

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



La geometría simpléctica en la mecánica clásica

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Física que
presenta:

Jimmy Leonardo Rosales Ventocilla

Asesor:

Hernan Alfredo Castillo Egoavil

Lima, 2024

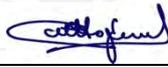
Informe de Similitud

Yo, Hernán Castillo Egoávil, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulado “La geometría simpléctica en la mecánica clásica”, del autor Jimmy Leonardo Rosales Ventocilla, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 13%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 29/01/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 29 de enero del 2024

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Castillo Egoavil, Hernán Alfredo	
DNI: 08668381	Firma 
ORCID: 0000-0003-1208-7353	

“...In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic.”

Vladímir Ígorevich Arnold (1937 - 2010)



Resumen

La geometría simpléctica en la mecánica clásica

Este trabajo se adentra en la exploración de las aplicaciones de la geometría simpléctica en la física en el contexto de la mecánica clásica. La motivación subyacente a esta exploración radica en la comprensión de que la teoría convencional proporcionada por la literatura tradicional resulta insuficiente para analizar todas las complejidades que un sistema físico puede presentar. Por ejemplo, asegurar la existencia de trayectorias periódicas o identificar simetrías en el sistema no puede alcanzarse plenamente con los conocimientos clásicos de la mecánica. Por lo tanto, se hace imperativo incorporar los conceptos de geometría diferencial y sistemas dinámicos en el marco de la mecánica.

Para alcanzar este objetivo, comenzaremos por revisar los fundamentos de la mecánica, enfocándonos inicialmente en los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano. A medida que desarrollemos estos conceptos esenciales, observaremos cómo emergen de manera natural los conceptos de variedades diferenciales, formas diferenciales, formas simplécticas y otros elementos relacionados con la geometría diferencial y simpléctica.

Adicionalmente, profundizaremos en la teoría de invariantes, donde presentaremos y demostraremos el teorema de Noether en el contexto de la geometría diferencial. Este teorema proporcionará una comprensión más profunda para abordar los sistemas físicos desde una perspectiva geométrica. Finalmente, exploraremos cómo estas influyentes teorías matemáticas, tanto la teoría de invariantes como la geometría simpléctica, nos dotarán de herramientas más sólidas para enfrentar las complejidades de los sistemas físicos analizados en la literatura de la mecánica clásica, permitiéndonos resolverlos de manera más efectiva.

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mis padres y hermanos quienes me brindaron su apoyo durante todo el bachillerato y la maestría.





A mis padres

Índice general

Resumen	iv
Agradecimientos	v
1. Introducción	1
2. Geometría Diferencial	3
2.1. Variedades Diferenciables	3
2.2. Espacio Tangente	10
2.3. Campos vectoriales	13
2.4. 1-Formas Diferenciales	14
2.5. k-Formas Diferenciales	15
3. Mecánica clásica	17
3.1. Cálculo de Variaciones	17
3.2. La ecuación de Euler-Lagrange	23
3.3. Formulación Hamiltoniana	24
3.3.1. Transformación de Legendre	24
3.3.2. Las ecuaciones de Hamilton	29
3.3.3. El Hamiltoniano y la energía	30
4. Geometría Simplética	33
4.1. Formas Simpléticas	33
4.2. Espacios Vectoriales Simpléticos	35
4.3. Variedades Simpléticas	36
4.4. Simplectomorfismos	37
4.5. Forma simplética en el fibrado cotangente	38
4.5.1. Fibrado cotangente	38
4.5.2. Formas Tautológicas y Canónicas en cartas	39
4.5.3. Definiciones sin coordenadas	39
4.5.4. Formas Tautológica y Canónica	40
4.6. Simplectomorfismos	43
4.6.1. Subvariedad	43

4.6.2.	Subvariedad Lagrangiana	44
4.6.3.	Fibrados Conormales	46
4.6.4.	Aplicación a los symplectomorfismos	47
4.7.	Formas Locales	49
4.7.1.	Isotopías y Campos Vectoriales	49
4.8.	Teoremas de Moser	52
4.8.1.	Conceptos de Equivalencia para Estructuras Simpléticas	52
4.8.2.	Teoremas de Moser	53
4.8.3.	Teorema de Darboux	56
4.9.	Mecánica Hamiltoniana	56
4.9.1.	Campos Vectoriales Hamiltonianos y Simpléticos	57
4.9.2.	Mecánica clásica	59
4.9.3.	Corchetes	60
4.10.	Sistemas Integrables	62
4.11.	Aplicaciones	64
5.	Teoría de Invariantes	71
5.1.	Invariancia	71
5.2.	El Teorema de Noether	77
5.3.	Búsqueda de Invariantes	78
5.4.	Potencial tipo oscilador armónico	81
5.5.	Caso general	82
5.5.1.	Simetrías en coordenadas polares, caso simplificado	85
5.6.	Simetrías en el Electromagnetismo	87
5.6.1.	Lagrangiano de Störmer	90
5.7.	Simetrías en el caso Relativista	96
5.7.1.	Partícula libre	97
6.	Aplicaciones	99
6.1.	Lagrangiano de Störmer en el plano	100
6.2.	Lagrangiano de Störmer en el cilindro	106
7.	Conclusiones	112
	Bibliografía	114

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de este trabajo, exploraremos la interacción de tres campos del conocimiento: la geometría simpléctica, la teoría de invariantes y la mecánica clásica. La mecánica clásica, aunque suele ser la primera teoría que abordamos al estudiar física, dista de ser simple. De hecho, encontramos en ella ejemplos emblemáticos que marcan la carrera de cualquier físico, como el péndulo simple y el oscilador armónico.

Para profundizar en el análisis de esta rama de la física, es esencial emplear el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano de manera detallada en el espacio de \mathbb{R}^n . Esto se justifica por la necesidad de establecer conexiones con otras áreas matemáticas, lo que nos exige una aproximación más rigurosa.

Una vez que hayamos asimilado plenamente la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana en \mathbb{R}^n , exploraremos cómo estos conceptos se traducen al lenguaje de la geometría diferencial. En este proceso, observaremos cómo los conceptos de variedad diferenciable emergen de manera natural y comprenderemos por qué se utilizan, así como los beneficios que aportan a nuestro enfoque.

Dentro del amplio espectro de temas en geometría diferencial, nuestra atención se centrará principalmente en el estudio de la geometría simpléctica, dado que esta subárea constituye la formalización matemática de la dinámica Hamiltoniana, la cual cumple un papel fundamental en el contexto físico.

Una vez que hayamos adquirido una comprensión sólida de estos nuevos conceptos, abordaremos la teoría de invariantes desde una perspectiva más geométrica. Como resultado, exploraremos el teorema de Noether, que nos permitirá establecer vínculos entre simetrías geométricas y cantidades conservadas en nuestro sistema físico.

Si bien cada una de estas áreas, por separado, proporciona un marco teórico sólido para abordar una variedad de sistemas físicos, se requerirá la aplicación conjunta de ambas para lograr un análisis completo del sistema estudiado. En la última parte de este trabajo, nos centraremos en cómo estas áreas se complementan mutuamente para ayudarnos a resolver problemas de manera más integral y profunda.



Capítulo 2

Geometría Diferencial

2.1. Variedades Diferenciables

En este capítulo, se explican los fundamentos de la geometría diferencial. Para comenzar, estableceremos la definición de variedades diferenciables.¹

Definición 2.1. Sea M un espacio topológico no vacío Hausdorff y segundo contable y la colección $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)\}_i$ tal que

1. Los conjuntos $U_i \subset M$, $M = \cup_i U_i$ y $V_i := \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos para todo i .
2. Las aplicaciones $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ son homeomorfismos para todo i .
3. Si $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la aplicación $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$ es un difeomorfismo infinitamente diferenciable.

entonces diremos que (M, \mathcal{U}) es una variedad diferenciable de dimensión n .

¹Para más referencias puede revisar [1, Capítulo 5]

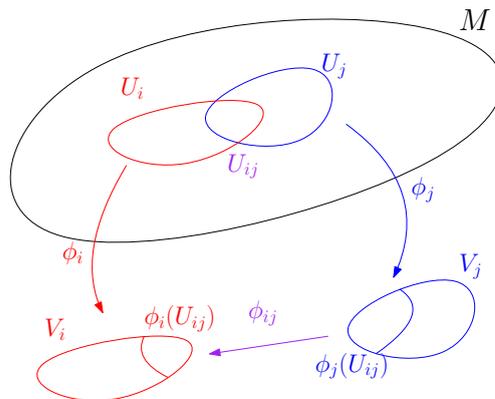


FIGURA 2.1: Las aplicaciones $\phi_{ij} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$ son llamadas cambios de coordenadas.

Diremos que un abierto $U \subset M$ es un abierto trivializable si existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ tal que

$$\phi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U \cap U_i) \rightarrow \phi(U \cap U_i)$$

es un difeomorfismo infinitamente diferenciable. El par (U, ϕ) será llamado sistema coordinado.

Las aplicaciones ϕ_i serán llamadas sistemas de coordenadas y las aplicaciones inversas ϕ_i^{-1} son llamadas parametrizaciones. Además, llamaremos cambios de coordenadas a las aplicaciones de la condición (3).

Ejemplo 2.1. Considere sobre \mathbb{R}^n la topología Euclidiana, en dicha topología un conjunto no vacío $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $x \in U$ existe un número r positivo tal que la bola centrada en x y de radio r , $B(x, r)$ está contenida en U . Para este espacio topológico la colección $\{(\mathbb{R}^n, \phi = \text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)\}$ dota a \mathbb{R}^n de una estructura diferenciable de dimensión n .

Del mismo modo, sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, con topología Euclidiana, podemos asociar de manera canónica la variedad diferenciable (U, \mathcal{U}) , donde $\mathcal{U} = (U, \phi = \text{id} : U \rightarrow U)$. De ahora en adelante, consideraremos siempre esta estructura diferenciable para $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Observe que todo abierto $V \subset U$ es un abierto trivializable, pues basta tomar $\phi = \text{id} : V \rightarrow V$.

Ejemplo 2.2. Otro ejemplo importante es el siguiente

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

este conjunto es llamado esfera de dimensión n . Construimos una estructura diferenciable, para ello marcamos dos puntos

$$N := (0, \dots, 0, 1)$$

$$S := (0, \dots, 0, -1)$$

llamados polo norte y polo sur respectivamente.

Luego consideremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi_1 : S^n \setminus \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{p_1}{1+p_{n+1}}, \dots, \frac{p_n}{1+p_{n+1}} \right) \\ \phi_2 : S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{p_1}{-1+p_{n+1}}, \dots, \frac{p_n}{-1+p_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

con inversas

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow S^n \setminus \{S\} \\ q = (q_1, \dots, q_n) &\mapsto \left(\frac{2q_1}{\|q\|^2+1}, \dots, \frac{2q_n}{\|q\|^2+1}, \frac{-\|q\|^2+1}{\|q\|^2+1} \right) \\ \phi_2^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow S^n \setminus \{N\} \\ q = (q_1, \dots, q_n) &\mapsto \left(\frac{2q_1}{\|q\|^2+1}, -\frac{2q_2}{\|q\|^2+1}, \dots, -\frac{2q_n}{\|q\|^2+1}, \frac{\|q\|^2-1}{\|q\|^2+1} \right) \end{aligned}$$

como ambas funciones son continuas entonces son homeomorfismos.

El cambio de coordenadas viene dado por

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ (\phi_2)^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ q = (q_1, \dots, q_n) &\mapsto \left(\frac{q_1}{\|q\|^2}, -\frac{q_2}{\|q\|^2}, \dots, -\frac{q_n}{\|q\|^2} \right) \end{aligned}$$

esta función es diferenciable y por tanto la esfera de dimensión n es una variedad diferenciable de dimensión n con esta estructura diferenciable.

De aquí en adelante denotaremos a la variedad diferenciable (M, \mathcal{U}) simplemente por M .

Definición 2.2. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ continua. Diremos que f es diferenciable si para todo punto $p \in M$ existen abiertos triviales U, V tal que $p \in U, f(p) \in V$ para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \phi \\ \varphi(U) & & \phi(V) \end{array}$$

con ϕ y φ sistemas de coordenadas, la aplicación $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable.

Notemos que para el caso $M = \mathbb{R}^n$ y $N = \mathbb{R}^m$, con la estructura diferenciable canónica descrita arriba, recuperamos la definición usual de función diferenciable.

Ejemplo 2.3. La función identidad $f : S^n \rightarrow S^n$ es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} \phi \circ f \circ (\phi)^{-1} : & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & q = (q_1, \dots, q_n) & \mapsto (q_1, \dots, q_n) \end{array}$$

Definición 2.3. Sea $f : M \rightarrow N$ función diferenciable biyectiva con $f^{-1} : N \rightarrow M$ diferenciable diremos que f es un difeomorfismo y M, N son difeomorfos.

La derivación es un concepto que se aplica a funciones diferenciables en \mathbb{R}^n . Sin embargo, cuando se trata de variedades diferenciables, se presenta una complicación. En este contexto, carece de sentido hablar de $f(p+h) - f(p)$, dado que las variedades no admiten un valor $p+h$, y mucho menos una diferencia entre ellos. Para superar este obstáculo conceptual, es necesario introducir el concepto de espacio tangente, que nos permitirá definir la noción de derivada para funciones en el contexto de las variedades diferenciables.

Definición 2.4. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Dadas dos curvas diferenciables $\alpha_1, \alpha_2 :]-1, 1[\rightarrow M$ con $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$, diremos que definen el mismo vector tangente a M en p si existe un sistema coordenado $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $p \in U$, tal que

$$(\phi \circ \alpha_1)'(0) = (\phi \circ \alpha_2)'(0). \tag{2.1.1}$$

Desde que la condición de definir el mismo vector tangente es una relación de equivalencia, llamaremos vector tangente a M en p a una clase $[\alpha]$ con $\alpha(0) = p$.

Ejemplo 2.4. Sea \mathbb{R}^n con la estructura diferenciable canónica y sea $p \in \mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$ considere la curva:

$$\alpha_{p,v} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por $\alpha_{p,v} = p + tv$ define un vector tangente a \mathbb{R}^n en p . Dada cualquier otra curva diferenciable $\alpha :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(0) = p$, tome $v = \alpha'(0)$, entonces

$$[\alpha] = [\alpha_{p,v}].$$

Así toda clase $[\alpha]$ está únicamente definida por $\alpha(0)$ y $\alpha'(0)$ y podemos identificar $T_p\mathbb{R}^n$ con \mathbb{R}^n .

Observación 2.1. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Dado U abierto trivializable con $p \in M$ y $\phi : U \rightarrow V$ trivialización, con $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $q := \phi(p)$. Dada una curva diferenciable $\alpha :]-1, 1[\rightarrow U$ con $\alpha(0) = p$, note que $\tilde{\alpha} := \phi^{-1} \circ \alpha$ es una curva diferenciable con $\tilde{\alpha}(0) = q$, además $[\tilde{\alpha}_1] = [\tilde{\alpha}_2]$ sí y solo si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, luego tenemos la biyección

$$\begin{aligned} T_p M &\rightarrow T_q V \\ [\alpha] &\mapsto [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

dado que podemos identificar a $T_q V$ con \mathbb{R}^n , entonces también podemos identificar $T_p M$ con \mathbb{R}^n . Dicha asignación, dota a $T_p M$ de estructura de espacio vectorial; si consideramos dos sistemas de coordenadas ϕ_i, ϕ_j con $p \in U_{ij}$, dado que

$$D\phi_{ij}(\phi_i(p)) : T_{\phi_i(p)} V_i \rightarrow T_{\phi_j(p)} V_j$$

es un isomorfismo lineal, entonces dicha estructura vectorial es independiente de la trivialización.

