

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



**RECONOCIMIENTO DE CUADRILÁTEROS POR
ESTUDIANTES DE 4TO GRADO DE PRIMARIA AL
RECONFIGURAR FIGURAS GEOMÉTRICAS**

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Enseñanza
de las Matemáticas
que presenta:

Cynthia Vanessa Toledo Vargas

Asesora:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Lima, 2024

Informe de Similitud

Yo, Jesus Victoria Flores Salazar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis/el trabajo de investigación titulado: “Reconocimiento de Cuadriláteros por estudiantes de 4to grado de Primaria al reconfigurar Figuras Geométricas”, de la autora, Cynthia Vanessa Toledo Vargas, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 8%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 11/07/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: San Miguel 17 de julio del 2024.

Apellidos y nombres de la asesora: Flores Salazar, Jesus Victoria	
DNI: 08342853	Firma: 
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X	

Dedicatoria

Dedicada a mis queridos padres, Héctor Toledo y Francisca Vargas. Su amor y sacrificio han sido fundamentales en mi camino hacia esta meta. También quiero agradecer a mi hermana, María Toledo, por su constante aliento para no rendirme. Y no puedo olvidarme de mencionar a la persona más importante en mi vida, mi pequeño Mauricio. Él es una fuente inagotable de motivación para mí. Quiero que sepan que los amo infinitamente y que son el motor e inspiración de todo lo que hago.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, mi asesora, por su inquebrantable respaldo a lo largo de esta investigación. Sus observaciones y sugerencias fueron fundamentales para mejorar cada versión de este estudio.

Asimismo, agradezco las valiosas contribuciones y sugerencias realizadas por los integrantes del jurado Mg. Nelson Peñaloza y Dra. Verónica Neira durante las presentaciones y la revisión final de la tesis.

A los docentes de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por compartir su vasta experiencia profesional, contribuyendo significativamente a mi formación profesional.

Además, mi gratitud se extiende a la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM), tanto de la maestría como del IREM. Sus aportes han enriquecido significativamente mi enfoque investigativo y han ampliado mi perspectiva en este campo. Gracias por su invaluable contribución a mi desarrollo académico.

Agradezco enormemente la disposición y colaboración de mis estudiantes de 4to grado de primaria, quienes participaron como sujetos en esta investigación. También agradezco a los directivos del centro educativo por su autorización y apoyo durante el proceso de estudio.

No puedo dejar de mencionar el apoyo incondicional de mi querida familia, en especial de mi madre, Francisca Vargas, por su constante respaldo durante toda la maestría. A Mauricio, por su comprensión y paciencia en los momentos más cruciales de mi vida.

A mis compañeros de clase, tanto actuales como anteriores, les agradezco sinceramente su colaboración.

Resumen

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo analizar, cómo estudiantes de 4to grado de primaria reconocen cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas. Se realizó con estudiantes que oscilan entre los 10 y 11 años de una institución educativa particular del distrito de Miraflores. La problemática que suscitó este estudio se fundamentó en la dificultad que tienen los estudiantes respecto al aprendizaje de cuadriláteros, como la insuficiente comprensión de estos mismos y su clasificación respectiva. Se utilizó como metodología el enfoque cualitativo y como referente teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Con respecto a la parte experimental de la investigación, se realizó una secuencia de tres actividades que fueron elaboradas con la intención de lograr que los estudiantes desarrollen la operación de reconfiguración de cuadriláteros. En la primera actividad se entregó a los estudiantes un tangram con una ficha de trabajo y en la segunda parte se usó la tecnología digital Polypad para realizar las actividades, con el fin de identificar los tipos de aprehensiones y reconfiguraciones que realizan los estudiantes; finalmente una entrevista para confirmar los resultados del trabajo realizado con material concreto y digital. Los resultados concluyeron que se logró reconocer los diferentes tipos de reconfiguración que usaron los estudiantes (estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea) y reconocer los cuadriláteros generados en las modificaciones operatorias para la reconfiguración que se realizan en la secuencia didáctica.

Palabras clave: cuadriláteros, aprehensiones, reconfiguraciones, semiótica

Abstract

The present research work aims to analyze how 4th grade elementary school students recognize quadrilaterals when reconfiguring geometric figures. It was carried out with students between 10 and 11 years of age from a private educational institution in the district of Miraflores. The problem that raised this study was based on the difficulty that students have regarding the learning of quadrilaterals, such as the insufficient understanding of quadrilaterals and their respective classification. The qualitative approach was used as methodology and the Theory of Semiotic Representation Records as theoretical reference. With respect to the experimental part of the research, a sequence of three activities was carried out, which were elaborated with the intention of having the students develop the quadrilateral reconfiguration operation. In the first activity, students were given a tangram with a worksheet and in the second part, Polypad digital technology was used to carry out the activities, in order to identify the types of apprehensions and reconfigurations made by the students, and finally an interview to confirm the results of the work done with concrete and digital material. The results concluded that it was possible to recognize the different types of reconfiguration used by the students (strictly homogeneous, homogeneous and heterogeneous) and to recognize the quadrilaterals generated in the operative modifications for the reconfiguration performed in the didactic sequence.

Keywords: quadrilaterals, apprehensions, reconfigurations, semiotics.

ÍNDICE

Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Resumen	v
Abstract	vi
ÍNDICE	vii
Índice de tablas	viii
Índice de figuras	ix
Introducción	11
CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA	12
1.1. Investigaciones de referencia	12
1.1.1. Investigaciones relacionadas con secuencias de actividades didácticas en el estudio de polígonos regulares	12
1.1.2. Investigaciones relacionadas con la reconfiguración en polígonos regulares	15
1.1.3. Investigaciones relacionadas con el uso de tecnología digital en la enseñanza de polígonos regulares	18
1.2. Justificación	20
1.3. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica	24
1.4. Pregunta y objetivos de investigación	31
1.4.1. Procedimientos metodológicos	32
CAPÍTULO II: CUADRILÁTEROS	34
2.1 Los cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, trapecio isósceles	34
CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS	45
3.1. Descripción de sujetos de la investigación	45
3.2. Organización de la secuencia de actividades	45
Conclusiones	89
Referencias	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Definiciones de Semiosis y Noesis	25
Tabla 2: Definición de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo y trapecio	35
Tabla 3: Definición de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles	36
Tabla 4: Descripción de la secuencia de actividades	46
Tabla 5: División por bloques y descripción de las preguntas del cuestionario	47
Tabla 6: Resultados previstos y no previstos en los cuestionarios de Fátima y Lucio	56
Tabla 7: División por Indicación, Sub- indicación y descripción de lo que se espera del ANEXO 1A	60
Tabla 8: División por indicación, sub-indicación y descripción del resultado de la aplicación del ANEXO 1A	68
Tabla 9: División por Indicación, sub- indicación y descripción de lo que se espera del ANEXO 1B	70
Tabla 10: Resultados de la aplicación con sus sub-indicaciones del ANEXO 1B	79
Tabla 11: Preguntas de la entrevista semiestructurada que se realizó a dos estudiantes de 4to de primaria	80
Tabla 12: Preguntas de la entrevista semiestructurada que se realizó a dos estudiantes de 4to de primaria según los tipos de reconfiguración	81
Tabla 13: Respuestas obtenidas de la entrevista	86
Tabla 14: Análisis de la secuencia didáctica resultado esperado y obtenidos	88

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Competencia Resuelve problemas de formas, movimiento y localización, ciclo IV23	
Figura 2: Tipos y funciones de las representaciones	24
Figura 3: Tipo de registro de representación semiótica	26
Figura 4: Ejemplo de modificación mereológica	28
Figura 5: Ejemplo de modificación óptica de cuadriláteros	29
Figura 6: Ejemplo de modificación posicional de cuadriláteros	29
Figura 7: Ejemplo de reconfiguración	30
Figura 8: Ejemplo de reconfiguración estrictamente homogénea de cuadriláteros	30
Figura 9: Ejemplo de reconfiguración homogénea de cuadriláteros	31
Figura 10: Ejemplo de reconfiguración heterogénea de cuadriláteros	31
Figura 11: Cuadrilátero ABCD	35
Figura 12: Clasificación de Tolga (2017) de cuadriláteros	37
Figura 13: Captura que indica cómo los estudiantes deben trabajar cada actividad	38
Figura 14: Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la primera unidad “Construimos figuras con líneas”	39
Figura 15: Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la primera unidad “Construimos figuras con líneas”	41
Figura 16: Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la primera unidad “Construimos figuras con líneas”	42
Figura 17: Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la segunda unidad “Conocemos los polígonos”	43
Figura 18: Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la segunda unidad “Conocemos los polígonos”	44
Figura 19: Pregunta 1 de la Actividad 0	48
Figura 20: Preguntas 2 y 3 de la Actividad 0	49
Figura 21: Preguntas 4 y 5 de la Actividad 0	50
Figura 22: Preguntas 6 y 7 de la Actividad 0	51
Figura 23: Preguntas 8 de la Actividad 0	52
Figura 24: Pregunta 9 de la Actividad 0	53
Figura 25: Pregunta 9 de la Actividad 0	54
Figura 26: Pregunta 11 de la Actividad 0	54
Figura 27: Resultados generales por pregunta: Fátima	57
Figura 28: Resultados generales por pregunta: Lucio	58

Figura 29: Tangram clásico	59
Figura 30: Modificación mereológica de la silueta del gato (única respuesta posible)	61
Figura 31: Modificación posicional de la imagen del gato	61
Figura 32: Recreación de la silueta del gato hecha por Fátima	62
Figura 33: Respuesta de la silueta del gato hecho por Lucio	63
Figura 34: Modificación mereológica de la silueta de la casa (Posibles respuestas)	64
Figura 35: Recreación de la silueta de la casa hecha por Fátima	65
Figura 36: Respuesta de la silueta de la casa hecha por Lucio	65
Figura 37: Respuestas de las dos sub- indicaciones del ANEXO 1A resuelto por Fátima	66
Figura 38: Respuesta de las dos preguntas del ANEXO 1A hecho por Lucio	67
Figura 39: Tecnología digital: Polypad opción Tangram digital	69
Figura 40: Indicación 1: Construyamos cuadrados	71
Figura 41: Posibles respuestas ante la indicación de construir cuadrados por sub- indicación	72
Figura 42: Respuestas por sub-indicaciones de Fátima ante el ejercicio de construcción de cuadrado	73
Figura 43: Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de cuadrado	74
Figura 44: Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de cuadrado	74
Figura 45: Posibles respuestas ante la sub-indicación de construir rectángulos	75
Figura 46: Respuestas por sub-indicaciones de Fátima ante el ejercicio de construcción de rectángulos	76
Figura 47: Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de rectángulos	76
Figura 48: Indicación 3: Construyamos Trapecios	77
Figura 49: Posibles respuestas ante la indicación de construir trapecios	77
Figura 50: Respuestas por sub-indicación de Fátima ante el ejercicio de construcción de trapecios	78
Figura 51: Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de trapecios	78

Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es fundamental diseñar estrategias didácticas que permitan a los estudiantes, sobre todo a los de nivel primario a comprender conceptos geométricos de manera efectiva y significativa, ya que en nuestra práctica docente se ha observado que los estudiantes de 4to grado de primaria presentan dificultad para identificar cuadriláteros. Ésta dificultad podría ser el resultado de la forma en que se introduce el tema de los cuadriláteros, que probablemente se den sin que el estudiante tenga la posibilidad de usar material concreto o tecnológico en las representaciones de los cuadriláteros. Por ello, la presente investigación se enfoca en abordar este desafío específico, proponiendo un enfoque innovador para el aprendizaje de los cuadriláteros. A continuación, se presenta la estructura de la tesis.

En el primer capítulo, se realiza la revisión de investigaciones de referencia, las cuales se clasifican en tres ejes temáticos: investigaciones relacionadas con secuencias didácticas en el estudio de polígonos regulares, reconfiguración de polígonos regulares e investigaciones relacionadas al uso de tecnología digital para la enseñanza de polígonos regulares. Además, se presenta la justificación y aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, como marco teórico de la tesis, mostrando mayor énfasis en las aprehensiones y reconfiguración. También se presenta la pregunta de la investigación junto con los objetivos y procedimientos metodológicos correspondientes a cinco fases metodológicas de Hernández et al. (2014).

En el segundo capítulo, se centra el estudio de los cuadriláteros en el que se presentan las definiciones y clasificaciones necesarias para el estudio de este objeto en la investigación. Adicionalmente, se hace una revisión en el libro del texto del Ministerio de Educación correspondiente a 4to grado de primaria en el que describiremos los contenidos sobre los cuadriláteros del libro, basados en aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

Y finalmente, en el tercer capítulo se presenta la fase experimental donde se describe a los estudiantes que participaron en la investigación, organización, descripción y análisis de la secuencia de actividades. A la par, se presentan los resultados más importantes obtenidos en la etapa experimental de la tesis.

Se termina el estudio con las conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones que se desprenden directamente de los resultados obtenidos sobre este tema.

Capítulo I: La problemática

En el primer capítulo, se presentan investigaciones de referencia relacionadas con secuencias didácticas, reconfiguración y uso de tecnología digital en la enseñanza de polígonos regulares enfocándonos en el cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles. Seguidamente, se presenta la justificación y aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, la pregunta de investigación con sus respectivos objetivos para terminar este capítulo con los procedimientos metodológicos de la investigación.

1.1. Investigaciones de referencia

Con relación a las investigaciones de referencia, se presenta una revisión de éstas mismas, las cuales se han clasificado en tres ejes temáticos: investigaciones relacionadas con secuencias de actividades didácticas de polígonos regulares, investigaciones relacionadas con la reconfiguración de polígonos regulares e investigaciones relacionadas con el uso de tecnología digital para la enseñanza de polígonos regulares. Para esto, se ha realizado la respectiva búsqueda de información en revistas indexadas, bases de datos como Google Scholar, Latindex, SciELO, así como también el repositorio de tesis de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

Todas las investigaciones seleccionadas aportan para el desarrollo de la tesis; por ejemplo, para el diseño de la secuencia de actividades con cuadriláteros específicamente del cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles.

1.1.1. Investigaciones relacionadas con secuencias de actividades didácticas en el estudio de polígonos regulares

En relación con la enseñanza y aprendizaje de los polígonos regulares, Chiphambo y Feza (2020) revelan que a muchos profesores de matemáticas les resulta difícil estimular el interés de los estudiantes por aprender geometría. Una de las principales razones sugeridas es que los conceptos geométricos no están bien conceptualizados ni comprendidos tanto por los estudiantes como por los profesores. Se seleccionaron intencionalmente nueve estudiantes de octavo grado de un grupo de 56 estudiantes en función de los resultados de las pruebas de diagnóstico. Al emplear un enfoque cualitativo a través de la exploración, los datos se recopilaron a partir de entrevistas semiestructuradas y se implementó el análisis de documentos. El estudio encontró que las piezas poligonales con el diccionario de matemáticas mejoran el aprendizaje de los estudiantes a través de la investigación geométrica. Las piezas poligonales ayudaron a los estudiantes con la conceptualización geométrica mediante el corte, la construcción, la medición de ángulos y segmentos de línea. El diccionario mejoró el vocabulario geométrico de los estudiantes transfiriendo vocabulario

informal a uno más preciso. La investigación recomienda a los profesores integrar piezas de polígonos asistidos por el diccionario en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas.

Por otro lado, la investigación de Lozano (2020) desarrollada en Colombia se enfoca en la resolución de problemas matemáticos que involucran el concepto de área y perímetro de polígonos regulares a través de una secuencia de actividades mediadas por la herramienta Constructor 2.0 en los estudiantes del cuarto grado básica primaria de la Institución Educativa Felipe Henao Jaramillo. Para ello, se utilizó la herramienta Constructora 2.0 la cual es un programa que facilita al profesorado la elaboración de materiales propios y la integración video beam, páginas web, YouTube y blog educativo; con el fin de encontrar videos, presentaciones animadas y modelos diferentes de actividades como crucigramas, sopa de letras, tareas de emparejamiento, dictados, ordenación de textos entre otros.

Esta secuencia didáctica diseñada por Lozano (2020) consta de seis apartados en los que se propone una sucesión de actividades articuladas alternativamente para el concepto de área y perímetro de polígonos. Las actividades van desde la revisión de conocimientos previos hasta su puesta en práctica en el contexto real del tema estudiado. Los estudiantes fueron capaces de superar las dificultades de comprensión de problemas y conceptos matemáticos.

A partir de los resultados, se puede aseverar que el progreso en la construcción de los conocimientos básicos de geometría; tales como definir, diferenciar y resolver problemas matemáticos respecto al área y perímetro de polígonos regulares, dependió de la metodología utilizada en la secuencia didáctica, pues se puede deducir que el autor considera qué ambientes de aprendizaje dinámicos, flexibles, contextualizados potencian la capacidad para la resolución de problemas matemáticos.

En la investigación de Lozano (2020), la labor didáctica tiene la intencionalidad de inculcar los conceptos matemáticos de perímetro y área desde el entretenimiento para los estudiantes; es decir, actividades lúdicas relacionadas al juego que permiten que exista una motivación de parte de los estudiantes, ya que la ausencia de esta motivación es un problema que localizan en su investigación. No obstante, el pertinente uso de la secuencia basada en el juego tiene la limitante del bajo uso de la tecnología digital, ya que la herramienta utilizada requería que los estudiantes posean una competencia del uso de estas tecnologías.

Por otro lado, en la investigación de Bernabeu et al. (2021), se enfocan en caracterizar cómo los estudiantes de tercer grado de primaria (8 a 9 años), entienden el concepto de polígonos regulares e irregulares y las relaciones entre polígonos a través de un experimento didáctico. El experimento de enseñanza tuvo como objetivo fomentar la deconstrucción dimensional, entendida como el proceso que permite descomponer una figura en unidades figurales de una dimensión inferior como lados, vértices, ángulos, entre otros. Mediante la coordinación de las aprehensiones cognitivas, donde las tareas se dirigieron a reconocer

polígonos y sus elementos. Además, también se realizaron tareas en las que había que identificar los tipos de polígonos según sus lados, ángulos, vértices, entre otros.

La presente investigación utiliza un enfoque correspondiente a la deconstrucción dimensional de formas, propuestas por Duval (2017), misma que se aplica para analizar las respuestas dadas por la muestra. Es importante explicar que los resultados exponen que los estudiantes interiorizan el concepto de polígono a partir del reconocimiento de las características esenciales de un polígono, para después modificar estas características y complejizar dicho concepto.

En este experimento que explica el artículo, los autores utilizaron definiciones inclusivas, pero no exactas a los libros para poder considerar el razonamiento de los estudiantes para brindar sus propias nociones en base a su entendimiento. El experimento de enseñanza consistió en diez sesiones de cincuenta minutos durante cinco semanas. Todas las sesiones compartían la misma estructura metodológica: presentar y resolver la tarea en un grupo grande en el que los estudiantes explican y justifican sus respuestas, repitiendo este proceso con otras tareas. Las sesiones terminaron con la resolución individual de tareas por parte de los estudiantes; además, utilizaron un cuestionario de 6 ítems con diferentes ejercicios para que los estudiantes puedan descomponer una figura en sub-figuras y una figura en unidades figurales de dimensión inferior como vértices, ángulos y lados. Los resultados de la investigación ponen en evidencia que los estudiantes pueden ir de forma progresiva complejizando definiciones asociadas a los polígonos a través de la deconstrucción dimensional.

En la misma línea, Bernabeu et al. (2022) en su investigación identificaron cambios en la comprensión del concepto de polígono, entendido como porción de plano limitada por líneas rectas y la relación entre polígonos por parte de estudiantes de tercer grado de primaria, después de participar en un experimento de enseñanza que requería de la identificación (regular e irregular), clasificación (número de lados) y clases de polígonos (cóncavo y convexo).

Se analizaron las respuestas de 59 estudiantes de un colegio en España a un cuestionario utilizando el software CHIC antes y después de una secuencia de enseñanza que incorporaba los conceptos de deconstrucción dimensional y aprehensiones cognitivas.

En la investigación el experimento realizado pretende, en concordancia con los autores, mejorar la capacidad de estructuración espacial de los estudiantes haciendo hincapié en el desarrollo de la deconstrucción dimensional del concepto de polígono y de algunas clases de polígonos. La secuencia de instrucción y los cuestionarios se fundamentan, según Bernabeu et al. (2022), en tres puntos focales: 1) Reconocer las características de las figuras; 2) Reconocer y representar polígonos con atributos particulares; 3) Transformar una figura que no es un polígono en un polígono.

Los resultados que se obtuvieron en dicha investigación evidencian que los cambios presentes en la forma en que los estudiantes reconocen los elementos y características que definen un tipo de polígonos no es un proceso directo, pues los estudiantes hacen uso del análisis de los componentes matemáticos de los polígonos para determinar las semejanzas y diferencias. Otro aspecto de los resultados se centró en que la comprensión del polígono depende de los atributos del mismo y del papel de las aprehensiones considerando los modos de representación verbal o figural.

Además, los investigadores demuestran que el proceso que siguen los estudiantes para reconocer las características esenciales de lo que corresponde al concepto de polígonos, corresponde a un proceso directo. La interrelación que significa, la correcta forma de integrar este conocimiento geométrico, la explicación del mismo y dibujar un polígono que represente dicho concepto implica la correcta implementación de la deconstrucción dimensional de las figuras geométricas.

Los resultados permiten comprender el porqué de su complejidad e identifica pautas para el diseño y aplicación de las tareas que incluyan actividades de visualización de polígonos dirigidas hacia los estudiantes. Además, los resultados de la investigación expresan la variación sistemática de elementos que facilitan o retardan por su complejidad; en particular, resalta la dificultad que representó las predicciones de sus efectos. Lo anterior se ve reflejado en las tareas donde se incluyen elementos de control que por sí mismos favorecen la visibilidad de la reconfiguración, pero que en conjunto tienden a ejercer una función de control ambigua, no de refuerzo.

En pocas palabras, se establecieron ciertas categorías de análisis que permiten caracterizar el comportamiento de los estudiantes en situaciones relacionadas a la configuración y reconfiguración de figuras geométricas.

1.1.2. Investigaciones relacionadas con la reconfiguración en polígonos regulares

La investigación de Castillo y Salazar (2021), analiza la reconfiguración de figuras bidimensionales utilizando GeoGebra, realizada por estudiantes de sexto grado de primaria (11 y 12 años). Esta investigación cualitativa se fundamenta en la reconfiguración propuesta por Duval como una operación que permite tratamientos asociados a la medición del área. Se podría entender que la reconfiguración podría realizarse con materiales físicos o lápiz y papel; no obstante, se puede deducir que el uso de un software mejoraría el proceso presentando el tema de manera más motivadora.

En relación a la reconfiguración de polígonos, realizada por los autores, se destaca la visión novedosa que permite realizar el cálculo en lo que concierne al área de un polígono. Mediante el GeoGebra se esperaba la exploración de la figura y la oportunidad de relacionar el campo geométrico con el campo numérico; es decir, traducir las características no numerables de la figura en cantidades numéricas objetivas. Además, este software permite

la descomposición de la figura en diferentes partes, con la ventaja de poder sumar las áreas de estas subdivisiones para hallar el área total del polígono, lo que determina que el GeoGebra se presenta como una forma más motivadora e interactiva de trabajar los conceptos de polígonos y áreas en relación a los métodos tradicionales utilizados.

Según los investigadores, se señalan ciertas ventajas de utilizar este software, las cuales son: la manipulación directa y en tiempo real de estas figuras de parte de los estudiantes, lo que enriquece la exploración de relaciones geométricas, así como de las propiedades inherentes de estas figuras; además, la flexibilidad que ofrece en los estudiantes con relación a su proceso de aprendizaje, pues los estudiantes pueden interactuar con las modificaciones que han realizado, lo que favorece las áreas investigativas y experimentales en la integración del aprendizaje.

En la parte experimental, los investigadores diseñaron una sesión que tuvo lugar en un aula con catorce estudiantes que trabajaron en tres grupos de cuatro o cinco con un ordenador portátil cada uno. En la actividad 1, se les presentaba un polígono en forma de flecha que se podía girar de 0 a 180° grados mediante un deslizador; también rellenaban una hoja de trabajo basada en sus observaciones y luego sacaban conclusiones sobre la medida del área de la figura formada. En la actividad 2, se entrega a los estudiantes un trapecio isósceles y se les indica que manipulen sus vértices para crear un rectángulo (Castillo y Salazar, 2021).

Los investigadores señalan que la sesión de las propiedades de polígonos con el GeoGebra produjo resultados superiores al método tradicional, que emplea fórmulas y sustitución de datos. Además, pudieron concluir que la reconfiguración mediante el GeoGebra permite explorar las propiedades de la figura, relacionar el campo numérico con el geométrico y comprender mejor el concepto de área.

