PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

EVOLUCIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN ESTUDIANTES DEL SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA A TRAVÉS DE PROBLEMAS CON TABLAS DE PROPORCIONALIDAD

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Segundo Ramón Mendoza Ancajima

Asesora:

Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Lima, 2024

Informe de Similitud

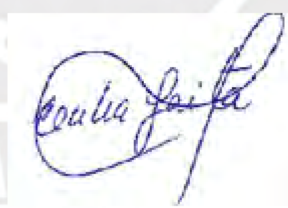
Yo, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis/el trabajo de investigación titulado EVOLUCIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN ESTUDIANTES DEL SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA A TRAVÉS DE PROBLEMAS CON TABLAS DE PROPORCIONALIDAD, del autor Segundo Ramón Mendoza Ancajima, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9.%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 13/03/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 13 de marzo del 2024

<table>
<tr><td colspan="2">Apellidos y nombres de la asesora:

GAITA IPARRAGUIRRE, ROSA CECILIA</td></tr>
<tr><td>DNI:07757120</td><td rowspan="2">Firma:
</td></tr>
<tr><td>ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7827-9262</td></tr>
</table>

A Dios, por ser luz y guía en mi vida, por estar presente en mi quehacer diario y porque sigue cuidándonos en cada momento.

A mi familia, especialmente a mis padres Ramón y María Isabel por estar dispuestos siempre a ayudarme, porque con sus trabajos bien sacrificados han hecho siempre lo posible por sacarnos adelante, para ser mejores personas y profesionales.

A mi tía Vicky por ser como una segunda madre, que me inculcó desde pequeño el amor al estudio y quien influyó de alguna manera en la vocación de ser hoy profesor.

Agradecimientos

En el andar por esta maravillosa vida nos ilusionamos con proyectos profesionales y qué alegría luego cuando son realizados, que hubiese sido imposible sin la colaboración de otros. Así, quiero agradecer a la Pontificia Universidad Católica del Perú, por haberme permitido culminar mis estudios de posgrado y por darme la oportunidad de poder conocer a muchas personas muy valiosas que han aportado en mi formación tanto personal como profesional.

A mi asesora, Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por el acompañamiento que ha tenido conmigo en esta investigación, sobre todo por su tiempo que tuvo hacia mi persona de escucharme y orientarme, su paciencia y sinceridad en todo momento. Además, ha hecho posible que navegue por diversos estudios sobre la Didáctica de las Matemáticas, concretamente desde el EOS, que me han permitido seguir mejorando en mi formación didáctica y con ello seguir trabajando mejor en mi práctica pedagógica con mis estudiantes. Infinitas gracias Dra. Cecilia.

Al Dr. Miguel Wilhelmi por sus valiosos y pertinentes aportes que tuvo durante el proceso del desarrollo del trabajo de investigación.

Al Dr. Francisco Ugarte por las observaciones y sugerencias que permitieron mejorar la presente investigación.

A mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas: Dra. Jesús Flores, Mgtr. Cintya Gonzales, Dra. Nancy Saravia, Dra. Daysi García, Dra. Maritza Luna, Dra. Verónica Neira y Mgtr. Elton Barrantes. A todos ellos mi agradecimiento por su valiosa formación profesional y académica recibida.

A la línea de investigación del Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática.

A mis profesores de Pregrado de la Universidad de Piura, especialidad de Matemática y Física, de manera especial a la Dra. María del Carmen Barreto de Guerrero, por haber dejado en mí el “bichito” de la investigación y por transmitirme el sentido del trabajo bien hecho.

A mi centro de trabajo colegio Turicará, porque me permite seguir mejorando como persona y como profesional. De modo especial agradezco al Consejo de Dirección por el apoyo constante e incondicional en todo este tiempo. No quiero dejar de mencionar a nuestro recordado Sub director y gran amigo, Pedro Kihara por todo el apoyo y los ánimos recibidos cuando aún estaba entre nosotros y que ahora ya goza del Cielo.

A mis alumnos del colegio Turicará, quienes han sido una motivación fuerte para sacar adelante este trabajo de investigación, ya que me permitirán seguir ayudándolos, desde mi labor docente, en su proceso formativo.

A los estupendos amigos que Dios ha colocado en mi camino. Gracias Regina, Cinthia, Camila, Juleysi, Jorge, Emiliano, Julio, Paul y amigos de mis estudios de posgrado.
¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Se han llevado a cabo diversos estudios en relación con la proporcionalidad, desde perspectivas epistemológicas y didácticas, ya que se reconoce el potencial que tiene este objeto matemático para el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad. Se ha identificado que en el nivel de Educación Primaria los problemas sobre proporcionalidad se modelan con frecuencia través de tablas de valores. Así, este trabajo de tesis centra su atención en el diseño y experimentación de situaciones didácticas que involucren tablas de proporcionalidad, las cuales se modifican teniendo en cuenta variables didácticas, así como los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE).

Considerando el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS), se propone como objetivo general analizar de qué manera el uso de las tablas de proporcionalidad y la modificación de los datos, permite la evolución de los niveles de razonamiento algebraico elemental en estudiantes del sexto grado de Educación Primaria.

Se emplea la *ingeniería didáctica* fundamentada en el EOS como método de investigación. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes han logrado evolucionar en los niveles del RAE a partir de la realización de tareas que involucran tablas de proporcionalidad. Las tareas demandan cada vez un mayor grado de generalización, así como una evolución en el uso de lenguajes que van desde lo numérico o verbal hasta lenguajes simbólicos que se ponen en evidencia con el uso eficiente de hojas de cálculo.

Finalmente, del presente trabajo se pueden extraer algunas orientaciones que permitan a futuras investigaciones proponer nuevas situaciones didácticas, cuya gestión tendrán en cuenta las variables didácticas para una eficiente progresión del razonamiento proporcional, promoviendo así niveles mayores de algebrización: desde un nivel incipiente de algebrización (RAE 0-1) hasta un nivel consolidado de algebrización (RAE 3), donde se siente las bases para la Educación Secundaria y se logre llegar a la aplicación del significado propiamente algebraico.

Palabras clave: Proporcionalidad; Tablas de valores; Razonamiento algebraico elemental; Educación Primaria; EOS; Ingeniería didáctica.

Abstract

Various studies have been carried out in relation to proportionality, from epistemological and didactic perspectives, given the recognition of the considerable potential of this mathematical object for the development of algebraic reasoning as of the first years of schooling. It has been identified that at the Primary Education level, proportionality problems are frequently modeled through tables of values. Consequently, this research study focuses its attention on the design and experimentation of didactic situations that involve proportionality tables, which are modified considering didactic variables, as well as the levels of elementary algebraic reasoning (EAR).

Considering the theoretical framework of the Onto-semiotic Approach to research in mathematics education (OSA), this paper proposes as the general objective the analysis of the manner in which the use of proportionality tables and the modification of data allows the evolution of elementary algebraic reasoning levels in students of the sixth grade of Primary Education.

Didactic engineering based on OSA is used as a research method. The results obtained show that the students have managed to progress in the EAR levels through the performance of tasks that involve proportionality tables. The aforementioned tasks demand a greater degree of generalization as they progress, as well as presenting an evolution in the use of languages ranging from numerical or verbal to symbolic languages, which is evidenced with the efficient use of spreadsheets.

Finally, from this study some orientations can be extracted that allow future research to propose new didactic situations, whose operation will take into account the didactic variables for an efficient progression of proportional reasoning, thus promoting higher levels of algebrization; ranging from an incipient level of algebrization (EAR 0-1) to a consolidated level of algebraization (EAR 3), where the foundations for Secondary Education are laid and the application of the proper algebraic meaning is achieved.

Keywords: Proportionality; Value tables; Elementary algebraic reasoning; Primary education; OSA; didactic engineering.

Resumo

Foram realizados diversos estudos relacionados com a proporcionalidade, a partir de perspectivas epistemológicas e didáticas, reconhecendo o potencial deste conceito matemático para o desenvolvimento do raciocínio algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Identificou-se que, no nível do Ensino Primário, os problemas relacionados com a proporcionalidade são frequentemente modelados através de tabelas de valores. Portanto, este trabalho de tese concentra-se no desenho e experimentação de situações didáticas que envolvem tabelas de proporcionalidade, as quais são modificadas tendo em conta variáveis didáticas e os níveis de raciocínio algébrico elementar (RAE).

Considerando o marco teórico da Abordagem Ontosemiótica do conhecimento e da instrução matemáticos (EOS), o objetivo geral é analisar como o uso de tabelas de proporcionalidade e a modificação dos dados permitem a evolução dos níveis de raciocínio algébrico elementar em estudantes do sexto ano do Ensino Primário.

Foi empregada a engenharia didática fundamentada na EOS como método de pesquisa. Os resultados obtidos mostram que os estudantes conseguiram evoluir nos níveis de RAE através da realização de tarefas que envolvem tabelas de proporcionalidade. As tarefas exigem cada vez mais generalização, bem como uma evolução no uso de linguagens que vão desde o numérico ou verbal até linguagens simbólicas, que se evidenciam com a utilização eficiente de folhas de cálculo.

Por fim, a partir deste trabalho, podem ser retiradas orientações que permitirão a futuras investigações propor novas situações didáticas, cuja gestão levará em consideração as variáveis didáticas para uma eficiente progressão do raciocínio proporcional, promovendo assim níveis mais avançados de algebrização: desde um nível inicial de algebrização (RAE 0-1) até um nível consolidado de algebrização (RAE 3), que servirá de base para o Ensino Secundário e permitirá a aplicação do significado propriamente algébrico.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Tabelas de valores; Raciocínio algébrico elementar; Educação Primária; EOS; Engenharia didática.

Índice

Pág.

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

En la presente investigación se busca analizar de qué manera el uso de las tablas de proporcionalidad y la modificación de los datos, permite la evolución de los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) en estudiantes del sexto grado de Educación Primaria. Se debe tener en cuenta que el análisis se enfocará en cuatro tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores.

Las tareas de proporcionalidad que vamos a tomar en consideración, son aquellas en las que los enunciados establecen una relación de proporcionalidad entre dos variables y vienen acompañados por una tabla cuyos elementos son, por ejemplo: la razón interna, razón externa, símbolos reiterativos, valores de la primera y de la segunda variable (Gaita et al., 2023).

La investigación se realiza por el interés de estudiar si las actividades que involucran tablas de valores, en el contexto de la proporcionalidad, pueden contribuir a desarrollar el RAE en los estudiantes. Desde el enfoque ontológico–semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) se entiende el RAE como un sistema de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego al momento de resolver tareas que se abordan en la Educación Primaria, donde intervienen objetos y procesos de tipo algebraicos como: la simbolización, relación, variables, incógnitas, generalización, etc. (Burgos y Godino, 2019).

Asimismo, para analizar la actividad matemática que se vincula a tareas de proporcionalidad, se considerarán los niveles del RAE que se definen como estadios de funcionamiento del conocimiento matemático aplicados a la resolución de problemas, donde el cambio o variación de alguna variable en la tarea puede dar lugar no solo a nuevas prácticas matemáticas, sino también a un progresivo nivel de algebrización (Godino et al., 2014a). Así, se podrá observar de qué manera se da la evolución de estos niveles en los estudiantes de sexto grado de Educación Primaria.

En coherencia con lo anterior, dichos niveles del RAE adaptados a tareas de proporcionalidad (Burgos y Godino, 2019), se describen de la siguiente manera: el *nivel 0 de algebrización* se asocia con el significado de tipo aritmético, es decir, los procedimientos son de cálculos aritméticos con determinados valores; *el nivel proto-algebraico 1* tiene su enfoque en la noción de proporción, por ejemplo, el procedimiento que se sigue para la reducción a la unidad; el *nivel proto-algebraico 2* tiene su relación con tareas vinculadas al valor faltante, uso de incógnitas, así como el planteamiento y resolución de ecuaciones que tienen la forma $Ax = B$. En relación al *nivel consolidado de algebrización 3*, Gaita et al. (2023) hacen referencia a dicho nivel cuando las tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores, implican un procedimiento de la reducción a la unidad en el campo numérico de los racionales positivos (Q+), cuando se logra identificar el coeficiente de proporcionalidad para determinar cualquier valor o se emplea un lenguaje matemático en relaciones de igualdad “por equivalencias” entre las variables.

De acuerdo con lo anterior, Gaita et al. (2023) concluyen manifestando que, cuando dichas tareas con tablas de proporcionalidad se modifican, por ejemplo, ampliándolas al campo numérico Q+, ya sea para la razón de proporcionalidad como para los valores respectivos de dicha tabla, estas demandan un mayor nivel de razonamiento algebraico. Esa modificación de las tablas dependerá de las *variables didácticas* consideradas en las tareas propuestas. Cuando estas variables didácticas intervienen en una determinada situación didáctica, asumen valores diferentes que provocan un cambio en el conocimiento (Brousseau, 2007). Dichas variables didácticas que se han considerado y adecuado en nuestra investigación, se han tomado de Gaita et al. (2023) y son: *relación de multiplicidad*, *procedimientos de cálculo*, *exhaustividad y orden*, *relación entre valores*, *campo numérico*, *uso de tablas dinámicas* y *columna en blanco en la tabla de valores*.

Por otro lado, es importante mencionar que el contenido de la tesis se ordena en cinco capítulos, como se detalla a continuación:

En el capítulo I, titulado “Planteamiento del estudio”, se inicia con la descripción de aspectos generales referidos al estudio, y se da a conocer la problemática de la investigación. Seguidamente, se presentan los antecedentes, donde se analizan los diversos aportes de varios autores que han realizado trabajos en esta línea de investigación. Para facilitar la lectura del estado de la cuestión, se han agrupado dichos aportes en las siguientes categorías: a) Antecedentes en torno al RAE; b) Antecedentes en torno a la proporcionalidad en matemática y para el desarrollo del RAE; c) Antecedentes en torno al uso de tablas de valores en problemas de proporcionalidad; y d) Antecedentes en torno al razonamiento proporcional en la formación de futuros docentes y profesores en ejercicio. Seguidamente se plantea la justificación, la formulación del problema y los objetivos de la investigación.

En el capítulo II, cuyo título es “Aspectos teóricos y metodológicos de la investigación”, se consideraron algunos elementos teóricos del EOS como: *las categorías de los objetos matemáticos*, para analizar la práctica matemática de los estudiantes; *la adaptación de los niveles del RAE a tareas de proporcionalidad*, modelizadas mediante tablas de valores, teniendo en cuenta sus diferentes significados; y *la relación entre las tablas de proporcionalidad y el RAE*. Además, desde el aspecto metodológico, se describe que el presente estudio responde a una metodología de tipo cualitativa y cuyo método de investigación es la *ingeniería didáctica*. En esta investigación se propone un desarrollo de las fases de la ingeniería didáctica (Godino et al., 2014b), fundamentadas en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS). Estas fases son las siguientes: el *estudio preliminar*, d*iseño y análisis a priori*, *implementación* y el *análisis a posteriori*.

En el capítulo III, titulado "Diseño y análisis *a priori*", se desarrolla un diseño y análisis *a priori* de cuatro tareas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores. Estas tareas se basan en una situación contextualizada en relación con la proporcionalidad, concretamente en situaciones de mezclas y pinturas. Es importante mencionar que las dos primeras tareas, sobre tablas de valores, que aparecen en este trabajo, se han experimentado en una investigación previa de Gaita et al. (2023), que, además consideran ciertas variables didácticas, mencionadas anteriormente, y que nos servirán de referencia para el trabajo con los estudiantes. Por otro lado, también se han tomado en cuenta algunas condiciones o restricciones para un mejor desarrollo de la actividad sobre tablas de valores. Dichas restricciones son las siguientes: *tiempo*, *intervención del profesor*, *uso de materiales* y *la modalidad de trabajo*. Finalmente, se presenta una situación didáctica y cuatro tareas, las cuales responden a variaciones de datos, que van a generar la necesidad de modificar las estrategias de solución; ello se asociará con rasgos de los distintos niveles de razonamiento algebraico. Así, para cada tarea: a) se presenta el enunciado; b) se explicará qué valores toman las variables didácticas; c) se describen los objetos matemáticos implicados; y d) se describen los comportamientos matemáticos esperados (análisis de la tarea).

En el capítulo IV, titulado "Implementación", se ha tenido en cuenta el *modelo didáctico dialógico-colaborativo*, planteado por Godino et al. (2020), para poder observar el papel que han cumplido tanto el profesor como el estudiante durante el desarrollo de las cuatro tareas de proporcionalidad, modelizadas por tablas de valores. Luego, se describirán las diversas fases que se han tenido en cuenta en la implementación de las situaciones didácticas: se detallarán las características propias del investigador y del grupo de los estudiantes; además, se mencionarán los objetos matemáticos trabajados con los estudiantes antes de la fase de la implementación, así como las expectativas de la institución misma; por otro lado, también se describirán todos los procesos llevados a cabo en la implementación, en relación con la actividad matemática realizada por los estudiantes.

En el capítulo V, titulado "Análisis y discusión de resultados", se realizará un análisis de los resultados de las tareas de proporcionalidad, para lo cual se tendrán en cuenta algunos instrumentos como: las videograbaciones, los descriptores relativos a la resolución de las tareas de proporcionalidad y el estudio de casos. Con respecto al instrumento de los descriptores, se ha adaptado acorde al instrumento denominado *Variables operativas relativas a la resolución de las tareas 1 y 2*, propuesta por Gaita et al. (2023, p. 62) en base a dos tareas de proporcionalidad, con tablas de valores. Es importante mencionar que, de las cuatro tareas que han sido consideradas en nuestra investigación, las dos primeras se han tomado del trabajo de Gaita et al. (2023, p. 59). En dicho instrumento, se proponen criterios relacionados a: resolución correcta o no de la tarea, tipos de lenguajes usados, si se establecen o no progresiones aritméticas o geométricas, el modo en el que se establece la razón, etc. En esta investigación esos aspectos se irán adaptando acorde al trabajo realizado con los estudiantes. Finalmente, estos resultados analizados, con ayuda de este instrumento, se confrontarán con los *estudios preliminares* y el análisis *a priori*.

Es importante mencionar que en esta investigación también se han tenido en cuenta, para el análisis de los resultados, el otro instrumento denominado estudio de casos respecto a un grupo de estudiantes, tanto de 6toA como de 6toB.

Finalmente, se describe una ”Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas”, del presente trabajo de investigación.

Capítulo I: Planteamiento del estudio

En el presente capítulo se abordarán los siguientes apartados: aspectos generales, antecedentes, justificación, formulación del problema y los objetivos de la investigación.

1.1 Aspectos generales

Existe un dominio de investigación en torno a la *Didáctica del álgebra* sobre el cual se presentan, cada vez más, diversas visiones acerca de su naturaleza en el contexto escolar, ya sea desde aspectos epistemológicos, así como de implicación pedagógica (Wilhelmi, 2017; Gaita y Wilhelmi, 2019). Así, por ejemplo, la comunidad *Early Algebra* sostiene que las diversas relaciones matemáticas, los patrones y las diferentes estructuras de tipo aritméticas son la razón de ser de toda actividad algebraica temprana que, además, incluye procesos de representación, generalización y formas de comunicación imprescindibles para el desarrollo del pensamiento algebraico (Kieran et al., 2016). De modo que la iniciación en el razonamiento algebraico en Educación Primaria se ha ido convirtiendo en un tema de interés, siendo así una tendencia en el contexto internacional (Godino et al., 2012; Aké y Godino, 2018; Burgos y Godino, 2019).

En coherencia con lo anterior, cabe la pregunta: *¿qué significa razonar algebraicamente?* Para responder a esta interrogante, Blanton y Kaput (2003; 2005; 2011) definen el razonamiento algebraico como una actividad de generalizar ideas matemáticas expresadas en formas cada vez más formales y apropiada para la edad de los estudiantes. También, estos autores sostienen que este tipo de razonamiento implica hacer representaciones simbólicas literales y relaciones funcionales a partir de tareas que se pueden ir trabajando con los estudiantes, desde grados elementales hasta grados superiores. Kieran (2004), por su parte, sostiene que razonar algebraicamente implica que el estudiante sea capaz de relacionar cantidades, estudiar los cambios, así como generalizar, modelizar, probar y hacer predicciones sobre diversas situaciones en torno a un objeto matemático. En esta misma línea, Godino et al. (2014a) conciben que el razonamiento algebraico tiene que ver directamente con que el estudiante sea capaz de representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto o actividad matemática. En el proceso de evolución de dicho razonamiento, se va también progresando en los usos de tipos de lenguajes y formas simbólicas en las que el estudiante se debe apoyar para resolver las tareas.

Por otro lado, existen trabajos de investigación que dan cuenta de un modelo dominante que se ha venido dando para la enseñanza del álgebra y que sostiene que para tener un mejor domino del álgebra es necesario que los estudiantes desarrollen por separado capacidades para aprender la parte simbólica y, de otro lado, las operaciones de tipo aritméticas (Ursini, 1996). Asimismo, también se sostiene que la enseñanza del álgebra en la escuela se ha venido trabajando después de que los estudiantes han adquirido un cierto conocimiento en torno a la aritmética en el nivel primario (Aké y Godino, 2018; Radford, 2012). Sin embargo, hay aportaciones que dan a conocer las dificultades que muestran los estudiantes en el paso de la aritmética al álgebra en instituciones educativas del nivel Secundaria (Godino et al., 2012; Burgos, 2020).

Frente a este panorama, resulta importante suscitar diversas formas de razonamiento algebraico desde los primeros años escolares, donde se resalte la búsqueda de modelos didácticos que motiven la interrelación entre los estudiantes y estudiantes-docentes, ofreciendo así la posibilidad a los alumnos de promover el razonamiento algebraico. Por tanto, las concepciones que se tengan de este dominio matemático marcarán una pauta para su enseñanza y aprendizaje en los estudiantes de la Educación Básica Regular (EBR). Asimismo, en el Currículo Nacional de la Educación Básica Peruana (2016) se propone una competencia matemática denominada *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio*, donde el razonamiento algebraico en dicha competencia es desarrollado cuando los estudiantes son capaces razonar de manera inductiva y deductiva, y así puede determinar leyes generales o reglas de correspondencia a partir de ejemplos, contraejemplos y el uso de propiedades. En esta misma línea, dicha competencia matemática implica, por parte de los estudiantes, el desarrollo de capacidades como: *a)* traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas; *b)* comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas; *c)* usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales; *d)* argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

Así, Godino et al., sostienen que: “dependiendo de cómo se conciba el álgebra escolar se tomarán decisiones sobre su introducción temprana desde los primeros niveles educativos, o se retrasará hasta la Educación Secundaria” (2015, p. 2). En esta misma línea, Godino et al., manifiestan que si:

> El álgebra, entendida de una manera restrictiva como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de los polinomios, aparece de manera abrupta en secundaria, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria. (2012, p. 486)

Lo mencionado anteriormente pone de manifiesto que el álgebra no se reduce a la manipulación de letras o incógnitas sin más, sino que su razón de ser dentro del ámbito escolar va mucho más allá. De ahí la importancia de incluir actividades matemáticas que permitan en los estudiantes desarrollar un razonamiento algebraico desde los primeros grados de Educación Primaria.

En coherencia con lo anterior, Godino et al. (2012) señalan que la incorporación del razonamiento algebraico elemental en el currículo del nivel Primario, debe contar con una mayor apertura en el modo de desarrollar dicho razonamiento algebraico elemental en los estudiantes, donde no solo las tareas tienen que relacionarse con la aritmética, las medidas, geometría o con análisis de datos, sino que deben de hacerse con distintos grados de algebrización.

Por tanto, afirmar que el álgebra se puede incorporar en la Educación Primaria se debe entender que no es planteada como un curso o asignatura, sino como un modo de desarrollar un mayor grado de generalidad en el pensamiento de los estudiantes. Esto significa que dentro de la enseñanza-aprendizaje del álgebra se puedan trabajar con diversos contextos que guarden relación directa con los desempeños del currículo nacional de la Educación Básica Regular (EBR) y que poco a poco se vaya introduciendo la formalidad o generalización correspondiente.

Ante este panorama, cabe mencionar que existen objetos matemáticos que se enseñan a lo largo de toda la escolaridad y uno de ellos es la *proporcionalidad*. Este se introduce en la escuela Primaria “por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades homogéneas y aditiva de la función de proporcionalidad” (Burgos & Godino, 2019, p. 127). Con actividades adecuadas sobre proporcionalidad es posible propiciar que los alumnos evolucionen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico.

En la misma línea de lo mencionado anteriormente, Obando et al. (2014) señalan que, alrededor de los años 80, se desarrollaron investigaciones sobre el razonamiento proporcional y cómo desarrollarlo en la escuela; es decir, se planteó cómo promover su enseñanza en aula y cómo lograr que este sea el escenario propicio para favorecer los procesos que se orientan a la constitución o consolidación de dicho razonamiento. Asimismo, se estudiaron diversos factores que se asocian a la evolución del razonamiento proporcional, tales como: tipos de estrategias elementales (acumulaciones coordinadas, valor unitario, comparación de razones, razones intensivas, razones escalares, estrategias erróneas, estrategias de retroceso); tipos de situaciones (problemas de tasas o de mezclas, de conceptos matemáticos o de otras ciencias, por ejemplo, la física); las variables de las diversas tareas focalizadas en el trabajo de los estudiantes (edad, estadio de desarrollo, capacidad mental, estilo cognitivo, inteligencia, actitudes y habilidades); y variables centradas en la situación misma (estructurales –razones enteras o no, lugar de la incógnita en la proporción, complejidad numérica; o de contexto –tipos de situación, tipo de magnitud, familiaridad con la situación, uso de materiales manipulativos).

Sin embargo, las investigaciones realizadas en este período no cuestionaron al objeto matemático de la proporcionalidad en sí, sino que se enfocaron en las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje por parte del docente y del estudiante, respectivamente, las cuales se estudiaban a la luz de procesos cognitivos y de los diversos contextos implicados.

Con el transcurrir de los años se han venido dando aportaciones en torno al razonamiento proporcional desde el punto de vista epistémico y semiótico-antropológico. En este sentido, Burgos y Godino (2019) concluyen que hay factores que se deben tener en cuenta en el planteamiento de las diversas tareas de proporcionalidad, tales como: los números involucrados, razones enteras o no enteras, las unidades de las diferentes magnitudes, así como la familiaridad con el objeto matemático. Desde nuestra investigación se plantean problemas que incluyen tablas de valores, ya que son contextos idóneos donde se pueden manipular esas variables y otras.

En coherencia con lo anterior, Gaita et al. (2023), sostienen que, en los problemas con tabla de valores se originan diversas tareas, dependiendo de la información brindada en cada caso. Es decir, que dichas tablas de proporcionalidad pueden variar según la cantidad de pareja de datos, si los valores que responden a un criterio de multiplicidad, o si los valores que deben ir en los casilleros forman parte del conjunto numérico de los naturales (N) o los racionales positivos (Q+), los valores que toman las variables intervinientes son números “pequeños” o “grandes”. De esta manera, según la modificación de las variables didácticas, se podrá observar si los estudiantes han podido realizar con éxito dicha tarea de proporcionalidad o si han tenido dificultades en su desarrollo.

Godino et al. (2015) sostienen que no es suficiente con elaborar propuestas curriculares que involucren al álgebra desde los primeros grados de la escolaridad, sino que es fundamental que sea el docente el principal agente de cambio y que ayude a los estudiantes en el desarrollo de su razonamiento algebraico, que luego le van a permitan avanzar en dicho razonamiento en la secundaria.

Resulta pertinente entonces plantear la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué características debe tener una secuencia de actividades sobre proporcionalidad, utilizando tablas de valores, de modo que favorezca el desarrollo del RAE?* Partiendo de esta inquietud, se presentarán trabajos relevantes para nuestra investigación.

1.2 Antecedentes

Se ha realizado una revisión de la literatura acudiendo a varias fuentes de información, como artículos de divulgación científica e investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. En primer lugar, se hace una búsqueda en la página Web del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemáticos (EOS). Se revisan los trabajos realizados sobre el álgebra, concretamente con lo referido a la proporcionalidad y aspectos muy cercanos a nuestro tema de interés. Luego, hicimos una revisión de publicaciones en revistas como: *Bolema*, *Educación Matemática*, *Relime*, *Enseñanza de las Ciencias*, *Australian Primary Mathematics Classroom*, *The International Journal on Mathermatics Education*, entre otros. Entre las palabras clave importantes para la búsqueda fueron: álgebra escolar, razonamiento algebraico, niveles de algebrización, proporcionalidad, tabla de valores, Educación Primaria y tareas matemáticas.

A continuación, consideraremos los resultados más importantes de investigaciones que guardan relación con nuestro trabajo. Para facilitar la lectura se han agrupado en las siguientes categorías: a) Antecedentes en torno al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE); b) Antecedentes en torno a la proporcionalidad en matemática y para el desarrollo del RAE; c) Antecedentes en torno al uso de tablas de valores en problemas de proporcionalidad; y d) Antecedentes en torno al razonamiento proporcional en la formación de futuros docentes y profesores en ejercicio.

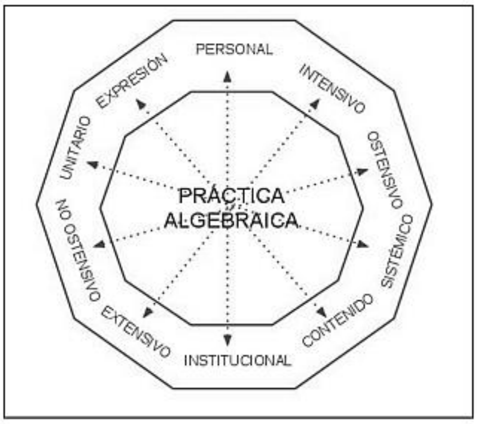
1.2.1 Antecedentes en torno al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)

Godino et al. (2012), partiendo de los supuestos del EOS adoptan una postura de lo que significa razonar algebraicamente, manifestando que dicho razonamiento puede desarrollarse en los estudiantes no solo a partir del fomento de tareas relacionadas con la aritmética, la medición, la geometría o el análisis de datos, sino que lo hace con diferentes *grados* de algebrización. Estos autores destacan la importancia de elaborar un modelo que ayude a articular de manera coherente el currículo matemático escolar con los distintos niveles educativos, de manera que facilite el diseño de actividades matemáticas que permitan a los estudiantes avanzar o evolucionar en el razonamiento algebraico.

Para ello, hacen uso de algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) tales como los tipos de objetos y los procesos, que van a permitir analizar actividades matemáticas en general, y concretamente, aquellas actividades consideradas como algebraicas. Así, desde el EOS se propone una tipología de objetos algebraicos como son: *relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones, y estructuras y sus tipos*. Otro de los supuestos del EOS, es que toda práctica matemática y los diferentes objetos, según el contexto o el tipo de lenguaje usado, responden a una dualidad de componentes, tal como se puede observar en la Figura 1.

Figura 1

Dualidades implicadas en la práctica algebraica



Fuente: Godino et al. (2012, p. 484)

Estos autores sostienen que en las prácticas de tipo algebraicas la dualidad de los componentes *extensivo-intensivo* y los procesos asociados de *particularización-generalización*, respectivamente, son de vital importancia. Siendo la *generalización* uno de los rasgos muy importantes del razonamiento algebraico.

En ese mismo sentido, Carraher et al. (2008) sostienen que se debe promover en los estudiantes que aprendan a plantear generalizaciones sobre problemas que les permitan buscar ciertos patrones y relaciones; así, de manera gradual, los estudiantes irán formulando dichas generalizaciones y usando, más adelante, un cierto tipo de notación algebraica.

Por otro lado, Godino et al. (2014a) describen distintos niveles o grados de algebrización, que podrán ser empleados para analizar si hay una evolución en el razonamiento algebraico de los estudiantes y los definen a estos niveles como estadios del funcionamiento del conocimiento matemático aplicados a la resolución de problemas, donde el cambio o variación de alguna variable en la tarea puede dar lugar no solo a nuevas prácticas matemáticas, sino también a un progresivo nivel de algebrización.

Por tanto, Los niveles de razonamiento algebraico elemental propuestos por Godino et al. (2014a), son como se describen a continuación:

- Nivel 0 (ausencia de razonamiento algebraico): En este nivel aparecen objetos *extensivos* (particulares) que se expresan mediante tipos de lenguajes, tales como: lenguaje natural, numérico, icónico o de tipo gestual. Durante el desarrollo de las actividades matemáticas por parte de los estudiantes, pueden hacer uso de símbolos que hacen referencia a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de realizar operaciones aritméticas muy concretas. En tareas de generalización, donde se debe relacionar un término con otro, no conlleva a realizar un proceso de *generalización*.

- Nivel 1 (nivel incipiente de algebrización): En este nivel aparecen objetos *intensivos* donde su generalidad se reconoce por la aparición de tipos de lenguajes, tales como: lenguaje natural, numérico, icónico o de tipo gestual. En tareas estructurales los estudiantes al resolver las actividades matemáticas pueden aplicar relaciones y propiedades de las operaciones y también pueden aparecer datos que sean desconocidos y representados de manera simbólica. Mientras que en tareas de tipo funcionales, sí se reconoce la generalidad, pero no se realizan operaciones con dichos valores desconocidos.
- Nivel 2 (nivel intermedio de algebrización): En este nivel aparecen variables con un lenguaje simbólico-literal para hacer referencia a los intensivos reconocidos, pero siempre están ubicadas dentro del contexto de la problemática descrita. En tareas de tipo estructural las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$, y en tareas de tipo funcional sí se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables.
- Nivel 3 (nivel consolidado de algebrización): En este nivel se generan los objetos intensivos y se representan de manera simbólica-natural y se opera con ellos realizando transformaciones. Se realizan tratamientos con las variables para resolver ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Por lo tanto, en este nivel 3 se consolida el proceso de algebrización.

Por lo tanto, este trabajo de Godino et al. (2014a), al igual que el resto de investigaciones que van en esta línea, brindan herramientas para analizar las prácticas algebraicas escolares desarrolladas por los estudiantes y así poder determinar el nivel de desarrollo de su razonamiento algebraico.

Por otro lado, teniendo en cuenta la naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental, es importante también mencionar que en el trabajo de Gaita y Wilhelmi (2019) se adaptan los niveles del modelo RAE, para el trabajo con en situaciones de recuento con patrones, ya que lo consideran un buen contexto para desarrollar el RAE. Así, los estudiantes pueden utilizar diversas estrategias para su solución, puede ser de manera gráfica, uso de operaciones aritméticas, y posiblemente logren hallar o estimar cantidades, etc. Finalmente, la investigación de Gaita y Wilhelmi, considera que: “es posible proponer situaciones que permitan diagnosticar el nivel algebraico de estudiantes y determinar procesos de estudio potenciales para su desarrollo y afianzamiento” (2019, p. 287).

Siguiendo con la revisión del estado del arte, se analizarán investigaciones sobre proporcionalidad y el RAE, ya que resulta importante ver la relación que existe entre nuestro objeto de estudio y el desarrollo del RAE en los estudiantes, así como los significados que se derivan de la construcción progresiva del razonamiento proporcional.

1.2.2 Antecedentes en torno a la proporcionalidad en matemática y para el desarrollo del RAE

En el Perú, contexto de la presente investigación, Menacho (2020) realizó un estudio epistemológico y ecológico sobre la proporcionalidad en el nivel Primario. Hizo una revisión de la presencia de este objeto matemático desde el currículo del 2005 hasta el actual currículo, vigente desde el 2016. Así, en el currículo del 2005, Concretamente en sexto grado de Primaria, se puede observar que la proporcionalidad aparece en términos asociados a porcentajes y a la regla de tres simple; en el diseño curricular del 2009, la proporcionalidad aparece con mayor notoriedad, sobre todo en los grados de 4º, 5º y 6º de Primaria, e inclusive se observa una mayor relevancia a las tablas de proporcionalidad y su aplicación en contextos relacionados a los cambios monetarios, impuestos e intereses.

En coherencia con lo anterior, Menacho (2020) encontró que en las Rutas de aprendizaje (2015), específicamente en las sesiones de 6º grado de Primaria, aparecen diversos significados relacionados a la proporcionalidad, referidos por ejemplo a: dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuye una, la otra también aumenta o disminuye; las magnitudes se pueden expresar mediante tabla de valores; o cuando estas magnitudes están relacionadas a un cociente o a una razón constante. Ya en Currículo Nacional de la Educación Básica Regular (2016), específicamente, en 6º de Primaria, la proporcionalidad aparece como: variación entre los datos de dos magnitudes o como la relación proporcional como un cambio constante, entre otros. Finalmente, Menacho (2020) encontró que existe un modelo dominante para el desarrollo de las tareas relacionadas a la proporcionalidad y más aún en tareas que involucran tablas de proporcionalidad. Por lo tanto, Este aporte, nos será muy importante para poder tener en cuenta cómo es que se ha venido abordando este objeto matemático, concretamente cuando se trabaja con tablas de valores, para poder diseñar mejor las actividades teniendo en cuenta: los contextos de los problemas, campos numéricos, sucesiones más geométricas que aritméticas, tipos de lenguaje, etc., de modo que lleven a los estudiantes a desarrollar mayores niveles de razonamiento.

También se tiene la investigación de Gaita et al. (2021), en donde se analiza en qué medida la propuesta de una red de centros educativos particulares en el Perú, contribuye a desarrollar el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), en particular, a través de la construcción de los diferentes significados asociados a la noción de linealidad en situaciones-problema. Este estudio se enmarca dentro del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y dentro de los aspectos metodológicos se toman en cuenta lo siguiente: 1) se construye el significado de referencia de linealidad tanto para el nivel primario y secundario. Para ello se apoya de los elementos primarios del EOS (situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos), tal como se observa en la siguiente Figura.

Figura 2

Objetos primarios respecto al significado de linealidad

Significado de la linealidad	Lenguajes	Conceptos	Procedimientos	Proposiciones	Argumentos
Informal	Gráfico, verbal.	Ausencia	Ausencia	A más…, más… A menos…, menos…	Relacionados a la experiencia del estudiante.
Aritmético	Gráfico, verbal, numérico.	Cantidad, razón, figuras semejantes	Operaciones de división y multiplicación.	3 de … es a 12 de …, como 5 de … es a 20 de…	Si una cantidad aumenta, entonces la otra también.
Proporcional	Verbal, numérico, tabular, simbólico literal	Cantidad, magnitud, razón, proporción.	Reducción a la unidad, uso de proporciones, uso de tablas de proporcionalidad, regla de tres.	Dos pares de magnitudes en proporción determinan una igualdad.	Si dos magnitudes son directamente proporcionales y una dismininuye la otra también. Y viceversa
Funcional	Gráfico, verbal, tabular, simbólico literal	Dominio, rango, pendiente, función lineal, función afin	Reconocer cambios constantes, establecer relaciones de proporcionalidad como una relación funcional lineal, expresar la función $f(x) = kx$.	La función lineal es homogénea, aditiva y monótona.	Un aumento constante en la variable "x" determina un aumento constante en la variable "y".

Fuente: Gaita, Supo y Ugarte (2021, p. 5)

Esto último resulta importante para nuestra investigación, porque permitirá identificar y analizar los objetos primarios que se presentarán en la actividad matemática de los estudiantes al resolver los problemas con tablas de proporcionalidad. Además, se puede observar en la Figura 2 que aparece la proporcionalidad como significado de linealidad. Así, estos autores consideran el significado de proporcional en términos de las magnitudes directamente proporcionales, tales como: proporción, constante de proporcionalidad y fracciones equivalentes. Las situaciones propuestas se asocian a calcular el valor en una proporción, hallar la constante de proporcionalidad, inclusive completar tablas de proporcionalidad y las relaciones entre dichas magnitudes intervinientes.

Asimismo, en la investigación de Gaita et al. (2021) se adaptan los niveles de razonamiento algebraico a situaciones relacionadas con la linealidad. Además, en este estudio los autores analizan situaciones problema en términos del desarrollo del RAE y los diferentes significados de la linealidad. Concluye que el significado asociado a la proporcionalidad aparece en las actividades que proponen los libros de texto y en las soluciones esperadas, de los niveles de Primaria (3ro, 4to, 5to y 6to grado) y secundaria (1er y 2do grado).

A continuación, se muestra un ejemplo correspondiente a una situación problemática del nivel primario, concretamente un problema sobre una tabla de proporcionalidad. Se ha elegido este ejemplo ya que se relaciona con nuestro tema de investigación (véase la Figura 3).

Figura 3

Ejemplos de una situación problemática sobre el significado proporcional

b) Roy vende casacas siempre al mismo precio. Él organiza la información de sus ventas así:

Número de casacas	3	4	5	8		20
Precio (S/)	135		225		450	

- Completa la tabla.
- Según la información de la tabla, ¿es posible que Roy recaude S/ 700 de forma exacta? ¿Por qué?

Fuente: Gaita, Supo y Ugarte (2021, p. 14)

Por lo tanto, este trabajo muestra que es posible relacionar, vincular y articular los niveles de razonamiento algebraico con un objeto matemático específico, más aún, si son considerados como algebraicos, lo cual resulta imprescindible para nuestra investigación.

Por otro lado, es importante considerar que investigaciones como las de Godino et al. (2017), analizan los diversos significados de la proporcionalidad, apoyándose en elementos propios del EOS, tales como: *significados pragmáticos* y *configuraciones ontosemióticas asociadas*, respectivamente. Si nos centramos en los significados pragmáticos, estos autores consideran que la diversidad de significados de la proporcionalidad puede ser clasificado según algunos criterios como: el contexto o el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. También, Godino et al. (2017) hacen referencia a que en la solución de los diversos problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen siempre magnitudes como: longitud, área, volumen, densidades, etc., con sus medidas respectivas.

Por otro lado, la aplicación de los niveles de algebrización propuestas en el modelo RAE, en actividades matemáticas relacionadas con la proporcionalidad, aportará ciertos criterios donde se podrán distinguir diversas categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional. Así, Godino et al. (2017, p. 5), distinguen tres tipos de significados: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, tal como se describen a continuación:

a) Significado aritmético:

Se caracteriza porque se aplican procedimientos de cálculo aritmético, tal como se observa en las siguientes situaciones: de compra y venta en contextos cotidianos, si se compra el triple o el cuádruple de un producto, se debe pagar el tripe o el cuádruple de su precio, etc. Aquí se puede observar que el nivel algebraico que se puede alcanzar en este tipo de problemas es de nivel cero.

b) Significado proto-algebraico:

Se centra en la noción de proporción y con la resolución de la ecuación que tiene la forma $Ax = B$ y podemos encontrar estos significados en situaciones como: si se compra el doble o el triple de un determinado producto, entonces se deberá pagar el doble o el triple de su precio. Se puede observar que las magnitudes hacen referencia a una proporcionalidad directa. Ante esto Godino et al., sostiene que: "Si bien la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2 (proto-algebraica)" (2017, p. 6).

c) Significado algebraico-funcional:

Godino et al. (2017), consideran que: "este significado propiamente algebraico se caracteriza por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones: $f(a+b) = f(a) + f(b), f(ka) = kf(a)$" (p. 7). Alguna actividad matemática que se realice bajo este significado se puede considerar como proto-algebraica de nivel 1.

En esta investigación de Godino et al. (2017), se señala que un docente de matemáticas debe conocer los diferentes significados de los objetos matemáticos, en particular de la proporcionalidad, y la conexión entre ellos. De esa manera tendrán criterios que le permitirán elegir mejor las actividades matemáticas, gestionar su trabajo en aula con sus estudiantes, así como la evaluación de las competencias matemáticas respectivas.

Por su parte, Burgos y Godino (2019) realizaron una investigación en torno al razonamiento proto-algebraico a partir de tareas de proporcionalidad, en estudiantes del quinto curso del nivel Primaria. En primer lugar, ambos consideran también la importancia de introducir el álgebra temprana en los lineamientos curriculares de la Educación Primaria, esto con la finalidad de poder organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra, respectivamente, sin ningún salto forzado. Ambos sostienen que la naturaleza del álgebra sitúa su foco en el desarrollo del pensamiento del álgebra y no meramente en el aprendizaje referidos al trabajo de variables y símbolos. Esta investigación se respalda en la base teórica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007). Así, en Burgos y Godino (2019), se toman algunas herramientas teóricas, tales como las *categorías de objetos matemáticos* y los *niveles de algebrización*, para interpretar los diferentes datos recogidos en base al trabajo con los estudiantes.

Asimismo, Burgos y Godino (2019, p. 129), centran el foco de atención en las respuestas dadas por un grupo de estudiantes en torno a un problema contextualizado sobre pulseras. Se analiza dichas respuestas en función de los niveles del RAE. El problema propuesto es el siguiente:

Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores.

a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido.

b) ¿Y para hacer 10 pulseras? Explica cómo lo has averiguado.

c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?

d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?