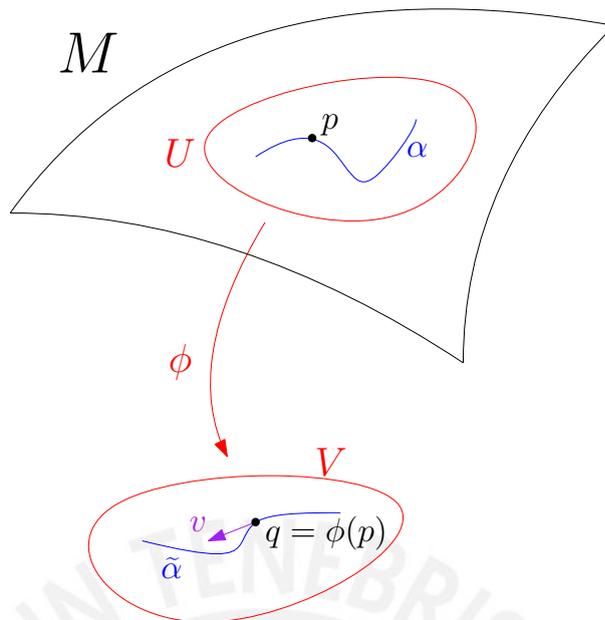


FIGURA 2.2: Tenemos la biyección $T_pM \rightarrow T_q\mathbb{R}^n : [\alpha] \mapsto [\tilde{\alpha}] = [\alpha_{q,v}]$.

Observe que implícitamente asumimos que $\phi \circ \alpha_i$ son diferenciables, además que el dominio $] -1, 1[$ es también irrelevante, basta con ser un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ abierto. Sigue de la condición (3) sobre cambio de coordenadas que (2.1.1) es independiente del sistema de coordenadas.

Definición 2.5. Denotaremos por T_pM a los vectores tangentes a M en p y lo llamaremos espacio tangente a M en p ; así mismo, denotaremos por la unión disjunta

$$TM = \coprod_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

y lo llamaremos espacio tangente de M .

Es importante señalar que el espacio tangente de una variedad diferenciable de dimensión n , M , es una variedad diferenciable, con la estructura $(U_i \times TU_i, \Phi_i)$, donde $TU = \coprod_{p \in U} T_pM$ y las parametrizaciones

$$\begin{aligned} \Psi_i : V_i \times \mathbb{R}^n &\rightarrow U_i \times TU_i \\ (q, v) &\mapsto (\psi(q), [\psi \circ \alpha_{q,v}]). \end{aligned}$$

La topología de TM es tal que las aplicaciones Ψ_i son continuas, para todo i .

Definición 2.6. Dada $f : M \rightarrow N$ función diferenciable entre las variedades diferenciables M y N . Definiremos la derivada de f en el punto $p \in M$ por

$$\begin{aligned} df(p) : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

y de manera global tenemos la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} df : TM &\rightarrow TN \\ (p, [\alpha]) &\mapsto (f(p), [f \circ \alpha]) \end{aligned}$$

llamada derivada de f .

De la construcción de estructura lineal sobre $T_p M$ dada en Observación 2.1 y del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{df(p)} & T_{f(p)} N \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_q \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d(\hat{\phi} \circ f \circ \phi^{-1})(q)} & T_{\hat{q}} \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2.1.2)$$

tenemos que $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una aplicación lineal.

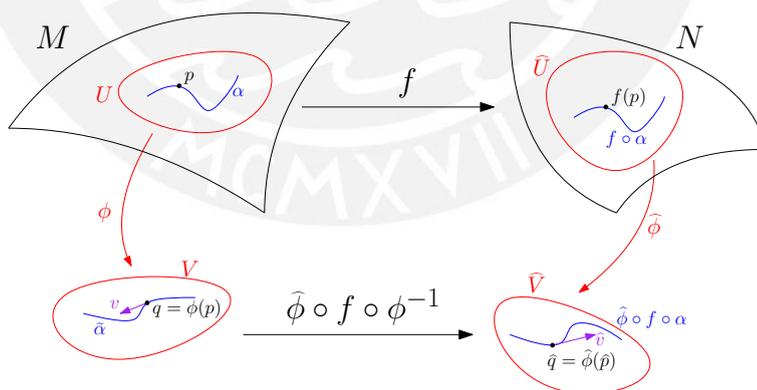


FIGURA 2.3: La linealidad de $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ viene del diagrama (2.1.2).

Ejemplo 2.5. Cuando $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, tenemos que TU es difomorfo a $U \times \mathbb{R}^n$ donde cada clase $[v] \in T_q U$ es representada canónicamente por el camino diferenciable $\alpha_{q,v}(t) = q + tv$.

Para el caso $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos con la estructura diferenciable canónica, recuperamos la definición usual de aplicaciones diferenciables.

Observación 2.2. Dadas las aplicaciones diferenciables $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$, entonces $g \circ f : M \rightarrow P$ es también una aplicación diferenciable. Más aún, tenemos que vale la regla de la cadena

$$dg_{f(p)}df_p = d(g \circ f)_p$$

para todo $p \in M$.

Definición 2.7. Diremos que M es una variedad diferenciable de \mathbb{R}^n cuando $M \subset \mathbb{R}^n$, la aplicación inclusión $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable y la derivada di_p es inyectiva para todo $p \in M$. En éste caso podemos identificar M con su imagen dentro de \mathbb{R}^n .

Es sabido, mas no será mostrado el siguiente resultado²:

Teorema 2.1 (Teorema de Whitney). *Sea M una variedad diferenciable, Hausdorff, segundo contable y de dimensión m . Entonces existe una aplicación $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ diferenciable tal que es un homeomorfismo con su imagen y di_p es inyectiva para todo $p \in M$.*

Aplicaciones con éstas propiedades son llamados “encajes”.

2.2. Espacio Tangente

En esta sección, presentaremos una perspectiva adicional del espacio tangente, que se fundamenta en un enfoque más algebraico. Posteriormente demostraremos que es equivalente a la definición que establecimos.

Dado un punto $p \in M$, consideremos dos funciones diferenciables, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : M \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la relación $f \sim_p g$ como válida si y solo si existe un conjunto abierto U que contiene a p , donde las restricciones de f y g a U , es decir, $f|_U$ y $g|_U$, son iguales.

Observación 2.3. Dado $p \in M$, \sim_p es una relación de equivalencia.

Definición 2.8. Un germen asociado a un punto $p \in M$ es $[f]_p$, donde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

²Puede revisar [2, Página 21].

Para no sobrecargar la notación denotaremos a $[f]_p$ simplemente como f .

Definición 2.9. Sea $p \in M$ denotaremos al conjunto de germenes en el punto p como $C_p^\infty(M)$.

Definición 2.10. Una función lineal

$$D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

es una derivación cuando dado dos germenes f y g

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg.$$

El concepto de derivaciones nos recuerda a derivadas y a la regla de Leibniz. Esto nos da la intuición de definir el concepto de derivadas parciales en variedades

Definición 2.11. Sea $p \in M$ y sea $\{U, \phi\}$ una carta de p . Donde $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\phi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Definimos la derivada parcial de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : C_p^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial}{\partial r_i} (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)), \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial r_i}$ es la derivada parcial usual de \mathbb{R}^n

Observación 2.4. Es fácil ver que $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ es una derivación en el punto p .

Definición 2.12. Un vector tangente en un punto p de una variedad M es una derivación en p .

De esta manera estamos viendo al espacio $T_p M$ como el espacio de derivaciones que pasan por el punto p . Esta definición además nos permite mostrar una base para $T_p M$ de manera explícita.

Proposición 2.1. Sea $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta alrededor de un punto p en una variedad M . Entonces

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_{\phi(p)}$$

Demostración. Para cualquier función $f \in C_{\phi(p)}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f \circ \phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi) \circ (\phi)^{-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\phi(p)} f \end{aligned}$$

□

Dado que las cartas son difeomorfismos, sus derivadas mapean vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes. De aquí se sigue que los vectores $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}$ forman una base para T_pM .

La proposición que sigue mostrará que las dos definiciones que hemos proporcionado son, de hecho, equivalentes.

Proposición 2.2. Para cualquier punto p en una variedad M y cualquier vector tangente $X_p \in T_pM$, existe una curva suave $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ para algún $\epsilon > 0$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = X_p$.

Demostración. Sea $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ una carta centrada en p , es decir, $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$. Supongamos que $X_p = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$. Sea r_1, \dots, r_n las coordenadas estándar en \mathbb{R}^n . Entonces $x_i = r_i \circ \varphi$. Para encontrar una curva c en p con $c'(0) = X_p$, comenzamos con una curva α en \mathbb{R}^n tal que $\alpha(0) = 0$ y $\alpha'(0) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_0$. Luego mapeamos α a M a través de φ^{-1} . Un candidato posible de α es:

$$\alpha(t) = (a_1 t, \dots, a_n t), t \in]-\epsilon, \epsilon[.$$

Sea ϵ suficientemente pequeño para que $\alpha(t)$ esté contenido en $\varphi(U)$. Definimos $c = \varphi^{-1} \circ \alpha :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$. Es fácil ver que $c(0) = p$ y $c'(0) = X_p$. □

2.3. Campos vectoriales

Definición 2.13. Un campo vectorial X es una función que:

$$X : M \rightarrow TM,$$

tal que

$$X(p) \in T_pM, \forall p \in M.$$

Dado un punto $p \in M$ y una carta $(U, \phi) = (U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$, podemos aprovechar que el espacio T_pM ya posee una base natural. En consecuencia, podemos expresar localmente un campo vectorial X en el conjunto abierto U de la siguiente manera:

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones. Se dice que el campo vectorial X es C^∞ cuando las funciones $\{a_i\}$ son C^∞ .

Definición 2.14. Sea un campo vectorial X , decimos que la curva $c :]a, b[\rightarrow M$ es una curva integral de X cuando:

$$c'(t) = X(c(t)), \quad t \in (a, b).$$

Sea $p \in M$, la existencia de una curva integral esta ligada a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (E.D.O). Así, el teorema de existencia y unicidad de las EDOs nos garantiza que siempre existirá una única curva integral alrededor de un pequeño abierto de p .

Ejemplo 2.6. En $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, sea $p = (x, y)$. Entonces

$$X = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y}$$

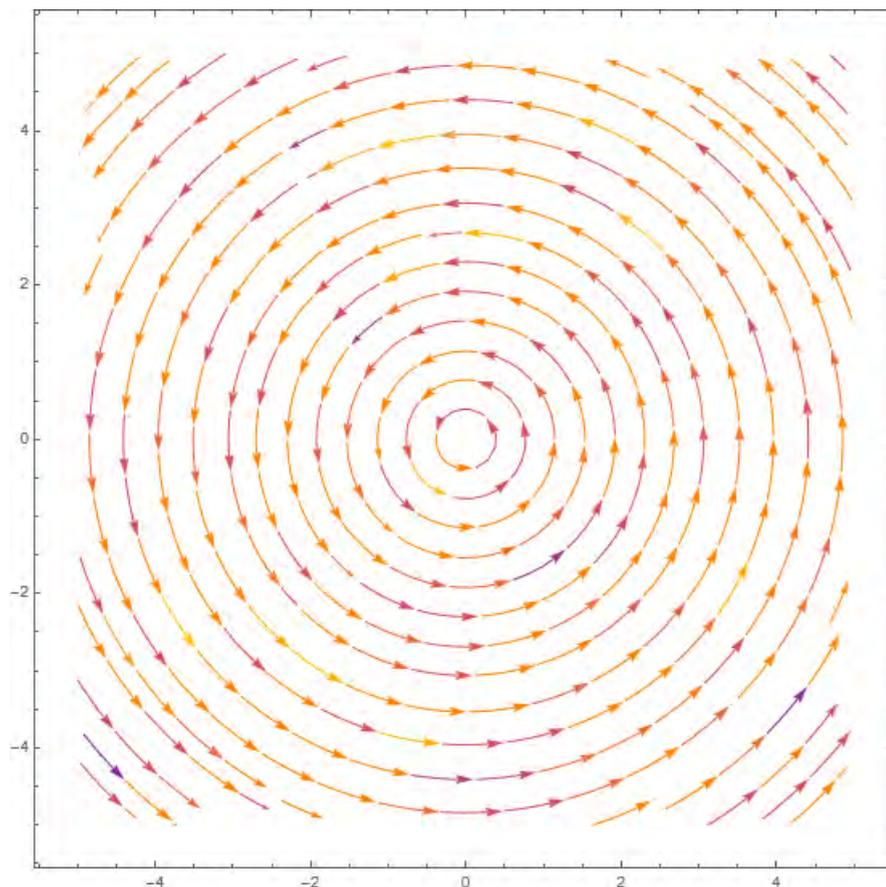


FIGURA 2.4: Curvas integrales del campo X

2.4. 1-Formas Diferenciales

Sea p un punto sobre la variedad M . Llamaremos T_p^*M al dual del espacio T_pM como espacio cotangente. Los elementos de este espacio serán llamados covectores sobre el punto p . Estos covectores son funciones lineales:

$$w_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Una 1-forma diferencial no es más que un covector para cada punto de p . Formalizaremos esta definición más adelante.

Definición 2.15. Se define el fibrado cotangente como

$$T^*M = \bigsqcup \{p\} \times T_pM$$

Observación 2.5. De manera análoga al fibrado tangente uno puede probar que el fibrado cotangente es una variedad diferenciable.

Ahora si estamos en condiciones de dar una definición más precisa de las 1-formas diferenciales.

Definición 2.16. Una 1-forma diferencial es

$$w : M \rightarrow T^*M,$$

donde

$$w(p) \in T_p^*M, \forall p \in M.$$

Definición 2.17. Sea f una función C^∞ sobre la variedad M su diferencial es definido como 1-forma diferencial tal que $\forall p \in M$ y $\forall X_p$ se tiene que:

$$df_p(X_p) = X_p(f).$$

Observación 2.6. Sea $(U, \phi) = (U, (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n))$ una carta sobre M . Entonces los diferenciales dx_i son 1-formas sobre U . Además estos $\{dx_i\}$ son los duales de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por lo tanto $\{dx_i\}$ forman una base local del espacio cotangente. Esto permite escribir de manera local cualquier 1-forma diferencial como combinación lineal de estos dx_i . Es decir, sea w una 1-forma diferencial tomando una vecindad coordenada U de un punto p entonces

$$w|_U = \sum_i a_i dx_i,$$

donde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, y de igual manera que los campos vectoriales uno puede decir que la 1-forma w es C^∞ si y solo si las funciones a_i son funciones C^∞ .

2.5. k-Formas Diferenciales

Un k -tensor f de un espacio vectorial V es una función k -lineal:

$$f : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Definición 2.18. Un k -tensor f se dice que es alternado cuando para toda permutación $\sigma \in S_k$ se tiene que:

$$f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)f(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

Definición 2.19. Denotaremos $A_k(V)$ al espacio de k -tensores alternados de V .

De esta manera podemos definir:

Definición 2.20. Denotaremos $A_k(T_p^*M)$ al espacio de k -tensores alternados de T_p^*M .

Observación 2.7. Al conjunto $A_k(T_p^*M)$ también se le denota $\bigwedge(T_p^*M \times T_p^*M \times T_p^*M \times T_p^*M \dots \times T_p^*M) = \bigwedge^k T_p^*M$.

Definición 2.21. Se llama k -ésima potencia exterior del haz cotangente a lo siguiente:

$$\bigwedge^k T^*M = \coprod \{p\} \times \bigwedge^k T_p^*M$$

Observación 2.8. Análogamente como en el caso del fibrado tangente, a este espacio se le puede dotar de estructura diferenciable.

Definición 2.22. Una k -forma diferencial w es una función

$$w : M \rightarrow \bigwedge^k T^*M,$$

donde

$$w(p) \in \bigwedge^k T_p^*M$$

Observación 2.9. Sea $(U, \phi) = (U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$ una carta de M , entonces la k -forma w en ese abierto U se escribe como:

$$w|_U = \sum a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

definiendo $I = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ podemos escribir:

$$w = \sum a_I dx_I,$$

y al igual que con las 1-formas uno puede definir que una k -forma w es C^∞ cuando las funciones a_I son C^∞ .

