alpha_2 a}) + B(e^{\alpha_1 a} - e^{\alpha_2 a}) - a \right], & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Donde,

$$B = \frac{1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}$$

y  $a$  es la solución de la ecuación:

$$\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2) a} = 0$$

Además, veremos en la siguiente sección que la estrategia óptima está dada de la siguiente manera:

$$L_t^{\pi^*} = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \tau^{\pi^*} \wedge t} \bar{X}_s^{\pi^*} - a, 0 \right\}$$

donde  $\bar{X}_t^{\pi^*} = x + (\mu + r_1)t + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho)W_t^{(1)} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_t^{(2)}$ .



## 4.2 Teorema de verificación

A través de este teorema se pretende verificar que la solución de la ecuación HJB asociada a nuestro problema es, efectivamente, la función de valor. Enunciamos el siguiente teorema de acuerdo a la condiciones de nuestro problema.

**Teorema 4.2.1** Sea  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  que cumple las siguientes características:

- $F(0) = 0$ .
- $F'(x)$  es acotada.
- $Z(r, x) = e^{-r}F(x)$  es solución de la ecuación (4.1).

Entonces, se cumple,

1.  $Z(r, x) = V(r, x), \forall (r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .
2. Si  $F$  es la solución encontrada en la sección 4.1 entonces

$$L_t^{\pi^*} = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \tau^{\pi^*} \wedge t} \bar{X}_s^{\pi^*} - a, 0 \right\}$$

donde  $\bar{X}_s^{\pi^*} = x + (\mu + r_1)s + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)W_s^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}W_s^{(2)}$  es una estrategia óptima.

En particular,

$$Z(r, x) = V^{\pi^*}(r, x) = V(r, x)$$

*Observación:* Note que  $e^{-r} - e^{-r}F'(x) \leq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 1$ .

*Demostración:*

1. Sea  $L = L^\pi$  una estrategia admisible. El excedente de la compañía de seguros puede ser reescrita de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} X_t^\pi &= x + \int_0^t (\mu + r_1)ds + \int_0^t (\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}dW_s^{(2)} - \tilde{L}_t^\pi \\ &\quad - \sum_{\substack{s \in \Delta^\pi \\ 0 \leq s \leq t}} (L_s^\pi - L_{s-}^\pi) \end{aligned}$$

Para la demostración utilizaremos la fórmula de Itô generalizada, la cual fue obtenida de la Sección 8.3.2 del Capítulo III de [12].

$$\begin{aligned}
dZ(r_t, X_t) &= \frac{\partial Z(r_t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{\partial Z(r_t, X_t)}{\partial r} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial r^2} (dr_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial x \partial r} (dX_t)(dr_t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(r_t, X_t)}{\partial r \partial x} (dr_t)(dX_t) - \frac{\partial Z(r_t, X_t)}{\partial x} d\tilde{L}_t \\
&\quad + \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t}} (Z(r_s, X_s) - Z(r_s, X_{s-}))
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde  $X_t = X_t^\pi$ ,  $d\tilde{L}_t = d\tilde{L}_t^\pi$  y  $\Delta^\pi = \Delta$ .

Tenemos que,

- $\frac{\partial Z(r, x)}{\partial x} = e^{-r} F'(x)$
- $\frac{\partial Z(r, x)}{\partial r} = -e^{-r} F(x)$
- $\frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial x^2} = e^{-r} F''(x)$
- $\frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial r^2} = e^{-r} F(x)$
- $\frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2 Z(r, x)}{\partial r \partial x} = -e^{-r} F'(x)$
- $(dX_t)^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)dt$
- $(dr_t)^2 = \theta^2 dt$
- $(dr_t)(dX_t) = 0$

La última igualdad se debe a que  $W_t^{(1)}$ ,  $W_t^{(2)}$  y  $B_t^{(1)}$  son independientes.

Al reemplazar estos valores en (4.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
dZ(r_t, X_t) = & -e^{-rt}F'(X_t) \left( mdt + \theta dB_t^{(1)} \right) \\
& + e^{-rt}F'(X_t) \left( (\mu + r_1)dt + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)dW_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(2)} \right) \\
& + \frac{1}{2}e^{-rt}F''(X_t)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)dt + \frac{1}{2}\theta^2e^{-rt}F(X_t)dt \\
& - e^{-rs}F'(X_s)d\tilde{L}_t + \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t}} e^{-rs} [F(X_s) - F(X_{s-})]
\end{aligned}$$

Agrupando e integrando de 0 a  $t \wedge \tau$  la última ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{-rt \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}) = & e^{-r}F(x) + (\mu + r_1) \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)ds \\
& + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F''(X_s)ds \\
& + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)dW_s^{(1)} \\
& + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)dW_s^{(2)} \\
& - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F(X_s)ds - \theta \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F(X_s)dB_s^{(1)} \\
& - \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)d\tilde{L}_s + \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t \wedge \tau}} e^{-rs} [F(X_s) - F(X_{s-})]
\end{aligned}$$

donde  $\tau = \tau^\pi$ .

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
e^{-rt \wedge \tau} F(X_{t \wedge \tau}) = & e^{-r}F(x) \\
& + \int_0^{t \wedge \tau} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-rs}F''(X_s) + (\mu + r_1)e^{-rs}F'(X_s) \right. \\
& \left. - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-rs}F(X_s) \right] ds + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)dW_s^{(1)} \\
& + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)dW_s^{(2)} - \theta \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F(X_s)dB_s^{(1)} \\
& - \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs}F'(X_s)d\tilde{L}_s + \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t \wedge \tau}} e^{-rs} [F(X_s) - F(X_{s-})]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para cada  $k \geq 1$ , cumpliendo con  $-k < r < k$  y  $0 < x < k$  definimos  $D_k = (-k, k) \times (0, k)$ .

Consideremos el primer tiempo de salida del proceso  $(r_t, X_t)$  del conjunto  $D_k$ .

