

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Procesos de generación de conjeturas con cuadriláteros en un
entorno de geometría dinámica con profesores de educación
básica regular

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas
que presenta:

Nestor Sánchez León

Asesora:

Cintya Sherley Gonzales Hernández

Lima, 2024


Informe de Similitud

Yo, Cintya Sherley Gonzales Hernández, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada Procesos de generación de conjeturas con cuadriláteros en un entorno de geometría dinámica con profesores de educación básica regular del autor Nestor Sánchez León, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 11%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 13/03/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 14 de marzo del 2024.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Gonzales Hernández, Cintya Sherley	
DNI: 42741882	Firma 
ORCID: 0000-0003-2130-1710	



DEDICATORIA

A Dios y a la Buena Madre.

A mi esposa Mary Liz.

A mis padres Arístides e Irene.

Agradecimientos

A mi asesora Mg. Cintya Gonzales, por su comprensión, apertura, paciencia y valiosos aportes que me brindo en el desarrollo y culminación de la tesis. Su rigurosa mirada académica y apoyo constante fue vital para la culminación de la presente investigación.

A la Dra. Jesús Flores, por los conocimientos compartidos y los valiosos consejos que me dio en el proceso de investigación y ejecución del proyecto.

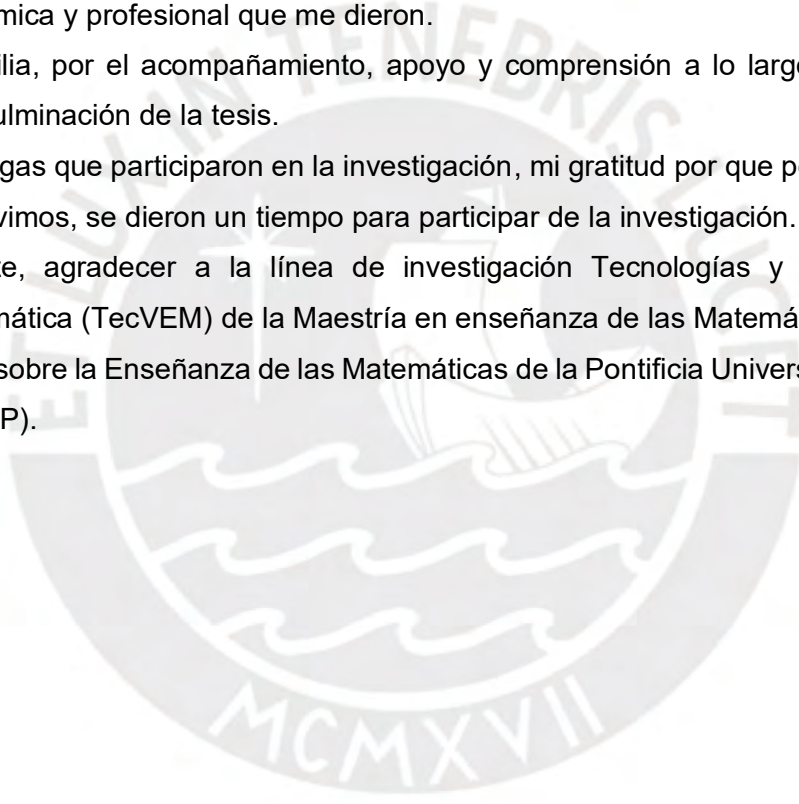
A la Dra. Katia Vigo, por los consejos brindados durante el proceso de investigación.

A mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por la valiosa formación académica y profesional que me dieron.

A mi familia, por el acompañamiento, apoyo y comprensión a lo largo del proceso de investigación y culminación de la tesis.

A los colegas que participaron en la investigación, mi gratitud por que pese a los tiempos apretados que vivimos, se dieron un tiempo para participar de la investigación.

Finalmente, agradecer a la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) de la Maestría en enseñanza de las Matemáticas y el Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM PUCP).



Resumen

Esta investigación se centra en el estudio del proceso de generación de conjeturas relacionadas con cuadriláteros en un entorno de geometría dinámica. Se aplican dos actividades que se resuelven utilizando el software GeoGebra, esto permite analizar cómo cuatro profesores de matemáticas generan conjeturas al resolver actividades de problemas abiertos de geometría en dicho entorno, donde se movilizan nociones de cuadriláteros. La relevancia de esta investigación radica en que los profesores de matemáticas de educación secundaria deben comprender cómo se desarrolla la formulación y argumentación de conjeturas geométricas, especialmente cuando se utilizan herramientas digitales. Se considera como referencial teórico el modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura propuesto por Baccaglioni-Frank (2010, 2019) el cual permite describir y analizar procesos de conjeturación en ambientes de geometría dinámica.

La metodología de investigación es cualitativa, ya que nuestro interés radica en observar, describir y analizar las conjeturas formuladas, el método seguido es el estudio de caso. En cuanto a los resultados, el análisis de las actividades permitió validar la relación entre la generación de conjeturas y usos particulares de la herramienta arrastre, sobre todo cuando la última invariante está relacionada a una trayectoria. En particular, el arrastre de mantenimiento por lo general aparece dos veces en este tipo de actividades, la primera cuando los resolutores identifican la invariante inducida intencionalmente y la segunda al momento de establecer el enlace condicional entre la invariante observada intencionalmente y la invariante inducida intencionalmente.

Se concluye que el modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura permite describir y comprender el proceso de generación de una conjetura en un ambiente de geometría dinámica.

Palabras clave: Generación de conjetura, Invariante, Modalidades de arrastre, GeoGebra.

Abstract

This research focuses on the study of the process of generating conjectures related to quadrilaterals in a dynamic geometry environment. Two activities that are solved using GeoGebra software are applied to analyse how four mathematics teachers generate conjectures when solving open geometry problem activities in this environment, where notions of quadrilaterals are mobilised. The relevance of this research lies in the fact that secondary school mathematics teachers need to understand how the formulation and argumentation of geometric conjectures is developed, especially when digital tools are used. We consider as a theoretical referential the Maintaining dragging-conjecturing model proposed by Baccaglioni-Frank (2010, 2019), which allows us to describe and analyse conjecturing processes in dynamic geometry environments.

The research methodology is qualitative, as our interest lies in observing, describing and analysing the conjectures formulated, and the method used is the case study. As for the results, the analysis of the activities made it possible to validate the relationship between the generation of conjectures and particular uses of the dragging tool, especially when the latter invariant is related to a trajectory. In particular, the maintenance entrainment usually appears twice in this type of activities, the first time when the solvers identify the intentionally induced invariant and the second time when establishing the conditional link between the intentionally observed invariant and the intentionally induced invariant.

It is concluded that the drag-conjecture maintenance model allows to describe and understand the process of conjecture generation in a dynamic geometry environment.

Keywords: Conjecture generation, Invariant, Dragging modes, GeoGebra.

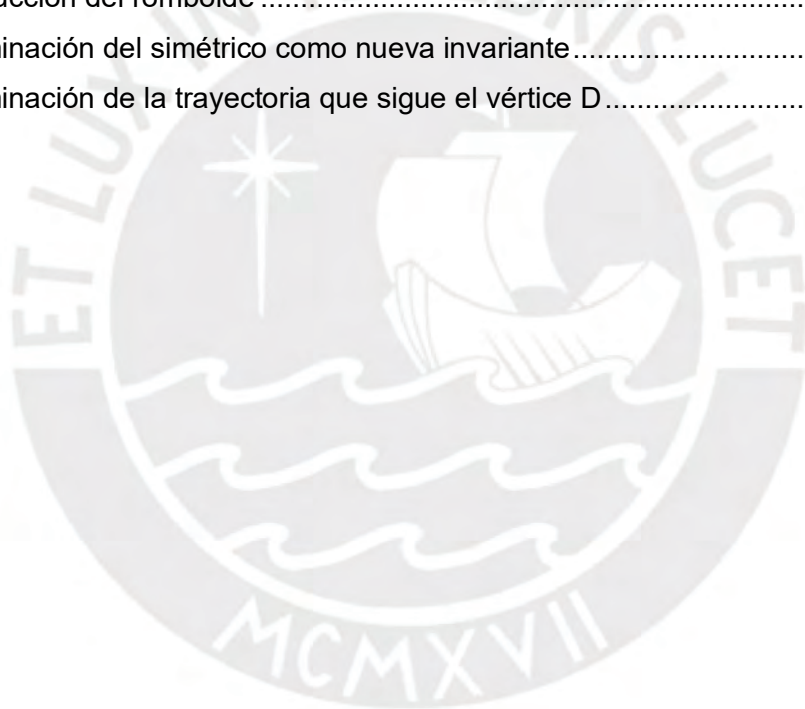
Índice

Introducción	12
Capítulo I: PROBLEMÁTICA	14
1.1 Antecedentes	14
1.2 Justificación	19
1.3 Pregunta y objetivos de la investigación	24
Capítulo II: LOS CUADRILÁTEROS	26
2.1 Aspectos matemáticos	26
2.2 Aspectos curriculares en documentos oficiales libros de texto	32
Capítulo III: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS	37
3.1 Elementos y aspectos de la geometría dinámica	37
3.2 La geometría dinámica y el proceso de conjeturar	40
3.3 Modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura	43
3.4 Aspectos metodológicos	47
3.5 Estudio de caso	48
Capítulo IV: PARTE EXPERIMENTAL	52
4.1 Escenario de investigación	52
4.2 Descripción de la secuencia de actividades	54
4.3 Exploración hipotética	61
4.4 Análisis de las actividades	76
4.4.1 Análisis de la actividad 1	76
4.4.2 Análisis de la actividad 2	84
4.5 Principales resultados	100
Conclusiones	102
Referencias	104

Lista de tablas

Tabla 1 Competencias y capacidades del área de matemática.....	20
Tabla 2 Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”	21
Tabla 3 Desempeños de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.....	33
Tabla 4 Modalidades de arrastre propuestos por Baccaglini-Frank.....	44
Tabla 5 Elementos fundamentales del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura	45
Tabla 6 Descripción de los profesores participantes.....	50
Tabla 7 Actividad exploratoria.....	52
Tabla 8 Conformación de las parejas para la parte experimental.....	53
Tabla 9 Objetivos de las Actividades 1 y 2	54
Tabla 10 Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice B	56
Tabla 11 Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice A	57
Tabla 12 Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice D.....	59
Tabla 13 Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice C.....	61
Tabla 14 Secuencia de invariantes identificadas para la Actividad 1. Rombo	65
Tabla 15 Secuencia de invariantes identificadas para la Actividad 1. Cuadrado	68
Tabla 16 Secuencia de invariantes identificadas para la Actividad 2. Romboide.....	72
Tabla 18 Secuencia de invariantes identificadas para la Actividad 2.Trapezoide simétrico	75
Tabla 19 Identificación de las invariantes de la construcción de la Actividad 1 – pareja 2	77
Tabla 20 Identificación de la invariante inducida intencionalmente	77
Tabla 21 Condiciones para que ABCD sea un rombo.....	78
Tabla 22 Explicitación de la descripción geométrica de la trayectoria que sigue B	80
Tabla 23 Identificación de invariantes observadas durante el arrastre para la Actividad 1 por la pareja 2	80
Tabla 24 Elaboración de la conjetura	81
Tabla 25 Secuencia de invariantes identificadas	83
Tabla 26 Elección del punto a arrastrar	84
Tabla 27 Búsqueda de las invariantes de la construcción para la actividad 2	85
Tabla 28 Identificando al rombo como un posible caso a explorar	86

Tabla 29 Invariante inducida intencionalmente: ABCD es un rombo.....	87
Tabla 30 Condiciones para que ABCD sea un rombo.....	87
Tabla 31 Búsqueda de invariantes en la construcción	88
Tabla 32 Elaboración de la primera conjetura de la Actividad 2	89
Tabla 33 Secuencia de invariantes identificadas para la primera conjetura de la Actividad 2.....	90
Tabla 34 Invariante Inducida Intencionalmente: Trapezoide simétrico ABCD.....	91
Tabla 35 Exploración del trapezoide simétrico ABCD.....	92
Tabla 36 Exploración de nuevas configuraciones para la Actividad 2.....	93
Tabla 37 Identificación del romboide como caso a explorar	94
Tabla 38 Invariante inducida intencionalmente: ABCD es un romboide	95
Tabla 39 Construcción del romboide	96
Tabla 40 Construcción del romboide	97
Tabla 41 Determinación del simétrico como nueva invariante.....	97
Tabla 42 Determinación de la trayectoria que sigue el vértice D.....	99



Lista de figuras

Figura 1. <i>Cuadrilátero según Moise y Downs</i>	27
Figura 2. <i>No es cuadrilátero según Moise y Downs</i>	27
Figura 3. <i>Clasificación jerárquica de cuadriláteros</i>	28
Figura 4. <i>Clasificación jerárquica de cuadriláteros</i>	29
Figura 5. <i>Clasificación exclusiva de 8 cuadriláteros especiales</i>	30
Figura 6. <i>Clasificación inclusiva de 8 cuadriláteros especiales</i>	30
Figura 7. <i>Clasificación inclusiva de 8 cuadriláteros especiales</i>	31
Figura 8. <i>Clasificación de paralelogramos</i>	31
Figura 9. <i>Clasificación de paralelogramos</i>	32
Figura 10. <i>Clasificación de cuadriláteros a considerar en la investigación</i>	32
Figura 11. <i>Clasificación de cuadriláteros a considerar en la investigación</i>	34
Figura 12. <i>Resolución de la situación C</i>	35
Figura 13. <i>Identificando un polígono de lados paralelos y perpendiculares</i>	35
Figura 14. <i>Diferencia entre figura y dibujo</i>	38
Figura 15. <i>Invariantes asociadas a la base media del trapecio ABCD</i>	39
Figura 16. <i>Invariantes suaves asociadas a la base media del trapecio ABCD</i>	40
Figura 17. <i>Relación entre fases y elementos del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura</i>	47
Figura 18. <i>Procedimientos metodológicos</i>	49
Figura 19. <i>Cuadrilátero ABCD obtenido de la construcción</i>	55
Figura 20. <i>Cuadrilátero ABCD obtenido de la construcción</i>	58
Figura 21. <i>Puntos arrastrables y dependientes para la Actividad 1</i>	62
Figura 22. <i>Identificación de la invariante inducida intencionalmente</i>	62
Figura 23. <i>BD corta a AC en su punto medio</i>	63
Figura 24. <i>Trayectoria descrita al arrastrar B de modo que BD corte a AC en su punto medio</i>	63
Figura 25. <i>Recta trazada por B y el punto medio de BC</i>	64
Figura 26. <i>B pertenece a la mediatriz de AC</i>	64
Figura 27. <i>Condición para que A, B, C y D estén alineados</i>	65
Figura 28. <i>Cadenas de invariantes de la Actividad 1 unidas por la invariante pivote</i>	66
Figura 29. <i>Actividad 1: ABCD es un cuadrado</i>	66
Figura 30. <i>Prueba suave de la condición buscada para que ABCD sea cuadrado</i>	67

Figura 31. <i>Puntos arrastrables, semi arrastrables y fijos para la actividad 2</i>	68
Figura 32. <i>Identificación de la invariante inducida intencionalmente</i>	69
Figura 33. <i>Condición para que ABCD sea un romboide</i>	69
Figura 34. <i>Trayectoria descrita al arrastrar D buscando mantener $B' = D$</i>	70
Figura 35. <i>Circunferencia de centro A y radio AD</i>	70
Figura 36. <i>D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AB'</i>	71
Figura 37. <i>D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC</i>	71
Figura 38. <i>Cadenas de invariantes unidas por la invariante pivote</i>	73
Figura 39. <i>A, B, C y D son puntos colineales si $D \in r$</i>	73
Figura 40. <i>ABCD es un trapecio simétrico</i>	74
Figura 41. <i>Trayectoria descrita por el punto D buscando mantener que $AD = DC$</i>	74
Figura 42. <i>D pertenece a la mediatriz de AC</i>	75
Figura 44. <i>Cadenas de invariantes unidas por la invariante pivote</i>	83
Figura 45. <i>Fases de la resolución propuesta por la pareja 2 para la actividad 1</i>	84
Figura 46. <i>Comparación entre los lados BC y CD</i>	89
Figura 47. <i>Fases de la resolución propuesta por la pareja 2 para la actividad 1</i>	91
Figura 48. <i>El caso del trapecio</i>	94
Figura 49. <i>Ubicación del punto D sobre B'</i>	98
Figura 50. <i>Cadenas de invariantes unidas por la invariante pivote para el caso del romboide</i>	100

Introducción

Partimos de la premisa que es importante que los profesores de matemática deben conocer las características y el uso efectivo de los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD). Este conocimiento permitirá, en particular para la enseñanza de la geometría, transformar las limitaciones de un currículo tradicional, centrado solo en el uso de papel y lápiz, donde las menciones a la geometría dinámica son esporádicas y superficiales (Ruthven, 2018). Una de las características es el movimiento de las figuras a través del “arrastre” lo que constituye una fuente de heurística y una poderosa herramienta para producir conjeturas.

Nuestro interés por investigar sobre los procesos de generación de conjeturas en un AGD se debe a la importancia de comprender la manera cómo una persona formula una conjetura y qué tipo de actividades, en geometría, las promueven cuando interactúan con la tecnología digital. Por esta razón, se ha tomado como base los trabajos de Olivero (2002) y Baccaglioni-Frank (2019) quienes reconocen el papel que cumple el arrastre dentro del proceso de elaboración de una conjetura.

En ese sentido, el objetivo de este trabajo es analizar el proceso de generación de conjeturas de profesores de matemática de Educación Secundaria al resolver actividades de problemas abiertos en un entorno de geometría dinámica, donde se movilizan nociones de cuadriláteros.

Para el desarrollo de la investigación se ha propuesto una secuencia de dos actividades donde cada actividad exige a los profesores realizar conjeturas, en un ambiente de geometría dinámica, sobre los tipos de cuadriláteros que pueden transformarse al arrastrar uno de los vértices del cuadrilátero. Las actividades tienen dos momentos: el primero consiste en realizar la construcción con el apoyo del software GeoGebra y un segundo momento de trabajo en parejas para establecer conjeturas. Nuestra investigación está compuesta por cuatro capítulos.

En el primer capítulo desarrollamos la problemática de la investigación. Aquí se han revisado y analizado investigaciones de referencia respecto al estudio de conjeturas en un ambiente de geometría dinámica como parte de los antecedentes, se presentan la justificación, la pregunta y los objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo se hace un estudio de los cuadriláteros, se revisan sus diversas definiciones buscando comprender el porqué de las diferentes clasificaciones presentes en los libros de texto peruanos.

En el tercer capítulo se revisan aspectos teóricos y metodológicos de la investigación, así iniciamos revisando los aspectos y elementos de la geometría dinámica, hacemos precisión en

la diferencia entre figura y dibujo, además se explora la relación entre la geometría dinámica y el proceso de conjeturar por medio de la revisión del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura. En adición, se justifica el uso del estudio de caso como método para el desarrollo de la investigación.

En el cuarto capítulo presentamos la experimentación, el análisis de las actividades las cuales permitieron identificar el potencial del referencial teórico.

Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones.



Capítulo I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo, se muestra en primer lugar los antecedentes del problema de investigación, aquí se presentan investigaciones que fundamentan nuestro trabajo los cuales están asociados a procesos de generación de conjeturas, cuadriláteros y geometría dinámica. También se presenta la pregunta y los objetivos de la investigación.

1.1 Antecedentes

Se presenta investigaciones de referencia sobre procesos de generación de conjeturas, la identificación de invariantes y características de la herramienta “arrastre” en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), también se revisa los planes curriculares de dos universidades nacionales que forman profesores de matemática.

Dentro de las investigaciones revisadas sobre prueba y demostración en geometría en un ambiente de geometría dinámica se tiene el trabajo de Olivero (2002) donde realizó una investigación en escuelas de Inglaterra e Italia con el objetivo de “investigar el desarrollo del proceso de demostración, en la que se enfoca en la construcción de conjeturas y pruebas dentro de un entorno de geometría dinámica” (Olivero, 2002, p. 7). La investigación se centró en analizar el papel que cumplen la función de arrastre y los elementos de la construcción en el software Cabri dentro del proceso de demostración de los estudiantes. El autor presenta una revisión tanto de la literatura sobre prueba considerando los puntos de vista epistemológicos, cognitivos y didácticos, como de las perspectivas teóricas del uso de la tecnología en el aula.

Los resultados de la investigación muestran importancia de los procesos ascendentes y descendentes entre el campo espacial (área de trabajo de Cabri) y el campo teórico (geometría euclidiana) como elementos clave al momento de construir conjeturas y pruebas. Como lo menciona la investigadora, el análisis muestra que el entorno de Geometría Dinámica (Cabri) apoya la interacción de los conocimientos previos de los estudiantes con construcción de un conocimiento compartido.

Este trabajo de Olivero (2002) es de nuestro interés debido a que proporciona una descripción de las diversas modalidades de arrastre propuestas por Arzarello et al. (1998) y su relación con el proceso de conjeturar y probar en un ambiente de geometría dinámica.

Por su parte, Baccaglioni-Frank (2010) realiza una investigación con estudiantes de 16 y 17 años. Esta tiene como uno de sus objetivos describir los procesos de generación de conjeturas asociados a actividades de problemas geométricos abiertos de construcción en un ambiente de geometría dinámica, para ello redefine los tipos de arrastre propuestos por Arzarello y los reduce a sólo cuatro: arrastre libre, arrastre de mantenimiento, arrastre con traza y prueba de arrastre. Como resultado de la investigación, Baccaglioni-Frank propone un modelo que permite analizar los procesos de generación de conjeturas a partir del uso del arrastre de mantenimiento, al cual lo llama Modelo de mantenimiento de arrastre – conjetura. Este modelo asocia los procesos de abducción descritos por Pierce y Arzarello et al. (2002) y es válido para actividades de problemas abiertos de geometría donde la solución implique el uso de un lugar geométrico al cual la investigadora denomina trayectoria.

Esta investigación aporta un referencial teórico que permite describir de manera explícita aspectos cognitivos que resultan de la interacción de una actividad de problema abierto geométrico, en Antonini y Baccaglioni-Frank (2015) brinda además técnicas exploratorias asociadas al proceso de generación de una conjetura.

La investigación de Leung et al. (2013) se enfoca en el discernimiento de invariantes en ambientes de geometría dinámica (AGD), específicamente en la identificación de invariantes durante la manipulación de figuras geométricas. Se destaca la importancia de identificar lo que permanece constante a pesar de las variaciones en las figuras, un proceso fundamental en el pensamiento matemático, especialmente en la geometría. La investigación combina la mirada de variación y la estrategia de mantenimiento de arrastre para interpretar y describir un modelo de discernimiento de invariantes en AGD. Este modelo distingue entre invariantes de dos niveles, y examina su conexión a través del concepto de camino, que juega un papel crucial en las exploraciones de AGD. Se ilustra la emergencia de un camino y la utilidad del modelo analizando episodios de exploración de AGD de estudiantes.

Esta investigación nos muestra cómo los ambientes de geometría dinámica pueden ser utilizados para fomentar el razonamiento matemático y la generación de conjeturas en geometría, destacando la importancia de percibir y discernir invariantes durante la manipulación de figuras geométricas. El modelo propuesto ofrece una perspectiva profunda sobre los procesos cognitivos involucrados en el discernimiento de invariantes en AGD.

Por su parte, Mariotti (2015) centra su investigación en el potencial semiótico de la herramienta de arrastre en los ambientes de geometría dinámica (AGD) para introducir la noción de declaración condicional en la educación matemática. Se examina cómo diferentes

modalidades de arrastre pueden ser utilizadas para producir una declaración condicional, distinguiendo entre el uso del arrastre para buscar consecuencias y arrastre para buscar una premisa. Realizó un experimento de enseñanza con estudiantes de secundaria superior, utilizando Cabri y se introdujeron explícitamente modalidades de arrastre durante lecciones introductorias.

Mariotti argumenta que el uso de modalidades de arrastre no solo puede ayudar a los estudiantes a resolver tareas de generación de conjeturas, sino que también ofrece un potencial semiótico que puede ser explotado por los profesores para desarrollar el significado matemático de la declaración condicional en el estatus diferente de propiedades invariantes. El estudio destaca la importancia de las interacciones sociales organizadas por el profesor para transformar los significados personales emergentes de las actividades con el artefacto en significados matemáticos, utilizando la teoría de la mediación semiótica para describir este proceso de transformación de signos.

La investigadora concluye que la diferenciación entre tipos de invariantes en AGD ofrece un gran potencial con respecto a distinguir el estado lógico de las propiedades, facilitando la generación de declaraciones condicionales y la comprensión de la dependencia lógica entre premisas y conclusiones.

Este enfoque no solo apoya la solución de tareas de generación de conjeturas, sino que también facilita la mediación del significado matemático de las declaraciones condicionales, lo que subraya el valor educativo de actividades específicamente diseñadas que explotan el potencial semiótico de diferentes modalidades de arrastre en entornos de geometría dinámica.

Nasser (2017) realiza una investigación con profesores en formación inicial con la finalidad de concientizarlos sobre la necesidad explorar tareas geométricas que desarrollen en los estudiantes el pensamiento deductivo, además, dicha investigación tenía la intención de “comparar la visión de estos licenciados con la visión de aquellos que participaron en la investigación de Aguilar (2012)” (Nasser, 2017, p. 19). La investigación realizada con docentes en formación inicial sugiere la existencia de dificultades por parte de los profesores de matemática de Brasil al momento de trabajar con pruebas y conjeturas. Una de las conclusiones de la investigación es que “los profesores universitarios responsables de la formación inicial de profesores que forman en matemática, en todos los niveles, deben concientizarse que es preciso mostrar a los futuros profesores la posibilidad de considerar las justificaciones informales y su tentativa de argumentación” (Nasser, 2017, pp. 20-21).

Así también, Ruthven (2018) aborda la construcción en ambientes de geometría dinámica y su uso en la enseñanza de matemáticas en escuelas secundarias inglesas. El objetivo de su investigación es comprender cómo los profesores de matemáticas consideran un uso exitoso de la geometría dinámica. El marco teórico se basa en la “flexibilidad interpretativa” y la mediación de los docentes en materiales curriculares. La metodología empleada es un estudio de casos múltiples con observación en aula y entrevistas a profesores.

Los resultados principales del estudio indican que el uso de la geometría dinámica en las aulas convencionales puede diferir significativamente de la orientación exploratoria promovida por los expertos. Los profesores tienden a adaptar el uso de la geometría dinámica a sus propias necesidades y contextos, lo que puede resultar en un uso más dirigido o estructurado de la tecnología. Por ejemplo, un maestro participante vio el arrastre intencionado de la figura como un medio poderoso a través del cual podía hacer que propiedades fueran comprensibles y convincentes para los estudiantes. Otro profesor limitó el uso del software a su presentación para evitar exigencias y dificultades de los estudiantes al tener que utilizarlo. Además, se encontró que los modos de uso de la geometría dinámica evolucionan con el tiempo. A medida que los profesores se familiarizan más con la tecnología y ganan experiencia en su uso, pueden comenzar a explorar y adoptar enfoques más innovadores y creativos para su uso en la enseñanza de las matemáticas.

Esta investigación nos muestra la necesidad de conocimientos específicos para el *uso efectivo* de software dinámico para la enseñanza de la geometría. En particular el uso del arrastre. Esto permitiría a profesores y estudiantes usar una variedad de técnicas de arrastre de forma más efectiva y reflexiva.

Por ello se ha revisado los programas de estudio de la escuela profesional de educación, en la especialidad de matemática de dos universidades del Perú a las cuales hemos tenido acceso.

La Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), en su plan de estudios de formación profesional de docentes de matemática, imparte un curso de Geometría cuya sumilla dice:

Sistema de axiomas de la geometría euclidiana elemental. Conceptos básicos de geometría plana: punto, recta, plano, ángulos, polígonos, relación de congruencia, relación de semejanza, relación métrica en el plano. Geometría plana con coordenadas. Geometría plana con vectores. Transformaciones geométricas. Teoremas y

demostración. Resolución de problemas. Nociones de Geometría no Euclidiana. (Giles, 2015, p.1)

Notamos que el curso desarrolla contenidos geométricos priorizando la demostración tal como lo declara en el apartado de las estrategias didácticas a usar en el curso “Enunciar y demostrar las propiedades fundamentales del objeto matemático en estudio” (UNMSM, 2015, p. 3), lo antes mencionado corrobora nuestro supuesto.

La Universidad Nacional de Educación “Enrique Guzmán y Valle”, UNE, propone en su plan de estudios para la formación profesional de docentes de matemática dos cursos de geometría: Geometría I y Geometría II.

La sumilla de Geometría I dice:

Esta asignatura se orienta hacia el aprendizaje de la axiomatización de la geometría elemental euclidiana, entre ellas se desarrollan los conceptos fundamentales de la geometría relacionados con la convexidad, separación, ángulos triángulos y polígonos: cuadriláteros. La geometría cartesiana y vectorial de \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R}^3 . Así mismo el estudiante aprenderá las nociones básicas de la teoría de la medida para el tratamiento de las áreas y volúmenes en la geometría elemental euclidiana. (UNE, 2016, p. 2)

La sumilla de Geometría II declara:

Se tiene el propósito utilizar los conceptos básicos del álgebra lineal en el aprendizaje de la geometría de transformaciones del plano \mathbb{R}^2 , entre estas consideramos las isometrías, las transformaciones de semejanza y la geometría afín. Se desarrollará las nociones básicas de la geometría diferencial, considerando el estudio de las curvas y superficies. Asimismo, se orienta al aprendizaje de las geometrías no euclidianas, del mismo modo conocer el desarrollo histórico de la geometría. (UNE, 2016, p. 5)

Esta casa de estudios propone para el futuro profesor de matemática una formación donde, aparentemente, se prioriza la axiomatización de la geometría euclidiana, dejando de lado las pruebas donde se manipule el objeto matemático. Lo antes mencionado permite suponer que los futuros profesores son formados, tal y como evidenció Aguilar (2012) en su investigación, con actividades que no les permiten entrenarse en la formulación y validación de conjeturas.