Capítulo 3

Mecánica clásica

La mecánica clásica es la primera teoría a la que tenemos contacto cuando empezamos a estudiar física. Sin embargo, esto no significa que su estudio y comprensión sean sencillos. En este capítulo, mostraremos una descripción un poco más rigurosa de la mecánica clásica. Para ello, es necesario profundizar en la teoría del cálculo de variaciones.

3.1. Cálculo de Variaciones

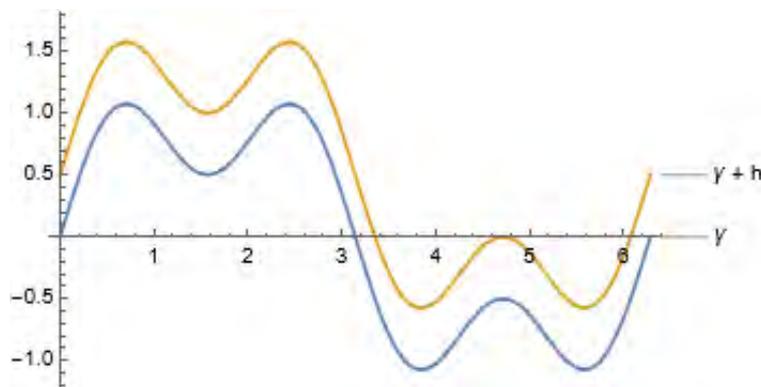
El estudio de las trayectorias de un objeto físico, ya sea bajo la influencia de fuerzas externas o generadas por restricciones geométricas (constraints), requiere formalizar el espacio en el que se desarrollarán los fenómenos físicos. Este espacio será el de curvas diferenciales suaves.

Definición 3.1. Empecemos definiendo el espacio de curvas diferenciales, que es nuestro dominio de interés.

$$C^\infty([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) = \{\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma \in C^\infty\} \quad (3.1.1)$$

Definición 3.2. Una curva $h \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ se dice ϵ -acotada cuando $|h| < \epsilon$ y $|h'| < \epsilon$

Definición 3.3. Sea una curva $\gamma \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ diremos que $\hat{\gamma}$ es una curva ϵ -aproximada de γ cuando $\hat{\gamma} = \gamma + h$ donde h es ϵ -acotada

FIGURA 3.1: Gráfico de la curva γ y de su curva ϵ -aproximada $\hat{\gamma} = \gamma + h$

De esta manera, ahora podemos dar la definición de funcional.

Definición 3.4. Un *funcional* Φ es una función que va del dominio de curvas diferenciales al conjunto de números reales. Es decir:

$$\Phi : C^\infty([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1.2)$$

Ejemplo 3.1. Sea $\gamma \in C^\infty([t_1, t_2], \mathbb{R})$ podemos definir el funcional asociado a la longitud de la siguiente manera:

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{\gamma}^2} dt \quad (3.1.3)$$

Teniendo la definición de funcional, el siguiente paso a estudiar es cómo cambia el funcional cuando ocurre una perturbación en una curva. En otras palabras, cual es la relación entre $\Phi(\gamma)$ y $\Phi(\gamma + h)$.

Definición 3.5. Un funcional ϕ es llamado diferenciable si $\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma) = F + R$ donde F es una función continua y depende linealmente de h (i.e $F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2)$) y $R(h, \gamma) = O(h^2)$ en el sentido de que $\forall |h| < \epsilon$ y $\left| \frac{dh}{dt} \right| < \epsilon$ entonces $|R| < C\epsilon^2$.

La parte lineal del incremento $F(h)$ es llamado diferencial de ϕ .

Proposición 3.1. El diferencial de un funcional ϕ está bien definido.

Demostración. Sea γ una curva fija. Supongamos que tenemos dos diferenciales F_1 y F_2 :

$$\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma) = F_1(h) + R_1(\gamma, h) = F_2(h) + R_2(\gamma, h) \quad (3.1.4)$$

$$(F_1 - F_2)(h) = (R_2 - R_1) \quad (3.1.5)$$

Definiendo $F = F_1 - F_2$ y $R = R_2 - R_1$, de aquí tenemos:

$$F(h) = R(h) \quad (3.1.6)$$

Observación 3.1. Notemos que R es del orden $O(h^2)$ y también que la resta de dos funcionales lineales es un funcional lineal entonces F es un funcional lineal. Es decir, se cumple $\|F(h)\| \leq C_1\|h\|$. Para $C_1 = \sup|F(h_0)|$ donde $|h_0| = 1$. Como C_1 es el supremo de las curvas con norma 1, entonces existirán curvas x_n con $|x_n| = 1$ tal que $\lim F(x_n) = C_1$.

Volviendo a la prueba, notamos que basta tomar las curvas $y_n = \frac{x_n}{n(1 + |x'_n|)}$

$$F(x_n) = \frac{F(y_n)}{|y_n|} = \frac{R(y_n)}{|y_n|} \quad (3.1.7)$$

Tomando límite

$$\lim F(x_n) = C_1 = 0 \quad (3.1.8)$$

Entonces $F_1 = F_2$.

□

Teorema 3.1. Sea $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable entonces el funcional ϕ es diferenciable:

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), v(t), t) dt \quad (3.1.9)$$

donde $\{x(t)\}$ es la parametrización de la curva γ y $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Además el diferencial de ϕ es:

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial v} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (3.1.10)$$

Demostración.

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} [L(x + h, v + \dot{h}, t) - L(x, v, t)] dt \quad (3.1.11)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial v} \dot{h} \right] dt + O(h^2) \quad (3.1.12)$$

$$= F(h) + R \quad (3.1.13)$$

donde

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial v} \dot{h} \right] dt \quad (3.1.14)$$

$$R = O(h^2) \quad (3.1.15)$$

integrando por partes tenemos:

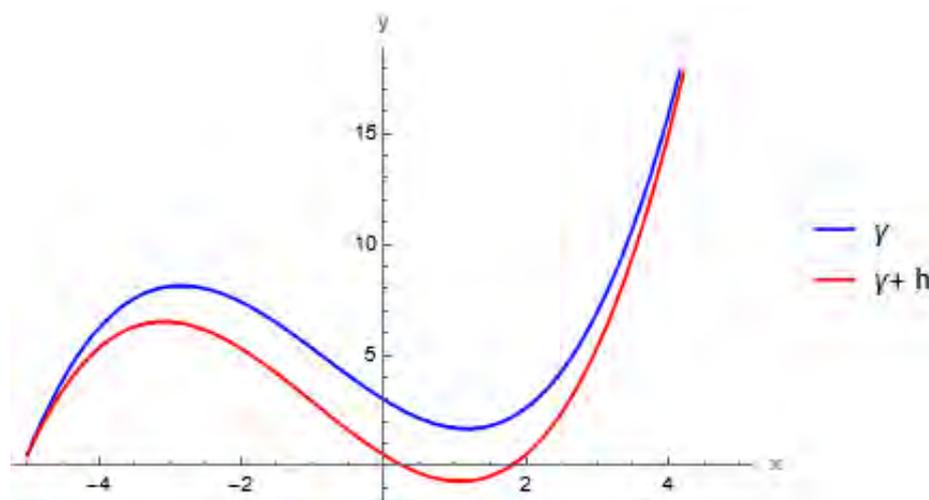
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial v} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial v} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (3.1.16)$$

de esta manera

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial v} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (3.1.17)$$

□

A partir de la definición del diferencial de un funcional, podemos finalmente establecer el concepto de extremal. Asumiremos, de ahora en adelante, que nuestro dominio solo contiene curvas con extremos fijos.

FIGURA 3.2: Gráfico de la curva γ y de su curva aproximada $\gamma' = \gamma + h$

Definición 3.6. Un extremal de un funcional ϕ es una curva γ tal que:

$$F(h) = 0, \forall h. \quad (3.1.18)$$

Para poder entender los siguientes teoremas necesitaremos de la siguiente proposición.

Proposición 3.2. Dado f una función real diferenciable y sea h una función arbitraria tal que:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0, \quad (3.1.19)$$

entonces $f = 0$

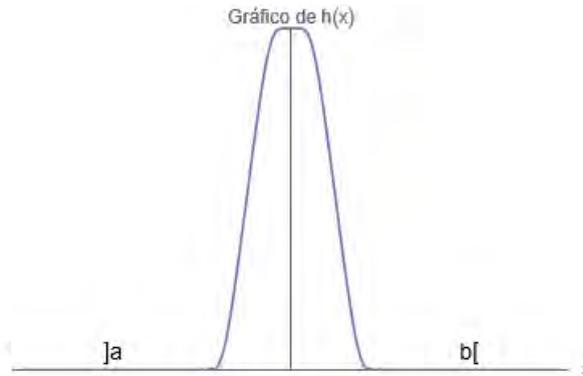
Demostración. Supongamos que $f \neq 0$. Entonces, existe al menos un valor x tal que $f(x) \neq 0$. Consideremos los dos casos posibles:

Caso 1: $f(x) > 0$

Dado que f es continua, existe una vecindad $]a, b[$ de x donde f es estrictamente positiva. Sea h una función que es igual a cero fuera de esta vecindad y positiva dentro de la misma. Esto nos permite afirmar que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt > 0$, lo cual lleva a una contradicción.

Caso 2: $f(x) < 0$

De manera análoga, como f es continua, existe una vecindad $]a, b[$ de x donde f es estrictamente negativa. Tomamos nuevamente una función h que es igual a cero fuera de la vecindad y positiva dentro de la misma. Esto nos lleva a la contradicción $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt < 0$.



Dado que en ambos casos llegamos a una contradicción, concluimos que no puede existir un x tal que $f(x) \neq 0$. Por lo tanto, se sigue que $f = 0$.

□

Teorema 3.2. *Sea ϕ el funcional definido en el anterior teorema entonces una curva γ es un extremal si y solo si se cumple:*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = 0. \tag{3.1.20}$$

Demostración. Por el teorema anterior tenemos:

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial v} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \tag{3.1.21}$$

Como la curva es cerrada entonces $h(t_1) = h(t_0) = 0$. Definiendo además $f(t) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right)$. De esta manera nos queda:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) = 0 \tag{3.1.22}$$

Y como $h(t)$ es arbitrario. Entonces por la proposición anterior tenemos que $f(t) = 0$.

□

3.2. La ecuación de Euler-Lagrange

Se llama ecuación de Euler-Lagrange del funcional $\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), v(t), t)dt$ a la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = 0. \quad (3.2.1)$$

Observación 3.2. Cuando tenemos un sistema físico que depende de múltiples variables, es posible repetir el proceso y obtener un sistema de ecuaciones que tenga la forma de la ecuación de Euler-Lagrange. En este contexto (donde $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), para mantener la claridad del proceso, utilizaremos la siguiente denotación:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} \right). \quad (3.2.2)$$

Teorema 3.3. Sean (x_1, x_2, \dots, x_n) y (q_1, q_2, \dots, q_n) dos sistemas de coordenadas que describen un mismo sistema físico entonces

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.2.3)$$

Demostración. Recordemos que la ecuación de Euler Lagrange equivale a que la curva sea un extremal. Pero que la condición que la curva sea extremal es una propiedad independiente del sistema de coordenadas. En resumen, lo que queremos decir es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow F(h) = 0, \forall h \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.2.4)$$

□

Teorema 3.4. Las ecuaciones de la mecánica coinciden con los extremales del funcional:

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt, \quad (3.2.5)$$

donde $L = T - U$ (T es la energía cinética y U es la energía potencial)

Demostración. Como podemos considerar cualquier sistema de coordenadas tomemos el sistema cartesiano. De aquí $U = U(x)$ y $T = \sum m_i \frac{(x'_i)^2}{2}$. Usando las ecuaciones de Lagrange tenemos:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (3.2.6)$$

□

Observación 3.3. Como consecuencia del Teorema 3.3 podemos tomar cualquier sistema de referencia para poder escribir el lagrangiano.

Definición 3.7. Llamamos a $L = L(q, \dot{q}, t)$ lagrangiano del sistema y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ momentum generalizado y a las expresiones $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ como fuerzas generalizadas.

Definición 3.8. Se dice que una variable q_i es cíclica cuando $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Proposición 3.3. El momentum correspondiente a una variable cíclica se conserva. Es decir, es constante.

Demostración.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \frac{dp_i}{dt}. \quad (3.2.7)$$

□

3.3. Formulación Hamiltoniana

La formulación hamiltoniana es otra forma equivalente de estudiar un fenómeno físico. Este estudio trae nuevas formas de entender un sistema y conserva algunas propiedades que le son propias. Para poder comenzar con este enfoque, es necesario estudiar las transformaciones de Legendre formalmente.

3.3.1. Transformación de Legendre

Para ilustrar cómo actúa la transformación de Legendre, trabajaremos primero con funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3.1)$$

Definición 3.9. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa cuando $f''(x) > 0, \forall x$

El hecho de trabajar con una función convexa nos permite inducir una nueva función, que llamaremos g , y que será la función dual de f . La función g se construye de la siguiente manera:

Sea

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3.2)$$

Donde

$$F(p, x) = px - f(x) \quad (3.3.3)$$

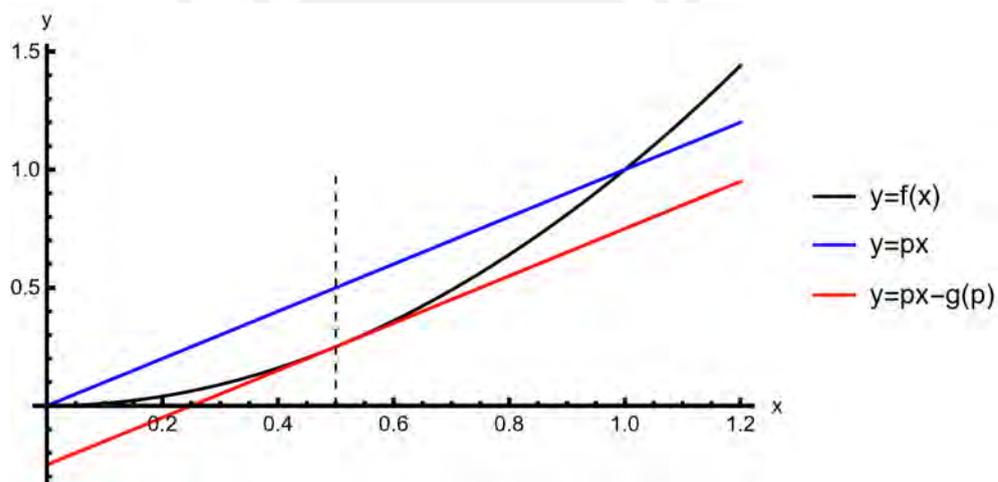


FIGURA 3.3: Transformada de Legendre

Gráficamente, esta función F representa la distancia entre la recta de pendiente p y la función f . Con esto, vamos a buscar que la variable x dependa de p . Para lograrlo, procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (3.3.4)$$

es decir, fijo el valor de p estamos buscando los posibles valores de x tal que:

$$f'(x) = p. \quad (3.3.5)$$

El hecho de que la función sea convexa nos garantiza la existencia de un único valor de x que satisface la ecuación $p = f'(x)$. De esta manera, podemos expresar x en función de p como $x = x(p)$.

Definimos la función g como

$$g(p) = F(p, x(p)), \quad (3.3.6)$$

es decir,

$$g(p) = px(p) - f(x(p)). \quad (3.3.7)$$

Veremos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2. $f(x) = x^2$. Su función $F(p, x) = px - x^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} F = p - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{p}{2} \quad (3.3.8)$$

$$g(p) = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} \quad (3.3.9)$$

Ejemplo 3.3. $f(x) = m\frac{x^2}{2}$. Su función $F(p, x) = px - \frac{mx^2}{2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p - mx = 0 \quad (3.3.10)$$

$$x = \frac{p}{m}, \quad (3.3.11)$$

entonces

$$g(p) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.3.12)$$

Antes de enunciar el siguiente resultado importante, enunciaremos algunas proposiciones y teoremas que nos serán útiles.

Teorema 3.5. (Función implícita)

Dado una función $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces $\exists(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y = y(x)$ de clase C^1 con $y(x_0) = y_0$, donde además

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}. \quad (3.3.13)$$

Proposición 3.4. Sea f una función convexa entonces su función dual va ser de clase C^2 .

