

**Pontificia Universidad Católica del Perú**

**Escuela de Posgrado**



**Estudio teórico y experimental del comportamiento dinámico de una estructura articulada cuya geometría es modificada por elementos tensores en forma análoga a una articulación del dedo humano, sistema aplicado al desarrollo potencial de elementos alares de aeronaves subsónicas**

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Ingeniería Mecánica que presenta:

Luis Francisco Córdova Córdova

Asesor:

Richard Alberto Rivera Campos

Lima, 2024

## Informe de Similitud

Yo, Richard Alberto Rivera Campos, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis titulada Estudio teórico y experimental del comportamiento dinámico de una estructura articulada cuya geometría es modificada por elementos tensores en forma análoga a una articulación del dedo humano, sistema aplicado al desarrollo potencial de elementos alares de aeronaves subsónicas, del autor Luis Francisco Córdova Córdova, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 11%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 11/04/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de investigación, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 11 de abril de 2024.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Rivera Campos Richard Alberto	
DNI: 18099258	Firma 
ORCID: 0000-0003-3368-6419	



Dedicado a mis padres,  
quienes siempre me han alentado  
a luchar por mis sueños.

# Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el Prof. Richard Rivera, por sus enseñanzas, consejos y valiosos aportes para la elaboración de esta tesis. Las contribuciones del Prof. Rivera fueron fundamentales para el desarrollo experimental de esta tesis.

Mi gratitud también va dirigida al Prof. Jorge Alencastre por transmitirme su pasión por las vibraciones mecánicas, así como por guiarme y aconsejarme no sólo durante el desarrollo de esta tesis, sino durante todo el programa de maestría.

Asimismo, agradezco al Prof. Jorge Rodríguez por haberme motivado a estudiar esta maestría al invitarme gentilmente a asistir a sus clases de Dinámica y Resistencia de Materiales mientras yo terminaba mis estudios de pregrado en Ingeniería Industrial.

Por último, pero no por ello menos importante, agradezco a mis padres por apoyarme y alentarme todos los días a luchar por mis sueños. Sin ellos, ni esta tesis ni ninguno de mis logros hubieran sido posibles.

# Resumen

El objetivo general de esta tesis es estudiar teórica y experimentalmente el comportamiento dinámico de una estructura articulada construida a partir de elementos viga y barra que es utilizada como modelo simplificado de un ala articulada de una aeronave subsónica y cuya geometría es modificada mediante un sistema propuesto de actuación análogo al hallado en una articulación del dedo humano.

Inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano, el sistema propuesto de actuación consiste en el uso de cables tensores a modo de tendones artificiales para modificar la rigidez y permitir el cambio geométrico de la estructura estudiada. Al permitir que alas articuladas adapten una posición óptima durante todas las fases de vuelo, este sistema de actuación generaría operaciones más eficientes y una menor huella de carbono que las alas rígidas, las cuales están normalmente diseñadas para tener un desempeño óptimo sólo en el rango de velocidad crucero.

Para estudiar el comportamiento dinámico de la estructura articulada con tendones artificiales, se desarrollaron tres modelos matemáticos y se formularon sus ecuaciones de movimiento. Asimismo, se construyó un modelo experimental y se diseñó tres grupos de experimentos para evaluar los efectos de las variaciones de tensión y geometría sobre las frecuencias naturales de la estructura.

A partir de la comparación de resultados teóricos y experimentales, se concluyó que los modelos matemáticos propuestos son adecuados para predecir el comportamiento dinámico de la estructura articulada con tendones artificiales, y que las modificaciones de tensión y geometría reconfiguran las frecuencias naturales del sistema dinámico.

# Abstract

The objective of this thesis is to study theoretically and experimentally the dynamic response of an articulated structure based on beam and bar elements that is used as a simplified model of an articulated subsonic aircraft wing, and whose geometry is modified through a proposed actuation system analogous to the one found in an articulation of the human finger.

Inspired in the extension and flexion systems of the human finger, the proposed actuation system consists of tensioning cables that work as artificial tendons to modify both stiffness and geometry of the structure in study. By enabling articulated wings to adapt an optimal position during all flight phases, the proposed actuation system would generate more efficient operations and a smaller carbon footprint than rigid wings, which are typically designed to perform optimally at cruise only.

To study the dynamic response of an articulated structure with artificial tendons, three mathematical models were developed, and their equations of motion were formulated. Additionally, an experimental model was built, and three groups of experiments were designed to evaluate the effects of the variation in tension and wing position (extension/flexion) upon the natural frequencies of the structure.

Based on the assessment of theoretical and experimental results, it was concluded that the mathematical models proposed for the articulated structure actuated with artificial tendons are adequate to predict the dynamic response of the structure, and that variations in tension and wing position (extension/flexion) reconfigure the natural frequencies of the dynamic system.

# Tabla de Contenido

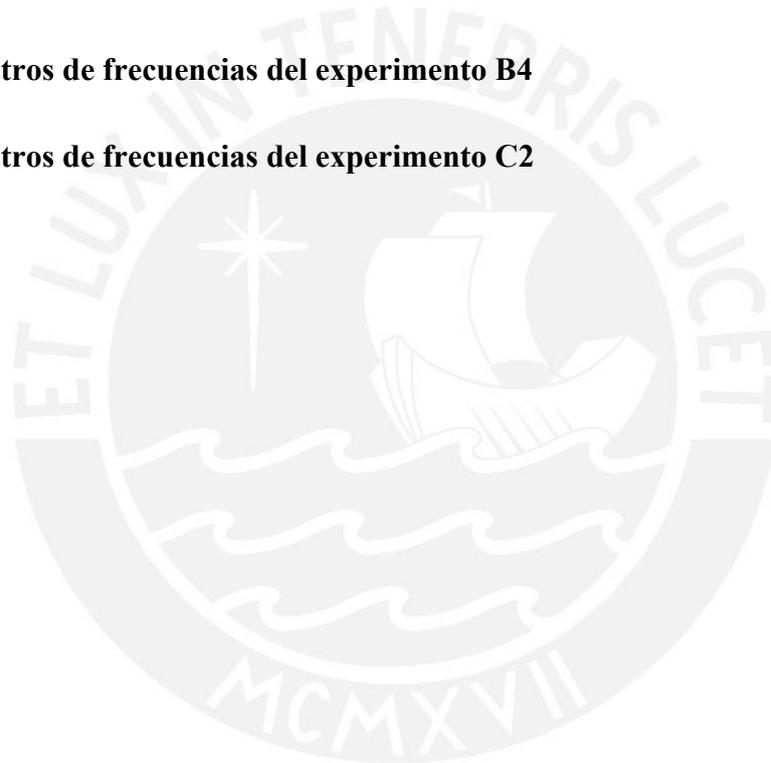
<b>Dedicatoria</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Tabla de Contenido</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xx</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xxii</b>
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Problemática	1
1.1.1. Desafíos de la industria global del transporte aéreo	1
1.1.2. Desafíos del Ala de Envergadura Adaptable	3
1.2. Propuesta de solución	5
1.2.1. Alas articuladas actuadas con tendones artificiales	5
1.2.2. Actuación inspirada en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano	6
1.2.3. Vibraciones mecánicas	7
1.3. Objetivos	8
1.4. Alcance	8

1.5. Justificación	9
1.6. Metodología	9
<b>Capítulo 2. Marco Teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Anatomía de la mano humana: Tendones Extensores y Flexores (Drake et al., 2011)	11
2.2. Anatomía de la mano aviar: Tendones Extensores y Flexores (König et al., 2016)	15
<b>Capítulo 3. Estado del Arte</b>	<b>18</b>
3.1. Ala de Envergadura Adaptable (Kamlet, 2016; 2018; NASA, 2017; 2020; Rosenberg, 2018)	18
3.2. Ave artificial con alas articuladas y torsión activa (Festo, 2011)	19
3.3. Mecanismo para modificar el perfil alar usando cables de aleación con memoria de forma (Kang et al., 2012)	20
3.4. Estudio dinámico del sistema araña – tela de araña en condiciones de resonancia (Alencastre et al., 2016)	21
3.5. Mano robótica de estructura modular (Rodić et al., 2013)	22
3.6. Sistema robótico de tendones flexores Glove-II (Tran et al., 2020)	23
<b>Capítulo 4. Análisis Dinámico</b>	<b>25</b>
4.1. Modelo de un dedo humano de 2 grados de libertad	26
4.1.1. Definición del modelo conceptual	26
4.1.2. Determinación de las ecuaciones de movimiento	28
4.2. Modelo de un Ala Articulada actuada con Tendones Artificiales de 2 grados de libertad	35
4.2.1. Definición del modelo conceptual	35
4.2.2. Determinación de las ecuaciones de movimiento	38
4.3. Modelo de un Ala Articulada actuada con Tendones Artificiales de 3 grados de libertad	43
4.3.1. Definición del modelo conceptual	43
4.3.2. Determinación de las ecuaciones de movimiento	46
<b>Capítulo 5. Ensayos Experimentales</b>	<b>56</b>
5.1. Modelo conceptual	56

5.2. Modelo experimental	57
5.2.1. Diseño	57
5.2.2. Montaje	62
5.3. Ensayo de Impacto (“Bump Test”)	64
5.4. Instrumentación	64
5.5. Ensayos Experimentales	67
5.5.1. Experimento Preliminar A1: Determinación de la curva fuerza-deformación de los cables tensores	69
5.5.1.1. Objetivo	69
5.5.1.2. Procedimiento	69
5.5.1.3. Resultados	70
5.5.2. Experimento Preliminar A2: Determinación de la rigidez de la viga ( $k_1$ ) del modelo experimental	74
5.5.2.1. Objetivo	74
5.5.2.2. Procedimiento	74
5.5.2.3. Resultados	75
5.5.3. Experimento Principal B1: Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra completamente extendida (geometría $\bar{\theta} = \pi/2$ )	79
5.5.3.1. Objetivo	79
5.5.3.2. Procedimiento	80
5.5.3.3. Resultados	82
5.5.4. Experimento Complementario C1: Identificación de la primera frecuencia natural de la barra del modelo experimental	86
5.5.4.1. Objetivo	86
5.5.4.2. Procedimiento	86
5.5.4.3. Resultados	87
5.5.5. Experimento Principal B2: Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada (geometría $\bar{\theta} = \pi/4$ )	91
5.5.5.1. Objetivo	91
5.5.5.2. Procedimiento	91
5.5.5.3. Resultados	93

5.5.6. Experimento Principal B3: Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada (geometría $\bar{\theta} = \pi/6$ )	95
5.5.6.1. Objetivo	95
5.5.6.2. Procedimiento	95
5.5.6.3. Resultados	96
5.5.7. Experimento Principal B4: Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra completamente flexionada (geometría $\bar{\theta} = 0$ )	98
5.5.7.1. Objetivo	98
5.5.7.2. Procedimiento	98
5.5.7.3. Resultados	99
5.5.8. Experimento Complementario C2: Evaluación del efecto de modificar únicamente la geometría del ala articulada sobre las frecuencias naturales de la estructura sin alterar la tensión de los cables	101
5.5.8.1. Objetivo	101
5.5.8.2. Procedimiento	101
5.5.8.3. Resultados	102
<b>Capítulo 6. Análisis de Resultados</b>	<b>104</b>
6.1. Determinación de las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental	104
6.1.1. Supuestos y consideraciones	106
6.1.1.1. Desplazamientos pequeños de $\theta$	106
6.1.1.2. Geometría	106
6.1.1.3. Disposición vertical del modelo experimental	106
6.1.2. Parámetros dinámicos	109
6.1.2.1. Masas ( $m_1, m_2$ )	109
6.1.2.2. Longitudes ( $l_1, l_2$ )	110
6.1.2.3. Rigidez de la viga ( $k_1$ )	110
6.1.2.4. Rigidez torsional por acción de los cables tensores sobre la barra ( $k_2$ )	111
6.1.3. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales	114
6.1.4. Comparación de resultados teóricos y experimentales	117

<b>Capítulo 7. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>120</b>
7.1. Conclusiones	120
7.2. Recomendaciones	123
<b>Referencias</b>	<b>125</b>
<b>Anexo 1: Espectros de frecuencias del experimento B1</b>	<b>130</b>
<b>Anexo 2: Espectros de frecuencias del experimento B2</b>	<b>142</b>
<b>Anexo 3: Espectros de frecuencias del experimento B3</b>	<b>147</b>
<b>Anexo 4: Espectros de frecuencias del experimento B4</b>	<b>152</b>
<b>Anexo 5: Espectros de frecuencias del experimento C2</b>	<b>157</b>



# Índice de Figuras

## Capítulo 1. Introducción

Figura 1.1. Retorno sobre el capital invertido en la industria global del transporte aéreo entre 2008 y 2022	2
Figura 1.2. Ala de Envergadura Adaptable	4
Figura 1.3. Estructuras óseas homólogas entre brazo humano y ala de ave	6

## Capítulo 2. Marco Teórico

Figura 2.1. Sistema de músculos y tendones que permiten la extensión de los dedos de la mano. Vista dorsal.	13
Figura 2.2. Sistema de músculos y tendones que permiten la flexión de los dedos de la mano. Vista palmar.	14
Figura 2.3. Huesos del ala de un ave	15
Figura 2.4. Sistema de músculos y tendones del ala izquierda de un ave. Vista dorsal.	17
Figura 2.5. Sistema de músculos y tendones del ala izquierda de un ave. Vista Ventral.	17

## Capítulo 3. Estado del Arte

Figura 3.1. Ala de Envergadura Adaptable	19
Figura 3.2. SmartBird de Festo	20
Figura 3.3. Mecanismo de Kang et al. para modificar el perfil alar	21

Figura 3.4. Esquema de los tendones artificiales que permiten los movimientos de abducción, aducción, extensión y flexión de los dedos en la mano de Rodić et al.	22
Figura 3.5. Principio de actuación de los dedos de la mano de Rodić et al.	23
Figura 3.6. Exoesqueleto robótico Glove-II	24

#### **Capítulo 4. Análisis Dinámico**

Figura 4.1. Modelo barra–barra del dedo humano sin tendones	26
Figura 4.2. Tendones y huesos del dedo humano	26
Figura 4.3. Modelo barra–barra del dedo humano con tendones	27
Figura 4.4. Fuerzas del modelo barra–barra del dedo humano	27
Figura 4.5. Modelo simplificado barra–barra del dedo humano	28
Figura 4.6. Vectores de posición $r_1$ y $r_2$	29
Figura 4.7. Modelo viga–barra del ala articulada sin tendones artificiales	35
Figura 4.8. Tendones y huesos del dedo humano	35
Figura 4.9. Modelo viga–barra del ala articulada con tendones artificiales	36
Figura 4.10. Fuerzas del modelo viga–barra del ala articulada con tendones artificiales	36
Figura 4.11. Modelo simplificado viga–barra del ala articulada con tendones artificiales	37
Figura 4.12. Vector de posición $r_c$	38
Figura 4.13. Modelo viga–barra–barra del ala articulada sin tendones artificiales	43
Figura 4.14. Tendones y huesos del dedo humano	43
Figura 4.15. Modelo viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales	44
Figura 4.16. Fuerzas del modelo viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales	45
Figura 4.17. Modelo simplificado viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales	45
Figura 4.18. Vectores de posición $r_2$ y $r_3$	47

#### **Capítulo 5. Ensayos Experimentales**

Figura 5.1. Modelo conceptual de un ala articulada formada por una viga en voladizo y una barra	57
Figura 5.2. Dimensiones generales de un Airbus A320 Neo	57
Figura 5.3. Viga–barra articulada del modelo experimental	60

Figura 5.4. Cuerdas y clavijas de guitarra utilizadas en el modelo experimental	61
Figura 5.5. Montaje del modelo experimental	62
Figura 5.6. Esquemas del modelo conceptual y del modelo experimental	63
Figura 5.7. Esquema de la instrumentación empleada para medición de frecuencias	65
Figura 5.8. Esquema de la instrumentación empleada para medición de frecuencias incluyendo un micrófono para determinar la tensión de los cables tensores del modelo experimental	66
Figura 5.9. Hojas técnicas de la instrumentación	66
Figura 5.10. Sistema de instrumentación	67
Figura 5.11. Esquema del experimento A1	69
Figura 5.12. Curva fuerza-deformación del cable 1 del modelo experimental (194mm)	72
Figura 5.13. Curva fuerza-deformación del cable 2 del modelo experimental (200 mm)	72
Figura 5.14. Medición de frecuencias naturales en la viga del modelo experimental	75
Figura 5.15. Espectro de frecuencias de la viga del modelo experimental sin masa adicional	75
Figura 5.16. Espectro de frecuencias para la viga del modelo experimental con masa adicional	76
Figura 5.17. Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B1	79
Figura 5.18. Modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B1	80
Figura 5.19. Clavija de guitarra utilizada en el modelo experimental	81
Figura 5.20. Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = \pi/2$	83
Figura 5.21. Modelo experimental con elemento rigidizador	87
Figura 5.22. Frecuencia natural del ala articulada del modelo experimental con tensión media de 201.6 N	87
Figura 5.23. Comparación de espectro de frecuencias del modelo experimental con tensión media 201.6 N (curva roja) y con tensión media $[201.6 - \Delta_1]$ N (curva verde)	88
Figura 5.24. Comparación de espectro de frecuencias del modelo experimental con tensión media 201.6 N (curva roja) y con tensión media $[201.6 - \Delta_1 - \Delta_2]$ N (curva verde)	89
Figura 5.25. Comparación de espectro de frecuencias del modelo experimental con tensión media 201.6 N (curva roja) y con tensión media $[201.6 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3]$ N (curva verde)	89

Figura 5.26. Frecuencia natural del ala articulada del modelo experimental con elemento rigidizador	90
Figura 5.27. Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B2	91
Figura 5.28. Modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B2	92
Figura 5.29. Verificación de la geometría del ala articulada del modelo experimental durante mediciones	93
Figura 5.30. Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = \pi/4$	94
Figura 5.31. Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B3	95
Figura 5.32. Modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B3	96
Figura 5.33. Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = \pi/6$	97
Figura 5.34. Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B4	98
Figura 5.35. Modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B4	99
Figura 5.36. Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = 0$	100
Figura 5.37. Modelo experimental del ala articulada sin cables y con platinas de unión del experimento C2	101
Figura 5.38. Efecto del cambio de geometría en las primeras dos frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada sin cables tensores	102

## Capítulo 6. Análisis de Resultados

Figura 6.1. Esquemas del modelo conceptual y del modelo experimental	107
Figura 6.2. Deformación de la cuerda $i$ durante la oscilación $\theta$	112
Figura 6.3. Frecuencias naturales teóricas del modelo experimental con $\bar{\theta} = \pi/2$	116
Figura 6.4. Comparación de frecuencias naturales teóricas y experimentales del modelo experimental con $\bar{\theta} = \pi/2$	117

## Anexo 1: Espectros de frecuencias del experimento B1

Figura B1.1. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	130
Figura B1.2. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	131
Figura B1.3. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 17.6 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	131
Figura B1.4. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 17.6 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	132
Figura B1.5. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 42.0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	132
Figura B1.6. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 42.0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	133
Figura B1.7. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 73.1 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	133
Figura B1.8. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 73.1 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	134
Figura B1.9. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 110.9 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	134
Figura B1.10. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 110.9 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	135
Figura B1.11. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 155.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	135
Figura B1.12. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 155.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	136
Figura B1.13. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 236.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	136
Figura B1.14. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 236.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	137
Figura B1.15. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 334.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	137

Figura B1.16. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 334.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	138
Figura B1.17. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 449.5 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	138
Figura B1.18. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 449.5 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	139
Figura B1.19. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 531.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	139
Figura B1.20. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 531.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	140
Figura B1.21. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 673.7 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	140
Figura B1.22. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ y tensión media 673.7 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	141

## **Anexo 2: Espectros de frecuencias del experimento B2**

Figura B2.1. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0}$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	142
Figura B2.2. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0}$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	143
Figura B2.3. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0} + 17.6$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	143
Figura B2.4. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0} + 17.6$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	144
Figura B2.5. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0} + 42.0$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	144
Figura B2.6. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0} + 42.0$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	145
Figura B2.7. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0} + 73.1$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	145
Figura B2.8. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ y tensión media $T_{m,0} + 73.1$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	146

### Anexo 3: Espectros de frecuencias del experimento B3

Figura B3.1. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0}$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	147
Figura B3.2. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0}$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	148
Figura B3.3. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0} + 17.6$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	148
Figura B3.4. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0} + 17.6$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	149
Figura B3.5. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0} + 42.0$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	149
Figura B3.6. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0} + 42.0$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	150
Figura B3.7. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0} + 73.1$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	150
Figura B3.8. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/6$ y tensión media $T_{m.0} + 73.1$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	151

### Anexo 4: Espectros de frecuencias del experimento B4

Figura B4.1. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m.0}$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	152
Figura B4.2. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m.0}$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	153
Figura B4.3. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m.0} + 17.6$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	153
Figura B4.4. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m.0} + 17.6$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	154
Figura B4.5. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m.0} + 42.0$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	154
Figura B4.6. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m.0} + 42.0$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	155

Figura B4.7. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m,0} + 73.1$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	155
Figura B4.8. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ y tensión media $T_{m,0} + 73.1$ N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	156

### **Anexo 5: Espectros de frecuencias del experimento C2**

Figura C2.1. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	157
Figura C2.2. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/2$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	158
Figura C2.3. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/3$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	158
Figura C2.4. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/3$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	159
Figura C2.5. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	159
Figura C2.6. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = \pi/4$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	160
Figura C2.7. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ con acelerómetro fijado a la superficie de la barra	160
Figura C2.8. Espectro de frecuencias para $\bar{\theta} = 0$ con acelerómetro fijado a la superficie de la viga	161

# Índice de Tablas

## Capítulo 1. Introducción

Tabla 1.1. Márgenes de utilidad neta de la industria global del transporte aéreo entre 2013 y 2022	3
--	---

## Capítulo 5. Ensayos Experimentales

Tabla 5.1. Longitud, ancho y profundidad del empotramiento del ala del modelo experimental	58
Tabla 5.2. Espesor del ala del modelo experimental	58
Tabla 5.3. Dimensiones de la viga y la barra del modelo experimental	59
Tabla 5.4. Experimentos realizados	68
Tabla 5.5. Deformaciones observadas en cable de 935mm debido al peso de la masa M	70
Tabla 5.6. Deformaciones calculadas para cable 1 del modelo experimental (194 mm) debido al peso de la masa M	71
Tabla 5.7. Deformaciones calculadas para cable 2 del modelo experimental (200 mm) debido al peso de la masa M	71
Tabla 5.8. Comparación entre frecuencias naturales observadas y frecuencias naturales calculadas para viga en voladizo con masa adicional de 9.58 g en su extremo libre	78
Tabla 5.9. Tensión de los cables del modelo experimental durante el experimento B1	82
Tabla 5.10. Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = \pi/2$	83

Tabla 5.11. Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = \pi/4$	93
Tabla 5.12. Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = \pi/6$	96
Tabla 5.13. Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con $\bar{\theta} = 0$	99
Tabla 5.14. Resultados del cambio de geometría en el modelo experimental del ala articulada sin cables tensores	102

## Capítulo 6. Análisis de Resultados

Tabla 6.1. Medición del peso de las partes del ala del modelo experimental	109
Tabla 6.2. Valores de la rigidez torsional $k_2$ en el experimento B1	113
Tabla 6.3. Frecuencias naturales teóricas del modelo experimental con $\bar{\theta} = \pi/2$	115
Tabla 6.4. Comparación de frecuencias naturales teóricas y experimentales del modelo experimental con $\bar{\theta} = \pi/2$	117

## Lista de Símbolos

Símbolo	Descripción	Unidades
$A$	Área transversal	$m^2$
$A_{ext}$	Trabajo de fuerzas externas	J
$b$	Ancho de viga	m
$C$	Centro de masa	
$C_i$	Centro de masa $i$ -ésimo	
$d$	Distancia del cable tensor al eje de la viga	m
$e_{ci}$	Distancia entre el eje de rotación de la barra y la cuerda $i$ -ésima	mm
$E$	Energía cinética	J
$E$	Módulo de elasticidad	GPa
$f_n$	$n$ -ésima frecuencia natural	Hz
$F_i$	Fuerza externa que actúa en la masa $i$ -ésima	N
$g$	Aceleración de la gravedad	$m/s^2$
$h$	Espesor de viga	m
$\hat{i}$	Vector unitario para el eje cartesiano $x$	

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>	<b>Unidades</b>
$I$	Momento de inercia de viga	$m^4$
$\hat{j}$	Vector unitario para el eje cartesiano $y$	
$J_C$	Momento de inercia del centro de masa	$kg \cdot m^2$
$J_{C_i}$	Momento de inercia del centro de masa $i$ -ésimo	$kg \cdot m^2$
$k$	Rigidez	N/m, N – m/rad
$k_{ci}$	Rigidez de la cuerda $i$ -ésima	N/mm, N/m
$k_i$	Rigidez del resorte $i$ -ésimo	N/m, N/mm, N – m/rad
$\hat{k}$	Vector unitario para el eje cartesiano $z$	
$\mathbb{K}$	Matriz de rigidez	N/m, N – m/rad
$l$	Longitud	m
$l_c$	Longitud de cuerda	m
$l_{ci}$	Longitud de la cuerda $i$ -ésima	m
$l_i$	Longitud de la masa $i$ -ésima	m
$l_o$	Longitud inicial	mm
$L$	Función de Lagrange	J
$m$	Masa	kg
$m_{articulación}$	Masa de articulación	kg
$m_{barra}$	Masa de barra	kg
$m_c$	Masa de cuerda	kg

Símbolo	Descripción	Unidades
$m_i$	Masa $i$ -ésima	kg
$m_{viga}$	Masa de viga	kg
$\mathbb{M}$	Matriz de masas	kg
$M_e$	Momento producido por la tensión de cable(s) extensor(es) sobre la viga	$\text{N} \cdot \text{m}$
$M_{e_i}$	Momento producido por la tensión del cable extensor $i$ -ésimo sobre la viga	$\text{N} \cdot \text{m}$
$M_f$	Momento producido por la tensión de cable(s) flexor(es) sobre la viga	$\text{N} \cdot \text{m}$
$M_{f_i}$	Momento producido por la tensión del cable flexor $i$ -ésimo sobre la viga	$\text{N} \cdot \text{m}$
$q_i$	$i$ -ésimo parámetro físico con el que se describe el comportamiento dinámico del sistema	m, rad
$\bar{Q}_i$	$i$ -ésimo fuerza generalizadas que no poseen un potencial	$\text{N}, \text{N} \cdot \text{m}$
$\mathbf{r}_i$	Vector de posición del centro de masa $i$ -ésimo	m
$\mathbf{r}_C$	Vector de posición del centro de masa	m
$R^2$	Coefficiente de determinación	
$t$	Tiempo	s
$T$	Tensión	N
$T_{c_i}$	Tensión de la cuerda $i$ -ésima	N
$T_e$	Tensión en el cable extensor	N
$T_{e_i}$	Tensión en el cable extensor $i$ -ésimo	N
$T_f$	Tensión en el cable flexor	N
$T_{f_i}$	Tensión en el cable flexor $i$ -ésimo	N
$T_m$	Tensión media entre dos cables	N

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>	<b>Unidades</b>
$T_{m.0}$	Tensión media inicial entre dos cables con la que se alcanzó determinada geometría	N
$U$	Energía Potencial	J
$U'$	Energía potencial del modelo experimental	J
$v$	Velocidad de onda de una cuerda	m/s
$v_i$	Vector de velocidad del centro de masa $i$ -ésimo	m/s
$v_c$	Vector de velocidad del centro de masa	m/s
$X$	Vector de desplazamientos	m, rad
$\hat{X}$	Vector de constantes	m, rad
$z_{ci}$	Deformación de la cuerda $i$ -ésima	mm
$y$	Desplazamiento vertical del extremo no empotrado de viga en voladizo	m
$\alpha$	Desplazamiento angular de barra desde su posición de equilibrio estático $\bar{\alpha}$	rad
$\bar{\alpha}$	Posición de equilibrio estático de barra	rad
$\beta_n$	Coficiente de la ecuación característica de una viga de la $n$ -ésima frecuencia natural	
$\delta_{ci}$	Deformación de la cuerda $i$ -ésima durante el desplazamiento angular $\theta$ de la barra	m
$\Delta$	Deformación lineal de cuerda	mm
$\Delta$	Delta, desviación	%
$\Delta_i$	Decremento de tensión $i$ -ésimo	N
$\theta$	Desplazamiento angular de barra desde su posición de equilibrio estático $\bar{\theta}$	rad
$\bar{\theta}$	Posición de equilibrio estático de barra	rad
$\lambda$	Longitud de onda de una cuerda	m

Símbolo	Descripción	Unidades
$\rho$	Densidad	$\text{kg/m}^3$
$\varphi$	Desplazamiento angular de barra desde su posición de equilibrio estático $\bar{\varphi}$	rad
$\bar{\varphi}$	Posición de equilibrio estático de barra	rad
$\omega$	Frecuencia natural	rad/s
$\omega_n$	$n$ -ésima frecuencia natural	rad/s
$\dot{(\square)}$	$\frac{d(\square)}{dt}$	
$\ddot{(\square)}$	$\frac{d^2(\square)}{dt^2}$	
$[\square]$	Matriz	



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Problemática

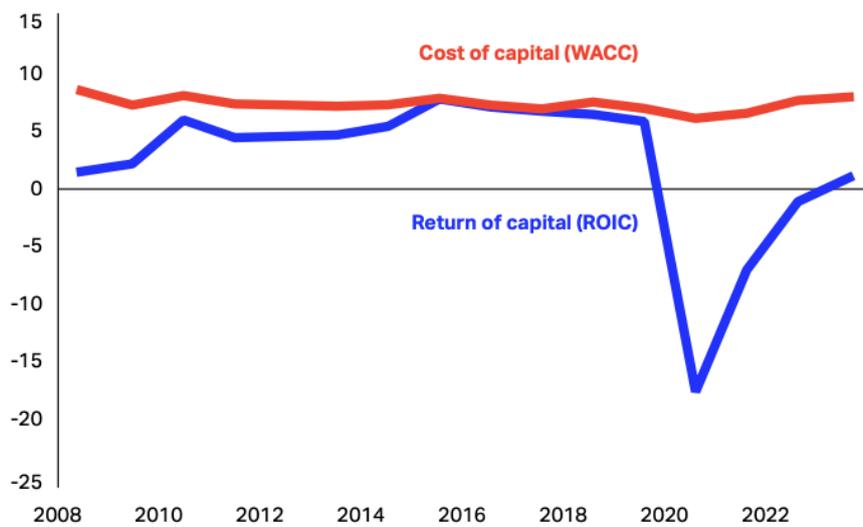
#### 1.1.1. Desafíos de la industria global del transporte aéreo

Los dos principales desafíos que afronta la industria del transporte aéreo a nivel global son el incremento de su rentabilidad y la reducción drástica de su huella de carbono.

Históricamente, la industria del transporte aéreo nunca ha reportado retornos sobre el capital invertido por encima de su costo de capital (IATA, 2022; Bouwer et al., 2022). De acuerdo con Mauboussin y Callahan (2022), especialistas de la multinacional financiera Morgan Stanley, una compañía crea valor cuando un dólar invertido en el negocio vale más que un dólar en el mercado, y esto sucede cuando la firma es capaz de hacer inversiones que generen un retorno por encima del costo de oportunidad del capital. Evidentemente, este no ha sido el caso de la industria del transporte aéreo a nivel global, cuya escasa rentabilidad se ha visto además agravada por la pandemia del COVID-19, tal como se observa en la figura 1.1.

**Figura 1.1**

*Retorno sobre el capital invertido en la industria global del transporte aéreo entre 2008 y 2022*



*Nota.* Comparación entre el retorno sobre el capital invertido (ROIC) en la industria global del transporte aéreo y su costo de capital (WACC) entre los años 2008 y 2022. Tomado de (IATA, 2022).

Para entender la escasa rentabilidad de la industria global del transporte aéreo, el ROIC puede descomponerse en dos ratios, tal como se ilustra en la ecuación (1.1). El primer ratio mide el margen de las operaciones por unidad de venta, mientras que el segundo evalúa la eficiencia de capital (Mauboussin y Callahan, 2022).

$$ROIC = \frac{\text{Utilidad Neta Operativa después de Impuestos}}{\text{Ventas}} \times \frac{\text{Ventas}}{\text{Capital Invertido}} \quad (1.1)$$

Al examinar los márgenes de la industria global del transporte aéreo en la tabla 1.1 y recordar que esta industria es de capital intensivo, se concluye que:

- a. La escasa rentabilidad sobre el capital invertido en la industria se debe a una combinación de bajos márgenes de venta y uso ineficiente de capital para generar ventas.
- b. Al ser los márgenes resultado de una gestión eficiente del capital, la industria del transporte aéreo necesita fundamentalmente reducir sus costos operativos.

**Tabla 1.1**

*Márgenes de utilidad neta de la industria global del transporte aéreo entre 2013 y 2022*

2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022E
1.5%	1.8%	5.0%	4.8%	5.0%	3.4%	3.1%	-36.0%	-8.3%	-1.0%

*Nota.* Los márgenes porcentuales fueron calculados al dividir la utilidad neta entre las ventas. Se agregó una E al año 2022 para indicar que es un valor estimado. Adaptado de (IATA, 2019; 2020; 2023).

Por otro lado, la industria del transporte aéreo fue responsable por el 2.5% de las emisiones globales de CO<sub>2</sub> y el 1.9% de las emisiones globales de gases de efecto invernadero durante el 2018 (Ritchie, 2020). Además, la Comisión Europea predice que para mediados del siglo XXI la creciente demanda por vuelos podría triplicar la emisión de gases de efecto invernadero sobre los niveles del 2005 (Ellerbeck, 2022). Ante este panorama, en el 2022 los países miembros de la Organización Internacional de Aviación Civil de las Naciones Unidas adoptaron el objetivo de cero emisiones netas de carbono para el año 2050. El logro de este objetivo dependerá del efecto combinado de múltiples medidas para la reducción de las emisiones de CO<sub>2</sub> en el transporte aéreo, las cuales incluyen la adopción de nuevas tecnologías, la optimización de las operaciones aéreas, y el incremento en la producción y utilización de combustibles sostenibles (Organización Internacional de Aviación Civil, 2022).

### **1.1.2. Desafíos del Ala de Envergadura Adaptable**

Las crecientes demandas en el transporte aéreo por un desempeño rentable y sostenible han llevado a la industria aeronáutica a replantear, entre muchos otros aspectos, el diseño de las alas de sus aeronaves y a desarrollar conceptos alternativos. Como resultado, la tecnología de las alas de aeronaves actuales y futuras se está orientando hacia el diseño de alas flexibles, livianas y de gran envergadura (Nguyen, 2014).

Uno de los conceptos alternativos para el rediseño de las alas de los aviones es el Ala de Envergadura Adaptable (o SAW por sus siglas en inglés, véase la figura 1.2). Desarrollado por la NASA, este concepto plantea el uso de alas con la capacidad de modificar su geometría para adaptarse a las distintas condiciones de vuelo (NASA, 2017). Inspirado en el vuelo de las aves, este concepto propone alas con articulaciones, de manera que la posición de las alas pueda ser optimizada durante todas las fases de vuelo (despegue, crucero, aterrizaje, etc.) (Kamlet, 2016; NASA, 2017; Rosenberg, 2018). Un actuador torsional en la articulación, fabricado de una aleación con memoria de forma, permite adaptar continuamente la geometría del ala a las

distintas condiciones de vuelo, generando mayor sustentación, menor resistencia aerodinámica y menor consumo de combustible que las alas rígidas (NASA, 2017). Esto se debe a que las alas rígidas están normalmente diseñadas para tener un desempeño óptimo solamente cuando la aeronave ha alcanzado el rango de velocidad crucero y el combustible almacenado en el interior de las alas ha sido consumido hasta la mitad (Nguyen, 2016).

## Figura 1.2

### *Ala de Envergadura Adaptable*



*Nota.* Prototipo de pruebas PTERA con Alas de Envergadura Adaptable aterrizando después de su primera serie de pruebas. Tomado de (Kamlet, 2018).

Según la NASA (2017), los esfuerzos anteriores a SAW para actuar alas articuladas fracasaron principalmente debido a que los sistemas de actuación eran muy pesados, voluminosos y poco prácticos para su uso. Por el contrario, el actuador de aleación con memoria de forma que propone SAW resulta más eficiente, compacto, de bajo mantenimiento, y 20% más liviano que su equivalente hidráulico. Todo ello ha llevado a la NASA a señalar que SAW ofrece el primer método práctico del uso de una articulación alar para mejorar el desempeño de aeronaves y su eficiencia de combustible.

Ahora bien, el SAW presentaría también algunos inconvenientes debido a su actuador de aleación con memoria de forma (o SMA por sus siglas en inglés). Según Elahinia (2016) y Jani et al. (2014), los actuadores de SMA presentan las siguientes desventajas:

- a. Baja frecuencia de actuación. El ciclo de actuación es lento debido a que el proceso de enfriamiento de la SMA toma mucho tiempo.
- b. Baja eficiencia energética como resultado de la transformación de calor en energía mecánica. Jani et al. (2014) advierten que la eficiencia energética de las SMA es a

menudo menor al 1% en aplicaciones prácticas y, por lo tanto, su uso en actuadores debe limitarse a áreas donde la eficiencia energética no sea un objetivo.

- c. Alto costo de manufactura del material. Según Jani et al. (2014), la mayoría de SMA de alta temperatura (como lo es la SMA de Níquel-Titanio-Hafnio usada por SAW) son muy difíciles de procesar y entrenar debido a su ductilidad limitada o a su pobre resistencia a la fatiga a temperatura ambiente. Asimismo, Elahinia et al. (2018) indican que las características termo-mecánicas del Ni-Ti-Hf agregan complejidad a su fabricación.
- d. Dificil control de movimiento debido a la histéresis, al comportamiento no lineal del material, y a la dificultad para medir variables de estado como la temperatura (Elahinia, 2016).

## **1.2. Propuesta de solución**

### **1.2.1. Alas articuladas actuadas con tendones artificiales**

Ante los desafíos que implica el uso de SMA, en esta tesis se propone un sistema alternativo de actuación para las alas articuladas inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano. El sistema de actuación propuesto consiste en el uso de cables tensores a modo de tendones artificiales para realizar la extensión y flexión de las alas. Ambos movimientos serán producidos por la acción de cabrestantes eléctricos localizados en el interior del empotramiento del ala y cuyas fuerzas serán transmitidas a través de cables tensores.

Entre las principales ventajas que ofrece esta propuesta frente a la actuación con SMA se encuentran:

- a. Mayor velocidad de actuación. A diferencia de las SMA, la actuación por cables no requiere de procesos de calentamiento o enfriamiento que ralentizan el ciclo de actuación.
- b. Menores costos: Los costos de materiales y de fabricación del actuador propuesto son inferiores a los costos de un actuador de SMA.
- c. Mayor eficiencia energética. En la actuación por cables, la energía eléctrica del cabrestante es transformada directamente en energía mecánica. En el caso de los SMA, la energía eléctrica primero debe convertirse en calor para luego transformarse en energía mecánica.

- d. Simpleza en la estructura mecánica del actuador. El actuador propuesto está conformado por cabrestantes, cables tensores y poleas.

Otra de las grandes ventajas que ofrece esta propuesta es su diseño inspirado en la naturaleza. En esta tesis se propone un sistema de actuación inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano.

### 1.2.2. Actuación inspirada en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano

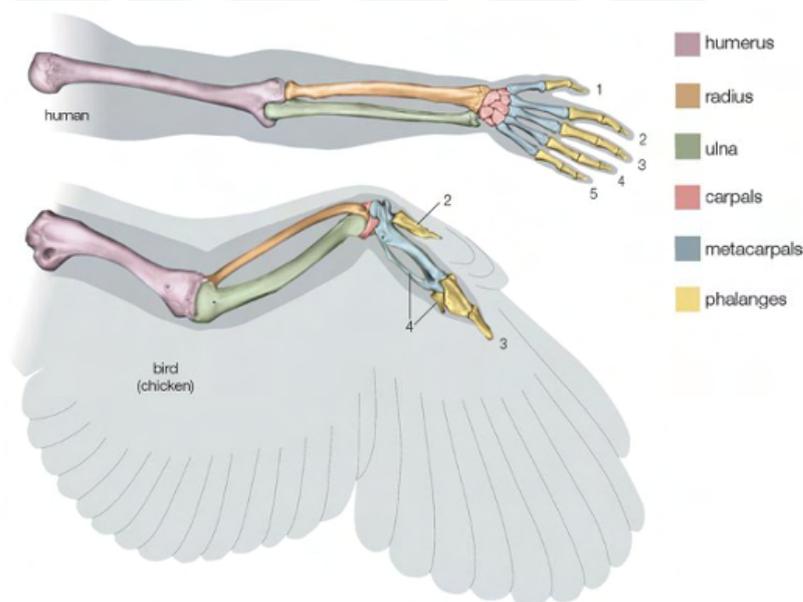
Se decidió proponer un sistema de actuación inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano debido a las siguientes cuatro razones:

- a. El brazo humano y las alas de las aves son estructuras homólogas.

Aunque realizan funciones distintas, ambas estructuras presentan patrones similares de huesos, músculos, tendones, nervios y vasos sanguíneos, así como orígenes embrionarios similares, lo que evidencia su descendencia de un ancestro evolutivo común (Britannica, 2016; Vilee, 2018). La figura 1.3 exhibe la similitud en las estructuras óseas del brazo humano y las alas de las aves.

**Figura 1.3**

*Estructuras óseas homólogas entre brazo humano y ala de ave*



*Nota.* Adaptado de (Britannica, 2016).

- b. El brazo humano y las alas de las aves presentan sistemas de extensión y flexión similares.

Los sistemas de extensión y flexión de las extremidades superiores de ambas especies están compuestos por exactamente tres subsistemas: extensión y flexión alrededor del codo, extensión y flexión alrededor de la muñeca, y extensión y flexión de los dedos. Estos tres subsistemas comparten los mismos principios de extensión y flexión: los tendones transmiten la fuerza mecánica de la contracción de los músculos extensores y flexores hacia los huesos, incrementando o reduciendo el ángulo entre dos huesos unidos por una articulación (Britannica, 2017; Britannica, 2019; Britannica, 2021).

- c. De los tres subsistemas de extensión y flexión de las extremidades superiores de humanos y aves, solamente el subsistema de los dedos presenta más de una articulación.

En este sentido, si se tuviera que optar por un sub-sistema para representar al sistema de extensión y flexión de toda la extremidad superior, se tendría que escoger al subsistema de los dedos.

- d. El subsistema de extensión y flexión del dedo humano cuenta con más grados de libertad que el del dedo aviar.

Para los movimientos de flexión y extensión, los dedos humanos cuentan con 3 y 4 grados de libertad, mientras que los dedos aviares presentan sólo 2 y 3 grados de libertad, dependiendo del dedo. Considerando que con el subsistema de extensión y flexión del dedo se busca estudiar la extensión y flexión de toda la extremidad superior, lo más adecuado será optar por la opción que ofrece el mayor número de grados de libertad; es decir, el dedo humano. Es importante notar además que, un mayor grado de libertad en el ala articulada, resultará en una mayor capacidad para adaptarse a distintas geometrías.

### **1.2.3. Vibraciones mecánicas**

Para determinar la potencial aplicación en la industria de las alas articuladas con el sistema propuesto de actuación inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano, se deberán realizar diversas investigaciones.

En esta tesis, la investigación estará enfocada en el estudio del comportamiento dinámico de una estructura articulada utilizada como modelo simplificado de un ala articulada y cuya

geometría es modificada por elementos tensores en forma análoga a una articulación del dedo humano. Este estudio dinámico será desarrollado a partir de modelos teóricos y registros de vibración inducida.

### **1.3. Objetivos**

El objetivo general de esta tesis es estudiar teórica y experimentalmente el comportamiento dinámico de una estructura articulada construida a partir de elementos viga y barra que es utilizada como modelo simplificado de un ala articulada de una aeronave subsónica y cuya geometría es modificada por elementos tensores en forma análoga a una articulación del dedo humano.

Los objetivos específicos de esta investigación son:

- a. Modelar conceptualmente el sistema dinámico a partir de elementos viga y barra.
- b. Formular las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema para el modelo conceptual desarrollado.
- c. Construir un modelo experimental del sistema a partir de elementos viga y barra, y medir sus frecuencias naturales.
- d. Determinar analíticamente las frecuencias naturales del modelo experimental resolviendo las ecuaciones de movimiento propuestas.
- e. Determinar la validez del modelo matemático propuesto comparando las mediciones del modelo experimental con los resultados analíticos.
- f. Comprender los efectos de la tensión de los cables y de la posición (flexión/extensión) del ala articulada sobre la vibración del sistema.

### **1.4. Alcance**

El estudio de vibraciones mecánicas en esta tesis está limitada al desarrollo y análisis de modelos teóricos y experimentales simplificados de alas articuladas de aviones subsónicos actuadas con cables tensores a modo de tendones artificiales.

Los siguientes puntos están fuera del alcance de esta tesis y serán abordados en futuras investigaciones:

- a. Diseño mecánico de las alas articuladas actuadas mediante cables tensores.
- b. Determinación del amortiguamiento.

- c. Experimentación con vibración forzada.
- d. Análisis por Elementos Finitos (FEM).
- e. Estudio del sistema propuesto para regímenes de vuelo supersónico e hipersónico.

## **1.5. Justificación**

El desarrollo e implementación de alas articuladas con la capacidad de modificar su geometría en cada etapa de vuelo permitiría mejorar la rentabilidad de la industria global del transporte aéreo y reducir su huella de carbono mediante un consumo más eficiente de combustible.

Esta tesis propone un sistema innovador de actuación mediante tendones artificiales inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano para modificar la geometría de alas articuladas y optimizar su performance en todas las etapas de operación. Además, esta propuesta posee el potencial de ser una alternativa más eficiente que el actuador por memoria de forma del Ala de Envergadura Adaptable (SAW) desarrollada por la NASA.

Asimismo, esta tesis investiga el comportamiento dinámico de las alas articuladas actuadas con tendones artificiales mediante modelos teóricos y experimentales simplificados, sentando las bases para el desarrollo de estudios posteriores que permitan determinar la potencial aplicación en la industria de alas articuladas con el sistema de actuación propuesto.

## **1.6. Metodología**

Primeramente, se hizo una revisión de la literatura para explorar el estado del arte y definir el marco teórico de esta investigación. El marco teórico y el estado del arte se exponen en los capítulos 2 y 3, respectivamente.

Para el estudio teórico de vibraciones, se desarrollaron tres modelos matemáticos y se formularon sus ecuaciones de movimiento. Los modelos matemáticos que se propusieron son: (i) dedo humano de dos grados de libertad, (ii) ala articulada con tendones artificiales de dos grados de libertad y (iii) ala articulada con tendones artificiales de tres grados de libertad. Este análisis fue desarrollado en el capítulo 4.

Para el estudio experimental de vibraciones, se construyó un modelo experimental de un ala articulada con tendones artificiales de dos grados de libertad y se diseñó tres grupos de experimentos para evaluar los efectos de las variaciones de tensión en los cables y de posición

(flexión/extensión) en el ala articulada sobre las frecuencias naturales de la estructura. El capítulo 5 comprende el estudio experimental dinámico.

En el capítulo 6 se determinó las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental mediante la solución de las ecuaciones de movimiento propuestas en el capítulo 4. Estos resultados teóricos se compararon con las mediciones del estudio experimental del capítulo 5 para determinar la validez de los modelos matemáticos propuestos para un ala articulada con tendones artificiales.

Finalmente, en el capítulo 7 se expusieron las conclusiones y recomendaciones de esta investigación.



## Capítulo 2

### Marco Teórico

#### **2.1. Anatomía de la mano humana: Tendones Extensores y Flexores (Drake et al., 2011)**

En la mano humana se localizan dos grandes grupos de tendones: los tendones extensores y los tendones flexores. Los tendones extensores permiten que los dedos se estiren, mientras que los tendones flexores permiten que los dedos se contraigan. La tensión de estos tendones se origina en dos grupos de músculos: músculos extensores y músculos flexores, los cuales se ubican en el antebrazo. Con respecto al sistema músculo–tendón, Xu (2018) hace la siguiente analogía: “si consideramos a los músculos como los actuadores que generan las fuerzas de contracción, los tendones de la mano funcionan como el sistema de transmisión que inteligentemente distribuye las fuerzas y transmite los torques a cada articulación de los dedos”.

El grupo de músculos que permite la extensión de los dedos de la mano está compuesto por:

- Músculo extensor digital común: Permite la extensión de todos los dedos con excepción del pulgar. Es el músculo extensor principal.
- Músculo extensor del dedo índice: Contribuye con la extensión del dedo índice y permite una extensión independiente de este dedo con respecto a los otros dedos.
- Músculo extensor del dedo meñique: Contribuye con la extensión del dedo meñique y permite una extensión independiente de este dedo en relación con los otros dedos.

- Músculos extensores corto y largo del dedo pulgar.

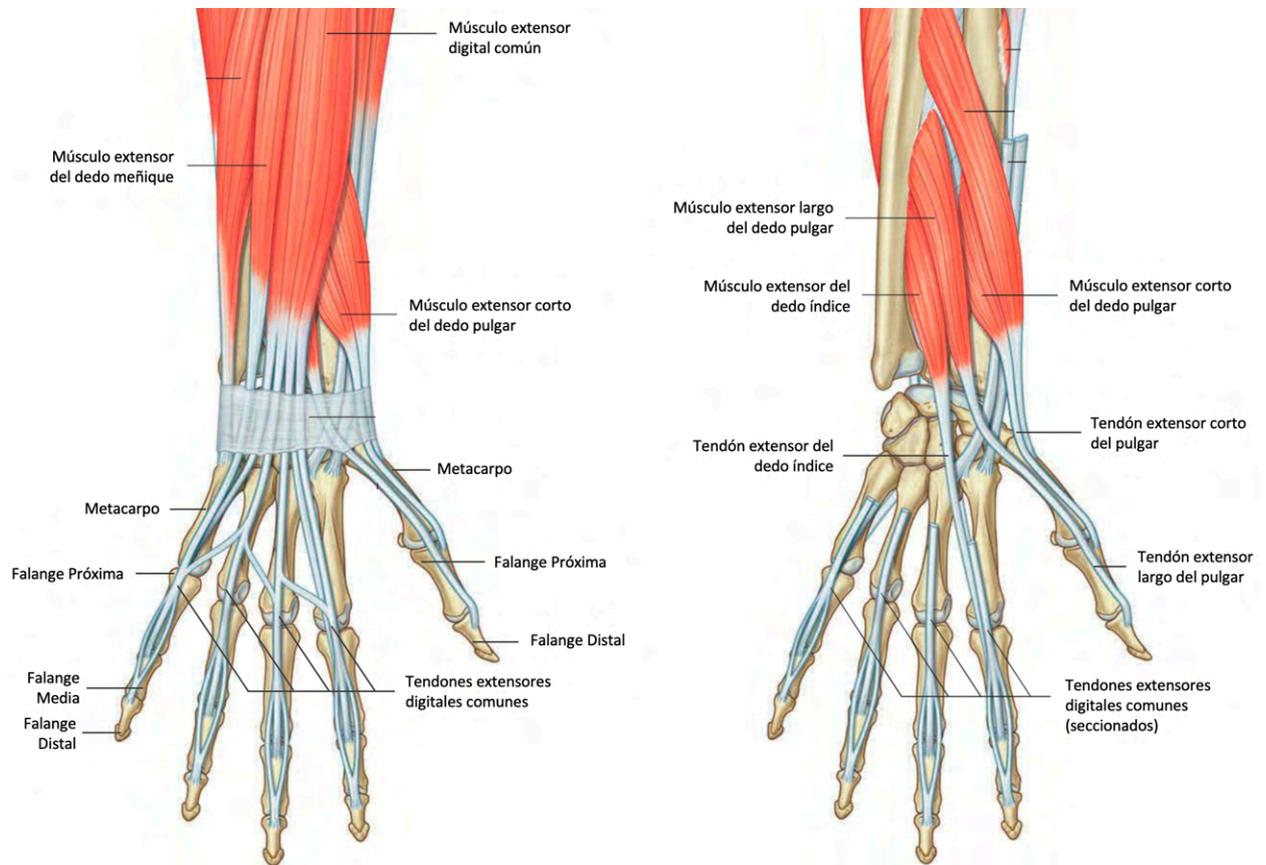
Los tendones que se desprenden de este grupo de músculos reciben el mismo nombre: tendón extensor de los dedos, tendón extensor del dedo índice, tendón extensor del dedo meñique, y tendones extensores corto y largo del dedo pulgar. Este grupo de tendones se dispone de la siguiente manera:

- Tendón extensor digital común: Después de recorrer el metacarpo y parte de la falange proximal, este tendón se divide en 3 bandas. La banda media se ancla en la base de la falange media, mientras que las bandas laterales se anclan en la base de la falange distal.
- Tendón extensor del dedo índice: Se inserta en la base de la falange distal del dedo índice después de recorrer el metacarpo y las falanges proximal y media.
- Tendón extensor del dedo meñique: Se inserta en la base de la falange distal del dedo meñique luego de recorrer el metacarpo y las falanges proximal y media.
- Tendones extensores corto y largo del dedo pulgar: Después de recorrer el metacarpo del pulgar, el tendón extensor corto se ancla en la base de la falange media, y el tendón extensor largo se ancla en la base de la falange distal.