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0; (r_t, X_t) \notin D_k\}$$

Para cada  $t \geq 0$ , en la ecuación (4.4),

$$\begin{aligned} e^{-r\varepsilon_k} F(X_{\varepsilon_k}) &= e^{-r} F(x) \\ &+ \int_0^{\varepsilon_k} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-rs} F''(X_s) + (\mu + r_1)e^{-rs} F'(X_s) \right. \\ &- \left. \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-rs} F(X_s) \right] ds + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(1)} \\ &+ \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(2)} - \theta \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \\ &- \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F'(X_s) d\tilde{L}_s + \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-rs} [F(X_s) - F(X_{s-})] \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $\varepsilon_k = t \wedge \tau_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

Recordemos que  $Z(r, x)$  es solución de la ecuación (4.1). Entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\max \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) + \Lambda e^{-r}, \right. \\ \left. e^{-r} - e^{-r} F'(x) \right\} = 0$$

Así,

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) + \Lambda e^{-r} \leq 0$$

En consecuencia,

$$-\Lambda e^{-r} \geq \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x)$$

Integrando de 0 a  $\varepsilon_k$  la última desigualdad, obtenemos,

$$\int_0^{\varepsilon_k} -\Lambda e^{-r_s} ds \geq \int_0^{\varepsilon_k} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r_s} F''(X_s) + (\mu + r_1)e^{-r_s} F'(X_s) - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right) e^{-r_s} F(X_s) \right] ds \quad (4.6)$$

Además,

$$\begin{aligned} e^{-r} - e^{-r} F'(x) &\leq 0 \\ -e^{-r} F'(x) &\leq -e^{-r} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$-\int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F'(X_s) d\tilde{L}_s \leq -\int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} d\tilde{L}_s \quad (4.7)$$

Luego, utilizando las ecuaciones (4.6) y (4.7) en la ecuación (4.5), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} e^{-r\varepsilon_k} F(X_{\varepsilon_k}) &\leq e^{-r} F(x) - \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} \Lambda ds + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(1)} \\ &\quad + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(2)} - \theta \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F(X_s) dB_s^{(1)} \\ &\quad - \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} d\tilde{L}_s + \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-r_s} (F(X_s) - F(X_{s-})) \end{aligned}$$

Al tomar esperanza a ambos lados de la última desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r\varepsilon_k} F(X_{\varepsilon_k}) \right] &\leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r} F(x) \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} \Lambda ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(1)} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(2)} \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \theta \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F(X_s) dB_s^{(1)} \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} d\tilde{L}_s \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-r_s} (F(X_s) - F(X_{s-})) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$



Ahora, se analizará  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2 \rho) \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(1)} \right]$ .

Se afirma lo siguiente:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau_k} e^{-r_s} F'(X_s) dW_s^{(1)} \right] = \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-r_s} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dW_s^{(1)} \right] = 0$$

Demostraremos que  $e^{-r_t} F'(X_t) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$ , para todo  $t > 0$ .

Por las condiciones del teorema, existe  $K_2 > 0$  tal que  $1 \leq F'(x) \leq K_2$ .

Entonces,

$$e^{-r_s} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \begin{cases} = 0, & \text{si } s \geq \tau_k \\ \leq K_2 e^{-r_s}, & \text{si } s < \tau_k \end{cases}$$

Luego, se tiene que  $(r_t, X_t) \in \bar{D}_k$  cuando  $s \in [0, \varepsilon_k]$ ; es decir,  $r_s \in [-k, k]$  y  $X_s \in [0, k]$  cuando  $s \in [0, \varepsilon_k]$ .

Así, para cada  $s \in [0, \varepsilon_k]$ ,

$$e^{-r_s} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \leq K_2 e^{-r_s}$$

Por consiguiente,

$$\left[ e^{-r_s} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 \leq K_2^2 e^{-2r_s}$$

Tomando esperanza a la última desigualdad,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left( \left[ e^{-r_s} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 \right) &\leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ K_2^2 e^{-2r_s} \right] \\ &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ K_2^2 e^{-2r} - 2ms - 2\theta B_s^{(1)} \right] \\ &= K_2^2 e^{-2r} - 2(m - \theta^2)s \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $t$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left( \left[ e^{-rs} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 \right) ds &\leq \int_0^t K_2^2 e^{-2r - 2(m - \theta^2)s} ds \\
&\leq \int_0^t K_2^2 e^{-2r - 2(m - \theta^2)s} ds \\
&= -\frac{K_2^2 e^{-2r}}{2(m - \theta^2)} \left( e^{-2(m - \theta^2)t} - 1 \right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

De esta manera  $\int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left( \left[ e^{-rs} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 \right) < \infty, \forall t > 0$ .

Así,  $e^{-rt} F'(X_t) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$ , para todo  $t > 0$ .

Entonces  $\int_0^t e^{-rs} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dW_s^{(1)}$  es una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.

En consecuencia  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dW_s^{(1)} \right] = 0$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, podemos concluir que

$$\int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(2)} = \int_0^t e^{-rs} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dW_s^{(2)} \text{ es una } \mathcal{F}_t\text{-martingala.}$$

Así,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t e^{-rs} F'(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dW_s^{(2)} \right] = 0$$

Luego, en la ecuación (4.8) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r\varepsilon_k} F(X_{\varepsilon_k}) \right] &\leq e^{-r} F(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} \Lambda ds \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \theta \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} d\tilde{L}_s \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-rs} (F(X_s) - F(X_{s-})) \right]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ahora analizaremos  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \theta \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \right]$ :

Se afirma lo siguiente:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \right] = \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dB_s^{(1)} \right] = 0$$

Demostraremos que  $e^{-rt} F(X_t) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$ , para todo  $t > 0$ .

Como  $F'(x) \geq 1$  para todo  $x \geq 0$  entonces  $F(x)$  es creciente. Así, cuando  $X_s \in [0, k]$  tenemos  $F(X_s) \leq K_1$ .