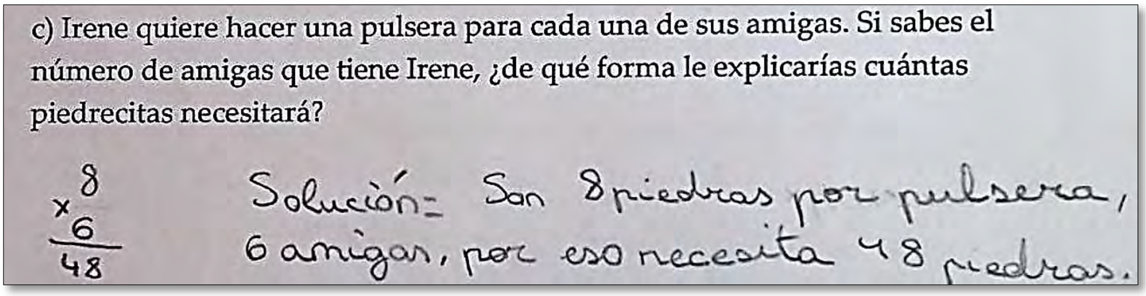
e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

Según los principios del EOS, intervienen diferentes objetos tales como: números particulares, uso de tablas en algunos casos o el número de piedras. El tipo de lenguaje que se usa puede ser: natural, numérico o icónico. También se dan a conocer que casi todos los estudiantes respondieron al problema propuesto por medio de reducción a la unidad y la mayoría expresó la regla general en base a esta. Cuando hay un reconocimiento de la generalidad, los estudiantes lo hacen usando el lenguaje de tipo natural.

A continuación, se muestran los niveles de algebrización en que se encuentran algunos de los apartados del problema propuesto, acordes con las soluciones presentadas (véase Figura 4).

Figura 4

Solución del apartado c) con un nivel 0 de algebrización



c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 6 \\ \hline 48 \end{array}$$

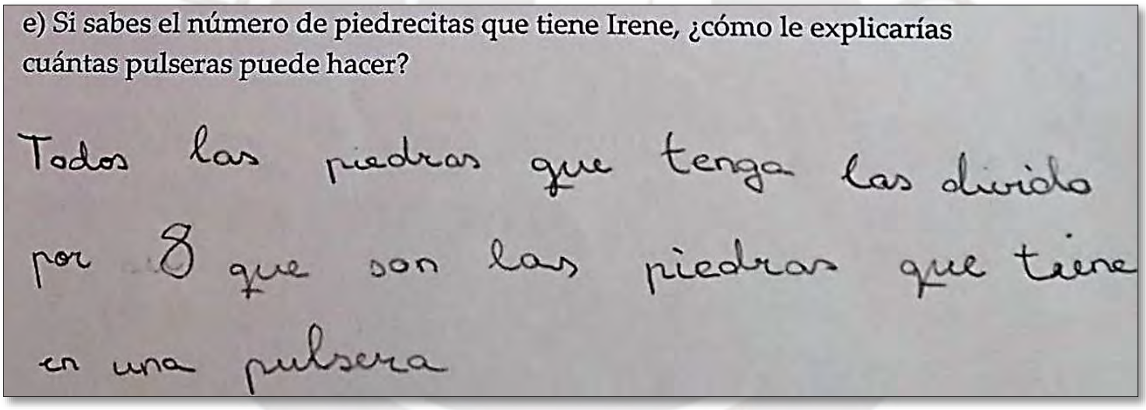
Solución: Son 8 piedras por pulsera, 6 amigas, por eso necesita 48 piedras.

Fuente: Burgos y Godino (2019, p. 139)

En la Figura 4 se muestra la solución del apartado c) con la realización de la operación de la multiplicación con números particulares. Acorde a lo descrito en los niveles del RAE por Godino et al. (2014a), no conlleva realizar un proceso de generalización. Ahora, observamos la solución del apartado e) (véase Figura 5).

Figura 5

Solución del apartado e) con un nivel 1 de algebrización



e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

Todas las piedras que tenga las divido por 8 que son las piedras que tiene en una pulsera

Fuente: Burgos y Godino, (2019, p. 139)

En la Figura 5 se puede observar que el estudiante ha realizado una generalización de tipo contextual, lo cual lo lleva a manifestar una relación función entre el número de piedras y el número de pulseras.

Por tanto, la aplicación de estos niveles de algebrización antes descritos, a tareas referidas de proporcionalidad, aporta criterios para analizar los diversos significados en la construcción creciente del razonamiento proporcional. En esta misma línea, Burgos y Godino (2019) consideran que, por medio de tareas introductorias sobre proporcionalidad, a partir de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones referidas a la identificación de propiedades homogéneas y aditivas de la función de proporcionalidad, se puede favorecer a que los estudiantes muestren un progreso desde formas intuitivas hacia niveles superiores de razonamiento algebraico. Esto último justifica el interés para nuestra investigación.

En esta misma línea, Fernández y Llinares (2012), centran su investigación en el análisis de algunas características del desarrollo del razonamiento proporcional desde la Educación Primaria a la ESO (en el contexto español). Así, estos autores ponen de manifiesto que existe una dificultad en los estudiantes, de distintas edades, entre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo en actividades matemáticas de tipo proporcional, puesto que hay estudiantes que usan el método aditivo para su resolución. Esto resulta muy importante para nuestra investigación, ya que los resultados que se obtengan por parte de los estudiantes, con el desarrollo de los diferentes problemas sobre tablas de proporcionalidad, se podrá observar si hay una fuerte carga aditiva en las soluciones dadas.

Ahora se revisará literatura respecto al uso de tablas de valores a partir de problemas de proporcionalidad, tal como se muestra a continuación.

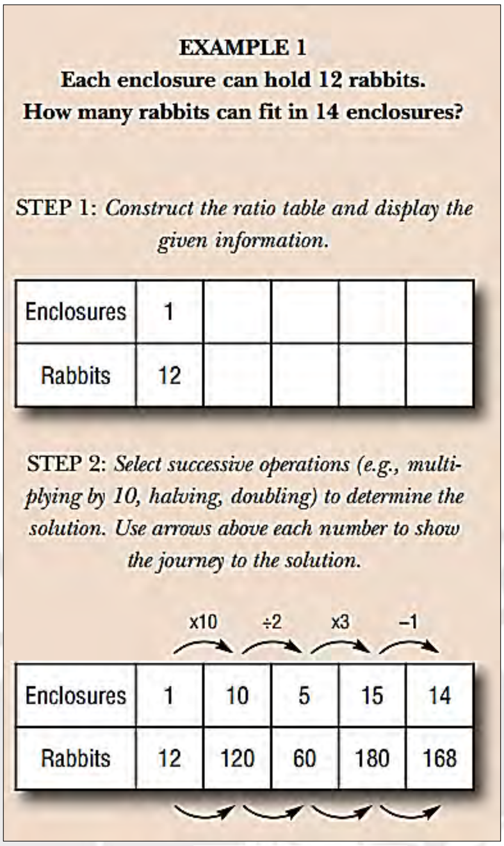
1.2.3 Antecedentes en torno al uso de tablas de valores en problemas de proporcionalidad

Schliemann et al. (2001), observan el proceso de transición del álgebra a la aritmética como una manera de pensar entre las relaciones de números y medidas particulares, hasta describir relaciones entre variables, y ellos afirman que es aquí donde los estudiantes requieren trabajar con problemas que les permitan articular ciertos patrones entre las variables que aparecen en dichas situaciones. De esta manera las tablas de valores juegan un papel importante, ya que este proceso le permitirá al estudiante registrar diferentes resultados por cada fila, así como la búsqueda de ciertos patrones.

En coherencia con lo anterior, Dole (2008) sostiene que el uso de tablas de proporcionalidad permite a los educandos desarrollar estrategias mentales o de tipo numéricas como: reducción a la mitad, duplicar, etc. Esta autora considera que dichas tablas son una herramienta que permite observar la relación entre dos cantidades y magnitudes. Así, en la investigación se muestra cómo se usan tablas de proporcionalidad para resolver una situación problemática (véase Figura 6).

Figura 6

Uso de tabla de proporcionalidad para resolver una situación problemática



EXAMPLE 1
Each enclosure can hold 12 rabbits.
How many rabbits can fit in 14 enclosures?

STEP 1: *Construct the ratio table and display the given information.*

Enclosures	1				
Rabbits	12				

STEP 2: *Select successive operations (e.g., multiplying by 10, halving, doubling) to determine the solution. Use arrows above each number to show the journey to the solution.*

x10 ÷2 x3 −1

Enclosures	1	10	5	15	14
Rabbits	12	120	60	180	168

Fuente: Dole (2008, p. 19)

En la Figura 6 se puede observar que los estudiantes relacionan cantidades, magnitudes y también pueden realizar las operaciones aritméticas para calcular lo solicitado.

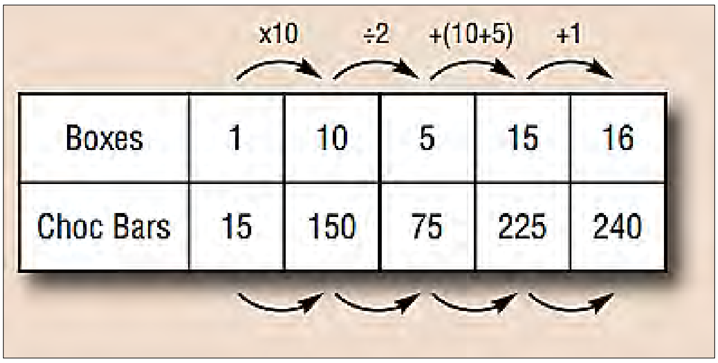
Esta investigación resulta relevante para nuestro trabajo ya que pretendemos diseñar problemas de contexto en el que se presenten tablas de proporcionalidad que exijan a los estudiantes relacionar magnitudes y cantidades, explorar patrones numéricos y hallar los valores faltantes mediante operaciones; dichas tareas irán de menor a mayor complejidad.

De esa manera se espera contribuir a que los estudiantes desarrollen un razonamiento proporcional, es decir, que sean capaces de: traducir datos, condiciones algebraicas, sea capaz de comunicar y argumentar su comprensión sobre relaciones de tipo algebraicas, usa estrategias para encontrar reglas generales, etc.

Dole (2008), también considera que los valores que puedan ir en las tablas no necesariamente deben de estar colocadas de menor a mayor, sino que pueden variar, es decir, no necesariamente aparecerán de manera ascendente, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7

Tabla de proporcionalidad con valores variados



Boxes	1	10	5	15	16
Choc Bars	15	150	75	225	240

Fuente: Dole (2008, p. 20)

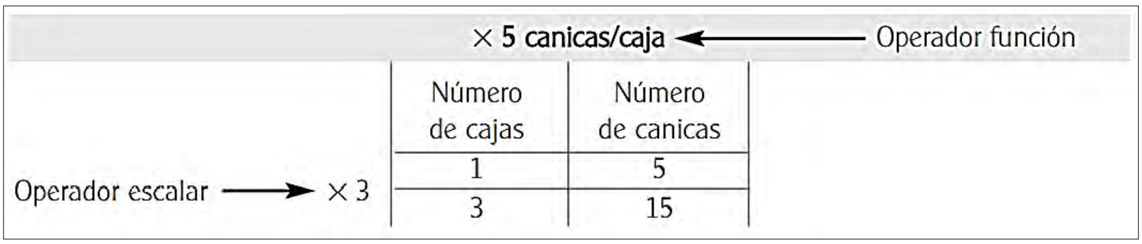
En nuestra investigación tendremos en cuenta actividades como la que muestra la Figura 8, al planificar tareas sobre proporcionalidad siguiendo las sugerencias de Dole (2008).

Por otro lado, el trabajo de Block (2006) sobre razón, múltiplo y su vinculación con la operación de multiplicación de los números naturales, proporciona elementos que podemos considerar tanto en la elaboración de los problemas de proporcionalidad como en el análisis de las respuestas de los estudiantes, como se verá a continuación.

Block (2006) sostiene, en primer lugar, que la operación de multiplicación se puede introducir en los primeros grados a partir de situaciones sencillas de proporcionalidad. Propone el siguiente ejemplo: "*una caja tiene 5 canicas, ¿cuántas canicas hay en 3 cajas?*, los alumnos aprenden a establecer la equivalencia entre la suma 5 canicas + 5 canicas + 5 canicas y la multiplicación 3 veces 5 canicas" (2006, p. 8). Vergnaud, citado en Block (2006), llama a estos problemas como *isomorfismo de medidas*, y en ellas identifica dos tipos de relaciones multiplicativas: operador escalar y operador función. Estas relaciones, Block (2006) las pone en evidencia en el siguiente ejemplo (véase Figura 8).

Figura 8

Relaciones multiplicativas: operador escalar y operador función



Número de cajas	Número de canicas
1	5
3	15

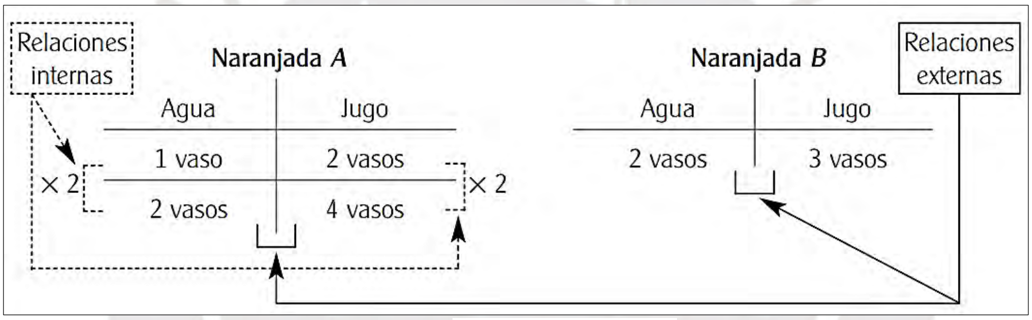
Fuente: Block (2006, p. 9)

En relación con lo anterior, (Soto 1995; Hart 1988), citados en Block (2006), ponen de manifiesto que los estudiantes suelen usar más los operadores escalares que el operador función. Esto servirá para nuestra investigación ya que dentro de lo que corresponda al análisis de las respuestas de los estudiantes, evaluaremos si ellos han sido capaces de considerar más un tipo de relación multiplicativa, antes descritas.

También se señala que la noción de razón se pone en juego a partir de situaciones de cantidades variables con razón constante y esto se corresponde con los problemas de proporcionalidad, en donde se busca un valor faltante. A partir de las situaciones planteadas se puede establecer razones (relaciones) internas y razones (relaciones) externas entre los datos. Las razones internas se corresponden con el operador escalar y las razones externas se corresponden con el operador función. Esto se ilustra en la Figura 9.

Figura 9

Relaciones internas y externas presentes situaciones problemáticas



Fuente: Block (2006, p. 12)

La construcción del concepto de proporción se construye a partir de la integración de las relaciones tanto internas como externas. Este aporte nos será de utilidad al momento de elaborar los problemas, ya que incluso se pueden establecer comparaciones entre dos situaciones y, por medio de las preguntas que se elaborarán y los resultados que se obtengan, se podrá analizar si los estudiantes son capaces de comprender ambos tipos de relaciones o hay mayor preponderancia por manejar mejor un tipo de relación que otra.

Block (2006), a partir de la secuencia didáctica “se cambian fichas por estampas”, considera dentro de su diseño los siguientes elementos: a) propósito didáctico; b) la situación básica con sus reglas de juego; c) las variables didácticas como: variables no numéricas, variables numéricas y los procedimientos; d) otras variantes de la situación básica. Estos elementos nos ayudarán en la construcción de nuestros problemas de proporcionalidad, así como en la modificación de las tablas, lo cual vuelve a ser un aporte importante para nuestra investigación.

En investigaciones más recientes, Block (2021) presenta un estudio sobre una secuencia didáctica de proporcionalidad, aunque centra su foco en la comparación de razones por medio de problemas propuestos y se espera que a partir de la secuencia didáctica “los saltos de las ranas”, los alumnos logren manipular las medidas no enteras de los saltos a través de razones de números naturales, apoyándose en propiedades de la proporcionalidad. Se parte de una hipótesis en la que se hace referencia a que un trabajo con razones, previo a su expresión con fracciones, puede contribuir al conocimiento de la proporcionalidad, y a sentar bases para el estudio posterior de las fracciones.

Los aspectos mencionados anteriormente, serán tomados en nuestra investigación como parte de las variables didácticas que permitirán evidenciar cambios en la tarea que realice el estudiante. Así, por ejemplo, podrían relacionar cantidades, manejar un determinado campo numérico, reducción a la unidad, etc.

Por lo tanto, como parte de los resultados de la investigación de Block (2021) se llegó a que la secuencia didáctica favoreció en los estudiantes el aprendizaje de la noción de razón, así como el desarrollo de la capacidad de argumentación, sobre todo cuando se formulan y se debaten reglas generales.

Finalmente, se presentan algunos antecedentes en torno al razonamiento proporcional, en la formación de futuros docente y profesores en ejercicio.

1.2.4 Antecedentes en torno al razonamiento proporcional y los niveles del RAE en la formación de futuros docentes y profesores en ejercicio

En el trabajo de Rivas et al. (2012), se sostiene que en lo que respecta sobre el conocimiento pedagógico del contenido, se ha observado un creciente interés por el estudio del conocimiento del docente. Por tanto, en cuanto a nuestro foco de interés, Rivas et al. (2012) manifiestan que hay respaldo científico y académico en relación con el estudio del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de la *proporcionalidad*. La investigación de Rivas et al. (2012), considera el razonamiento proporcional como una habilidad importante dentro del trabajo que se realiza con los estudiantes del nivel medio y avanzado de acuerdo a los lineamientos pedagógicos del currículo y no necesariamente debe quedar en la memorización de estrategias, mecanismos y plantear el mismo tipo de problemas. Así, estos autores consideran la formación inicial del profesorado para hacer frente ante lo anteriormente mencionado.

Asimismo, este estudio, en el que además de trabajar con estudiantes también se analizan respuestas de un grupo de futuras maestras, se analiza el problema de proporcionalidad en base a elementos propios del EOS, tales como: *identificación de los objetos matemáticos* en correspondencia con sus respectivos *significados*. Así, se presentan unos niveles del razonamiento proporcional propuestos por Khoury (2002), tal como se observa en la Figura 10.

Figura 10

Niveles del razonamiento proporcional en el problema de Mr. Tall/Mr. Short

Nivel I (Ilógico)	El estudiante no proporciona explicación, exhibe un cálculo ilógico o una adivinanza, o realiza una estimación general sobre la base de una observación descriptiva...
Nivel A (Aditivo)	El estudiante enfoca las diferencias entre 6 y 4 botones, y luego asume que la misma diferencia debe existir cuando se usan los clips…
Nivel TR (Transicional)	El estudiante usa un enfoque aditivo dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura… por cada dos botones hay un clip adicional…
Nivel R (Razón)	El estudiante usa una relación de razón constante o hace una comparación multiplicativa de las medidas de ambas figuras…

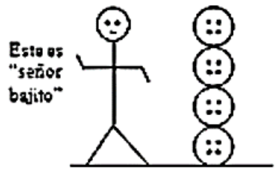
Fuente: Rivas, Godino y Castro (2012, p. 566)

A continuación, se muestra la solución de un problema de proporcionalidad realizada por tres estudiantes del 6to grado, tal como se muestra en la Figura 11.

Figura 11

Solución del problema de proporcionalidad por tres estudiantes del 6to grado

***Cuestión 2:** La altura de "señor bajito" es 4 botones, mientras la altura de "señor alto" es 6 botones. Si usamos clips, la medida de "señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida con clips?*



Respuestas de los niños:

Nicolás: "señor alto" mide 10 clips, porque él es alto, por tanto 4 + 6 = 10.

Ruth: "señor alto" mide 8 clips, 6 – 4 = 2, y 6 + 2 = 8 clips.

Florencio: "señor alto" mide 9 clips. "Señor bajito" mide 6 clips, 2 más que 4. Por tanto, por cada dos botones hay un clip más. Lo mismo debería suceder con "señor alto" por lo que (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 9

Fuente: Rivas, Godino y Castro (2012, p. 568)

Según las soluciones presentadas por los tres estudiantes (Nicolás, Ruth y Florencio), tal como se puede observar en la Figura 11, se corresponde con los tres primeros niveles de razonamiento proporcional tal como se describen en la Figura 10, donde se ha omitido el nivel R (Razón). Esta omisión, según lo que manifiestan Rivas et al. (2012), es porque a los estudiantes de 6to de Primaria no se les puede exigir llegar al nivel de razonamiento proporcional (nivel R).

Así también en la investigación de Rivas et al. (2012), se señala que la mayoría de las futuras maestras se muestran muy favorables en proponer un único método de resolución que permita resolver los problemas de razonamiento proporcional. Por esta razón, Rivas et al. (2012), propone que los profesores, tanto en formación como en servicio, diseñen problemas que sean retadores para los estudiantes. Además, refieren que deben contar siempre con niveles apropiados de conocimiento para la adecuada enseñanza de las matemáticas.

En esta misma línea, Burgos et al. (2018), presentan una investigación en torno a la exploración de conocimientos iniciales y evaluar los niveles de algebrización en relación con las distintas soluciones de problemas de proporcionalidad, con estudiantes de un máster de profesorado en educación secundaria del contexto español. Así, Burgos et al. (2018), consideran que la proporcionalidad puede ser abordada desde diferentes contextos o significados, y por esta razón la formación de los docentes no debe ser ajena a esta realidad. Aún autores como Rivas (2013), sostiene que las investigaciones en torno al razonamiento proporcional en la formación de profesores aún son escasas (esto último podría ser considerado como una prospectiva para nuestra investigación, el seguir trabajando con docentes en ejercicio y en formación).

Por otro lado, Burgos et al. (2018), dentro de su investigación concuerda con Riley (2010) y Lamon (2007), en que los docentes tanto en formación como en ejercicio presentan dificultades en torno a la enseñanza de la proporcionalidad, y una de las causas puede ser: el apoyarse excesivamente en algoritmos que no van más allá de una multiplicación cruzada; y se espera que los estudiantes solo se dediquen a resolver operaciones meramente de tipo aritméticas, dejando de lado actividades u otros modos de razonamiento que permita que los estudiantes evolucionen en su razonamiento algebraico.

Asimismo, el estudio de Burgos et al. (2018) ha tomado elementos del EOS y del RAE para el análisis de las actividades con los docentes del máster, así como también toma en cuenta los niveles del RAE, como se han descrito anteriormente. Resulta relevante para nuestra investigación, porque pone en alerta la urgencia de que los profesores deben desarrollar competencias en este campo de la didáctica, y este estudio que realizaremos es un intento más de exploración que ayudará en esa mejora de la práctica pedagógica, no solo para el investigador, sino también para los docentes de matemáticas de nuestra institución educativa, sobre todo en lo que respecta a la temática de la proporcionalidad, con miras a que los estudiantes evolucionen en su razonamiento algebraico. En esta misma línea, Godino et al. (2014a) manifiestan que en la formación del profesor se debe contemplar la construcción de nociones, procesos y significados de tipo algebraicos. Solo así se logra contar con maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico en todos los niveles educativos de la escolaridad.

1.3 Justificación

A continuación, se presentan argumentos para sustentar el presente trabajo de investigación, cuyo foco de atención se centra en analizar de qué manera las actividades que involucran tablas de valores en contexto de proporcionalidad pueden contribuir a desarrollar el RAE.

La comunidad de investigadores ha desarrollado estudios en relación con el objeto matemático de la proporcionalidad, desde perspectivas epistemológicas y didácticas. Hay una creciente demanda de potenciar el razonamiento algebraico en los primeros años de la educación escolar. Así, Burgos y Godino (2019), sostienen que se requiere del diseño y experimentación de nuevas situaciones que involucren la construcción de tablas de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, teniendo en cuenta los niveles propios de algebrización. En esta misma línea, estos autores consideran muy importante dar la oportunidad a los estudiantes de desarrollar una comprensión conceptual de lo que es la proporcionalidad y que no se reduzca a la aplicación meramente memorística de técnicas o procedimientos sin más.

Así, desde el EOS se han tomado elementos propios para poder analizar la actividad matemática del estudiante tales como: los diferentes significados, los objetos primarios, tipos de configuraciones, niveles del RAE, etc. Dichos elementos permiten analizar cómo trabajan los estudiantes y reflexionar sobre las competencias didáctico-matemáticas de cada docente. Por tal motivo, en la presente investigación también resultará relevante ya que proporcionará una nueva visión sobre la problemática que se está abordando, donde permitirá que tanto investigadores como docentes puedan identificar nuevas cuestiones sobre las actividades proporcionales, que son modeladas por tabla de valores.

De otro lado, resulta pertinente mencionar que en la presente investigación se tendrá como respaldo el Diseño Curricular Nacional del Perú (2016), ya que las capacidades y competencias que deben desarrollar los estudiantes en la realización de las actividades matemáticas, se regirán bajo los lineamientos planteados en dicho documento curricular. Es así que se proponen, desde el área de Matemática, que los estudiantes desarrollen y vinculen las siguientes competencias: Resuelve problemas de cantidad; Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; Resuelve problemas de forma, movimiento y localización; y Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Las competencias mencionadas anteriormente son transversales, es decir, se encuentran en todos los grados de la escolaridad, desde primer grado de Primaria hasta quinto grado del nivel Secundaria. En esta investigación nos centraremos en la siguiente competencia matemática: *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio*, teniendo en cuenta que estamos en el V ciclo de la Educación Básica Regular (EBR), ya que atendiendo a las tablas de proporcionalidad se pueden establecer relaciones entre las magnitudes presentes en la actividad de proporcionalidad, analizar qué sucede si una magnitud cambia y que pasa con la otra magnitud presente, si se usa el signo igual como equivalencia entre los valores de dichas magnitudes presentes, etc. En esta misma línea, en el Currículo Nacional enfatiza en que:

> El estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos. (Ministerio de Educación, 2016, p. 243)

Interpretamos esta descripción de la competencia en términos del RAE y afirmamos que ello implica también que los estudiantes deben desarrollar un razonamiento algebraico, que apunte cada vez a mayores niveles de algebrización.

Por un lado, se podrá analizar el paso desde un lenguaje natural hasta el uso de un lenguaje matemático, si se establecen relaciones entre las variables presentes, si se utilizan propiedades de linealidad, o se logra avanzar en el campo de los conjuntos numéricos (desde los naturales hasta el campo de los racionales positivos), si hay o no un reconocimiento de tipos de progresiones, etc. Esto dependerá del diseño de las tareas de proporcionalidad, usando tablas de valores, que proponga el docente de modo tal que contribuyan a desarrollar el RAE, así como sus niveles de procesos correspondientes.

Por otro lado, se puede observar que los estudiantes deben desarrollar capacidades que van desde: la traducción de datos, comunicación de relaciones algebraicas, uso de estrategias y la argumentación de afirmaciones (Ministerio de Educación, 2016). Y el trabajo que se hará desde la resolución de problemas con tablas de proporcionalidad, será el escenario adecuado para que puedan llegar a alcanzar dicha competencia matemática antes descrita. Es importante recalcar que en este presente estudio se trabajará con estudiantes que cursan el sexto grado de Educación Primaria, correspondiente al V ciclo de la Educación Básica Regular (EBR).

El presente estudio pretende tener un impacto a nivel del contexto peruano, ya que contribuirá no solo a ampliar la investigación en el campo de la Didáctica del álgebra hasta ahora realizada en el Perú, concretamente con el trabajo sobre el objeto matemático de la proporcionalidad, sino que también será de utilidad para los docentes en servicio, ya que ayudaría al desarrollo de su competencia didáctico-matemático. Así, los resultados que se obtengan en esta investigación pretenden contribuir “a superar la brecha o ruptura mediante la cual se describe, con frecuencia, la práctica algebraica que se realiza en educación secundaria, frente al trabajo matemático que se realiza en educación primaria” (Godino et al., 2012, p. 507).

Finalmente, este trabajo de investigación pretende contribuir con situaciones sobre proporcionalidad, modeladas con el uso de tablas de valores, teniendo en algunos casos como mediador a las hojas de cálculo. De esa manera se busca favorecer el tránsito de un significado proporcional de la linealidad a uno funcional.

1.4 Formulación del problema

Tomando en cuenta los aspectos generales antes descritos, así como los antecedentes de esta investigación, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características deben tener las tablas de proporcionalidad y de qué herramientas se dispone para promover la evolución de los niveles de razonamiento algebraico elemental en estudiantes del sexto grado de Educación Primaria?

1.5 Objetivos de la investigación

A partir de la formulación del problema, establecemos los siguientes objetivos general y específicos que se detallan a continuación.

1.5.1 Objetivo general

Analizar de qué manera el uso de las tablas de proporcionalidad y la modificación de los datos, permite la evolución de los niveles de razonamiento algebraico elemental en estudiantes del sexto grado de Educación Primaria.

1.5.2 Objetivos específicos

Para lograr dicho objetivo general, se mencionan a continuación los siguientes objetivos específicos:

- Proponer una secuencia de actividades, en las cuales, los elementos de las tablas de proporcionalidad se modifiquen, y permitan que los estudiantes requieran de nuevas estrategias para poder completarlas.
- Identificar los objetos y procesos movilizados, en las respuestas de los estudiantes, y analizarlos con rasgos propios del razonamiento algebraico elemental.
- Analizar si la modificación de los valores de las variables didácticas genera cambios en términos del razonamiento algebraico elemental.
- Analizar si el uso de la herramienta de la hoja de cálculo del Excel permite desarrollar un nivel de razonamiento algebraico mayor.

Capítulo II: Aspectos teóricos y metodológicos de la investigación

En la presente investigación se tomarán en cuenta algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007), para poder analizar los diversos datos que se recogerán sobre las cuatro tareas de proporcionalidad, modelizadas con tablas de valores, implementada a los estudiantes. En particular, se considerarán las categorías de los objetos matemáticos que propone el EOS, la dualidad *extensivo-intensivo* de toda práctica matemática, el significado institucional pretendido y los niveles del RAE, cuando los estudiantes resuelvan situaciones que involucran tablas de proporcionalidad.

2.1 Elementos teóricos

2.1.1 Objetos matemáticos, dualidades y el significado institucional pretendido según el EOS

Desde el EOS se entiende por objeto matemático a cualquier entidad ya sea de tipo material o inmaterial que forma parte de toda práctica matemática. Además, se proponen los siguientes tipos de objetos primarios (Burgos y Godino, 2019) tal como se describen a continuación:

- *Situaciones-problema*
  Hace referencia a ejercicios, problemas que pueden ser intra-matemáticas o extra-matemáticas.
- *Lenguajes*
  Tiene que ver con los términos y expresiones matemáticas, notaciones, símbolos, representaciones de tipo gráficas con sus diversos registros.
- *Conceptos*
  Deben ser entendidas como entidades matemáticas que pueden aparecer como descripciones o definiciones.
- *Proposiciones*
  Son las diversas propiedades, atributos y enunciados que hacen alusión a los conceptos.
- *Procedimientos*
  Son las técnicas de cálculo, las diferentes operaciones algorítmicas.
- *Argumentos*
  Son los enunciados necesarios que van a servir para poder justificar o demostrar las proposiciones y diversos procedimientos.

Es importante mencionar que estos objetos matemáticos serán usados en la presente investigación cuando se describan, en el análisis *a priori*, los objetos primarios implicados, al momento en que los estudiantes se enfrenten a cada una de las 4 tareas matemáticas diseñadas. También, estos objetos primarios se tendrán en cuenta en el análisis *a posteriori*, específicamente en los descriptores relativos a la resolución de las tareas, que luego permitirán analizar la evolución de los niveles del RAE en los estudiantes.

Además, en esta investigación se tendrá en cuenta una de las dualidades presentes en toda práctica matemática, que es la dualidad *extensivo-intensivo* (particular-general) y sus procesos asociados de *particularización-generalización*. Esta manera de abordar la generalización mediante el desarrollo de problemas de proporcionalidad, modelizada por tablas de valores, permitirá analizar también la evolución en los niveles del RAE, que va desde resolver la tarea con lápiz y papel hasta el uso de la hoja de cálculo en Excel con la introducción de variables mediante el nombre de las celdas.

Por otro lado, en la presente investigación se tendrá en cuenta el *significado institucional pretendido* que implica un sistema de prácticas que han sido planificadas respecto a un objeto matemático, que forma parte de un proceso de estudio (Godino et al., 2007). Este elemento teórico del EOS se enfoca en nuestro estudio, concretamente, cuando se señalan los objetos matemáticos que la institución educativa, a la que pertenecen nuestros sujetos de investigación, ha pretendido cuando los estudiantes cursaban el 5to grado de Educación Primaria.

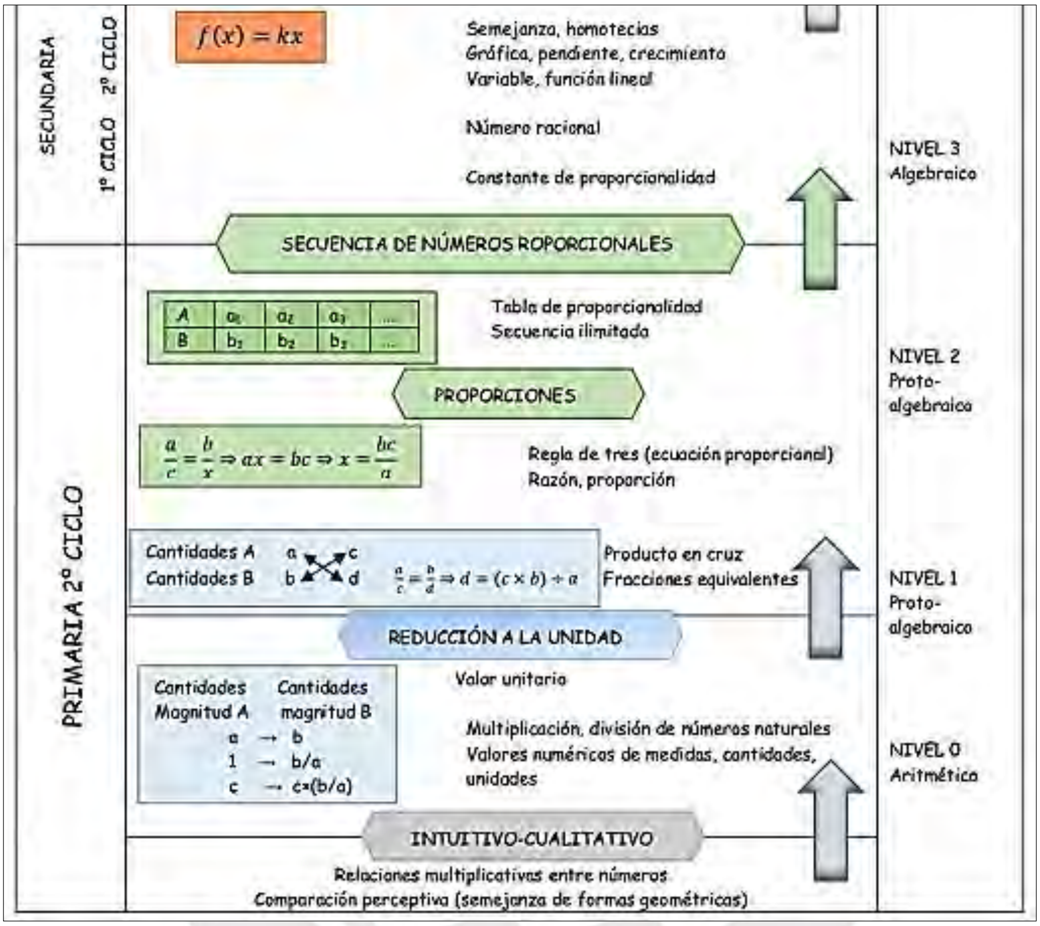
2.1.2 Niveles de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) adaptados a la proporcionalidad

Burgos y Godino (2019) establecen ciertos indicadores que permiten determinar el nivel RAE en las prácticas matemáticas que se asocian a la proporcionalidad. Así, es que logran adaptar los niveles del RAE a dicho objeto matemático, teniendo en cuenta sus diferentes significados, tal como se explican a continuación: *nivel 0 de algebrización*, relacionado al significado aritmético, tiene que ver con la aplicación de procedimientos de diferentes cálculos de tipo aritméticos. Es decir, se aplican operaciones con los valores numéricos que intervienen en la práctica matemática, no hay intervención de objetos ni procesos de tipo algebraicos. El *nivel proto-algebraico 1*, asociado al significado proto-algebraico, se centra en la noción de proporción mediante el procedimiento de reducción a la unidad. El *nivel proto-algebraico 2*, se centra en la solución de problemas con el valor faltante, basada con el uso de razones y proporciones, involucra una variable o incógnita y el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax = B$.

Para poder comprender un poco más lo mencionado anteriormente, Godino et al. (2020), proponen significados relacionados a la proporcionalidad con su respectivo nivel de algebrización, tal como se muestra en la Figura 12.

Figura 12

Significados de la proporcionalidad en relación con los niveles de algebrización



Fuente: Godino, Burgos y Wilhelmi (2020, p. 156)

2.1.3 Tablas de proporcionalidad y los niveles del RAE

Burgos (2020), manifiesta que el uso de las tablas de proporcionalidad va a permitir al estudiante, además, que pueda formular hipótesis, extraer conclusiones entre los valores que va encontrando, las variaciones y las relaciones posibles entre los valores de la tabla. Inclusive menciona que puede llegar a reconocer una propiedad fundamental de las proporciones que consiste en que: *si se suman los valores antecedentes y se divide por la suma de los consecuentes de una proporción, es igual a cualquiera de las razones de dicha proporción*. Véase la Figura 13.

Figura 13

Tabla de proporcionalidad y la relación de sus valores

Cantidades de magnitud A	a_1	a_2	...	a_i	...	a_j	...	$a_i + a_j$	...	a_k	...	$n \times a_k$	...
Cantidades de magnitud B	b_1	b_2	...	b_i	...	b_j	...	$b_i + b_j$	...	b_k	...	$n \times b_k$	...

Fuente: Burgos (2020, p. 86)

También, Burgos (2020) sostiene que dichas tablas de valores permiten reconocer razones tanto internas como externas, y es así como se van introduciendo propiedades que son propias de la función lineal, estudiada en la educación Secundaria.

Por su parte, Gaita et al. (2023) enfatizan en que hay variables didácticas, que son tomadas en cuenta cuando los estudiantes trabajan con tablas de proporcionalidad, tales como: i) *Relación de multiplicidad*, que tiene que ver con las relaciones de tipo “doble-mitad” hasta llegar a una generalización “múltiplo-divisor”; ii) *Los procedimientos de cálculos*, implican la aplicación de estrategias de cálculo mental o escrito con diversos valores que pueden ser desde pequeños o valores mucho más grandes; iii) *Exhaustividad y orden*, va en relación en cómo se distribuyen o aparecen los valores en las tablas de proporcionalidad donde no necesariamente el estudiante va a encontrar una regla de correspondencia entre dichos valores, puede añadir otros valores según su razonamiento seguido en la actividad.

Es importante mencionar que en la tabla no siempre los valores aparecerán de manera ascendente o descendente, sino que pueden aparecer en desorden (Dole, 2008); iv) *Relación entre valores*, implica una relación entre los valores intervinientes en la tabla de proporcionalidad, por ejemplo teniendo en cuenta la Figura 13, el estudiante puede hacer una correspondencia entre $\frac{a_1}{b_1}$ o establecer relaciones equivalentes para encontrar el valor faltante, por ejemplo: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_x} \rightarrow b_x = \frac{b_1 . a_2}{a_1}$; y v) *Campo numérico*, es decir, los valores faltantes en la tabla de proporcionalidad pueden pertenecer al conjunto de los números naturales o al conjunto de los números racionales positivos.

Para hacer explícita la relación que existe entre la práctica matemática desarrollada al resolver tareas con tablas de proporcionalidad y los objetos primarios que se movilizan, se proponen unos indicadores RAE los cuales se describen en la Figura 14.

Figura 14

Indicadores RAE en relación con los objetos primarios del EOS presentes al resolver tablas de proporcionalidad

Objeto	Nivel RAE 0-1	Nivel RAE 1-2	Nivel RAE 2-3
Lenguajes	Natural Uso de flechas o símbolos reiterativos que relacionan celdas consecutivas de una misma variable	Natural y matemático en relaciones de igualdad "aritmética" entre valores de las variables	Matemático en relaciones de igualdad "por equivalencias" entre las variables
Conceptos	Progresiones aritméticas	Progresiones geométricas Razón en **N**	Función lineal Razón en **Q+** Constante de proporcionalidad
Procedimientos	Doble-mitad, reducción a la unidad en **N**	Reducción por agrupamientos mínimos en **N**	Reducción a la unidad en **Q+**
Propiedades	Multiplicidad y divisibilidad	Propiedades de la función lineal en **N**: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $f(na) = n\,f(a)$ $(n, a, b \in \mathbf{N})$	Propiedad de la función lineal en **Q+** asociada a la constante de proporcionalidad: $f(k) = kf\,(1),\ (k \in \mathbf{Q+})$
Argumentos	Determinación de relaciones entre valores consecutivos en una serie ordenada de valores de menor a mayor	Determinación de un patrón general que relaciona valores consecutivos	Identificación del coeficiente de proporcionalidad para la determinación de cualquier valor

Fuente: Gaita et al. (2023, p. 56)

Teniendo en cuenta las prácticas matemáticas que llevan a cabo los estudiantes al resolver tareas con tablas de proporcionalidad, Gaita et al. (2023, p. 56-57) identifican "tipos" de estudiantes teniendo en cuenta el nivel de RAE que logran alcanzar y el proceso en que se encuentran, tal como se describen a continuación.

a) Nivel RAE 0-1: Los estudiantes hacen uso de un lenguaje natural, como el manejo de flechas donde relacionan ciertos valores de una misma variable o magnitud. Hacen uso de algunos saberes previos como doble o mitad. Siguen sobre todo una progresión de tipo aritmética en cada fila mas no establecen ningún tipo de relación entre dichas variables. Los valores que aparecen en dichas tablas se ordenan de menor a mayor, se completa toda la tabla y se repiten las operaciones entre ambas columnas.

b) Nivel RAE 1-2: También se hace uso de un lenguaje natural, se pueden reconocer progresiones de tipo geométricas en las filas de cada tabla de proporcionalidad y el estudiante es capaz de establecer relaciones entre las variables. Se hace uso de algunas propiedades de linealidad para encontrar valores faltantes que no necesariamente van en orden ascendente los valores de las filas correspondientes.

c) Nivel RAE 2-3: En este nivel el estudiante hace uso de un lenguaje matemático, emplea el signo igual para establecer equivalencia entre valores de las variables presentes en la tabla de proporcionalidad. Se reduce a la unidad en el conjunto de los números racionales positivos, o hace uso de las fracciones equivalentes. También se emplean propiedades de linealidad y el estudiante logra identificar el coeficiente de proporcionalidad.

2.2 Elementos metodológicos considerados en la investigación

Es importante señalar que la presente investigación es de carácter experimental, ya que el experimento que se ha llevado a cabo ha consistido en llevar a cabo un modo de enseñar y luego se ha analizado el impacto de dicha enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, la metodología de investigación que se ha considerado en el presente estudio es la *ingeniería didáctica*. Esta metodología se caracteriza por presentar un esquema experimental vinculado a las *realizaciones didácticas*, es decir, que toma en cuenta: la *concepción*, *realización*, *observación* y el *análisis* de secuencias didácticas (Artigue et al., 1995). Es importante también mencionar que la *ingeniería didáctica* se diferencia de otras investigaciones, que también se basan en experimentaciones llevadas en aula, por el registro y validación, es decir, las investigaciones que acuden a la experimentación en aula se ubican desde una perspectiva de tipo comparativa y con una validación de tipo externa, con comparaciones estadísticas con grupos experimentales y de control. Esto no ocurre con la *ingeniería didáctica*, que se basa en el registro de estudios de caso y su validación es totalmente interna, apoyada en la comparación del análisis *a priori* y *a posteriori*.

Por su parte, Godino et al. (2013), sostienen que dicho método "se trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados" (p. 7). En esta investigación, se emplea el método de la *ingeniería didáctica* (Artigue et al., 1995), como *investigación basada en el diseño* desde el punto de vista del EOS (Godino et al., 2014b). Tales fases se describen a continuación:

- *Análisis preliminar*

  En esta fase se realiza una revisión de la literatura acudiendo a varias fuentes de información, como artículos de divulgación científica e investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Luego, consideraremos los resultados más importantes de investigaciones que guardan relación con nuestro trabajo. Para facilitar la lectura se han agrupado en las siguientes categorías: a) Antecedentes en torno al Razonamiento Algebraico Elemental (RAE); b) Antecedentes en torno a la proporcionalidad en matemática y para el desarrollo del RAE; c) Antecedentes en torno al uso de tablas de valores en problemas de proporcionalidad; y d) Antecedentes en torno al razonamiento proporcional en la formación de futuros docentes y profesores en ejercicio.