El sistema descrito de músculos y tendones que permite la extensión de los dedos de la mano se ilustra en la figura 2.1.

## Figura 2.1

*Sistema de músculos y tendones que permiten la extensión de los dedos de la mano. Vista dorsal.*



*Nota.* Adaptado de (Drake et al., 2011), p. 401-402.

Por otro lado, la flexión de los dedos de la mano es generada por la acción del siguiente grupo de músculos:

- Músculo flexor digital superficial
- Músculo flexor digital profundo
- Músculo flexor largo del dedo pulgar

La combinación de los primeros dos músculos permite la flexión de todos los dedos de la mano con excepción del dedo pulgar.

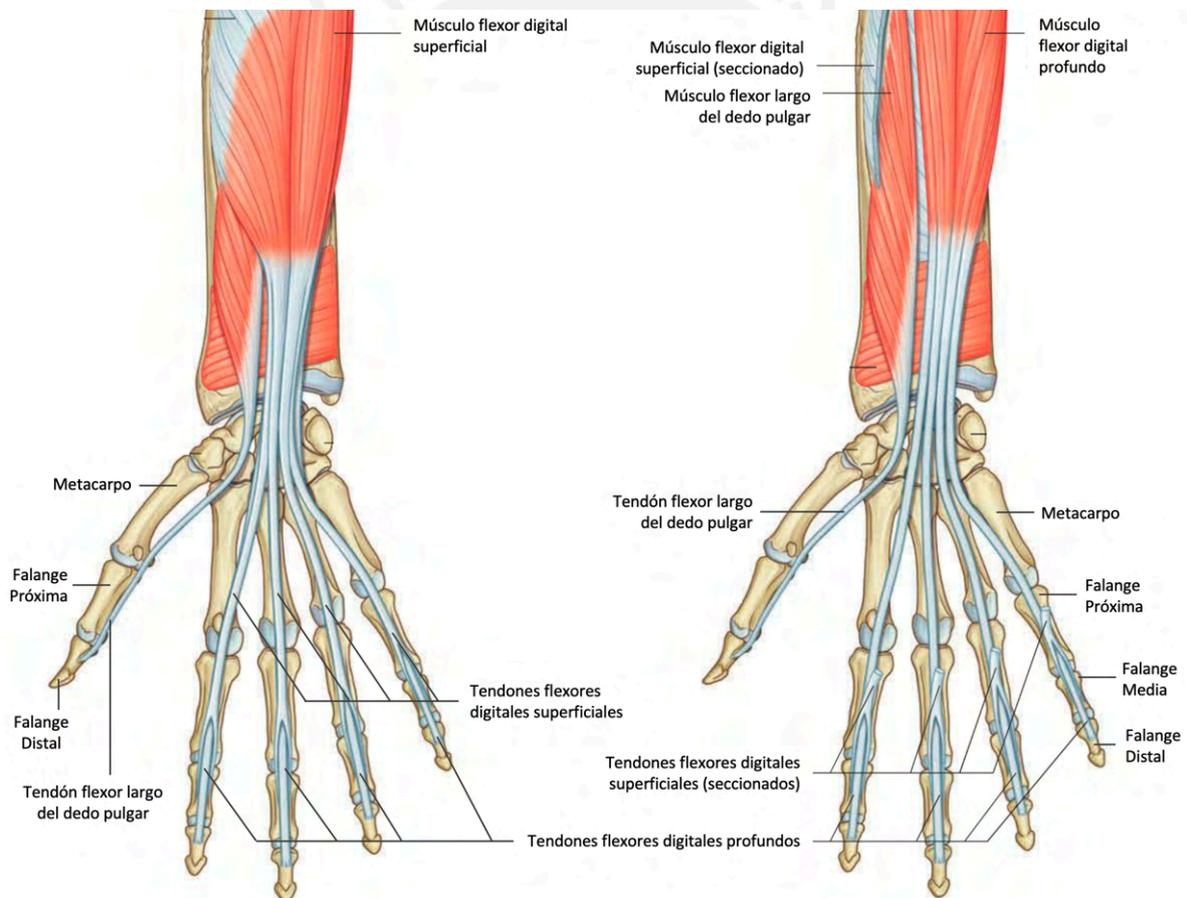
Los tendones que se desprenden de estos tres músculos reciben el mismo nombre: tendón flexor digital superficial, tendón flexor digital profundo, y tendón flexor largo del dedo pulgar. Este grupo de tendones se dispone de la manera siguiente:

- Tendón flexor digital superficial: Se ancla en la base de la falange media, después de recorrer el metacarpo y la falange proximal.
- Tendón flexor digital profundo: Se inserta en la base de la falange distal, después de recorrer el metacarpo y las falanges media y proximal.
- Tendón flexor largo del dedo pulgar: Se ancla en la base de la falange distal, después de recorrer el metacarpo y la falange proximal del dedo pulgar.

El sistema descrito de músculos y tendones que permite la flexión de los dedos se expone en la figura 2.2.

### Figura 2.2

*Sistema de músculos y tendones que permiten la flexión de los dedos de la mano. Vista palmar.*



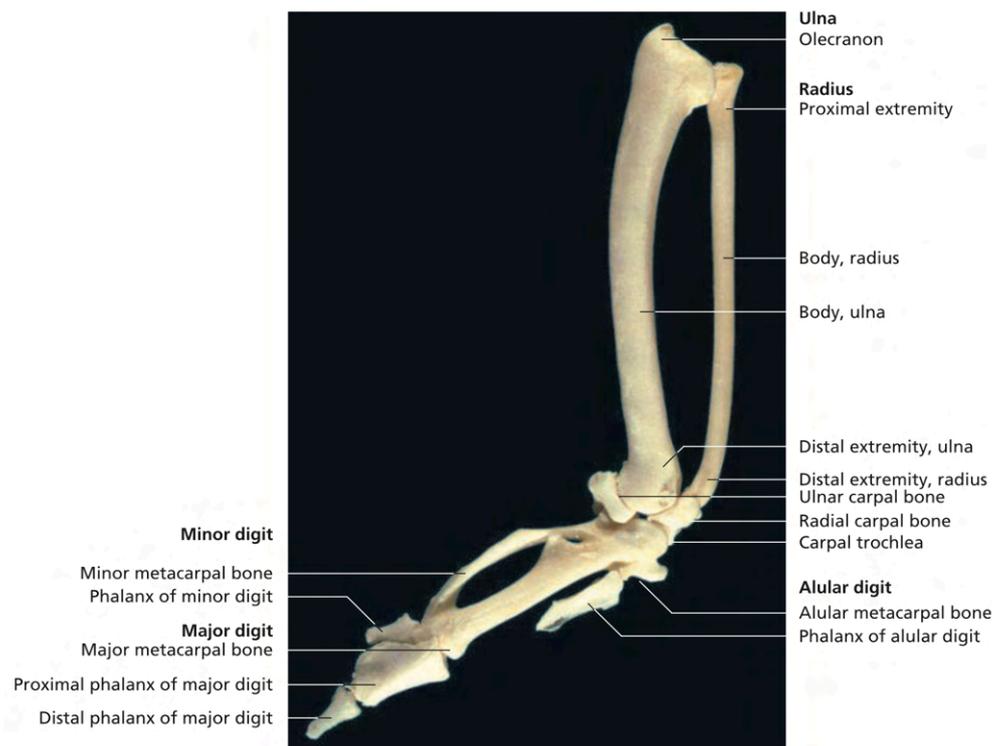
*Nota.* Adaptado de (Drake et al., 2011), p. 399.

## 2.2. Anatomía de la mano aviar: Tendones Extensores y Flexores (König et al., 2016)

La mano aviar consta de tres dedos: el dedo mayor, el dedo menor, y la álula, tal como ilustra la figura 2.3.

### Figura 2.3

*Huesos del ala de un ave*



*Nota.* Tomado de (König et al., 2016), p. 48.

Diversos músculos al final de las alas actúan para ajustar la posición de los dedos según sea requerido durante el vuelo. Este ajuste en la posición de los dedos resulta de significativa importancia aerodinámica, ya que permite modificar la posición de las rémiges principales y mantener el flujo laminar de aire sobre la superficie superior del ala.

Los músculos que intervienen principalmente en la extensión de los dedos de la mano aviar son:

- Músculo extensor digital común (M. extensor digitorum communis)
- Músculo extensor largo del dedo mayor (M. extensor longus digiti majoris)
- Músculo extensor largo de la álula (M. extensor longus alulae)

- Músculo extensor corto de la álula (M. extensor brevis alulae)

De estos músculos se desprenden tendones que reciben el mismo nombre, los cuales se disponen de la manera siguiente:

- Tendón extensor digital común: Se bifurca y se inserta en la base de la falange de la álula y en la base de la falange proximal del dedo mayor.
- Tendón extensor largo del dedo mayor: Se ancla en la base de la falange distal del dedo mayor.
- Tendón extensor largo de la álula: Se inserta en la falange de la álula.
- Tendón extensor corto de la álula: Se ancla en la falange de la álula.

Por otro lado, la flexión de los dedos de la mano aviar es generada por la acción del siguiente grupo de músculos:

- Músculo flexor digital superficial (M. flexor digitorum superficialis)
- Músculo flexor digital profundo (M. flexor digitorum profundus)
- Músculo flexor de la álula (M. flexor alulae)
- Músculo flexor del dedo menor (M. flexor digiti minoris)

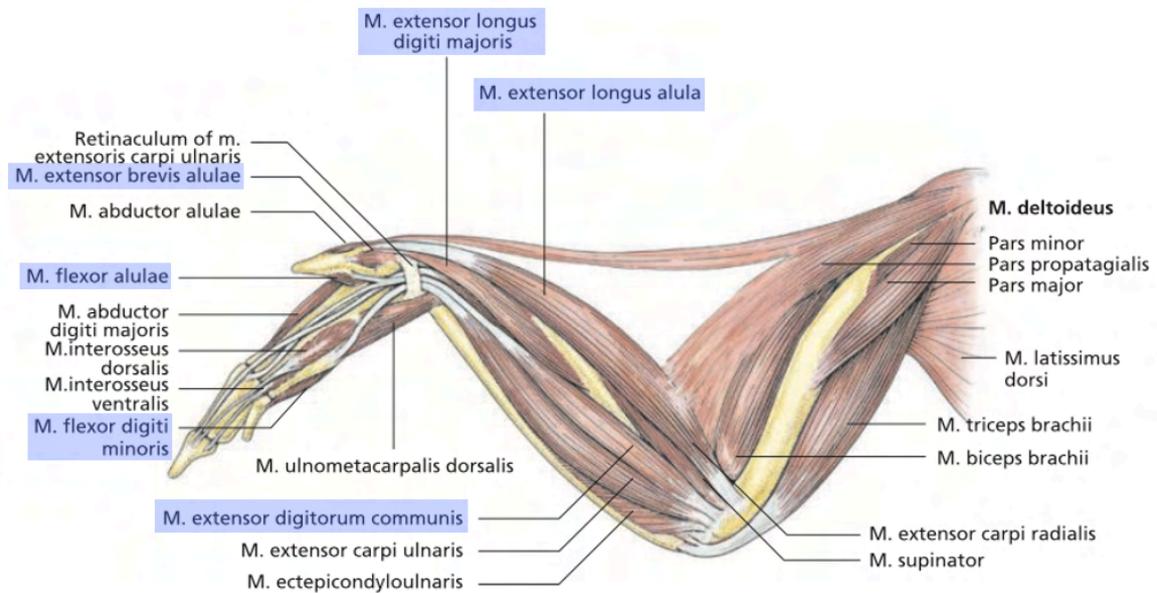
De la misma manera que con los tendones extensores, los tendones flexores reciben el nombre del músculo del que se originan y se insertan en la mano de la siguiente forma:

- Tendón flexor digital superficial: Se inserta en la base de la falange proximal del dedo mayor.
- Tendón flexor digital profundo: Se ancla en la base de la falange proximal del dedo mayor.
- Tendón flexor de la álula: Se inserta en la falange de la álula.
- Tendón flexor del dedo menor: Se ancla en la falange del dedo menor.

Los músculos y tendones que permiten la extensión y flexión de los dedos de la mano aviar se exponen en las figuras 2.4. y 2.5.

## Figura 2.4

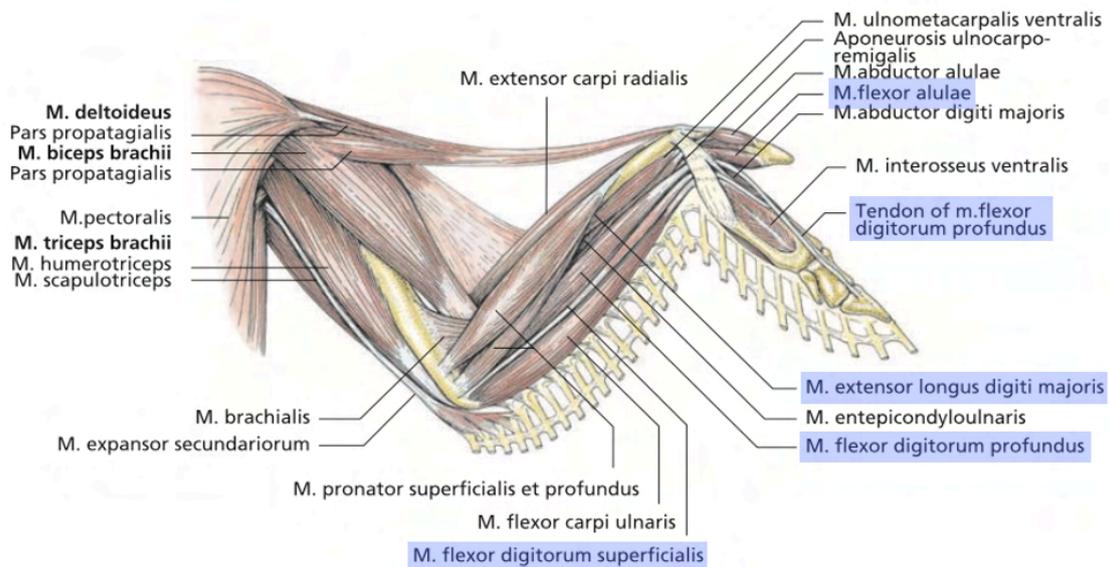
*Sistema de músculos y tendones del ala izquierda de un ave. Vista dorsal.*



*Nota.* Los músculos y tendones que participan en la extensión y flexión de los dedos de la mano aviar han sido resaltados en azul. Adaptado de (König et al., 2016), p. 57.

## Figura 2.5

*Sistema de músculos y tendones del ala izquierda de un ave. Vista ventral.*



*Nota.* Los músculos y tendones que participan en la extensión y flexión de los dedos de la mano aviar han sido resaltados en azul. Adaptado de (König et al., 2016), p. 57.

## Capítulo 3

### Estado del Arte

#### **3.1. Ala de Envergadura Adaptable (Kamlet, 2016; 2018; NASA, 2017; 2020; Rosenberg, 2018)**

La NASA ha desarrollado alas articuladas para optimizar el desempeño de las alas durante todas las fases de operación de la aeronave. Un actuador torsional en la articulación permite adaptar continuamente la geometría del ala a las distintas condiciones de vuelo, generando mayor sustentación, menor resistencia aerodinámica y menor consumo de combustible que las alas rígidas.

El actuador de este concepto está compuesto por tubos de torsión fabricados de una aleación de Ni-Ti-Hf con memoria de forma. Los tubos del actuador son torsionados en su condición martensítica y recuperan su forma original cuando son expuestos a un estímulo térmico, permitiendo así la rotación del segmento más extremo del ala. Según la NASA, este actuador con memoria de forma resulta más eficiente, compacto, de bajo mantenimiento, y 20% más liviano que su equivalente hidráulico.

En la figura 3.1 se muestra un prototipo de pruebas de la NASA con Alas de Envergadura Adaptable aterrizando después de superar exitosamente la primera serie de pruebas.

### Figura 3.1

#### *Ala de Envergadura Adaptable*



*Nota.* Prototipo de pruebas PTERA con Alas de Envergadura Adaptable aterrizando después de su primera serie de pruebas. Tomado de (Kamlet, 2018).

### 3.2. Ave artificial con alas articuladas y torsión activa (Festo, 2011)

Festo (2011) ha desarrollado un ornitóptero ultraligero inspirado en la gaviota argétea capaz de despegar, volar y aterrizar autónomamente sin ninguna propulsión adicional, el cual se muestra en la figura 3.2. Las alas articuladas de este concepto presentan un actuador torsional que convierte eficientemente el batimiento de las alas en propulsión. De esta forma, la elevación es generada por el movimiento de las alas hacia arriba y hacia abajo, mientras que el empuje es producido por la torsión activa de las alas. Cuando las alas se baten hacia arriba, el servomotor del actuador tuerce el segmento de ala más alejado del cuerpo hasta alcanzar un ángulo de ataque positivo, el cual luego modifica a un ángulo negativo durante una fracción del período de batido de alas. Gracias a esta secuencia de movimientos, el flujo de aire a lo largo del perfil del ala puede utilizarse de forma óptima para generar empuje.

## Figura 3.2

*SmartBird de Festo*



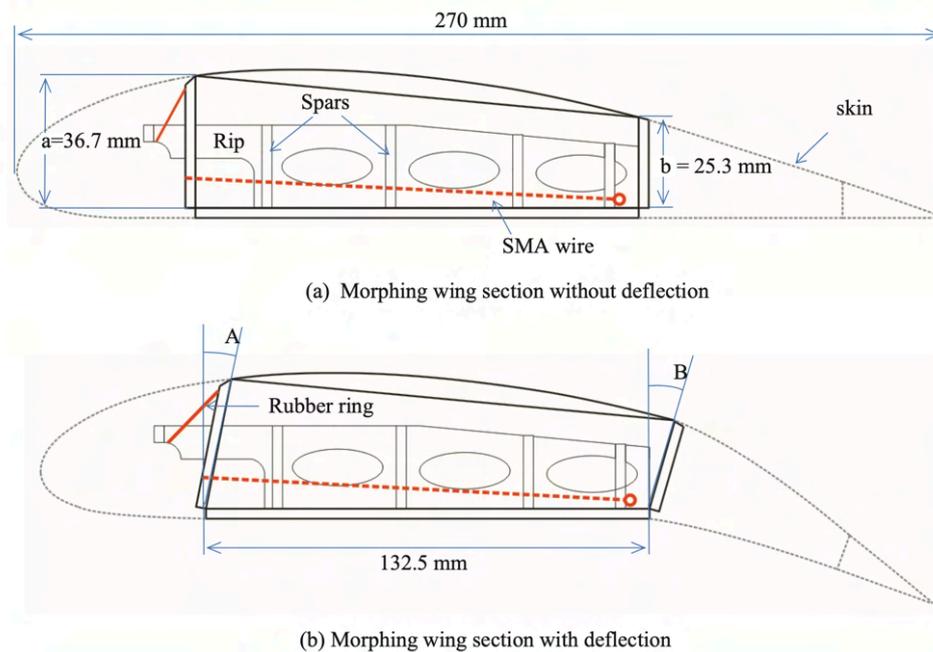
*Nota.* Tomado de (Festo, 2011).

### **3.3. Mecanismo para modificar el perfil alar usando cables de aleación con memoria de forma (Kang et al., 2012)**

Los sistemas mecánicos de flaps generan pérdidas aerodinámicas debido a que modifican el perfil alar mediante secciones discontinuas. Kang et al. (2012) proponen un mecanismo para modificar el perfil alar manteniendo la continuidad de su superficie mediante el uso de cables de aleación con memoria de forma como actuadores al interior del ala. Los cables actuadores se fijan a las paredes anterior y posterior el marco cuadrilátero tal como se ilustra en la figura 3.3 (a). Cuando la temperatura de los cables alcanza la temperatura de actuación, los cables se contraen y deforman el marco. Debido a esta deformación, la piel superior del ala retrocede y el borde de salida (trailing edge) desciende como un flap. Véase la figura 3.3 (b). Por otro lado, cuando la temperatura de los cables disminuye por debajo de la temperatura de actuación, la fuerza de contracción de los cables decrece y el perfil alar recupera su forma original.

### Figura 3.3

Mecanismo de Kang et al. para modificar el perfil alar



Nota. Tomado de (Kang et al., 2012), p. 86.

### 3.4. Estudio dinámico del sistema araña – tela de araña en condiciones de resonancia (Alencastre et al., 2016)

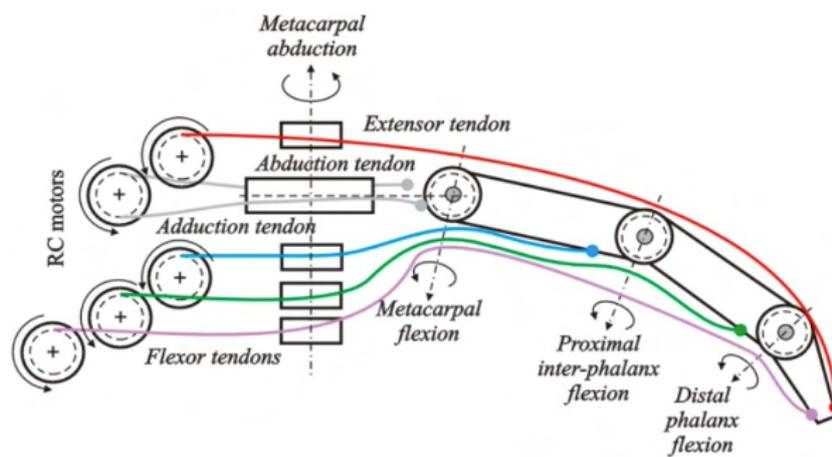
Alencastre et al. (2016) comprobaron experimentalmente que para un sistema araña – tela de araña en condiciones de resonancia, la araña modifica la tensión de los hilos para rigidizar la estructura y alejar el sistema de la zona de resonancia. Se encontró que la araña altera instintivamente la tensión de los hilos con sus patas cuando el sistema es excitado en su frecuencia de resonancia. Este cambio de tensión rigidiza el sistema y modifica su frecuencia natural. Ante esta nueva frecuencia natural, la frecuencia de excitación deja de ser de resonancia para el sistema araña – tela de araña.

### 3.5. Mano robótica de estructura modular (Rodić et al., 2013)

Rodić et al. (2013) proponen una mano robótica que busca reproducir el diseño y funcionamiento de la mano humana. El movimiento de los dedos es realizado mediante cables a modo de tendones artificiales que recorren la mano y transmiten torque desde los servomotores hasta las articulaciones de cada dedo. Para realizar los movimientos de abducción, aducción y extensión cada dedo utiliza un tendón por tipo de movimiento, mientras que para la flexión cada dedo requiere de tres tendones. Los tendones son guiados mediante poleas con bajo coeficiente de fricción. Véase las figuras 3.4 y 3.5.

**Figura 3.4**

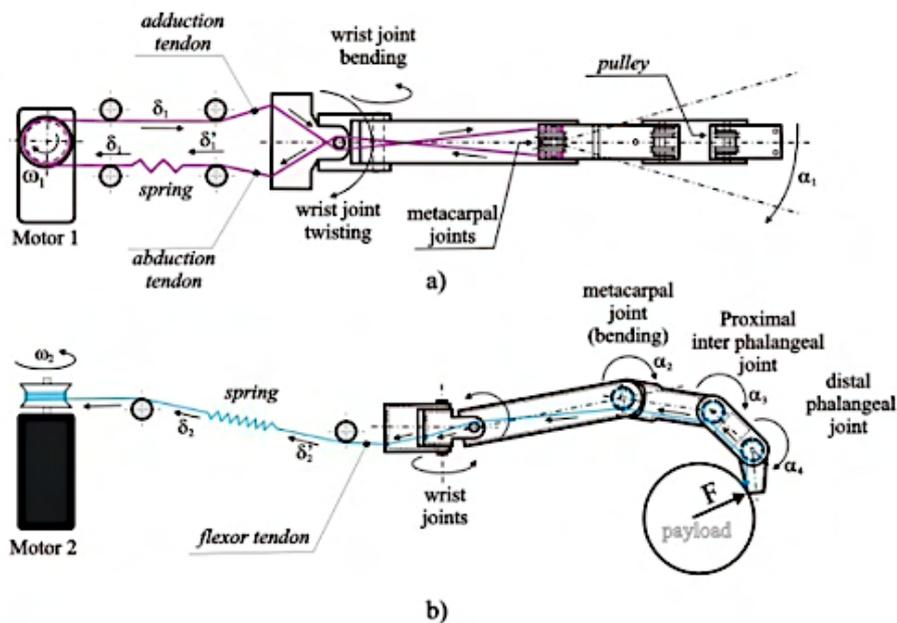
*Esquema de los tendones artificiales que permiten los movimientos de abducción, aducción, extensión y flexión de los dedos en la mano de Rodić et al.*



*Nota.* Tomado de (Rodić et al., 2013), p. 6.

### Figura 3.5

Principio de actuación de los dedos de la mano de Rodić et al.



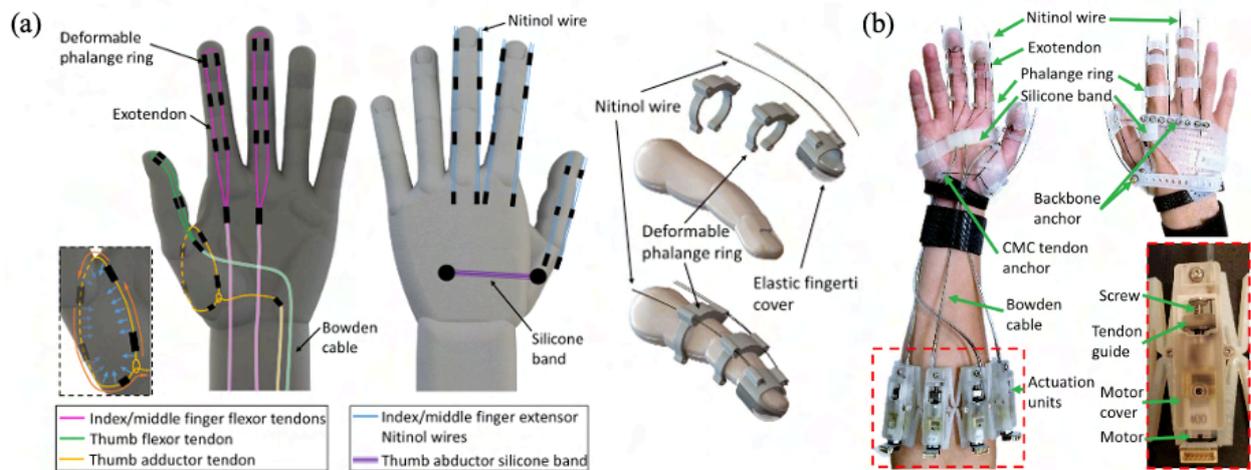
Nota. Principio de actuación de los dedos de la mano de Rodić et al para los movimientos de (a) abducción y aducción, y (b) flexión. Tomado de (Rodić et al., 2013), p. 5.

### 3.6. Sistema robótico de tendones flexores Glove-II (Tran et al., 2020)

Tran et al. (2020) proponen un exoesqueleto robótico para asistir en la rehabilitación de las funciones de la mano de pacientes con lesiones en la médula espinal. El exoesqueleto consiste en un sistema guiado de tendones externos que reproduce parcialmente el sistema de tendones de la mano humana permitiendo la flexión y extensión de los dedos índice, medio y pulgar. Los tendones flexores en la palma de la mano son activados mediante unidades de actuación externas dispuestas en el antebrazo. Por otro lado, la extensión de los dedos es realizada de forma pasiva por cables de Nitinol –una aleación altamente elástica de Ni-Ti– dispuestos en el dorso de la mano. Véase la figura 3.6.

**Figura 3.6**

*Exoesqueleto robótico Glove-II*



*Nota.* (a) Disposición de los tendones artificiales del sistema robótico Glove-II y detalle de los anillos que guían el recorrido de los tendones. (b) Vista completa del exoesqueleto Glove-II con los actuadores que permiten la flexión de los dedos. Tomado de (Tran et al., 2020), p. 899- 900.

## Capítulo 4

### Análisis Dinámico

En este capítulo se plantean los siguientes tres modelos conceptuales no amortiguados y se formulan sus ecuaciones de movimiento:

- Dedo humano (2 grados de libertad)
- Ala articulada actuada con tendones artificiales (2 grados de libertad)
- Ala articulada actuada con tendones artificiales (3 grados de libertad)

El capítulo inicia con el estudio de la vibración en el dedo humano mediante un modelo de barras acopladas de dos grados de libertad. A partir de este análisis, se proponen dos modelos conceptuales para el estudio de la vibración en alas articuladas actuadas con tendones artificiales. Estos dos modelos conceptuales consisten en un modelo viga–barra de dos grados de libertad y un modelo viga–barra–barra de tres grados de libertad.

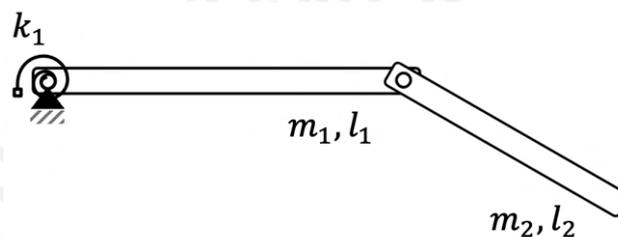
## 4.1. Modelo de un dedo humano de 2 grados de libertad

### 4.1.1. Definición del modelo conceptual

Se modeló el dedo humano sin tendones como dos barras de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  acopladas en uno de sus extremos mediante una articulación. En este modelo, la barra de masa  $m_1$  presenta además un apoyo articulado y un resorte torsional  $k_1$ , tal como se ilustra en la figura 4.1.

**Figura 4.1**

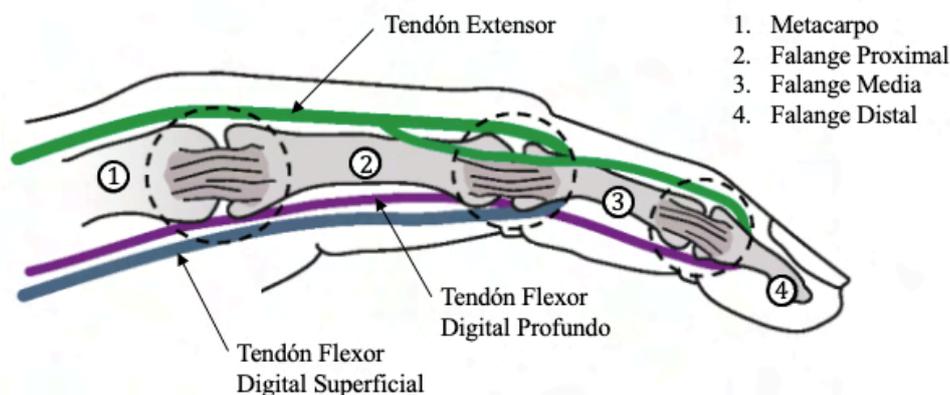
*Modelo barra–barra del dedo humano sin tendones*



En el dedo humano, la extensión es realizada por la acción de músculos extensores, cuya fuerza es transmitida a través del tendón extensor. Este último recorre el metacarpo y la falange proximal, y se ancla en la base superior de las falanges media y distal. Por otro lado, la flexión es generada por la acción de músculos flexores, cuya fuerza es transmitida a través de dos tendones: el tendón flexor digital superficial y el tendón flexor digital profundo. Estos tendones se anclan en la base inferior de las falanges media y distal, respectivamente, después de recorrer el metacarpo y la falange proximal. Véase la figura 4.2.

**Figura 4.2**

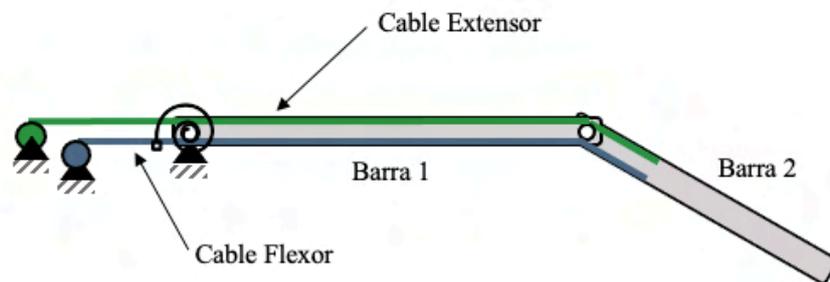
*Tendones y huesos del dedo humano*



En el modelo de dos grados de libertad que se propone para el dedo humano, la extensión es producida por la acción de un cabrestante eléctrico, cuya fuerza es transmitida a través de un cable tensor. Este cable tensor recorre la primera barra y se ancla en la base superior de la segunda barra. Por otro lado, la flexión es realizada por la acción de otro cabrestante eléctrico, cuya fuerza es transmitida mediante otro cable tensor. Este último se ancla en la base inferior de la segunda barra, después de recorrer la primera barra, tal como exhibe la figura 4.3.

**Figura 4.3**

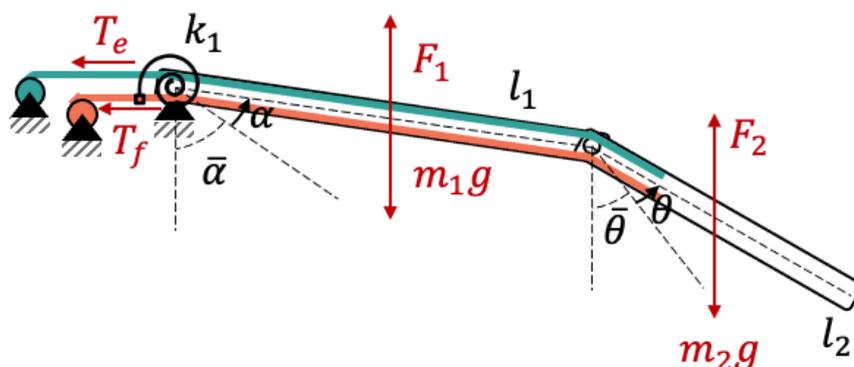
*Modelo barra–barra del dedo humano con tendones*



Las fuerzas que se incorporaron al modelo son los pesos  $m_1g$  y  $m_2g$  de las barras, las tensiones de extensión y flexión ( $T_e$ ,  $T_f$ ) de los cables, y las cargas puntuales  $F_1$  y  $F_2$  que excitan al sistema en el tiempo, tal como se expone en la figura 4.4. La fuerza de recuperación en el apoyo articulado resulta del producto de la rigidez del resorte torsional  $k_1$  y el desplazamiento angular  $\alpha$ . Nótese además que el peso de la articulación entre las barras, así como la fricción entre los cables y la polea de la articulación fueron despreciados.

**Figura 4.4**

*Fuerzas del modelo barra–barra del dedo humano*

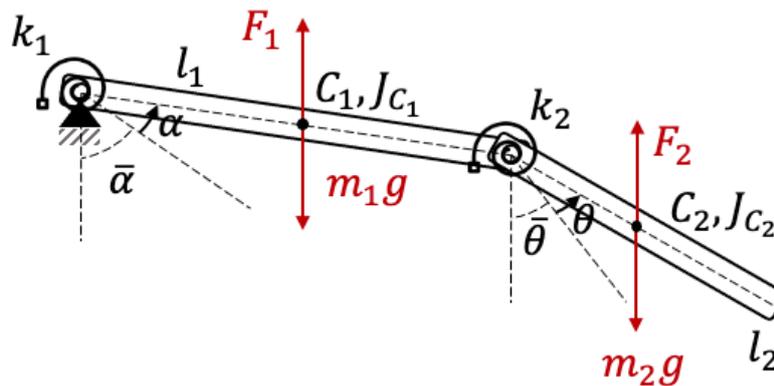


*Nota.* Entiéndase  $\alpha$  como el desplazamiento angular de la primera barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\alpha}$ , y  $\theta$  como el desplazamiento angular de la segunda barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$ .

Para simplificar el modelo, el efecto de los cables tensores sobre la segunda barra una vez que esta última alcanzó su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$  fue representado como un resorte torsional  $k_2$ , tal como se ilustra en la figura 4.5.

**Figura 4.5**

*Modelo simplificado barra–barra del dedo humano*



*Nota.* Entiéndase  $C_i$  como el centro de masa de la barra  $i$  y  $J_{C_i}$  como el momento de inercia del centro de masa de la barra  $i$ .

Por lo tanto, los **parámetros físicos** con los que se describen las vibraciones en este modelo barra–barra del dedo humano son:

- el **desplazamiento angular  $\alpha$**  de la primera barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\alpha}$
- el **desplazamiento angular  $\theta$**  de la segunda barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$

#### 4.1.2. Determinación de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema vibratorio fueron derivadas de la ecuación de Lagrange de segundo tipo para sistemas no conservativos (4.1), donde la función de Lagrange  $L$  se define como la diferencia de energías cinética  $E$  y potencial  $U$ ,  $q_i$  son los  $i$  parámetros físicos con los que se describe el comportamiento dinámico del sistema, y  $\bar{Q}_i$  son las fuerzas generalizadas que no poseen un potencial. La función de Lagrange se expone en la ecuación (4.2).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i \quad (4.1)$$

$$L = E - U \quad (4.2)$$

Para determinar la función de Lagrange  $L$ , se procedió primero a hallar la energía cinética  $E$  del sistema en la ecuación (4.3), donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades de los centros de masa de las barras, y  $J_{C_1}$  y  $J_{C_2}$  son los momentos de inercia de los centros de masa de las barras.

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} \dot{\theta}^2 \quad (4.3)$$

Para encontrar las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ , se definió los vectores de posición  $r_1$  y  $r_2$  con las expresiones (4.4) y (4.5). Nótese que la convención de signos usada fue:  $+y \downarrow$ ,  $+x \rightarrow$ ,  $+U$ .

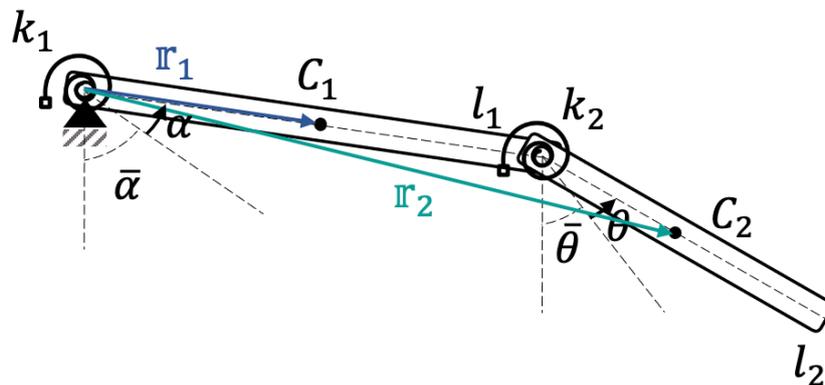
Los vectores de posición  $r_1$  y  $r_2$  se exponen en la figura 4.6.

$$r_1 = \frac{1}{2} l_1 \text{sen}(\bar{\alpha} + \alpha) \hat{i} + \frac{1}{2} l_1 \text{cos}(\bar{\alpha} + \alpha) \hat{j} \quad (4.4)$$

$$r_2 = \left( l_1 \text{sen}(\bar{\alpha} + \alpha) + \frac{1}{2} l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \right) \hat{i} + \left( l_1 \text{cos}(\bar{\alpha} + \alpha) + \frac{1}{2} l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \right) \hat{j} \quad (4.5)$$

**Figura 4.6**

Vectores de posición  $r_1$  y  $r_2$



Derivando las expresiones (4.4) y (4.5) en función del tiempo, se obtuvo las velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  de los centros de masa de las barras.

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}l_1\cos(\bar{\alpha} + \alpha)\dot{\alpha}\hat{i} - \frac{1}{2}l_1\sin(\bar{\alpha} + \alpha)\dot{\alpha}\hat{j} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 = & \left( l_1\cos(\bar{\alpha} + \alpha)\dot{\alpha} + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta} \right) \hat{i} \\ & + \left( -l_1\sin(\bar{\alpha} + \alpha)\dot{\alpha} - \frac{1}{2}l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (4.7)$$

A partir de las ecuaciones (4.6) y (4.7), se determinó  $\mathbf{v}_1^2$  y  $\mathbf{v}_2^2$ .

$$\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{4}l_1^2\dot{\alpha}^2 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}^2 + l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} \quad (4.9)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.8) y (4.9) en la ecuación (4.3) y desarrollando  $J_{C_i}$ , se obtuvo la energía cinética  $E$  del sistema.

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{8}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}^2 + l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12}l_1^2m_1 \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12}l_2^2m_2 \right) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore E = \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} \quad (4.10)$$

Por otro lado, se determinó también la energía potencial  $U$  del sistema en la ecuación (4.11). Nótese que el nivel de referencia (N.R.) que se utilizó corresponde a la altura de la articulación del apoyo de la primera barra.

$$U = \frac{1}{2}k_1\alpha^2 + \frac{1}{2}k_2(\theta - \alpha)^2 - \frac{1}{2}m_1gl_1\cos(\bar{\alpha} + \alpha) - m_2g \left( l_1\cos(\bar{\alpha} + \alpha) + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta) \right) \quad (4.11)$$

Habiendo determinado las energías cinética y potencial del sistema, se construyó la función de Lagrange  $L$  al reemplazar las ecuaciones (4.10) y (4.11) en la expresión (4.2).

$$L = \frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} - \frac{1}{2}k_1\alpha^2 - \frac{1}{2}k_2(\theta - \alpha)^2 + \frac{1}{2}m_1gl_1\cos(\bar{\alpha} + \alpha) + m_2g \left( l_1\cos(\bar{\alpha} + \alpha) + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta) \right) \quad (4.12)$$

Sustituyendo la ecuación (4.12) en la ecuación de Lagrange de segundo tipo (4.1), se obtuvieron las ecuaciones (4.16) y (4.20).

Nótese que para obtener la ecuación (4.16), primeramente debió calcularse las expresiones (4.13), (4.14) y (4.15).

Para  $q_1 = \alpha$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \left( \frac{1}{3}m_1 + m_2 \right) l_1^2 \dot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\theta} \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \left( \frac{1}{3}m_1 + m_2 \right) l_1^2 \ddot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\sin(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\sin(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\theta}^2 \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2}m_2l_1l_2\text{sen}(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} - k_1\alpha + k_2(\theta - \alpha) \\ &\quad -\frac{1}{2}m_1gl_1\text{sen}(\bar{\alpha} + \alpha) - m_2gl_1\text{sen}(\bar{\alpha} + \alpha)\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l_1^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\ddot{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\text{sen}(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\theta}^2 + k_1\alpha - k_2(\theta - \alpha) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)gl_1\text{sen}(\bar{\alpha} + \alpha) = Q_\alpha\end{aligned}\quad (4.16)$$

Asimismo, para obtener la ecuación (4.20), primeramente debió calcularse las expresiones (4.17), (4.18) y (4.19).

Para  $q_2 = \theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}m_2l_2^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\ddot{\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\text{sen}(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\text{sen}(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta}\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2}m_2l_1l_2\text{sen}(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}\dot{\theta} - k_2\theta + k_2\alpha - \frac{1}{2}m_2gl_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\ddot{\alpha} + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta} \\ &\quad - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\text{sen}(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}^2 + k_2\theta - k_2\alpha + \frac{1}{2}m_2gl_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) = Q_\theta\end{aligned}\quad (4.20)$$

Para calcular las fuerzas generalizadas  $Q_\alpha$  y  $Q_\theta$ , se utilizó el principio de los trabajos virtuales realizados por las fuerzas externas tal como se muestra a continuación:

$$A_{ext} = -F_1 \hat{j} \cdot \mathbf{r}_1 - F_2 \hat{j} \cdot \mathbf{r}_2$$

$$\therefore \delta A_{ext} = -F_1 \hat{j} \cdot \delta \mathbf{r}_1 - F_2 \hat{j} \cdot \delta \mathbf{r}_2 \quad (4.21)$$

Al reemplazar las expresiones (4.4) y (4.5) en la ecuación (4.21), derivar, y agrupar términos, se obtuvieron las fuerzas generalizadas  $Q_\alpha$  y  $Q_\theta$ .

$$\begin{aligned} \delta A_{ext} &= -F_1 \hat{j} \cdot \left( \frac{1}{2} l_1 \cos(\bar{\alpha} + \alpha) \delta \alpha \hat{i} - \frac{1}{2} l_1 \sin(\bar{\alpha} + \alpha) \delta \alpha \hat{j} \right) \\ &- F_2 \hat{j} \cdot \left( \left( l_1 \cos(\bar{\alpha} + \alpha) \delta \alpha + \frac{1}{2} l_2 \cos(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta \right) \hat{i} \right. \\ &\quad \left. + \left( -l_1 \sin(\bar{\alpha} + \alpha) \delta \alpha - \frac{1}{2} l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta \right) \hat{j} \right) \\ \therefore \delta A_{ext} &= \left( \frac{1}{2} F_1 l_1 \sin(\bar{\alpha} + \alpha) + F_2 l_1 \sin(\bar{\alpha} + \alpha) \right) \delta \alpha + \left( \frac{1}{2} F_2 l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \right) \delta \theta \\ \therefore Q_\alpha &= \frac{1}{2} F_1 l_1 \sin(\bar{\alpha} + \alpha) + F_2 l_1 \sin(\bar{\alpha} + \alpha) \quad (4.22) \end{aligned}$$

$$\therefore Q_\theta = \frac{1}{2} F_2 l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \quad (4.23)$$

**Finalmente**, reemplazando las fuerzas generalizadas  $Q_\alpha$  y  $Q_\theta$  en las ecuaciones (4.16) y (4.20), se determinó el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento dinámico del dedo humano para el modelo propuesto de 2 grados de libertad. Este sistema de ecuaciones está conformado por las ecuaciones (4.24) y (4.25).

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l_1^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\ddot{\theta} \\
& + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\sin(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\theta}^2 + k_1\alpha - k_2(\theta - \alpha) \\
& = \left(\frac{1}{2}F_1 + F_2 - \frac{1}{2}m_1g - m_2g\right)l_1\sin(\bar{\alpha} + \alpha)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\ddot{\alpha} + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta} \\
& - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\sin(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta)\dot{\alpha}^2 + k_2(\theta - \alpha) = \frac{1}{2}(F_2 - m_2g)l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Expresando las ecuaciones (4.24) y (4.25) en su forma matricial y suponiendo los términos  $\dot{\alpha}^2$  y  $\dot{\theta}^2$  insignificanamente pequeños, se obtuvo el sistema de ecuaciones (4.26).

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l_1^2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta) \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta} + \alpha - \theta) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{2}F_1 + F_2 - \frac{1}{2}m_1g - m_2g\right)l_1\sin(\bar{\alpha} + \alpha) \\ \frac{1}{2}(F_2 - m_2g)l_2\sin(\bar{\theta} + \theta) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

El sistema de ecuaciones de movimiento (4.26) describe la vibración forzada no amortiguada del modelo conceptual barra–barra propuesto para un dedo humano. En este sistema de ecuaciones, los parámetros que varían en el tiempo alrededor de sus posiciones de equilibrio estático son i) el desplazamiento angular  $\alpha$  de la primera barra y ii) el desplazamiento angular  $\theta$  de la segunda barra. El comportamiento dinámico descrito es producto de la acción de las fuerzas de resorte y las fuerzas externas (momentos) que generan una variación en la cantidad de movimiento del modelo barra–barra de un dedo humano.

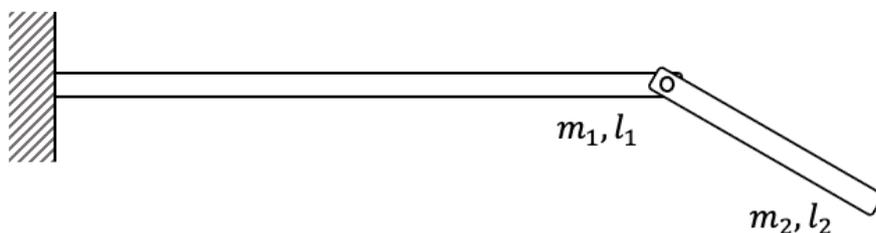
## 4.2. Modelo de un Ala Articulada actuada con Tendones Artificiales de 2 grados de libertad

### 4.2.1. Definición del modelo conceptual

Se modeló el ala articulada sin tendones artificiales como una viga en voladizo de masa  $m_1$  y largo  $l_1$  acoplada en su extremo libre con una barra de masa  $m_2$  y largo  $l_2$  mediante una articulación, tal como se ilustra en la figura 4.7.

**Figura 4.7**

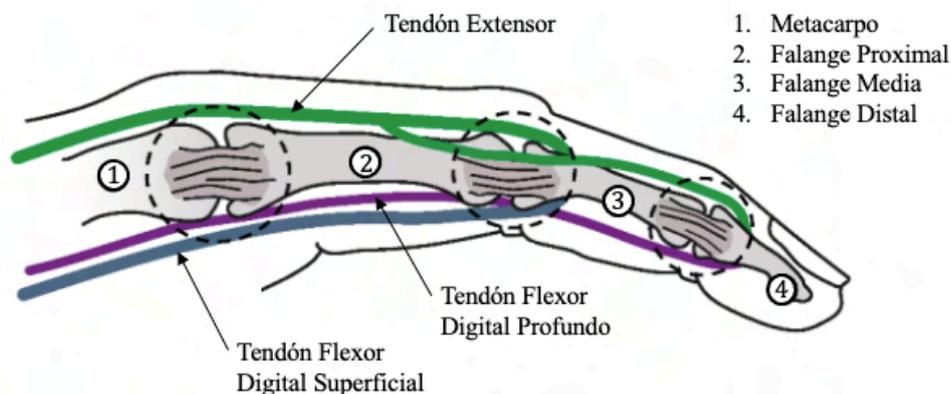
*Modelo viga–barra del ala articulada sin tendones artificiales*



Como se revisó anteriormente, en el dedo humano la extensión es realizada por la acción de músculos extensores, cuya fuerza es transmitida a través del tendón extensor. Este último recorre el metacarpo y la falange proximal, y se ancla en la base superior de las falanges media y distal. Por otro lado, la flexión es generada por la acción de músculos flexores, cuya fuerza es transmitida a través de dos tendones: el tendón flexor digital superficial y el tendón flexor digital profundo. Estos tendones se anclan en la base inferior de las falanges media y distal, respectivamente, después de recorrer el metacarpo y la falange proximal. Véase la figura 4.8.