Demostración. Sea $p_0 \in \mathbb{R}$, por definición $x(p_0)$ es el valor que hace que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p_0, x(p_0)) = 0. \quad (3.3.14)$$

Como $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = -f'(x) \neq 0$. Entonces podemos aplicar el teorema de la función implícita a $\frac{\partial F}{\partial x}$ y de esta manera $x = x(p)$ y va a ser una función de clase C^1 . Como g es una composición de funciones C^2 entonces g es de clase C^2

□

Observación 3.4. De la proposición anterior se sigue que $x'(p) = \frac{1}{f'(x(p))}$. Y con esto, tenemos que $g'(p) = x(p)$ y $g''(p) = \frac{1}{f'(x(p))}$. De aquí tenemos que el dual de una función convexa es también una función convexa. Por lo tanto, tiene sentido preguntarse cuál sería la función dual de g .

Teorema 3.6. *La transformación de Legendre es involutiva, es decir, su cuadrado es la identidad: si se aplica la transformación de Legendre a \mathbf{f} y se obtiene \mathbf{g} , entonces la transformación de Legendre aplicada a \mathbf{g} será nuevamente \mathbf{f} .*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ construyamos el dual de g y denotemos a este como h . Sea $G(x, p) = xp - g(p)$ de esta manera

$$h(x_0) = G(x_0, p(x_0)) = x_0 p(x_0) - g(p(x_0)), \quad (3.3.15)$$

pero por definición de g

$$g(p(x_0)) = p(x_0)x(p(x_0)) - f(x(p(x_0))), \quad (3.3.16)$$

pero

$$x_0 = g'(p(x_0)) = x(p(x_0)), \quad (3.3.17)$$

de esta manera $h(x_0) = f(x_0)$.

□

Proposición 3.5. (Desigualdad de Young) Dado f una función convexa y sea g su función dual entonces

$$px < f(x) + g(p). \quad (3.3.18)$$

Demostración. Dado $p \in \mathbb{R}$

$$g(p) = px(p) - f(x(p)), \quad (3.3.19)$$

y como la función $F(p, x)$ tiene segunda derivada en x negativa tenemos que $g(p)$ es el valor máximo de $F(p, \cdot)$. De esta manera

$$px < f(x) + g(p). \quad (3.3.20)$$

□

Ejemplo 3.4. Si $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, entonces $g(p) = \frac{1}{2}p^2$ y obtenemos la conocida desigualdad $px < \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$ para todo x y p .

Ejemplo 3.5. Si $f(x) = \frac{x^a}{a}$, entonces $g(p) = \frac{p^b}{b}$, donde $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, y obtenemos la desigualdad de Young $px < \frac{x^a}{a} + \frac{p^b}{b}$ para todo $x > 0$, $p > 0$, $a > 1$, $b > 1$, y $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Para más información acerca de la desigualdad de Young puede revisar [3, Capítulo 9].

Observación 3.5. Transformada de Legendre en varias variables

Sea $f(x)$ una función convexa de la variable vectorial $x = (x_1, \dots, x_n)$. Esto significa que la forma cuadrática $\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right\}$ es definida positiva. Para mantener una notación clara, emplearemos la notación de punto para denotar el producto interno estándar en \mathbb{R}^n .

La transformada de Legendre en \mathbb{R}^n es la función $g(p)$, donde $p = (p_1, \dots, p_n)$, y se define como $g(p) = F(p, x(p)) = \max_x F(p, x)$. Aquí, $F(p, x) = px - f(x)$ y $p = \frac{\partial f}{\partial x}$. Siguiendo un razonamiento análogo al caso unidimensional, todos los argumentos anteriores, incluyendo la desigualdad de Young, pueden aplicarse sin cambios a este contexto.

3.3.2. Las ecuaciones de Hamilton

Por medio de la transformación de Legendre, el sistema de Lagrange de ecuaciones diferenciales de segundo orden se transforma en un sistema $2n$ extremadamente simétrico de ecuaciones de primer orden. Es decir, se convierte en una E.D.O con $2n$ variables. A esta nueva forma de entender las ecuaciones de movimiento se denomina sistema de ecuaciones hamiltonianas (o simplemente ecuaciones canónicas).

Consideramos el sistema de ecuaciones de Lagrange $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$, donde $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, con una función lagrangiana dada $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que asumiremos convexa con respecto al segundo argumento \dot{q}

Teorema 3.7. *El sistema de ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton), donde $H(p, q, t) = pq - L(q, \dot{q}, t)$ es la transformada de Legendre de la función lagrangiana con respecto de la variable \dot{q} .*

Demostración. Por definición, la transformada de Legendre de $L(q, \dot{q}, t)$ con respecto a \dot{q} es la función $H(p, q) = pq - L(q)$, en la cual \dot{q} se expresa en términos de p mediante la fórmula $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, y que depende de los parámetros q y t . Esta función H se llama hamiltoniano.

La diferencial total del hamiltoniano

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (3.3.21)$$

es igual a la diferencial total de $pq - L$ para $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$dH = \frac{\partial L}{\partial p} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.3.22)$$

Ambas expresiones para dH deben ser iguales. Por lo tanto,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.3.23)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange, $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$, obtenemos las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (3.3.24)$$

Hemos visto que si $q(t)$ satisface las ecuaciones de Lagrange, entonces $\{p(s), q(t)\}$ satisface las ecuaciones de Hamilton. El otro sentido de la equivalencia se demuestra de manera trivial. Por lo tanto, los sistemas de Lagrange y Hamilton son equivalentes.

□

3.3.3. El Hamiltoniano y la energía

Asumiremos que tenemos un lagrangiano de la forma $L = T - U$ donde T es una forma cuadrática con respecto a \dot{q} y U (energía potencial) una función de la posición. Siendo más precisos T y U son de la forma:

$$T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.3.25)$$

donde $a_{ij} = a_{ij}(q, t)$ y $U = U(q)$ daremos una proposición que nos sea útil para el siguiente teorema.

Proposición 3.6. Sea una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homogénea de orden 2 ($\lambda \in \mathbb{R}, g(\lambda x) = \lambda^2 g(x)$). Entonces

$$g(p) = f(x), \quad (3.3.26)$$

donde g es la función dual de f .

Demostración.

$$g(p) = x(p)p - f(x(p)). \quad (3.3.27)$$

Recordemos que $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x(p))$, y además, se cumple que:

$$df_x(x) = x \frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x). \quad (3.3.28)$$

Reemplazando tenemos que $2f(x(p)) = x(p)p$ y finalmente $g(p) = f(x(p))$.

□

Teorema 3.8. *Bajo las suposiciones de T y U se tiene $H = T + U$.*

Demostración.

$$H = \dot{q}p - L, \quad (3.3.29)$$

usando la proposición anterior tenemos $H = 2T - L = T + U$.

□

Ejemplo 3.6. En el caso de dimensión uno con $T = \frac{\dot{q}^2}{2}$, $U = U(q)$. Usando el Teorema 3.8 tenemos $H = \frac{\dot{q}^2}{2} + U(q)$. Y finalmente obtenemos sus ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q} = p \quad (3.3.30)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (3.3.31)$$

Corolario: En particular, para un sistema cuya función hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) se cumple la ley de conservación de la función hamiltoniana $H(p(t), q(t)) = \text{constante}$.

Demostración.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.3.32)$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \quad (3.3.33)$$

□

Ejemplo 3.7. Sea $L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{A} + e\phi$ un lagrangiano independiente del tiempo. Entonces por el corolario su hamiltoniano $H = \frac{1}{2m} \left(P - \frac{e}{cA}\right)^2 + e\phi$ sería una constante en el tiempo.



Capítulo 4

Geometría Simpléctica

4.1. Formas Simplécticas

Sea V un espacio vectorial m -dimensional sobre \mathbb{R} , y sea $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilenal. La aplicación Ω es antisimétrica cuando $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$

Teorema 4.1. *Sea Ω una forma bilinear antisimétrica, entonces existe una base de vectores $u_1, u_2, \dots, u_k, e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ tal que:*

$$\Omega(u_i, v) = 0, \forall i, \forall v \in V$$

$$\Omega(e_i, e_j) = 0, \forall i, j$$

$$\Omega(f_i, f_j) = 0, \forall i, j$$

$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$$

Observación 4.1. .

1. La base en el Teorema 4.1 no es única, aunque tradicionalmente también se le llama base canónica.
2. En notación matricial con respecto a tal base, tenemos

$$\Omega(u, v) = \begin{bmatrix} -u- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \\ 0 & -\text{Id} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}.$$

Demostración. Esta prueba por inducción es una versión antisimétrica del proceso de Gram-Schmidt. Para obtener más detalles sobre el proceso de Gram-Schmidt, puede revisar: [4, Capítulo 10].

Sea $U := \{u \in V \mid \Omega(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$. Elija una base u_1, \dots, u_k de U y elija un espacio complementario W para U en V tal que

$$V = U \oplus W.$$

Tome cualquier $e_1 \neq 0 \in W$. Entonces existe $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Definimos

$$W_1 = \text{span}\{e_1, f_1\}$$

$$W_1^\Omega = \{w \in W \mid \Omega(w, v) = 0 \text{ para todo } v \in W_1\}.$$

Afirmación: $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$.

Supongamos que $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\Omega$.

$$0 = \Omega(v, e_1) = -b$$

$$0 = \Omega(v, f_1) = a \Rightarrow v = 0.$$

Afirmación : $W = W_1 \oplus W_1^\Omega$.

Supongamos que $v \in W$ tiene $\Omega(v, e_1) = c$ y $\Omega(v, f_1) = d$. Notemos que $(-cf_1 + de_1) \in W_1$ y que $(v + cf_1 - de_1) \in W_1^\Omega$ y finalmente:

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1).$$

Continuamos: elijamos $e_2 \in W_1^\Omega$ con $e_2 \neq 0$. Entonces existe $f_2 \in W_1^\Omega$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$. Supongamos que $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Definimos $W_2 = \text{span}\{e_2, f_2\}$. Y así sucesivamente. Este proceso eventualmente se detiene porque $\dim V < \infty$. Por lo tanto, obtenemos $V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$, donde todos los sumandos son ortogonales con respecto a Ω , y donde W_i tiene base e_i, f_i con $\Omega(e_i, f_i) = 1$. \square

Observación 4.2. La dimensión del subespacio $U = \{u \in V \mid \Omega(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$ no depende de la elección de la base. Entonces $k := \dim U$ es una invariante

de (V, Ω) . Además por cuestiones dimensionales tenemos $k + 2n = m = \dim V$, y como consecuencia n es un invariante de (V, Ω) ; $2n$ se llama el rango de Ω .

4.2. Espacios Vectoriales Simplécticos

Sea V un espacio vectorial de dimensión m sobre \mathbb{R} y sea $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal.

Definición 4.1. La aplicación $\widehat{\Omega} : V \rightarrow V^*$ es la aplicación lineal definida por $\widehat{\Omega}(v)(u) = \Omega(v, u)$.

El núcleo de $\widehat{\Omega}$ es el subespacio U mencionado anteriormente.

Definición 4.2. Una aplicación bilineal antisimétrica Ω es simpléctica (o no degenerada) si $\widehat{\Omega}$ es biyectiva, es decir, $U = \{0\}$. En este contexto, la aplicación Ω se llama entonces una estructura simpléctica lineal en V , y (V, Ω) se llama un espacio vectorial simpléctico.

Las siguientes son propiedades inmediatas de una aplicación simpléctica Ω :

1. Dualidad: la aplicación $\Omega_e : V \rightarrow V^*$ es una biyección.
2. Según el teorema de la forma estándar, $k = \dim U = 0$, por lo que $\dim V = 2n$ es par.
3. Según el Teorema 4.1, un espacio vectorial simpléctico (V, Ω) tiene una base $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ que satisface $\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ y $\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j)$. A esta base se le llama una base simpléctica de (V, Ω) . Con respecto a una base simpléctica, tenemos:

$$\Omega(u, v) = \begin{bmatrix} - & u & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}.$$

Observación 4.3. No todos los subespacios W de un espacio vectorial simpléctico (V, Ω) son iguales:

- Un subespacio W se llama simpléctico si $\Omega|_W$ es no degenerada. Por ejemplo, el span de e_1, f_1 es simpléctico.

- Un subespacio W se llama isotrópico si $\Omega|_W \equiv 0$. Por ejemplo, el span de e_1, e_2 es isotrópico.

El prototipo de un espacio vectorial simpléctico es $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$, donde Ω_0 está definida de tal manera que la base

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

$$f_1 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, f_n = (0, \dots, 0, 1).$$

es una base simpléctica. La aplicación Ω_0 en otros vectores está determinada por sus valores en una base y su bilinealidad.

Definición 4.3. Un simpletomorfismo ϕ entre espacios vectoriales simplécticos (V, Ω) y (V_0, Ω_0) es un isomorfismo lineal $\phi : V \rightarrow V_0$ tal que $\phi^*\Omega_0 = \Omega$. (Donde $(\phi^*\Omega_0)(u, v) = \Omega_0(\phi(u), \phi(v))$). Si existe un simpletomorfismo, se dice que (V, Ω) y (V_0, Ω_0) son simplectomorfos.

Observación 4.4. Es evidente que ser simplectomorfo es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales de dimensión par. Además, según el Teorema 4.1, cada espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$ (V, Ω) es simplectomorfo al prototipo $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$; seleccionar una base simpléctica para (V, Ω) produce un simpletomorfismo a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

4.3. Variedades Simplécticas

Definición 4.4. Sea M una variedad diferenciable, una k -forma diferencial w es cerrada cuando:

$$dw = 0.$$

Definición 4.5. Una 2-forma diferencial w es simpléctica cuando es cerrada y w_p es simpléctica $\forall p \in M$.

Definición 4.6. Una variedad simpléctica es un par (M, w) donde M es una variedad y w es forma simpléctica.

Ejemplo 4.1. Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas lineales $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. La forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

es simpléctica, y el conjunto

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p,$$

es una base simpléctica de $T_p M$.

Ejemplo 4.2. Sea $M = \mathbb{C}^n$ con coordenadas lineales z_1, \dots, z_n . La forma

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k,$$

es simpléctica. De hecho, esta forma es igual a la del ejemplo anterior bajo la identificación $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $z_k = x_k + iy_k$.

Ejemplo 4.3. Sea $M = S^2$ considerada como el conjunto de vectores unitarios en \mathbb{R}^3 . Los vectores tangentes a S^2 en el punto p pueden entonces identificarse con los vectores ortogonales a p . La forma simpléctica estándar en S^2 es inducida por los productos interiores y exteriores:

$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v \rangle, \quad \text{para } u, v \in T_p S^2 = \{p\}^\perp.$$

Esta forma es cerrada porque es de grado máximo; es no degenerada porque cuando $u \neq 0$ podemos tomar, por ejemplo, $v = u \times p$ de esta manera $\langle p, u \times v \rangle \neq 0$.

4.4. Simplectomorfismos

Definición 4.7. Dado dos variedades simplécticas (M_1, w_1) y (M_2, w_2) . Una función diferenciable $f : M_1 \rightarrow M_2$ es un simplectomorfismo cuando $f^* w_2 = w_1$.

El siguiente teorema se llama **teorema de Darboux** y nos dice como es el comportamiento local de cualquier forma simpléctica.

Teorema 4.2. Sea (M, w) una $2m$ variedad simpléctica, entonces para todo $p \in M$ existe un abierto de $(U, (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m))$ del punto p donde la forma w se puede escribir como:

$$w = \sum dx_i \wedge dy_i.$$

Para la prueba se necesita más herramintas, por lo que dejaremos su prueba para más adelante¹.