El análisis preliminar se ha desarrollado en el capítulo I de este documento.

- *Concepción y análisis a priori*

  En esta fase el investigador considera variables didácticas que son necesarias y pertinentes con respecto al problema de estudio. En el análisis *a priori* se enfoca sobre todo en las características de una determinada situación didáctica diseñada y que será implementada con estudiantes. En esta fase, se predicen los comportamientos de los estudiantes y su significado, es decir, se plantea un conjunto de hipótesis cuya validación se hará al confrontar el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

  El esquema del análisis *a priori* de esta investigación seguirá el propuesto por Lacasta et al. (2009), donde considera aspectos como: presentación de la tarea, los conocimientos matemáticos implicados, el tiempo, los comportamientos esperados y las acciones que llevará a cabo el profesor.

- *Implementación*

  Se implementa la situación didáctica diseñada a los estudiantes; se observa las distintas interacciones que tienen los estudiantes (sobre todo en el trabajo de equipo y en la discusión de los resultados) así como los recursos que emplean y la evaluación correspondiente en cada momento de aprendizaje (inicio, desarrollo y cierre de la sesión de aprendizaje). Es importante mencionar que se ha tenido en cuenta el *modelo didáctico dialógico-colaborativo*, planteado por Godino et al. (2020), para poder observar el papel que han cumplido tanto el profesor como el estudiante durante el desarrollo de las cuatro tareas de proporcionalidad, modelizadas por tablas de valores. Asimismo, en esta fase se describirán las diversas etapas que se han tenido en cuenta en la implementación de las tareas de proporcionalidad: se detallarán las características propias del investigador y del grupo de los estudiantes; además, se mencionarán los objetos matemáticos trabajados con los estudiantes antes de la fase de la implementación, así como las expectativas de la institución misma. Por otro lado, también se describirán todos los procesos llevados a cabo en la implementación en relación con el trabajo matemático realizado por los estudiantes.

- *Análisis a posteriori: resultados y su discusión*

  En esta fase se recogen los diferentes datos que han sido tomados en cuenta en la experimentación. Es importante mencionar que solo se considerarán los resultados obtenidos en las actividades individuales de las cuatro tareas de proporcionalidad. Para dicho análisis se han considerado diferentes instrumentos tales como: videograbaciones, descriptores relativos a la resolución de las cuatro tareas, y el estudio de casos de un grupo de estudiantes.

Capítulo III: Diseño y análisis *a priori*

En el presente capítulo se hace un diseño de una situación didáctica que consta de 4 tareas matemáticas de proporcionalidad, modelizadas mediante tablas de valores. También se han diseñado momentos de trabajo de tipo individual, dialéctico-colaborativo y micro institucionalizaciones.

Estas tareas se basan en una situación contextualizada en relación con la proporcionalidad, concretamente en situaciones de mezclas y pinturas, que ya han sido abordados, por ejemplo, por Tourniaire y Pulos (1985) y Gaita et al. (2023). Por su parte, Obando et al. (2014), enfatizan en la importancia de este tipo de problemas, para la evolución en el razonamiento proporcional de los estudiantes, y resaltan algunos aspectos que se deben tomar en cuenta como: *tipos de estrategias elementales* (acumulaciones coordinadas, valor unitario, comparación de razones, razones intensivas, razones escalares, estrategias erróneas, estrategias de retroceso); *tipos de situaciones* (problemas de tasas o de mezclas, de conceptos matemáticos o de otras ciencias); y *variables centradas en la situación misma* (estructurales –razones enteras o no, lugar de la incógnita en la proporción, complejidad numérica; o de contexto –tipos de situación, tipo de magnitud y la familiaridad con la situación).

Es importante mencionar que las dos primeras actividades, sobre tablas de valores, que aparecen en este trabajo se han experimentado en una investigación previa de Gaita et al. (2023, p. 59), que además consideran ciertas variables didácticas que nos serán de referencia para el trabajo con los estudiantes. Cuando estas variables didácticas intervienen en una determinada situación didáctica, asumen valores diferentes que provocan un cambio en el conocimiento (Brousseau, 2007). Dichas variables didácticas que se han considerado en nuestra investigación son las siguientes:

- *Variable didáctica 1: relación de multiplicidad*
  Se da desde relaciones sencillas como “doble-mitad” entre los valores consecutivos de la misma variable, a su generalización como “múltiplos-divisores”.
- *Variable didáctica 2: procedimientos de cálculo*
  Que va desde valores “pequeños” donde los cálculos mentales son más sencillos a valores “grandes” donde se requiere de cálculos escritos.
- *Variable didáctica 3: exhaustividad y orden*
  Con todos los valores de la tabla, que van entre un mínimo y uno máximo de manera ordenada, teniendo cuenta una regla de formación, a valores de la tabla que están de manera dispersa y no ordenados, donde el reconocimiento de la regla de formación demanda de alguna estrategia como: ordenar, añadir ciertos valores, determinar una regla de formación, aplicar la reducción a la unidad, etc.

- *Variable didáctica 4: relación entre valores*

  Que va desde una relación de tipo "local" (razón externa) entre las parejas de los valores consecutivos (ya sea de valores faltantes o razones equivalentes) a una relación de tipo "global", que implique determinar una regla general de formación.
- *Variable didáctica 5: campo numérico*

  Va desde el campo de los números naturales (N) al campo de los números racionales positivos (Q+).
- *Variable didáctica 6: uso de tablas dinámicas*

  Desde la obtención de valores con lápiz y papel hasta la obtención de valores calculando la razón de los litros de pintura azul y pintura blanca por cociente de los valores en las primeras celdas, con ayuda de la hoja de cálculo del Excel, por ejemplo: =B2/B1 o el uso fijo de este valor (B3) para el cálculo en las sucesivas celdas (constante de proporcionalidad).
- *Variable didáctica 7: columna en blanco en la tabla de valores*

  Cuando inicialmente la tabla de valores no cuenta con una columna en blanco hasta cuando la tabla de valores tiene una columna en blanco, que puede usarse para colocar valores que pueden ser: en relación con la "reducción a la unidad" o multiplicidad explícita de alguna relación entre variables.

Por otro lado, durante el diseño también se han considerado las variaciones que tendrían dichas variables didácticas antes descritas, en relación con el desarrollo de las cuatro tareas matemáticas, tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Variación de las variables didácticas en relación a las cuatro tareas matemáticas

	Variable didáctica 1	Variable didáctica 2	Variable didáctica 3	Variable didáctica 4	Variable didáctica 5	Variable didáctica 6	Variable didáctica 7
Tarea 1	Doble-mitad	Cálculo mental	Valor mínimo y máximo según una regla de formación	Relación local entre los valores. La razón externa es un valor entero	Campo de los números naturales (N)	Se trabaja con lápiz y papel	No contiene una columna en blanco
Tarea 2	Valores de la primera variable son múltiplos de 3	Se precisa de cálculos escritos	Valores de manera dispersa y no responden a una regla de formación	La razón externa es un valor racional positivo	Campo de los números racionales positivos (Q+)	Se trabaja con lápiz y papel	Contiene una columna en blanco
Tarea 3	Los valores presentes en la tabla no responden a una multiplicidad de un número	Se precisa de cálculos escritos y se hace uso de la calculadora simple y la calculadora de la hoja de cálculo de Excel	La tabla no es exhaustiva	La razón externa es un valor racional positivo	Campo de los números racionales positivos (Q+)	Se trabaja con lápiz y papel. Se hace uso de la tabla dinámica	Contiene una columna en blanco
Tarea 4	Los valores presentes en la tabla no responden a una multiplicidad de un número	Se hace uso de la calculadora de la hoja de cálculo del Excel, aunque también queda como opcional el uso de la calculadora simple	La tabla no es exhaustiva	La razón externa es un valor racional positivo	Campo numérico de los números racionales positivos (Q+)	Se hace uso de la tabla dinámica	Aparece una columna donde aparece un casillero en blanco en la primera fila de la primera variable

Por otro lado, también se han considerado unas condiciones o restricciones para un mejor desarrollo de la actividad sobre tablas de valores. Dichas restricciones son las siguientes:

Tiempo: En cada actividad se contará con un tiempo de trabajo. Responden a sesiones de 45 minutos por clase.

Intervención del profesor: Únicamente logra intervenir si el alumno solicita ayuda y le explica lo que consulta o cuando plantea preguntas para analizar las tareas presentadas por los estudiantes. Evitará intervenciones en donde se diga cómo resolver la tarea, pistas o algún tipo de indicio que pueda conducir a la resolución de la actividad matemática.

Uso de materiales: Los recursos que se usarán, según el desarrollo de cada una de las cuatro tareas matemáticas, son: uso de lápiz y papel, la calculadora simple y la hoja de cálculo de Excel.

Modalidad de trabajo: El trabajo que llevarán a cabo los estudiantes, será tanto individual como grupal. Esto será en las cuatro actividades.

A continuación, se presenta una situación didáctica y cuatro tareas, las cuales responden a variaciones de datos, que van a generar la necesidad de modificar las estrategias de solución; ello se asociará con rasgos de los distintos niveles de razonamiento algebraico. Así, para cada tarea: a) Se presenta el enunciado de la tarea; b) Se explicará qué valores toman las variables didácticas; c) Se describen los objetos matemáticos implicados; y d) Se describen los comportamientos matemáticos esperados (análisis de la tarea).

3.1. Análisis *a priori* de la tarea 1 de proporcionalidad con tablas de valores

3.1.1 Enunciado de la tarea

La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves.

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	**3**	**6**	**9**	**12**						**30**
Azul (litros)	**12**									

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

3.1.2 Valores que toman las variables didácticas

- *Relación de multiplicidad*: el primer valor de la variable 1 (litros de pintura blanca) es referente para completar los demás valores. Así, se puede observar que los valores siguientes corresponden al doble, triple, etc., de dicho número inicial que es 3. También se puede observar que todos los valores de la primera variable son múltiplos de 3.
- *Procedimientos de cálculo*: como se trata de valores "pequeños" el cálculo puede ser mental, aunque se debe precisar por escrito, con lápiz y papel, de cómo se ha completado la tabla de proporcionalidad.
- *Exhaustividad y orden*: la tabla de proporcionalidad es exhaustiva ya que los valores, en la primera fila, cuentan con un valor "mínimo" y un valor "máximo", según una regla de formación. Además, los valores de la primera variable van en orden ascendente.
- *Relación entre valores*: Se halla la razón externa entre el valor de los litros de pintura azul y el valor correspondiente a los litros de pintura blanca. Esto se da entre las parejas de los valores consecutivos, ya sea de valores faltantes o razones equivalentes.
- *Campo numérico*: tanto los valores de la tabla de proporcionalidad como la razón externa se encuentran en el campo de los números naturales (N).
- *Uso de tablas dinámicas*: en esta primera actividad, no se harán uso de las tablas dinámicas con ayuda de la hoja de cálculo del Excel.

- *Columna en blanco en la tabla de valores*: la tabla de proporcionalidad no contiene una columna en blanco.

3.1.3. Objetos primarios implicados

Desde el EOS, los objetos primarios que se pueden poner en juego en el desarrollo de esta primera tarea de proporcionalidad, se muestran en la Tabla 2. Además, se observa una correspondencia entre los objetos primarios implicados y las posibles acciones que se tomarían en cuenta al desarrollar la tarea en diferentes momentos.

Tabla 2

Objetos primarios y su correspondencia con las posibles acciones en la tarea 1

Objetos primarios	Acciones
Situación	Cuando lee la situación de proporcionalidad en el contexto de las mezclas de pinturas.
Lenguaje	Mediante un lenguaje natural, igualdad numérica o el uso de flechas que relaciona dos valores consecutivos en la tabla 1.
Procedimientos	Calcula los múltiplos de 3 y reconoce que los valores mostrados en la primera fila tienen como divisor común al 3.
Conceptos	Cuando se apoya en la definición de fracciones equivalentes, puede establecer la relación entre: $\frac{3}{12} = \frac{6}{24}$
Proposiciones	Cuando asocia que los valores de la primera fila van de 3 en 3. Cuando asocia mezclas de pintura para una cierta tonalidad.
Procedimientos y argumentos	Cuando el estudiante divide y concluye que hay un cociente que se repite en cada fracción equivalente encontrada. Además, justifica su resolución.

3.1.4. Descripción de los comportamientos matemáticos esperados

A continuación, se describirán los comportamientos matemáticos esperados por parte de los estudiantes. Es importante mencionar que también se hará mención sobre la intervención del docente con algunas preguntas en relación con la posible solución de la tabla de proporcionalidad brindada por el estudiante. Esta función que realiza el docente se conoce como *devolución*, es decir, es el acto por el cual el profesor establece unas condiciones para que los estudiantes hagan suya la producción de los nuevos saberes (Godino et al., 2020). Así, los comportamientos matemáticos esperados son los siguientes:

Los estudiantes completan la tabla de proporcionalidad siguiendo una sucesión de tipo aritmética, tanto en la fila de pintura blanca (primera variable) como en la fila de pintura azul (segunda variable), tal como se observa en la Figura 15.

Figura 15

Ejemplo de posible solución esperada aplicando un orden de tipo aditivo

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Blanca (litros)	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*
Azul (litros)	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*	*33*	*36*	*39*

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Fuente: elaboración propia

Ante esta solución, como se muestra en la Figura 15, se espera que los estudiantes tengan dificultades para interpretar los valores de las posibles mezclas. Es por ello que ante esa situación el docente puede intervenir en la discusión, que se tiene de tipo grupal, planteando la siguiente cuestión:

Si consideras que la alternativa es buscar una secuencia de suma en ambas filas, ¿tiene sentido que para 3 litros de pintura blanca se necesitan 12 litros de pintura azul; ahora, ¿con 6 litros de pintura blanca se necesiten 15 litros de pintura azul?

Si aún siguen con dudas, el docente les planteará una situación en otro contexto la siguiente interrogante:

¿Si tres galletas costaran 12 soles, tiene sentido que 6 galletas cuesten 15 soles? ¿Guarda relación el número de galletas con el precio que pagas? ¿Por qué? ¿Se cumplirá en todos los casos la relación de tipo aditiva?

Entonces, ¿qué debo cuidar o tener en cuenta para que haya relación entre ambas cantidades?

Se plantean estas preguntas para que los estudiantes observen que la relación aditiva no se cumple en todos los casos y sobre todo que al interpretar los datos no guarda coherencia con lo que se pide.

Otra solución esperada es que los estudiantes asocien los valores como *fracciones equivalentes* y hallen el valor faltante por amplificación, ya que este saber matemático lo han trabajado anteriormente. La posible solución se muestra en la Figura 16.

Figura 16

Ejemplo de posible solución esperada aplicando un orden de tipo multiplicativo

X10
X4
X3
X2
...

Blanca (litros)	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*
Azul (litros)	*12*	*24*	*36*	*48*	*60*	*72*	*84*	*96*	*108*	*120*

X2
X3
X4
...
X10

Fuente: elaboración propia

E inclusive algunos estudiantes podrían corroborar la relación que hay entre los valores de cada variable, dividiendo y así observar que el cociente se repite en cada división. Ello mostraría que hay una relación de proporción, tal como se observa en la Figura 17.

Figura 17

Ejemplo de posible solución esperada aplicando la razón 1:4

Blanca (litros)	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*
Azul (litros)	*12*	*24*	*36*	*48*	*60*	*72*	*84*	*96*	*108*	*120*
B/A	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***	***1/4***

Fuente: elaboración propia

Otra solución esperada es que hagan uso del valor de la unidad para poder completar dicha tabla y así establecer una regla de tres simple, que incluso puede hacer uso de igualdad de expresiones y aplicar el producto cruzado. Esta solución sería algo esperada, ya que los estudiantes han trabajado en su momento situaciones de fracciones equivalentes, con el uso de productos cruzados. Véase la Figura 18.

Figura 18

Ejemplo de posible solución esperada usando la unidad y producto cruzado

Blanca (litros)	*1*	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*
Azul (litros)	*x*	*12*	*24*	*36*	*48*	*60*	*72*	*84*	*96*	*108*	*120*

Fuente: elaboración propia

Posibles cálculos que podrían realizar los estudiantes:

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{12} \to 1.12 = 3.x$$
$$12 = 3x$$
$$\frac{12}{3} = x$$
$$4 = x$$
$$\frac{3}{12} = \frac{6}{x} \to 3.x = 12.6$$
$$3x = 72$$
$$x = \frac{72}{3}$$
$$x = 24$$

Así sucesivamente puede hallar el resto de valores en los casilleros faltantes.

3.2. Análisis *a priori* de la tarea 2 de proporcionalidad con tablas de valores

3.2.1 Enunciado de la tarea

La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla

que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	**6**	**15**	**21**	**9**	
Azul (litros)	**14**				

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

3.2.2 Valores que toman las variables didácticas

- *Relación de multiplicidad*: los valores consecutivos de la primera variable corresponden a una multiplicidad por 3.
- *Procedimientos de cálculo*: se precisa de cálculos escritos para hallar los valores que faltan en los casilleros.
- *Exhaustividad y orden*: la tabla de valores no es exhaustiva, pues los valores se presentan de manera dispersa y no responden a una regla de formación.
- *Relación entre valores*: A diferencia de la tarea 1, no se podrá encontrar la razón externa como valor entero, ya que ahora la razón externa será un valor racional positivo ($\frac{14}{6} = 2{,}3333\ldots$). Es decir, al establecer la relación entre el valor de la segunda variable con un valor de primera variable el resultado es un número fraccionario.
- *Campo numérico*: el procedimiento de la tarea 2 puede ser abordado desde el campo de los números naturales (N), aunque exige trabajar en el campo de los números racionales positivos (Q+).
- *Uso de tablas dinámicas*: no se hará uso de las tablas dinámicas, es decir, no se introducirá ninguna variable con el nombre de celdas del Excel.
- *Columna en blanco en la tabla de* valores: la tabla de proporcionalidad contiene una columna en blanco (un casillero en la primera variable y otro casillero la segunda variable), que animará al estudiante a determinar la razón 3:7 o colocar valores que correspondan a la multiplicidad explícita de dicha razón.

3.2.3 Objetos primarios implicados

A continuación, se presentan los objetos primarios y las posibles acciones que se tomarían en cuenta al desarrollar la tarea. Véase la Tabla 3.

Tabla 3

Objetos primarios y su correspondencia con las posibles acciones en la tarea 2

Objetos primarios	Acciones
Situación	Cuando lee la situación de proporcionalidad en el contexto de las mezclas de pinturas.
Lenguaje	Mediante un lenguaje natural, igualdad numérica o el uso de flechas que relaciona dos o más valores en la tabla 2.
Procedimientos	Calcula los múltiplos de 3 y reconoce que los números mostrados, en la primera fila, solo tienen como divisor común al 3.

Conceptos	Cuando se apoya en la definición de fracciones equivalentes, puede establecer la relación entre: $\frac{6}{14} = \frac{15}{35}$
Proposiciones	Cuando asocia mezclas de pintura para una cierta tonalidad.
Procedimientos y argumentos	Cuando el estudiante divide y concluye que hay un cociente que se repite en cada fracción equivalente encontrada. Además, es capaz de justificar su respuesta.

3.2.4 Descripción de los comportamientos matemáticos esperados

A continuación, se describirán los comportamientos matemáticos esperados por parte de los estudiantes, aunque al igual que la tarea 1, también se hará mención sobre la intervención del docente con algunas preguntas en relación con la posible solución de la tabla de proporcionalidad. Dichos comportamientos matemáticos esperados son los siguientes:

Los estudiantes pueden tener dificultades para completar la tabla, ya que los valores aparecen de manera dispersa y no ordenados. Puede que aún dependan de una relación más horizontal que vertical y empiecen a sumar o restar. Tal como se puede observar en la Figura 19.

Figura 19

Ejemplo de posible solución esperada en la actividad 2

+9 +6 - 12

Blanca (litros)	**6**	**15**	**21**	**9**	
Azul (litros)	**14**	**23**	**29**	**17**	

+9 +6 - 12

Fuente: elaboración propia

Ante este tipo de solución, se le podría plantear la siguiente pregunta al estudiante: *Si aplico la relación de adición y sustracción como muestra su solución, ¿qué valor iría en el casillero faltante? ¿Guarda coherencia si queremos mantener la misma tonalidad de azul? ¿Es posible? Explique.*

Otra solución esperada podría ser que asocien los valores como fracciones equivalentes por simplificación y completen los valores faltantes; inclusive pueden usar los dos últimos recuadros y colocar la razón 3:7 en el casillero en blanco, tal como se muestra en la Figura 20.

Figura 20

Ejemplo de posible solución esperada aplicando la noción de fracción equivalente

Blanca (litros)	**6**	**15**	**21**	**9**	**3**
Azul (litros)	**14**	**35**	**49**	**21**	**7**

Fuente: elaboración propia

El posible cálculo sería el siguiente:

$$\frac{6}{14} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{3}{7} \qquad \frac{15}{} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{3}{7}$$

Un número que dividido entre 5 resulte 7, es 35.

Otros estudiantes podrían corroborar la relación que hay entre los valores de cada fila, en términos de razón 3:7; y así observará que se repite en cada columna. Lo cual mostraría que hay una relación de proporción, tal como se muestra en la Figura 21.

Figura 21

Ejemplo de posible solución esperada estableciendo la razón 3:7

Blanca (litros)	**6**	**15**	**21**	**9**	**3**
Azul (litros)	**14**	**35**	**49**	**21**	**7**
B/A	**3/7**	**3/7**	**3/7**	**3/7**	**3/7**

Fuente: elaboración propia

Otra posible solución esperada, es que se pueda emplear el valor de la unidad para completar dicha tabla y así establecer una regla de tres simple, que inclusive puede hacer uso de igualdad de expresiones y aplicar el producto cruzado. Véase la Figura 22.

Figura 22

Ejemplo de posible solución esperada usando la unidad y producto cruzado

Blanca (litros)	6	15	21	9	1
Azul (litros)	14	35	49	21	X

Fuente: elaboración propia

Posibles cálculos:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} = \frac{6}{14} \to 1.14 = 6.x$$

$$14 = 6x$$

$$\frac{14}{6} = x$$

$$\frac{7}{3} = x$$

$$\frac{6}{14} = \frac{15}{x} \to 6.x = 15.14$$

$$6x = 210$$

$$x = \frac{210}{6}$$

$$x = 35$$

Así sucesivamente puede hallar el resto de valores en los casilleros faltantes.

Ante la solución, como se muestra en la Figura 21, el profesor podría preguntar lo siguiente:

Según la solución dada, ¿consideras que se mantiene la misma tonalidad de azul? ¿Por qué?

Se plantea al estudiante esta pregunta para reforzar la noción de proporcionalidad entre dos cantidades y, sobre todo, aclararle que no guarda relación siempre con la parte aditiva ni de sustracción. Además, el estudiante puede quedarse con los cálculos numéricos y perder de vista el contexto del problema planteado.

3.3. Análisis *a priori* de la tarea 3 de proporcionalidad con tablas de valores

3.3.1 Enunciado de la tarea

Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)		4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)				14						

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

3.3.2 Valores que toman las variables didácticas

- *Relación de multiplicidad*: los valores que aparecen en la tabla de proporcionalidad no responden a la multiplicidad de un número específico. Hay números consecutivos y un valor lejano.
- *Procedimientos de cálculo*: se precisa de cálculos escritos para hallar los valores que faltan en los casilleros. Inclusive aparece un valor “máximo” que tendrá que ser parte de las operaciones que se realicen. Se recuerda que pueden usar la calculadora simple para las operaciones respectivas.
- *Exhaustividad y orden*: la tabla de valores no es exhaustiva, pues los valores se presentan de manera dispersa y no responden a una regla de formación. Para esta tarea, el reconocimiento de la regla de formación exige, por ejemplo, la estrategia de añadir valores y la reducción a la unidad.
- *Relación entre valores*: ya no se podrá hallar la razón externa como valor entero, sino que ahora la razón externa será un valor racional positivo ($\frac{14}{6} = 2{,}3333\ldots$). Es decir, al establecer la relación entre el valor de la segunda variable con un valor de primera variable el resultado es un número fraccionario y no un valor entero.
- *Campo numérico*: ahora se trabaja con el conjunto numérico de los racionales positivos (Q+).
- *Uso de tablas dinámicas*: se hará uso de las tablas dinámicas, es decir, se usará la hoja de cálculo como calculadora y se introducirán variables con nombres de celdas. Todo esto en un segundo momento de la sesión de clases. Así, se puede ampliar la

tabla agregando más celdas y además se podrá corroborar el coeficiente de proporcionalidad con el uso de la calculadora de Excel.

- *Columna en blanco en la tabla de* valores: la tabla de proporcionalidad contiene una columna en blanco (un casillero en la primera variable y otro casillero la segunda variable), que animará al estudiante a determinar la razón 3:7 o colocar valores que correspondan a la multiplicidad explícita de dicha razón.

3.3.3 Objetos primarios implicados

Los objetos primarios que se pueden poner en juego en el desarrollo de esta tercera tarea de proporcionalidad y las posibles acciones por parte de los estudiantes, se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4

Objetos primarios y su correspondencia con las posibles acciones en la tarea 3

Objetos primarios	Acciones
Situación	Cuando lee la situación de proporcionalidad en el contexto de las mezclas de pinturas.
Lenguaje	Mediante un lenguaje natural, numérico o cuando hace uso de alguna variable al establecer las relaciones entre valores.
Conceptos	Cuando se apoya en la definición de fracciones equivalentes, puede establecer la relación entre: $\frac{6}{14} = \frac{7}{x}$ Cuando se apoya en la definición de número decimal, al obtener un valor aproximado de 0,43 al dividir 6/14.
Proposiciones	Cuando asocia mezclas de pintura para una cierta tonalidad.
Procedimientos y argumentos	Cuando el estudiante divide y concluye que hay un cociente que se repite en cada fracción equivalente encontrada. Además, es capaz de justificar su respuesta.

3.3.4 Descripción de los comportamientos matemáticos esperados

Se describirán los comportamientos matemáticos esperados por parte de los estudiantes correspondientes a las posibles soluciones esperadas. También se hará mención sobre la intervención del docente con algunas preguntas en relación con la posible solución de la tabla de proporcionalidad (fase de la *devolución*). Dichos comportamientos matemáticos esperados son los siguientes:

Los estudiantes pueden tener dificultades para completar la tabla ya que no encuentran asociarlo con múltiplos de ningún número de referencia; así que pueden usar el primer casillero en blanco ubicando el valor de la unidad y la variable “x” en el segundo casillero de la segunda variable. Véase la Figura 23.

Figura 23

Una primera solución de la tarea de proporcionalidad 3

Blanca(litros)	**1**	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	**x**			14						

Fuente: elaboración propia

Pueden hallar el valor de “x” aplicando un producto cruzado de la siguiente manera.

$$\frac{1}{x} = \frac{6}{14} \rightarrow 1.14 = 6x$$

$$14 = 6x$$

$$\frac{14}{6} = x\ldots\text{Simplifico}$$

$$\frac{7}{3} = x$$

$$2{,}333\ldots = x$$

(hallan este valor haciendo uso de la calculadora simple)

Conociendo el valor de “x” podría hallar con la misma estrategia los demás valores.

Otra solución esperada podría ser que asocien los valores como fracciones equivalentes, tomando como referencia a $\frac{6}{14}$, aplicando producto cruzado sin necesidad de llegar a establecer la unidad, y así lograr y completar los valores faltantes. La posible solución se muestra en la Figura 24.

Figura 24

Ejemplo de posible solución esperada aplicando la noción de fracción equivalente mediante el producto cruzado

Blanca(litros)	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	**9.333**	**11.666**	14	**16.333**	**18.666**	**21**	**23.333**	**25.666**	**641.666**

Fuente: elaboración propia

Los posibles cálculos podrían ser los siguientes:

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{14} \rightarrow 4.14 = 6.x$$

$$56 = 6x$$

$$\frac{56}{6} = x\text{…Simplifican}$$

$$\frac{28}{3} = x \approx 9.333$$

$$\frac{5}{x} = \frac{6}{14} \to 5.14 = 6.x$$

$$70 = 6x$$

$$\frac{70}{6} = x\text{…Simplifican}$$

$$\frac{35}{3} = x$$

$$11.6666 = x$$

Algún estudiante seguro se percata de que, si a cada valor de la primera casilla lo multiplica por la constante $\frac{7}{3}$, completará la tabla más rápido. E inclusive, un grupo podría corroborar la relación que hay entre los valores de cada fila, dividiendo, y así observará que el cociente se repite en cada división. Ello mostraría que hay una relación de proporción.

Algunos estudiantes podrían llegar a este nivel debido a que ya han trabajado situaciones con fracciones equivalentes. Quizá se darán con la sorpresa de que el valor faltante no siempre es un valor entero, sino que puede ser una fracción positiva (Q+).

Ante esto, el profesor les puede plantear la siguiente pregunta a los estudiantes:

Si por 4 litro de pintura blanca necesito 9,333 ...litros de pintura azul, entonces ¿es conveniente comprar solo 9 litros de pintura azul ya que al redondear el valor decimal es mejor trabajar con el entero más próximo? ¿Estás de acuerdo? ¿Cómo fundamentas tu respuesta?

El estudiante seguramente responderá que tendrá que comprar 10 litros de pintura azul, para evitar que haya variaciones en tonalidad de azul. Como también puede pensar que es mejor contar con 9 litro solamente por la aproximación (por tanto, pierde el contexto del problema).

Ante la mencionado anteriormente, Tourniaire y Pulos (1985), sostienen que es más accesible para los estudiantes trabajar con problemas de tipos discretos, ya que sus soluciones son valores enteros, a diferencia de los problemas de tipo continuos que presentan valores decimales. Ante esto es importante mencionar que esto dependerá de la institución misma, ya que puede solo pedir trabajar con problemas cuyas respuestas sean valores enteros y no racionales o viceversa.

Por otro lado, en un segundo momento de la sesión, los estudiantes al hacer el uso del Excel podrían resolver la actividad de la siguiente manera:

a) Plasmar lo mismo que en lápiz y papel los valores resultantes. Además, puede usar su calculadora simple y colocar las operaciones en el mismo Excel, tal como se muestra en la Figura 25.

Figura 25

Posible solución donde se plasma lo mismo que en lápiz y papel al Excel

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Pintura blanca		4	5	6	7	8	9	10	11	275
Pintural azul		9,333	11,666	14						
4x14/6=9,333										
5x14/6 = 11,666										

Fuente: elaboración propia

b) otro estudiante puede dividir $\frac{14}{6}$ con ayuda de su calculadora y el valor resultante lo multiplica por todos los valores de primera variable, tal como se muestra en la Figura 26.

Figura 26

Posible solución donde se multiplica $\frac{14}{6}$ *por cada valor de la variable 1 usando el Excel*

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Pintura blanca		4	5	6	7	8	9	10	11	275
Pintural azul		9,332	11,665	14	16,331					
14/6=2,333										
4x2,333=9,332										
5x2,333=11,665										
7x2,333=16,331										

Fuente: elaboración propia

c) Algún estudiante puede que resuelva esta actividad haciendo uso de las fórmulas con las celdas y halla así el resto de los valores en cada celda, tal como se muestra en la Figura 27.

Figura 27

Posible solución donde se hace uso de las fórmulas con las celdas del Excel

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Pintura blanca		4	5	6	7	8	9	10	11	275
Pintura azul		=D1*F2/F1		14						

Fuente: elaboración propia

Con este tipo de solución, el profesor les puede plantear la siguiente pregunta *¿Será posible mantener la misma tonalidad de azul para cualquier valor si extendemos los valores en las celdas? ¿Cómo fundamentas tu respuesta?*

3.4. Análisis a priori de la tarea 4 de proporcionalidad con tablas de valores

3.4.1 Enunciado de la tarea

Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla, pero esta vez quiere hacer uso de la hoja de cálculo.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	6	21	46	127	356	
Azul (litros)	14					612

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla usando la hoja de cálculo.

3.4.2 Valor que toman las variables didácticas

- *Relación de multiplicidad*: los valores que aparecen en la tabla de proporcionalidad no responden a la multiplicidad de un número específico.
- *Procedimientos de cálculo*: se precisa de cálculos escritos para hallar los valores que faltan en los casilleros, con el apoyo de la calculadora simple para las operaciones respectivas (cuando se trabaja con hoja y papel). También se puede hacer uso de la hoja de cálculo del Excel para realizar operaciones con las fórmulas con celdas o usar el programa como calculadora.
- *Exhaustividad y orden*: la tabla de valores no es exhaustiva, pues los valores se presentan de manera dispersa (a pesar que están de manera ascendente) y no responden a una regla de formación. Para esta tarea, el reconocimiento de la regla de formación exige, por ejemplo, la estrategia de la reducción a la unidad o se puede añadir una columna en blanco para trabajar con la relación 3:7.
- *Relación entre valores*: ya no se podrá hallar la razón externa como valor entero, sino que ahora la razón externa será un valor racional positivo ($\frac{14}{6} = 2{,}3333\ldots$). Es decir, al establecer la relación entre el valor de la segunda variable con un valor de primera variable el resultado es un número fraccionario y no un valor entero.
- *Campo numérico*: ahora se trabaja con el conjunto numérico de los racionales positivos (Q+).

- *Uso de tablas dinámicas*: se modeliza la tarea de proporcionalidad mediante tablas dinámicas, tanto de manera individual como de manera grupal; nuevamente en esta tarea de proporcionalidad, se hará uso de Excel. Así, se puede ampliar la tabla agregando más celdas y, además, se podrá corroborar el coeficiente de proporcionalidad con el uso de la calculadora de Excel.
- *Columna en blanco en la tabla de* valores: la tabla de proporcionalidad no contiene una columna en blanco. Se puede observar que en la tabla aparece un casillero en blanco en la primera fila de la primera variable, algo que difiere de las tres tareas anteriores.

3.4.3 Objetos primarios implicados

Los objetos primarios que se pueden poner en juego en el desarrollo de esta segunda tarea de proporcionalidad, modelizada con tabla de valores, se muestran en la siguiente Tabla 5, donde se observa una correspondencia entre dichos objetos y las posibles acciones.

Tabla 5

Objetos primarios y su correspondencia con las posibles acciones en la tarea 4

Objetos primarios	Acciones
Situación	Cuando lee la situación de proporcionalidad en el contexto de pinturas.
Lenguaje	Mediante un lenguaje natural, numérico o cuando hace uso de alguna variable al establecer las relaciones entre valores.
Conceptos	Cuando se apoya en la definición de fracciones equivalentes, puede establecer la relación entre: $\frac{6}{14} = \frac{21}{x}$, para hallar el valor faltante. Cuando se apoya en la definición de número decimal, al obtener un valor aproximado de 0,43 al dividir 6/14.
Proposiciones	Cuando asocia mezclas de pintura para una cierta tonalidad.
Procedimientos y argumentos	Cuando el estudiante divide y concluye que hay un cociente que se repite en cada fracción equivalente encontrada. Además, es capaz de justificar su respuesta.

3.4.4. Descripción de los comportamientos matemáticos esperados

Se describirán los comportamientos matemáticos esperados por parte de los estudiantes. También se hará mención sobre la intervención del docente con algunas preguntas en relación con la posible solución de la tabla de proporcionalidad (fase de la *devolución*). Dichos comportamientos matemáticos esperados se mencionan a continuación:

Los estudiantes pueden encontrar dificultades para completar la tabla de proporcionalidad, ya que no encuentran asociarlo con múltiplos de ningún número de referencia. Así que pueden agregar un casillero más y ubicar la unidad. Véase la Figura 28 .

Figura 28

Una primera solución de la actividad de aplicación 4

C	D	E	F	G	H	I	J
Blanca (litros)	1	6	21	46	127	356	
Azul (litros)	=D2*E3/D7	14					612

C	D	E	F	G	H	I	J
Blanca (litros)	1	6	21	46	127	356	
Azul (litros)	2.33333333	14					612

Fuente: elaboración propia

Conociendo el valor que corresponde a la cantidad de litros de pintura azul, en relación con un litro de pintura blanca, el estudiante podría hallar, con la misma estrategia, los demás valores, usando la hoja de cálculo de Excel.

Otra solución esperada podría ser que asocien los valores como fracciones equivalentes, tomando como referencia a $\frac{6}{14}$, aplicando producto cruzado, sin necesidad de llegar a establecer la unidad, y así logra y completar los valores faltantes. La posible solución se muestra en la Figura 29.

Figura 29

Ejemplo de posible solución esperada, aplicando la noción de fracción equivalente, mediante el producto cruzado

C	E	F	G	H	I	J
Blanca (litros)	6	21	46	127	356	
Azul (litros)	14	=E3*F2/E2				612

C	E	F	G	H	I	J
Blanca (litros)	6	21	46	127	356	
Azul (litros)	14	49	107.333333	=G3*H2/G2		612

Fuente: elaboración propia

Un grupo podría corroborar la relación que hay entre los valores de cada fila, dividiendo; y así observar que el cociente se repite en cada división. Lo cual mostraría que hay una relación de proporción, tal como se puede observar en la Figura 30.

Figura 30

Ejemplo de posible solución esperada, dividiendo el valor de pintura blanca con el valor de la pintura azul

C	E	F	G	H	I	J
Blanca (litros)	6	21	46	127	356	262.285714
Azul (litros)	14	49	107.333333	296.333333	830.666667	612
B/A	0.42857143	0.42857143	0.42857143	0.42857143	0.42857143	=J2/J3

Fuente: elaboración propia

Algunos estudiantes podrían llegar a este nivel debido a que ya han trabajado situaciones con fracciones equivalentes. Quizá observarán que el valor faltante es una relación positiva (Q+).

Frente a la última solución esperada, el docente puede realizar la siguiente pregunta:

Si se quiere ampliar dicha tabla con otros valores, ¿es posible seguir manteniendo la misma tonalidad de pintura azul? ¿Con qué otros valores comprobarías?

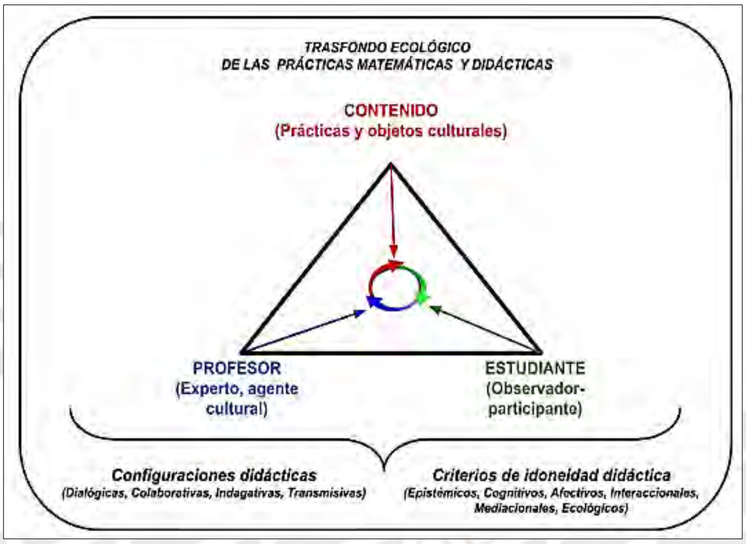
¿Los valores de las celdas necesariamente tienen que ser enteros positivos? ¿Qué puedes decir al respecto?

Capítulo IV: Implementación

Para llevar a cabo el desarrollo de la implementación, es importante mencionar que se ha tenido en cuenta el *modelo didáctico dialógico-colaborativo*, planteado por Godino et al. (2020). Con la finalidad de observar el papel que han cumplido tanto el profesor como el estudiante durante el desarrollo de la situación didáctica. Dicho modelo se observa en la Figura 31.

Figura 31

Propuesta del modelo dialógico-colaborativo



Fuente: Godino, Burgos y Wilhelmi (2020, p. 159)

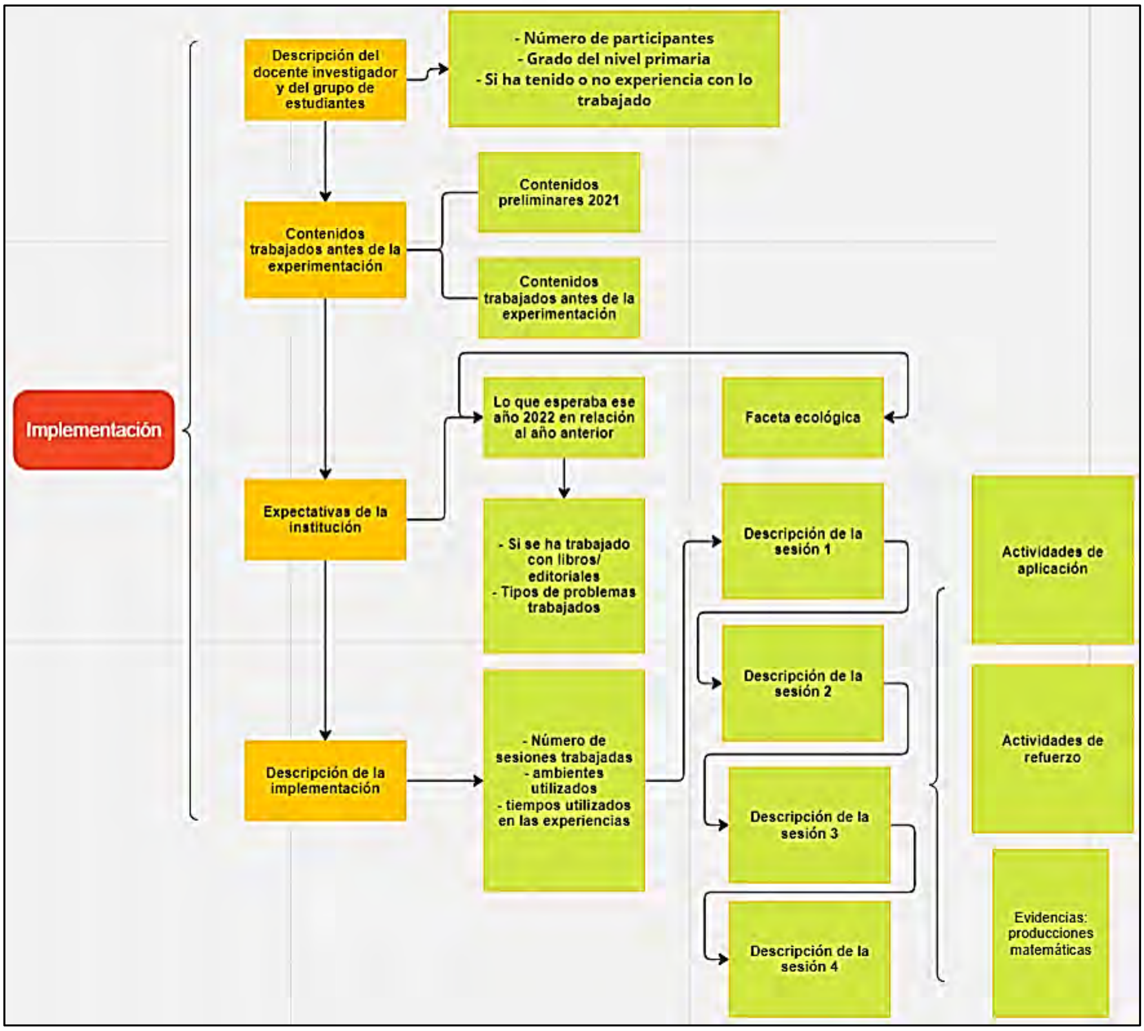
En este modelo se puede observar que el profesor (considerado como el experto) y los estudiantes (observador y participante), trabajan en conjunto en la solución de determinados problemas donde se pone en juego un determinado objeto matemático. En el caso de nuestra investigación, se toma en cuenta este modelo didáctico cuando se han aplicado las tareas de proporcionalidad, con tablas de valores, donde se ha considerado ese primer encuentro con el objeto matemático en el que el docente y los estudiantes trabajan juntos para resolver las diversas tareas matemáticas.

Así, en toda esa trayectoria didáctica se han considerado todas las acciones por parte de los estudiantes y las intervenciones que ha tenido el profesor. Este último, conoce los diversos procesos implicados en la tarea matemática, gestiona las diversas estrategias para la adecuada transmisión contextualizada de los saberes, comprende los avances de los aprendizajes, así como la evaluación de competencias matemáticas implicadas, y todo esto en aras de la creciente autonomía de los estudiantes (Godino et al., 2020). También, se han considerado todos los medios o recursos utilizados para la realización de cada tarea.

