

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Dinámica simbólica para conjuntos de rotación

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Matemáticas
que presenta:

Alexander Manuel Lozano Cerna

Asesor:

Alfredo Bernardo Poirier Schmitz

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, Alfredo POIRIER Schmitz, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor del trabajo de tesis titulado

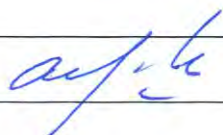
Dinámica simbólica para conjuntos de rotación

del autor Alexander LOZANO Cerna,

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 3%, con ninguna referencia individual que supere el 1%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 4/07/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 4 de julio del 2023

Apellidos y nombres del asesor: <u>POIRIER SCHMITZ, Alfredo Bernardo</u>	
DNI: 10803756	Firma 
ORCID: 0000-0003-2789-3630	



Dedicado a mis padres Olga Cerna LLanos
y Alfonso Lozano Cueva, y a mis hermanos
Juan y Richard.

Agradecimiento

Ante todo quiero dar gracias a Dios por la vida a mi familia, mi persona, la de mis compañeros y mis docentes.

A mis padres por el inmenso apoyo brindado a lo largo de estos años, por el cariño, los valores, por darme fuerzas en todo momento, cuando mas adverso se hacia el camino, en los momentos mas dificiles, gracias por cada palabra, abrazo y el infinito amor que me dan.

A mis hermanos Richard y Juan por los momentos que compartimos, se pasó rápido el tiempo; cierro mis ojos y aún veo a mi pequeño Juan como el niño que con su sonrisa alegra todo el hogar y Richard que con cada broma u ocurrencia nos saca una sonrisa. Me siento muy feliz por tenerlos conmigo.

A mi cuñada y mi sobrinito que se unieron a nuestra familia, mis más grandes deseos de felicidad paz y amor en su hogar.

A mis compañeros de maestría Lesly Guía y Miguel Huaylla con quienes compartí pocos pero muy gratos momentos.

Al Doctor Alfredo Poirier por las enseñanzas impartidas a lo largo de los semestres, por haber aceptado guiarme en este proceso de tesis como mi asesor, por todo el apoyo brindado, la paciencia y comprensión hacia mi persona, por cada sugerencia y corrección en este trabajo de tesis.

Finalmente doy gracias a Dios por ayudarme a superar cada obstáculo y momento duro en la vida.

Resumen

DINÁMICA SIMBÓLICA PARA CONJUNTOS DE ROTACIÓN

Alexander Manuel Lozano Cerna

Asesor: Alfredo Poirier Schmitz

Título obtenido: Magíster en Matemáticas

En el presente trabajo se estudian los conjuntos de rotación irracional dentro de la dinámica de multiplicación por d en el círculo unitario. Se presenta la dinámica simbólica necesaria para poder extraer la existencia de conjuntos de rotación irracional dentro este esquema de multiplicación por d . Se introduce el espacio de desplazamiento, donde se le asigna una secuencia simbólica a los puntos a fin de hacerla compatible con el desplazamiento. Luego se muestra que existen estos conjuntos de rotación irracional y se estudian sus principales características. Como las secuencia de desplazamiento en d símbolos pueden ser concretizadas dentro del círculo como multiplicación del argumento por d , esto en efecto permite materializar rotaciones.

Palabras clave: Rotación irracional, dinámica simbólica, conjuntos de rotación.

Abstract

In this work we study irrational rotation sets within the dynamics of multiplication by d in the unit circle. We develop the symbolic dynamics necessary to fit rotations in a multiplication by d scheme. We introduce the shift space where we assign symbol sequences compatible with both dynamical systems. Then we prove the existence of rotation domains and study their main features. Thus, as the shift of symbol sequences symbol also represents multiplication by d , we have in fact materialized rotation domains in a multiplication by d dynamical system context.

Key words and phrases. Irrational rotation, symbolic dynamics, rotation sets.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 37F50; Secondary 37B10.

Índice general

1	Espacios de desplazamiento	1
2	El desplazamiento como sistema dinámico	7
3	Del intervalo unitario al espacio de símbolos	9
4	Del espacio de símbolos de regreso al intervalo.	12
5	Conjuntos de rotación finito	17
6	Pesos	21
7	Un modo alternativo de estudiar conjuntos de rotación finitos	25
8	Respetando el orden	29
9	Conjuntos de rotación irracional	35
10	Despliegue irracional cúbico	38
11	Despliegue irracional en grado d	42
12	Desplazamiento de secuencias admisibles	47
	Bibliografía	49

Introducción

En la presente tesis nuestro punto de partida son los trabajos de Golberg y Milnor [Gol92] donde se estudia los conjuntos de rotación dentro de la dinámica de multiplicación por d en el círculo unitario.

Se presenta la dinámica simbólica necesaria para poder entender la existencia de conjuntos de rotación irracional dentro de un esquema de multiplicación por d . En nuestro desarrollo haremos un repaso de las ideas introducidas por Golberg en [GM93] con el fin de adaptarlas a nuestro contexto. El caso de rotación periódica en el círculo es conocido y lo que nos interesa es desarrollar las técnicas necesarias para poder entender el caso de rotación no periódico, es decir el llamado caso de rotación irracional.

En el capítulo 1 se desarrollan los preliminares que necesitamos para la demostración de los teoremas de los capítulos posteriores: básicamente, el espacio de secuencias simbólicas, lugar donde se puede estudiar ambas rotaciones como la multiplicación por un entero (ver también [Dev18]). Ello lo hacemos en busca de características comunes. Primero repasaremos la nomenclatura para el estudio de los espacios de desplazamiento. Después introducimos el desplazamiento de las secuencias como el sistema dinámico canónico en este espacio.

En el capítulo 2 se ve algunos conceptos útiles cuando se estudian sistemas dinámicos. Estamos interesados en conocer la historia futura de un punto en \sum_n . Es decir, el historial de sus desplazamientos, o si queremos ser más formales, el conjunto de todos las posibles iterados de σ .

En el capítulo 3 se desarrolla la dinámica simbólica que consiste en asociar puntos del intervalo $[0, 1)$ una secuencia de \sum_n que los distinga de manera natural. Para poder utilizarlo como modelo es indispensable que el sistema dinámico sea conjugado al desplazamiento simbólico. Por otro lado, las secuencias de desplazamientos en d símbolos pueden ser concretizadas dentro del círculo como multiplicación del argumento por d . Ello significa que el diagrama que se

establece se vuelve conmutativo.

En el capítulo 4 se ve una manera natural de retornar del espacio de símbolos al intervalo $[0, 1]$.

En el capítulo 5 explicaremos lo fundamental del artículo de Lisa Golberg [Gol92] respecto a los llamados conjuntos de rotación finitos.

En el capítulo 6 definiremos los pesos de los arcos complementarios de un conjunto de rotación junto con su correspondiente longitud. Esto permitirá describir adecuadamente los conjuntos de rotación “desde fuera”.

En el capítulo 7 se ve un modo alternativo de estudiar conjuntos de rotación finitos. Aquí se analiza un ejemplo de conjunto de rotación finito pero bajo una perspectiva diferente.

En el capítulo 8 estudiaremos brevemente la dicotomía avanzar-retroceder para una rotación estándar por $\lambda = \frac{p}{q}$, con p, q relativamente primos. El caso donde λ es nulo, que corresponde a $p=0, q=1$, es atípico, por lo que asumimos $0 < p < q$.

En el capítulo 9 se tiene ahora $\rho_\lambda(\cdot)$ como una rotación por un número irracional λ . Esta función ρ_λ avanza en el intervalo $A = [0, 1 - \lambda)$, mientras retrocede en $R = [1 - \lambda, 1)$, ello no cambia. Podemos entonces replicar las ideas de los capítulos anteriores y definir una secuencia, para posteriormente ver que la asignación simbólica respeta el orden.

En el capítulo 10 se estudia el despliegue irracional cúbico. Para ello, aparte del número de rotación propiamente dicho, se incorpora la secuencia de despliegue. El efecto de esa secuencia es separar el conjunto de rotación en dos bloques. Comparar esta parte de nuestro trabajo con el libro [Zak18].

En el capítulo 11 se estudia el despliegue irracional en grado d de un conjunto de rotación irracional, además se definen las secuencias por izquierda y derecha de un elemento para posteriormente definir las secuencias admisibles.

Finalmente, en el capítulo 12, estudiaremos el desplazamiento de las secuencias admisibles y la relación de orden que ellas establecen. Esto al final permitirá establecer la existencia de conjuntos de rotación.

Capítulo 1

Espacios de desplazamiento

Al conjunto de sucesiones infinitas

$$\Sigma = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) : s_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

lo llamaremos **espacio de secuencias en n símbolos**. De ser necesario escribiremos Σ_n en vez de Σ . A fin de aligerar la notación, se suele escribir $s = s_0s_1s_2\dots$ en vez del “correcto” $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$. Por motivos obvios, en lo sucesivo tomaremos $n > 1$.

En este espacio se define el **desplazamiento** (de ahí el nombre) de $s = s_0s_1s_2\dots$ por la fórmula

$$\sigma(s_0s_1s_2\dots) = s_1s_2\dots,$$

es decir, se elimina el primer valor s_0 y el resto se desplaza hacia la izquierda para ocupar el casillero que se deja vacío. A esta función σ se le llama también **shift**, por su nombre en inglés. Al par (Σ, σ) se le conoce como **espacio de desplazamiento en n símbolos** (o **espacio de shift en n símbolos**).

Ejemplo 1.1. Para $s = s_0s_1s_2s_3\dots$ se tiene

$$\sigma(s) = s_1s_2s_3\dots$$

$$\sigma^2(s) = \sigma(\sigma(s)) = \sigma(s_1s_2s_3\dots) = s_2s_3s_4\dots$$

De igual manera, al iterar n veces, se logra

$$\sigma^n(s) = s_ns_{n+1}\dots$$

Dados $s = s_0s_1s_2\dots$ y $t = t_0t_1t_2\dots$ en Σ definimos

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i},$$

donde

$$\rho(s_i, t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_i = s_i, \\ 1 & \text{si } t_i \neq s_i. \end{cases}$$

Lema 1.2. La función $d(\cdot, \cdot)$ define una métrica en Σ .

Demostración. Verifiquemos cada una de las condiciones.

Para $s, t \in \Sigma$ se tiene $\rho(s_i, t_i) \geq 0$, conque para cada $i = 0, 1, 2, \dots$ se cumple

$$\frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i} \geq 0.$$

Al sumarlos todos se logra

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i} \geq 0,$$

donde la suma es convergente al estar dominada por una serie geométrica de razón $1/n$.

Para $s, t \in \Sigma$ sujetos a $d(s, t) = 0$ se cumple

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i} = 0,$$

lo que implica $\rho(s_i, t_i) = 0$, o lo que es lo mismo $s_i = t_i$ para todo i . Como $s = t$ implica $s_i = t_i$ es claro el retorno.

La condición $d(s, t) = d(t, s)$ es inmediata del hecho de que se cumple $\rho(s_i, t_i) = \rho(t_i, s_i)$.

Para la desigualdad triangular tomamos $s, r, t \in \Sigma$. La desigualdad triangular de la distancia discreta

$$\rho(s_i, t_i) \leq \rho(s_i, r_i) + \rho(r_i, t_i)$$

implica

$$\frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i} \leq \frac{\rho(s_i, r_i)}{n^i} + \frac{\rho(r_i, t_i)}{n^i},$$

y de esto se deduce $d(s, t) \leq d(s, r) + d(r, t)$. □

Lema 1.3. Para $s, t \in \sum$ sujetos a

$$s_0 = t_0, \quad s_1 = t_1, \quad \dots, \quad s_k = t_k$$

se cumple

$$d(s, t) \leq \frac{1}{n^k}.$$

(Excepto para $n = 2$ la desigualdad es estricta.)

Demostración. Si para $s = s_0s_1s_2\dots$ y $t = t_0t_1t_2\dots$ en \sum se asume $s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, se tendrá

$$d(s, t) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{(n-1)n^k} \leq \frac{1}{n^k}.$$

□

Lema 1.4. Para $s, t \in \sum$ tal que $d(s, t) < \frac{1}{n^k}$, se cumple $s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Demostración. Si suponemos $s_j \neq t_j$ para algún $j \leq k$, tendremos

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho(s_i, t_i)}{n^i} \geq \frac{\rho(s_j, t_j)}{n^j} = \frac{1}{n^j} \geq \frac{1}{n^k},$$

lo que contradice el hecho de que se cumpla $d(s, t) < \frac{1}{n^k}$. □

Si pensamos en los símbolos $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ como un alfabeto, una “palabra” es una sucesión finita $w_N \dots w_M$ de estas letras. Esto es útil cuando pretendemos ordenar secuencias lexicográficamente en una “biblioteca”.

Aprovechamos la oportunidad para introducir el orden lexicográfico aunque recién lo utilizaremos luego. En el espacio de símbolos \sum_n , diremos que t es **lexicográficamente mayor** que s cuando la primera vez que difieran s y t , digamos en la i -ésima entrada, la correspondiente a t es mayor que la correspondiente a s . Ahí está nuestra biblioteca. Pasemos a catalogar los volúmenes.

Para $N \leq M$ dos enteros positivos, fijemos una palabra

$$W = W_N W_{N+1} \cdots W_M.$$

Al conjunto

$$C(W; N, M) = \{s \in \sum : s_N = W_N, s_{N+1} = W_{N+1}, \dots, s_M = W_M\}$$

se le llama un **cilindro** asociado con la palabra W . Cuando se tenga $N = 0$ se hablará de **cilindros iniciales**.