4.5. Forma simpléctica en el fibrado cotangente

4.5.1. Fibrado cotangente

Sea X una variedad de dimensión n y $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Si la estructura de la variedad en X está descrita por cartas coordenadas (U, x_1, \dots, x_n) con $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, entonces en cualquier $x \in U$, las diferenciales $(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x$ forman una base de T_x^*X . Es decir, si $\xi \in T_x^*X$, entonces $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x$ para algunos coeficientes reales ξ_1, \dots, ξ_n . Esto induce un mapa

$$\begin{aligned} T^*U &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \xi) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

La carta $(T^*U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ es una carta coordenada para T^*X ; las coordenadas $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ son las coordenadas cotangentes asociadas a las coordenadas x_1, \dots, x_n en U . Las funciones de transición en las intersecciones son suaves: dadas dos cartas (U, x_1, \dots, x_n) y $(U_0, x_0^1, \dots, x_0^n)$, y $x \in U \cap U_0$, si $\xi \in T_x^*X$, entonces

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x = \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial x_0^j} \Big|_{x=x_0} (dx_0^j)_x = \sum_{j=1}^n \xi_0^j (dx_0^j)_x,$$

donde $\xi_0^j = \sum_i \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial x_0^j} \Big|_{x=x_0}$ es suave. Por lo tanto, T^*X es una variedad de dimensión $2n$. Para más referencias sobre el fibrado cotangente puede revisar [1, Capítulo 17].

A continuación, exploraremos unas formas simplécticas en el espacio cotangente, que comúnmente se denominan formas tautológicas. Estas formas canónicas en los

¹Puede revisar Página 50.

fibrados cotangentes desempeñan un papel crucial en diversas disciplinas, como el análisis de operadores diferenciales, sistemas dinámicos y la mecánica clásica.

4.5.2. Formas Tautológicas y Canónicas en cartas

Sea $(U, (x_1, x_2, \dots, x_m))$ una carta coordenada. A esta carta podemos asociarla con una carta en el fibrado cotangente $(T^*U, (x_1, x_2, \dots, x_m, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m))$. Definimos la 2-forma ω sobre T^*U

$$\omega = \sum dx_i \wedge d\xi_i.$$

Y también podemos definir la 1-forma α de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum \xi_i \wedge dx_i.$$

Teorema 4.3. *La 1-forma α está definida en todo M .*

Demostración. Sean $(U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ y $(U_0, x_0^1, \dots, x_0^n, \xi_0^1, \dots, \xi_0^n)$ dos sistemas de coordenadas en el cotangente. En $U \cap U_0$, los dos conjuntos de coordenadas están relacionados por $\xi_0^j = \sum_i \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_0^j} \right)$. Dado que $dx_0^j = \sum_i \frac{\partial x_0^j}{\partial x_i} dx_i$, tenemos

$$\alpha_0 = \sum_j \xi_0^j dx_0^j = \sum_{ijk} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_0^j} \right) \left(\frac{\partial x_0^j}{\partial x_k} \right) dx_k = \sum_{ik} \xi_i dx_k \delta_{ik} = \sum_i \xi_i dx_i = \alpha. \quad \square$$

A la 1-forma α definida sobre M se le llama la forma tautológica y a ω se le llama la forma simpléctica canónica.

4.5.3. Definiciones sin coordenadas

Sea $M = T^*X$ tenemos la función proyección

$$\pi : T^*X \rightarrow X$$

$$p = (x, \xi) \mapsto x$$

La 1-forma tautológica α puede definirse punto a punto de la siguiente manera:

$$\alpha_p = (d\pi_p)^* \xi \in T_p^*M,$$

donde $(d\pi_p)^*$ es la traspuesta de $d\pi_p$, es decir, $(d\pi_p)^*\xi = \xi \circ d\pi_p$. No confundir los dominios donde cada función actúa. Para ello, conviene verlos de manera gráfica:

$$\begin{array}{ccccc} p = (x, \xi) & T_p M & T_p^* M & & \\ \downarrow \pi & \downarrow d\pi_p & \downarrow (d\pi_p)^* & & \\ x & T_x X & T_x^* X & & \end{array}$$

Una forma equivalente pero más sencilla de entender α es la siguiente:

$$\alpha_p(v) = \xi((d\pi_p)v), \quad \text{para } v \in T_p M.$$

En efecto, sea $v \in T_p M$ entonces tiene la forma $v(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$ si evaluamos $\alpha_p(v) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Por otro lado, $\xi((d\pi_p)v) = \xi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ y son el mismo valor.

Y nuestra 2-forma simpléctica canónica ω en T^*X puede definirse sin necesidad de coordenadas, simplemente como:

$$\omega = -d\alpha.$$

Localmente, $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$.

4.5.4. Formas Tautológica y Canónica

Sean X_1 y X_2 variedades de dimensión n con fibrados cotangentes $M_1 = T^*X_1$ y $M_2 = T^*X_2$, α_1 y α_2 sus 1-formas tautológicas respectivamente. Supongamos que $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un difeomorfismo. Entonces existe un difeomorfismo natural

$$f_{\sharp} : M_1 \rightarrow M_2,$$

que levanta a f . Es decir, si $p_1 = (x_1, \xi_1) \in M_1$ para $x_1 \in X_1$ y $\xi_1 \in T_{x_1}^* X_1$, entonces definimos

$$f_{\sharp}(p_1) = p_2 = (x_2, p_2),$$

donde $x_2 = f(x_1)$ y $\xi_2 = (df_{x_1})^* \xi_1$. De manera gráfica:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_{\sharp}} & M_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

Proposición 4.1. f_{\sharp} es un difeomorfismo.

Demostración. 1) De la definición de f_{\sharp} es fácil ver que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_{\sharp}} & M_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

2) $f_{\sharp} : M_1 \rightarrow M_2$ es biyectiva.

3) f_{\sharp} y f_{\sharp}^{-1} son suaves (Para darse cuenta de esto, basta escribir las funciones usando cartas).

□

Teorema 4.4. *El levantamiento f_{\sharp} de un difeomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$ lleva la forma tautológica en T^*X_2 de regreso a la forma tautológica en T^*X_1 , es decir,*

$$f_{\sharp}^*(\alpha_2) = \alpha_1.$$

Demostración. Sea $p_1 = (x_1, \xi_1) \in M_1$, el enunciado del teorema es equivalente a probar que:

$$(df_{\sharp})_{p_1}^*(\alpha_2)_{p_2} = (\alpha_1)_{p_1}, \quad (4.5.1)$$

donde $p_2 = f^*(p_1)$.

Para dar con la demostración de Ecuación 4.5.1 usaremos los siguientes resultados,

- De la definición de f_{\sharp} se sigue que:

$$p_2 = f_{\sharp}(p_1) \Leftrightarrow p_2 = (x_2, \xi_2) \text{ donde } x_2 = f(x_1) \text{ y } (df_{x_1})^* \xi_2 = \xi_1.$$

- De la definición de la 1-forma tautológica se sigue que:

$$(\alpha_1)_{p_1} = (d\pi_1)_{p_1}^* \xi_1 \quad \text{y} \quad (\alpha_2)_{p_2} = (d\pi_2)_{p_2}^* \xi_2.$$

- El diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_{\sharp}} & M_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

es conmutativo.

Finalmente la prueba de la ecuación Ecuación 4.5.1 es la siguiente:

$$\begin{aligned} (df^*)_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} &= (df^*)_{p_1}((d\pi_2)^*_{p_2}\xi_2) \\ &= (df^*)_{p_1}((d(\pi_2 \circ f))^*_{p_1}\xi_2) \\ &= (d(f \circ \pi_1))^*_{p_1}\xi_2 \\ &= (d\pi_1)^*_{p_1}((df_{x_1})^*_{\xi_2}) \\ &= (d\pi_1)^*_{p_1}\xi_1 \\ &= (\alpha_1)_{p_1}. \end{aligned}$$

□

Corolario: La aplicación levantamiento f_{\sharp} de un difeomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un simplectomorfismo, es decir,

$$(f_{\sharp})^*\omega_2 = \omega_1,$$

donde ω_1 y ω_2 son las formas simplécticas canónicas.

En resumen, un difeomorfismo de variedades induce un simplectomorfismo canónico de los fibrados cotangentes:

$$\begin{array}{ccc} T^*X_1 & \xrightarrow{f_{\sharp}} & T^*X_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

Ejemplo 4.4. Sea $X_1 = X_2 = S^1$. Entonces T^*S^1 es un cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$. La 2-forma canónica ω es la forma de área $\omega = d\theta \wedge d\xi$. Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ es cualquier difeomorfismo, entonces $f_{\sharp} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ es un simplectomorfismo, es decir, es un difeomorfismo que preserva el área en el cilindro.

Si $f : X_1 \rightarrow X_2$ y $g : X_2 \rightarrow X_3$ son difeomorfismos, entonces $(g \circ f)_{\sharp} = g_{\sharp} \circ f_{\sharp}$. En términos del grupo $\text{Diff}(X)$ de difeomorfismos de X y del grupo $\text{Sympl}(M, \omega)$ de

simplectomorfismos de (M, ω) , decimos que el mapa

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff}(X) & \longrightarrow & \text{Symp}(M, \omega) \\ f & \mapsto & f_{\sharp} \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos. Este mapa es claramente inyectivo. ¿Es sobreyectivo? ¿Vienen todos los simplectomorfismos de $T^*X \rightarrow T^*X$ de difeomorfismos $X \rightarrow X$? No: por ejemplo, la traslación a lo largo de las fibras cotangentes no se induce mediante un difeomorfismo de la variedad base.

4.6. Simplectomorfismos

La equivalencia entre variedades simplécticas se expresa mediante un simplectomorfismo. En este capítulo, estudiaremos con mayor profundidad estos tipos de mapas.

4.6.1. Subvariedad

Sean M y X variedades con $\dim X < \dim M$.

Definición 4.8. Un mapa $i : X \rightarrow M$ es una inmersión si $di_p : T_p X \rightarrow T_{i(p)} M$ es inyectiva para cualquier punto $p \in X$.

Un encaje es una inmersión que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Una encaje cerrado es una inmersión propia y inyectiva.

Definición 4.9. Una subvariedad de M es una variedad X donde la función inclusión $i : X \hookrightarrow M$ es un encaje cerrado.

Notación: Dada una subvariedad, la inclusión $i : X \hookrightarrow M$ induce de manera natural una forma de incrustar vectores de $T_p X$ en $T_p M$. Esto se logra mediante $di_p(T_p X) \subset T_p M$. A partir de este punto, utilizaremos $T_p X$ y $di_p(T_p X) \subset T_p M$ como sinónimos.

4.6.2. Subvariedad Lagrangiana

Definición 4.10. Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una subvariedad Y de M es una subvariedad lagrangiana si, para cada $p \in Y$, $T_p Y$ es un subespacio lagrangiano de $T_p M$, es decir, $\omega_p|_{T_p Y} \equiv 0$ y su $\dim T_p Y = \frac{1}{2} \dim T_p M$. Equivalentemente, sea $i : Y \hookrightarrow M$ el mapa de inclusión, entonces Y es lagrangiana si y solo si $i^* \omega = 0$ y $\dim Y = \frac{1}{2} \dim M$.

Sea X una variedad de dimensión n , y $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Si x_1, \dots, x_n son coordenadas en $U \subseteq X$ con coordenadas cotangentes asociadas $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ en T^*U , entonces la 1-forma tautológica en T^*X se define como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i,$$

y la 2-forma canónica en T^*X es

$$\omega = -d\alpha = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i.$$

La sección cero de T^*X ,

$$X_0 := \{(x, \xi) \in T^*X \mid \xi = 0 \text{ en } T_x^*X\},$$

es una subvariedad de T^*X de dimensión n cuya intersección con T^*U está dada por las ecuaciones $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$. Claramente, $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ se anula en $X_0 \cap T^*U$.

En particular, si $i_0 : X_0 \hookrightarrow T^*X$ es el mapa de inclusión, tenemos que $i_0^* \alpha = 0$. Por lo tanto, $i_0^* \omega = i_0^* d\alpha = 0$, y X_0 es lagrangiana.

Todo esto nos lleva a una pregunta ¿Cuáles son todas las subvariedades lagrangianas de T^*X que están en clase C^1 cerca a X_0 ?

Sea X_u (la imagen de) otra sección, es decir, una subvariedad de T^*X de dimensión n de la forma

$$X_u = \{(x, \mu_x) \mid x \in X, \mu_x \in T_x^*X\},$$

donde el covector μ_x depende suavemente de x , y $\mu : X \rightarrow T^*X$ es una 1-forma. Con respecto a la inclusión $i : X_u \hookrightarrow T^*X$ y la proyección cotangente $\pi : T^*X \rightarrow X$, entonces X_u tiene la forma

$$X_u = \{(x, \mu_x) \mid x \in X, \mu_x \in T_x^*X\}, \quad (4.6.1)$$

si y solo si $\pi \circ i : X_u \rightarrow X$ es un difeomorfismo.

Una pregunta natural es cuándo X_u es una subvariedad lagrangiana. Para responder a ella, presentaremos la siguiente proposición.

Proposición 4.2. Sea X_u de la forma Ecuación 4.6.1, y sea μ la 1-forma asociada. Denotemos por $s_\mu : X \rightarrow T^*X$, $x \mapsto (x, \mu_x)$, la 1-forma μ considerada exclusivamente como un mapa. Observa que la imagen de s_μ es X_u . Sea α la 1-forma tautológica en T^*X . Entonces,

$$s_\mu^* \alpha = \mu.$$

Demostración. Por definición de α , $\alpha_p = (d\pi_p)^* \xi$ en $p = (x, \xi) \in M$. Para $p = s_\mu(x) = (x, \mu_x)$, tenemos $\alpha_p = (d\pi_p)^* \mu_x$. Entonces,

$$(s_\mu^* \alpha)_x = (ds_\mu)_x \alpha_p = (ds_\mu)_x (d\pi_p)^* \mu_x = (d(\pi \circ s_\mu))_{|_{z=x}}^* \mu_x = \mu_x.$$

□

Supongamos que X_u es una subvariedad de T^*X de dimensión n de la forma Ecuación 4.6.1, con la 1-forma asociada μ . Entonces $s_\mu : X \rightarrow T^*X$ es una inclusión con imagen X_u , y existe un difeomorfismo $\tau : X \rightarrow X_u$, $\tau(x) := (x, \mu_x)$, tal que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_\mu} & T^*X \\ \tau \downarrow & \nearrow i & \\ X_u & & \end{array}$$

Queremos expresar la condición de que X_u sea lagrangiana en términos de la forma μ :

$$\begin{aligned}
X_u \text{ es Lagrangiana} &\Leftrightarrow i^*d\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \tau^*i^*d\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow (i \circ \tau)^*d\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow s^*\mu d\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow ds^*\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow d\mu = 0 \\
&\Leftrightarrow \mu \text{ es cerrada.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de subvariedades lagrangianas de T^*X de la forma Ecuación 4.6.1 y el conjunto de 1-formas cerradas.

Observación 4.5. Cuando X es simplemente conexo, $H_{\text{deRham}}^1(X) = 0$, por lo que toda 1-forma cerrada μ es igual a df para algún $f \in C^\infty(X)$. De darse el caso, la función f se llama entonces una función generadora para la subvariedad lagrangiana X_u asociada a μ . (Dos funciones generan la misma subvariedad lagrangiana si y solo si difieren por una función localmente constante.) En variedades arbitrarias X , las funciones $f \in C^\infty(X)$ originan subvariedades lagrangianas como imágenes de df .

4.6.3. Fibrados Conormales

Sea S cualquier subvariedad de dimensión k de una variedad X de dimensión n .