Asimismo, en este capítulo se describirán las diversas fases que se han tenido en cuenta en la implementación de la situación didáctica: perfil del docente investigador; descripción del grupo de estudiantes; todos los instrumentos empleados para recabar información. Además, se mencionarán las expectativas de la institución misma. Por otro lado, también se describirán todos los procesos llevados a cabo en la implementación en relación con el trabajo matemático realizado por los estudiantes. Todos estos aspectos se pueden observar en la Figura 32.

Figura 32

Esquema de la implementación



Fuente: elaboración propia

4.1 Perfil del docente investigador y del grupo de estudiantes

El docente investigador enseña en el área de matemática, tiene experiencia en el trabajo con estudiantes del sexto grado de Educación Primaria de la Educación Básica Regular (EBR) y en esta oportunidad se encuentra en un proceso de formación en

Didáctica de las Matemáticas y usará sus saberes que han sido adquiridos previamente, y cuyo trabajo con los estudiantes en aula le lleva a planificar o diseñar un proceso de instrucción sobre un determinado objeto matemático (concretamente con tablas de proporcionalidad) y ha comenzado a precisar o limitar lo que es dicho objeto matemático para la institución. De esta manera ha acudido a libros de texto, a los lineamientos curriculares y sobre todo a lo que la literatura en las investigaciones sostiene al respecto. Todo este sistema de prácticas ha servido como referencia para los estudiantes, así como para la evaluación de sus aprendizajes.

Por otro lado, también es importante considerar qué conocimientos tiene el docente investigador, más aún cuando abordará con los estudiantes el objeto matemático de tablas de proporcionalidad. Donoso et al. (2016), ponen de manifiesto que los docentes de matemáticas deben mejorar su formación es aspectos como: conocimientos matemáticos y didácticos y en el uso de recursos, así como el intercambio de experiencias. De esta manera, el docente investigador sí ha tenido experiencia con el trabajo de dicho objeto matemático en años escolares anteriores. Sin embargo, no tomó en cuenta en sus actividades otros elementos como: la exhaustividad en las tablas de proporcionalidad, el uso de tablas dinámicas, determinación de valores “mínimos” y “máximos” o la gestión en los cambios de variables didácticas.

Respecto a los sujetos de estudio que en un primer momento iban a participar en la implementación, estaba conformada por 47 estudiantes del sexto grado de la educación del nivel Primaria, cuyas edades oscilan entre 11 y 12 años. La distribución inicial estuvo conformada de la siguiente manera: 23 alumnos del 6to grado A y 24 alumnos del 6to grado B. Sin embargo, cabe mencionar que en el proceso hubo pocos estudiantes que no lograron participar en la fase de la implementación. Ambos grupos de estudiantes forman parte de la misma institución educativa, donde el docente investigador tiene a cargos ambas secciones A y B.

Por otro lado, es importante mencionar que los estudiantes, los sujetos de estudio de la presente investigación, cuando cursaban el quinto grado de Primaria en el año 2021, rindieron un examen diagnóstico de matemáticas que fue propuesto por el Ministerio de Educación del Perú. Una de las preguntas es sobre tablas de proporcionalidad y a la que se enfrentan los estudiantes con un tipo de problemas, donde su desarrollo exige respuestas de valores discretos y no continuos. Véase la Figura 33.

Figura 33

Pregunta del examen diagnóstico de matemática del quinto grado de Primaria sobre tablas de proporcionalidad

En la siguiente tabla, Jorge registra la cantidad de trozos de carne que usará según la cantidad de palitos que prepare.

Cantidad de palitos	1	2	3	4	...
Cantidad de trozos de carne	4	8	12	...	...

¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre la cantidad de palitos y la cantidad de trozos de carne mostrada en la tabla?

a) La cantidad de trozos de carne siempre es el doble de la cantidad de palitos.
b) La cantidad de palitos siempre es el doble de la cantidad de trozos de carne.
c) La cantidad de palitos siempre es el cuádruple de la cantidad de trozos de carne.
d) La cantidad de trozos de carne siempre es el cuádruple de la cantidad de palitos.

Fuente: Ministerio de Educación (2021, p. 13)

Cuando estos mismos alumnos cursaban el sexto grado de Primaria en el año 2022, se les presentó un problema con tablas de proporcionalidad mediante una ficha de refuerzo cara a la prueba censal que evalúa el Ministerio de Educación. Dicho problema de proporcionalidad se obtuvo del examen diagnóstico de matemáticas del año 2021 correspondiente al sexto grado de Primaria. El problema se presenta en la Figura 34.

Figura 34

Pregunta del examen diagnóstico de matemática del sexto grado de Primaria sobre tablas de proporcionalidad

Juan vende tres paquetes de mantequilla por S/5. Él elaboró la siguiente tabla para calcular la cantidad de dinero que tendría que cobrar según la cantidad de paquetes que venda.

Cantidad de paquetes	3	6	9	...		
Dinero por cobrar (S/)	5	10	15	...		

Juan vendió una docena y media de paquetes de mantequilla. ¿Cuánto dinero cobrará por esa venta?

a) S/60
b) S/30
c) S/20
d) S/18

Fuente: Ministerio de Educación (2021, p. 11)

Como se puede observar, ambas tablas de proporcionalidad se pueden resolver mediante una progresión de tipo aritmético, tanto en la primera como en la segunda variable. Se establece relaciones entre los datos y el estudiante los puede transformar en patrones de repetición cuya regla se asocia a la posición de sus elementos y patrones aditivos (Ministerio de Educación, 2016).

Es importante considerar que cuando los estudiantes cursaban el quinto grado de Primaria trabajaron con un sistema de prácticas que fueron planificadas por la institución; ahora que se encuentran en sexto grado de Primaria, han trabajado previamente dichos significados pretendidos, y que les han servido de apoyo para la solución de las tareas de proporcionalidad. Estos significados se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6

Significados institucionales pretendidos

- Operaciones en el conjunto de los números naturales
- Fracciones: fracciones equivalentes (por amplificación y por simplificación), comparación de fracciones, la fracción como operador
- Regla de tres simple directa (producto cruzado)
- Porcentajes
- Series
- Ecuaciones
- Decimales, operaciones con decimales
- Operaciones combinadas en el conjunto de los números naturales

4.2 Expectativas de la institución: aspectos curriculares y ecológicos

Lo que la institución pretende es que ahora los estudiantes que cursan el sexto grado de Primaria, puedan continuar trabajando con los objetos matemáticos tratados el año anterior, donde se pueda profundizar un poco más en ello y en el desarrollo de habilidades o capacidades que permitan al estudiante poder obtener mejores logros de aprendizaje, siempre en un ambiente donde se pueda aprender. Por otro lado, la institución ha establecido que el área de matemática debe implementar diferentes recursos tecnológicos. También en sexto grado de Primaria no se usarán libros de textos ni de actividades de ninguna editorial. Los tipos de problemas que se lleven a cabo en aula serán trabajados de manera contextualizada y cuyos resultados se acoplen al campo numérico que se vaya trabajando. Es importante mencionar, que los estudiantes han venido trabajando desde años anteriores con respuestas de tipo discretas que continuas; inclusive en las evaluaciones diagnósticas también se han considerado a que los estudiantes lleguen a un tipo de respuestas, donde los resultados son totalmente enteros positivos.

Ante lo mencionado anteriormente, se puede anticipar que cuando los estudiantes se enfrenten a estas tareas con tablas de proporcionalidad es muy probable que tengan dificultades cuando trabajen con estas actividades por el tipo de respuestas, ya que puede generarles dudas en que los valores de las tablas de proporcionalidad puedan ser parte del campo numérico de los racionales positivos (Q+).

Por otro lado, desde la faceta ecológica, en sexto grado de Educación Primaria se deben trabajar todas las competencias prescritas en el currículo en relación con el área de matemática desde el primer trimestre del año escolar y que respondan a los desempeños determinados en cada competencia. Así, es importante mencionar que en los desempeños correspondientes al sexto grado de Primaria, propuestos en el Diseño Curricular Nacional del Perú (2016), se hace referencia a aspectos que corresponden a la proporcionalidad y que se pueden abordar desde el trabajo con las tablas de valores porque: hay relación de magnitudes, se tiende a la generalización, determinar valores desconocidos y la relación proporcional. Así, cuando el estudiante *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio* y logra el nivel esperado del ciclo V de la Educación Básica Regular (EBR) lleva a cabo desempeños como se resumen a continuación:

- Establece relaciones entre datos y valores desconocidos de una equivalencia y de variación entre los datos de dos magnitudes, y las transforma en ecuaciones o en proporcionalidad directa.
- Emplea estrategias heurísticas y estrategias de cálculo para determinar la regla o el término general de un patrón, y propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones o hallar valores que cumplen una condición de proporcionalidad.
- Elabora afirmaciones sobre los términos no inmediatos en un patrón y sobre lo que ocurre cuando modifica cantidades y justifica su proceso de resolución.

Esto da pie a que las actividades de aprendizaje en relación con las tablas de proporcionalidad, que se tomarán en cuenta en nuestra investigación, también se justifican bajo los lineamientos planteados en el currículo, concretamente en la competencia de *Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio*.

Lo mencionado anteriormente, es la expectativa que tiene la institución educativa al trabajar con este objeto matemático, ya que apunta a que los estudiantes puedan llegar al logro de los desempeños antes mencionados.

4.3 Descripción de la implementación y de los instrumentos empleados

La implementación de las actividades matemáticas en ambas secciones, fueron desarrolladas en dos semanas de trabajo (cuatro días a la semana) de manera presencial y cada sesión tenía una duración de 45 minutos. Los ambientes de trabajo fueron el aula de clase y la sala de cómputo. Es importante mencionar que los estudiantes ya tenían nociones del manejo del programa Excel (en el manejo de algunas herramientas), debido a que el profesor de computación les había enseñado previamente como parte de los contenidos contemplados en su campo de trabajo.

Por otro lado, la organización de la actividad fue de manera secuencial: *a)* Las actividades presentadas fueron totalmente contextualizadas, donde tuvieron que familiarizarse con los enunciados correspondientes; *b)* hubo trabajo individual; y *c)* trabajo grupal para la colaboración y puesta en común de ideas, así como las discusiones pertinentes. Es importante mencionar el valor de este último momento, ya que proporcionará en los estudiantes un aprendizaje de manera colaborativa, gracias al conocimiento compartido y la puesta en común de sus participantes del aula, y el papel del docente es de orientar o dar algunas sugerencias a los grupos de trabajo sin dar respuesta (Godino et al., 2019).

Por otra parte, cabe mencionar que se ha usado una codificación para los estudiantes de ambas secciones, por ejemplo: si el estudiante es de 6toA, se reconocerá por el código: [A1], [A2], [A3], etc., y si el estudiante es de 6toB, se reconocerá por el código: [B1], [B2], [B3], etc. En el caso del profesor encargado, se le designará con el código [P].

Los instrumentos que se usaron durante el desarrollo de las actividades matemáticas fueron los siguientes: las actividades realizadas con lápiz y papel, las grabaciones, las hojas de cálculo de Excel y el estudio de casos con un grupo de estudiantes. Todos estos instrumentos han servido para recabar información y poder analizar la evolución de los niveles del RAE en los estudiantes.

A continuación, se describirá cómo fue el trabajo de la implementación de las tareas de proporcionalidad con los estudiantes y qué instrumentos se utilizaron.

4.3.1 Descripción de la sesión 1 sobre proporcionalidad con tablas de valores

A continuación se presenta un esquema con las trayectorias didácticas en la sesión 1. Dichas trayectorias se entienden como una secuencia de momentos de toda actividad matemática en un proceso de enseñanza-aprendizaje, comprendido entre el inicio y el final de una tarea matemática. Así, dichos momentos o trayectorias didácticas lo constituyen las acciones y los medios, tanto de los estudiantes como del docente para llevar a cabo una tarea (Godino et al., 2020). Véase la Tabla 7.

Tabla 7

Trayectorias didácticas llevadas a cabo en el desarrollo de la tarea 1

Sesión 1	
Trayectorias didácticas	Tiempo
• Lectura individual de la tarea 1	5 min
• Desarrollo individual de la tarea 1	15 min

• Intervención del profesor, solamente para despejar algunas dudas que no impliquen dar solución a la tarea	
• Solución de la tarea 1 en la pizarra por parte de algunos estudiantes. Análisis y discusión de las soluciones obtenidas. • Intervención del profesor en el proceso de la *devolución*.	25 min
• Se llega a la fase de *institucionalización*: Se centra en hechos importantes, los procedimientos, las ideas importantes y el uso de la terminología adecuada en relación con las tablas de proporcionalidad y sus elementos.	25 min
• Se refuerza lo trabajado en la clase mediante una ficha de refuerzo 1. Aquí los estudiantes vuelven a trabajar de manera individual otro problema planteado, pero sin perder de vista que se usará el mismo contexto de las mezclas y pinturas.	15 min
• Se dio el proceso de la metacognición con los estudiantes.	5 min

Es importante mencionar que en esta primera tarea, cuando los estudiantes han trabajado de manera individual, de 6to A han participado 17 estudiantes y del grupo de 6toB han participado 21 estudiantes.

En un primer momento se les explicó a los estudiantes las consignas del trabajo matemático en torno a la tarea con tablas de proporcionalidad. Así, se le entregó a cada estudiante la primera tarea por medio de una ficha, se les dio tiempo de 5 minutos para que puedan leerlo y 15 minutos para resolver. Algunos tenían algunas dudas sobre el desarrollo de la actividad. Se procuró no dar alcances sobre el modo de resolverlo, ya que ellos debían hacer primero un trabajo de manera individual. Cabe mencionar que se trabajó con ambas secciones A y B, por separado. Los estudiantes pusieron en aplicación sus conocimientos previos, aplicaron diversas estrategias, manejaron diversas operaciones en el conjunto numérico de los naturales, y sobre todo explicaron cómo lo habían resuelto.

Después de haber acabado con la primera parte de la actividad, se procede a desarrollar la actividad, pero con la puesta en común de algunos estudiantes. Luego, de un tiempo considerable, sale al frente un estudiante a exponer su resolución. Se hacen preguntas, discusiones en torno a lo trabajado, etc. Por ejemplo, en el grupo de 6toA, se seleccionaron a algunos estudiantes, ya que fueron que habían realizado la tarea usando estrategias diferentes, esto se observó mientras se monitoreaba a los estudiantes. Se le saca a cada uno para que puedan explicar el desarrollo (aparece el docente para analizar con los estudiantes las soluciones).

En el grupo de 6toB tampoco se formaron grupos de trabajo, ya que se pretendió tener la misma estrategia de trabajo que la sección de 6toA. Después de la actividad individual, se pasó a la discusión de cómo lo habían resuelto los estudiantes. Esto llevó a que el profesor pidiese la participación de algunos estudiantes para que pudiesen explicar de cómo han resuelto dicha tarea en su ficha de trabajo.

Como segunda parte de la actividad, se llega a la fase de la *institucionalización*, donde se centra en hechos importantes, los procedimientos, las ideas importantes y el uso de la terminología adecuada en relación con las tablas de proporcionalidad y sus elementos. Es importante recalcar que el profesor de matemáticas es quien conoce los diversos significados de dicho objeto matemático, los procesos implicados, etc., y toda esta dinámica es comprendida por medio de las secuencias de las configuraciones didácticas llevadas a cabo (Godino et al., 2020).

4.3.2 Descripción de la sesión 2 sobre proporcionalidad con tablas de valores

Se presenta la Tabla 13 que contiene las trayectorias didácticas llevadas a cabo en cada momento de la implementación de la tarea 2. En cada proceso se estima un tiempo determinado, recordando que se trabaja en dos sesiones de clases de 45 minutos cada una (tiempo que estipula el Ministerio de Educación del Perú cuando se trabajan las sesiones de clases). Véase la Tabla 8.

Tabla 8

Trayectorias didácticas llevadas a cabo en el desarrollo de la tarea 2

Sesión 2	
Trayectorias didácticas	Tiempo
• Lectura individual de la tarea 2	5 min
• Desarrollo individual de la tarea 2 • Intervención del profesor, solamente para despejar algunas dudas que no impliquen dar solución a la tarea	15 min
• Formación de equipos de trabajo. • Desarrollo de la tarea 2 en equipo, con el apoyo de algunos materiales. • Solución de la tarea 2 en la pizarra por parte de algunos estudiantes. Análisis y discusión de las soluciones obtenidas. • Intervención del profesor en el proceso de la *devolución*.	35 min
• Se llega a la fase de *institucionalización*: Se centra en hechos importantes, los procedimientos, las ideas importantes y el uso de la terminología adecuada en relación con las tablas de proporcionalidad y sus elementos.	15 min
• Se refuerza lo trabajado en la clase mediante una ficha de refuerzo 2. Aquí los estudiantes vuelven a trabajar de manera individual otro problema planteado, pero sin perder de vista que se usará el mismo contexto de las mezclas y pinturas.	15 min
• Se dio el proceso de la metacognición con los estudiantes.	5 min

Es importante mencionar que en esta segunda tarea, cuando los estudiantes han trabajado de manera individual, del grupo de 6toA han participado 20 estudiantes y del grupo de 6toB han participado 24 estudiantes.

En un primer momento se les explicó a los estudiantes las consignas del trabajo matemático en torno a la tarea 2 con tablas de proporcionalidad. Así, se le entregó a cada estudiante la primera tarea por medio de una ficha, se les dio tiempo de 5 minutos para que puedan leerlo y 15 minutos para resolver, el trabajo fue individual. Esta vez la tarea tiene la característica que los valores de la primera variable, no se presentan en orden ascendente como en la tarea 1. Ahora, dichos valores de la primera fila (litros de pintura blanca) solo tienen la peculiaridad de ser múltiplos de 3, no sigue necesariamente un patrón aditivo o multiplicativo de manera ordenada a diferencia de la tabla de proporcionalidad 1. Además, se ha agregado una columna en blanco, con la finalidad de que puedan usarlo para colocar la "*reducción a su unidad*".

Luego, se procedió a trabajar en equipos de trabajo donde los estudiantes pudieron discutir sus soluciones planteadas en la primera parte de la actividad. Se les dio un tiempo estimado de 15 minutos. El profesor intervino únicamente cuando el alumno solicitó ayuda y le explicó lo que consulta. Evitó intervenciones en donde se diga cómo resolver, pistas o algún tipo de indicio que pueda conducir a la resolución de la actividad.

Luego de haber realizado el trabajo grupal, los estudiantes tuvieron también un tiempo de 20 minutos considerable para exponer su resolución (en este caso se seleccionará a un integrante por grupo). En ambos grupos de 6to y 6toB se siguió la misma dinámica de trabajo.

4.3.3. Descripción de la sesión 3 sobre proporcionalidad con tablas de valores

En la tercera parte de la tarea de proporcionalidad, los estudiantes han usado una calculadora simple y la calculadora de la hoja de cálculo. Este último recurso se usó con el objetivo de practicar para la siguiente actividad que implicará usar el Excel. Se presentó una tabla de proporcionalidad con valores ordenados y un valor "grande". Esto con la finalidad de esclarecer que para completar una tabla de proporcionalidad no se rige por una secuencia de tipo aditiva, sino de sucesión geométrica, donde el coeficiente de proporcionalidad no es siempre un número entero, sino que puede pertenecer al conjunto de los racionales.

Se presenta la siguiente Tabla que contiene las trayectorias didácticas llevadas a cabo en cada momento de la implementación de la tarea 3 que se hizo, en un primer momento de la sesión, con lápiz y papel. Véase la Tabla 9.

Tabla 9

Trayectorias didácticas llevadas a cabo en el desarrollo de la tarea 3

Sesión 3	
Trayectorias didácticas	Tiempo
• Lectura individual de la tarea 3	5 min
• Desarrollo individual de la tarea 3 • Intervención del profesor, solamente para despejar algunas dudas que no impliquen dar solución a la tarea	15 min
• Formación de equipos de trabajo. • Desarrollo de la tarea 3 en equipo, con el apoyo de algunos materiales. • Solución de la tarea 3 por un integrante de cada grupo. Análisis y discusión de las soluciones obtenidas. • Intervención del profesor en durante la revisión de la tarea 3 en cada equipo.	45 min
• Se llega a la fase de *institucionalización*: Se centra en hechos importantes, los procedimientos, las ideas importantes y el uso de la terminología adecuada en relación con las tablas de proporcionalidad y sus elementos.	20 min
• Se dio el proceso de la metacognición con los estudiantes.	5 min

Es importante mencionar que en esta tercera tarea, cuando los estudiantes han trabajado de manera individual, de 6toA han participado 21 estudiantes y del grupo de 6toB han participado 24 estudiantes.

Así, la primera parte de la actividad, es de manera individual donde los estudiantes, con apoyo de su calculadora, realizaron la tarea. Tuvieron un tiempo de 15 minutos para resolver la tarea proporcionada. Después, de transcurrir el tiempo, el profesor los formó en equipos para que puedan discutir la solución a la tarea y proponer la solución en el papelote.

Después de haber trabajado la tarea 3 de manera individual, el profesor dio paso a la formación de grupos para que entre los integrantes de cada equipo puedan dar solución a la tarea, dando sus diferentes puntos de vista, estrategias de solución, etc. Luego de haber trabajado en equipo, cada grupo salió al frente a colocar su papelote para que un representante pueda explicar lo que han hecho para poder completar la tabla de proporcionalidad.

A continuación, se presenta la siguiente Tabla que contiene las trayectorias didácticas llevadas a cabo en cada momento de la implementación de la tarea 3 trabajada en la hoja de cálculo con el programa Excel. En cada proceso se estima un determinado tiempo, recordando que se trabaja en dos sesiones de clases de 45 minutos cada una. Véase la Tabla 10.

Tabla 10

Trayectorias didácticas llevadas a cabo en el desarrollo de la tarea 3 mediante la hoja de cálculo del Excel

Sesión 4	
Trayectorias didácticas	Tiempo
• Lectura individual de la tarea 3	5 min
• Desarrollo individual de la tarea 3 en el cuaderno de trabajo • Intervención del profesor, solamente para despejar algunas dudas que no impliquen dar solución a la tarea. • El estudiante puede usar calculadora simple.	20 min
• Se lleva a los estudiantes a la sala de cómputo. • A cada estudiante se le asigna un lugar y una computadora, respectivamente. • Se les pide resolver la tarea 3, pero deben usar la hoja de cálculo del programa Excel. • El docente monitorea el trabajo que realiza cada uno de los estudiantes. • Al finalizar con el desarrollo de la tarea en la hoja de cálculo, les pide que graben dicho documento en una carpeta en la computadora.	40 min
• Luego les entrega una ficha de refuerzo, donde se les plantea un problema que va en relación con la tarea 3. Los estudiantes lo deben trabajar en una nueva hoja de cálculo. Al finalizar, el profesor les pide que los datos los pasen a la ficha de refuerzo y la hoja de cálculo la graben en la carpeta en la computadora.	20 min
• Se dio el proceso de la metacognición con los estudiantes.	5 min

Es importante mencionar que en esta tercera tarea con el uso de la hoja de cálculo, cuando los estudiantes han trabajado de manera individual, se ha recogido el material de Excel de 9 estudiantes de 6toA y 14 estudiantes de 6toB.

Así, en ambas secciones de 6toA y 6toB, el docente les pidió que la tarea 3 sea resuelta primero en el cuaderno de matemática. Además, les permitió usar una calculadora simple. Les dio un tiempo para ello de 20 minutos.

Una vez acabada esta primera parte, se llevó a todos los estudiantes a la sala de cómputo para que puedan trabajar con la hoja de cálculo del Excel. El docente pidió a cada estudiante abrir una hoja de cálculo en la computadora asignada y que resuelvan la tarea usando el Excel (cada estudiante tiene su cuaderno de trabajo y también la calculadora simple). El profesor les dejó claro que no es transcribir tal cual a la hoja de cálculo lo que está en su cuaderno, sino que deben usar las herramientas del Excel para trabajar dicha tabla de proporcionalidad.

Algunos estudiantes ya tenían nociones sobre el uso de las celdas con fórmulas lo cual les facilitó el desarrollo de la tarea. Sin embargo, otros estudiantes solo usaron la hoja de cálculo para completar dicha tabla haciendo uso de la calculadora del Excel, y hallaban los valores desconocidos usando la regla de tres simple, es decir, realizaban solo procedimientos de tipo aritméticos.

Se les pidió que dicha tarea en Excel quede grabada en cada computadora. Luego, el docente les entregó una ficha de refuerzo, que va en la misma línea de la tarea 3, para que la resuelvan en la hoja de cálculo. El docente nuevamente monitoreó la actividad de cierre en cada de uno de los estudiantes.

Finalmente, el docente realizó con ellos el proceso de la retroalimentación de lo trabajado en dicha sesión de clases.

4.3.4. Descripción de la sesión 4 sobre proporcionalidad con tablas de valores

A continuación, se presenta la siguiente Tabla 11 que contiene las trayectorias didácticas llevadas a cabo en cada momento de la implementación de la tarea 4. En cada proceso se estima un determinado tiempo, recordando que se trabaja en dos sesiones de clases de 45 minutos cada una.

Tabla 11

Trayectorias didácticas llevadas a cabo en el desarrollo de la tarea 4 mediante la hoja de cálculo del Excel

Sesión 5	
Trayectorias didácticas	Tiempo
• Lectura individual de la tarea 4.	5 min
• Desarrollo individual de la tarea 4 usando el Excel. • Intervención del profesor, solamente para despejar algunas dudas que no impliquen dar solución a la tarea.	15 min
• Formación de equipos de trabajo. • Desarrollo de la tarea 4 en equipo, con el apoyo de una calculadora simple y el Excel. • Solución de la tarea 4 usando la pizarra digital y una laptop por parte de algunos estudiantes. Análisis y discusión de las soluciones obtenidas. • Intervención del profesor en el proceso de la *devolución*.	35 min
• Se llega a la fase de *institucionalización*: Se centra en hechos importantes, los procedimientos, las ideas importantes y el uso de la terminología adecuada en relación con las tablas de proporcionalidad y sus elementos.	15 min
• Se refuerza lo trabajado en la clase mediante una ficha de refuerzo 4. Aquí los estudiantes vuelven a trabajar de manera individual otro problema planteado, pero sin perder de vista que se usará el mismo contexto de las mezclas y pinturas. Usarán la calculadora simple y el Excel.	15 min
• Se dio el proceso de la metacognición con los estudiantes.	5 min

Es importante mencionar que, para esta cuarta tarea, cuando los estudiantes han trabajado de manera individual, se contó con 20 estudiantes de 6toA y 19 estudiantes de 6toB.

El desarrollo de esta tarea de proporcionalidad, se llevó a cabo en el centro de cómputo. Se lleva a cabo en dos momentos: a) La primera parte del trabajo se llevó a cabo de manera individual. Se les entregó una ficha con la tarea y se les dio un tiempo de 15 minutos para que resuelvan dicha tarea en la que hicieron uso de la hoja de cálculo del programa Excel (también tuvieron la opción de usar su calculadora simple en caso les haga falta). b) Acabada esta primera parte, se les propuso trabajar en equipos para que puedan dialogar sobre su modo de solución de dicha tarea. Aquí los estudiantes conversaron sobre sus diversas estrategias de solución, discutieron sus resultados, etc. Únicamente el profesor logró intervenir cuando el alumno le solicitó ayuda y le explicó lo que consultaba. Evitó intervenciones en donde se diga cómo resolver la tarea, pistas o algún tipo de indicio que pueda conducir a la resolución de la actividad. Luego, se solicitó a un estudiante por cada equipo que explique lo que han realizado en su grupo.

Después de haber implementado la situación didáctica en ambas secciones, 6toA y 6toB, se puede observar que, a lo largo de las trayectorias didácticas de cada sesión, los estudiantes han aplicado diferentes estrategias en la solución de las tareas propuestas. Esto es debido, por ejemplo, a las variables didácticas que se han considerado en el diseño de cada actividad. Queda también claro las diferentes formas de resolución de la tarea, sea individual o grupal, debido a las características que presentan ambos grupos. Sin embargo, se puede evidenciar evolución en cuanto a los niveles de razonamiento algebraico en los estudiantes. Esto último se analizará en el capítulo siguiente.

Capítulo V: Análisis y discusión de resultados

En el presente capítulo, en primer lugar, se hace una descripción de los instrumentos que se han usado en la presente investigación, y que han servido para analizar las respuestas dadas por los estudiantes cuando han resuelto las cuatro tareas de proporcionalidad.

Luego, se presentarán los resultados obtenidos por algunos estudiantes de ambos grupos de 6to grado, cuando resuelven las cuatro tareas y cuyo análisis ha sido posible por el uso del instrumento de la videograbación.

Posteriormente, también se dan a conocer los resultados de las tareas de proporcionalidad en ambos grupos de 6toA y 6toB, respectivamente, cuando trabajaron con lápiz y papel hasta con el uso de las hojas de cálculo en Excel. El análisis de estos resultados se centrará entre lo que se esperaba que ocurriera (análisis *a priori*) y los resultados obtenidos (análisis *a posteriori*). Además, se analizará si el cambio en las variables didácticas produjo o no el comportamiento matemático previsto. Para el análisis de estos resultados se tendrán en cuenta los instrumentos en base a algunos aspectos considerados, con sus respectivos descriptores relativos a la resolución en cada una de las tareas.

Finalmente, se analizarán las actividades desarrolladas por 11 estudiantes que permitirá identificar si hubo o no evolución en el RAE. Esto último se hará teniendo en cuenta el instrumento del estudio de casos.

5.1. Descripción de los instrumentos

Para el análisis de los resultados obtenidos por parte de los estudiantes en las cuatro tareas de proporcionalidad, se han tenido en cuenta los siguientes instrumentos como se explican a continuación.

a) Las videograbaciones:

Durante la realización de las cuatro tareas, se han grabado las clases en diferentes momentos. Es decir, cuando los estudiantes de ambas secciones realizaban trabajos de manera individual y grupal, en la discusión de las soluciones respectivas y en el trabajo que realizaron los estudiantes en la sala de cómputo. Luego, estas videograbaciones, se han trascrito mediante unos diálogos que se establecen entre el docente y algunos estudiantes de ambas secciones (6toA y 6toB).

Es importante mencionar que estas videograbaciones fueron permitidas por la institución educativa, donde labora el investigador.

b) Descriptores relativos a la resolución de las tareas de proporcionalidad

Otro instrumento que ha servido para el análisis de los resultados de las tareas de proporcionalidad, han sido los descriptores relativos a la resolución de cada una de las tareas. Cabe mencionar que los descriptores se han adaptado de otro instrumento denominado *Variables operativas relativas a la resolución de las tareas 1 y 2*, propuesta por Gaita et al. (2023, p. 62), en base a dos tareas de proporcionalidad, con tablas de valores. Asimismo, de las cuatro tareas que han sido consideradas en nuestra investigación, las dos primeras se han tomado del trabajo de Gaita et al. (2023, p. 59). En dicho instrumento, se proponen criterios relacionados a: resolución correcta o no de la tarea, tipos de lenguajes usados, si se establecen o no progresiones aritméticas o geométricas, el modo en el que se establece la razón, etc. En nuestra investigación, dichos criterios mencionados anteriormente, los hemos denominado como *aspectos a considerar* que se irán adaptando acorde al trabajo realizado con los estudiantes y que además guardan relación con los objetos primarios que propone el EOS.

Es importante mencionar que para entender la nomenclatura que se ha utilizado en este instrumento, a modo de ejemplo, se tendrá en cuenta la siguiente codificación:

T1 = Tarea 1; T2 = Tarea 2; T3 = Tarea 3 y T4 = Tarea 4.

D01 = Descriptor 1; D02 = Descriptor 2; D03 = Descriptor 3; y así sucesivamente.

HC = Hoja de Cálculo.

T1-D01 = Tarea 1, Descriptor 1.

T2-D02 = Tarea 2, Descriptor 2.

T3-D03 = Tarea 3, Descriptor 3.

T4-D04 = Tarea 4, Descriptor 4.

T3-D05-HC = Tarea 3, Descriptor 5, con el uso de la Hoja de Cálculo.

T4-D06-HC = Tarea 4, Descriptor 6, con el uso de la Hoja de Cálculo.

A continuación, se presentan dichos descriptores, para el análisis de cada una de las tareas de proporcionalidad.

En la Tabla 12 se observan los descriptores en relación con la tarea 1.

Tabla 12

Descriptores relativos a la resolución de la tarea 1

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 1	T1-D01
	2. Deja en blanco la tarea 1	T1-D02
	3. Respondió incorrectamente la tarea 1	T1-D03
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D04
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D05
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 1	T1-D06
Establece un tipo de progresión	7. Establece una progresión aritmética de diferencia +3 para los litros de pintura blanca (sumar 3 al valor anterior)	T1-D07
	8. Establece una progresión aritmética de diferencia +12 para los litros de pintura azul (sumar 12 al valor anterior)	T1-D08
	9. Establece una progresión geométrica de razón $\times 3$ para los litros de pintura blanca (multiplicar por 3 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D09
	10. Establece una progresión geométrica de razón $\times 12$ para los litros de pintura blanca (multiplicar por 12 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D10
Relación entre los valores	11. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “reducción a la unidad”	T1-D11
	12. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”	T1-D12

Para el puntaje se usará una escala de valoración de 0 y 1: 0 = no está presente y 1 = sí está presente.

En la Tabla 13 se observan los descriptores en relación con la tarea 2.

Tabla 13

Descriptores relativos a la resolución de la tarea 2

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 2	T2-D01
	2. Deja en blanco la tarea 2	T2-D02
	3. Respondió incorrectamente la tarea 2	T2-D03
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D04
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D05
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos o más *valores* en la tabla 2	T2-D06
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación")	T2-D07
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación ("reducción a la unidad")	T2-D08
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes"	T2-D09
	10. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.	T2-D10
	11. Relaciona las filas mediante un modelo aditivo, según el cual, si la cantidad de pintura blanca aumenta en "k" litros, entonces a la pintura azul también se le suman "k" litros	T2-D11
	12. Completa la columna en blanco con valores que no son múltiplos de 3	T2-D12

Para el puntaje se usará una escala de valoración de 0 y 1: 0 = no está presente y 1 = sí está presente.

En la Tabla 14 se observan los descriptores en relación con la tarea 3.

Tabla 14

Descriptores relativos a la resolución de la tarea 3

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01
	2. Deja en blanco la tarea 3	T3-D02
	3. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D03
	4. Se apoya del uso de la calculadora simple para resolver la tarea 3	T3-D04
Uso de un tipo de lenguaje	5. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D05
	6. Mediante un lenguaje numérico o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D06
	7. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores	T3-D07
Relación entre los valores	8. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D08
	9. Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple	T3-D09
	10. Completa la columna en blanco con otros valores distintos a 3:7	T3-D10
Procesos iniciales de generalización	11. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T3-D11
	12. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T3-D12

Para el puntaje se usará una escala de valoración de 0 y 1: 0 = no está presente y 1 = sí está presente.

En la Tabla 15 se observan los descriptores en relación con la tarea 3 donde se usará la hoja de cálculo.

Tabla 15

Descriptores relativos a la resolución de la tarea 3 usando la hoja de cálculo

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01-HC
	2. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D02-HC
Uso de un tipo de lenguaje	3. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D03-HC
	4. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas, por ejemplo: B2, C3, etc.	T3-D04-HC
	5. Usa símbolos como: *, =, ( ), x, / para operar con ayuda del Excel	T3-D05-HC
Relación entre los valores	6. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D06-HC
	7. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T3-D07-HC
	8. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T3-D08-HC
	9. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T3-D09-HC
	10. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T3-D10-HC
	11. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T3-D11-HC
Procesos iniciales de generalización	12. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T3-D12-HC
	13. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T3-D13-HC
	14. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada	T3-D14-HC

Para el puntaje se usará una escala de valoración de 0 y 1: 0 = no está presente y 1 = sí está presente.

Es importante mencionar que se analizarán las hojas de cálculo de algunos estudiantes de 6toA y 6toB. Esto debido a que se pudo recoger sus actividades en Excel guardadas en las computadoras, aunque la tarea de algunos de ellos fue analizada desde las grabaciones que se hicieron.

Por otro lado, en la Tabla 16 se observan los descriptores en relación con la tarea 4 donde se usará la hoja de cálculo.

Tabla 16

Descriptores relativos a la resolución de la tarea 4 usando la hoja de cálculo

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 4	T4-D01-HC
	2. Deja en blanco la tarea 4	T4-D02-HC
	3. Respondió incorrectamente la tarea 4	T4-D03-HC
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D04-HC
	5. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D05-HC
	6. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, por ejemplo: B2, C5, etc.	T4-D06-HC
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T4-D07-HC
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T4-D08-HC
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T4-D09-HC
	10. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T4-D10-HC
	11. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T4-D11-HC
	12. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T4-D12-HC
	13. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T4-D13-HC
	14. Completa el casillero en blanco que se encuentra por encima del valor 612, de manera correcta	T4-D14-HC
Procesos iniciales de generalización	15. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T4-D15-HC
	16. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T4-D16-HC
	17. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T4-D17-HC

Para el puntaje se usará una escala de valoración de 0 y 1: 0 = no está presente y 1 = sí está presente.

c) El estudio de casos

En la presente investigación se ha tenido en cuenta otro instrumento para el análisis de los resultados. Dicho instrumento corresponde al estudio de casos, llevado a cabo con un grupo de estudiantes. Respecto a este último, se han considerado cinco estudiantes de 6toA y seis estudiantes de 6toB, ya que fueron los 11 estudiantes que trabajaron con todas las actividades propuestas en aula. Esto se hace con la finalidad de analizar su evolución en los niveles del RAE a lo largo del desarrollo de las tareas de proporcionalidad propuestas. De estos 11 estudiantes hay información directa (porque se tiene evidencias de que ha trabajado en las cuatro tareas) e indirecta (porque a través de videos se puede recopilar información). Además, la validez interna de este instrumento, se va a poder controlar en términos de coherencia y consistencia de lo que han escrito y se ha grabado, de modo que el estudio de estos 11 estudiantes es otro instrumento.

Metodológicamente, se puede decir que con todos los instrumentos que se van a tomar en cuenta en la presente investigación se van controlar y verificar que hay coherencia entre los resultados. Por tanto, esta consistencia aporta validez interna de lo que se describa en el presente estudio.

Así, el articular el método de investigación, los diferentes instrumentos, y controlar la coherencia, metodológicamente, es que hace una triangulación de tipo instrumental, que va a permite interpretar de manera correcta lo que ha sucedido desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación, se explicita el análisis de los resultados de cada una de las tareas sobre proporcionalidad, teniendo en cuenta los instrumentos mencionados anteriormente.

5.2. Análisis de resultados de las tareas de proporcionalidad modelizadas con tablas de valores teniendo en cuenta las videograbaciones.

5.2.1. Análisis de resultados de la tara 1 de proporcionalidad teniendo en cuentas las videograbaciones.

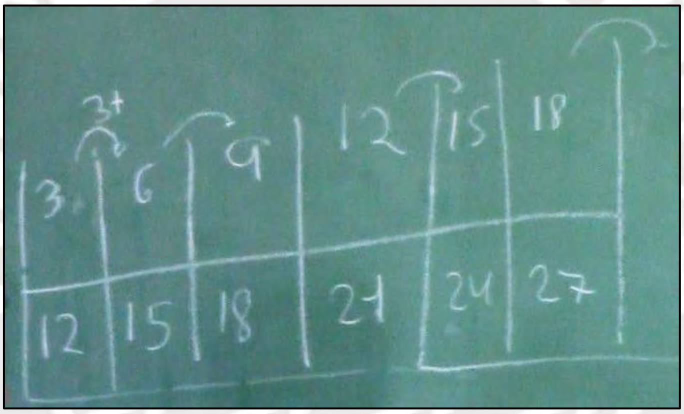
Se analiza el desarrollo de la tarea 1 de proporcionalidad cuando se llevó a cabo con la puesta en común de algunos estudiantes. Después de un tiempo considerable, sale al frente un estudiante a exponer su resolución. Se hacen preguntas, discusiones en torno a lo trabajado, etc. Por ejemplo, en el grupo de 6toA, se seleccionó a algunos estudiantes como a: [A13], [A7] y [A12], ya que fueron de los estudiantes que habían realizado la tarea usando estrategias diferentes, esto se observó mientras se monitoreaba a los estudiantes. Se le saca a cada uno para que puedan explicar el desarrollo (aparece el docente para analizar con los estudiantes las soluciones), y lo dicen tal como aparece en el siguiente fragmento de transcripción de la situación videograbada:

[P]: Pedimos ahora la participación de [A13] para que salga la pizarra y nos pueda ayudar con la solución…puedes usar la pizarra, tizas si quieres graficar la tabla lo puedes hacer también… Te escuchamos.

[A13]: Lo que hice fue encontrar un patrón…fue sumar más 3 sin nada más… hasta acabar por el 30. entonces es ese patrón también lo hice abajo… (véase la solución del estudiante en la Figura 35).

Figura 35

Solución del estudiante [A13] de la tarea 1



[P]: …Si otro cliente pide otras cantidades, ¿cómo debe hacer la mamá de Juan para que obtenga la misma tonalidad de azul, cuál sería finalmente tu respuesta?
[A13]: …Que le sume de tres en tres tanto arriba como en la parte de la pintura azul…

Luego, se pidió al estudiante [A7] que salga a la pizarra a que explique su solución. El estudiante manifestó lo siguiente:

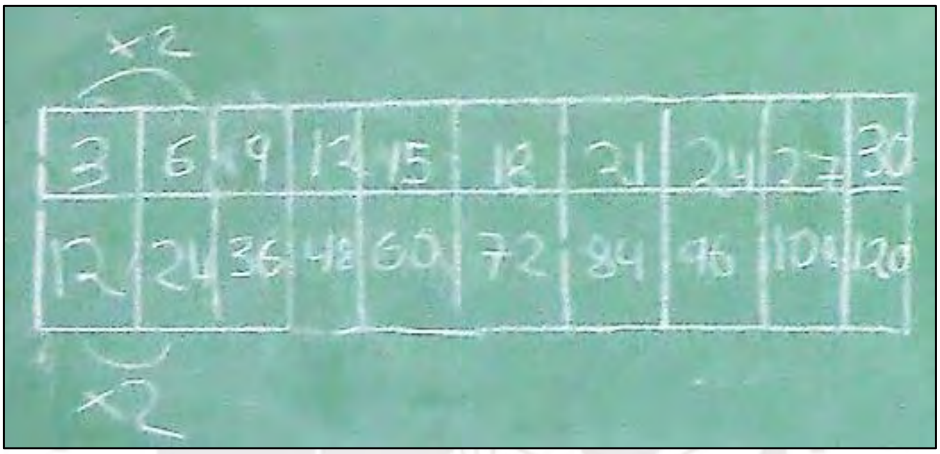
[A7]: Estos cuatro primeros números eran múltiplos de tres (refiriéndose a la primera fila). 3 x 2 = 6; 3 x 3 = 9; 3 x 4 = 12…así hasta llegar … a un 30. Luego, vi que se podía sumar +3…hasta llegar a 39 (haciendo referencia a la fila 2 de variable de litro de pintura azul).
[P]: Es lo mismo que ha hecho tu compañero [A13] (se refiere a que ha sumado de 3 en 3 en la segunda variable)…Vamos a invitar a su compañero [A12]…quiero que me

muestres esa solución que has hecho distinta a la que han proyectado alguno de tus compañeros…te escuchamos.

[A12]: Yo encontré dos métodos, y el primero es multiplicando 3 x 2 = 6; 3 x 3 = 9;…; 3 x 10 = 30 (hace referencia a la primera fila, respecto a los litros de pintura blanca). Acá 12 + 12 = 24; sin alterar los litros. Si acá lo multiplicamos por 2 (hace referencia a multiplicar 3 x 2), abajo también debemos de multiplicar por 2 (hace referencia a multiplicar 12 x 2) (véase la solución del estudiante en la Figura 36).

Figura 36

Solución del estudiante [A12] de la tarea 1



En el grupo de 6toB tampoco se formaron grupos de trabajo, ya que se pretendió tener la misma estrategia de trabajo que la sección de 6toA. Después de la actividad individual, se pasó a la discusión de cómo lo habían resuelto los estudiantes. Esto llevó a que el profesor pidiese la participación de algunos estudiantes para que pudiesen explicar de cómo han resuelto dicha tarea en su ficha de trabajo. Se ha tenido en cuenta el fragmento de transcripción de la situación videograbada:

[B24]: …para que se mantenga su color ya sea aumentando la misma cantidad, osea 12 + 12=24 y 3 + 3 =6, para la misma tonalidad de azul…

[B22]: ¿qué pasa si te colocan 8 litros de pintura Blanca…?

[B24]: … la tonalidad no sería la misma.