Lo declarado en las sumillas de los cursos de geometría impartidos en la UNMSM y la UNE hacen suponer que por el tipo de formación profesional recibida, los profesores de matemática del Perú, acostumbrados a las demostraciones geométricas, desconozcan el proceso de formulación de conjeturas y validación de las mismas, lo cual probablemente influya en el diseño de actividades de los profesores de matemática y/o en la valoración de los argumentos presentados por los estudiantes de nuestro país.

En adición, se ha revisado la investigación de Jara (2015) la cual investiga el efecto de la aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele mediante el uso de Software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría, si bien trabajó con otro marco teórico, es una investigación que mide el impacto del uso de GeoGebra, software que se usará en nuestra investigación, en la clase de matemática, en especial aplicado a tópicos de geometría. Una de sus conclusiones es que el uso de GeoGebra “mejora significativamente el aprendizaje de la geometría en la capacidad de resolución de problemas en el tercer grado de educación secundaria” (Jara, 2015, p. 126). Estas investigaciones ponen en evidencia la pertinencia del uso del software GeoGebra con la propuesta educativa del Ministerio de Educación del Perú, MINEDU.

Se han presentado diversos antecedentes relacionados con los procesos de generación de conjeturas, planes de estudio de dos universidades del Perú que forman profesores de matemática y formación de profesores las cuales contribuirán en la realización de la presente investigación.

1.2 Justificación

El Ministerio de Educación del Perú (MINEDU), en el fascículo Mapas de progreso del aprendizaje Matemática: Geometría enuncia al respecto a la visualización e interpretación de propiedades y relaciones de formas geométricas.:

Implica el desarrollo de capacidades para visualizar, representar y describir formas geométricas, sus propiedades y atributos medibles; estimar y medir magnitudes utilizando unidades arbitrarias y convencionales; formular y argumentar conjeturas a partir de las relaciones que encuentra entre las formas, sus propiedades y atributos medibles para resolver y modelar situaciones reales. (MINEDU, 2017a)

Lo mencionado por el Ministerio de Educación reconoce la necesidad de la enseñanza de la argumentación y por consiguiente la validación de las mismas para con los estudiantes; en este punto consideramos la importancia que los docentes de matemática sean capaces de resolver problemas de generación de conjeturas pues los mismos contribuirán a que generen actividades que propicien la elaboración de conjeturas con la finalidad de que luego validen las mismas por medio de argumentaciones mediadas con algún software de geometría dinámica, todo ello con la finalidad de cumplir con los lineamientos del MINEDU respecto al aprendizaje de la geometría.

Para lograr lo mencionado el MINEDU, a través del Currículo Nacional de la Educación Básica establece los aprendizajes que reciben los estudiantes de Educación Básica del Perú.

El Currículo Nacional de la Educación Básica (...) establece los aprendizajes que se espera que logren los estudiantes como resultado de su formación básica, en concordancia con los fines y principios de la educación peruana, el Proyecto Educativo Nacional y los objetivos de la Educación Básica. (Ministerio de Educación, 2016a, p. 8)

Este documento establece las directrices respecto a los aprendizajes de los estudiantes peruanos en función al Perfil de egreso de la Educación Básica el cual responde a los retos de la modernidad y las diversas necesidades de nuestra sociedad.

El MINEDU declara que el Currículo Nacional ha sido elaborado tomando en cuenta tres definiciones curriculares: Competencias, capacidades y estándares de aprendizaje.

La competencia se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético. (MINEDU, 2016a, p. 29)

Ser competente permite al individuo dotarlo de características especiales las cuales van a permitir que se desenvuelva de manera eficiente frente a los retos que la sociedad actual le proponga; en ese sentido el MINEDU, en función al Perfil de Egreso, establece las competencias a desarrollar a lo largo de la Educación Básica. Para el área de matemática, el MINEDU declara que se deben desarrollar en los estudiantes cuatro competencias, éstas son:

- Resuelve problemas de cantidad.
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

El logro de las competencias se obtiene a partir del desarrollo de ciertas capacidades.

Las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas. (MINEDU, 2016a, p. 30)

Si bien es cierto, las capacidades permiten al individuo ser competente, la competencia de un individuo se mide en función a como combina diversas capacidades para afrontar una nueva situación.

Tabla 1

Competencias y capacidades del área de matemática

Competencia	Capacidades
--------------------	--------------------

Resuelve problemas de cantidad	<ul style="list-style-type: none"> • Traduce cantidades a expresiones numéricas. • Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones. • Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo. • Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	<ul style="list-style-type: none"> • Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas. • Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. • Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	<ul style="list-style-type: none"> • Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones en base a información obtenida.
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	<ul style="list-style-type: none"> • Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones. • Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas. • Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.

Fuente: MINEDU (2016a, p. 34)

En adición, se muestran los estándares de aprendizajes propuestos por el MINEDU para la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”.

Tabla 2

Estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”

Estándares de aprendizaje 2016 (niveles)	Descripción
DESTACADO, Nivel 7	Plantea afirmaciones sobre relaciones entre conceptos geométricos, deduce propiedades y las sustenta con argumentos que evidencian su solvencia conceptual

Nivel 6	Plantea afirmaciones sobre la semejanza y congruencia de formas, relaciones entre áreas de formas geométricas; las justifica mediante ejemplos y propiedades geométricas.
Nivel 5, Nivel 4, Nivel 3	Explica y/o elabora afirmaciones sobre relaciones entre elementos de las formas geométricas y sus atributos medibles, con ejemplos concretos y propiedades
Nivel 2, Nivel 1	Se utiliza la percepción para comparar objetos y determinar su posición, se hace uso de material concreto.

Fuente: MINEDU (2016a, p. 147)

Como se muestra en la Tabla 2, el MINEDU propone la enseñanza de la geometría por parte de los estudiantes a lo largo de su formación escolar, en ese sentido, nuestro trabajo como profesores de matemática es identificar en qué nivel se encuentran cada uno de los estudiantes para, a partir de ello, potenciar el desarrollo de esta competencia.

La revisión de los lineamientos del MINEDU respecto al aprendizaje de la geometría induce a revisar la manera como enseñamos matemática, en especial en qué momento enseñamos Geometría. En ese sentido, el ministerio de educación a través de las escuelas que conforman el proyecto “Jornada Escolar Completa” (JEC) sugieren la enseñanza de la geometría en diversos momentos del año; esta situación surge en contraposición a investigaciones que sugieren la ausencia de la enseñanza de la geometría en la escuela o la enseñanza superficial de la misma tal como lo afirma Portalone (2005).

Investigaciones desarrolladas al final del siglo XX e inicio del siglo XXI indican la ausencia del abordaje de contenidos geométricos en las escuelas o su enseñanza de manera superficial, lo mismo ocurre cuando esta área contempla, muchas veces aspectos algebraicos poco relevantes. (Portalone, 2005, p. 38)

La situación descrita por Portalone se observa en los diversos libros de texto, en los cuales los contenidos de geometría se encuentran por lo general al final del mismo, dando prioridad a temas aritméticos y algebraicos, esto se debe a la libertad que otorga el MINEDU al momento de realizar las planificaciones, inclusive en las mismas escuelas que conforman el JEC; en el documento “Orientaciones generales acerca de las herramientas pedagógicas: Unidades didácticas y sesiones de aprendizaje” se declara:

Si el docente lo considera necesario, puede añadir o suprimir o modificar una unidad didáctica de su programación anual. También, dependiendo de la realidad de su aula, puede extender o acortar el tiempo asignado a cada unidad. (MINEDU, 2017a, p. 6)

Esta libertad otorgada a los profesores puede inducir a los profesores de matemática a dejar de lado los temas geométricos en las escuelas o dejarlos para el final del año escolar (a excepción de 4to. de secundaria), al respecto Paganillo (2003) afirma:

La libertad de esa ley concedida a las escuelas en cuanto a la decisión sobre los programas de las diferentes disciplinas posibilita que muchos profesores de Matemática, sintiéndose inseguros para trabajar con la Geometría, dejasen de incluirlo en su programación o lo reservara el final del año lectivo para su abordaje en el aula. (como se citó en Portalone, 2005, p. 38)

Lo antes mencionado está relacionado con la formación inicial de profesores, ¿es posible que la formación de profesores sea una de las causantes de este problema relacionado a la enseñanza de la geometría?

Investigadores sostienen que existe una formación deficiente de profesores de matemática en lo relacionado a su formación en temas de geometría.

Los profesores licenciados en matemática pueden no tener un bagaje suficiente para entender y enseñar la geometría, pues los departamentos de matemática de las facultades reducen sus cursos de geometría. (Portalone, 2005, p. 38)

Las investigaciones mencionadas hacen suponer la existencia de deficiencias en la formación de profesores respecto a los contenidos geométricos. Éste supuesto nos llevó a revisar los planes de estudios de los futuros profesores de matemática. Así, revisamos el plan de estudios de la facultad de educación de la UNMSM, en él encontramos que dentro de su formación profesional los estudiantes de dicha facultad sólo llevan un curso de geometría cuyo sílabo declara lo siguiente en sus objetivos específicos:

- 4.2.1. Enunciar el sistema de axiomas de la geometría clásica elemental.
- 4.2.2 Definir con precisión los conceptos básicos de la geometría clásica elemental.
- 4.2.3 Demostrar teoremas fundamentales de la relación de congruencia.
- 4.2.4 Demostrar teoremas fundamentales de la relación de semejanza.
- 4.2.5 Demostrar teoremas fundamentales relacionados a la circunferencia.
- 4.2.6 Demostrar teoremas fundamentales relacionados al área de regiones planas. (Giles, 2015, p. 1)

Como observamos el curso está dirigido aparentemente a desarrollar la geometría axiomática, por tal motivo los profesores al ser formados bajo una visión axiomática de la geometría definen los objetos teóricos y deducen sus propiedades siguiendo los procesos propios de una demostración tal y como la comunidad matemática lo reconoce; en tal sentido

existe la posibilidad que los profesores no propicien en sus estudiantes actividades dirigidas a conjeturar, argumentar y justificar.

Lo expuesto justifica nuestra investigación, pues como se ha mostrado, existen evidencias de una formación, al parecer, insuficiente o alejada del contexto del aula por parte de las casas de estudio que forman profesores de matemática; además, tal como lo afirma Aguilar “la capacidad de argumentar y probar en matemática es importante tanto para el desenvolvimiento en matemática como para la formación de un ciudadano crítico” (Aguilar, 2012, p. 20), en ese sentido, se hace necesario desarrollar un estudio con profesores buscando propiciar una reflexión respecto a la importancia de la enseñanza de la argumentación y pruebas en geometría pues contribuye al logro de los lineamientos dados por el MINEDU respecto al perfil del estudiante de educación básica regular.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación, planteamos la pregunta y objetivos de la investigación.

Pregunta de la investigación

¿Cuáles son los procesos de generación de conjeturas de profesores de matemática al resolver actividades de problemas abiertos en un entorno de geometría dinámica donde se movilizan nociones de cuadriláteros?

Objetivo general

Analizar el proceso de generación de conjeturas de profesores de matemática al resolver actividades de problemas abiertos en un entorno de geometría dinámica donde se movilizan nociones de cuadriláteros.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general, se consideran los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las interacciones entre los profesores de cada grupo de trabajo, así también las interacciones entre los profesores y el software GeoGebra en el proceso de generación de conjeturas al resolver actividades de problemas abiertos de geometría, donde se movilizan nociones de cuadriláteros.
- Describir el proceso de generación de conjeturas asociado a usos particulares de la herramienta de arrastre por parte de los profesores al resolver actividades de problemas abiertos de geometría, donde se movilizan nociones de cuadriláteros.

En el siguiente capítulo haremos un estudio sobre los cuadriláteros, según la definición de algunos autores.



Capítulo II: LOS CUADRILÁTEROS

En el presente capítulo presentamos aspectos matemáticos de los cuadriláteros, para comprender las diversas definiciones que se encuentran en los libros de texto de la actualidad, luego las compararemos con las definiciones actuales como las dadas por Moise. y Downs (1966) y Verástegui (2003). Además, haremos uso de la clasificación jerárquica en el sentido dado por De Villiers (1994) para proponer una clasificación de los cuadriláteros, los cuales servirán para probar los teoremas y propiedades asociados a los cuadriláteros presentados por autores como Vega (1972) y Verástegui (2003).

Incluimos la presentación de documentos oficiales tales como Currículo Nacional de la educación básica y el programa curricular de educación secundaria que pueden descargarse del portal Web del MINEDU.

A continuación, se hace una revisión de los conceptos asociados a cuadriláteros.

2.1 Aspectos matemáticos

Para el estudio de los cuadriláteros tomaremos como base los aportes de Moise, E. y Downs, F. (1966) y Vega (1972), para las demostraciones nos inspiraremos en el trabajo de Vega (1972) y Verástegui, T. (2003).

Moise et al. (1966) define los cuadriláteros del modo siguiente:

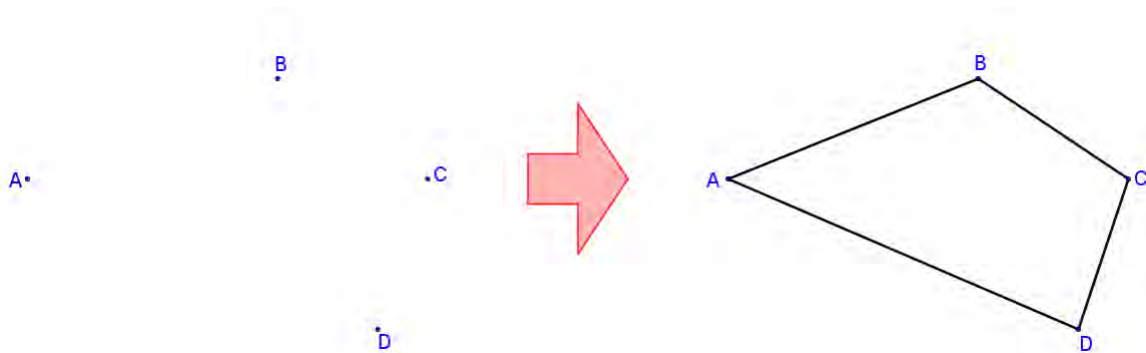
Definición 1.- Sean A, B, C y D cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero. Los cuatro segmentos se llaman lados, y los puntos A, B, C y D se llaman vértices. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$ se llaman ángulos del cuadrilátero, y pueden indicarse brevemente por $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ (Moise et al., 1966, p. 144).

Ésta definición se complementa con la siguiente definición:

Definición 2.- Dos lados de un cuadrilátero son opuestos, si no se interceptan. Dos ángulos son opuestos, si no tienen común un lado del cuadrilátero. Dos lados son consecutivos, si tienen un extremo común. Dos ángulos son consecutivos, si tienen común un lado del cuadrilátero. Una diagonal de cuadrilátero es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos (Moise et al., 1966, p. 246).

La Definición 1 nos dice que un cuadrilátero se forma a partir de cuatro puntos coplanares no colineales tres a tres. Así, el cuadrilátero ABCD, al cual notaremos por $\square ABCD$, se forma al unir los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} siempre que éstos se intersecten sólo en los extremos, tal como se muestra en la Figura 5.

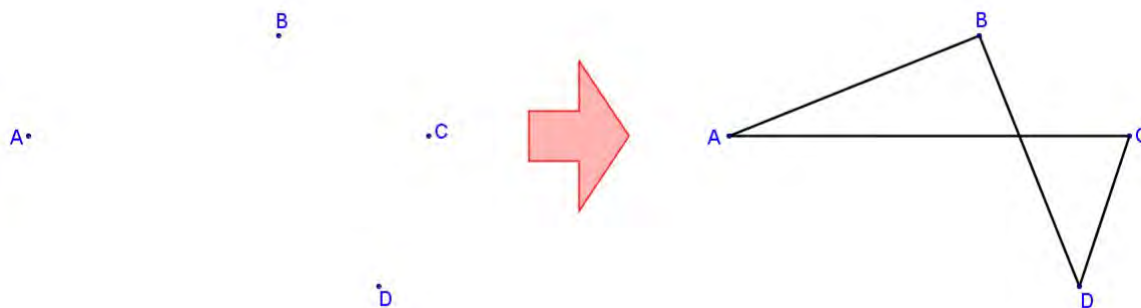
Figura 1. Cuadrilátero según Moise y Downs



De acuerdo a la Definición 2, los lados \overline{AB} y \overline{CD} son lados opuestos, los lados \overline{AB} y \overline{BC} son lados consecutivos de $\square ABCD$; además $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos opuestos, $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos adyacentes de $\square ABCD$.

Si los segmentos formados se cortan en un punto diferente a sus extremos, entonces la figura formada no es un cuadrilátero, tal como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. No es cuadrilátero según Moise y Downs



Note que los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} se cortan pero no en sus extremos, por tal razón, la figura formada no es un cuadrilátero.

De Villiers (1994) propone dos formas de clasificación:

Clasificación jerárquica (...), clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los más particulares forman subconjuntos de los más generales.

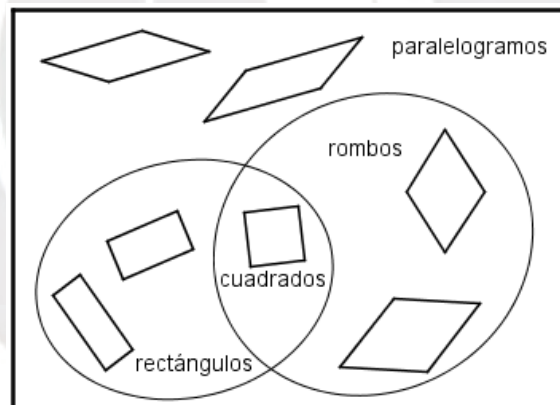
Clasificación particional (...), los diversos subconjuntos de conceptos son considerados disjuntos dos a dos. (De Villiers, 1994, p. 1)

Una clasificación jerárquica está asociada a una definición jerárquica (definición que permite la simplificación deductiva y derivación de conceptos más específicos). A continuación mostramos las siguientes definiciones jerárquicas:

- Paralelogramo: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.
- Rectángulo: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y un ángulo interior recto.
- Rombo: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos y diagonales perpendiculares.
- Cuadrado: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos, un ángulo interior recto y diagonales perpendiculares.

Como consecuencia de las definiciones dadas afirmamos que los rectángulos, rombos y cuadrados son subconjuntos de los paralelogramos, este hecho se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Clasificación jerárquica de cuadriláteros



Fuente: De Villiers (1994, p. 2)

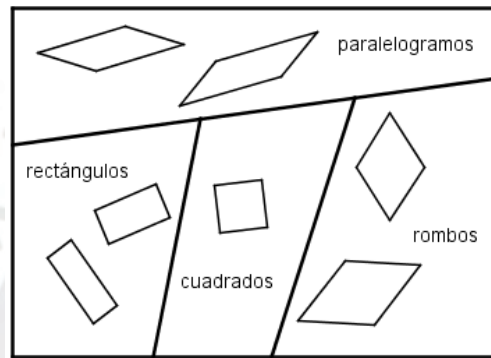
A diferencia de la clasificación jerárquica, la clasificación particional y sus correspondientes definiciones permiten distinguir claramente entre conceptos, por tal razón son más específicas. Por ejemplo:

- Paralelogramo: cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos, cuyos ángulos internos no son rectos y sus diagonales no son perpendiculares.
- Rectángulo: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos, un ángulo interior recto y sus diagonales no son perpendiculares.

- Rombo: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos, diagonales perpendiculares y ninguno de sus ángulos interiores son rectos.
- Cuadrado: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos, un ángulo interior recto y diagonales perpendiculares.

Según esta definición, no existe cuadrilátero que sea paralelogramo, rectángulo, rombo y cuadrado a la vez, luego estos cuadriláteros conforman conjuntos disjuntos dos a dos, en la Figura 8 se muestra este hecho.

Figura 4. Clasificación jerárquica de cuadriláteros



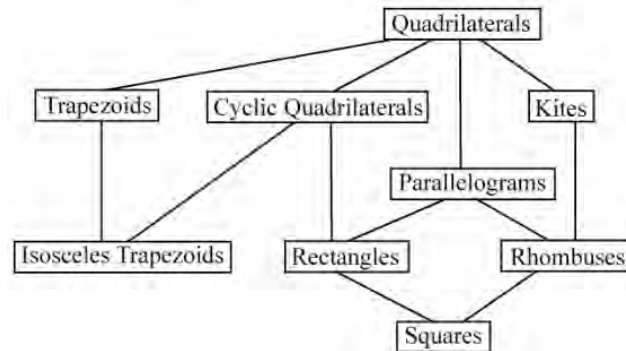
Fuente: De Villiers (1994, p. 2)

De Villiers afirma que “la elección entre una clasificación jerárquica o particional es usualmente un asunto de opción personal y conveniencia” (De Villiers, 1994, p. 3); dado la practicidad de las definiciones jerárquicas elegiremos esta para clasificar a los cuadriláteros.

Hemos visto que la clasificación jerárquica depende de las definiciones jerárquicas asociadas a ella, como muestra de lo anterior tenemos las dos clasificaciones para los cuadriláteros dadas por Usiskin y Griffin (2006) las cuales están en función a la definición del trapecio.

- (a) Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. A esto le llamamos una definición exclusiva, como consecuencia de ello un trapecio no es un paralelogramo. En la definición exclusiva, los paralelogramos son centrales en la jerarquía de los trapecios, como se muestra en la Figura 5:

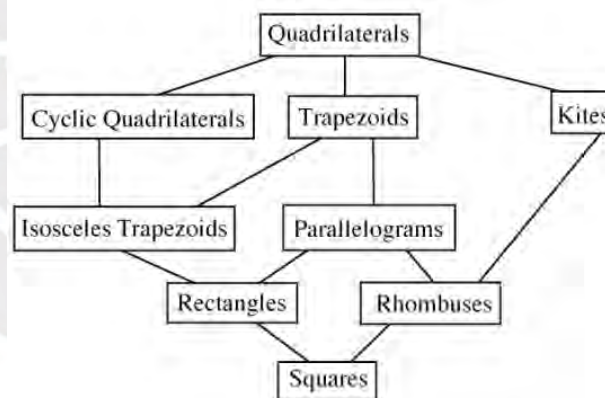
Figura 5. Clasificación exclusiva de 8 cuadriláteros especiales



Fuente. Usiskin et al. (2006, p. 1)

- (b) Un trapecio es un cuadrilátero con *al menos* un par de lados paralelos. La segunda definición implica que *todos* los paralelogramos son trapecios; es *inclusiva* de la misma manera que los rectángulos incluyen a los cuadrados. En la definición inclusiva, los trapecoides son más importantes que los paralelogramos y rectángulos son tipos especiales de trapecios isósceles (Usiskin et al., 2006, p. 1).

Figura 6. Clasificación inclusiva de 8 cuadriláteros especiales



Fuente. Usiskin et al. (2006, p. 2)

Las dos clasificaciones mostradas por Usiskin son válidas y dependen de la definición de trapecio con la que se trabaje.

Para nuestro estudio, tomaremos la clasificación dada por Vega (1972) la cual es una clasificación jerárquica de los cuadriláteros, el concepto que está detrás de esta clasificación es el paralelismo entre los lados del cuadrilátero.

Clasificación de los cuadriláteros. Los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que dos pares de lados opuestos son paralelos.

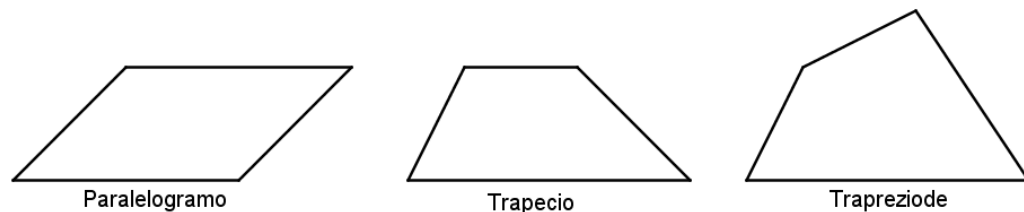
Un trapecio es un cuadrilátero en el que un **solo** par de lados opuestos son paralelos.

Estos lados paralelos se llaman bases del trapecio.

Un trapezoide es un cuadrilátero en el que ningún par de lados opuestos son paralelos.

(Vega, 1972, p. 104-105)

Figura 7. Clasificación inclusiva de 8 cuadriláteros especiales



Vega (1972) define a tipos especiales de paralelogramos:

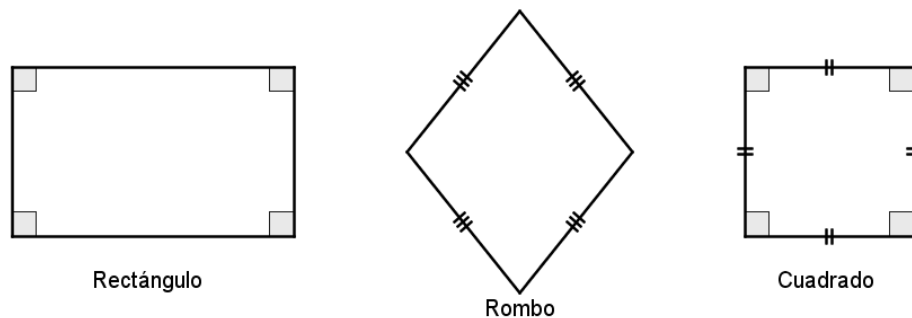
Rectángulo, rombo y cuadrado.

Un rectángulo es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos.

Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos son congruentes entre sí.

Un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí (Vega, 1972, p. 105).

Figura 8. Clasificación de paralelogramos



Adicionalmente, Vega (1972) propone la siguiente clasificación para los trapecios:

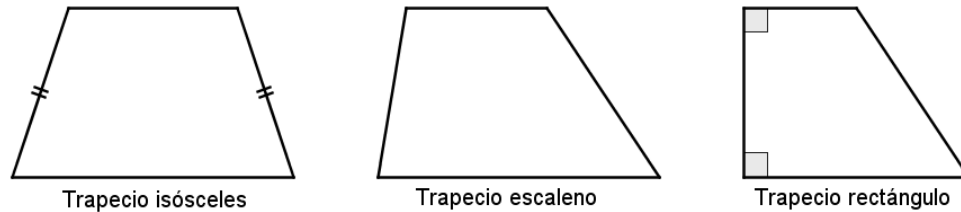
Clasificación de los trapecios. Los trapecios se clasifican en isósceles y escalenos.

Un *trapecio isósceles* es el que tiene los lados no paralelos congruentes.

Un *trapecio* escaleno es el que tiene sus lados no paralelos no congruentes.

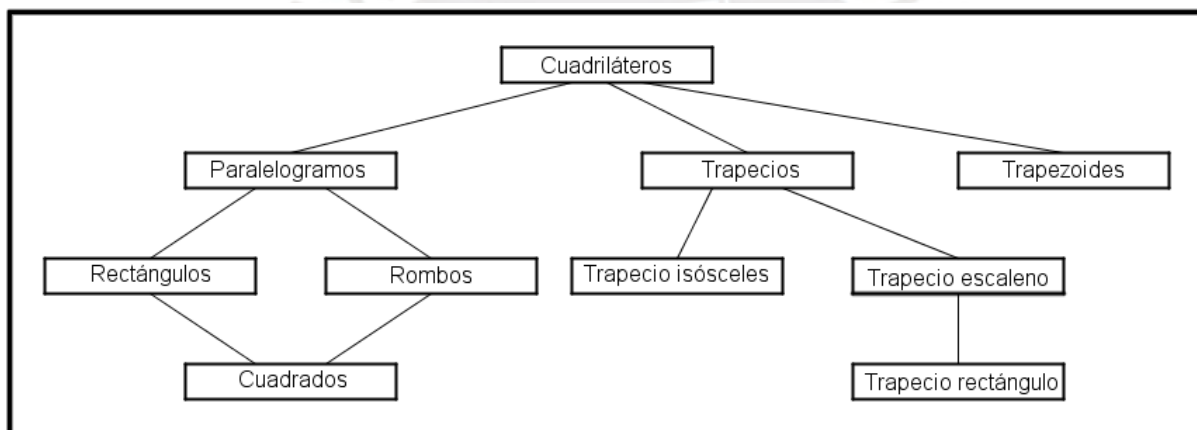
Un trapecio escaleno se llama *trapecio rectángulo* si uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases (Vega, 1972, p. 105).

Figura 9. Clasificación de paralelogramos



En función a las definiciones dadas, mostramos la siguiente clasificación para los cuadriláteros:

Figura 10. Clasificación de cuadriláteros a considerar en la investigación



En la Figura 10 se muestra la clasificación de cuadriláteros que usaremos en nuestra investigación.

2.2 Aspectos curriculares en documentos oficiales libros de texto

Es importante revisar como se presenta la noción de cuadriláteros a los estudiantes de secundaria en nuestro país, para ello presentamos algunos documentos oficiales y los cuadernos de trabajo para estudiantes y manual docente de primero y segundo de secundaria elaborados por el Ministerio de Educación.

El documento Currículo Nacional de la Educación Básica Regular 2016 es un documento elaborado por el MINEDU en el cual se “establece los aprendizajes que se espera logren los

estudiantes como resultados de su formación básica” (MINEDU, 2016a, p. 8), este es uno de los documentos oficiales que sirven de guía para los docentes, en él, se describen las competencias, capacidades y los indicadores de logro del área de matemática en concordancia con los estándares nacionales.

El Currículo Nacional propone el desarrollo de cuatro competencias en el nivel secundario para el área de matemática, estos son: Resuelve problemas de cantidad; Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; resuelve problemas de forma, movimiento y localización; y, Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre (MINEDU, 2016b).

El desarrollo de la competencia resuelve problemas de forma, movimiento y localización permite que “el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales” (MINEDU, 2016b, p. 263), el desarrollo de esta competencia requiere la combinación de las capacidades: Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones; Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas; Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio; y, Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas. En la tabla 3 se muestran los desempeños de la competencia en mención para los ciclos I y II de secundaria.