**Figura 4.8**

*Tendones y huesos del dedo humano*

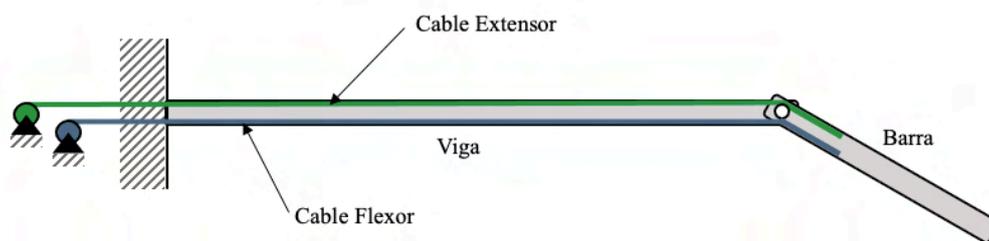


Para la extensión y flexión del ala articulada se propone replicar el sistema de flexión y extensión del dedo humano.

En el modelo de dos grados de libertad que se plantea para el ala articulada con tendones artificiales, la extensión es producida por la acción de un cabrestante eléctrico al interior del empotramiento, cuya fuerza es transmitida a través de un cable tensor. Este cable tensor recorre la viga y se ancla en la base superior de la barra. Por otro lado, la flexión es realizada por la acción de otro cabrestante eléctrico al interior del empotramiento, cuya fuerza es transmitida mediante otro cable tensor. Este último se ancla en la base inferior de la barra, después de recorrer la viga, tal como exhibe la figura 4.9.

**Figura 4.9**

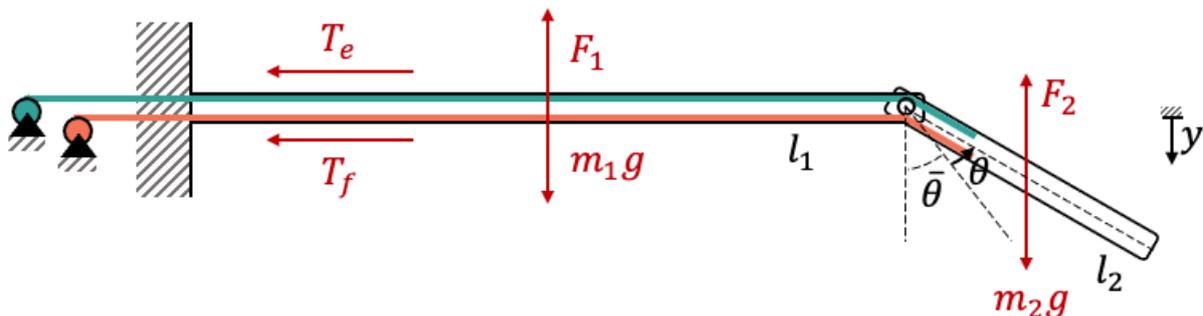
*Modelo viga–barra del ala articulada con tendones artificiales*



Las fuerzas que se incorporaron al modelo son los pesos  $m_1g$  de la viga y  $m_2g$  de la barra, las tensiones de extensión y flexión ( $T_e$ ,  $T_f$ ) de los cables, y la fuerza de sustentación que ha sido representada con las cargas puntuales  $F_1$  y  $F_2$ , tal como se expone en la figura 4.10. Nótese que el peso de la articulación, así como la fricción entre los cables y la polea de la articulación fueron despreciados.

**Figura 4.10**

*Fuerzas del modelo viga–barra del ala articulada con tendones artificiales*

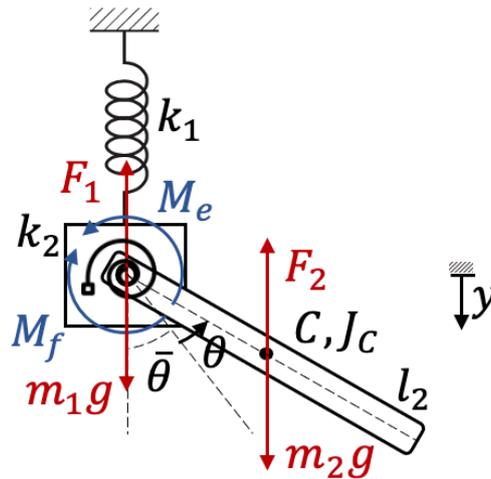


*Nota.* Entiéndase  $y$  como el desplazamiento vertical del extremo no empotrado de la viga, y  $\theta$  como el desplazamiento angular de la barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$ .

Para simplificar el modelo, la viga empotrada fue representada como una masa puntual  $m_1$  y un resorte  $k_1$ . Asimismo, el efecto de los cables tensores sobre la barra una vez que esta última alcanzó su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$  fue idealizado como un resorte torsional  $k_2$ , tal como se ilustra en la figura 4.11.

**Figura 4.11**

*Modelo simplificado viga–barra del ala articulada con tendones artificiales*



*Nota.* Entiéndase  $C$  como el centro de masa de la barra y  $J_c$  como el momento de inercia del centro de masa de la barra.

Nótese en la figura 4.11 la presencia de los momentos extensor y flexor ( $M_e$  y  $M_f$ ), los cuales son resultado de la tensión de los cables sobre la viga. Véase las ecuaciones (4.27) y (4.28), donde  $T_e$  y  $T_f$  son las tensiones de extensión y flexión, y  $d$  es la distancia comprendida entre el cable tensor y el eje de la viga.

$$M_e = T_e \cdot d \quad (4.27)$$

$$M_f = T_f \cdot d \quad (4.28)$$

Los **parámetros físicos** con los que se describen las vibraciones en este modelo viga–barra del ala articulada con tendones artificiales son:

- el desplazamiento vertical  $y$  del extremo no empotrado de la viga
- el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$

#### 4.2.2. Determinación de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema vibratorio fueron derivadas de la ecuación de Lagrange de segundo tipo para sistemas no conservativos (4.1).

Para determinar la función de Lagrange  $L$  (4.2), se procedió primero a hallar la energía cinética  $E$  del sistema en la ecuación (4.29), donde  $v_C$  es la velocidad del centro de masa de la barra y  $J_C$  es el momento de inercia de la barra.

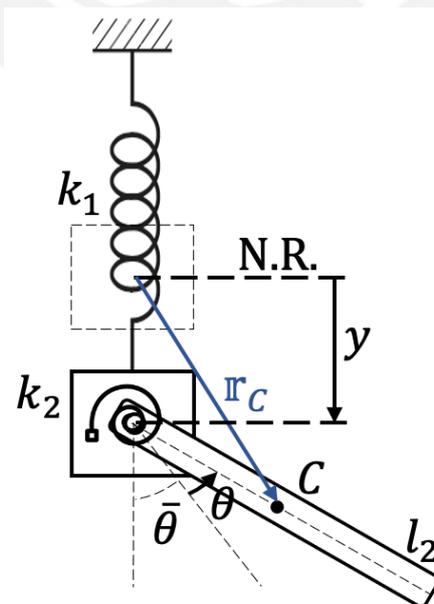
$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 \quad (4.29)$$

Para encontrar la velocidad  $v_C$  del centro de masa de la barra, se definió el vector de posición  $r_C$  con la expresión (4.30). Nótese que la convención de signos usada fue:  $+y \downarrow$ ,  $+x \rightarrow$ ,  $+\mathcal{O}$ . El vector de posición  $r_C$  se expone en la figura 4.12.

$$r_C = \frac{1}{2} l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \hat{i} + \left( y + \frac{1}{2} l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \right) \hat{j} \quad (4.30)$$

**Figura 4.12**

*Vector de posición  $r_C$*



Derivando la expresión (4.30) en función del tiempo, se obtuvo la velocidad  $v_C$  del centro de masa de la barra.

$$\frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \mathbf{v}_C = \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta}\hat{i} + \left(y - \frac{1}{2}l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta}\right)\hat{j} \quad (4.31)$$

A partir de la ecuación (4.31), se determinó  $v_C^2$ .

$$v_C^2 = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C = \dot{y}^2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}^2 - l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{y}\dot{\theta} \quad (4.32)$$

Reemplazando la ecuación (4.32) en la ecuación (4.29) y desarrollando  $J_C$ , se obtuvo la energía cinética  $E$  del sistema.

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{y}^2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}^2 - l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{y}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}l_2^2m_2\right)\dot{\theta}^2$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m_2l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{y}\dot{\theta} \quad (4.33)$$

Por otro lado, se determinó la energía potencial  $U$  del sistema en la ecuación (4.34). Nótese que el nivel de referencia (N.R.) que se utilizó corresponde a la altura del empotramiento.

$$U = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2\theta^2 - m_1gy - m_2g\left(y + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\right) \quad (4.34)$$

Habiendo determinado las energías cinética y potencial del sistema, se construyó la función de Lagrange  $L$  al reemplazar las ecuaciones (4.33) y (4.34) en la ecuación (4.2).

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m_2l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{y}\dot{\theta} - \frac{1}{2}k_1y^2 - \frac{1}{2}k_2\theta^2$$

$$+ m_1gy + m_2g\left(y + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\right) \quad (4.35)$$

Sustituyendo la ecuación (4.35) en la ecuación de Lagrange de segundo tipo (4.1), se obtuvieron las ecuaciones (4.39) y (4.43).

Nótese que para obtener la ecuación (4.39), primeramente debió calcularse las expresiones (4.36), (4.37) y (4.38).

Para  $q_1 = y$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_1 \dot{y} + m_2 \dot{y} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta} \quad (4.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m_1 \ddot{y} + m_2 \ddot{y} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta}^2 \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k_1 y + m_1 g + m_2 g \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= (m_1 + m_2) \ddot{y} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta}^2 \\ &+ k_1 y - (m_1 + m_2) g = Q_y \end{aligned} \quad (4.39)$$

Asimismo, para obtener la ecuación (4.43), primeramente debió calcularse las expresiones (4.40), (4.41) y (4.42).

Para  $q_2 = \theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \quad (4.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{y} - \frac{1}{2} m_2 l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} m_2 l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} - k_2 \theta - \frac{1}{2} m_2 l_2 g \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} m_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{y} + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta} + k_2 \theta \\ &+ \frac{1}{2} m_2 l_2 g \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) = Q_\theta \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para calcular las fuerzas generalizadas  $Q_y$  y  $Q_\theta$ , se utilizó el principio de los trabajos virtuales realizados por las fuerzas externas tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} A_{ext} &= -F_1 \hat{j} \cdot y \hat{j} - F_2 \hat{j} \cdot r_C + M_e \hat{k} \cdot \theta \hat{k} - M_f \hat{k} \cdot \theta \hat{k} \\ \therefore \delta A_{ext} &= -F_1 \delta y - F_2 \hat{j} \cdot \delta r_C + M_e \delta \theta - M_f \delta \theta \end{aligned} \quad (4.44)$$

Al reemplazar la ecuación (4.30) en la ecuación (4.44), derivar, y agrupar términos, se obtuvieron las fuerzas generalizadas  $Q_y$  y  $Q_\theta$ .

$$\begin{aligned} \delta A_{ext} &= -F_1 \delta y - F_2 \hat{j} \cdot \left( \frac{1}{2} l_2 \cos(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta \hat{i} + \left( \delta y - \frac{1}{2} l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta \right) \hat{j} \right) \\ &\quad + M_e \delta \theta - M_f \delta \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \delta A_{ext} = -(F_1 + F_2) \delta y + \left( \frac{1}{2} F_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + M_e - M_f \right) \delta \theta$$

$$\therefore Q_y = -F_1 - F_2 \quad (4.45)$$

$$\therefore Q_\theta = \frac{1}{2} F_2 l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + M_e - M_f \quad (4.46)$$

**Finalmente**, reemplazando las fuerzas generalizadas  $Q_y$  y  $Q_\theta$  en las ecuaciones (4.39) y (4.43), se determinó el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento dinámico del ala articulada con tendones artificiales para el modelo propuesto de 2 grados de libertad. Este sistema de ecuaciones está conformado por las ecuaciones (4.47) y (4.48).

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{y} - \frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_2\text{cos}(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta}^2 + k_1y \\ = -F_1 - F_2 + (m_1 + m_2)g \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\ddot{y} + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta} + k_2\theta \\ = \frac{1}{2}l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)(F_2 - m_2g) + M_e - M_f \end{aligned} \quad (4.48)$$

Expresando las ecuaciones (4.47) y (4.48) en su forma matricial y suponiendo el término  $\dot{\theta}^2$  insignificamente pequeño, se obtuvo el sistema de ecuaciones (4.49).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \\ -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} -F_1 - F_2 + m_1g + m_2g \\ \frac{1}{2}l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)(F_2 - m_2g) + M_e - M_f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

El sistema de ecuaciones de movimiento (4.49) describe la vibración forzada no amortiguada del modelo conceptual viga–barra propuesto para un ala articulada con tendones artificiales. En este sistema de ecuaciones, los parámetros que varían en el tiempo alrededor de sus posiciones de equilibrio estático son i) el desplazamiento vertical y del extremo no empotrado de la viga y ii) el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra. El comportamiento dinámico descrito es producto de la acción de las fuerzas de resorte y las fuerzas externas (fuerzas y momentos) que generan una variación en la cantidad de movimiento del modelo viga–barra de un ala articulada.

### 4.3. Modelo de Ala Articulada actuada con Tendones Artificiales de 3 grados de libertad

#### 4.3.1. Definición del modelo conceptual

Se modeló el ala articulada sin tendones artificiales como una viga en voladizo de masa  $m_1$  y largo  $l_1$  acoplada en su extremo libre con una barra de masa  $m_2$  y largo  $l_2$  mediante una articulación. En este modelo, la barra de masa  $m_2$  se encuentra además acoplada a otra barra de masa  $m_3$  y largo  $l_3$  mediante otra articulación, tal como se ilustra en la figura 4.13.

**Figura 4.13**

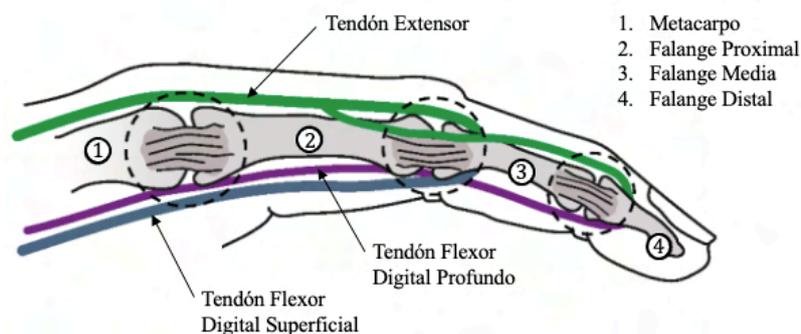
*Modelo viga–barra–barra del ala articulada sin tendones artificiales*



Como se revisó anteriormente, en el dedo humano la extensión es realizada por la acción de músculos extensores, cuya fuerza es transmitida a través del tendón extensor. Este último recorre el metacarpo y la falange proximal, y se ancla en la base superior de las falanges media y distal. Por otro lado, la flexión es generada por la acción de músculos flexores, cuya fuerza es transmitida a través de dos tendones: el tendón flexor digital superficial y el tendón flexor digital profundo. Estos tendones se anclan en la base inferior de las falanges media y distal, respectivamente, después de recorrer el metacarpo y la falange proximal. Véase la figura 4.14.

**Figura 4.14**

*Tendones y huesos del dedo humano*

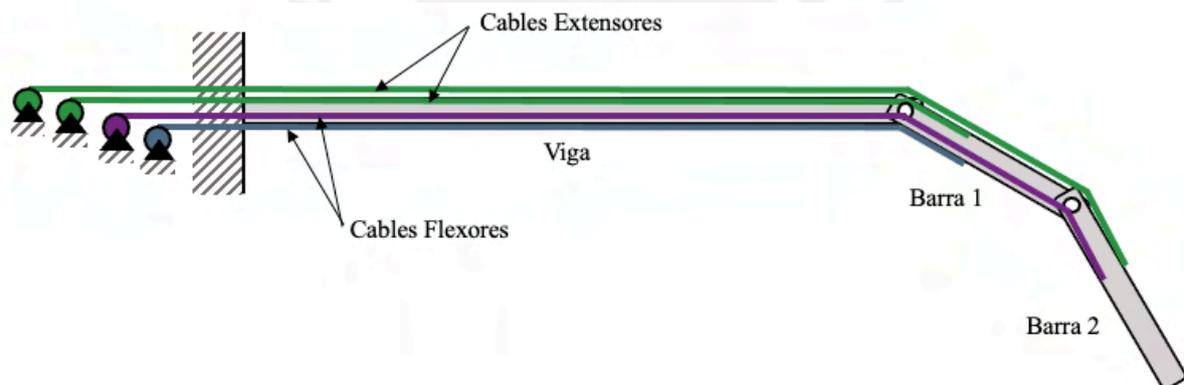


Para la extensión y flexión del ala articulada se propone replicar el sistema de flexión y extensión del dedo humano.

En el modelo de tres grados de libertad que se plantea para el ala articulada con tendones artificiales, la extensión es producida por la acción un par de cabrestantes eléctricos al interior del empotramiento, cuyas fuerzas son transmitidas a través de dos cables tensores. Estos cables tensores recorren la viga y se anclan en la base superior de las barras. Por otro lado, la flexión es realizada por la acción de otro par de cabrestantes eléctricos al interior del empotramiento, cuyas fuerzas son transmitidas mediante dos cables tensores. Estos últimos se anclan en la base inferior de las barras, después de recorrer la viga, tal como exhibe la figura 4.15.

**Figura 4.15**

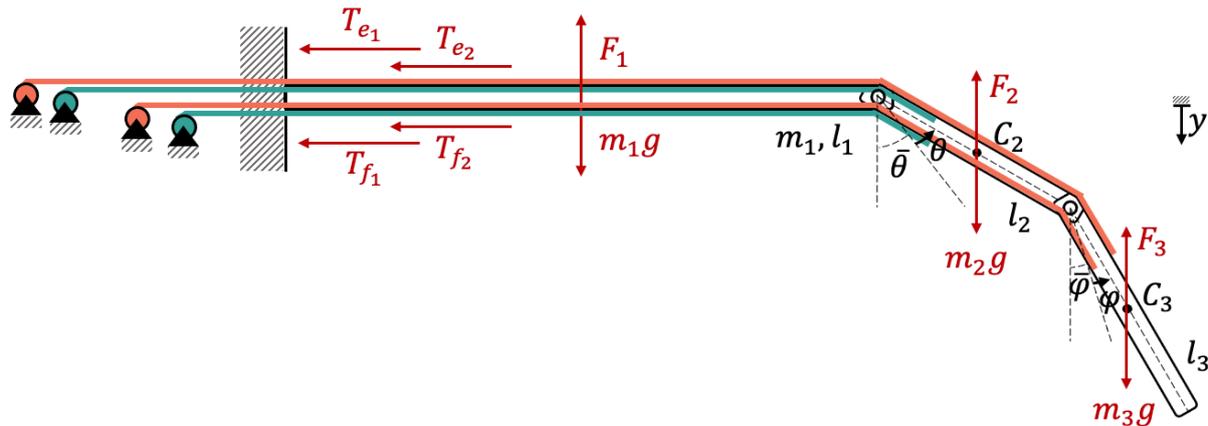
*Modelo viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales*



Las fuerzas que incorporaron al modelo son los pesos  $m_1g$  de la viga y  $m_2g$  y  $m_3g$  de las barras, las tensiones de extensión y flexión ( $T_{e1}$ ,  $T_{e2}$ ,  $T_{f1}$  y  $T_{f2}$ ) de los cables, y la fuerza de sustentación que ha sido representada con las cargas puntuales  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , tal como se expone en la figura 4.16. Nótese además que el peso de las articulaciones, así como la fricción entre los cables y la polea de las articulaciones fueron despreciados.

**Figura 4.16**

*Fuerzas del modelo viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales*

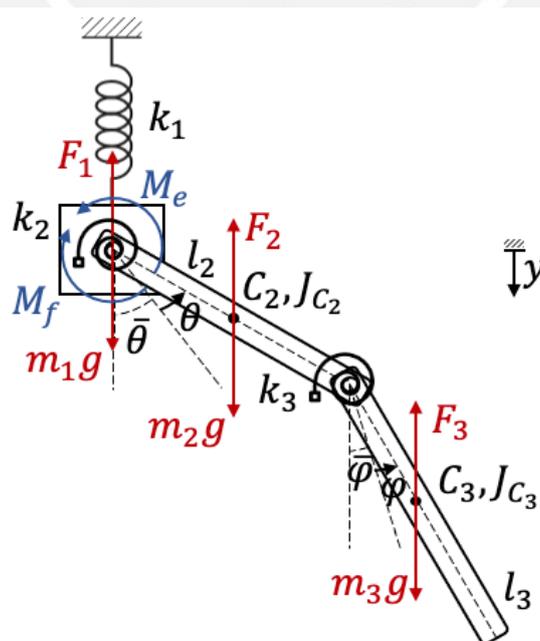


*Nota.* Entiéndase  $y$  como el desplazamiento vertical del extremo no empotrado de la viga,  $\theta$  como el desplazamiento angular de la primera barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$ , y  $\varphi$  como el desplazamiento angular de la segunda barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\varphi}$ .

Para simplificar el modelo, la viga empotrada fue representada como una masa puntual  $m_1$  y un resorte  $k_1$ . Asimismo, el efecto de los cables tensores sobre las barras una vez que estas últimas alcanzaron sus posiciones de equilibrio estático  $\bar{\theta}$  y  $\bar{\varphi}$  fue idealizado con los resortes torsionales  $k_2$  y  $k_3$ , tal como se ilustra en la figura 4.17.

**Figura 4.17**

*Modelo simplificado viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales*



*Nota.* Entiéndase  $C_i$  como el centro de masa de la barra  $i$  y  $J_{C_i}$  como el momento de inercia del centro de masa de la barra  $i$ , para  $i = 2,3$ .

Nótese en la figura 4.17 la presencia de los momentos extensor y flexor ( $M_e$  y  $M_f$ ), los cuales son resultado de la tensión de los cables sobre la viga. Véase las ecuaciones (4.50) y (4.51), donde  $T_{e_1}$ ,  $T_{e_2}$ ,  $T_{f_1}$  y  $T_{f_2}$  son las tensiones de extensión y flexión, y  $d$  es la distancia comprendida entre el cable tensor y el eje de la viga.

$$M_e = M_{e_1} + M_{e_2} = T_{e_1} \cdot d + T_{e_2} \cdot d \quad (4.50)$$

$$M_f = M_{f_1} + M_{f_2} = T_{f_1} \cdot d + T_{f_2} \cdot d \quad (4.51)$$

Los **parámetros físicos** con los que se describen las vibraciones en este modelo viga–barra–barra del ala articulada con tendones artificiales son:

- el **desplazamiento vertical**  $y$  del extremo no empotrado de la viga
- el **desplazamiento angular**  $\theta$  de la primera barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$
- el **desplazamiento angular**  $\varphi$  de la segunda barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\varphi}$

#### 4.3.2. Determinación de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema vibratorio fueron derivadas de la ecuación de Lagrange de segundo tipo para sistemas no conservativos (4.1).

Para determinar la función de Lagrange  $L$  (4.2), se procedió primero a hallar la energía cinética  $E$  del sistema en la ecuación (4.52), donde  $v_2$  y  $v_3$  son las velocidades de los centros de masa de las barras, y  $J_{C_2}$  y  $J_{C_3}$  son los momentos de inercia de los centros de masa de las barras.

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_{C_3} \dot{\varphi}^2 \quad (4.52)$$

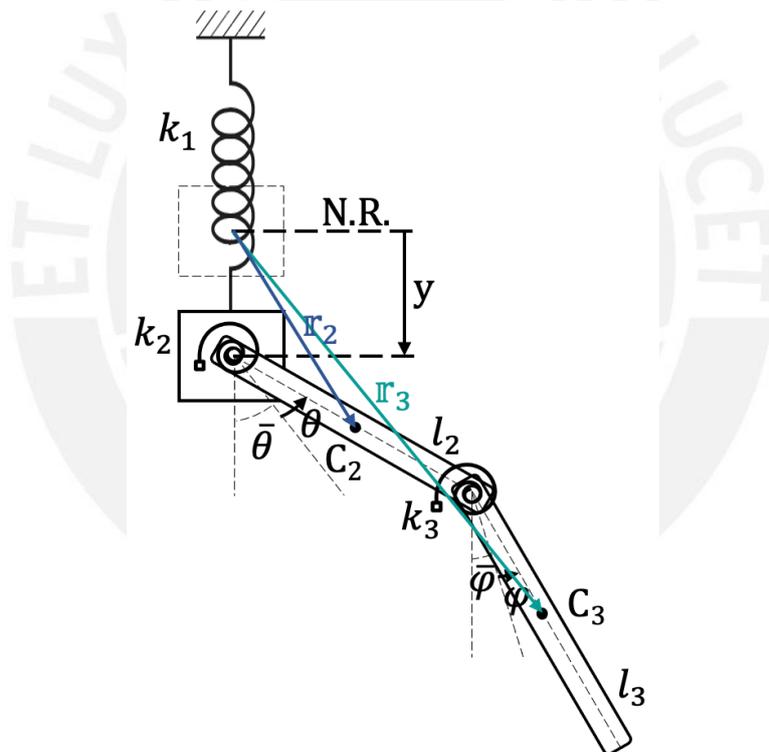
Para encontrar  $v_2$  y  $v_3$ , se definió los vectores de posición  $r_2$  y  $r_3$  con las expresiones (4.53) y (4.54). Nótese que la convención de signos usada fue:  $+y \downarrow$ ,  $+x \rightarrow$ ,  $+ \mathcal{O}$ . Los vectores de posición  $r_2$  y  $r_3$  se exponen en la figura 4.18.

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\hat{i} + \left(y + \frac{1}{2}l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta)\right)\hat{j} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 = & \left(l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + \frac{1}{2}l_3 \text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\right)\hat{i} \\ & + \left(y + l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) + \frac{1}{2}l_3 \text{cos}(\bar{\varphi} + \varphi)\right)\hat{j} \end{aligned} \quad (4.54)$$

**Figura 4.18**

Vectores de posición  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$



Derivando las ecuaciones (4.53) y (4.54) en función del tiempo, se obtuvieron las velocidades  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  de los centros de masa de las barras.

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta}\hat{i} + \left(\dot{y} - \frac{1}{2}l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta}\right)\hat{j} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \mathbf{v}_3 = & \left( l_2 \cos(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} l_3 \cos(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{\varphi} \right) \hat{i} \\ & + \left( \dot{y} - l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta} - \frac{1}{2} l_3 \sin(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{\varphi} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (4.56)$$

A partir de las ecuaciones (4.55) y (4.56), se determinó  $\mathbf{v}_2^2$  y  $\mathbf{v}_3^2$ .

$$\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \dot{y}^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \dot{\theta}^2 - l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3^2 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = & \dot{y}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} l_3^2 \dot{\varphi}^2 - 2l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} \\ & + l_2 l_3 \cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} - l_3 \sin(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{y} \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.57) y (4.58) en la ecuación (4.52) y desarrollando  $J_{C_2}$  y  $J_{C_3}$  se obtuvo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{y}^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \dot{\theta}^2 - l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} l_2^2 m_2 \right) \dot{\theta}^2 \\ & + \frac{1}{2} m_3 \left( \dot{y}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} l_3^2 \dot{\varphi}^2 - 2l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} - l_3 \sin(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{y} \dot{\varphi} \right) \\ & + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} l_3^2 m_3 \right) \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Simplificando (4.59), se determinó la energía cinética  $E$  del sistema en la ecuación (4.60).

$$\begin{aligned} \therefore E = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{y}^2 + \left( \frac{1}{6} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m_3 l_3^2 \dot{\varphi}^2 \\ & - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \sin(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_3 l_3 \sin(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{y} \dot{\varphi} \\ & + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Por otro lado, se determinó la energía potencial  $U$  del sistema en la ecuación (4.61). Nótese que el nivel de referencia (N.R.) que se utilizó corresponde a la altura del empotramiento.

$$U = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2\theta^2 + \frac{1}{2}k_3(\varphi - \theta)^2 - m_1gy - m_2g\left(y + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\right) - m_3g\left(y + l_2\cos(\bar{\theta} + \theta) + \frac{1}{2}l_3\cos(\bar{\varphi} + \varphi)\right) \quad (4.61)$$

Habiendo determinado las energías cinética y potencial del sistema, se construyó la función de Lagrange  $L$  al reemplazar las ecuaciones (4.60) y (4.61) en la ecuación (4.2).

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{y}^2 + \left(\frac{1}{6}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_3l_2^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}m_3l_3^2\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{y}\dot{\theta} - \frac{1}{2}m_3l_3\sin(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{y}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}k_1y^2 - \frac{1}{2}k_2\theta^2 - \frac{1}{2}k_3(\varphi - \theta)^2 + m_1gy + m_2g\left(y + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\right) + m_3g\left(y + l_2\cos(\bar{\theta} + \theta) + \frac{1}{2}l_3\cos(\bar{\varphi} + \varphi)\right) \quad (4.62)$$

Sustituyendo la ecuación (4.62) en la ecuación de Lagrange de segundo tipo (4.1), se obtuvieron las ecuaciones (4.66), (4.70) y (4.74).

Nótese que para obtener la ecuación (4.66), primeramente debió calcularse las expresiones (4.63), (4.64) y (4.65).

Para  $q_1 = y$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{y} - \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\sin(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta} - \frac{1}{2}m_3l_3\sin(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{\varphi} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y} - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{\theta} \\ - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta}^2 &- \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{cos}(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k_1 y + m_1 g + m_2 g + m_3 g \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y} - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{\theta} \\ &- \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) \ddot{\varphi} - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{\theta}^2 \\ &- \frac{1}{2} m_3 l_3 \text{cos}(\bar{\varphi} + \varphi) \dot{\varphi}^2 + k_1 y - (m_1 + m_2 + m_3) g = Q_y \end{aligned} \quad (4.66)$$

Asimismo, para obtener la ecuación (4.70), primeramente debió calcularse las expresiones (4.67), (4.68) y (4.69).

Para  $q_2 = \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \left( \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_3 l_2^2 \right) \dot{\theta} - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \\ &+ \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \text{cos}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \left( \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_3 l_2^2 \right) \ddot{\theta} - \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \ddot{y} \\ &- \left( \frac{1}{2} m_2 + m_3 \right) l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \dot{y} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \text{cos}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \ddot{\varphi} \\ &- \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} = & -\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\dot{y}\dot{\theta} - \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ & -k_2\theta + k_3(\varphi - \theta) - \frac{1}{2}m_2l_2g\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) - m_3l_2g\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & -\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\dot{y} + \left(\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2\right)\ddot{\theta} \\ & + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\varphi}^2 \\ & + k_2\theta - k_3(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}m_2l_2g\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + m_3l_2g\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) = Q_\theta \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por último, para obtener la ecuación (4.74), primeramente debió calcularse las expresiones (4.71), (4.72) y (4.73).

Para  $q_3 = \varphi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}m_3l_3^2\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{y} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = & \frac{1}{3}m_3l_3^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{y} - \frac{1}{2}m_3l_3\cos(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{y}\dot{\varphi} \\ & + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta}^2 \\ & + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = & -\frac{1}{2}m_3l_3\cos(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{y}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ & -k_3(\varphi - \theta) - \frac{1}{2}m_3l_3g\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2} m_3 l_3 \text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \text{cos}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \ddot{\theta} \\
&+ \frac{1}{3} m_3 l_3^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi) \dot{\theta}^2 + k_3 (\varphi - \theta) \\
&+ \frac{1}{2} m_3 l_3 g \text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) = Q_\varphi
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Para calcular las fuerzas generalizadas  $Q_y$ ,  $Q_\theta$  y  $Q_\varphi$  se utilizó el principio de los trabajos virtuales realizados por las fuerzas externas tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
A_{ext} &= -F_1 \hat{j} \cdot y \hat{j} - F_2 \hat{j} \cdot \mathbf{r}_2 - F_3 \hat{j} \cdot \mathbf{r}_3 + M_{e_1} \hat{k} \cdot \theta \hat{k} - M_{f_1} \hat{k} \cdot \theta \hat{k} \\
&+ M_{e_2} \hat{k} \cdot \varphi \hat{k} - M_{f_2} \hat{k} \cdot \varphi \hat{k} \\
\therefore \delta A_{ext} &= -F_1 \delta y - F_2 \hat{j} \cdot \delta \mathbf{r}_2 - F_3 \hat{j} \cdot \delta \mathbf{r}_3 \\
&+ M_{e_1} \delta \theta - M_{f_1} \delta \theta + M_{e_2} \delta \varphi - M_{f_2} \delta \varphi
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Al reemplazar las ecuaciones (4.53) y (4.54) en la ecuación (4.75), derivar, y agrupar términos, se obtuvieron las fuerzas generalizadas  $Q_y$ ,  $Q_\theta$  y  $Q_\varphi$ .

$$\begin{aligned}
\delta A_{ext} &= -F_1 \delta y - F_2 \hat{j} \cdot \left( \frac{1}{2} l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta \hat{i} + \left( \delta y - \frac{1}{2} l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta \right) \hat{j} \right) \\
&- F_3 \hat{j} \cdot \left( \left( l_2 \text{cos}(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta + \frac{1}{2} l_3 \text{cos}(\bar{\varphi} + \varphi) \delta \varphi \right) \hat{i} \right. \\
&\quad \left. + \left( \delta y - l_2 \text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \delta \theta - \frac{1}{2} l_3 \text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) \delta \varphi \right) \hat{j} \right) \\
&+ M_{e_1} \delta \theta - M_{f_1} \delta \theta + M_{e_2} \delta \varphi - M_{f_2} \delta \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta A_{ext} &= -(F_1 + F_2 + F_3)\delta y \\ &+ \left(\frac{1}{2}F_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + F_3l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + M_{e_1} - M_{f_1}\right)\delta\theta \\ &+ \left(\frac{1}{2}F_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) + M_{e_2} - M_{f_2}\right)\delta\varphi \\ \therefore Q_y &= -F_1 - F_2 - F_3 \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\therefore Q_\theta = \frac{1}{2}F_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + F_3l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + M_{e_1} - M_{f_1} \quad (4.77)$$

$$\therefore Q_\varphi = \frac{1}{2}F_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) + M_{e_2} - M_{f_2} \quad (4.78)$$

**Finalmente**, reemplazando las fuerzas generalizadas  $Q_y$ ,  $Q_\theta$  y  $Q_\varphi$  en las ecuaciones (4.66), (4.70) y (4.74), se determinó el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento dinámico del ala articulada con tendones artificiales para el modelo propuesto de 3 grados de libertad. Este sistema de ecuaciones está conformado por las ecuaciones (4.79), (4.80) y (4.81).

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} - \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\ddot{\theta} \\ &- \frac{1}{2}m_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\ddot{\varphi} - \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\text{cos}(\bar{\theta} + \theta)\dot{\theta}^2 \\ &- \frac{1}{2}m_3l_3\text{cos}(\bar{\varphi} + \varphi)\dot{\varphi}^2 + k_1y - (m_1 + m_2 + m_3)g = -F_1 - F_2 - F_3 \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\ddot{y} + \left(\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2\right)\ddot{\theta} \\
& + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\varphi}^2 \\
& + k_2\theta - k_3(\varphi - \theta) + \frac{1}{2}m_2l_2g\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + m_3l_2g\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \\
& = \frac{1}{2}F_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + F_3l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + M_{e_1} - M_{f_1}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}m_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\ddot{y} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\ddot{\theta} \\
& + \frac{1}{3}m_3l_3^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{sen}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\dot{\theta}^2 + k_3(\varphi - \theta) \\
& + \frac{1}{2}m_3l_3g\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) = \frac{1}{2}F_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) + M_{e_2} - M_{f_2}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Suponiendo los términos  $\dot{\theta}^2$ ,  $\dot{\varphi}^2$  insignificamente pequeños, se obtuvo el sistema simplificado conformado por las ecuaciones (4.82), (4.83) y (4.84).

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} - \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\ddot{\varphi} \\
+ k_1y = -F_1 - F_2 - F_3 + m_1g + m_2g + m_3g
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)\ddot{y} + \left(\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2\right)\ddot{\theta} \\
& + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\cos(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\ddot{\varphi} + k_2\theta - k_3(\varphi - \theta) \\
& = \left(\frac{1}{2}F_2 + F_3 - \frac{1}{2}m_2g - m_3g\right)l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) + M_{e_1} - M_{f_1}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}m_3l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi)\ddot{y} + \frac{1}{2}m_3l_2l_3\text{cos}(\bar{\theta} - \bar{\varphi} + \theta - \varphi)\ddot{\theta} \\
& + \frac{1}{3}m_3l_3^2\ddot{\varphi} + k_3(\varphi - \theta) = \frac{1}{2}(F_3 - m_3g)l_3\text{sen}(\bar{\varphi} + \varphi) + M_{e_2} - M_{f_2} \quad (4.84)
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de movimiento conformado por las ecuaciones (4.82), (4.83) y (4.84) describe la vibración forzada no amortiguada del modelo conceptual viga–barra–barra propuesto para un ala articulada con tendones artificiales. En este sistema de ecuaciones, los parámetros que varían en el tiempo alrededor de sus posiciones de equilibrio estático son i) el desplazamiento vertical y del extremo no empotrado de la viga, ii) el desplazamiento angular  $\theta$  de la primera barra y iii) el desplazamiento angular  $\varphi$  de la segunda barra. El comportamiento dinámico descrito es producto de la acción de las fuerzas de resorte y las fuerzas externas (fuerzas y momentos) que generan una variación en la cantidad de movimiento del modelo viga–barra–barra de un ala articulada.

## Capítulo 5

# Ensayos Experimentales

En este capítulo se construyó un modelo experimental viga–barra de un ala articulada con tendones artificiales de dos grados de libertad y se registró sus frecuencias naturales bajo determinadas condiciones de tensión en los cables y posición del ala (flexión/extensión) con la finalidad de estudiar experimentalmente el comportamiento dinámico de la estructura y validar las ecuaciones de movimiento propuestas en el capítulo 4. Para evaluar los efectos de las variaciones de tensión en los cables y de posición en el ala articulada sobre las frecuencias naturales de la estructura se diseñó tres grupos de experimentos. Asimismo, a partir de los registros experimentales de este capítulo, se validó en el capítulo 6 las ecuaciones de movimiento propuestas en el capítulo 4.

### 5.1. Modelo Conceptual

Para la experimentación se utilizó el modelo conceptual de un ala articulada de dos grados de libertad que fue propuesto en el capítulo 4. Este modelo conceptual consta de una viga en voladizo acoplada en su extremo libre a una barra mediante una articulación, tal como ilustra la figura 5.1.

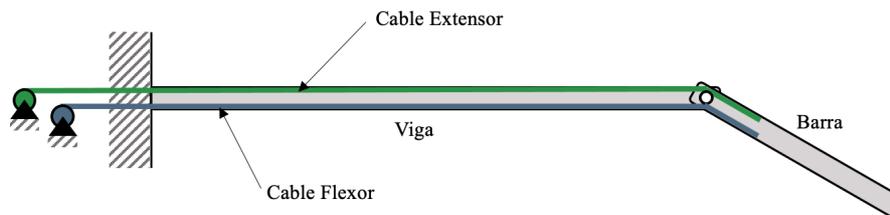
La extensión del ala articulada en el modelo conceptual seleccionado es producida por la acción de un cabrestante al interior del empotramiento cuya fuerza es transmitida a través de un cable tensor (cable extensor). Este cable recorre la viga y se ancla en la base superior de la barra. Por otro lado, la flexión es realizada por la acción de un segundo cabrestante al interior del

empotramiento cuya fuerza es transmitida mediante otro cable tensor (cable flexor). Este cable se ancla en la base inferior de la barra después de recorrer la viga.

A partir del modelo conceptual seleccionado, se diseñó y construyó el modelo experimental.

### Figura 5.1

Modelo conceptual viga–barra del ala articulada con tendones artificiales



## 5.2. Modelo Experimental

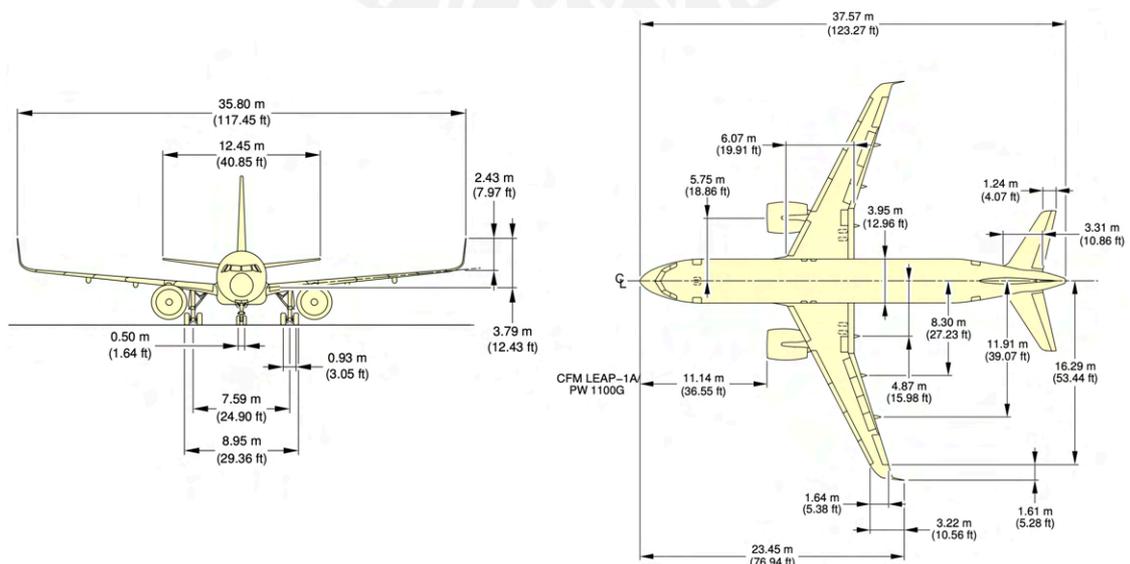
### 5.2.1. Diseño

#### a. Viga y barra

Las dimensiones de la viga y la barra que conforman el ala del modelo experimental fueron definidas en base a las dimensiones a escala de una de las alas de un avión Airbus A320 Neo. Las dimensiones generales del Airbus A320 Neo se detallan en la figura 5.2.

### Figura 5.2

Dimensiones generales de un Airbus A320 Neo



Nota. Tomado de (Airbus, 2021).

Para la longitud, el ancho y la profundidad del empotramiento del ala del modelo experimental se utilizó una escala de 1:67, tal como se expone en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1**

*Longitud, ancho y profundidad del empotramiento del ala del modelo experimental*

<b>Dimensiones</b>	<b>Modelo Experimental</b>	<b>Airbus A320 Neo</b>
Longitud del ala, mm	240	16000
Ancho medio del ala, mm	58	3900
Profundidad del empotramiento, mm	30	1975

*Nota.* Longitud, ancho y profundidad del empotramiento del ala del modelo experimental fueron dimensionados considerando una escala de 1:67 con respecto al Airbus A320 Neo. Entiéndase como longitud del ala del modelo experimental a la sumatoria de las longitudes de la viga y la barra sin considerar el empotramiento.

Habiendo definido la longitud del ala del modelo experimental, se determinó arbitrariamente que las longitudes de la viga y la barra que componen el ala del modelo fueran 4/5 y 1/5 de la longitud total, respectivamente.

Para el espesor del ala del modelo experimental se usó una escala de 1:100, tal como se detalla en la tabla 5.2. Se empleó una escala inferior a la utilizada en las dimensiones de la tabla 5.1 debido a que el ala del modelo experimental será completamente sólida mientras que las alas del Airbus A320 Neo son huecas.

**Tabla 5.2**

*Espesor del ala del modelo experimental*

<b>Dimensiones</b>	<b>Modelo Experimental</b>	<b>Airbus A320 Neo</b>
Espesor medio del ala, mm	3	300

*Nota.* El espesor del ala del modelo experimental fue dimensionado considerando una escala de 1:100 con respecto al espesor medio de una de las alas del Airbus A320 Neo.

Finalmente, las dimensiones de la viga y la barra que conforman el ala del modelo experimental se resumen en la tabla 5.3.

**Tabla 5.3**

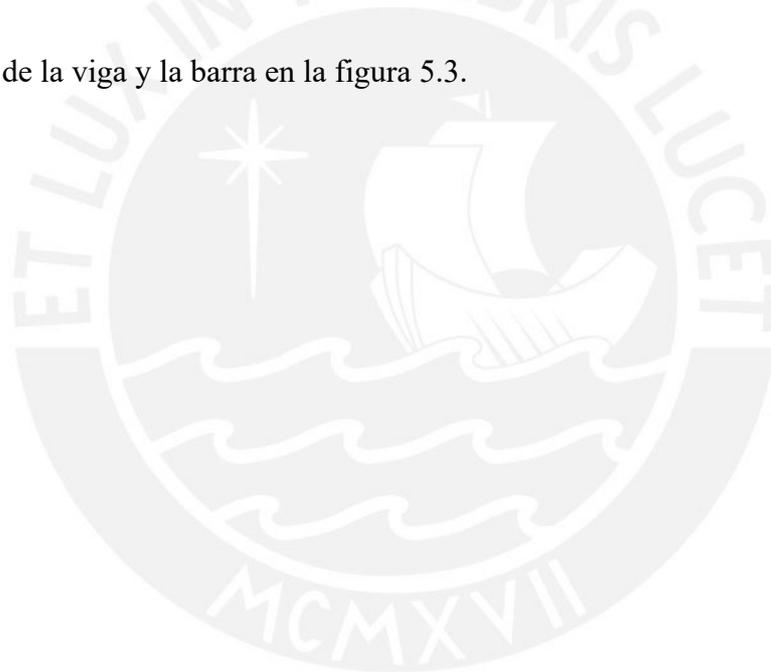
*Dimensiones de la viga y la barra del modelo experimental*

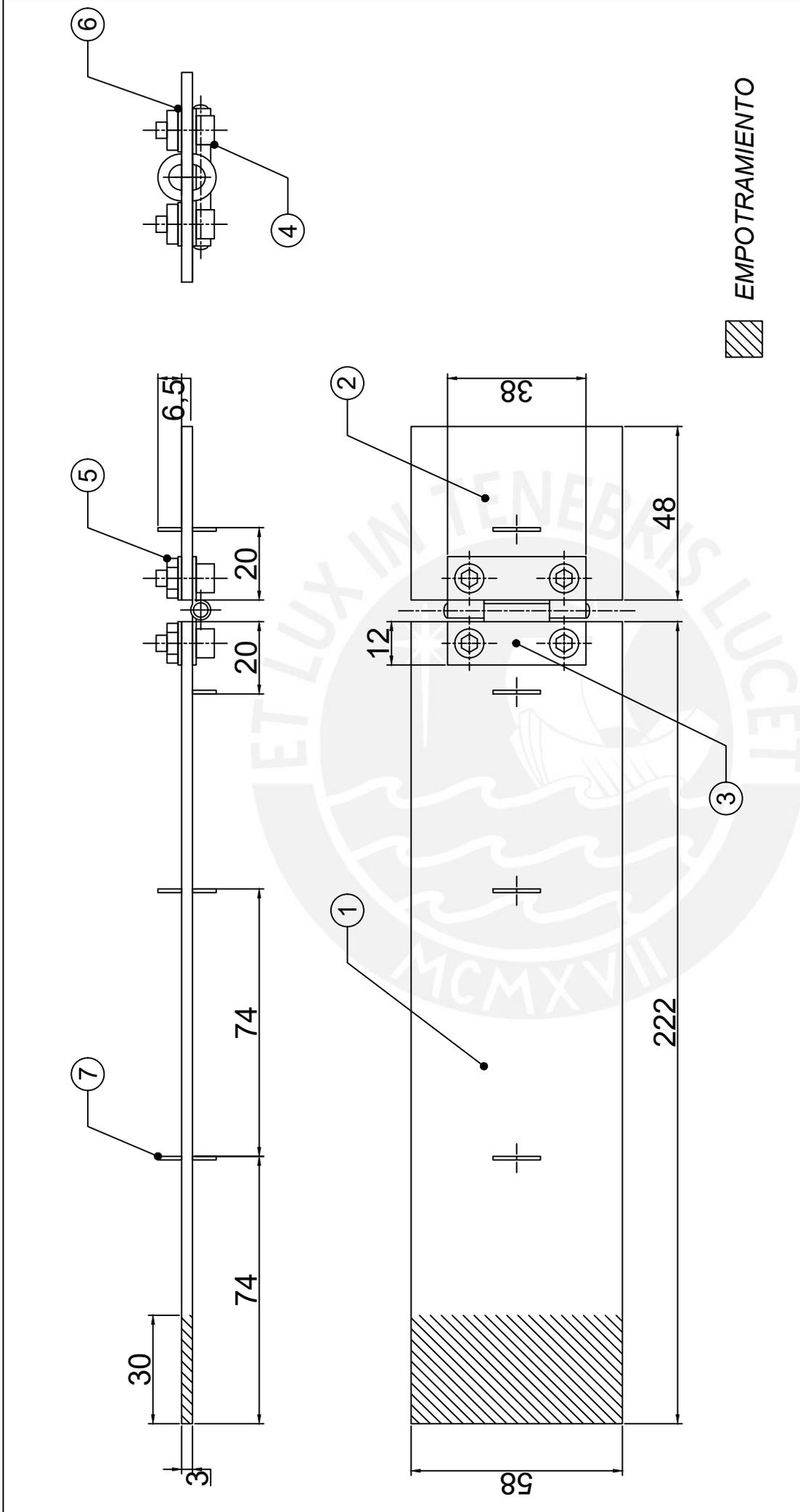
<b>Dimensiones del Modelo Experimental</b>	<b>Viga</b>	<b>Barra</b>	<b>Total Ala Articulada</b>
Longitud, mm	192	48	240
Ancho, mm	58	58	58
Espesor, mm	3	3	3
Profundidad del empotramiento, mm	30	0	30

*Nota.* La longitud de la viga no incluye el empotramiento.

El material por el que se optó para fabricar la viga y la barra del modelo experimental fue el acero inoxidable debido a la isotropía y las propiedades mecánicas del acero, así como a la facilidad de la obtención del acero inoxidable.

Véase el detalle de la viga y la barra en la figura 5.3.





POS. CANT.	DESCRIPCIÓN	NORMA	MATERIAL	OBSERVACIONES	PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ	
1	VIGA		SAE 304		ESCALA	
2	BARRA		SAE 304		2 : 3	
3	BISAGRA CAPUCHINA DE 1 1/2"		SAE 304	MARCA: ERMINOX	Figura 5.3: VIGA-BARRA ARTICULADA DE MODELO EXPERIMENTAL	
4	TORNILLO ALLEN CILÍNDRICO #10 (0.19") x 0.44"	ASME B18.3			MÉTODO DE PROYECCIÓN	
5	TUERCA HEXAGONAL #10 (0.19")	ASME B18.2.2				
6	ARANDELA #10 (0.19")	ASME B18.21.1	SAE 304		FECHA: 2023.08.08	
7	SEMI ARANDELAS #10 (0.19")	ASME B18.21.1	SAE 304		LÁMINA: A4	

### b. Articulación

Para la articulación se seleccionó una bisagra capuchina de acero inoxidable de 1½ pulgadas de ancho (38 mm). Se utilizó 4 uniones empernadas para fijar la bisagra a los extremos de la viga y la barra. Véase el detalle de la articulación y las uniones empernadas en la figura 5.3.

### c. Cables tensores

Se utilizaron 2 cuerdas de guitarra de acero de alto carbono de 0.406 mm de diámetro. Véase la figura 5.4.

### d. Guías para cables tensores

Para el guiado de las cuerdas se soldó a la superficie de la viga–barra articulada 7 arandelas de acero inoxidable, las cuales fueron cortadas previamente por la mitad y dispuestas tal como se exhibe en la figura 5.3.