Por otro lado, Castillo y Montes (2023) expone en su artículo de investigación la entrevista a dos docentes de Matemática y ciencias con más de 10 años de experiencia que enseñan en 6to grado de educación primaria, a los cuales se les realizan diferentes preguntas con la intención de identificar los conocimientos de enseñanza y aprendizaje asociados a la reconfiguración que ellos utilizan durante sus clases para la enseñanza de figuras geométricas. En esta investigación se muestra a los docentes, diferentes ejercicios de reconfiguración; es decir, se hace uso de la división en partes de la misma figura original para luego formar otra figura con las mismas dimensiones.

Los docentes responden bajo su experiencia, cómo sus estudiantes resolverían cada uno de los ejercicios planteados además de mencionar sus propios conocimientos conceptuales y procedimentales de resolución. Las conclusiones del artículo revelan que los docentes requieren conocer la secuencia de temas en la enseñanza de figuras geométricas;

sin embargo, son capaces de identificar el nivel esperado de conceptos y procesos que sus estudiantes deben adquirir.

La investigación con docentes, además brinda como resultado que los estudiantes de 6to grado de primaria todavía no han podido consolidar el pensamiento abstracto por lo que el uso de la reconfiguración la cual permita la composición y descomposición geométrica en las clases, podría ser una opción muy favorable para la comprensión de las nociones conceptuales que ayudarían en un futuro a la noción de conceptos más complejos.

En la misma línea de la investigación anterior, Marmolejo et al. (2020) jerarquizó el tópico de equivalencia de las figuras según sus áreas, pues su estudio exigió la transformación de figuras, en otros de contorno global diferente y su aplicación de modificaciones sobre las figuras.

La metodología de los autores es de carácter cualitativo, interpretativo, descriptivo y básico. Los datos se recopilaron a través de las producciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas propuestas y de la explicación de sus formas de proceder; en algunos casos entrevistas semiestructuradas que estuvieron constituidas por 30 estudiantes con edades entre 10 y 11 años, de tres cursos de 5to de primaria de igual número de instituciones educativas de la ciudad de Santiago de Cali en Colombia. La interpretación de los datos consideró el análisis funcional propuesto por la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2017; 2011) es decir la actividad cognitiva vinculada a los registros semióticos de representación.

En resumen, el artículo buscó entender y analizar los cambios que se producen en la comprensión de los conceptos, además de las relaciones de los polígonos en estudiantes de tercer grado; encontrando así la existencia de una mayor coordinación en lo que se refiere a las aprehensiones cognitivas que se requieren para la comprensión de estas figuras geométricas.

En aras de explicitar tratamientos básicos de las figuras bidimensionales, Marmolejo et al. (2020) elaboraron un cuestionario con cuatro situaciones. La situación 1 introdujo el estudio del área de figuras planas como un tipo de magnitud: verificación de relaciones de equivalencia y orden en la situación 3 y 4; por último, la unión de áreas en la situación 2. Se solicitó a cada estudiante describir y explicar paso a paso, de forma escrita los procedimientos adoptados. Posteriormente, en grupos de tres y sólo para la primera de las tareas, se revisaron los registros identificando las salvedades u omisiones en el procedimiento. Al final de las situaciones de forma individual se expresaron dudas sobre los procedimientos.

Los resultados permiten comprender el porqué de su complejidad e identifica pautas para el diseño y aplicación de tareas que incluyan actividades de visualización de polígonos dirigidas hacia los estudiantes. Además, los resultados de la investigación expresan la variación sistemática de elementos que facilitan o retardan el ver sobre una figura destacada

por su complejidad; en particular, resalta la dificultad que representó la predicción de sus efectos. Lo anterior se ve reflejado en las tareas donde se incluyen elementos de control que por sí mismos favorecen la visibilidad de la reconfiguración, pero que en conjunto tienden a ejercer una función de control ambigua, no de refuerzo.

En pocas palabras, se establecieron ciertas categorías de análisis que permiten caracterizar el comportamiento de los estudiantes en situaciones relacionadas a la configuración y reconfiguración de figuras geométricas.

1.1.3. Investigaciones relacionadas con el uso de tecnología digital en la enseñanza de polígonos regulares

Siendo de nuestro interés el uso de la tecnología digital en la enseñanza, debemos primero conocer cuál de las definiciones usaremos para estas dos palabras conforme a lo que presenta la Real Academia Española (RAE). Según la primera definición de la RAE sobre la palabra tecnología, ésta es el conjunto de teorías y mecanismos que nos permiten el uso práctico de la inteligencia científica; mientras que el significado de la palabra digital, de la cual nos basaremos es la tercera definición que la RAE explica. Esta nos indica que la palabra digital viene a ser instrumento que permite producir, exponer, llevar o guardar información.

De esto se puede deducir que la tecnología digital es un conjunto de mecanismos de uso práctico que permiten al ser humano realizar diferentes actividades como procesar y almacenar información, extrapolando esta definición en el ámbito de la enseñanza de polígonos regulares y hacer de esta praxis un trabajo contextualizado. Por lo anterior mencionado en esta investigación cuando nos referimos a la tecnología digital, nos referimos a la idea que propone Escofet (2020) al explicar que la tecnología digital representa una tendencia que potencia la creación de contenido de aprendizaje.

En relación a esta investigación de la tecnología en la enseñanza, se puede inferir que su uso ha contribuido a evitar el estancamiento de la enseñanza. En otras palabras, el uso de tecnología digital puede contribuir a la facilitación del aprendizaje en las diferentes materias, pues actualmente existen diferentes tipos de tecnología digital que se utilizan en la enseñanza de polígonos.

En su artículo, Monroy et al. (2022) llevaron a cabo una investigación en una clase de apoyados en el GeoGebra con estudiantes de quinto grado de primaria. Dentro de sus objetivos de la investigación se consideró establecer una aproximación conceptual de las nociones de área y perímetro a partir de un relato vivencial.

El estudio siguió un corte cualitativo utilizando técnicas de observación clínica, que consistió en tres etapas: diagnóstico, mediación en el aula y diseño e implementación de situaciones problema. Respecto a la parte experimental, Monroy et al. (2022) implementaron una intervención en una Institución Educativa de la ciudad de Cali, Colombia, donde las

actividades se focalizaron en el conocimiento de las funciones básicas del programa como puntos, rectas, segmentos y mediciones. Se desarrollaron tres situaciones problema donde se trabajaron algunas relaciones como el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas, buscando relacionar el uso, nociones de área y perímetro. Dentro del desarrollo hubo momentos de intervención los cuales consistieron en pedir a los estudiantes, analizar los enunciados de las situaciones problema y tratar de explicar con sus propias palabras; luego los estudiantes resolvieron las situaciones problema usando el GeoGebra y describir con detalle cada paso realizado.

Finalmente, se les solicitaba una reflexión sobre la evolución de sus estrategias, desde las inicialmente planteadas hasta las que los condujeron a las respuestas. Después de analizar sus resultados, los autores pudieron determinar que los estudiantes llegaron a reconocer que existen figuras con igual área y diferente perímetro o viceversa, por lo que les permitió identificar la independencia de dichos conceptos. Además, señalan que los estudiantes, con base en sus dificultades o habilidades, establecieron diferentes roles que les permitieron llegar a acuerdos, hacer inferencias, comparaciones y conclusiones sobre el trabajo desarrollado.

En su tesis Cuervo (2021a) analiza la comprensión de los elementos geométricos de los polígonos regulares por parte de un grupo de estudiantes del séptimo grado (11 y 12 años) de una escuela en Colombia, mediante el uso del GeoGebra, por considerar que este recurso tecnológico proporciona una variedad de herramientas para la representación de cualquier objeto matemático. Este estudio adopta un enfoque cualitativo, exploratorio, basado en la metodología de la Ingeniería Didáctica, que consta de cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori.

El autor estructuró la etapa experimental en 5 actividades que abarcan la construcción del triángulo, problema triángulo-área, construcción del cuadrado, propiedades del pentágono y su construcción. El análisis de los resultados de la etapa experimental evidenció que los estudiantes intercambiaron información y comunicaron los resultados encontrados a partir del razonamiento intuitivo y del trabajo exploratorio, permitiendo el reconocimiento de las propiedades geométricas. Además, el autor afirma que es necesario implementar el GeoGebra en las clases de geometría como estrategia para promover espacios de interacción entre los estudiantes, y como medio dinámico en el aprendizaje de la geometría. En adición a esto, se deduce que el uso del GeoGebra podría ayudar a motivar a los estudiantes a manipular las herramientas del programa, lo que conlleva a mejorar las competencias matemáticas y mejorar el trabajo en grupo.

Cuervo et al. (2021b) en su artículo de investigación describen la implementación de una actividad diagnóstica utilizando el software dinámico GeoGebra con estudiantes de séptimo grado de una institución educativa del departamento de Boyacá (Colombia). En el

trabajo se describen los resultados de la investigación y se discuten en la sección de conclusiones. Sin embargo, no se da una respuesta específica a la pregunta sobre los hallazgos del estudio en relación con la comprensión de polígonos.

El estudio se realizó aplicando un examen diagnóstico a 30 estudiantes de séptimo grado de un colegio del departamento colombiano de Boyacá. La información se analizó de acuerdo con las formulaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas y el modelo de Van Hiele utilizando un enfoque cualitativo descriptivo. El documento describe los hallazgos del estudio y los discute en la sección de conclusiones; se identificaron algunas dificultades como resultado de la aplicación de esta prueba diagnóstica, particularmente en el desarrollo autónomo y comprensivo de las situaciones problemáticas y en el trabajo grupal que implica el intercambio y comparación de información con los compañeros. Además, el autor concluye que el uso del GeoGebra para enseñar geometría a estudiantes de séptimo grado puede ser ventajoso.

Todas estas investigaciones de referencias representan una relevancia para la construcción del presente estudio. Con base presentado, a continuación, elaboramos la justificación de la tesis que contiene los aspectos académico y profesional en la enseñanza y aprendizaje de cuadriláteros.

1.2. Justificación

Investigaciones como las de Skakespear et al. (2020); Lozano (2020); Bernabéu et al. (2021) y Bernabeu et al. (2022) destacan la importancia de la implementación de secuencias didácticas en el estudio de polígonos centrándonos para esta investigación en los cuadriláteros y clasificación como el cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles, de esta forma optimizar el desempeño de los estudiantes en la materia. Estas investigaciones aportan la importancia a la comprensión de los elementos básicos de los cuadriláteros, su clasificación y variación en las proporciones dimensionales. Además, identifican las diferentes dificultades presentes en los estudiantes respecto al aprendizaje de cuadriláteros, como la insuficiente comprensión de los cuadriláteros y su clasificación. Por otro lado, brindan una guía respecto a la estructura de las actividades, asignación de tareas e implicancias en la evaluación, lo cual permitirá una adaptación enfocada en el contexto y características de la población objetivo.

El estudio de cuadriláteros está ligado a diferentes aspectos de las secuencias de actividades didácticas, ya que en ellas podemos encontrar la comprensión del concepto e identificar un cuadrilátero de un no-cuadrilátero, medición del área, entre otros. La presente investigación se centra en cómo los estudiantes deben reconocer cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas, por lo que se recomienda el uso de la reconfiguración, ya que es considerada como una alternativa viable para abordar la composición y descomposición de

un polígono en sub-figuras y sus componentes que lo definen según las investigaciones de Castillo y Salazar (2021); Castillo y Montes (2023).

La investigación se centra en cuadriláteros, como cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles a través de una secuencia de actividades didácticas que formarán parte de esta investigación la cual está basada en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas, la cual contribuye a una mejor comprensión de los procesos cognitivos de modo que los estudiantes pueden atribuir significados a las ideas matemáticas. Puesto que, el proceso de visualización de la reconfiguración en cuadriláteros permite descubrir propiedades o relaciones entre figuras y que en un futuro los estudiantes no se automaticen a la utilización de fórmulas matemáticas (Castillo, 2018); además, contribuye al desarrollo de la dimensión visuoespacial del niño (Duval, 1999). Asimismo, de aprehensiones operatorias incluyendo la reconfiguración complementaria de ciertas habilidades como la creatividad matemática y el pensamiento geométrico. Investigaciones como la de Marmolejo et al. (2020), nos habla de la importancia de comprensión de conceptos en habilidades para la aprehensión operatoria.

Respecto a la tecnología digital, se ha explicado que diferentes softwares (entendemos software desde la conceptualización hecha por la RAE como el conjunto de programas en los que se realizan diferentes actividades informáticas) como el GeoGebra y WebSketchpad han optimizado lo que los estudiantes pueden lograr el aprendizaje de geometría en comparación de la enseñanza tradicional, ampliando la gama de representaciones con las que pueden trabajar (Escofet, 2020 y Cuervo, 2021). No obstante, para la presente investigación se eligió utilizar la tecnología digital Polypad ya que su interfaz era apropiada para estudiantes de primaria, además, sus herramientas facilitan el reconocimiento de cuadriláteros al realizar reconfiguraciones.

Otro aspecto que respalda la presente investigación es que, a nivel de América, el rendimiento de los estudiantes en matemática a partir de los resultados de la prueba PISA evidencian que solo Canadá está por encima de la media del conjunto de países pertenecientes a la Organización para la cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), en América con 512 puntos ubicándose en el nivel 3 de la escala de matemáticas. Mientras países como, México con 409 puntos, Costa Rica con 402 puntos, Perú con 400 puntos, Colombia 391 puntos, Brasil 389 puntos, y Argentina con 379 puntos, se ubicaron en el nivel 2 de la escala de matemáticas, de 358 y 419 puntos (OCDE, 2019). A partir de estos datos, se deduce que los estudiantes serían capaces de interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo una situación simple se puede representar matemáticamente.

Por otro lado, al analizar los datos de la OCDE (2019), podemos inferir que Perú obtuvo un mejor resultado de rendimiento en matemática en comparación con otros países sudamericanos. No obstante, este puntaje es notablemente menor al obtenido por Canadá.

Por lo dicho anteriormente, podemos sugerir que es necesario una mejora en puntaje en la siguiente prueba PISA.

Por su parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 2000) estableció estándares mínimos que las instituciones educativas deben priorizar en la enseñanza desde el jardín de infantes hasta el grado 12 (17 a 18 años), en la materia de geometría los cuales son: 1) Analizar las características y propiedades de las formas geométricas de dos o tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre las relaciones geométricas. 2) Especificar ubicaciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación. 3) Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar las situaciones matemáticas. 4) Usar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas.

Para el NTCM (2000), el 4to grado de primaria debe alcanzar las siguientes expectativas como identificar, describir, comparar y analizar figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales, así como investigar, describir y razonar sobre los resultados de subdividir, combinar y transformar formas. Además, se espera que estos estudiantes puedan describir la ubicación y el movimiento de las figuras geométricas usando lenguaje común y vocabulario de la materia. Por otro lado, también se espera que puedan predecir y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales, así como describir los movimientos que demuestran la congruencia y simetría de las formas. Por último, respecto a la visualización, razonamiento y modelado geométrico, se espera que los estudiantes de 4to de primaria logren construir y dibujar objetos geométricos bidimensionales para generar obtener objetos tridimensionales, así como reconocer ideas y relaciones geométricas para aplicarla en otras la resolución de problemas planteados en el aula o en la vida cotidiana.

Un contenido similar al NTCM (2000), es el documento elaborado por Ministerio de educación del Perú; éste cuenta con el Programa curricular de educación primaria (2016) el cual cuenta con cinco ciclos de estudio en el nivel primario. Específicamente para esta investigación el nivel que será objeto de estudio es el Ciclo IV, el cual está compuesto por estudiantes de 3er y 4to grado de educación primaria con cuatro competencias del área de matemática donde solo se enfocará en la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” la cual se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Competencia Resuelve problemas de formas, movimiento y localización, ciclo IV

Competencia Resuelve problemas de formas, movimiento y localización	CICLO IV
Cuando el estudiante Resuelve problemas de cantidad combina capacidades como:	
<ul style="list-style-type: none">• Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones• Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.• Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.• Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas	
Descripción del nivel de la competencia esperado al fin del ciclo IV	
Resuelve problemas en los que modela características y datos de ubicación de los objetos del entorno a formas bidimensionales y tridimensionales, sus elementos, posición y desplazamientos. Describe estas formas mediante sus elementos: número de lados, esquinas, lados curvos y rectos; número de puntas caras, formas de sus caras, usando representaciones concretas y dibujos. Así también traza y describe desplazamientos en cuadrículados y posiciones, con puntos de referencia; usando lenguaje geométrico. Emplea estrategias y procedimientos basados en la manipulación, para construir objetos y medir su longitud (ancho y largo) usando unidades no convencionales. Explica semejanzas y diferencias entre formas geométricas.	

Nota. Tomado de Programa curricular de educación primaria, 2016, p.152.

El Programa curricular de educación primaria (2016), establece que dentro de cada competencia del curso de matemática venga acompañada con sus respectivas capacidades que deberían de ser logradas por el estudiante, por lo que se puede interpretar que se espera que el estudiante de este ciclo pueda modelar, identificar, interpretar y graficar transformaciones de figuras geométricas planas como traslación, ampliación y reducción.

Por último, se considera como un logro esperable que los estudiantes resuelvan problemas que impliquen la descripción de estas formas geométricas mediante sus elementos: número de lados, esquinas, lados curvos y rectos (Programa curricular de educación primaria, 2016).

La presente investigación se encuentra alineada con los logros esperables en geometría para los estudiantes de 4to de primaria a nivel nacional e internacional, según lo anteriormente expuesto. Este estudio con relación a la reconfiguración de cuadriláteros logra materializarse en el desarrollo de una secuencia de actividades didácticas que permitan considerar como eje la transformación de las figuras geométricas, para lograr que el estudiante pueda identificar, describir, comparar y analizar formas. Además, se propone de forma específica para el proceso de reconfiguración de cuadriláteros tales como rectángulo, cuadrado y trapecio isósceles para la facilitación de la clasificación de estos, la cual está considerada dentro del currículo como un logro esperable.

Se considera el uso de tecnología digital como Polypad que permitan dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo que los estudiantes posean un papel de agentes activos durante la resolución de las situaciones didácticas propuestas en este informe de investigación.

Después de lo expuesto, donde se menciona el interés de investigar cómo los estudiantes de 4to de primaria reconocen los tres tipos de cuadriláteros mencionados usando material concreto y tecnología digital; así mismo como base de la investigación se ha tomado

aspectos relacionados a la Teoría de Registros de Representación Semiótica que se presenta a continuación.

1.3. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

La Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), desarrollada por Raymond Duval, analiza el aprendizaje matemático y como éste permite estudiar las actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, resolución de problemas y comprensión de textos (Duval, 2017).

Para Duval no puede haber comprensión de las matemáticas si no se llega a distinguir un objeto de su representación la cual puede ser diversa. Es decir, que primero debe haber una representación mental del objeto matemático antes de generarse una representación semiótica.

En la Figura 2 se muestra la clasificación realizada por Duval de las representaciones que un estudiante puede generar, donde se clasifica la intencionalidad y no intencionalidad (Consciente – No consciente) de uso del objeto matemático, ya que de ella parte la significatividad de este para ser visto o aprendido. Mientras que, en el tipo de clasificación de representación interna y externa, hacen referencia a la observación de la representación del objeto matemático o no. En el caso de la representación externa específicamente ésta se realiza con un sistema semiótico el cual puede ir desarrollándose con el pasar del tiempo.

Figura 2. Tipos y funciones de las representaciones

	Interna	Externa
Consciente	Mental <i>función de objetivación</i>	Semiótica <i>función de objetivación</i> <i>función de expresión</i> <i>función de transformación intencional</i>
No-consciente	Computacional <i>función de transformación automática o cuasi-instantánea</i>	

Nota. Tomado de *Semiosis y pensamiento humano* (p. 14), por R, Duval, 2004, Artes Gráficas Univalle.

Según Duval (2017), las representaciones semióticas son conscientes y externas permitiendo observar al objeto matemático a través de estímulos como puntos, trazos, caracteres, sonidos, etc., mientras que, en el caso de la representación computacional, como se observa en la Figura 2 es una representación interna donde la persona no es consciente de ella. Un ejemplo de ello son la representación de escritura binaria. En cuanto a las representaciones mentales que se deben de realizar para el aprendizaje del objeto matemático en estudio (ver Tabla 1).

Tabla 1

Definiciones de Semiosis y Noesis

Semiosis	Noesis
Producción de representaciones semióticas	Actos cognitivos como la aprehensión conceptual, discriminación e inferencia de un objeto matemático

Nota. Adaptado de *Registros de representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento* (p. 270), por R, Duval, 2012, *Revista Electrónica de Educación Matemática*, 7(2).

Además de acuerdo con Duval (2017), los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una distinción o la comprensión de una inferencia son ejemplos de noesis, mientras que la semiosis se refiere a la producción o aprehensión de una representación semiótica, discernimiento de distinciones o comprensión de inferencias.

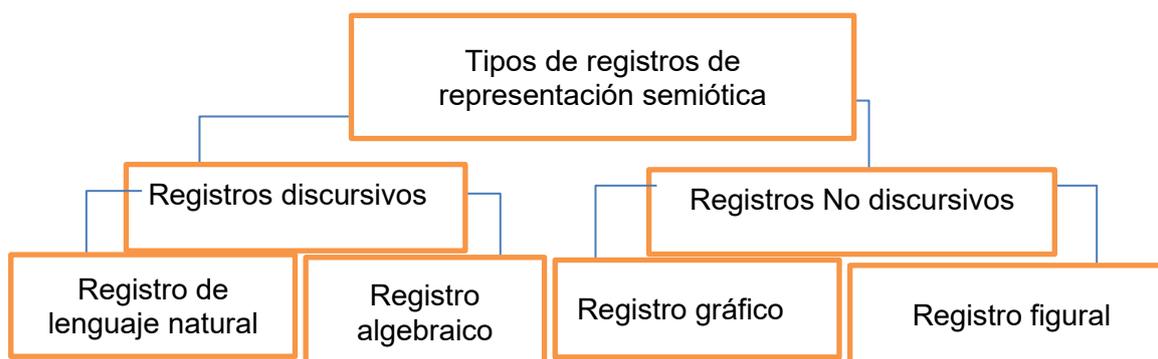
También, es importante mencionar que no se pueden separar ya que ambas se requieren entre sí. En ese sentido, son determinadas tres tipos de actividades cognitivas para configurar un registro.

- **Formación:** se realiza en la identificación de la representación en un registro discursivo o no discursivo.
- **Tratamiento:** Se realiza una transformación entre representaciones del mismo sistema de representación semiótica.
- **Conversión:** se realiza entre representaciones con la intención de pasar de un registro a otro manteniendo la información facilitando la resolución de un problema matemático.

La Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) es un marco teórico importante para nuestra investigación, porque la TRRS permite hacer un énfasis en los símbolos y signos utilizados por parte de los estudiantes de 4to grado de primaria en la investigación.

Ampliando un poco más respecto a los registros, estos se clasifican en discursivos y no discursivos (Duval, 2004a). Los primeros se comunican de forma oral y algebraica, mientras que los segundos se muestran de forma gráfica y figural (ver Figura 2).

Figura 3. Tipo de registro de representación semiótica



Nota. Adaptado de *Semiosis y pensamiento humano* (p. 14), por R. Duval, 2004, Artes Gráficas Univalle.

Los registros de representación semiótica se clasifican en discursivos y no discursivos (Duval, 2004b). Los primeros se comunican de forma oral y algebraica, mientras que los segundos se muestran de forma gráfica y figural.

- **El registro de lenguaje natural:** se utiliza la comunicación textual espontánea para afirmar un teorema o definición, así como para describir, explicar, proponer, definir y disputar sobre el objeto matemático investigado.
- **Registro algebraico:** se hace uso de alguna expresión algebraica a través de símbolos, letras, que señalan características particulares del objeto en estudio, las cuales luego permitirán realizar generalizaciones y modelizaciones.
- **Registro gráfico:** se utiliza un gráfico para representar un objeto matemático.
- **Registro figural:** se expresan formas, estructuras y su organización; por lo que está íntimamente relacionado con la percepción visual, el discurso teórico y simbólico.

Dicho lo anterior, explicaremos aspectos del registro figural ya que nuestro foco de investigación son los cuadriláteros.

El registro figural permite desarrollar la capacidad de procesar información mediante representaciones visuales y espaciales. Comprende imágenes, diagramas y gráficos, así como cualquier otra representación visual de conceptos matemáticos (Duval, 2011). Es decir que los estudiantes pueden percibir y manipular las características, también relaciones de los elementos visuales a través del registro figural para comprender y resolver problemas matemáticos. Como puente entre las representaciones concretas y las abstractas, el registro figural es especialmente útil en el aprendizaje de las matemáticas ya que puede ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender conceptos abstractos, facilitando así su aprendizaje y retención.