En concreto, el cilindro $C(W, N, M)$ congrega las sucesiones del espacio de desplazamiento cuyos casilleros desde la posición N a la M coinciden con los de la palabra W .

Si pensamos en el orden lexicográfico, la primera palabra del cilindro $C(W, 0, M)$ es $W_0 \dots W_M 00000000 \dots$ y la última resulta ser $W_0 \dots W_M (n-1)(n-1)(n-1) \dots$

Lema 1.5. *Dada una palabra $W_N \dots W_M$ existe una secuencia s para la cual se tiene*

$$s_N = W_N, s_{N+1} = W_{N+1}, \dots, s_M = W_M.$$

En efecto, todos los cilindros $C(W, N, M)$ son conjuntos infinitos. □

Un término genérico del cilindro $C(W, N, M)$ será referido cual w para facilitar su manipulación.

Lema 1.6. *Todo cilindro es abierto en el espacio métrico \sum_n .*

Demostración. Esto es realmente un corolario al lema 1.4. Tomemos $w \in C(W, N, M)$. Para s sujeto a

$$d(w, s) < \frac{1}{n^M}$$

se tendrá $s_j = w_j$ para todo $0 \leq j \leq M$. Al cumplirse $w_j = W_j$ para $N \leq j \leq M$ por transitividad logramos $s_j = W_j$ y la inclusión $s \in C(W, N, M)$. □

Lema 1.7. *Los cilindros forman un sistema fundamental de vecindades del espacio de símbolos. En efecto, todo abierto no vacío en el espacio de símbolos es una unión de cilindros.*

Demostración. Sea $V \neq \emptyset$ abierto del espacio métrico \sum . Para todo $w \in V$ existe una bola abierta $B(w, \epsilon)$ contenida en V . Por lo tanto V es unión de esas bolas abiertas (una para cada punto $w \in V$).

Si demostramos que entre w y $B(w, \epsilon)$ podemos intercalar algún cilindro $C(W, N, M)$, es claro que V se expresa como unión de esos cilindros (uno por cada punto de $w \in V$). Esto, sin embargo, es relativamente sencillo.

Sea M de modo que se tenga

$$\frac{1}{n^{M+2}} < \epsilon,$$

elección que garantiza indirectamente la desigualdad

$$\sum_{M < i} \frac{1}{n^i} < \epsilon.$$

Tomemos la palabra $W = W_0 \cdots W_M$ definida por

$$W_i = w_i$$

para $i = 0, \dots, M$. Al igual que en el lema anterior es claro que se cumple

$$w \in C(W, 0, M) \subset B(w, \epsilon).$$

□

Nuestra primera aplicación es la continuidad del desplazamiento.

Teorema 1.8. *El desplazamiento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es una aplicación continua.*

Demostración. En efecto, el desplazamiento es una función continua en todo punto pues la preimagen del cilindro $C(W, N, M)$ coincide con $C(W, N+1, M+1)$, también un cilindro. □

Nota 1.9. Observemos que cuando restringimos el desplazamiento a un cilindro tipo $C(W, 0, M)$, este prevea el orden lexicográfico. Ello se debe a que la primera discrepancia en estos casos nunca es en el primer símbolo.

Ahora nos tomamos un momento para establecer dos propiedades fundamentales del espacio de desplazamiento.

Lema 1.10. *El espacio de desplazamiento (Σ, d) es compacto.*

Demostración. Como Σ es espacio métrico, bastará con probar que es secuencialmente compacto. Sea $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera en Σ , tengamos presente que cada $s_k \in \Sigma$ es de la forma

$$s_k = s_0^k s_1^k s_2^k \cdots,$$

con $s_j^k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Puesto que los valores que puede tomar s_0^k son limitados, es posible encontrar un subconjunto infinito de ellos para los cuales la entrada s_0^k coincide. Sea entonces t_0 la letra (o una de las tantas que puede haber) tal que coincide con una cantidad

infinita de los s_0^k . Acá escogemos uno de los tantos índices $k = n_0$ para lo cual esto es cierto. Del mismo modo, adicionalmente a la condición $s_0^k = t_0$, deberán existir infinitos s_1^k que se repiten. Elegimos con t_1 uno de estos valores junto con un índice $n_1 > n_0$ a fin de tener $t_1 = s_1^{n_1}$ en paralelo con $t_0 = s_0^{n_0} = s_0^{n_1}$. Si continuamos con este proceso, habremos conseguido una secuencia que inductivamente satisface

$$t_\ell = s_\ell^{k_\ell}$$

junto con

$$t_m = s_m^{k_m} = s_m^{k_{m+1}} = \dots = s_m^{k_\ell}.$$

Esto, sin embargo, determina una subsucesión s^{n_j} claramente convergente a $t = t_0 t_1 \dots$. Queda por tanto probado que Σ es compacto. \square

En estos espacios existen hartos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados. Los más característicos son los cilindros.

Lema 1.11. *Fijemos un símbolo $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$. Entonces todo cilindro básico $C(\alpha, N, N)$ es abierto y cerrado.*

Demostración. Ya sabemos que es abierto. Y por la misma razón

$$C(\alpha, N, N) = \sum - \bigcup_{\beta \neq \alpha} C(\beta, N, N)$$

será cerrado. \square

Corolario 1.12. *Todo cilindro $C(W, N, M)$ es cerrado y abierto en Σ .*

Demostración. Una palabra $W_N \dots W_M$ permite reconfigurar el cilindro $C(W, N, M)$ cual

$$\bigcap_{i=N}^M C(W_i, i, i),$$

es decir, como intersección de un número finito de conjuntos cerrados y abiertos. \square

Lema 1.13. *El espacio de desplazamiento (Σ, d) es totalmente desconexo.*

Demostración. Para s, t dos elementos distintos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{k_0} \neq t_{k_0}$. En este caso

$$U = \{r : r_{k_0} = s_{k_0}\}, \quad V = \{r : r_{k_0} \neq s_{k_0}\},$$

son vecindades de s y t , respectivamente, claramente relacionadas vía $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = \Sigma$. De esta forma podemos concluir que cada componente de Σ tiene exactamente un punto. \square

Capítulo 2

El desplazamiento como sistema dinámico

Recordaremos algunos conceptos útiles cuando se estudian sistemas dinámicos.

Estamos interesados en conocer la historia futura de un punto en \sum_n . Es decir, el historial de sus desplazamientos, o si queremos ser más formales, el conjunto de todos las posibles iterados de σ .

La **n -ésima iterada** de σ se define como la n -ésima composición de σ consigo misma, esta la denotaremos por σ^{on} . Es decir, escribiremos

$$\sigma^{on} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ veces}}$$

para cada n positivo. Por convención pondremos $\sigma^{o0} = Id$, con Id la identidad.

Decimos que $A \subset \sum_n$ es **invariante** si satisface $\sigma(A) \subset A$. El ejemplo más importante —y el que lo inicia todo— es el concepto de órbita.

Ejemplo 2.1. La **órbita** de $p \in \sum_n$ bajo σ es el conjunto

$$\mathcal{O}_p = \{p, \sigma(p), \sigma^2(p), \dots\} = \{\sigma^{on}(p) : n \geq 0\}.$$

Este conjunto es invariante pues se tiene

$$\sigma(\mathcal{O}_p) = \{\sigma(p), \sigma^2(p), \dots\} = \{\sigma^{on}(p) : n \geq 1\} \subset \{\sigma^{on}(p) : n \geq 0\} = \mathcal{O}_p.$$

Obsérvese que de pasada se ha verificado la igualdad

$$\sigma(\mathcal{O}_p) = \mathcal{O}_{\sigma(p)}.$$

Ejemplo 2.2. Un punto $p \in \Sigma_n$ es **periódico** para σ si cumple $\sigma^{on}(p) = p$, para algún $n \geq 1$. Denotaremos por $Per(\sigma)$ al conjunto de los puntos periódicos.

Como de $\sigma^{on}(p) = p$ se pasa a

$$\sigma^{on}(\sigma(p)) = \sigma^{n+1}(p) = \sigma(\sigma^{on}(p)) = \sigma(p)$$

se concluye que $\sigma(p)$ es periódico (con el mismo periodo que p además). Concluimos que $Per(\sigma)$ es invariante.

Ejemplo 2.3. Diremos que p es un punto de periodo n si satisface $\sigma^{on}(p) = p$, Denotamos por $Per_n(\sigma)$ al conjunto de estos puntos periódicos de periodo n . Tal como fue trabajado en el ejemplo anterior, este conjunto es invariante.

Ejemplo 2.4. Un caso particular es el de los puntos fijos. Un punto p es un **punto fijo** para σ si satisface $\sigma(p) = p$. Este conjunto es invariante pues coincide con Per_1 .

Proposición 2.5. *El sistema dinámico $\sigma : \Sigma_n \mapsto \Sigma_n$ admite órbitas densas.*

Demostración. La mejor manera de dejar esto en claro es construyendo una tal órbita que visite cualquier cilindro inicial, por ejemplo

$$\bar{s} = 01 \cdots (n-1) \quad 0001 \cdots (n-1)(n-1) \quad 000001 \cdots (n-1)(n-1)(n-1) \cdots \\ \cdots 00000001 \cdots (n-1)(n-1)(n-1)(n-1) \cdots ,$$

donde hemos puesto un espacio entre bloques del mismo tamaño y dos espacios cuando hemos cambiado de tamaño de bloque, esto lo haremos por claridad y no porque realmente existan.

Esto garantiza que dada cualquier palabra inicial existe un iterado de esta secuencia de tal suerte que se va a encontrar la palabra inicial, esto es, se interseca con todos los elementos del sistema fundamental de vecindades. Por tanto se interseca con cualquier abierto. Esto prueba que tal órbita es densa. \square

Capítulo 3

Del intervalo unitario al espacio de símbolos

Dado $n > 1$, vamos a reinterpretar la estructura de un número real en el intervalo $[0, 1)$ como un sistema dinámico.

Cara a ello consideraremos un entero n estrictamente mayor que 1. Pensaremos en los intervalos $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ como etiquetados I_0, I_1, \dots, I_{n-1} . Para $x \in I_i$ escribimos $\zeta(x) = i$. A continuación consideramos $F : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por $F(x) = nx - [nx]$, es decir, multiplicación por n seguido de reducción módulo 1. Obsérvese que esta asignación no es continua. En efecto, debido a la falta de continuidad de la función menor entero, la F tiene discontinuidades precisamente en $1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$.

El siguiente lema aparentemente inocente es crucial para muchas pruebas.

Lema 3.1. *La función F restringida a cada intervalo I_i es una biyección con $[0, 1)$. En efecto, esta restricción es lineal y viene dada por*

$$F(x) = [nx] - i.$$

Demostración. Todo x sujeto a $\zeta(x) = i$ satisface

$$\frac{i}{n} \leq x < \frac{i+1}{n},$$

de modo que persistentemente se tiene $i = [nx]$. La definición entonces implica que se cumple

$$F(x) = nx - i.$$

La imagen conjunta por supuesto es $[0, 1)$. □

Corolario 3.2. Si $J \subset I_i$ es un intervalo de longitud ϵ , entonces $F(J)$ es un intervalo de longitud $n\epsilon$.

Recíprocamente si $J \subset [0, 1)$ es un intervalo de longitud ϵ , entonces cada conjunto

$$F_i^{-1}(J) = \{x \in I_i : F(x) \in J\}$$

es un intervalo de longitud ϵ/n . □

La secuencia simbólica asociada a $x \in [0, 1)$ es entonces por definición

$$s(x) = s_0(x)s_1(x)\cdots,$$

donde $s_i(x) = \zeta(F^{oi}(x))$.

Ejemplo 3.3. Obsérvese que se tiene $s_0(x) = i$ si y solo si x pertenece al intervalo $[i/n, (i+1)/n)$. Similarmente se tendrá

$$s_0(x) = i, \quad s_1(x) = j \quad \text{si y solo si} \quad i \in \left[\frac{i}{n} + \frac{j}{n^2}, \frac{i}{n} + \frac{j+1}{n^2} \right).$$

(Para $j = n - 1$ notemos que $i/n + (j+1)/n^2$ se convierte en $(i+1)/n$.)

Lema 3.4. Dada la aplicación desplazamiento $\sigma : \sum_n \rightarrow \sum_n$ y s, F definidas arriba, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [0, 1) & \xrightarrow{F} & [0, 1) \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \sum_n & \xrightarrow{\sigma} & \sum_n. \end{array}$$

En otras palabras, se cumple $s \circ F = \sigma \circ s$ en $[0, 1)$.

Demostración. Dado $x \in [0, 1)$, para $F(x) \in [0, 1)$ se tiene por definición

$$\begin{aligned} s(F(x)) &= s_0(F(x))s_1(F(x))s_2(F(x))\dots \\ &= \zeta(F(x))\zeta(F(F(x)))\zeta(F^{o2}(F(x)))\dots \\ &= s_1(x)s_2(x)s_3(x)\dots \\ &= \sigma(s_0(x)s_1(x)s_2(x)\dots) \\ &= \sigma(s(x)). \end{aligned}$$

□

Gracias a la expansividad local de F , el conjunto de puntos que puede asumir una palabra inicial no puede ser muy grande.

Lema 3.5. *Sea $W = W_0 \cdots W_N$ una palabra inicial. Entonces el conjunto de puntos*

$$C(W) = \{x \in [0, 1) : s_i(x) = W_i, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, N\}$$

es un semiintervalo de ancho $1/n^{N+1}$ (cerrado a la izquierda, abierto a la derecha). Para cada uno de estos semiintervalos la restrcción $F^{\circ N+1} : C(W) \mapsto [0, 1)$ es un isomorfismo lineal.