### e. Cabrestantes

Para tensar las cuerdas se utilizó dos clavijas de guitarra a modo de cabrestantes mecánicos. Véase la figura 5.4.

## Figura 5.4

*Cuerdas y clavijas de guitarra utilizadas en el modelo experimental*



*Nota.* (1) Cuerdas de acero de guitarra de 0.406mm de diámetro. (2) Clavijas de guitarra utilizadas para tensar las cuerdas. En el modelo experimental se emplearon sólo 2 de las 3 clavijas mostradas en la imagen.

### 5.2.2. Montaje

El montaje del modelo experimental consistió en cinco pasos.

- a. Empernar la bisagra a la viga y a la barra.
- b. Fabricar un soporte para las clavijas. Para el soporte se cortó dos bloques de madera de 80 x 50 x 18 mm con un agujero de 20 x 20 x 18 mm en el extremo superior medio de cada uno de los bloques.
- c. Atornillar una clavija en el agujero de cada bloque de madera.
- d. Empotrar la viga–barra articulada y los bloques de madera con las clavijas. Para el empotramiento se utilizó una prensa tornillo de banco. El orden en el que se dispusieron los elementos en el empotramiento fue: bloque de madera, viga–barra articulada, y bloque de madera.
- e. Colocar las cuerdas de acero en el modelo experimental, haciéndolas pasar por las guías y tensándolas con las clavijas.

El modelo experimental montado se expone en la figura 5.5.

**Figura 5.5**

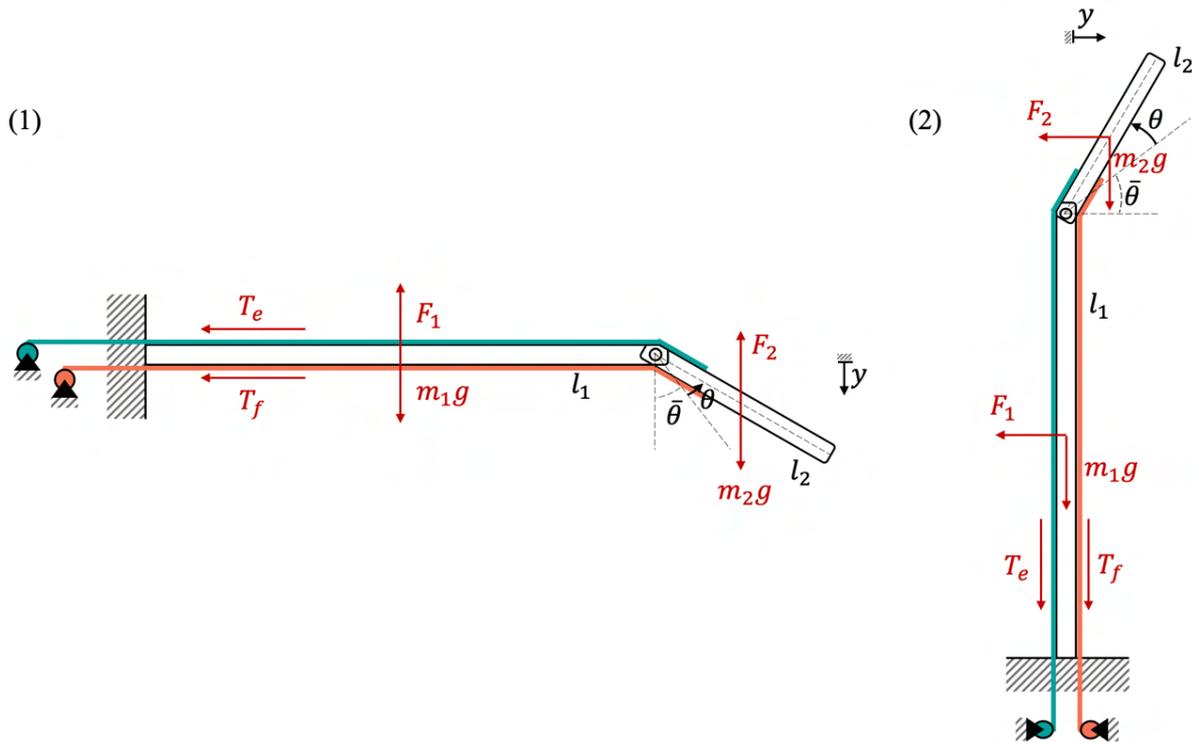
*Montaje del modelo experimental*



Nótese que se utilizó una prensa tornillo de banco, y no mordazas simples, para garantizar condiciones de empotramiento cercanas a las ideales. Como consecuencia de emplear una prensa de banco, el ala articulada del modelo experimental fue dispuesto verticalmente, y no horizontalmente como en el modelo conceptual. Véase la figura 5.6.

**Figura 5.6**

*Esquemas del modelo conceptual y del modelo experimental*



*Nota.* (1) Esquema del modelo conceptual con ala articulada dispuesta horizontalmente. (2) Esquema del modelo experimental con ala articulada dispuesta verticalmente.

Naturalmente, se tuvo que adaptar las ecuaciones de movimiento del modelo conceptual a la disposición vertical del modelo experimental para poder comparar los resultados teóricos con las mediciones experimentales. Esta evaluación de resultados se expone en el capítulo 6.

El montaje del modelo experimental fue realizado en el Laboratorio de Acústica de la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica del Perú bajo la supervisión del Prof. Richard Rivera. Se usaron estas instalaciones debido a que este laboratorio cuenta con la instrumentación necesaria para realizar la medición de vibraciones del modelo experimental.

### 5.3. Ensayo de Impacto (“Bump Test”)

Para todas las mediciones de frecuencias naturales, la técnica de excitación utilizada en esta investigación fue el ensayo de impacto o “bump test”. Esta técnica consiste en manualmente golpear o impactar la superficie de la estructura en estudio con un martillo de impacto con la finalidad de registrar su respuesta vibratoria, la cual se compone de excitaciones a cada una de las frecuencias naturales de la estructura (Rao, 2018). En otras palabras, el ensayo de impacto induce la vibración libre de la estructura, a partir de la cual se pueden determinar sus frecuencias naturales.

Nótese que la fuerza de impacto aplicada en la estructura durante el ensayo de impacto no afecta las mediciones; sin embargo, la fuerza debe ser suficiente para empezar la vibración y considerablemente menor a la requerida para infligir daños en la estructura (Popov & Shitikova, 2020). Obsérvese también que la rigidez de las superficies en contacto durante el impacto afecta la forma del pulso de fuerza y, por ende, el contenido de frecuencias. En consecuencia, la forma del pulso de fuerza puede controlarse mediante la variación de la rigidez de la superficie de impacto del martillo. A mayor rigidez, menor duración del pulso de fuerza, y mayor contenido de frecuencias en la medición (Agilent Technologies, 2000).

### 5.4. Instrumentación

La instrumentación que se empleó para realizar la medición de las frecuencias naturales del modelo experimental constó de los siguientes ítems:

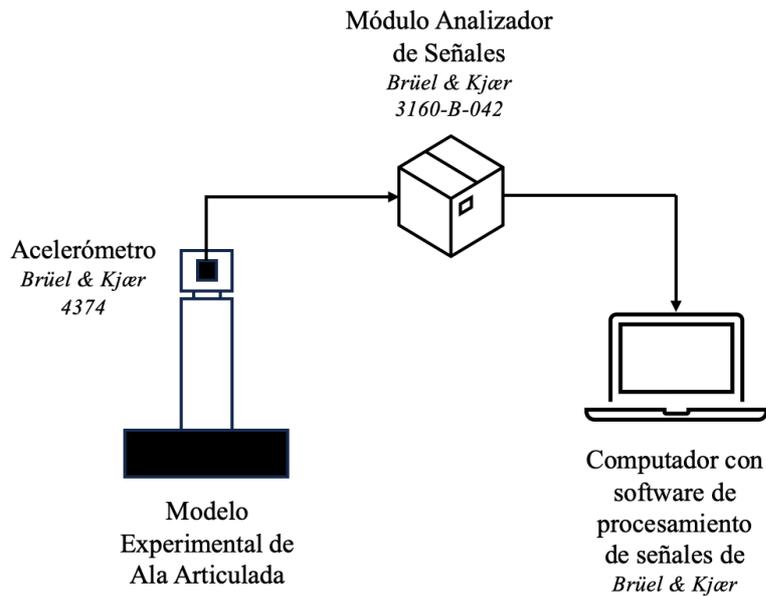
- *Acelerómetro Brüel & Kjær, tipo 4374*
- *Módulo Analizador de Señales Brüel & Kjær, tipo 3160-B-042*

Durante las mediciones, el acelerómetro fue fijado a la superficie del ala articulada del modelo experimental utilizando una fina capa de cera de abeja –método generalmente utilizado en estos casos por proveer contacto mecánico adecuado hasta niveles de aceleración de unos  $100 \text{ m/s}^2$  y a temperaturas menores de  $40^\circ\text{C}$  (Hottinger Brüel & Kjær, 2024)–. A continuación, el ala del modelo experimental fue sometida a ensayos de impacto (“bump test”). La aceleración producto de dicha excitación fue registrada por el acelerómetro y transmitida hacia un computador mediante el módulo analizador de señales. Por último, en el computador, la señal de aceleración fue procesada utilizando el software de análisis de señales *Pulse Lab Shop* de

*Brüel & Kjær* para generar espectros de frecuencias mediante la Transformada de Fourier. Véase el esquema de la figura 5.7.

### Figura 5.7

*Esquema de la instrumentación empleada para medición de frecuencias*

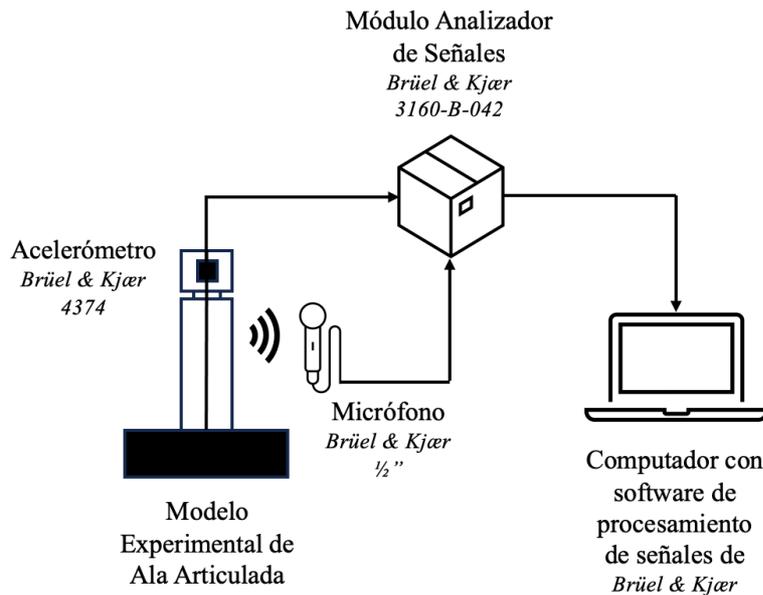


*Nota.* La vibración del modelo experimental producto del bump test fue registrada por el acelerómetro y transmitida hacia el computador mediante el módulo analizador de señales. En el computador, la señal de aceleración fue procesada y transformada en un espectro de frecuencias utilizando la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Adicionalmente, se intentó utilizar el *Micrófono Brüel & Kjær de 1/2" de campo abierto pre-polarizado, tipo 4189* para capturar el espectro de frecuencias de las cuerdas y derivar su tensión a partir de su frecuencia fundamental (véase el esquema de la figura 5.8). No obstante, se prescindió de esta idea debido a la dificultad para identificar la frecuencia fundamental de las cuerdas. En lugar de ello, la tensión en las cuerdas fue calculada a partir de la deformación, tal como se explica en la sección 5.5.

**Figura 5.8**

*Esquema de la instrumentación empleada para medición de frecuencias incluyendo un micrófono para determinar la tensión de los cables tensores del modelo experimental*

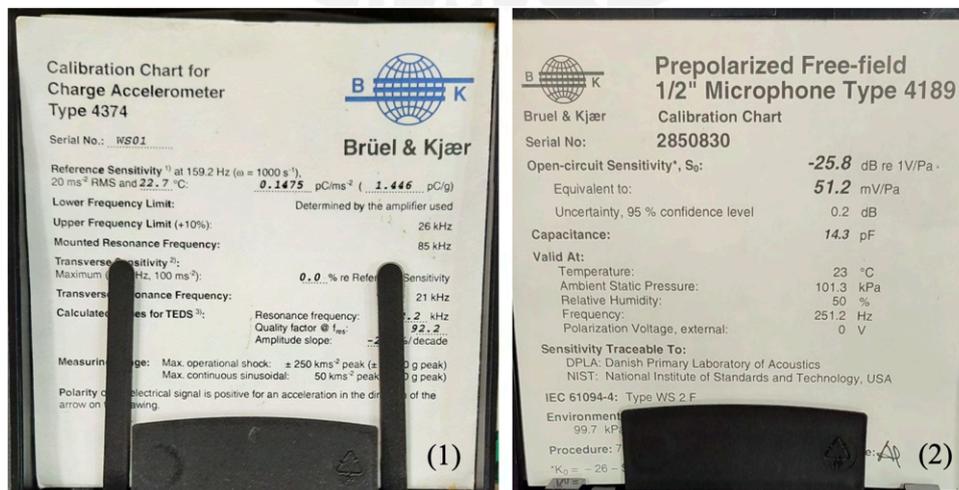


*Nota.* Se intentó utilizar un micrófono para capturar el espectro de frecuencias de las cuerdas y derivar su tensión a partir de su frecuencia fundamental. No obstante, se prescindió de esta alternativa debido a la dificultad para identificar la frecuencia fundamental de las cuerdas en el espectro de frecuencias.

La figura 5.9 exhibe las hojas técnicas del acelerómetro y del micrófono que fueron utilizados durante la experimentación.

**Figura 5.9**

*Hojas técnicas de la instrumentación*



*Nota.* Hojas técnicas de (1) acelerómetro 4374 Brüel & Kjær y (2) micrófono 4180 Brüel & Kjær.

En la figura 5.10 se muestra al modelo experimental con el acelerómetro, el micrófono y el módulo analizador de señales durante una medición.

### Figura 5.10

*Sistema de instrumentación*



*Nota.* Modelo experimental con (1) acelerómetro 4374 Brüel & Kjær, (2) micrófono 4180 Brüel & Kjær, y (3) módulo analizador de señales 3160-B-042 Brüel & Kjær.

## 5.5. Ensayos Experimentales

Se diseñaron tres grupos de experimentos:

- a. **Experimentos preliminares.** Se realizaron dos experimentos preliminares con el propósito de determinar la curva fuerza-deformación de los cables tensores y la rigidez de la viga ( $k_1$ ) del modelo experimental. Estos hallazgos permitieron calcular la tensión de los cables durante los experimentos principales e interpretar los resultados de estos últimos.
- b. **Experimentos principales.** La finalidad de estos experimentos fue evaluar los efectos de modificar la tensión de los cables tensores y la posición del ala articulada (flexión/extensión) sobre las frecuencias naturales de la estructura. Para ello se dispuso el ala articulada del modelo experimental en cuatro posiciones con diferente grado de flexión, y en cada posición se midió las frecuencias naturales de la estructura para distintas tensiones en los cables.

- c. **Experimentos complementarios.** El primer experimento complementario permitió identificar la primera frecuencia natural de la barra del modelo experimental. El segundo experimento complementario tuvo como propósito observar el efecto de modificar únicamente la posición del ala articulada (flexión/extensión) sobre las frecuencias naturales de la estructura sin alterar la tensión de los cables.

La tabla 5.4 brinda mayor detalle acerca de los experimentos realizados.

**Tabla 5.4**

*Experimentos realizados*

<b>Grupo</b>	<b>Experimento</b>	<b>Descripción</b>
Experimentos Preliminares (A)	A1	Determinación de la curva fuerza-deformación de los cables tensores.
	A2	Determinación de la rigidez de la viga ( $k_1$ ) del modelo experimental.
Experimentos Principales (B)	B1 <sup>(a)</sup>	Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra completamente extendida (geometría <sup>(b)</sup> $\bar{\theta} = \pi/2$ ).
	B2	Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada (geometría $\bar{\theta} = \pi/4$ ).
	B3	Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada (geometría $\bar{\theta} = \pi/6$ ).
	B4	Evaluación del efecto de la variación de la tensión de los cables tensores sobre las frecuencias naturales del ala articulada cuando el ala se encuentra completamente flexionada (geometría $\bar{\theta} = 0$ ).
Experimentos Complementarios (C)	C1	Identificación de la primera frecuencia natural de la barra del modelo experimental.
	C2	Evaluación del efecto de la variación de la geometría del ala articulada sobre sus frecuencias naturales sin alterar la tensión de los cables.

*Nota.* <sup>(a)</sup>Los resultados del experimento B1 serán evaluados analíticamente en el capítulo 6. <sup>(b)</sup>Entiéndase geometría como la posición de equilibrio del ala articulada definida por el ángulo  $\bar{\theta}$  que forma la barra con el plano horizontal. Véase el esquema (2) de la figura 5.6.

A continuación se especifican el objetivo, el procedimientos y los resultados de cada uno de los experimentos descritos en la tabla 5.4.

## 5.5.1. Experimento Preliminar A1

### 5.5.1.1. Objetivo

Determinar la curva fuerza-deformación de los cables tensores del modelo experimental.

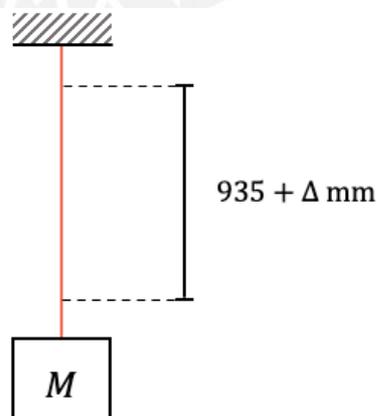
### 5.5.1.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el siguiente procedimiento:

- Se colocó un clavo en una pared.
- Se ancló uno de los extremos de la cuerda de acero a dicho clavo.
- Se colocó una masa  $M$  en el otro extremo de la cuerda.
- Se midió la deformación debido al peso de la masa  $M$  en un segmento de cuerda de 935mm, véase la figura 5.11. Nótese que se optó por evaluar la deformación en un segmento de cuerda de mayor longitud que las cuerdas del modelo experimental (194mm y 200mm) para medir las deformaciones con mayor facilidad. Obsérvese también que las cuerdas del modelo experimental presentan longitudes distintas debido a una diferencia de 6 mm en la posición de las clavijas.
- Finalmente, a partir de las deformaciones del segmento de cuerda de 935mm, se estimaron las deformaciones de las cuerdas del modelo experimental, así como sus curvas de fuerza-deformación.

**Figura 5.11**

*Esquema del experimento A1*



### 5.5.1.3. Resultados

En la tabla 5.5 se muestran las deformaciones observadas en el segmento de cable de 935 mm de longitud debido al peso de la masa  $M$ .

**Tabla 5.5**

*Deformaciones observadas en cable de 935 mm debido al peso de la masa  $M$*

<b>Masa <math>M</math>, kg</b>	<b>Fuerza, N</b>	<b>Deformación <math>\Delta</math>, mm</b>	<b>Longitud <math>l_0 + \Delta</math>, mm</b>
0.00	0.00	0.00	935.00
1.30	12.75	1.00	936.00
2.55	25.02	1.50	936.50
3.80	37.28	1.90	936.90
5.05	49.54	2.50	937.50
6.30	61.80	3.00	938.00
7.55	74.07	3.50	938.50
8.80	86.33	3.80	938.80
10.05	98.59	4.00	939.00
11.30	110.85	4.50	939.50

*Nota.* La columna Fuerza exhibe el peso de la masa  $M$ , cuyo valor corresponde también a la tensión que soporta el cable de acero.

Asumiendo que tanto el material como el área transversal son uniformes en toda la longitud del cable, se infiere que la deformación del cable es proporcional a su longitud para una misma tensión. Bajo este supuesto, las deformaciones que experimentarían los cables del modelo experimental debido al peso de la masa  $M$  se exponen en las tablas 5.6 y 5.7.

**Tabla 5.6**

*Deformaciones calculadas para cable 1 del modelo experimental (194mm) debido al peso de la masa M*

<b>Masa M, kg</b>	<b>Fuerza, N</b>	<b>Deformación <math>\Delta</math>, mm</b>	<b>Longitud <math>l_0 + \Delta</math>, mm</b>
0.00	0.00	0.00	194.00
1.30	12.75	0.21	194.21
2.55	25.02	0.31	194.31
3.80	37.28	0.39	194.39
5.05	49.54	0.52	194.52
6.30	61.80	0.62	194.62
7.55	74.07	0.73	194.73
8.80	86.33	0.79	194.79
10.05	98.59	0.83	194.83
11.30	110.85	0.93	194.93

*Nota.* La columna Fuerza exhibe el peso de la masa M, cuyo valor corresponde también a la tensión que soporta el cable de acero.

**Tabla 5.7**

*Deformaciones calculadas para cable 2 del modelo experimental (200 mm) debido al peso de la masa M*

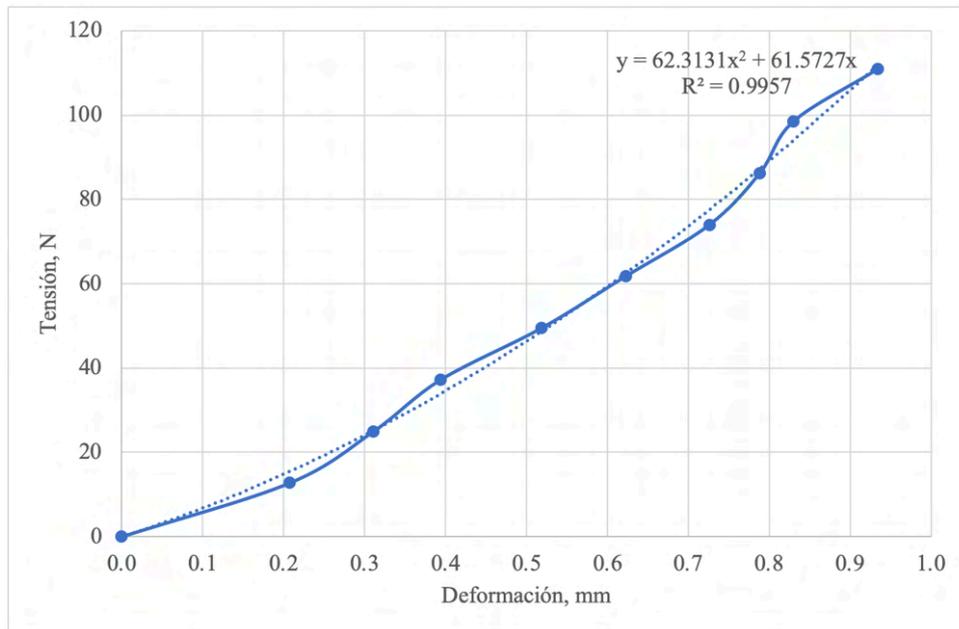
<b>Masa M, kg</b>	<b>Fuerza, N</b>	<b>Deformación <math>\Delta</math>, mm</b>	<b>Longitud <math>l_0 + \Delta</math>, mm</b>
0.00	0.00	0.00	200.00
1.30	12.75	0.21	200.21
2.55	25.02	0.32	200.32
3.80	37.28	0.41	200.41
5.05	49.54	0.53	200.53
6.30	61.80	0.64	200.64
7.55	74.07	0.75	200.75
8.80	86.33	0.81	200.81
10.05	98.59	0.86	200.86
11.30	110.85	0.96	200.96

*Nota.* La columna Fuerza exhibe el peso de la masa M, cuyo valor corresponde también a la tensión que soporta el cable de acero.

Las figuras 5.12 y 5.13 exhiben las curvas de fuerza-deformación para los cables del modelo experimental utilizando los valores de las tablas 5.6 y 5.7, respectivamente.

**Figura 5.12**

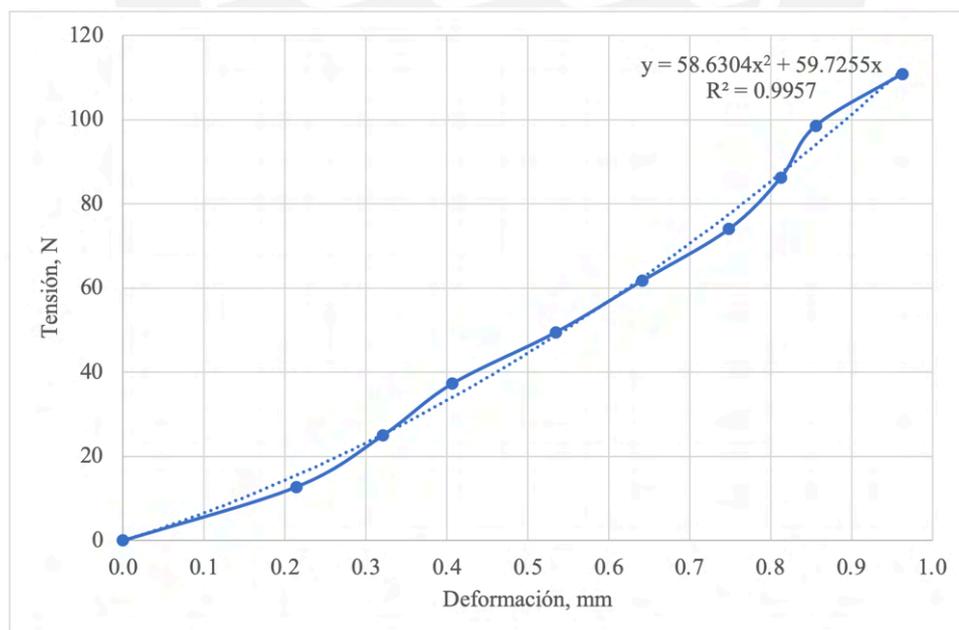
*Curva fuerza-deformación del cable 1 del modelo experimental (194mm)*



*Nota.* Para evaluar el ajuste de los datos a la curva se utilizó el coeficiente de determinación ( $R^2$ ).

**Figura 5.13**

*Curva fuerza-deformación del cable 2 del modelo experimental (200 mm)*



*Nota.* Para evaluar el ajuste de los datos a la curva se utilizó el coeficiente de determinación ( $R^2$ ).

Las funciones que describen las curvas de fuerza-deformación de los cables 1 y 2 se detallan en las expresiones (5.1) y (5.2), respectivamente; donde  $T_{ci}$  es la tensión del cable  $i$  en Newtons y  $z_{ci}$  es la deformación del cable  $i$  en milímetros, para  $i = 1, 2$ .

$$T_{c1}(z_{c1}) = 62.3131z_{c1}^2 + 61.5727z_{c1} \quad (5.1)$$

$$T_{c2}(z_{c2}) = 58.6304z_{c2}^2 + 59.7255z_{c2} \quad (5.2)$$

Nótese que las funciones que describen las curvas fuerza-deformación de los cables son cuadráticas. En consecuencia, la rigidez de los cables no será constante y aumentará conforme se incremente la tensión.

La rigidez de los cables es la pendiente de la curva fuerza-deformación. Consecuentemente, la rigidez de los cables se puede determinar derivando las ecuaciones (5.1) y (5.2) en función de la deformación. La rigidez de los cables ( $k_{c1}$ ,  $k_{c2}$ ) en N/mm se expone en las ecuaciones (5.3) y (5.4).

$$k_{c1}(z_{c1}) = \frac{dT_{c1}(z_{c1})}{dz_{c1}} = 124.6262z_{c1} + 61.5727 \quad (5.3)$$

$$k_{c2}(z_{c2}) = \frac{dT_{c2}(z_{c2})}{dz_{c2}} = 117.2608z_{c2} + 59.7255 \quad (5.4)$$

## 5.5.2. Experimento Preliminar A2

### 5.5.2.1. Objetivo

Determinar la rigidez de la viga en voladizo ( $k_1$ ) del modelo experimental.

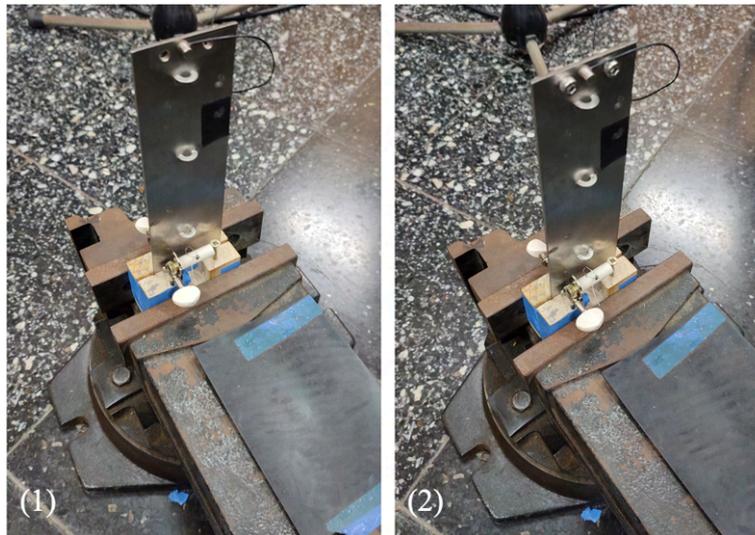
### 5.5.2.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el siguiente procedimiento:

- a. Se montó el modelo experimental.
- b. Se removió la bisagra, la barra y las cuerdas de acero, tal como exhibe la figura 5.14.
- c. Se colocó el acelerómetro en la viga en voladizo y se realizó 2 mediciones:
  - Medición de las frecuencias naturales de la viga: A partir de esta medición se calculó la rigidez de la viga empotrada ( $k_1$ ).
  - Medición de las frecuencias naturales de la viga con una masa adicional: Se adicionó la masa de dos uniones empernadas (9.58 g) en el extremo libre de la viga. Mediante esta segunda medición se verificó el valor de la rigidez de la viga empotrada ( $k_1$ ) que fue calculado a partir de la primera medición. Asimismo, se observó el efecto de una masa adicional sobre las frecuencias naturales de la viga. Recuérdese que en el ala articulada del modelo experimental, la viga presenta en su extremo libre las masas de la barra y la articulación.

**Figura 5.14**

*Medición de frecuencias naturales en la viga del modelo experimental*



*Nota.* (1) Viga en voladizo sin masa adicional, (2) Viga en voladizo con masa adicional (uniones emperradas).

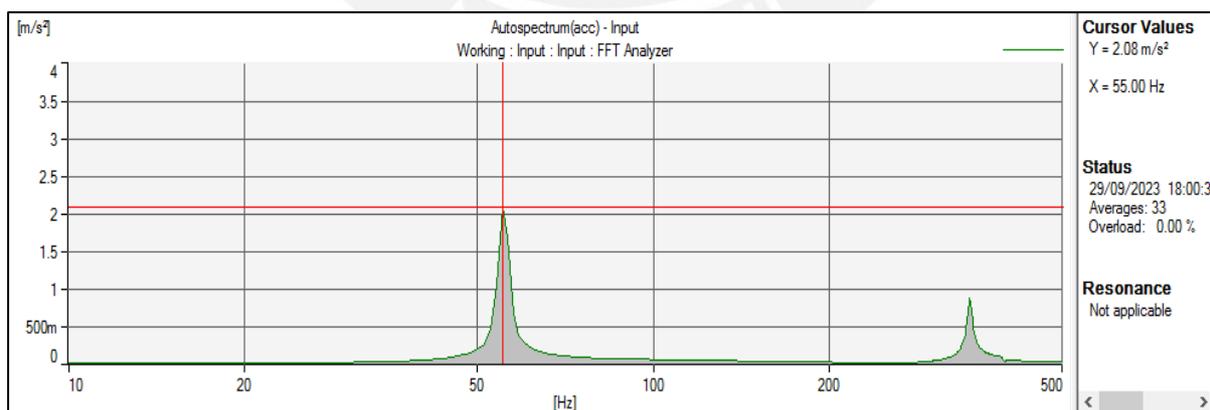
### 5.5.2.3. Resultados

#### a. Medición de frecuencias naturales de la viga empotrada sin masa adicional

En esta medición se encontró que la primera frecuencia natural de la viga del modelo experimental es 55 Hz. Véase la figura 5.15.

**Figura 5.15**

*Espectro de frecuencias de la viga del modelo experimental sin masa adicional*



A partir de esta medición se determinó la rigidez de la viga en voladizo empleando la ecuación (5.5). En esta expresión,  $f_1$  corresponde a la primera frecuencia natural en Hz,  $k_1$  es la rigidez de la viga en voladizo, y  $(33/140)m$  es la masa equivalente de una viga empotrada con su masa  $m$  concentrada en su extremo libre (Rao, 2018).

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{\frac{33}{140}m}} \quad (5.5)$$

Reemplazando  $f_1 = 55$  Hz, y  $m = 242.28$  g en la ecuación (5.5), se obtuvo que la rigidez de la viga en voladizo ( $k_1$ ) del modelo experimental es 6715.01 N/m. Véase la expresión (5.6).

$$k_1 = 6715.01 \text{ N/m} \quad (5.6)$$

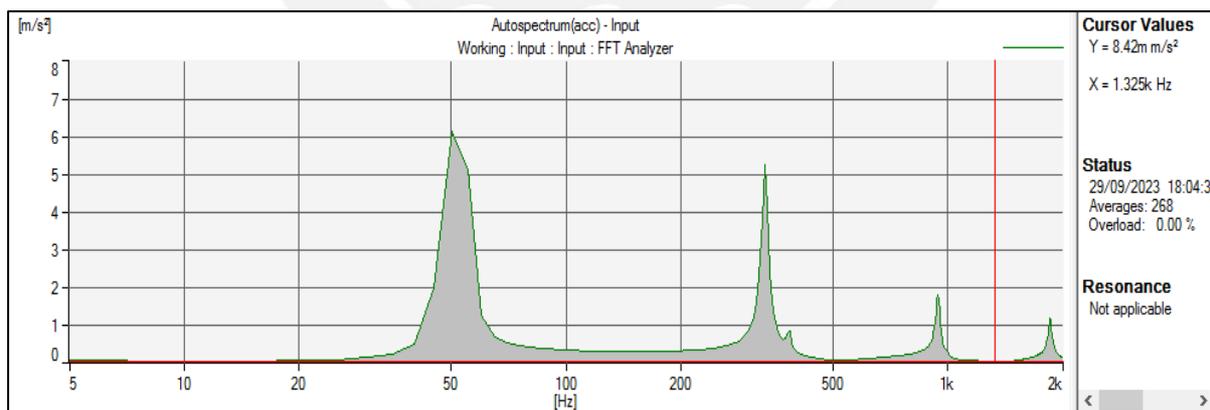
*b. Medición de frecuencias naturales de la viga empotrada con masa adicional*

Para esta medición, se agregó 2 uniones empernadas en el extremo libre para evaluar el efecto de una masa adicional sobre las frecuencias naturales de la viga empotrada. Nótese que este incremento en la masa debería reflejarse en una disminución en las frecuencias naturales de la estructura, tal como predice la teoría de vibraciones mecánicas. Asimismo, se modificó el ancho de banda de 500Hz a 2kHz para observar un mayor número de frecuencias naturales.

En la figura 5.16 se expone el espectro de frecuencias para la viga del modelo experimental con una masa adicional de 9.58 g.

**Figura 5.16**

*Espectro de frecuencias para la viga del modelo experimental con masa adicional*



Como era de esperarse, el incremento de masa (9.58 g) en el extremo libre de la viga en voladizo generó una disminución en las frecuencias naturales de la estructura. La primera frecuencia natural se redujo de 55 Hz a 50 Hz. Nótese que como en el ala articulada del modelo experimental, la viga presenta en su extremo libre las masas de la barra y la articulación (60.82g

y 33.40g, respectivamente), la primera frecuencia natural de la viga en el ala articulada será menor a 50 Hz.

Con los resultados de esta segunda medición, se verificó la rigidez de la viga ( $k_1$ ) hallada en la expresión (5.6). Para ello, se agregó la masa adicional ( $m_a$ ) a la ecuación (5.5) de la siguiente manera:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{\frac{33}{140}m + m_a}} \quad (5.7)$$

Sustituyendo la expresión (5.6),  $m_a = 9.58$  g, y  $m = 242.28$  g en la ecuación (5.7), se obtuvo que el valor teórico de  $f_1$  es 50.41 Hz. Como la desviación entre el valor teórico (50.41 Hz) y el valor experimental (50 Hz) de  $f_1$  es menor al 1%, se concluye que el valor hallado para la rigidez de la viga ( $k_1$ ) en la expresión (5.6) es correcto.

Nótese que en esta medición con masa adicional se observaron también otras frecuencias naturales en 330 Hz, 940 Hz y 1850 Hz. Para identificar si estos valores corresponden a las frecuencias naturales de flexión de la viga, se utilizó la función característica de una viga en voladizo, de la cual se deriva la ecuación (5.8) para obtener numéricamente sus frecuencias naturales.

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^3}} \quad (5.8)$$

En la expresión (5.8),  $\omega_n$  corresponde a la  $n$  frecuencia natural de la viga en voladizo,  $\rho$  es la densidad del material,  $A$  es el área transversal,  $E$  es el módulo de elasticidad,  $I$  es el momento de inercia y  $l$  es la longitud de la viga. Asimismo, para las primeras cuatro frecuencias se tiene las siguientes constantes:  $\beta_1 l = 1.875104$ ,  $\beta_2 l = 4.694091$ ,  $\beta_3 l = 7.854757$ ,  $\beta_4 l = 10.995541$ .

Es importante notar que la ecuación (5.8) se utiliza para estimar las frecuencias naturales de vigas en voladizo sin una masa adicional. Por lo tanto, se realizó el siguiente artificio para estimar las frecuencias naturales de la viga en voladizo con masa adicional de 9.58 g. Se determinó el valor equivalente del término  $\sqrt{EI/\rho A l^3}$  para la viga empotrada con masa adicional reemplazando en la ecuación (5.8): i) el valor de la primera frecuencia natural de la

viga con masa adicional registrado en las mediciones (50 Hz), y ii)  $\beta_1 l = 1.875104$ . Con el valor equivalente del término  $\sqrt{EI/\rho A l^3}$  y las constantes de  $\beta_n l$  para  $n = 2,3,4$  se aproximó los valores de las frecuencias naturales de flexión de la viga en voladizo con masa adicional de 9.58 g. Véase estos valores en la tabla 5.8.

**Tabla 5.8**

*Comparación entre frecuencias naturales observadas y frecuencias naturales aproximadas para viga en voladizo con masa adicional de 9.58 g en su extremo libre*

Frecuencia Natural	Valor experimental, Hz	Valor teórico, Hz	Desviación, %
f1	50.0	50.4	0.8%
f2	330.0	315.9	-4.3%
f3	940.0	884.6	-5.9%
f4	1850.0	1733.5	-6.3%

Considerando la desviación mostrada en la tabla 5.8, se puede concluir que los valores observados en la medición (330 Hz, 940 Hz y 1850 Hz) corresponden a la segunda, tercera y cuarta frecuencia natural de flexión de la viga empotrada con masa adicional de 9.58 g en su extremo libre.

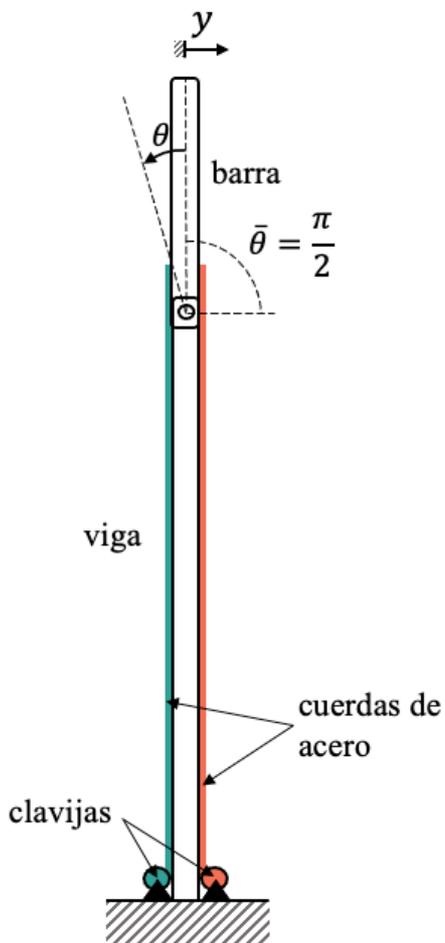
### 5.5.3. Experimento Principal B1

#### 5.5.3.1. Objetivo

Evaluar el efecto de la variación de la tensión de los cables sobre las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental cuando el ala se encuentra completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ). Véase el esquema de la figura 5.17.

#### Figura 5.17

Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B1



$y$  : desplazamiento horizontal del extremo no empotrado de la viga

$\theta$  : desplazamiento angular de la barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$

### 5.5.3.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el siguiente procedimiento:

- a. Se montó el modelo experimental del ala articulada con cables tensores.
- b. El ala articulada (viga–barra) fue posicionada completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ) aplicando una tensión arbitraria mínima en ambas cuerdas. Se asumió que esta tensión arbitraria mínima era aproximadamente 0 N.
- c. Se fijó el acelerómetro a la superficie del ala articulada y se excitó la estructura para medir sus frecuencias naturales.
- d. Por último, se aumentó progresivamente la tensión en las cuerdas del ala articulada, girando las llaves de ambas clavijas  $45^\circ$  por vez. Después de cada incremento de tensión, se capturó las frecuencias naturales del ala articulada.

El modelo experimental del ala articulada con cables tensores durante el experimento B1 se exhibe en la figura 5.18.

#### Figura 5.18

*Modelo experimental de ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B1*

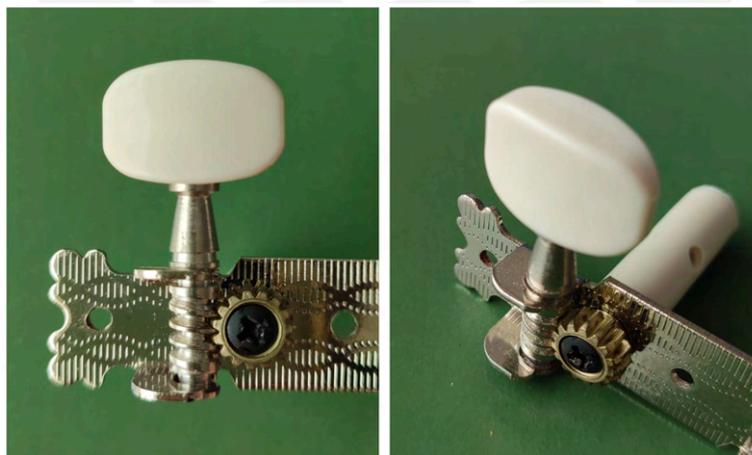


Nótese que cada vez que se incrementó la tensión y se registró las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental, se realizaron dos mediciones: una medición fijando el acelerómetro a la barra con un ancho de banda de 500 Hz y otra medición fijando el acelerómetro a la viga con un ancho de banda de 1.6 kHz. Los espectros de frecuencias de cada medición han sido incluidos en el Anexo 1.

Obsérvese además que se determinó la deformación de cada cuerda a partir del número de giros de las llaves de las clavijas del modelo experimental. Tal como se exhibe en la figura 5.19, las clavijas del modelo experimental están compuestas de tres partes: un tambor en el que se enrolla la cuerda, una rueda con 15 dientes que controla el movimiento del tambor, y una llave con un tornillo sin fin que permite la rotación de la rueda dentada. El tambor presenta un diámetro de 9 mm. Por lo tanto, estirar un cable enrollándolo en el tambor hasta darle una vuelta completa a su circunferencia, implica una deformación del cable de aproximadamente 28.2743 mm. Naturalmente, para lograr la rotación completa del tambor, se deberán mover los 15 dientes de la rueda dentada. Y para mover cada diente de la rueda, se requiere un giro de  $360^\circ$  de la llave. Considerando todas estas relaciones, se puede afirmar que cada giro de  $45^\circ$  de la llave de las clavijas generó una deformación aproximada de 0.2356 mm en los cables.

### **Figura 5.19**

*Clavija de guitarra utilizada en el modelo experimental*



*Nota.* Las clavijas del modelo experimental presentan 3 partes: tambor, rueda dentada y llave con tornillo sin fin.

Finalmente, a partir de las deformaciones producidas por la acción de las clavijas, se calculó las tensiones de las cuerdas utilizando las curvas de fuerza-deformación determinadas en el experimento preliminar A1. En la tabla 5.9 se detallan las deformaciones y tensiones a las que se sometieron los dos cables del modelo experimental durante el experimento B1.

**Tabla 5.9***Tensión de los cables del modelo experimental durante el experimento B1*

Variación de Tensión N°	Giros de 45° de llave de clavija		Deformación, mm		Tensión, N		Tensión Media, N
	Cable 1	Cable 2	Cable 1	Cable 2	Cable 1	Cable 2	
0	0	0	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0
1	1	1	0.24	0.24	17.3	18.0	17.6
2	2	2	0.47	0.47	41.2	42.9	42.0
3	3	3	0.71	0.71	71.5	74.7	73.1
4	4	4	0.94	0.94	108.4	113.4	110.9
5	5	5	1.18	1.18	151.7	159.0	155.4
6	6	7	1.41	1.65	201.6	271.1	236.3
7	7	9	1.65	2.12	258.0	410.8	334.4
8	8	11	1.88	2.59	320.9	578.2	449.5
9	9	12	2.12	2.83	390.3	672.2	531.3
10	10	14	2.36	3.30	466.2	881.2	673.7

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas. Obsérvese además que a partir de la 6ta variación de tensión se necesitó un mayor número de giros en la llave de la clavija del cable 2 para mantener la geometría  $\bar{\theta} = \pi/2$ . Esto se debe a que el eje de rotación de la articulación no es equidistante a ambas cuerdas. Véase la figura 5.3.

### 5.5.3.3. Resultados

El efecto de la variación de tensión sobre las frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ) se expone en la tabla 5.10 y en la figura 5.20.

Nótese que los resultados del experimento B1 serán usados en el capítulo 6 para evaluar la validez de los modelos matemáticos propuestos en el capítulo 4 para una ala articulada actuada con tendones artificiales.

**Tabla 5.10**

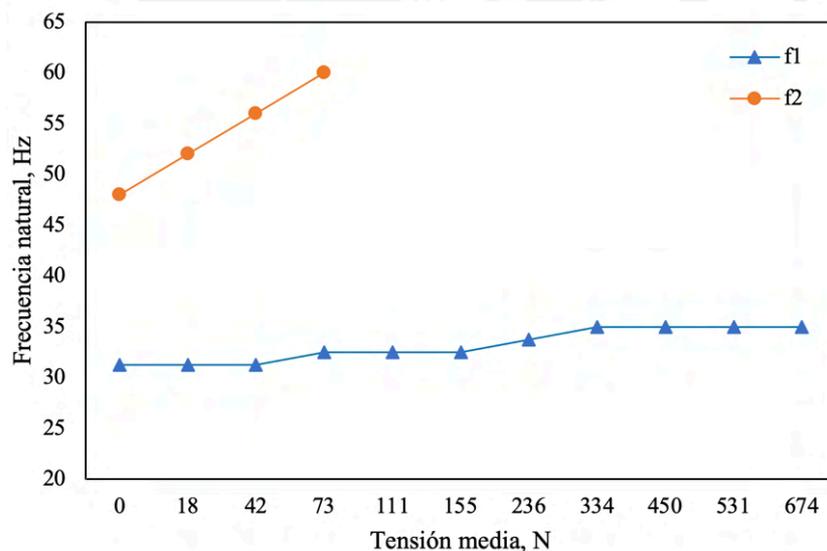
*Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/2$*

Tensión media, N	f1, Hz	f2, Hz	f3, Hz	f4, Hz	f5, Hz	f6, Hz
0.0	31.25	48.00	296.00			
17.6	31.25	52.00	296.00			
42.0	31.25	56.00	300.00			
73.1	32.50	60.00	304.00		816.00	
110.9	32.50		308.00		832.00	1236.00
155.4	32.50		316.00			1240.00
236.3	33.75		320.00	580.00		
334.4	35.00		324.00	592.00	828.00	1236.00
449.5	35.00		328.00	580.00	820.00	
531.3	35.00		332.00	600.00	832.00	1244.00
673.7	35.00		332.00	600.00	832.00	1244.00

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

**Figura 5.20**

*Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/2$*



*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

A partir de estos resultados se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El cambio de tensión en las cuerdas modifica las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental cuando el ala se encuentra completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ).

- El cambio de tensión en las cuerdas reconfigura la rigidez del ala articulada del modelo experimental. Considerando que la masa del ala articulada se mantuvo constante durante todo el experimento, el cambio de tensión en las cuerdas necesariamente debe haber modificado para rigidez de la estructura para producir cambios en las frecuencias naturales del ala articulada. Esta observación se deduce de la ecuación (5.9), la cual define la frecuencia natural  $\omega$  como una relación entre rigidez  $k$  y masa  $m$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.9)$$

- El incremento de tensión en las cuerdas rigidiza el ala articulada del modelo experimental, mientras que la disminución de tensión en las cuerdas flexibiliza la estructura cuando el ala se encuentra completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ).
- Cuando el ala articulada del modelo experimental viga–barra se encuentra completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ), las frecuencias naturales que se afectan en mayor grado ante la variación de tensión son  $f_1$  y  $f_2$ . Cuando la tensión media aumentó de 0 a 73.1 N,  $f_1$  se incrementó en 4% mientras que  $f_2$  aumentó en 25%. Esta observación se justifica si se tiene en cuenta que  $f_1$  corresponde a la primera frecuencia natural de la viga, mientras que  $f_2$  corresponde a la primera frecuencia natural de la barra. En otras palabras, el aumento de tensión en las cuerdas rigidiza principalmente a la barra y en menor medida a la viga del ala articulada del modelo experimental cuando el ala se encuentra completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ).
- Para identificar la primera frecuencia natural de la viga del modelo experimental, se utilizó la ecuación (5.10), donde  $f_{viga}$  es la primera frecuencia natural de una viga en voladizo,  $k_1$  es la constante de rigidez de la viga,  $\frac{33}{140}m$  es la masa equivalente de la viga en voladizo con su masa  $m$  concentrada en el extremo libre (Rao, 2018), y  $m_a$  es la masa adicional en el extremo libre de la viga en voladizo (las masas de la articulación y de la barra).

$$f_{viga} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{\frac{33}{140}m + m_a}} \quad (5.10)$$

Reemplazando  $k_1 = 6715.01 \text{ N/m}$  (la constante de rigidez de la viga  $k_1$  fue determinada a través del experimento preliminar A2),  $m = 243.28 \text{ g}$ , y  $m_a = 94.22 \text{ g}$  en la ecuación (5.10) se obtuvo que  $f_{viga} = 33.5 \text{ Hz}$ . Comparando este resultado con los valores de la tabla 5.10 para una tensión media igual cero, se identificó que  $f_1$  corresponde a la primera frecuencia natural de la viga del modelo experimental.

- Por otro lado, para identificar  $f_2$  como la primera frecuencia natural de la barra del modelo experimental, se realizó el experimento complementario C1. En este experimento, se utilizó un elemento rigidizador en el ala articulada para evitar la oscilación de la barra, de forma tal que las mediciones correspondan exclusivamente a las frecuencias de la viga. Al comparar estas mediciones con aquellas sin el rigidizador, se identificó que  $f_2$  corresponde a la primera frecuencia natural de la barra del modelo experimental. En el experimento C1 también se observó que el aumento de tensión en las cuerdas rigidiza progresivamente la estructura viga–barra hasta que esta última tiende a comportarse como una gran viga. Es por esta razón que  $f_2$  desaparece de las mediciones cuando la tensión media excede los 73.1 N. El experimento complementario C1 se expone a continuación.

#### 5.5.4. Experimento Complementario C1

##### 5.5.4.1. Objetivo

Verificar que la frecuencia natural  $f_2$  observada en el experimento B1 corresponde a la primera frecuencia de la barra del modelo experimental.