[P]: …para eso vamos a invitar a [B22] para que nos explique a ver qué es lo que dice…

[B22]: tres litros de pintura blanca por cada 15 litros totales y 12 litros de pintura azul por cada 15 litros totales. Se puede sacar una relación, de que por cada un litro de pintura blanca habrá cuatro litros de pintura azul…(véase la solución del estudiante en la Figura 37).

Figura 37

Solución del estudiante [B22] de la tarea 1

[B22]: Si me dijeran que hay 8 litros de pintura blanca puedes sacar 8 x 4=32, le sigue dando la misma proporción.

[B7]: Por ejemplo ocho es irrelevante en el tema de blanco y azul…

[P]: El 8 ahí en la tabla no aparece… pero es una forma que también le pueden decir: “qué pasaría mamá si alguien viene y te dice que quiere conservar la misma tonalidad de azul, pero quiere ocho litros de pintura blanca, ¿cuánto de azul le dará?” Es lo que está manifestando [B22] no su procedimiento con este ejercicio, porque si fuera otro dónde no hubiera un patrón específico no podría resolverlo así.

5.2.2. Análisis de resultados de la tara 2 de proporcionalidad teniendo en cuentas las videograbaciones.

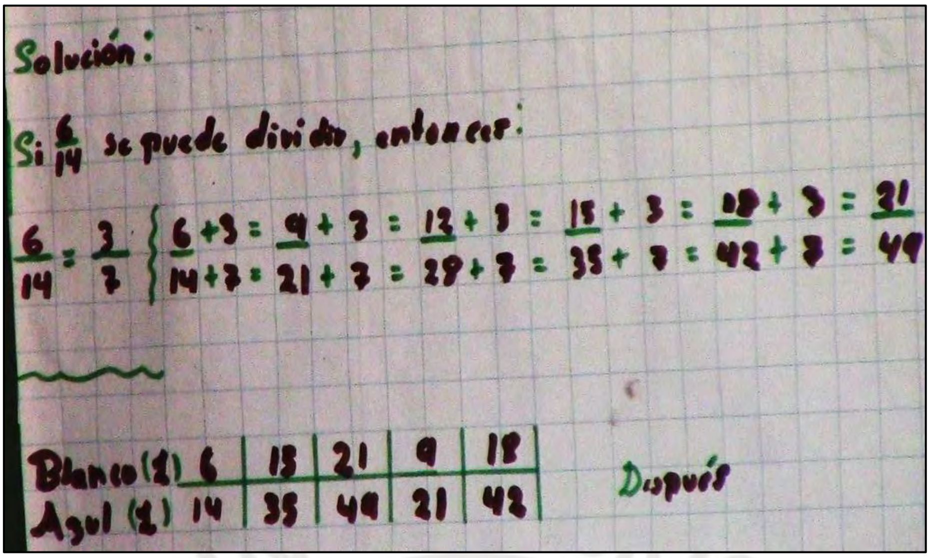
Se analiza el desarrollo de la tarea 2 cuando los estudiantes han trabajado en equipo. Tuvieron también un tiempo considerable para exponer su resolución (en este caso se seleccionará a un integrante por grupo). En ambos grupos de 6toA y 6toB se siguió la misma dinámica de trabajo.

A continuación, se observan algunas soluciones presentadas por los grupos de ambas secciones y los diálogos correspondientes tal como aparecen en el siguiente fragmento de transcripción de la situación videograbada.

Un grupo de trabajo de 6toA trabajó la tarea 2 de proporcionalidad tal como aparece en la Figura 38.

Figura 38

Ejemplo de solución de la tarea del equipo 1 de trabajo del 6toA



[A12]: Si 6/14 se puede dividir o simplificar, entonces: 6/14 es igual a 3/7. Ahora, lo que debemos de hacer para seguir ese patrón es sumar +3 a lo de arriba y +7 a lo de abajo. Lo cual, 6+3=9; 14+7=21… (Esto le permite luego completar la tabla de proporcionalidad, e inclusive, en la columna faltante no ha colocado 3/7, sino 18/42).

[P]: Y eso en relación al problema, ¿tiene lógica, no tiene lógica?

[A12]: Para mí creo que sí tendría lógica, ya que si nos darían otros valores incorrectos decimos: 6+9=15; 14+9=23 (lo que observa el estudiante es que no se mantendría la misma tonalidad de azul).

[P]: Tú me has hablado de una simplificación 6/14 que te da 3/7, ¿crees que eso se mantiene para todos los valores solo para 6/14?

[A12]: También para todos los valores.

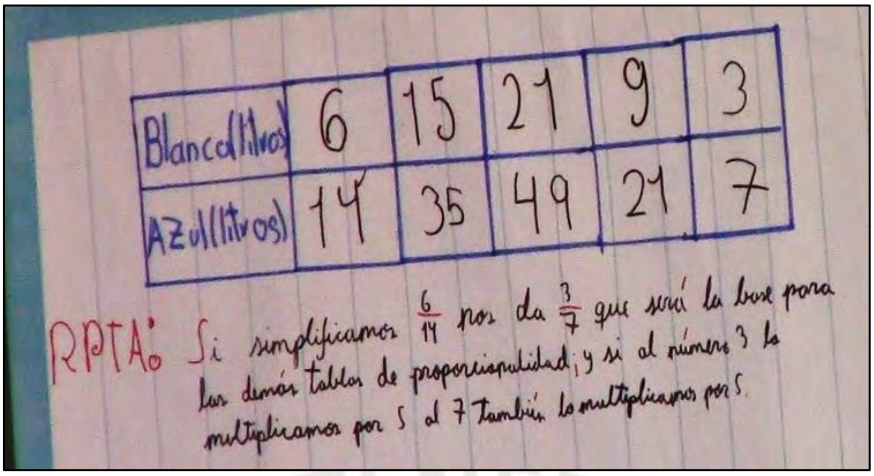
[P]: A ver, ¿cómo así?

[A12]: Si yo simplifico 15/35 le sacamos quinta sería 3/7; el siguiente 21/49 le sacamos sétima [quedaría] 3/7…

Ahora, observemos la solución de la tarea del grupo 2 de 6toA. La solución aparece tal como se muestra en la Figura 39.

Figura 39

Ejemplo de solución de la tarea del equipo 2 de trabajo del 6toA



[A4]: Hemos concluido que si simplificamos 6/14 obtenemos 3/7…[para obtener los valores de la primera fila como la segunda fila] multiplicamos 3x2=6; 7x2=14; 3x5=15; 7x5=35; 3x7=21;7x7=49; 3x3=9; 7x3=21.

[P]: ¿Ustedes han elegido 3/7 como su referente?

[A4]: Claro.

[P]: ¿Estás de acuerdo [A16] con lo que ha dicho tu compañero?

[A16]: También podría haber sido 30/70… es lo mismo porque simplificado te da 3/7

[P]: Y los valores que faltan por completar, ¿coinciden con el grupo 1?

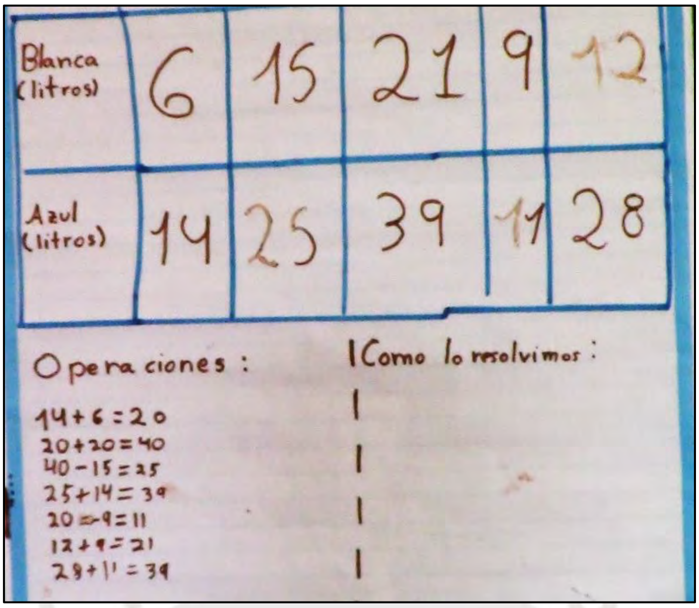
[A4]: Sí.

[P]: El grupo 1 ha elegido una estrategia diferente; el grupo 2 ha elegido una estrategia diferente…

Cabe mencionar que el grupo 4 de 6toA, realizó la tarea 2 con resultados muy distintos a los grupos anteriores. Así, dicha solución se puede observar en la Figura 40.

Figura 40

Ejemplo de solución de la tarea del equipo 4 de trabajo del 6toA



El profesor invitó al alumno [A1] para que explique la estrategia que han seguido en su grupo, para dar solución al problema 2. Los diálogos correspondientes tal como aparecen en el siguiente fragmento de transcripción de la situación videograbada:

[A1]: Sumamos 6+14=20…luego lo que hice fue sumar estas dos partes (6+15=29 y 14 + 25=39); repetí el método acá 9+11=20 y 12+28=40…

[P]: Ahora yo te hago la pregunta y esto también para el grupo. Coge un plumón… y coloques la relación de 6 con 9 y abajo 14 con 11… ¿Qué has podido dar cuenta? A ver [A1] te escuchamos.

[A1]: …6 tiene mayor valor que 9… (se puede ver que el estudiante se ha percatado que no hay una proporción entre los valores de 6/14 con 9/11).

Luego el alumno continúa:

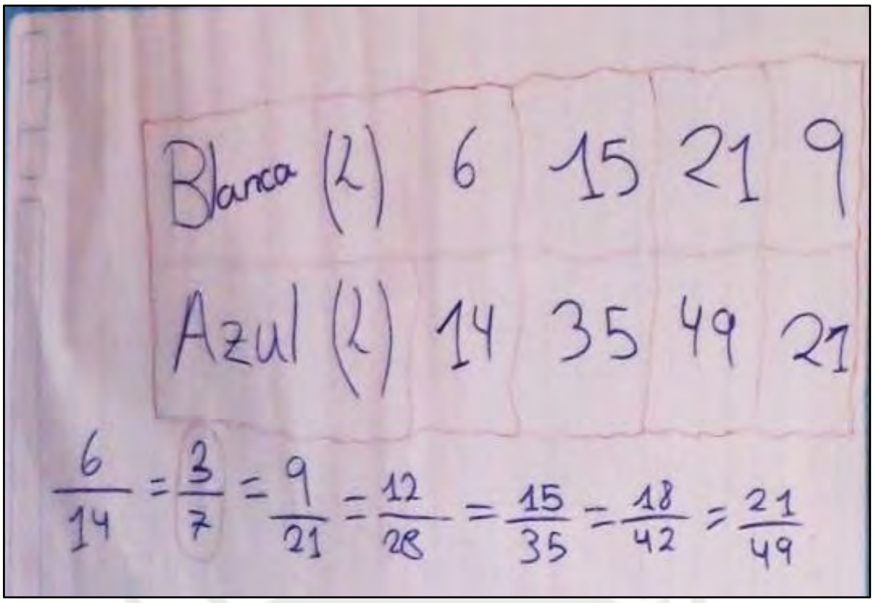
[A1]: Profe no sé cómo hacerlo…

[P]: Lo que su compañero [A1] manifiesta es parte del proceso, porque de esa manera nos ayuda un poco a comprender lo que estamos haciendo y es bueno que ellos se hayan dado cuenta resolviendo esta situación… (esto lo dice el profesor a todos los estudiantes, debido a que observó que el estudiante [A1] se frustró al darse cuenta que la solución que habían planteado en grupo no era la correcta. De esta manera el docente los anima a seguir adelante).

Ahora, se describen algunas soluciones dadas por algunos grupos de 6toB. Así, un grupo de trabajo de 6toB trabajó la tarea 2 de proporcionalidad tal como aparece en la Figura 41 y luego se muestran los diálogos correspondientes tal como aparecen en el fragmento de transcripción de la situación videograbada.

Figura 41

Ejemplo de solución de la tarea del equipo 1 de trabajo del 6toB



[B4]: Para empezar, tenemos que saber algo, simplificamos 6/14 y nos da 3/7. Entonces, como ya sabemos que 3 litro de [pintura] blanca son 7 litros de [pintura] azul, sumamos 6+3 = 9 y 14+7=21, tenemos 9/21 y ya tenemos la respuesta de este cuadro (el estudiante hace referencia a la columna donde aparece el valor 9 en la fila de los litros de pintura blanca. Y así va sumando cada valor de la fila de los litros de pintura blanca con el valor 3, y cada valor de la fila de los litros de pintura azul con el valor 7).

[B4]: También otro aporte para poder resolverlo, los [valores] de arriba son múltiplos de 3 y los [valores] de bajo son todos múltiplos de 7.

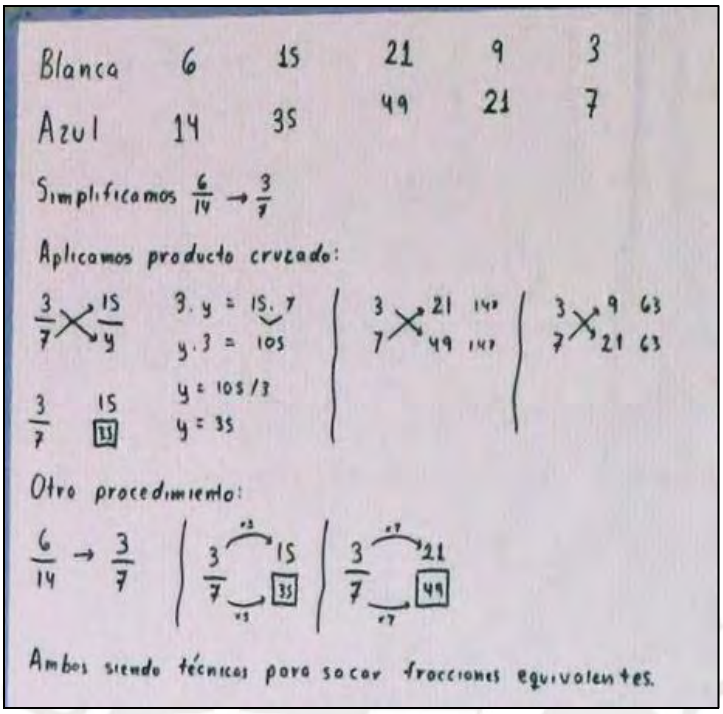
[P]: ¿Alguien del grupo tiene algo que acotar, o dar un dato extra tal vez? ¿no?...(el alumno [B6] levanta la mano)…*a ver [B6]*

[B6]: Si simplificamos todos esas fracciones nos da 3/7.

Ahora vemos la solución del grupo 2 de 6toB, ya que la estrategia que han usado es distinta a lo que ha realizado el grupo 1. Véase la Figura 42.

Figura 42

Ejemplo de solución de la tarea del equipo 2 de trabajo del 6toB

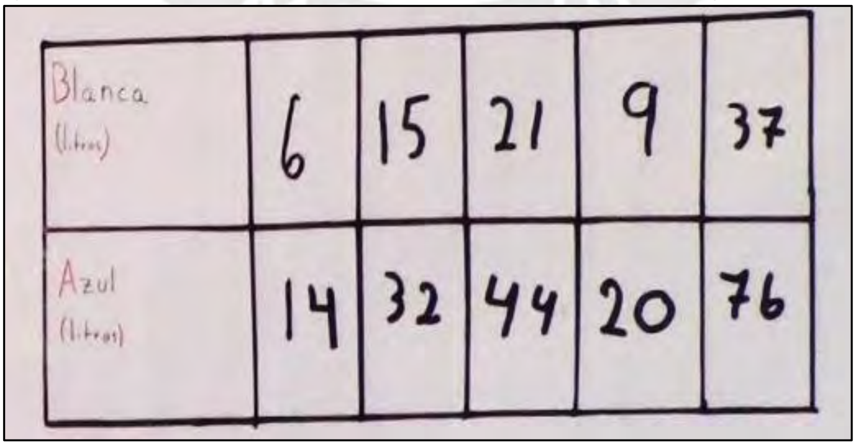


Lo que hizo este grupo fue simplificar 6/14 y resultó 3/7. Luego, usando la relación 3/7 con la relación 5/x usa la estrategia del producto cruzado para hallar los valores faltantes. Así, opera la relación 3/7 con cada valor de la fila de los litros de pintura blanca. Otra manera de resolverlo, es usando los métodos por *amplificación* y por *simplificación* para hallar las fracciones equivalentes.

Un tercer grupo resolvió la tarea de la siguiente manera. Véase la Figura 43.

Figura 43

Ejemplo de solución de la tarea 2 del equipo 3 de trabajo del 6toB



Lo que realizó este grupo para poder completar los espacios en blanco fue operar de la siguiente manera:

6 x 2 + 2 = 14

15 x 2 + 2 = 32

21 x 2 + 2 = 44

9 x 2 + 2 = 20

…. 37 x 2 + 2 = 76

Se puede observar que los estudiantes siguen buscando un patrón de modo tal que les permita hallar los valores de ambas filas de litros de pintura.

5.2.3. Análisis de resultados de la tara 3 de proporcionalidad teniendo en cuentas las videograbaciones.

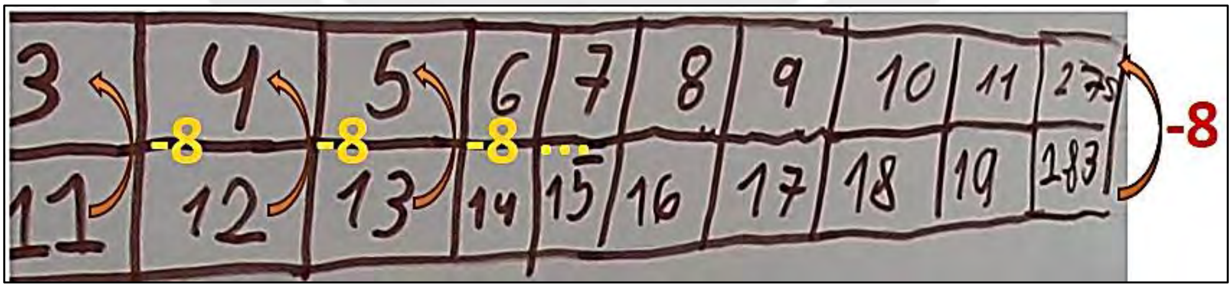
Se analiza el desarrollo de la tarea 3 cuando los estudiantes han trabajado en equipos y que luego proponen la solución en un papelote. Así, por ejemplo, cuando el profesor visitó un equipo del grupo de 6toA, uno de los integrantes le dice cómo lo han planteado:

[A1]: 16 menos 8, 8; 17 menos 9, 8; …; y acá 275 le sumamos más 8 y nos sale 283; 283 menos 275, 8; y acá hacemos lo mismo, 11 menos 3, 8; y por eso nos sale que todo el patrón va ser: 11 menos 3, 8; 12 menos 4, 8; 13 menos 5, 8; 14 menos 6, 8; y así con todos los números.

Véase la construcción de la tabla de proporcionalidad en la Figura 44.

Figura 44

Ejemplo de la solución de la tarea 3 del equipo 1 de 6toA



Otro equipo de 6toA le mostró al profesor cómo habían planteado la resolución de la tarea 3. Manifestaron lo siguiente:

[A7]: … yo dividí 6 entre 14 y me salió 2.33 (el estudiante enunció mal la división, ya que debió decir 14 entre 6). *Y luego ese número lo multipliqué a todos los que están acá* (hace referencia a los valores de la fila de los litros de pintura blanca) *y me salieron los siguientes números* (el estudiante señala a los valores de la fila de la pintura azul).

Continúa diciendo: *Pero antes para comprobar multipliqué 6 por 2.33 y me salió 13.97 lo que supongo que fue una aproximación de parte del problema* (el estudiante manifiesta este valor ya que en dicha columna aparece la relación 6:14)*… y en el 21 también aproximé por lo cercano que estaba ese número, me salía si más no me equivoco 20.97* (el estudiante manifiesta este valor ya que hay una columna donde aparece la relación 9:21).

[P]: ¿y hay relación o no? (todo el equipo responde que sí). El profesor sigue interviniendo cotejando lo que han realizado.

[P]: Porque de 3 para que me de 6

[A7]: Por 2

[P]: Es el doble, 7 por 2, 14…

[A7]: …5 [por 2] para que me de10…

[A2]: ¿Y cuánto va a entrar en el 1?

[P]: ¿y en el caso de 1? A ver agreguen el 1…

[A7]: Va a ser 2.33 (el estudiante se refiere a que se da la relación 1:2.33).

Véase la construcción de la tabla de proporcionalidad en la Figura 45.

Figura 45

Ejemplo de la solución de la tarea 3 del equipo 3 de 6toA

Blanco	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul	2.33	7	9.32	11.65	14	16.31	18.64	21	23.3	25.63	640.75

Por otro lado, en el trabajo individual de la tarea 3 realizado por los estudiantes del 6toB, algunos estudiantes hacían consultas al profesor sobre cómo se puede completar la tabla de proporcionalidad. Tal como se presentan a continuación un ejemplo:

[B24]: ¿Cómo podría haber llegado a 275 si va de uno en uno? (interpretamos que el estudiante no comprende cómo se puede saltar del 11 al valor 275 si desde antes los valores de los litros de pintura blanca van de 1 en 1).

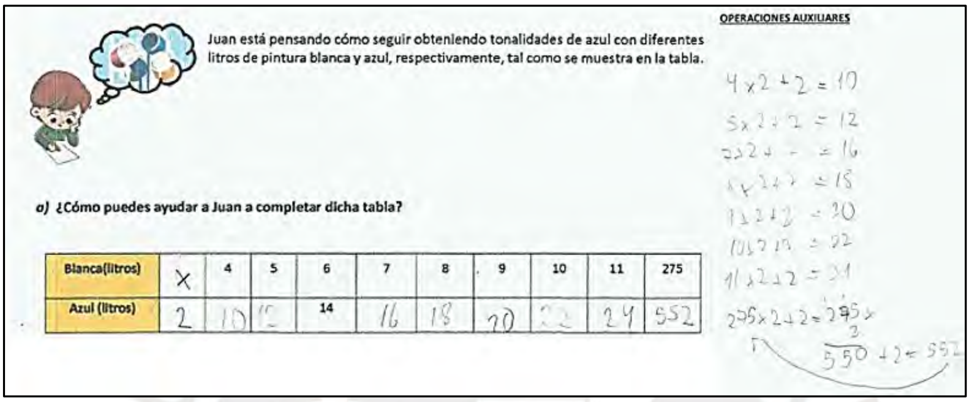
[P]: Pero en qué hemos quedado en las clases anteriores, cuando hemos reforzado el tema de las tablas, ¿va a depender que necesariamente tiene que haber una secuencia?

[B24]: No.

Otros estudiantes, por ejemplo, busca hallar una relación inicial que le permita determinar los valores faltantes. Así, el estudiante [B1] quiere hallar los valores conociendo la relación 3:7; el estudiante [B15] ha planteado un modo de generalización que le funcione para toda la tabla de proporcionalidad. Por ejemplo, su solución se puede observar en la Figura 46.

Figura 46

Ejemplo de la solución de la tarea 3 del estudiante [B15] de 6toB



El estudiante [B17] le consulta al profesor si es posible que obtenga valores decimales, tal como se evidencia en el siguiente diálogo:

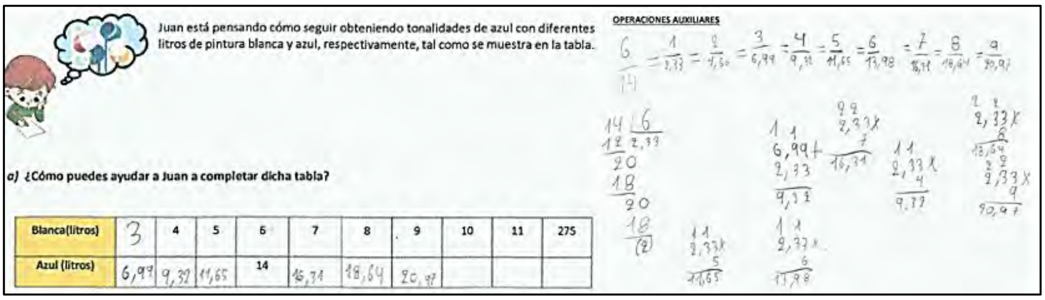
[B17]: ¿Hay valores decimales?

[P]: ¿Tú qué consideras?

[B17]: Es que como no veo ninguna otra opción decidí dividir 14 entre 6, me dio 2.33…así va aumentando (el estudiante se refiere a que se establecen las siguientes relaciones: 1: 2.33; 2: 4.66; 3: 6.99; y así sucesivamente. El estudiante multiplica el valor de 2.33 por cada valor de los litros de pintura blanca y obtiene los valores de los litros de pintura azul). Véase la solución en la Figura 47.

Figura 47

Ejemplo de la solución de la tarea 3 del estudiante [B17] de 6toB

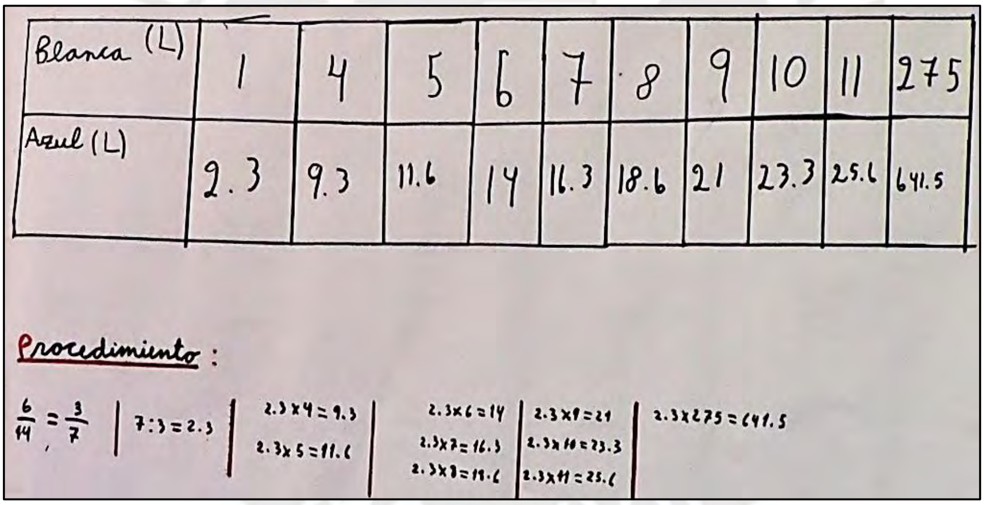


Después de haber trabajado la tarea 3 de manera individual, el profesor dio paso a la formación de grupos para que entre los integrantes de cada equipo puedan dar solución a la tarea, dando sus diferentes puntos de vista, estrategias de solución, etc. Después de haber trabajado en equipo, cada grupo salió al frente a colocar su papelote para que un representante pueda explicar lo que han hecho para poder completar la tabla de proporcionalidad. Es así que se puede observar la solución del equipo 2 de la siguiente manera:

[B13]: … 6/14 lo simplifiqué y me salió 3/7, entonces yo probé en dividir 7 entre 3 y me salió 2.3333… y solo puse 2.3 (el grupo tomó la decisión de aproximar a los décimos y por eso trabajaron con el valor de 2.3). *Luego, el 2.3 lo multipliqué por todos los valores de la tabla* (el estudiante hace referencia a que se multiplican todos los valores de los litros de pintura blanca por 2.3). Dicha solución se puede observar en la Figura 48.

Figura 48

Ejemplo de la solución de la tarea 3 del equipo 2 de 6toB



Blanca (L)	1	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (L)	2.3	9.3	11.6	14	16.3	18.6	21	23.3	25.6	641.5

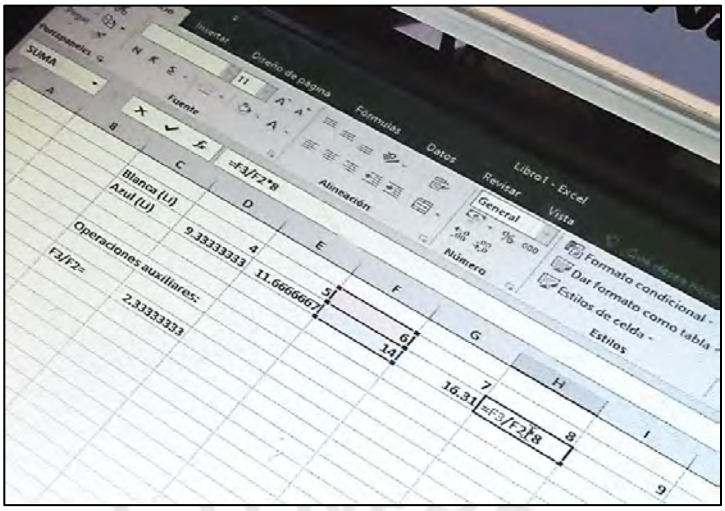
Procedimiento:

$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ | 7:3 = 2.3 | 2.3x4 = 9.3, 2.3x5 = 11.6 | 2.3x6 = 14, 2.3x7 = 16.3, 2.3x8 = 18.6 | 2.3x9 = 21, 2.3x10 = 23.3, 2.3x11 = 25.6 | 2.3x275 = 641.5

Una vez acabada esta primera parte de las exposiciones, en la siguiente sesión de clases se llevó a todos los estudiantes a la sala de cómputo para que puedan trabajar con la hoja de cálculo del Excel. El docente les dejó claro a los estudiantes que no es transcribir tal cual a la hoja de cálculo lo que está en lápiz y papel, sino que deben usar las herramientas del Excel para trabajar dicha tabla de proporcionalidad. Así, por ejemplo, un estudiante de 6toB realizó la tarea 3 en la hoja de cálculo, hallando primero la razón externa y lo multiplica luego por cada valor de los litros de pintura blanca. Tal como se puede observar en la Figura 49.

Figura 49

Solución de la tarea 3 en Excel por el estudiante [B4] del 6toB



Algunos estudiantes ya tenían conocimiento sobre el uso de las celdas con fórmulas, lo cual les facilitó el desarrollo de la tarea. Sin embargo, otros estudiantes solo usaron la hoja de cálculo para completar dicha tabla haciendo uso de la calculadora del Excel, y hallaban los valores desconocidos usando la regla de tres simple, es decir, realizaban solo procedimientos de tipo aritméticos.

5.2.4. Análisis de resultados de la tara 4 de proporcionalidad con el uso de la hoja de cálculo del Excel teniendo en cuentas las videograbaciones.

Se analiza el desarrollo de la tarea 4 cuando los estudiantes han trabajado en equipos y que luego proponen la solución en la hoja de cálculo del Excel. Aquí los estudiantes conversaron sobre sus diversas estrategias de solución, discutieron sus resultados, etc.

Luego, se solicitó a un estudiante por cada equipo que explique lo que han realizado en su grupo. Así, se pudo evidenciar las respuestas de algunos grupos de 6toA, tal como se observa en la Figura 50.

Figura 50

Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 2 de trabajo del 6toA

=356*14/6

B	C	D	E	F	G
6	21	46	127	356	
14	49	107.333333	296.333333	=356*14/6	612

=612*6/14

B	C	D	E	F	G
6	21	46	127	356	=612*6/14
14	49	107.333333	296.333333	830.666667	612

De esta manera, se pudo observar que el equipo 3 consideró operar mediante la estrategia de la regla de tres simple directa y usa el Excel como calculadora. Otro equipo trabajó de la siguiente manera. Véase la Figura 51.

Figura 51

Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 3 de trabajo del 6toA

=c3*e2/c2

B	C	D	E	F	G	H
b(litros)	6	21		127	356	
a(litros)	14	49	=c3*e2/c2			612

Se pudo observar que el equipo consideró necesario hallar los valores de la tabla usando las fórmulas con celdas. Siguió usando el método de la regla de tres simple directa. Luego, consideraron hacer "el arrastre" y observaron que los valores que les resultó son racionales positivos (Q+). Tal como se puede observar en la Figura 52.

Figura 52

Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 3 de trabajo del 6toA usando el arrastre

B	C	D	E	F	G	H
b(litros)	6	21	46	127	356	
a(litros)	14	49	107.333333	296.333333	830.666667	612

Sin embargo, este mismo grupo no completó con el valor correcto en el último casillero de la fila de litros de pintura blanca, tal como se puede observar en la Figura 53.

Figura 53

Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 3 de trabajo del 6toA completando una celda

A	B	C	D	E	F	G
blanca(L)	6	21	46	127	356	1428
AZUL(L)	14	49	107.333333	296.333333	830.666667	612

Los integrantes del equipo 3 se dieron cuenta que no había relación entre: 356/830.66666 con 1428/612. Luego, corrigieron en ese momento y colocaron el valor correcto en dicha celda.

Por otro lado, el grupo 5 de 6toA además de completar la tabla de proporcionalidad con ayuda del Excel, llegó a una conclusión muy interesante. El expositor mencionó que cuando el divide 6/14 obtiene un valor de 0,42857143 y cuando divide 262.285714/612 obtiene el mismo valor de 0,42857143, y así llegó a concluir que sí se establece una relación de proporcionalidad. Esto se puede observar en la Figura 54.

Figura 54

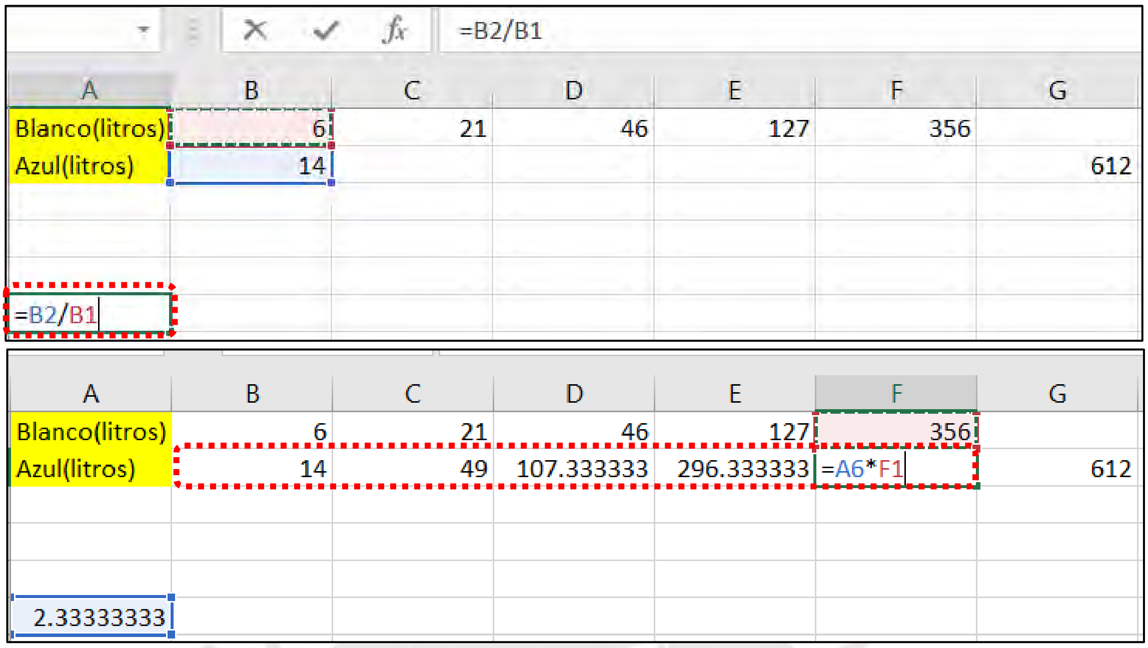
Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 5 de trabajo del 6toA

B	C	D	E	F	G	H
Blanca(L)	6	21	46	127	356	262.285714
Azul(L)	14	49	107.333333	296.333333	830.666667	612
0.42857143	0.42857143					

Ahora, veamos algunas soluciones dadas por algunos grupos de 6toB, tal como se observa en la Figura 55.

Figura 55

Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 1 de trabajo del 6toB



=B2/B1

A	B	C	D	E	F	G
Blanco(litros)	6	21	46	127	356	
Azul(litros)	14					612
=B2/B1						

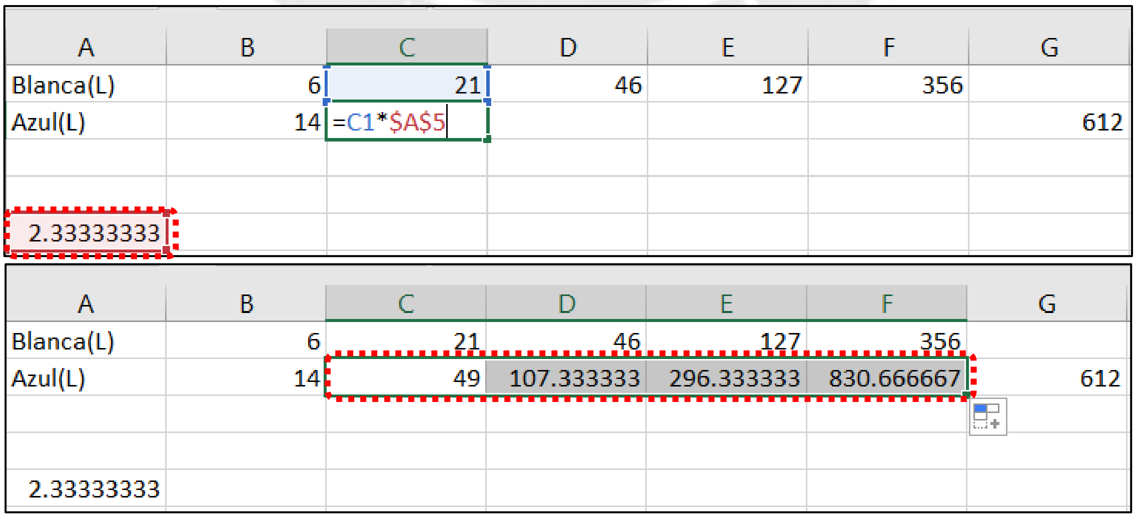
A	B	C	D	E	F	G
Blanco(litros)	6	21	46	127	356	
Azul(litros)	14	49	107.333333	296.333333	=A6*F1	612
2.33333333						

Este grupo primero halló el valor de la razón externa: B2/B1 = 2.3333333…Ahora, dicho valor lo multiplica por cada valor de la fila de litros de pintura blanca y así obtuvo los valores de la fila de litros de pintura azul. Para completar la celda que se encuentra en la fila de litros de pintura blanca, dividió 6/14 y le resultó 0.4285714286, lo cual lo multiplicó con el valor de 612 y le dio el valor de la celda vacía.

El grupo 2 resolvió usando “el arrastre”, tal como se observa en la Figura 56.

Figura 56

Ejemplo de solución de la tarea 4 del equipo 2 de trabajo del 6toB



A	B	C	D	E	F	G
Blanca(L)	6	21	46	127	356	
Azul(L)	14	=C1*A5				612
2.33333333						

A	B	C	D	E	F	G
Blanca(L)	6	21	46	127	356	
Azul(L)	14	49	107.333333	296.333333	830.666667	612
2.33333333						

5.3. Análisis de resultados de las tareas de proporcionalidad modelizadas con tablas de valores teniendo en cuenta los descriptores relativos a su resolución

5.3.1 Análisis de la tarea 1 de proporcionalidad modelizada con tablas de valores

Para el análisis de la tarea 1 de proporcionalidad se ha considerado hacerlo tomando en cuenta unos descriptores, tal como se mencionan en la Tabla 12. Así, dichos descriptores se organizan en tres aspectos a considerar que son: *Resolución de la tarea; Uso de un tipo de lenguaje; Establece un tipo de progresión; y Relación entre los valores*.

En el primer aspecto *Resolución de la tarea* se han considerado unos descriptores, tal como se mencionan a continuación: Resuelve correctamente la tarea 1; Deja en blanco la tarea 1; y Respondió incorrectamente la tarea 1. Respecto al primer tipo de variable se obtuvieron los siguientes resultados, tal como se muestran en la Tabla 17.

Tabla 17

Resultados del primer aspecto a considerar respecto a la tarea 1 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	**%**
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 1	T1-D01	4	23,53
	2. Deja en blanco la tarea 1	T1-D02	0	0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 1	T1-D03	13	76,47
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	**%**
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 1	T1-D01	12	57,14
	2. Deja en blanco la tarea 1	T1-D02	0	0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 1	T1-D03	9	42,86

En la Tabla 17 se muestran las frecuencias absolutas y el porcentaje del primer tipo de variable, tanto del grupo de 6toA como del grupo 6toB. El porcentaje de respuestas correctas del grupo de 6toA (23,53%) difiere mucho de las respuestas correctas del grupo de 6toB (57,14%), lo que también puede llevar a considerar que en ambos grupos, pero sobre todo en el grupo de 6toA, no tienen estrategias de base para resolver tareas de este tipo, a pesar que ya han tenido contacto con este tipo de problemas cuando han trabajado en alguna actividad o evaluación diagnóstica.

Con respecto al segundo aspecto a considerar, se observaron los siguientes resultados, tal como se muestra en la Tabla 18.

Tabla 18

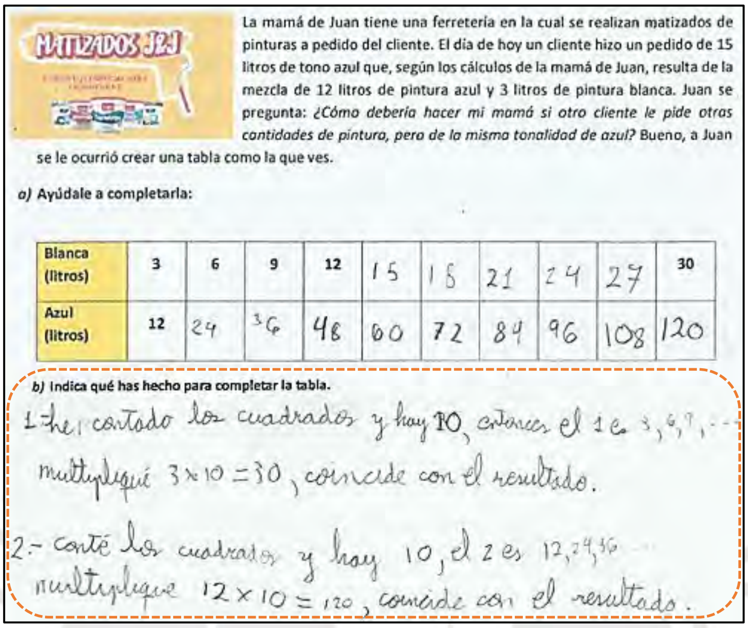
Resultados del segundo aspecto a considerar respecto a la tarea 1 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D04	15	88,24
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D05	12	70,59
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 1	T1-D06	4	23,53
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D04	20	95,24
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D05	17	80,95
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 1	T1-D06	5	23,81

En la Tabla 18 se muestran las frecuencias absolutas y el porcentaje del segundo tipo de variable en los grupos de 6toA y 6toB. Así, en ambos grupos hubo un alto porcentaje, por ejemplo, respecto al uso del lenguaje natural al momento que los estudiantes justifican de cómo han construido dicha tabla de proporcionalidad, a pesar que la tarea no estaba resuelta correctamente en muchos casos. A continuación, se muestra la respuesta dada por el estudiante [A8], tal como se observa en la Figura 57.

Figura 57

Ejemplos de respuestas del tipo de lenguaje natural



La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves.

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Azul (litros)	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

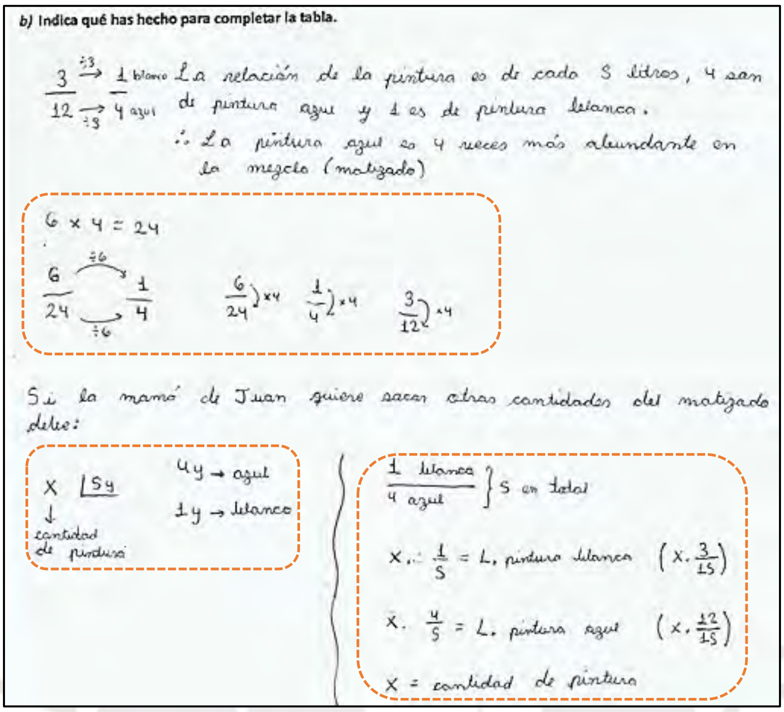
1- he contado los cuadrados y hay 10, entonces el 1 es 3, 6, 9, ...
multipliqué 3x10 = 30, coincide con el resultado.