Entonces,

$$e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \begin{cases} = 0, & \text{si } s \geq \tau_k \\ \leq K_1 e^{-rs}, & \text{si } s < \tau_k \end{cases}$$

Así, para cada  $s \in [0, \varepsilon_k]$ :

$$e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \leq K_1 e^{-rs}$$

Por consiguiente,

$$\left[ e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 \leq K_1^2 e^{-2rs}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 &\leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ K_1^2 e^{-2r - 2ms - 2\theta B_s^{(1)}} \right] \\ &= K_1^2 \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2r - 2ms - 2\theta B_s^{(1)}} \right] \\ &= K_1^2 e^{-2r - 2(m - \theta^2)s} \end{aligned}$$

De este modo, integrando de 0 a  $t$  la última desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 ds &\leq \int_0^t K_1^2 e^{-2r-2(m-\theta^2)s} ds \\ &\leq -\frac{K_1^2 e^{-2r}}{2(m-\theta^2)} \left( e^{-2(m-\theta^2)t} - 1 \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_0^t \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \right]^2 ds < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

Así,  $e^{-rt} F(X_t) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, t] \times \Omega)$ , para todo  $t > 0$ .

De esta forma  $\int_0^t e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dB_s^{(1)}$  es un  $\mathcal{F}_t$ -martingala para cada  $k$  fijo.

Por lo tanto,  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^t e^{-rs} F(X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_k\}} dB_s^{(1)} \right] = 0$

Luego, reemplazando en la ecuación (4.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r\varepsilon_k} F(X_{\varepsilon_k}) \right] &\leq e^{-r} F(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} \Lambda ds \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} d\tilde{L}_s \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-rs} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \right] \end{aligned}$$

En particular, como  $e^{-r\varepsilon_k} F(X_{\varepsilon_k}) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} e^{-r} F(x) &\geq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} \Lambda ds \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} d\tilde{L}_s \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-rs} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora, analizaremos  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-rs} \Lambda ds \right]$ .

Recordemos que  $\varepsilon_k = t \wedge \tau_k$

Como  $\tau_k$  es una sucesión de tiempos de parada tal que  $\tau_k \uparrow \tau$  c.s. y  $e^{-r_s} \Lambda > 0$  entonces por el Teorema de convergencia monótona, afirmamos lo siguiente:

Para todo  $t \geq 0$ , cuando  $k \rightarrow +\infty$  entonces  $\varepsilon_k \uparrow t \wedge \tau$  y

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} \Lambda ds \right] \rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} \Lambda ds \right]$$

Análogamente,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k} e^{-r_s} d\tilde{L}_s \right] \rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} d\tilde{L}_s \right]$$

Ahora, analizaremos

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-r_s} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \right]$$

Como los saltos en el excedente de la compañía ocurren solo si ocurren saltos en los dividendos, entonces:

$$X_s - X_{s-} = L_{s-} - L_s$$

Como  $L_t$  tiene trayectorias crecientes, entonces:

$$L_{s-} - L_s \leq 0$$

De esta forma:

$$X_s - X_{s-} \leq 0 \Rightarrow X_s \leq X_{s-}$$

Como  $F'(x) \geq 1$  para todo  $t > 0$ , entonces  $F(x)$  es creciente. Así:

$$F(X_s) \leq F(X_{s-}) \Rightarrow F(X_{s-}) - F(X_s) \geq 0 \Rightarrow e^{-r_s} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \geq 0$$

Cuando  $k \rightarrow +\infty$  entonces  $\varepsilon_k \uparrow t \wedge \tau$ . Por lo tanto, por el Teorema de convergencia monótona, afirmamos lo siguiente:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq \varepsilon_k}} e^{-r_s} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \right] \rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t \wedge \tau}} e^{-r_s} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \right]$$

Luego, cuando  $k \rightarrow \infty$  en la ecuación (4.10) se obtiene:

$$\begin{aligned}
e^{-r} F(x) &\geq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} \Lambda ds \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} d\tilde{L}_s \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t \wedge \tau}} e^{-r_s} (F(X_{s-}) - F(X_s)) \right]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Recordemos que,

$$X_s - X_{s-} = L_{s-} - L_s \leq 0$$

Como  $F$  es de clase  $C^2$  cuando  $s \in \Delta$ , por el teorema del valor medio, para algún  $c \geq 0$ :

$$F'(c) = \frac{F(X_s) - F(X_{s-})}{X_s - X_{s-}} \geq 1$$

Así,

$$\frac{F(X_s) - F(X_{s-})}{L_{s-} - L_s} \geq 1$$

Luego,

$$F(X_s) - F(X_{s-}) \leq L_{s-} - L_s$$

Por consiguiente,

$$e^{-r_s} (F(X_s) - F(X_{s-})) \leq e^{-r_s} (L_{s-} - L_s)$$

Entonces, en (4.11) obtenemos:

$$e^{-r} F(x) \geq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} \Lambda ds \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} d\tilde{L}_s \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sum_{\substack{s \in \Delta \\ 0 \leq s \leq t \wedge \tau}} e^{-r_s} (L_s - L_{s-}) \right]$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
e^{-r} F(x) &\geq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} \Lambda ds \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} dL_s \right] \\
&= \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} \Lambda ds + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-r_s} dL_s \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ahora, analizaremos:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \Lambda ds + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} dL_s \right]$$

Notemos que  $e^{-rs} \Lambda \geq 0$ , entonces,

$$\int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \Lambda ds \geq 0 \quad c.s.$$

También, notemos que  $e^{-rs} > 0$ , entonces,

$$\int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} dL_s \geq 0 \quad c.s.$$

Luego, por el Teorema de convergencia monótona, cuando  $t \rightarrow +\infty$  entonces  $t \wedge \tau \uparrow \tau$  y

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \Lambda ds + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} dL_s \right] \rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau} e^{-rs} \Lambda ds + \int_0^{\tau} e^{-rs} dL_s \right]$$

Entonces, cuando  $t \rightarrow +\infty$  en la ecuación (4.12) se obtiene:

$$e^{-r} F(x) \geq \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau} e^{-rs} \Lambda ds + \int_0^{\tau} e^{-rs} dL_s \right]$$

Por lo tanto:

$$e^{-r} F(x) \geq V(r, x)$$

2. Ahora, probaremos la segunda parte del teorema de verificación.

Sea la estrategia admisible

$$L_t^{\pi^*} = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \tau^{\pi^*} \wedge t} \bar{X}_s^{\pi^*} - a, 0 \right\}$$

donde  $\bar{X}_t^{\pi^*} = x + (\mu + r_1)t + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho)W_t^{(1)} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_t^{(2)}$ .