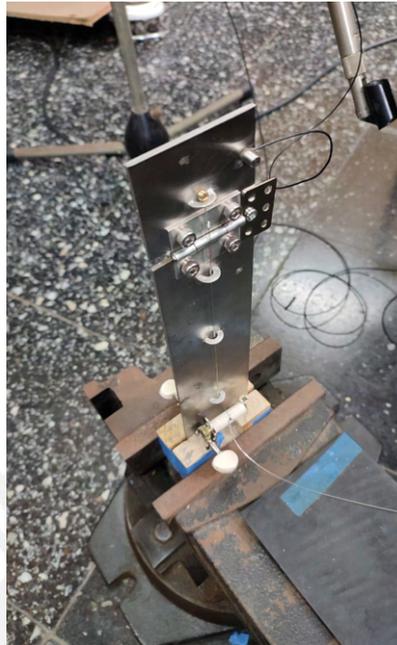
##### 5.5.4.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el siguiente procedimiento:

- a. Se montó el modelo experimental con el ala articulada completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ), tal como en el experimento B1.
- b. Se tensó las cuerdas girando las llaves de ambas clavijas  $270^\circ$  y se registró las frecuencias naturales con un ancho de banda de 200 Hz para capturar con mayor detalle las primeras dos frecuencias naturales ( $f_1, f_2$ ). De acuerdo con los cálculos presentados en la tabla 5.9, la tensión media que estarían soportando las cuerdas es de 201.6 N. Y según los resultados y el análisis del experimento B1, a esta tensión únicamente debería poder observarse la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ), la cual estaría en el rango [32.5, 33.75] Hz.
- c. A continuación, se redujo progresivamente la tensión en las cuerdas del ala articulada 3 veces. Después de cada reducción de tensión, se capturó las frecuencias naturales del ala articulada. De acuerdo con los resultados del experimento B1, conforme disminuye la tensión en las cuerdas, aparece una segunda frecuencia natural en las mediciones ( $f_2$ ), la cual correspondería a la primera frecuencia natural de la barra.
- d. Por último, para verificar que  $f_2$  corresponde a la primera frecuencia natural de la barra, se colocó un elemento rigidizador en el ala articulada con la finalidad de eliminar la oscilación angular de la barra. Si  $f_2$  realmente corresponde a la frecuencia natural de la barra, esta frecuencia no se visualizará en el espectro de frecuencias del ala articulada con el rigidizador. La única frecuencia que se observará será la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ). El elemento rigidizador se muestra en la figura 5.21.

## Figura 5.21

*Modelo experimental con elemento rigidizador*



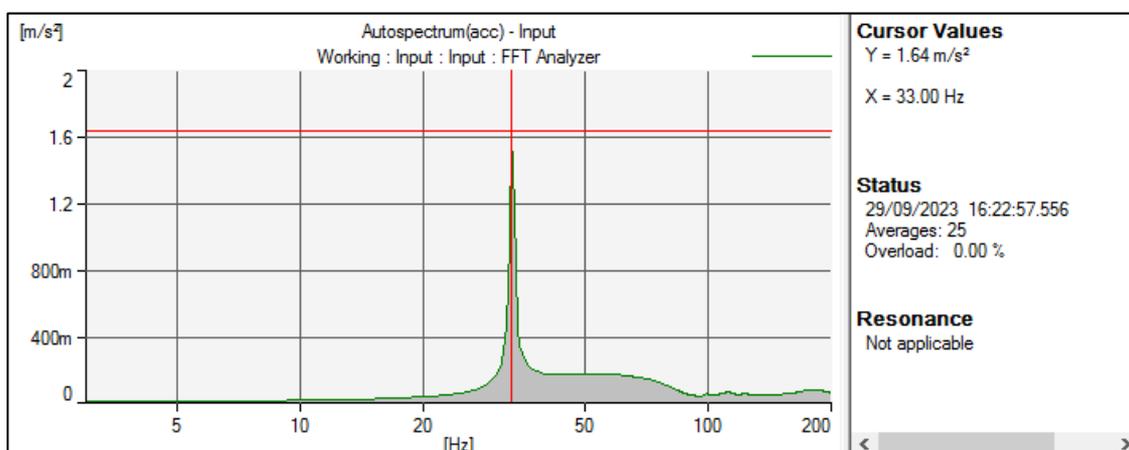
*Nota.* Se utilizó un elemento rigidizador compuesto de dos placas de acero con una unión emperrada para eliminar la oscilación angular de la barra del modelo experimental.

### 5.5.4.3. Resultados

En la figura 5.22, se detalla las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental menores a 200 Hz cuando la cuerdas soportan una tensión media de 201.6 N. Tal como se anticipó, a esta tensión únicamente se observa la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ), la cual es 33Hz.

## Figura 5.22

*Frecuencia natural del ala articulada del modelo experimental con tensión media de 201.6 N*

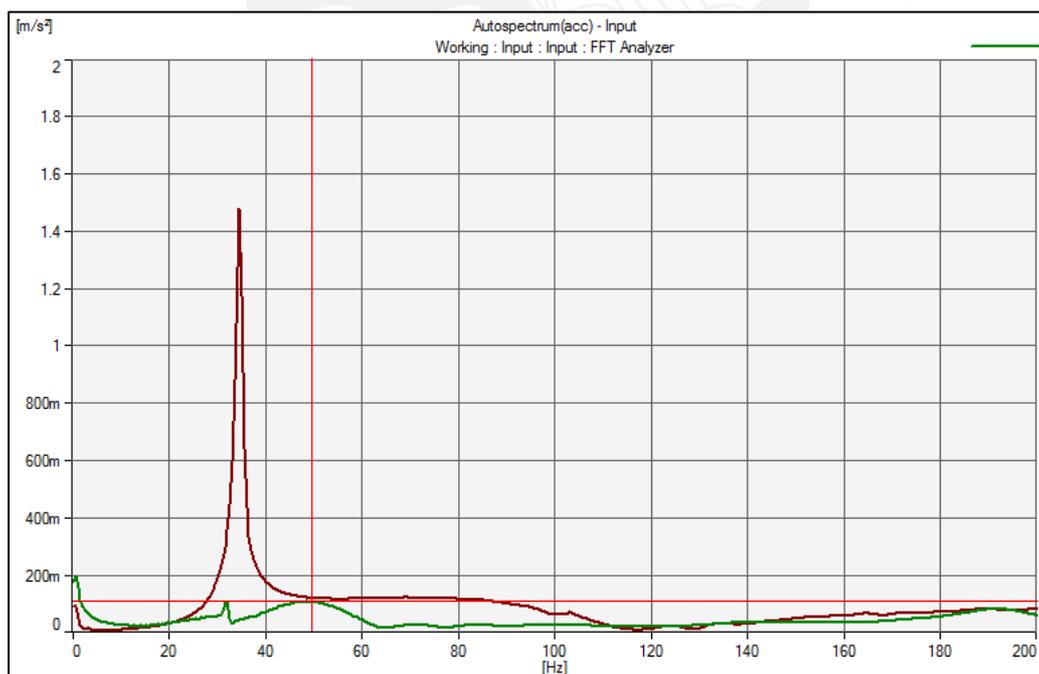


En las figuras 5.23, 5.24 y 5.25 se exhiben los espectros de frecuencias menores a 200 Hz registrados para el ala articulada del modelo experimental después de que la tensión de las cuerdas fuera reducida progresivamente. El decremento de tensión  $i$ -ésimo fue simbolizado con  $\Delta_i$ . Tal como se anticipó anteriormente, y en línea con los resultados del experimento B1, conforme disminuyó la tensión, apareció una segunda frecuencia natural en las mediciones ( $f_2$ ) cuya amplitud aumentó gradualmente. Por otro lado, la amplitud de la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ) se atenuó en mayor proporción que el aumento de la amplitud de  $f_2$  después de cada reducción de la tensión.

Estas observaciones sugieren que  $f_2$  es la primera frecuencia natural de la barra del modelo experimental. Cuando la tensión en las cuerdas es alta, el ala articulada completamente extendida se rigidiza y tiende a comportarse como una gran viga sólida. Mientras que cuando se reduce la tensión, el ala articulada se flexibiliza y aumenta la amplitud de las oscilaciones de la barra hasta superar la amplitud de la deflexión de la viga.

**Figura 5.23**

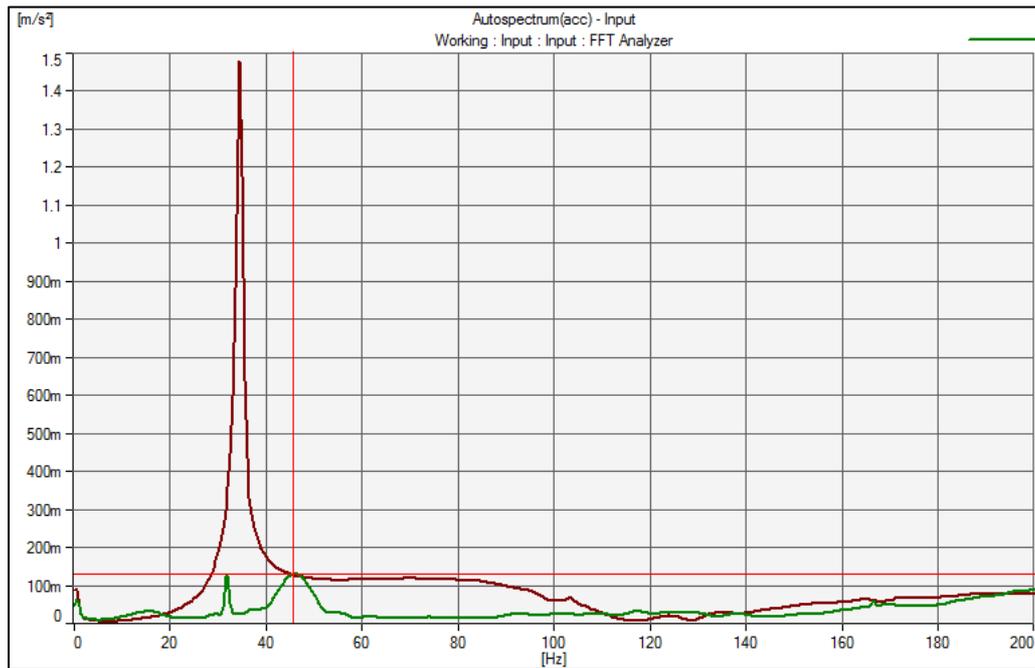
*Comparación de espectro de frecuencias del modelo experimental con tensión media 201.6 N (curva roja) y con tensión media [201.6 –  $\Delta_1$ ] N (curva verde)*



*Nota.* El decremento de tensión  $i$ -ésimo fue simbolizado con  $\Delta_i$ .

**Figura 5.24**

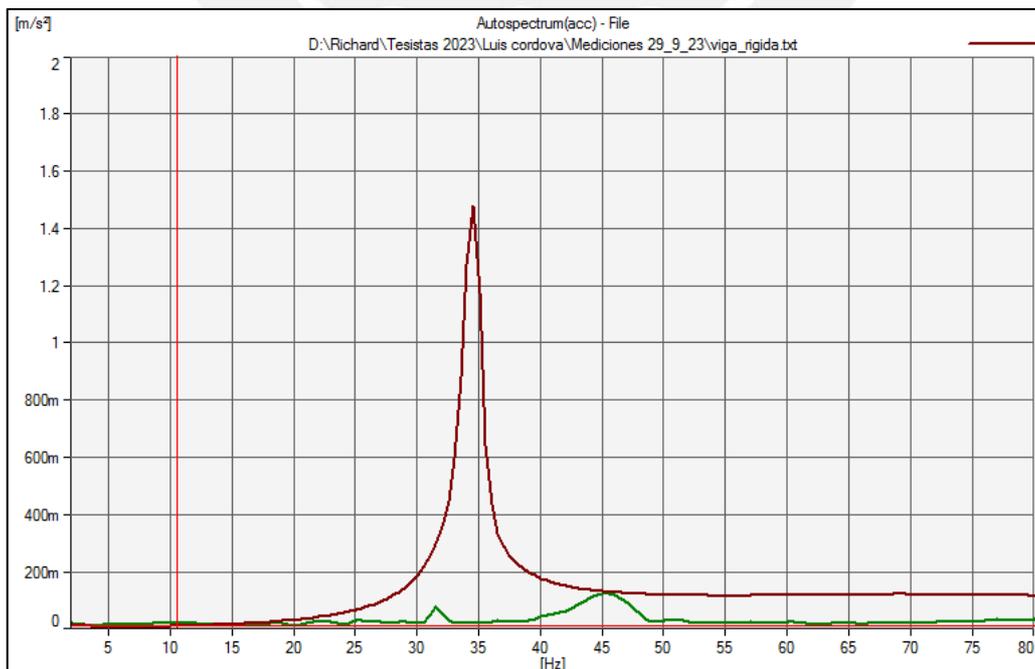
*Comparación de espectro de frecuencias del modelo experimental con tensión media 201.6 N (curva roja) y con tensión media  $[201.6 - \Delta_1 - \Delta_2]$  N (curva verde)*



*Nota.* El decremento de tensión  $i$ -ésimo fue simbolizado con  $\Delta_i$ .

**Figura 5.25**

*Comparación de espectro de frecuencias del modelo experimental con tensión media 201.6 N (curva roja) y con tensión media  $[201.6 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3]$  N (curva verde)*



*Nota.* El decremento de tensión  $i$ -ésimo fue simbolizado con  $\Delta_i$ .

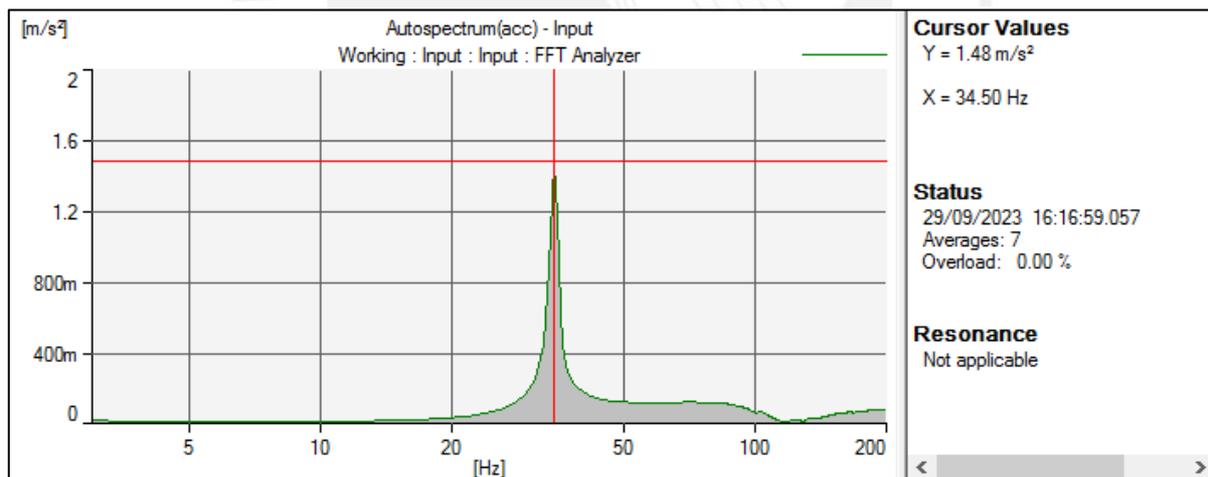
Por último, para verificar que  $f_2$  corresponde a la primera frecuencia natural de la barra, se utilizó el elemento rigidizador mostrado en la figura 5.21 para eliminar la oscilación de la barra. Si  $f_2$  realmente corresponde a la frecuencia natural de la barra del modelo experimental, esta frecuencia no se visualizará en el espectro de frecuencias del ala articulada con el rigidizador. La única frecuencia que se observará será la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ).

La figura 5.26 exhibe el espectro de frecuencias menores a 200 Hz para el ala articulada del modelo experimental con el elemento rigidizador. Únicamente se registró una frecuencia natural en 34.5 Hz, la cual corresponde a primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ). De esta manera, se confirmó que  $f_2$  corresponde a la frecuencia natural de la barra.

Nótese además que  $f_1$  es 34.5 Hz; es decir, el elemento rigidizador incrementó la rigidez del ala articulada en por lo menos 4.5%\* en comparación con la rigidez de la estructura sin el elemento rigidizador y con una tensión media de 201.6 N en los cables. \*Incluyendo la masa del elemento rigidizador, el aumento en la rigidez del ala articulada fue mayor al 4.5%.

**Figura 5.26**

*Frecuencia natural del ala articulada del modelo experimental con elemento rigidizador*



En conclusión, mediante el experimento complementario C1 se verificó que la frecuencia natural  $f_2$  observada en el experimento B1 corresponde a la primera frecuencia de la barra del modelo experimental. Asimismo, se observó que cuando la tensión en las cuerdas es alta, el ala articulada completamente extendida se rigidiza y tiende a comportarse como una gran viga sólida. Mientras que cuando se reduce la tensión, el ala articulada se flexibiliza y aumenta la amplitud del desplazamiento angular de la barra hasta superar la amplitud del desplazamiento vertical de la viga.

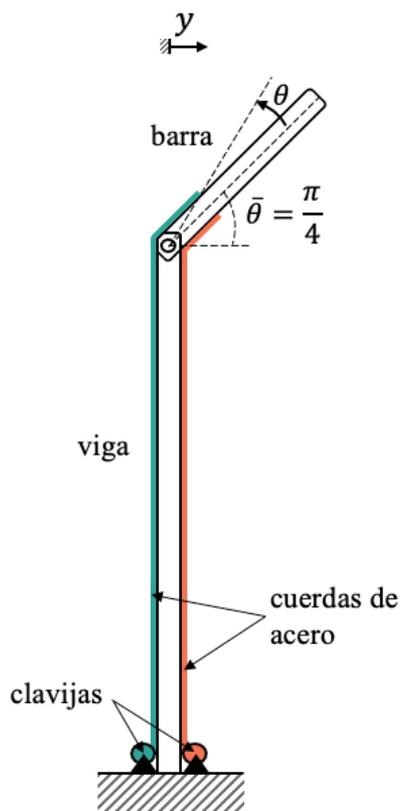
### 5.5.5. Experimento Principal B2

#### 5.5.5.1. Objetivo

Evaluar el efecto de la variación de la tensión de los cables sobre las frecuencias naturales del ala articulada parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/4$ ) del modelo experimental. Véase el esquema de la figura 5.27.

#### Figura 5.27

Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B2



$y$  : desplazamiento horizontal del extremo no empotrado de la viga

$\theta$  : desplazamiento angular de la barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$

#### 5.5.5.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el siguiente procedimiento:

- Se montó el modelo experimental del ala articulada con cables tensores.
- El ala articulada (viga–barra) fue posicionada completamente extendida aplicando una tensión arbitraria mínima en ambas cuerdas.

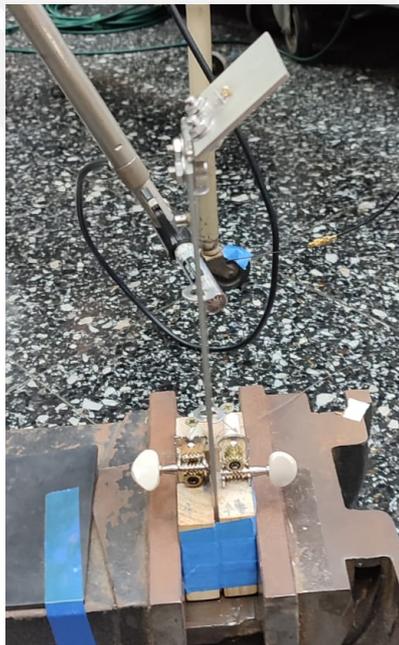
- c. Se giró sólo una de las clavijas para tensionar directamente una de las cuerdas hasta que la barra alcanzó la geometría deseada (la posición de equilibrio definida por  $\bar{\theta}$ ).
- d. Una vez alcanzada la geometría deseada, se fijó el acelerómetro a la superficie del ala articulada y se excitó la estructura para medir sus frecuencias naturales. Nótese que a la tensión media de las cuerdas con la que se alcanzó la geometría deseada se le denominó  $T_{m,0}$ .
- e. Por último, se aumentó progresivamente la tensión en las cuerdas del ala articulada, girando las llaves de ambas clavijas  $45^\circ$  por vez. Después de cada incremento de tensión, se capturó las frecuencias naturales del ala articulada.

Nótese que cada vez que se incrementó la tensión y se registró las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental, se realizaron dos mediciones: una medición fijando el acelerómetro a la barra con un ancho de banda de 500 Hz y otra medición fijando el acelerómetro a la viga con un ancho de banda de 1.6 kHz. Los espectros de frecuencias de cada medición han sido incluidos en el Anexo 2.

El modelo experimental del ala articulada con cables tensores durante el experimento B2 se exhibe en la figura 5.28.

### **Figura 5.28**

*Modelo experimental de ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B2*



Al igual que con el experimento B1, la deformación de las cuerdas después de cada incremento de tensión fue estimada a partir del número de giros de las llaves de las clavijas. Asimismo, el valor de las tensiones fue determinado utilizando las curvas de fuerza-deformación halladas en el experimento preliminar A1.

Es importante mencionar que la geometría del ala articulada del modelo experimental fue verificada después de cada aumento de tensión a través del uso de un transportador de 360°, tal como se muestra en la figura 5.29.

### Figura 5.29

*Verificación de la geometría del ala articulada del modelo experimental durante mediciones*



#### 5.5.5.3. Resultados

El efecto de la variación de tensión sobre las frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/4$  se expone en la tabla 5.11 y en la figura 5.30.

**Tabla 5.11**

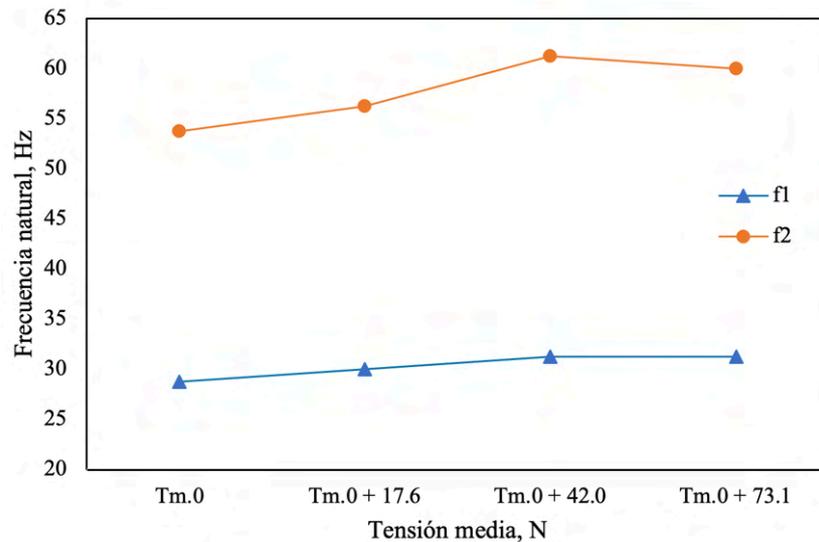
*Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/4$*

Tensión media, N	f1, Hz	f2, Hz	f3, Hz	f4, Hz	f5, Hz	f6, Hz	f7, Hz
$T_{m.0}$	28.75	53.75		280.00		510.00	770.00
$T_{m.0} + 17.6$	30.00	56.25	180.00	280.00	420.00	513.00	770.00
$T_{m.0} + 42.0$	31.25	61.25	180.00	280.00	420.00	515.00	770.00
$T_{m.0} + 73.1$	31.25	60.00	180.00	280.00	420.00	518.00	770.00

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.  $T_{m.0}$  es la tensión media inicial de las cuerdas con la que se alcanzó la geometría deseada ( $\bar{\theta} = \pi/4$ ). A partir de  $T_{m.0}$  se aumentó progresivamente la tensión en las cuerdas del ala articulada, girando las llaves de ambas clavijas 45° por vez al mismo tiempo.

**Figura 5.30**

*Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/4$*



*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

A partir de estos resultados se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El cambio de tensión en las cuerdas modifica las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/4$ ).
- El cambio de tensión en las cuerdas reconfigura la rigidez del ala articulada del modelo experimental.
- El incremento de tensión en las cuerdas rigidiza el ala articulada del modelo experimental, mientras que la disminución de tensión en las cuerdas flexibiliza la estructura cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/4$ ).
- Cuando el ala articulada del modelo experimental se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/4$ ), las frecuencias naturales que se afectan en mayor grado ante la variación de tensión son  $f_1$  y  $f_2$ . Cuando la tensión media aumentó de  $T_{m.0}$  a  $T_{m.0} + 73.1$  N,  $f_1$  se incrementó en 9% mientras que  $f_2$  aumentó en 12%. Es decir, el aumento de tensión en las cuerdas rigidiza principalmente a la barra y en menor medida a la viga del ala articulada del modelo experimental cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/4$ ).

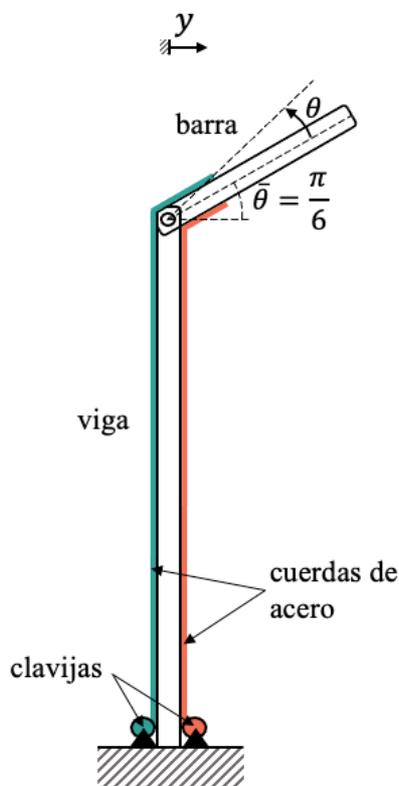
## 5.5.6. Experimento Principal B3

### 5.5.6.1. Objetivo

Evaluar el efecto de la variación de la tensión de los cables sobre las frecuencias naturales del ala articulada parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/6$ ) del modelo experimental. Véase el esquema de la figura 5.31.

### Figura 5.31

Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B3



$y$  : desplazamiento horizontal del extremo no empotrado de la viga

$\theta$  : desplazamiento angular de la barra desde su posición de equilibrio estático  $\bar{\theta}$

### 5.5.6.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el mismo procedimiento que el experimento B2 (véase la sección 5.5.5.2. *Procedimiento*). Asimismo, los espectros de frecuencias de todas las mediciones de este experimento han sido incluidos en el Anexo 3.

El modelo experimental del ala articulada con cables tensores durante el experimento B3 se exhibe en la figura 5.32.

### Figura 5.32

Modelo experimental de ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B3



#### 5.5.6.3. Resultados

El efecto de la variación de tensión sobre las frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/6$  se expone en la tabla 5.12 y en la figura 5.33.

**Tabla 5.12**

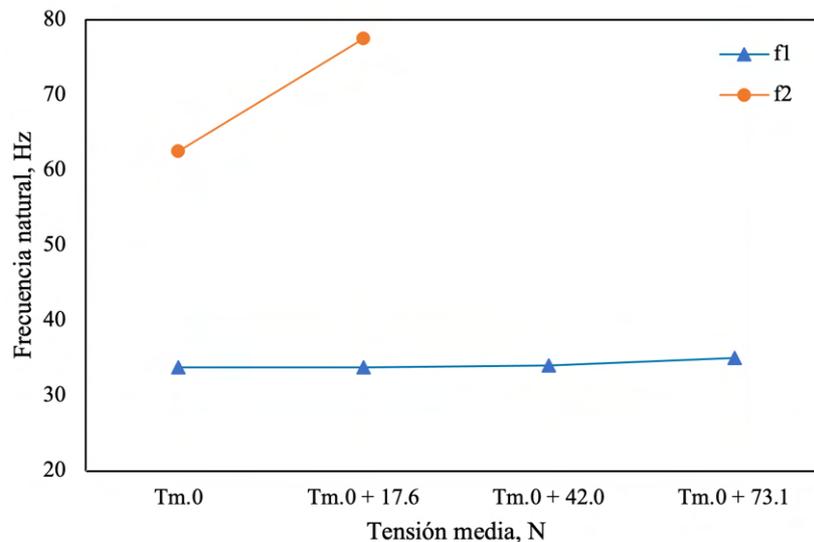
Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/6$

Tensión media, N	f1, Hz	f2, Hz	f3, Hz	f4, Hz	f5, Hz	f6, Hz	f7, Hz
$T_{m.0}$	33.75	62.50	88.00	280.00	536.00	768.00	1244.00
$T_{m.0} + 17.6$	33.75	77.50	88.00	280.00	536.00	768.00	1240.00
$T_{m.0} + 42.0$	34.00		96.00	280.00	540.00	768.00	1256.00
$T_{m.0} + 73.1$	35.00		100.00	280.00	548.00	772.00	1256.00

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.  $T_{m.0}$  es la tensión media inicial de las cuerdas con la que se alcanzó la geometría deseada ( $\bar{\theta} = \pi/6$ ). A partir de  $T_{m.0}$  se aumentó progresivamente la tensión en las cuerdas del ala articulada, girando las llaves de ambas clavijas  $45^\circ$  por vez al mismo tiempo.

**Figura 5.33**

*Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/6$*



*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

A partir de estos resultados se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El cambio de tensión en las cuerdas modifica las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/6$ ).
- El cambio de tensión en las cuerdas reconfigura la rigidez del ala articulada del modelo experimental.
- El incremento de tensión en las cuerdas rigidiza el ala articulada del modelo experimental, mientras que la disminución de tensión en las cuerdas flexibiliza la estructura cuando el ala se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/6$ ).
- Cuando el ala articulada del modelo experimental se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/6$ ), las frecuencias naturales que se afectan en mayor grado ante la variación de tensión son  $f_1$  y  $f_2$ . Cuando la tensión media aumentó de  $T_{m.0}$  a  $T_{m.0} + 17.6$  N,  $f_1$  se mantuvo constante mientras que  $f_2$  aumentó en 24%. Es decir, el aumento de tensión en las cuerdas rigidiza principalmente a la barra y en menor medida a la viga del ala articulada del modelo experimental cuando esta última se encuentra parcialmente flexionada ( $\bar{\theta} = \pi/6$ ).

- Nótese que cuando la tensión media excede  $T_{m,0} + 17.6$  N, la primera frecuencia natural de la barra ( $f_2$ ) deja de ser registrada por el acelerómetro. Es decir,  $f_2$  se hace imperceptible debido al aumento de la tensión en las cuerdas. Este efecto fue estudiado en el experimento complementario C1.

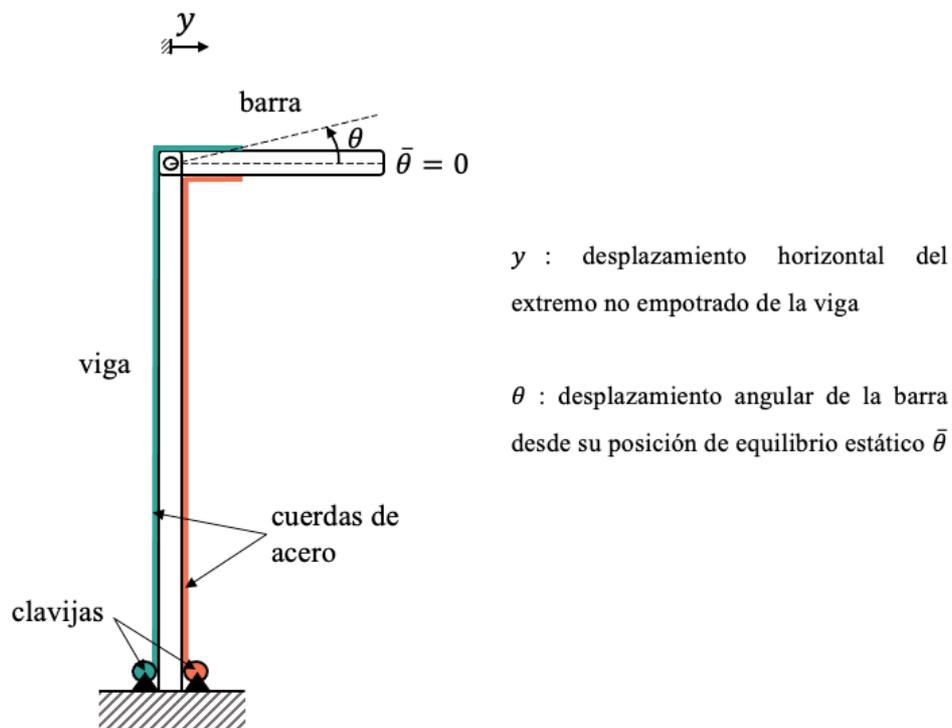
### 5.5.7. Experimento Principal B4

#### 5.5.7.1. Objetivo

Evaluar el efecto de la variación de la tensión de los cables sobre las frecuencias naturales del ala articulada con  $\bar{\theta} = 0$  del modelo experimental. Véase el esquema de la figura 5.34.

#### Figura 5.34

Esquema del modelo experimental del ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B4



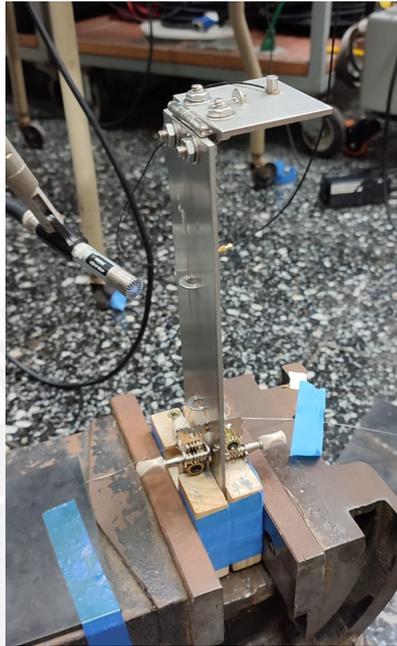
#### 5.5.7.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el mismo procedimiento que el experimento B2 (véase la sección 5.5.5.2. *Procedimiento*). Asimismo, los espectros de frecuencias de todas las mediciones de este experimento han sido incluidos en el Anexo 4.

El modelo experimental del ala articulada con cables tensores durante el experimento B4 se exhibe en la figura 5.35.

**Figura 5.35**

*Modelo experimental de ala articulada con tendones artificiales durante el experimento B4*



**5.5.7.3. Resultados**

El efecto de la variación de tensión sobre las frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = 0$  se expone en la tabla 5.13 y en la figura 5.36.

**Tabla 5.13**

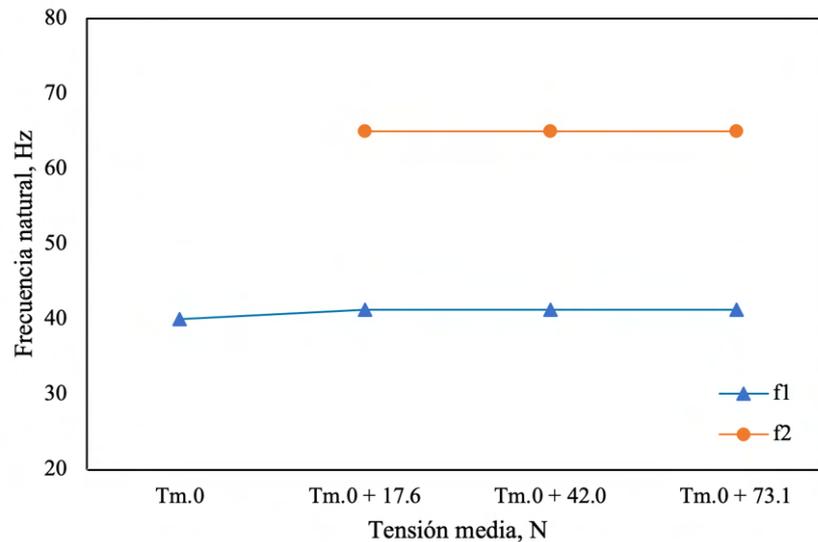
*Resultados del cambio de tensión en el modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = 0$*

Tensión media, N	f1, Hz	f2, Hz	f3, Hz	f4, Hz	f5, Hz	f6, Hz
$T_{m.0}$	40.00		212.00	383.00	880.00	960.00
$T_{m.0} + 17.6$	41.25	65.00	216.30	397.75	884.00	972.00
$T_{m.0} + 42.0$	41.25	65.00	216.30	398.80	888.00	972.00
$T_{m.0} + 73.1$	41.25	65.00	217.50	402.50	892.00	976.00

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.  $T_{m.0}$  es la tensión media inicial de las cuerdas con la que se alcanzó la geometría deseada ( $\bar{\theta} = 0$ ). A partir de  $T_{m.0}$  se aumentó progresivamente la tensión en las cuerdas del ala articulada, girando las llaves de ambas clavijas  $45^\circ$  por vez al mismo tiempo.

**Figura 5.36**

*Efecto de la variación de tensión en las primeras 2 frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada con  $\bar{\theta} = 0$*



*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

A partir de estos resultados, se pudo hacer las siguientes observaciones:

- Cuando el ala articulada del modelo experimental se encuentra completamente flexionada ( $\bar{\theta} = 0$ ), las primeras dos frecuencias naturales casi no se ven afectadas ante el aumento de tensión. La primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ) creció un 3% cuando la tensión media aumentó de  $T_{m.0}$  a  $T_{m.0} + 17.6$  N. Posteriormente,  $f_1$  se mantuvo constante a pesar del aumento de tensión. Por otro lado, la primera frecuencia natural de la barra ( $f_2$ ) no registró ninguna variación a pesar del incremento de tensión.
- Los comportamientos observados en  $f_1$  y  $f_2$  se explican al advertir que la tensión inicial  $T_{m.0}$  con la que se alcanzó  $\bar{\theta} = 0$  es alta, por lo que los incrementos de tensión no resultan ser significativos para sobre rigidizar la estructura y observar cambios importantes en sus primeras dos frecuencias naturales.
- A pesar de no observar cambios importantes en las primeras dos frecuencias naturales, se debe reconocer que el cambio de tensión en las cuerdas sí reconfigura la rigidez del ala articulada del modelo experimental cuando esta última se encuentra completamente flexionada ( $\bar{\theta} = 0$ ) debido a que las demás frecuencias naturales ( $f_3, f_4, f_5, f_6$ ) sí registraron cambios cuando se modificó la tensión en las cuerdas.

## 5.5.8. Experimento Complementario C2

### 5.5.8.1. Objetivo

Evaluar el efecto de la variación de la posición del ala articulada (flexión/extensión) del modelo experimental sobre sus frecuencias naturales sin alterar la tensión de los cables.

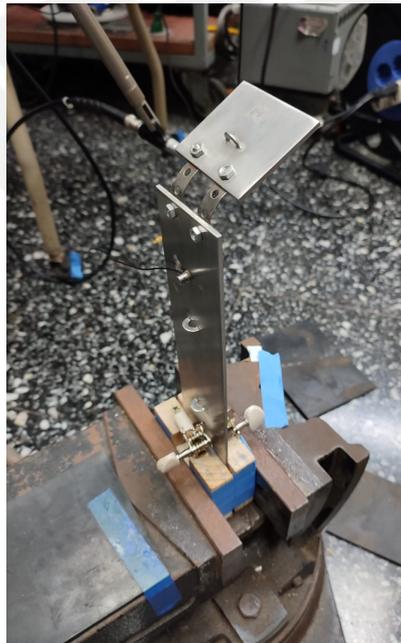
### 5.5.8.2. Procedimiento

Para este experimento se practicó el siguiente procedimiento:

- Se removieron las cuerdas del modelo experimental.
- Se cambió la bisagra por dos platinas de unión, las cuales fueron empernadas a la viga y la barra, tal como se expone en la figura 5.37.
- Se doblaron las uniones hasta que la barra alcanzó una inclinación  $\bar{\theta}$  relativa al plano horizontal.
- Una vez alcanzada la posición de equilibrio definida por  $\bar{\theta}$ , se fijó el acelerómetro al ala articulada y se excitó la estructura para registrar sus frecuencias naturales.

### Figura 5.37

*Modelo experimental del ala articulada sin cables y con platinas de unión del experimento C2*



*Nota.* Para el experimento C2 se reemplazó la bisagra y los cables por un par de platinas de unión con la finalidad de evaluar el efecto neto del cambio de geometría sobre las frecuencia naturales de la estructura.

Este procedimiento se realizó para las geometrías:  $\bar{\theta} = \pi/2$ ,  $\bar{\theta} = \pi/4$ ,  $\bar{\theta} = \pi/6$ ,  $\bar{\theta} = 0$ . Se verificó estas geometrías mediante el uso de un transportador de 360°.

Nótese que cada vez que se modificó la geometría y se registró las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental, se realizaron dos mediciones: una medición fijando el acelerómetro a la barra y otra medición fijando el acelerómetro a la viga. Ambas mediciones fueron hechas con un ancho de banda de 500Hz. Los espectros de frecuencias de cada medición han sido incluidos en el Anexo 5.

### 5.5.8.3. Resultados

El efecto aislado de la variación de geometría sobre las frecuencias naturales del modelo experimental de un ala articulada se expone en la tabla 5.14 y en la figura 5.38.

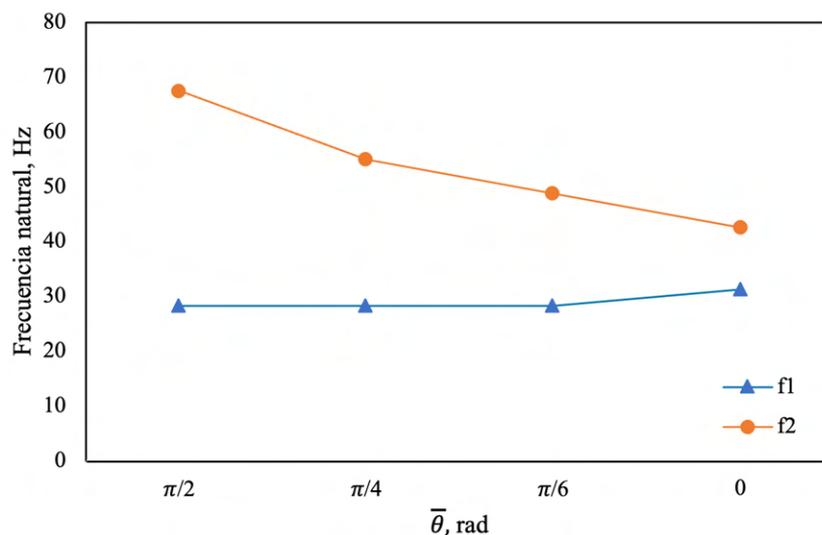
**Tabla 5.14**

*Resultados del cambio de geometría en el modelo experimental del ala articulada sin cables tensores*

$\bar{\theta}$ , rad	f1, Hz	f2, Hz	f3, Hz	f4, Hz
$\pi/2$	28.25	67.50	301.25	
$\pi/4$	28.25	55.00	272.50	483.75
$\pi/6$	28.25	48.75	266.25	475.00
0	31.25	42.50	263.75	471.25

**Figura 5.38**

*Efecto del cambio de geometría en las primeras dos frecuencias naturales del modelo experimental del ala articulada sin cables tensores*



A partir de estos resultados, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El cambio de geometría modifica las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental.
- El geometría del ala articulada reconfigura la rigidez del ala articulada del modelo experimental.
- La flexión del ala articulada del modelo experimental sin cables tensores no ejerce ninguna influencia sobre la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ), excepto cuando la flexión es máxima ( $\bar{\theta} = 0$ ). En esta condición, se registró un crecimiento de  $f_1$  en 11%.
- Por otro lado, la flexión del ala articulada del modelo experimental sin cables tensores flexibiliza significativamente la primera frecuencia natural de la barra ( $f_2$ ). Por cada 10° de flexión, se registró una reducción de 5% en  $f_2$ . Asimismo, la flexión completa del ala articulada ( $\bar{\theta} = 0$ ) del modelo experimental desde su posición completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2$ ) redujo  $f_2$  en 37%. Nótese que el aumento de flexión del ala articulada del modelo experimental también generó la reducción de  $f_3$  y  $f_4$ .
- Considerando al ala articulada en este experimento como una gran viga empotrada, la flexibilización de la estructura ante el aumento en la flexión del ala se explicaría por el aumento en la longitud del ala y la variación del momento de inercia. Véase la ecuación (5.11), donde  $k$  es la rigidez de una viga empotrada en uno de sus extremos,  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es la sección transversal, y  $l$  es la longitud de la viga. Se requiere de un estudio adicional para confirmar esta explicación y comprender los resultados del experimento complementario C2. Este estudio será realizado en una investigación posterior.

$$k = \frac{3EI}{l^3} \quad (5.11)$$

## Capítulo 6

### Análisis de Resultados

En este capítulo se determinaron las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental y se compararon con las mediciones realizadas en el experimento B.1 del capítulo 5 para evaluar la validez del modelo matemático propuesto en el capítulo 4.

#### **6.1. Determinación de las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental**

El modelo experimental está basado en el modelo conceptual de un ala articulada de dos grados de libertad que fue propuesto en el capítulo 4. Este modelo conceptual presenta una viga en voladizo acoplada en su extremo libre a una barra mediante una articulación, así como cables tensores que permiten los movimientos de extensión y flexión del ala articulada.

Como se señaló en el capítulo 4, el sistema de ecuaciones (4.49) describe el movimiento de este modelo conceptual.

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \\ -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 - F_2 + m_1g + m_2g \\ \frac{1}{2}l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)(F_2 - m_2g) + M_e - M_f \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Ya que se determinarán las frecuencias naturales, las cuales están en función únicamente de las matrices de rigidez y masa, el sistema de ecuaciones (4.49) puede ser simplificado igualando el vector de fuerzas a cero, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \\ -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Para resolver el sistema (6.1) y obtener las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental se siguieron 3 pasos:

- a. Especificar consideraciones y supuestos
- b. Calcular los parámetros dinámicos de las ecuaciones de movimiento
- c. Resolver el sistema de ecuaciones de movimiento

### 6.1.1. Supuestos y consideraciones

#### 6.1.1.1. Desplazamientos pequeños de $\theta$

Asumiendo desplazamientos angulares pequeños de  $\theta$ , se hizo la siguiente aproximación:

$$\cos\theta \approx 1 \quad (6.2)$$

#### 6.1.1.2. Geometría

Entiéndase geometría como la posición de equilibrio definida por el ángulo  $\bar{\theta}$  que forma la barra con el plano horizontal. Véase el esquema (2) de la figura 6.1.

Se decidió obtener las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental cuando el ala articulada está completamente extendida; es decir, para la geometría descrita en la expresión (6.3).

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (6.3)$$

Se optó por evaluar esta geometría porque permite aproximar la expresión  $\text{sen}(\bar{\theta} + \theta)$ , presente en el sistema de ecuaciones (6.1), a 1 usando el supuesto (6.2). Véase la expresión (6.4).

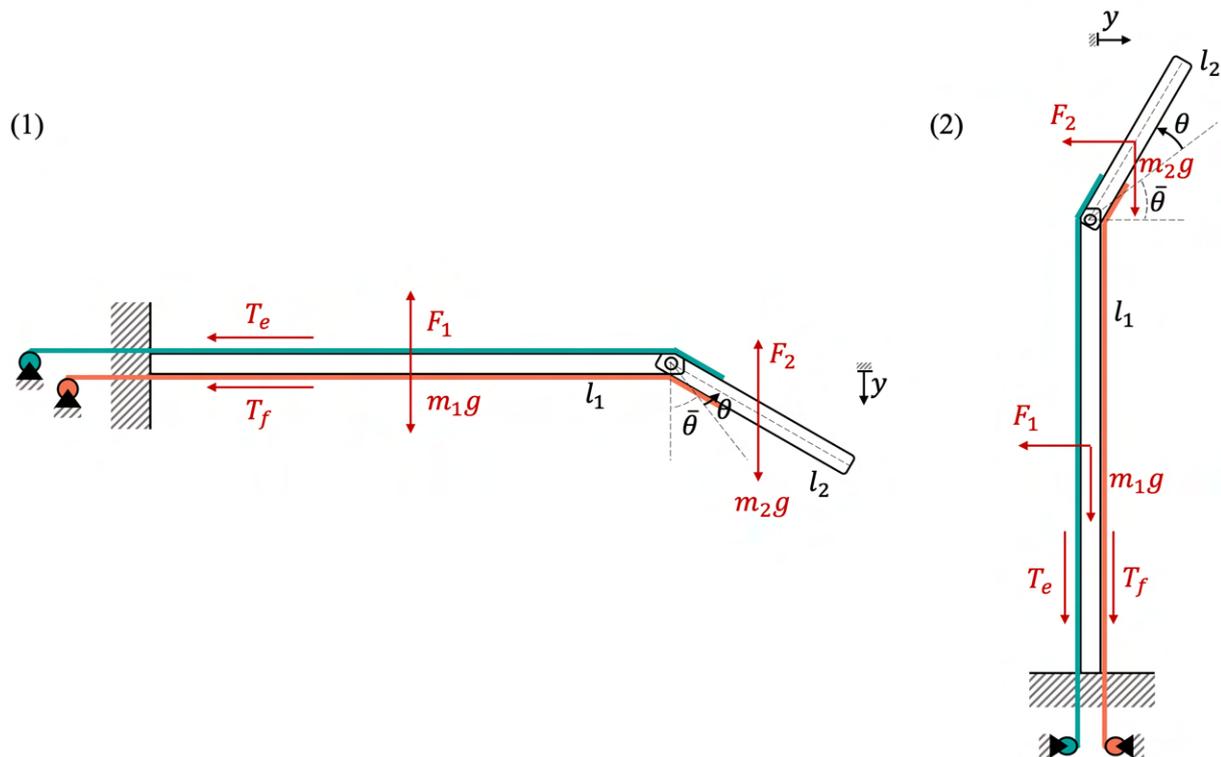
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta \approx 1 \quad (6.4)$$

#### 6.1.1.3. Disposición vertical del modelo experimental

En el modelo conceptual, el ala articulada fue dispuesta horizontalmente. Sin embargo, en el modelo experimental el ala articulada fue montada verticalmente utilizando una prensa tornillo de banco para conseguir condiciones de empotramiento cercanas a las ideales. Consecuentemente, la dirección de los pesos de la viga y la barra se tornaron perpendiculares a la dirección de la deflexión y de la viga en el modelo experimental, tal como se expone en la figura 6.1.

**Figura 6.1**

*Esquemas del modelo conceptual y del modelo experimental*



*Nota.* (1) Esquema del modelo conceptual con ala articulada dispuesta horizontalmente. (2) Esquema del modelo experimental con ala articulada dispuesta verticalmente.

El cambio de dirección de los pesos de la viga y la barra genera únicamente que la energía potencial gravitatoria del modelo experimental sea distinta a la del modelo conceptual; lo cual provoca que los sistemas de ecuaciones de movimiento de los modelos conceptual y experimental difieran únicamente en el vector de fuerzas. Ya que el vector de fuerzas es irrelevante para determinar las frecuencias naturales de un sistema, se concluye que el sistema (6.1) es válido para determinar las frecuencias naturales del modelo experimental con el ala articulada dispuesta verticalmente.

Como referencia, a continuación se expone la energía potencial del modelo conceptual ( $U$ ) con el ala articulada dispuesta horizontalmente y la energía potencial del modelo experimental ( $U'$ ) con el ala articulada dispuesta verticalmente.

$$U = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2\theta^2 - m_1gy - m_2g\left(y + \frac{1}{2}l_2\cos(\bar{\theta} + \theta)\right) \quad (4.34)$$

$$U' = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2\theta^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \quad (6.5)$$

Nótese que el nivel de referencia (N.R.) que se utilizó para  $U'$  corresponde a la altura de viga.