2.- conté los cuadrados y hay 10, el 2 es 12, 24, 36 ...
multiplique 12 x 10 = 120, coincide con el resultado.

Seguidamente, se puede observar que otra forma de comunicar su construcción de la tabla de proporcionalidad es mediante una igualdad numérica o una notación matemática (6toA =70,59% y 6toB = 80,95%). Tal como se muestra en la siguiente respuesta del estudiante [A22].

Figura 58

Ejemplo de respuesta del tipo de lenguaje mediante una igualdad numérica o notación matemática


b) **Indica qué has hecho para completar la tabla.**

$\frac{3}{12} \xrightarrow{\div 3} \frac{1 \text{ blanco}}{4 \text{ azul}}$ La relación de la pintura es de cada 5 litros, 4 son de pintura azul y 1 es de pintura blanca.

∴ La pintura azul es 4 veces más abundante en la mezcla (matizado)

$6 \times 4 = 24$

$\frac{6}{24} \xrightarrow{\div 6} \frac{1}{4}$ $\quad \frac{6}{24}) \times 4 \quad \frac{1}{4}) \times 4 \quad \frac{3}{12}) \times 4$

Si la mamá de Juan quiere sacar otras cantidades del matizado debe:

X $\lfloor 5y$ — X ↓ cantidad de pintura
4y → azul
1y → blanco

$\left.\begin{array}{l}1 \text{ blanco} \\ 4 \text{ azul}\end{array}\right\}$ 5 en total

$X \cdot \frac{1}{5}$ = L. pintura blanca $(X \cdot \frac{3}{15})$

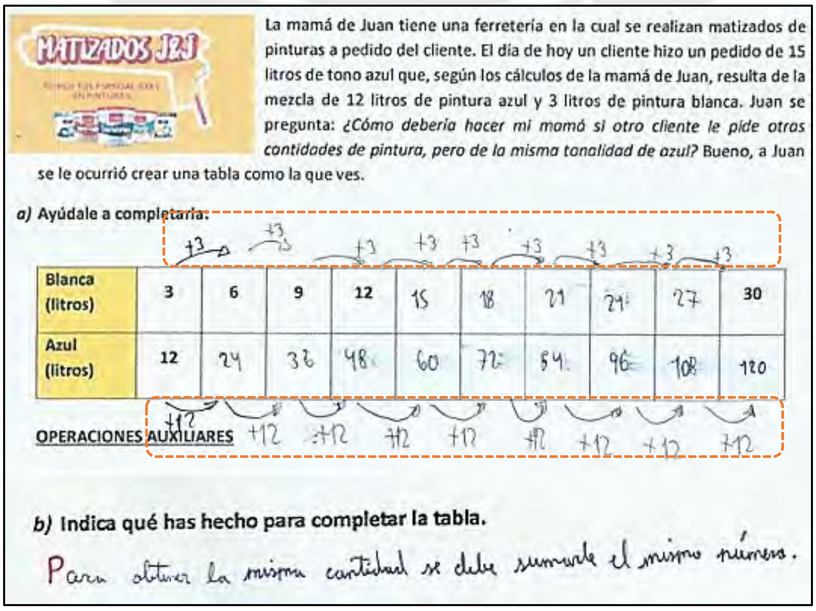
$X \cdot \frac{4}{5}$ = L. pintura azul $(X \cdot \frac{12}{15})$

X = cantidad de pintura

Por último, en cuanto a la utilización de flechas o una escritura reiterada que relaciona dos valores consecutivos, se puede observar que es muy bajo en ambos grupos (6toA = 23,53% y 6toB = 23,81%). Así, se muestra la respuesta manifestada por el estudiante [A21]. Véase el siguiente ejemplo.

Figura 59

Ejemplos de respuestas del tipo de lenguaje mediante el uso de flechas



La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves.

a) **Ayúdale a completarla:**

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Blanca (litros)	**3**	**6**	**9**	**12**	15	18	21	24	27	**30**
Azul (litros)	**12**	24	36	48	60	72	84	96	108	120

OPERACIONES AUXILIARES +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12 +12

b) **Indica qué has hecho para completar la tabla.**

Para obtener la misma cantidad se debe sumarle el mismo número.

A continuación, se muestran los resultados del tercer tipo de variable relacionada con el tipo de progresión, ya sea de tipo aritmética o geométrica. Dichos resultados de ambos grupos se muestran en la Tabla 19.

Tabla 19

Resultados del tercer aspecto a considerar respecto a la tarea 1 con los grupos de 6toA y 6toB

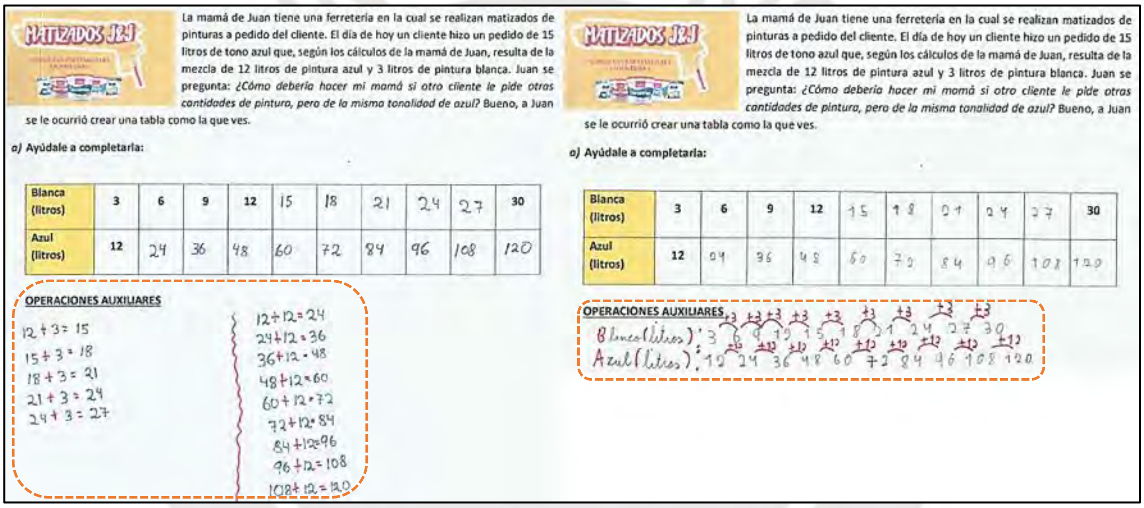
6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Establece un tipo de progresión	7. Establece una progresión aritmética de diferencia +3 para los litros de pintura blanca (sumar 3 al valor anterior)	T1-D07	17	100
	8. Establece una progresión aritmética de diferencia +12 para los litros de pintura azul (sumar 12 al valor anterior)	T1-D08	5	29,41
	9. Establece una progresión geométrica de razón ×3 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 3 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D09	0	0
	10.Establece una progresión geométrica de razón ×12 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 12 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D10	0	0
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Establece un tipo de progresión	7. Establece una progresión aritmética de diferencia +3 para los litros de pintura blanca (sumar 3 al valor anterior)	T1-D07	18	85,71
	8. Establece una progresión aritmética de diferencia +12 para los litros de pintura azul (sumar 12 al valor anterior)	T1-D08	10	47,62
	9. Establece una progresión geométrica de razón ×3 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 3 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D09	1	4,76

	10.Establece una progresión geométrica de razón ×12 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 12 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D10	0	0

Se puede observar que ambos grupos han tenido un mayor porcentaje respecto al tipo de progresión aritmética, tanto en la primera variable (litros de pintura blanca) como en la segunda variable (litros de pintura azul). A continuación se muestran soluciones de los estudiantes [A12] y [B3], respectivamente. Véase la Figura 60.

Figura 60

Ejemplos de soluciones sobre el tipo de progresión aritmética en ambas variables (litros de pintura)



Sin embargo, se ha podido observar que el establecer un tipo de progresión geométrica de razón *x3* ha sido nula en el grupo de 6toA (0%), mientras que en 6toB solo se ha registrado a un estudiante (4,76%). También se puede observar que ambos grupos de 6toA y 6toB, no han establecido ningún tipo de progresión geométrica de razón *x12*.

Ahora, veremos los resultados obtenidos en el cuarto aspecto a considerar, en torno a la relación que hay entre los valores. Véase la Tabla 20.

Tabla 20

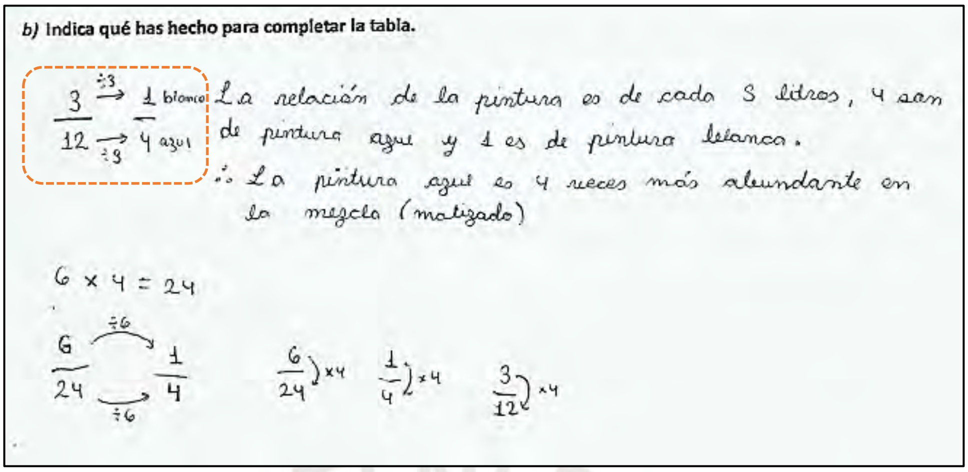
Resultados del cuarto aspecto a considerar respecto a la tarea 1 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	**%**
Relación entre los valores	11. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "reducción a la unidad"	T1-D11	0	0
	12. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes"	T1-D12	0	0
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	**%**
Relación entre los valores	11. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "reducción a la unidad"	T1-D11	1	4,76
	12. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes"	T1-D12	2	9,52

En la Tabla 20 se muestran las frecuencias absolutas y los porcentajes en lo que respecta a la relación que existe entre los valores de la tabla de proporcionalidad. Así, se puede observar que en el grupo de 6toA los estudiantes no establecen ningún tipo de relación entre dichos valores, ya sea mediante la reducción a la unidad o mediante una relación de razones equivalentes. En cambio, en el grupo de 6toB se ha podido observar que el estudiante [B22], por ejemplo, ha podido establecer un tipo de relación mediante la reducción a la unidad, tal como se puede visualizar en la Figura 61.

Figura 61

Ejemplo de solución sobre la relación de valores mediante la reducción a la unidad


b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

$\frac{3}{12} \xrightarrow{\div 3} \frac{1 \text{ blanco}}{4 \text{ azul}}$ La relación de la pintura es de cada 3 litros, 4 son de pintura azul y 1 es de pintura blanca.

∴ La pintura azul es 4 veces más abundante en la mezcla (matizado)

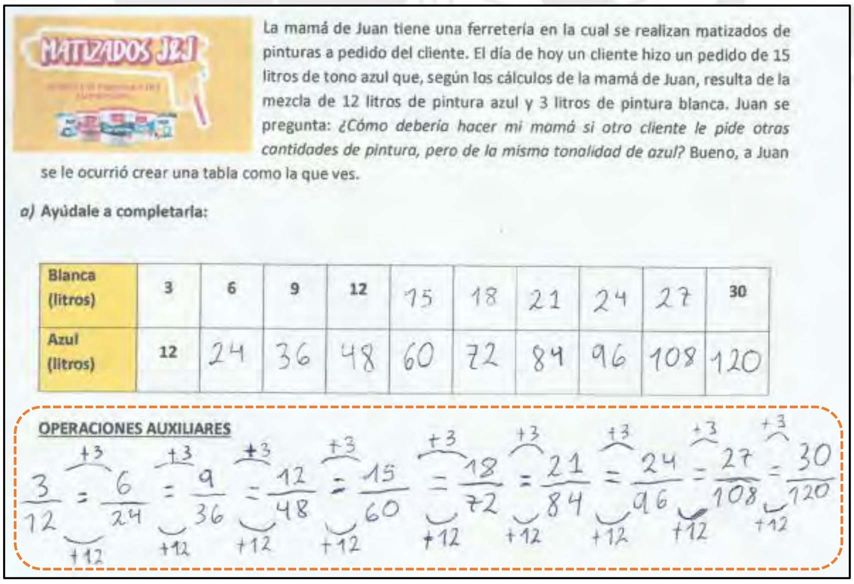
$6 \times 4 = 24$

$\frac{6}{24} \xrightarrow{\div 6} \frac{1}{4}$ $\quad \frac{6}{24}\Big) \times 4 \quad \frac{1}{4}\Big) \times 4 \quad \frac{3}{12}\Big) \times 4$

Por otro lado, también se puede observar que solo dos estudiantes del grupo de 6toB (9,52%) han establecido un tipo de relación entre los valores de las dos pinturas mediante razones equivalentes. A continuación, se puede observar la solución del estudiante [B4] en la Figura 62.

Figura 62

Ejemplo sobre relación de valores mediante razones equivalentes



La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves.

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Azul (litros)	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

OPERACIONES AUXILIARES

$\frac{3}{12} = \frac{6}{24} = \frac{9}{36} = \frac{12}{48} = \frac{15}{60} = \frac{18}{72} = \frac{21}{84} = \frac{24}{96} = \frac{27}{108} = \frac{30}{120}$ (+3 / +12)

A partir de los datos mostrados en la Tabla 17, respecto al primer aspecto a considerar *Resolución de la tarea*, se ha podido registrar que la frecuencia de respuestas correctas en la tarea 1 es muy baja en el grupo de 6toA (23,53%) respecto al grupo de 6toB (57,14%). Estos resultados, en principio, eran ya predecible debido a que las características de los estudiantes del grupo de 6toA, académicamente, es más bajo que el grupo de estudiantes del 6toB. Estos primeros resultados, en general, difieren de los resultados que muestran la investigación de Gaita et al. (2023) cuando aplicaron la misma tarea 1 a otros grupos de estudiantes, donde casi todos resolvieron dicha actividad. Además, estos estudiantes tienen estrategias de base en la resolución para este tipo de tareas a diferencia de las estrategias usadas por los grupos de 6toA y 6toB, que forman parte de nuestra investigación.

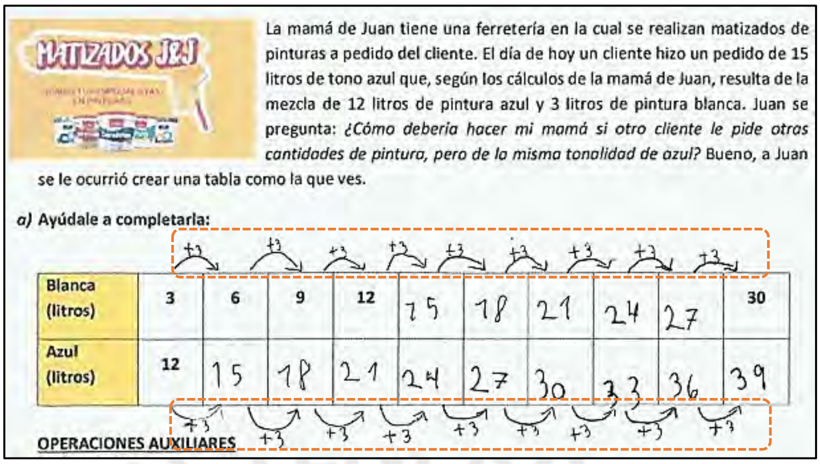
Respecto al segundo aspecto a considerar *Uso de un tipo de lenguaje*, específicamente en el descriptor 4 (T1-D04), sobre el uso del tipo de lenguaje, se puede observar que en ambos grupos de 6toA (88,24%) y 6toB (95,24%) usaron más un lenguaje de tipo natural, que aporta información sobre cómo han construido la tabla de proporcionalidad 1. Estos resultados, sobre el mayor uso de este tipo de lenguaje, son similares a los encontrados por Gaita et al. (2023), quienes también en su investigación sostienen que “Como era predecible en esta etapa educativa (11-12años), en ambos grupos, la mayor parte de las justificaciones dadas por los estudiantes son en lenguaje natural” (p. 63). En esta misma línea, Burgos y Godino (2019) cuando analizan las respuestas de un grupo de estudiantes que se enfrentan a tareas de proporcionalidad, sobre todo en el tipo de lenguaje usado, encuentran que uno de los registros más predominantes son el lenguaje natural.

Por otro lado, se puede observar que en el desarrollo de la tarea 1, después de un lenguaje de tipo natural, los grupos de 6toA (70,59%) y 6toB (80,95%) usan para su justificación un lenguaje de tipo numérico. Estos resultados coinciden con los mostrados por Burgos y Godino (2019) cuando reiteran que los registros predominantes son el natural y el numérico conjuntamente.

En el tercer aspecto a considerar *Establece un tipo de progresión*, concretamente en el descriptor 7 (T1-D07), tal como se puede observar en la Tabla 19, los estudiantes de ambos grupos (6toA = 100% y 6toB = 85,71%) establecen una progresión de tipo aritmético de diferencia *+3* para los litros de pintura blanca (suma 3 al valor anterior). También se puede observar que los estudiantes de ambos grupos (6toA = 29,41% y 6toB = 47,62%) establecen una progresión de tipo aritmético de diferencia *+12* para los litros de pintura azul (suma 12 al valor anterior). Inclusive, se puede observar que hay estudiantes que establecen progresiones aritméticas *+3* tanto para los litros de pintura como los litros de pintura azul. Tal como se puede observar en la solución del estudiante [B8], en la Figura 63.

Figura 63

Ejemplo de tarea 1 donde se establece una progresión aritmética +3 en ambas variables



La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves.

a) **Ayúdale a completarla:**

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Blanca (litros)	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Azul (litros)	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

OPERACIONES AUXILIARES

Esto último también se corresponde con lo propuesto en el análisis *a priori*, debido al modelo dominante de la estructura aditiva en los estudiantes. Además, es observable que dejan de lado el contexto del problema, es nuevo para los estudiantes y no logran relacionar los valores entre ambas variables, por ejemplo. Ante esto, Burgos (2020) sostiene que el éxito de las tareas relacionadas a la proporcionalidad se ven muchas veces afectadas por problemas como: las unidades de las magnitudes que aparecen en las tareas, con la familiaridad con el objeto de estudio o la relación entre los números involucrados.

Por tanto, en ambos grupos hubo una mayor resolución de la tarea 1 desde una estructura más aditiva que multiplicativa (aunque la resolución correcta se dio más en 6toB que en 6toA). Ante esto, Menacho (2020) encontró que este modelo aditivo se promueve mucho en los libros de matemática propuestos por el Ministerio de Educación (MINEDU) en tareas que promueven el razonamiento proporcional. En esta misma línea, Fernández y Llinares (2012) manifiestan que, el hecho de que los estudiantes de Educación Primaria den a los problemas de proporcionalidad respuestas aditivas, y que inclusive lo arrastran hasta la secundaria, es debido a "que no han construido el significado de razón como una relación entre cantidades que debe ser iterada considerando la covariación en dos sucesiones numéricas" (p. 138).

Asimismo, este modelo aditivo se consideró en el análisis *a priori* que sería un comportamiento esperado por los estudiantes. Y los resultados coinciden con los que se propusieron; además, nos da a entender que esta estructura aditiva es muy arraigada en el nivel Primario de la institución. Ante esto último, una de las razones puede ser como la que menciona Fernández y Llinares (2012), al considerar que los estudiantes, sobre todo del nivel Primaria, están influenciados por factores de tipo superficiales en cuanto a la estructura numérica del problema planteado.

Esto último, es consecuencia que no se haya registrado (a excepción de un estudiante) el establecimiento de progresiones geométricas de razón *x3* (6toA = 0% y 6toB = 4,76%) y de razón *x12* (6toA = 0% y 6toB = 0%), tal como se puede observar en los descriptores D9 (T1-D09) y D10 (T1-D10) de la Tabla 19.

Por otro lado, se puede observar que en el cuarto aspecto a considerar *Relación entre los valores* en el descriptor 11 (T1-D11) de la Tabla 20, los estudiantes de ambos grupos no logran relacionar los valores de las dos pinturas mediante “reducción a la unidad” (a excepción de un estudiante), tanto en 6toA (0%) como en 6toB (4,76%). Estos resultados discrepan mucho con los encontrados por Gaita et al. (2023), quienes encuentran que ambos grupos de estudiantes que formaron parte de su estudio sí justifican su resolución mediante “reducción a la unidad”; además ellos sostienen que el trabajo con “reducción a la unidad” se trabajan en cursos previos (10-11 años), siendo en nuestro contexto 5to de Educación Primaria. Esto significa que los estudiantes de los grupos de 6toA y 6toB que forman parte de nuestra investigación, no han abordado este tipo de justificación en tareas relacionadas a proporcionalidad cuando cursaban el 5to grado de Educación Primaria.

Por otro lado, se puede observar que ambos grupos de estudiantes no se evidencia, por lo general, que los estudiantes logren relacionar los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” (6toA = 0% y 6toB = 9,52%). Estos resultados son muy bajos y se relacionan con los encontrados por Gaita et al. (2023), quienes encuentran que el desarrollo de la tarea 1 en un primer grupo de estudiantes solo 1 estudiante logró establecer este tipo de relación, mientras que un segundo grupo de estudiantes solo 3 estudiantes lograron establecer esta relación de razones equivalente.

5.3.2 Análisis de la tarea 2 de proporcionalidad modelizada con tablas de valores

Analizamos las respuestas del primer aspecto a considerar *Resolución de la tarea*, tal como se muestra en la Tabla 21.

Tabla 21

Resultados del primer aspecto a considerar respecto a la tarea 2 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 2	T2-D01	2	10
	2. Deja en blanco la tarea 2	T2-D02	0	0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 2	T2-D03	18	90
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 2	T2-D01	8	33,33
	2. Deja en blanco la tarea 2	T2-D02	4	16,67
	3. Respondió incorrectamente la tarea 2	T2-D03	16	66,67

Se puede observar que la solución correcta de la tarea 2, tanto de los grupos 6toA y 6toB, es muy baja. Esto era predecible debido a que ahora se enfrentan a una nueva tarea, donde hay cambios en algunas variables didácticas, lo que ha ocasionado que los estudiantes hayan empleado otras estrategias de solución que no son adecuadas. A continuación, analizamos el segundo aspecto a considerar *Uso de un tipo de lenguaje*, tal como se muestra en la Tabla 22.

Tabla 22

Resultados del segundo aspecto a considerar respecto a la tarea 2 con los grupos de 6toA y 6toB

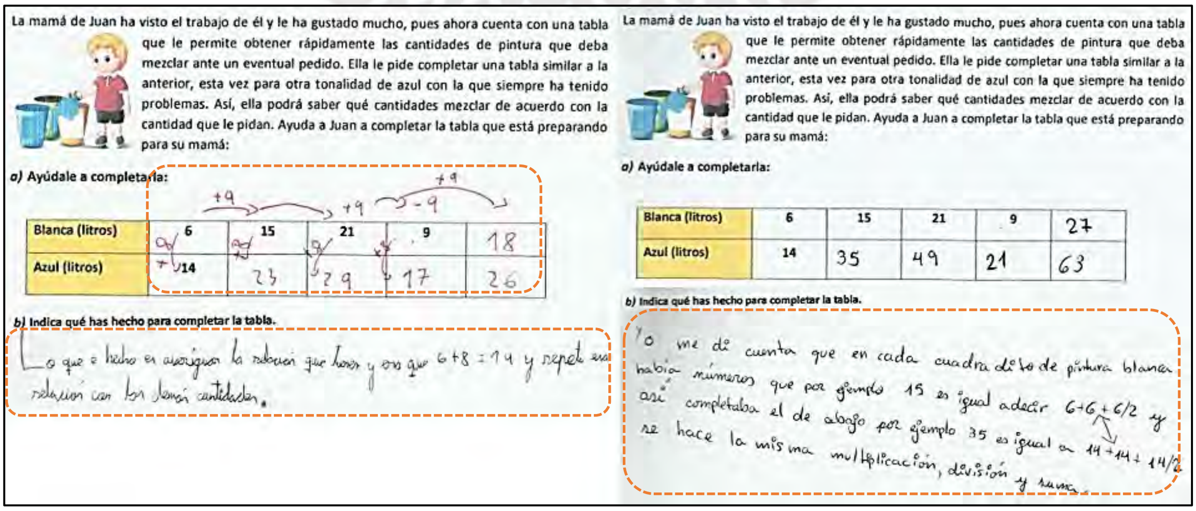
6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D04	14	70
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D05	11	55

	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 1	T2-D06	4	20
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D04	16	66,67
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D05	13	54,17
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 2	T2-D06	0	0

En ambos grupos, 6toA y 6toB, hubo un alto porcentaje, por ejemplo, respecto al uso del lenguaje natural al momento que los estudiantes justifican de cómo han construido dicha tabla de proporcionalidad, a pesar que la tarea no estaba resuelta correctamente en muchos casos. También se puede observar que otra forma de comunicar su construcción de la tabla de proporcionalidad es mediante la utilización de flechas, que en este caso solo en el grupo de 6toA (20%) cuatro estudiantes usaron este tipo de lenguaje. De esta manera, se muestran algunas respuestas manifestadas por los estudiantes [A4] y [B14], respectivamente. Véase la Figura 64.

Figura 64

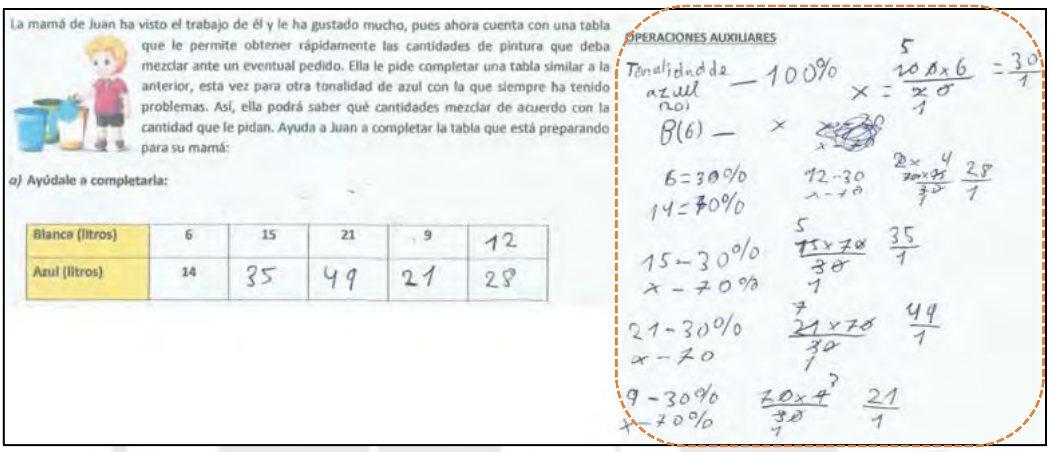
Ejemplos de respuestas del tipo de lenguaje natural y el uso de flechas de la tarea 2



Por otro lado, se puede observar que algunos estudiantes de 6toA (55%) y 6toB (54,17%) usan también un tipo de lenguaje mediante una igualdad numérica o mediante una notación matemática, en la que aporta información de cómo ha construido la tabla de proporcionalidad. A continuación, se muestra la respuesta del estudiante [B10]. Véase la Figura 65.

Figura 65

Ejemplo de respuesta del tipo de lenguaje mediante una igualdad numérica o notación matemática de la tarea 2



A continuación, se muestran los resultados del tercer aspecto a considerar *Relación entre los valores*. Dichos resultados de ambos grupos, 6toA y 6toB, se muestran en la Tabla 23.

Tabla 23

Resultados del tercer aspecto a considerar respecto a la tarea 2 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T2-D07	1	5
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T2-D08	0	0

	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”	T2-D09	1	5
	10. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.	T2-D10	1	5
	11. Relaciona las filas mediante un modelo aditivo, según el cual, si la cantidad de pintura blanca aumenta en “k” litros, entonces a la pintura azul también se le suman “k” litros	T2-D11	0	0
	12. Completa la columna en blanco con valores que no son múltiplos de 3	T2-D12	6	30

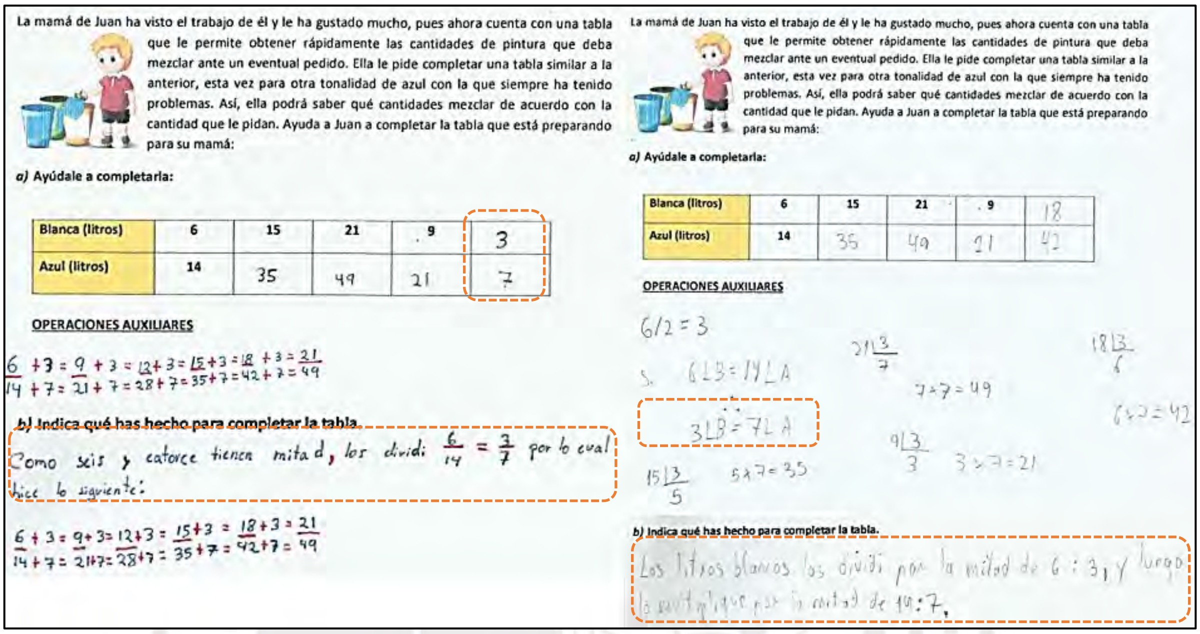
6toB

Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T2-D07	5	20,83
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T2-D08	0	0
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”	T2-D09	4	16,67
	10. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.	T2-D10	6	25
	11. Relaciona las filas mediante un modelo aditivo, según el cual, si la cantidad de pintura blanca aumenta en “k” litros, entonces a la pintura azul también se le suman “k” litros	T2-D11	0	0
	12. Completa la columna en blanco con valores que no son múltiplos de 3	T2-D12	4	16,67

Podemos observar que hay pocos estudiantes de ambos grupos (6toA = 5% y 6toB = 20.83%) que establecen la razón 3:7 en una columna, como reducción a un agrupamiento que hace las veces de unidad en la situación y que también hacen referencia de ello en la justificación. Un ejemplo se puede observar en las soluciones de los estudiantes [A12] y [B15], respectivamente. Véase la Figura 66.

Figura 66

Ejemplo de respuesta cuando se establece la razón 3:7 en una columna de la tarea 2



La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	6	15	21	9	3
Azul (litros)	14	35	49	21	7

OPERACIONES AUXILIARES

6 + 3 = 9 + 3 = 12 + 3 = 15 + 3 = 18 + 3 = 21
14 + 7 = 21 + 7 = 28 + 7 = 35 + 7 = 42 + 7 = 49

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

Como seis y catorce tienen mitad, los dividí $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ por lo cual hice lo siguiente:

6 + 3 = 9 + 3 = 12 + 3 = 15 + 3 = 18 + 3 = 21
14 + 7 = 21 + 7 = 28 + 7 = 35 + 7 = 42 + 7 = 49

La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	6	15	21	9	18
Azul (litros)	14	35	49	21	42

OPERACIONES AUXILIARES

6/2 = 3

6 L B = 14 L A

3 L B = 7 L A

21 | 3
7

7 x 7 = 49

18 | 3
6

6 x 7 = 42

9 | 3
3

3 x 7 = 21

15 | 3
5

5 x 7 = 35

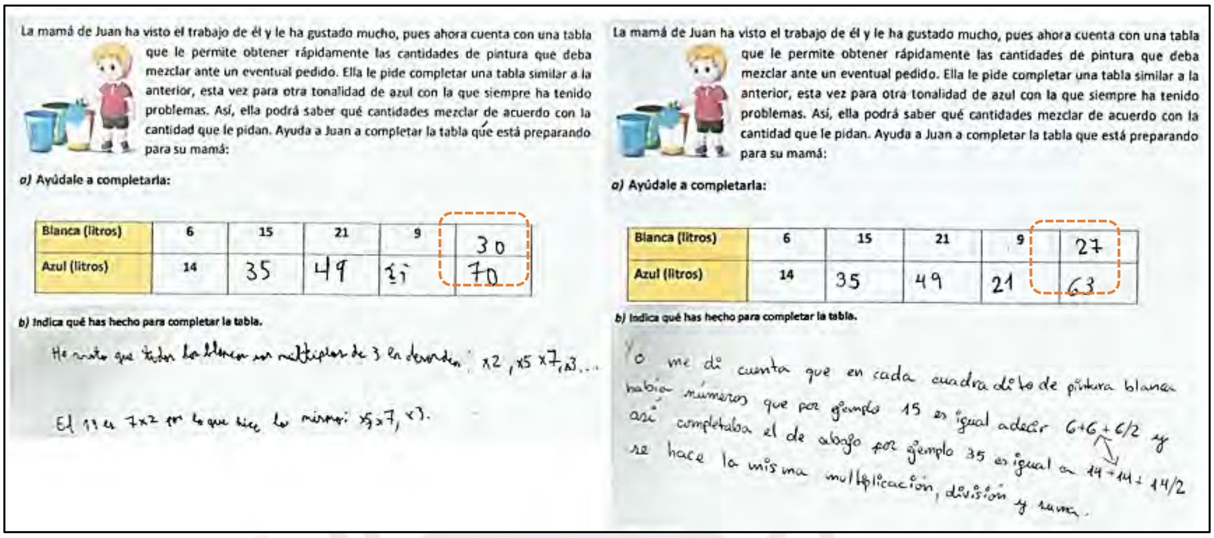
b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

Los litros blancos los dividí por la mitad de 6 : 3, y luego lo multipliqué por la mitad de 14 : 7.

Respecto al descriptor 10 (T2-D10) muy pocos estudiantes de ambos grupos (6toA = 5% y 6toB = 25%) han podido establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco. Así, podemos observar las soluciones de los estudiantes [A7] y [B14], respectivamente. Véase la Figura 67.

Figura 67

Ejemplo de respuesta cuando se establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco de la tarea 2


La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

a) **Ayúdale a completarla:**

Blanca (litros)	6	15	21	9	30
Azul (litros)	14	35	49	21	70

b) **Indica qué has hecho para completar la tabla.**

He visto que todos los blancos son múltiplos de 3 en desorden: x2, x5 x7, x3...

El 14 es 7x2 por lo que hice lo mismo: x5 x7, x3.

La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

a) **Ayúdale a completarla:**

Blanca (litros)	6	15	21	9	27
Azul (litros)	14	35	49	21	63

b) **Indica qué has hecho para completar la tabla.**

Yo me di cuenta que en cada cuadradito de pintura blanca había números que por ejemplo 15 es igual a decir 6+6+6/2 y así completaba el de abajo por ejemplo 35 es igual a 14+14+14/2 y se hace la misma multiplicación, división y suma.

Finalmente, se puede observar también que en el descriptor 11 (D11) ningún estudiante de ambos grupos (6toA = 0% y 6toB = 0%) ha relacionado las filas mediante un modelo aditivo, según el cual, si la cantidad de pintura blanca aumenta en “k” litros, entonces a la pintura azul también se le suman “k” litros. Esto tal vez porque, a diferencia de la tarea 1, no han encontrado la forma de establecer una sucesión aritmética entre los valores, tanto de la primera variable como de la segunda variable.

Respecto a los datos que se muestran en la Tabla 21, del aspecto a considerar *Resolución de la tarea*, específicamente en el descriptor 1 (T2-D01) sobre la resolución de la tarea 2, se puede observar que la resolución correcta es muy baja en ambos grupos (6toA = 10% y 6toB = 33,33%). Ante esto, nuevamente se pone en evidencia que el grupo de 6toB tiene un mayor porcentaje en cuanto a la resolución de la tarea que 6toA. Respecto a los resultados encontrados por Gaita et al. (2023), también hay un primer grupo de estudiantes que resuelve correctamente la tarea a diferencia del segundo grupo de estudiantes cuya resolución correcta es menor. Ante esto Gaita et al. (2023) manifiestan que estos resultados obtenidos tienen impacto en los aprendizajes dependiendo de la organización de las clases en ambos grupos de estudiantes. Esto último, justifica las respuestas de los grupos de 6toA y 6toB, ya que ambos grupos de estudiantes tienen un modo de trabajo distinto, sobre todo en el aspecto académico.

Respecto al descriptor 2 (T2-D02) se puede observar que hay un mayor uso del lenguaje natural y le sigue el uso del lenguaje matemático, lo cual coincide con lo encontrado en el desarrollo de la tarea 1. En el descriptor 3 (T2-D03), se puede observar que los puntajes en los descriptores referidos a la relación entre los valores son muy bajos, tanto en 6toA como en 6toB. Ante esto, Fernández y Llinares (2012), afirman que los estudiantes deben revertir los métodos de resolución que se apoyan en el uso de relaciones de tipo aditivas entre los valores, sobre todo cuando la relación entre los valores no es entera, lo cual le dificultará identificar la *unidad* para dar solución a la tarea planteada.

En relación con lo anterior, se observa que en ambos grupos de estudiantes de 6toA y 6toB no logran establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación ("reducción a la unidad").

Por otro lado, la resolución correcta de la tarea 2 coincide con la Figura 20, que fue la posible solución esperada por los estudiantes en el análisis *a priori*. Fue desarrollada más por estudiantes de 6toB. Inclusive la relación que colocan en el casillero en blanco, responde a una multiplicidad de la razón 3:7. Hubo aún inconvenientes en su solución correcta por ambos grupos, porque los valores que ahora aparecen en la tarea 2 no representan una progresión de tipo aritmética. Por ejemplo, los estudiantes buscaban como sea plantear un patrón de tipo aditivo y otras veces restaban valores con tal de que puedan encajar en los casilleros. Esto último, se corrobora con la solución esperada en el análisis *a priori*, específicamente en la Figura 19. Esto se observó en el trabajo que hicieron de manera tanto individual como grupal. En este mismo sentido, Dole (2008), manifiesta que cuando los valores aparecen de manera desordenada en la tabla de valores, es una dificultad para el estudiante, ya que no puede establecer una relación entre ambas variables.

Con respecto a los cambios en las variables didácticas, en relación al a tarea 1, sí produjo algunos comportamientos previstos en el análisis *a priori*. Por ejemplo, que algunos estudiantes pudieran apoyarse de la columna en blanco y establecer la razón 3:7 que hace las veces de su unidad en la situación, o establecer múltiplos explícitos a 3:7, y así pudieron completar su tabla. También, el que la tabla no fuese exhaustiva llevó a los estudiantes a cambiar de estrategia en su solución, aunque hubo estudiantes que colocaron valores incorrectos a la tabla de proporcionalidad. También el cambio de variables didácticas llevó a los estudiantes a realizar operaciones auxiliares que requerían de otros objetos primarios como: procedimientos, conceptos, y tipos de lenguaje.

5.3.3. Análisis de la tarea 3 de proporcionalidad modelizada con tablas de valores usando lápiz y papel

Para el análisis de la tarea 3 de proporcionalidad, que se resuelve con lápiz y papel, se han tenido en cuenta cuatro aspectos a considerar y doce descriptores, tal como se muestran en la Tabla 3, propuestas en la parte metodológica de la investigación. Así, analizamos las respuestas del primer aspecto a considerar *Resolución de la tarea*. Véase la Tabla 24.

Tabla 24

Resultados del primer aspecto a considerar respecto a la tarea 3 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01	6	28,57
	2. Deja en blanco la tarea 3	T3-D02	4	19,05
	3. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D03	15	71,43
	4. Se apoya del uso de la calculadora simple para resolver la tarea 3	T3-D04	21	100
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01	5	20,83
	2. Deja en blanco la tarea 3	T3-D02	7	29,17
	3. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D03	19	79,17
	4. Se apoya del uso de la calculadora simple para resolver la tarea 3	T3-D04	24	100

En la Tabla 24 se muestran las frecuencias absolutas y el porcentaje del primer tipo de variable, en los grupos de 6toA y 6toB. Así, en ambos grupos la resolución correcta de la tarea 3 ha sido muy baja (6toA = 28.57% y 6toB = 20.83%). Al igual que la tarea 2, los estudiantes se enfrentan a cambios entre los valores y las estrategias usadas no son las adecuadas, porque buscan conseguir un patrón para completar dicha tabla de proporcionalidad, a pesar que todos los estudiantes de ambos grupos de 6toA y 6toB usaron la calculadora simple.

Inclusive, se consideró que al usar la calculadora simple, los estudiantes podían responder mejor a la tarea. Entre algunos estudiantes, existía la noción que no pueden ir valores decimales en la tabla de proporcionalidad. Esto es debido a que es quizá la primera vez que se enfrentan a problemas de contextos que van a generar valores continuos que discretos.

Ahora, analizamos el segundo aspecto a considerar *Uso de un tipo de lenguaje*, tal como se muestran los resultados en la Tabla 25.

Tabla 25

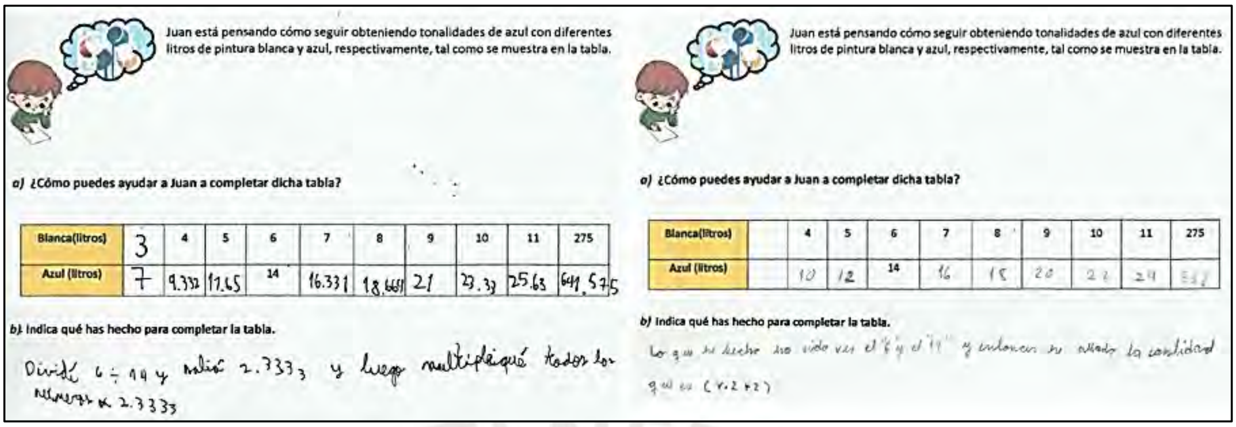
Resultados del segundo aspecto a considerar respecto a la tarea 3 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	5. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D05	4	19,05
	6. Mediante un lenguaje numérico o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D06	9	42,86
	7. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores	T3-D07	6	28,57
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	5. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D05	9	37,5
	6. Mediante un lenguaje numérico o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D06	12	50
	7. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores	T3-D07	6	25

Se puede observar que son muy pocos estudiantes en el grupo de 6toA (19.05%) que usan un leguaje natural para explicar cómo han resuelto la tabla de la tarea 3. Así, se puede observar algunos ejemplos sobre el uso de este tipo de lenguaje por los estudiantes [A7] y [B12], respectivamente. Véase la Figura 68.