Definición 4.11. El espacio conormal en $x \in S$ es

$$N_x^*S = \{\xi \in T_x^*X \mid \xi(v) = 0, \text{ para todo } v \in T_xS\}.$$

El fibrado conormal de S es

$$N^*S = \{(x, \xi) \in T^*X \mid x \in S, \xi \in N_x^*S\}.$$

Proposición 4.3. Sea $i : N^*S \hookrightarrow T^*X$ la inclusión, y sea α la 1-forma tautológica en T^*X . Entonces,

$$i^*\alpha = 0.$$

Demostración. Sea (U, x_1, \dots, x_n) un sistema de coordenadas en X centrado en $x \in S$ y adaptado a S , de modo que $U \cap S$ se describe por $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$. Sea $(T^*U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ el sistema de coordenadas cotangentes asociado. La subvariedad $N^*S \cap T^*U$ se describe entonces por

$$x_{k+1} = \dots = x_n = 0; \xi_1 = \dots = \xi_k = 0.$$

Dado que $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ en T^*U , concluimos que, en el punto $p \in N^*S$,

$$i^*\alpha_p = \alpha_p|_{T_p(N^*S)} = \sum_{i>k} \xi_i dx_i \Big|_{\text{span}\{\partial/\partial x_i, i \leq k\}} = 0.$$

□

Corolario 4.4.1. Para cualquier subvariedad $S \subset X$, el fibrado conormal N^*S es una subvariedad lagrangiana de T^*X .

Tomando $S = \{x\}$ como un solo punto, el fibrado conormal $L = N^*S = T_x^*X$ es una fibra cotangente. Tomando $S = X$, el haz conormal $L = X_0$ es la sección cero de T^*X .

4.6.4. Aplicación a los symplectomorfismos

Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas de dimensión $2n$. Dada una difeomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, bajo que condiciones se tendría un symplectomorfismo (Es decir, queremos saber cuando se cumple $\phi^*\omega_2 = \omega_1$)

Observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & & \\ \text{pr}_1 \downarrow & \downarrow \text{pr}_2 & \\ M_1 & M_2 & \end{array}$$

Donde $pr_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ y $pr_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ son las proyecciones.

Entonces, $\omega = (pr_1)^*\omega_1 + (pr_2)^*\omega_2$ es una 2-forma en $M_1 \times M_2$ que es cerrada.

En efecto,

$$d\omega = (pr_1)^*d\omega_1 + (pr_2)^*d\omega_2 = 0,$$

y es una forma simpléctica,

$$\omega^{2n} = \binom{2n}{n} ((pr_1)^*\omega_1)^n \wedge ((pr_2)^*\omega_2)^n \neq 0.$$

Más generalmente, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $\lambda_1(pr_1)^*\omega_1 + \lambda_2(pr_2)^*\omega_2$ también es una forma simpléctica en $M_1 \times M_2$. Tomando $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ obtenemos la forma del '*twisted product*' en $M_1 \times M_2$:

$$\widehat{w} = (pr_1)^*\omega_1 - (pr_2)^*\omega_2.$$

El gráfico de un difeomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ es la subvariedad de dimensión $2n$ de $M_1 \times M_2$

$$\Gamma_\phi := \text{Graph}(\phi) = \{(p, \phi(p)) \mid p \in M_1\}.$$

La subvariedad Γ_ϕ es una imagen encajada de M_1 en $M_1 \times M_2$, siendo el encaje:

$$\gamma : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$$

$$p \mapsto (p, \phi(p)).$$

Teorema 4.5. *Un difeomorfismo ϕ es un simplectomorfismo si y solo si Γ_ϕ es una subvariedad lagrangiana de $(M_1 \times M_2)$.*

Demostración. En otras palabras, el gráfico Γ_ϕ es lagrangiano si y solo si $(\gamma^*\widehat{w}) = 0$.

$$\begin{aligned} (\gamma^*\widehat{w}) &= (\gamma^*(pr_1^*\omega_1) - \gamma^*(pr_2^*\omega_2)) \\ &= ((pr_1 \circ \gamma)^*\omega_1 - (pr_2 \circ \gamma)^*\omega_2). \end{aligned}$$

Pero $pr_1 \circ \gamma$ es la función identidad en M_1 y $pr_2 \circ \gamma = \phi$. Por lo tanto,

$$\gamma^*\widehat{w} = 0 \iff \phi^*\omega_2 = \omega_1.$$

□

4.7. Formas Locales

En esta sección, estudiaremos a mayor profundidad los *flujos vectoriales* y los *teoremas de Moser*, que serán de utilidad más adelante.

4.7.1. Isotopías y Campos Vectoriales

Sea M una variedad, y $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una función, donde definimos $\rho_t(p) := \rho(p, t)$.

Definición 4.12. La función ρ es una isotopía si cada $\rho_t : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, y $\rho_0 = \text{id}_M$.

Dada una isotopía ρ , obtenemos un campo vectorial dependiente del tiempo, es decir, una familia de campos vectoriales v_t , $t \in \mathbb{R}$, que en $p \in M$ satisfacen:

$$v_t(p) = \left. \frac{d}{ds} \rho_s(q) \right|_{s=t}, \quad (4.7.1)$$

donde $q = \rho_t^{-1}(p)$. En otras palabras,

$$\frac{d\rho_t}{dt} = v_t \circ \rho_t.$$

A la inversa, dado un campo vectorial dependiente del tiempo v_t , si M es compacta o si los v_t tienen soporte compacto, existe una isotopía ρ que satisface la ecuación diferencial ordinaria Ecuación 4.7.1.

Supongamos que M es compacta. Entonces tenemos una correspondencia uno a uno:

$$\{\text{isotopías de } M\} \longleftrightarrow \{\text{campos vectoriales dependientes del tiempo en } M\}$$

$$\rho_t, t \in \mathbb{R} \longleftrightarrow v_t, t \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.13. Cuando $v_t = v$ es independiente de t , la isotopía asociada se llama la función exponencial o el flujo de v y se denota como $\exp(tv)$; es decir, $\{\exp(tv) : M \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$ es la única familia suave de difeomorfismos que satisface:

$$\exp(tv) \Big|_{t=0} = \text{id}_M$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(tv))(p) = v(\exp(tv(p))).$$

Definición 4.14. La derivada de Lie es el operador

$$L_v : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

$$L_v \omega = \frac{d}{dt}(\exp(tv))^* \omega \Big|_{t=0}.$$

Observación 4.6. En el caso general cuando M no necesariamente es compacta y se tenga un campo vectorial v_t que depende del tiempo, la isotopía correspondiente ρ todavía existe localmente. Más precisamente, en la vecindad de cualquier punto p y para un tiempo t suficientemente pequeño, esto se justifica gracias al teorema de Picard, hay una familia de un parámetro de difeomorfismos locales ρ_t que satisfacen:

$$\frac{d\rho_t}{dt} = v_t \circ \rho_t$$

$$\rho_0 = \text{id}.$$

Por lo tanto, siempre podemos definir la derivada de Lie para cualquier v_t . Esta definición simplemente será:

$$L_{v_t} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

$$L_{v_t} \omega = \frac{d}{dt}(\rho_t)^* \omega.$$

Para más referencias sobre el Teorema de Picard o sobre teoremas relacionados a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) puede revisar [5, Capítulo 1].

Proposición 4.4. Hay una relación entre las derivadas de Lie y la derivada exterior (esta relación se llama fórmula mágica de Cartan),

$$L_v \omega = i_v d\omega + d(i_v \omega),$$

y además también se verifica la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^*(L_{v_t}\omega), \quad (4.7.2)$$

donde ρ es la isotopía (local) generada por v_t .

Demostración. Basta con seguir los siguientes pasos:

1. Verificamos la fórmula para 0-formas $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$.
2. Verificamos que ambos lados conmutan con d .
3. Verificamos que ambos lados son derivaciones del álgebra $(\Omega^*(M), \wedge)$. Por ejemplo,

$$L_v(\omega \wedge \alpha) = (L_v\omega) \wedge \alpha + \omega \wedge (L_v\alpha).$$

4. Notemos que si U es el dominio de un sistema de coordenadas, entonces $\Omega^\bullet(U)$ se genera como un álgebra por $\Omega^0(U)$ y $d\Omega^0(U)$, es decir, cada elemento en $\Omega^\bullet(U)$ es una combinación lineal de productos exteriores de elementos en $\Omega^0(U)$ y elementos en $d\Omega^0(U)$.

□

Para los teoremas que vendrán de aquí en adelante, necesitaremos la siguiente versión mejorada de la fórmula Ecuación 4.7.2.

Teorema 4.6. *Para una familia suave ω_t , $t \in \mathbb{R}$, de formas diferenciales de dimensión d , tenemos:*

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t = \rho_t^*\left(L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right).$$

Demostración. Si $f(x, y)$ es una función real de dos variables, usando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dt}f(t, t) = \frac{d}{dx}f(x, t)\Big|_{x=t} + \frac{d}{dy}f(t, y)\Big|_{y=t}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t = \frac{d}{dx}\rho_t^*\omega_t\Big|_{x=t} + \frac{d}{dy}\rho_t^*\omega_t\Big|_{y=t} = \rho_t^*\left(L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right).$$

□

4.8. Teoremas de Moser

4.8.1. Conceptos de Equivalencia para Estructuras Simplécticas

Sea M una variedad de dimensión $2n$ con dos formas simplécticas ω_0 y ω_1 . De esta manera, tenemos (M, ω_0) y (M, ω_1) dos variedades simplécticas.

Definición 4.15. Decimos que:

- (M, ω_0) y (M, ω_1) son **simpléctomorfos** si existe un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ tal que $\phi^*\omega_1 = \omega_0$;
- (M, ω_0) y (M, ω_1) son **fuertemente isotópicos** si existe una isotopía $\rho_t : M \rightarrow M$ tal que $\rho_1^*\omega_1 = \omega_0$;
- (M, ω_0) y (M, ω_1) son **equivalentes por deformación** si existe una familia suave ω_t de formas simplécticas que conectan ω_0 con ω_1 ;
- (M, ω_0) y (M, ω_1) son **isotópicos** si son equivalentes por deformación con $[\omega_t]$ independiente de t .

Claramente, tenemos:

- Fuertemente isotópico \Rightarrow Simpléctomorfo.
- Isotópico \Rightarrow Equivalente por deformación.

También tenemos que:

$$\text{Fuertemente isotópico} \Rightarrow \text{Isotópico}$$

pues si $\rho_t : M \rightarrow M$ es una isotopía tal que $\rho_1^*\omega_1 = \omega_0$, entonces el conjunto $\omega_t := \rho_t^*\omega_1$ es una familia suave de formas simplécticas que conectan ω_1 con ω_0 , y $[\omega_t] = [\omega_1]$ para todo t , gracias a la invarianza homotópica de la cohomología de deRham. Como veremos a continuación, el teorema de Moser establece que, en una variedad compacta, el ser isotópico implica ser fuertemente isotópico.

4.8.2. Teoremas de Moser

Teorema 4.7. *Dado que M es una variedad compacta, consideremos el caso en el que $[\omega_0] = [\omega_1]$, y además, que la 2-forma forma simpléctica $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$ es simpléctica para cada valor de t en el intervalo $[0, 1]$. Entonces va a existir una isotopía $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ que satisface la propiedad $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$ para todo t en el intervalo $[0, 1]$.*

En particular, $\phi = \rho_1 : M \rightarrow M$, satisface $\phi^\omega_1 = \omega_0$. El siguiente argumento, debido a Moser, es extremadamente útil y se conoce como el truco de Moser.*

Demostración. Supongamos que existe una isotopía $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$, $0 \leq t \leq 1$. Sea:

$$v_t = \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$0 = \frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) = \rho_t^* \left(L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right).$$

Esto es equivalente a

$$L_{v_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0. \quad (4.8.1)$$

Supongamos conversamente que podemos encontrar un campo vectorial dependiente del tiempo suave $v_t, t \in \mathbb{R}$, tal que se cumple la ecuación Ecuación 4.8.1, para $0 \leq t \leq 1$. Dado que M es compacta, podemos integrar v_t a una isotopía $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ con:

$$\frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) = 0.$$

Entonces

$$\rho_t^*\omega_t = \rho_0^*\omega_0 = \omega_0.$$

En ese caso, todo se reduce a resolver Ecuación 4.8.1 para v_t . Primero, a partir de $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$, concluimos que

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \omega_1 - \omega_0.$$

Segundo, dado que $[\omega_0] = [\omega_1]$, existe una 1-forma μ tal que

$$\omega_1 - \omega_0 = d\mu.$$

Tercero, por la fórmula mágica de Cartan, tenemos

$$L_{v_t}\omega_t = d(i_{v_t}\omega_t),$$

ya que $i_{v_t}d\omega_t = 0$.

Finalmente juntando todo, debemos encontrar v_t tal que

$$d(i_{v_t}\omega_t) + d\mu = 0.$$

Es suficiente resolver $i_{v_t}\omega_t + \mu = 0$. Esta ecuación es muy importante y se llama ecuación de Moser. Debido a la no degeneración de ω_t , podemos resolver esto punto a punto para obtener un v_t único. \square

Este teorema se puede mejorar de la siguiente manera.

Teorema 4.8. *Sea M una variedad compacta con formas simplécticas ω_0 y ω_1 . Supongamos que ω_t , $0 \leq t \leq 1$, es una familia suave de 2-formas cerradas formas que une ω_0 con ω_1 y satisface:*

(1) *La clase cohomolog'ia: $[\omega_t]$ es independiente de t , es decir,*

$$\frac{d}{dt}[\omega_t] = \frac{d}{dt}\omega_t = 0.$$

(2) *La 2-forma ω_t es no degenerada para $0 \leq t \leq 1$.*

Entonces, existirá una isotopía $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\rho_t^\omega_t = \omega_0$, $0 \leq t \leq 1$.*

Demostración. Tenemos las siguientes implicaciones a partir de las hipótesis:

(1) Existe una familia de 1-formas μ_t tal que $\frac{d\omega_t}{dt} = d\mu_t$, $0 \leq t \leq 1$. En efecto, podemos encontrar una familia suave de 1-formas μ_t tal que $\frac{d\omega_t}{dt} = d\mu_t$. El argumento involucra el lema de Poincaré para formas de soporte compacto, junto con la secuencia de Mayer-Vietoris para usar la inducción en el número de cartas en una cobertura buena de M . Para más detalles puede revisar [6, Capítulo 3].

(2) Existe una familia única de campos vectoriales v_t tal que $i_{v_t}\omega_t + \mu_t = 0$ (ecuación de Moser).

$$i_{v_t}\omega_t + \mu_t = 0,$$

como M es una variedad compacta entonces v_t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Este campo vectorial induce la isotopía ρ . De esta manera, tenemos

$$\frac{d}{dt}(\rho_t \omega_t) = \rho_t(L_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) = \rho_t(d(i_{v_t} \omega_t) + d\mu_t) = 0.$$

□

Observación 4.7. La compacidad de M se usó para poder integrar v_t para todo $t \in \mathbb{R}$. Si M no es compacta, necesitamos verificar la existencia de una solución ρ_t para la ecuación diferencial $\frac{d\rho_t}{dt} = v_t \circ \rho_t$ para $0 \leq t \leq 1$.

Finalmente vamos a acabar esta sección enunciando y probando una versión más general de este teorema.

Teorema 4.9. Sea M una variedad, X una subvariedad de M , $i : X \hookrightarrow M$ el mapa de inclusión, ω_0 y ω_1 formas simplécticas en M . Vamos a probar lo siguiente:

Hipótesis: $\omega_0|_p = \omega_1|_p, \forall p \in X$.

Conclusión: Existen vecindades U_0, U_1 de X en M , y un difeomorfismo $\phi : U_0 \rightarrow U_1$ tal que $\phi \circ i = i$ y $\phi^* \omega_1 = \omega_0$.

Demostración. .

1. Tomando una vecindad tubular U_0 de X . La 2-forma $\omega_1 - \omega_0$ es cerrada en U_0 , y $(\omega_1 - \omega_0)_p = 0$ para todo $p \in X$. Utilizando la fórmula de homotopía en la vecindad tubular, se obtiene una 1-forma μ en U_0 tal que $\omega_1 - \omega_0 = d\mu$ y $\mu_p = 0$ para todo $p \in X$.
2. Considerar la familia $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\mu$ de 2-formas cerradas en U_0 . Si es necesario, reducir U_0 para asegurar que ω_t sea simpléctica para $0 \leq t \leq 1$.
3. Resolvemos la ecuación de Moser: $i_{v_t} \omega_t = -\mu$. Se observa que $v_t = 0$ en X .
4. Integramos v_t . Si es necesario, reducimos U_0 nuevamente para garantizar la existencia de una isotopía $\rho : U_0 \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\rho_t^* \omega_t = \omega_0$ para todo $t \in [0, 1]$. Finalmente debido a que $v_t|_X = 0$, se tiene $\rho_t|_X = \text{id}_X$.