Asimismo, a modo de referencia, se detalla el sistema de ecuaciones (6.6) para el modelo experimental con el ala articulada dispuesta verticalmente.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) \\ -\frac{1}{2}m_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} -F_1 - F_2 \\ \frac{1}{2}F_2l_2\text{sen}(\bar{\theta} + \theta) - \frac{1}{2}m_2gl_2\text{cos}(\bar{\theta} + \theta) + M_e - M_f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Tal como se observa en el sistema de ecuaciones (6.6), las matrices de masa y de rigidez son idénticas a las del sistema (6.1). Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (6.1) es adecuado para determinar las frecuencias naturales del modelo experimental.

Finalmente, después de revisar los supuestos y consideraciones se obtuvo el sistema de ecuaciones (6.7), producto de sustituir la expresión (6.4) en el sistema (6.1).

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2 \\ -\frac{1}{2}m_2l_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

## 6.1.2. Parámetros dinámicos

### 6.1.2.1. Masas ( $m_1, m_2$ )

El sistema de ecuaciones (6.7) presenta dos masas:  $m_1$  y  $m_2$ . La primera masa,  $m_1$ , corresponde a la masa equivalente de la viga empotrada con su masa concentrada en el extremo libre. Por otro lado,  $m_2$  es la masa de la barra acoplada a la viga.

Para calcular las masas  $m_1$  y  $m_2$  del modelo experimental, se siguieron 2 pasos:

- Pesar las partes del ala del modelo experimental
- Calcular  $m_1$  y  $m_2$

Los pesos de las partes del ala del modelo experimental se exhiben en la tabla 6.1.

**Tabla 6.1**

*Medición del peso de las partes del ala del modelo experimental*

Parte del ala del modelo experimental	Masa, g
Viga (platina de 192 x 58 x 3 mm)	243.28
Barra (platina de 48 x 58 x 3 mm)	60.82
Articulación (bisagra y uniones empernadas)	33.40

*Nota.* No se incluyó la masa del segmento de viga que se encuentra en el empotramiento (37.9g).

Para calcular las masas  $m_1$  y  $m_2$  se emplearon las expresiones (6.8) y (6.9). Nótese que la masa equivalente de una viga en voladizo con su masa concentrada en el extremo libre equivale a 33/140 de la masa de la viga (Rao, 2018). Esta proporción se obtiene por equivalencia energética.

$$m_1 = \frac{33}{140}m_{viga} + \frac{m_{articulación}}{2} \quad (6.8)$$

$$m_2 = m_{barra} + \frac{m_{articulación}}{2} \quad (6.9)$$

Obsérvese además que la masa de la articulación ( $m_{articulación}$ ) fue agregada en partes iguales a la masa de la viga ( $m_{viga}$ ) y a la masa de la barra ( $m_{barra}$ ).

Reemplazando los valores de la tabla 6.1 en las expresiones (6.10) y (6.11), se obtuvieron los siguientes resultados:

$$m_1 = 0.0740 \text{ kg} \quad (6.10)$$

$$m_2 = 0.0775 \text{ kg} \quad (6.11)$$

#### 6.1.2.2. Longitudes ( $l_1, l_2$ )

Las longitudes  $l_1$  y  $l_2$  corresponden a las longitudes de la viga y la barra, respectivamente. Los valores de  $l_1$  y  $l_2$  para el modelo experimental se exponen en las expresiones (6.12) y (6.13).

$$l_1 = 0.1920 \text{ m} \quad (6.12)$$

$$l_2 = 0.0480 \text{ m} \quad (6.13)$$

Nótese que  $l_1$  no incluye la longitud del segmento de viga que se encuentra en el empotramiento.

#### 6.1.2.3. Rigidez de la viga ( $k_1$ )

La rigidez de la viga ( $k_1$ ) se determinó en el experimento A2 del capítulo 5. El valor de  $k_1$  se expuso en la expresión (5.6).

$$k_1 = 6715.01 \text{ N/m} \quad (5.6)$$

Alternativamente, la rigidez de la viga ( $k_1$ ) podría haberse determinado con la ecuación (6.14), donde  $E$  representa el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal, y  $l_1$  es la longitud de la viga.

$$k_1 = \frac{3EI}{l_1^3} \quad (6.14)$$

#### 6.1.2.4. Rigidez torsional por acción de los cables tensores sobre la barra ( $k_2$ )

La rigidez torsional  $k_2$  fue calculada mediante equivalencia energética según la ecuación (6.15), donde  $k_{ci}$  hace referencia a la rigidez de la cuerda  $i$ , y  $\delta_{ci}$  corresponde a la deformación de la cuerda  $i$  durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra, para  $i = 1, 2$ .

$$\frac{1}{2}k_2\theta^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}k_{ci}\delta_{ci}^2 \quad (6.15)$$

Para resolver la ecuación (6.15) y encontrar  $k_2$ , se debió primeramente determinar las rigideces de las cuerdas ( $k_{ci}$ ) y sus deformaciones durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra ( $\delta_{ci}$ ).

##### a. Determinación de la rigidez de las cuerdas ( $k_{ci}$ )

En el experimento A1 del capítulo 5 se determinó que la rigidez de las cuerdas aumenta conforme se incrementa la tensión por acción de las clavijas. Las funciones que describen la rigidez de las cuerdas ( $k_{ci}$ ) en N/mm se exponen en las expresiones (5.3) y (5.4), donde  $T_{ci}$  es la tensión en Newtons del cable  $i$ , y  $z_{ci}$  es la deformación en milímetros a la que se sometió el cable  $i$  mediante el uso de las clavijas para alcanzar la tensión  $T_{ci}$ , para  $i = 1, 2$ .

$$k_{c1}(z_{c1}) = \frac{dT_{c1}(z_{c1})}{dz_{c1}} = 124.6262z_{c1} + 61.5727 \quad (5.3)$$

$$k_{c2}(z_{c2}) = \frac{dT_{c2}(z_{c2})}{dz_{c2}} = 117.2608z_{c2} + 59.7255 \quad (5.4)$$

Es importante observar que el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra ( $\delta_{ci}$ ) produce un cambio adicional en la tensión de las cuerdas y, por lo tanto, un cambio en la rigidez de las cuerdas. Sin embargo, este cambio adicional en la tensión resulta muy pequeño en comparación con la tensión ejercida por la acción de las clavijas. En esta investigación se asumió que este cambio adicional en la tensión de las cuerdas producto del desplazamiento angular  $\theta$  de la barra es depreciable siempre que las clavijas ejerzan alguna tensión sobre las cuerdas previo al desplazamiento angular  $\theta$ .

- b. Cálculo de la deformación de las cuerdas durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra ( $\delta_{ci}$ )

Las deformaciones de las cuerdas durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra ( $\delta_{ci}$ ) fueron aproximadas como la longitud de un arco circular de ángulo  $\theta$  y radio  $e_{ci}$ , donde  $e_{ci}$  es la distancia entre el eje de rotación de la barra y la cuerda  $i$ , para  $i = 1, 2$ . Véanse la expresión (6.16) y la figura 6.2.

$$\delta_{ci} \approx \theta e_{ci} \quad (6.16)$$

**Figura 6.2**

*Deformación de la cuerda  $i$  durante la oscilación  $\theta$*



*Nota.* Se aproximó la deformación de las cuerdas durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra ( $\delta_{ci}$ ) como la longitud de un arco circular de ángulo  $\theta$  y radio  $e_{ci}$ .

Nótese que cuando una cuerda se estira, la otra se contrae; por lo tanto, las deformaciones de las cuerdas tienen sentidos opuestos.

Finalmente, después de haber determinado las rigideces de las cuerdas ( $k_{ci}$ ) y sus deformaciones durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra ( $\delta_{ci}$ ), se procedió a calcular la rigidez torsional  $k_2$ . Reemplazando las ecuaciones (5.3), (5.4) y (6.16) en (6.15) y considerando que la  $\delta_{c1}$  y  $\delta_{c2}$  tienen sentidos opuestos, se obtuvo la expresión (6.17) para  $k_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_2 \theta^2 &= \frac{1}{2} (124.6262 z_{c1} + 61.5727) (\theta e_{c1})^2 \\ &+ \frac{1}{2} (117.2608 z_{c2} + 59.7255) (-\theta e_{c2})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore k_2 = (124.6262z_{c1} + 61.5727)e_{c1}^2 + (117.2608z_{c2} + 59.7255)e_{c2}^2 \quad (6.17)$$

Recuérdese que las funciones (5.3) y (5.4) que describen  $k_{ci}$  están en N/mm. Por otro lado, en el modelo experimental  $e_{c1}$  es 2.95 mm y  $e_{c2}$  es 5.45 mm. Por lo tanto, la unidad de medida de  $k_2$  en la expresión (6.17) es N-mm/rad. La ecuación (6.18) presenta a  $k_2$  en N-m/rad.

$$\therefore k_2 = \frac{(124.6262z_{c1} + 61.5727)2.95^2 + (117.2608z_{c2} + 59.7255)5.45^2}{1000} \quad (6.18)$$

De la expresión (6.18) se puede observar que al igual que la rigidez de las cuerdas ( $k_{ci}$ ),  $k_2$  no será constante sino que aumentará conforme aumente la tensión en las cuerdas producto de una mayor deformación  $z_{ci}$  por acción de las clavijas.

A partir de la ecuación (6.18) se determinó el valor de  $k_2$  para cada tensión empleada en el experimento B1; véase la tabla 6.2. Se utilizarán estos valores de  $k_2$  para resolver el modelo matemático propuesto y determinar las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental.

**Tabla 6.2**

*Valores de la rigidez torsional  $k_2$  en el experimento B1*

Variación de Tensión Nº	Deformación $z_{ci}$ , mm		Tensión $T_{ci}$ , N		Tensión Media, N	Rigidez $k_{ci}$ , N/mm		Rigidez $k_2$ , N-m/rad
	Cable 1	Cable 2	Cable 1	Cable 2		Cable 1	Cable 2	
0	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	61.57	59.73	2.31
1	0.24	0.24	17.3	18.0	17.6	90.94	87.35	3.39
2	0.47	0.47	41.2	42.9	42.0	120.30	114.98	4.47
3	0.71	0.71	71.5	74.7	73.1	149.67	142.61	5.55
4	0.94	0.94	108.4	113.4	110.9	179.03	170.24	6.62
5	1.18	1.18	151.7	159.0	155.4	208.39	197.87	7.70
6	1.41	1.65	201.6	271.1	236.3	237.76	253.13	9.60
7	1.65	2.12	258.0	410.8	334.4	267.12	308.39	11.50
8	1.88	2.59	320.9	578.2	449.5	296.49	363.64	13.40
9	2.12	2.83	390.3	672.2	531.3	325.85	391.27	14.48
10	2.36	3.30	466.2	881.2	673.7	355.22	446.53	16.38

*Nota.* La rigidez  $k_{ci}$  es la pendiente de la curva fuerza(tensión)-deformación determinada en el experimento A1. A partir de  $k_{ci}$  se obtuvo  $k_2$  utilizando la ecuación (6.18).

### 6.1.3. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales

Tal como se expuso en la expresión (6.7), el sistema de ecuaciones diferenciales por resolver para el ala articulada con tendones artificiales de dos grados de libertad y completamente extendida ( $\bar{\theta} = \pi/2 \text{ rad}$ ), es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2 \\ -\frac{1}{2}m_2l_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Reemplazando las expresiones (6.10), (6.11) y (6.13) en el sistema de ecuaciones (6.7), se obtuvo la siguiente matriz de masa  $\mathbb{M}$ :

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0.1516 & -0.0019 \\ -0.0019 & 5.95 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Sustituyendo la expresión (5.6) en el sistema de ecuaciones (6.7), se obtuvo la siguiente matriz de rigidez  $\mathbb{K}$ :

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 6715.01 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Los valores de  $k_2$  se exponen en la tabla 6.2.

En adelante, denominaremos a los parámetros dinámicos  $y, \theta$  como  $\mathbb{X}$ . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (6.7) puede ser escrito como la ecuación matricial (6.21).

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{X}} + \mathbb{K}\mathbb{X} = 0 \quad (6.21)$$

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria homogénea (6.21), se consideró la respuesta armónica (6.22).

$$\mathbb{X} = \hat{\mathbb{X}}\cos\omega t \quad (6.22)$$

Reemplazando la respuesta armónica (6.22) en (6.21), se obtuvo la expresión (6.23):

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \hat{\mathbb{X}} \cos \omega t = 0 \quad (6.23)$$

Como el sistema vibra, la expresión  $\hat{\mathbb{X}} \cos \omega t$  de la ecuación (6.23) no puede ser igual a cero. Consecuentemente, la ecuación (6.24) debe ser cierta.

$$\det |\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}| = 0 \quad (6.24)$$

Reemplazando las matrices (6.19) y (6.20) en la expresión (6.24), se obtuvo:

$$\det \begin{vmatrix} 6715.01 - 0.1516\omega^2 & 0.0019\omega^2 \\ 0.0019\omega^2 & k_2 - 5.95 \times 10^{-5}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.25)$$

Finalmente, al resolver (6.25) se obtuvieron las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental para  $\bar{\theta} = \pi/2$ . Estos resultados se exhiben en la tabla 6.3 y en la figura 6.3.

**Tabla 6.3**

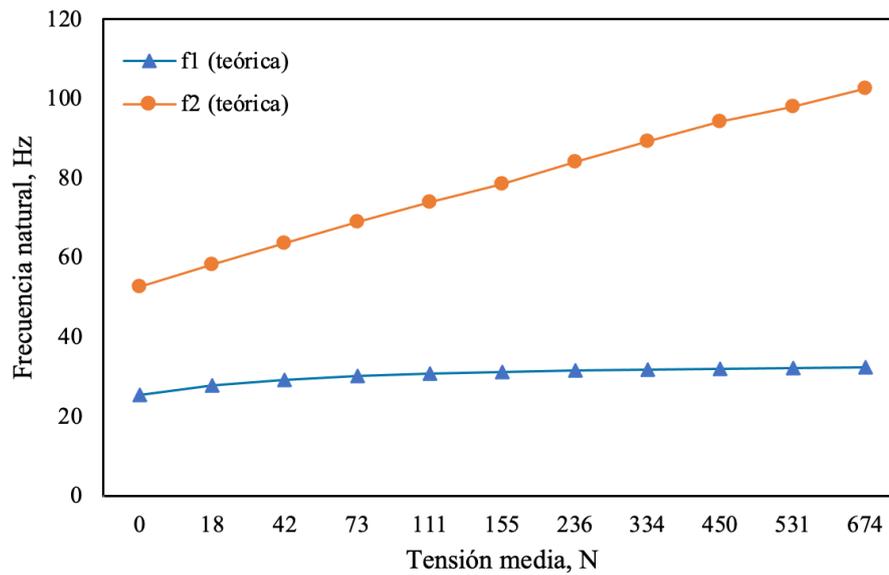
*Frecuencias naturales teóricas del modelo experimental con  $\bar{\theta} = \pi/2$*

Tensión media, N	f1, Hz	f2, Hz
0.0	25.43	52.63
17.6	27.85	58.18
42.0	29.23	63.64
73.1	30.10	68.87
110.9	30.68	73.83
155.4	31.10	78.54
236.3	31.47	84.06
334.4	31.75	89.27
449.5	31.96	94.22
531.3	32.09	98.04
673.7	32.23	102.58

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

**Figura 6.3**

*Frecuencias naturales teóricas del modelo experimental con  $\bar{\theta} = \pi/2$*



*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

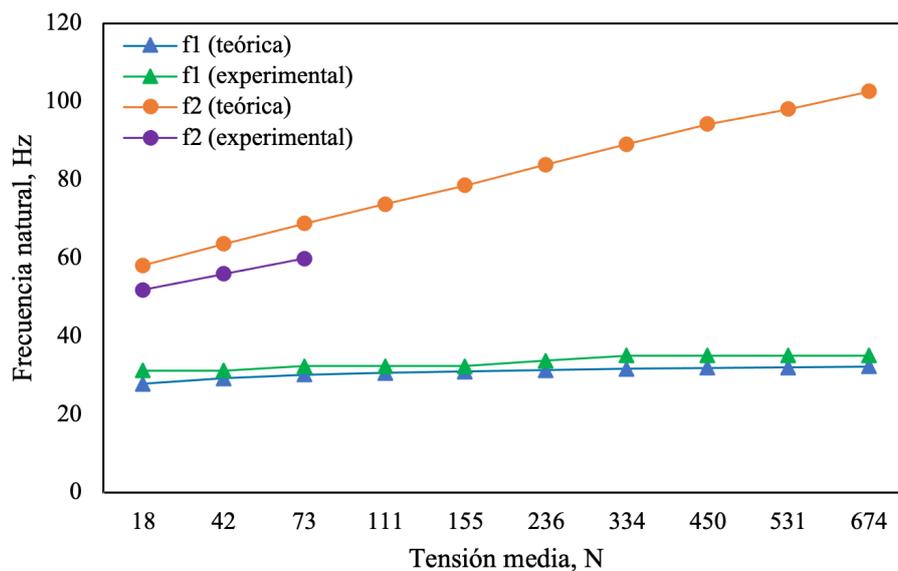
A continuación se compararán las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental con  $\bar{\theta} = \pi/2$  y las mediciones realizadas en el experimento B1 del capítulo 5 para evaluar la validez del modelo matemático propuesto en el capítulo 4.

## 6.2. Comparación de resultados teóricos y experimentales

En la figura 6.4 y en la tabla 6.4 se exhiben las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental con  $\bar{\theta} = \pi/2$  y las mediciones realizadas en el experimento B1.

**Figura 6.4**

*Comparación de frecuencias naturales teóricas y experimentales del modelo experimental con  $\bar{\theta} = \pi/2$*



*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

**Tabla 6.4**

*Comparación de frecuencias naturales teóricas y experimentales del modelo experimental con  $\bar{\theta} = \pi/2$*

Tensión media, N	f1, Hz (teórica)	f1, Hz (experimental)	$\Delta f1$ , %	f2, Hz (teórica)	f2, Hz (experimental)	$\Delta f2$ , %
17.6	27.85	31.25	-10.9%	58.18	52.00	11.9%
42.0	29.23	31.25	-6.5%	63.64	56.00	13.6%
73.1	30.10	32.50	-7.4%	68.87	60.00	14.8%
110.9	30.68	32.50	-5.6%	73.83		
155.4	31.10	32.50	-4.3%	78.54		
236.3	31.47	33.75	-6.8%	84.06		
334.4	31.75	35.00	-9.3%	89.27		
449.5	31.96	35.00	-8.7%	94.22		
531.3	32.09	35.00	-8.3%	98.04		
673.7	32.23	35.00	-7.9%	102.58		

*Nota.* La tensión media resulta del promedio simple de las tensiones en las cuerdas.

Nótese que no se compararon los resultados cuando la tensión media es 0 N porque en esta circunstancia el cambio adicional en la tensión de las cuerdas producto del desplazamiento angular  $\theta$  de la barra no sería depreciable en comparación con la tensión de las cuerdas previo al desplazamiento angular  $\theta$ . Véase la sección 6.1.2.4 (b).

A partir de las comparaciones expuestas en la figura 6.4 y en la tabla 6.4, se pueden hacer las siguientes observaciones con respecto al modelo matemático propuesto en el capítulo 4 para un ala articulada con tendones artificiales de 2 grados de libertad:

- El modelo matemático predice adecuadamente que el cambio de tensión en los tendones (cables tensores) reconfigura las frecuencias naturales del ala articulada.
- El modelo matemático describe apropiadamente que el incremento de tensión en los cables tensores rigidiza el ala articulada, mientras que una disminución de tensión en las cuerdas flexibiliza la estructura.
- El modelo matemático predice adecuadamente que el cambio de tensión en los tendones afecta en mayor medida a la frecuencia natural de la barra ( $f_2$ ) y en menor medida a la frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ).
- El modelo matemático aproxima la primera frecuencia natural de la viga ( $f_1$ ) con una desviación promedio de -7.6% en relación con los registros experimentales para el rango de tensiones medias en las cuerdas [17.6, 673.7] N y con  $\bar{\theta} = \pi/2$ .
- El modelo matemático estima la primera frecuencia natural de la barra ( $f_2$ ) con un error promedio de 13.4% en comparación con las mediciones del experimento B1 para el rango de tensiones medias en las cuerdas [17.6, 73.1] N y con  $\bar{\theta} = \pi/2$ . Nótese que para una tensión media mayor a 73.1 N,  $f_2$  es imperceptible en las mediciones. Como se explicó en el experimento C1, esto se debe a que el aumento de tensión en las cuerdas rigidiza progresivamente la estructura hasta que el ala articulada completamente extendida tiende a comportarse como una gran viga. Por lo tanto, deberá ajustarse el modelo matemático incorporando la expresión (6.26), donde  $T_m$  corresponde a la tensión media de los cables.

$$f_2 = 0 \text{ para } T_m > 73.1 \text{ N} \quad (6.26)$$

- Las desviaciones observadas en los resultados del modelo matemático y los registros experimentales se explican por los supuestos y aproximaciones que se introdujeron para (a) resolver el modelo matemático y (b) caracterizar las mediciones:
  - a. Para resolver el modelo matemático se estimó el valor de  $k_2$  aproximando la rigidez y la deformación de las cuerdas durante el desplazamiento angular  $\theta$  de la barra (véase la sección 6.1.2.4). Asimismo, se consideró la respuesta armónica (6.22) para resolver el sistema de ecuaciones de movimiento (véase la sección 6.1.3).
  - b. Por otro lado, para caracterizar las mediciones del experimento B1 se consideró que la tensión inicial en ambas cuerdas era aproximadamente 0 N y que los giros realizados en las llaves de las clavijas para aumentar la tensión de las cuerdas fueron perfectamente de  $45^\circ$  (véase la sección 5.5.3). Asimismo, para determinar la tensión de los cables durante las mediciones se utilizó curvas-deformación que fueron estimadas a partir de los resultados del experimento A1 (véase la sección 5.5.1).
- En el capítulo 7 se recomiendan una serie de estrategias para reducir la desviación del modelo matemático.

## Capítulo 7

# Conclusiones y Recomendaciones

### 7.1. Conclusiones

El objetivo general de esta tesis fue estudiar teórica y experimentalmente el comportamiento dinámico de una estructura articulada construida a partir de elementos viga y barra que es utilizada como modelo simplificado de un ala articulada de una aeronave subsónica y cuya geometría es modificada por elementos tensores en forma análoga a una articulación del dedo humano. Consecuentemente, se establecieron los siguientes objetivos específicos:

- a. Modelar conceptualmente el sistema dinámico a partir de elementos viga y barra.
- b. Formular las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema para el modelo conceptual desarrollado.
- c. Construir un modelo experimental del sistema a partir de elementos viga y barra, y medir sus frecuencias naturales.
- d. Determinar analíticamente las frecuencias naturales del modelo experimental resolviendo las ecuaciones de movimiento propuestas.
- e. Determinar la validez del modelo matemático propuesto comparando las mediciones del modelo experimental con los resultados analíticos.
- f. Comprender los efectos de la tensión de los cables y de la posición (flexión/extensión) del ala articulada sobre la vibración del sistema.

Cada uno de estos objetivos fue alcanzado en la presente investigación. Los detalles se exponen a continuación.

Para el estudio teórico de vibraciones en alas articuladas con cables tensores a modo de tendones artificiales se desarrollaron tres modelos conceptuales y se formularon sus ecuaciones de movimiento. Los modelos desarrollados fueron: (1) dedo humano de dos grados de libertad (modelo barra–barra), (2) ala articulada con tendones artificiales de dos grados de libertad (modelo viga–barra), y (3) ala articulada con tendones artificiales de tres grados de libertad (modelo viga–barra–barra).

Por otro lado, para el estudio experimental de vibraciones se construyó un modelo experimental de un ala articulada con cables tensores de dos grados de libertad (modelo viga–barra), y se diseñó tres grupos de experimentos (A, B, C) para evaluar la influencia de la tensión y de la posición del ala (flexión/extensión) sobre sus frecuencias naturales. A partir de los resultados de los ensayos experimentales se concluyó lo siguiente:

- La rigidez del ala articulada del modelo experimental y, en consecuencia, sus frecuencias naturales pueden ser reconfiguradas mediante alteraciones en (i) la tensión de los cables y/o en (ii) la posición del ala (flexión/extensión). Es decir, ambas estrategias pueden utilizarse para modificar las frecuencias naturales dinámicamente y evitar condiciones de resonancia.
- Con respecto a la modificación de (i) la tensión en los cables, el incremento de tensión rigidiza el ala articulada del modelo experimental, mientras que la reducción de tensión flexibiliza la estructura. En el modelo experimental viga–barra de un ala articulada, esta estrategia afectó principalmente a la oscilación de la barra y en menor medida a la vibración de la viga. Para un aumento de tensión de 73.1 N en los cables con el ala del modelo experimental completamente extendida, se observó que la frecuencia natural de la barra aumentó en 25%, mientras que la primera frecuencia natural de la viga incrementó en 4%.
- Con relación al cambio de (ii) posición o geometría del ala articulada, la extensión del ala del modelo experimental rigidiza la estructura, mientras que la flexión del ala flexibiliza la estructura. En el modelo experimental viga–barra de un ala articulada, esta estrategia afectó significativamente la oscilación de la barra. Se registró una reducción de 5% en la frecuencia natural de la barra por cada 10° de flexión del ala articulada.

Asimismo, se observó una reducción de 37% en la frecuencia natural de la barra durante la flexión completa del ala articulada del modelo experimental desde su posición completamente extendida.

- Aunque ambas estrategias (i, ii) permitieron reconfigurar la frecuencia natural de la barra en el modelo experimental viga–barra de un ala articulada, únicamente (i) el cambio de tensión en los cables permitió modificar la primera frecuencia natural de la viga del modelo experimental para cualquier posición del ala. Por lo tanto, la utilización de alas articuladas con tendones artificiales requiere la aplicación conjunta de ambas estrategias (i, ii) para evitar condiciones de resonancia.

A partir de los resultados experimentales se determinó además la validez del modelo matemático propuesto para describir el comportamiento dinámico de un ala articulada con cables tensores de 2 grados de libertad (modelo viga–barra). Para ello, se calculó las frecuencias naturales teóricas del modelo experimental viga–barra empleando el modelo matemático propuesto, y se comparó estos resultados con las mediciones experimentales. De la evaluación de los resultados teóricos y experimentales, se obtuvo las siguientes conclusiones:

- El modelo matemático predice adecuadamente que el cambio de tensión en los cables tensores reconfigura las frecuencias naturales del ala articulada del modelo experimental.
- El modelo matemático describe apropiadamente que el incremento de tensión en los cables tensores rigidiza el ala articulada del modelo experimental, mientras que una disminución de tensión en las cuerdas flexibiliza la estructura.
- El modelo matemático predice adecuadamente que el cambio de tensión en los tendones afecta en mayor medida a la frecuencia natural de la barra y en menor medida a la primera frecuencia natural de la viga del modelo experimental.
- El modelo matemático aproxima la primera frecuencia natural de la viga del modelo experimental con una desviación promedio de -7.6% en relación con los registros experimentales para el rango de tensiones medias en las cuerdas [17.6, 673.7] N y con  $\bar{\theta} = \pi/2$ .

- El modelo matemático estima la frecuencia natural de la barra del modelo experimental con un error promedio de 13.4% en comparación con las mediciones experimentales para el rango de tensiones medias [17.6, 73.1] N y con  $\bar{\theta} = \pi/2$ . Nótese que para una tensión media mayor a 73.1N, la frecuencia natural de la barra del modelo experimental es imperceptible en las mediciones. Esto se debe a que el aumento de tensión en las cuerdas rigidiza progresivamente la estructura viga–barra hasta que esta última tiende a comportarse como una gran viga. Por este motivo, deberá ajustarse el modelo matemático incorporando la expresión (6.26), donde  $T_m$  corresponde a la tensión media de los cables.

$$f_2 = 0 \text{ para } T_m > 73.1 \text{ N} \quad (6.26)$$

- Las desviaciones observadas en los resultados del modelo matemático y los registros experimentales se explican por los supuestos y aproximaciones que se introdujeron para resolver el modelo matemático y caracterizar las mediciones. Véase la sección 6.2.
- Finalmente, se concluye la validez del modelo matemático de dos grados de libertad (viga–barra) propuesto para un ala articulada actuada con cables tensores a modo de tendones artificiales, inspirados en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano. Asimismo, se infiere la validez del modelo matemático propuesto de tres grados de libertad debido a que es una extensión del modelo de dos grados de libertad.

## 7.2. Recomendaciones

Para reducir la desviación entre los resultados del modelo matemático propuesto y las mediciones realizadas se sugieren las siguientes estrategias:

- Realizar un ensayo de tracción para determinar con exactitud la curva de fuerza-deformación de las cuerdas del modelo experimental.
- Utilizar galgas extensiométricas para medir con exactitud la deformación en las cuerdas del modelo experimental.
- Emplear un sensor de fuerza para medir con exactitud la tensión a la que se encuentran sometidos las cuerdas del modelo experimental.

- Reposicionar las clavijas del modelo experimental de forma que las cuerdas presenten la misma longitud.
- Utilizar una articulación con un eje de rotación equidistante a ambas cuerdas.

Estas estrategias permitirán caracterizar las mediciones adecuadamente, simplificar el modelo experimental, reducir la desviación del modelo matemático propuesto, y profundizar el estudio de vibraciones en alas articuladas con cables tensores a modo de tendones artificiales. Con respecto a este último punto, se recomienda adicionalmente:

- Realizar un análisis de elementos finitos (FEM) y comparar los resultados con las mediciones registradas en el ala articulada con  $\bar{\theta} = \pi/4, \pi/6, 0$ .
- Determinar el amortiguamiento del sistema.
- Realizar experimentos con vibración forzada en un túnel de viento.

Por último, como paso siguiente para determinar la potencial aplicación en la industria de las alas articuladas con el sistema propuesto de actuación inspirado en los sistemas de extensión y flexión del dedo humano, se recomienda realizar el diseño mecánico del sistema de actuación propuesto. En esta nueva investigación se deberá evaluar el uso conjunto de cables tensores y resortes torsionales (en lugar de únicamente cables tensores) para facilitar el control de la tensión en los cables del sistema de actuación.

## Referencias

- Agilent Technologies (2000, 31 de mayo). The Fundamentals of Modal Testing [Archivo PDF]. <https://rotorlab.tamu.edu/me459/APP%20Note%20243-3%20The%20Fundamentals%20of%20Modal%20Testing.pdf>
- Airbus (2021). *A320 Aircraft Characteristics Airport and Maintenance Planning AC*. [Archivo PDF]. <https://www.airbus.com/sites/g/files/jlcbta136/files/2021-11/Airbus-Commercial-Aircraft-AC-A320.pdf>
- Alencastre, J. H., Olarte, C., Rivera, R., & Muñoz, J. L. (2016). Estudio Dinámico del Sistema Araña-Tela de Araña en condiciones de Resonancia. *Información tecnológica*, 27(4), 139-144.
- Bower, J., Dichter, A., Krishnan, V., y Saxon, S. (2022, 28 de junio). *The six secrets of profitable airlines*. McKinsey & Company. <https://www.mckinsey.com/industries/travel-logistics-and-infrastructure/our-insights/the-six-secrets-of-profitable-airlines#/>
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2016, 08 de septiembre). *homology*. *Encyclopedia Britannica*. <https://www.britannica.com/science/homology-evolution>
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2017, 10 de mayo). *flexor muscle*. *Encyclopedia Britannica*. <https://www.britannica.com/science/flexor-muscle>

- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2019, 11 de enero). *extensor muscle*. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/science/extensor-muscle>
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2021, 24 de mayo). *tendon*. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/science/tendon>
- Drake, R. L., Vogl, A. W., Mitchell, A. W. M., Tibbitts, R. M., & Richardson, P. E. (2011). *Gray's Atlas de Anatomia*. Elsevier Editora Ltda.
- Elahinia, M. (2016). *Shape Memory Alloy Actuators: Design, Fabrication, and Experimental Evaluation*. Wiley.
- Elahinia, M., Moghaddam, N. S., Amerinatanzi, A., Saedi, S., Toker, G. P., Karaca, H., Bigelow, G. S., y Benafan, O. (2018). Additive manufacturing of NiTiHf high temperature shape memory alloy. *Scripta Materialia*, 145, 90-94.
- Ellerbeck, S. (2022, 09 de diciembre). *The aviation sector wants to reach net zero by 2050. How will it do it?*. World Economic Forum. <https://www.weforum.org/agenda/2022/12/aviation-net-zero-emissions/>
- Festo. (2011). *SmartBird: Unlocking the key to bird flight*. [https://www.festo.com/de/en/e/about-festo/research-and-development/bionic-learning-network/highlights-from-2010-to-2012/smartbird-id\\_33686/](https://www.festo.com/de/en/e/about-festo/research-and-development/bionic-learning-network/highlights-from-2010-to-2012/smartbird-id_33686/)
- Hottinger Brüel & Kjær. (2024). *Avoiding Vibration Measurement Errors*. <https://www.hbkworld.com/en/knowledge/resource-center/articles/vibration/avoid-errors-using-accelerometers>
- International Air Transport Association (2019, junio). *Industry Statistics* [Archivo PDF]. <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/airline-industry-economic-performance---june-2019---data-tables/>
- International Air Transport Association (2020, noviembre). *Industry Statistics* [Archivo PDF]. <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/airline-industry-economic-performance---november-2020---data-tables/>

- International Air Transport Association (2022, 06 de diciembre). *Global Outlook for Air Transport - December 2022 - Report* [Archivo PDF]. <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/global-outlook-for-air-transport---december-2022/>
- International Air Transport Association (2023, diciembre). *Industry Statistics* [Archivo PDF]. <https://www.iata.org/en/iata-repository/pressroom/fact-sheets/industry-statistics/>
- Jani, J., Leary, M., Subic, A., y Gibson, M. (2014). A review of shape memory alloy research, applications and opportunities. *Materials & Design (1980-2015)*, 56, 1078-1113.
- Kamlet, M. (2016, 14 de octubre). *NASA to Test In-Flight Folding Spanwise Adaptive Wing to Enhance Aircraft Efficiency*. National Aeronautics and Space Administration. <https://www.nasa.gov/feature/nasa-to-test-in-flight-folding-spanwise-adaptive-wing-to-enhance-aircraft-efficiency>
- Kamlet, M. (2018, 19 de enero). *NASA Tests New Alloy to Fold Wings in Flight*. National Aeronautics and Space Administration. <https://www.nasa.gov/centers/armstrong/feature/nasa-tests-new-alloy-to-fold-wings-in-flight.html>
- Kang, W. R., Kim, E. H., Jeong, M. S., Lee, I., & Ahn, S. M. (2012). Morphing wing mechanism using an SMA wire actuator. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 13(1), 85-90.
- König, H. E., Korbelt, R., Liebich, H. G., & Klupiec, C. (2016). *Avian anatomy: Textbook and Colour Atlas*. 5m Publishing.
- Mauboussin, M., y Callahan, D. (2022, 06 de octubre). *Return on Invested Capital: How to Calculate ROIC and Handle Common Issues* [Archivo PDF]. Morgan Stanley. [https://www.morganstanley.com/im/publication/insights/articles/article\\_returnoninvestedcapital.pdf?1680377058270](https://www.morganstanley.com/im/publication/insights/articles/article_returnoninvestedcapital.pdf?1680377058270)
- National Aeronautics and Space Administration. (2017). *Spanwise Adaptive Wing (LEW-TOPS-124): Shape memory alloy actuators reconfigure aircraft wings in flight*. NASA Technology Transfer Program. <https://technology.nasa.gov/patent/LEW-TOPS-124>

- National Aeronautics and Space Administration. (2020). *Shape Memory Alloy (SMA)-Enabled Actuators (LEW-TOPS-153): SMA tube elements to drive rotary and ring gear motion in compact, powerful actuators*. NASA Technology Transfer Program. <https://technology.nasa.gov/patent/LEW-TOPS-153>
- Nguyen, N. (2014, 22 de abril). *A framework for Adaptive Aeroelastic Wing Shaping Control*. [Archivo PDF]. National Aeronautics and Space Administration. [https://www.nas.nasa.gov/assets/pdf/ams/2014/AMS\\_20140422\\_Nguyen.pdf](https://www.nas.nasa.gov/assets/pdf/ams/2014/AMS_20140422_Nguyen.pdf)
- Nguyen, N. (2016). *Variable Camber Continuous Aerodynamic Control Surfaces and Methods for Active Wing Shaping Control* (U.S. Patent No. 9,227,721 B1). Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office. <https://patents.google.com/patent/US9227721B1/en>
- Organización Internacional de Aviación Civil (2022, 07 de octubre). *States adopt net-zero 2050 global aspirational goal for international flight operations*. <https://www.icao.int/Newsroom/Pages/States-adopts-netzero-2050-aspirational-goal-for-international-flight-operations.aspx>
- Popov, I. I., & Shitikova, M. V. (2020, noviembre). Impulse excitation technique and its application for identification of material damping: An overview. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 962, No. 2, p. 022025). IOP Publishing.
- Rao, S. (2018). *Mechanical Vibrations* (6.<sup>a</sup> ed.). Pearson Education.
- Ritchie, H. (2020, 22 de octubre). *Climate change and flying: what share of global CO<sub>2</sub> emissions come from aviation?*. Our World in Data. <https://ourworldindata.org/co2-emissions-from-aviation>
- Rodić, A.; Miloradovic, B.; Popić, S.; Kršenković, I. (2013, September 11-13). Development of Anthropomorphic Robot Hand of Modular Structure. *22nd International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD 2013)*, Portorož, Slovenia.
- Rosenberg, Z. (2018, 19 de septiembre). *One Step Closer to Birdflight: NASA's Spanwise Adaptive Wing program gears up for a second round of test flights*. Smithsonian Magazine. <https://www.smithsonianmag.com/air-space-magazine/one-step-closer-flying-birds-180970325/>

Tran, P., Jeong, S., Wolf, S. L., & Desai, J. P. (2020). Patient-Specific, Voice-Controlled, Robotic FLEXotendon Glove-II System for Spinal Cord Injury. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 5(2), 898-905.

Villee, C. A. (2018, 21 de febrero). *morphology*. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/science/morphology-biology>

Xu, Z. (2018). Approaching Human Hand Dexterity Through Highly Biomimetic Design. *Human Inspired Dexterity in Robotic Manipulation* (pp. 87-114). Academic Press.

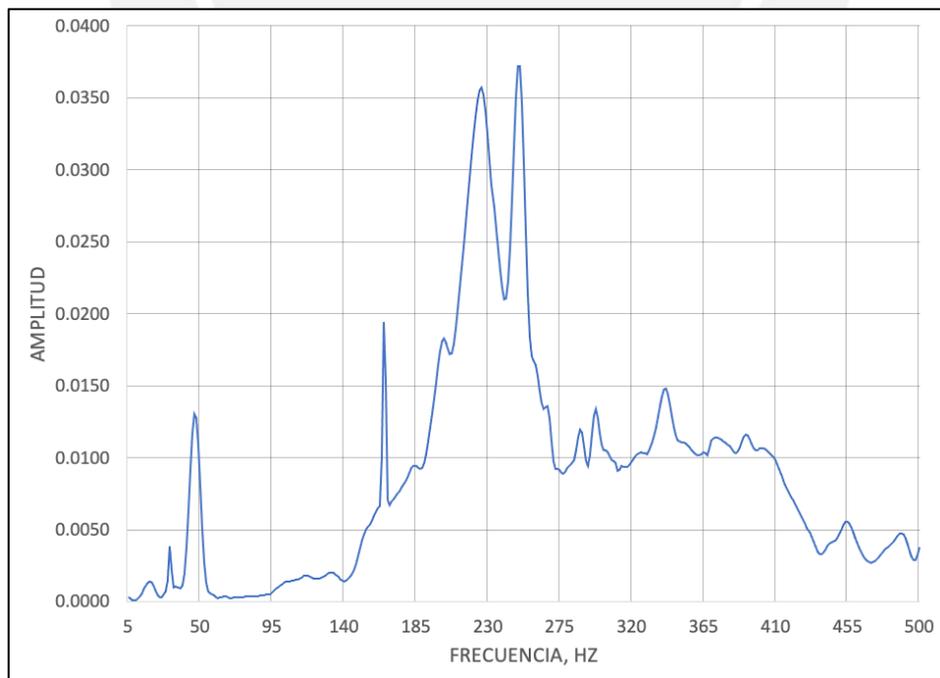


## Anexo 1

# Espectros de frecuencias del experimento B1

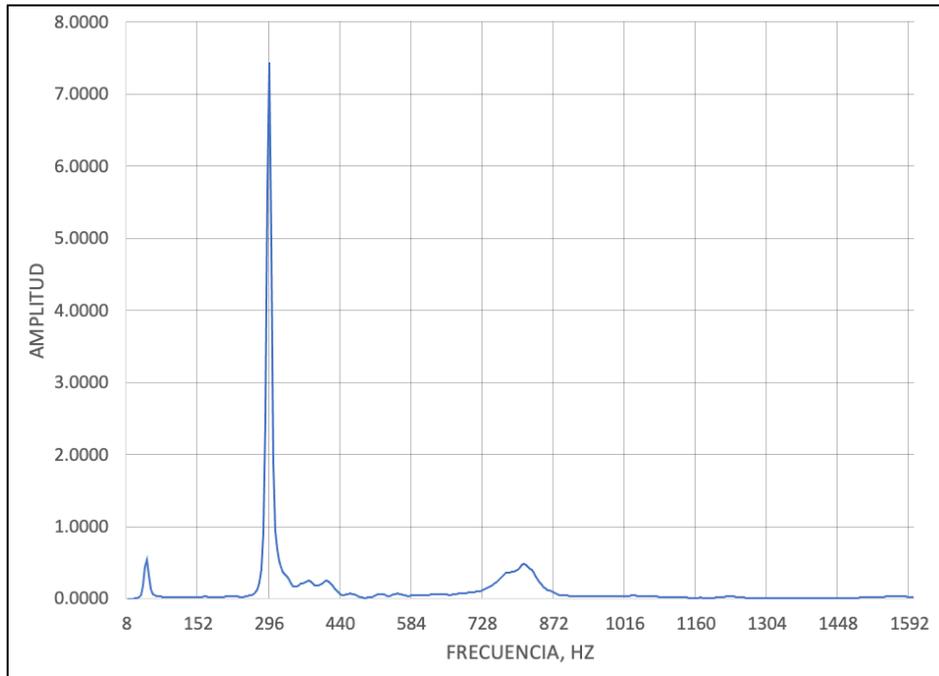
**Figura B1.1**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



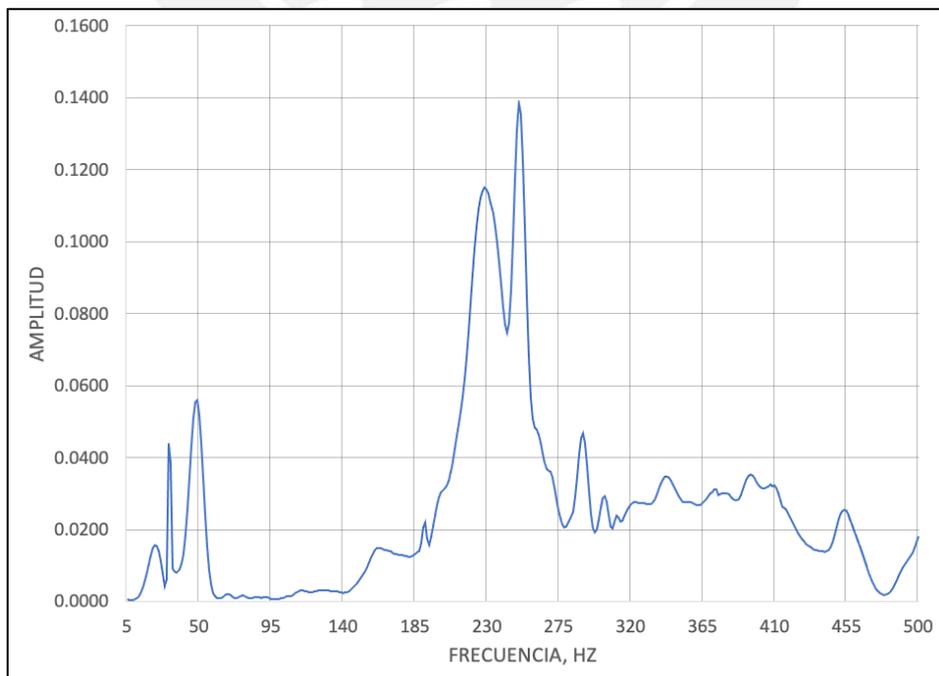
**Figura B1.2**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



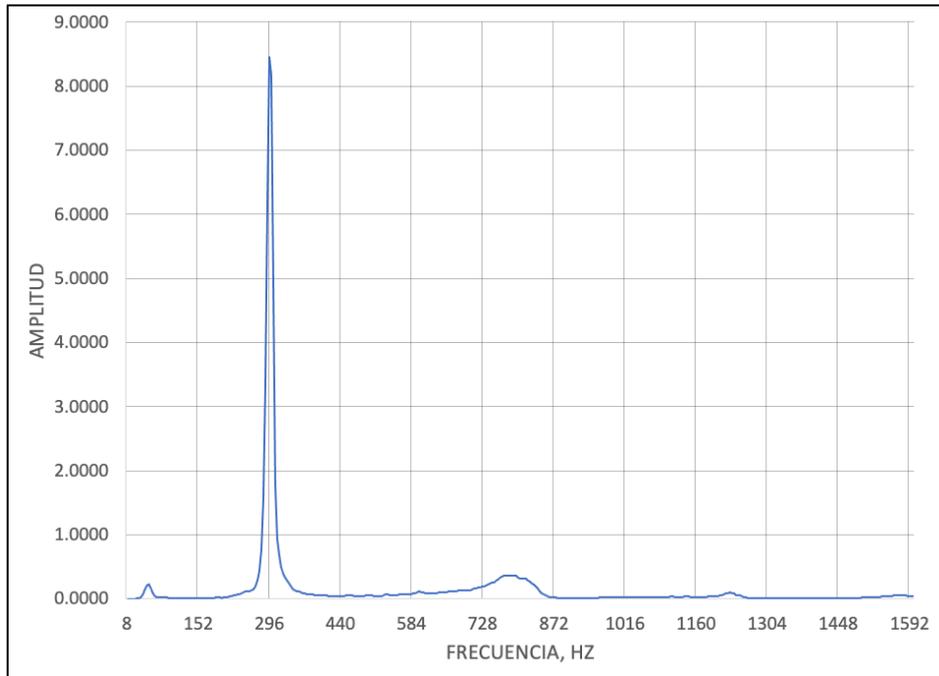
**Figura B1.3**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 17.6 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



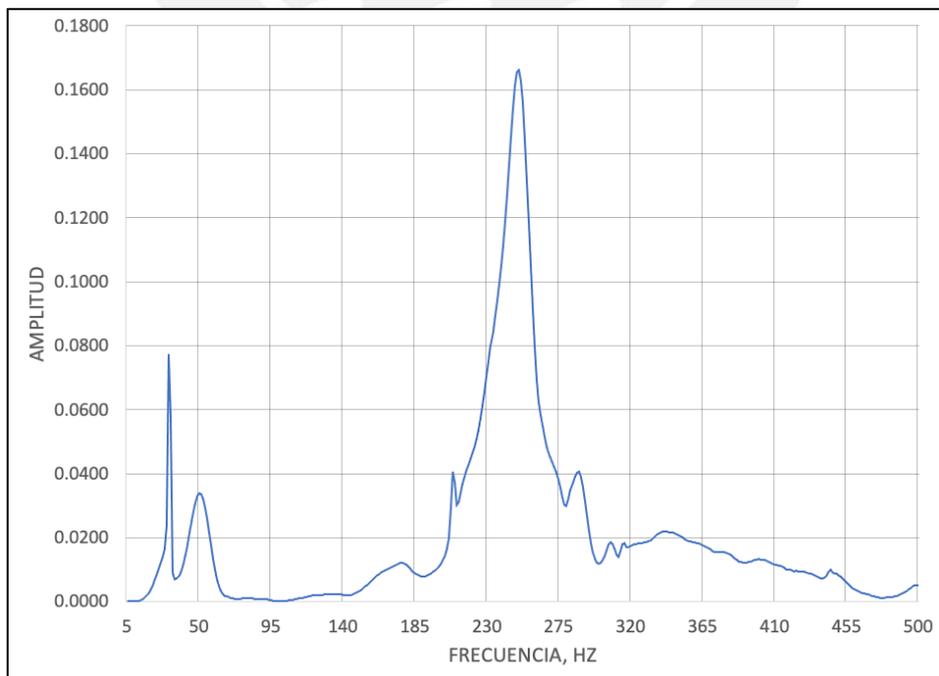
**Figura B1.4**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 17.6 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



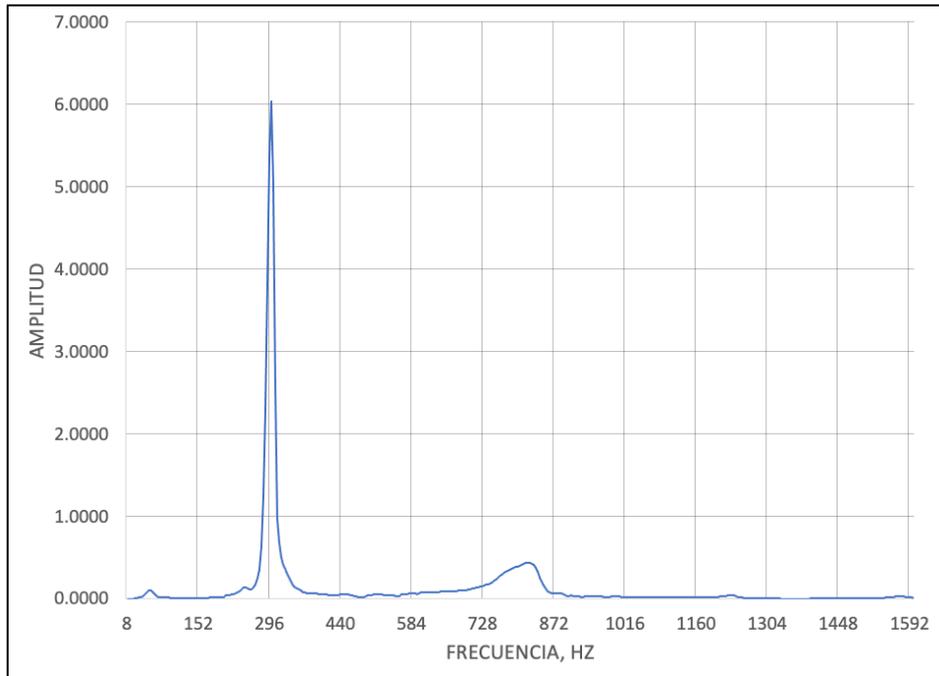
**Figura B1.5**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 42.0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



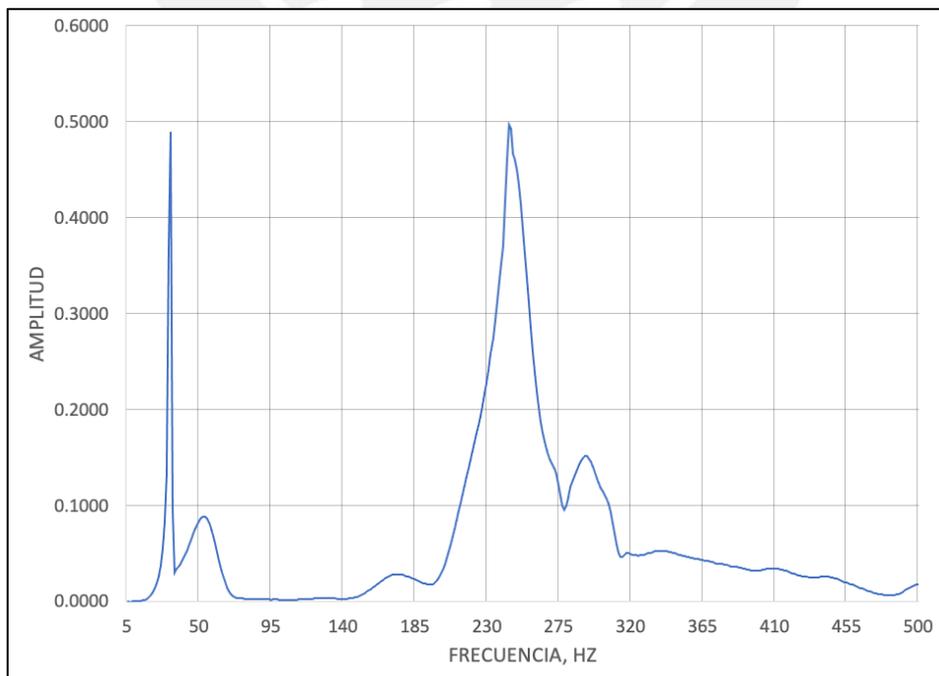
**Figura B1.6**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 42.0 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