Demostración. Esto es una fácil inducción en uso del corolario 3.2. □

Ya estamos listos para confirmar la consistencia de esta asignación.

Lema 3.6. *La asignación $s(\cdot) : [0, 1) \rightarrow \sum_n$ dada por $s(x) = s_0(x)s_1(x) \cdots$ es inyectiva.*

Demostración. En efecto, el conjunto de puntos que comparte secuencia simbólica con x es un intervalo de ancho menor o igual a $1/n^{N+1}$ para todo N . Esto es posible solamente si tal intervalo se reduce a un punto. □

Esta asignación no es sobreyectiva. Esto será corroborado en el siguiente capítulo cuando estudiemos una inversa parcial de este operador. No obstante, esta asignación sí respeta el orden natural del dominio y rango.

Corolario 3.7. *La asignación de secuencias preserva el orden. En efecto, si $x < y$ en $[0, 1)$, entonces $s(x)$ es lexicográficamente menor que $s(y)$.*

Demostración. Tomemos $x < y$. Como s es inyectiva tenemos $s(x) \neq s(y)$ en \sum_n . Así tiene que haber un primer símbolo en el que las correspondientes secuencias son distintas, digamos $s_k(x), s_k(y)$. Con la palabra $W = s_0(x) \cdots s_{k-1}(x) = s_0(y) \cdots s_{k-1}(y)$ tenemos $x, y \in C(W)$. De este modo del lema 3,5 obtenemos $F^{\circ k}(x) < F^{\circ k}(y)$ lo mismo que implica

$$s_k(x) = \zeta(F^{\circ k}(x)) \leq \zeta(F^{\circ k}(y)) = s_k(y),$$

pues ζ es monótona. Esto implica $s_k(x) < s_k(y)$ pues no puede haber igualdad. □

Capítulo 4

Del espacio de símbolos de regreso al intervalo.

A continuación veremos una manera natural de retornar del espacio de símbolos al intervalo $[0, 1]$.

Lema 4.1. *La aplicación $T : \sum_n \rightarrow [0, 1]$ definida mediante $T(s_0s_1\dots) = \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{n^{i+1}}$ es continua.*

Demostración. Probaremos continuidad a través de sucesiones. Para ello tomemos una sucesión convergente $s_k \rightarrow a$ en \sum_n . Probaremos que $T(s_k)$ converge a $T(a)$ en $[0, 1]$.

Consideremos $\varepsilon_1 = \frac{\epsilon}{n-1}$, con $\epsilon > 0$, y $N \in \mathbb{N}$ de modo que se tenga $d(s_k, a) < \varepsilon_1$ cuando $k \geq N$. Ahora, debido a que con cualquier par de símbolos $a, b \in \{0, \dots, n\}$ se cumple $|a - b| \leq (n-1)\rho(a, b)$, obtenemos

$$|T(s_k) - T(a)| = \left| \sum_{i \geq 0} \frac{s_i^k - a_i}{n^{i+1}} \right| \leq \sum_{i \geq 0} \frac{|s_i^k - a_i|}{n^{i+1}} \leq (n-1) \sum_{i \geq 0} \frac{\rho(s_i^k, a_i)}{n^{i+1}} = (n-1)d(s_k, a) < \epsilon$$

para todo $k \geq N$. Así la sucesión $T(s_k)$ converge al punto $T(a)$, y la aplicación T resulta continua. \square

Ejemplo 4.2. *La aplicación T definida en el lema anterior no es inyectiva. En efecto, dado un elemento $s = s_0s_1s_2\dots s_N\overline{(n-1)}$, con $s_N \neq n-1$, su “sucesor” $t = s_0s_1s_2\dots (s_N+1)0\dots$ es tal que se cumple $T(s) = T(t)$.*

Lema 4.3. *La aplicación $T : \sum_n \rightarrow [0, 1]$ es monótona creciente en el sentido que $s \leq t$ implica $T(s) \leq T(t)$.*

Demostración. Cuando s es lexicográficamente menor que t , hay un primer símbolo que son distintos, con $s_k < t_k$ además. De este modo logramos

$$\begin{aligned}
T(s) &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s_i}{n^{k+1}} + \frac{s_k}{n^{k+1}} + \frac{s_{k+1}}{n^{k+2}} \cdots \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s_i}{n^{i+1}} + \frac{s_k}{n^{k+1}} + \sum_{i \geq k+2} \frac{n-1}{n^i} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s_i}{n^{i+1}} + \frac{s_k}{n^{k+1}} + \frac{1}{n^{k+1}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s_i}{n^{i+1}} + \frac{t_k}{n^{k+1}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s_i}{n^{i+1}} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{t_i}{n^{i+1}} = T(t).
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.4. Sean $s, t \in \sum_n$ sujetos a $T(s) = T(t)$. Entonces cualquier elemento lexicográficamente contenido entre s, t tiene la misma imagen que ellos.

Demostración. Obvio debido a la monotonicidad. □

A cada palabra $W = w_0 \cdots w_N$ le asignamos el valor

$$K(W) = \frac{w_0}{n} + \frac{w_1}{n^2} + \cdots + \frac{w_N}{n^{N+1}}.$$

Veamos su relación con los operadores s y T .

Lema 4.5. Para puntos iguales a $K(W)$ se cumple $s(K(W)) = w_0 w_1 \cdots w_N 000 \cdots$.

Demostración. Por definición de s tenemos

$$s(K(W)) = s_0(K(W)) s_1(K(W)) \cdots$$

Es evidente la inclusión $K(W) \in I_{w_0}$ pues se cumple

$$\frac{w_0}{n} \leq K(W) = \frac{w_0}{n} + \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{n^{i+1}} < \frac{w_0}{n} + (n-1) \sum_{i \geq 1} \frac{1}{n^{i+1}} = \frac{w_0}{n} + \frac{1}{n}.$$

Para $s_1(K(W)) = \zeta(F(K(W)))$ tendremos

$$F(K(W)) = n(K(W)) - w_0 = \frac{w_1}{n} + \frac{w_2}{n^2} + \cdots + \frac{w_N}{n^N} \in I_{w_1}$$

y esto implica $F(K(W)) \in I_{w_1}$, por lo que se tiene $s_1(K(W)) = w_1$.

Es claro que una inducción trivial nos lleva a $s(K(W)) = w_0 w_1 \cdots w_N 000 \cdots$.

□

Lema 4.6. Para la composición $T \circ s$, donde están T y s definidos anteriormente, se satisface $T \circ s(K(W)) = K(W)$.

Demostración. Esto es fácil pues por el lema anterior tenemos

$$T \circ s(K(W)) = T(w_0 w_1 \cdots w_N 000 \cdots) = \sum_{i=0}^N \frac{w_i}{n^{i+1}} = K(W).$$

□

Por una cuestión de consistencia es importante tener a mano los posible valores numéricos de los $K(W)$.

Lema 4.7. Para cada $0 \leq \alpha < n^{N+1}$ existe una palabra $W = W_0 \cdots W_n$ a la que se le asigna $K(W) = \frac{\alpha}{n^{N+1}}$.

Demostración. Emplearemos inducción sobre N . Para $N = 0$, ponemos $W = w_0 = \alpha$. Para $N = 1$, el algoritmo de la división nos entrega

$$\alpha = w_0 n + w_1,$$

con $w_i < n$; claramente también se tiene $w_0 < n$.

En general para $\alpha < n^{N+1}$ ponemos

$$\alpha = w_0 n^N + \alpha'$$

con $\alpha' < n^N$. Si la palabra $W(\alpha') = w_1 \cdots w_{N+1}$ está asociada a α' , entonces w_0 seguido de $W(\alpha')$, es decir $w_0 w_1 \cdots w_{N+1}$, es la palabra asociada con α . □

Si bien $T \circ s$ no es *a priori* continua —pues definitivamente s no lo es—, a la postre es la identidad. Lo siguiente aparece como un corolario conjunto de los dos lemas.

Corolario 4.8. Para todo $x \in [0, 1)$ la composición $T \circ s$ es la identidad.

Demostración. Puesto que tanto s como T son monótonas creciente, tenemos que para $x \geq y$ se cumple $T \circ s(x) \leq T \circ s(y)$. En consecuencia, del lema anterior podemos concluir que se satisface

$$x = \sup_{y=K(W) \leq x} y = \sup_{y=K(W) \leq x} T(s(y)) \leq T(s(x)) \leq \inf_{z=K(W) \geq x} T(s(z)) = \inf_{z=K(W) \geq x} z = x.$$

Se cumple entonces $T(s(x)) = x$ para $x \in [0, 1)$. □

Este corolario tiene dos consecuencias importantes, una ya conocida. En primer lugar concluimos que T es sobreyectiva, una primicia. Para $s(\cdot)$, no obstante, recuperamos algo que no es novedad: es inyectiva.

Como una observación podemos afirmar que palabras distintas arrojan números asociados distintos. Como consecuencia, palabras distintas determinan intervalos distintos. Su importancia radica en que corresponden al valor asignado al inicio del cilindro.

Lema 4.9. *Sea $W = w_0 \cdots w_N$ una palabra. Para el símbolo $s(W) = w_0 \cdots w_N 00000 \dots$ se tiene*

$$T(s(W)) = K(W).$$

Y para el símbolo $t(W) = w_0 \cdots w_N (n-1)(n-1) \dots$ se cumple

$$T(t(W)) = K(W) + 1/n^{k+1}.$$

Demostración. Esta es la definición de $K(W)$. □

Lema 4.10. *La imagen de un cilindro inicial $C(W) = C(W, 0, N)$ bajo T cumple*

$$T(C(W, 0, N)) = \left[K(W), K(W) + \frac{1}{n^{N+1}} \right].$$

Demostración. Un elemento $s \in C(W, 0, N)$ tiene la forma $s = w_0 \cdots w_n s_{n+1} s_{n+2} \cdots$. De este modo podemos acotar

$$K(W) \leq T(s) = K(W) + \sum_{i=N+1} \frac{s_i}{n^i} \leq K(W) + \sum_{i=N+1} \frac{n-1}{n^i} \leq K(W) + \frac{1}{n^{N+1}}.$$

Que sea precisamente el intervalo es consecuencia de la sobreyectividad de T y de la monotonicidad conjunta. □

Otra consecuencia interesante es la siguiente. Si s_0, s_1, s_2, \dots son las letras “iniciales” de s entonces podemos inductivamente formar palabras $W_0 = s_0, W_1 = s_0 s_1, \dots, W_k = s_0 \dots s_k, \dots$, cada vez más largas. Con ellas se tendrá

$$T(s) \in \bigcap [K(W_k), K(W_k) + 1/n^{k+1}].$$

Al hablar de una intersección de compactos encajados cuyo diametro tiende a 0, se tiene una identificación.

Un corolario de todo esto es que dos números son distintos si y solo si pertenecen a intervalos distintos asociados a palabras de la misma longitud. En efecto, consideremos $x, y \in [0, 1]$ con $x < y$. Sea N de modo que se tenga

$$\frac{1}{n^{N+1}} < y - x,$$

desigualdad posible por la propiedad arquimideana de los números reales. Como T es sobreyectiva, existen $s, t \in \sum_n$ tal que

$$x = T(s), \quad y = T(t).$$

Si consideremos la palabra con las $N + 2$ primeras letras de cada uno de ellos tendremos

$$x \in [K(W_s), K(W_s) + 1/n^{N+2}], \quad y \in [K(W_t), K(W_t) + 1/n^{N+2}].$$

Al satisfacerse

$$\frac{1}{n^{N+1}} < y - x \leq K(W_t) + \frac{1}{n^{N+2}} - K(W_s),$$

se cumple de pasada

$$0 \leq \frac{n-2}{n^{N+2}} \leq \frac{1}{n^{N+1}} - \frac{2}{n^{N+2}} < K(W_t) - K(W_s) - \frac{1}{n^{N+2}} \leq y - x.$$

De este modo se logra

$$K(W_s) + \frac{1}{n^{N+2}} < K(W_t),$$

y junto a ello también

$$[K(W_s), K(W_s) + 1/n^{N+2}] \cap [K(W_t), K(W_t) + 1/n^{N+2}] = \emptyset.$$

Lema 4.11. *La aplicación $s : [0, 1) \rightarrow \sum_n$ no es sobreyectiva. En efecto ningún punto de la forma $s_0 s_1 \dots s_N \overline{(n-1)}$ con s_N distinto de $n-1$, pertenece a la imagen.*

Demostración. Por el absurdo consideremos $x \in [0, 1)$ tal que $s(x) = s_0 s_1 \dots s_N \overline{(n-1)}$. Debido al corolario 4.7 tendremos

$$x = T(s(x)) = T(s_0 s_1 \dots s_N \overline{(n-1)}) = T(s_0 s_1 \dots (s_N + 1) 0 \dots) = K(W).$$

Esto es imposible dado que se tiene

$$s(K(w)) = s_0 s_1 \dots (s_N + 1) 0 \dots \neq s_0 s_1 \dots s_N (n-1)$$

□

Capítulo 5

Conjuntos de rotación finito

En este y el siguiente capítulo explicaremos lo fundamental del artículo de Lisa Golberg [Gol92] respecto a los llamados conjuntos de rotación finitos.