Una de las ventajas del registro figural es que permite la representación visual de problemas matemáticos, lo que puede ayudar a la comprensión y el razonamiento. Los

estudiantes pueden identificar patrones, establecer conexiones entre elementos y poner en práctica estrategias de resolución de problemas mediante el uso de imágenes y diagramas. Además, el registro figural puede ser beneficioso para los estudiantes que tienen dificultades con el lenguaje matemático formal, ya que proporciona un método alternativo para representar y comprender conceptos.

La conversión del registro figural al simbólico es un paso crucial en la educación matemática, ya que permite a los estudiantes utilizar el lenguaje matemático formal y realizar operaciones algebraicas. El registro figural proporciona un medio para utilizar diversas representaciones de objetos matemáticos, facilitando así la comprensión y el razonamiento deductivo.

Respecto a las aprehensiones de una figura de acuerdo con Duval (1999) son de cuatro tipos: secuencial, perceptiva, discursiva y operativa.

Aprehensión secuencial: La aprehensión secuencial trata del orden en que se construye una figura; ésta secuencia ordenada depende sólo de las propiedades matemáticas de la figura y limitaciones técnicas de los instrumentos utilizados; para que la construcción tenga éxito, deben respetarse las asociaciones iniciales entre las propiedades matemáticas y las capacidades técnicas del instrumento (Duval, 1994). Es la comprensión lo que se relaciona con la creación secuencial de una forma geométrica.

Aprehensión perceptiva: Es la comprensión que hace que la observación de la figura se produzca de forma espontánea e independiente del enunciado. Según Duval (1999), existen varios métodos para comprender una figura en el contexto de un enfoque geométrico, detecta o reconoce rápidamente una forma o un elemento en un plano o en el espacio, es la más instantánea.

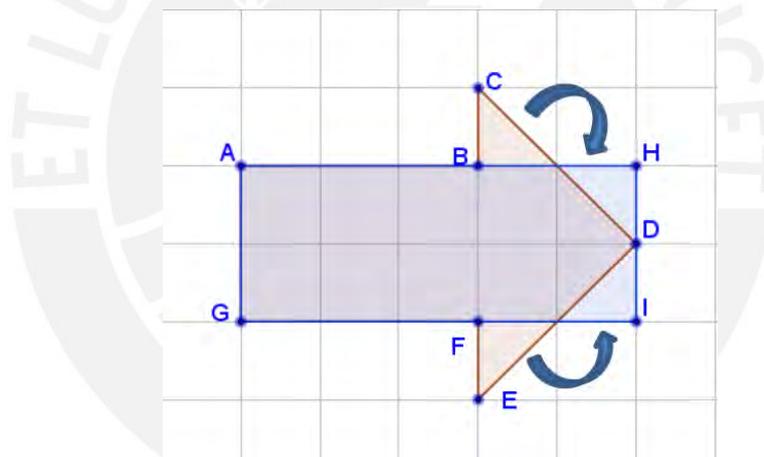
Duval (1999) señala además que la percepción visual identifica objetos bidimensionales y tridimensionales mediante un procesamiento cognitivo automático. De ahí que podamos detectar a simple vista la forma de una figura o sus partes constituyentes. Una figura representa elementos que se distinguen del enunciado, del mismo modo que los objetos especificados en el enunciado no siempre son los que surgen espontáneamente (Duval, 2004a).

Aprehensión discursiva: Es la aprehensión que asocia una figura a un enunciado matemático. Según Duval (1999), la aprehensión discursiva de una figura se refiere a una explicación de los rasgos matemáticos distinta de la proporcionada por la leyenda o las hipótesis. Esta percepción es susceptible de tener las características de una hipótesis; por lo tanto, forma parte del discurso teórico en este caso. La naturaleza de esta explicación es deductiva (Duval, 1994). De ahí que, según el autor, si un estudiante es capaz de percibir cualidades matemáticas adicionales en una figura que no están claramente representadas en su representación visual, ha mejorado su comprensión discursiva (Castillo, 2018).

Aprehensión operativa: Es una aprehensión que se centra en las alteraciones o transformaciones que pueden realizarse en las figuras. Se dividen en modificación mereológica, modificación óptica y posicional. A este respecto, Duval (2004a) señala que cualquier figura puede alterarse de diversas maneras como aumentar o reducir su tamaño, así como trasladarla o rotarla. La aprehensión operativa se refiere a los cambios o transformaciones que pueden realizarse en las figuras, de las que se distinguen tres categorías: modificación mereológica, óptica y posicional.

Modificación mereológica: se produce cuando una figura puede dividirse en varias sub-figuras, formando una conexión parte-todo que, al reagruparse o recombinarse, da como resultado una figura con un contorno global diferente al original. A este proceso el autor lo denominó reconfiguración, que consiste en el proceso de reestructuración de una o varias sub-figuras de una figura dada en otra; es decir, es un procedimiento que consiste en subdividir una figura (ver Figura 4).

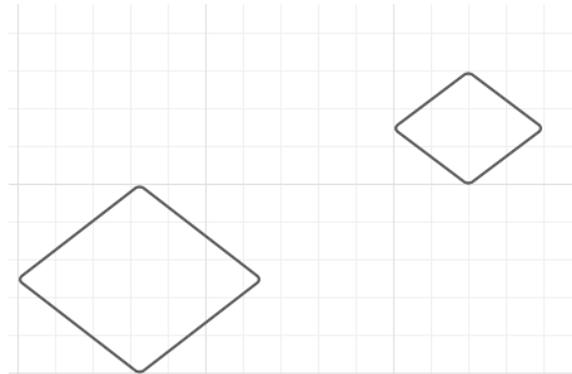
Figura 4. Ejemplo de modificación mereológica



Nota. Tomado de *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes del segundo grado de educación secundaria* (p. 35), M. Castillo, 2018.

Modificación óptica: Se produce cuando una figura se amplía o se reduce, o cuando una figura original se deforma utilizando un conjunto de lentes y espejos. Según Duval (1994), la alteración visual consiste en agrandar, encoger o deformar la figura básica manteniendo o modificando su formación original (ver Figura 5).

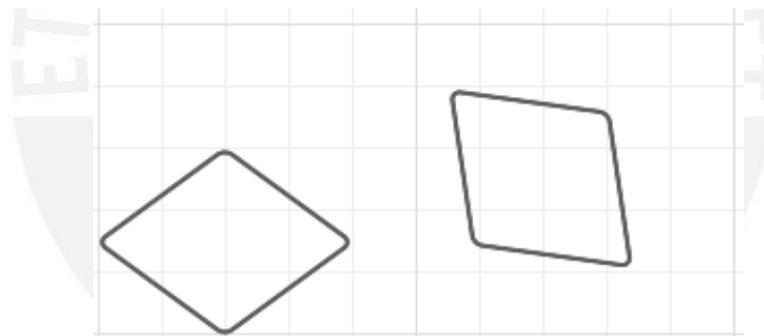
Figura 5. Ejemplo de modificación óptica de cuadriláteros



Nota. Tomado de *Semiosis y pensamiento humano* (p. 14), por R. Duval, 2004, Artes Gráficas Univalle

Modificación posicional: Según Duval (1994), este tipo de percepción operativa implica el desplazamiento de una figura con respecto a un elemento referencial; es decir, cuando se ejecutan movimientos de rotación, traslación y simetría (ver Figura 6).

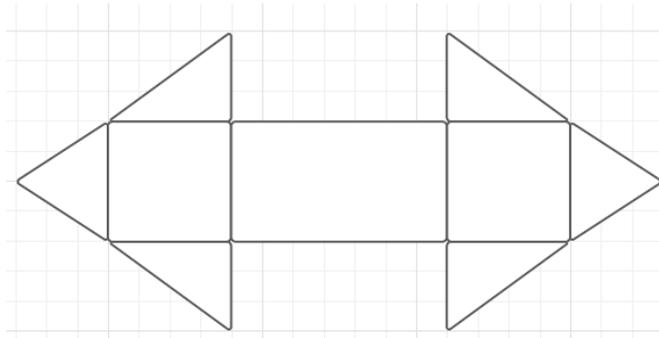
Figura 6. Ejemplo de modificación posicional de cuadriláteros



Nota. Tomado de *Comprensión y aprendizaje de las matemáticas* (p. 29), por R. Duval, 2016, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

En la operación de reconfiguración, según Duval (1994), toda figura geométrica puede ser dividida en sub-figuras de diferentes formas (ver Figura 7). La reconfiguración permite comprometer tratamientos como la medida de área a través de la suma de las partes elementales o la identificación de la equivalencia de dos reagrupamientos intermedios (Duval, 2012).

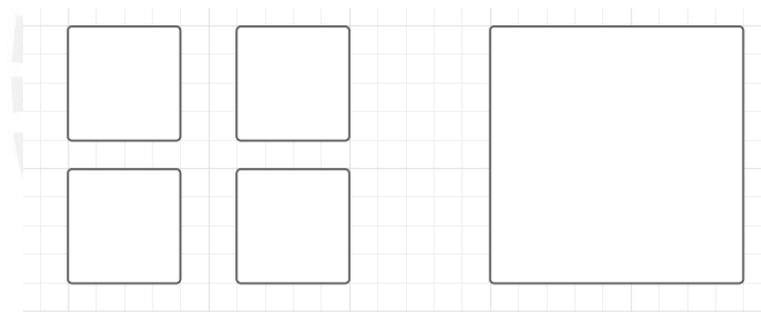
Figura 7. Ejemplo de reconfiguración



Nota. Tomado de *Evaluación Censal de Estudiantes 2015. Informe para docentes* (p. 30), Ministerio de Educación, 2016.

De acuerdo con Duval (1994), existen tres tipos de reconfiguración: Estrictamente homogénea, en donde las sub-figuras tienen la misma forma que la figura inicial (ver Figura 8).

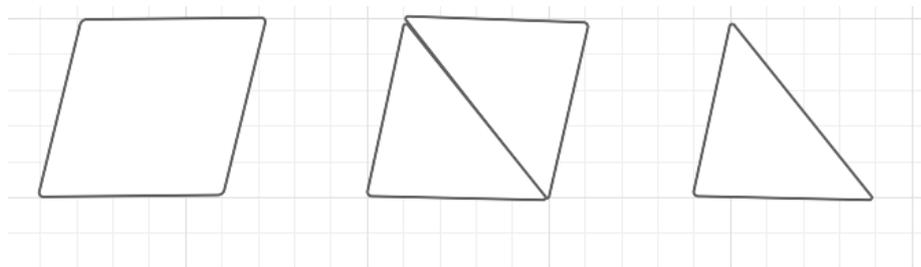
Figura 8. Ejemplo de reconfiguración estrictamente homogénea de cuadriláteros



Nota Tomado de Comprensión y aprendizaje de las matemáticas (p. 29), por R. Duval, 2016, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Homogénea, en donde las sub-figuras son diferentes a la figura inicial, sin embargo, conservan la misma forma entre ellas (ver Figura 9).

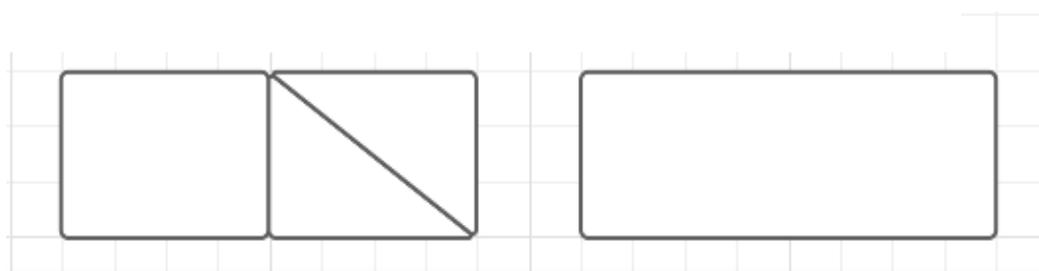
Figura 9. Ejemplo de reconfiguración homogénea de cuadriláteros



Nota. Tomado de *Comprensión y aprendizaje de las matemáticas* (p. 29), por R, Duval, 2016, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Heterogénea, en donde las sub-figuras tienen formas diferentes entre ellas y diferentes a la figura inicial (ver Figura 10).

Figura 10. Ejemplo de reconfiguración heterogénea de cuadriláteros



Nota. Tomado de *Comprensión y aprendizaje de las matemáticas* (p. 29), por R, Duval, 2016, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Por lo anterior considerado, planteamos la pregunta de investigación, el objetivo principal y los objetivos específicos de la tesis.

1.4. Pregunta y objetivos de investigación

Para realizar este estudio nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo estudiantes de 4to grado de primaria reconocen cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas al desarrollar una secuencia didáctica?

Para responder esta pregunta de investigación, plantearemos el siguiente objetivo general:

- Analizar cómo estudiantes de 4to grado de primaria reconocen cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas al desarrollar una secuencia didáctica.

Con el propósito de lograr el objetivo general, plantearemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras en material concreto.
- Identificar los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras con el uso de tecnología digital.
- Identificar los tipos de reconfiguración y aprehensiones que realizan estudiantes de 4to grado de primaria al reconocer cuadriláteros cuando desarrollan la secuencia didáctica.

A continuación, se presentan los procedimientos metodológicos de la investigación.

1.4.1. Procedimientos metodológicos

La investigación es de enfoque cualitativo definido como un proceso interpretativo de indagación basado en distintas tradiciones metodológicas que examina un problema humano o social (Creswell, 1998).

Para los procedimientos metodológicos utilizados en este estudio, adoptaremos el marco propuesto por Hernández et al. (2014), que comprende una serie de nueve etapas. Estas etapas están interrelacionadas y constituyen un proceso integral que abarca la identificación del problema de investigación, el compromiso inicial con el campo de estudio, el desarrollo del diseño del estudio, la determinación de la muestra inicial y su accesibilidad, la recopilación de datos, el análisis de datos, la interpretación de los hallazgos y, finalmente, la composición del informe de resultados. Además, subrayan la importancia de la adaptabilidad de estos procedimientos, que pueden modificarse durante el estudio en función de diversas circunstancias, como los atributos de la población estudiada o el contexto concreto de la investigación.

El presente estudio ofrece una descripción exhaustiva del enfoque metodológico utilizado en la investigación en base a 5 fases:

Fase 1: Planteamiento del problema: La fase inicial guarda relación con el contenido del primer capítulo, marcando el inicio del proceso de revisión de las investigaciones de referencia que se relacionan directamente con el tema central de esta tesis. El propósito de esta revisión es justificar y respaldar la relevancia de este trabajo de investigación. Adicionalmente, en esta etapa se exponen los elementos teóricos clave relacionados a los cuadriláteros, se establece la pregunta de investigación, se presentan tanto el objetivo general como los objetivos específicos, y se describen los aspectos metodológicos junto con los procedimientos correspondientes. Todo esto se realiza con el fin de establecer los límites y la pertinencia de esta tesis.

Fase 2: Estudio de cuadriláteros: Esta fase se relaciona directamente con el segundo capítulo de nuestro estudio, abarca los aspectos matemáticos y didácticos

relacionados con los cuadriláteros. Para llevar a cabo esto, se procede a revisar y describir el libro de actividades diseñado para estudiantes de cuarto grado de educación primaria en el año 2020, según las pautas proporcionadas por el Ministerio de Educación del Perú, en el que se encuentra el tema de los cuadriláteros.

Fase 3: Secuencia de actividades: En esta fase se presenta el desarrollo de la secuencia de actividades planificadas por la investigadora con material concreto y tecnología digital para el reconocimiento de cuadriláteros en estudiantes de 4to de primaria donde se utilizarán diferentes instrumentos para recoger información como fichas de actividades, entrevista y fotografías. La aplicación de la secuencia inició la última semana de clases del tercer bimestre y concluyó a inicios del cuarto bimestre del año académico 2023.

Previo a la secuencia se tomó un cuestionario a modo de explorar los conocimientos previos de los estudiantes sobre cuadriláteros y conceptos básicos de elementos geométricos.

Luego del cuestionario se continuó con la primera actividad de la secuencia didáctica que consistió en el uso del Tangram concreto, después de ellos, se aplicó la segunda actividad que requería el uso de computadoras para acceder al Tangram virtual; es decir, el programa Polypad. Finalmente se entrevistó como último recurso para obtener información sobre las dos actividades anteriores.

Fase 4: Análisis de la secuencia de actividades: En esta fase se examina con detalle la secuencia de actividades desarrollada tanto con el material concreto como con el uso del Polypad (tecnología digital) en donde se busca analizar los cuadriláteros que reconocen los estudiantes al realizar reconfiguraciones creando nuevas figuras a partir del Tangram.

Fase 5: Conclusiones y perspectivas futuras: Tras la aplicación de la secuencia, se presentan los resultados para las conclusiones del trabajo relacionadas con los objetivos generales y específicos de este estudio. En cuanto a las perspectivas futuras, se espera que éste estudio facilite la aparición de nuevas iniciativas académicas derivadas de las conclusiones.

CAPÍTULO II: CUADRILÁTEROS

En este capítulo se presenta el objeto matemático de estudio (cuadriláteros), específicamente del cuadrado, rectángulo y trapecio. En la segunda parte, se realiza una revisión y descripción, a la luz de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), del contenido asociado al objeto de estudio que se encuentra en el libro del Ministerio de Educación del Perú (2021) correspondiente al 4to grado de primaria.

2.1 Los cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, trapecio isósceles

Entre los años 325 – 264 A.C., Euclides escribió “Los Elementos”, el cual está conformado por 13 libros que presenta postulados, definiciones, nociones básicas y demostraciones que el autor realizó a asociadas a la geometría, aritmética y álgebra.

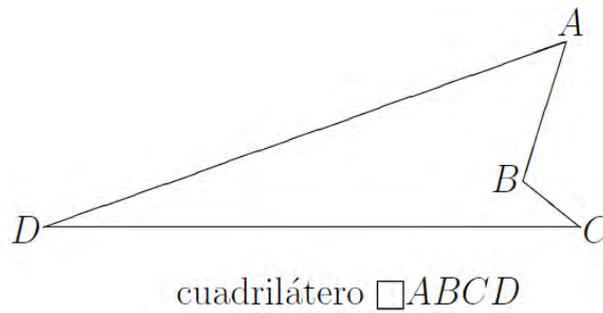
Para esta investigación se usó el libro I titulado “Elementos de Geometría”, donde Euclides (1944) presenta en la definición 19 que *“Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas”* (Euclides, 1944, p. 9).

Por lo que el autor expresa se puede decir que basó su definición en las líneas rectas que las componen. Luego en la definición 22 tiene en cuenta los lados y ángulos para presentar la diferencia entre cuadriláteros donde indica que *“De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular; rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámese trapecio las demás figuras cuadriláteras.”* (Euclides, 1944, p. 9)

Euclides presentó dos definiciones clave que contribuyeron luego en otros trabajos de investigación matemática, donde otros autores presentan definiciones y clasificaciones de los cuadriláteros como las que se presentan a continuación.

Los autores Villarreal y González-Hernández (2007) explican que una figura poligonal cerrada con cuatro lados que se encuentre en un plano, se llama cuadrilátero. Añaden que un cuadrilátero está compuesto por la unión de cuatro segmentos que no se cortan y que internamente se encuentran los ángulos del cuadrilátero.

Figura 11. Cuadrilátero ABCD



Nota. Tomado de Villarreal y González-Hernández, 2007, p. 51

Según se observa en la Figura 11, los vértices del cuadrilátero son los puntos A, B, C y D mientras que sus lados son \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} , también se observa que se puede formar diagonales \overline{AC} y \overline{BD} .

Los autores presentan las definiciones de figuras geométricas basándose al igual que Euclides en los lados y ángulos. A modo de poder organizar mejor las definiciones, se elaboró la Tabla 2 tomando los tres cuadriláteros de estudio para esta investigación: Cuadrado, rectángulo y trapecio.

Tabla 2

Definición de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo y trapecio

Figura geométrica	Definición
Cuadrado	Es un rectángulo que tiene lados congruentes
Rectángulo	Es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos
Trapecio	Es un cuadrilátero que tiene al menos dos lados paralelos

Nota. Adaptado de Villarreal y González-Hernández, 2007, p. 52

Estos autores al brindar las definiciones de los tres cuadriláteros hacen una asociación con otros cuadriláteros además de usar las palabras lado y ángulo para expresar las características de los cuadriláteros.

Para complementar a Villarreal y González-Hernández (2007), se muestra la definición de cuadriláteros hecha por Londoño (2006) que realiza las definiciones tomando como referencia los lados ángulos de los cuadriláteros. Se organiza la información en la Tabla 3, tomando los tres cuadriláteros de estudio.

Tabla 3

Definición de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles

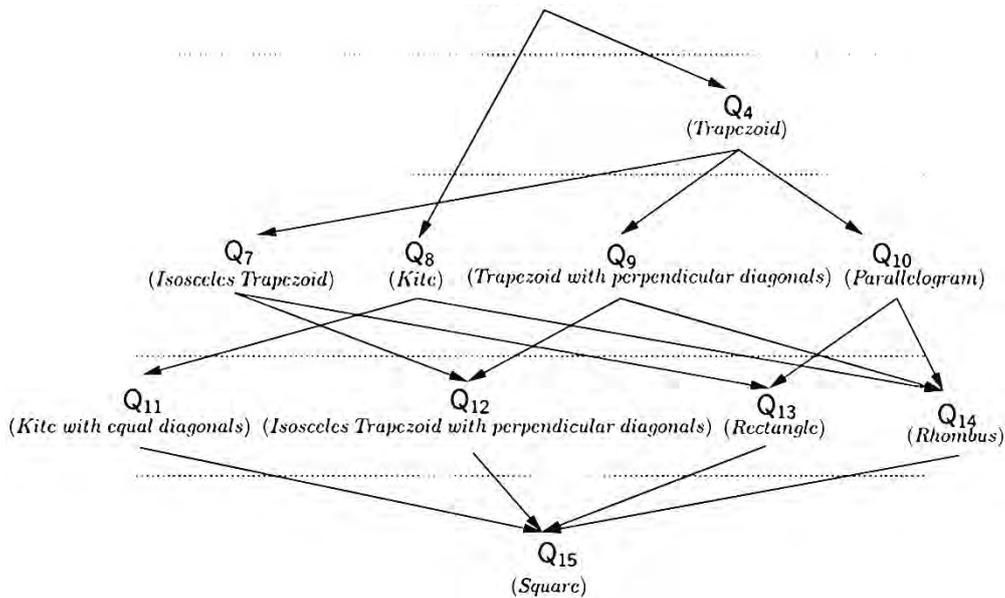
Figura geométrica	Definición
Cuadrado	Cuadrilátero con ángulos congruentes y sus lados congruentes.
Rectángulo	Cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y sus ángulos interiores congruentes.
Trapecio isósceles	Cuadrilátero con un par de lados paralelos y los otros dos lados congruentes.

Nota. Adaptado de Londoño, 2006, p. 182

Luego de conocer las definiciones de cuadriláteros es importante conocer las clasificaciones que se han realizado de ellas, por ello a continuación se presentan dos clasificaciones relevantes para esta investigación.

En la Figura 12, se presenta una clasificación que comienza considerando como figuras geométricas principales al trapecio y al rombo para luego hacer una clasificación basada, teniendo como referencia las diagonales y ángulos que se puedan formar en el interior de cada cuadrilátero. Para esta investigación se explicará brevemente los criterios de clasificación del trapecio, trapecio isósceles, cuadrado y rectángulo.

Figura 12. Clasificación de Tolga (2017) de cuadriláteros



Nota. Tomado de Tolga, 2017, p. 4

Tolga (2017) realiza categorizaciones de los cuadriláteros “Q” considerando sus diagonales y ángulos como se muestra a continuación:

Q₀: Cualquier cuadrilátero sin propiedad diagonal específica.

Q₄: Pueden formarse sólo con cuadriláteros con ángulos internos menores a 180°. Por lo que las diagonales siempre terminan en el interior siendo necesario que tengan al menos dos lados paralelos. Por tanto, este tipo de cuadrilátero es un trapecio.

Q₇: Los cuadriláteros de esta categoría son cuadriláteros cuyas diagonales congruentes, además ángulos interiores menores a 180°. Esta categoría tiene la misma propiedad diagonal que el caso de Q₄. Además, resultan en tener un par de lados opuestos congruentes, mientras que los ángulos de las bases también son congruentes. Por lo tanto, este tipo de cuadrilátero es un trapecio isósceles.

Q₁₃: Cuadriláteros con diagonales congruentes las cuales se cortan formando ángulos de igual medida. Por lo tanto, este tipo de cuadrilátero es un trapecio isósceles especial que se denomina rectángulo.

Q₁₅: En esta categoría los cuadriláteros tienen diagonales que se cortan entre sí, formando ángulos de igual medida. Todos sus lados son congruentes en distancia, todos los lados opuestos son paralelos y todos los ángulos son rectos. Por lo tanto, este cuadrilátero es un cuadrado y está incluido en todos los tipos de cuadriláteros.