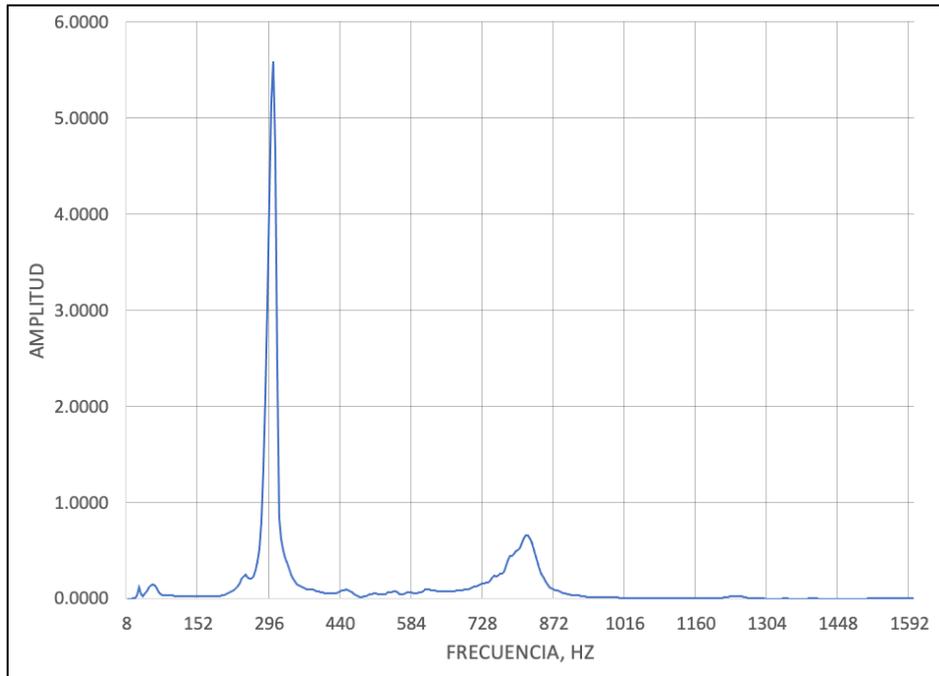
**Figura B1.7**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 73.1 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



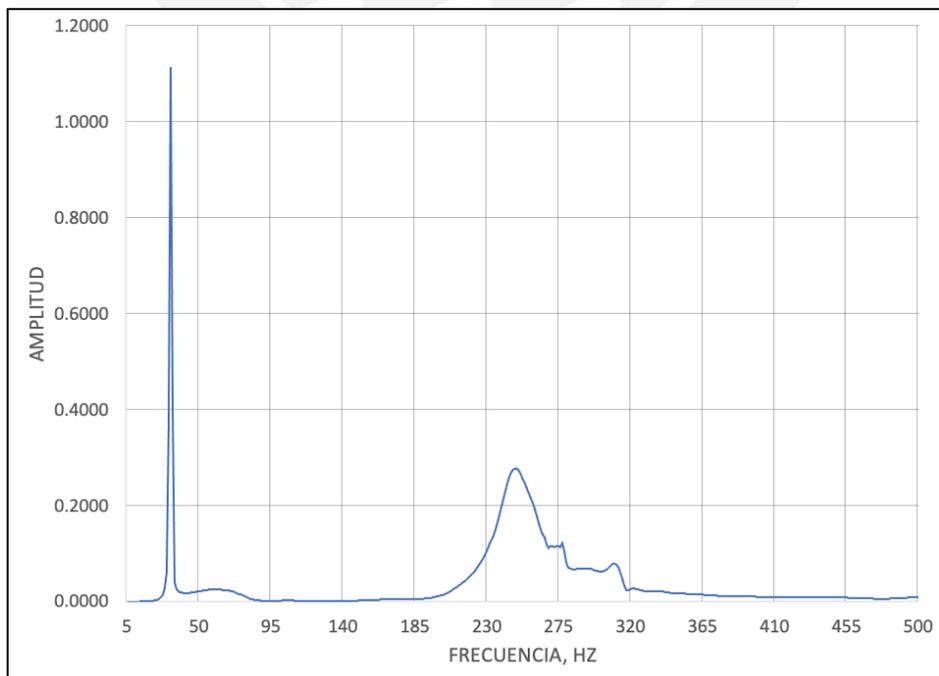
**Figura B1.8**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 73.1 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



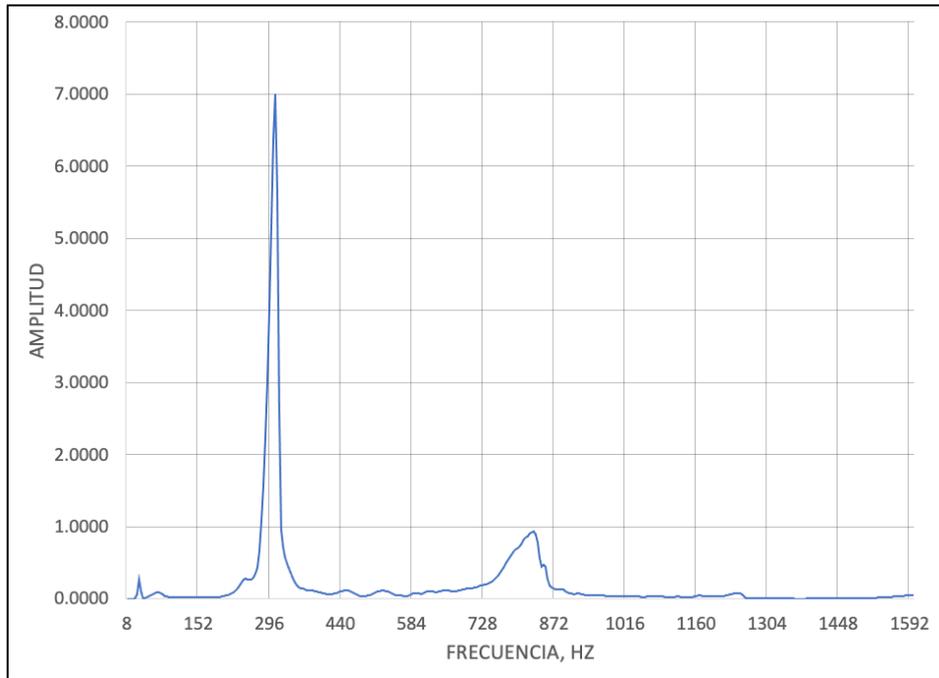
**Figura B1.9**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 110.9 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



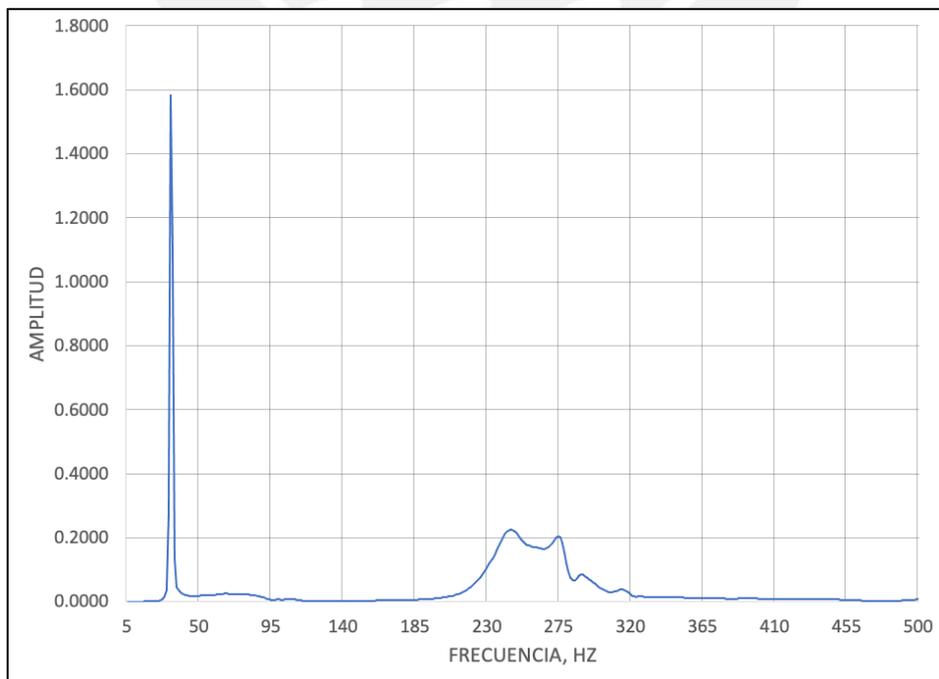
**Figura B1.10**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 110.9 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



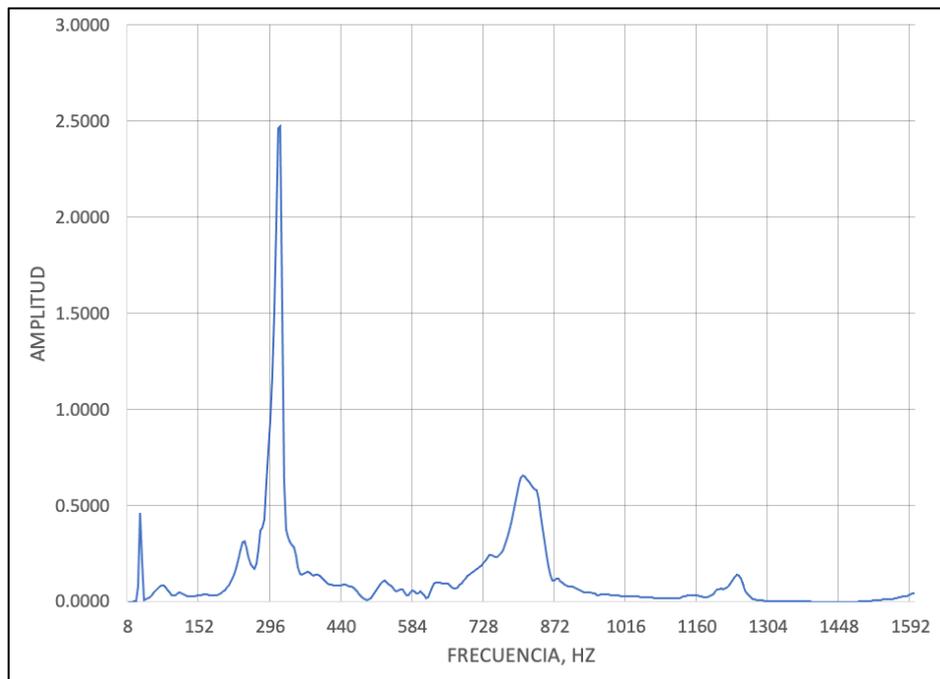
**Figura B1.11**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 155.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



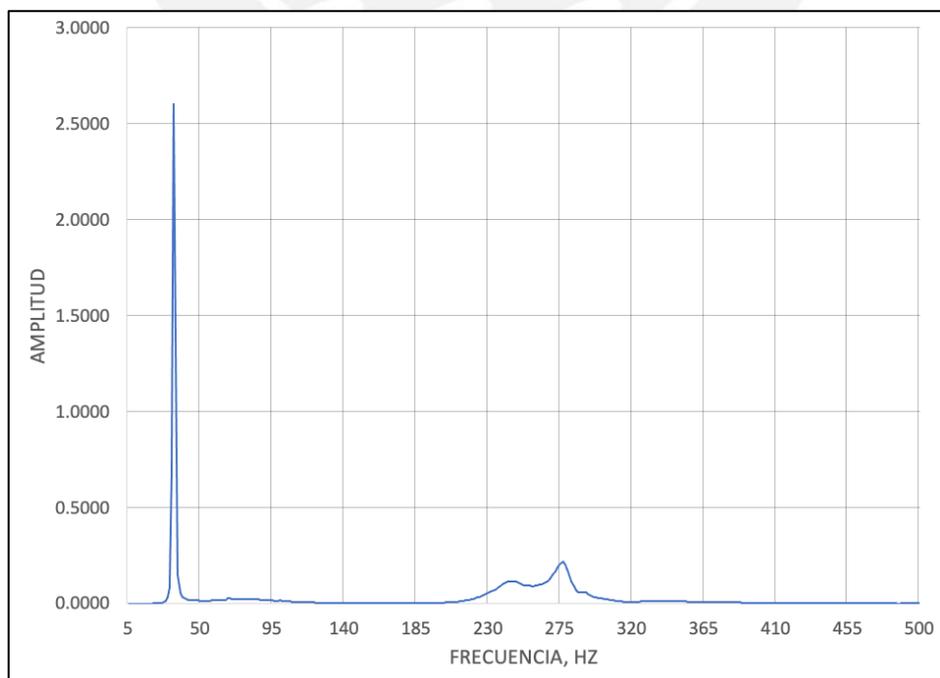
**Figura B1.12**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 155.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



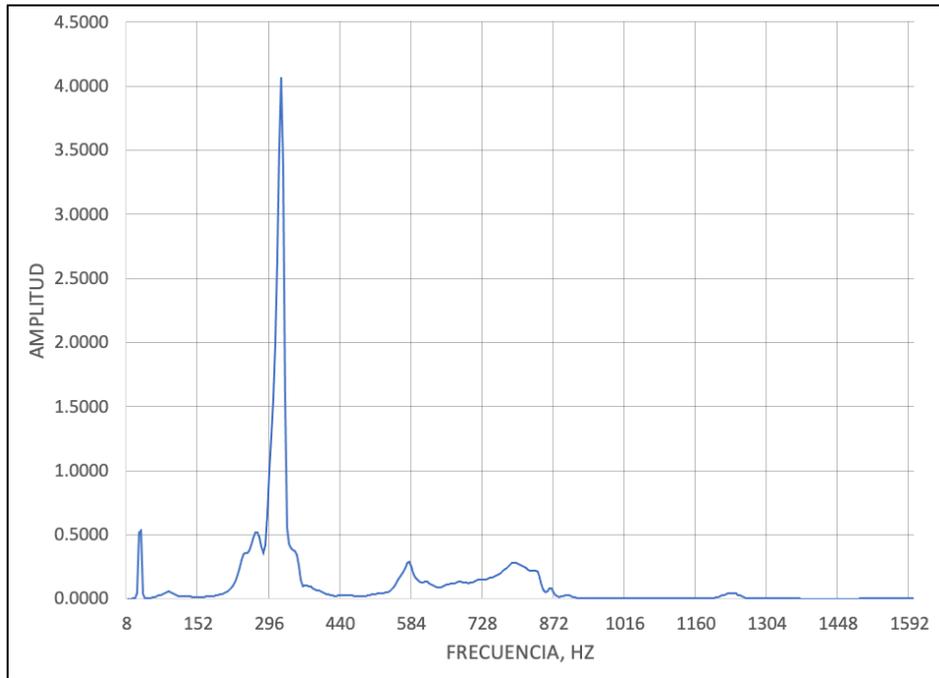
**Figura B1.13**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 236.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



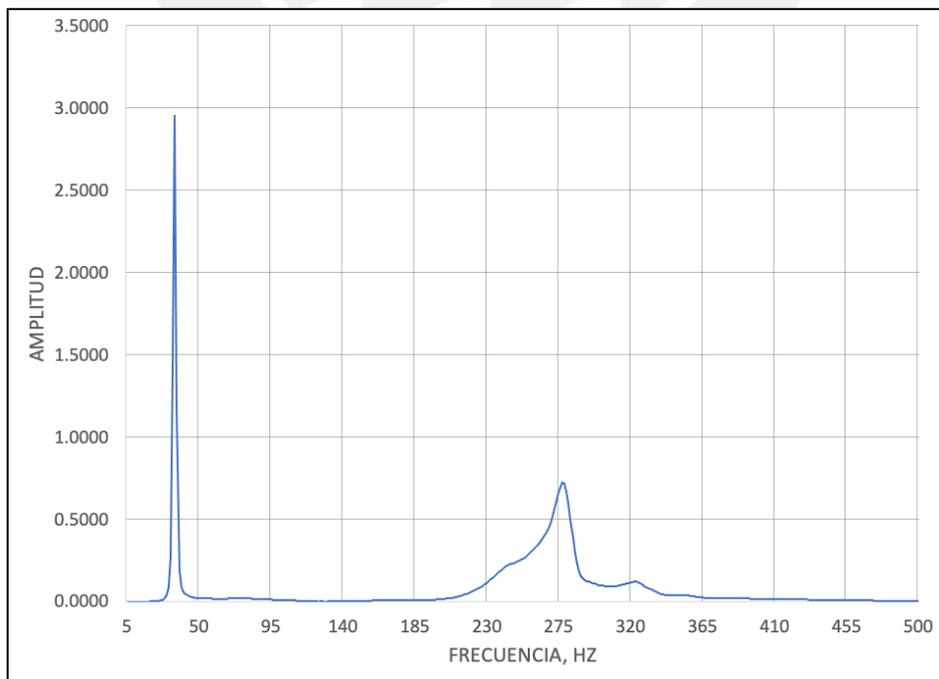
**Figura B1.14**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 236.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



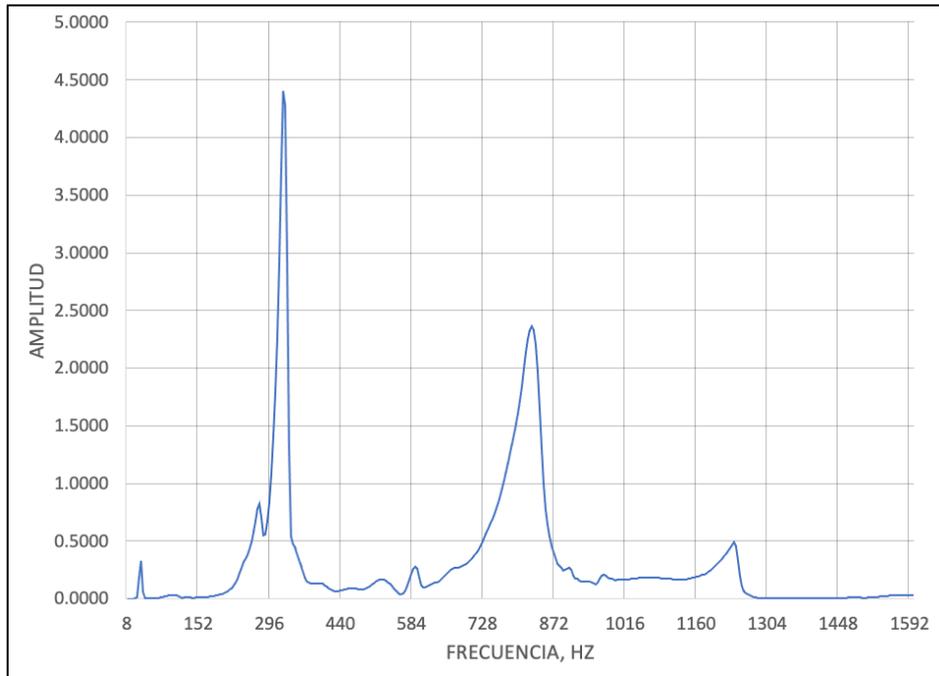
**Figura B1.15**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 334.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



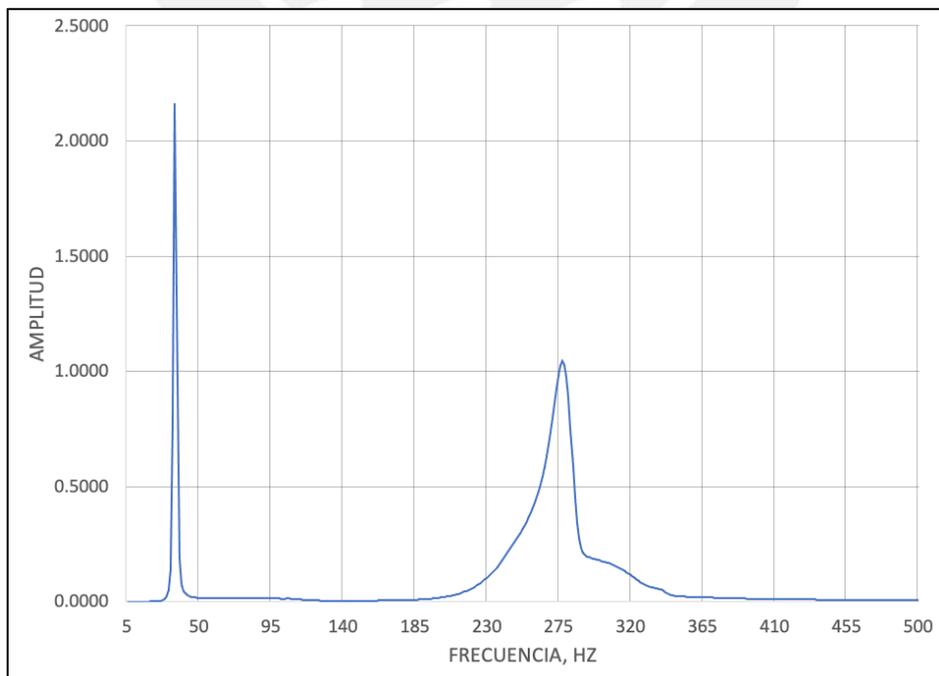
**Figura B1.16**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 334.4 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



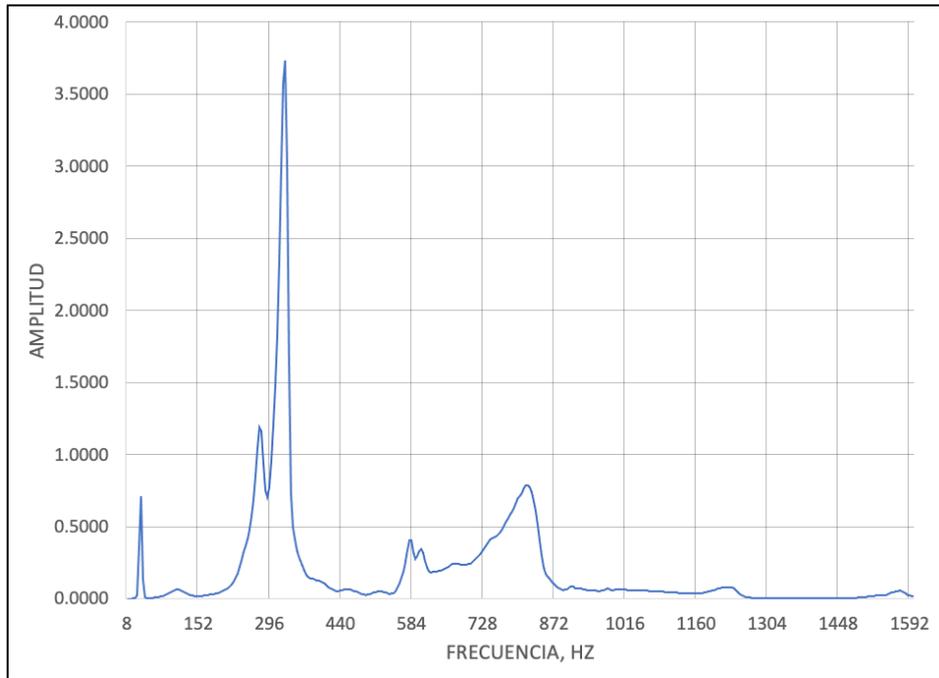
**Figura B1.17**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 449.5 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



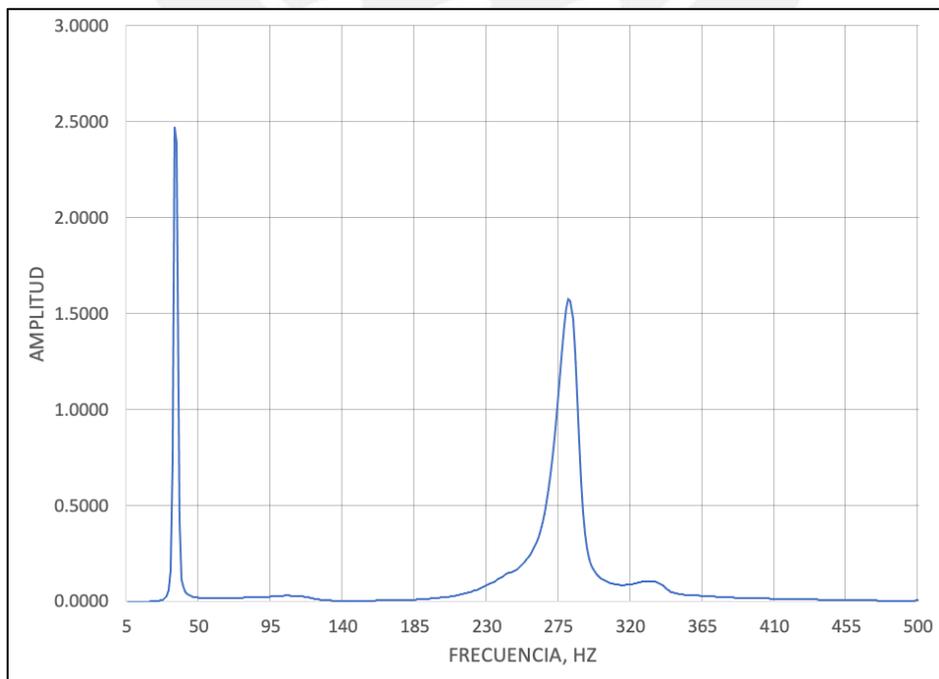
**Figura B1.18**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 449.5 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



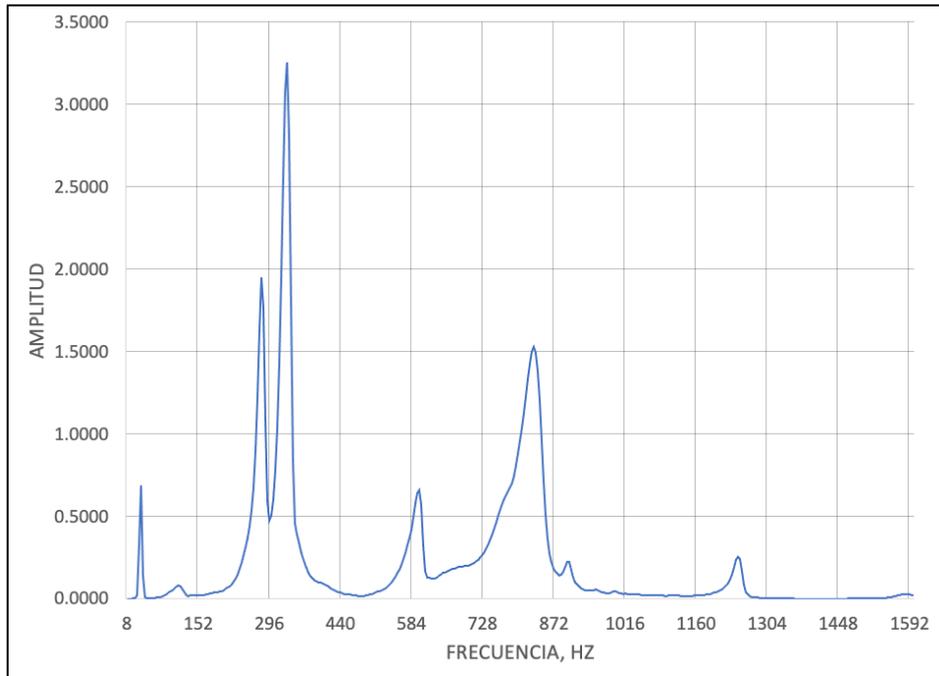
**Figura B1.19**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 531.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



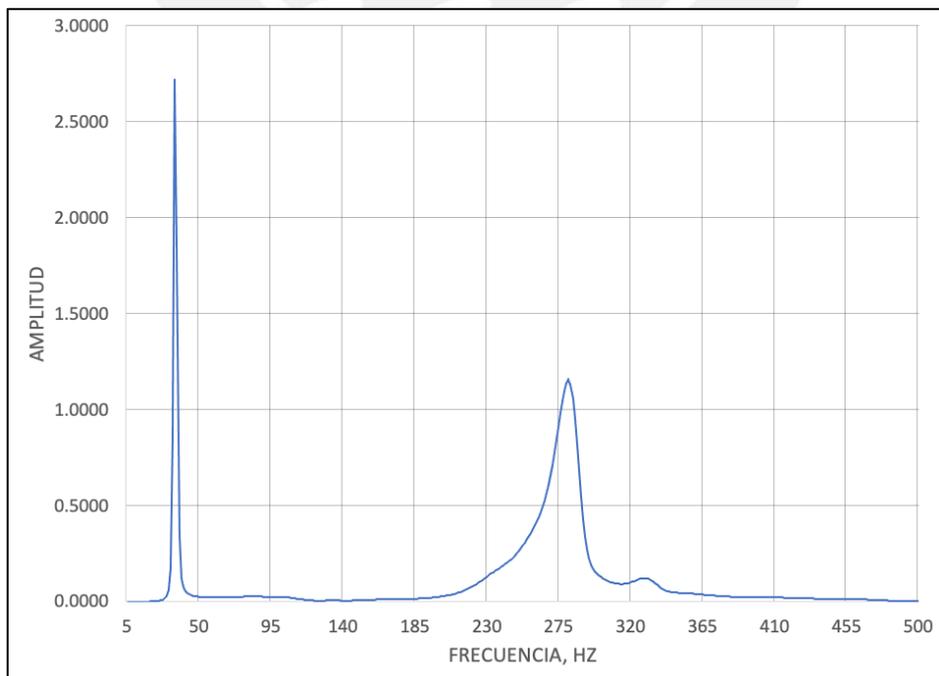
**Figura B1.20**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 531.3 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



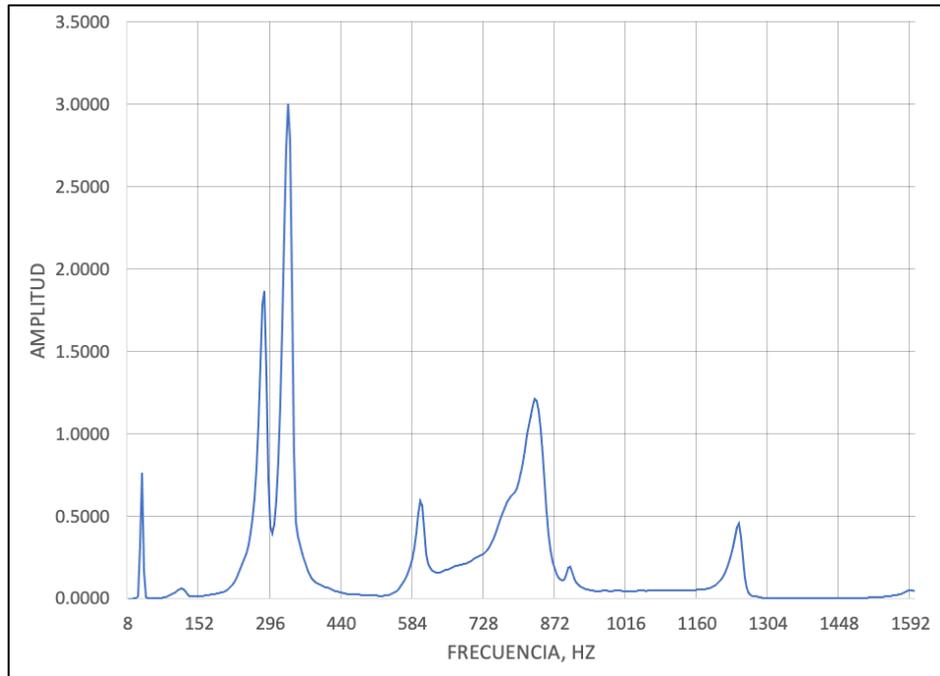
**Figura B1.21**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 673.7 N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



**Figura B1.22**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  y tensión media 673.7 N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*

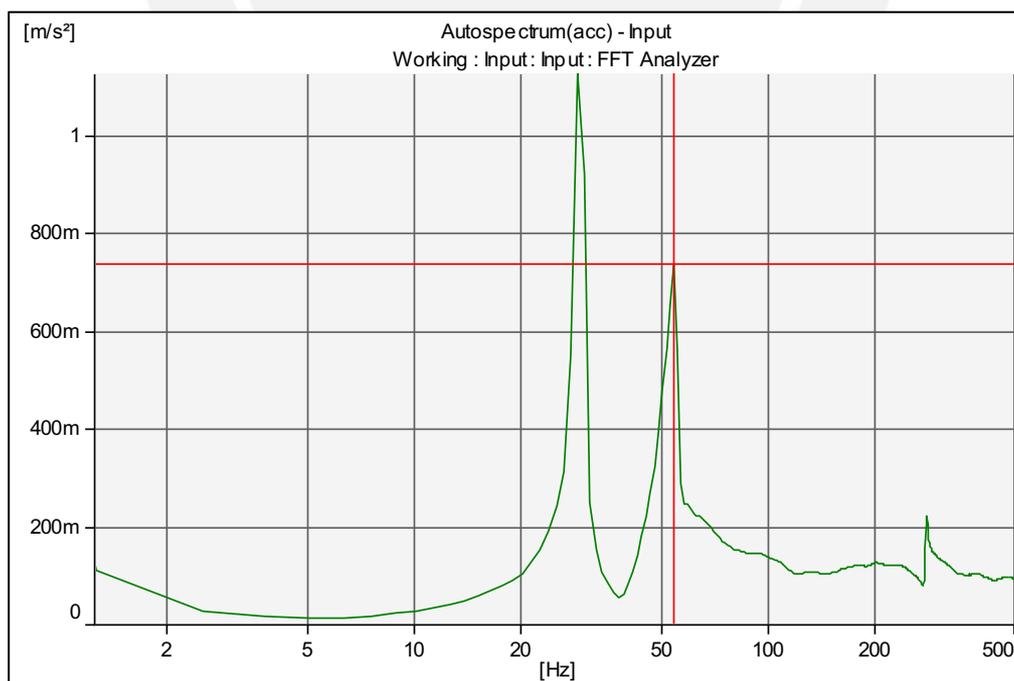


## Anexo 2

# Espectros de frecuencias del experimento B2

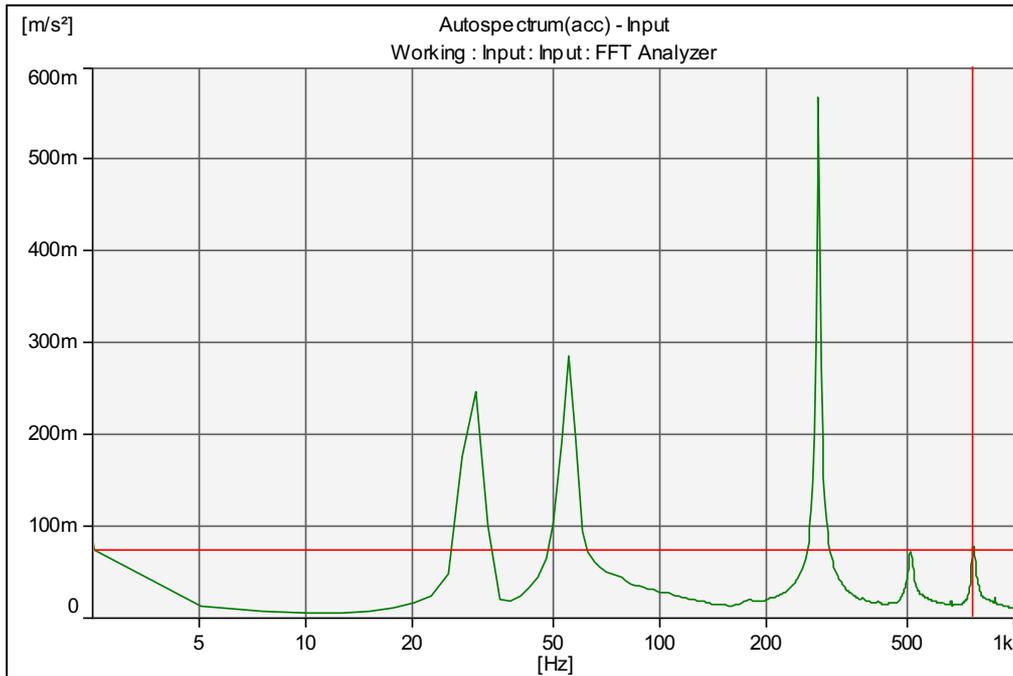
**Figura B2.1**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m,0}$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



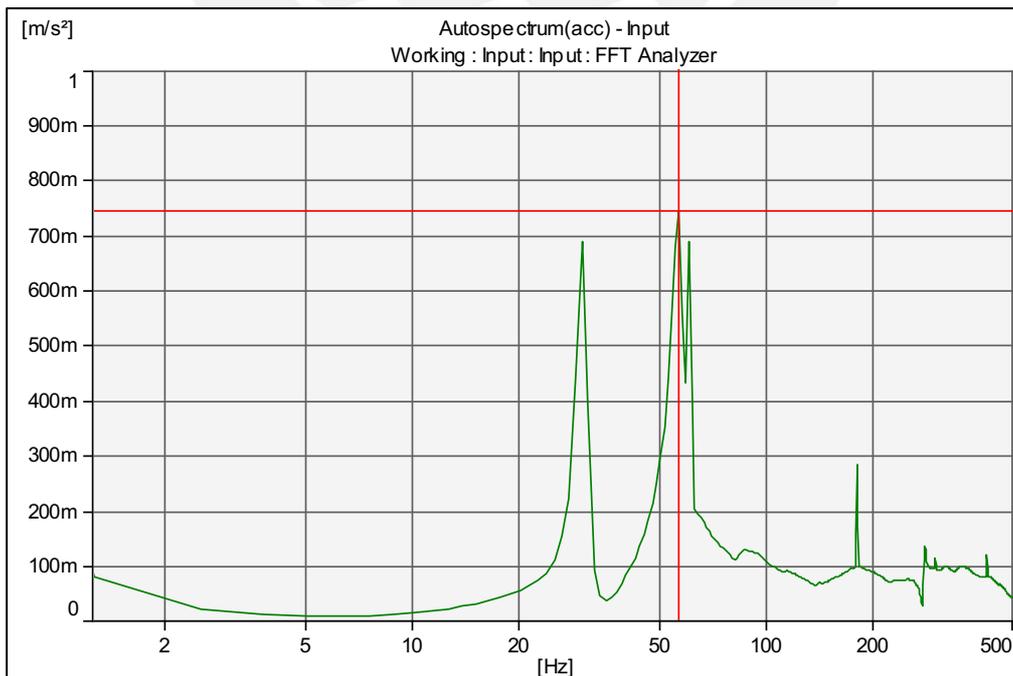
**Figura B2.2**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m.0}$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



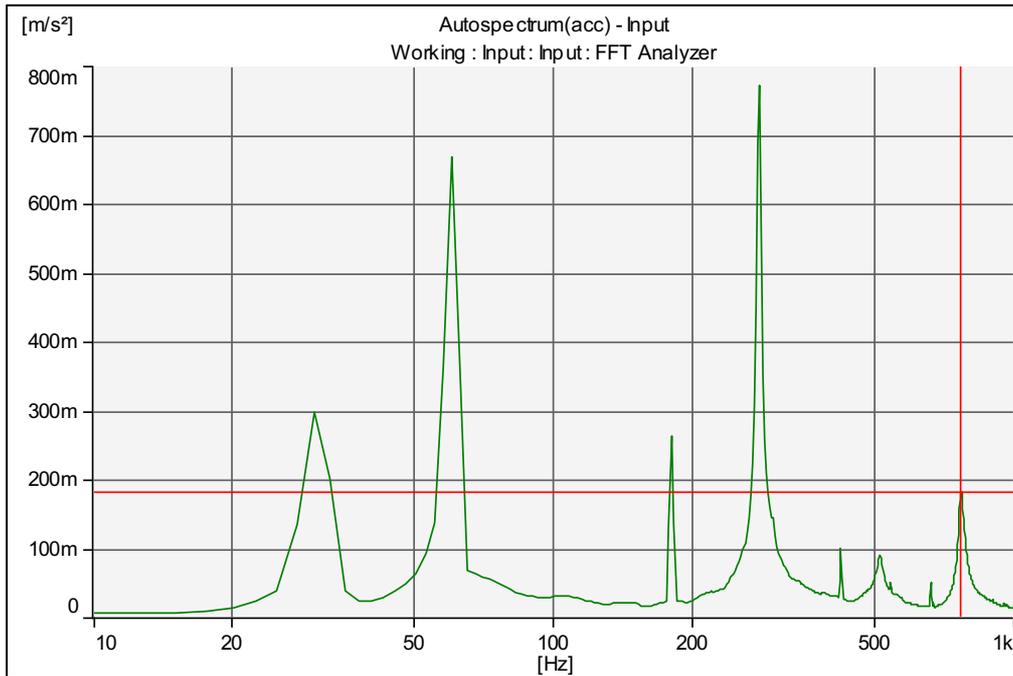
**Figura B2.3**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m.0} + 17.6$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



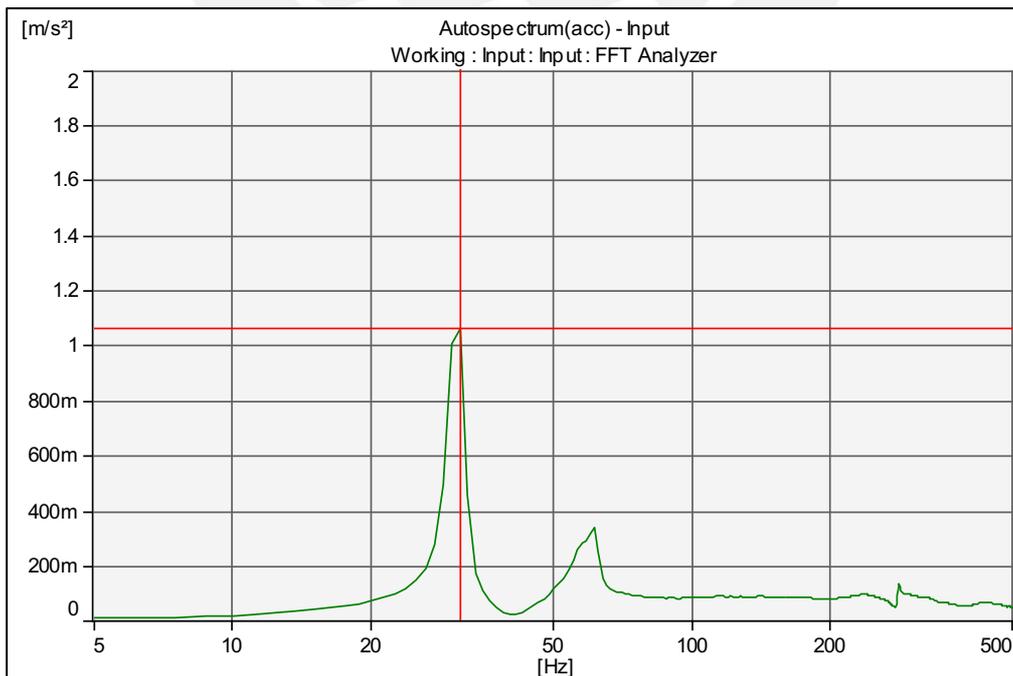
**Figura B2.4**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m,0} + 17.6$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



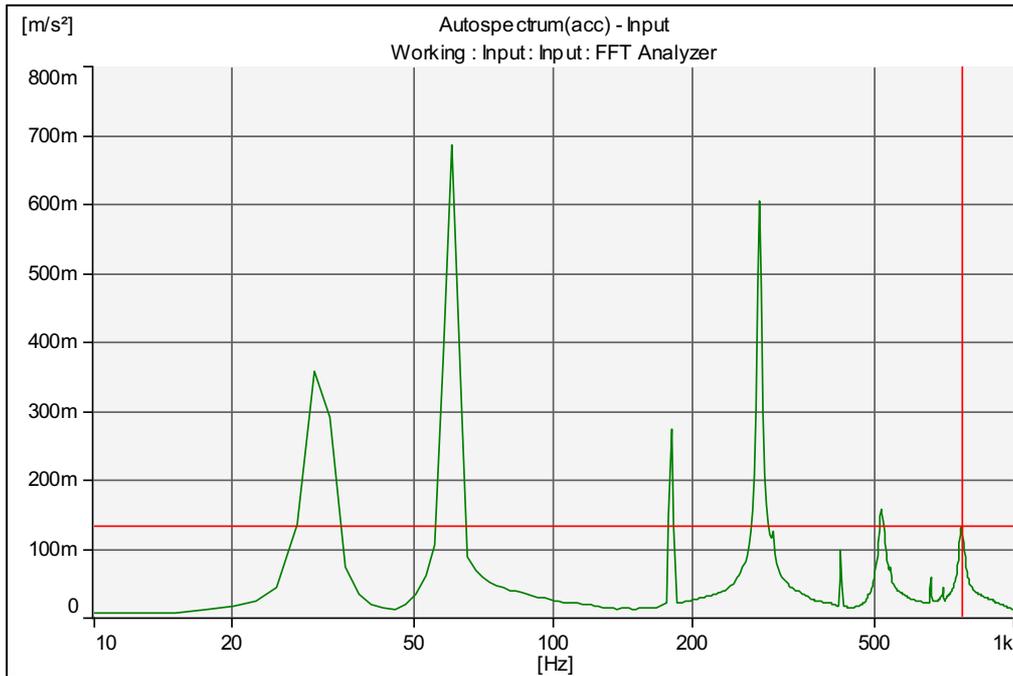
**Figura B2.5**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m,0} + 42.0$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



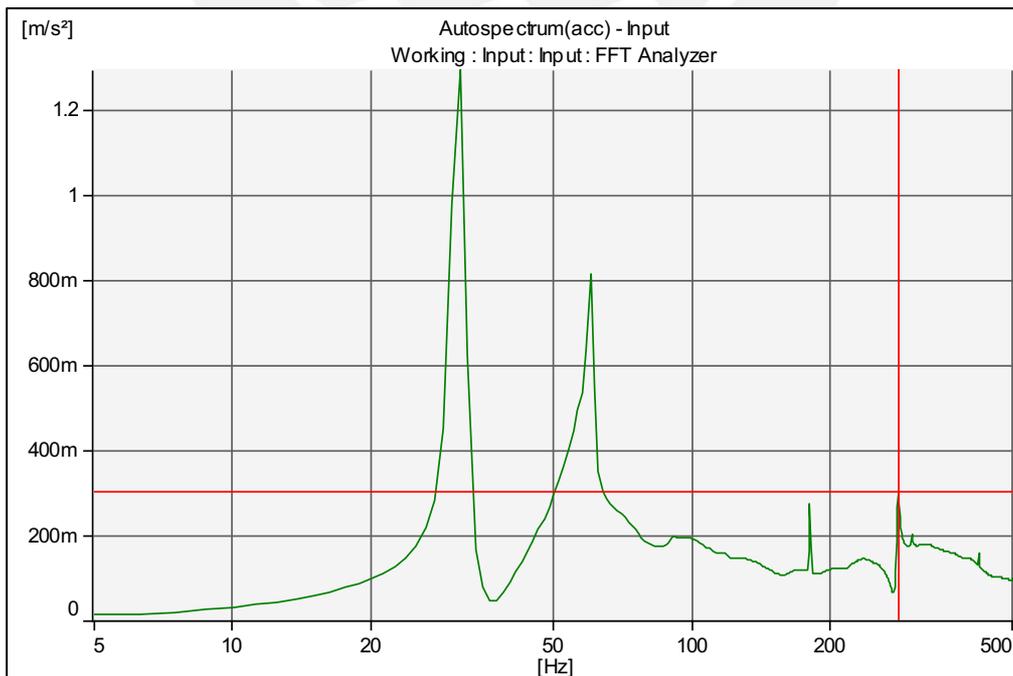
**Figura B2.6**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m,0} + 42.0$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



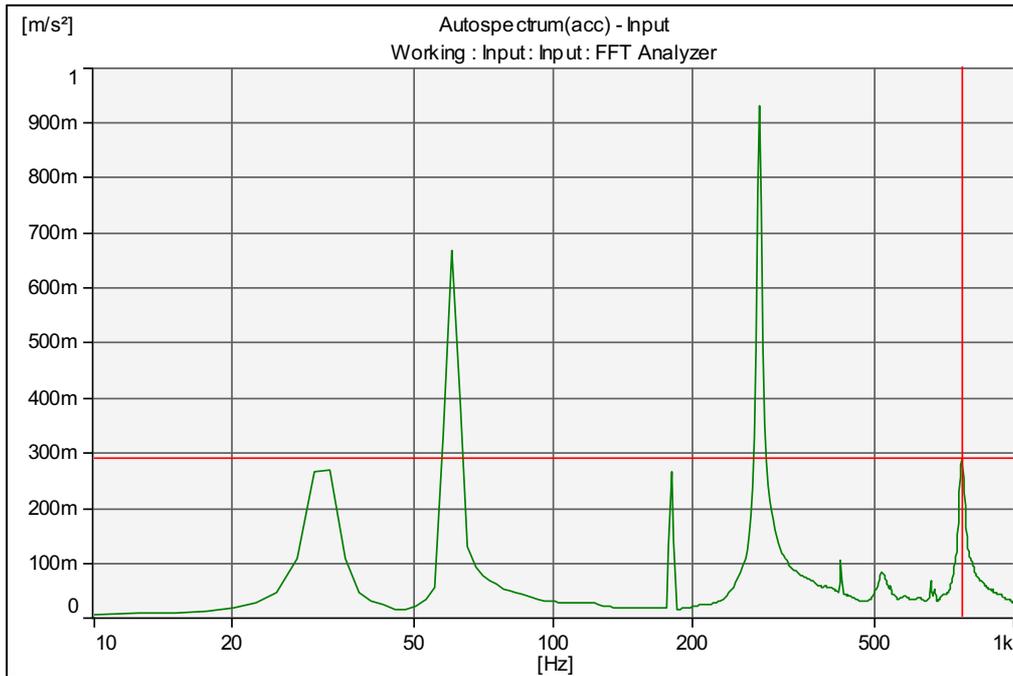
**Figura B2.7**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m,0} + 73.1$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



**Figura B2.8**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  y tensión media  $T_{m,0} + 73.1$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*