Tabla 3

Desempeños de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Ciclo I (1º y 2º grado de secundaria)	Ciclo II (3º, 4º y 5º grado de secundaria)
<ul style="list-style-type: none"> • Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asocia estas características y las representa con formas bidimensionales compuestas y tridimensionales. Establece, también, propiedades de semejanza y congruencia entre formas poligonales, y entre las propiedades del volumen, área y perímetro. • Expresa, con dibujos, construcciones con regla y compás, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de las rectas paralelas, perpendiculares y secantes, y de los prismas, cuadriláteros, 	<ul style="list-style-type: none"> • Establece relaciones entre las características y atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Representa estas relaciones con formas bidimensionales, tridimensionales o compuestas, y con cuerpos de revolución, los que pueden combinar formas geométricas tridimensionales. También establece relaciones métricas entre triángulos y circunferencias. • Expresa, con dibujos, construcciones con regla y compás con material concreto, y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las transformaciones geométricas y la clasificación de las formas geométricas por sus características y propiedades, para interpretar un problema según su

triángulos, y círculos. Los expresa aun cuando estos cambien de posición y vistas, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.

- Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos, entre objetos y formas geométricas, y entre las formas geométricas, sobre la base de simulaciones y la observación de casos. Las justifica con ejemplos y sus conocimientos geométricos. Reconoce errores en sus justificaciones y en las de otros, y los corrige.

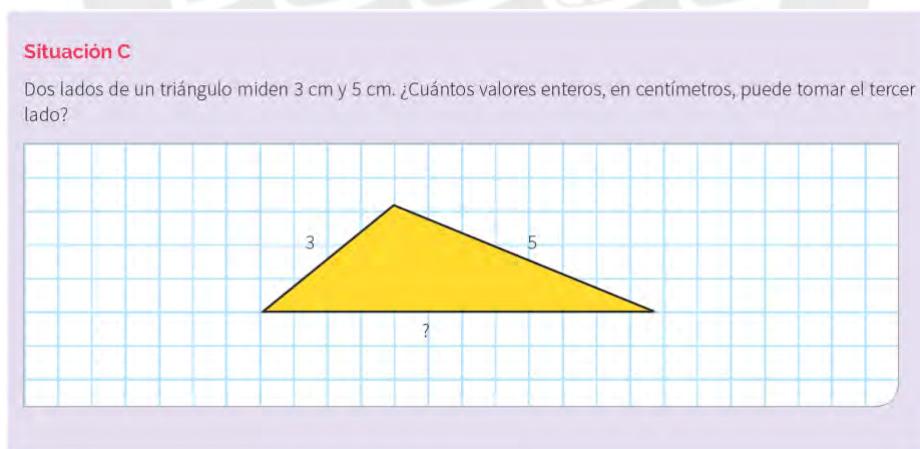
contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.

- Plantea y contrasta afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos, entre objetos y formas geométricas, y entre las formas geométricas, sobre la base de experiencias directas o simulaciones. Comprueba la validez de una afirmación opuesta a otra, o de un caso especial mediante contraejemplos, conocimientos geométricos, y razonamiento inductivo o deductivo.

Fuente. MINEDU (2016b, p. 266, 267, 270, 271)

Los desempeños mostrados en la Tabla 3, ponen en evidencia la importancia de las construcciones geométricas, la identificación de propiedades, así como la comprobación de su validez, esto lo podemos observar en los cuadernos de trabajo de matemática elaborados por el MINEDU.

Figura 11. Clasificación de cuadriláteros a considerar en la investigación



Fuente: Ministerio de Educación (2017b, p. 110)

El desarrollo de la capacidad “Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas” no solo se evidencia al justificar y/o validar una afirmación, también puede evidenciarse cuando un estudiante usa contraejemplos para refutarlas como en la resolución al ejemplo mostrado en la Figura 12.

Figura 12. Resolución de la situación C

Resolución

(Encuentra el error)

Recordamos una propiedad fundamental de los triángulos: cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos.


Llamamos x al lado desconocido y planteamos una desigualdad:

$$x < 5 + 3 \rightarrow x < 8$$

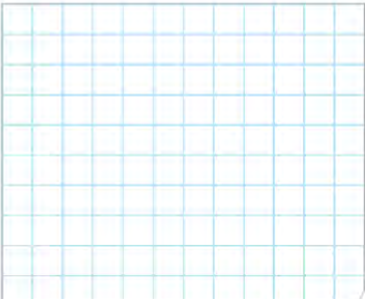
Por lo tanto, el tercer lado puede tomar los siguientes valores: { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

Respuesta:
El tercer lado puede tomar 7 valores enteros.

1. ¿El procedimiento seguido es correcto?



2. En caso de que hubiera un error, ¿cuál sería su corrección? De ser correcto, busca otra forma de resolver el problema.



Fuente: Ministerio de Educación (2017b, p. 110)

El argumento mostrado en la Figura 12 puede refutarse por medio del contraejemplo “Si el tercer lado midiera 1, el triángulo no existiría, pues 5 no es menor que la suma de 3 y 1” (MINEDU, 2017c, p. 80), en este caso se espera que el estudiante aplique correctamente la propiedad fundamental de los triángulos para concluir que el tercer lado puede tomar 5 valores enteros.

Figura 13. Identificando un polígono de lados paralelos y perpendiculares

- 2.** ¿Cuál de los polígonos mencionados tiene lados paralelos y perpendiculares?
- a) Romboide b) Trapecio c) Rombo d) Rectángulo

Fuente: Ministerio de Educación (2017d, p. 233)

La situación propuesta requiere identificar que el cuadrilátero que cumple con las dos propiedades señaladas, el ejemplo mostrado busca trabajar con la capacidad “Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas”, además trabaja la capacidad “Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas” debido a que su respuesta es resultado de un razonamiento deductivo: Si la figura tiene dos lados paralelos y perpendiculares, entonces la figura es un rectángulo.

La geometría, en particular, los cuadriláteros nos proporcionan una fuente de diversas situaciones que permiten trabajar las cuatro capacidades de la competencia “Resuelve

problemas de forma, movimiento y localización”; en particular, la geometría dinámica permite generar situaciones que involucren el establecimiento de conjeturas y su posterior validación, lo cual permite trabajar las capacidades “comunica su comprensión sobre formas y relaciones geométricas” además de la capacidad “argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas”, es en este punto donde nuestra investigación toma relevancia por cuanto para poder enseñar a argumentar es necesario saber de qué manera los docentes validan sus los resultados que van obteniendo al momento de resolver actividades de problemas abiertos.

En el siguiente capítulo se presentan los aspectos teóricos y metodológicos de la investigación.



Capítulo III: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En el presente capítulo, se presentan los aspectos teóricos y metodológicos de nuestra investigación. La referencia teórica está dada por el modelo de Mantenimiento de arrastre presentada por Baccaglini-Frank (2010, 2019), en la cual se muestra la manera como influyen los tipos de arrastre presentes en los programas de geometría dinámica en la generación de conjeturas, la metodología a usar es cualitativa, y tomaremos como método de investigación el estudio de caso. Antes de revisar los tipos de prueba se presenta una discusión teórica sobre las nociones de explicación, prueba y demostración.

3.1 Elementos y aspectos de la geometría dinámica

La tecnología ofrece herramientas que facilitan el aprendizaje en matemáticas pues no solo “proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y hacen cálculos con eficiencia y exactitud” (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 26) sino que, además, permiten “examinar más representaciones o ejemplos que los que son posibles a mano, y así, pueden formular y explorar conjeturas fácilmente” (NCTM, 2000, p. 26).

Uno de los aportes del uso de la tecnología en el aula de clase es la aparición de los Softwares de Geometría Dinámica (SGD) los cuales, a pesar de las diferencias asociadas al estilo, presentación y herramientas particulares, se caracterizan por la manera como se construyen los objetos en su interface, al respecto Gutiérrez (2006) afirma:

Todos ellos tienen una base común, que es la capacidad de realizar construcciones geométricas a partir de objetos elementales (punto, segmento, recta, circunferencia, polígono, etc.) y acciones matemáticas (dibujar una recta perpendicular o paralela, el punto medio, la bisectriz, el objeto simétrico, etc.) y de transformar esas construcciones en tiempo real mediante arrastre con el cursor de alguno de los elementos de la construcción, de manera que las propiedades matemáticas usadas para realizar la construcción se mantienen (p. 11).

Esta propiedad de transformar en tiempo real los objetos creados “permiten a los estudiantes ver una gran variedad de ejemplos o casos diferentes en pocos segundos, algo que en un contexto de pizarra, papel y lápiz es imposible” (Gutiérrez, 2006, p. 11) lo antes mencionado permite la experimentación con objetos geométricos y como consecuencia la identificación de propiedades asociadas a las figuras construidas, respecto a las propiedades

identificadas en las construcciones se afirma que estas representaciones “siempre pueden presentar imprecisiones y sembrar dudas respecto de la propiedad que se quiere comprobar, pero estas dudas tienden a desaparecer si se pasa de un uso estático (para un caso particular) a un uso dinámico del programa” (Olivero et al., 2013, p. 891), lo antes mencionado permite generar un entorno en el que se establezcan conjeturas de manera experimental las que, posteriormente, deben ser probadas y/o validadas por medio de la geometría euclidiana. A pesar de ello, en ocasiones, la imagen obtenida en la pantalla es tan convincente que obstaculiza el aprendizaje de la demostración, esto se debe a que los estudiantes no cuestionan lo percibido en la pantalla, a pesar de ello “diversas investigaciones están poniendo en evidencia lo beneficioso que puede ser usar un SGD para ayudar a los estudiantes a entrar en el terreno del razonamiento geométrico abstracto” (Jones, Gutiérrez y Mariotti, citado en Gutiérrez, 2006).

De los programas de geometría dinámica más difundidos en nuestro país tenemos el GeoGebra y el Cabri los cuales “realizan procesos basados en la geometría analítica (cálculo de coordenadas) y muestran en la pantalla la traducción gráfica de sus cálculos” (Olivero et al., 2013, p. 890). Para poder describir los objetos creados en la interface de estos programas se debe distinguir el concepto de figura del de dibujo, al respecto Laborde & Capponi (1991) hacen una distinción entre ambos: una *figura* es un objeto teórico referente, el cual puede describirse y materializarse en el espacio gráfico por medio de dibujos; un *dibujo* es la representación material de la figura trazada en un papel, arena o pantalla de computador.

Para la presente investigación, la figura es el objeto matemático dibujado en la computadora, el mismo puede tener varias representaciones, y dibujo es cada una de las representaciones particulares de la figura. Por ejemplo, en la Figura 14 se muestran dos representaciones de un triángulo rectángulo ABC, recto en B.

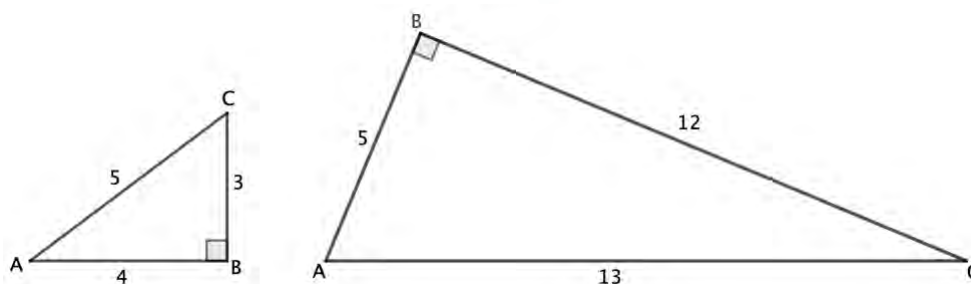


Figura 14. Diferencia entre figura y dibujo

Fuente. Creación propia

En ambos casos el objeto teórico representado es el triángulo rectángulo ABC, recto en B (figura), el objeto puede ser descrito como un polígono de 3 lados donde el ángulo de vértice B mide 90° . Para el caso mostrado, cada uno de los triángulos que aparecen en la figura corresponde a una representación particular de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, por tanto cada uno de los triángulos mostrados representa a un dibujo.

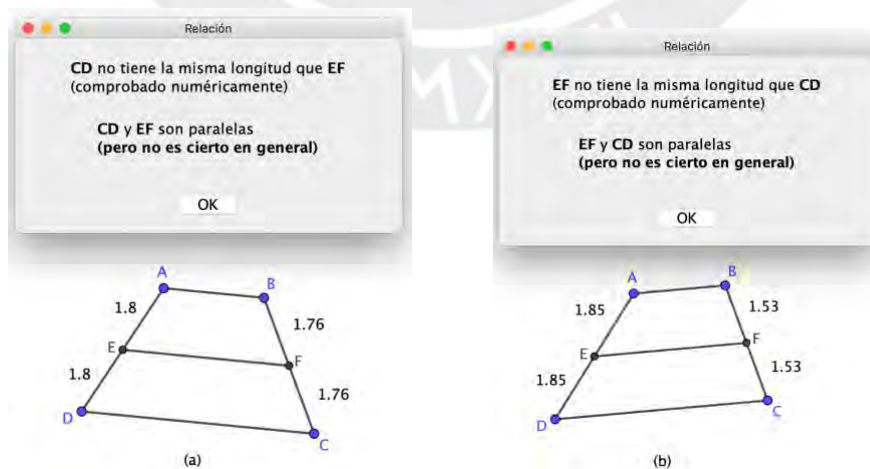
Otra característica de los softwares de geometría dinámica son los invariantes, al respecto Baccaglini-Frank y Mariotti (2011) afirman:

Los invariantes están determinados tanto por las relaciones geométricas definidas por los comandos utilizados para lograr la construcción, como por la relación de dependencia entre las relaciones geométricas originales de la construcción y aquellos que se derivan como consecuencia dentro de la teoría de la geometría euclidiana. Todos estos invariantes aparecen simultáneamente a medida que se actúa sobre la figura dinámica y, por lo tanto, se "mueve" (...). Puede ser útil distinguir entre invariantes que surgen del movimiento "directo", es decir, aquellos definidos directamente en la construcción, e invariantes que surgen de un movimiento "indirecto", es decir, propiedades que son una consecuencia lógica de esa construcción. (pp. 100, 101)

Llamamos invariante a una propiedad matemática de la figura construida en la zona de trabajo que se mantiene a pesar de ser modificada por medio del arrastre (Leung et al., 2013; Baccaglini-Frank, 2019).

Por ejemplo, considere la siguiente construcción: ABCD es un trapecio, E y F son los puntos medios de los lados DA y BC, respectivamente (figura 15a).

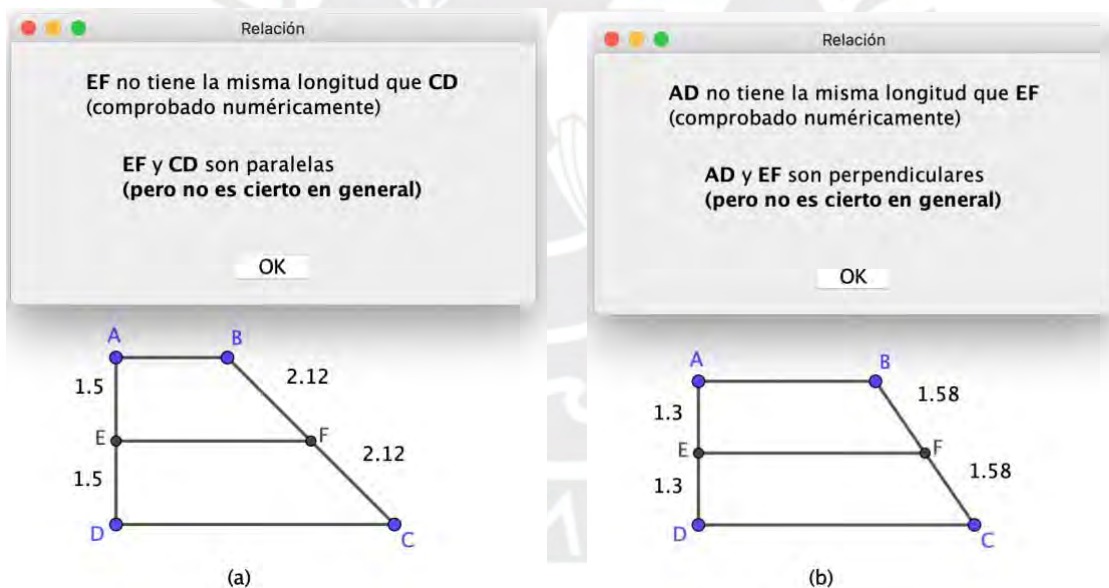
Figura 15. Invariantes asociadas a la base media del trapecio ABCD



Los puntos medios E y F siguen siendo puntos medios durante el arrastre (figura 15b), es decir, las propiedades $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ y $\overline{BF} \cong \overline{FC}$ se conservan a pesar del arrastre, además inducir la propiedad $\overline{CD} // \overline{EF}$ debido a que también se mantiene a pesar del arrastre, luego $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, $\overline{BF} \cong \overline{FC}$ y $\overline{CD} // \overline{EF}$ son tres invariantes de la construcción, Baccaglini & Mariotti (2011) denominan a estas invariantes como fuertes o *invariantes robustas*. Se denominan fuertes o robusta cuando una propiedad se obtiene directamente de la construcción y el arrastre.

Por otro lado, se puede inducir una nueva propiedad $\overline{AD} \perp \overline{EF}$, la cual se cumple para ciertas formas particulares del trapecio ABCD (figuras 16a y 16b), las investigadoras denominan a este ejemplo como *invariante suave*. Es decir, una invariante es suave cuando una propiedad se verifica bajo ciertas condiciones de la figura original; al respecto las investigadoras señalan que “las invariantes suaves son particularmente útiles en actividades que implican generar conjeturas a través del arrastre” (Baccaglini & Mariotti, 2011, p. 101).

Figura 16. Invariantes suaves asociadas a la base media del trapecio ABCD



A continuación exploramos la relación entre la geometría dinámica, los problemas abiertos y el proceso de conjeturar.

3.2 La geometría dinámica y el proceso de conjeturar

En geometría existen problemas en los que se pide relacionar algunos de los elementos buscando descubrir y/o proponer alguna propiedad relacionada a dichos elementos (hipótesis o conjetura) la cual luego debe ser validada para ser aceptada (prueba o demostración), este tipo

de problemas son conocidos como abiertos. Un problema abierto es una tarea que plantea una pregunta sin revelar ni sugerir la respuesta esperada (Baccaglioni-Frank y Mariotti, 2010; Mariotti, 2015). Este tipo de problemas se caracterizan por plantear preguntas como ¿Qué relación existe entre ...? ¿La figura obtenida siempre es ...? ¿Cuáles son las condiciones para qué ...? En ese sentido, la resolución de este tipo de problemas pasa por establecer una conjetura y de ser posible probar su validez.

En el proceso de resolución de un problema abierto intervienen procesos de descubrimiento y justificación los cuales permiten formular conjeturas que al ser demostradas se convierten en teoremas; al respecto han escrito diversos autores desde matemáticos como De Villiers hasta investigadores en enseñanza de la matemática como Mariotti, a pesar de las diversas posturas la mayoría coincide en que “un punto crucial consiste en la dialéctica entre una fase exploratoria y una estrategia de organización que converge hacia algún conocimiento validado” (Arzarello et al., 2002).

La dialéctica a la cual se hace referencia es conocida como abducción, que según Arzarello et al. (2002) es un movimiento resolutivo parcial, a partir del cual se formulan conjeturas y permite la transición a la demostración, esta transición implica dos procesos tal y como lo menciona Olivero (2002):

Control ascendente

Es la modalidad según la cual el resolutor “lee” la figura para hacer conjeturas. La corriente de pensamiento va de la figura a la teoría, en que el resolutor intenta y encuentra los fragmentos de teoría relacionados con la situación a la que se enfrenta. Esta modalidad se relaciona con las exploraciones de la situación dada.

Control descendente

Esta modalidad ocurre cuando ya se ha producido una conjetura y el sujeto busca una validación. Se refiere a la teoría para justificar lo que previamente “leyó” en la figura y valida sus conjeturas. (Olivero, 2002, p. 4)

El proceso de explorar, conjeturar y demostrar ocurre como consecuencia de la transición del control ascendente al control descendente y viceversa por parte. La abducción se ubica en la transición del establecimiento de la conjetura y la elaboración de la demostración debido a que ocurre en cuando una conjetura se escribe de manera lógica (Si... entonces).

En nuestra investigación estamos interesados en estudiar como ocurre este proceso en un ambiente de geometría dinámica, en ese sentido Arzarello lo redefine del modo siguiente:

Procesos ascendentes, desde el dibujo hasta la teoría para explorar libremente una situación, buscando regularidades, invariantes, etc.

Procesos descendentes de la teoría a los dibujos para validar o refutar conjeturas, para verificar propiedades, etc. (Arzarello, 2001, p. 67)

Olivero (2002) complementa lo señalado por Arzarello respecto a los procesos ascendentes y descendentes:

Proceso ascendente: Este es un proceso en el que los estudiantes se mueven del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) al campo teórico. El AGD funciona como un campo de descubrimiento, en el que los estudiantes realizan sus experimentos y buscan propiedades, etc. ..., que luego deben estar vinculados a la teoría.

Proceso descendente: Este es un proceso en el que los estudiantes pasan del campo teórico al AGD. El AGD ya no es un espacio para descubrimiento, sino un espacio para validación. La teoría entra en juego. (Olivero, 2002, p. 149)

En un ambiente de geometría dinámica los estudiantes pueden encontrar invariantes en una figura al moverla y medirla (proceso ascendente), esto le permite establecer alguna propiedad respecto a la figura (conjetura) la cual puede o no validarse al moverla y medirla nuevamente (proceso descendente) así, los procesos ascendentes y descendentes en un ambiente de geometría dinámica revelan en los estudiantes cambios cognitivos desde el nivel perceptivo al teórico y viceversa (Arzarello et al, 2002); en la transición de los procesos descritos en un ambiente de geometría dinámica ocurre la abducción y esta mediado por la medición y el arrastre.

Una característica de los softwares de geometría dinámica como el GeoGebra y el Cabri es el arrastre el cual permite modificar en tiempo real una figura ubicada en la zona de trabajo convirtiéndola en una nueva figura que se encuentra asociada de algún modo a la inicial, esta característica permite la modificación continua de las figuras en la zona de trabajo algo que es una limitación en los trabajos con lápiz y papel.

Para que se produzca la abducción es necesario que el cambio del proceso ascendente al descendente y viceversa se produzca, pero en ocasiones este proceso puede verse afectado por “el conflicto básico entre la teoría, figuras y pruebas por un lado, y la percepción, los dibujos y las medidas por el otro” (Arzarello, 2001, p. 13), el conflicto mencionado se genera debido a que los software de geometría dinámica como GeoGebra y Cabri trabajan con aproximaciones y en la geometría euclidiana no está permitido trabajar con aproximaciones, es por ello que no toda

abducción generada en un entorno de geometría dinámica es válida, por tanto, es necesario validarla mediante algún proceso de prueba o demostración.

3.3 Modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura

El modelo de arrastre de mantenimiento-conjetura se adapta a problemas abiertos de construcción, para ello Baccaglioni-Frank & Mariotti (2010) adaptan las modalidades de arrastre propuestas por Arzarello et al. (2002) para el trabajo con problemas de construcción, así propone cuatro modalidades de arrastre:

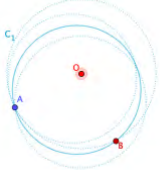
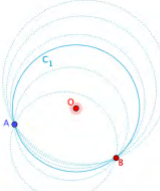
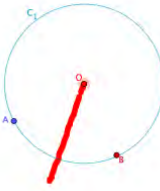
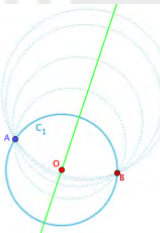
- Arrastre libre: Consiste en arrastrar aleatoriamente un punto base en la pantalla, buscando forma o regularidad interesante para la figura construida en GeoGebra;
- Arrastre de mantenimiento: Consiste en arrastrar de un punto base para que la figura en GeoGebra conserve una determinada propiedad;
- Arrastre con traza (rastros): Se da cuando el punto a arrastrar tiene activo el comando rastro de GeoGebra;
- Prueba de arrastre: Ocurre cuando se arrastran los puntos base para ver si la figura construida mantiene las propiedades deseadas. En este modo puede ser útil para verificar la validez de una conjetura formulada.

Haremos uso un problema geométrico de construcción para ejemplificar los tipos de arrastre propuestos por las investigadoras:

Problema: Sean A y B dos puntos fijos. Sea O un punto del plano y C_1 la circunferencia de centro O y radio OA. ¿Qué relación puedes encontrar entre A, B y O de modo que B pertenezca a la circunferencia C_1 ?

Tabla 4

Modalidades de arrastre propuestos por Baccaglini-Frank

Arrastre	Acción en geogebra	Descripción
Arrastre libre		El punto O es arrastrado por la zona de trabajo buscando que la circunferencia pase por el punto B (regularidad de la figura). En este caso el invariante introducido es “la circunferencia pasa por el punto B”
Arrastre de mantenimiento		El punto pase O es arrastrado por la zona de trabajo buscando que la circunferencia pase por el punto B (condición), el movimiento del punto O es desplazado sin seguir necesariamente una trayectoria.
Arrastre con traza		Se activa el rastro para el punto base O, al arrastrar el punto O buscando que la circunferencia pase por el punto B, el rastro muestra la recta por donde debe pasar O para que se cumpla la condición (conjetura).
Prueba de arrastre		El punto O es arrastrado por la zona de trabajo buscando que la circunferencia pase por el punto B (forma particular), durante este proceso el resolutor busca comprobar que C_1 pase por B siempre que O pase por la recta mediatriz al segmento AB.

Fuente: Adaptado de Baccaglini-Frank & Mariotti (2010)

Existen diferencias y similitudes entre las modalidades de arrastre propuestas por Baccaglini & Mariotti (2010) y las modalidades de arrastre de Arzarello, así el arrastre libre consiste desplazar un punto base libremente sobre el área de trabajo, “es una suerte de fusión entre el arrastre errante y arrastre guiado, descrito por Arzarello et al. (2002)” (Baccaglini & Mariotti, 2010, p. 230). El arrastre de mantenimiento difiere del arrastre en un lugar culto en que “se arrastra un punto base, no necesariamente a lo largo de una trayectoria preconcebida, con la intención específica del usuario en mantener una propiedad particular” (Baccaglini & Mariotti, 2010, p. 230-231). El arrastre con traza consiste en mover un punto base teniendo activada la opción mostrar traza en Cabri (su equivalente en GeoGebra es el rastro), este tipo de arrastre es útil en el proceso de generar conjeturas “la combinación de mantener el arrastre con la traza

activada en el punto base seleccionado puede ser especialmente útil durante los procesos de generación de conjeturas” (Baccaglini & Mariotti, 2010, p. 231). El arrastre de test permite comprobar si una invariante robusta efectivamente se mantiene al modificar la figura, a diferencia de ello, la prueba de arrastre ocurre cuando el resolutor mueve un punto base con la intención de observar si ocurren simultáneamente dos invariantes (suaves o robustas); respecto a esta última modalidad de arrastre, las investigadoras señalan que “esto puede ser útil en el contexto de las tareas de generación de conjeturas, porque la prueba de arrastre, tal como la concebimos, puede convertirse en una forma de probar una conjetura” (Baccaglini & Mariotti, 2010, p. 231).

El modelo de Mantenimiento de arrastre-conjetura hace uso de las invariantes de la figura construida en GeoGebra, las propiedades geométricas que la figura asume como “robusta” o “suave”, estas últimas son importante al momento de generar conjeturas, para ello Baccaglini-Frank (2010) define los siguientes elementos fundamentales del modelo:

Tabla 5

Elementos fundamentales del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura

Elemento	Abrev.	Definición
Invariante inducida intencionalmente	III	Propiedad (o configuración) que el solucionador elige tratar de mantener.
Trayectoria		Conjunto de puntos que cumplen la propiedad: si el punto base arrastrado coincide con alguno de estos puntos entonces se verifica (visualmente) la III.
Descripción geométrica de la trayectoria	GPD	Caracterización geométrica de la trayectoria.
Invariante observada durante el arrastre	IOA	Propiedad (o configuración) que parece mantener la figura en el área de trabajo mientras se induce una III mediante el modelo de mantenimiento de arrastre.
Enlace condicional	EC	Conexión lógica (implícita) entre la IOA y la III.
Conjetura		Enunciado (explícito) con una premisa y una conclusión que expresa el EC de forma explícita.

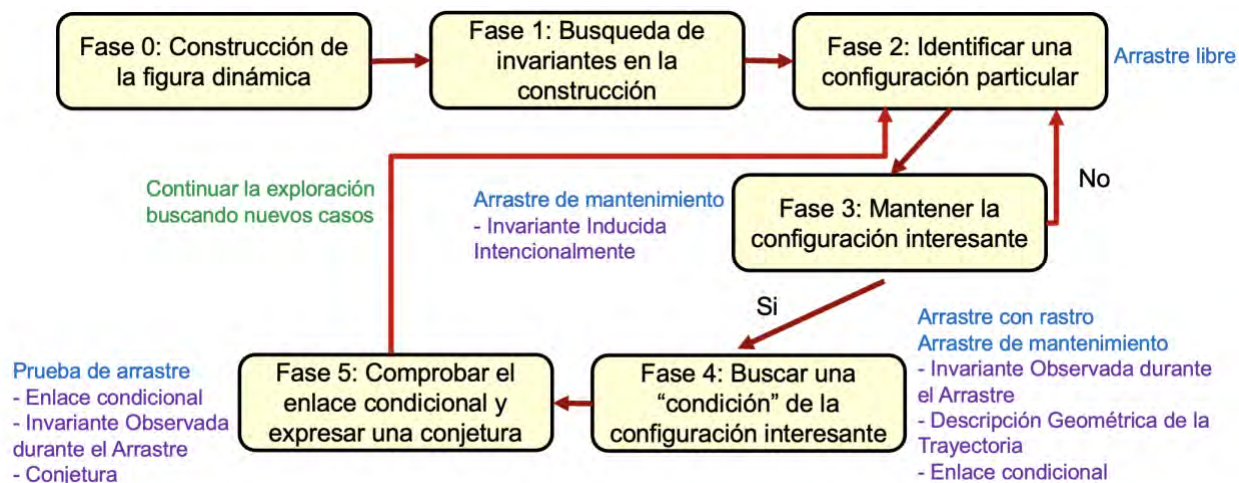
Fuente: Adaptado de Antonini & Baccaglini-Frank, 2015, p. 10

Los elementos y procesos descritos en la tabla 5 hacen referencia a posibles patrones de acción que no son explícitos por el resolutor ni son visibles para un observador externo, al respecto Antonini y Baccaglini-Frank (2015) señalan que las técnicas exploratorias asociadas al

proceso de generación de una conjetura están relacionadas con tareas y subtareas que realiza el resolutor, las mismas pueden organizarse en fases.