Notemos que esta estrategia  $L_t^{\pi^*}$  es continua y creciente. Además,  $L_0^{\pi^*} = x - a$ . Esta estrategia debe interpretarse de una manera diferente a la del pago de dividendos con tasas acotadas. La barrera  $a$  es el nivel que, según la estrategia óptima, el excedente de la compañía no debe superar. Siempre que el excedente de la compañía supere la barrera  $a$ , el máximo de los excesos de  $\bar{X}_s^{\pi^*}$  sobre  $a$  debe pagarse como dividendos.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad y procediendo del mismo modo que en [17] notemos que  $X_t^{\pi^*} \leq a$  para todo  $0 \leq t \leq \tau^{\pi^*}$ .

Utilizando la fórmula de Itô generalizada y el mismo proceso de la primera parte de este teorema, se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{-r\varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*}) &= e^{-r} F(x) \\
&+ \int_0^{\varepsilon_k^*} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-rs} F''(X_s) + (\mu + r_1)e^{-rs} F'(X_s) \right. \\
&- \left. \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-rs} F(X_s) \right] ds + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(1)} \quad (4.13) \\
&+ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(2)} - \theta \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \\
&- \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dL_s^{\pi^*}
\end{aligned}$$

donde  $X_t = X_t^{\pi^*}$ ,  $\tau_k^{\pi^*} := \inf\{t \geq 0; (r_t, X_t) \notin D_k\}$  y  $\varepsilon_k^* = t \wedge \tau_k^{\pi^*}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

Además, como  $Z(r, x)$  es solución de la ecuación HJB se tiene,

$$\max \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) + \Lambda e^{-r}, \right. \\
\left. e^{-r} - e^{-r} F'(x) \right\} = 0$$

Recordemos que cuando  $x \leq a$  se cumple,

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) + \Lambda e^{-r} = 0$$

O equivalentemente, cuando  $x \leq a$  se cumple,

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(x) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(x) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(x) = -\Lambda e^{-r}$$

Entonces, como  $X_s \leq a$  para todo  $0 \leq s \leq \tau^{\pi^*}$  se obtiene,

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)e^{-r} F''(X_s) + (\mu + r_1)e^{-r} F'(X_s) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-r} F(X_s) = -\Lambda e^{-r}$$



Integrando de 0 a  $\varepsilon_k^*$  la última igualdad tenemos,

$$\int_0^{\varepsilon_k^*} -\Lambda e^{-rs} ds = \int_0^{\varepsilon_k^*} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho) e^{-rs} F''(X_s) + (\mu + r_1) e^{-rs} F'(X_s) - \left( m - \frac{\theta^2}{2} \right) e^{-rs} F(X_s) \right] ds \quad (4.14)$$

Notemos que cuando  $X_t < a$ ,  $L_t^{\pi^*}$  es constante para  $s$  en una vecindad de  $t$  entonces,

$$\int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dL_s^{\pi^*} = \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(a) dL_s^{\pi^*} = \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \quad (4.15)$$

Así, utilizando las ecuaciones (4.14) y (4.15) en la ecuación (4.13) se obtiene,

$$\begin{aligned} e^{-r\varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*}) &= e^{-r} F(x) - \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} \Lambda ds + (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(1)} \\ &\quad + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(2)} - \theta \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \\ &\quad - \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \end{aligned}$$

Al tomar esperanza a la última igualdad se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r\varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*}) \right] &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r} F(x) \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} \Lambda ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2\rho) \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(1)} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F'(X_s) dW_s^{(2)} \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \theta \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} F(X_s) dB_s^{(1)} \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Luego, siguiendo el mismo procedimiento que la primera parte de este teorema, la ecuación (4.16) queda reducida a la siguiente expresión:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r\varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*}) \right] = e^{-r} F(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} \Lambda ds \right] - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \right] \quad (4.17)$$

Luego, cuando  $k \rightarrow +\infty$  se tiene las siguientes convergencias:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-r_s} \Lambda ds \right] &\rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^{\pi^*}} e^{-r_s} \Lambda ds \right] \\ \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\varepsilon_k^*} e^{-r_s} dL_s^{\pi^*} \right] &\rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^{\pi^*}} e^{-r_s} dL_s^{\pi^*} \right]\end{aligned}$$

Afirmamos lo siguiente:

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r \varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*}) \right] \rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r t \wedge \tau^{\pi^*}} F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}}) \right] \quad (4.18)$$

Sea  $Z_k = e^{-r \varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*})$ . Notemos que  $Z_k \geq 0$ .

Como  $X_t$  es continua y  $r_t$  tiene trayectorias continuas, entonces cuando  $k \rightarrow +\infty$  se tienen las siguientes convergencias *c.s.*,

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^* &\rightarrow t \wedge \tau^{\pi^*} \\ X_{\varepsilon_k^*} &\rightarrow X_{t \wedge \tau^{\pi^*}} \\ e^{-r \varepsilon_k^*} F(X_{\varepsilon_k^*}) &\rightarrow e^{-r t \wedge \tau^{\pi^*}} F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}})\end{aligned}$$

Por esta última convergencia, para demostrar que se cumple la convergencia en (4.18), basta probar que la sucesión de variables aleatorias  $(Z_k)$  es uniformemente integrable. Recordemos que  $F(x) \leq K_1$  para todo  $x \in [0, k]$ .

$M_u = e^{-2\theta B_u^{(1)}} - 2\theta^2 u$ ,  $u \geq 0$  es una martingala con  $\mathbb{E}_{r,x} [M_u] = 1$ .