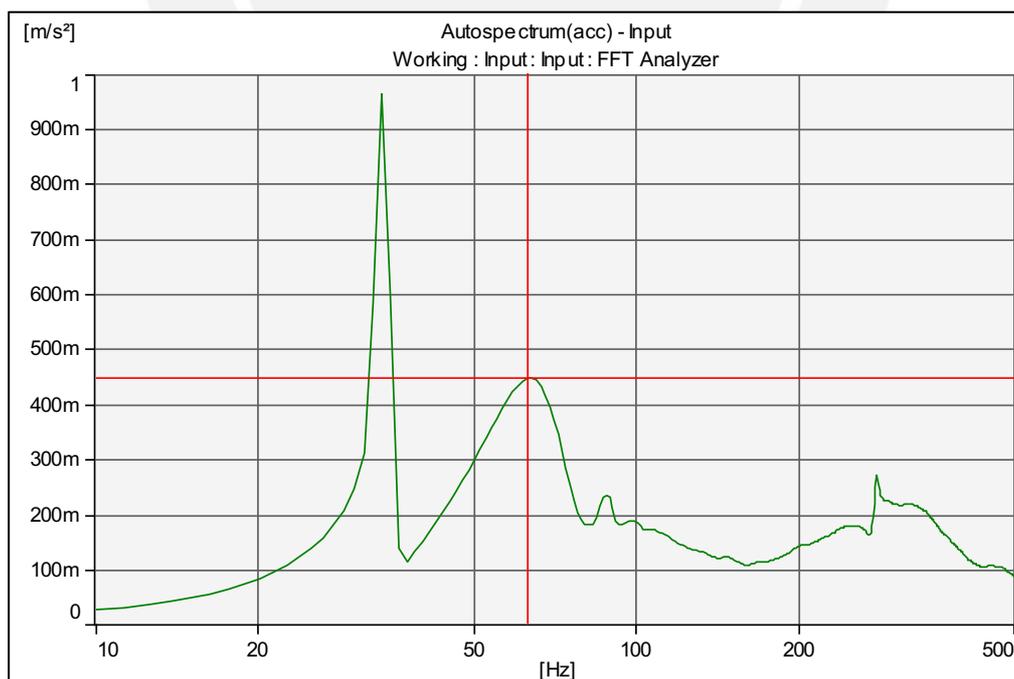


## Anexo 3

# Espectros de frecuencias del experimento B3

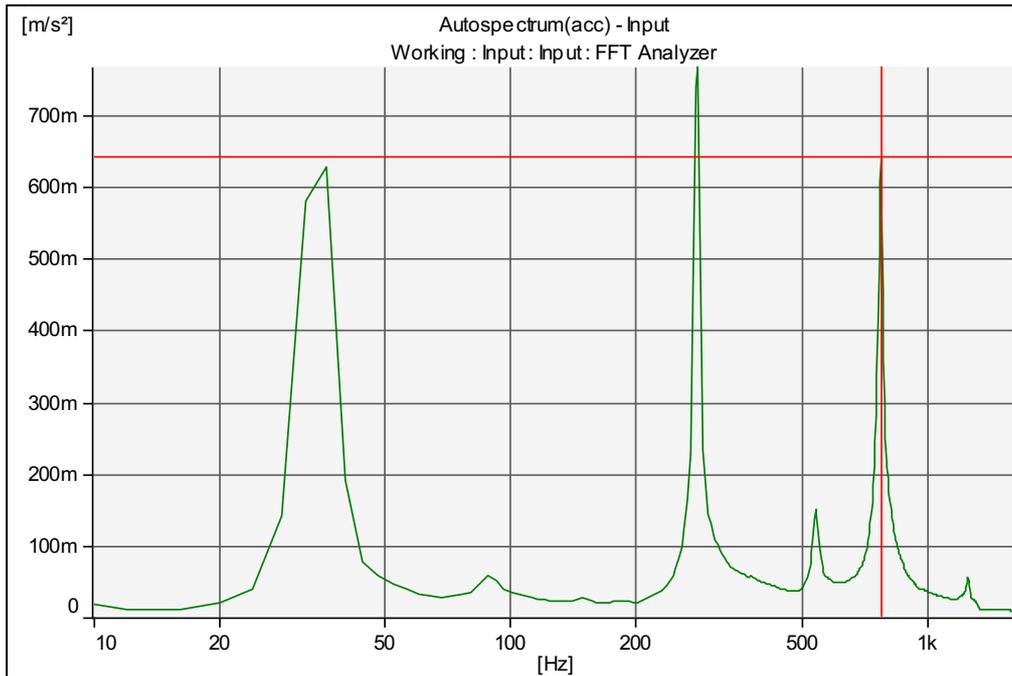
**Figura B3.1**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m,0}$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



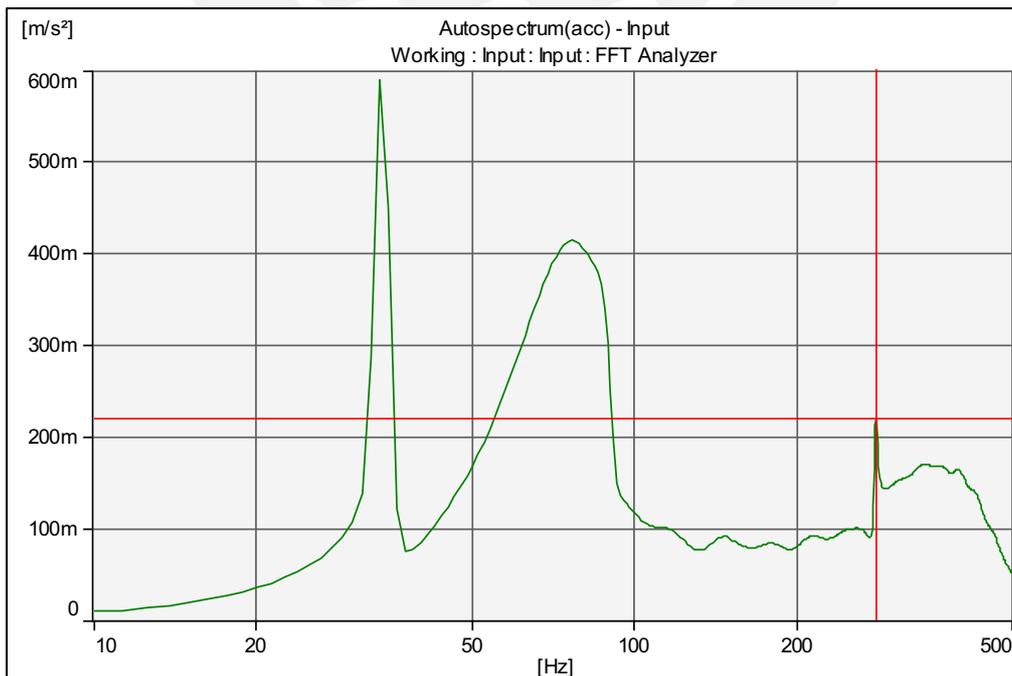
**Figura B3.2**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m.0}$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



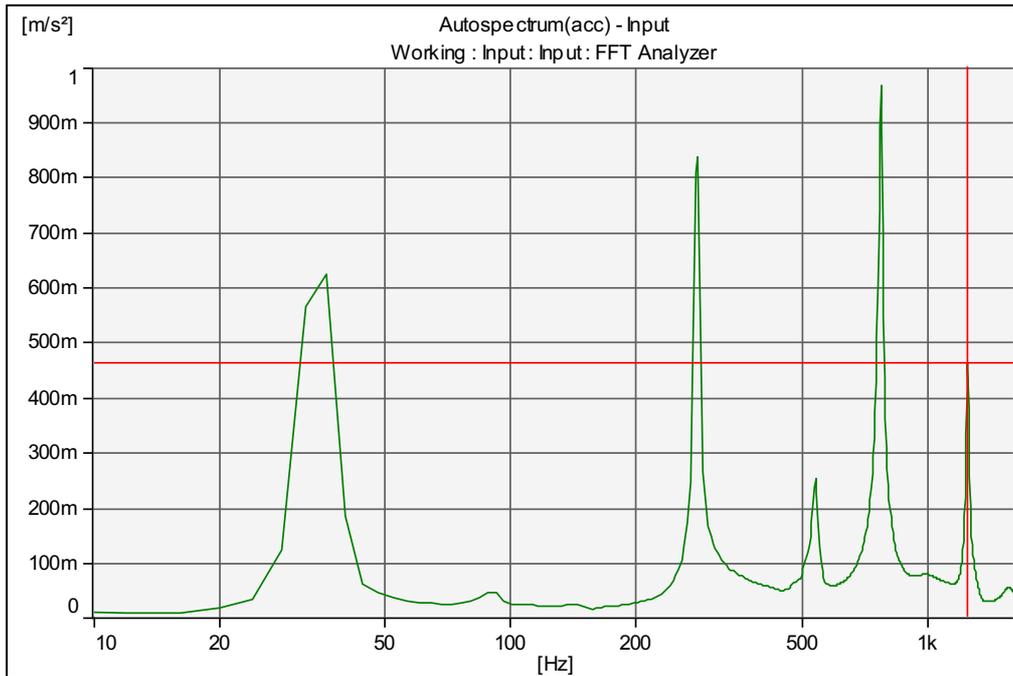
**Figura B3.3**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m.0} + 17.6$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



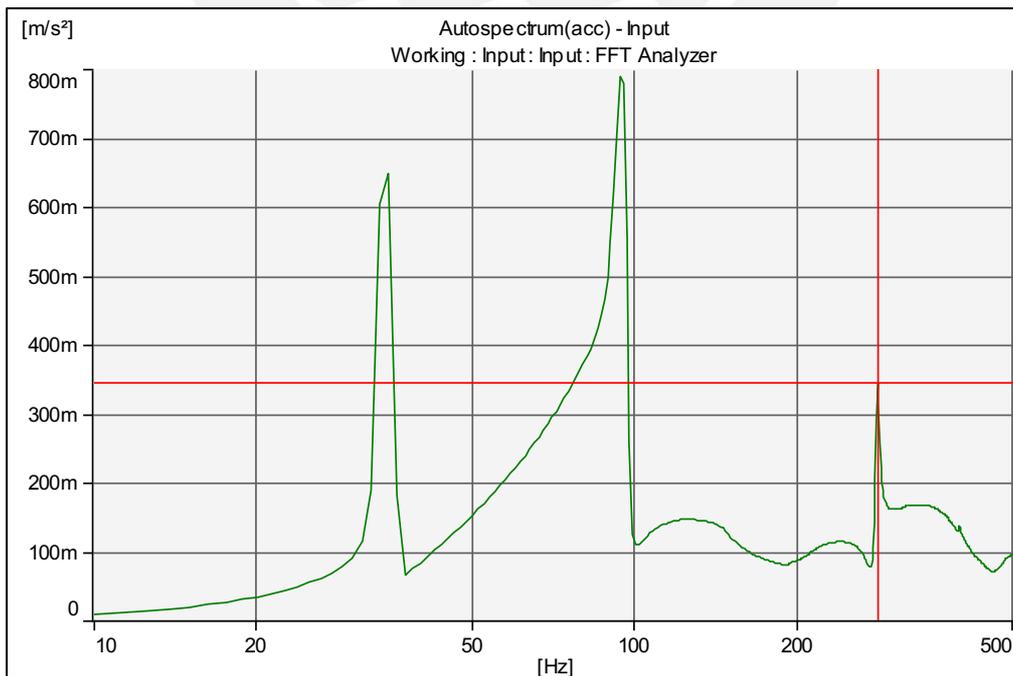
**Figura B3.4**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m,0} + 17.6$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



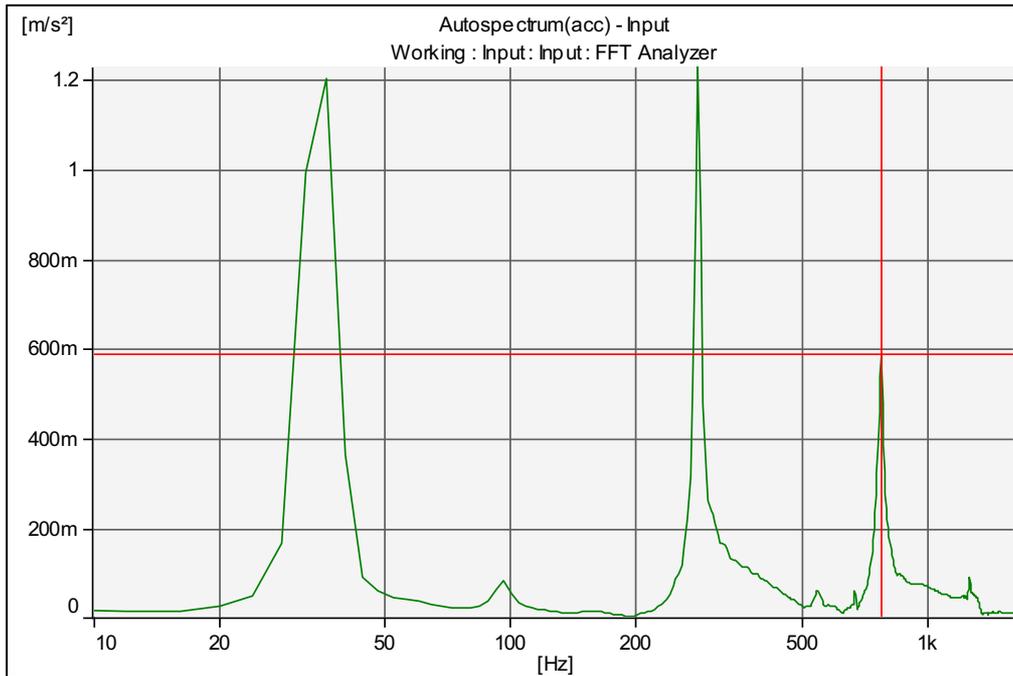
**Figura B3.5**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m,0} + 42.0$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



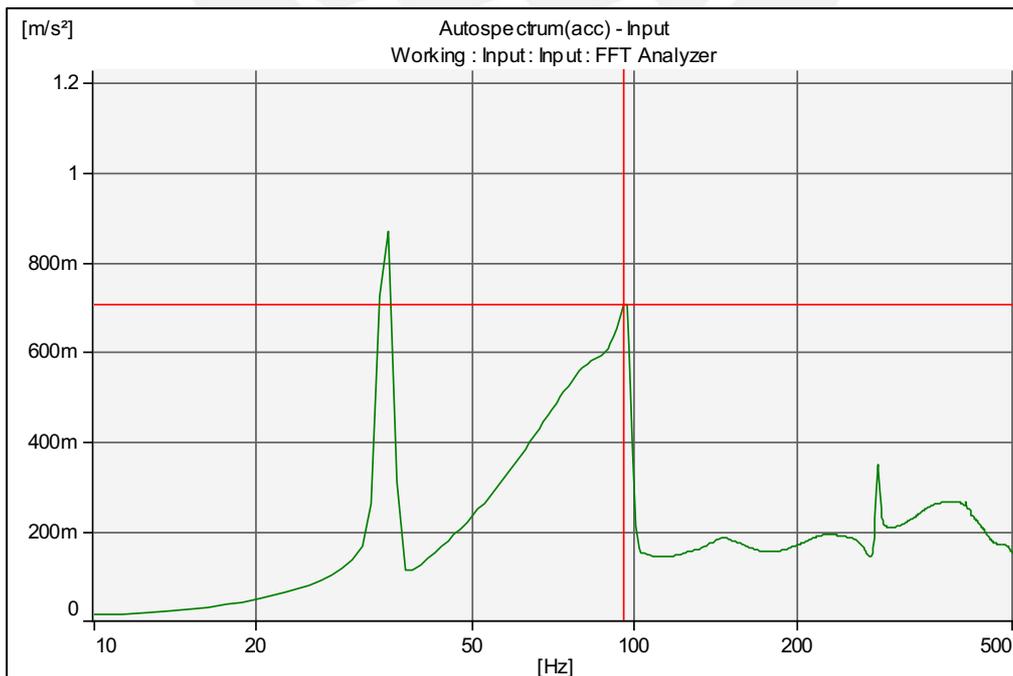
**Figura B3.6**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m,0} + 42.0$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



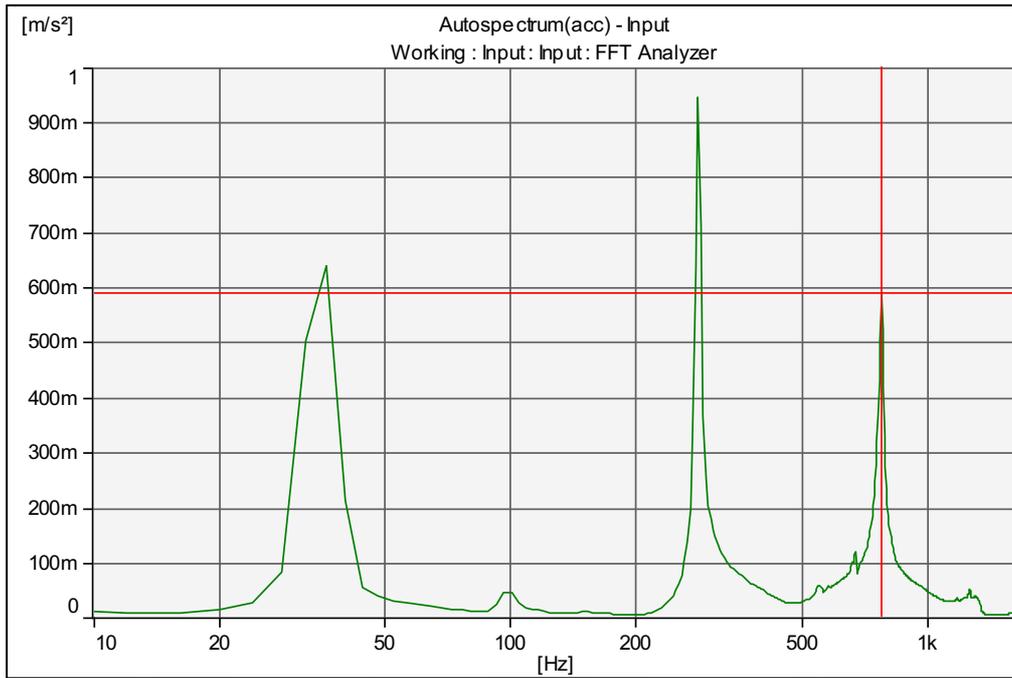
**Figura B3.7**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m,0} + 73.1$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



**Figura B3.8**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  y tensión media  $T_{m,0} + 73.1$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*

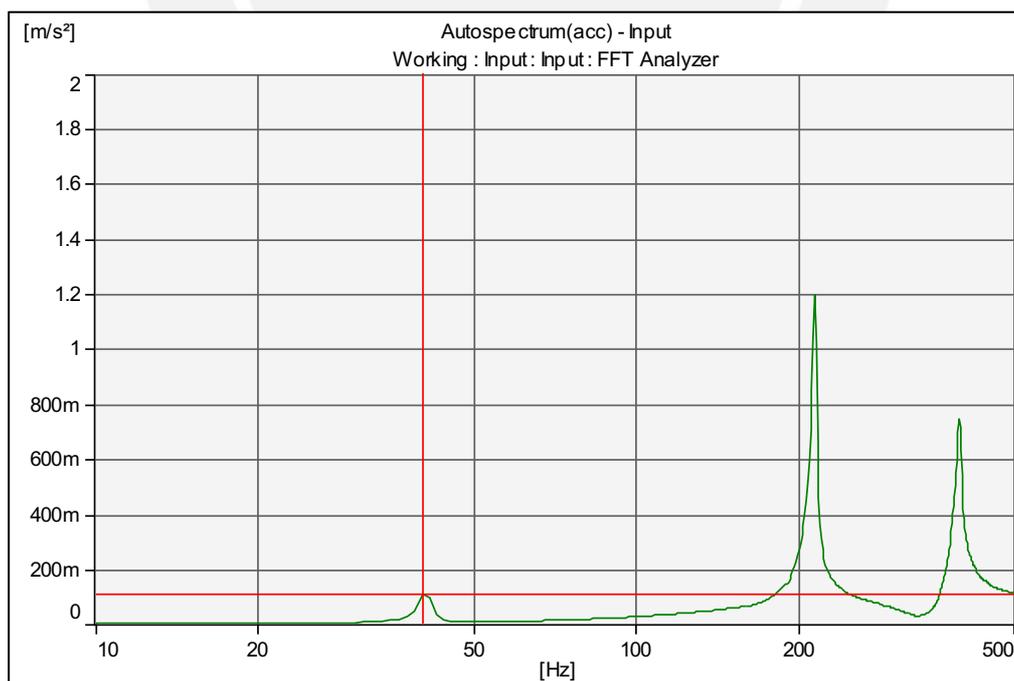


## Anexo 4

# Espectros de frecuencias del experimento B4

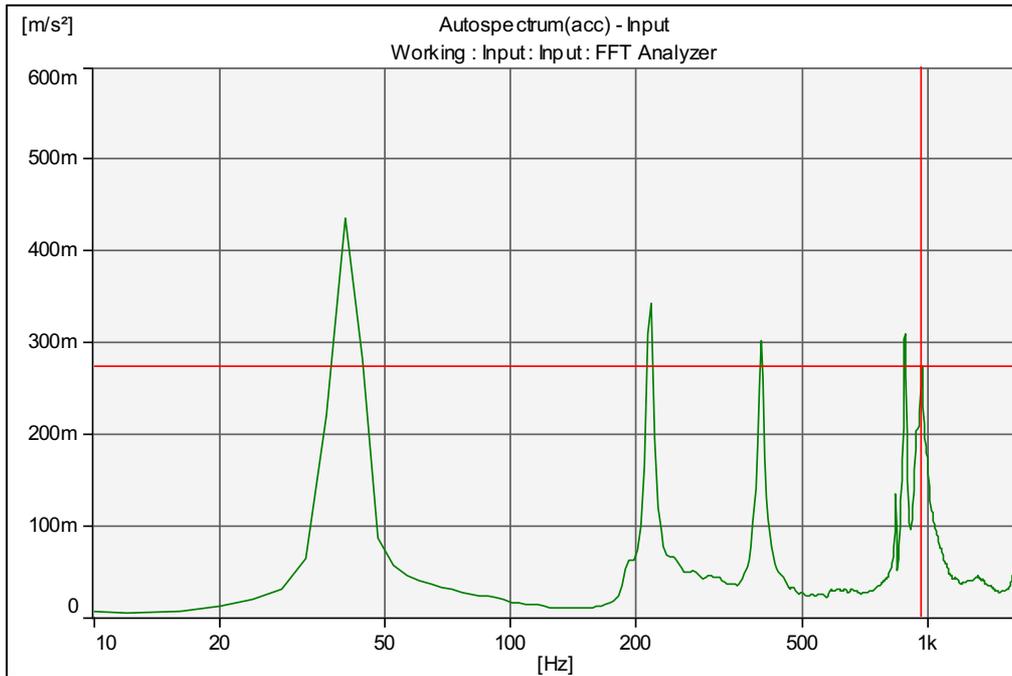
**Figura B4.1**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m,0}$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



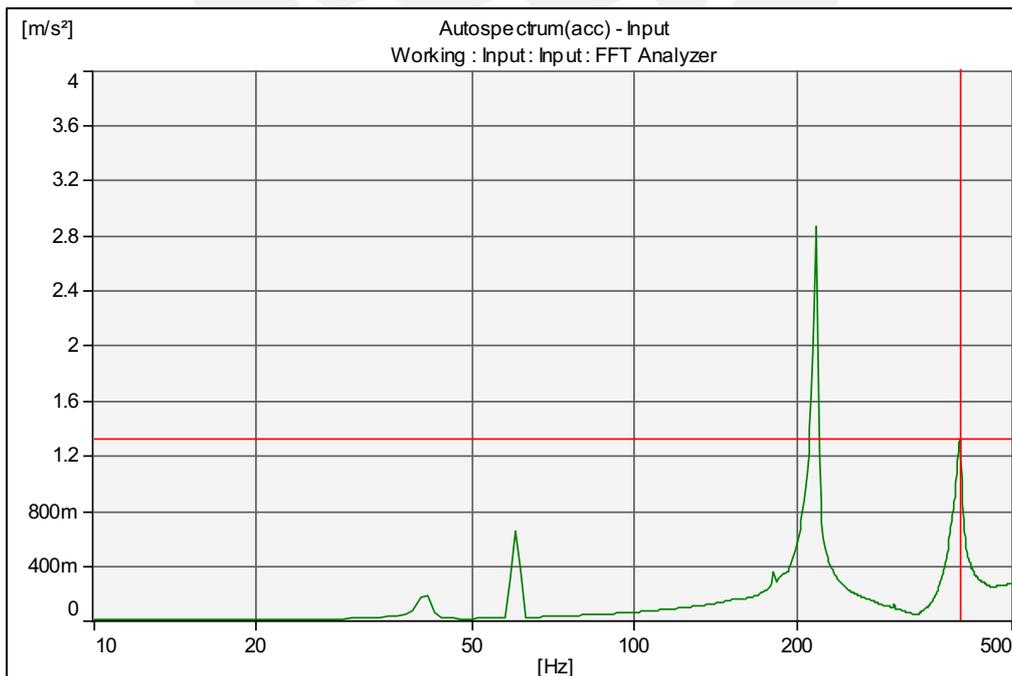
**Figura B4.2**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m,0}$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



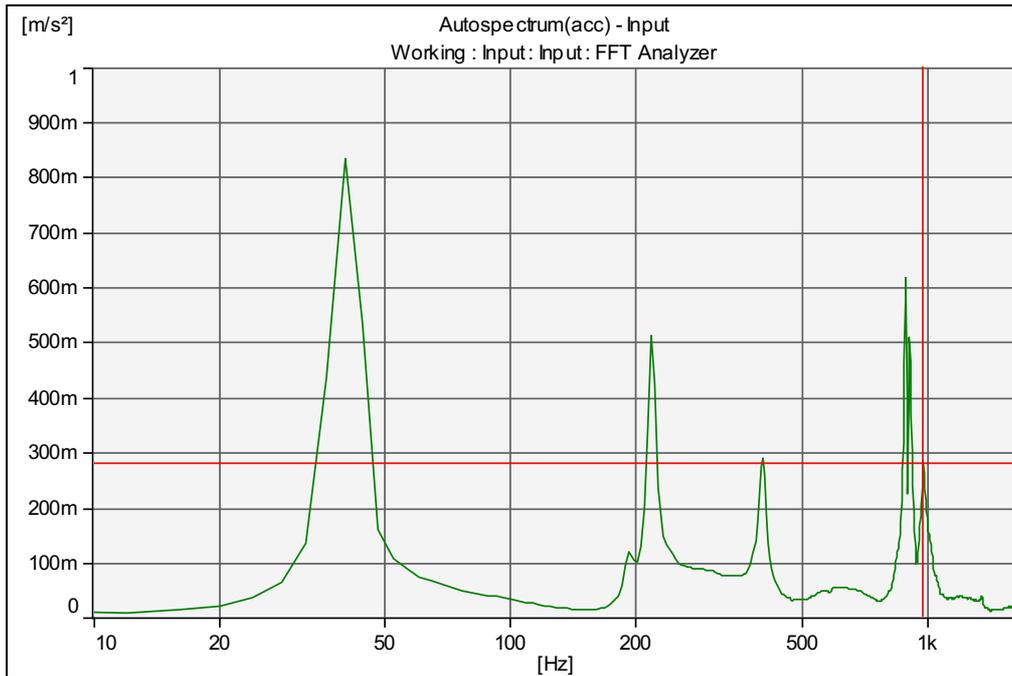
**Figura B4.3**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m,0} + 17.6$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



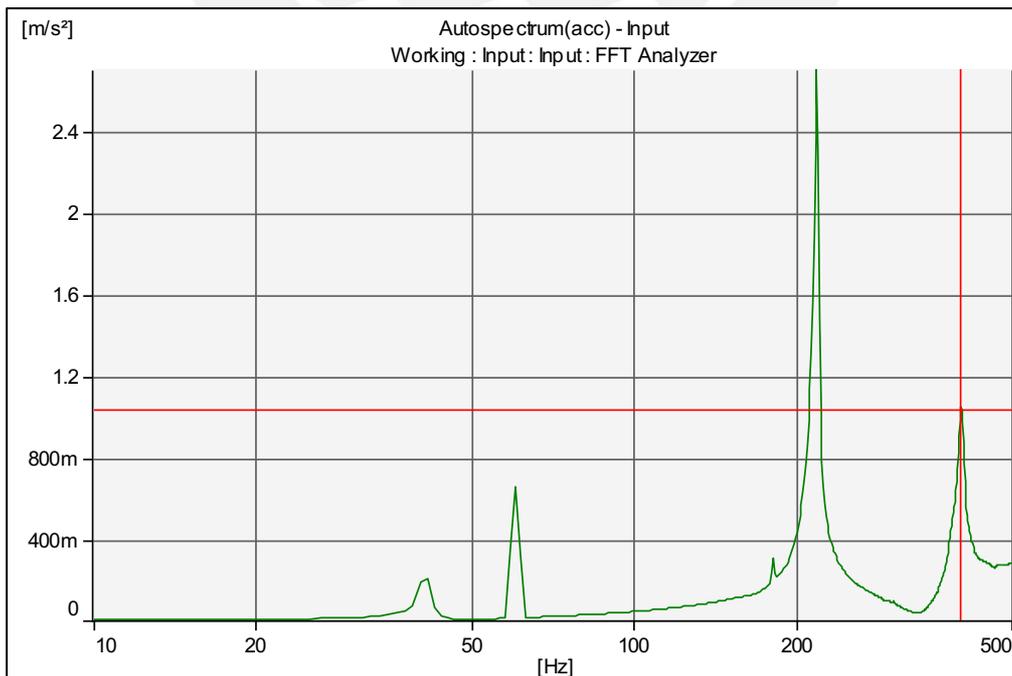
**Figura B4.4**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m.0} + 17.6$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



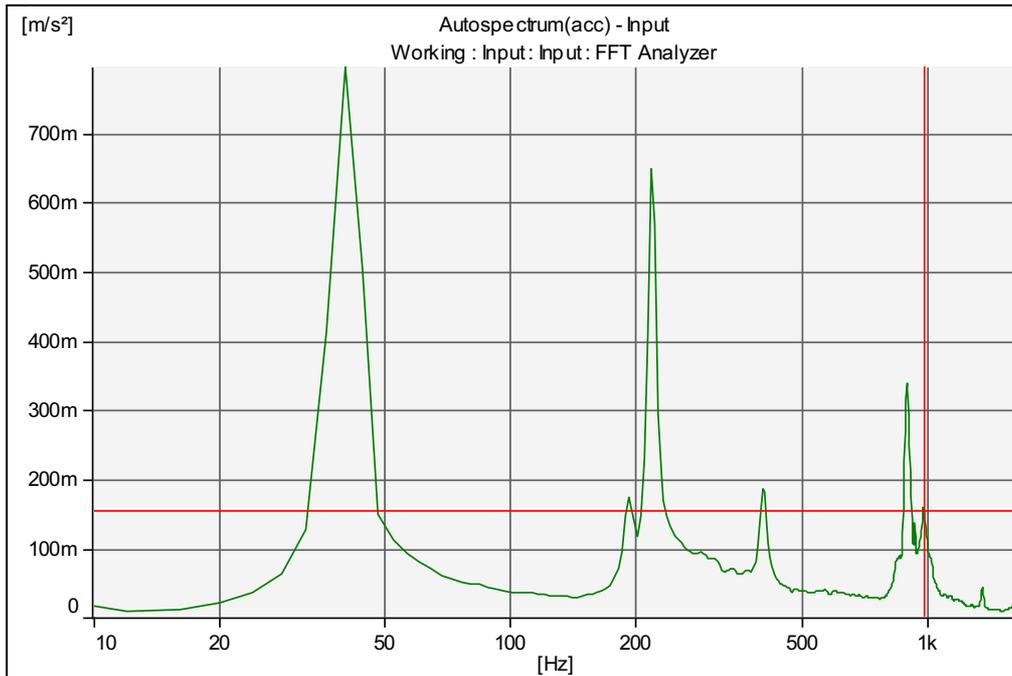
**Figura B4.5**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m.0} + 42.0$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



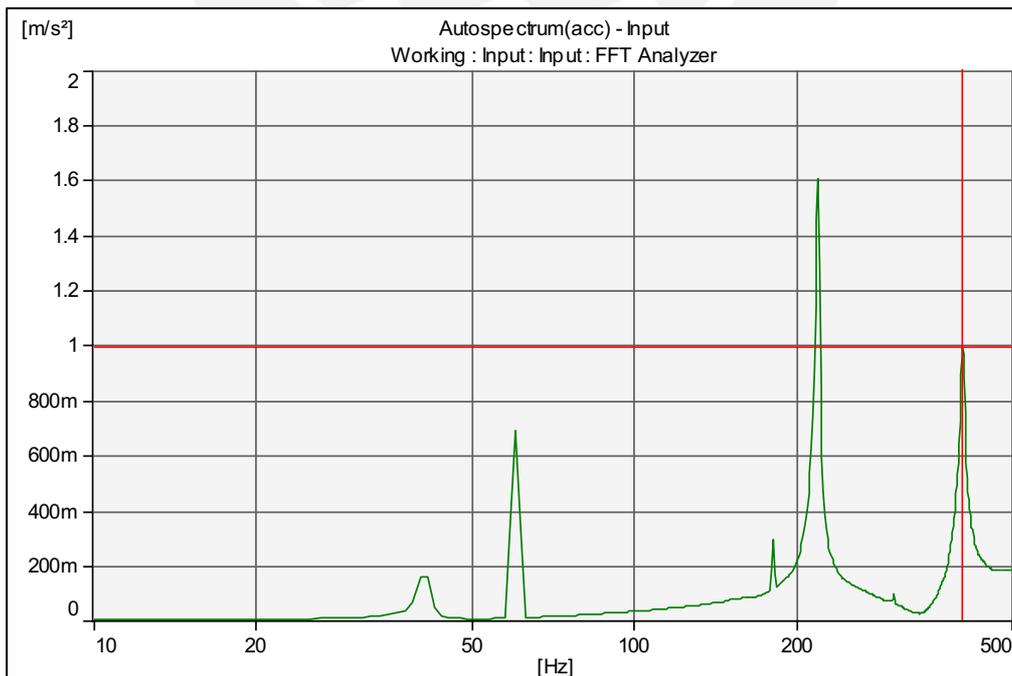
**Figura B4.6**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m.0} + 42.0$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



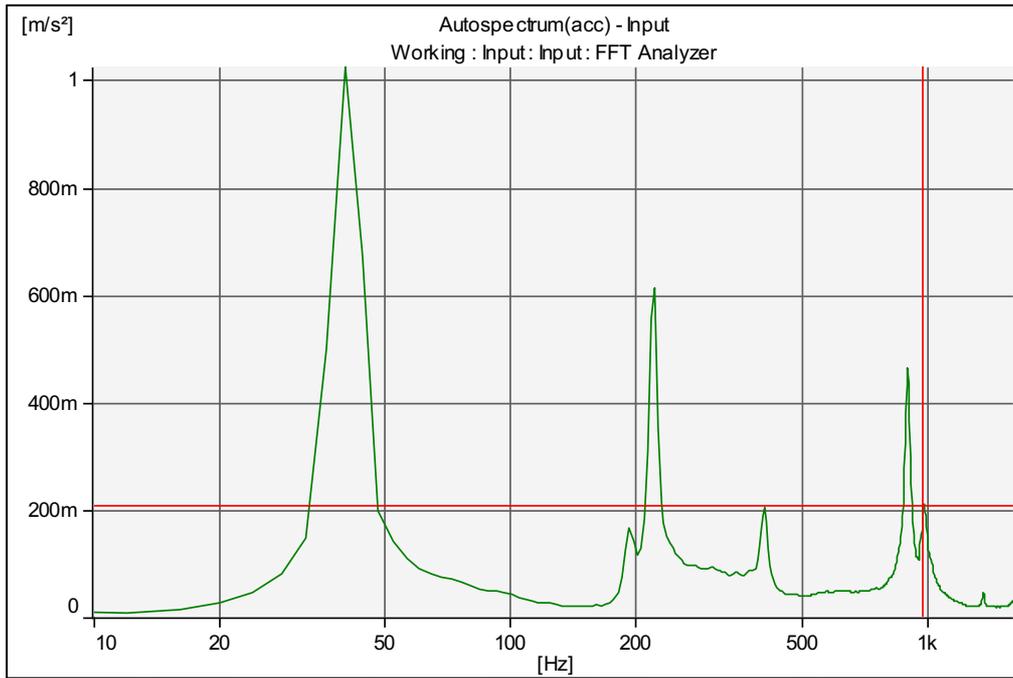
**Figura B4.7**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m.0} + 73.1$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



**Figura B4.8**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  y tensión media  $T_{m.0} + 73.1$  N con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*

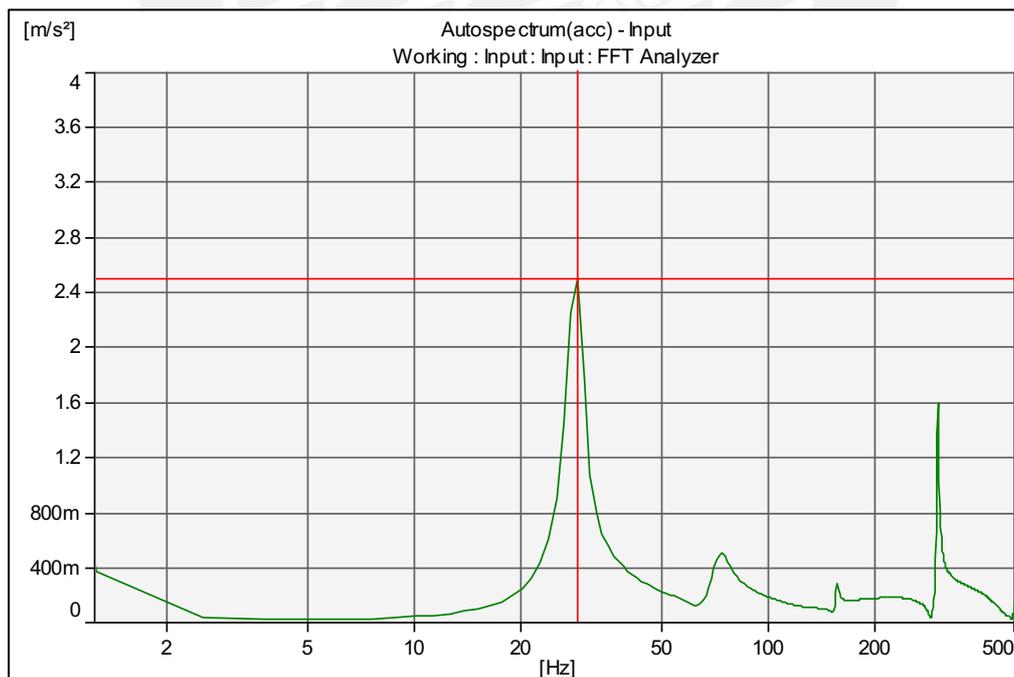


## Anexo 5

# Espectros de frecuencias del experimento C2

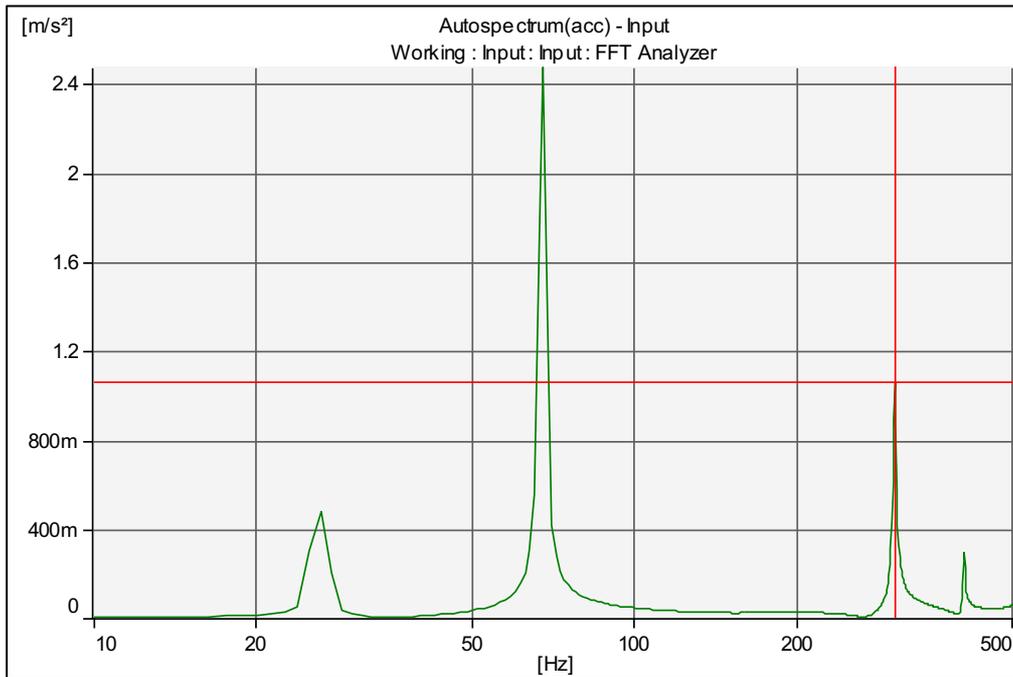
**Figura C2.1**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



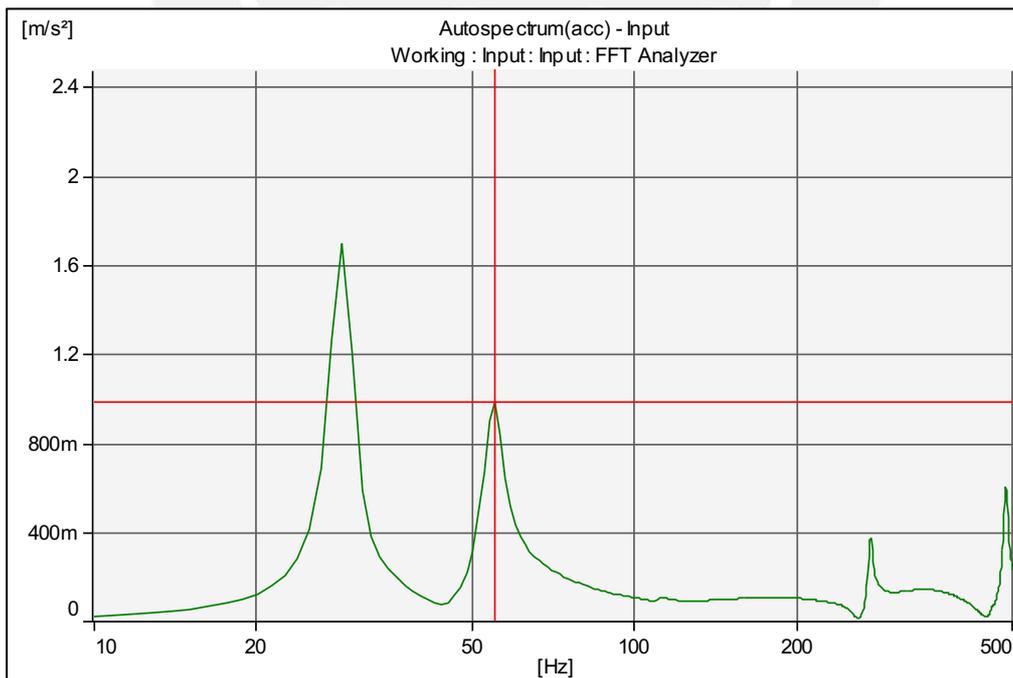
**Figura C2.2**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/2$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



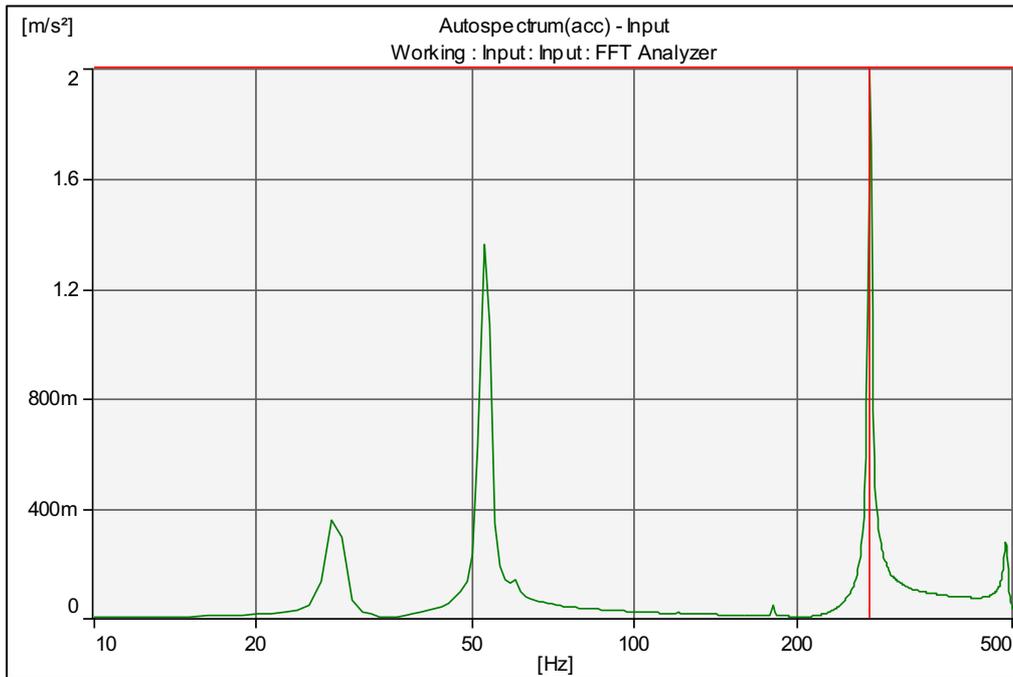
**Figura C2.3**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



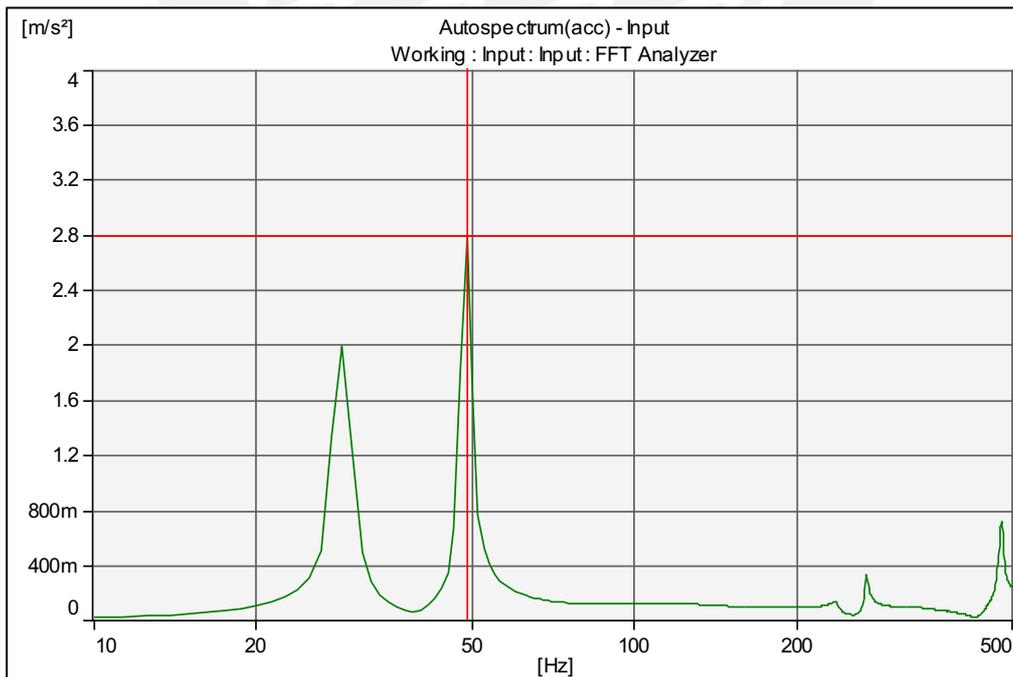
**Figura C2.4**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/4$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



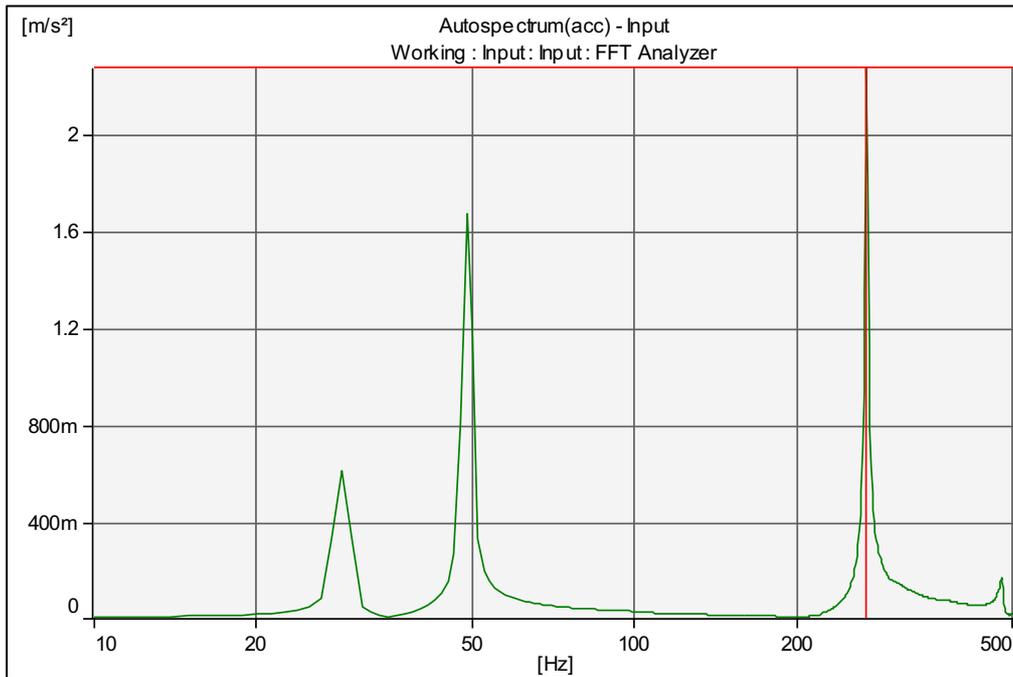
**Figura C2.5**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



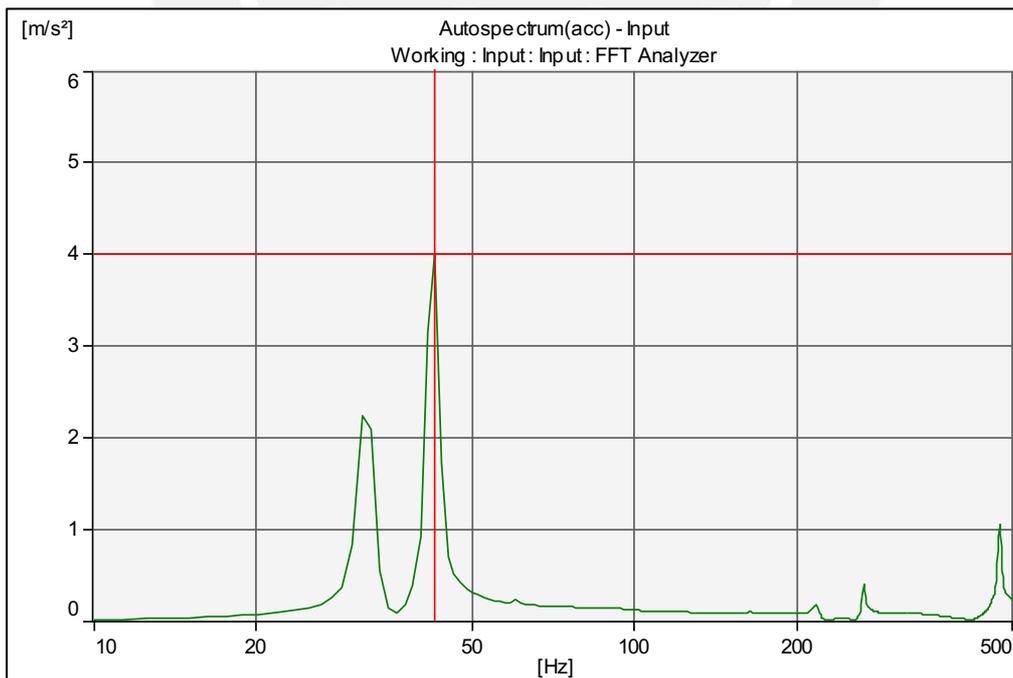
**Figura C2.6**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = \pi/6$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*



**Figura C2.7**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  con acelerómetro fijado a la superficie de la barra*



**Figura C2.8**

*Espectro de frecuencias para  $\bar{\theta} = 0$  con acelerómetro fijado a la superficie de la viga*