Un subconjunto $B = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ del círculo S^1 (parametrizado por el intervalo $[0, 1)$) es **indexado** si satisface $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < 1$. Fijemos un entero $d \geq 1$. En S^1 consideremos la dinámica

$$f_d : \theta \mapsto d\theta \quad \text{mód } 1.$$

Sean m y n números enteros no negativos sujetos a $0 \leq m \leq n$ (con $n \geq 1$). Un subconjunto indexado $B = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ de S^1 será un **conjunto rotacional de tipo $\frac{m}{n}$ para grado d** si se cumple $f_d(\theta_i) = \theta_{i+m \bmod n}$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

En general los números m y n no necesariamente son primos relativos. De ser este el caso, se tendrá $\frac{m}{n} = \frac{kp}{kq}$ para algún $k \geq 1$ con esta vez p y q sí primos relativos, y el **número de rotación del conjunto** B será $\rho = \frac{p}{q}$.

Ejemplo 5.1. A modo de ejemplo consideremos el conjunto indexado

$$B = \{\theta_0 = \frac{1}{7}, \theta_1 = \frac{2}{7}, \theta_2 = \frac{4}{7}\}.$$

Un breve cálculo demuestra que se cumple

$$0 < f_2(\theta_2) < f_2(\theta_0) < f_2(\theta_1) < 1.$$

con f_2 duplicación de ángulo. Esto entre otras cosas señala que el orden cíclico del conjunto es preservado, es decir, simula una rotación. Al cumplirse $f_2(\theta_i) = \theta_{i+1}$ tenemos un conjunto rotacional de tipo $\rho = \frac{1}{3}$.

Ejemplo 5.2. Los conjuntos de rotación tipo $\rho = \frac{0}{m}$ representan apenas un subconjunto de los puntos fijos bajo multiplicación por d . En consecuencia estos tipos de conjuntos son aquellas subcolecciones de

$$\left\{ \frac{0}{d-1}, \frac{1}{d-1}, \dots, \frac{d-2}{d-1} \right\}$$

con exactamente m miembros.

Ejemplo 5.3. Todas las fracciones con un denominador fijo relativamente primo con d (y distintas de 0 si así lo prefieren) forman un conjunto invariante bajo multiplicación por d , y en efecto, una biyección. No obstante, bajo la dinámica de f_d esto no asemeja una rotación.

Para aclarar esto, consideremos $B = \{\theta_0 = \frac{1}{5}, \theta_1 = \frac{2}{5}, \theta_2 = \frac{3}{5}, \theta_3 = \frac{4}{5}\}$, subconjunto de S^1 invariante bajo duplicación. En este caso se tiene

$$f_2(\theta_0) = \theta_1, \quad f_2(\theta_1) = \theta_3, \quad f_2(\theta_2) = \theta_0, \quad f_2(\theta_3) = \theta_2,$$

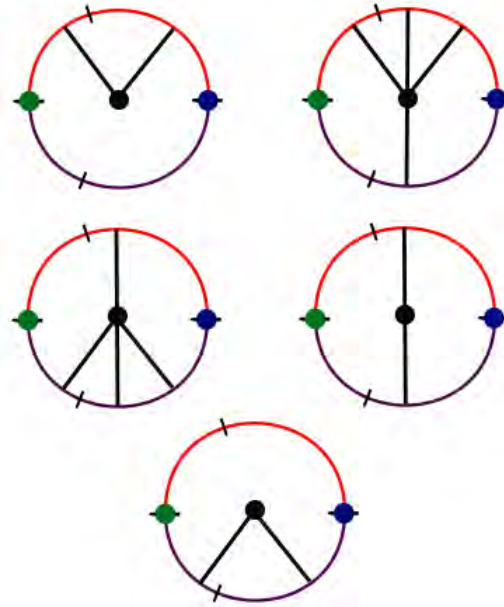
y el orden natural para las imágenes queda en

$$0 \leq f_2(\theta_2) < f_2(\theta_0) < f_2(\theta_3) < f_2(\theta_1) < 1.$$

Esto muestra que el orden cíclico no es respetado y no puede ser pensado como una rotación bajo ninguna óptica.

Sea $B = \{\theta_0, \dots, \theta_{n-1}\}$ un subconjunto finito de S^1 (indexado de preferencia). La **secuencia de despliegue de grado d de B** es una secuencia no decreciente de enteros no negativos (s_1, \dots, s_{d-1}) donde cada s_i cuenta la cantidad de tetras hallados en el intervalo $[0, \frac{i}{d-1})$. (Obsérvese que los puntos fijos de f_d son precisamente los ángulos $\frac{i}{d-1}$ con $1 \leq i \leq d-1$.)

Ejemplo 5.4. Para apreciar la relación entre conjuntos de rotación y este nuevo concepto veamos algunos gráficos en el contexto $d = 3$.



Acá las circunferencias admiten dos tipos de cortes: uno que lo parte en tres — estas aparecen como muescas —, que es la natural para la dinámica cúbica, y otra que lo parte en dos: los puntos gordos en 0 y $1/2$, cortes necesarios para definir la secuencia de despliegue. Ahora podemos leer cómodamente la secuencia de despliegue cúbico como $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(1, 4)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$, respectivamente.

Ejemplo 5.5. Los conjuntos de rotación tipo $\rho = \frac{0}{m}$ como en el ejemplo 5.2 quedan totalmente determinados por su secuencia de despliegue pues indica precisamente cuales puntos fijos hay que tomar en cuenta y cuales no.

Nota 5.6. Pese a ser triviales, tengamos en cuenta los siguientes detalles.

1. La última entrada s_{d-1} es justo la cardinalidad de B . En el caso de un conjunto de rotación, este valor siempre es el producto kq con $1 \leq k \leq d-1$.
2. Este invariante no contiene información para $d = 2$ (es solo el número kq).
3. La secuencia de despliegue de grado d de un conjunto de rotación nos indica la ubicación relativa respecto a los puntos fijos de f_d , no con respecto a las f_d -preimágenes de 0. Por lo tanto, no determina, a priori, las expansiones en base d de los constituyentes.

Dado un conjunto indexado, respecto a f_d , multiplicación por d , diremos que un punto θ está **avanzando** si $f_d(\theta) \geq \theta$ y está **retrocediendo** si $f_d(\theta) < \theta$.

Lema 5.7. *Un conjunto de rotación de grado d está completamente determinado por su número de rotación $\rho = \frac{p}{q}$ y su secuencia de despliegue $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{d-1} = kq$.*

Demostración. La prueba depende de la interacción entre los puntos fijos de f_d y las preimágenes de 0. Como el caso “estático” $\rho = 0$ ya fue analizado en su totalidad, tomamos $m > 0$.

Para $j = 1, \dots, d-1$, pongamos $U_j = (\frac{j-1}{d-1}, \frac{j}{d-1})$. Cada U_j contiene a $\frac{j}{d}$, preimagen de 0, punto que divide el intervalo en un par de subarcos

$$U_{j,\text{ava}} = \left(\frac{j-1}{d-1}, \frac{j}{d} \right),$$

$$U_{j,\text{ret}} = \left(\frac{j}{d}, \frac{j}{d-1} \right).$$

Estos arcos reflejan el hecho de que se cumple

$$\frac{j-1}{d-1} < \theta < f_d(\theta) < 1$$

en $U_{j,\text{ava}}$ y

$$0 < f_d(\theta) < \theta < \frac{j}{d-1}$$

en $U_{j,\text{ret}}$.

Cuando $B = \{\theta_0, \dots, \theta_{kq-1}\}$ es un conjunto de rotación de tipo $\frac{kp}{kq}$ para grado d con secuencia de despliegue $(s_1, s_2, \dots, s_{d-1} = kq)$, los ángulos $\theta_0, \dots, \theta_{kq-kp-1}$ avanzan, mientras $\theta_{kq-kp}, \dots, \theta_{kq-1}$ retroceden. Dicho en otras palabras, para $0 \leq i \leq kq - kp - 1$, se tiene $\theta_i \in U_{j,\text{ava}} = (\frac{j-1}{d-1}, \frac{j}{d}) \subset (\frac{j-1}{d}, \frac{j}{d})$, y para $q-p \leq i \leq q-1$, se cumple $\theta_i \in U_{j,\text{ret}} = (\frac{j}{d}, \frac{j}{d-1}) \subset (\frac{j}{d}, \frac{j+1}{d})$.

Acabamos de determinar la ubicación relativa de los θ_i respecto a las f_d -preimágenes de 0. Esto junto con la dinámica determina la expansión en base d . \square

Capítulo 6

Pesos

En este capítulo definiremos los pesos de los arcos complementarios de un conjunto de rotación junto con su correspondiente longitud. Esto permitirá describir adecuadamente los conjuntos de rotación “desde fuera”.

Sea $B = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{kq-1}\} \subset S^1$ un conjunto de rotación finito bajo f_d . El complemento de B en S^1 consta de kq arcos $A_0, A_1, \dots, A_{kq-1}$, etiquetados de modo que A_i queda limitado por θ_i y $\theta_{i+1 \pmod{kq}}$ (contrarreloj).

Definimos el peso del arco A_i como el número de puntos fijos de la aplicación f_d que están contenidos dentro, valor que denotaremos por $\omega(A_i)$. (En caso se tenga $p/q = 0$, cada arco tiene como límite un punto fijo de f_d , de modo excepcional cada uno de ellos de peso $1/2$.)

La longitud de estos arcos A_i , la cual denotaremos por $l(A_i)$, es igual a la diferencia $\theta_{i+1} - \theta_i$ cuando $i < kq - 1$ e igual a $1 + \theta_0 - \theta_{kq-1}$ cuando $i = kq - 1$.

Ejemplo 6.1. Entre punto fijo y punto fijo de f_d media una longitud de $1/(d-1)$. Esto permite concluir que en el caso $\rho = p/q = 0$ la longitud de A_i coincide con $\omega(A_i)/(d-1)$. Para referencia futura notemos que se cumple

$$d \cdot l(A_i) = d \cdot \omega(A_i)/(d-1) = \omega(A_i) + \omega(A_i)/(d-1) = l(A_i) + \omega(A_i).$$

Lo desarrollado en el ejemplo anterior prueba el contenido del siguiente lema para el caso de número de rotación $\rho = p/q = 0$.

Lema 6.2. Sea $B = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{kq-1}\}$ un conjunto de rotación de tipo $\frac{kp}{kq}$ para grado d . Para los arcos complementarios $A_0, A_1, \dots, A_{kq-1}$ se cumple

$$d \cdot l(A_i) = l(A_{i+kp \pmod{kq}}) + \omega(A_i).$$

Adicionalmente, los arcos A_i y $A_{i+kp \pmod{kq}}$ serán homeomorfos bajo f_d si y solo si el peso $\omega(A_i)$ es cero.

Demostración. Puesto que los extremos del arco A_i son llevados en los extremos de $A_{i+kp \pmod{kq}}$ es claro que se debe cumplir

$$d \cdot l(A_i) = l(A_{i+kp \pmod{kq}}) + n_i,$$

con cierto n_i entero no negativo. Es más, acá tendremos que la restricción de f_d a A_i será homeomorfismo si y solo si $n_i = 0$. Por lo desarrollado en el ejemplo, podemos dedicarnos en exclusiva al caso $\rho = p/q > 0$. El meollo del asunto está en determinar si estos n_i valen precisamente $\omega_i = \omega(A_i)$. Nosotros procederemos de manera indirecta: mostraremos que se cumple $n_i \geq \omega_i$. Veremos luego que esto será suficiente.

Si $\omega_i = 0$, entonces la desigualdad se reduce a $n_i \geq 0$, la misma que es evidente.

Cuando $\omega_i > 0$, ordenamos los puntos fijos en A_i de modo que contra el reloj el primero sea x_β y el último x_α (donde no se descarta que estos sean iguales). De este modo podemos ubicar a $\theta_\beta = \theta_i$ a una distancia (negativa) β de x_β y a $\theta_\alpha = \theta_{i+1}$ a una distancia (positiva) α de x_α . Por tanto, el segmento A_i queda seccionado en tres:

$$(x_\beta - \beta, x_\beta) \cup [x_\beta, x_\alpha] \cup (x_\alpha, x_\alpha + \alpha).$$

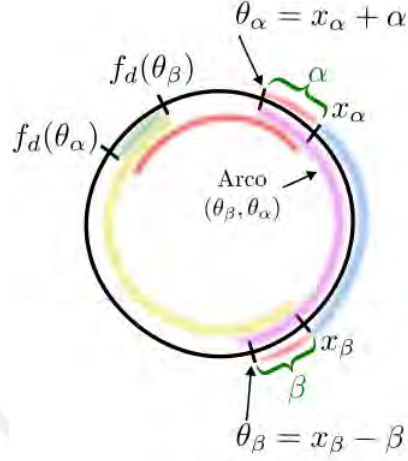
Puesto que entre $\theta_i = \theta_\beta$ y x_β no hay puntos fijos adicionales (igual que entre x_α y $\theta_{i+1} = \theta_\alpha$) se tiene $0 < \beta < 1/(d-1)$ (respectivamente $0 < \alpha < 1/(d-1)$). Como nota adicional notamos que dado que p/q , el número de rotación, es no nulo, el arco $A_{i+kp \pmod{kq}}$, acotado por $\theta_{i+kp \pmod{kq}}$ y $\theta_{i+1+kp \pmod{kq}}$, es disjunto de A_i . Por lo tanto, el orden cíclico

$$x_\alpha < \theta_\alpha \leq f_d(\theta_\beta) < f_d(\theta_\alpha) \leq \theta_\beta < x_\beta.$$

resulta evidente (ver la figura abajo). De este modo podemos calcular

$$\begin{aligned} d \cdot l(A_i) &= d \cdot l(\theta_\beta, x_\beta) + d \cdot l(x_\beta, x_\alpha) + d \cdot l(x_\alpha, \theta_\alpha) \\ &= l(f_d(\theta_\beta), x_\beta) + (\omega(A_i) - 1) + l(x_\beta, x_\alpha) + l(x_\alpha, f_d(\theta_\alpha)) \\ &= l(f_d(\theta_\beta), x_\beta) + l(x_\beta, x_\alpha) + l(x_\alpha, f_d(\theta_\alpha)) + \omega(A_i) - 1 \\ &\geq 1 + l(f_d(\theta_\beta), f_d(\theta_\alpha)) + \omega(A_i) - 1 \\ &= l(A_{i+kp \pmod{kq}}) + \omega(A_i). \end{aligned}$$

Gracias a esto se comprueba la relación $n_i \geq \omega(A_i)$, esperada. Estas ideas quedan materializadas en el siguiente gráfico.