Luego de la explicación formal de definiciones y clasificaciones de los cuadriláteros, se presenta aspectos didácticos sobre cuadriláteros en un libro de texto otorgado por el Ministerio de Educación Nacional del Perú.

Libro de texto

Con relación al libro de texto se analizó el libro de actividad, el cuaderno de trabajo de cuarto grado de primaria, para el año 2021 del Ministerio de Educación del Perú. Este libro cuenta con ocho unidades, que se divide en diferentes fichas en donde el último tema de las unidades es de una actividad relacionada al objeto en estudio. La ficha de la primera unidad se titula: “Resolvemos problemas de forma, movimiento y localización”. Al inicio se observa un icono que indica cómo los estudiantes deben trabajarla, de forma individual se espera que los estudiantes puedan desarrollar su autonomía y puedan aprender a tomar decisiones; en dupla o en equipo, para que puedan construir la resolución con sus compañeros, compartir ideas, aplicar diferentes estrategias, lo que ayuda a reforzar el trabajo colaborativo, como se muestra en la Figura 13.

Figura 13. Captura que indica cómo los estudiantes deben trabajar cada actividad



Nota. Tomado de Ministerio de Educación, 2021, p.6

A continuación, se describen las tareas presentadas en el libro de 4to grado de primaria relacionadas con el objeto de estudio:

En la ficha 3 del cuaderno de trabajo, como se muestra en la Figura 14, el ejercicio está planteado para realizarse individualmente e identificar las líneas rectas y curvas en paisajes, es posible observar una imagen que representa unas montañas y la playa. A partir de ello, se debe escribir si las premisas son verdaderas o falsas (indicación “a”). Luego, proceder a dibujar un paisaje e identificar diferentes tipos de líneas (indicación “b”).

Figura 14. Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la primera unidad “Construimos figuras con líneas”

Construimos figuras con líneas

1 Lee las conversaciones de los amigos. Traza líneas rectas y curvas en las imágenes.



Paco
Hola amigos. Hoy me tomé una foto en Récua. Es un día despejado. Se ven con claridad las montañas.





Patty
Saludos, Paco y Nico. En Tumbes, el horizonte entre el cielo y el mar es como una línea.





Nico
Sí, el horizonte se ve como una línea recta.

a. Observa las líneas formadas y escribe V si es verdadero o F si es falso.

- El trazo del horizonte que ve Patty es una línea quebrada. ()
- El borde de las montañas es una línea quebrada y con muchas esquinas. ()

b. Dibuja en tu cuaderno, el paisaje a tu alrededor e identifica diferentes tipos de líneas.

Nota. Tomado de Ministerio de Educación, 2021, p. 13

Con esta indicación, la identificación de líneas rectas y quebradas se verá facilitada por la asociación de conocimientos previos con elementos del entorno. En el discurso del texto, se describen verbalmente paisajes y horizontes. Nico verifica que el horizonte en Tumbes parece ser una "línea recta" después de que Patty lo describe como "una línea". El concepto de que el horizonte se percibe como una línea en el paisaje, se expresa aquí utilizando el lenguaje natural.

En cuanto a las dos indicaciones ("a" y "b") planteadas, la primera (Observa las líneas formadas y escribe "V" si es verdadero o "F" si es falso) pretende evaluar la comprensión de los estudiantes sobre cómo se representan y comunican los conceptos relacionados con las líneas a través del lenguaje natural, ya que los estudiantes deben ser capaces de interpretar

y representar la información visual en el contexto de una conversación, teniendo en cuenta el significado derivado del registro del lenguaje natural empleado.

En la indicación "b" (Dibuja en tu cuaderno, el paisaje a tu alrededor e identifica diferentes tipos de líneas), la tarea requiere que los estudiantes perciban y representen visualmente las características del entorno, lo que resulta esencial para comprender cómo los individuos del mundo real representan y comprenden los conceptos. Además, realizan registros gráficos, ya que los estudiantes dibujan líneas para representar el paisaje que observan.

Del mismo modo, los estudiantes relacionarían su experiencia visual y verbal, lo que les ayudaría a interiorizar y comprender mejor el concepto de "línea" en el contexto de su observación del paisaje. Por otro lado, esta tarea podría ser un complemento a los conocimientos previos de los estudiantes, pues en la actividad se evidencia otros conceptos como líneas quebradas. Esta actividad hace uso de conocimientos básicos de elementos geométricos aprendidos en años anteriores por lo que considerará adaptar una situación similar para el cuestionario exploratorio previo a la secuencia didáctica.

En el enunciado 2 (Figura 15), se busca describir las figuras formadas en un ejemplo presentados en un geoplano. A partir de ello, replicar estos ejemplos en las mismas, permitiría identificar representaciones de figuras a partir de las líneas identificadas. Además, responder sobre las características figuras abiertas y cerradas.

En este segundo ejercicio se presenta dos figuras cerradas y abiertas en el geoplano, lo que implica que el estudiante debe reconocer los tipos de registros no discursivos gráficos y figurativos. Además, se busca que el estudiante sea capaz de percibir cualidades matemáticas adicionales, trabajando de esta manera la aprehensión discursiva. Se espera que el estudiante utilice el registro de lenguaje natural relacionando con lo que ya saben, por un proceso cognitivo de abstracción y percepción de una representación de una figura geométrica.

Figura 15. Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la primera unidad “Construimos figuras con líneas”

2 Lola y Manuel utilizan un geoplano y ligas para trazar una línea quebrada.
¿Cómo son las figuras formadas por Lola y Manuel?

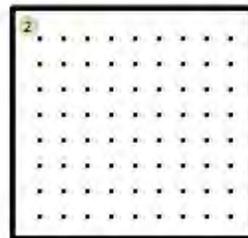
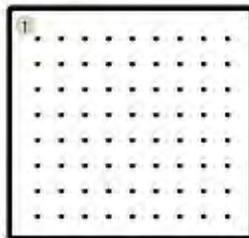
Con una línea quebrada he formado una figura de cuatro segmentos.

Hice igual y logré coincidir el punto inicial con el final.



a. Escribe tu respuesta.

b. Forma en los geoplanos una figura como la de Lola y otra como la figura de Manuel.



c. ¿En cuál de los dos casos dirías que la figura es abierta? _____

¿Y quién formó una figura cerrada? _____

Nota. Tomado de Ministerio de Educación, 2021, p.14

En la Figura 16, se muestra el enunciado 3, el cual presenta diálogos sobre el concepto de ángulo y su comprensión; además, se plantean preguntas respecto a la implicancia de éstos en las figuras cerradas. Por otro lado, se brindan opciones de diferentes tipos de ángulos y las posibilidades de construir figuras geométricas.

El texto hace hincapié en la importancia de la conversación entre Benjamín y Nico con relación al concepto de ángulo. Esto resalta la necesidad de que los estudiantes puedan comunicar y discutir nociones matemáticas de manera verbal. Adicionalmente, por medio del lenguaje verbal se promueve la identificación de ángulos en figuras geométricas representadas.

Por otro lado, el texto describe cómo en el segundo ejercicio se emplea un recurso didáctico, el Geoplano, que requiere que los estudiantes realicen acciones concretas de construcción de representaciones de figuras geométricas con características específicas.

Esta actividad promueve la aprehensión operatoria al involucrar a los estudiantes en la manipulación de herramientas y la aplicación práctica de conocimientos geométricos.

En este sentido, en la figura 16, los estudiantes deben identificar ángulos en las representaciones de figuras geométricas, lo que implica una aprehensión perceptiva para identificar las características de las figuras representadas. Además, se menciona que los estudiantes deben identificar ángulos en su entorno, lo que enfatiza la visualización de ángulos en situaciones cotidianas y la capacidad de proporcionar explicaciones sobre cómo llegaron a sus conclusiones.

Figura 16. Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la primera unidad “Construimos figuras con líneas”

3 Lee los diálogos de Benjamín y Nico.



Benjamín
Amigos, sé que para los antiguos griegos, el ángulo era "algo doblado" o "esquina". Su nombre viene del latín *angulus*.



Nico
Entiendo, Benjamín. Entonces, las figuras que han formado Lola y Manuel tienen muchos ángulos.

a. Observa las figuras formadas por Lola y Manuel y responde.

- Con ligas en el geoplano, ¿puedes formar una figura cerrada de dos ángulos? _____.
- ¿Cuántos ángulos como mínimo puede tener una figura cerrada formada con las ligas? _____.

4 Observa las piezas que tienen Urpi, Nico, Benjamín y Susy.



a. ¿Quiénes tienen piezas que forman un ángulo? Explica.

Nota. Tomado de Ministerio de Educación, 2021, p.15

Respecto a la ficha que tiene como título, “Conocemos los polígonos” (Figura 17). En el enunciado 1, se aprecia una imagen con dos ejemplos de Tangram, donde se pide reconocer los lados que tienen las figuras. Luego a partir de la forma global de los Tangram, conocido como el conjunto de formas geométricas que forman un cuadrado perfecto, se

solicita dibujar las formas ejemplificadas como un todo integrado. Posteriormente, con estas figuras, se trabaja el reconocimiento de los tipos de ángulos de cada ejemplo.

Además, se plantean situaciones donde se podrán identificar los lados y su denominación. A través de diversas representaciones, aborda la comprensión de conceptos geométricos como lados, ángulos y nombres de figuras. Se pediría a los estudiantes que dibujen las figuras representadas por Susy y Tito, para lo cual podría requerir de la aprehensión perceptiva para identificar las figuras pasando una representación mental a una representación figural. En la última indicación, los estudiantes deben reconfigurar figuras contando los ángulos de sus representaciones.

Con base en este tipo de actividades, en la secuencia de actividades que plantearemos se utilizará el Tangram concreto y digital, que facilitaría las posibles reconfiguraciones de los cuadriláteros. Por ello, se espera diseñar actividades que permitirán la manipulación de las piezas de Tangram con respecto a un elemento referencial e identificar los posibles tipos de cuadriláteros.

Figura 17. Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la segunda unidad “Conocemos los polígonos”

Conocemos los polígonos

1 Susy y Tito despliegan todas las piezas de su tangram para jugar formando figuras que tienen muchos lados y ángulos.



a. **Completa.**

- La figura que formó Susy tiene _____ lados.
- Tito ha formado una figura de _____ lados.

b. **Dibuja la figura que han formado Susy y Tito. Utiliza un solo color para pintarla.**

c. **Observa tu dibujo y responde a las preguntas:**

- ¿Cuántos ángulos tiene la figura de Susy? _____
- ¿Cuántos ángulos tiene la figura de Tito? _____

d. **Lee los comentarios de Nico y Urpi y luego completa.**



Urpi, ¿sabías que el prefijo POLI significa “muchos”? Entonces, un polígono es una figura geométrica que tiene “muchos ángulos”.



Si, además, usamos el prefijo PENTA si se trata de cinco objetos o partes, y HEXA, si son seis.

- Entonces, estas figuras con muchos ángulos se llaman _____.
- La figura que ha formado Susy se llama _____ y la de Tito, _____.

Nota. Tomado de Ministerio de Educación, 2021, p.45

Por último, en el enunciado 2 (Figura 18) se identifica diferentes representaciones de figuras geométricas, entre ellas cuadriláteros considerando su nomenclatura, el número de vértices y lados. En esta última actividad se buscaría que los estudiantes movilicen las nociones matemáticas de los polígonos y sus componentes de manera sólida y que sean capaces de utilizar este conocimiento en situaciones cotidianas o en contextos no necesariamente matemáticos. Asimismo, se presentan imágenes de losetas que permitirá el reconocimiento de diferentes tipos de cuadriláteros, y posteriormente reproducir un modelo similar en concreto, esto daría pie al uso de la reconfiguración.

Figura 18. Ficha relacionada con el objetivo de estudio de la segunda unidad “Conocemos los polígonos”

2 Rosa, Miguel, Manuel y Patty colorean distintas figuras geométricas.



Completa las expresiones nombrando cada figura, así como el número de lados y ángulos.

- Rosa pinta un _____ que tiene lados y vértices.
- Miguel pinta un _____ que tiene lados y vértices.
- Manuel pinta un _____ que tiene lados y vértices.
- Patty pinta un _____ que tiene lados y vértices.

3 Francisco comprará losetas para su cocina.

a. Describe las diferentes figuras que incluye cada diseño.



b. Francisco va a comprar mayólicas decoradas para su baño.

- Diseña una que tenga polígonos y que le recomendarías a Francisco para su baño.



4 Usa el tangram y forma:

- Un pentágono y un triángulo con todas las piezas.
- Un hexágono con seis piezas.



En la pág. 149 encontrarás el tangram.

Nota. Tomado de Ministerio de Educación, 2021, p. 46

Se utilizará esta tarea como base en una actividad adaptada con el Tangram digital, pues el uso del Tangram digital podría facilitar el reconocimiento de cuadriláteros. Además, la utilización de una tecnología digital podría contribuir a explorar, cómo las figuras pueden reconfigurarse y cómo se relacionan entre sí.

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS

En este capítulo se presenta la parte experimental de la investigación que consta de la descripción de los sujetos de investigación, la secuencia de actividades y adicionalmente de los resultados esperados y obtenidos basándose para su análisis, en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

3.1. Descripción de sujetos de la investigación

Los sujetos de la investigación están formados los estudiantes que pertenecen al cuarto grado de educación primaria que oscilan entre los 10 y 11 años de una institución educativa particular del distrito de Miraflores. Estos estudiantes pertenecen a una de las tres secciones del cuarto grado de primaria. Aunque el aula cuenta con 23 estudiantes, se eligieron a dos estudiantes para esta investigación que llamaremos Fátima y Lucio, para resguardar su identidad.

Los criterios que fueron considerados para la selección de Fátima y Lucio son principalmente que ambos estudiantes participaron en el cuestionario de conocimientos previos resolviendo la totalidad de este, además, que hayan estado presentes en la aplicación de las tres actividades didácticas respondiendo las preguntas de los ANEXO 1A, 1B y la entrevista semiestructurada. Durante la realización de todas las actividades didácticas la docente de aula tuvo como función hacer los papeles de investigador y observador dentro de la investigación.

Como recursos se utilizó computadoras con acceso a internet y la plataforma Polypad, además se realizó en aulas con capacidad de 23 estudiantes, material concreto como Tangram, fotografías de la actividad 2, fichas de trabajo (ANEXO 1 A y B) y al finalizar la investigación se realizó una entrevista con una grabadora de voz.

3.2. Organización de la secuencia de actividades

La secuencia de actividades se ha organizado a modo que promueva en los estudiantes el reconocimiento de cuadriláteros, por medio del uso de reconfiguraciones de las figuras geométricas. En la Tabla 4 se muestra la organización de la secuencia de actividades y el tiempo utilizado en cada una de ellas.

Tabla 4

Descripción de la secuencia de actividades

N° de actividad	Nombre	¿En qué consistió?	Finalidad	Horas pedagógicas (40 min)
0	Reconocimiento de los saberes previos	Realizar un reconocimiento de los saberes previos que tienen los estudiantes sobre tipos de líneas.	Explorar los conocimientos previos de los estudiantes sobre cuadriláteros.	20 min.
1	Trabajemos con el Tangram concreto	Se entregará a los estudiantes un Tangram concreto y la ficha de trabajo (ver el ANEXO 1A).	Identificar los tipos de aprehensiones y reconfiguración que realizan los estudiantes	40 min.
2	Trabajemos con el Tangram digital.	Los estudiantes ingresarán a la plataforma https://es.mathigon.org/ para realizar las actividades que se encuentran en el ANEXO 1B.	Identificar los tipos de aprehensiones y reconfiguraciones que realizan los estudiantes.	60 min
3	Entrevista	Se seleccionan a Fátima y Lucio y se los entrevistó (ver ANEXO 2), asociadas a los anexos 1A y 1B.	Confirmar los resultados del trabajo realizado con material concreto y digital.	20 min.

Nota. Las actividades se realizan en días diferentes

En los siguientes apartados se describen cada una de las actividades involucradas en la secuencia; en el primer apartado, correspondiente al cuestionario en un formulario Google Form sobre las nociones previas necesarias para el trabajo con cuadriláteros; el segundo

apartado se enfoca en el desarrollo del trabajo concreto y digital con Tangram; por último, el tercer apartado se considera la aplicación de una entrevista con preguntas semiestructuradas.

Actividad 0: Reconocimiento de los saberes previos que tienen los estudiantes

Se utilizó como instrumento el cuestionario, el cual según Cisneros et al. (2022) consiste en una serie de preguntas organizadas, estructuradas y específicas, que permiten medir o evaluar una o varias de las variables definidas en el estudio y que puede ser utilizado a través de diversos canales de comunicación. Estos canales pueden incluir interacciones personales, comunicación telefónica, correo convencional o su implementación a través de plataformas virtuales como en modalidad online. Es importante tener en cuenta las adaptaciones necesarias según el canal seleccionado para asegurar su efectividad y adecuación al medio de aplicación.

Mediante el cuestionario que se buscó explorar el nivel de conocimientos previos de los estudiantes sobre cuadriláteros, esto fue necesario debido a que son conocimientos requeridos para las siguientes Actividades 1 y 2 que usan el Tangram concreto y virtual.

El cuestionario fue elaborado en Google Forms, siendo organizado en once preguntas con cuatro alternativas de respuesta. El cuestionario, a su vez fue dividido en cuatro bloques para explorar el conocimiento de los elementos que conforman un cuadrilátero, seguidamente se presenta la Tabla 5 con la descripción de las preguntas.

Tabla 5

División por bloques y descripción de las preguntas del cuestionario

Bloque	Preguntas	Descripción de lo que se pide en cada pregunta
A	1, 2 y 3	Reconocimiento de líneas, identificación de línea recta y curva.
B	4 y 5	Reconocimiento de puntos para formar líneas rectas o curvas
C	6, 7 y 8	Identificación de figuras abiertas, cerradas y cantidad de líneas mínima para formar una figura cerrada.
D	9, 10 y 11	Identificación de ángulos, reconocimiento de figuras geométricas.

Nota. Descripción de lo esperado en términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

A continuación, se presentan las preguntas por bloques acompañados con lo que se esperaba que respondan los estudiantes (Fátima y Lucio) y luego se presenta lo que efectivamente respondieron.

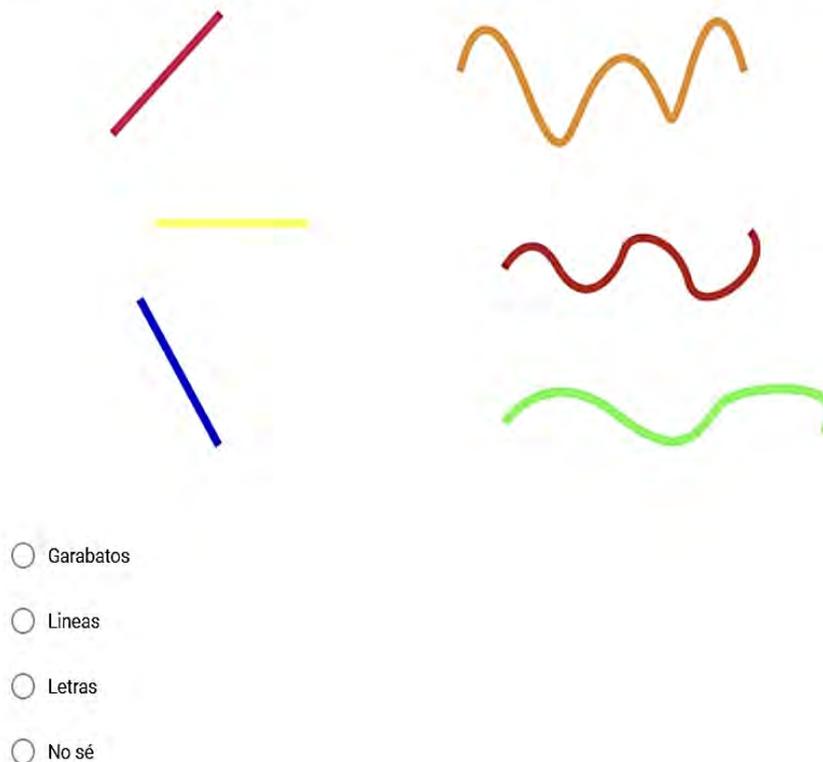
- **Resultados esperados del bloque A: Preguntas 1, 2 y 3**

Este bloque de preguntas se buscó recoger las concepciones de los estudiantes con respecto a las nociones que tienen sobre una línea, además su clasificación entre líneas curvas y rectas, para ello se les colocó unas imágenes que tenían que seleccionar según sea la pregunta. Cabe resaltar que la explicación correspondiente a cuadriláteros fue abordada un bimestre previo a la aplicación del cuestionario.

En la pregunta 1, (Figura 19) tiene como finalidad el reconocimiento de líneas, para lo cual se presenta la representación de segmentos rectos y curvos en diferentes colores, se solicitará que los estudiantes indiquen que es lo que observan en la imagen debiendo de responder la opción “Líneas” con lo que validarían se llegue a identificar que es una línea recta o curva.

Figura 19. Pregunta 1 de la Actividad 0

1) Indica que observas en la imagen

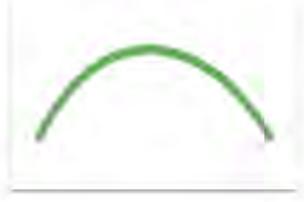


Nota. Pregunta con cuatro alternativas

En el caso de las preguntas 2 y 3 tienen como intención que los estudiantes reconozcan la representación de una línea recta de una línea curva. Para ello ambas preguntas cuentan con tres alternativas presentándose en cada pregunta dos imágenes (línea

recta y curva) y un “No sé”. Se espera que los estudiantes puedan asociar la alternativa con la representación.

Figura 20. Preguntas 2 y 3 de la Actividad 0

<p>2) ¿Cuál de las líneas es recta?</p> <p><input type="radio"/> A</p>  <p><input type="radio"/> B</p>  <p><input type="radio"/> No sé</p>	<p>3) ¿Cuál de las líneas es curva?</p> <p><input type="radio"/> A</p>  <p><input type="radio"/> B</p>  <p><input type="radio"/> No sé</p>
---	---

Nota. Pregunta con tres alternativas

Respuestas de Fátima y Lucio luego de la aplicación: En las primeras tres preguntas, Fátima y Lucio respondieron lo que se esperaba por lo que se podría decir que son capaces de percibir, identificar e incluso discriminar esas representaciones, ya que pudieron pasar de una representación icónica a una representación verbal, lo cual evidencia que identifican líneas y discriminan si son rectas o curvas.

En términos de Duval se puede decir que los estudiantes desarrollaron su aprehensión perceptiva porque identificaron líneas tanto curvas en su representación icónica, para luego pasar a las alternativas verbales del cuestionario.

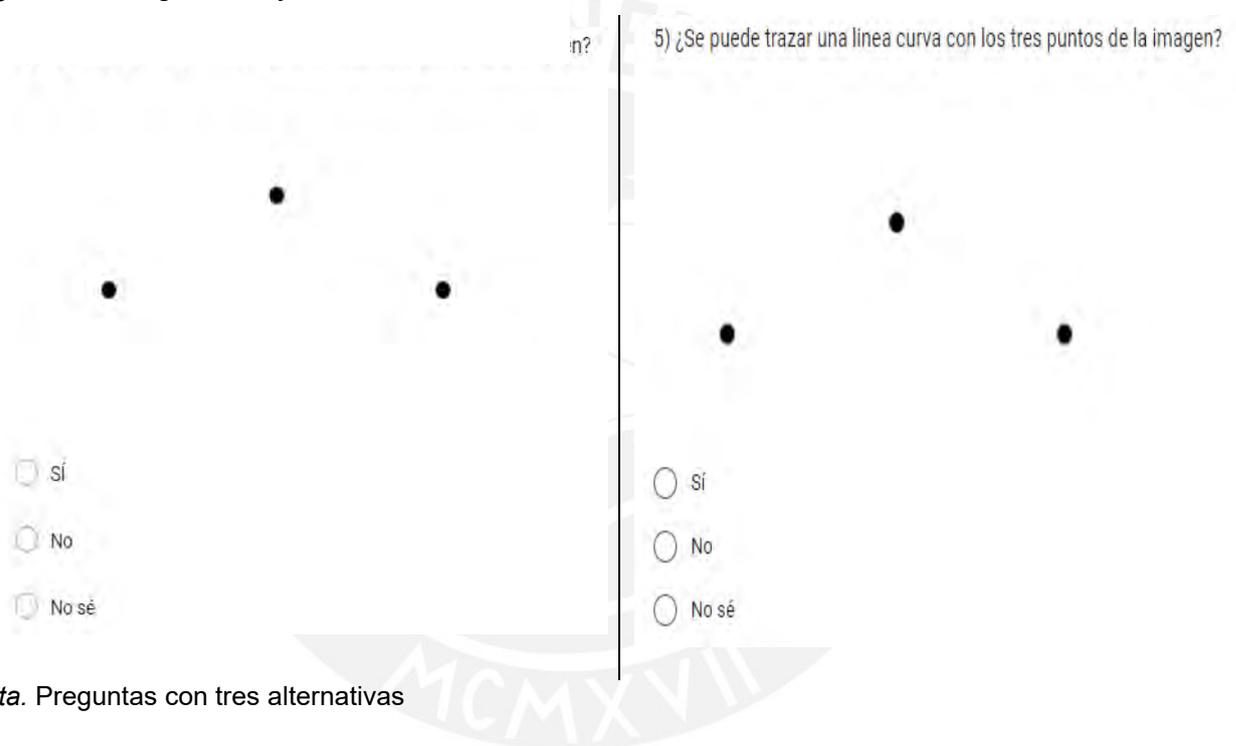
Al identificar las representaciones icónicas en el bloque A de preguntas permitiría según Duval, desarrollar la comprensión del concepto de líneas rectas que son parte de unidades bidimensionales que formarían los lados de los cuadriláteros que luego podría ayudar a generar la aprehensión operatoria del estudiante para la formación de cuadriláteros.