Definiendo $\phi = \rho_1$ y $U_1 = \rho(U_0)$ se tiene las vecindades deseadas.

□

4.8.3. Teorema de Darboux

Teorema 4.10. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y p un punto en M . Entonces podemos encontrar un sistema de coordenadas $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ centrado en p tal que en U ,*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Como consecuencia del Teorema Teorema 4.10, si demostramos para $(\mathbb{R}^{2n}, \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$ una afirmación local que sea invariante bajo simpletomorfismos, entonces esa afirmación se válida para cualquier variedad simpléctica.

Demostración. Aplicando el teorema Teorema 4.9 a $X = \{p\}$, utilizamos cualquier base simpléctica para $T_p M$ para construir coordenadas $(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^n)$ centradas en p y válidas en algún entorno U_0 , de manera que

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n dx_0^i \wedge dy_0^i \Big|_p.$$

Hay dos formas simplécticas en U_0 : la dada $\omega_0 = \omega$ y $\omega_1 = \sum_{i=1}^n dx_0^i \wedge dy_0^i$. Y nuevamente por el teorema de Teorema 4.9, existen entornos U_0 y U_1 de p , y una difeomorfismo $\phi : U_0 \rightarrow U_1$ tal que

$$\phi(p) = p \quad \text{y} \quad \phi^* \left(\sum_{i=1}^n dx_0^i \wedge dy_0^i \right) = \omega.$$

Dado que $\phi^* \left(\sum_{i=1}^n dx_0^i \wedge dy_0^i \right) = \sum_{i=1}^n d(x_0^i \circ \phi) \wedge d(y_0^i \circ \phi)$, solo necesitamos establecer las nuevas coordenadas $x^i = x_0^i \circ \phi$ y $y^i = y_0^i \circ \phi$.

□

4.9. Mecánica Hamiltoniana

Las ecuaciones de movimiento en la mecánica clásica surgen como soluciones de problemas variacionales. Para un sistema mecánico general de n partículas en \mathbb{R}^3 , la trayectoria física satisface la segunda ley de Newton. Por otro lado, la trayectoria física minimiza el valor promedio de la energía cinética menos la energía potencial, esta cantidad se llama la acción. En el caso de un sistema con restricciones, la

trayectoria física es la que minimiza la acción entre todas las trayectorias que satisfacen la restricción. La transformación de Legendre establece la relación entre las formulaciones variacionales (Euler-Lagrange) y simétricas de las ecuaciones de movimiento. En este capítulo veremos más a fondo el estudio de la dinámica centrada en el Hamiltoniano.

4.9.1. Campos Vectoriales Hamiltonianos y Simplécticos

Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Su diferencial dH es una 1-forma. Debido a la no degeneración, existe un campo vectorial único X_H en M tal que $i_{X_H}\omega = dH$. Suponiendo que M es compacta, o al menos que X_H es completo, sea $\rho_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, la familia uniparamétrica de difeomorfismos generada por X_H :

$$\begin{cases} \rho_0 = \text{id}_M \\ \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1} = X_H. \end{cases}$$

Proposición 4.5. Cada difeomorfismo ρ_t preserva ω , i.e. $\rho_t^*\omega = \omega$, $\forall t$.

Demostración. Tenemos

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = \rho_t^*(d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H}d\omega) = 0.$$

□

Por lo tanto, cada función en (M, ω) proporciona una familia de simpletomorfismos. Notemos cómo la prueba involucró tanto la no degeneración como la cerradura de ω .

Definición 4.16. Un campo vectorial X_H que satisface $i_{X_H}\omega = dH$ se llama campo vectorial hamiltoniano con función hamiltoniana H .

Ejemplo 4.5. El campo vectorial hamiltoniano asociado a la función de altura $H(\theta, h) = h$ en la esfera $(M, \omega) = (S^2, d\theta \wedge dh)$ tiene la forma:

$$i_{X_H}(d\theta \wedge dh) = dh \iff X_H = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Así, $\rho_t(\theta, h) = (\theta+t, h)$, lo cual es una rotación alrededor del eje vertical; la función de altura H se preserva con este movimiento.

Observación 4.8. Si X_H es hamiltoniano, entonces

$$L_{X_H}H = i_{X_H}dH = i_{X_H}i_{X_H}\omega = 0.$$

Por lo tanto, los campos vectoriales hamiltonianos preservan sus funciones hamiltonianas, y cada curva integral $\{\rho_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de X_H debe estar contenida en un conjunto de nivel de H .

$$H(x) = (\rho_t^*H)(x) = H(\rho_t(x)), \quad \forall t.$$

Definición 4.17. Un campo vectorial X en M que preserve ω (es decir, tal que $L_X\omega = 0$) se llama campo vectorial simpléctico.

$$\begin{cases} X \text{ es simpléctico} & \Leftrightarrow i_X\omega \text{ es cerrada.} \\ X \text{ es hamiltoniano} & \Leftrightarrow i_X\omega \text{ es exacta.} \end{cases}$$

Localmente, en cada conjunto abierto contractible, todo campo vectorial simpléctico es hamiltoniano. Si $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$, entonces globalmente todo campo vectorial simpléctico es hamiltoniano. En general, $H_{\text{dR}}^1(M)$ mide la obstrucción para que los campos vectoriales simplécticos sean hamiltonianos.

En resumen, los campos vectoriales en una variedad simpléctica (M, ω) que preservan ω se llaman campos simplécticos. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1) X es un campo vectorial simpléctico;
- 2) El flujo ρ_t de X preserva ω , es decir, $\rho_t^*\omega = \omega$, para todo t ;
- 3) $\mathcal{L}_X\omega = 0$;
- 4) $i_X\omega$ es cerrada.

Un campo vectorial hamiltoniano es un campo vectorial X para el cual $i_X\omega$ es exacto. Es decir, $i_X\omega = dH$ para algún $H \in C^\infty(M)$. Una primitiva H de $i_X\omega$ se llama entonces una función hamiltoniana de X .

4.9.2. Mecánica clásica

Considera el espacio euclidiano \mathbb{R}^{2n} con coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ y $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j$. La curva $\rho_t = (q(t), p(t))$ es una curva integral para X_H exactamente si

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}.$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de Hamilton.

De hecho, sea $X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$. Entonces,

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega &= \sum_{j=1}^n i_{X_H}(dq_j \wedge dp_j) \\ &= \sum_{j=1}^n [(i_{X_H}dq_j) \wedge dp_j - dq_j \wedge (i_{X_H}dp_j)] \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j \right) \\ &= dH. \end{aligned}$$

Observación 4.9. El campo vectorial gradiente de H en relación con la métrica euclidiana es

$$\nabla H := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Si J es la estructura (casi) compleja estándar tal que $J\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p_i}$ y $J\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_i}$, entonces tenemos $JX_H = \nabla H$.

El caso en el que $n = 3$ tiene una ilustración física sencilla. La segunda ley de Newton establece que una partícula de masa m que se mueve en el espacio de configuración \mathbb{R}^3 con coordenadas $q = (q_1, q_2, q_3)$ bajo un potencial $V(q)$ se desplaza a lo largo de una curva $q(t)$ tal que

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q).$$

Introduzcamos los momentos $p_i = m \frac{dq_i}{dt}$ para $i = 1, 2, 3$, y la función de energía $H(p, q) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(q)$. Sea $R^6 = T^*R^3$ el espacio de fase correspondiente, con coordenadas $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$. La segunda ley de Newton en R^3 es equivalente a las ecuaciones de Hamilton en R^6 :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{m}p_i \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$m \frac{d^2q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

La energía H se conserva durante el movimiento físico.

4.9.3. Corchetes

Los campos vectoriales también se pueden ver como operadores diferenciales sobre funciones. Es decir, si X es un campo vectorial y $f \in C^\infty(X)$, donde df es la 1-forma correspondiente, entonces

$$X \cdot f := df(X) = L_X f.$$

Dados dos campos vectoriales X e Y , existe un campo vectorial único W tal que

$$L_W f = L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f).$$

W se llama el corchete de Lie de los campos vectoriales X e Y y se denota como $W = [X, Y]$, ya que $L_W = [L_X, L_Y]$ es el conmutador.

Teorema 4.11. *Si X e Y son campos vectoriales simplécticos en una variedad simpléctica (M, ω) , entonces $[X, Y]$ es hamiltoniano con función hamiltoniana $\omega(Y, X)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} i_{[X, Y]} \omega &= L_X i_Y \omega - i_Y L_X \omega \\ &= di_X i_Y \omega + i_X di_Y \omega - i_Y di_X \omega - i_Y i_X d\omega \\ &= d(\omega(Y, X)). \end{aligned}$$

□

Una álgebra de Lie (real) es un espacio vectorial (real) g junto con un corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$. Es decir, una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : g \times g \rightarrow g$ que satisface:

- (1) $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in g$, (antisimétrica).
- (2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in g$. (identidad de Jacobi).

Definimos:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \{\text{campos vectoriales en } M\} \\ \chi_{\text{symp}}(M) &= \{\text{campos vectoriales simplécticos en } M\} \\ \chi_{\text{ham}}(M) &= \{\text{campos vectoriales hamiltonianos en } M\}.\end{aligned}$$

Corolario 4.11.1. Las inclusiones $(\chi_{\text{ham}}(M), [\cdot, \cdot]) \subseteq (\chi_{\text{symp}}(M), [\cdot, \cdot]) \subseteq (\chi(M), [\cdot, \cdot])$ son inclusiones de álgebras de Lie.

Definición 4.18. El corchete de Poisson de dos funciones $f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ es

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g).$$

Además tenemos $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$ debido a que $X_{\omega(X_f, X_g)} = [X_g, X_f]$.

Observación 4.10. El corchete $\{\cdot, \cdot\}$ satisface la identidad de Jacobi, es decir,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Definición 4.19. Un álgebra de Poisson $(P, \{\cdot, \cdot\})$ es un álgebra conmutativa y asociativa P con un corchete de Lie $\{\cdot, \cdot\}$ que cumple con la regla de Leibniz:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Observación 4.11. El corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ definido anteriormente cumple con la regla de Leibniz.

Concluimos que, si (M, ω) es una variedad simpléctica, entonces $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ es un álgebra de Poisson. Además, tenemos una anti-automorfismo de álgebra de Lie:

$$C^\infty(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$H \longmapsto X_H$$

$$\{\cdot, \cdot\} \longmapsto -[\cdot, \cdot].$$

4.10. Sistemas Integrables

Definición 4.20. Un sistema hamiltoniano es una tripleta (M, ω, H) , donde (M, ω) es una variedad simpléctica y $H \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ es una función llamada función hamiltoniana.

Teorema 4.12. *Tenemos $\{f, H\} = 0$ si y solo si f es constante a lo largo de las curvas integrales de X_H .*

Demostración. Sea ρ_t el flujo de X_H . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \rho_t) &= \rho_t^* \mathcal{L}_{X_H} f = \rho_t^* i_{X_H} df \\ &= \rho_t^* i_{X_H} i_{X_f} \omega \\ &= \rho_t^* \omega(X_f, X_H) \\ &= \rho_t^* \{f, H\} = 0. \end{aligned}$$

□

Una función f como en el Teorema 4.12 se llama integral del movimiento (o integral primera o constante del movimiento). En general, los sistemas hamiltonianos no admiten integrales del movimiento que sean independientes de la función hamiltoniana. Funciones f_1, \dots, f_n en M se dicen independientes si sus diferenciales $(df_1)_p, \dots, (df_n)_p$ son linealmente independientes en todos los puntos p en algún subconjunto abierto denso de M . De manera informal, un sistema hamiltoniano es (completamente) integrable si tiene tantas integrales del movimiento conmutativas como sea posible. La conmutatividad es con respecto al corchete de Poisson. Observa que si f_1, \dots, f_n conmutan si f_1, \dots, f_n son integrales del movimiento para un sistema hamiltoniano (M, ω, H) , entonces en cada punto $p \in M$, sus campos vectoriales hamiltonianos generan un subespacio isotrópico de $T_p M$:

$$\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = \{f_i, f_j\} = 0.$$

Si f_1, \dots, f_n son independientes en p , entonces, según el álgebra lineal simpléctica, n puede ser a lo sumo la mitad de la dimensión de M .

Definición 4.21. Un sistema Hamiltoniano (M, w, H) es un sistema (completamente) integrable si posee $n = \frac{\dim M}{2}$ funciones diferenciables independientes ($f_1 = H, f_2, \dots, f_n$) y además se cumple que:

$$\{f_i, f_j\} = 0, \forall i, j.$$

Con la definición de un sistema integrable podemos definir una función f de la siguiente manera:

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n).$$

La siguiente proposición nos dice como es el comportamiento de las pre-imagenes de esta función.

Proposición 4.6. Sea un sistema Hamiltoniano (M, w, H) completamente integrable y sean $(f_1 = H, f_2, \dots, f_n)$ sus funciones independientes. Entonces dado un valor regular "c" de la función f , se cumple que las componentes conexas de $f^{-1}(c)$ son de la forma $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$.

Donde k es un número natural menor que n y T^k es un toro de dimensión k .

Demostración. Sean $(X_{f_1}, X_{f_2}, \dots, X_{f_n})$ los campos vectoriales asociados a (f_1, f_2, \dots, f_n) respectivamente. Y sean $\Phi_{X_{f_1}}^{t_1}, \Phi_{X_{f_2}}^{t_2}, \dots, \Phi_{X_{f_n}}^{t_n}$ sus flujos correspondientes.

Notemos lo siguiente:

$$[X_{f_i}, X_{f_j}] = L_{X_{f_i}} X_{f_j} = 0$$

De esta manera, $\Phi_{X_{f_i}}^{t_1} \Phi_{X_{f_j}}^{t_2} = \Phi_{X_{f_j}}^{t_2} \Phi_{X_{f_i}}^{t_1}$. En otras palabras, los flujos conmutan $\forall i, j$.

Esto nos permite definir $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Diff}(M)$ un homomorfismo de grupos de la siguiente manera:

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Diff}(M)$$

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto \Phi_{X_{f_1}}^{t_1} \circ \Phi_{X_{f_2}}^{t_2} \circ \dots \circ \Phi_{X_{f_n}}^{t_n}.$$

Recordemos que cuando se tiene $G \curvearrowright \mathbb{R}^n$ una acción de un grupo G sobre una variedad M tenemos dos conjuntos importantes que nos ayudan en el estudio de esta función. Dado $x \in M$

1. El conjunto $\{gx/g \in G\}$ se llama orbitas de x . Denotaremos a este conjunto como $O(x)$.
2. El conjunto $\{g \in G/gx = x\}$ se llama estabilizador de x . Denotaremos a este conjunto como $Stab(x)$.

Se tiene por resultado conocido que $O(x) = G/Stab(x)$, para más información puede revisar [7, Capítulo 5].

Regresando a la prueba, tenemos que en nuestro caso $G = \mathbb{R}^n$ y además que $Stab(x) = \mathbb{Z}^k$ para algún k . Ya que el estabilizador es un grupo discreto de \mathbb{R}^n .

Finalmente

$$f^{-1}(c) = O(x) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k) \simeq \mathbb{R}^{n-k} \times T^k.$$

□

4.11. Aplicaciones

Para profundizar en la comprensión de estos conceptos, vamos a abordar un ejercicio relacionado con el péndulo simple. En este proceso, aplicaremos herramientas de la geometría simpléctica para analizar la mecánica del sistema de manera más detallada y esclarecedora.

El Péndulo Simple

Es un sistema mecánico que consta de una varilla rígida de masa despreciable y de longitud l , fijada en un extremo, mientras que en el otro extremo tiene una plomada de masa m , que puede oscilar en el plano vertical. Suponemos que la fuerza de la gravedad es constante y apunta verticalmente hacia abajo, siendo esta la única fuerza externa que actúa en este sistema de una sola partícula.