Por el Teorema de muestreo opcional  $\mathbb{E}_{r,x} [M_{t \wedge \tau_k^{\pi^*}}] = 1$ . Como  $\varepsilon_k^* = t \wedge \tau_k^{\pi^*} \leq t$ , entonces  $e^{-2\theta^2 \varepsilon_k^*} \geq e^{-2\theta^2 t}$  y  $1 = \mathbb{E}_{r,x} [M_{t \wedge \tau_k^{\pi^*}}] = \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2\theta B_{\varepsilon_k^*}^{(1)}} e^{-2\theta^2 \varepsilon_k^*} \right] \geq e^{-2\theta^2 t} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2\theta B_{\varepsilon_k^*}^{(1)}} \right]$ .

Por lo tanto,  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2\theta B_{\varepsilon_k^*}^{(1)}} \right] \leq e^{2\theta^2 t}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{r,x} [Z_k^2] &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2r\varepsilon_k^*} \left[ F(X_{\varepsilon_k^*}) \right]^2 \right] \\
&\leq K_1^2 \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2r\varepsilon_k^*} \right] \\
&= K_1^2 \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2r - 2m\varepsilon_k^* - 2\theta B_{\varepsilon_k^*}^{(1)}} \right] \\
&\leq K_1^2 e^{-2r} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-2\theta B_{\varepsilon_k^*}^{(1)}} \right] \\
&\leq K_1^2 e^{-2r} e^{2\theta^2 t}
\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbb{E}_{r,x} [Z_k^2] \leq K_1^2 e^{-2r + 2\theta^2 t} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

En particular, la sucesión  $(Z_k)$  es uniformemente integrable.

Luego cuando  $k \rightarrow +\infty$ , de la ecuación (4.17) se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r t \wedge \tau^{\pi^*}} F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}}) \right] &= e^{-r} F(x) - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^{\pi^*}} e^{-r_s} \Lambda ds \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^{\pi^*}} e^{-r_s} dL_s^{\pi^*} \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Ahora, analizaremos el término  $\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-r t \wedge \tau^{\pi^*}} F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}}) \right]$ .

Sea  $\omega \in \Omega$ .

Cuando  $t \geq \tau^{\pi^*}(\omega) : t \wedge \tau^{\pi^*}(\omega) = \tau^{\pi^*}(\omega) \Rightarrow F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}}(\omega)) = F(X_{\tau^{\pi^*}}(\omega)) = 0$ .

Cuando  $t < \tau^{\pi^*}(\omega) : e^{-r t \wedge \tau^{\pi^*}(\omega)} F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}}(\omega)) = e^{-r t(\omega)} F(X_t(\omega))$ .

En consecuencia,

$$0 \leq e^{-r t \wedge \tau^{\pi^*}} F(X_{t \wedge \tau^{\pi^*}}) = e^{-r t} F(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau^{\pi^*} > t\}} \leq e^{-r t} F(X_t)$$

$X_t \leq x + (\mu + r_1)t + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)W_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}W_t^{(2)}$ .  $F$  es creciente y tiene crecimiento lineal, es decir, existe una constante  $K$  tal que  $F(x) \leq K(1 + x)$ , entonces para todo  $x \geq 0$ :

$$F(X_t) \leq K \left[ 1 + x + (\mu + r_1)t + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)W_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}W_t^{(2)} \right]$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 0 \leq e^{-rt}F(X_t) &\leq Ke^{-rt} \left[ 1 + x + (\mu + r_1)t + (\sigma_1 + \sigma_2\rho)W_t^{(1)} + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}W_t^{(2)} \right] \\ &= K(1 + x)e^{-rt} + K(\mu + r_1)te^{-rt} + K(\sigma_1 + \sigma_2\rho)W_t^{(1)}e^{-rt} \\ &\quad + K\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}W_t^{(2)}e^{-rt} \end{aligned}$$

Tomando esperanza en la última desigualdad se obtiene,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt}F(X_t) \right] &\leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ K(1 + x)e^{-rt} \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ K(\mu + r_1)te^{-rt} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{r,x} \left[ K(\sigma_1 + \sigma_2\rho)W_t^{(1)}e^{-rt} \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ K\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}W_t^{(2)}e^{-rt} \right] \end{aligned}$$

Recordemos que  $r_t = r + mt + \theta B_t^{(1)}$ . Además,  $B_t^{(1)}$ ,  $W_t^{(1)}$  y  $W_t^{(2)}$  son independientes. De esta manera,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt}F(X_t) \right] &\leq K(1 + x)\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] + K(\mu + r_1)t\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] \\ &\quad + K(\sigma_1 + \sigma_2\rho)\mathbb{E}_{r,x} \left[ W_t^{(1)} \right] \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] \\ &\quad + K\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}\mathbb{E}_{r,x} \left[ W_t^{(2)} \right] \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] \\ &= K(1 + x)\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] + K(\mu + r_1)t\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] \end{aligned} \tag{4.20}$$

Como  $m - \frac{\theta^2}{2} > 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-r - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t\mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt} \right] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-r - \left(m - \frac{\theta^2}{2}\right)t} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la inecuación (4.20)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{r,x} \left[ e^{-rt}F(X_t) \right] = 0$$

Luego, utilizando el mismo proceso que en la parte 1 de esta prueba, cuando  $t \rightarrow +\infty$  y utilizando el Teorema de convergencia monótona, se tiene,

$$\mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^{\pi^*}} e^{-rs} \Lambda ds \right] + \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{t \wedge \tau^{\pi^*}} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \right] \rightarrow \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^{\pi^*}} e^{-rs} \Lambda ds + \int_0^{\tau^{\pi^*}} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \right]$$

Entonces, cuando  $t \rightarrow +\infty$  en (4.19)

$$\begin{aligned} e^{-r} F(x) &= \mathbb{E}_{r,x} \left[ \int_0^{\tau^{\pi^*}} e^{-rs} \Lambda ds + \int_0^{\tau^{\pi^*}} e^{-rs} dL_s^{\pi^*} \right] \\ e^{-r} F(x) &= V^{\pi^*}(r, x) \end{aligned}$$

De esta forma, se completa la demostración del teorema de verificación.