- **Resultados esperados del bloque B: Preguntas 4 y 5**

Este bloque de preguntas buscó reconocimiento mental de unión de puntos para formar líneas rectas o curvas (Figura 21). Para ello, se colocó una representación con tres puntos con la intención de que los estudiantes perciban y reconozcan la relación entre los puntos con la posibilidad de trazas de líneas (curva o recta) de forma mental.

Se espera que los estudiantes contesten “No” y “Sí” respectivamente en cada pregunta con lo cual se espera confirmar la representación mental de la línea curva usando los tres puntos de las preguntas, pasando luego de la representación visual de los puntos a una representación verbal.

Figura 21. Preguntas 4 y 5 de la Actividad 0



Nota. Preguntas con tres alternativas

Resultados de Fátima: En la pregunta número cuatro, se hace hincapié en la habilidad de visualizar una línea recta a partir de las condiciones proporcionadas.

Fátima no logra responder como se esperaba en la pregunta 4 sin embargo, llegó a responder según lo esperado en la pregunta 5.

Esto podría atribuirse a su dificultad de representar mentalmente lo que pide cada pregunta. En términos de Duval se podría decir que, Fátima todavía no ha consolidado su comprensión perceptiva asociada al objeto que se deseaba que represente ya que no puede percibir que al unir los puntos mentalmente se pudo formar líneas rectas o curvas.

Resultados de Lucio: En el caso de Lucio respondió según lo previsto en las preguntas 4 y 5, por lo que se podría deducir que Lucio reconoce líneas rectas y curvas a partir de los puntos que lo pueden conformar en cada imagen.

Se podría decir que Lucio desarrolló su aprehensión perspectiva porque reconoce que a partir de dos puntos o más se puede formar una recta curva o recta.

- **Resultados esperados del bloque C: Preguntas 6, 7 y 8**

En las preguntas 6 y 7 (Figura 22) se muestra dos imágenes que representan a una figura cerrada y abierta. Para hacer más fácil su identificación en la selección de alternativas, se ha colocado debajo de cada imagen las letras A y B con lo que el estudiante puede elegir entre tres alternativas: A, B y No sé.

La respuesta esperada en las preguntas 6, es la imagen que va acompañada de la letra B que corresponde a una figura abierta, mientras que la pregunta 7 la respuesta esperada es la selección de la alternativa A, ya que corresponde a una figura cerrada con resultados esperados se estaría confirmando que los estudiantes pueden diferenciar una figura abierta de una cerrada.

Figura 22. Preguntas 6 y 7 de la Actividad 0

6) ¿Cuál de las imágenes corresponde a una figura abierta?

A B

A
 B
 No sé

7) ¿Cuál de las imágenes corresponde a una figura cerrada?

A B

A
 B
 No sé

Nota. Preguntas con tres alternativas

Por último, en la pregunta 8 (Figura 23) donde se espera que los estudiantes lleguen a realizar representaciones mentales sobre el armado de una figura cerrada. Para ello, se espera que movilicen sus conocimientos previos de formación de líneas, para la cual se requiere tener puntos o segmentos que puedan conectarse entre sí sin dejar ningún punto fuera de la figura

Figura 23. Preguntas 8 de la Actividad 0

8) ¿Con cuántas líneas puedes formar una figura cerrada?

2 líneas

3 líneas

No sé

Nota. Pregunta con tres alternativas.

Finalmente, se espera que puedan seleccionar la alternativa “3 líneas”, con lo que se estaría verificando que los estudiantes podrían identificar las líneas necesarias para el armado de una figura cerrada.

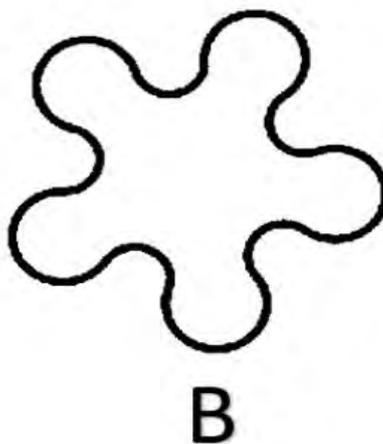
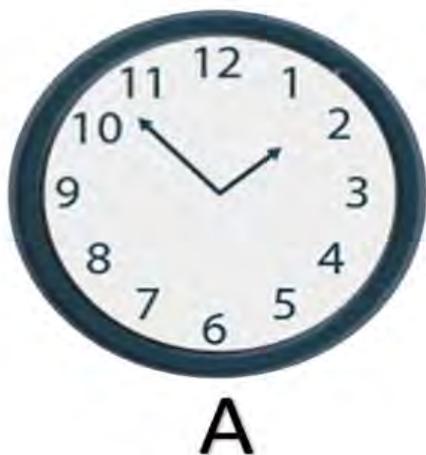
Resultados de Fátima y Lucio: Los estudiantes respondieron estas preguntas del bloque C del cuestionario de la manera esperada, por lo que se podría decir que son capaces de diferenciar de manera visual y conceptual entre figuras abiertas, cerradas e identificar la cantidad de líneas que son necesarias para formar una figura cerrada.

- **Resultados esperados del bloque D: Preguntas 9,10 y 11**

Las preguntas pertenecientes a este último bloque son mucho más desafiantes para los estudiantes, debido a que requieren de aprehensiones perceptivas y modificaciones mereológicas, para determinar el resultado. En la pregunta 9 (Figura 24), se presume que el estudiante realizará la identificación de la figura que puede formar ángulos, usando sus saberes previos de elementos de un cuadrilátero seleccionando la alternativa A en el cuestionario.

Figura 24. Pregunta 9 de la Actividad 0

9) ¿Cuál de las imágenes presenta ángulos?

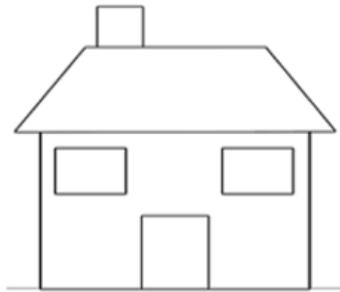


- A
- B
- No sé

Nota. Pregunta con tres alternativas

Mientras que en la pregunta 10 (ver Figura 25), se espera que el estudiante observe la casa de la imagen para luego realizar el conteo de figuras geométricas que se encuentran en su interior. Para este proceso se espera que descomponga la imagen en figuras geométricas por medio de la modificación mereológica que se producirá al dividir en sub-figuras la imagen para realizar el conteo de figuras geométricas, dando como resultado la alternativa 6.

Figura 25. Pregunta 9 de la Actividad 0

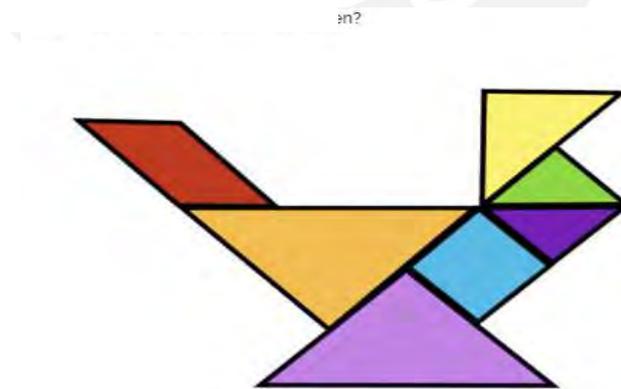


- a) 6
- b) 5
- c) Menos de 4
- d) Ninguna

Nota. Pregunta con tres alternativas

En la pregunta 11 (ver Figura 26), se observa una imagen compuesta por siete piezas de Tangram, que conforman a un ave las figuras geométricas que lo componen, las cuales son: 1 paralelogramo, 5 triángulos de diferentes tamaños y un cuadrado. La pregunta pide que se distingan las diferentes figuras geométricas que se observan en la pregunta, es decir los estudiantes podrían realizar la conversión del registro figural al registro en lengua natural al momento de marcar entre cinco alternativas múltiples que ofrece esta pregunta del cuestionario.

Figura 26. Pregunta 11 de la Actividad 0



- Triángulo
- Cuadrado
- Paralelogramo
- Círculo
- No sé

Nota. Pregunta de múltiple marcado y cuatro alternativas

Resultados de Fátima: La pregunta 9 no fue respondida como se esperaba, por lo que se podría decir que Fátima aún no comprende qué es un ángulo, entendido como la medida de la separación entre dos líneas o segmentos que se cruzan en un punto común. Otra posibilidad es que Fátima no identificó la representación de ángulo entre las dos imágenes.

En la pregunta 10, la estudiante respondió de la manera prevista por lo que se podría decir que Fátima identifica figuras geométricas contenidas en la imagen de la casa como un cuadrado grande para las paredes, cuadrados pequeños para las ventanas, un rectángulo para la puerta, un trapecio isósceles para el techo y un rectángulo encima del trapecio como una chimenea para luego realizar la conversión de la representación figural a una en lenguaje natural para seleccionar una de las alternativas del cuestionario.

Por último, en la pregunta 11, la menor contestó parcialmente lo que se esperaba ya que no pudo identificar en la imagen del ave la figura geométrica del paralelogramo, lo que podría ser resultado de que no conoce esta representación icónica por ende no se llegó a marcar entre las alternativas de respuesta.

Resultados de Lucio: En el caso de Lucio respondió de manera no prevista la pregunta 9, por lo que al igual que Fátima se podría decir que no comprende qué es un ángulo o no identificó la representación de ángulo entre las dos imágenes que se tenían de alternativas.

Otra pregunta que fue respondida de manera no prevista fue la pregunta 10, en donde se pedía que se realice un conteo de figuras geométricas que se encuentran dentro de la imagen de una casa. Los resultados de esta pregunta podrían mostrar que el estudiante todavía no logra descomponer la imagen en sub-figuras.

Por último, la pregunta 11, fue respondida de la forma prevista por lo que se podría decir que el estudiante desarrolló la aprehensión perceptiva con lo que habría generado una conversión de la representación figural al lenguaje natural para responder el cuestionario.

- **Resultados generales del cuestionario luego de la aplicación**

Después de observar los resultados obtenidos por Fátima y Lucio podemos decir que la mayoría se encuentra entre los resultados esperados, notándose una cierta repetición en los resultados no previstos, como se muestra en la Tabla 6 por bloque de pregunta.

Tabla 6*Resultados previstos y no previstos en los cuestionarios de Fátima y Lucio*

Bloque	Preguntas	Descripción de lo que se pide en cada pregunta	Resultado previsto (R.P.) y no previsto (N.P.)	
			Fátima	Lucio
A	1, 2 y 3	Reconocimiento de líneas, identificación de línea recta y curva.	R.P.	R.P.
B	4 y 5	Reconocimiento de puntos para formar líneas rectas o curvas.	N.P. (4) R.P. (5)	R.P.
C	6, 7 y 8	Identificación de figuras abiertas, cerradas y cantidad de líneas mínima para formar una figura cerrada.	R.P.	R.P.
D	9, 10 y 11	Identificación de ángulos, reconocimiento de figuras geométricas y distinguir figuras geométricas	N.P. (9 y 11) R.P. (10)	N.P. (9 y 10) R.P. (11)

Nota. Resultado previsto (R.P.) y no previsto (N.P.)

Como se puede observar en la Tabla 6 al parecer Fátima y Lucio presentan casi los mismos resultados en el cuestionario, sin embargo, también se pudo observar resultados no previstos en ambos estudiantes, los cuales analizaremos en forma general con ayuda de las Figuras 27 y 28 que sintetizan los resultados por pregunta de Fátima y Lucio.

Los resultados de Fátima muestran que, en términos generales la estudiante puede identificar la mayoría de los objetos matemáticos como líneas, figura abierta, figura cerrada y figuras geométricas básicas presentadas en el cuestionario.

Sin embargo, también se manifestó en sus resultados que no tiene muy claro cómo formar líneas rectas y curvas. Esto se manifiesta al contestar de manera errónea la pregunta 4, donde se requería que la estudiante represente en su mente tres puntos para luego unirlos. En términos de Duval podemos decir que, Fátima pudo observar la figura que se encontraba en la pregunta 4 pero no llegó a recrear mentalmente los tres puntos para generar una aprehensión perceptiva que le hubiera permitido realizar el tratamiento de la figura y responder la pregunta.

Mientras que en la pregunta 9, donde era necesario que la estudiante identifique en cuál de las imágenes se puede formar ángulos, sucede algo similar que en la pregunta

errónea anterior. Fátima parece no haber podido generar una aprehensión perceptiva, sin embargo, también puede que la menor no tenga interiorizado el concepto de ángulo ya que en clase sólo se brindó la definición de este objeto matemático.

Figura 27. Resultados generales por pregunta: Fátima



Nota. El puntaje de las diez primeras preguntas era de 1 mientras que la última podía valer 2 o 1,5 (incompleta)

Luego del observar los resultados generales de Fátima pasamos a revisar los resultados de Lucio que se muestran en la Figura 28. En los resultados de Lucio podemos observar que el menor no tuvo dificultades en las ocho primeras preguntas del cuestionario, sin embargo, presentó dificultades en las preguntas 4, 9 y 11. Al igual que Fátima, no parece haber podido realizar una aprehensión perceptiva en la pregunta 4 e identificar con cuál de las imágenes se puede formar ángulos en la pregunta 9 por lo que se podría decir que no llegó a generar nuevamente una aprehensión perceptiva o no ha interiorizado el concepto de ángulo.

La pregunta 11 requería que identifique figuras geométricas y que marque cuales había encontrado en la construcción con Tangram de un ave. Lucio respondió de forma parcial esta pregunta, no llegando a identificar al paralelogramo en la construcción del ave. Lo que podría indicar que el menor no ha interiorizado el concepto de paralelogramo por lo cual omitió marcar la alternativa.

Figura 28. Resultados generales por pregunta: Lucio



Nota. El puntaje de las diez primeras preguntas era de 1 mientras que las últimas podían valer 2 o 1,5 (incompleta)

Específicamente en el caso de la aprehensión perceptiva de ambos estudiantes, han logrado reconocer no muy claramente los objetos matemáticos que conformaban el cuestionario, teniendo una dificultad general en la pregunta 9 que podría indicar que no comprendieron bien el concepto de ángulo.

Se puede decir en líneas generales que, Fátima y Lucio parecen haber desarrollado su aprehensión perceptiva en casi todo el cuestionario, sin embargo el reconocimiento de unión de puntos para formar líneas rectas o curvas junto con la identificación de ángulos, reconocimiento de figuras geométricas y discriminación de las mismas denotan una posible dificultad en conceptos matemáticos específicos relacionados con línea recta, línea curva, figuras geométricas y ángulos haciéndose evidente en las preguntas 4 ,9 y 10. Esto podría estar relacionado con la comprensión y asimilación de conceptos matemáticos.

Luego de revisar los resultados de la Actividad 0 se presenta los resultados esperados y obtenidos de la aplicación de la Actividad 1.

3.2.1. Actividad 1: Juguemos con el Tangram concreto

La Actividad 1 aplicada a Fátima y Lucio, se dividió en dos indicaciones que a su vez contaban con dos sub-indicaciones. En la primera indicación se buscó identificar los tipos de reconfiguración que realizan los estudiantes usando el Tangram (material concreto).

Previo a lo esperado, es importante conocer que el Tangram está conformado por siete piezas que se pueden cambiar de posición, rotar o voltear, consiguiendo reconfigurarlas, para crear infinidad de figuras manteniendo el tamaño inicial de las piezas, es decir el Tangram concreto no permite realizar modificaciones ópticas.

Figura 29. Tangram clásico



Nota. Tomado de Polypad

El Tangram en su configuración inicial tiene forma de cuadrado y cuenta con siete piezas en su interior las cuales llamaremos a lo largo de esta investigación como sub- figuras. Duval (2017) estas sub- figuras son reorganizaciones perceptivas diferentes que representan alguna (o todas) las unidades figurales elementales de la figura de partida. Las sub- figuras en el Tangram están fraccionadas en diferentes figuras geométricas como triángulos (dos grandes, uno mediano y dos pequeños), cuadrado y paralelogramo.

Después de una breve explicación de lo que se espera en la Actividad 1, se muestra de forma más específica los resultados esperados.

- **Resultados esperados de la Actividad 1: Trabajemos con el Tangram concreto**

En la Actividad 1, las siete sub- figuras que conforman el Tangram concreto requieren ser reconfiguradas, para ello se necesita como primer paso que el estudiante pueda estimar perceptivamente, a través de la aprehensión perceptiva, la posición de las sub- figuras correspondientes a las siluetas del gato y casa (Indicación I) para luego seguir con la aprehensión operatoria que les permita reconfigurar las sub- figuras.

Una vez realizada la reconfiguración de las sub- figuras, los estudiantes deberán de responder las dos preguntas de la indicación II que se encuentran en el ANEXO 1A.

Como medio de físico y para poder identificar las aprehensiones y reconfiguraciones que los estudiantes realizan se tomaran fotos de la manipulación del Tangram concreto que los estudiantes realizan.

A continuación, en el Tabla 7 se puede observar la explicación de los resultados esperados por Indicación y Sub- indicación.

Tabla 7*División por Indicación, Sub- indicación y descripción de lo que se espera del ANEXO 1A*

Indicación y Sub – indicación	Descripción de lo que se espera
Indicación I	
a) Elaboración de la silueta de un gato	Reconfiguración heterogénea. Aprehensión operatoria de tipo: mereológica y modificación posicional en la reconfiguración de figuras. Pregunta con una única respuesta.
b) Elaboración de la silueta de una casa	Reconfiguración heterogénea. Aprehensión operatoria de tipo: mereológica y modificación posicional en la reconfiguración de figuras. Pregunta con múltiples respuestas.
Indicación II	
a) ¿Cuál de las imágenes te resultó más difícil de construir?, ¿Por qué?	Reconocimiento de la complejidad de construcción y posición de las sub- figuras de la silueta de la casa. Ejemplo:” La casa, porque requiere mayor análisis sobre la posición en que se deben poner las sub- figuras para formar un triángulo y rectángulo grande.”
b) ¿Dentro de las figuras elaboradas encuentras rectángulos, cuadrados o trapecios? ¿Cuántos encuentras de cada uno?	Reconocimiento de los tres cuadriláteros solicitados al interior de las siluetas del gato y casa en la que pueden usar la aprehensión perceptiva. Ejemplo: “En la silueta del gato se encuentran cuadrados y trapecios, pero no rectángulos, mientras que en la casa se puede encontrar un cuadrado y un rectángulo”.

Nota. Adaptado de Castillo, 2018

La Tabla 7, muestra la organización de las dos preguntas y sub- indicaciones que conforman en ANEXO1A. Es importante mencionar que esta Actividad 1 no tiene la intención de colocar un puntaje a las actividades realizadas, sino que tiene la intención de analizar las aprehensiones que los estudiantes usan en la actividad además de poder identificar luego los tres objetos de estudio: cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles.

- **Resultados esperados de la indicación I: Sub-indicación “a” y “b”**

En la sub-indicación “a”, se espera que por medio de su aprehensión operatoria de tipo mereológica, en un primer momento los estudiantes podrían hacer una recreación mental de la posible ubicación de las piezas para recrear la silueta, mientras que en el armado de la silueta se pueda observar el uso de modificaciones posicionales a través de movimientos de las sub- figuras del Tangram concreto como de rotación, traslación o voltear las sub-figuras (piezas). Luego de la manipulación del Tangram los estudiantes deberían identificar, dentro de la silueta del gato las siete sub- figuras que lo componen para finalmente hacer una recreación de lo que obtuvieron.

Figura 30. *Modificación mereológica de la silueta del gato (única respuesta posible)*

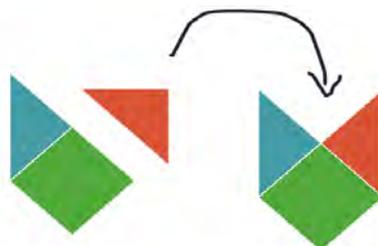


Nota. Tomado de *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes del segundo grado de educación secundaria* (p. 45), M. Castillo, 2018.

La modificación posicional permite recrear la silueta del gato que se pide usando movimientos de rotación, traslación o voltear las sub- figuras del Tangram (material concreto) de ser necesario.

En la Figura 31 se puede observar el posible movimiento de rotación horario de la pieza triangular naranja, esta tiene un giro a 135° el cual ha sido medido con un transportador).

Figura 31. *Modificación posicional de la imagen del gato*



Nota. Ejemplo de rotación de 135° en sentido horario de la sub- figura naranja, medida tomada con un transportador.

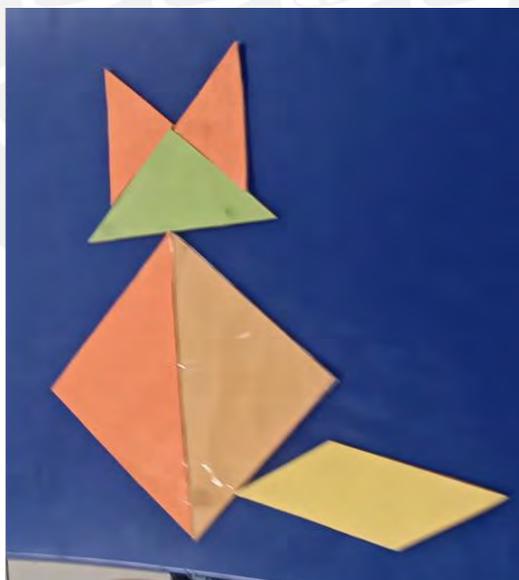
Adicionalmente, se espera que los estudiantes, por medio de la reconfiguración de tipo heterogénea (debido a que las sub- figuras del Tangram tienen diferentes formas), puedan formar la silueta solicitada en la Actividad 1.

Resultados de Fátima (sub- indicación “a”): La descripción de la Figura 30 nos indica que la primera silueta consiste en una única respuesta. En este caso, la identificación de qué aprehensión operatoria deben utilizar en la manipulación de las sub- figuras resulta compleja para la edad (10 a 11 años).

A partir de esto, podemos llegar a pensar que Fátima desarrolló parcialmente su aprehensión operativa la cual nos habla de las transformaciones y alteraciones que se pueden realizar a las figuras (al ser un material concreto no es posible la modificación óptica).

En el caso la estudiante realizó dos modificaciones pertenecientes a la aprehensión operativa: La modificación mereológica que se observa la consideramos parcial debido a que la menor comprende que al reagrupar o recombinar las piezas del Tangram concreto podría recrear la silueta del gato sin embargo al hacer el desplazamiento de las piezas y hacer los movimiento de rotación y traslación generando con esto la operación de reconfiguración no logra usar todas las piezas (omite a la pieza del cuadrado) ni colocar la pieza del triángulo de tamaño intermedio en la posición correcta como se muestra en la Figura 32.

Figura 32. *Reconstrucción de la silueta del gato hecha por Fátima*



Respecto a los resultados esperados se puede decir que Fátima llegó a generar la aprehensión operatoria llegando a realizar una reconfiguración heterogénea de solo 6 piezas del Tangram concreto. Lo que sugiere que ha percibido y procesado la reconfiguración

mereológica pero no llegó a comprender todas las modificaciones posicionales que se requerían por lo que no llegó a recrear la silueta del gato.

Resultados de Lucio (sub- indicación “a”): En el caso de Lucio, observamos una situación similar a la de Fátima. Lucio reconoce que para recrear al gato necesita mover las piezas del Tangram concreto mostrando en su reconstrucción el uso de la aprehensión operatoria. A diferencia de Fátima, el menor usa todas las piezas del Tangram concreto e intenta forzar la reconstrucción de la silueta montando las dos piezas de triángulos pequeños y el cuadrado como se observa en la Figura 33.