Ahora el remate. Como la suma $l(A_0) + \dots + l(A_{kq-1})$ vale 1, podemos sumar las relaciones

$$d \cdot l(A_i) = l(A_{i+kp \pmod{kq}}) + n_i \geq l(A_{i+kp \pmod{kq}}) + \omega_i$$

y obtener

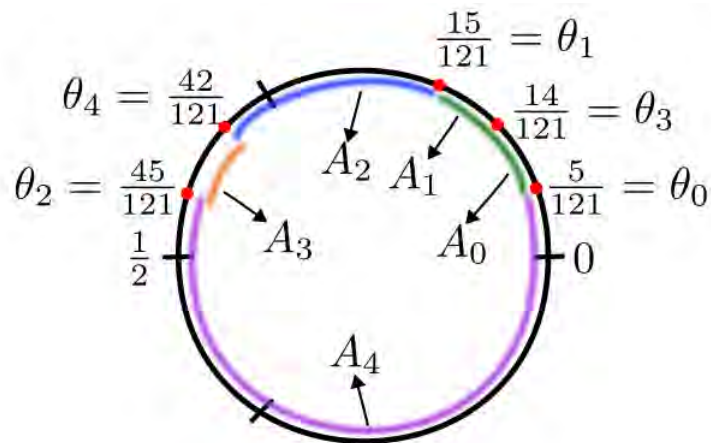
$$d = 1 + n_1 + \dots + n_{kq-1} \geq 1 + \omega_1 + \dots + \omega_{kq-1} = 1 + d - 1$$

pues hay en total $d - 1$ puntos fijos. Esto, por supuesto, implica igualdad a todo lo largo y concluimos que se cumple persistentemente $n_i = \omega(A_i)$. \square

Ejemplo 6.3. Sea el conjunto de rotación cúbico

$$B = \left\{ \frac{5}{121}, \frac{15}{121}, \frac{45}{121}, \frac{14}{121}, \frac{42}{121} \right\}$$

con número de rotación $\rho = \frac{2}{5}$. El complemento de este conjunto está dado por los arcos A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 , acotados por θ_i y $\theta_{i+1 \pmod{4}}$, con $0 \leq i \leq 4$.



Los pesos correspondientes vienen dados por $\omega(A_0) = 0$, $\omega(A_1) = 0$, $\omega(A_2) = 0$, $\omega(A_3) = 0$, $\omega(A_4) = 2$. Únicamente cuando se restringe al último la multiplicación por 3 deja de ser homeomorfismo. En este caso el peso indica que cubre al menos 2 veces cada punto de la circunferencia y a aquellos puntos en A_1 , tres veces.

Capítulo 7

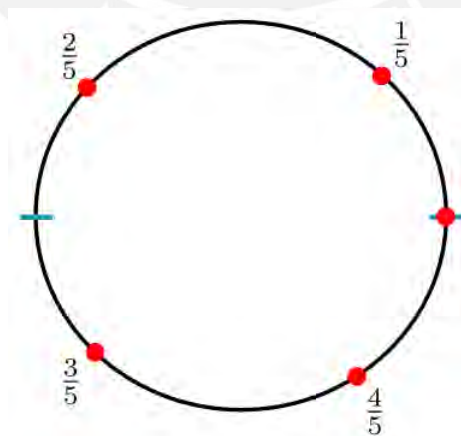
Un modo alternativo de estudiar conjuntos de rotación finitos

En este capítulo analizamos un ejemplo de conjunto de rotación finito pero bajo una perspectiva diferente.

Ejemplo 7.1. Como de costumbre trabajemos en el intervalo semicerrado $[0, 1)$. Ahí estudiamos la rotación estándar por $\lambda = \frac{2}{5}$ arrancando desde $\alpha_0 = 0$, la misma que está dada por

$$0 \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow 0.$$

La ubicación relativa habla por sí sola en el gráfico.



Acá los elementos que avanzan son $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{2}{5}$ y $\alpha_3 = \frac{1}{5}$, mientras $\alpha_2 = \frac{4}{5}$

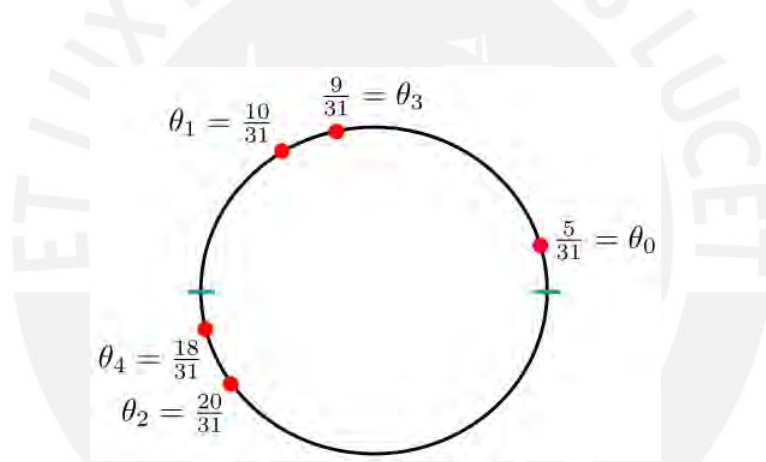
y $\alpha_4 = \frac{3}{5}$ retroceden. De este modo desde el punto de vista de 0, su rotación queda tipificada por el bloque periódico *AARAR*.

Ahora vinculemos esta secuencia con un conjunto rotacional dentro de una dinámica por duplicación. Como por duplicación en $[0, 1/2)$ se avanza y en $[1/2, 1)$ se retrocede, de acuerdo con lo insinuado arriba α_0 deberá estar asociado en base 2 con el bloque periódico 00101, es decir, con la fracción

$$\frac{5}{31} = \left[\frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{1}{32} \right] \cdot \frac{1}{1 - 1/32}.$$

Y en efecto, la órbita de $\theta_0 = \frac{5}{31}$ viene dada por

$$\frac{5}{31} \mapsto \frac{10}{31} \mapsto \frac{20}{31} \mapsto \frac{9}{31} \mapsto \frac{18}{31} \mapsto \frac{5}{31}.$$



De esta forma hemos construido cinco elementos que se mueven, cuadráticamente, como una rotación por $2/5$. (Los elementos que avanzan son $\theta_0, \theta_1, \theta_3$, mientras los que retroceden son θ_2, θ_4 .)

Ejemplo 7.2. No obstante, trabajar con $[0, 1)$ como modelo del círculo puede resultar para algunos sesgado. Si tomamos en su reemplazo $I = (0, 1]$ la dinámica del mismo punto toma cuerpo en

$$1 \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow 1.$$

La ubicación relativa es la misma que en el gráfico anterior, pero acá los puntos que avanzan son $\beta_1 = \frac{2}{5}, \beta_3 = \frac{1}{5}, \beta_4 = \frac{3}{5}$ mientras $\beta_0 = 1$ y $\beta_2 = \frac{4}{5}$ retroceden. En este caso el bloque periódico asociado cambia a *RARAA*.

Ahora vinculemos esta secuencia con un conjunto rotacional dentro de la dinámica por duplicación. Como en $(0, 1/2]$ se avanza y en $(1/2, 1]$ se retrocede, el valor para θ_0 deberá estar asociado en base 2 con el bloque periódico 10100, la fracción

$$\frac{20}{31} = \left[\frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{32} \right] \cdot \frac{1}{1 - 1/32}.$$

Y en efecto, la órbita de $\theta_0 = \frac{20}{31}$, viene dada por

$$\frac{20}{31} \mapsto \frac{9}{31} \mapsto \frac{18}{31} \mapsto \frac{5}{31} \mapsto \frac{10}{31} \mapsto \frac{20}{31}.$$

La posición relativa de estos ángulos está dada en el mismo gráfico de arriba.

De este modo hemos construido cinco elementos que se mueven, por duplicación, al compás de una rotación de tipo $\rho = \frac{2}{5}$. (Los elementos que avanzan son $\beta_1, \beta_3, \beta_4$, mientras los que retroceden son β_0, β_2 .)

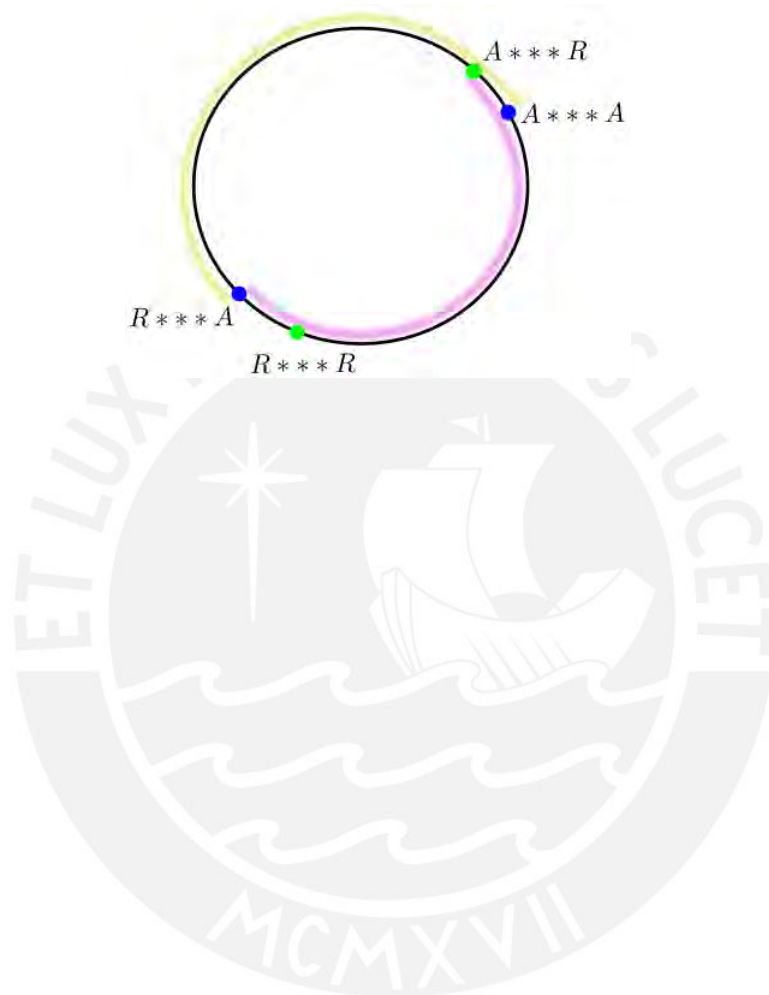
Como nota comparativa entre los dos ejemplos podemos resaltar que las secuencias \overline{AARAR} (con ángulo $5/31$) y \overline{RARAA} (ángulo $20/31$) generan la misma órbita. Obsérvese además que el arco $(20/31, 5/31)$ contiene un punto fijo, por tanto resulta de peso 1.

Las rotaciones (las de veras) que empiezan en 0 arrancan en A , avanzando (pues si están moviéndose cualquier valor está más allá de 0), y culminan en R (para regresar a 0 se debe retroceder). Por el contrario, si la rotación empieza en 1, al primer intento se retrocede y en el último se avanza. Salvo por estos dos detalles, para los integrantes intermedios de la órbita no hay ambigüedad posible.

De este modo ambas secuencias $A***R$ y $R***A$ en términos de fracciones materializan la rotación en estudio. El primero corresponde (lexicográficamente) a un número menor que el segundo. Cuánto menor es relativamente fácil de predecir: al ser los términos centrales los mismos, la mayor diferencia se centra en el símbolo inicial, y la diferencia entre R y A es de media vuelta; es decir, están “casi” en oposición.

Si queremos determinar con mayor precisión la posición relativa de estos dos valores, ubicamos primero en la circunferencias $A***A$. Exactamente media vuelta después vemos a $R***A$, uno de los involucrados. En el gráfico de abajo ambos vienen marcamos en azul. Pero $A***R$ —en primero en discordia— es ligeramente mayor que $A***A$; mientras su antípoda $R***R$ resulta ligeramente mayor que $R***A$.

De este modo $A***R$ y $R***A$ están separados por un ángulo menor a 180° mirado contrarreloj (en amarillo en la figura), e inevitablemente el peso de la región en morado deberá ser 1, es decir contendrá a 0, el punto fijo bajo duplicación.



Capítulo 8

Respetando el orden

Estudiemos brevemente la dicotomía avanzar-retroceder para una rotación estándar por $\lambda = \frac{p}{q}$, con p, q relativamente primos. El caso $\lambda = 0$, que corresponde a $p = 0, q = 1$, es atípico, por lo que asumimos $0 < p < q$.