- Fase 0: Ocurre al momento de realizar la construcción de la figura dinámica en GeoGebra.
- Fase 1: En esta fase el resolutor, por medio de la interacción con el software, identifica las invariantes de la construcción realizada, además realiza las primeras conjeturas respecto a dichas invariantes.
- Fase 2: El resolutor, hace uso del arrastre libre para identificar una forma particular que toma la construcción al momento de arrastrar uno de sus puntos base, para ello se apoya en propiedades mínimas de la figura.
- Fase 3: En esta fase, el resolutor hace uso del arrastre de mantenimiento para hallar nuevos casos de la forma particular identificada en la Fase 2; de ser posible esto, se define a esta forma como la invariante inducida intencionalmente y se pasa a la Fase 4, de no ser posible se regresa a la Fase 2.
- Fase 4: Se busca alguna “condición” que permita controlar la forma particular identificada en las fases previas, estas condiciones (al menos una) son las invariantes observadas durante el arrastre. En ocasiones se hace necesario activar el rastro para para visualizar y realizar la descripción geométrica de la trayectoria que sigue el punto arrastrado, por lo general en esta fase se usa el arrastre con traza. Previo a la generación de la conjetura se hace necesario establecer un enlace condicional entre la invariante inducida intencionalmente con la última invariante observada durante el arrastre, en este punto, por lo general, se utiliza por segunda vez el arrastre de mantenimiento.
- Fase 5: Es la última fase del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura, aquí el resolutor comprueba el enlace condicional entre las dos invariantes por medio de una construcción robusta o suave, esto le permite declarar la conjetura.

Figura 17. Relación entre fases y elementos del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura



Fuente. Adaptado de Antonini y Baccaglioni-Frank, 2015

En ocasiones estas fases forman un proceso cíclico, pues luego de establecer la conjetura, el resolutor puede seguir explorando con la finalidad de encontrar nuevos casos que le permitan establecer nuevas conjeturas. En la figura 17 se muestra cómo se relaciona los elementos del modelo propuesto por Baccaglioni-Frank (2010) con las fases mencionadas por Antonini y Baccaglioni-Frank (2015).

3.4 Aspectos metodológicos

En la presente investigación nos preocupamos por la manera como los profesores de matemática responden a tareas de construcción asociadas a generación de conjeturas en un AGD, usados al desarrollar una secuencia de actividades que abordan tópicos de geometría, en específico el tema de cuadriláteros. En ese sentido, según lo afirmado por Bogdan y Biklen (1994) nuestra investigación es cualitativa.

Bogdan y Biklen afirman que una investigación cualitativa tiene cinco características:

1. En la investigación cualitativa la fuente directa de datos es el entorno natural, constituyendo al investigador en su instrumento principal.
2. La investigación cualitativa es descriptiva.
3. Las investigaciones cualitativas están más interesadas en el proceso que en el resultado del producto.
4. Las investigaciones cualitativas tienden a analizar los datos de forma inductiva.

5. El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo. (Bogdan y Biklen, 1994, p. 47-51).

En esta investigación los datos son recogidos directamente de los profesores a partir de observación participante, cuestionarios y equipos de grabación de audio y video los cuales permitirán describir las resoluciones de las actividades de cuatro profesores, quienes trabajaron en grupos de dos integrantes.

El objetivo es analizar el proceso de generación de conjeturas de profesores de matemática al resolver actividades de problemas abiertos en un entorno de geometría dinámica donde se movilizan nociones de cuadriláteros. El análisis de los argumentos presentados permite poner en manifiesto las características del Modelo de Mantenimiento de Arrastre-Conjetura propuesto por Baccaglioni-Frank, lo antes mencionado permite afirmar que nuestro interés está centrado en el proceso de generación de la conjetura.

El cuestionario y las grabaciones de audio y video tienen la finalidad de recoger las percepciones de los sujetos de estudio así como las acciones realizadas en el área de trabajo de GeoGebra con la finalidad de percibir lo que ellos experimentan al resolver actividades de problemas abiertos de geometría asociados a cuadriláteros propuestos, además tienen la finalidad de hacer reflexionar a los docentes respecto a su desenvolvimiento en el aula.

3.5 Estudio de caso

Dentro de los posibles métodos asociados a una investigación cualitativa, optamos por el estudio de caso, pues los supuestos teóricos de este método permiten abordar convenientemente todos los aspectos de nuestra investigación. Respecto al estudio de caso, Yin (2005) afirma:

Los estudios de caso son una estrategia preferida cuando se colocan cuestiones de tipo “cómo” y “por qué”, cuando el investigador tiene poco control sobre los acontecimientos y cuando el foco se encuentra en fenómenos contemporáneos insertados en algún contexto de la vida real (Yin, 2005, p. 19)

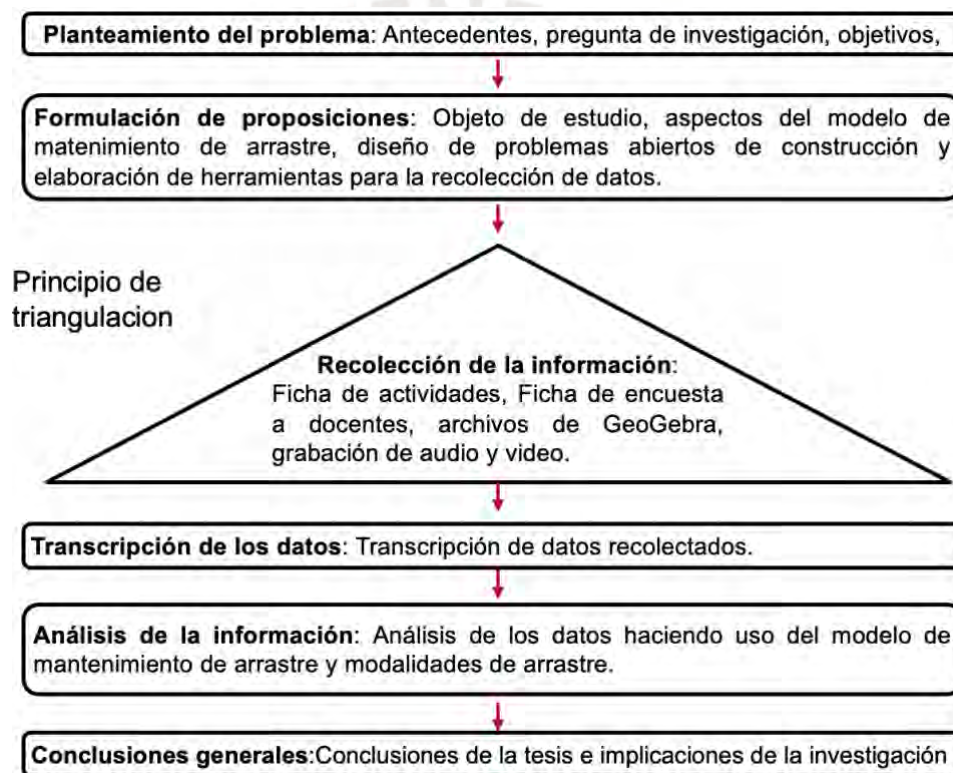
Así mismo, “los estudios de caso son utilizados para investigar cuestiones de aprendizaje de estudiantes, así como el conocimiento y las prácticas profesionales de profesores, programas de formación inicial y continua de profesores, ...” (Ponte, 2006, p. 3). Lo expuesto concuerda con el tipo de estudio que pretendemos realizar debido a que analizaremos las formulaciones de conjeturas, argumentos y procedimientos dados por profesores de Educación Secundaria.

En relación con las características de un estudio de caso, Yin (2005) destaca cinco de ellas:

1. Las cuestiones de estudio.
2. Las proposiciones de estudio.
3. La(s) unidad(es) de análisis.
4. La lógica que une los datos con las proposiciones.
5. Los criterios para comprobar los hallazgos. (Yin, 2005, p. 42).

Según Yin (2005), para el estudio de caso se considera los procedimientos metodológicos mostrados en la Figura 18.

Figura 18. Procedimientos metodológicos



Fuente. Adaptado de Espinoza et al., 2006

En nuestra investigación estamos interesados describir y analizar -a partir del análisis de los argumentos dados por profesores participantes- el proceso de generación de conjeturas que los profesores de matemática siguen al momento de resolver problemas abiertos de geometría asociados a los cuadriláteros con apoyo de GeoGebra; así, la cuestión de estudio está dada por la pregunta de investigación.

Una primera proposición de estudio es que “la descripción de los procedimientos y/o pasos seguidos por los profesores participantes al resolver problemas geométricos abiertos que

movilizan nociones de cuadriláteros permiten analizar el procedimiento de generación de conjeturas, en el sentido de Baccaglioni-Frank”; la revisión de los planes de estudio de centros de formación de profesores genera una segunda proposición de estudio “los profesores no están habituados a generar conjeturas a partir de la resolución de problemas abiertos de geometría, en particular cuadriláteros, debido a que como parte de su formación han sido entrenados solo a tareas de demostrar y/o probar teoremas geométricos tal y como la comunidad matemática las acepta”.

Como parte del trabajo se elaboran criterios el cual se basa en una exploración hipotética que permite clasificar los planteamientos de conjeturas, procedimientos y/o argumentos dados por los profesores, los cuales usamos para identificar las invariantes asociadas a las construcciones generadas.

La presente investigación se enfoca en un estudio de caso único pues el objeto de estudio se centra en una unidad de análisis. Por tanto, la unidad de análisis son los profesores de Matemática de Educación Secundaria que participan en esta formación. Por lo cual, permite tener una comprensión profunda a través de sus interacciones tanto con la actividad a través del software GeoGebra como con sus pares.

Descripción del caso

El caso en la presente investigación lo constituyen los profesores de Matemática de Educación Secundaria de diferentes colegios privados de Lima participantes de la formación.

La formación se llevó a cabo en modalidad sincrónica, por medio de la plataforma de Zoom. Los participantes de la investigación fueron cuatro, los cuales se comprometieron a participar de manera voluntaria, para efectos de la presente investigación los llamaremos Profesor A, Profesor B, Profesor C y Profesor D, en la tabla 6 describimos a cada uno de los profesores participantes.

Tabla 6

Descripción de los profesores participantes

Profesor	Edad	Años de experiencia docente	Formación profesional
A	41	12	Formación como matemático, tiene estudios en pedagogía.
B	41	15	Formación como físico y docente de matemática.
C	34	8	Formación como docente de matemática.
D	43	21	Formación como docente de matemática.

Para efectos de la investigación la elección de los grupos de 2 integrantes cada uno se realizó en función al nivel de experticia del uso del software GeoGebra y el tipo de clasificación de cuadriláteros que manejan. Los profesores A y B cuentan con experiencia docente en la educación básica regular y en centros de preparación preuniversitaria, en ambos han enseñado tópicos de geometría; los profesores C y D cuentan con experiencia docente en la educación básica regular y también han enseñado tópicos de geometría. Los cuatro docentes utilizan diversos recursos tecnológicos para impartir sus sesiones de clase.

En el siguiente capítulo mostramos la experimentación de nuestro trabajo.



Capítulo IV: PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo se presentan las actividades de problemas abiertos. También los resultados esperados de cada actividad y el análisis de las resoluciones propuestas por los profesores para las actividades 1 y 2.

4.1 Escenario de investigación

Con la finalidad de conocer la experiencia con el software GeoGebra, recabar información respecto a los conocimientos de cuadriláteros e implementar el uso de algunas herramientas de GeoGebra, los profesores participantes realizaron una actividad exploratoria en GeoGebra Classroom, esta actividad exploratoria estaba compuesta de un cuestionario docente y una Actividad 0 (Tabla 7).

Tabla 7

Actividad exploratoria

Actividad	Tiempo estimado	Objetivos
Cuestionario	10 minutos	Recoger información respecto a su experiencia con GeoGebra. Identificar el tipo de clasificación de cuadriláteros que conoce el profesor.
Actividad 0	20 minutos	Implementar herramientas de GeoGebra que serán usadas en la investigación.

Respecto a la experiencia de los profesores con el uso del GeoGebra, el profesor A diseña plantillas para sus clases, en especial para enseñar conceptos asociados a funciones; el profesor B también diseña recursos en GeoGebra para explicar conceptos matemáticos y/o realizar algunas exploraciones y modelaciones matemáticas; el profesor C hace uso de GeoGebra para representar funciones y analizar sus características; el profesor D hace uso de algunas plantillas para dinamizar sus actividades de clase; cabe señalar que el profesor B ha llevado un curso de formación en el uso de GeoGebra, los profesores C y D han llevado cursos de uso de tecnología donde han revisado el software GeoGebra aunque no han profundizado en el uso de sus herramientas.

Los cuatro profesores coinciden que una conjetura es una proposición que, tras algunos ensayos, se asume cierta pero que no ha sido probada mientras que un teorema es una proposición que ha sido demostrada formalmente.

El cuestionario contó con tres preguntas de desarrollo y cuatro preguntas de verdadero o falso las cuales permiten reconstruir la clasificación de cuadriláteros a partir de sus respuestas, se empleó como referencia el cuestionario que proponen Almouloud et al. (2017). Al respecto se obtuvo la siguiente información: Los profesores tienen una clasificación inclusiva de los cuadriláteros y los clasifican en paralelogramos, trapecios y trapecoides, los profesores A y B subdividen los paralelogramos en rectángulos, rombos y romboídes; los profesores C y D subdividen los paralelogramos como rectángulos y rombos, todos los profesores consideran al cuadrado como un tipo especial de rectángulo pero difieren al considerar a un cuadrado como un tipo especial de rombo. En adición es importante señalar que sólo el profesor A identificó al trapecio simétrico como un trapecoide.

La Actividad 0 permitió implementar las herramientas de GeoGebra “Relación” y “Limitar/liberar punto” además de mostrar cómo usar el “Rastro” para visualizar la trayectoria de un punto. Es importante mencionar que durante el desarrollo de la actividad los docentes se comunicaron con el investigador por medio del software de videoconferencia Zoom, software que los profesores utilizan en sus sesiones sincrónicas, el software fue elegido debido a que una de sus herramientas, Control remoto, les permite manipular de manera remota la computadora de cualquier participante de la reunión.

Con base en el análisis de las respuestas dadas por los profesores en la actividad exploratoria, para efectos de la investigación fueron agrupados en parejas (Tabla 8) en función al nivel de experticia del uso del software GeoGebra y el tipo de clasificación de cuadriláteros que manejan.

Tabla 8

Conformación de las parejas para la parte experimental

Pareja	Profesores	Características
1	A y B	-Crean recursos en GeoGebra, tienen un dominio de las herramientas de GeoGebra. -Identifican al romboide como un paralelogramo que no es rectángulo ni rombo.
2	C y D	-Hacen uso de plantillas creadas de GeoGebra, conocen diversas herramientas de GeoGebra. -No identifican al romboide como paralelogramo.

Cabe señalar que, para la realización del experimento, cada pareja contó con una laptop que tenía instalado el software GeoGebra Classic 5.0.426.0-d y se comunicaron por medio del

software de videoconferencia Zoom, el cual les permitió manipular el mismo archivo de GeoGebra por medio de la herramienta Control remoto.

4.2 Descripción de la secuencia de actividades

La secuencia de actividades consta de dos problemas abiertos de construcción (ver anexo 2), a continuación se detalla los objetivos de cada una de las actividades.

Tabla 9

Objetivos de las Actividades 1 y 2

Actividad	Objetivos	Tiempo
1	Construir un cuadrilátero ABCD a partir de rectas y simetría axial. Realizar conjeturas respecto a la relación entre la ubicación de sus vértices y la forma del cuadrilátero ABCD.	45 minutos
2	Construir un cuadrilátero ABCD a partir de rectas, simetrías y circunferencias. Realizar conjeturas respecto a la relación entre la ubicación de sus vértices y la forma del cuadrilátero ABCD.	45 minutos

Como se observa en la Tabla 9, cada una de las actividades tienen dos partes, la primera consiste en ubicar cuatro puntos en el plano, puntos A, B, C y D, siguiendo un determinado proceso para luego construir el cuadrilátero ABCD; para la segunda parte los profesores deberán explorar los diversos tipos de cuadriláteros en que puede transformarse ABCD a partir del arrastre de sus vértices.

Como parte del proceso de elaboración de las actividades se realizó un piloto, el mismo permitió corregir el cuestionario docente y la actividad 0, como parte del piloto se presentaron tres propuestas para la indicación final de las dos actividades, luego de una breve entrevista se eligió la expresión *“Respecto al cuadrilátero ABCD, realice conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que puede transformarse al arrastrar su(s) vértice(s), describiendo todas las formas posibles y las condiciones que la generan”* como indicación final común para las actividades, la elección se realizó debido a que estas tenían indicaciones que brindaba mayor claridad a los profesores reduciendo con ello la intervención del investigador.

A continuación presentamos las dos actividades y un análisis de todas las posibles situaciones que los profesores puedan encontrar durante la experimentación.

Actividad 1

Abra un archivo de GeoGebra y en la Vista gráfica realice la siguiente construcción:

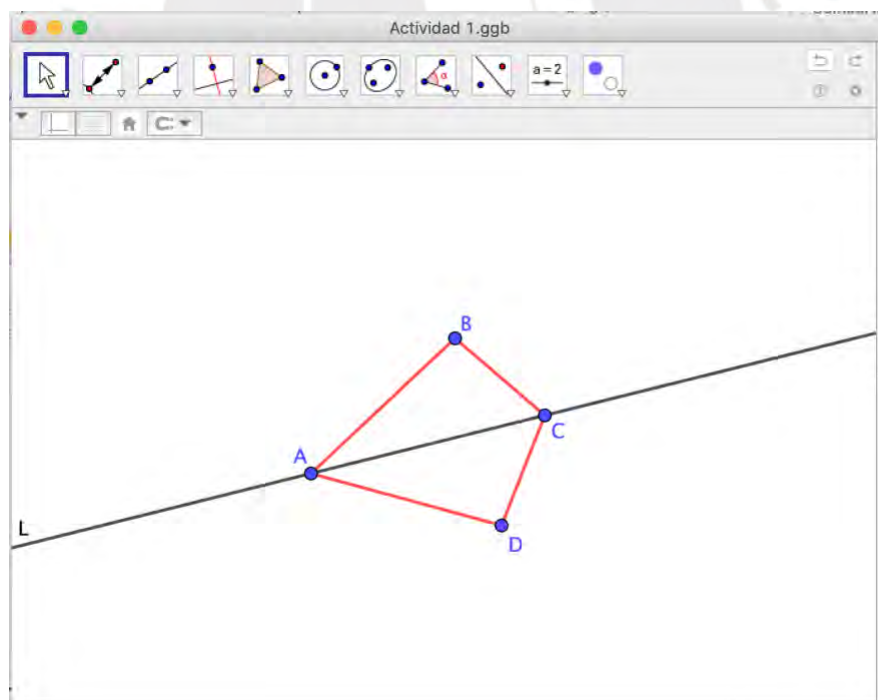
- Marque los puntos A y C.
- Construya la recta que pasa por A y C, denótela por L.
- Marque el punto B en uno de los semiplanos definidos por L.
- Construya el simétrico de B respecto a la recta L, denótelo por D.
- Construya el cuadrilátero ABCD.

¿Cómo se llama el cuadrilátero ABCD?

Respecto al cuadrilátero ABCD, realice conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros que puede transformarse al arrastrar su(s) vértice(s), describiendo todas las formas posibles y las condiciones que la generan.

Al realizar la construcción (figura 19), en general, se obtiene una construcción similar a la mostrada.

Figura 19. Cuadrilátero ABCD obtenido de la construcción



La figura construida tiene las siguientes propiedades.

- AB = DA;
- BC = CD;

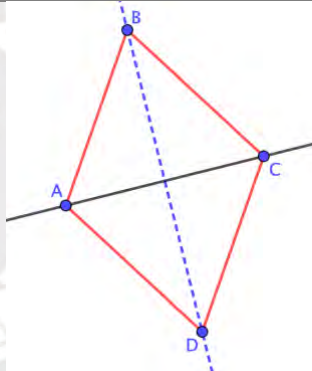
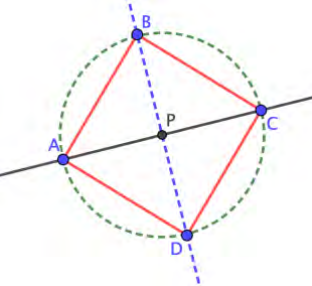
c) $AB \neq BC$.

El cuadrilátero construido tiene dos lados consecutivos congruentes, por tanto, es un trapecoide simétrico. De la construcción se deduce que $AB \neq CD$, por tanto ABCD no puede convertirse en un rectángulo de lados diferentes; además, $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ luego ABCD no puede ser un trapecio.

De la construcción se deduce que los puntos arrastrables son A, B y C, luego al arrastrar dichos puntos podemos convertir el trapecoide simétrico ABCD en un cuadrado o un rombo.

Tabla 10

Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice B

ABCD es	Descripción Geométrica de la trayectoria del vértice B
un rombo	Mediatriz de \overline{AC} . 
Un cuadrado	Situando D en la intersección de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia de centro P (punto medio de \overline{AC}) y radio PA. 

Como se describe en la Tabla 10, al arrastrar el vértice B (punto arrastrable) sobre cada una de las trayectorias descritas, el cuadrilátero ABCD se transforma en un cuadrilátero particular, así:

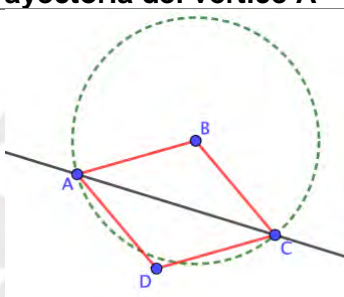
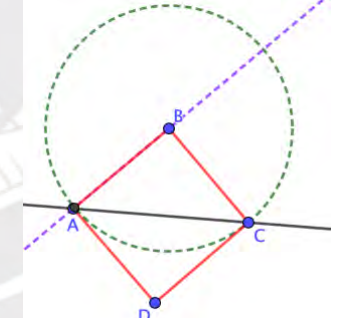
- Si B pertenece a la mediatriz de \overline{AC} , entonces $AB = BC$; por construcción se sabe que $AB = DA$ y $BC = CD$, luego $AB = BC = CD = DA$, es decir ABCD es un rombo.

- Si B se ubica en el punto de intersección de la mediatriz de \overline{AC} y la circunferencia de centro P (punto medio de \overline{AC}) y radio PA, entonces $m\angle ABC = 90^\circ$ y $AB = BC = CD = CA$, luego se concluye que ABCD es un cuadrado.

Luego, se analizan los tipos de cuadriláteros que se pueden obtener al arrastrar el vértice A.

Tabla 11

Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice A

ABCD es	Descripción Geométrica de la trayectoria del vértice A
Un rombo	Circunferencia de centro B y radio BC. 
Un cuadrado	Situando A en la intersección de la circunferencia de centro B y radio BC con la perpendicular a \overline{BC} que pasa por B. 

Como se muestra en la Tabla 11, si A se ubica en la circunferencia de centro B y radio BC, entonces $AB = BC$, dado que $AB = DA$ y $BC = CD$ (por construcción), se concluye que $AB = BC = CD = DA$, luego ABCD es un rombo.

Si A se ubica en la intersección de la perpendicular a \overline{BC} y la circunferencia de centro B y radio BC, entonces $m\angle ABC = 90^\circ$ y $AB = BC = CD = DA$, por tanto ABCD es un cuadrado.

Si arrastramos el vértice C obtendremos casos similares a los generados al arrastrar el vértice A.

A continuación, presentamos los posibles desarrollos asociados a la actividad 2.

Actividad 2

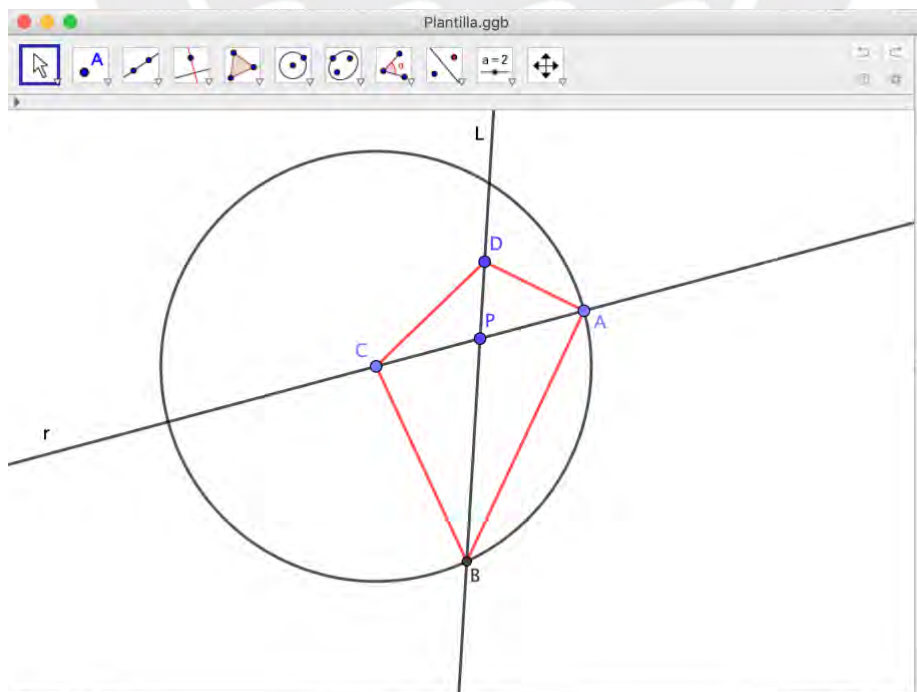
Abra un archivo de GeoGebra y en la Vista gráfica realice la siguiente construcción:

- Marque un punto fijo P en la Vista gráfica.
- Construya una recta r que pase por P .
- Sobre r , marque un punto C ($C \neq P$).
- Construya el simétrico de C respecto a P , denótelo por A .
- Marque el punto D en uno de los semiplanos determinados por r .
- Construya la recta L que pase por D y P .
- Construya una circunferencia de centro C y radio CA .
- Marque el punto B , punto de intersección de la circunferencia y la recta L que se encuentra en el semiplano definido por r que no contiene a D .
- Construya el cuadrilátero $ABCD$.

Realice conjeturas sobre los tipos de cuadriláteros en que puede transformarse, describiendo todos los casos posibles y las condiciones que generan cada tipo de cuadrilátero.

Luego de realizar la construcción (figura 20) siguiendo los pasos dados, obtenemos el siguiente resultado:

Figura 20. Cuadrilátero $ABCD$ obtenido de la construcción



De la construcción se extraen las siguientes propiedades geométricas:

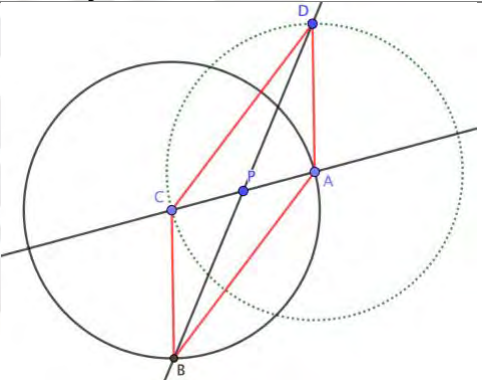
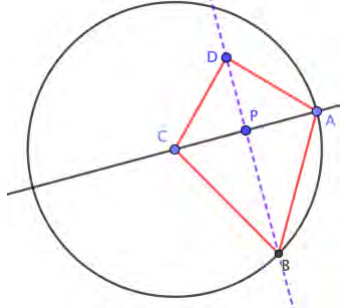
- a) $CP = PA$;
- b) $CA = CB$;
- c) $m \angle CAB = m \angle ABC$;
- d) $\triangle ACB$ es isósceles;
- e) B pertenece a la recta que pasa por P y D.

Del gráfico se identifica \overline{CA} como una de las diagonales del cuadrilátero ABCD, dado que $CA = CB$, se concluye que ABCD no puede ser cuadrado ni rectángulo, además, si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ se concluye que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, luego ABCD no puede ser trapecio. Así, los únicos cuadriláteros por explorar son los romboides, rombos y cuadriláteros simétricos. Cabe señalar que D es un punto base (punto arrastrable) y C es un punto semi arrastrable; arrastrando estos puntos podemos obtener algunos de los cuadriláteros mencionados.

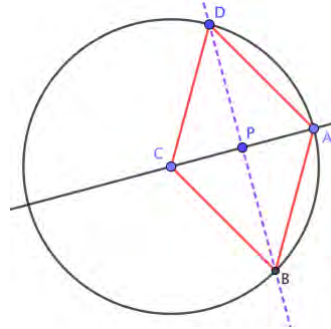
En la tabla 12 se detalla la descripción geométrica de la trayectoria para cada uno de los puntos D y C cuando se mantiene cada una de estas configuraciones. Se analiza el arrastre del punto D, para la exploración hipotética (por la ruptura de la trayectoria lineal).

Tabla 12

Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice D

ABCD es	Descripción Geométrica de la trayectoria del vértice D
un romboide	Una circunferencia de centro A y radio AC. 
un trapecoide simétrico	Mediatriz de \overline{AC} . 

un rombo
 Situando D en la intersección de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia de centro C y radio CA.