Figura 33. *Reconstrucción de la silueta del gato hecha por Lucio*

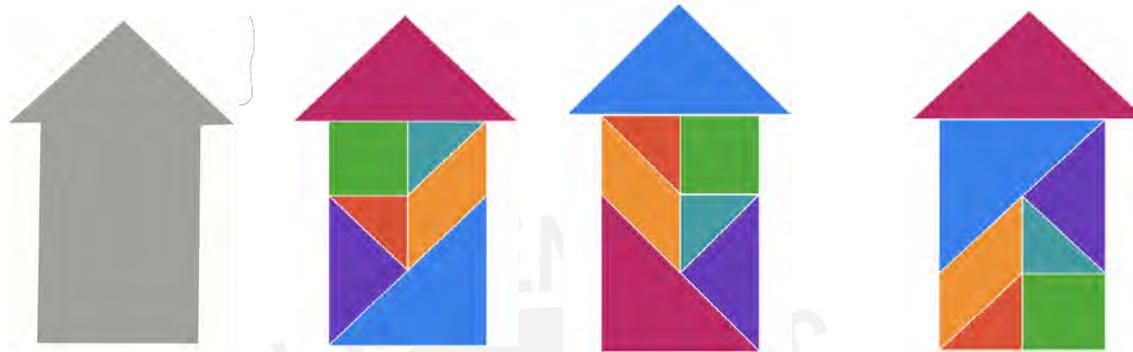


Como se mencionó en la Tabla 7, para la reconstrucción del gato se espera que el estudiante llegue a hacer uso de la aprehensión operatoria de tipo: modificación mereológica y posicional para identificar la posición de las piezas en el armado del gato. Tomando de referencia los resultados esperados, Lucio logró recrear el cuerpo del gato (posición correcta de los triángulos grandes), pero no logró hacer lo mismo con las siguientes piezas. Las cinco piezas restantes fueron superpuestas perdiendo similitud con la silueta de la figura inicial por lo que podemos decir que no logró una aprehensión operativa exitosa.

Adicionalmente, en la reconstrucción de Lucio, se puede observar una mayor facilidad de trabajar con triángulos grandes que con otras de las piezas que conforman el Tangram.

Por otro lado, la sub- indicación “b”, silueta de la casa también se busca que los estudiantes desarrollen su aprehensión operativa (modificación mereológica y posicional) para recrear la figura de la casa. Cabe resaltar que, en este caso, a diferencia del anterior, existen más alternativas de solución para recrear la silueta (Figura 34).

Figura 34. *Modificación mereológica de la silueta de la casa (Posibles respuestas)*



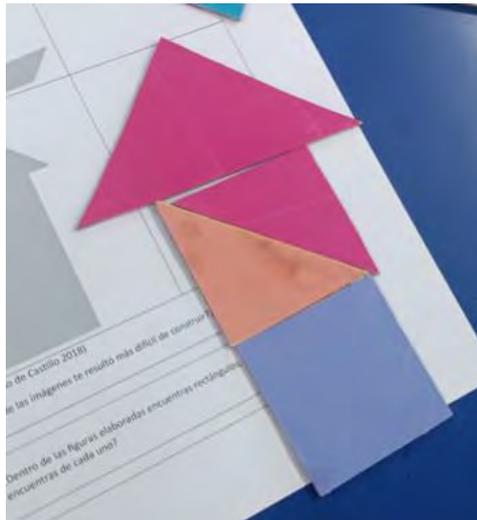
Nota. Posibles reconfiguraciones de las sub- figuras del Tangram concreto

Resultados de Fátima (sub- indicación “b”): La Figura 35 muestra la reconstrucción de la casa hecha por Fátima en la que ocurre una situación similar a la que se presenta con la anterior silueta donde al parecer no consigue desarrollar su aprehensión operativa completamente (modificación mereológica y posicional).

Aunque a diferencia de la figura del gato, aquí se observa una estructura claramente similar a la silueta inicial, lo que sugiere que Fátima pudo percibir con éxito la aprehensión operativa, logrando recrear la silueta de la casa.

Las siete piezas (sub- figuras) que la conforman el Tangram concreto no se lograron a usar en su totalidad, aunque Fátima realizó la silueta de la casa un poco diferente a la original debido a que solo usó cuatro piezas de las siete que conforman al Tangram concreto.

Figura 35. *Recreación de la silueta de la casa hecha por Fátima*



Como se puede observar en la Figura 35 de Fátima, no usó todas las piezas es decir realizó un proceso similar al de la silueta del gato en donde no uso igualmente todas las piezas del Tangram. Estos resultados de las sub- indicaciones “a” y “b” de la indicación I, no se encontraban previstos.

Resultados de Lucio (sub- indicación “b”): En la Figura 36 se observa que al igual que en la reconstrucción de Fátima, el estudiante usa menos piezas de las que se requieren. A diferencia de su compañera, el menor no logra darle una silueta parecida a la imagen original de la casa.

Figura 36. *Respuesta de la silueta de la casa hecha por Lucio*



Se puede decir que Lucio no llega a usar la aprehensión operativa en esta indicación, sin embargo, similar a su intento de recrear la silueta del gato, tiende a usar las piezas de forma triangular para resolver las indicaciones.

- **Resultados esperados de la Indicación II: Sub- indicación “a” y “b”**

En cuanto a la sub- indicación “a” de la indicación II: “¿Cuál de las imágenes te resultó más difícil de construir?”, se espera que los estudiantes puedan realizar a la conversión del registro figural al lenguaje natural al escribir su respuesta en el ANEXO 1A, con lo que evidenciaría su aprehensión perceptiva reconociendo cuál de las siluetas fue más compleja de recrear. Por ello se brindó a cada estudiante un Tangram concreto para que pudieran manipularlo a modo de tener un material de apoyo que los ayudara en la conversión de registro figural al lenguaje natural.

Por otro lado, estamos conscientes que existe un grado de dificultad en esta sub – indicación por ello, podría variar según la complejidad de las siluetas y la habilidad individual, sin embargo, en términos generales la silueta que consideramos más compleja de trabajar es la casa, por lo que se espera obtener como respuesta: “La casa, porque requiere mayor análisis sobre la posición en que se deben poner las piezas para formar un triángulo y rectángulo grande.”

En el caso de la sub- indicación “b” de la segunda pregunta “¿Dentro de las figuras elaboradas encuentras rectángulos, cuadrados o trapecios?” se busca que el estudiante identifique y nombre, por medio de su aprehensión perceptiva, las representaciones de las formas geométricas que componen las figuras construidas, Por lo que se tiene como posible respuesta: “En la silueta del gato se encuentran cuadrados y trapecios, pero no rectángulos, mientras que en la casa se puede encontrar un cuadrado y un rectángulo”.

Resultados de Fátima (sub- indicación “a” y “b”): En la sub-indicación “a” pertenecientes a la indicación II que se observa en la Figura 37, Fátima respondió respecto a la pregunta “¿Cuál de las imágenes te resultó más difícil de construir? ¿Por qué?” de una forma muy breve escribiendo sólo “El gato” por lo que se podría decir que ella es capaz de identificar cuál de las siluetas le fue más difícil de recrear, sin embargo, tiene dificultad para expresar en el registro del lenguaje natural el porqué de su respuesta. Esto se podría deber a que las modificaciones hechas por la menor no han sido lo suficientemente interiorizadas para pasar de la representación icónica al registro verbal.

Figura 37. Respuestas de las dos sub- indicaciones del ANEXO 1A resuelto por Fátima

¿Cuál de las imágenes te resultó más difícil de construir?, ¿Por qué?

El gato

¿Dentro de las figuras elaboradas encuentras rectángulos, cuadrados o trapecios? ¿Cuántos encuentras de cada uno?

Nos hice con 1 cuadrado, 5 triángulos
y 1 figura más

Mientras que en la sub - indicación “b” responde parcialmente lo esperado diciendo: “Lo hice con 1 cuadrado, 5 triángulos y 1 figura más”. Por lo que se diría que Fátima no ha desarrollado completamente su aprehensión perceptiva que de acuerdo con Duval (2004a) corresponde a la observación de la figura, la cual permite reconocer un objeto matemático en el espacio. Para ello es indispensable la concentración y atención selectiva mantenida como hábito de estudio; para el caso de Fátima requiere poner más en práctica esta habilidad en su desempeño

Resultados de Lucio (sub-indicación “a” y “b”): En la Figura 38 se puede observar las respuestas de Lucio, donde se menciona que “La casa, porque siempre faltaba una pieza”. Entonces se puede generar como conjetura también que, al no encontrar una forma de encajar todas las piezas, optó por no representar la figura en la sub-indicación “b” de la pregunta 1.

Figura 38. Respuesta de las dos preguntas del ANEXO 1A hecho por Lucio

¿Cuál de las imágenes te resultó más difícil de construir?, ¿Por qué?

la casa porque siempre falta una pieza

¿Dentro de las figuras elaboradas encuentras rectángulos, cuadrados o trapecios? ¿Cuántos encuentras de cada uno?

sí

Del mismo modo, respondió de forma no prevista la sub-indicación “b” de la pregunta 2, respondiendo solo con un “sí”. Ante esta situación, es relevante investigar más a fondo las respuestas, ya que, si Lucio no encontró una forma de hacer encajar todas las piezas, posiblemente se deba a que no logró diferenciar de manera exitosa las figuras representadas, por lo que según Duval (2004) la aprehensión perceptiva y operatoria están aún en desarrollo y será muy necesario en caso de Lucio, encontrar actividades que demanden aplicarla y dominarla.

- **Resultados generales de la Actividad 1: “Trabajemos con el Tangram”**

La Tabla 8 muestra una descripción breve de los resultados de Fátima y Lucio durante la aplicación de la Actividad 1. Cabe mencionar, que llegan a responder en la mayoría de las preguntas de forma parecida y parcialmente a los esperado para esta investigación.

Tabla 8

División por indicación, sub-indicación y descripción del resultado de la aplicación del ANEXO 1A

Indicación /sub-indicación	Descripción de los resultados de la aplicación	
	Fátima	Lucio
Indicación I a)	Llega a realizar una reconfiguración parcial de tipo heterogénea similar a lo esperado (posición correcta del paralelogramo, pares triángulos grandes y pequeños) usando la aprehensión operatoria (mereológica y posicional) de forma parcial, sólo no llego a usar la pieza cuadrada del Tangram. Resultado no previsto.	Reconfiguración de tipo homogénea del gato armando solo del cuerpo del gato (posición correcta de los triángulos grandes). Adicionalmente se observa que trata de recrear el resto del cuerpo del gato, pero monta el resto piezas con la intención de recrear la silueta. Resultado no previsto.
b)	Llega a recrear una silueta similar a la silueta de referencia. Reconfiguración de las piezas usando la aprehensión operatoria en sus dos categorías: mereológica y posicional. Se fuerza la construcción de la silueta usando solo cuatro piezas. Resultado no previsto.	No llega a recrear la silueta. Solo usa tres triángulos para la reconstrucción (tiene preferencia a trabajar con triángulos en el armado de siluetas) Resultado no previsto.
Indicación II a)	Respuesta breve “El gato”, se observa dificultad para expresar en lenguaje natural el motivo de su respuesta. Resultado no esperado	Respuesta: “La casa porque siempre falta una pieza”. En la Figura 35 correspondiente a la indicación I que sirve de evidencia de la manipulación de piezas de Tangram que se pide en la sub- indicación “b” no se observa una reconstrucción usando todas las piezas de Tangram, sin embargo llega a responder parcialmente lo esperado. Por lo que se podría decir que reconoce la complejidad de la construcción.
b)	Respuesta:” ...hice con 1 cuadrado, 5 triángulos y 1 figura más”. Responde parcialmente lo esperado mencionando triángulos y 1 figura más. Fátima podría no haber interiorizado, pasar de la representación icónica a la representación verbal.	Respuesta breve: “Sí”. Este resultado no estaba previsto, se podría decir que Lucio tiene dificultades para reconocer sub-figuras en el interior de las siluetas de la actividad.

Nota. Descripción del resultado de la aplicación

Se puede observar que, en el caso de Lucio, prefiere mantener los tamaños de las dimensiones originales de las piezas, pero dibuja triángulos adicionales para tratar de recrear

la silueta pedida. Esto es bastante llamativo ya que al parecer prefiere generar reconfiguraciones homogéneas que heterogéneas sin hacer uso de la modificación óptica.

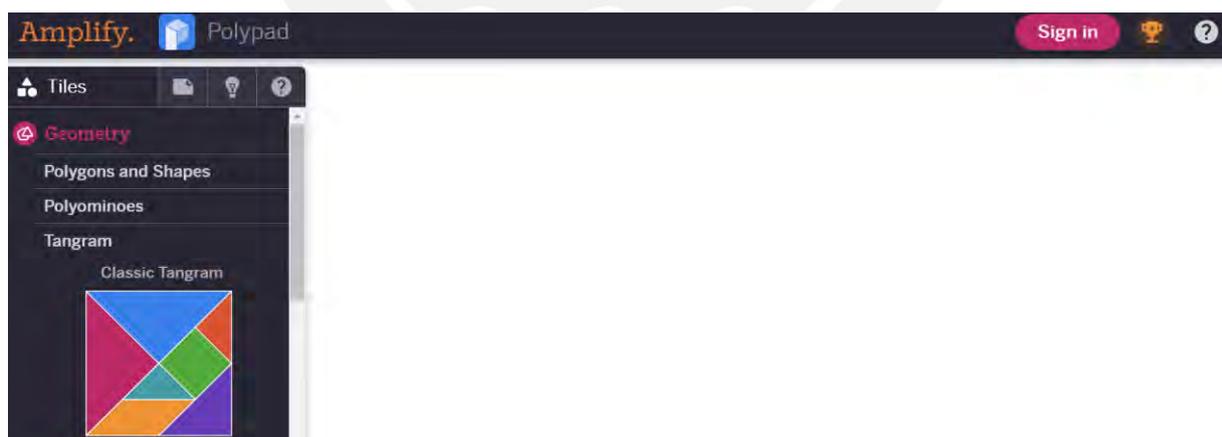
3.2.2 Actividad 2: Juguemos con el Tangram virtual

El propósito de esta actividad es que el estudiante sea capaz de construir los tres cuadriláteros de investigación: cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles, usando las sub-figuras correspondientes al Tangram digital (<https://es.mathigon.org>), teniendo en cuenta que las formas pueden ser movilizadas, rotadas o volteadas. Se le brindó indicaciones escritas mediante el ANEXO 1B y una vez culminada la Actividad 2, los estudiantes deberán exportar sus resultados como imagen (descargar desde Polypad en formato JPG o PNG) de modo que luego se pueda hacer un análisis de los resultados obtenidos.

Esta actividad tuvo una duración de 60 minutos, equivalente a un bloque y medio pedagógico para la institución educativa de esta investigación. Se tomaron 10 minutos para brindar indicaciones y explicar el uso de la tecnología digital, Polypad, así como resolver dudas de los estudiantes previo a la entrega del ANEXO 1B.

El ANEXO 1B está compuesto por tres indicaciones, las cuales solicitan la construcción de cuadrados, rectángulos y trapecios respectivamente. Cada indicación cuenta con sub- indicaciones que se van complejizando debido a que se va pidiendo incluir una pieza (sub- figura) del Tangram para construir el cuadrilátero solicitado.

Figura 39. Tecnología digital: Polypad opción Tangram digital



Nota. Al lado izquierdo de la pantalla se observa por defecto la configuración inicial que tiene forma de cuadrado.

- **Resultados esperados de la Actividad 2**

En esta actividad, el estudiante deberá poner en práctica su capacidad perceptiva y su habilidad operativa de movilizar, rotar o voltear las piezas (sub- figuras). Durante este

proceso, el estudiante llevará a cabo la transición desde el lenguaje natural (ANEXO 1B) hacia una representación visual de las figuras, es decir, de forma contraria a la Actividad 1(ANEXO A).

Al igual que la Actividad 1, la premisa brindada por la docente es usar sólo las siete piezas iniciales del Tangram, sin embargo, Polypad permite utilizar una variedad ilimitada de piezas que no se pueden ampliar o reducir, es decir no permite modificación óptica.

Tabla 9

División por Indicación, sub- indicación y descripción de lo que se espera del ANEXO 1B

Indicación y sub- indicación	Descripción de lo que se espera
1) Construyamos cuadrados	Reconfiguración homogénea usando
a) Usando solo dos piezas, elabora un cuadrado.	dos piezas triangulares (única respuesta).
b) Usando tres piezas, elabora un cuadrado.	Reconfiguración heterogénea usando dos triángulos pequeños y uno grande (única respuesta).
c) Usando cuatro piezas, elabora un cuadrado.	Reconfiguración heterogénea usando entre cuatro o cinco piezas (más de una respuesta).
d) Usando cinco piezas, elabora un cuadrado.	
2)Construyamos rectángulos	Reconfiguración heterogénea usando la
a) Usando tres piezas, elabora un rectángulo.	cantidad de piezas que requiere cada sub- indicación. Pregunta con múltiples respuestas.
b) Usando cuatro piezas, elabora un rectángulo.	
c) Usando cinco piezas, elabora un rectángulo.	
3)Construyamos trapecios	Reconfiguración heterogénea usando
a) ¿De cuántas formas podremos construir trapecios? Elabora todas las posibles formas de trapecio que puedas hacer con máximo siete piezas.	las piezas que se desee. Múltiples respuestas.

Indicación 1: Construyamos cuadrados

En la primera indicación consta de cuatro sub-indicaciones que se van complejizando, todas están referidas a la construcción de un cuadrado usando piezas de Tangram.

En las sub-indicaciones de cada figura geométrica se indica la cantidad de piezas que se debe usar. En el caso de la sub- indicación “Usando solo dos piezas”, esta tarea implica que los estudiantes comprendan cómo combinar dos piezas (sub- figuras) del Tangram de manera que formen la figura geométrica solicitada. Los niños deben aplicar su conocimiento sobre las características del cuadrado y cómo las piezas del Tangram pueden encajar para recrearlo.

Respecto a la sub- indicación, “Usando tres piezas...”, los estudiantes deben encontrar la manera de combinar tres piezas (sub- figuras) del Tangram para formar un cuadrado, esto requiere una mayor comprensión espacial y conexión parte- todo.

En cuanto a la premisa “Usando cuatro piezas...”, puede ser más complejo y requerir una comprensión más profunda de las propiedades del cuadrado y cómo las piezas pueden organizarse para lograrlo. Por último “Usando cinco piezas...”, probablemente los llevará a explorar diferentes combinaciones y estrategias no familiares para los estudiantes.

Es importante mencionar que el estudiante debe reconocer que un cuadrado es un cuadrilátero con ángulos y lados congruentes (Villareal y González- Hernández, 2007; Londoño, 2006).

Figura 40. *Indicación 1: Construyamos cuadrados*

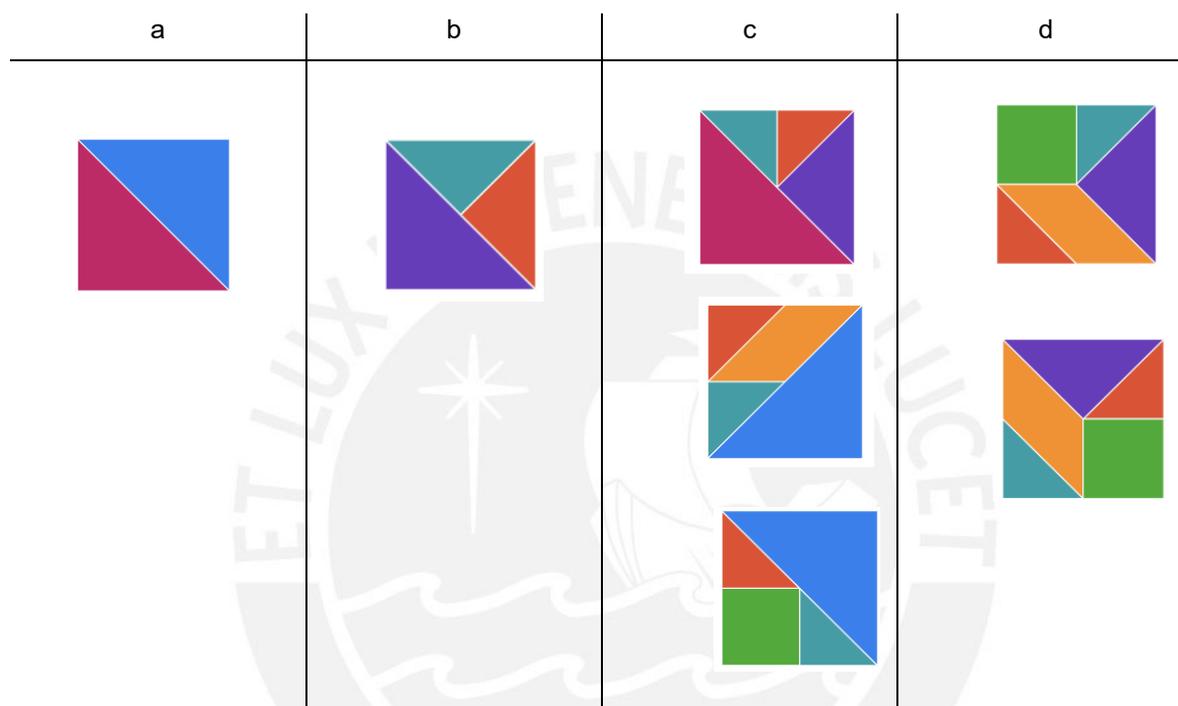
1) CONSTRUYAMOS CUADRADOS

- a) Usando solo dos piezas elabora un cuadrado.
- b) Usando tres piezas elabora un cuadrado
- c) Usando cuatro piezas elabora un cuadrado
- d) Usando cinco piezas elabora un cuadrado

Nota. Indicación 1 cuenta con cuatro sub- indicaciones

Al abordar esta primera indicación se espera que el estudiante pueda llegar a la deducción de que es posible descomponer al cuadrado en sub- figuras (piezas) más pequeñas y luego reorganizar estas sub- figuras mediante acciones como rotación y movimiento. Este procedimiento, que se conoce como reconfiguración, permitirá comprender que existen sub- figuras con diversas formas en el interior del cuadrado que pueden compartir el mismo tamaño de área. Algunas posibles respuestas de las sub-indicaciones son las apreciadas en la Figura 41.

Figura 41. Posibles respuestas ante la indicación de construir cuadrados por sub-indicación

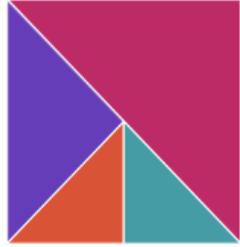


Nota. Puede haber otras construcciones como resultado

Resultados de Fátima (Indicación 1): Los resultados de Fátima evidencian la capacidad para construir el cuadrado solicitado a partir de las piezas (sub-figuras) disponibles en un Tangram, lo que sugiere una comprensión tanto perceptual como conceptual involucradas en un cuadrado, como darse cuenta de que los lados y ángulos deben ser congruentes (Londoño, 2006).

Sin embargo, también se refleja una dificultad para realizar una reconstrucción geométrica a partir de cinco piezas del Tangram en conjunto con otras sub-figuras como los triángulos. Esta dificultad se puede relacionar con una dificultad para realizar modificaciones mereológicas con varias partes (parte- todo).

Figura 42. Respuestas por sub-indicaciones de Fátima ante el ejercicio de construcción de cuadrado

a	b	c	d
			<p>Sin respuesta</p>

Nota. Fátima no responde la sub- indicación "d"

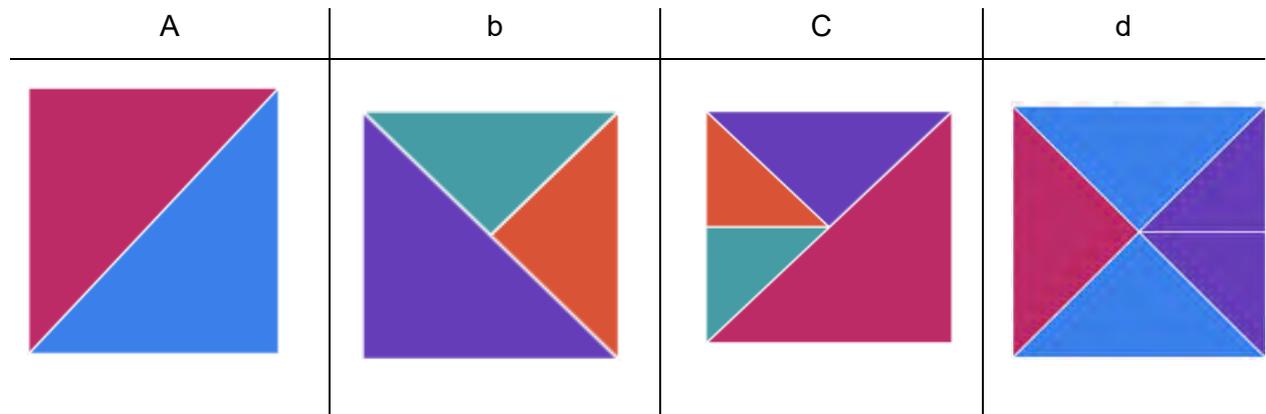
Resultados de Lucio (Indicación 1): Lucio evidencia la habilidad para ensamblar un cuadrado utilizando triángulos (sub- figuras) del Tangram, lo que sugiere una percepción visual de las sub- figuras. Sin embargo, en la última sub- indicación que consistía en armar un cuadrado usando cinco piezas (sub- figuras) que conforman el Tangram, el menor realizó un proceso no esperado.