Sea entonces $\rho_\lambda(\cdot)$ la rotación por λ . Esta función ρ_λ avanza en $A = [0, 1 - \lambda)$, mientras retrocede en $R = [1 - \lambda, 1)$. De este modo, si replicamos ideas de los capítulos anteriores podemos definir una secuencia simbólica

$$s(x) = s_0(x) \cdots s_n(x) \cdots,$$

donde

$$s_n(x) = \begin{cases} A & \text{si } \rho_\lambda^{\circ n}(x) \in A, \\ R & \text{si } \rho_\lambda^{\circ n}(x) \in R. \end{cases}$$

Es claro que se cumple en este caso $s(\rho_\lambda(x)) = \sigma(s(x))$, con σ el desplazamiento. No obstante, esta asignación no discrimina puntos y, peor, no asume todas las combinaciones formales disponibles.

Si tomamos $x, y \in I_\ell = \left[\frac{\ell}{q}, \frac{\ell+1}{q}\right)$, es claro que para todo n se cumple $\rho_\lambda^{\circ n}(x), \rho_\lambda^{\circ n}(y) \in I_{k_n}$ para el mismo k_n . Se observa de esto que x e y tienen asignada la misma secuencia. De este modo concluimos que a la larga habrá a lo mucho tantas secuencias simbólicas como intervalos existan, q en total.

Al símbolo en común del intervalo I_ℓ lo denotaremos $s(I_\ell)$. Como I_ℓ bajo $\rho_\lambda(\cdot)$ tiene periodo q , por definición lo mismo ocurre con estas secuencias simbólicas.

Lema 8.1. *La asignación simbólica respeta el orden: para $0 \leq x \leq y \leq 1$ se cumple lexicográficamente*

$$s(0) \leq s(x) \leq s(y) \leq s(1).$$

(Acá $s(1)$ debe interpretarse como $s(I_{q-1})$, donde $I_{q-1} = \left[\frac{q-1}{q}, 1 \right)$.

Demostración. Para que lexicográficamente se satisfaga $S > T$, ha de cumplirse $s_i = t_i$ para $i = 0, \dots, n-1$ pero $s_n > t_n$, para cierto n , donde por convención aceptamos $A < R$. Puesto que tenemos

$$s(\rho_\lambda(I_k)) = \sigma(s(I_k)),$$

podemos proceder por inducción.

Para la base inductiva fácilmente notamos que se cumple

$$s_0(I_0) = \dots = s_0(I_{q-p-1}) = A < R = s_0(I_{q-p}) = \dots = s_0(I_{q-1}).$$

Ahora supongamos que $x \leq y$ implique $s_0(x) \cdots s_n(x) \leq s_0(y) \cdots s_n(y)$, es decir, se tenga $s_0(x) \cdots s_n(x) < s_0(y) \cdots s_n(y)$ o $s_0(x) = s_0(y), \dots, s_n(x) = s_n(y)$ para $i = 0, \dots, n$. Puesto que el primer caso ya implica $s(x) < s(y)$, nos limitamos a mostrar que el segundo caso conduce a $s_{n+1}(x) \leq s_{n+1}(y)$. Y en efecto, al tenerse $s_0(x) = s_0(y)$, se reducen las posibilidades: o bien se satisface $x, y \in A$, o, en su defecto, $x, y \in R$. Como de ambos casos se infiere $\rho_\lambda(x) \leq \rho_\lambda(y)$, la hipótesis inductiva lleva a $s_0(\rho_\lambda(x)) \cdots s_n(\rho_\lambda(x)) \leq s_0(\rho_\lambda(y)) \cdots s_n(\rho_\lambda(y))$ o, lo que es lo mismo debido a la hipótesis de trabajo, a

$$s_{n+1}(x) = s_n(\rho_\lambda(x)) \leq s_n(\rho_\lambda(y)) = s_{n+1}(y).$$

Esto por supuesto implica $s_0(x) \cdots s_{n+1}(x) \leq s_0(y) \cdots s_{n+1}(y)$. \square

Como último detalle falta ver que las secuencias $s(I_k)$ son distintas entre sí. Puesto que sabemos que el orden es respetado, es suficiente mostrar que las secuencias simbólicas $s(I_k)$ y $s(I_{k+1})$, de intervalos consecutivos, son distintas. Para ello basta constatar que para algún n , sin importar cual, se tiene $s_n(I_k) \neq s_n(I_{k+1})$. Escogemos entonces n de modo que se tenga

$$1 \equiv \frac{k}{q} + n \cdot \frac{p}{q} = \rho_\lambda^{on} \left(\frac{k}{q} \right).$$

Es inmediato ver entonces debido a que la rotación es continua que se tiene

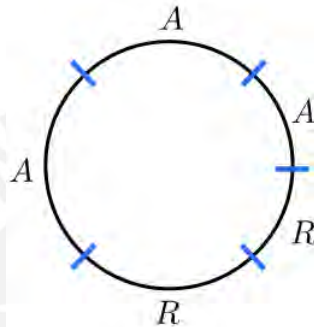
$$s_n(I_{k+1}) = A \neq R = s_n(I_k);$$

Esto redondea nuestro análisis.

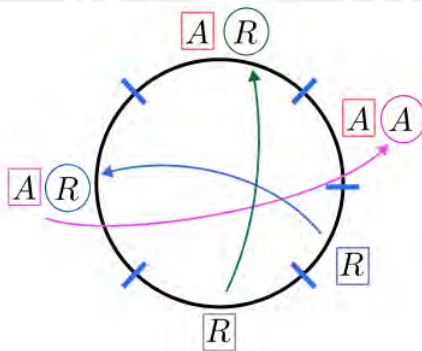
Ejemplo 8.2. Retomemos el ejemplo de rotación por $2/5$ para apreciar cómo la preservación del orden ayuda a predecir la formación de la secuencia simbólica asociada.

Consideremos entonces $\lambda = 2/5$. Como ya comentamos, los elementos que avanzan pertenecen al intervalo $A = [0, 3/5) = [0, 1 - \lambda)$ y los que retroceden a $R = [3/5, 1) = [1 - \lambda, 1)$.

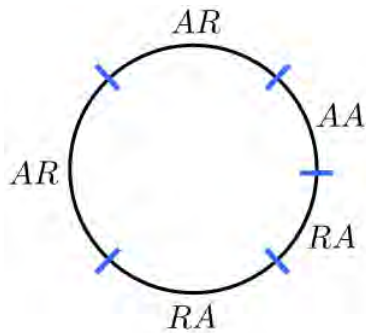
Esbozemos cortes en $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$, como en el gráfico, a modo referencial.



En vez de pensar la dinámica hacia “adelante” pensémosla un momento hacia “atrás”: tomemos la inversa por la rotación $\frac{2}{5}$: de este modo el intervalo $[2/5, 3/5)$ se “monta” sobre $[0, 1/5)$, el intervalo $[3/5, 4/5)$, sobre $[1/5, 2/5)$, y así sucesivamente. De esta información lo que realmente nos interesa es la dualidad A - R : es decir, estamos asignándole a cada intervalo un segundo símbolo. Como ayuda visual, en el gráfico nos limitamos a asignar un segundo símbolo a quienes empiezan con A ; con R se procede igual.



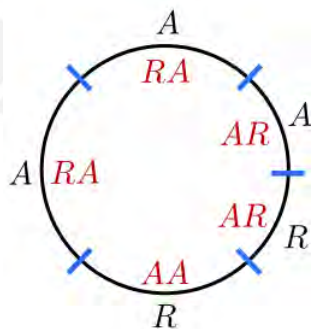
Si se trabaja en la sección $[3/5, 1)$, con imagen en $[0, 2/5] \subset A$, se rescatan los símbolos faltantes. Al final todo queda como en la siguiente figura.



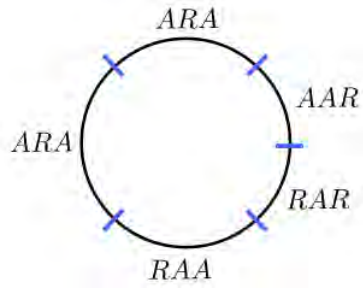
Comparemos esta figura con la primera que esbozamos. En la primera, había dos bloques bien diferenciados: aquellos sectores que corresponden a A , y los que corresponden a R ; el quiebre se da en $3/5$. En la segunda, aparecen tres paquetes (específicamente AA, AR, RA). Al respecto, un par de comentarios son urgentes. ¿Por qué aparecen solo tres de los cuatro bloques posibles? (Es decir, ¿dónde está RR ?) ¿Por qué es en $1/5$ el cambio entre AA y AR ? (El cambio en $3/5$ no hay manera de eliminarlo pues es el salto entre A y R).

La segunda cuestión es más fácil de explicar. El punto de discontinuidad en $1/5$ se debe a que es la inversa de $3/5$, otro valor de cambio. Por supuesto, si estamos copiando valores distintos (en el primer casillero), obtendremos copias distintas (en el segundo).

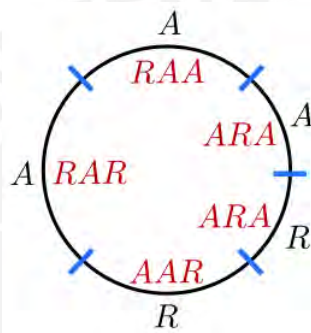
Para determinar las secuencias de tres símbolos diferenciamos, como ya es costumbre, en la parte externa el avance del retroceso. En la parte interna escribimos *rotada en sentido inverso* la información parcial hasta acá recabada.



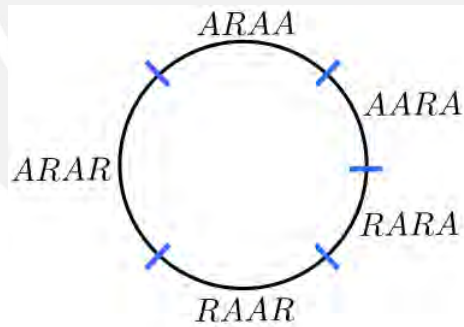
Los bloques para cada sector ahora se leen de manera directa. Es más, vemos que las discontinuidades antiguas no han sido enmendadas. Sin embargo, aparece una nueva en $4/5$, la preimagen de $1/5$, la añadida en el paso anterior. Esto explica por qué la cantidad de bloques se incrementa en uno, y en efecto aparecen cuatro bloques triples en vez de los 2^3 disponibles.



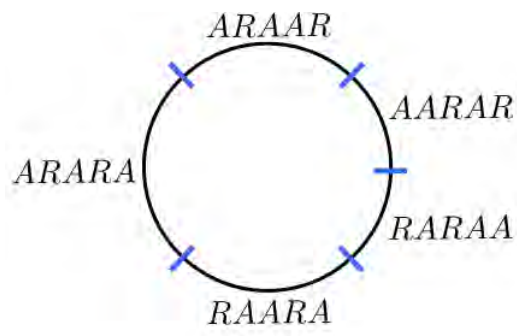
Si repetimos el proceso de escribir las preimágenes de estos bloques (dentro del círculo) como en



la lectura de los bloques resultantes es inminente.



Para el último paso notamos una curiosidad: las sucesivas preimágenes de $3/5$ han regresado al lugar de partida y vemos que de acá en adelante los bloques de a cinco se repetirán indefinidamente.



Capítulo 9

Conjuntos de rotación irracional

Tomemos ahora $\rho_\lambda(\cdot)$ como una rotación por un número irracional λ . Esta función ρ_λ avanza en el intervalo $A = [0, 1 - \lambda)$, mientras retrocede en $R = [1 - \lambda, 1)$, ello no cambia. Podemos entonces replicar las ideas de los capítulos anteriores y definir una secuencia

$$s(x) = s_0(x) \cdots s_n(x) \cdots,$$

donde

$$s_n(x) = \begin{cases} A & \text{si } \rho_\lambda^{on}(x) \in A, \\ R & \text{si } \rho_\lambda^{on}(x) \in R. \end{cases}$$

Es claro que similarmente se cumple $s(\rho_\lambda(x)) = \sigma(s(x))$, con σ el desplazamiento. Al igual que antes, esta asignación no asume todas las combinaciones disponibles. No obstante si discrimina puntos.

Lema 9.1. *La asignación simbólica respeta el orden: para $0 \leq x < y < 1$ se cumple lexicográficamente*

$$s(0) \leq s(x) < s(y) < s(1).$$

(Ahora $s(1)$ es la secuencia simbólica que se diferencia de $s(0)$ solamente en la primera entrada, la misma que troca A por R .)

Demostración. Para que lexicográficamente se tenga $s < t$ se ha de cumplir $s_i = t_i$ para $i = 0, \dots, n-1$ pero $s_n < t_n$, para cierto $n \geq 0$, donde por convención aceptamos $A < R$. Al satisfacerse

$$s(\rho_\lambda(x)) = \sigma(s(x)),$$

se procede por inducción.

Para la base inductiva partimos de

$$s_0(x) = \begin{cases} A & \text{si } x \in A = [0, 1 - \lambda), \\ R & \text{si } x \in R = [1 - \lambda, 1), \end{cases}$$

y fácilmente notamos que $x \leq y$ implica $s_0(x) \leq s_0(y)$ con igualdad si y solo si $x, y \in A$ o $x, y \in R$.