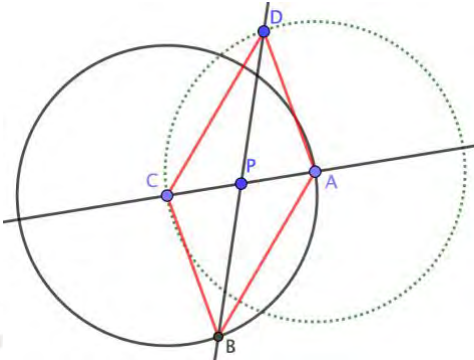
Las descripciones geométricas de la trayectoria descritas en la Tabla 12 no dependen de la posición del punto D (punto base arrastrado), por tanto, es posible redefinirlo sobre cada uno de ellos para obtener el cuadrilátero señalado por medio de una prueba de arrastre.

- Al redefinir el punto D a la circunferencia de centro A y radio AC se obtiene $AD = AC$, ahora probaremos que ABCD es un paralelogramo. Supongamos que $AB \neq DC$, luego existe un punto $B' \neq B$ en la circunferencia de centro C y radio CA tal que $AB' = DC$, si $AB' = DC$ entonces $\triangle DAC \cong \triangle B'CA$, como consecuencia de ello $\angle DAC \cong \angle B'CA$, lo cual implica que $\overline{AD} \parallel \overline{B'C}$ por tanto $AB'CD$ es un paralelogramo. Por propiedad de los paralelogramos las dos diagonales se cortan en su punto medio, sea O el punto de corte de las dos diagonales del paralelogramo $AB'CD$, $O \neq P$ debido a que $B' \neq B$, luego existen dos puntos medios para \overline{AC} (contradicción). La contradicción se evita siempre que $B' = B$, por tanto, se concluye que ABCD es un paralelogramo.
- Al redefinir el punto D a la mediatriz de \overline{AC} , por propiedad de la mediatriz $CD = DA$; por construcción, B pertenece también a la mediatriz de \overline{AC} , luego $BC = AB$, además las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} son perpendiculares, por tanto, ABCD es un cuadrilátero simétrico.
- Si D se ubica en la intersección de la circunferencia y la mediatriz, se verifica que $AB = BC = CD = DA$, luego ABCD es un rombo, esta configuración se ocurre en los dos puntos de corte de la circunferencia y la mediatriz.

A continuación se describirán los diversos tipos de cuadriláteros que se obtienen al arrastrar el vértice C. Primera configuración (Tabla 13)

Tabla 13

Posibles configuraciones para el cuadrilátero ABCD al arrastrar el vértice C

ABCD es	Descripción Geométrica de la trayectoria del punto C
un romboide	Situando C de modo que D pertenezca a la circunferencia de centro A y radio AC. 

Si arrastramos el vértice C, la única configuración posible es explorar que ABCD sea un paralelogramo, esto se debe a que C solo se desplaza sobre la recta l , y el vértice D depende de la relación existente entre las rectas l ; así, si D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC, entonces $CB = CA = AD$, luego $\overline{AD} // \overline{BC}$ y $DC = AB$ con lo cual se afirma que ABCD es un romboide.

4.3 Exploración hipotética

Con la finalidad de mostrar la manera como se pueden presentar las resoluciones de los profesores y su posterior análisis, presentamos la exploración hipotética de las actividades 1 y 2.

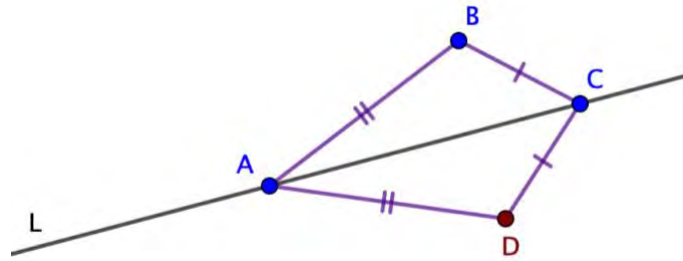
Actividad 1

Para la Actividad 1 analizaremos las posibles configuraciones que se obtienen al arrastrar el punto libre B (vértice B del cuadrilátero simétrico ABCD).

Configuración 1: El cuadrilátero ABCD se convierte en un rombo al arrastrar el vértice B.

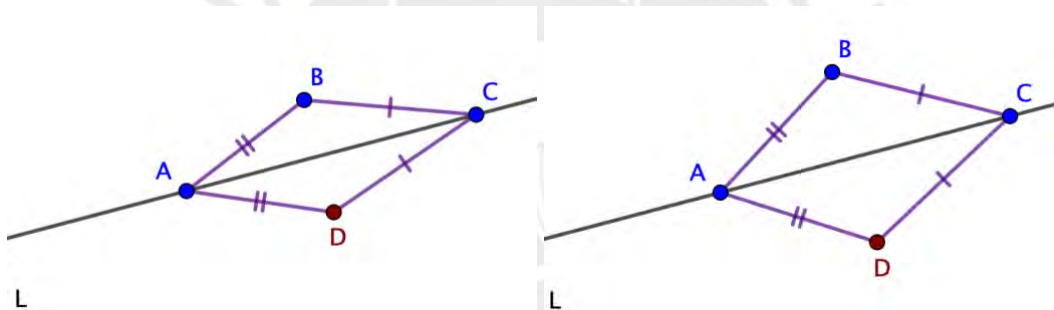
Como resultado de la construcción (figura 21) se obtiene el cuadrilátero simétrico ABCD, con $AB = DA$, $BC = CD$; además se observan tres puntos arrastrables, puntos A, B y C, y un punto dependiente, punto D.

Figura 21. Puntos arrastrables y dependientes para la Actividad 1



Debido a que la posición del vértice D depende de la posición del punto B, entonces la forma del cuadrilátero simétrico ABCD depende de la posición que tome el vértice B. Un punto de partida sería buscar que ABCD sea un rombo, esto se obtiene si $AB = BC$, usando el arrastre libre encontramos más de una posición para B de modo que ABCD sea un rombo (figura 22).

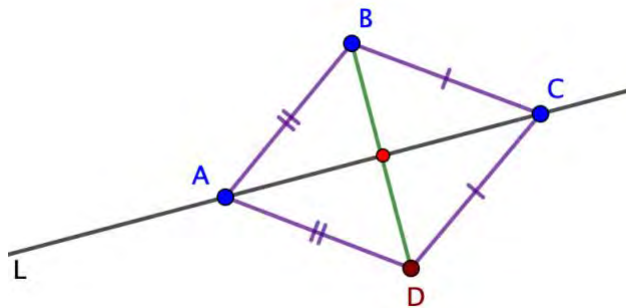
Figura 22. Identificación de la invariante inducida intencionalmente



Note que el cuadrilátero a mantener es el rombo, así la variable inducida intencionalmente es “ABCD es un rombo” (A), esto ocurre siempre que $AB = BC$ (A_1), esta relación se garantiza debido a que si $AB = BC$, entonces $AB = BC = CD = DA$ lo cual hace que ABCD sea un rombo.

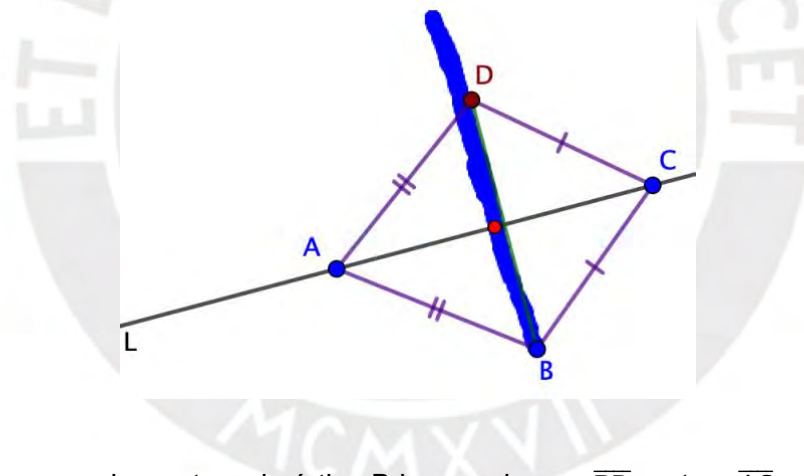
Si $AB = BC$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles, por tanto si trazamos \overline{BD} observamos que corta a \overline{AC} en su punto medio tal como se muestra en la Figura 23.

Figura 23. \overline{BD} corta a \overline{AC} en su punto medio



Observe que por propiedad de los rombos, las dos diagonales se cortan en su punto medio, por tanto la nueva condición a mantener es “ \overline{BD} corta a \overline{AC} en su punto medio” (A_2), esta condición permite a B ocupar distintas posiciones, así activamos el rastro para mostrar la trayectoria que sigue B, aplicando el arrastre con traza (figura 24).

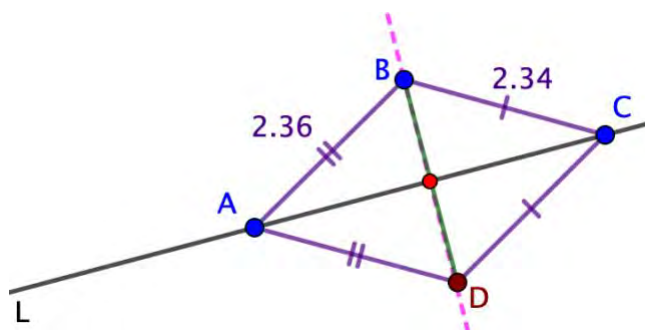
Figura 24. Trayectoria descrita al arrastrar B de modo que \overline{BD} corte a \overline{AC} en su punto medio



Se observa que al arrastrar el vértice B buscando que \overline{BD} corte a \overline{AC} en su punto medio, el rastro dejado es una recta que pasa por el punto medio de \overline{AC} , así se establece la primera invariante observada durante el arrastre: B pertenece a una recta que pasa por el punto medio de \overline{AC} (B_1), esta invariante ocurre como resultado de mantener la condición \overline{BD} corta a \overline{AC} en su punto medio (A_2).

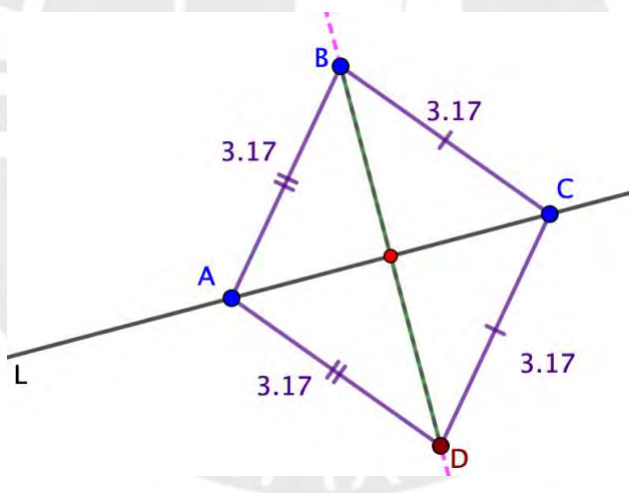
Para validar la hipótesis construimos la recta que pasa por B y el punto medio de \overline{AC} , en la siguiente figura se muestra la construcción realizada en GeoGebra.

Figura 25. Recta trazada por B y el punto medio de \overline{BC}



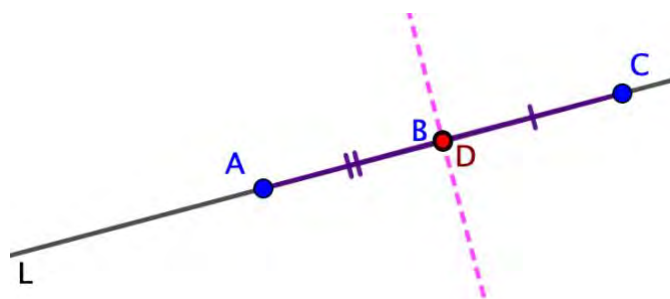
Al medir los lados \overline{AB} y \overline{BC} se observa que $AB \neq BC$, luego ABCD no es un rombo por tanto no ha pasado la prueba de arrastre (figura 25). Por propiedad se sabe que en todo rombo las diagonales son perpendiculares, entonces la recta buscada debería ser perpendicular a \overline{AC} y pasar por su punto medio, esto permite establecer y precisar la invariante observada durante el arrastre: "B pertenece a la mediatriz de \overline{AC} " (B_2), en la figura 26 se muestra esta nueva construcción.

Figura 26. B pertenece a la mediatriz de \overline{AC}



Al vincular el vértice B a la mediatriz de \overline{AC} se observa que, para cualquier posición que ocupe B se tiene que ABCD es un rombo, esto permite validar por medio de la prueba de arrastre la hipótesis B_2 . Cabe señalar que si B se ubica en el punto medio de \overline{AC} , los puntos A, B, C y D están alineados, a continuación revisamos este caso.

Figura 27. Condición para que A, B, C y D estén alineados



En la Figura 27 se observa que si B se ubica en el punto medio de \overline{AC} entonces $B \in L$, este caso está descartado debido a que por construcción, B se ubica en uno de los semiplanos definidos por L. A continuación revisaremos el proceso seguido:

- “ABCD es un rombo” (A), siempre que “ $AB = BC$ ” (A_1), para ello es necesario que “ \overline{BD} corta a \overline{AC} en su punto medio” (A_2), las dos invariantes mostradas controlan la invariante inducida durante el arrastre (A), lo expuesto permite identificar una cadena de invariantes que se relacionan de manera lógica: $A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A$.
- Si “B pertenece a la mediatriz de \overline{AC} ” (B_2), podemos afirmar que “B pertenece a una recta que pasa por el punto medio de \overline{AC} ”, observamos la existencia de una relación causal entre B_2 y B_1 . Así, podemos establecer una segunda cadena de invariantes, en este caso la relación es causal, $B_2 \rightarrow B_1$.
- En la construcción realizada en GeoGebra, notamos que A_2 viene a ser el invariante pivote debido a que, según Antonini y Baccaglioni-Frank (2016) “la presencia de B_1 ocurre simultáneamente al mantener A_2 ”, así $B_1 \rightarrow A_2$.

La siguiente tabla resume la secuencia de invariantes identificadas:

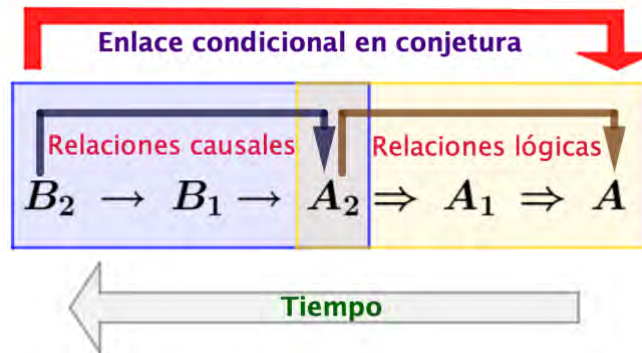
Tabla 14

Secuencia de invariantes identificadas para la Actividad 1. Rombo

B_2	\rightarrow	B_1	\rightarrow	A_2	\Rightarrow	A_1	\Rightarrow	A
B pertenece a la mediatriz de \overline{AC}		B pertenece a una recta que pasa por el punto medio de \overline{AC}		B pertenece a la mediatriz de \overline{AC}		$AB = BC$		ABCD es rombo

La secuencia de invariantes mostradas en la Tabla 14 pueden relacionarse por medio de la invariante pivote (A_2), en la siguiente figura se muestra esta relación según el modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura propuesto por Baccaglioni-Frank (2010, 2019).

Figura 28. Cadenas de invariantes de la Actividad 1 unidas por la invariante pivote



Fuente. Adaptado de Baccaglioni-Frank 2010

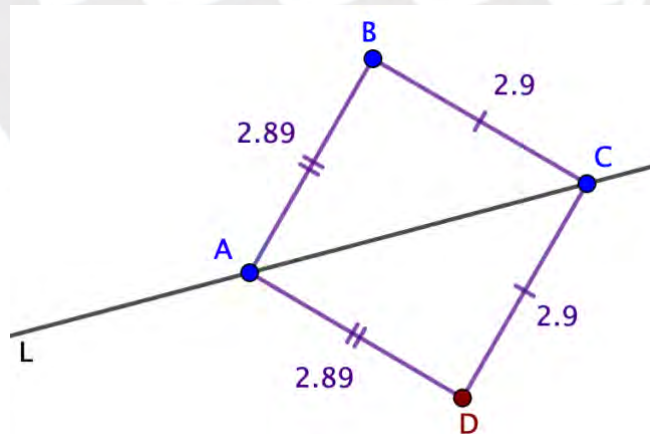
La Figura 28 permite establecer la conjetura buscada:

“Si B pertenece a la mediatriz de \overline{AC} , entonces ABCD es un rombo”

Configuración 2: El cuadrilátero ABCD se convierte en un cuadrado al arrastrar el vértice B.

Una configuración interesante es el caso del cuadrado, por medio del arrastre de mantenimiento buscamos que los cuatro lados tengan la misma longitud (figura 30).

Figura 29. Actividad 1: ABCD es un cuadrado

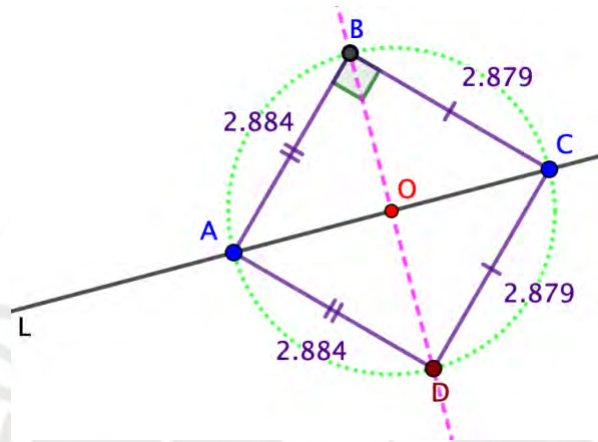


Por medio del arrastre se busca que ABCD sea un cuadrado, esto ocurre si $AB = BC = CD = DA$; así la nueva invariante inducida durante el arrastre es “ABCD es un cuadrado” (A), esto ocurre si $AB = BC = CD = DA$ (A_1). Del caso 1 se sabe que ABCD tiene los cuatro lados iguales siempre que B pertenece a la mediatriz de \overline{AC} , así obtenemos la invariante observada durante el

arrastre “B pertenece a la intersección de la recta mediatriz y la circunferencia de centro O y radio OA” (B_1)

Para que ABCD sea un cuadrado es necesario que sus ángulos interiores sean rectos; se sabe que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, así, si B pertenece a la circunferencia de centro O, punto medio de \overline{AC} , y radio OA obtendremos que $m\angle ABC = 90^\circ$.

Figura 30. Prueba suave de la condición buscada para que ABCD sea cuadrado



Si el vértice “B se ubica en el punto de intersección de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia de centro O y radio OA” (B_2), el cuadrilátero ABCD sería un cuadrado. Es importante señalar que no es posible en GeoGebra limitar el vértice B al punto de intersección, por ello la verificación se realizará por medio de una prueba de arrastre suave (figura 31). A continuación revisaremos el proceso seguido:

- “ABCD es un cuadrado” (A), siempre que “ $AB = BC = CD = DA$ ” (A_1), lo expuesto permite identificar dos invariantes que se relacionan de manera lógica: $A_1 \Rightarrow A$.
- Si “B pertenece a la mediatriz de \overline{AC} ” (B_1), se garantiza que $AB = BC = CD = DA$, luego si “B se ubica en el punto de intersección de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia de centro O y radio AC” (B_2), agregamos la condición de perpendicularidad entre los lados del cuadrilátero ABCD; así, observamos la existencia de una relación causal entre B_2 y B_1 . Así, podemos establecer una segunda cadena de invariantes, en este caso la relación es causal, $B_2 \rightarrow B_1$.
- En la construcción realizada en GeoGebra, notamos que A_1 viene a ser el invariante pivote debido a que, según Antonini y Baccaglioni-Frank (2016) “la presencia de B_1 ocurre simultáneamente al mantener A_2 ”, así $B_1 \rightarrow A_1$.

En la siguiente tabla se resume la secuencia de invariantes identificadas:

Tabla 15

Secuencia de invariantes identificadas para la Actividad 1. Cuadrado

B_2	\rightarrow	B_1	\rightarrow	A_1	\Rightarrow	A
B se ubica en el punto de intersección de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia de centro O y radio AC		B pertenece a la mediatriz de \overline{AC}		$AB = BC = CD = DA$		ABCD es un cuadrado

Según el método de mantenimiento de arrastre-conjetura (tabla 15), la conjetura buscada sería “Si B se ubica en el punto de intersección de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia de centro O y radio OA, entonces ABCD es un cuadrado”.

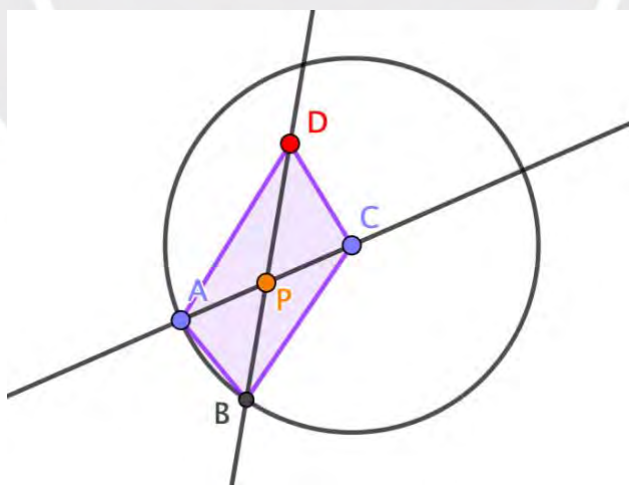
Actividad 2

Para la Actividad 2 analizaremos dos posibles soluciones al arrastrar el vértice D: obtener un romboide u obtener un trapecio simétrico.

Configuración 1: El cuadrilátero ABCD se convierte en un romboide

De la construcción se observa un punto arrastrable, punto D, un punto semi arrastrable, punto C, dos puntos dependientes, puntos A y B y un punto fijo, punto P.

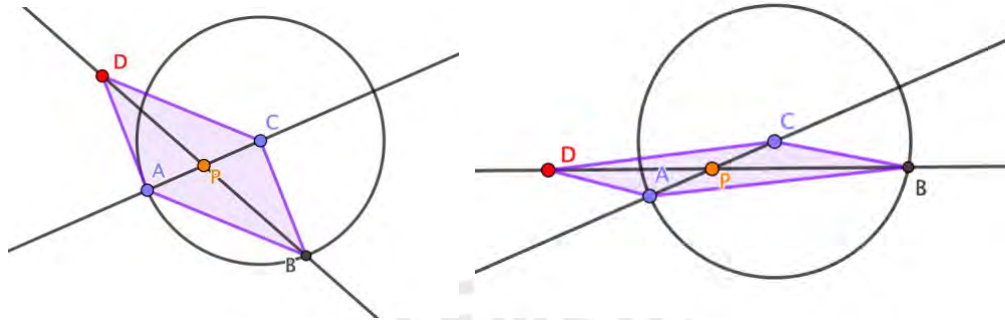
Figura 31. *Puntos arrastrables, semi arrastrables y fijos para la actividad 2*



La forma del cuadrilátero ABCD depende de la posición que ocupe el vértice D, luego se debe arrastrar D buscando alguna forma conocida para el cuadrilátero ABCD (figura 31). Cabe señalar que P es punto medio de \overline{AC} , luego una primera propiedad a buscar sería que P también

sea punto medio de \overline{BD} , así obtenemos que ABCD es un romboide, debido a que el romboide es la figura a mantener, el romboide es la invariante inducida intencionalmente, la denotaremos por A.

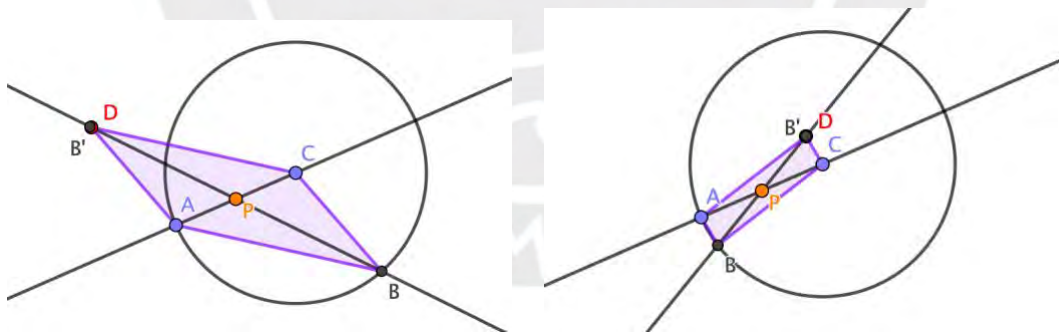
Figura 32. Identificación de la invariante inducida intencionalmente



Note que para que ABCD sea romboide (A) es necesario que P sea punto medio de \overline{BD} (A_1), esta relación se garantiza debido a que por propiedad del romboide sus dos diagonales se cortan en su punto medio.

Si P es punto medio de \overline{BD} , entonces $BP = PD$, luego lo que se debe buscar es que se cumpla $BP = PD$ (A_2), la condición mencionada puede obtenerse hallando el simétrico de B respecto a P, denotado por B' , luego si $P = B'$, entonces $BP = PD$.

Figura 33. Condición para que ABCD sea un romboide

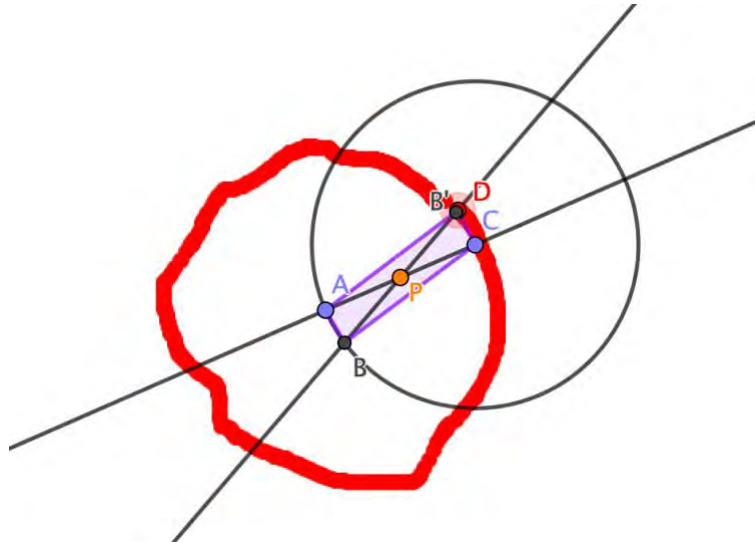


Observamos que ABCD es un romboide, siempre que el simétrico de B respecto a P, denotado por B' , y el punto D ocupen la misma posición, en otras palabras, $B' = D$ (A_3), esta última invariante controla el hecho que ABCD sea paralelogramo, configuración interesante para el cuadrilátero ABCD.

En este punto estamos estableciendo una conjetura: “Sea B' el simétrico de B respecto a P, si $B' = D$, entonces ABCD es un romboide”.

Observamos que B' y D ocupan la misma posición en diferentes puntos del plano, para ello es necesario activar el rastro del punto D con la finalidad de visualizar estas posiciones.

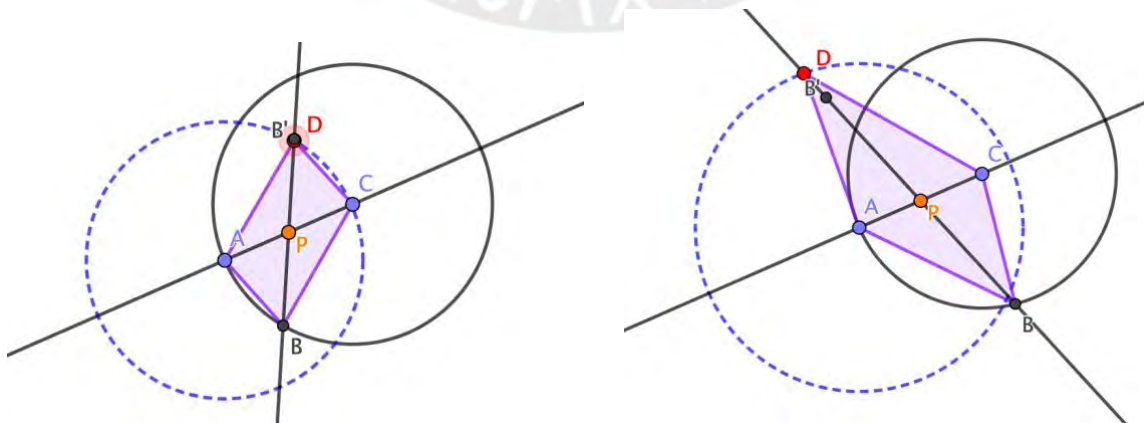
Figura 34. Trayectoria descrita al arrastrar D buscando mantener $B' = D$



Al activar el rastro del punto D, observamos que si buscamos obtener la condición $B' = P$, la trayectoria descrita por D se asemeja a una circunferencia de centro A, así se establece la primera Invariante Observada durante el arrastre, a la cual denotaremos como B_1 ; esta invariante es percibida al momento de arrastrar D y ocurre simultáneamente con la condición $B' = P$ (A_3).

Para verificar esta hipótesis, se construye una circunferencia de centro A y radio AD, si modificamos la posición del punto D, no siempre se obtiene que $B' = P$, por tanto, ABCD no siempre es un romboide.

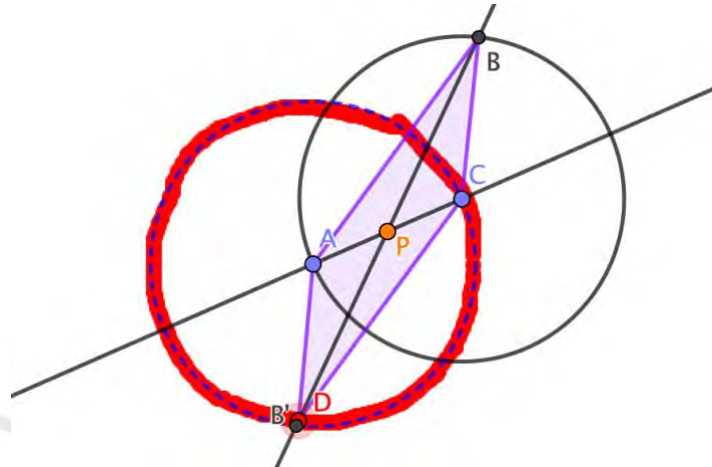
Figura 35. Circunferencia de centro A y radio AD



Cabe señalar que la figura no ha superado la prueba de arrastre pues ABCD no siempre es un romboide.