El estudiante logró realizar la sub- indicación, pero repitiendo dos veces los dos triángulos que tienen la misma medida (azul y morado). Esto puede indicar que el estudiante sólo identifica la reconfiguración con figuras similares, es decir una reconfiguración de tipo homogénea donde tenemos cinco sub- figuras triangulares.

Podríamos decir entonces que el estudiante entiende las propiedades geométricas necesarias para construir un cuadrado, más no logra completar la última sub- indicación de la pregunta restringiéndose a usar sólo las piezas sin repetir las.

Según Duval (2012), el proceso de aprendizaje en geometría implica esta transición desde una comprensión basada en la percepción visual hacia una comprensión más conceptual y profunda de las propiedades geométricas. La capacidad para construir un cuadrado a partir de las sub-figuras del Tangram refleja un nivel más avanzado de comprensión geométrica, donde se integran la percepción visual y el razonamiento conceptual para lograr la construcción deseada.

Figura 43. Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de cuadrado



Nota. Lucio colocó dos pares de triángulos repetidos para responder la sub- indicación “d”

Indicación 2: Construyamos rectángulos

Al igual que la anterior indicación, la complejidad se eleva debido a la cantidad de piezas (sub- figuras) en juego (triángulos, cuadrado y paralelogramo) para la elaboración del rectángulo por cada sub- indicación. La complejidad también se puede traducir en el hecho de que tiene que reconocer más sub- figuras, procesarlas, representarlas y modificarlas para dar con la construcción del rectángulo deseado.

El estudiante debería reconocer que el rectángulo es un cuadrilátero con dos pares de lados congruentes entre sí (Londoño, 2006), adicionalmente al mover las piezas podrá percatarse que el rectángulo puede formar con las mismas piezas un trapecio isósceles especial (Tolga, 2017).

Figura 44. Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de cuadrado

2) CONSTRUYAMOS RECTÁNGULOS

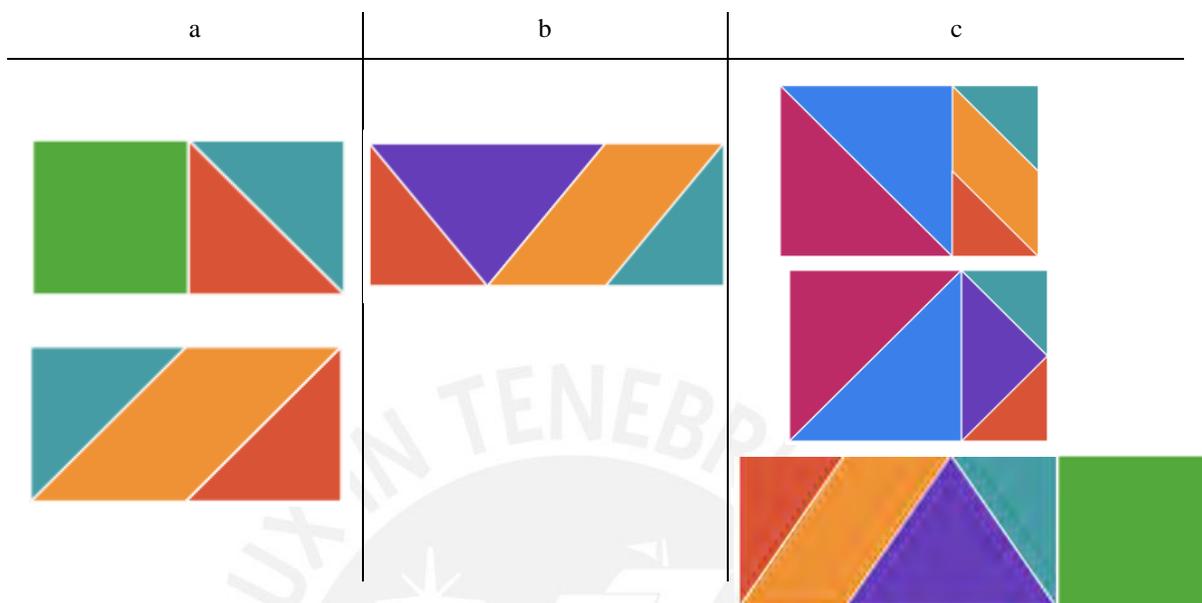
- a) Usando tres piezas elabora un rectángulo
- b) Usando cuatro piezas elabora un rectángulo
- c) Usando cinco piezas elabora un rectángulo

Nota. Indicación conformada por tres sub- indicaciones

En la Figura 45 se presenta un caso similar a la Figura 41. Es decir, la complejidad aumenta a medida que hay más piezas implicadas. No obstante, notamos una diferencia que

es en la medida la cual va creciendo en dificultad, ésta figura se va expandiendo hacia los costados, situación que no pasaba con el cuadrado.

Figura 45. Posibles respuestas ante la sub-indicación de construir rectángulos



Nota. Puede haber otras construcciones como resultado

Resultados de Fátima (Indicación 2): Fátima llegó a desarrollar la primera sub – indicación la cual pedía elaborar un rectángulo a partir de tres sub- figuras del Tangram y como se observa en su respuesta la estudiante utilizó dos triángulos y un cuadrado para su elaboración por lo que realizó una reconfiguración de tipo heterogénea, sin embargo, no logró realizar las dos siguientes sub-indicaciones:

La dificultad para construir un rectángulo a partir de triángulos, cuadrados y paralelogramos del Tangram; podría reflejar una falta de comprensión de las propiedades y clasificaciones de los cuadriláteros específicos que definen a un rectángulo, como por ejemplo la clasificación propuesta por Tolga (2017) que categoriza al rectángulo como un sub- tipo de trapecio isósceles y paralelogramo, lo que hubiera ayudado a Fátima en la realización de la indicación.

Según Duval (2012), el proceso de aprendizaje geométrico implica la transición desde la percepción visual hacia la comprensión conceptual de las propiedades geométricas. Esto sugiere una posible brecha en la comprensión de las características específicas que definen un rectángulo, como la presencia de ángulos rectos y lados opuestos de igual longitud.

Figura 46. Respuestas por sub-indicaciones de Fátima ante el ejercicio de construcción de rectángulos

A	b	c
	Sin respuesta	Sin respuesta

Nota. Fátima solo respondió la sub- indicación “a”

Resultados de Lucio (Indicación 2): Al igual que Fátima; Lucio sólo respondió la primera sub- indicación, desde la perspectiva de Duval (2012), la incapacidad para construir un rectángulo con las sub-figuras del Tangram puede indicar una dificultad en la transición del reconocimiento visual hacia una comprensión más profunda de las propiedades geométricas, específicamente las que definen un rectángulo como la propuesta por Londoño (2006) que hace referencia a pares de lados y ángulos congruentes.

Figura 47. Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de rectángulos

A	b	c
	Sin respuesta	Sin respuesta

Nota. Lucio solo respondió la sub- indicación “a”

Indicación 3: Construyamos trapecios

Se aprecia que en la Figura 48 sucede lo mismo que en la indicación anterior del rectángulo, es decir la construcción se extiende a los costados, por lo que en algunas posibles construcciones se puede percibir la transposición de definiciones que se utilizaron para la elaboración del cuadrado y rectángulo llevados al trapecio.

Figura 48. Indicación 3: Construyamos Trapecios

3) CONTRUYAMOS TRAPECIOS

- a) ¿De cuantas formas podremos construir trapecios? Elabora todas las posibles formas de trapecio que puedas hacer con máximo siete piezas.

Nota. Indicación 3 solo cuenta con una sub- indicación

Por otro lado, al no tener pares de lados congruentes, como sucedía con el cuadrado y con el rectángulo (largo y ancho), la reconstrucción requiere el uso de la definición y elementos característicos como menciona Villarreal y González-Hernández (2007), un trapecio es un cuadrilátero que tiene al menos dos lados paralelos.

Es decir, si bien dentro de cada ejercicio ya hay cierta complejidad, a medida que avanzamos de actividad, también va creciendo la dificultad, esto exige que los estudiantes tengan que recordar los aprendizajes que acaban de aplicar y probar otros (lo que constituye el uso del error constructivo). En suma, están desarrollando su conciencia semiótica mediante las actividades.

Figura 49. Posibles respuestas ante la indicación de construir trapecios



Nota. Puede haber otras construcciones como resultado

Resultados de Fátima (Indicación 3): Fátima llega a elaborar un trapecio de cinco piezas, sin embargo, no llega a terminar un trapecio de tres piezas que estaba construyendo. Curiosamente en la Figura 50, Fátima llega a construir un trapecio isósceles bastante complejo, pero intentó previamente armar un trapecio con dos triángulos repetidos y un cuadrado.

Aunque se puede identificar parcialmente la configuración del trapecio, puede haber una falta de comprensión completa de las propiedades geométricas que permitirían construir todas las variantes posibles de trapecio con las sub-figuras del Tangram.

Figura 50. Respuestas por sub-indicación de Fátima ante el ejercicio de construcción de trapecios



Nota. Fátima realiza la construcción con dos y cinco piezas

Resultados de Lucio (Indicación 3): En ésta última indicación, Lucio sólo llega a elaborar un trapecio, sin embargo, refuerza su construcción usando tres triángulos iguales.

Esto sugiere que conoce lo básico de la aprehensión operativa, ya que solo pudo generar una reconfiguración estrictamente homogénea adicionando figuras iguales.

Sin embargo, también puede reflejar una limitación en la comprensión de las propiedades geométricas que definen un trapecio, al utilizar sólo una de las posibles combinaciones de triángulos iguales para lograrlo. Aunque se puede identificar una configuración del trapecio, puede haber una falta de comprensión completa de las propiedades geométricas necesarias para construir todas las variantes posibles de un trapecio utilizando diferentes sub- figuras del Tangram.

Figura 51. Respuestas por sub-indicaciones de Lucio ante el ejercicio de construcción de trapecios



Nota. Lucio uso tres triángulos iguales para la construcción del trapecio

Tabla 10*Resultados de la aplicación con sus sub-indicaciones del ANEXO 1B*

Indicación		Resultados obtenidos luego de la aplicación	
		Fátima	Lucio
1	a	Resultado esperado	Resultado esperado
	b	Resultado esperado	Resultado esperado
	c	Resultado esperado	Resultado esperado
	d	Sin respuesta	Reconfiguración de tipo homogénea de los triángulos grandes y pequeños al agregar piezas adicionales. Respuesta no esperada.
2	a	Resultado esperado	Resultado esperado
	b	Sin respuesta	Sin respuesta
	c	Sin respuesta	Sin respuesta
3	a	Trapezio con tres piezas Trapezio con cinco. Resultado esperado	Trapezio con tres piezas de triángulos iguales. Resultado no esperado

Una vez finalizada la Actividad 2 se dio paso a la Actividad 3, la cual ayuda a confirmar los resultados obtenidos en las dos actividades anteriores.

3.2.3 Actividad 3: Entrevista

Según Hernández y Mendoza (2018), las entrevistas semiestructuradas se basan en una lista de preguntas, permitiendo al entrevistador la flexibilidad de añadir preguntas extra para clarificar conceptos o conseguir detalles adicionales. Por ello, para esta investigación se llevó a cabo una la entrevista semiestructurada a dos estudiantes (Fátima y Lucio).

La entrevista sirve como medio para confirmar los hallazgos derivados de los apéndices anteriores, con el fin de distinguir los cuadriláteros que reconocen al reconfigurar utilizando Tangram concreto y el Tangram virtual.

Según Duval (2011), las reconfiguraciones se refieren a la modificación o manipulación de estas representaciones externas. En este caso, se centra en la identificación de las reconfiguraciones realizadas por los estudiantes en la secuencia didáctica (en las tres actividades).

Esto es relevante en el marco de la TRRS, que destaca la importancia de comprender cómo los estudiantes utilizan diferentes representaciones para abordar problemas matemáticos. La diferenciación entre las representaciones tangibles (concreto) y las

representaciones virtuales puede arrojar luz sobre cómo los estudiantes se relacionan con estas representaciones y cómo influyen en su comprensión matemática.

Para registrar esta información, se utilizó un dispositivo de grabación de audio como herramienta para recolectar los datos necesarios. Luego, se procedió a analizar la información recopilada, esto implica comparar los datos obtenidos con los instrumentos de investigación que hemos empleado. A partir de esta comparación, se llevó a cabo el análisis e interpretación de la información, esto implica examinar los datos en busca de patrones, tendencias o conclusiones y luego interpretar lo que significan, basándonos en el marco teórico definido en nuestra investigación, específicamente en la TRRS.

A continuación, en la Tabla 11 observamos las preguntas de la entrevista semiestructurada.

Tabla 11

Preguntas de la entrevista semiestructurada que se realizó a dos estudiantes de 4to de primaria

Preguntas	Objetivo	Tiempo real
(1) ¿Las figuras con las que trabajaste en las actividades tenían la misma forma que la figura inicial (cuadrado)? ¿Por qué?	Confirmar la información de los ANEXOS 1A y 1B sobre la percepción del estudiante de las figuras geométricas con las que trabajó usando el Tangram y comprender las razones subyacentes detrás de su elección.	5 min
(2) En la actividad con el Tangram virtual ¿Cuál consideras que fue la pregunta más sencilla de armar que pudiste hacer? ¿Por qué?	Identificar la figura más sencilla de armar usando el Tangram virtual que el estudiante considera y comprender las razones detrás de esta elección.	5 min
(3) En la construcción usando las piezas de Tangram concretas ¿Cuál de las siluetas fue la más complicada de armar? ¿Por qué?	Confirmar la respuesta brindada en el ANEXO 1 sobre la silueta más complicada de armar según los estudiantes y las razones al respecto.	5 min
(4) Una vez hechas las construcciones de las siluetas ¿Pudiste encontrar en ellas figuras geométricas como el cuadrado, rectángulo y trapecio? ¿Cómo te diste cuenta?	Confirmar las figuras geométricas específicas, como el cuadrado, el rectángulo y el trapecio, en las construcciones hechas durante la actividad por el estudiante.	5 min
(5) De las dos actividades hecha con Tangram concreto y virtual que hemos realizado ¿Cuál de las dos te resultó más sencilla de realizar? ¿Por qué?	Identificar cuál de las actividades el estudiante considera más fácil y eficaz para armar figuras con las piezas del Tangram.	5 min

En la Tabla 11, tenemos las preguntas formuladas, el objetivo de cada pregunta realizada, mientras que la Tabla 12 se observan las preguntas de la entrevista, las cuales están clasificadas según el tipo de reconfiguración: Estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea, acompañadas de las respuestas esperadas por el investigador.

Tabla 12

Preguntas de la entrevista semiestructurada que se realizó a dos estudiantes de 4to de primaria según los tipos de reconfiguración

Tipos de reconfiguración	Preguntas	Respuesta esperada
Estrictamente homogénea	(1) ¿Las figuras con las que trabajaste en las actividades tenían la misma forma que la figura inicial(cuadrado)? ¿Por qué?	No, había una pieza en forma de cuadrado, pero el resto era diferente.
Homogénea	(2) En la actividad con el tangram virtual ¿Cuál consideras que fue la pregunta más sencilla de armar que pudiste hacer? ¿Por qué?	La forma más sencilla fue cuando junté dos triángulos para formar un cuadrado.
Heterogénea	(3) En la construcción usando las piezas de tangram concretas ¿Cuál de las figuras fue la más complicada de armar? ¿Por qué?	La más complicada fue la casa, ya que no sólo había que girar el sentido de la figura, sino que también había que voltear la pieza.
	(4) Una vez hechas las construcciones de las figuras ¿Pudiste encontrar en ellas figuras geométricas como el cuadrado, rectángulo y trapecio? ¿Cómo te diste cuenta?	Sí. Dentro de las figuras no sólo había cuadrados, rectángulos y trapecios sino otros cuadriláteros.
	(5) De las dos actividades hecha con tangram concreto y virtual que hemos realizado ¿Cuál de las dos te resultó más sencilla? ¿Por qué?	Ambas fueron sencillas.

Resultados de Fátima (1):

“No, porque eran diferentes, ya que con ellas se podían formar otras cosas como el cuadrado inicial”

Según el enfoque de Duval en geometría, este comentario refleja una comprensión inicial de la relación entre las formas geométricas utilizadas en las actividades. La respuesta indica una percepción de que las figuras utilizadas eran diferentes a la figura inicial.

Además, muestra un reconocimiento de que éstas figuras podían ser manipuladas para formar otras configuraciones, como el cuadrado inicial.

Sin embargo, esta respuesta también podría indicar una comprensión no muy clara de la relación entre las formas. Aunque se reconoce que las figuras no eran iguales, no se profundiza en la naturaleza específica de las diferencias entre ellas, ni en cómo podrían relacionarse conceptualmente.

Resultados de Lucio (1):

“Creo que no porque en la primera actividad tenía que hacer un zorro y en la segunda tenía que hacer un cuadrado con un triángulo encima”

La respuesta revela una conexión entre las formas geométricas y las representaciones que se les pide crear en las actividades. Se percibe una comprensión de que la forma geométrica inicial y las formas utilizadas en las actividades posteriores tenían propósitos y objetivos distintos.

Resultados de Fátima (2):

“El cubo de dos lados porque muchos la conocen y sólo se necesitaban dos piezas de diferente color”

La respuesta refleja un reconocimiento de una forma geométrica específica y una percepción de su simplicidad en relación con otras figuras más complejas. Además, indica una comprensión de que la figura se puede construir utilizando un número limitado de piezas y una forma simple de reconocer sus lados y caras.

Sin embargo, la respuesta se enfoca principalmente en la simplicidad del objeto matemático desde un punto de vista perceptual y de reconocimiento común, sin profundizar en las propiedades geométricas. El estudiante confunde la palabra “cubo” con la palabra “cuadrado” y explica usando de referencia sus lados. Una mayor exploración conceptual sobre las características específicas del cuadrado y cómo se compone geométricamente podría enriquecer la comprensión de la relación entre las formas geométricas.

Resultados de Lucio (2):

“Creo que fue la primera porque sólo era juntar dos piezas para armar un cuadrado y girarlos”.

La respuesta indica una percepción de la simplicidad de la figura geométrica requerida y cómo puede ser construida mediante una manipulación básica de las piezas. Se reconoce

la facilidad de juntar dos piezas para formar un cuadrado y girarlas, lo que implica una comprensión perceptual de la transformación de las formas para cumplir con la figura solicitada.

Sin embargo, la respuesta se enfoca principalmente en la simplicidad de la acción física requerida para formar la figura, sin profundizar en las propiedades geométricas que definen al cuadrado ni en cómo se componen geoméricamente. Una mayor exploración conceptual sobre las características específicas del cuadrado y cómo se compone geoméricamente, podría mejorar la comprensión de la relación entre las formas geométricas.

Resultados de Fátima (3):

“Había un gato y no me acuerdo que más... la otra cosa era la más difícil de armar porque mientras más lo intentaba siempre una ficha sobraba o faltaba, es decir había un espacio por lo que armé lo que pude”

La respuesta sugiere un reconocimiento de la complejidad de la figura y la dificultad en la manipulación de las piezas para formarla. También indica una experiencia de dificultad al intentar completar la silueta deseada, lo que implica un desafío en la comprensión de cómo encajar las piezas para lograr la forma específica.

Sin embargo, la respuesta no profundiza en las razones geométricas específicas que hicieron que esa silueta fuera más complicada de armar. No se explora si la dificultad radica en la disposición de las piezas, en la comprensión de las propiedades geométricas de la figura o en la relación entre las piezas individuales. Una mayor exploración conceptual podría ayudar a comprender las propiedades geométricas involucradas y las estrategias para ensamblar la silueta deseada de manera más efectiva.

Resultados de Lucio (3):

“Creo que fue el cuadrado con el triángulo encima porque no me salía el cuadrado de abajo y en el zorrillo, para que me quede igual tuve que montar las piezas para que me salga la cola y las patitas”.

Esta respuesta muestra una comprensión de la complejidad asociada con la manipulación de las piezas Tangram para formar siluetas particulares. Indica una dificultad específica en la construcción del “cuadrado con el triángulo encima”, debido a la dificultad para armar la base del cuadrado.

Además, señala la necesidad de “montar” las piezas para lograr representar adecuadamente las partes específicas de la figura del zorro. Aunque se reconoce la complejidad en la formación de estas siluetas, la respuesta no profundiza en las razones geométricas exactas que hicieron que estas siluetas fueran complicadas de armar. No se explora si la dificultad radica en la comprensión de las propiedades geométricas de las figuras

o en la relación entre las piezas individuales. Una mayor exploración conceptual podría ayudar a entender mejor las estrategias para ensamblar las figuras de manera más efectiva.

Resultados de Fátima (4):

“Sí, he visto cuadrados, trapecios creo que no, triángulos y varias cosas más como rectángulos”.

La respuesta muestra una capacidad perceptual para reconocer algunas formas geométricas, como cuadrados y triángulos, dentro de las construcciones realizadas. Sin embargo, la dificultad para identificar claramente los trapecios sugiere una posible limitación conceptual en la identificación de esta figura geométrica específica.

Además, la respuesta carece de detalles sobre cómo se identificaron estas figuras geométricas. No se describe el proceso de identificación de las formas geométricas dentro de las construcciones del Tangram, lo que podría indicar una comprensión limitada de las propiedades específicas que definen cada figura.

Resultados de Lucio (4):

“Sí, ehm ... cuando usé al Tangram concreto vi un trapecio, dos o tres triángulos y por ahí dos cuadrados.

La respuesta demuestra una capacidad perceptual para identificar algunas formas geométricas, como el trapecio, los triángulos y los cuadrados, dentro de las construcciones realizadas. Sin embargo, la enumeración de las formas parece ser limitada y no proporciona detalles sobre cómo se identificaron o qué características se observaron para reconocer estas figuras.

Aunque el individuo logró identificar algunas formas geométricas, la respuesta no profundiza en las propiedades específicas que definen cada figura geométrica. No se describe el proceso de identificación de las formas geométricas, lo que podría indicar una comprensión no lograda de las características que distinguen a cada figura geométrica.

Resultados de Fátima (5):

“La virtual porque, aunque había más preguntas eran más fáciles de responder y allí estaba todo el tangram para guiarme, ósea había una figura del cuadrado que tenía la referencia donde había otras figuras que podía usar guía de referencia. En el caso de las piezas de la clase, todas estaban desordenadas y no tenía de qué guiarme”.

La respuesta sugiere que la actividad virtual proporcionó una estructura más clara y una referencia visual que ayudó a la estudiante en la identificación y resolución de las indicaciones. Por otro lado, percibió las piezas del Tangram concreto como desordenadas y sin una guía clara, lo que dificultó la realización de la actividad.

Aunque esta preferencia puede reflejar una percepción de facilidad, debido a la guía visual proporcionada en el entorno virtual, también puede mostrar una dependencia en la ayuda visual para resolver las preguntas geométricas. Esto podría indicar una limitación en la capacidad de reconocer y manipular las formas geométricas sin una referencia clara.

Resultados de Lucio (5):

“Creo que el virtual, porqué las preguntas eran más fáciles, había mucho espacio y en el concreto no había mucho espacio en la mesa”.

Esta respuesta muestra una preferencia por la comodidad y la facilidad de manipulación que brindó el entorno virtual, lo que puede indicar que Lucio se sintió más cómodo y relajado al resolver las preguntas en ese entorno en particular.

Aunque la respuesta no hace referencia directa a las características geométricas de las figuras o a la facilidad para trabajar con ellas en un medio específico, destaca la importancia del entorno físico y la presentación de las preguntas en la percepción de la facilidad de la actividad con el Tangram.