Finalmente:

$$Z(r, x) = \begin{cases} \geq V^{\pi}(r, x) & , \quad L^{\pi} \text{ arbitrario} \\ = V^{\pi^*}(r, x) & , \quad L^{\pi} = L^{\pi^*} \end{cases}$$

A partir de lo demostrado se puede concluir lo siguiente:

$$V(r, x) \geq V^{\pi^*}(r, x) = e^{-r} F(x) \geq \sup_{\pi \in \mathcal{A}} V^{\pi}(r, x) = V(r, x).$$

Por lo tanto:

$V(r, x) = Z(r, x)$  y  $L_t^{\pi^*} = \max \{ \sup_{0 \leq s \leq \tau^{\pi^*} \wedge t} \bar{X}_s^{\pi^*} - a, 0 \}$  es una estrategia óptima donde

$$\bar{X}_t^{\pi^*} = x + (\mu + r_1)t + (\sigma_1 + \sigma_2 \rho)W_t^{(1)} + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_t^{(2)}.$$

□

### 4.3 Ejemplos Numéricos

A continuación, mostraremos los resultados obtenidos en tres casos para diferentes parámetros iniciales de nuestro modelo. En esta sección se mostrará la relación entre la barrera  $a$  y  $\Lambda$ . También, hallaremos los coeficientes  $A$  y  $B$ , los cuales forman parte de la función de valor.

Recordemos que  $a$  es la solución de la ecuación:

$$\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a} + \frac{\Lambda \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{m - \frac{\theta^2}{2}} e^{(\alpha_1 + \alpha_2) a} = 0$$

Los valores de  $A$  y  $B$  son:

$$A = \frac{\Lambda}{m - \frac{\theta^2}{2}} \quad \text{y} \quad B = \frac{1 + \frac{\Lambda \alpha_2}{\theta^2} e^{\alpha_2 a}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 a} - \alpha_2 e^{\alpha_2 a}}$$

De la misma manera que en el capítulo anterior, para diferentes valores de  $\Lambda$  encontraremos los valores de  $a$  correspondientes. Estos representan las barreras que el excedente de la compañía no debe exceder, caso contrario se debe pagar el exceso de  $\bar{X}_t^{\pi^*}$  sobre  $a$  como dividendos a los accionistas de la compañía de seguros.

a) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu = 0.1; \quad \sigma_1 = 0.5; \quad r_1 = 0.05; \quad \sigma_2 = 0.7; \quad \rho = 0.15 \\ m = 0.2; \quad \theta = 0.4 \end{aligned}$$

Los valores de  $A$  y  $B$  para  $\Lambda = 0.5$  son:

$$A = 4.17 \quad \text{y} \quad B = 0.51$$

$\Lambda$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$a$	1.16	1.76	2.22	2.59	2.88	3.13	3.34	3.53	3.69	3.84	3.97

Table 4.1: Valores de barrera  $a$  en función de  $\Lambda$

A continuación, en las *figuras 4.1* y *4.2* se muestran los valores de barrera en función de  $\Lambda$  y la gráfica de la función de valor para  $\Lambda = 0.5$ , respectivamente.

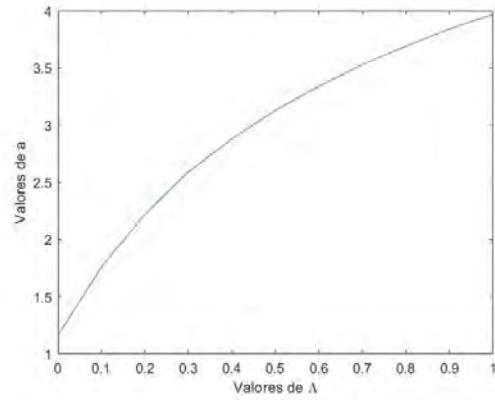


Figure 4.1: Valores de barrera en función de  $\Lambda$

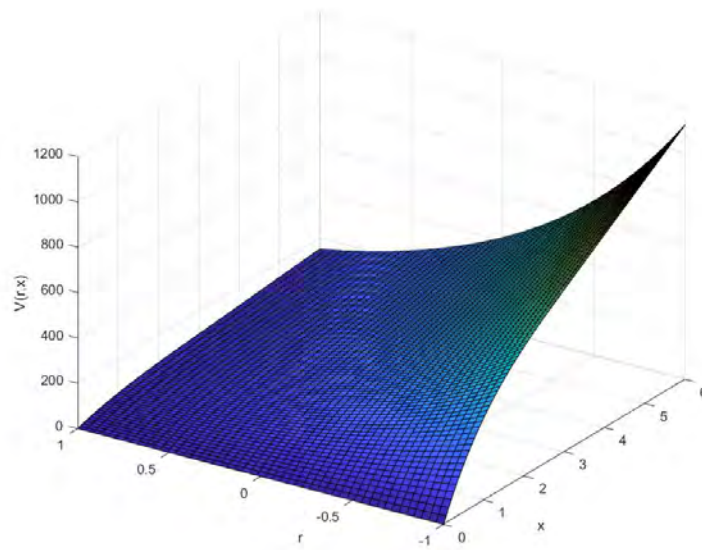


Figure 4.2: Función de valor para  $\Lambda = 0.5$

b) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\mu = 0.15; \quad \sigma_1 = 0.4; \quad r_1 = 0.1; \quad \sigma_2 = 0.6; \quad \rho = 0.3$$

$$m = 0.3; \quad \theta = 0.7$$

Los valores de  $A$  y  $B$  para  $\Lambda = 0.1$  son:

$$A = 1.8182 \text{ y } B = 2.5440$$

$\Lambda$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$a$	2.98	3.47	3.82	4.09	4.30	4.48	4.64	4.78	4.90	5.01	5.11

Table 4.2: Valores de barrera  $a$  en función de  $\Lambda$

A continuación, en las *figuras 4.3 y 4.4* se muestran la gráfica de la función de valor para  $\Lambda = 0.1$  y los valores de barrera en función de  $\Lambda$ , respectivamente.