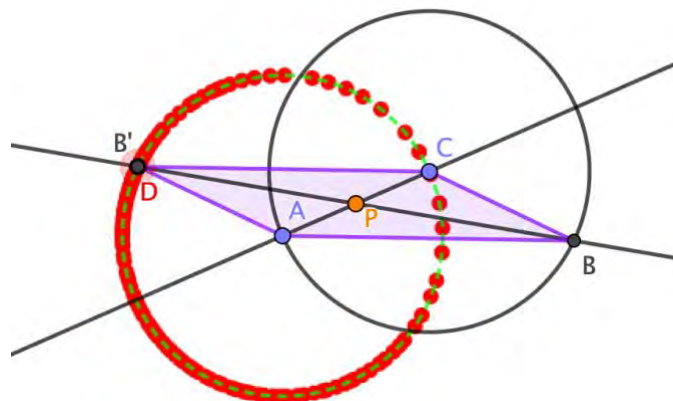
A continuación, se construye la circunferencia de centro A y radio AB' , se observa que si B pertenece a la circunferencia se cumple que $B' = D$, así identificamos una nueva invariante, si D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AB' (B_2), entonces $B' = P$.

Figura 36. D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AB'



B' es un punto que depende de la posición del punto B, por ello no es posible asociar la posición del punto D a la circunferencia trazada (por ello se tiene una prueba de arrastre suave), note que la circunferencia trazada pasa por el punto C, así es posible redefinir la circunferencia de centro A y radio AB' como la circunferencia de centro A y radio AC.

Figura 37. D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC



Al limitar el punto D a la circunferencia de centro A y radio AC se observa que independientemente de la posición que ocupe D, $B' = D$, con ello se obtiene una prueba de arrastre robusta que confirma la hipótesis, así, afirmamos que si B pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC (B_3), $B' = D$.

Cabe señalar que D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC siempre que $BP = PD$, lo cual confirma que ABCD sea un romboide. En este punto podemos observar lo siguiente:

- “ABCD es un romboide” (A), siempre que “P sea punto medio de \overline{BD} ” (A_1), para ello es necesario que “ $BP = PD$ ” (A_2), esto ocurre si “el simétrico de B respecto a P, denotado por B' , y el punto D ocupen la misma posición, $B' = P$ ” (A_3), lo expuesto permite identificar una cadena de invariantes que se relacionan de manera lógica: $A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A$.
- Si “B pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC” (B_3) ocasiona que en la construcción realizada “D pertenezca a la circunferencia de centro A y radio AB” (B_2), con ello podemos afirmar que “D se encuentra en una circunferencia de centro A”, observamos la existencia de una relación causal entre B_3 , B_2 y B_1 . Así, podemos establecer una segunda cadena de invariantes, en este caso la relación es causal, $B_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1$.
- En la construcción realizada en GeoGebra, notamos que A_3 viene a ser el invariante pivote debido a que, según Antonini y Baccaglioni-Frank (2016) “la presencia de B_1 garantiza simultáneamente la existencia de A_3 ”, así $B_1 \rightarrow A_3$.

La siguiente tabla resume la secuencia de invariantes identificadas:

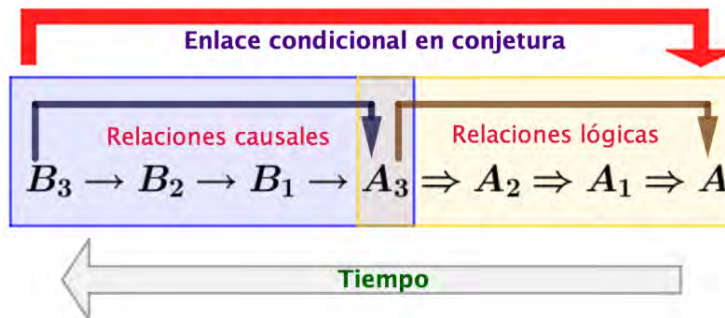
Tabla 16

Secuencia de invariantes identificadas para la actividad 2. Romboide

B_3	\rightarrow	B_2	\rightarrow	B_1	\rightarrow	A_3	\Rightarrow	A_2	\Rightarrow	A_1	\Rightarrow	A
$D \in C_{(A,AC)}$		$D \in C_{(A,AB)}$		$D \in C_{(A,r)}$		$B' = D$		$BP = PD$		P es punto medio de \overline{BD}		ABCD es romboide

La secuencia de invariantes identificados en la propuesta de resolución puede relacionarse haciendo uso de la invariante pivote (A_3), así en la siguiente figura se muestra esta relación según Modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura propuesto por Baccaglioni-Frank (2010).

Figura 38. Cadenas de invariantes unidas por la invariante pivote



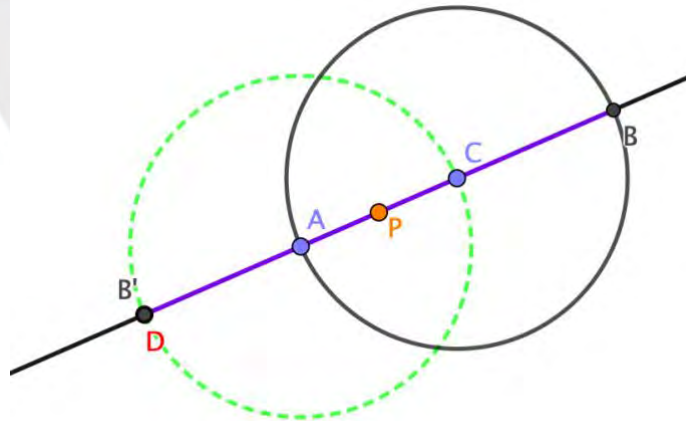
Fuente. Adaptado de Baccaglioni-Frank, 2010

La Figura 38 permite establecer la conjetura buscada:

“Si D pertenece a la circunferencia de centro A y radio AC, entonces ABCD es un romboide”

Es importante recalcar que si D pertenece a la recta r, los puntos A, B, C y D están alineados, luego ABCD no es cuadrilátero.

Figura 39. A, B, C y D son puntos colineales si $D \in r$



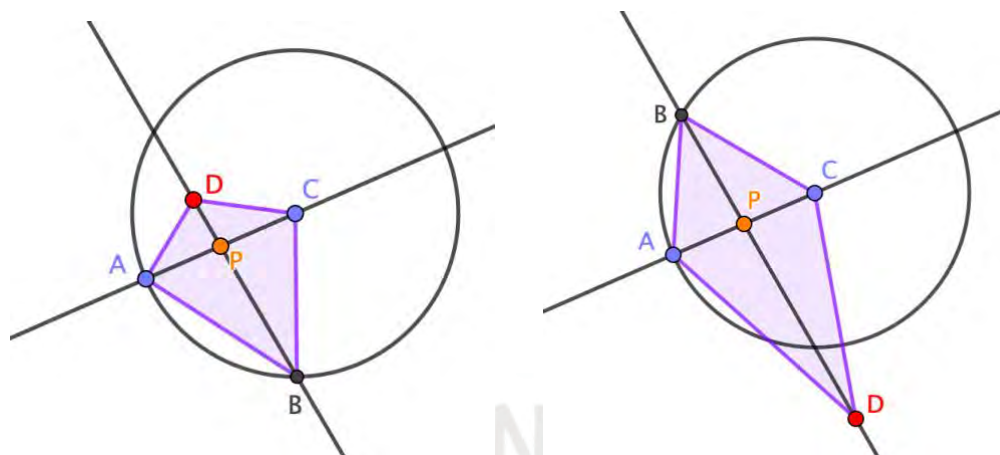
Excluyendo este caso, tenemos la conjetura buscada:

“Para la construcción dada, Si $D \in C(A, AC)$ y $D \notin r$, entonces ABCD es un romboide”

Configuración 2: El cuadrilátero ABCD se convierte en un trapecio simétrico.

Otra configuración interesante sería, buscar que ABCD sea un trapecio simétrico.

Figura 40. ABCD es un trapecio simétrico

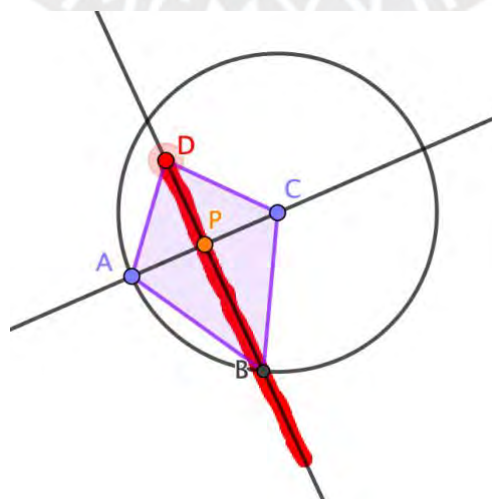


Un segundo caso es considerar como variante inducida intencionalmente que ABCD sea un trapecio simétrico (A), esto ocurre siempre que $AD = DC$ (A_1). Si $AD = DC$, entonces $\triangle ACD$ es un triángulo isósceles, dado que P es punto medio de \overline{AC} , entonces $\overline{DP} \perp \overline{AC}$, dado que $B \in l$, entonces $AB = BC$, luego ABCD es un trapecio simétrico, esto justifica el enlace condicional $A_1 \Rightarrow A$.

En este punto se puede establecer una nueva invariante, $\overline{DP} \perp \overline{AC}$ (A_2), cabe señalar que si $\overline{DP} \perp \overline{AC}$, entonces $AD = DC$, luego se verifica la existencia del enlace condicional $A_2 \Rightarrow A_1$.

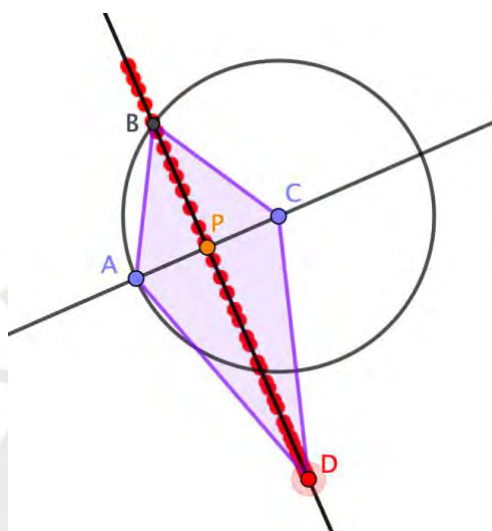
Para identificar la trayectoria seguida del punto D cuando se verifica A_2 , activamos el rastro del punto D, así por medio del arrastre de mantenimiento con rastro identificamos la primera invariante observada en el arrastre, D pertenece a una recta (B_1).

Figura 41. Trayectoria descrita por el punto D buscando mantener que $AD = DC$



Cabe señalar que B_1 y A_2 ocurren simultáneamente, esto verifica la relación causal $B_1 \rightarrow A_2$. Ahora es momento de identificar la recta descrita por el rastro dejado por D, se sabe que $\overline{DP} \perp \overline{AC}$ (A_2), luego la recta descrita es la recta mediatriz de \overline{AC} .

Figura 42. D pertenece a la mediatriz de \overline{AC}



Identificamos la siguiente invariable observada durante el arrastre: D pertenece a la mediatriz de \overline{AC} (B_2), esta invariante puede ser probada de manera robusta construyendo en GeoGebra la mediatriz de \overline{AC} y limitando D a la mediatriz construida, al arrastrar D observamos que ABCD es un trapecio simétrico, así esta relación pasa la prueba de arrastre.

La siguiente tabla resume la secuencia de invariantes identificadas.

Tabla 17

Secuencia de invariantes identificadas para la actividad 2. Trapecioide simétrico

B_2	\rightarrow	B_1	\rightarrow	A_2	\Rightarrow	A_1	\Rightarrow	A
D pertenece a la mediatriz de \overline{AC}		D pertenece a una recta		$\overline{DP} \perp \overline{AC}$		$AD = DC$		ABCD es un trapecioide simétrico

En la construcción realizada en GeoGebra, notamos que A_2 viene a ser el invariante pivote debido a que B_1 ocurre simultáneamente con A_2 , así $B_1 \rightarrow A_2$.

Aplicando el enlace condicional de la conjetura concluimos que:

“Para la construcción dada, Si D pertenece a la mediatriz de \overline{AC} , entonces ABCD es un trapecioide simétrico”

Luego de realizar la exploración hipotética para el caso de arrastrar el vértice D en la Actividad 2, presentamos el análisis de parte experimental.

4.4 Análisis de las actividades

Para la parte experimental se han propuesto dos problemas abiertos de construcción, debido a que usamos aspectos del estudio de caso como método de investigación, las conjeturas planteadas en las resoluciones propuestas por las parejas de profesores representan las unidades de análisis. En todas las actividades primero deben construir un cuadrilátero, luego establecer las condiciones que lo transforman en un determinado tipo de cuadrilátero para finalmente establecer una conjetura; el uso de GeoGebra servirá como recurso para explorar, conjeturar y probar.

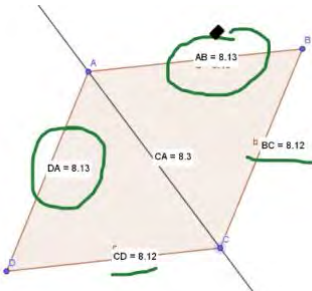
El análisis de las actividades se realizará con base en las resoluciones propuestas por cada pareja de profesores, los mismos se evidencian en los extractos de los diálogos entre ellos, sus interacciones con el software y la solución presentada en la ficha de trabajo. Con la finalidad de facilitar la revisión de los mismos, haremos uso de la siguiente notación: X se utiliza para señalar al profesor X, **X** se utiliza cuando el profesor está manipulando GeoGebra, las declaraciones del profesor X están escritas en *fuerza cursiva* y en estilo de fuerza normal aparecen las descripciones realizadas por el investigador respecto al trabajo del profesor X, I se utiliza para las intervenciones del investigador. Las invariantes inducidas intencionalmente se denotarán como A_n , donde n indica el orden en el que aparece; de igual manera B_n representa a la invariante observada durante el arrastre que aparece en el orden n . A continuación presentamos el análisis de la actividad 1.

4.4.1 Análisis de la actividad 1

Para el desarrollo de la actividad 1 los profesores disponían de 45 minutos, a continuación, se muestra extractos de la conversación entre la pareja de docentes, así como las evidencias gráficas y/o escritas de su desarrollo. En la Tabla 19 se muestra el primer extracto de la resolución propuesta por la pareja 2.

Tabla 18

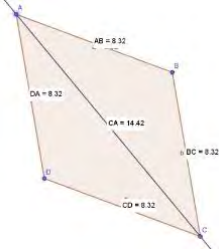
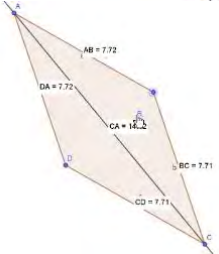
Identificación de las invariantes de la construcción de la Actividad 1 – pareja 2

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
D ¿Qué clase de cuadrilátero es ABCD?		Arrastran los vértices del cuadrilátero buscando identificar sus propiedades
C Creo que si lo movemos tenemos un rombo.		Identifican las propiedades del cuadrilátero construido, pero lo clasifican incorrectamente (fase 1)
C Así tal cual como está ¿Qué cuadrilátero es?		
D Es un rombo, un romboide, ...		
C Parece un rombo.		
D Marca los lados del cuadrilátero (en la pantalla de Zoom) que tienen igual medida.		

Luego de realizar la construcción, los profesores C y D buscan clasificar al cuadrilátero ABCD a partir de la identificación de sus propiedades (invariantes), así, buscando identificar sus propiedades hacen uso de la herramienta “Distancia o Longitud” de GeoGebra para medir los lados del cuadrilátero esto facilita que al arrastrar sus vértices reconozcan que $AB = DA$ y $BC = CD$ pero se equivocan al señalar que ABCD sea un rombo (ABCD es un trapecio simétrico); en este punto es importante señalar que, de acuerdo al cuestionario aplicado en la Actividad 0, la pareja de profesores no reconoce al trapecio simétrico como un tipo de cuadrilátero.

Tabla 19

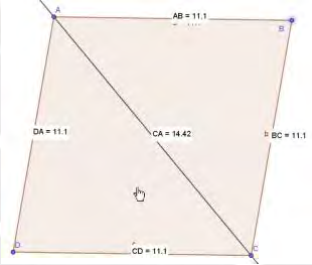
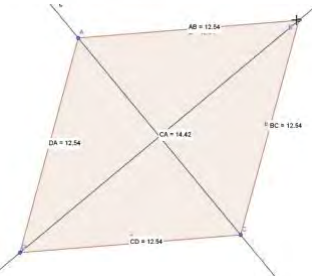
Identificación de la invariante inducida intencionalmente

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
C ¿Habrá algún punto donde se convierta en un rombo?		Hacen uso del arrastre libre para identificar la configuración particular: ABCD es un rombo (fase 2).
C Allí tenemos un rombo		
D Ahí tenemos un rombo.		Buscan mantener la forma del rombo guiándose de las longitudes de sus lados (fase 3).
C Arrastra el vértice B buscando obtener un nuevo rombo, se guía de las medidas de los lados del cuadrilátero		
C 7,72 y 7,71... forma debe haber		
D ¡Ese es un rombo, sí!		

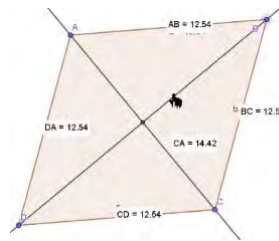
El profesor C está manipulando el software, hace uso del arrastre libre para explorar posibles formas particulares que puede tomar el cuadrilátero ABCD, así, identifican al rombo como el tipo de cuadrilátero, luego buscan formar rombos de diferentes medidas, así la forma que buscan mantener por medio del arrastre es la del rombo, esto permite identificar que la invariante inducida intencionalmente es “ABCD es un rombo”, la denotamos por A, en este punto los profesores se encuentran en la fase 3 del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura. Buscando mantener la forma del rombo, los profesores, arrastran el punto B de modo que las longitudes de los lados AB y BC del cuadrilátero sean iguales, en este momento se observa que prevalece el arrastre de mantenimiento, así identificamos una nueva invariante “AB = BC” (A₁), el cumplimiento de esta invariante garantiza que ABCD sea un rombo, lo mencionado permite asegurar que la pareja de profesores se encuentra en la fase 4 del modelo tal como se muestra en la siguiente Tabla.

Tabla 20

Condiciones para que ABCD sea un rombo

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>D ¿Qué vamos a seguir buscando?</p> <p>C Otro rombo</p> <p>D Ah, de otras medidas</p> <p>C Si</p> <p>D Haber, trata que $AB = BC$, se va a transformar en un rombo... Si $AB = BC$, se va a transformar en un rombo</p> <p>C Claro</p> <p>D Te diste cuenta que se transformó en un rombo</p>		<p>Identifican una condición para que ABCD sea un rombo: $AB = BC$ (fase 4).</p>
<p>C Si hubiese una recta aquí, es decir otra recta</p> <p>D Que pase por donde</p> <p>C Que pase por la ubicación actual de B y D</p> <p>D Ah, ya</p> <p>C Y se ata ese punto a esa recta, tendría que, más grande o más pequeño, seguir siendo rombo, ¿no?</p> <p>D Si</p> <p>C No sé, y allí tengo la duda, pero tengo la impresión de que esa recta debe pasar por el punto medio de \overline{AC}</p> <p>D Nos permiten hacer un trazo auxiliar</p> <p>I Si</p> <p>C Traza una recta que pasa por B y D.</p>		<p>Identifican una nueva condición: La recta que pasa por B y D pasa por el punto medio de \overline{AC} (A₂).</p>

- ...
 D Primero pon el punto medio de \overline{AC}
 C Ya
 D Ahora pon el punto medio de \overline{BD}
 C Ya
 D ¡Es el mismo!
 C Intenta hacer que ambos puntos coincidan



Identifican otra condición: Los puntos medios de \overline{AC} y \overline{BD} coinciden (A_3)

Después de identificar la primera condición, los profesores siguen explorando nuevas condiciones que les permitan formar el rombo, en un momento, luego de trazar la recta que pasa por los puntos B y D, el profesor C dice: *“Tengo la impresión que esa recta debe pasar por el punto medio de \overline{AC} ”*.

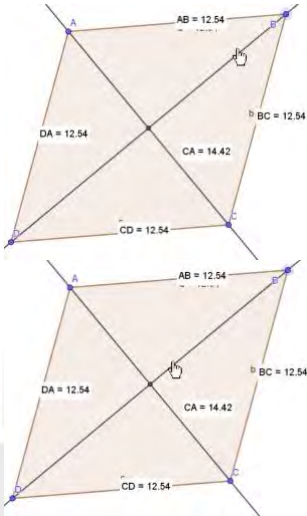
En este punto es importante señalar que tal situación está en la mente del solucionador lo cual es evidencia de un proceso ascendente, el mismo es puesto en práctica al arrastrar B de modo que la recta pase por el punto medio de \overline{AC} , evidenciando con ello la presencia del proceso descendente, cumpliéndose el proceso abductivo por parte de los solucionadores, lo cual permite identificar una nueva invariante *“La recta que pasa por B y D pasa por el punto medio de \overline{AC} ”* a la cual denotaremos por A_2 .

Esta condición es descartada debido a que al arrastrar el vértice B no necesariamente la recta pasa por el punto medio \overline{AC} , al respecto C dice *“lo que pasa es que esta recta se puede mover libremente, es una mala recta”*, observación confirmada por D *¡No queda en el punto medio!*

Por ello buscan adaptar la condición propuesta, así marcan los puntos medios de \overline{AC} y \overline{BD} y haciendo uso del arrastre de mantenimiento buscan que los puntos medios coincidan al arrastrar el vértice B, nuevamente se observa que la pareja de docentes pasan por el proceso abductivo, en este caso el proceso ascendente se observa al momento de realizar la construcción de los puntos medios y el proceso descendente se visualiza cuando C busca que ambos coincidan, concluyendo que la hipótesis es rechazada, así tenemos una tercera invariante inducida A_3 : *“Los puntos medios de \overline{AC} y \overline{BD} coinciden”*.

Tabla 21

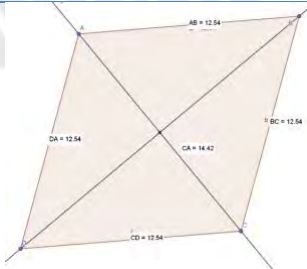
Explicitación de la descripción geométrica de la trayectoria que sigue B

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>D ¿Tú sabes lo que estás buscando?</p> <p>C Haber, tengo la idea que, ahora esta perfecto, esta donde queremos (hace referencia al rombo formado).</p> <p>D Ya</p> <p>C El problema es que la recta se está moviendo, si no se moviese, creo que en cualquier punto que pongamos B, esta distancia (AB) y esta (BC) tendrían que ser exactamente la misma, entonces tendríamos un rombo.</p> <p>C Si ponemos B aquí, aquí, aquí, ... entonces en cualquier punto de esta recta.</p> <p>D Ya... así lo mueves y con relación lo buscamos.</p>		<p>Los profesores describen la trayectoria que debería seguir B para que ABCD sea un rombo.</p>

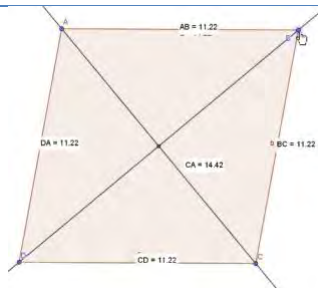
En su intento por formar el rombo, los profesores reconocen que la ubicación de B no es fija, esto les da la idea que existen más de una solución, esto se evidencia cuando el profesor C marca con el puntero del mouse las posibles ubicaciones que debería tomar B, en este punto solo han reconocido que B debe pertenecer a una recta, a pesar de no usar el arrastre con rastro, el profesor C caracteriza la trayectoria del punto B “una recta”, continúan explorando con la figura creada en GeoGebra.

Tabla 22

Identificación de invariantes observadas durante el arrastre para la Actividad 1 por la pareja 2

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>D Primero el punto medio (se refiere al punto medio de \overline{AC})... que la recta pase por B y por el punto medio.</p> <p>C Ya</p> <p>C Forma un nuevo rombo</p> <p>D ¡Es un rombo! Ahora forma otro rombo</p> <p>...</p> <p>C Tiene que ser perpendicular a la otra ¿no?</p> <p>D Si</p>		<p>Los profesores identifican la primera invariante observada durante el arrastre: la recta que pasa por B y el punto medio de \overline{AC} pasa por D (B_1)</p> <p>Identifican una segunda invariante observada durante el</p>

- C Borra la recta trazada y construye la perpendicular a la recta que contiene a \overline{AC} que pasa por el punto medio de \overline{AC}
- C Limita el vértice B a la perpendicular construida
- D Es otro (rombo). Realiza una captura de pantalla como evidencia



arrastre: B pertenece a la recta perpendicular que pasa por el punto medio de \overline{AC} (B_2)

Los profesores, conociendo que B debe pasar por una recta que pase por el punto medio de \overline{AC} , construyen la recta que pasa por el punto medio de la diagonal \overline{AC} y B, para lograr que los puntos medios coincidan, la recta debe pasar por el vértice D. Así, logran formar un nuevo rombo; note que en este caso la construcción se origina como resultado de verificar A_3 y garantizar validar la trayectoria que debe seguir B. Por tanto, se obtiene la primera invariante observada durante el arrastre:

La recta que pasa por B y el punto medio de \overline{AC} pasa por D, la denotaremos por B_1 , al momento de arrastrar B, observan que no siempre se genera un rombo. Por ello, deciden modificar la característica de la última recta construida, al señalar el profesor C “*tiene que ser perpendicular a la otra...*”, está reconociendo una propiedad de la figura que desea construir, se observa nuevamente un proceso ascendente. Al realizar la construcción se visualiza el proceso descendente, se forma un nuevo rombo al limitar B a la recta construida, lo mencionado permite identificar un proceso abductivo lo cual garantiza la nueva invariante inducida durante el arrastre: B pertenece a la recta perpendicular que pasa por el punto medio de \overline{AC} , lo denotaremos por B_2 .

Ahora los profesores buscan verificar su nueva hipótesis arrastrando el vértice B a lo largo de la perpendicular trazada.

Tabla 23

Elaboración de la conjetura

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<ul style="list-style-type: none"> C Estaba emocionado queriendo mover el punto. D Listo, volvemos (D le cede el control al profesor C) C Arrastra B por la perpendicular D 13,14 ¿creo que también lo encontramos?... Ese no estaba C Pero mira, todos ya funcionan D Si, es cierto, ¿qué hiciste? 		<p>Al arrastrar el vértice B por la recta perpendicular obtienen diversos rombos (fase 5)</p>

C Lo que quería hacer, B se está moviendo justo por esta recta, entonces por cualquier punto

D Eso significa que cuando haces una perpendicular al punto medio de \overline{AC} , entonces se pueden generar rombos

C Si

C Si en el punto medio del segmento AC,

D se traza la recta perpendicular L1 y se limita el punto B sobre la recta L1, entonces al mover el punto B sobre la recta L1 se obtendrá un rombo,



Luego de realizar la prueba de arrastre robusta, los docentes escriben la conjetura

Luego de realizar la captura de pantalla, el profesor C arrastra el vértice B a lo largo de la perpendicular trazada (mediatriz de \overline{AC}) obteniendo con ello diversos rombos, este resultado sorprende a ambos profesores, en este punto se encuentran en la fase 5 del modelo pues han realizado una prueba de arrastre para validar su hipótesis, esto les permite establecer y escribir la conjetura buscada “Si en el punto medio del segmento AC, se traza la recta perpendicular L1 y se limita el punto B sobre la recta L1, entonces al mover el punto B sobre la recta L1 se obtendrá un rombo”.

En el proceso de resolución de los profesores se identifica una primera cadena de invariantes $A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A$, las mismas se originan en la búsqueda de condiciones para que ABCD sea un rombo, estas invariantes son proposiciones que se relacionan de manera lógica, pues “ABCD es un rombo” (A), siempre que “AB = BC” (A_1), para ello es necesario que “La recta que pasa por B y D pasa por el punto medio de \overline{AC} ” (A_2), esto ocurre si “los puntos medios de \overline{AC} y \overline{BD} coinciden” (A_3), lo expuesto valida la relación lógica de las invariantes inducidas intencionalmente.

Al momento de buscar que los puntos medios de las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} coincidan, los solucionadores observan que se verifica de manera simultánea que la recta que contiene a los vértices B y D debe pasar por el punto medio de \overline{AC} . Así, al mantener que la recta que pasa por B y el punto medio de \overline{AC} también pase por el vértice D indirectamente se verifica que los puntos medios de las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} coinciden.

Luego, identificamos que al ejercer un control directo sobre B_1 ejercemos un control indirecto sobre A_3 , luego podemos identificar una relación causal entre B_1 y A_3 , lo denotamos como $B_1 \rightarrow A_3$; de manera similar podemos identificar una relación causal entre B_2 y B_1 lo señalado permite identificar una nueva cadena de invariantes causales $B_2 \rightarrow B_1$.