Figura 68

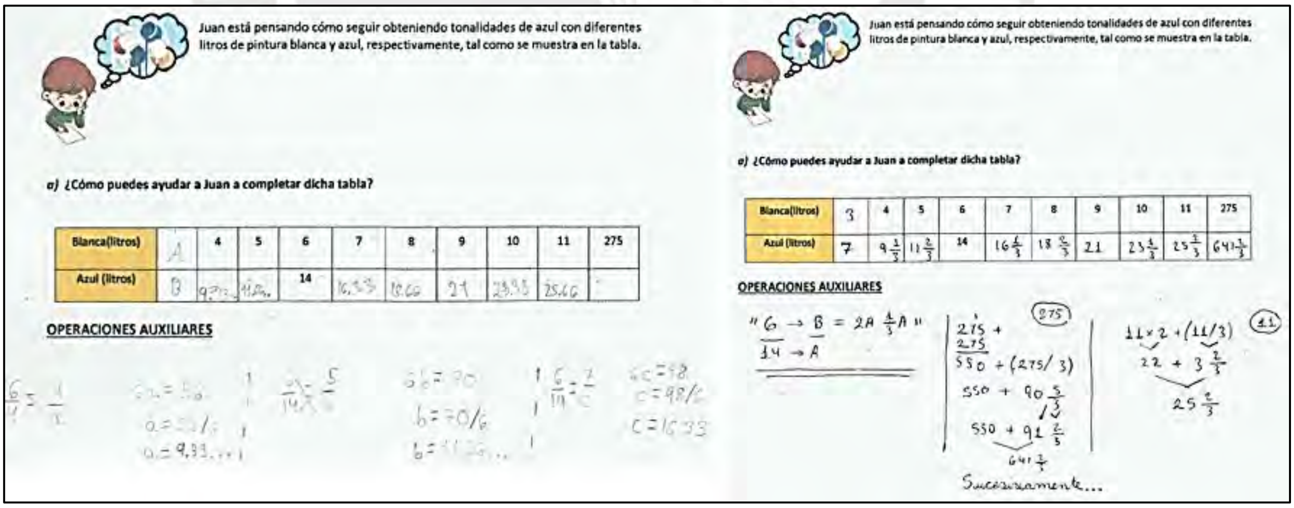
Ejemplos del uso de un lenguaje natural por estudiantes de 6toA y 6toB en la tarea 3



Respecto al uso del lenguaje numérico, se puede observar que es más usado en el grupo de 6toB (50%) que en el grupo de 6toA (42.86%). A continuación, se presentan algunos ejemplos de los estudiantes [A13] y [B22] que han usado este tipo de lenguaje. Véase la Figura 69.

Figura 69

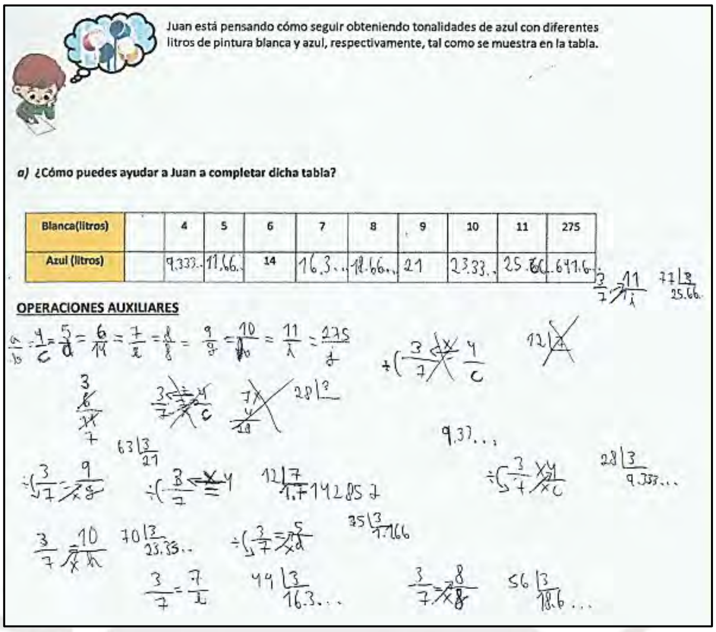
Ejemplos del uso de un lenguaje numérico por estudiantes de 6toA y 6toB en la tarea 3



Finalmente, se puede observar que hay algunos estudiantes en ambos grupos (6toA = 28.57% y 6toB = 25%) que hacen uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores. Así, tenemos la solución del estudiante [A14]. Véase la Figura 70.

Figura 70

Ejemplos del uso de una variable por un estudiante de 6toA en la tarea 3



Ahora analizamos el tercer aspecto a considerar *Relación entre los valores* y los resultados se muestran en la Tabla 26.

Tabla 26

Resultados del tercer aspecto a considerar respecto a la tarea 3 con los grupos de 6toA y 6toB

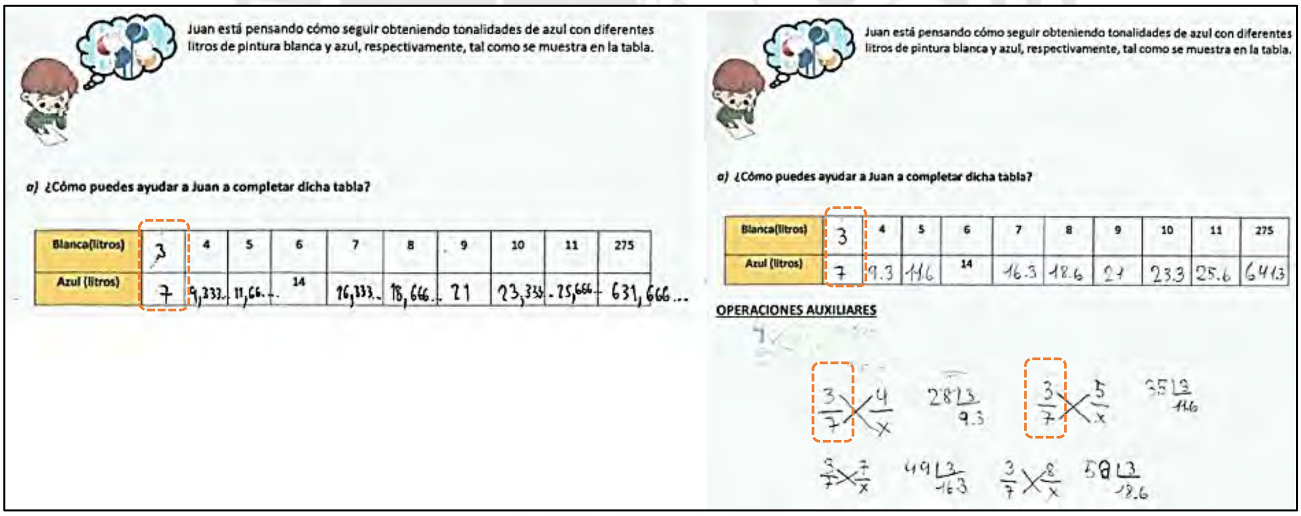
6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores	8. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación")	T3-D08	6	28,57
	9. Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple	T3-D09	6	28,57
	10. Completa la columna en blanco con otros valores distintos a 3:7	T3-D10	3	14,29
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%

Relación entre los valores	8. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D08	11	45,83
	9. Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple	T3-D09	5	20,83
	10. Completa la columna en blanco con otros valores distintos a 3:7	T3-D10	6	25

Con respecto al descriptor 8 (T3-D08), podemos observar que hay estudiantes de ambos grupos (6toA = 28.57% y 6toB = 45.83%) que establecen la razón 3:7 en una columna, como reducción a un agrupamiento que hace las veces de unidad en la situación y que también hacen referencia de ello en la justificación, es decir, al momento de explicitar su razonamiento seguido en la solución de la tarea 3, por ejemplo mediante un leguaje numérico. Así, se puede ver las respuestas de los estudiantes [A21] y [B21], en la Figura 71.

Figura 71

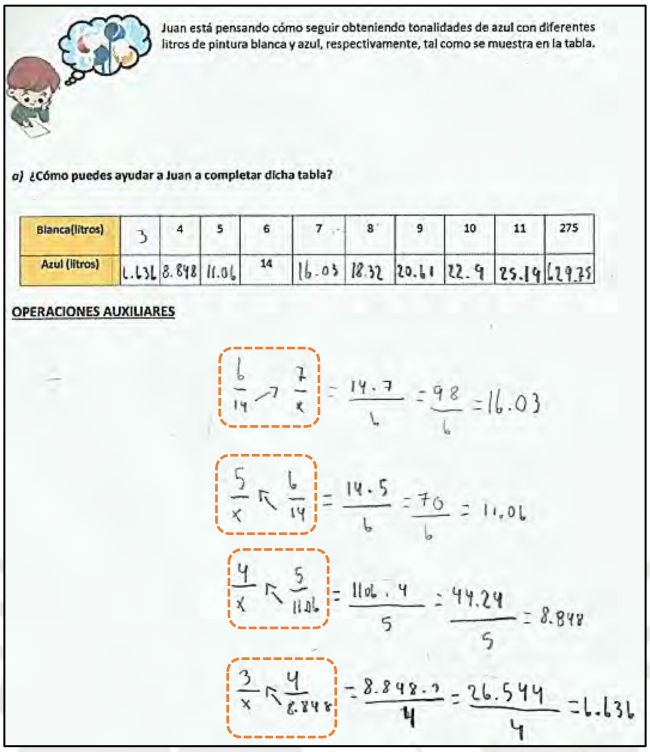
Ejemplo de respuesta cuando se establece la razón 3:7 en una columna de la tarea 3



Por otro lado, se puede observar que hay pocos estudiantes, de ambos grupos, que establecen relación entre los valores por medio de fracciones equivalente y que luego aplican la estrategia de la regla de tres simple para hallar el valor desconocido o el valor faltante en la tabla de proporcionalidad. Así, se puede observar el ejemplo del estudiante [B18], en la Figura 72.

Figura 72

Ejemplo de respuesta cuando relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple en la tarea 3



Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	6.636	8.848	11.06	14	16.03	18.32	20.61	22.9	25.19	629.75

OPERACIONES AUXILIARES

$$\frac{6}{14} \nearrow \frac{7}{x} = \frac{14 \cdot 7}{6} = \frac{98}{6} = 16.03$$

$$\frac{5}{x} \nwarrow \frac{6}{14} = \frac{14 \cdot 5}{6} = \frac{70}{6} = 11.06$$

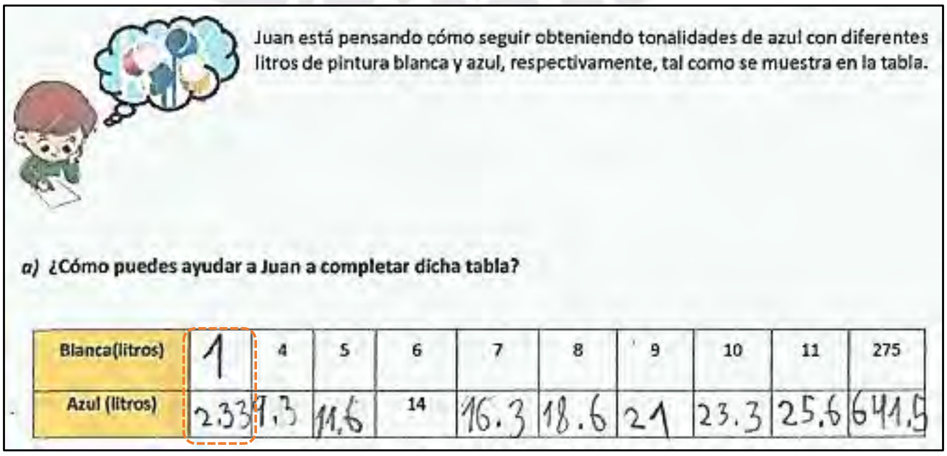
$$\frac{4}{x} \nwarrow \frac{5}{11.06} = \frac{11.06 \cdot 4}{5} = \frac{44.24}{5} = 8.848$$

$$\frac{3}{x} \nwarrow \frac{4}{8.848} = \frac{8.848 \cdot 3}{4} = \frac{26.544}{4} = 6.636$$

Finalmente, se puede observar que hay pocos estudiantes de ambos grupos de 6toA y 6toB que completan la columna en blanco con otros valores diferentes a la relación 3:7, ya que no logran establecer las veces de unidad en la situación. Así, véase la solución del estudiante [B13] en la Figura 73.

Figura 73

Ejemplo de la tarea 3 en el descriptor 10 (T3-D10)



Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	1	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	2.33	9.3	11.6	14	16.3	18.6	21	23.3	25.6	641.5

Ahora, analizamos el cuarto aspecto a considerar *Procesos iniciales de generalización*, con sus respectivos descriptores, con las frecuencias absolutas y los porcentajes respectivos de ambos grupos de 6toA y 6toB, tal como se puede observar en la Tabla 27.

Tabla 27

Resultados del cuarto aspecto a considerar respecto a la tarea 3 con los grupos de 6toA y 6toB

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Procesos iniciales de generalización	11. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.	T3-D11	1	4,76
	12. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T3-D12	8	38,1
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Procesos iniciales de generalización	11. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.	T3-D11	0	0
	12. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T3-D12	11	45,83

De la Tabla 27 se puede observar que en el descriptor 11 (T3-D11), un estudiante logra llegar a un proceso de generalización de tipo local, es decir, que solo el estudiante es capaz de establecer una regla de formación para ciertos valores de la tabla de proporcionalidad. Así, se puede observar un ejemplo de la solución del estudiante [A12], que precisa este tipo de generalización local en la solución de la tarea 3. Véase la Figura 74.

Figura 74

Ejemplo de la solución de la tarea 3 en el descriptor 11 (T3-D11)


Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	552

OPERACIONES AUXILIARES

Blanca	3	4	5	6	7	8	9	10	11	275	276
Azul	8	10	12	14	16	18	20	22	24	552	554

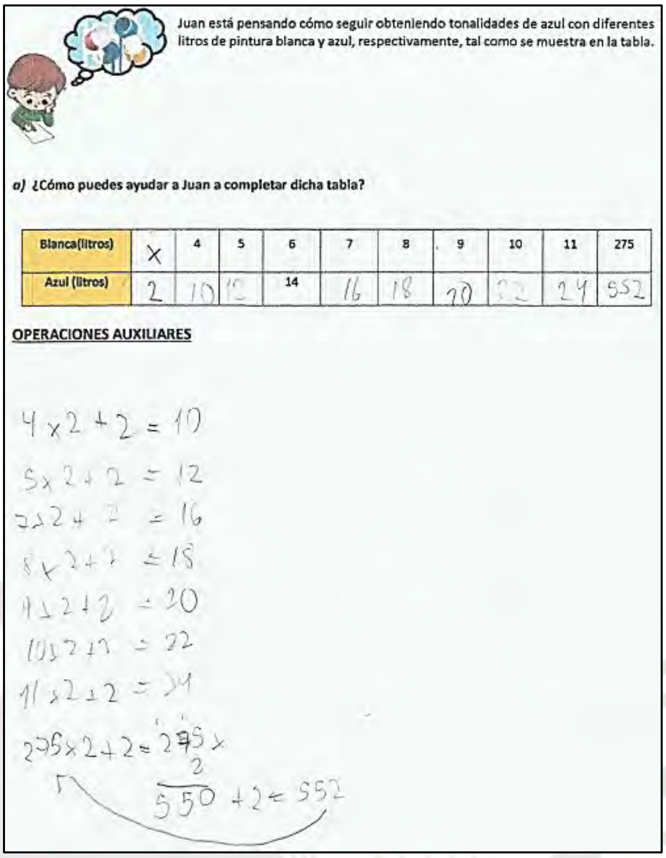
x2

Se puede observar en la Figura 74 que el estudiante [A12] considera que para hallar el valor faltante en los litros de pintura azul, se debe multiplicar *x2* cada valor de los litros de pintura blanca. El estudiante focaliza que se cumple este patrón para estos valores pero no lo hace con otros valores distintos presentados en la tabla de proporcionalidad. Por ejemplo si el estudiante multiplicara *275 x 2* no resulta *24*, es por eso que añade el valor *276* y lo multiplica *x2* para que obtenga *552*. Esto se interpreta como una generalización de tipo local.

Respecto al descriptor 12 (T3-D12), también se puede observar que son pocos los estudiantes de ambos grupos (6toA = 38.1% y 6toB = 45.83%) los que logran establecer una generalización de tipo global al completar la tabla de proporcionalidad. A continuación, se muestra un ejemplo de este descriptor en la Figura 75, como parte de la solución del estudiante [B15].

Figura 75

Ejemplo de la solución de la tarea 3 en el descriptor 12 (T3-D12) por el estudiante [B15]



Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	X	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	2	10	12	14	16	18	20	22	24	552

OPERACIONES AUXILIARES

$4 \times 2 + 2 = 10$
$5 \times 2 + 2 = 12$
$7 \times 2 + 2 = 16$
$8 \times 2 + 2 = 18$
$9 \times 2 + 2 = 20$
$10 \times 2 + 2 = 22$
$11 \times 2 + 2 = 24$
$275 \times 2 + 2 = 275 \times 2$
$550 + 2 = 552$

El estudiante logra establecer una regla de formación de la forma:

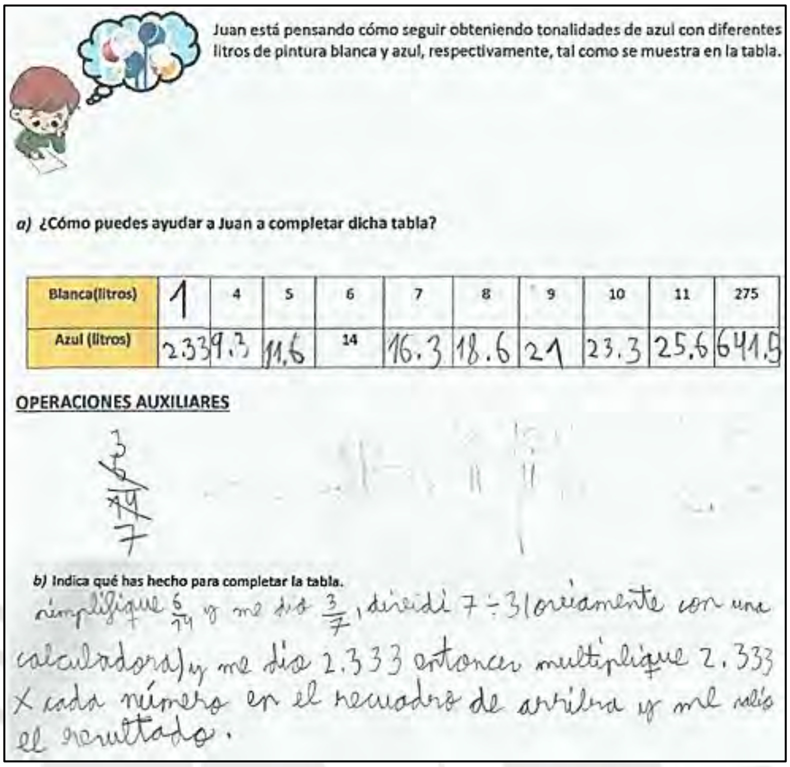
$$n \times 2 + 2 = cantidad\ de\ litro\ de\ pintura\ azul$$

Y lo hace para cada valor de los litros de pintura blanca y según su razonamiento se cumpliría para cualquier valor que se proponga en los litros de pintura blanca. Sin embargo, el estudiante pierde el contexto del problema, solo se interesa por buscar el valor faltante.

Otro ejemplo donde un estudiante logra establecer una generalización de tipo global, se puede observar en la Figura 76, donde incluso el planteamiento que hace en la tarea de 3 de proporcionalidad es correcto. Así, el estudiante [A7] lo que hace es dividir $\frac{14}{6}$ y obtiene un resultado aproximado de 2,333. Con este último valor lo que hace es multiplicarlo por cada valor de los litros de pintura azul. Y esto lo haría para cualquier valor que le den en los litros de pintura blanca.

Figura 76

Ejemplo de la solución de la tarea 3 en el descriptor 12 (T3-D12) por el estudiante [A7]


Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	1	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)	2.33	9.3	11.6	14	16.3	18.6	21	23.3	25.6	641.5

OPERACIONES AUXILIARES

$\cancel{\frac{6}{14}} = \frac{3}{7}$

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

simplifique $\frac{6}{14}$ y me dio $\frac{3}{7}$, dividí 7 ÷ 3 (previamente con una calculadora) y me dio 2.333 entonces multiplique 2.333 x cada número en el recuadro de arriba y me salio el resultado.

Cabe mencionar que la tarea 3 de proporcionalidad no solo se ha trabajado con lápiz y papel, sino que también el docente ha permitido que los estudiantes puedan trabajar dicha tarea con el apoyo de la hoja de cálculo del programa Excel. Los estudiantes por su parte trabajaron esta parte de la actividad en la sala de cómputo, y se apoyaron también de una calculadora simple.

El análisis de dicha tarea 3 con el apoyo de la hoja de cálculo se analiza en el siguiente apartado.

5.3.4. Análisis de la tarea 3 de proporcionalidad usando la hoja de cálculo del Excel

Ambos grupos de 6toA y 6toB han desarrollado también la tarea 3 usando la hoja de cálculo del Excel. Así, analizamos las respuestas del primer aspecto a considerar *Resolución de la tarea*, tal como se muestra en la Tabla 28.

Tabla 28

Resultados del primer aspecto a considerar respecto a la tarea 3 usando la hoja de cálculo

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	**%**
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01-HC	7	77,78
	2. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D02-HC	2	22,22
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	**%**
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01-HC	14	100
	2. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D02-HC	0	0

Se puede observar que en ambos grupos (6toA y 6toB) ha habido mayor número de estudiantes que han resuelto correctamente la tarea, sobre todo en 6toA todos los estudiantes han desarrollado la tarea 3 con la ayuda de la hoja de cálculo.

Ahora, veremos los resultados obtenidos en el segundo aspecto a considerar *Uso de un tipo de lenguaje*, tal como se muestra en la Tabla 29.

Tabla 29

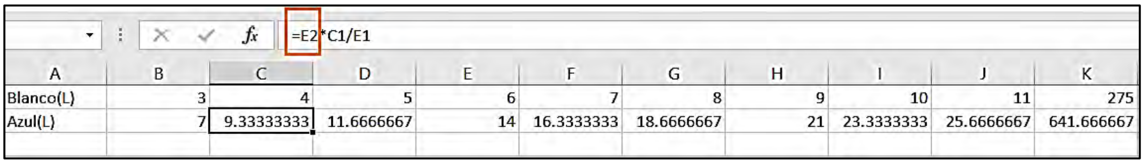
Resultados del segundo aspecto a considerar respecto a la tarea 3 usando la hoja de cálculo

Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
6toA				
Uso de un tipo de lenguaje	3. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D03-HC	3	33,33
	4. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas, por ejemplo: B2, C3, etc.	T3-D04-HC	8	88,89
	5. Usa símbolos como: *, =, ( ), x, / para operar con ayuda del Excel	T3-D05-HC	8	88,89
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Uso de un tipo de lenguaje	3. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D03-HC	11	78,57
	4. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas, por ejemplo: B2, C3, etc.	T3-D04-HC	6	42,86
	5. Usa símbolos como: *, =, ( ), x, / para operar con ayuda del Excel	T3-D05-HC	14	100

Si nos centramos en el descriptor 4 (T3-D04-HC), hay estudiantes de ambos grupos (sobre todo en 6toA = 88.89% que en 6toB = 42.86%) que mediante un lenguaje simbólico, introducen una variable colocando el nombre de las celdas, por ejemplo: B2, C3, etc. Esto puede entenderse como parte de los procesos iniciales de generalización. Así se puede observar en la solución del estudiante [A5]. Véase la Figura 77.

Figura 77

Solución de tarea 3 con la introducción de una variable con el nombre de la celda



En la siguiente Tabla 30, se pueden observar los resultados del tercer aspecto a considerar *Relación entre los valores*, de ambos grupos de 6toA y 6toB.

Tabla 30

Resultados del tercer aspecto a considerar respecto a la tarea 3 usando la hoja de cálculo

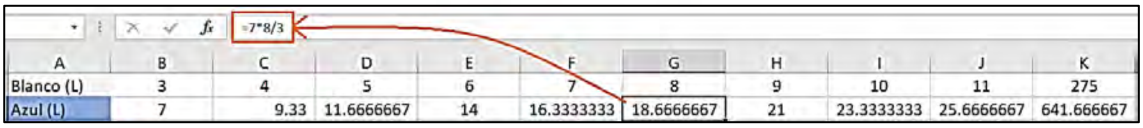
6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores	6. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D06-HC	8	88,89
	7. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T3-D07-HC	8	88,89
	8. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T3-D08-HC	0	0
	9. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T3-D09-HC	8	88,89
	10. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T3-D10-HC	3	33,33
	11. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T3-D11-HC	0	0
6toB				

Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores Aspecto a considerar Relación entre los valores	6. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D06-HC	7	50
	7. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T3-D07-HC	7	50
	8. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T3-D08-HC	3	21,43
	9. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T3-D09-HC	4	28,57
	10. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T3-D10-HC	8	57,14
	11. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T3-D11-HC	1	7,14

En la Figura 78 observamos el ejemplo del estudiante [B1] que cumple con el descriptor 10 (T3-D10-HC), ya que haya el valor de cada casillero estableciendo una relación entre números, es decir, usando la hoja de cálculo como una calculadora.

Figura 78

Ejemplo de la tarea 3 en el descriptor 10 (T3-D10-HC)

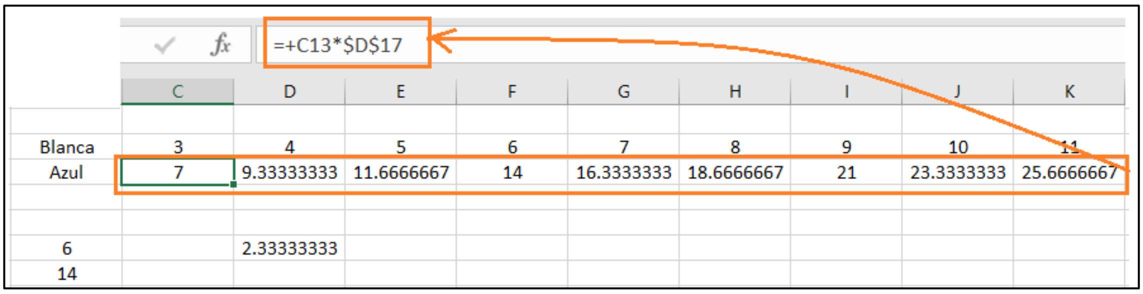

=7*8/3

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Blanco (L)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (L)	7	9.33	11.6666667	14	16.3333333	18.6666667	21	23.3333333	25.6666667	641.666667

Respecto al descriptor 11 (T3-D11-HC), mostramos a continuación la solución del estudiante [B22] que logró obtener mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, tal como se puede observar en la Figura 79.

Figura 79

Ejemplo de la tarea 3 en el descriptor 11 (T3-D11-HC)



=+C13*D17

	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Blanca	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Azul	7	9.33333333	11.6666667	14	16.3333333	18.6666667	21	23.3333333	25.6666667
6		2.33333333							
14									

En la siguiente Tabla 31, se pueden observar los resultados del cuarto aspecto a considerar *Procesos iniciales de generalización*, de ambos grupos de 6toA y 6toB.

Tabla 31

Resultados del cuarto aspecto a considerar respecto a la tarea 3 usando la hoja de cálculo

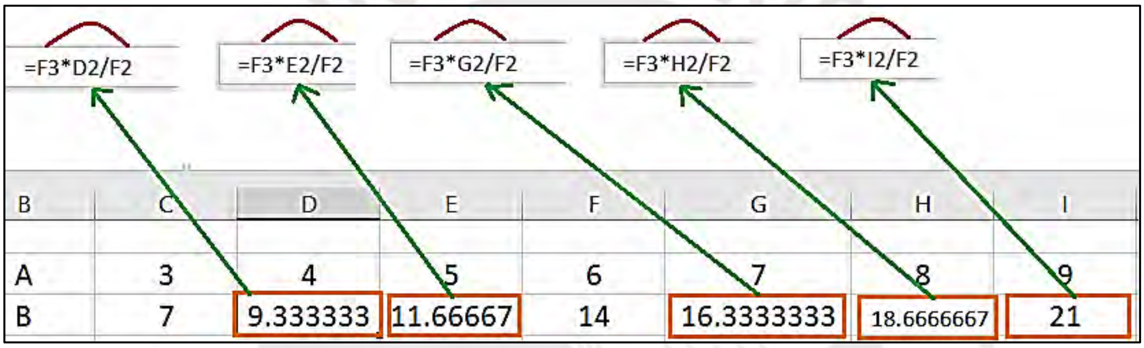
6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Procesos iniciales de generalización	12. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T3-D12-HC	6	66,67
	13. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T3-D13-HC	6	66,67
	14. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada	T3-D14-HC	2	22,22
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Procesos iniciales de generalización	12. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T3-D12-HC	2	14,29
	13. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T3-D13-HC	2	14,29

	14. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada	T3-D14-HC	12	85,71

Se puede observar, sobre todo, que en el descriptor 14 (T3-D14-HC) hay más estudiantes del grupo del 6toB (85.71%) que en 6toA (22.22%) que tienden a establecer una generalización de tipo global, cuando logran completar los valores faltantes a partir de la razón entre una fracción determinada. A continuación, veremos el ejemplo del estudiante [A14] que cumple con el descriptor 14 (T3-D14-HC). Véase la Figura 80.

Figura 80

Ejemplo de la tarea 3 en el descriptor 14 (T3-D14-HC)



Respecto a la solución de la tarea 3, tanto en lápiz y papel como en la hoja de cálculo, se pueden ver aspectos interesantes. Así, cuando los estudiantes se enfrentan primero a la tarea 3 en lápiz y papel, más el uso de la calculadora simple, aún había estudiantes que buscaban relacionar los valores faltantes mediante operaciones, porque deseaban encontrar números naturales. Cuando encontraban un número racional positivo, dudaban si la resolución era o no correcta y muchas veces completaban por completar los casilleros. Esto manifiesta dos cosas: primero, que aún les cuesta salir del conjunto numérico de los números naturales (N) al conjunto de los racionales positivos (Q+), sabiendo que ya en su año escolar anterior habían trabajado decimales; y segundo, que no habían trabajado hasta el momento problemas de proporcionalidad en contextos cuyos resultados sean continuos. Ante esto, Tourniaire y Pulos (1985) sugieren que es mucho más sencillo poder observar cantidades discretas que continuas y por eso los estudiantes desarrollarán mejores las tareas de proporcionalidad que involucren cantidades discretas que si éstas son continuas.

Otro aspecto, que también ha ocasionado dificultades en la solución de la tarea, ha sido que la razón ya no es entera, y al no ser entera los estudiantes lo asocian con el uso erróneo de estrategias aditivas, debido a que conocen la estrategia doble-mitad y su generalización con múltiplos y divisores (Block, 2006; Block, 2021; Gaita et al., 2023).

En muchas respuestas dadas en lápiz y papel de la tarea 3, no se preserva la proporcionalidad y es entonces cuando los estudiantes crean sus propias reglas de formación, ya sean de carácter aditivo o multiplicativo. Ante esto, Gaita et al. (2023), manifiesta que los estudiantes aporten reglas de correspondencia de tipo arbitrarias, que obedecen a un orden estrictamente creciente. En donde sí se ha visto una solución correcta de la tarea, los estudiantes logran reconocer la relación proporcional, que incluso generan otras estrategias de solución no esperadas por el docente.

Por otro lado, cuando los estudiantes se enfrentan a resolver la tarea 3 con la hoja de cálculo, pudo verse, en general, que ayudó a comprender mejor: el cambio de conjunto numérico, la relación entre las variables, a algunos les permitió generar los valores mediante un lenguaje más simbólico, introducían variables con el nombre de las celdas, y se podían observar en varios de los estudiantes que lograban alcanzar un proceso de generalización global, aunque también hubieron estudiantes que lograban una generalización más local, que solo se cumplían para ciertos valores. No muchos estudiantes han coincidido con las soluciones previstas en el análisis *a priori* tal cual, pero si hay rasgos sobre todo en el uso del lenguaje usado en las hojas de cálculo. Por lo tanto, el cambio en las variables didácticas sí han permitido a que los estudiantes puedan avanzar en el RAE, sobre todo cuando han empleado el recurso de la hoja de cálculo del Excel.

5.3.5. Análisis de la tarea 4 de proporcionalidad usando la hoja de cálculo

Ambos grupos de 6toA y 6toB han desarrollado también la tarea 4 usando la hoja de cálculo. Así, analizamos las respuestas del primer aspecto a considerar *Resolución de la tarea*, tal como se muestra en la Tabla 32.

Tabla 32

Resultados del primer aspecto a considerar respecto a la tarea 4 usando la hoja de cálculo

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 4	T4-D01-HC	17	85
	2. Deja en blanco la tarea 4	T4-D02-HC	0	0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 4	T4-D03-HC	3	15
6toB				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 4	T4-D01-HC	16	84,21
	2. Deja en blanco la tarea 4	T4-D02-HC	0	0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 4	T4-D03-HC	3	15,79

Se puede observar que en el desarrollo de esta tarea hubo mejores resultados en cuanto a la resolución correcta de la tarea (6toA =85% y 6toB =84,21%). Esto implica que la tarea 3 anterior, que hicieron con la hoja de cálculo, sirvió como base para que puedan resolver la tarea 4. Es importante mencionar que los estudiantes han dejado registro de cómo han desarrollado la tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo, mediante una ficha que el docente les entregó.

Ahora, veremos los resultados obtenidos en el segundo aspecto a considerar *Uso de un tipo de lenguaje*, tal como se muestra en la Tabla 33.

Tabla 33

Resultados del segundo aspecto a considerar respecto a la tarea 4 usando la hoja de cálculo

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D04-HC	14	70
	5. Mediante un lenguaje simbólico, usando Excel como	T4-D05-HC	16	80

	una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4			
	6. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, por ejemplo: B2, C5, etc.	T4-D06-HC	14	70

6toB

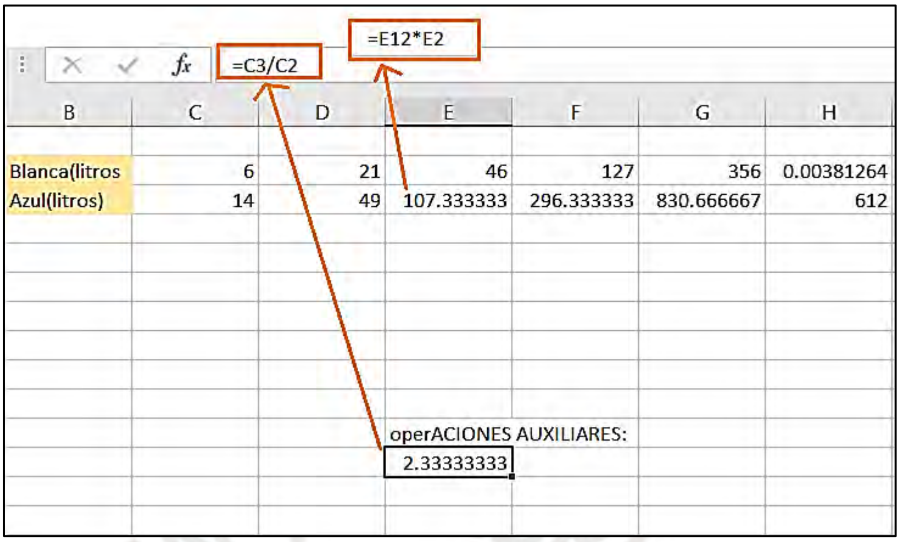
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	f_a	%
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D04-HC	16	84,21
	5. Mediante un lenguaje simbólico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D05-HC	12	63,16
	6. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, por ejemplo: B2, C5, etc.	T4-D06-HC	12	63,16

Se puede observar que hay estudiantes de ambos grupos (6toA = 70% y 6toB = 84,21%), que aún han usado un lenguaje natural para la resolución de la tarea 4. Esto lo han descrito en la hoja que se les entregó, donde redactan su modo de resolución en la hoja de cálculo.

Por otro lado, también hacen uso de un lenguaje simbólico, usando el Excel como una calculadora. Así, se puede ver el cumplimiento del descriptor 5 (T4-D05-HC) por parte del estudiante [B12]. Véase la Figura 81.

Figura 81

Ejemplo del uso de un lenguaje simbólico en la tarea 4



En la siguiente Tabla 34, se pueden observar los resultados del tercer aspecto a considerar, de ambos grupos de 6toA y 6toB.

Tabla 34

Resultados del tercer aspecto a considerar respecto a la tarea 4 usando la hoja de cálculo

6toA				
Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T4-D07-HC	1	5
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T4-D08-HC	0	0
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T4-D09-HC	5	25
	10. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable.	T4-D10-HC	3	15
	11. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres	T4-D11-HC	6	30

	de las celdas del Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1			
	12. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T4-D12-HC	4	20
	13. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes.	T4-D13-HC	8	40
	14. Completa el casillero en blanco que se encuentra por encima del valor 612, de manera correcta	T4-D14-HC	7	35

6toB

Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T4-D07-HC	2	10,53
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T4-D08-HC	1	5,26
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T4-D09-HC	11	57,89
	10. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable.	T4-D10-HC	6	31,58
	11. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T4-D11-HC	4	21,05
	12. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T4-D12-HC	9	47,37
	13. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes.	T4-D13-HC	3	15,79

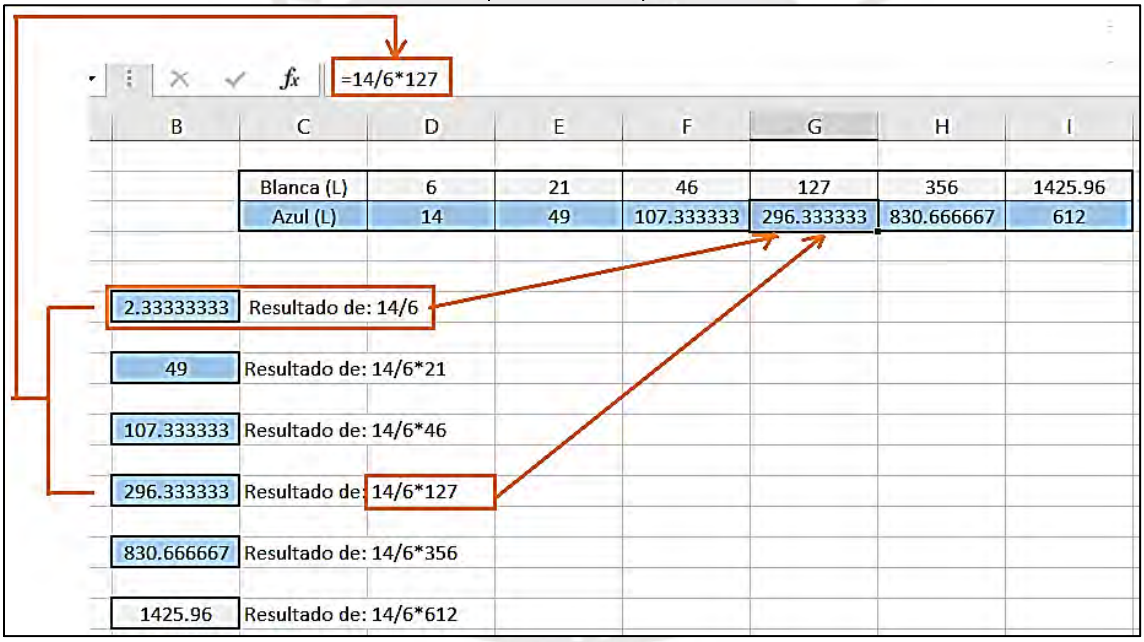
	14. Completa el casillero en blanco que se encuentra por encima del valor 612, de manera correcta	T4-D14-HC	14	73,68

Se puede observar que hay descriptores que son muy bajas en ambos grupos. Por ejemplo, en 6toA solo un estudiante logra establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”), mientras que en 6toB solo lo hacen dos estudiantes.

A continuación se propone un ejemplo que involucra los descriptores 10 (T4-D10-HC) y 12 (T4-D12-HC), respectivamente. Así, se tiene la solución de la tarea del estudiante [B17]. Véase la Figura 82.

Figura 82

Evidencias de la solución de la tarea 4 en los descriptores 10 (T4-D10-HC) y 12 (T4-D12-HC)



En la siguiente Tabla 35, se pueden observar los resultados del cuarto aspecto a considerar *procesos iniciales de generalización*, de ambos grupos de 6toA y 6toB.

Tabla 35

Resultados del cuarto aspecto a considerar respecto a la tarea 4 usando la hoja de cálculo

6toA

Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Procesos iniciales de generalización	15. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T4-D15-HC	2	10
	16. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.	T4-D16-HC	13	65
	17. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T4-D17-HC	5	25

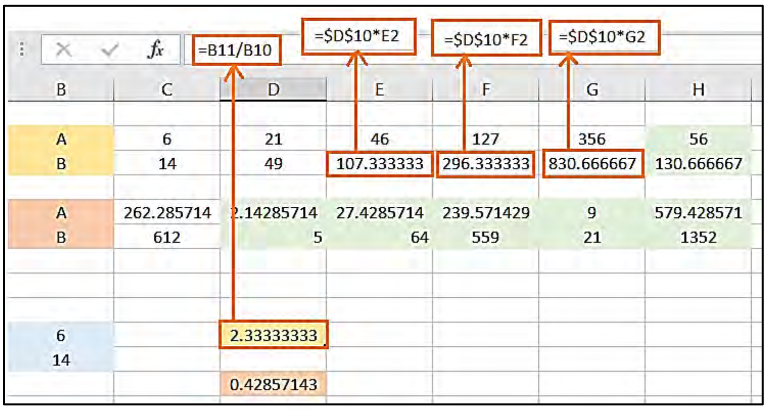
6toB

Aspecto a considerar	Descriptores	Abreviatura	*fa*	%
Procesos iniciales de generalización	15. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T4-D15-HC	3	15,79
	16. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.	T4-D16-HC	2	10,53
	17. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T4-D17-HC	15	78,95

En este cuarto aspecto a considerar, se puede observar que hay más estudiantes en 6toB (78.95%) que en 6toA (25%) que establecen una generalización de tipo global al momento de completar la tabla de proporcionalidad. Así, se puede ver el siguiente ejemplo mediante la solución del estudiante [B22], que inclusive logra realizar el "arrastre" de manera correcta. Véase la Figura 83.

Figura 83

Ejemplo de una generalización de tipo global



En el desarrollo de la tarea 4, hubo muchos estudiantes de ambos grupos que han podido resolver la tarea de manera correcta. Pocos estudiantes han enfatizado mucho en usar un lenguaje más numérico que simbólico. Solo se enfocaban en usar la regla de tres simple como estrategia.

Algunos estudiantes han establecido una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada. La razón 3:7 ya no ha sido muy usada como en tareas anteriores, ya que con el manejo de las herramientas del Excel, hacía que se puedan usar otras estrategias para completar las tablas dinámicas.

Muchos estudiantes han hallado el valor de cada casillero relacionando los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1. Otros han realizado un arrastre no tan preciso, en el sentido que en algunos estudiantes los valores se repetían en todas las celdas, mientras que a otros estudiantes sí les permitía completar con los valores correctos. Solo el estudiante [B22] pudo establecer un “arrastre” que cumplía para cualquier valor que se coloque en la tabla, ya que fijaba el valor, por ejemplo, (D10) y servía para el cálculo en las sucesivas celdas. El campo numérico no ha sido esta vez un inconveniente en los resultados obtenidos. Esto último coincide con Gaita et al. (2023), cuando mencionan sobre el uso de las tablas dinámicas, cuando afirman que es posible modelizar la proporcionalidad mediante tablas dinámicas, en este caso fue la hoja de cálculo del Excel. En este sentido, también Araujo (2019) sostiene que la hoja de Excel permite al estudiante reconocer regularidades entre los valores en situaciones de proporcionalidad, así como la visualización de los datos de diferente manera, facilitando la realización de inferencias entre las relaciones entre los valores, así como la explicación de estrategias. Esto último se ha podido observar en el análisis de la tarea 4, cuando los estudiantes se han enfrentado con este tipo de problema.

Finalmente, se puede decir que los resultados obtenidos por los estudiantes, no coinciden en su totalidad por los propuestos en el análisis *a priori.* Hay aspectos a considerar que sí cumplen con lo propuesto en el *a priori* y con los resultados de los estudiantes, sobre todo en el uso de lenguaje y en relación entre valores de ambas variables. El cambio de las variables didácticas sí ha permitido que los estudiantes puedan evolucionar en el RAE con esta tarea de proporcionalidad.