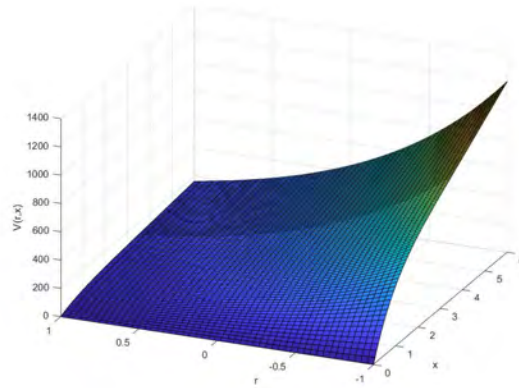


Figure 4.3: Función de valor para  $\Lambda = 0.1$

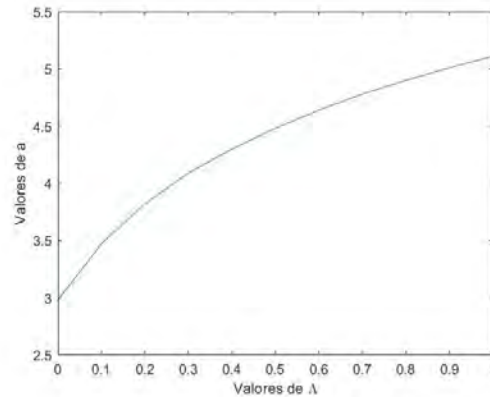


Figure 4.4: Valores de barrera en función de  $\Lambda$

c) Supongamos que nuestro modelo tiene los siguientes parámetros:

$$\mu = 0.15; \quad \sigma_1 = 0.4; \quad r_1 = 0.1; \quad \sigma_2 = 0.6; \quad \rho = 0.3$$

$$m = 2; \quad \theta = 1$$

Los valores de  $A$  y  $B$  para  $\Lambda = 1$  son:

$$A = 0.6667 \text{ y } B = 0.1098$$



$\Lambda$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$a$	0.16	0.22	0.28	0.34	0.39	0.43	0.47	0.51	0.55	0.58	0.62

Table 4.3: Valores de barrera  $a$  en función de  $\Lambda$

A continuación, en las *figuras 4.5 y 4.6* se muestran los valores de barrera en función de  $\Lambda$  y la gráfica de la función de valor para  $\Lambda = 1$ .

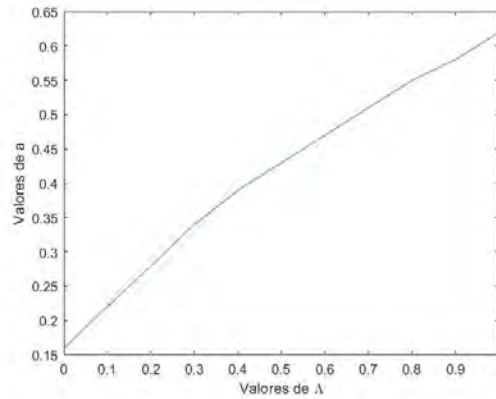


Figure 4.5: Valores de barrera en función de  $\Lambda$

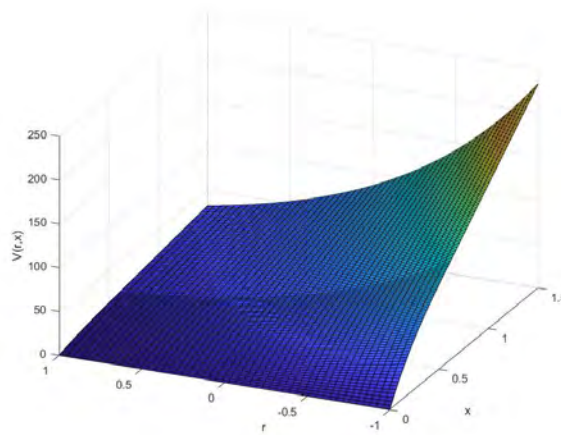


Figure 4.6: Función de valor para  $\Lambda = 1$

En las *figuras 4.1, 4.4 y 4.5* para diferentes valores iniciales de los coeficientes de nuestro modelo podemos observar la relación que existe entre los valores de  $\Lambda$  y  $a$  y en las *figuras 4.2, 4.3 y 4.6* podemos observar las funciones de valor correspondientes. Notemos que a medida que los valores  $\Lambda$  aumentan, los valores de  $a$  también aumentan; es decir, existe una relación directa entre las mismas.

## Chapter 5

# Conclusiones

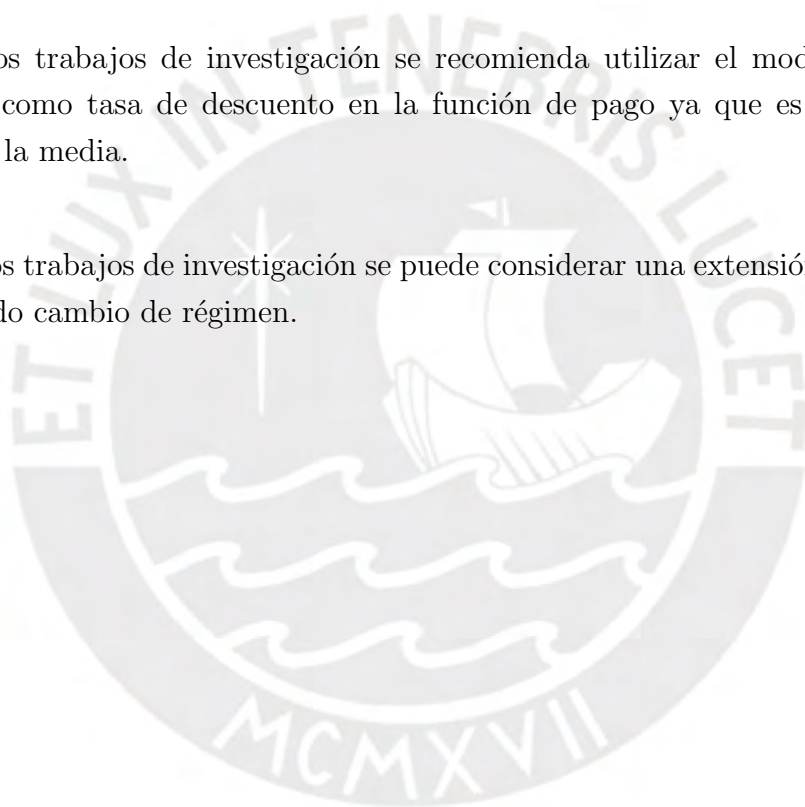
- Cuando la tasa de pago de dividendos es acotada y se cumple que  $\phi \leq 1$ , la estrategia óptima de pago de dividendos es pagar la máxima cantidad  $M$  durante la vida útil de la compañía de seguros. La función de valor es cóncava en  $x$  y convexa en  $r$ .
- Cuando la tasa de pago de dividendos es acotada y se cumple que  $\phi > 1$ , la estrategia óptima de pago de dividendos es una barrera  $a$ ; es decir, se debe pagar la máxima cantidad  $M$  cuando el excedente de la compañía de seguros está por encima de  $a$ , caso contrario no se debe pagar dividendos. Se encuentra explícitamente la función de valor, la cual es una función por tramos y está compuesta por funciones exponenciales tanto en  $x$  como en  $r$ .
- Cuando la tasa de pago de dividendos es acotada y se cumple que  $\phi > 1$ , no es posible encontrar explícitamente la barrera  $a$  sino que es la solución de una ecuación no lineal. Además, existe una relación directa entre los valores de  $a$  y  $\Lambda$ . A medida que los valores de  $\Lambda$  aumentan los valores de  $a$  también aumentan. Esto se puede interpretar de la siguiente manera: a medida que los accionistas de la compañía de seguros reciban una función de pago mayor, el excedente de la compañía de seguros debe superar una mayor barrera para poder realizar el pago de dividendos.
- Cuando la tasa de pago de dividendos es acotada, la función de valor está acotada por la constante positiva  $\frac{(M + \Lambda)e^{-r}}{m - \frac{\theta^2}{2}}$ .