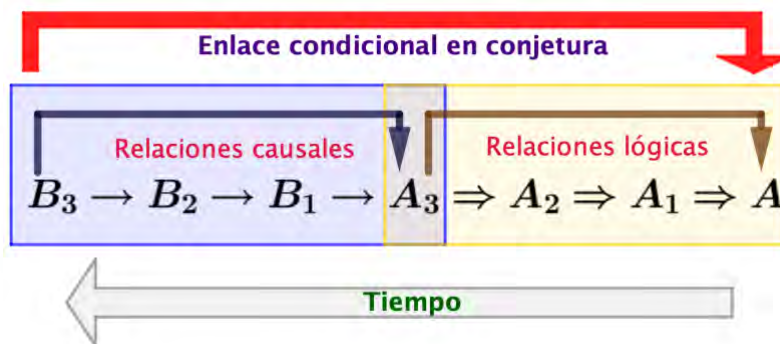
Tabla 24

Secuencia de invariantes identificadas

B_2	\rightarrow	B_1	\rightarrow	A_3	\Rightarrow	A_2	\Rightarrow	A_1	\Rightarrow	A
B pertenece a la recta perpendicular que pasa por el punto medio de \overline{AC}		La recta que pasa por B y el punto medio de \overline{AC} pasa por D		Los puntos medios de \overline{AC} y \overline{BD} coinciden		La recta que pasa por B y D pasa por el punto medio de \overline{AC}		$AB = BC$		ABCD es un rombo

Note que la invariante A_3 asume un papel bisagra entre las invariantes inducidas intencionalmente y las invariantes observadas durante el arrastre, luego podemos afirmar que A_3 es la invariante pivote, la cual tiene un papel fundamental al momento de formar la conjetura pues relaciona la última invariante observada durante el arrastre con la invariante inducida intencionalmente, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Figura 43. Cadenas de invariantes unidas por la invariante pivote



Fuente. Adaptado de Antonini y Baccaglini-Frank (2015)

Así, se esperaba que los profesores escriban la conjetura:

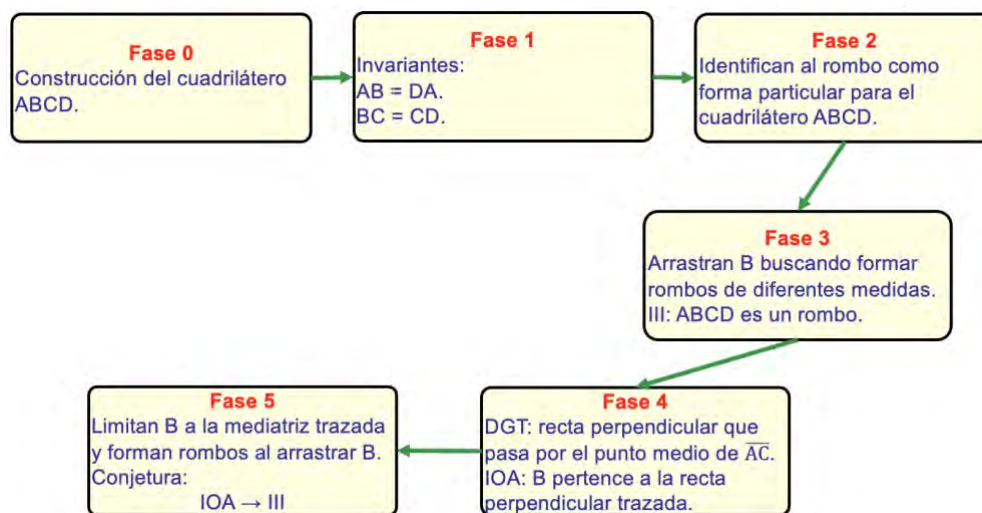
“Si B pertenece a la recta perpendicular que pasa por el punto medio de \overline{AC} , entonces ABCD es un rombo”

Este resultado se asemeja a la propuesta de conjetura propuesta por los profesores: “Si en el punto medio del segmento AC, se traza la recta perpendicular L1 y se limita el punto B sobre la recta L1, entonces al mover el punto B sobre la recta L1 se obtendrá un rombo”.

Note que en la redacción de la conjetura se observa la influencia del uso de las herramientas de GeoGebra pues en el antecedente describen la manera como han construido la mediatriz y en el consecuente describen la manera como comprobaron con el software la relación entre B₃ y A.

Cabe señalar que en el proceso de resolución seguido por la pareja de profesores 2, se observa que han pasado por las 5 fases del modelo de mantenimiento de arrastre – conjetura propuesta por Baccaglini tal como se muestra en la figura.

Figura 44. Fases de la resolución propuesta por la pareja 2 para la actividad 1



Fuente. Adaptado de Antonini y Baccaglini-Frank, 2015

Si bien los profesores tenían la posibilidad de seguir explorando con la finalidad de encontrar otros casos, decidieron pasar a la siguiente actividad.

4.4.2 Análisis de la actividad 2

Al igual que la actividad 1, los profesores disponían de 45 minutos para el desarrollo de la actividad 2. A continuación, se muestran extractos de la conversación de la pareja 1, así como las evidencias gráficas y/o escritas de su desarrollo.

Tabla 25

Elección del punto a arrastrar

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B A y C no pueden ser porque A y C son radios.</p> <p>A Claro, creo que D puede ser un buen candidato.</p> <p>B Arrastra el punto D buscando validar la afirmación del profesor A.</p> <p>B ¿El punto D era?</p> <p>A Un punto cualquiera en el semiplano.</p>		<p>Analizan las características de cada punto con la finalidad de elegir el punto a arrastrar.</p>

B ¡Aja!

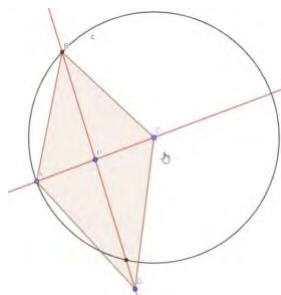
A Ese está más libre entre comillas, sólo que está en el semiplano, no más.

B El B es el simétrico ¿no?

A Él está libre, ¿no?

B Sí, el D es el que está libre.

A Empecemos con D.



Leen el enunciado para identificar las características de la construcción.

Eligen arrastrar el punto D.

Luego de realizar la construcción, la pareja de profesores busca identificar el punto que conviene arrastrar, en una primera exploración descartan arrastrar los puntos A y B debido a que dependen de la posición de los puntos C y D respectivamente. En un segundo momento arrastran los puntos C y D, al arrastrar el punto C el cuadrilátero y la circunferencia cambian de tamaño (La circunferencia depende de la posición de C), pero al arrastrar el punto D, sólo se modifica la forma del cuadrilátero ABCD, por ello eligen modificar la forma del cuadrilátero arrastrando el punto D.

Tabla 26

Búsqueda de las invariantes de la construcción para la actividad 2

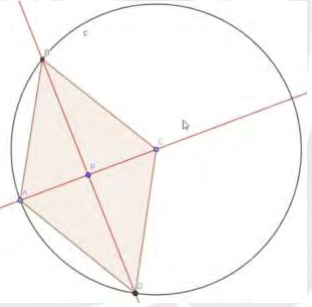
Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>A $AP = PC$, P es punto medio de \overline{AC}.</p> <p>B Este sería radio, radio, radio... en teoría los tres son iguales.</p> <p>Se refiere a \overline{AB}, \overline{BC} y \overline{CA}.</p> <p>B No tiene la misma longitud dice.</p> <p>A ¡No! Creo que los que son congruentes son \overline{BC} con \overline{AC}.</p> <p>B Claro, porque \overline{BC} y \overline{AC} son radios.</p> <p>A ¡Eso sí!</p>		<p>Hacen uso de la herramienta “relación” de GeoGebra para comprobar que $\overline{AB} \not\cong \overline{BC}$, y determinar que las rectas r y L no son perpendiculares.</p>
<p>B La relación entre esta recta y esta recta... ¿Serán perpendiculares?</p> <p>A Sólo lo intercepta.</p> <p>B Nada más.</p>		

Los profesores hacen uso del arrastre libre para modificar la ubicación del punto D con la finalidad de identificar las invariantes de la construcción. Así, identifican dos invariantes “ $AP = PC$ ” debido a que P es punto medio de \overline{AC} y, “ $AC = BC$ ” debido a que \overline{AC} y \overline{BC} son radios de la circunferencia construida. Además, basándose en la percepción, proponen dos conjeturas iniciales “ $AB = BC = AC$ ” y “ $r \perp L$ ”, las mismas que son descartadas haciendo uso de la herramienta “Relación” de GeoGebra; éstas dos acciones proporcionan información que los profesores utilizarán al momento de explorar las posibles formas que puede tomar el cuadrilátero ABCD. Lo señalado nos permite identificar que la pareja de profesores se ubica en la Fase 1 del modelo propuesto por Baccaglioni.

Luego de identificar las invariantes de la construcción, los profesores, en base a la experiencia previa al desarrollar las actividades anteriores, arrastran el punto base B buscando alguna forma particular para el cuadrilátero ABCD.

Tabla 27

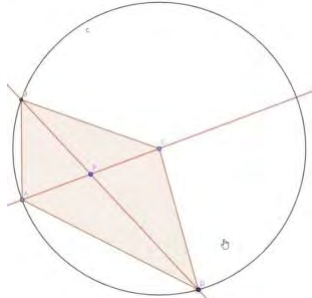
Identificando al rombo como un posible caso a explorar

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B <i>Para que este de acá sea recto (recta L), el punto D debería pertenecer a la circunferencia.</i></p> <p>A <i>¿Haber?... Sería cuestión de vincular ¿no?</i></p> <p>B <i>Vamos a ver... Allí está... Allí si estarías teniendo...</i></p> <p>A <i>Un rombo.</i></p> <p>B <i>¿Un rombo?</i></p> <p>A <i>Si, hagamos la comprobación.</i></p>		<p>Identifican al rombo como una forma particular del cuadrilátero ABCD.</p>

Luego de descartar que las rectas r y L sean perpendiculares, los profesores exploran el caso “ $r \perp L$ ”, así descubren que ABCD puede transformarse en un rombo; los profesores se basan en la propiedad que las diagonales de un rombo son perpendiculares por ello no hacen uso del arrastre libre para hallar esta forma particular del cuadrilátero ABCD. Los profesores se encuentran en la Fase 2 del modelo.

Tabla 28

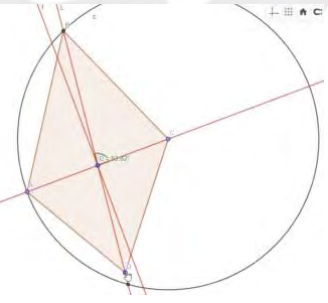
Invariante inducida intencionalmente: ABCD es un rombo

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Muevo el punto, ¿te parece? A ¡Parecía rombo! B Si, pero así es un cuadrilátero nada más. A Si, parecía... Me engañó por el tema de... tendría que ser perpendicular ¿no? B Claro, para que sea rombo, él (recta AC) tendría que ser perpendicular a \overline{BD} y no necesariamente es.</p>		<p>Arrastran el punto D buscando que ABCD sea un rombo.</p>

En el extracto se muestra la intención de los profesores por formar un rombo, así la invariante inducida intencionalmente es “ABCD es un rombo”, lo denotaremos por K. Para identificar esta configuración particular no se ha utilizado el arrastre de mantenimiento debido a que los profesores buscan formar el rombo a partir de la exploración de sus propiedades, la expresión “*estos son paralelos* (señalando los lados BC y AD) *en teoría*” evidencia el reconocimiento del uso de las propiedades del rombo, para corroborar la información visual que proporciona el software, los profesores hacen uso de la herramienta “relación” y el arrastre del punto D. Los profesores se encuentran en la Fase 3 del modelo.

Tabla 29

Condiciones para que ABCD sea un rombo

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Veamos el ángulo... cuando este ángulo sea 90° recién se formaría un rombo. A Osea, ¿Cuándo el D esté en la mediatriz de \overline{AC}? B Exacto... Podríamos hacer ¿no? A Porque la mediatriz va a pasar por P, ¿eso sí! B Trazo la mediatriz de acá. A De \overline{AC}. B Ahora este punto lo limito a la recta... Allí ¿no? A Rombo.</p>		<p>Identifican una nueva invariante: D pertenece a la mediatriz de \overline{AC} (K_1).</p>

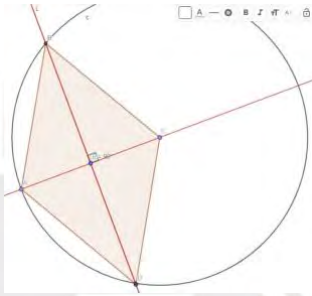
“¿Dónde estaría recto? Cuando estos dos (refiriéndose a las rectas r y L) formarían 90° ”, una vez decidido formar el rombo, los profesores buscan construirlo a partir de sus propiedades, así buscan que la recta L sea perpendicular a \overline{AC} , por ello trazan la mediatriz de \overline{AC} y buscan

superponer la recta L a la mediatriz limitando D a la mediatriz, esto nos permite identificar una nueva invariante “D pertenece a la mediatriz de \overline{AC} ”, la denotaremos por K_1 .

Debido a que aún no pueden controlar que el cuadrilátero ABCD sea un rombo, continúan explorando con el software.

Tabla 30

Búsqueda de invariantes en la construcción

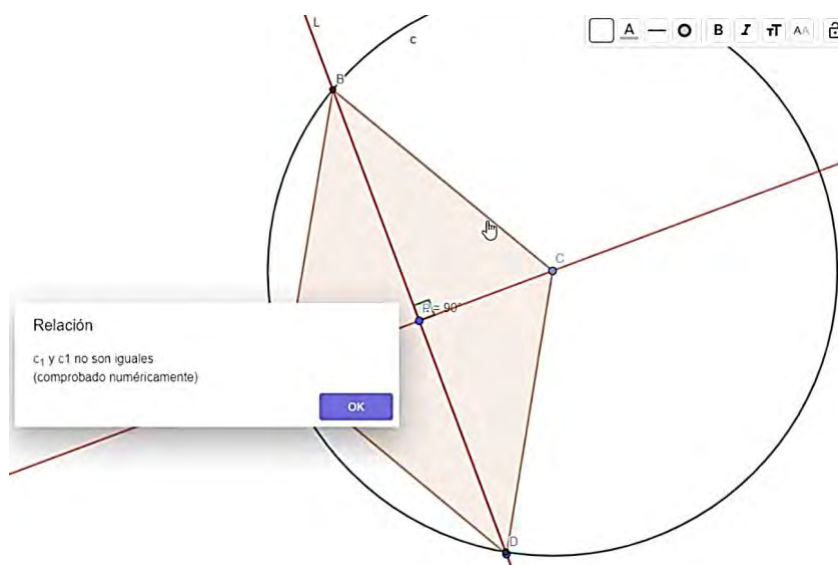
Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Todavía, para que sea rombo, esto tiene que coincidir acá (señala el punto de intersección de la mediatriz con la circunferencia trazada).</p> <p>A Claro, claro.</p> <p>B Allí si sería.</p> <p>A El D sería en la circunferencia y en la mediatriz de \overline{AC}.</p> <p>B Claro.</p> <p>A Ya, ese será un caso... lo redacto.</p>		<p>Buscando formar el rombo, realizan una precisión a la condición anterior: D está en la circunferencia y la mediatriz de \overline{AC} (T_1).</p>

Buscando un mayor control sobre el rombo, los profesores superponen la recta L sobre la mediatriz de \overline{AC} , con ello logran formar, visualmente, el rombo. Cabe señalar que los profesores se están apoyando en el hecho que $L \perp \overline{AC}$ y que D pertenece a la circunferencia, además arrastran el punto D sobre el punto de intersección de la mediatriz y la circunferencia.

En este punto identificamos una primera invariante observada durante el arrastre “D está en la circunferencia y la mediatriz de \overline{AC} ”. Si bien no se encontrado una trayectoria que debe seguir el punto D para que ABCD sea un rombo, los profesores han hallado invariantes observadas durante el arrastre y han establecido un enlace condicional entre A y T_1 . Por ello, podemos afirmar que los profesores se encuentran en la Fase 4 del modelo propuesto por Baccaglioni.

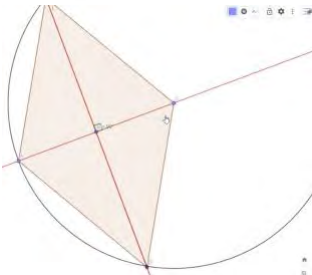
Los profesores buscan comprobar el enlace condicional, para ello deciden comparar las longitudes de los lados del cuadrilátero ABCD, con ayuda de la herramienta relación validan la relación de perpendicularidad entre r y L, además verifican la congruencia entre los lados AB y BC, pero se sorprenden de la información dada por el software respecto a la relación entre los lados BC y CD.

Figura 45. Comparación entre los lados BC y CD

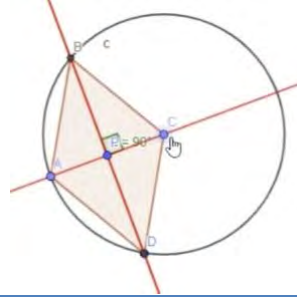


A pesar de la información recibida, los profesores reconocen que la diferencia se debe a que el profesor B ha superpuesto manualmente el punto D, al respecto el profesor A señala “Claro, porque está aproximado nada más ¿no?” a lo que el profesor B confirma la hipótesis dada por su compañero “Si, nada más”, este proceso de comprobar el enlace condicional entre K y T_1 permite mejorar la condición que permite formar el rombo “Cuando el vértice D se encuentre, nuevamente, en el intercepto de la mediatriz de \overline{AC} y la circunferencia”. La expresión “nuevamente” se debe a que este caso también aparece como condición para formar rombos en una actividad anterior.

Tabla 31 Elaboración de la primera conjetura de la Actividad 2

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
A <i>Habíamos comentado cuando... el vértice D ¿no?</i>		
B <i>Si.</i>		
A <i>Cuando el vértice D en la intersección.</i>		
B <i>Cuando el vértice D se encuentra en el intercepto de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia se forma un rombo, que también en este caso tampoco sería único ¿no?</i>		Al arrastrar el vértice C por la recta r el rombo cambia de tamaño.
A <i>No es único, porque puede desplazarse...</i>		
B <i>Porque puede desplazarse... Ahora mira, eso se da cuando tú desplazas solamente C, nada más.</i>		

- A Claro, se generan varios por la manipulación del C.
- B Del C, porque el vértice A se entiende que es el simétrico de C.
- B Entonces, para que se generen varios rombos, se tendría que mover C.
- A Tendríamos por lo pronto (...) el rombo caracterizado.



Luego de realizar la prueba de arrastre robusta, los docentes escriben la conjetura

Luego de realizar arrastrar el vértice C a lo largo de r, los profesores observan que la posición de A no varía por tanto se obtienen diversos rombos, con ello la construcción ha pasado la prueba de arrastre, lo cual les permite validar el enlace condicional entre K y K_2 y por consiguiente escribir la conjetura: “Cuando el vértice D se encuentra en el intercepto de la mediatriz de [AC] con la circunferencia, se forma el rombo ABCD; que no es único al desplazarse C”. Es importante señalar que los profesores A y B usan la notación [AC] para hacer referencia a \overline{AC} , esta notación es utilizada en colegios que siguen la currícula del Bachillerato Internacional.

En el proceso de resolución de los profesores A y B, se identifica una relación lógica entre los invariantes K y K_1 , pues “ABCD es un rombo” (K), siempre que “D pertenezca a la mediatriz de \overline{AC} ” (K_1), esta relación lógica lo denotaremos por $K_1 \Rightarrow K$.

Al momento de validar la construcción, los profesores observan que $BC \neq CD$, la igualdad ocurre siempre que D pertenezca a la circunferencia de centro C, así aparece una nueva invariante observada durante el arrastre “D se encuentra en el intercepto de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia” (T_1), ello se debe a que se verifica simultáneamente la igualdad $BC = CD$ y la perpendicularidad de las rectas r y L; así, al verificar la validez T_1 se verifica K_1 , por tanto existe una relación causal de T_1 sobre K_1 , lo denotamos como $T_1 \rightarrow K_1$.

Tabla 32

Secuencia de invariantes identificadas para la primera conjetura de la Actividad 2

T_1	\rightarrow	K_1	\Rightarrow	K
D se encuentra en el intercepto de la mediatriz de \overline{AC} con la circunferencia		D pertenezca a la mediatriz de \overline{AC}		ABCD es un rombo

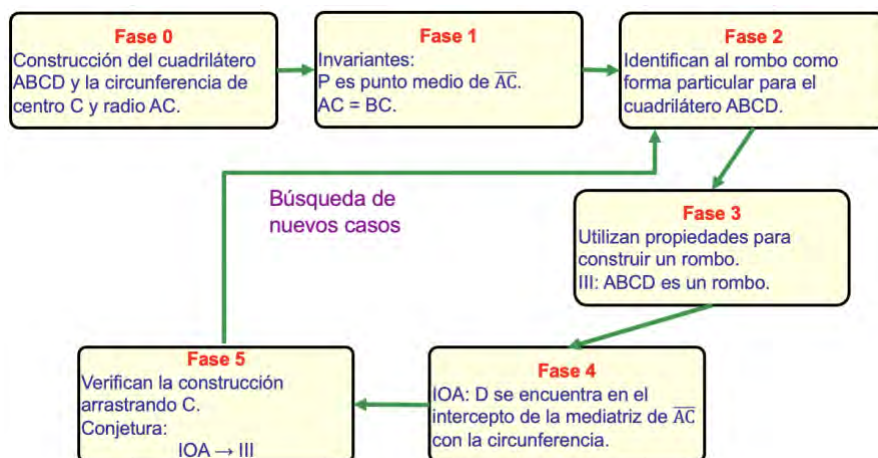
Para el caso analizado, la invariante K_1 asume el papel bisagra entre T_1 y K , pues permite establecer el enlace condicional entre la IOA y la III, lo cual facilita la construcción de la conjetura.

“Cuando el vértice D se encuentra en el intercepto de la mediatriz de [AC] con la circunferencia, se forma el rombo ABCD; que no es único al desplazarse C”

Se observa que los profesores han pasado por las 5 fases del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura.

Cabe señalar que en el proceso de resolución seguido por la pareja de profesores 2, se observa que han pasado por las 5 fases del modelo de mantenimiento de arrastre – conjetura propuesta por Baccaglioni tal como se muestra en la figura.

Figura 46. Fases de la resolución propuesta por la pareja 2 para la actividad 1



Fuente. Adaptado de Antonini y Baccaglioni-Frank (2015)

Luego de proponer la conjetura, los profesores continúan explorando, buscando nuevos casos.

Tabla 33

Invariante Inducida Intencionalmente: Trapezoide simétrico ABCD

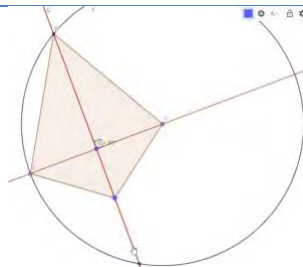
Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Ahora, si tu mueves el vértice C solo por la mediatriz.</p> <p>A El D.</p> <p>B Si, el D, ¿qué formarías? Un cuadrilátero convexo.</p> <p>A Mmm... Si... ¿un trapezoide? El D ahora ha cambiado.</p> <p>B Creo que también se ha formado un trapezio... un trapezoide también se forma ¿no?</p> <p>A Si.</p> <p>B Si D se mueve por...</p> <p>A La mediatriz de \overline{AC}.</p>		<p>Arrastran D por la mediatriz e identifican un nuevo caso.</p> <p>Invariante inducida intencionalmente: ABCD es un trapezoide simétrico.</p>

B Claro, se entiende que acá ya son perpendiculares ¿no? (refiriéndose a \overline{AC} y \overline{BD}).

A ¡Sí!

B Mira, donde vayas se forma... se forma un trapezoide... uno simétrico ¿no?

A Sí



Luego de plantear la primera conjetura, los profesores continúan explorando con la construcción, así aprovechan que D ha sido limitado a la mediatriz de \overline{AC} , al arrastrar el punto D reconocen que el cuadrilátero ABCD se ha transformado en un “trapezoide simétrico”. Es importante señalar que el caso hallado se ha deducido del análisis del rombo, por ello la pareja de profesores no pasa de la Fase 2 a la Fase 4 de manera casi inmediata; identifica al trapezoide simétrico como la configuración particular que se desea mantener, así la nueva invariante inducida intencionalmente es “ABCD es un trapezoide simétrico”, lo denotaremos por R, y la mediatriz de \overline{AC} viene a ser la descripción geométrica de la trayectoria que debe seguir el vértice D para que ABCD sea un trapezoide simétrico.

Tabla 34

Exploración del trapezoide simétrico ABCD

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Claro, cuando D se desplaza por la mediatriz de \overline{AC}, se transforma en un trapezoide simétrico.</p> <p>A Por la mediatriz de \overline{AC}, ¿no?</p> <p>B Claro.</p> <p>A Trapezoide simétrico ¿no?</p> <p>B Sí.</p>		<p>Arrastran D a lo largo de la mediatriz con la finalidad de comprobar su hipótesis.</p>
<p>B Pero si el vértice D coincide con el punto medio de \overline{AC}... ya no se forma un cuadrilátero... jajaja...</p> <p>A Eso ¿cuándo ocurre? Cuando D...</p> <p>B Cuando D se desplaza y llega a pasar por el punto medio... queda como un triángulo.</p> <p>A Pero no estaría D en un semiplano... Porque tiene que estar en uno de los semiplanos generados por la recta r.</p>		<p>Exploran el caso que D se ubique sobre la recta r, el caso es desestimado por las condiciones de la construcción.</p>

Nuevamente al buscar la condición necesaria para que ABCD sea un trapezoide simétrico, los profesores en simultáneo comprueban la validez de la condición, el tránsito de la

Fase 4 a la Fase 5 ocurre de manera casi simultánea. Así, la invariante observada durante el arrastre es reconocida por el profesor B “cuando D se desplaza por la mediatriz de \overline{AC} ”, al cual denotaremos por S, el caso en el cual D pertenece a la recta r es desechado debido a que, por construcción, D no puede pertenecer a la recta r. La conjetura propuesta por los docentes es: “Cuando el vértice D se desplaza por la mediatriz de $[AC]$ se genera el trapezoide simétrico ABCD”.

Los profesores continúan explorando, buscando nuevos casos, para ello liberan el punto D de la mediatriz de \overline{AC} con la finalidad de regresar a las condiciones iniciales.

Tabla 35

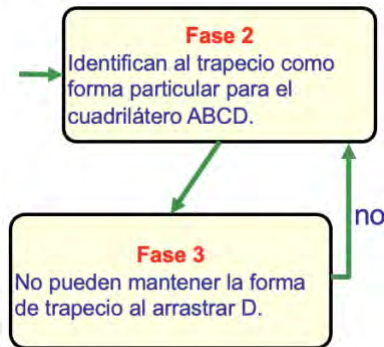
Exploración de nuevos casos para la Actividad 2

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Hace uso del arrastre libre buscando hallar alguna forma en particular.</p> <p>A ¿No se forma un rectángulo en algún momento?</p> <p>B Creo que no.</p> <p>A El D no necesariamente está en la circunferencia.</p> <p>B No.</p> <p>A ¡Ah! Trapecio no se formaría</p> <p>B Un trapecio</p> <p>A Si trazamos una paralela a \overline{AB} por C.</p> <p>B Traza una paralela a \overline{BC} por A.</p> <p>A También... ¿se puede?</p> <p>B El D tendría que llegar al Intercepto.</p>		<p>Hacen uso del arrastre libre buscando que el cuadrilátero ABCD tome la forma de un rectángulo.</p> <p>Manualmente intentan formar un trapecio, para ello buscan que dos de sus lados sean paralelos.</p>

Los profesores hacen uso del arrastre libre buscando transformar el cuadrilátero en una forma conocida, primero consideran el rectángulo pero ante la imposibilidad de formarlo lo descartan, luego analizan el caso del trapecio, para ello se apoyan en una construcción auxiliar, la paralela a \overline{BC} que pasa por A, “*acá tenemos el trapecio, porque estos dos son paralelos*” (señalando a los lados AB y DC), descartan esta opción debido a que están buscando que D pertenezca a la paralela trazada, se observa que los profesores están enfocados en formar el trapecio que no identifican correctamente la figura construida, buscando ayudarlos a reconocer la figura se les hace la pregunta ¿esa figura como se llama? Para responder a la pregunta, los profesores describen lo que observan, visualmente ven una figura con dos lados paralelos pero no están convencidos de su observación, por ello regresan a la configuración original y aplican

el arrastre libre al vértice D, al no encontrar una forma conocida, deciden limitar D a la circunferencia, se les sugiere “pensar diferente” pues siguen pensando que el trapecio es la forma nueva a buscar pero no logran mantener dicha forma.

Figura 47. El caso del trapecio



De acuerdo con el modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura, una vez identificado la forma particular (Fase 2), tal como lo señalan Antonini y Baccaglioni (2015) se debe buscar ejercer un control indirecto de la figura, si esto no es posible los resolutores deben regresar a la Fase 2. Lo señalado por los investigadores describe las acciones de la pareja de profesores, por ello se les pide “pensar diferente”, los profesores revisan nuevamente las características de la construcción.

Tabla 36

Identificación del romboide como caso a explorar

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B Arrastra el vértice D. Se les pide revisar la construcción.</p> <p>A <i>El B es el que está en la circunferencia.</i></p> <p>B Arrastra el punto D evitando pasar por la circunferencia.</p> <p>B <i>Un romboide... Estaba tratando de buscar pero manipulando... buscando que esta longitud con esta (señala los lados AB y CD)</i></p> <p>A <i>Ahí ¿no?</i></p> <p>B <i>Ahí.</i></p>		<p>Arrastran el vértice B buscando formar el romboide.</p>

Los profesores vuelven a usar el arrastre libre buscando transformar el cuadrilátero en una figura conocida, visualmente logran identificar al romboide (también llamado paralelogramo),

debido a las características de los profesores, muestran cierta dificultad para validar su hallazgo debido a que solo se están basando en la percepción para confirmar el paralelismo de los lados. En este momento los profesores se encuentran nuevamente en la Fase 2 del modelo.