Ahora supongamos que $x \leq y$ implique $s_0(x) \cdots s_n(x) \leq s_0(y) \cdots s_n(y)$, es decir, se tenga $s_0(x) \cdots s_n(x) < s_0(y) \cdots s_n(y)$ o $s_0(x) = s_0(y), \dots, s_n(x) = s_n(y)$ para $i = 0, \dots, n$. Puesto que el primer caso ya implica $s(x) < s(y)$, nos limitamos a mostrar que el segundo caso conduce a $s_{n+1}(x) \leq s_{n+1}(y)$. Y en efecto, al tenerse $s_0(x) = s_0(y)$, se reducen las posibilidades: o bien se satisface $x, y \in A$, o, en su defecto, $x, y \in R$. Como de ambos casos se infiere $\rho_\lambda(x) \leq \rho_\lambda(y)$, la hipótesis inductiva lleva a $s_0(\rho_\lambda(x)) \cdots s_n(\rho_\lambda(x)) \leq s_0(\rho_\lambda(y)) \cdots s_n(\rho_\lambda(y))$ o, lo que es lo mismo debido a la hipótesis de trabajo, a

$$s_{n+1}(x) = s_n(\rho_\lambda(x)) \leq s_n(\rho_\lambda(y)) = s_{n+1}(y).$$

Esto por supuesto implica $s_0(x) \cdots s_{n+1}(x) \leq s_0(y) \cdots s_{n+1}(y)$.

Esto no acaba acá: aún debemos mostrar que para todo $x \in [0, 1)$ se tiene $s(x) \leq s(1)$. Como $s_0(1) = R$, es claro que la desigualdad se cumple para $x \in A$. Cuando $x \in R$, se tiene $s_0(x) = s_0(1)$ y por tanto $s(x) \leq s(1)$ equivale $\sigma(s(x)) \leq \sigma(s(1))$. Pero esto último es fácil: $x \in R$ implica $0 \leq \rho_\lambda(x) < \lambda = \rho_\lambda(0)$. Esto lleva entonces, por lo ya probado, a

$$s(\rho_\lambda(x)) \leq s(\lambda) = \sigma(s(0)).$$

Al cumplirse $\sigma(s(x)) = s(\rho_\lambda(x))$ además de $\sigma(s(0)) = \sigma(s(1))$, se concluye lo deseado.

Finalmente, en este contexto probaremos que $x \neq y$ lleva a $s(x) \neq s(y)$. En efecto, cuando $x < y < 1$, es suficiente mostrar lo pedido cuando se satisface

$$y - x \leq \max\{\lambda, 1 - \lambda\},$$

pues de ahí se puede rematar el trabajo en uso de la monoticidad.

Como las preimágenes de 0 por rotación irracional son densas (ver [Poi05, corolario 2, capítulo 6, página 65]), existe m de modo se tiene $\rho_\lambda^{\circ m}(z) = 0$ para algún z sujeto a $x < z < y$. Para este m se ha de tener

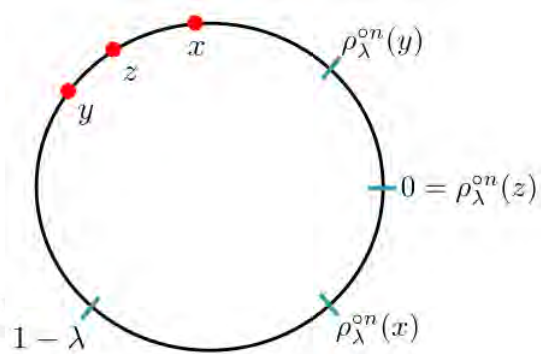
$$0 < \rho_\lambda^{\circ m}(y) = \rho_\lambda^{\circ m}(y) - \rho_\lambda^{\circ m}(z) = y - z < y - x \leq 1 - \lambda$$

(lo cual implica $s_m(y) = A$), junto con

$$1 > \rho_\lambda^{\circ m}(x) = \rho_\lambda^{\circ m}(x) - \rho_\lambda^{\circ m}(z) = x - z + 1 = 1 - (z - x) > 1 - (y - x) \geq 1 - \lambda$$

(de donde se obtiene $s_m(x) = R$).

Queda entonces claro que x e y tienen asignadas distintas secuencias.



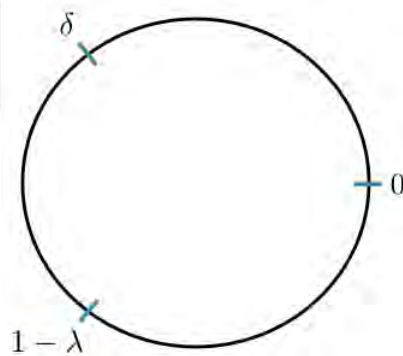
□

Capítulo 10

Despliegue irracional cúbico

En el caso de un conjunto cúbico de rotación racional, aparte del número de rotación propiamente dicho, es necesario contar con información suplementaria: la secuencia de despliegue. El efecto de la secuencia de despliegue es separar el conjunto de rotación en dos bloques. Para ello surte el mismo efecto seleccionar un ángulo δ y considerar dos paquetes: aquellos θ_i menores o iguales que δ y aquellos mayores que este.

Pensando en conjuntos de rotación cúbicos, fijemos λ como antes y un segundo valor δ . Cada uno de ellos determina por derecho propio secuencias dinámicas que trataremos de vincular con un conjunto de rotación cúbico. En la figura anotamos también el 0, el mismo que representa una marca tácita.



A cada x asignamos

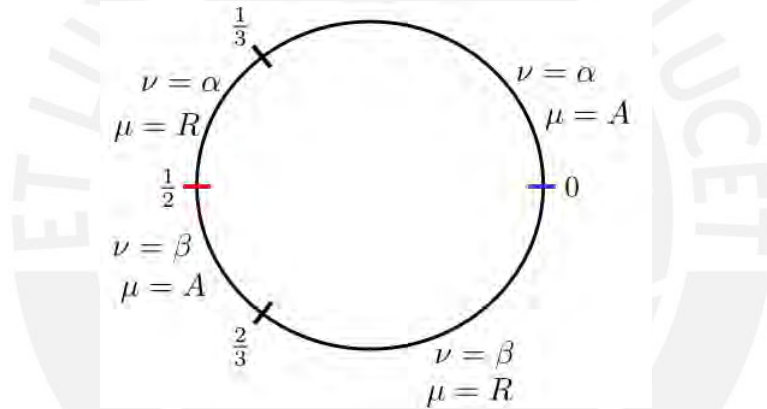
$$\mu_n(x) = \begin{cases} A & \text{si } \rho_\lambda^{\circ n}(x) \in A = [0, 1 - \lambda), \\ R & \text{si } \rho_\lambda^{\circ n}(x) \in R = [1 - \lambda, 1), \end{cases}$$

en alusión a si avanza o retrocede, y

$$\nu_n(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \rho_\lambda^{\circ n}(x) \in [0, \delta), \\ \beta & \text{si } \rho_\lambda^{\circ n}(x) \in [\delta, 1), \end{cases}$$

para referirnos a la posición relativa respecto al valor auxiliar.

Para describir cómodamente una dinámica por triplicación necesitamos exactamente tres símbolos. Acá desgraciadamente tenemos dos paquetes de dos, lo que en conjunto configura cuatro posibilidades. Si aceptamos que $\nu(x)$ nos indica la posición relativa respecto a los puntos fijos por triplicación (es decir si pertenece a $\alpha = (0, 1/2)$ o a $\beta = (1/2, 1)$) y que $\mu(x)$ a si pertenece a las zonas de avance (con $A = [0, 1/3) \cup [1/2, 2/3)$) o repliegue (con $R = [1/3, 1/2) \cup [2/3, 1)$) idealmente tendremos el gráfico



Las marcas en rojo determinan las distintas zonas de despliegue. La marca azul indican el principio y fin de las correspondientes zonas de avance y retroceso.

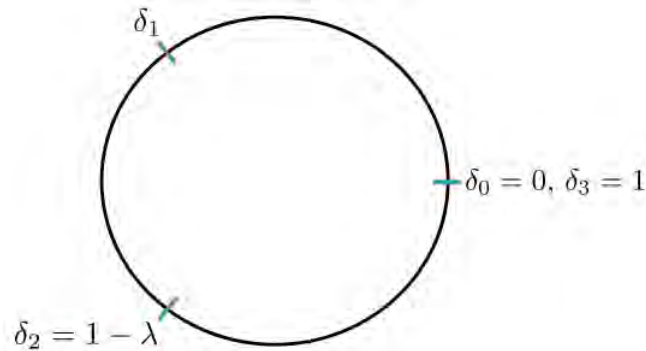
Para centrar ideas aceptemos que se cumple $0 < \delta < 1 - \lambda$ como en la primera figura. Como en este caso se cumple $[0, \delta) \subset [0, 1 - \lambda)$ tenemos que $\nu_i(x) = \alpha$ implica $\mu_i(x) = A$, y concluimos que la combinación de β con A es incompatible. Podemos entonces resumir la secuencia simbólica en uso de 0 (para $\nu = \alpha, \mu = A$), 1 (para $\nu = \beta, \mu = A$), 2 (para $\nu = \beta, \mu = R$). En efecto, el símbolo 0 representa estar situado en el primer tercio de circunferencia pero estar obligado a avanzar (lo cual no es ninguna noticia pues ello es siempre cierto). Para el símbolo 1 entramos en la zona de avance del segundo tercio, es decir en $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Con 2 estamos en la zona de retroceso del tercer tercio (nuevamente información tautológica).

En el caso cúbico general necesitamos un número número adicional $0 \leq \Delta < 1$

aparte de λ . Confundimos Δ y $1 - \lambda$ con δ_1 y δ_2 de modo que se tenga

$$0 = \delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3 = 1$$

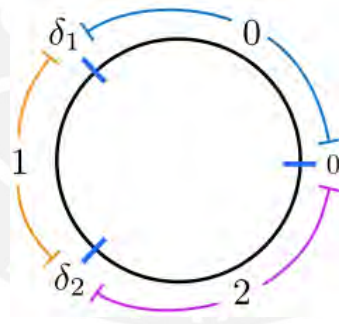
(no se descarta la posibilidad $\delta_i = \delta_{i+1}$).



Ponemos $\omega(x) = i$ cuando $x \in I_i = [\delta_i, \delta_{i+1})$, lo que facilita definir la secuencia

$$s(x) = s_0(x) \cdots s_n(x) \cdots,$$

con $s_n(x) = \omega(\rho_\lambda^{o n}(x))$. Por su propia definición es obvio que se cumple $s(\rho_\lambda(x)) = \sigma(s(x))$, donde σ es el desplazamiento.



La rotación ρ_λ es continua y por tanto monótona en el sentido que cada intervalo I_i avanza o retrocede de manera conjunta: para ser exactos, avanza o retrocede dependiendo en cual de los δ sea $1 - \lambda$.

Lema 10.1. *La asignación simbólica respeta el orden: para $0 \leq x < y < 1$ se cumple lexicográficamente*

$$s(0) \leq s(x) < s(y) < s(1).$$

(Ahora $s(1)$ es la secuencia simbólica que se diferencia de $s(0)$ solamente en la primera entrada, la misma que cambia de 0 a 2.)

Demostración. La prueba es idéntica a la ya dada dos veces anteriormente (ver lemas 8.1 y 9.1). □



Capítulo 11

Despliegue irracional en grado d

Consideremos valores $0 = \delta_0 \leq \delta_1 \cdots \leq \delta_d = 1$, con uno de ellos igual a $1 - \lambda$, donde λ es irracional. Ponemos también $I_i = [\delta_i, \delta_{i+1})$. Al igual que en el capítulo anterior definimos $\omega(x) = i$ cuando $x \in I_i$. Esto, por supuesto, posibilita definir la secuencia

$$s(x) = s_0(x) \cdots s_n(x) \cdots,$$

con $s_n(x) = \omega(\rho_\lambda^{o_n}(x))$. Por su propia definición se cumple $s(\rho_\lambda(x)) = \sigma(s(x))$, donde σ es el desplazamiento.

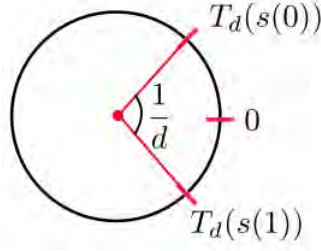
El siguiente resultado es rutina y no requiere prueba.

Lema 11.1. *La asignación simbólica respeta el orden: para $0 \leq x < y < 1$ se cumple lexicográficamente*

$$s(0) \leq s(x) < s(y) < s(1).$$

(Ahora $s(1)$ es la secuencia simbólica que se diferencia de $s(0)$ solamente en la primera entrada, la que pasa a ser $d - 1$.) \square

Pero queda como duda qué valores son asumidos y si existen brechas y cuán amplias son. Por ejemplo, si convertimos las secuencias a números en base d a través de la función T_d del capítulo 4, la brecha más obvia se abre alrededor del 0: ninguno de los valores comprendidos contra el reloj entre los asociados a $s(1)$ y $s(0)$ son tomados.



Para mejor comprensión, asignaremos a cada x dos símbolos $s(x)^-, s(x)^+$ de modo que ningún valor en el intervalo $(T(s^-(x)), T(s^+(x)))$ sea asumido; esto es una **brecha**. Para tal efecto distinguimos algunos casos.

Si la órbita de x , esto es $\mathcal{O}(x) = \{x, \rho_\lambda(x), \rho_\lambda^2(x), \dots\}$, no se interseca en $\{\delta_0, \dots, \delta_n\}$, simplemente definimos $s^+(x) = s^-(x) = s(x)$.

En caso contrario, si se intersecan, como el segundo conjunto es finito, eventualmente dejarán de hacerlo. Podemos entonces proceder por una especie de inducción. Supongamos entonces que $s^-(\rho(x)), s^+(\rho(x))$ ya estén definidos. En todos los distintos casos a trabajar pondremos

$$s_n^-(x) = s_{n-1}^-(\rho(x)), \quad s_n^+(x) = s_{n-1}^+(\rho(x)),$$

para $n \geq 1$. Obsérvese que esto garantiza que se cumplirá $\sigma(s^\pm(x)) = s^\pm(\rho_\lambda(x))$. Para definir $s_0^\pm(x)$ tenemos que distinguir tres casos.