- Cuando la tasa de pago de dividendos no es acotada se tiene una estrategia óptima de tipo barrera  $a$ . Se debe pagar el máximo de los excesos de  $\bar{X}_s^\pi$  sobre la barrera  $a$  hasta un tiempo  $t$ , caso contrario no se paga dividendos. Encontramos explícitamente la función de valor, la cual es una función por tramos y está compuesta por una función exponencial y lineal en  $x$  y una función exponencial en  $r$ . Además, la función de valor es cóncava en  $x$  y convexa en  $r$ .
- Cuando la tasa de pago de dividendos no es acotada no es posible encontrar explícitamente la forma de la barrera  $a$  sino que es la única solución de una ecuación no lineal. Del mismo modo que en las tasas de pago acotadas la relación entre los valores de  $a$  y  $\Lambda$  es directa.
- Al comparar los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis con los resultados en [6] se encuentran las siguientes similitudes: tanto para tasas de pago de dividendos acotadas y no acotadas se encuentra explícitamente la función de valor, la cual es una función por tramos compuesta por funciones exponenciales y lineales. La estrategia óptima de pago de dividendos es de tipo barrera. Sin embargo, también se encuentran las siguientes diferencias: a diferencia de [6] no se puede encontrar explícitamente la barrera  $a$ , sino que es la única solución de una ecuación no lineal.

## Chapter 6

# Recomendaciones

- Para futuros trabajos de investigación se recomienda utilizar el modelo de Ornstein Uhlenbeck como tasa de descuento en la función de pago ya que es un proceso con reversión a la media.
- Para futuros trabajos de investigación se puede considerar una extensión de este modelo considerando cambio de régimen.



# Bibliografía

- [1] De Finetti, B. (1957, February). Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In *Transaction of the 15th International Congress of Actuaries*, (Vol. 2, No. 1, pp. 433-443).
- [2] Asmussen, S., & Taksar, M. (1997). Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(1), 1-15.
- [3] Thonhauser, S., & Albrecher, H. (2007). Dividend maximization under consideration of the time value of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(1), 163-184.
- [4] Cai, J., Gerber, H. U., & Yang, H. (2006). Optimal dividends in an Ornstein-Uhlenbeck type model with credit and debit interest. *North American Actuarial Journal*, 10(2), 94-108.
- [5] Wang, W., & Zhang, C. (2010). Optimal dividend strategies in the diffusion model with stochastic return on investments. *Journal of Systems Science and Complexity*, 23(6), 1071-1085.
- [6] Eisenberg, J. (2015). Optimal dividends under a stochastic interest rate. *Insurance: Mathematics and Economics*, 65, 259-266.
- [7] Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (2006). On optimal dividends: From reflection to refraction. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(1), 4-22.
- [8] Dai, H., Liu, Z., & Luan, N. (2010). Optimal dividend strategies in a dual model with capital injections. *Mathematical Methods of Operations Research*, 72, 129-143.
- [9] Zhang, X., & Song, M. (2012). Optimization of risk policy and dividends with fixed transaction costs under interest rate. *Frontiers of Mathematics in China*, 7, 795-811.
- [10] Borodin, A. N., & Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian motion-facts and formulae*. Birkhäuser.
- [11] Schmidli, H. (2007). *Stochastic control in insurance*. Springer Science & Business Media.

- [12] Tankov, P. (2003). *Financial modelling with jump processes*. Chapman and Hall/CRC.
- [13] Karatzas, I., & Shreve, S. (2014). *Brownian motion and stochastic calculus* (Vol. 113). Springer.
- [14] Oksendal, B., (2010). *Stochastic Differential Equations*. An introduction with applications. Springer, New York. Sixth edition.
- [15] Marín, J. S., & Zuluaga, F. (2013). *Análisis de estrategias óptimas de pago de dividendos cuando el excedente sigue un proceso Browniano Drift*. Universidad EAFIT.
- [16] Barth, A., Moreno-Bromberg, S., & Reichmann, O. (2016). A non-stationary model of dividend distribution in a stochastic interest-rate setting. *Computational Economics*, 47, 447-472.
- [17] Taksar, M. I. (2000). Optimal risk and dividend distribution control models for an insurance company. *Mathematical methods of operations research*, 51, 1-42.
- [18] Eisenberg, J. (2016). Deterministic Income with Deterministic and Stochastic Interest Rates. *Stochastic Modeling and Applications* Vol.20, N°2, 55-78.