Tabla 37

Invariante inducida intencionalmente: ABCD es un romboide


Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>B <i>Que sucede si trazo una paralela a \overline{AB} que pase por C.</i></p> <p>A <i>Ya.</i></p> <p>B <i>Una paralela de acá (señala el lado AB) que pase por acá (señala el punto C) ... Correcto.</i></p> <p>A <i>Y el D puede llegar el momento que pase por ahí (hace referencia a la paralela).</i></p> <p>B <i>Exacto... Pero creo que no puede pues depende de este punto ¿no? (señala el punto P)</i></p> <p>A <i>Si, si... creo solo por acercamiento ¿no?.</i></p> <p>B <i>Ahí (arrastra el punto D sobre la paralela construida).</i></p> <p>A <i>Paralelogramo.</i></p> <p>B <i>Continúa arrastrando D buscando formar el romboide.</i></p> <p>B <i>Necesitamos que el punto D se venga para acá (arrastra D sobre la paralela).</i></p>		<p>Se observa la necesidad de validar la forma del romboide por medio de propiedades.</p>

Los profesores hacen uso de una construcción auxiliar que les permita formar el romboide, hacen uso del arrastre de mantenimiento al desplazar el punto D buscando preservar la forma hallada, así podemos identificar la nueva invariante inducida intencionalmente “ABCD es un romboide”, lo denotaremos por A. Debido a la característica de la pareja de profesores, la identificación de la nueva invariante está asociada a la búsqueda de cierta condición que les permita controlar de manera indirecta la forma hallada, así el hecho que ABCD sea un romboide está condicionado a que “D pertenezca a la paralela relativa al lado AB que pasa por C”, esta sería una nueva invariante, la denotaremos por A_1 .

A pesar de tener cierto control sobre el romboide (uno de los profesores lo llama también paralelogramo) los profesores no se muestran convencidos, “creo que el paralelogramo si es factible hallar, me parece que si” señala uno de ellos, analizan nuevamente la figura y deciden buscar una nueva condición que les facilite formarlo.

Tabla 38

Construcción del romboide

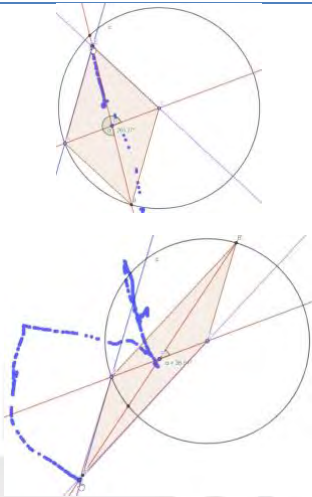
Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>A ¿Si construimos el romboide y vemos si es factible que D sea ese vértice restante del romboide, si hacemos así al revés? Osea... A, B y C los mantengo fijos, como en este momento de la interacción.</p> <p>B Entonces tengo que hacer esto, trazo una paralela acá (señala \overline{BC}) y acá (señala el vértice A)</p> <p>A Luego una paralela a \overline{AB}, interceptarlas...</p> <p>B Acá (traza la paralela por C).</p> <p>A Pero creo que el D vamos a moverlo para otro lugar para que no nos confunda.</p> <p>B Ya.</p> <p>A Ahora interceptemos esas dos paralelas, porque sería la posición ideal.</p> <p>B Si... le voy a cambiar el color... En este caso el punto D tendrá que...</p> <p>A ¿Podrá llegar allí?</p> <p>B De llegar, llega.</p> <p>A Entonces si llega, si se formara un paralelogramo... si llegase a esa posición ideal.</p> <p>B Bueno, en teoría si se puede.</p>		<p>Construyen el romboide apoyándose de dos construcciones auxiliares.</p> <p>Hallan una nueva condición para formar el romboide.</p>

Con la finalidad de controlar mejor el movimiento, trazan las paralelas a los lados AB y BC, esto les permite hallar una nueva propiedad que los profesores tratan de inducir como invariante “D se ubica en el punto de intersección de las paralelas trazadas”, lo denotaremos por A_2 , esta propiedad garantiza el cumplimiento del caso anterior, A_1 , debido a que si el punto D se ubica en la intersección de las paralelas, entonces D se encuentra en la paralela relativa al lado AB que pasa por C, por tanto podemos afirmar la existencia de una relación lógica entre A_2 y A_1 , esta relación la denotaremos por $A_2 \Rightarrow A_1$.

Ahora los profesores se muestran más confiados al momento de formar el romboide, pues es más práctico usar A_2 para formarlo. Buscando generalizar su propuesta el profesor A expresa lo siguiente “si se puede formar un paralelogramo, ahora el detalle esta que ¿será único?” para responder a la pregunta disciernen entre dos opciones, arrastrar C como en el caso del rombo o arrastrar D, debido a que están arrastrando D, descartan responder la pregunta haciendo uso del punto C (la respuesta es obvia).

Tabla 39

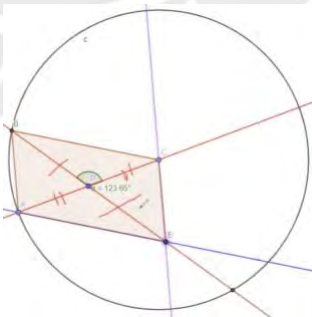
Construcción del romboide

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>Ya se ha formado uno, ¿se puede formar otro?</p> <p>A <i>El otro estaría al otro lado...</i></p> <p>B <i>Arrastra D al otro semiplano.</i></p> <p>A <i>Son dos porque hay dos semiplanos.</i> Se les recomienda buscar más casos.</p> <p>B <i>Arrastra el vértice D buscando generar nuevos casos.</i></p> <p>A <i>Son infinitos.</i></p> <p>B <i>Arrastra D de modo que coincida con el punto de intersección de las paralelas.</i></p> <p>A <i>Claro, hay que caracterizar el lugar geométrico.</i></p> <p>B <i>Hay varios</i></p> <p>A <i>Son infinitos</i></p>		<p>El hallazgo de un segundo caso es vital para dejar de lado el tema de la unicidad.</p> <p>Se observa que el profesor B controla la formación de nuevos romboides aplicando la invariante A_2.</p>

Los profesores logran controlar indirectamente la formación de los romboides haciendo uso de la invariante A_2 , este es un momento fundamental dentro del proceso de la elaboración de la conjetura pues les permite tener la seguridad que hay una solución general para el caso analizado.

Tabla 40

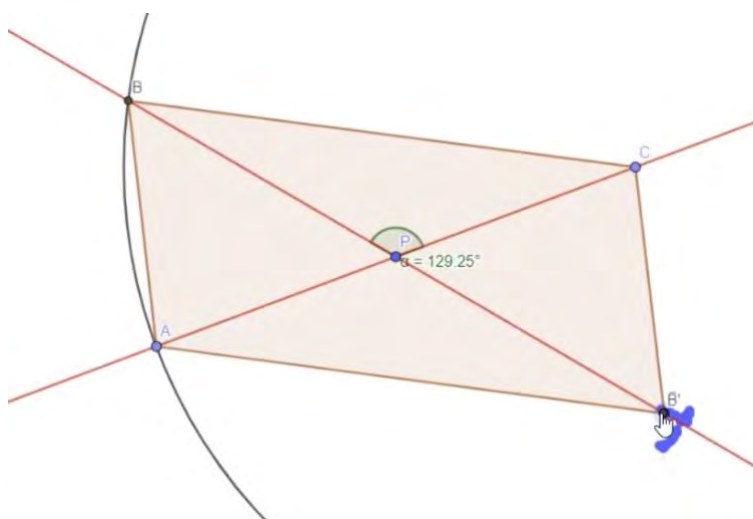
Determinación del simétrico como nueva invariante

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>A <i>¿No sería simétrico a B? (refiriéndose al vértice D)</i></p> <p>B <i>Para que sea un romboide... se entienden que estas diagonales</i></p> <p>A <i>Se bisecan.</i></p> <p>B <i>Entonces el punto B y D...</i></p> <p>A <i>Son simétricos.</i></p> <p>B <i>Estos por defecto son simétricos (Señalando A y C), por tanto son equidistantes.</i></p> <p>B <i>Entonces se va a formar un romboide en este caso cuando el punto D se encuentra equidistante a...</i></p> <p>A <i>Claro simétrico a B respecto a P.</i></p>		<p>El hallazgo de un segundo caso es vital para dejar de lado el tema de la unicidad.</p>

Con la finalidad de encontrar una condición que facilite la formación de rombos, los profesores deducen que deben utilizar el simétrico de B respecto de P, al respecto el profesor B

señala: “Cada vez que muevas en función a esta (señalando D) vas a formar un romboide”, aquí aparece una nueva propiedad “D debe ubicarse en el simétrico de B respecto a P” (A_3), así ocultan las paralelas y construyen el simétrico de B respecto a P, el software lo denota por B’, luego forman romboides ubicando D sobre B’.

Figura 48. Ubicación del punto D sobre B’



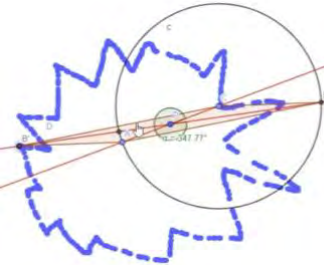
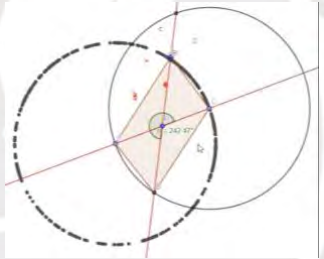
Los profesores realizan el arrastre de mantenimiento buscando que D se sitúe sobre B’. Aquí se muestra una nueva propiedad, B_1 , que los profesores tratan de inducir como invariante. La propiedad ha sido obtenida como consecuencia de las invariantes anteriores:

Sea B’ el simétrico de B respecto de P. Si D y B’ tienen la misma ubicación, entonces $BP = PD$, como consecuencia de ello $\triangle APD \equiv \triangle CPB$ y $\triangle APB \equiv \triangle CPD$, luego las rectas que contienen a los lados CD y DA son paralelas a los lado AB y BC respectivamente, por tanto D se encuentra en el punto de intersección de la paralelas (A_2) lo cual permite afirmar que D se encuentra sobre la paralela del lado AB que pasa por C (A_1). Observamos que entre A_3 y las invariantes A_2 y A_1 existe una relación de lógica, por ello lo denotaremos por $A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$.

El profesor B vuelve a arrastrar el punto D, siguiendo la propiedad A_3 , tiene activado el rastro para el punto D.

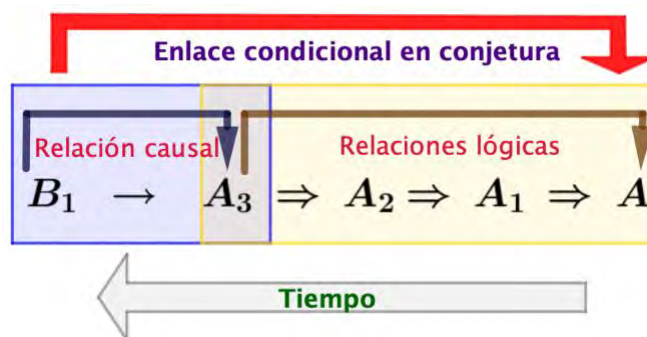
Tabla 41

Determinación de la trayectoria que sigue el vértice D

Transcripción/Acciones	Acciones en GeoGebra	Comentario
<p>A <i>Claro el D que se acerque al B'.</i> B <i>Allí</i> A <i>Una circunferencia.</i> B <i>Arrastra el punto de modo que se ubique sobre B'.</i> B <i>Se forma una figura.</i> A <i>Cómo caracterizarla es el tema... hay un patrón.</i> A <i>Al parecer hay un doble desplazamiento</i> B <i>Los picos no, es el segundo movimiento, mira, voy por acá, voy por acá, entonces la solución son los puntos de abajo.</i> A <i>Es el rastro de B' ¿no?... Claro el rastro de B' es, porque tú haces ensayo-error, mueves el punto por exploración y luego buscas la solución que realmente te interesa.</i> B <i>Borramos el rastro de D (a continuación activa el rastro de B' y arrastra el punto D de modo que se acerque a B').</i></p>		<p>Luego de cerrar la curva, los profesores se detienen a analizar la figura obtenida relacionándola con el camino seguido.</p>
<p>A <i>¡Circunferencia!</i> B <i>Es circunferencia.</i> A <i>El D tiene que pasar por esos puntos negros.</i> B <i>Es una circunferencia congruente.</i> A <i>Osea, el D tiene que estar en la circunferencia con centro A y radio AC.</i></p>		<p>Por medio del rastro, los profesores visualizan la trayectoria que debe seguir el punto D.</p>

En este segundo momento, el profesor B vuelve a utilizar el arrastre de mantenimiento cuando busca que D se aproxime a B', de esta manera se logra mostrar la trayectoria que debe seguir D, facilitando con ello su descripción geoméricamente. Además, al usar el arrastre de mantenimiento se puede percibir simultáneamente una nueva invariante a medida que se busca mantener A_3 , "D tiene que pertenecer a la circunferencia con centro A y radio AC", la denotaremos por B_1 . Esta nueva invariante tiene un estatus diferente a A_1 , A_2 y A_3 , B_1 puede controlarse directamente y como consecuencia de ello A_3 se cumple, lo cual garantiza el cumplimiento de las otras dos invariantes. Por ello, podemos afirmar que entre B_1 y A_3 existe una relación causal, lo denotaremos por $B_1 \rightarrow A_3$, además podemos afirmar que A_3 es la invariante pívot pues se encarga de vincular la primera cadena de invariantes con B_1 lo cual facilita la generación de la conjetura enlazando B_1 (premisa) con A (conclusión).

Figura 49. Cadenas de invariantes unidas por la invariante pivote para el caso del romboide



Fuente. Adaptado de Antonini y Baccaglini-Frank (2015)

Para redactar la conjetura, los profesores siguen el esquema mostrado en la Figura 50. Si queremos formar un romboide (A), necesitamos que el vértice D se ubique en la paralela al lado AB que pase por C (A_1 : primera conclusión), para ello es necesario que D se ubique en la intersección de las paralelas a los lados AB y BC que pasan por vértices C y A respectivamente (A_2 : segunda conclusión), ello se logra siempre que D se ubique sobre B' , simétrico de B respecto a P (A_3 : tercera conclusión), para ello D se debe encontrar en la circunferencia de centro A y radio AC (B_1 : cuarta conclusión), así la conjetura escrita por los profesores es la siguiente:

“Cuando el vértice D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio AC se forma un romboide ABCD”.

4.5 Principales resultados

Se obtuvieron los siguientes resultados de la experimentación.

Las fases propuestas por Baccaglini-Frank y Antonini permitieron describir los procesos de conjeturación a partir de la identificación de las modalidades de arrastre y los elementos fundamentales del modelo de mantenimiento de arrastre-conjetura presentes en las interacciones con el software y los diálogos de cada pareja de profesores al resolver problemas abiertos de construcción de cuadriláteros.

Debido a las características de los problemas abiertos de construcción asociados a cuadriláteros, el arrastre con trazo no necesariamente es utilizado para identificar la descripción geométrica de la trayectoria, en especial si esta es una recta, como en el caso de la actividad 1.

En el sector privado, los profesores usan diversas clasificaciones de cuadriláteros, por ello el trabajo en parejas de profesores que usan la misma clasificación favoreció la identificación de la invariante inducida intencionalmente debido a que les permitió utilizar un lenguaje común al momento de comunicar sus observaciones individuales.

La experiencia en el uso de GeoGebra es diversa en los profesores de matemática, por ello el agrupar a los profesores según el tipo de experiencia ayudó al momento de interactuar con el software, pues hicieron uso de herramientas similares lo cual facilitó el trabajo colaborativo para cada pareja.

Al momento de hacer uso de la herramienta Limitar/liberar es necesario que se tenga cuidado con las “referencias circulares”, la herramienta mencionada puede limitar un punto a un objeto en GeoGebra que no depende del punto que se pretende limitar, este tipo de referencias circulares hizo que los profesores demoren al momento de validar su conjetura pues en ocasiones, no se percataban que el objeto al cual deseaban limitar el punto base, dependía del mismo punto al momento de realizar la construcción inicial.

El uso de la herramienta control remoto del Zoom facilitó la interacción de los profesores con el software, permitiendo que las parejas de profesores puedan trabajar simultáneamente sobre el mismo archivo de GeoGebra lo cual contribuyó al desarrollo del trabajo. Cabe señalar que el único inconveniente observado fue la latencia de 1 a 2 segundos cuando el docente controlaba de manera remota el archivo de GeoGebra que se encontraba en la laptop del otro profesor, esto generó cierta demora en la identificación de las propiedades de los cuadriláteros generados; además se sugiere evitar trabajar con la región asociada al cuadrilátero en GeoGebra, pues dificultó la construcción de trazos sobre un elemento que se encuentre debajo de él, como en el caso de la actividad 2 presentada por la pareja de profesores 2.

La grabación de la resolución de cada una de las actividades fue de mucha utilidad al momento de realizar el análisis, pues no solo permitió registrar las interacciones entre los profesores, sino que además registró las acciones de cada pareja con el software, esto último permitió interpretar los diálogos entre los profesores relacionándolos con las interacciones con el software.

La formación de los profesores influyó en la manera como validan sus procedimientos y/o construcciones además del nivel de análisis de cada caso, por ello es recomendable que cada pareja de profesores tenga una formación similar.

Conclusiones

El objetivo general de la presente investigación es analizar el proceso de generación de conjeturas de profesores de matemática al resolver actividades de problemas abiertos en un entorno de geometría dinámica donde se movilizan nociones de cuadriláteros, para lograrlo se planteó la pregunta de investigación ¿Cuáles son los procesos de generación de conjeturas de profesores de matemática al resolver actividades de problemas abiertos en un entorno de geometría dinámica donde se movilizan nociones de cuadriláteros? La respuesta a la misma la obtenemos lo logramos a partir del cumplimiento de los objetivos específicos de nuestra investigación:

El primer objetivo específico planteado fue *identificar las interacciones entre los profesores de cada grupo de trabajo, así también las interacciones de los profesores con el software GeoGebra en el proceso de generación de conjeturas al resolver actividades de problemas abiertos*. Este análisis permitió identificar las modalidades de arrastre así como el uso de propiedades que cada pareja de profesores utilizaba para validar cada invariante propuesta, además el análisis de los diálogos permitió comprobar la importancia del trabajo en pareja al momento de resolver este tipo de problemas pues cuando uno de los profesores buscaba convencer a su par se veía en la necesidad de apoyarse en propiedades de la figura y/o propiedades de las construcciones que realizaba, validando con ello lo que percibían en la pantalla de la computadora.

Como segundo objetivo específico nos propusimos *describir el proceso de generación de conjeturas asociado a usos particulares de la herramienta de arrastre por parte de los profesores*. Según Baccaglini, al momento de resolver una actividad de problema abierto de geometría en un entorno dinámico aparecen cuatro tipos de arrastre: arrastre libre, arrastre de mantenimiento, arrastre con traza y prueba de arrastre, estos están aparecen dependiendo de la fase en la cual se encuentre el resolutor. El análisis de las actividades 1 y 2 permitieron validar esta relación, en especial cuando la última invariante estaba relacionada a una trayectoria, en particular, el arrastre de mantenimiento por lo general aparece dos veces en este tipo de problemas, la primera cuando los resolutores identifican la invariante inducida intencionalmente y la segunda al momento de establecer el enlace condicional entre la invariante observada intencionalmente y la invariante inducida intencionalmente.

Debido a que se alcanzaron los dos objetivos específicos, podemos afirmar que se logró el objetivo general y por consiguiente se respondió la pregunta de investigación. Lograr analizar el proceso de generación de una conjetura asociado a un problema abierto de geometría en un

entorno de geometría dinámica permite describir los procesos que sigue un resolutor cuando resuelve este tipo de problemas.

Con respecto a la metodología empleada para el análisis del proceso de generación de conjeturas consideramos que fue la adecuada debido a que el trabajo en parejas y la grabación de la resolución de las actividades permitieron identificar las modalidades de arrastre y los elementos fundamentales del marco teórico en las interacciones de cada pareja con GeoGebra y los diálogos entre ellos.

Consideramos que la presente investigación debe ser ampliada y aplicada a profesores en formación inicial con la finalidad de estudiar la vinculación entre la elaboración de una conjetura y su demostración; además, sugerimos implementar la Actividad 1 en estudiantes de educación básica regular con la finalidad de promover y analizar el proceso de formulación de conjeturas mediados con GeoGebra.



Referencias

- Aguilar, C. (2012). *Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental*. (Tesis de maestría, Universidade Federal do Rio de Janeiro). <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/46%20Carlos%20Augusto%20Aguilar.pdf>
- Almouloud, S. A., Silva, M. J. F. & Farias, L. M. (org.). (2017). *Sequências para o ensino de geometria no ensino básico*. Salvador: EDUFBA.
- Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Il trascinarsmento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38(3), 257–278.
- Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. (2016). Maintaining dragging and the pivot invariant in processes of conjecture generation. In C. Csíkos, A. Rausch & J. Sztányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, (pp. 19–26). Szeged: PME.
- Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring: physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments, Proc. Cabriworld 2, Montreal, Plenary Lecture.
- Arzarello, F., Olivero, F. Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 34, 66-72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>.
- Baccaglini-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging* (Tesis de doctorado, University of New Hampshire). <https://scholars.unh.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1528&context=dissertation>
- Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 51(5), 779-791.
- Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15, 225-253. 10.1007/s10758-010-9169-3
- Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. (2011). Conjecture-generation through dragging and abduction in dynamic geometry. In A. Méndez-Vilas (Ed.), *Education in a technological world: communicating current and emerging research and technological efforts* (100-107). Badajoz, Spain: Formatex.

- Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto editora, LDA.
- De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18. <http://www.jstor.org/stable/40248098>
- Fernández, M. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. (Tesis de doctorado, Universidad de Santiago de Compostela). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf
- Jara, C. (2015). *Aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele mediante el uso del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en tercer grado de educación secundaria del Colegio San Carlos de Chosica, 2014*. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle). <http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/954/TM%20CE-Em%20J24%202015.pdf?sequence=1>
- Giles, M. (2015). Sílabo EAPE 2015-II [Sílabo de geometría]. Lima. Facultad de Educación de la UNMSM: http://educacion.unmsm.edu.pe/sillabus_eape.html
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz y M. De la Fuente. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1991). *Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire*. Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, (S6), 220-222. http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991__S6_220_0
- Leung, A., Baccaglioni-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460.
- Mariotti M. A. (2015). Transforming Images in a DGS: The semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement. In S. Rezat, Sebastian, M. Hattermann, A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation—A fundamental idea of mathematics education*, (pp. 155–172). New York: Springer.
- Ministerio de Educación (2016a). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Ministerio de Educación (2016b). Programa Curricular de Educación Secundaria. Lima. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>
- Ministerio de Educación (2017a). Orientaciones generales acerca de las herramientas pedagógicas: unidades didácticas y sesiones de aprendizaje. Lima. Recuperado de http://jec.perueduca.pe/?page_id=3454

- Ministerio de educación (2017b). Resolvamos problemas 1. Cuaderno de trabajo de Matemática. Lima: Ministerio de Educación.
- Ministerio de educación (2017c). Resolvamos problemas 1. Manual para el docente. Lima: Ministerio de Educación.
- Ministerio de educación (2017d). Resolvamos problemas 2. Cuaderno de trabajo de Matemática. Lima: Ministerio de Educación
- Moise, E. y Downs, F. (1966). Geometría moderna (M. García, Trad.). México: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. (Obra original Geometry publicada en 1964).
- Nasser, L. (2017). Visão de licenciados sobre as justificativas em geometria apresentadas na escola básica. *Revista Educação Matemática em Foco*, 6(1). <http://revista.uepb.edu.br/index.php/REMETF/article/view/3744/2140>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática (1a ed.)* (Trad. M. Fernández). Granada, España: SAEM Thales. (Trabajo publicado originalmente 2000).
- De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18. <http://www.jstor.org/stable/40248098>
- Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. (Tesis de Doctorado, University of Bristol). https://www.researchgate.net/publication/32231381_The_proving_process_within_a_dynamic_geometry_environment
- Olivero, F., Bosch, M., Gascón, J. (2013). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. Memorias del IV eongr s internacional sur la TAD. Recuperado de <https://citad4.sciencesconf.org/data/pages/ActesCITAD4.pdf>
- Portalone, E. (2005). *Os professores de matemática e a geometria: opiniões sobre a área e seu ensino*. (Tesis de doctorado, Universidad Federal de São Carlos). <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/2380/TeseEPC.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 19(25), 105-132. <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/1880/1657>
- Ruthven, K. (2018). Constructing dynamic geometry: Insights from a study of teaching practices in English schools. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 367-376). Springer.
- Santillana S.A. (2016). *Matemática 4*. Lima: Santillana S.A.

Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (s.f.). Sumillas de asignaturas de especialidad matemática. Recuperado del sitio web de la facultad de ciencias de la UNE:
http://www.une.edu.pe/ciencias/sumilla_matematica.pdf

Universidad Nacional Mayor de San Marcos (s.f.). Plan de estudios 2013. Recuperado del sitio web de la Facultad de Educación de la UNMSM:
http://educacion.unmsm.edu.pe/pdf/plan_estudio.pdf

Usiskin, Z. and Griffin, J. (2006). The Classification of Quadrilaterals – A Study in Definition.
<http://mathcurriculumcenter.org/QuadSummary.pdf>

Vega, F. (1972). Geometría plana. 4º año de educación secundaria. (3ra. ed.). Callao, Perú: Colegio Militar Leoncio Prado.

Verástegui, T. (2003). *Geometría básica. Curso 1.* (1ra. Ed.). Lima, Perú: Moshera S.R.L.

Yin, R. (2005). *Estudo de caso: Planejamento e métodos.* (3ra. ed.). São Paulo, Brasil: Bookman.



ANEXOS

ANEXO 1

Cuestionario docente

Autor: Nestor Sánchez León

Indicaciones:
- El cuestionario se completa de manera individual.
- Tiempo máximo: 10 minutos.

Datos personales

Nombres y apellidos

As x

Edad

As x

Años de experiencia docente

As x

¿Usted utiliza GeoGebra en su práctica docente? Escriba brevemente.

As x

¿En qué se diferencia una conjetura de un teorema?

As x

Conceptos de cuadriláteros

¿En qué se diferencia un paralelogramo de un trapecio?

As x

¿En qué se diferencia un trapecio de un trapecoide?

As x

¿Cómo se clasifican los paralelogramos?

As x

Marque verdadero (V) o falso (F) según corresponda

Todo cuadrado es un rectángulo

– Marque todas las que correspondan

V
 F

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Todo cuadrado es un rombo

– Marque todas las que correspondan

V
 F

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Todo paralelogramo es un trapecio

– Marque todas las que correspondan

V
 F

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Todo trapecio simétrico es un trapecoide

– Marque todas las que correspondan

V
 F

✓ REVISAR TU RESPUESTA

Actividad 0: Uso de herramientas de GeoGebra

Autor: Nestor Sánchez León

A continuación realizaremos la revisión de herramientas de GeoGebra por medio de construcciones.

Indicaciones:
- El trabajo es individual.
- Tiempo máximo: 20 minutos.

- Para responder a las preguntas haga uso de la construcción mostrada a continuación.
- ¿Cuánto mide el segmento AD? (Utilice la herramienta Distancia o Longitud).
 - ¿Cuánto mide el ángulo ABC? (Utilice la herramienta Ángulo).
 - ¿Qué relación existe entre los segmentos DA y AB? (Utilice la herramienta Relación).
 - ¿Cómo se llama el cuadrilátero ABCD?
 - ¿El punto E pertenece al cuadrilátero ABCD?
 - Dibuje una circunferencia en el interior del cuadrilátero ABCD (utilice el comando Rastro).



- En el archivo de GeoGebra realice la siguiente construcción:
- Marque los puntos no alineados A, B, C y O (utilice la herramienta Punto).
 - Construya el triángulo ABC (utilice la herramienta Polígono).
 - Construya la circunferencia de centro O y radio OA (utilice la herramienta Circunferencia (centro, punto)).
 - Construya las mediatrices de los lados AB y AC del triángulo (utilice la herramienta Mediatriz).



- e) Si O pertenece a la mediatriz relativa al lado AB ¿Qué puede decir de la circunferencia y el triángulo construídos?

Sugerencia:
Puede hacer uso de las herramientas Línea/Bisar punto y Relación para corroborar sus observaciones.

As x

- f) Si O pertenece a la mediatriz relativa al lado AC ¿Qué puede decir de la circunferencia y el triángulo construídos?

Sugerencia:
Puede hacer uso de las herramientas Línea/Bisar punto y Relación para corroborar sus observaciones.

As x

- g) ¿Dónde debe ubicarse el punto O para que la circunferencia pase por A, B y C?

As x

Describa la utilidad de las herramientas/Comando de GeoGebra presentadas.

- Relación.
- Línea/Bisar punto.
- Rastro.

As x

ANEXO 2

ACTIVIDAD 1

Abra un archivo de GeoGebra y en la Vista gráfica realice la siguiente construcción:

- Marque los puntos A y C.
- Construya la recta que pasa por A y C, denótela por L.
- Marque el punto B en uno de los semiplanos definidos por L.
- Construya el simétrico de B respecto a la recta L, denótelo por D.
- Construya el cuadrilátero ABCD.

¿Cómo se llama el cuadrilátero ABCD?

Respecto al cuadrilátero ABCD, realice conjeturas sobre el(los) tipo(s) de cuadrilátero(s) que puede transformarse al arrastrar uno de sus vértices y la condición que lo genera. Realice una conjetura para cada caso.



ACTIVIDAD 2

Abra un archivo de GeoGebra y en la Vista gráfica realice la siguiente construcción:

- Marque un punto fijo P en la Vista gráfica.
- Construya una recta r que pase por P .
- Sobre r , marque un punto C ($C \neq P$).
- Construya el simétrico de C respecto a P , denótelo por A .
- Marque el punto D en uno de los semiplanos determinados por r .
- Construya la recta L que pase por D y P .
- Construya una circunferencia de centro C y radio CA .
- Marque el punto B , punto de intersección de la circunferencia y la recta L que se encuentra en el semiplano definido por r que no contiene a D .
- Construya el cuadrilátero $ABCD$.

Respecto al cuadrilátero $ABCD$, realice conjeturas sobre el(los) tipo(s) de cuadrilátero(s) que puede transformarse al arrastrar uno de sus vértices y la condición que lo genera. Realice una conjetura para cada caso.