Tabla 13

Respuestas obtenidas de la entrevista

Reconfiguración	Respuesta de los estudiantes	
	Fátima	Lucio
Estrictamente homogénea	1 “No, porque eran diferentes, ya que ellas se podían formar otras cosas como el cuadrado inicial” (Respuesta esperada)	“Creo que no porque en la primera actividad tenía que hacer un zorro y en la segunda tenía que hacer un cuadrado con un triángulo encima” (Respuesta no esperada)
Homogénea	2 “El cubo de dos lados porque muchos la conocen y sólo se necesitaban dos piezas de diferente color”. (Respuesta esperada parcialmente cuando dice cubo en lugar de cuadrado)	“Creo que fue la primera porque sólo era juntar dos piezas para armar un cuadrado y girarlos” (Respuesta esperada)
Heterogénea	3 “Había un gato y no me acuerdo que más...la otra cosa era la más difícil de armar porque mientras más lo intentaba, siempre una ficha sobraba o faltaba, es decir había un espacio por lo que armé lo que pude”. (Respuesta esperada parcialmente, no dice el nombre de la silueta, pero la describe.)	“Creo que fue el cuadrado con el triángulo encima porque no me salía el cuadrado de abajo y en el zorrillo para que me quede igual, tuve que montar las piezas para que me salga la cola y las patitas” (Respuesta esperada parcialmente, no dice el nombre de la silueta, pero la describe.)
	4 “Sí. Dentro de las figuras no sólo había cuadrados, rectángulos y trapecios, sino otros cuadriláteros.” (Respuesta esperada)	“Sí, he visto cuadrados, trapecios creo que no, triángulos y varias cosas más como rectángulos” (Respuesta esperada parcialmente. Menciona que no observo trapecios.)
	5 “La virtual porque, aunque había más preguntas eran más fáciles de responder y allí estaba todo el Tangram para guiarme, ósea había una figura del cuadrado que tenía de referencia donde había otras figuras que podía usar como guía de referencia. En el caso de las piezas de la clase todas estaban desordenadas y no tenía de qué guiarme” (Ambas fueron sencillas. Respuesta no esperada.)	“Creo que el virtual porque las preguntas eran más fáciles, había mucho espacio y en el concreto no había mucho espacio en la mesa”. (Respuesta no esperada.)

Nota. Respuesta cualitativa de los estudiantes en estudio

Los resultados obtenidos en la entrevista que muestra la Tabla 13, confirman que Fátima y Lucio han podido interpretar y abordar las Actividades 1 y 2 de forma casi parecida, ya que presentaron aciertos y dificultades similares. Ambos estudiantes manifiestan facilidad en la modificación posicional de sub- figuras, en específico en la reconfiguración homogénea. Esto se valida ya que ambos contestaron en la pregunta 2 de la entrevista, que la sub- indicación a perteneciente a la primera Indicación del ANEXO 1B les resultó más fácil de realizar.

Sin embargo, ambos presentaron dificultades para generar aprehensiones perceptivas de tipo mereológico durante las Actividades 1 y 2. Esto se confirma en la pregunta 3 de la entrevista, donde ambos estudiantes manifestaron tener dificultad para generar una reconfiguración heterogénea con las sub- figuras del Tangram.

En la última pregunta, ambos estudiantes responden de manera contraria a la esperada, diciendo que se les hizo más fácil la Actividad 2 usando Tangram virtual. Esta respuesta muestra ambigüedad en el desarrollo de las actividades con Tangram concreto y virtual, ya que la Actividad 1 fue resulta casi en su totalidad además de contar con menos indicaciones y sub- indicaciones, mientras que la Actividad 2 realizada en Polypad requería resolver más indicaciones y sub- indicaciones ambos estudiantes manifiestan que fue más sencilla de realizar. Esto podría deberse a que los estudiantes tienen más familiaridad con el uso de tecnología digital que con el material concreto.

3.3. Análisis de la secuencia didáctica

Previo a pasar a las conclusiones de la presente investigación, se ha elaborado un consolidado de las cuatro actividades de las cuales estuvo compuesta la secuencia didáctica con la intención de contrastar el resultado esperado con los obtenidos.

Tabla 14*Análisis de la secuencia didáctica resultado esperado y obtenidos*

N° de actividad	Resultados esperados	Resultados obtenidos
0	Reconocimiento de elementos geométricos como: puntos, línea curva, línea recta, además de identificación de figuras abiertas, cerradas, cuadriláteros y división en sub- figuras de una imagen.	Reconocen algunos elementos geométricos, teniendo dificultad en unir puntos para para formar líneas (rectas y curvas), identificar elementos de los cuadriláteros y en dividir en sub- figuras una imagen (modificación mereológica).
1	Identificar el tipo de aprehensión que los estudiantes usan durante la actividad. Identificar el tipo de reconfiguración que utilizan en la actividad. Respuesta de preguntas pasando del registro figural al verbal.	Uso de la aprehensión operatoria (modificación mereológica y posicional). Construcción de siluetas incompleta, usan reconfiguración homogénea (forzar construcciones o retiro de piezas de Tangram concreto) y heterogénea. Respuestas parciales a las preguntas (no sustenta su respuesta), dificultad para pasar del registro figural y verbal.
2	Identificar el tipo de aprehensión que los estudiantes usan durante la actividad. Distinguir los cuadriláteros que reconocer al reconfigurar figuras.	Construcción incompleta de cuadriláteros usando reconfiguraciones homogénea y heterogénea. Se fuerza la construcción de un cuadrado y trapecio usando la reconfiguración homogénea agregando piezas adicionales de triángulos. Identifica la forma de los cuadriláteros, pero no llegan a realizar todas las reconfiguraciones para su construcción.
	Estrictamente homogénea (Tangram virtual): Reconocer que en la actividad no hubo este tipo de reconfiguración.	Resultado esperado obtenido.
3	Homogénea (Tangram virtual): Reconocer que solo en el ANEXO 1B, Indicación 1 hubo esta reconfiguración. (entrevista) Heterogénea: Reconoce que tenía que usar la reconfiguración heterogénea	Resultado esperado obtenido. (Un estudiante confundió la palabra cubo con cuadrado) No llegan a concluir las Actividades 1 y 2 creando una reconfiguración homogénea para armar el trapecio repitiendo sub- figuras.
	Las dos actividades con Tangram concreto y virtual fueron sencillas.	Los estudiantes consideraron más sencilla la actividad con el Tangram virtual.

Nota: Comparación entre los resultados esperados y obtenidos

Conclusiones

Las conclusiones que se muestran a continuación se han basan en las investigaciones de referencia y documentos pedagógicos oficiales adjuntos en la justificación, los cuales permiten afirmar que los estudiantes de 4to grado de primaria muestran dificultades para reconocer cuadriláteros tales como: cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles. Siendo una alternativa de enseñanza la aplicación de secuencias de actividades con material concreto y tecnología digital para el aprendizaje y reconocimiento de cuadriláteros. La presente investigación analiza los resultados y los organiza en función a los objetivos propuestos, con la finalidad de que sirvan de referencia en la realización de futuras investigaciones.

Con respecto a las investigaciones encontradas y la justificación

La revisión de diversos estudios de investigación relativos a la enseñanza de los polígonos regulares demuestra la importancia y la eficacia del empleo de la tecnología digital, en particular de aplicaciones informáticas como SketchUp Make, GeoGebra y SPPD-SUM. Los resultados indican que la incorporación de la tecnología a la enseñanza de la geometría mejora sustancialmente la comprensión conceptual de los principios geométricos por parte de los estudiantes, facilita un entorno de aprendizaje dinámico y participativo y mejora sus capacidades visoespaciales. Los datos recogidos indican que la tecnología digital no sólo evita el estancamiento de la enseñanza, sino que también fomenta la interacción de los estudiantes, la resolución de problemas en colaboración y el intercambio de ideas. Dentro de este marco, la utilización de herramientas pedagógicas como SPPD-SUM y GeoGebra se hace evidente como enfoques eficaces para aumentar la enseñanza de la geometría, fomentar la competencia matemática y alentar los esfuerzos de colaboración. Esta investigación establece una base sólida para la necesidad y pertinencia de investigar la utilización de la tecnología digital en la instrucción y comprensión de los cuadriláteros en esta investigación. Como resultado, contribuye a la progresión, mejora del dominio académico y vocacional en este sector educativo.

Este análisis examina la importancia de incorporar secuencias didácticas en la enseñanza de polígonos, centrándose en cuadriláteros como el cuadrado, el rectángulo y el trapecio isósceles. Las dificultades de los estudiantes para comprender los componentes fundamentales de los cuadriláteros y su categorización se ven iluminadas por la investigación revisada, que hace hincapié en la importancia de este conocimiento. Se sugiere que la incorporación de tecnologías digitales, como Polypad, pueda aumentar el dinamismo del proceso de instrucción y ayudar al crecimiento de las capacidades geométricas y cognitivas de los estudiantes. Además, la pertinencia y relevancia del estudio en el panorama educativo actual se ven reforzadas por su apego a los referentes nacionales e internacionales, entre

ellos los establecidos por el Programa Curricular de Educación Primaria del Perú y el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NTCM).

Respecto al marco teórico y metodológico, al plantearse la pregunta de investigación ¿Cómo estudiantes de 4to grado de primaria reconocen cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas? Reconocemos y problematizamos la pregunta de investigación por medio del objetivo principal: *Analizar cómo estudiantes de 4to grado de primaria reconocen cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas al desarrollar una secuencia didáctica*. A lo largo de las actividades que conforman la secuencia de actividades didácticas, se logró identificar los diferentes tipos de reconfiguración que usaron los estudiantes (estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea) y reconocen los cuadriláteros generados en las modificaciones operatorias para la reconfiguración que se realizan en la secuencia didáctica.

Relación del objetivo general y específicos de la investigación, estos se fueron respondiendo durante la aplicación de la secuencia de actividades; a continuación, los objetivos específicos planteados:

Objetivos específicos:

Identificar los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras en material concreto.

Identificar los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras con el uso de tecnología digital.

Identificar los tipos reconfiguración y aprehensiones que realizan estudiantes de 4to grado de primaria al reconocer cuadriláteros cuando desarrollan la secuencia didáctica.

Los cuales se lograron desarrollar en las tres actividades usando un objetivo específico por actividad de forma secuencial.

Distinguir los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras en material concreto.

La secuencia didáctica propuesta constó de tres actividades, no obstante, previó a la Actividad 1 que se realizó un test para conocer los saberes previos de los estudiantes (Actividad 0). Esta actividad fue desarrollada en un Google Form para identificar si los estudiantes contaban con los requerimientos mínimos para distinguir cuadriláteros. Los datos obtenidos permitieron ajustar las actividades de la secuencia didáctica.

Los resultados mostraron que en su mayoría los estudiantes reconocían los elementos de los cuadriláteros logrando pasar del registro figural a la lengua natural, además llegaron a usar en la mayoría de los casos aprehensiones perceptivas la cual era necesaria en las siguientes actividades para llevar a cabo las reconfiguraciones.

Luego en la Actividad 1, los estudiantes debían recrear dos siluetas que correspondían a un gato y una casa usando el Tangram concreto usando de guía el ANEXO 1A. Por lo que

los estudiantes realizaron reconfiguraciones usando las siete piezas entregadas; la intención de la actividad fue responder al objetivo específico de nuestra investigación: Distinguir los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras en material concreto.

Se esperaba que sólo obtuvieran reconfiguraciones heterogéneas ya que las piezas entregadas no son todas iguales, sin embargo, al observar los resultados de Fátima y Lucio llegaron a realizar reconfiguraciones de tipo homogénea tratando de forzar la construcción (usando menos piezas) de las siluetas requeridas. Esto podría indicar que ambos pudieron reconocer que en el interior de las siluetas pueden haber sub-figuras (figuras geométricas) que conservan la misma forma entre ellas. Desde el punto de vista cognitivo de Duval han logrado realizar una aprehensión operativa de tipo mereológica la cual hace referencia a la comprensión de parte-todo.

En las dos preguntas de esta actividad llegaron a responder parcialmente sobre la existencia de otras figuras geométricas, en el interior de las siluetas del gato y casa. El resultado es bastante particular ya que han podido generar una reconfiguración homogénea con triángulos, sin embargo, cuentan con dificultad para reconocer cuadriláteros en el interior de las siluetas. Los resultados de las dos preguntas mostraron que los estudiantes pueden identificar algunos cuadrados y rectángulos dentro de las siluetas de la actividad, lo cual podría ser atribuido a que aún no llegan a interiorizar los conceptos necesarios para el aprendizaje de cuadriláteros.

Distinguir los cuadriláteros que reconocen estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras con el uso de tecnología digital.

En la actividad 2, se llevó a los estudiantes a la sala de informática para desarrollar el ANEXO 1B en el cual se les pidió hacer reconfiguraciones para llegar a responder tres indicadores, donde tuvieron que armar con las piezas de Tangram virtual los tres cuadriláteros de estudio (cuadrado, rectángulo y trapecio isósceles). Esta actividad responde al objetivo específico: Distinguir los cuadriláteros que reconocen los estudiantes al reconfigurar las piezas del Tangram virtual.

La actividad dio como resultado que los estudiantes si fueron capaces de distinguir entre los tres tipos de cuadriláteros, aunque no lograron completar toda la actividad ya que se pedía recrear los cuadriláteros con más piezas según la sub-indicación de modo que aumentaba la dificultad en realizar la reconfiguración. Para esta actividad Fátima y Lucio usaron reconfiguraciones tanto heterogénea como homogéneas para poder seguir la premisa de la cantidad de piezas que se necesitaba para armar los cuadriláteros requeridos.

Se podría decir que se tuvo más éxito en esta Actividad 2 (ANEXO 1B) debido a que se brindó los nombres de los cuadriláteros que se pedía recrear. Esto puede llevarnos a la

hipótesis de que los estudiantes han llegado a asociar el nombre del objeto matemático con su representación figural.

La Actividad 3, se entrevistó a Fátima y Lucio con el objetivo de confirmar los resultados obtenidos en las Actividades 1 y 2; con ello se pudo validar los tipos de reconfiguración que realizaron los estudiantes al reconocer cuadriláteros durante la secuencia de actividades.

Los resultados de la entrevista revelaron que durante la secuencia actividades, Fátima y Lucio no llegaron a utilizar la reconfiguración estrictamente homogénea, esto puede deberse a que al usar sub-figuras con la misma forma inicial se podría restringir la creación de otros cuadriláteros.

Asimismo, ellos consideraron que la reconfiguración homogénea fue la que permitió el armado más sencillo, además consideraron de mayor complejidad reconocer las figuras geométricas (sub-figuras) que componían las siluetas de la Actividad 1, es decir que presentan dificultades en las modificaciones mereológicas (parte-todo) que requieran reconfiguraciones heterogeneas, esto puede deberse a que aún no han logrado desarrollar la aprehensión perceptiva que les permita recrear mentalmente las posibles sub-figuras que componen a la imagen inicial.

En cuanto al desarrollo de las actividades con el Tangram concreto o virtual, los estudiantes señalaron que la actividad más sencilla fue cuando trabajaron con el Tangram virtual, debido a que presenta un mayor espacio ordenado para manipular las piezas que con el Tangram concreto, además que el Polypad presenta una imagen de referencia del Tangram con sus sub-figuras lo que podría haber permitido que los estudiantes observen un ejemplo de modificación mereológica que ellos pudieron usar en la formación de cuadriláteros.

Finalmente, la investigación realizada brinda la posibilidad de ser un punto de partida para investigaciones con otras figuras geométricas ya que en la práctica docente la reconfiguración de figuras geométricas suele ser complejo de comprender no sólo para estudiantes de primaria como en ésta investigación sino también para estudiantes que inician la secundaria donde requiere usar la fórmulas de área de diversas figuras geométricas las cuales pueden ser mucho más fáciles de aprender si tiene como recurso la reconfiguración como medio para deducir fórmulas de área.

Asimismo, esta investigación podría servir para futuros investigadores que deseen tener como referencia una secuencia de actividades didácticas donde se use tecnología digital para generar un entorno dinámico de aprendizaje y contrastando a ello, el uso de material didáctico concreto donde los estudiantes tienen la posibilidad de manipular el recurso

Referencias

- Bernabéu, M., Moreno, M. y Linares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2),49-70. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208>
- Bernabeu, M.; Moreno, M. y Linares, S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 251-270. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1>
- Castillo, M. (2018). *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes del segundo grado de educación secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12068>
- Castillo, M. y Montes, M. (2023). Aproximación al conocimiento especializado de maestros de ciencias que enseñan Matemática en Educación Primaria en torno a la noción de reconfiguración para determinar la medida de área de figuras planas. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, 19(67). <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1468>
- Castillo, M., y Salazar, J. (2021). Reconfiguração de polígonos para determinar a medida de sua área com uso do Software GeoGebra. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 10(2), 89-104. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i2p089-104>
- Creswell, J. (1998). *Qualitative Inquiry and Research Design. Choosing among Five Traditions*. Thousand Oaks. Sage. <https://psycnet.apa.org/record/1997-36445-000>
- Cisneros, A.; Guevara, A; Urdánigo, J. y Garcés, J. (2022). Técnicas e Instrumentos para la Recolección de Datos que apoyan a la Investigación Científica en tiempo de Pandemia. *Revista Dominio de las ciencias*, 8 (1). <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8383508.pdf>
- Chiphambo, S. y Feza, N. (2020). Exploring Geometry Teaching Model: Polygon Pieces and Dictionary Tools for the Model. *Eurasia journal of mathematics, science and technology education*, 16(9) doi: 10.29333/EJMSTE/8358
- Cuervo, D. (2021a). *El software GeoGebra como medio para la comprensión de los polígonos regulares* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. <https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/8515>

- Cuervo, D., Fonseca, C. y Seúlveda, O. (2021b) La comprensión de los polígonos por medio del geogebra en estudiantes de grado séptimo. *Bol.Redipe* 10(7), 372-84. <https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1374>
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, (17),121-138. <https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWR97117.htm>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Artes Gráficas Univalle.<https://biblioteca.ugc.edu.co/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=20643>
- Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle. <https://catalogo.idep.edu.co/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=3670>
- Duval, R. (2004b). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle. <https://sintesis.univalle.edu.co/saladelectura/semiosis.html>
- Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matemática de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. PROEM editora. <https://www.redalyc.org/pdf/894/89424874015.pdf>
- Duval, R. (2012). Registros de representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Revista Electrónica de Educación Matemática REVEMAT*, 7(2), 266-297. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>
- Duval, R. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas*. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*. (pp. 61-94). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Programa editorial Universidad del Valle. <https://programaeditorial.univalle.edu.co/gpd-semiosis-y-pensamiento-humano-9789587655278-63324cdb0f6b3.html>
- Escofet, A. (2020). Aprendizaje-servicio y tecnologías digitales: ¿una relación posible? *RIED-Revista Iberoamericana De Educación a Distancia*, 23(1), 169–182. <https://doi.org/10.5944/ried.23.1.24680>
- Euclides (1944). *Elementos de Geometría*. Editorial Grafos.
- Hernández, R. y Mendoza, C. (2018). *Recolección y análisis de los datos en la ruta cualitativa. En Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill. https://virtual.cuautitlan.unam.mx/rudics/?page_id=17
- Instituto de ingenieros Eléctricos y Electrónicos, (2021). Does sketchup make improve students' visual-spatial skills? *IEEE Access*, 1-1. doi: 10.1109/access.2022.3147476

- Londoño, R. (2006). *Geometría Euclidiana* (2ª ed.). UDEA.
- Lozano, M. (2020). *Estrategia Didáctica Para la Enseñanza del Concepto de Área y Perímetro de Polígonos Mediada por la Herramienta Constructor 2.0*. [Tesis de maestría, Universidad de Santander UDES]. <https://repositorio.udes.edu.co/entities/publication/d48f3f19-042f-450a-b068d862f31d5729/full>
- Marmolejo, G., Vega, M., y Galeano, J. (2020). Reconfigurando figuras bidimensionales. *Revista Espacios*, 41(46). 10.48082/espacios-a20v41n46p07
- Monroy, L., Mosquera, M., Agudelo, H. y Arboleda, D. (2022). Área y Perímetro: Una Experiencia y una reflexión sobre la Educación Matemática en Básica Primaria y la Mediación de la Tecnología. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (7). https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i7
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *National Council of Teachers of Mathematics Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>
- Organización para la cooperación y Desarrollo Económico (2019) *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*. Paris: PISA OECD. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
- Ministerio de Educación del Perú (2016). *Programa curricular de Educación primaria*. <https://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-nivel-primaria-ebr.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (2009). *Diseño curricular nacional de educación básica regular Proceso de articulación*. Minedu. <https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/3597>
- Ministerio de Educación del Perú (2021). *Cuaderno de trabajo empleado para el cuarto grado de Educación Primaria para el año 2020*. Minedu. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/7864>
- Salazar, J. y Almouloud, S. (2015). Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 17(5), 919 – 941. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325>
- Tolga, K. (2017). Understanding the hierarchical classification of hierarchical classification of quadrilaterals through the ordered relation according to diagonals properties. *International Journal Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1334969>

Usiskin, Z. y Griffin, J. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study in definition.*

Charlotte. Information Age. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118057248>

Villarreal, C. y González, J. (2007). *Geometría.* Sociedad Matemática Mexicana.

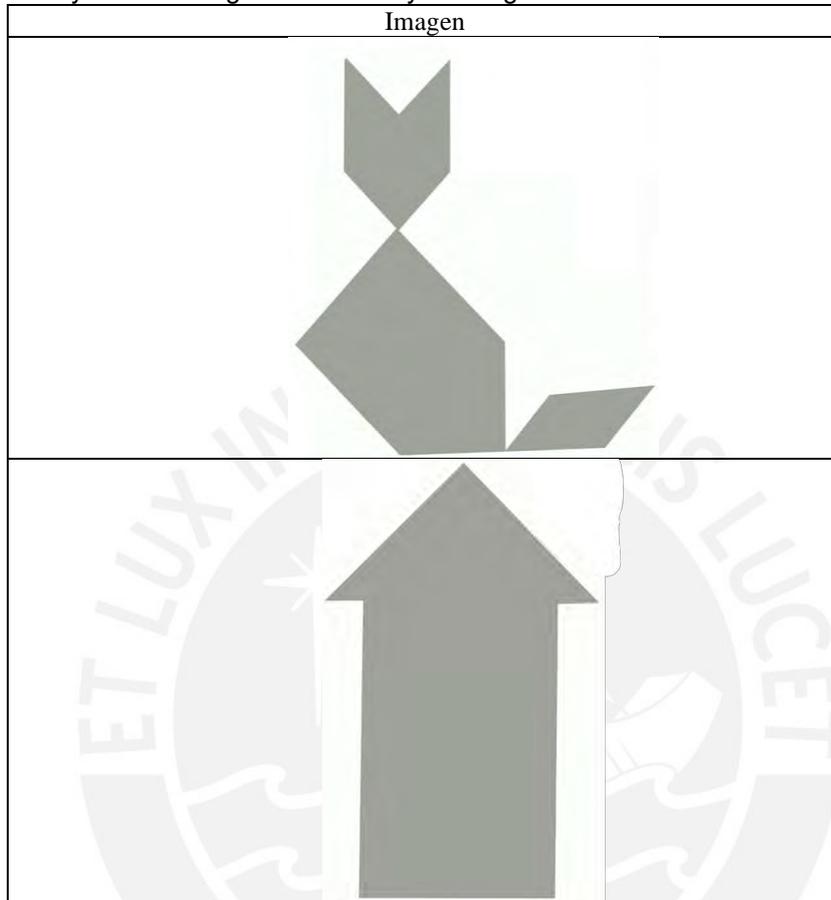
<http://eprints.uanl.mx/id/eprint/1822>



ANEXO 1A

JUGUEMOS CON EL TANGRAM

I) Con ayuda del Tangram reconstruye las siguientes siluetas



(Adaptado de Castillo 2018)

II) Responde las preguntas:

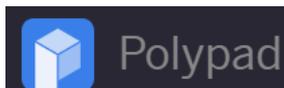
a) ¿Cuál de las imágenes te resultó más difícil de recrear?, ¿Por qué?

b) ¿Dentro de las figuras elaboradas encuentras rectángulos, cuadrados o trapecios?

¿Cuántos encuentras de cada uno?

ANEXO 1 B

Ingresa al link: <https://polypad.amplify.com/p>



Buscar la opción "Tangram" y darles clic a todas las piezas. El material presentado puede ser girado y alterar su tamaño según lo requieras.

1) CONSTRUYAMOS CUADRADOS

- a) Usando solo dos piezas elabora un cuadrado.
- b) Usando tres piezas elabora un cuadrado
- c) Usando cuatro piezas elabora un cuadrado
- d) Usando cinco piezas elabora un cuadrado

2) CONSTRUYAMOS RECTÁNGULOS

- a) Usando tres piezas elabora un rectángulo
- b) Usando cuatro piezas elabora un rectángulo
- c) Usando cinco piezas elabora un rectángulo

3) CONTRUYAMOS TRAPECIOS

- a) ¿De cuantas formas podremos construir trapeacios? Elaborar todas las posibles formas de trapecio que puedas hacer con máximo siete piezas.

Para finalizar: Una vez termines de construir las figuras expórtalas tus resultados

usando el botón  en formato PNG o JPEG.