Si $x \neq \delta_0, \dots, \delta_n$, entonces x pertenece al interior de exactamente un intervalo I_i . Ponemos $s_0^-(x) = s_0^+(x) = i$.

Si $x = 0$ (o $x = 1$, pues es lo mismo), existe un primer índice de modo que se tiene $\delta_{i+1} \neq 0$ (pues por ahí flota $\delta_k = 1 - \lambda$ que no vale 0 o 1), y un mayor índice $\delta_j \neq 1$. Tenemos de esta manera

$$0 = \delta_0 = \dots = \delta_i < \delta_{i+1} \leq \dots \leq \delta_j < \delta_{j+1} = \delta_d = 1.$$

Ponemos en este caso $s_0^-(0) = j$ y $s_0^+(0) = i$.

Si x pertenece a $\{\delta_0, \dots, \delta_d\}$ pero es no nulo, igualmente existe un mayor índice i y un menor índice j de modo que se tiene

$$\delta_0 \leq \dots \leq \delta_i < \delta_{i+1} = \dots = x = \dots = \delta_j < \delta_{j+1} \leq \dots \leq \delta_d = 1.$$

Escribimos $s_0^-(x) = i$ y $s_0^+(x) = j$.

Obsérvese que hay una sutil diferencia entre los casos $x = \delta_0 = 0$ y $0 < x = \delta_k < 1$. Esto se hace para que en cualquier circunstancia se tenga $s_0^-(x) = s_0(x - \epsilon)$ y $s^+(x) = s_0(x + \epsilon)$ siempre que $\epsilon > 0$ sea suficientemente pequeño.

Nota 11.2. La observación anterior carga con un detalle mínimamente ambiguo: ¿qué ocurre cuándo $x = 0$? En este caso vemos que $s_0(0 - \epsilon)$ ha de interpretarse como $s_0(1 - \epsilon)$, motivo por el cual para referirnos a $s^-(0)$ más conviene utilizar $s^-(1)$.

Nota 11.3. Notemos que excepto para $x = 0$ se cumple siempre $s_0^-(x) \leq s_0^+(x)$. Es más, si $x = \delta_1, \dots, \delta_{d-1}$ tendremos $s_0^-(x) < s_0^+(x)$. No obstante, para $x = 0$ se cumple $s_0^+(0) < s_0^-(0)$.

Lo siguiente es una mejora sustancial al lema 11.1.

Lema 11.4. *Para las secuencias simbólicas se cumple lo siguiente.*

- Para todo x se tiene $s^+(x) = s(x)$.
- Para $x \neq 0$ se tiene $s^-(x) \leq s^+(x)$.
- Para $x < y$ se tiene $s^+(x) < s^-(y)$.
- Para $0 < x < y$ se tiene $s^-(x) < s^-(y)$.

Demostración. La primera propiedad se sigue de la precaución de haber tomado en todo momento $s_0^+(x) = j$ cuando $x \in [\delta_j, \delta_{j+1})$, junto con inducción.

La segunda es nuevamente inducción, esta vez con el hecho de que siempre se eligió $s_0^-(x) \leq s_0^+(x)$.

Para la tercera parte procedemos en dos pasos. Primero es claro que al tenerse siempre $s_0^+(x) \leq s_0^-(y)$ (ver las correspondientes definiciones según el caso), se cumple $s^+(0) \leq s^-(y)$. Notemos de pasada que esto es válido incluso para $y = 1$. Ahora, si intercalamos cierto z entre x e y tendremos

$$s^+(x) = s(x) < s(z) = s^+(z) \leq s^-(y),$$

donde las igualdades son fruto de la primera propiedad acá probada, la desigualdad estricta del lema 11.1 y la no estricta de la primera porción de esta prueba. Se concluye entonces lo deseado.

Esto es inmediato al combinar la segunda con la tercera propiedad. □

Una secuencia es **admisibile** cuando es la secuencia (sea izquierda o derecha) de algún elemento x .

Nota 11.5. Con anterioridad se demostró (cf. lema 11.1) que toda secuencia admisible $s(x)$ está sujeta a

$$s(0) \leq s(x) \leq s(1),$$

donde $s(1)$ se definía de una manera un tanto ambigua. Con la notación introducida, esta información es reformulada como sigue: *ninguna secuencia s sujeta a*

$$s < s^+(0) \quad \text{o} \quad s^-(1) < s$$

es admisible.

Para completar esta descripción, veamos qué ocurre si $x \neq 0, 1$.

Proposición 11.6. *Para todo $x \in (0, 1)$ ninguna secuencia sujeta a $s^-(x) < s < s^+(x)$ es admisible.*

Demostración. Gracias a la nota 11.5 ni $s^+(0)$ ni $s^-(1)$ pertenecen al intervalo lexicográfico $(s^-(x), s^+(x))$. Similarmente, y esta vez por motivos obvios, los extremos $s^-(x), s^+(x)$ quedan fuera. Resta entonces por analizar los casos $0 < y < x$ y $x < z < 1$.

Si $0 < y < x$ tenemos entonces $s^-(y) \leq s^+(y) < s^-(x)$ por el lema 11.4; mientras $x < z < 1$ conduce a $s^+(x) < s^-(z) \leq s^+(z)$. \square

Proposición 11.7. *Sea s sujeta a $s^+(0) < s < s^-(1)$ no admisible. Entonces existe τ de modo que se tiene $s^-(\tau) < s < s^+(\tau)$.*

Demostración. Se definen los intervalos

$$I^- = \{x < 1 : s^+(x) < s\}$$

$$I^+ = \{x > 0 : s < s^-(x)\},$$

no vacíos pues se tiene $0 \in I^-$ y $1 \in I^+$. El hecho de que ambos sean intervalos es una consecuencia directa del lema 11.4.

Dados $x \in I^-$ e $y \in I^+$ se tiene $s^+(x) < s < s^-(y)$, lo cual es posible exclusivamente cuando $x < y$. De acá se concluye la desigualdad $\text{máx } I^- \leq \text{mín } I^+$.

Por otro lado para $z > \text{máx } I^-$ se cumple $z \notin I^-$, de donde se pasa a $s^+(z) \geq s$: como no puede haber igualdad (pues s no es admisible), se logra $s^+(z) > s$. Ahora, si tuviesemos $s^-(z) < s < s^+(z)$, el lema estaría probado. De lo contrario —al no poder haber igualdad— se tendría $s < s^-(z)$, es decir $z \in I^+$. Esto implica que I^+ contiene, por lo menos, al intervalo $(\text{máx } I^-, 1]$. Se concluye fácilmente la desigualdad $\text{mín } I^+ \leq \text{máx } I^-$. Ponemos entonces $\tau = \text{máx } I^- = \text{mín } I^+$.

Como segundo paso mostraremos que se satisface $0 < \tau$ (respectivamente $\tau < 1$). Mostraremos que existe $\epsilon > 0$ con el cual se tiene $[0, \epsilon) \subset I^-$

(respectivamente $(1 - \epsilon, 1] \subset I^+$). Como se cumple $s^+(0) < s$ existe un primer símbolo s_N con el cual se tiene $s_N^+(0) < s_N$. Por continuidad de la rotación, existe $\epsilon > 0$ de modo que para cada $x \in (0, \epsilon)$ se tiene $\rho^i(x) \notin \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ para $i = 0, \dots, N$. En términos de la secuencia, esto significa que se tiene $s_i^+(x) = s_i^+(0)$, lo cual deriva en

$$s_0^+(x) = s_0^+(0) = s_0, \quad \dots, \quad s_{N-1}^+(x) = s_{N-1}^+(0) = s_{N-1}, \quad s_N^+(x) = s_N^+(0) < s_N,$$

es decir, se tiene $(0, \epsilon) \subset I^-$. Obtenemos entonces $\tau \geq \epsilon > 0$. La prueba de $\tau < 1$ es idéntica.

Ahora probaremos que el τ así definido es el buscado. Si no lo fuera, tendríamos que s no pertenece al intervalo $(s^-(\tau), s^+(\tau))$ y aparecen dos posibilidades o bien se tiene $s < s^-(\tau) \leq s^+(\tau)$ o en su defecto $s^-(\tau) \leq s^+(\tau) < s$ (pues s no puede ser igual $s^\mp(\tau)$). Trataremos solo el primer caso pues el tratamiento del segundo es análogo.

Sea entonces N de modo que se tenga

$$s_0^-(\tau) = s_0, \quad \dots, \quad s_{N-1}^-(\tau) = s_{N-1}, \quad s_N < s_N^-(\tau).$$

Por continuidad existe entonces $\epsilon > 0$ de modo que para $x \in (\tau - \epsilon, \tau)$ se tiene $\rho^i(x) \notin \{\delta_0, \dots, \delta_n\}$, cuando $i = 0, \dots, N$. Concluimos que se tiene $s_i^-(x) = s_i^-(\tau)$, lo cual a su vez implica $s < s^-(x)$. Esto está mal pues para estos mismos x se tiene $x < \tau = \max I^+$, lo que permite concluir que se cumple

$$s^+(x) < s,$$

lo cual combinado con $s < s^-(x)$ es un absurdo. □

Corolario 11.8. *El conjunto de las secuencias admisibles es cerrado (en efecto es compacto pues el espacio de símbolos lo es).*

Demostración. En efecto, el conjunto de las secuencias admisibles está conformado por el complemento la unión de intervalos abiertos. □

Capítulo 12

Desplazamiento de secuencias admisibles

En este capítulo estudiaremos el desplazamiento de las secuencias admisibles y la relación de orden que ellas establecen.

Llamemos A al conjunto de las secuencias admisibles, sean izquierdas o derechas.

Nota 12.1. Si $s, t \in A$ son distintos, la asignación numérica T del capítulo 4 determina valores distintos $T(s), T(t)$. En efecto, la asignación T es inyectiva excepto si nos topamos con símbolos que en su cola repiten el mismo símbolo. En nuestro caso repetir el mismo símbolo significa quedarse dentro del mismo intervalo $[\delta_i, \delta_{i+1}]$, lo mismo que es imposible pues toda órbita bajo rotación irracional es densa. Obsérvese que este mismo argumento muestra también que ningún valor $T(s)$, con s admisible, es de la forma $1/d^k$.

Lema 12.2. *La asignación $T : A \rightarrow (0, 1)$ es estrictamente creciente.*

Demostración. En efecto, obsérvese que tanto 0 como 1 quedan fuera de la imagen $T(A)$. Además, la nota anterior indica que T restringido a A es inyectiva. Al ser T creciente, se tiene que $s < t$ implica $T(s) \leq T(t)$. No obstante la igualdad queda descartada para elementos en A . \square

Quedamos listos entonces para describir los conjuntos de rotación dentro del espacio de símbolos.

Proposición 12.3. *La aplicación $\sigma : A \rightarrow A$ es sobreyectiva. Además es 1-1 con la posible excepción de a lo más d parejas.*

Demostración. Pongamos A^+, A^- para la secuencia de símbolos positiva y negativa respectivamente. Mostraremos que cada restricción $\sigma^\pm : A^\pm \rightarrow A^\pm$ es biyectiva. Esto mostrará sobreyectividad y nos pondrá en la pista correcta para tratar la inyectividad global. Trabajaremos con σ^+ , el estudio de σ^- es idéntico. Recordemos que $\rho : S^1 \rightarrow S^1$ es la rotación por λ .

Para $x \in S^1$ tenemos $\sigma^+(s(x)) = \sigma^+(\rho(x))$, lo mismo que indica la buena definición. Para la sobreyectividad basta notar que se tiene $\sigma^+(s(y - \lambda)) = s^+(y)$. Para la inyectividad basta ver que $x < y$ implica $s^+(x) < s^+(y)$ por el lema 11.4, por lo que nunca será posible la igualdad.

Por lo ya realizado, la coincidencia de la imagen de σ de dos secuencias admisibles se requiere de una positiva, digamos $s^+(x)$ y una negativa $s^-(y)$. En este caso tendremos

$$s^+(x + \lambda) = \sigma^+(s^+(x)) = \sigma^-(s^-(y)) = s^-(y + \lambda).$$

Como el lema 11.4 implica que para $a \neq b$ se tiene $s^+(a) \neq s^-(b)$, obligatoriamente tendremos $x + \lambda = y + \lambda$, y con ello $x = y$. No obstante los únicos posibles valores para los cuales se tiene $s^+(x)_0 \neq s^-(x)_0$ son algunos de los δ_i . Estos son en total d posibles sitios de conflicto. \square

Hemos llegado así al final de trabajo. En efecto, la imagen $T(A)$ asociado a la rotación por λ con las correspondiente marcas es un conjunto de rotación dentro de la dinámica de multiplicación por d .

Bibliografía

- [Dev18] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd edition*, CRC press, 2018.
- [GM93] Lisa R. Golberg and John Milnor, *Fixed points of polynomial maps. part ii. fixed point portraits*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série **26** (1993), no. *n*° 1, 51–98.
- [Gol92] Lisa R. Golberg, *Fixed points of polynomial maps. i. rotation subsets of the circles*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série **25** (1992), no. *n*° 6, 679–685.
- [Poi05] A. Poirier, *Aspectos geométricos del análisis complejo*, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú (2005).
- [Zak18] Saeed Zakeri, *Rotation sets and complex dynamics*, Springer, 2018.