5.4. Evolución de los niveles del RAE en estudiantes

Es importante mencionar que otro instrumento que permitirá identificar si hubo o no evolución del RAE en los estudiantes, es el estudio de casos. Por ello se han seleccionado a 11 estudiantes de ambos grupos, 6toA y 6toB, que han participado de las cuatro tareas de proporcionalidad, modelizadas con tablas de valores, y de haber usado en las tareas 3 y 4 las hojas de cálculo del Excel. Estos estudiantes se mencionan en la Tabla 36.

Tabla 36

Estudiantes que han trabajado las 4 tareas de proporcionalidad

Estudiantes	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3		Tarea 4
	Ficha	Ficha	Ficha	Hoja de cálculo	Ficha con la hoja de cálculo
6toA					
[A10]	x	x	x	x	x
[A12]	x	x	x	x	x
[A14]	x	x	x	x	x
[A19]	x	x	x	x	x
[A20]	x	x	x	x	x
6toB					
[B1]	x	x	x	x	x
[B3]	x	x	x	x	x
[B4]	x	x	x	x	x
[B21]	x	x	x	x	x
[B22]	x	x	x	x	x
[B24]	x	x	x	x	x

A partir de las tareas de proporcionalidad, modelizadas con tablas de valores, que desarrollaron los estudiantes y, teniendo en cuenta el rol del docente durante las clases, se caracterizan *tipos* de estudiantes según el nivel RAE. A continuación, analizaremos las actividades desarrolladas en cada estudiante, tomando en cuenta los indicadores RAE en tareas de proporcionalidad, así como la caracterización de los niveles en proceso, descritos por Gaita et al. (2023).

[A10]

Tarea 1: Responde correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje tanto natural como numérico. En su justificación se reconoce una progresión de tipo aritmética con los valores de los litros de pintura blanca, como en los valores de pintura azul, pero no llega a establecer una relación entre ambas variables. Ordena los valores de forma creciente y completa la tabla de manera exhaustiva.

Tarea 2: Responde incorrectamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural y numérico. En su justificación se observa que está en la búsqueda de una progresión aritmética, pero esta vez reitera las operaciones entre dos columnas sumando 8 unidad a los valores de pintura blanca para que le resulte la cantidad de litros de pintura azul. Reitera sus operaciones de tipo aditivas y pierde el contexto del problema.

Tarea 3: Resuelve incorrectamente la tarea. Cuando resuelve la tarea con lápiz y papel y con el apoyo de una calculadora simple, se apoya mucho en la razón 6:14 e intenta obtener el resto de valores faltantes mediante la regla de tres simple (pocos casilleros los completa correctamente con valores correspondientes al sistema numérico Q+). Aproxima al entero más próximo cuando opera con decimales, lo cual lleva a afirmar que aún le cuesta cambiar de sistema numérico (desde los naturales hasta los racionales positivos).

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Cuando resuelve la misma tarea, pero usando la hoja de cálculo, hace uso de un lenguaje numérico y realiza el arrastre en el Excel con un valor encontrado. Sin embargo, emplea mal la herramienta de arrastre y todos los valores faltantes son iguales. Pierde el contexto del problema ya que no se cuestionó el por qué obtuvo esos resultados.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Usa la hoja de cálculo como una calculadora, lo cual puede hallar los valores faltantes. Se apoyó de la relación 6:14 y lo relacionó con el resto de valores por medio de la regla de tres simple y así obtuvo sus valores respectivos. No tuvo inconveniente en trabajar en el conjunto numérico Q+ y usa solo el lenguaje numérico.

[A12]

Tarea 1: Resuelve correctamente la tarea. Se apoya del lenguaje tanto natural como numérico. Reconoce una progresión aritmética en cada fila y no logra establecer una relación entre las variables. Ordena los valores de manera creciente y completa la secuencia de forma exhaustiva.

Tarea 2: Responde correctamente la tarea. Logra completar la tabla aplicando una propiedad fundamental de las proporciones que consiste en que: *si se suman los valores antecedentes y se divide por la suma de los consecuentes de una proporción, es igual a cualquiera de las razones de dicha proporción*. Esto lo puede hacer al poder establecen la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”).

Tarea 3: Resuelve incorrectamente la tarea. Hace uso de flechas que relacionan valores de la primera variable con la segunda variable. Se puede observar que busca desarrollar la actividad de manera aditiva, es por ello que se podría decir que hace un proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad. Aún sigue trabajando en el conjunto numérico de los naturales (N).

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Cuando se enfrenta con la hoja de cálculo, ha comprendido la razón de ser de los valores en cada casillero faltante, ya que incluso logra llegar trabajar a un conjunto numérico de los racionales positivos (Q+). Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. Y en su solución se puede analizar que establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea 4. Mediante lenguaje natural y numérico (usando el Excel), aporta información sobre cómo ha construido la tabla de proporcionalidad. Se reconocen progresiones geométricas y establece relación con la razón externa 14:6. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, con los nombres de las celdas. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel y logra establecer una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

[A14]

Tarea 1: Resuelve incorrectamente la tarea 1. Hace uso de un lenguaje natural. Se reconoce una progresión aritmética sobre todo en la fila de la primera variable. No establece ninguna relación entre los valores de las dos variables. Ordena los valores de forma creciente en la fila de la primera variable y pierde el contexto del problema cuando completa la tabla ya que no hace una explicación del por qué los resultados obtenidos.

Tarea 2: Resuelve incorrectamente la tarea 2. Emplea conocimientos previos en relación a la multiplicidad por 3 en los valores de la primera variable. Busca hallar los valores faltantes por amplificación de fracciones equivalentes, pero solo lo relaciona los valores de la segunda variable con las expresiones: *x2*, *x3* y *x4*, pero no hace lo mismo con los valores de la primera fila.

Tarea 3: Resuelve correctamente la tarea 3. Usa un lenguaje natural y numérico. Introduce variables y relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple. Establece la razón 3:7 en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”) Logra trabajar en el conjunto de los números racionales positivos (Q+). Además, se puede analizar en su respuesta que establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas. Establece la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Trabaja en el conjunto de los racionales positivos (Q+). También relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel y establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: El razonamiento que ha seguido, sobre todo para completar los valores de la segunda variable, es correcto, aunque presenta error en la relación entre dos celdas. Sin embargo, sí hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores. Logra trabajar en el conjunto numérico de los racionales positivos (Q+). Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. En sus cálculos en Excel se puede analizar que tiende a establecer una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

[A19]

Tarea 1: No resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje numérico para explicar su solución. Se reconoce una progresión aritmética en cada fila, pero no establece una relación entre las dos variables. Ordenas los valores de manera creciente y se completa la secuencia de manera exhaustiva.

Tarea 2: Responde incorrectamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural y numérico. En su justificación se observa que está en la búsqueda de una progresión aritmética, pero esta vez reitera las operaciones entre dos columnas sumando 8 unidad a los valores de pintura blanca para que le resulte la cantidad de litros de pintura azul. Reitera sus operaciones de tipo aditivas y pierde el contexto del problema.

Tarea 3: No resuelve la tarea en lápiz y papel. Solo logra establecer la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”).

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve incorrectamente la tarea. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas. Vuelve a establecer la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel, pero selecciona casilleros que no corresponden y es por eso que no resuelve muy bien su tarea. Según su desarrollo planteado en la hoja de cálculo, establece un proceso de generalización de tipo "local" cuando relaciona algunos valores de la tabla de proporcionalidad.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Sí logra resolver la tarea correctamente, aunque no logra completa un casillero en blanco y otro casillero lo completa de manera incorrecta. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =14*21/6. El proceso de generalización es de tipo "local" cuando establece la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.

[A20]

Tarea 1: No resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje numérico para explicar su solución. Se reconoce una progresión aritmética en cada fila, pero no establece una relación entre las dos variables. Ordenas los valores de manera creciente y se completa la secuencia de manera exhaustiva.

Tarea 2: No resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural y numérico para explicar su desarrollo. Aún mantiene una resolución de tipo aditiva y no establece una relación entre las dos variables.

Tarea 3: Deja en blanco la tarea.

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve la tarea correctamente y de dos maneras: numérica y simbólicamente. 3. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre cómo ha construido la tabla. También mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas. Establece la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel, por ejemplo: =E11*F10/E10. En otra solución, para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*5/3.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: No resuelve correctamente la tarea. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora, aporta información sobre cómo ha construido la tabla. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =46/3, es decir, a cada valor de la fila de la primera variable lo divide entre 3 para hallar el valor de la fila de la segunda variable. Se sale del contexto del problema. Según su modo de resolución de la tarea, presenta un proceso de generalización de tipo local.

[B1]

Tarea 1: Resuelve incorrectamente la tarea. Usa un lenguaje natural para explicar su desarrollo, pero no deja claro su modo de proceder al resolver la tarea. Hay una estructura de tipo aditiva. No se identifica ninguna progresión aritmética. Los valores no se ordenan de manera creciente.

Tarea 2: Resuelve incorrectamente la tarea. Usa un lenguaje natural y numérico. Relaciona los valores de la siguiente manera: multiplica cada valor de la fila de la primera variable *x6* y los resultados los va colocando en los casilleros de la fila de la segunda variable. Pierde el contexto del problema. Aún trabaja en el conjunto de los números naturales (N). No logra establecer la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”).

Tarea 3: Resuelve incorrectamente la tarea. Hace uso de una variable “*x*” en su solución. No plantea correctamente la regla de tres simple cuando relaciona los valores.

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora, aporta información sobre cómo ha construido la tabla. Establece la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =5*7/3. Establece

una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada (en este caso la razón es 7:3). Logra trabajar el conjunto de los números racionales (Q+).
Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora, aporta información sobre cómo ha construido la tabla. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*46/3. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada. Logra trabajar el conjunto de los números racionales (Q+).

[B3]

Tarea 1: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un leguaje natural. Se reconoce una progresión aritmética en cada fila (tanto de la primera como de la segunda variable), pero no establece relación entre las dos variables. Se ordenan los valores de manera creciente y se completa la secuencia en forma exhaustiva.
Tarea 2: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural. Se emplean conocimientos previos de multiplicidad. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.
Tarea 3: No logra completar la tabla en su totalidad, solo completa dos casilleros de la fila de la segunda variable con los valores en el conjunto de los números naturales (N). No logra llegar al conjunto de los racionales positivos (Q+), ya que sostiene que los valores deben seguir siendo enteros. Establece la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”).
Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora, aporta información sobre cómo ha construido la tabla. Establece la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =5*7/3. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada (en este caso la razón es 7/3). Logra trabajar el conjunto de los números racionales (Q+).
Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea 4. Mediante lenguaje natural y numérico (usando el Excel), aporta información sobre cómo ha construido la tabla de proporcionalidad. Se reconocen progresiones geométricas y establece relación entre con la razón externa 14:6. Para hallar el valor de cada casillero

establece una relación entre números, por ejemplo: =14*46/6 y logra establecer una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada (en este caso la razón es 14:6). Logra trabajar el conjunto de los números racionales (Q+).

[B4]

Tarea 1: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un leguaje natural. Se reconoce una progresión aritmética en cada fila (tanto de la primera como de la segunda variable), pero no establece relación entre las dos variables. Se ordenan los valores de manera creciente y se completa la secuencia en forma exhaustiva.

Tarea 2: Resuelve correctamente la tarea aunque no logra completar el casillero en blanco. Usa un lenguaje tanto natural como numérico. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”. Emplea conocimientos previos de multiplicidad para ambas filas de la tabla.

Tarea 3: En lápiz y papel no logra resolver la tarea. solo completa un casillero de la fila de la segunda variable con un valor correspondiente al conjunto de los números naturales (N). No logra llegar al conjunto de los racionales positivos (Q+), ya que sostiene que los valores deben seguir siendo enteros. Solo logra establece la razón 3:7 en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”).

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Cuando se enfrenta con la hoja de cálculo, ha comprendido la razón de ser de los valores en cada casillero faltante, ya que incluso logra llegar trabajar a un conjunto numérico de los racionales positivos (Q+). Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas. Establece la razón 14:6 en la justificación dentro de la hoja de cálculo. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. Y en su solución se puede analizar que establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea con la hoja de cálculo. Mediante lenguaje numérico (usando el Excel), aporta información sobre cómo ha construido la tabla de proporcionalidad. Introduce variables con el nombre de las celdas. Se reconocen progresiones geométricas y establece relación con la razón externa 14:6 y luego establece una relación 6:14 para hallar el valor de un casillero de la fila de la primera variable. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, con los nombres de las celdas. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel y logra establecer una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

[B21]

Tarea 1: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural y numérico para explicar el desarrollo de la tarea. También hace uso de un lenguaje de flechas en la primera fila. Emplea conocimientos previos de multiplicidad y de porcentajes. Se reconoce una progresión aritmética en la primera fila y una progresión geométrica en la segunda fila. Establece una relación entre variables (razón externa).

Tarea 2: Resuelve correctamente la tarea. Usa un lenguaje natural y numérico. Se vuelve a apoyar en porcentajes. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.

Tarea 3: Resuelve correctamente la tarea. Usa un lenguaje numérico. Logra avanzar de campo numérico, ya que ahora aborda sin dificultad el conjunto de los racionales positivos (Q+). Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores. Establece la razón 3:7 en una columna y en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Establece la razón 3:7 en una columna (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”). Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3. Tiende una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Usa un lenguaje simbólico y Hace uso de alguna variable, mediante el nombre de las celdas, al momento de establecer las relaciones entre valores. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =F3*E4/E3. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas. Tiende una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada. Trabaja en el conjunto de los racionales positivos (Q+).

[B22]

Tarea 1: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural y numérico. En su desarrollo, en la primera fila, usa flechas que relacionan valores consecutivos. Emplea conocimientos previos de multiplicidad. Se reconoce una progresión aritmética en la primera fila y una progresión geométrica en la segunda fila. Establece relación entre las dos variables. Se ordenan los valores de manera creciente y se completa la secuencia de manera exhaustiva, así como la introducción de una variable y lo explica en su justificación.

Tarea 2: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje natural y numérico. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes". Establece la razón 3:7 en una columna y en la justificación ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación"). Establece relación entre las variables y en su justificación introduce una variable.

Tarea 3: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un lenguaje numérico. Relaciona las variables. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores. Establece la razón 3:7 en una columna ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación"). Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea en la hoja de cálculo. Obtiene los valores calculando la razón de litros de pintura azul y los litros de pintura blanca por cociente de los valores en las primeras celdas (=B18/B17) y el uso fijo de este valor (D17) para el cálculo en las sucesivas celdas (constante de proporcionalidad). Usa este cálculo mediante "arrastre", verificando así el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Obtiene los valores calculando la razón de litros de pintura azul y los litros de pintura blanca por cociente de los valores en las primeras celdas (=B11/B10) y el uso fijo de este valor (D10) para el cálculo en las sucesivas celdas (constante de proporcionalidad). Usa este cálculo mediante "arrastre", verificando así el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes. Luego, aplica la misma estrategia para hallar el valor faltante en la primera fila, obtiene los valores calculando la razón de litros de pintura blanca y los litros de pintura azul por cociente de los valores en las primeras celdas (=B10/B11) y el uso fijo de este valor (D12) para el cálculo en las sucesivas celdas y usa también el "arrastre" para el cálculo de otros valores que no aparecen en la tarea propuesta. Este estudiante realiza un nivel de razonamiento algebraico mayor.

[B24]

Tarea 1: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de un leguaje natural. Se reconoce una progresión aritmética en cada fila (tanto de la primera como de la segunda variable), pero no establece relación entre las dos variables. Se ordenan los valores de manera creciente y se completa la secuencia en forma exhaustiva. Mantiene el modelo dominante de un pensamiento aditivo. Se ordenan los valores de manera creciente y se completa la secuencia en forma exhaustiva.

Tarea 2: Resuelve incorrectamente la tarea. Usa un lenguaje natural y sigue buscando un patrón para relacionar los valores. Hay una predominancia del pensamiento de tipo aditivo.

Tarea 3: Deja en blanco la tarea.

Tarea 3 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve la tarea usando la hoja de cálculo. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números y no con el nombre de las celdas. Hay una tendencia a que pueda establecer una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

Tarea 4 con el uso de la hoja de cálculo: Resuelve correctamente la tarea. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, por ejemplo: E5. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =F5*G4/F4. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas. Tiende a una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Los elementos teóricos planteados desde EOS tales como: los objetos primarios y el modelo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE); y los diferentes instrumentos que se han usado para la recogida y análisis de resultados, han hecho posible lograr nuestro objetivo de investigación que consiste en: analizar de qué manera el uso de las tablas de proporcionalidad y la modificación de los datos, permite la evolución de los niveles de razonamiento algebraico elemental en estudiantes del sexto grado de Educación Primaria.

La metodología que se ha elegido es de tipo cualitativa y cuyo método de investigación ha sido la Ingeniería Didáctica desde el EOS. Siendo la más eficaz y pertinente, ya que con las diversas fases que conforman este método, es que se ha podido alcanzar los objetivos específicos previstos desde un inicio.

Así, en la primera fase de *análisis preliminar*, se realizó la revisión de literatura, tales como artículos de divulgación científica e investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, y las consideraciones encontradas en dichas investigaciones guardan mucha relación con nuestra investigación.

En la segunda fase de *concepción y análisis a priori*, se ha considerado trabajar, en relación a las cuatro tareas, con variables didácticas que han tomado diferentes valores en cada tarea propuesta. Además, se han podido predecir los comportamientos matemáticos esperados por los estudiantes, en relación a los objetos primarios considerados.

En la tercera fase de *implementación,* se han tenido en cuenta los siguientes aspectos: se detallaron las características propias del investigador y del grupo de los estudiantes; además, se mencionaron los objetos matemáticos trabajados con los estudiantes antes de la fase de la implementación, así como las expectativas de la institución misma. Por otro lado, también se describieron todos los procesos llevados a cabo en la implementación en relación con el trabajo matemático realizado por los estudiantes.

En la cuarta fase de *análisis a posteriori y evaluación*, se han recogido los diferentes datos que han sido tomados en cuenta en la experimentación. Es importante mencionar que solo se consideraron los resultados obtenidos en las actividades individuales de las cuatro tareas de proporcionalidad, con la finalidad de organizar y analizarlos según unos instrumentos, como se mencionaron en el capítulo V.

Por otro lado, con respecto al primer objetivo específico: *Proponer una secuencia de actividades, en las cuales, los elementos de las tablas de proporcionalidad se modifiquen, y permitan que los estudiantes requieran de nuevas estrategias para poder* *completarlas*, se tomaron en cuenta los elementos propuestos por Gaita et al. (2023), en torno a las tablas de proporcionalidad. Esto ha permitido que los estudiantes puedan plantear diversas estrategias de solución, usando los diferentes objetos primarios, tales como: el tipo de lenguaje, procedimientos, propiedades, conceptos y modos de justificación al momento de completar las tablas de proporcionalidad.

En relación al segundo objetivo específico: *Identificar los objetos y procesos movilizados, en las respuestas de los estudiantes, y analizarlos con rasgos propios del razonamiento algebraico elemental*, se ha tenido que analizar cada una de las respuestas de los estudiantes en la realización de las tareas, que hicieron de manera individual como grupal. Para ello fue importante tomar en cuenta los diferentes instrumentos, que permitieron observar la movilización de los objetos primarios y procesos por parte de los estudiantes. Finalmente, dichos objetos primarios fueron analizados en función de los indicadores RAE, propuestos por Gaita et al. (2023).

Respecto al tercer objetivo específico: *Analizar si la modificación de los valores de las variables didácticas genera cambios en términos del razonamiento algebraico elemental*, fue importante que pudiésemos contar con unas variables didácticas que se tomaron en cuenta en el diseño de las cuatro tareas, y esto supuso que en cada tarea las variables didácticas tomaran valores distintos, de modo que permita al estudiante requerir de estrategias que le permitan resolver las 4 tareas con tablas de valores. Es importante mencionar que los recursos empleados han ayudado a que el estudiante pueda resolver cada una de las tareas, desde lápiz y papel hasta el uso de la hoja de cálculo del Excel.

Para alcanzar del cuarto objetivo específico: *Analizar si el uso de la herramienta de la hoja de cálculo del Excel permite desarrollar un nivel de razonamiento algebraico mayor*, se consideró que en la solución de las tareas 3 y 4, se permita el uso de la herramienta de la hoja de cálculo del Excel, que no significa que el estudiante debe plasmar tal cual lo que había en lápiz y papel, sino que al trabajar con el uso de tablas dinámicas, les permita evolucionar en el razonamiento algebraico elemental. Esto último se constata con el análisis realizado con cada uno de los descriptores correspondientes, relativas a la solución de dichas tareas.

Por otro lado, es importante mencionar la importancia del uso de diversos instrumentos como: videograbaciones, descriptores relativos a la resolución de tareas, y el estudio de casos. Cada uno de estos instrumentos ha aportado resultados que han evidenciado una evolución del RAE en los estudiantes, cuando han resuelto cada una de las tareas.

Es importante mencionar que desde los antecedentes se anunciaban aspectos que podían también ocurrir en nuestra investigación y que ahora también lo corroboramos en el presente estudio. Así, por ejemplo, se pudo observar el modelo dominante del pensamiento aditivo por parte de los estudiantes, cuando se enfrentaron a las primeras tareas de proporcionalidad. Esto último, se relaciona con lo que manifiesta Fernández y Llinares (2012), cuando sostienen que existe una dificultad en los estudiantes, de distintas edades, entre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo en actividades matemáticas de tipo proporcional. Por su parte, Menacho (2020), encontró dicho modelo dominante en el planteamiento de los problemas de proporcionalidad en los libros de texto de 6to de primaria, en el contexto peruano.

En coherencia con lo anterior, en nuestra investigación se ha podido concluir que los estudiantes cuando se han enfrentado en cada tarea, han desarrollado diversas estrategias numéricas como: reducción a la unidad, duplicar, mitad, etc. Y esto guarda relación con lo que sostiene Dole (2008), al manifestar que dichas estrategias sirven como herramientas al estudiante que le van a permitir observar, por ejemplo, la relación entre dos cantidades y magnitudes, realizar cálculos aritméticos, etc.; luego, se ha podido corroborar los estudiantes responden mejor cuando trabajan con problemas de contextos cuyos valores son de tipo discretos que continuos. Esto último se corresponde con lo mencionado por Tourniaire y Pulos (1985), cuando sostienen que es mucho más sencillo poder observar cantidades discretas que continuas. Por eso los estudiantes desarrollan mejores las tareas de proporcionalidad que involucren cantidades discretas que si éstas son continuas.

Por otro lado, se ha podido encontrar resultados muy interesantes en nuestra investigación. Por ejemplo, el trabajar con tablas dinámicas, mediante la hoja de cálculo del programa Excel, ha permitido que los estudiantes, en general, desarrollar un nivel de algebrización. Desde usarlo como una calculadora hasta lograr llegar a procesos de generalización de tipo global, con la manipulación de las herramientas propias del Excel: como el fijar celdas, ingresar “variables”, establecer la razón externa y en base a ello poder completar toda la tabla, e inclusive el “arrastre” que hizo un estudiante, que refuerza más, por ejemplo, la constante de proporcionalidad. Esto guarda coherencia con lo que sostiene Artigue (2007), cuando manifiesta las bondades de la hoja de cálculo, ya que en ella se puede escribir una variable de tipo abstracta, con la ayuda de símbolos, que hacen referencia a los posibles valores que puede tomar; y dicha variable se relaciona con la noción que se tiene de variable en el álgebra.

Por tanto, de acuerdo a los resultados obtenidos, se pudo concluir que: los estudiantes han logrado evolucionar en los niveles del RAE a partir de la realización de tareas que involucran tablas de proporcionalidad. Las tareas demandan cada vez un mayor grado de generalización, así como una evolución en el uso de lenguajes que van desde lo numérico o verbal hasta lenguajes simbólicos que se ponen en evidencia con el uso eficiente de hojas de cálculo.

Finalmente, del presente trabajo se pueden extraer algunas orientaciones que permitan a futuras investigaciones proponer nuevas situaciones didácticas, cuya gestión tendrán en cuenta las variables didácticas para una eficiente progresión del razonamiento proporcional, promoviendo así niveles mayores de algebrización: desde un nivel incipiente de algebrización (RAE 0-1) hasta un nivel consolidado de algebrización (RAE 3), donde se siente las bases para la educación Secundaria y se logre llegar a la aplicación del significado propiamente algebraico.

Referencias

Aké, L. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, *30*(2), 171-201. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Ake&Godino_2018.EducacionMatematica.pdf

Araujo, R. (2019). O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL E O USO DO EXCEL: Um olhar para a Gênese Instrumental [Tesis de maestría, Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia]. https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3607

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumenta. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 2011. Año 6. Número 8. pp 13-33.Costa Rica.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics*, *10*, 70-77.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*. 36(*5*), 412–446. http://www.jstor.org/stable/30034944

Blanton, M.L., y Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In: Cai, J., Knuth, E. (eds) Early Algebraization. Advances in Mathematics Education. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2.

Block, D. (2006). Se cambian fichas por estampas Un estudio didáctico sobre la noción de razón "múltiplo" y su vinculación con la multiplicación de números naturales. *Educación Matemática*, 18(2), 5-36.

Block, D. (2021). "Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación matemática*, *33*(2), 115-146. https://doi.org/10.24844/em3302.05

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Burgos, M. (2020). Niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desde las perspectivas institucional y personal. Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_MBurgos_2020.pdf

Burgos, M. y Godino, J.D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, *31* (3), 117-150. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Burgos_Godino_EM2018.pdf

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22. https://www.scielo.br/j/ep/a/PRgRB5DFLymSLkFvShvBf3R/?lang=es&format=pdf

Carraher, D. W., M. V. Martínez y A. D. Schliemann (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Dole, S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(2), 18-22. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ802702.pdf

Donoso, P., Rico, N. y Castro. E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *PROFESORADO. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 20*(2), 76-97.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012) Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/252566

Gaita, C., Supo, R. y Ugarte, F. (2021). Valoración de una propuesta educativa para el desarrollo del razonamiento algebraico empleando la noción de linealidad. *Revemop*, *3*, 1-20.

Gaita, R. y Wilhelmi, M. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento de Patrones. *Bolema*, *33*(63), 629-689. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

Gaita, C., Wilhelmi, M., Ugarte, F. y Gonzales, C. (2023). Indicadores de niveles de razonamiento algebraico elemental en educación primaria en la resolución de tareas de proporcionalidad con tablas de valores. *Revista de Educación Matemática*, *35*(3), 49-81. https://doi.org/10.24844/EM3503.02

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathermatics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi:10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, *26* (42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103- 636X2012000200005

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014a). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32* (1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J.D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa A., y Wilhelmi M.D. (2014b). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2-3), 167-200. https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_RAE-PRI-SEC.pdf

Godino, J.D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño [conferencia]. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_2013_Ingenieria_didactica.pdf

Godino, J.D., Rivas, H., Burgos, M., y Wilhelmi, M.R. (2019). Analysus of Didactical Trajectories in Teaching and Learning Mathematics: Overcoming Extreme Objectivist and Constructivist Positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 147-161. https://doi.org/10.12973/iejme/3983

Godino, J.D., Burgos, M., y Wilhelmi, M.R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(1), 147-164. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *18*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J., Ng, SF, Schifter, D., Steinweg, AS (2017). Grupo de Estudio Temático N° 10: Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra Temprana. En: Kaiser, G. (eds) Actas del 13° Congreso Internacional sobre Educación Matemática. Monografías ICME-13. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_37

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J.R., y Wilhelmi M.R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 259-271). Santander: SEIEM. https://www.researchgate.net/publication/277995369_Analisis_a_priori_de_una_situacion_de_optimizacion_en_segundo_de_educacion_primaria

Menacho, R. (2020). *El saber a enseñar de la proporcionalidad vista en una colección de cuadernos de trabajo de primaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio//handle/20.500.12404/21730

Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) (2016). Currículo nacional de la educación básica, https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4551

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59-81. https://www.relime.org/index.php/relime/article/view/211

Radford, L. (2012). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. En S. J. Cho (ed.). *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education- ICME* (pp. 675-694). Seúl, Korea: National University of Education.

Rivas, M. A., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42 B), 559-588. https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223574008.pdf

RIVAS, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf

Schliemann, A. D., Carraher, D.W. & Brizuela, B.M. (2001). *When tables become function tables.* Paper presented at the Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181–204. http://www.jstor.org/stable/3482345

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación matemática*, *8* (2), 33-40.

Wilhelmi, M.R. (2017). Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM. https://n9.cl/zlt38

ANEXOS

ANEXO A: Resultados de las tareas de proporcionalidad

ANEXO A.1: Resultados de la tarea de proporcionalidad 1 del grupo de 6toA

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T1A1	T1A2	T1A3	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 1	T1-D01	0	0	0		4
	2. Deja en blanco la tarea 1	T1-D02	0	0	0		0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 1	T1-D03	1	1	1		13
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D04	1	1	1		15
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D05	1	1	1		12
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 1	T1-D06	0	0	1		4
Establece un tipo de progresión	7. Establece una progresión aritmética de diferencia +3 para los litros de pintura blanca (sumar 3 al valor anterior)	T1-D07	1	1	1		17
	8. Establece una progresión aritmética de diferencia +12 para los litros de pintura azul (sumar 12 al valor anterior)	T1-D08	0	0	0		5
	9. Establece una progresión geométrica de razón ×3 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 3 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D09	0	0	0		0
	10.Establece una progresión geométrica de razón ×12 para los litros de pintura blanca (multiplicar por 12 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D10	0	0	0		0
Relación entre los valores	11. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "reducción a la unidad"	T1-D11	0	0	0		0
	12. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes"	T1-D12	0	0	0	…	0

ANEXO A.2: Resultados de la tarea de proporcionalidad 1 del grupo de 6toB

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T1B1	T1B3	T1B4	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 1	T1-D01	0	1	1		12
	2. Deja en blanco la tarea 1	T1-D02	0	0	0		0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 1	T1-D03	1	0	0		9
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D04	1	1	1		20
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 1	T1-D05	0	0	1		17
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos *valores consecutivos* en la tabla 1	T1-D06	0	0	0		5
Establece un tipo de progresión	7. Establece una progresión aritmética de diferencia +3 para los litros de pintura blanca (sumar 3 al valor anterior)	T1-D07	0	1	1		18
	8. Establece una progresión aritmética de diferencia +12 para los litros de pintura azul (sumar 12 al valor anterior)	T1-D08	0	1	1		10
	9. Establece una progresión geométrica de razón $\times 3$ para los litros de pintura blanca (multiplicar por 3 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D09	0	0	0		1
	10.Establece una progresión geométrica de razón $\times 12$ para los litros de pintura blanca (multiplicar por 12 según la posición que ocupa en la secuencia)	T1-D10	0	0	0		0
Relación entre los valores	11. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "reducción a la unidad"	T1-D11	0	0	0		1
	12. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes"	T1-D12	0	0	1	…	2

ANEXO A.3: Resultados de la tarea de proporcionalidad 2 del grupo de 6toA

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T2A1	T2A2	T2A3	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 2	T2-D01	0	0	0		2
	2. Deja en blanco la tarea 2	T2-D02	0	0	0		0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 2	T2-D03	1	1	1		18
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D04	0	0	0		14
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D05	0	0	0		11
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos o más *valores* en la tabla 2	T2-D06	0	0	0		4
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T2-D07	0	0	0		1
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T2-D08	0	0	0		0
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”	T2-D09	0	0	0		1
	10. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.	T2-D10	0	0	0		1
	11. Relaciona las filas mediante un modelo aditivo, según el cual, si la cantidad de pintura blanca aumenta en “k” litros, entonces a la pintura azul también se le suman “k” litros	T2-D11	0	0	0		0
	12. Completa la columna en blanco con valores que no son múltiplos de 3	T2-D12	1	0	0	…	6

ANEXO A.4: Resultados de la tarea de proporcionalidad 2 del grupo de 6toB

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T2B1	T2B2	T2B3	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 2	T2-D01	0	0	1		8
	2. Deja en blanco la tarea 2	T2-D02	0	0	0		4
	3. Respondió incorrectamente la tarea 2	T2-D03	1	1	0		16
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D04	1	1	1		16
	5. Mediante una igualdad numérica o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 2	T2-D05	0	1	0		13
	6. Utiliza flechas o una escritura reiterada que relaciona dos o más *valores* en la tabla 2	T2-D06	0	0	0		0
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T2-D07	0	0	0		5
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación (“reducción a la unidad”)	T2-D08	0	0	0		0
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes”	T2-D09	0	0	0		4
	10. Establece los múltiplos explícitos de 3:7 y los coloca en la columna en blanco, después de haber completado correctamente los valores faltantes.	T2-D10	0	0	1		6
	11. Relaciona las filas mediante un modelo aditivo, según el cual, si la cantidad de pintura blanca aumenta en “k” litros, entonces a la pintura azul también se le suman “k” litros	T2-D11	0	0	0		0
	12. Completa la columna en blanco con valores que no son múltiplos de 3	T2-D12	1	1	0	…	4

ANEXO A.5: Resultados de la tarea de proporcionalidad 3 del grupo de 6toA

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T3A1	T3A2	T3A3	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01	0	1	1		6
	2. Deja en blanco la tarea 3	T3-D02	1	0	0		4
	3. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D03	1	0	0		15
	4. Se apoya del uso de la calculadora simple para resolver la tarea 3	T3-D04	1	1	1		21
Uso de un tipo de lenguaje	5. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D05	0	0	0		4
	6. Mediante un lenguaje numérico o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D06	0	1	1		9
	7. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores	T3-D07	0	0	1		6
Relación entre los valores	8. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D08	0	0	0		6
	9. Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple	T3-D09	0	0	1		6
	10. Completa la columna en blanco con otros valores distintos a 3:7	T3-D10	0	1	0		3
Procesos iniciales de generalización	11. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.	T3-D11	0	0	0		1
	12. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T3-D12	0	1	1	…	8

ANEXO A.6: Resultados de la tarea de proporcionalidad 3 del grupo de 6toB

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T3B1	T3B2	T3B3	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01	0	0	0		5
	2. Deja en blanco la tarea 3	T3-D02	0	0	0		7
	3. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D03	1	1	1		19
	4. Se apoya del uso de la calculadora simple para resolver la tarea 3	T3-D04	1	1	1		24
Uso de un tipo de lenguaje	5. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D05	0	1	0		9
	6. Mediante un lenguaje numérico o una notación exclusivamente matemática, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D06	1	1	0		12
	7. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores	T3-D07	1	0	0		6
Relación entre los valores	8. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D08	1	0	1		11
	9. Relaciona a través de fracciones equivalentes por medio de la regla de tres simple	T3-D09	0	0	0		5
	10. Completa la columna en blanco con otros valores distintos a 3:7	T3-D10	0	1	0		6
Procesos iniciales de generalización	11. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad.	T3-D11	0	0	0		0
	12. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T3-D12	0	1	0	...	11

ANEXO A.7: Resultados de la tarea de proporcionalidad 3 del grupo de 6toA usando la hoja de cálculo

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T3A5	T3A10	T3A12	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01-HC	1	0	1		7
	2. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D02-HC	0	1	0		2
Uso de un tipo de lenguaje	3. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D03-HC	0	1	0		3
	4. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas, por ejemplo: B2, C3, etc.	T3-D04-HC	1	0	1		8
	5. Usa símbolos como: *, =, ( ), x, / para operar con ayuda del Excel	T3-D05-HC	1	0	1		8
Relación entre los valores	6. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación (“reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación”)	T3-D06-HC	1	0	1		8
	7. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante “razones equivalentes” por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T3-D07-HC	1	0	1		8
	8. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T3-D08-HC	0	0	0		0
	9. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T3-D09-HC	1	0	1		8
	10. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T3-D10-HC	0	1	0		3
	11. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T3-D11-HC	0	0	0		0
Procesos iniciales de generalización	12. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T3-D12-HC	1	0	0		6
	13. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T3-D13-HC	1	0	0		6
	14. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada	T3-D14-HC	0	0	1	...	2

ANEXO A.8: Resultados de la tarea de proporcionalidad 3 del grupo de 6toB usando la hoja de cálculo

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T3B1	T3B3	T3B4	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 3	T3-D01-HC	1	1	1		14
	2. Respondió incorrectamente la tarea 3	T3-D02-HC	0	0	0		0
Uso de un tipo de lenguaje	3. Mediante un lenguaje numérico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 3	T3-D03-HC	1	1	1		11
	4. Mediante un lenguaje simbólico, introduce una variable colocando el nombre de las celdas, por ejemplo: B2, C3, etc.	T3-D04-HC	0	0	1		6
	5. Usa símbolos como: *, =, ( ), x, / para operar con ayuda del Excel	T3-D05-HC	1	1	1		14
Relación entre los valores	6. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación")	T3-D06-HC	1	1	0		7
	7. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes" por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T3-D07-HC	0	1	0		7
	8. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T3-D08-HC	0	0	1		3
	9. Para hallar el valor de cada casillero, relaciona los nombres de las celdas en el Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T3-D09-HC	0	0	1		4
	10. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T3-D10-HC	1	1	1		8
	11. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T3-D11-HC	0	0	0		1
Procesos iniciales de generalización	12. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T3-D12-HC	0	0	0		2
	13. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T3-D13-HC	0	0	0		2
	14. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad a partir de la razón entre una fracción determinada	T3-D14-HC	1	1	1	...	12

ANEXO A.9: Resultados de la tarea de proporcionalidad 4 del grupo de 6toA usando la hoja de cálculo

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T4A1	T4A3	T4A4	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 4	T4-D01-HC	1	1	1		17
	2. Deja en blanco la tarea 4	T4-D02-HC	0	0	0		0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 4	T4-D03-HC	0	0	0		3
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D04-HC	1	1	1		14
	5. Mediante un lenguaje simbólico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D05-HC	1	1	1		16
	6. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, por ejemplo: B2, C5, etc.	T4-D06-HC	1	1	1		14
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación")	T4-D07-HC	0	0	1		1
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación ("reducción a la unidad")	T4-D08-HC	0	0	0		0
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes" por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T4-D09-HC	1	0	0		5
	10. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T4-D10-HC	0	1	0		3
	11. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T4-D11-HC	0	0	0		6
	12. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T4-D12-HC	0	0	0		4
	13. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T4-D13-HC	1	1	1		8
	14. Completa el casillero en blanco que se encuentra por encima del valor 612, de manera correcta	T4-D14-HC	0	0	0		7
Procesos iniciales de generalización	15. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T4-D15-HC	0	0	0		2
	16. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T4-D16-HC	1	1	1		13
	17. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T4-D17-HC	0	0	0	…	5

ANEXO A.10: Resultados de la tarea de proporcionalidad 4 del grupo de 6toB usando la hoja de cálculo

Aspectos a considerar	Descriptores	Abreviatura	T4B1	T4B2	T4B3	…	Total
Resolución de la tarea	1. Resuelve correctamente la tarea 4	T4-D01-HC	1	1	1		16
	2. Deja en blanco la tarea 4	T4-D02-HC	0	0	0		0
	3. Respondió incorrectamente la tarea 4	T4-D03-HC	0	0	0		3
Uso de un tipo de lenguaje	4. Mediante lenguaje natural, aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D04-HC	1	1	1		16
	5. Mediante un lenguaje simbólico, usando Excel como una calculadora aporta información sobre *cómo* ha construido la tabla 4	T4-D05-HC	0	0	1		12
	6. Hace uso de alguna variable al momento de establecer las relaciones entre valores, por ejemplo: B2, C5, etc.	T4-D06-HC	0	0	0		12
Relación entre los valores	7. Establece la razón 3:7 en una columna o en la justificación ("reducción a un agrupamiento mínimo que hace las veces de unidad en la situación")	T4-D07-HC	1	0	0		2
	8. Establece la razón 1:2,333… en una columna o en la justificación ("reducción a la unidad")	T4-D08-HC	0	0	0		1
	9. Relaciona los valores de las dos pinturas mediante "razones equivalentes" por medio de la regla de tres simple directa usando las fórmulas de Excel	T4-D09-HC	1	1	1		11
	10. El valor resultante de 14:6 que es 2.3333... lo multiplica por cada valor de la primera variable para obtener los otros valores de la segunda variable	T4-D10-HC	0	0	0		6
	11. Para hallar el valor de cada casillero relaciona los nombres de las celdas del Excel, por ejemplo: =D1*F2/F1	T4-D11-HC	0	0	0		4
	12. Para hallar el valor de cada casillero, establece una relación entre números, por ejemplo: =7*4/3	T4-D12-HC	1	1	1		9
	13. Obtiene mediante el arrastre el resto de valores de la segunda variable, y así constata el valor constante al obtener los valores sucesivos de los cocientes	T4-D13-HC	0	0	0		3
	14. Completa el casillero en blanco que se encuentra por encima del valor 612, de manera correcta	T4-D14-HC	1	1	1		14
Procesos iniciales de generalización	15. Completa cada columna cuyos cálculos son independientes de las otras columnas	T4-D15-HC	0	0	0		3
	16. El proceso de generalización de tipo "local" al establecer la relación entre algunos valores de la tabla de proporcionalidad	T4-D16-HC	0	0	0		2
	17. Establece una generalización de tipo "global" al completar los valores en la tabla de proporcionalidad	T4-D17-HC	1	1	1	…	15

ANEXO B: Tareas de proporcionalidad, modelizadas con tablas de valores, aplicadas a los estudiantes

ANEXO B.1: Tarea de proporcionalidad 1, modelizada con tablas de valores, aplicada a los estudiantes

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1

Alumno: ____

Grado: 6" ___" **Fecha:** / / 2022

Indicación:

- *Te recomiendo leer con atención la situación planteada, antes de responder lo solicitado.*
- *Explicita el razonamiento que has seguido para el desarrollo de esta situación matemática.*

La mamá de Juan tiene una ferretería en la cual se realizan matizados de pinturas a pedido del cliente. El día de hoy un cliente hizo un pedido de 15 litros de tono azul que, según los cálculos de la mamá de Juan, resulta de la mezcla de 12 litros de pintura azul y 3 litros de pintura blanca. Juan se pregunta: *¿Cómo debería hacer mi mamá si otro cliente le pide otras cantidades de pintura, pero de la misma tonalidad de azul?* Bueno, a Juan se le ocurrió crear una tabla como la que ves.

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	**3**	**6**	**9**	**12**						**30**
Azul (litros)	**12**									

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

ANEXO B.2: Tarea de proporcionalidad 2, modelizada con tablas de valores, aplicada a los estudiantes

TURICARÁ POSSUMUS	**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 2** **Alumno**: ______________________________ **Grado**: 6” ___” **Fecha**: / / 2022

Indicación:

- *Te recomiendo leer con atención la situación planteada, antes de responder lo solicitado.*
- *Explicita el razonamiento que has seguido para el desarrollo de esta situación matemática.*

La mamá de Juan ha visto el trabajo de él y le ha gustado mucho, pues ahora cuenta con una tabla que le permite obtener rápidamente las cantidades de pintura que deba mezclar ante un eventual pedido. Ella le pide completar una tabla similar a la anterior, esta vez para otra tonalidad de azul con la que siempre ha tenido problemas. Así, ella podrá saber qué cantidades mezclar de acuerdo con la cantidad que le pidan. Ayuda a Juan a completar la tabla que está preparando para su mamá:

a) Ayúdale a completarla:

Blanca (litros)	**6**	**15**	**21**	**9**	
Azul (litros)	**14**				

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

ANEXO B.3: Tarea de proporcionalidad 3, modelizada con tablas de valores, aplicada a los estudiantes

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 3

Alumno: ____

Grado: 6" ___" **Fecha**: / / 2022

***Indicación*:**

- *Te recomiendo leer con atención la situación planteada, antes de responder lo solicitado.*
- *Explicita el razonamiento que has seguido para el desarrollo de esta situación matemática.*

Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)		4	5	6	7	8	9	10	11	275
Azul (litros)				14						

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla.

ANEXO B.4: Tarea de proporcionalidad 4, modelizada con tablas de valores, aplicada a los estudiantes

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 4

Alumno: ____

Grado: 6" ___" **Fecha:** / / 2022

Indicación:

- *Te recomiendo leer con atención la situación planteada, antes de responder lo solicitado.*
- *Explicita el razonamiento que has seguido para el desarrollo de esta situación matemática.*

Juan está pensando cómo seguir obteniendo tonalidades de azul con diferentes litros de pintura blanca y azul, respectivamente, tal como se muestra en la tabla, pero esta vez quiere hacer uso de la hoja de cálculo.

a) ¿Cómo puedes ayudar a Juan a completar dicha tabla?

Blanca(litros)	6	21	46	127	356	
Azul (litros)	14					612

OPERACIONES AUXILIARES

b) Indica qué has hecho para completar la tabla usando la hoja de cálculo.