(a) Sea θ el ángulo orientado entre la varilla (considerada como una masa puntual) y la dirección vertical. Sea ξ la coordenada a lo largo de las fibras de T^*S^1 inducida por la coordenada angular estándar en S^1 . Mostrar que la función $H : T^*S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2ml^2} + ml(1 - \cos \theta),$$

es una función Hamiltoniana adecuada para describir el péndulo esférico. Más precisamente, podemos verificar que la gravedad corresponde a una energía potencial $V(\theta) = ml(1 - \cos \theta)$ (omitimos las constantes universales), y que la energía cinética está dada por $K(\theta, \xi) = \frac{1}{2ml^2}\xi^2$.

(b) Por simplicidad, supongamos que $m = l = 1$. Grafique las curvas de nivel de H en el plano (θ, ξ) . Muestre que existe un número c tal que para $0 < h < c$, la curva de nivel $H = h$ es una unión disjunta de curvas cerradas. Además, demostraremos que la proyección de cada una de estas curvas en el eje θ es un intervalo de longitud menor a π . Mostraremos que ninguna de estas afirmaciones es cierta si $h > c$. Describa los movimientos de estas dos curvas. Analice el caso cuando $H = c$.

(c) Calcule los puntos críticos de la función H . Muestre que, módulo 2π en θ , existen exactamente dos puntos críticos: un punto crítico s donde H se anula y un punto crítico u donde H es igual a c . Estos puntos se llaman puntos estables e inestables de H , respectivamente. Justifique esta terminología, es decir, demuestre que una trayectoria del campo vectorial hamiltoniano de H cuyo punto inicial está cerca de s permanece cerca de s para siempre, y muestre que esto no es cierto para u . Analice lo que está ocurriendo físicamente.

Solución

a) Tenemos $H : TS^1 \rightarrow \mathbb{R}$, pero $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}$.

$$H(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2ml} + ml(1 - \cos \theta).$$

Donde la forma simpléctica es $w = d\theta \wedge d\xi$. Vamos a calcular X_H .

Sea $X_H = a \frac{\partial}{\partial \theta} + b \frac{\partial}{\partial \xi}$

$$dH = ml \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\xi}{ml} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$i_{X_H} w = a d\xi - b d\theta = dH = ml \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\xi}{ml} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

De esta manera tenemos

$$a = \frac{\xi}{ml^2}$$

$$b = -ml\operatorname{sen}\theta$$

Con esto conseguimos los coeficientes del campo $X_H = \frac{\xi}{ml^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - ml\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \xi}$.

Sea $(\lambda(t), \xi(t))$ soluciones de X_H , de esta manera

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\xi(t)}{ml^2}$$

$$\dot{\xi}(t) = -ml\operatorname{sen}\theta(t).$$

Entonces recuperamos la 2da ley de Newton:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) = -ml\operatorname{sen}\theta(t).$$

Definiendo $h = l - l\cos\theta$ como la altura de la partícula con respecto a su punto base y recordando que la energía potencial era de la forma $V = mgh = mgl(1 - \cos\theta) = V(\theta)$. Por otra parte, la energía cinética era de la forma:

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

donde $v = l\dot{\theta}$, entonces

$$K = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2,$$

pero $\xi = ml^2\dot{\theta}$, entonces

$$K = \frac{\xi^2}{2ml^2},$$

de esta manera los valores de $\frac{\xi^2}{2ml^2}$ y $V(\theta)$ corresponden a la energía cinética y potencial además nuestro hamiltoniano definido al inicio estaría asociado a la energía total ².

b)

$$H(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + (1 - \cos\theta)$$

$$X_H = (\xi^2, -\operatorname{sen}\theta).$$

Como H es una función hamiltoniana y TS^1 tiene dimensión 2, entonces $H^{-1}(c)$

²Para más detalles sobre el significado físico puede revisar [8, Capítulo 9].

(sus componentes conexas y acotadas) son T^1 es decir son curvas cerradas. Proponemos como candidato " $c = 2$ ", sean $0 < h < c$.

$$H = \frac{\xi^2}{2} + (1 - \cos\theta) = h < 2,$$

de esta manera tenemos

$$|\xi| < 2$$

$$0 < 1 - \cos\theta < 2,$$

entonces $\theta \in]-\pi, \pi[,]-\pi, \pi[,]0, 2\pi[, \dots$

De esta manera si $h < 2$ las componentes conexas están acotadas y por lo tanto serían curvas cerradas. Si $c < h$ ($h > 2$)

$$\frac{\xi^2}{2} + (1 - \cos\theta) = h > 2,$$

entonces θ no estaría acotado.

El movimiento físico que describe la partícula sería:

i) Las componentes conexas acotadas nos muestran un péndulo oscilando alrededor de $\theta = 0$.

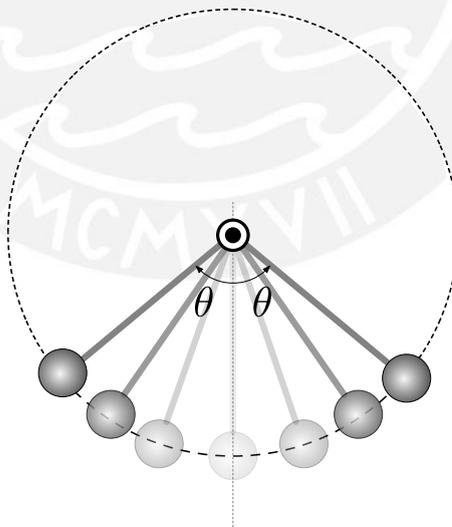


FIGURA 4.1: Péndulo simple oscilando.

Las componentes conexas no acotadas nos muestran un péndulo que empieza con una velocidad inicial y empieza a dar vueltas sin parar.

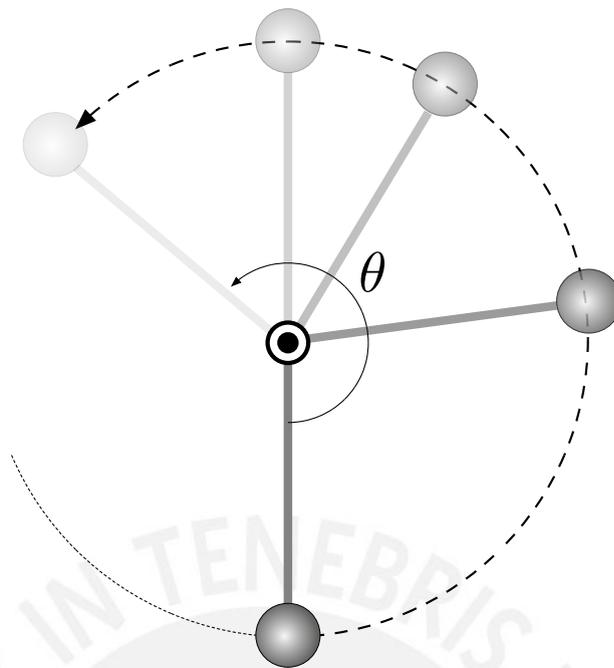


FIGURA 4.2: Péndulo simple girando sin parar.

ii) En el caso $H = c$ el campo $X_H = (0, 0)$ entonces $\theta = n\pi$ y $\xi = 0$. Si n es impar, $1 - \cos\theta = 2$ entonces $H = 2$. Estamos en un punto estacionario. Es decir, el péndulo se quedara inmóvil en esa posición.

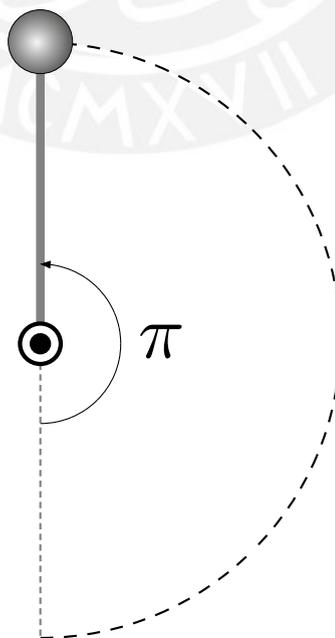


FIGURA 4.3: La partícula se queda quieta.

c) Como $X_H = (0, 0)$ entonces $\theta = n\pi$ y $\xi = 0$. Tenemos como puntos críticos:

- 1) $\theta = 2n\pi$ y $\xi = 0$, vamos a probar que son puntos estables.
- 2) $\theta = (2n + 1)\pi$ y $\xi = 0$, vamos a probar que son puntos inestables.

Proposición La función

$$H(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + (1 - \cos\theta),$$

es una función Liapunov para los puntos $(\theta = 2n\pi, \xi = 0)$. Para ver más detalles de las aplicaciones de una función Liapunov puede revisar [5, Capítulo 5].

Demostración. 1) $H(2n\pi, \xi = 0) = 0$

$$2) H(t) = \frac{\xi^2(t)}{2} + (1 - \cos\theta(t))$$

$$\begin{aligned} H'(t) &= \xi(t)\xi'(t) + \operatorname{sen}\theta(t)\theta'(t) \\ &= \xi(t)(-\operatorname{sen}\theta(t)) + \operatorname{sen}\theta(t)\xi(t) = 0. \end{aligned}$$

□

De esta manera los puntos $(\theta = 2n\pi, \xi = 0)$ son puntos estables por el criterio de Liapunov.

Vamos a probar que los puntos $(\theta = (2n + 1)\pi, \xi = 0)$ son inestables. Sin pérdida de generalidad basta probarlo para $(\pi, 0)$.

Supongamos que $(\pi, 0)$ es estable, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall q \in B((\pi, 0), \delta)$ tenemos:

$$|\varphi(t, q) - (\pi, 0)| < \epsilon,$$

donde $\varphi(t, q)$ es el flujo que inicia del punto q .

Tomando $\epsilon < \pi$ y sea $q = (\theta, \xi)$ donde $\theta < \pi$ ($\theta = \pi - \delta$, $\xi = 0$) entonces $\varphi(t, q)$ es una curva cerrada. Entonces $\exists t_0$ tal que $\varphi(t_0, q) = (0, \xi')$. Reemplazando en la desigualdad:

$$|(0, \xi') - (\pi, 0)| < \epsilon$$

$$|(-\pi, \xi')| < \epsilon,$$

entonces $\pi \leq \epsilon < \pi$ lo cual es una contradicción.



Capítulo 5

Teoría de Invariantes

En este capítulo nos centraremos en explicar un campo significativo de la mecánica clásica, que es la teoría de los invariantes. Abordaremos este tema de manera detallada, pero con un enfoque más físico que matemático. Este enfoque nos llevará a los conceptos de funcionales invariantes y grupos de Lie, los cuales son fundamentales en la geometría diferencial. No obstante, en este caso, veremos cómo se aplican en un contexto físico, principalmente en el ámbito de la mecánica clásica.

5.1. Invariancia

Definición 5.1. Un grupo uniparamétrico de difeomorfismos sobre una variedad “M” es una aplicación suave:

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \Rightarrow M$$

$$(\epsilon, p) \mapsto \varphi(\epsilon, p) = \varphi_\epsilon(p),$$

tal que

- 1) $\varphi_\epsilon : M \Rightarrow M$ es un difeomorfismo.
- 2) $\varphi_0 =$ identidad.
- 3) $\varphi_{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \varphi_{\epsilon_1} \circ \varphi_{\epsilon_2}$.

Definición 5.2. Un grupo de Lie “G” es un grupo y al mismo tiempo es una variedad diferenciable tal que las siguientes aplicaciones son suaves:

1) Operación de producto en $G \times G$:

$$\cdot : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h.$$

2) Operación $(\cdot)^{-1}$ en G :

$$\cdot^{-1} : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}.$$

Sin embargo, en esta sección daremos una definición mucho más física.

Definición 5.3. Sea q^u los grados de libertad de un sistema físico. Entenderemos la acción de un grupo de Lie sobre q^u de la siguiente manera:

$$\varphi(q^u(t)) = q^u(t, \epsilon)$$

En términos simples, la acción de un grupo hace que las coordenadas, en lugar de depender solo del tiempo, ahora dependan de un factor “ ϵ ”.

En nuestro caso tenemos:

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M \quad (5.1.1)$$

$$(\epsilon, t, q^u) \mapsto (t', q'^u) \quad (5.1.2)$$

entonces podemos enunciar de manera general lo siguiente:

$$t' = T(t, q^u, \epsilon)$$

$$q'^u = Q^u(t, q^u, \epsilon).$$

Usando el hecho de que son funciones C^∞ podemos expandirlas en series de potencias de “ ϵ ”.

$$t' = t + \epsilon \frac{\partial T}{\partial \epsilon}(0) + O(\epsilon^s)$$

$$q'^u = q^u + \epsilon \frac{\partial Q^u}{\partial \epsilon}(0) + O(\epsilon^s)$$

Donde $s \geq 2$. Llamaremos $\tau = \frac{\partial T}{\partial \epsilon}(0)$ y $\xi^u = \frac{\partial Q^u}{\partial \epsilon}(0)$. De esta manera tenemos:

$$t' = t + \epsilon\tau + O(\epsilon^s)$$

$$q'^u = q^u + \epsilon\xi^u + O(\epsilon^s).$$

Con esta notación explicada finalmente podemos dar la definición de invariancia

Definición 5.4. Sea $L = L(t, q^u, \dot{q}^u)$ el lagrangiano de un sistema y sea $L' = L(t', q'^u, \dot{q}'^u)$ el lagrangiano evaluado en las variables con dependencia del grupo. Sean

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q^u, \dot{q}^u) dt$$

$$J' = \int_{t'_0}^{t'_1} L(t', q'^u, \dot{q}'^u) dt',$$

sus respectivas acciones. Diremos que L es invariante bajo estas transformaciones si y solo si

$$J' - J \sim O(\epsilon^s); s \geq 2.$$

Esta es una definición muy conveniente, ya que en ningún momento se hacen referencia a coordenadas para definir la invariancia. El único detalle es que la definición implica trabajar con las acciones. Para abordar esto, presentaremos una definición equivalente, pero en términos de los Lagrangianos. Esto se logra de la siguiente manera:

$$J' = \int_{t'_0}^{t'_1} L(t', q'^u, \dot{q}'^u) dt' = \int_{t_0}^{t_1} L' \frac{dt'}{dt} dt,$$

de aquí tenemos:

$$J' - J = \int_{t_0}^{t_1} \left(L' \frac{dt'}{dt} - L \right) dt.$$

Proposición 5.1. Un Lagrangiano L es invariante bajo una acción de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos si y solo si

$$L' \frac{dt'}{dt} - L \sim O(\epsilon^s); s \geq 2.$$

Ahora, disponemos de la definición de invariancia en términos del lagrangiano. A pesar de ello, esta formulación aún resulta ser bastante compleja al llevar a cabo cálculos prácticos. Con el propósito de agilizar este proceso, introduciremos un teorema que no solo facilitará la verificación de la invariancia de manera más eficaz, sino que también nos guiará de forma natural hacia el teorema de Noether.

Observación 5.1. De este punto en adelante, en el transcurso de esta tesis, cada vez que se encuentren índices repetidos (por ejemplo, $q_u \xi^u$), se asumirá automáticamente que implica una sumatoria. No se está considerando ninguna notación contravariante ni covariante en este contexto.

Teorema 5.1. *Un funcional*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

es invariante bajo las transformaciones

$$t' = t + \epsilon \tau + O(\epsilon^s)$$

$$q'^u = q^u + \epsilon \xi^u + O(\epsilon^s),$$

si y solo si

$$\frac{\partial L}{\partial q^u} \xi^u + p_u \dot{\xi}^u + \frac{\partial L}{\partial t} \tau - H \dot{\tau} = 0. \quad (5.1.3)$$

Demostración. Como el funcional es invariante entonces:

$$L' \frac{dt'}{dt} - L \sim O(\epsilon^s); s \geq 2,$$

de aquí, bastaría derivar con respecto a “ ϵ ” y evaluar la derivada en 0. De esta manera obtenemos:

$$L \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{dt'}{dt} \right]_{\epsilon=0} + \left[\frac{dL'}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} = 0.$$

Observando como afecta la transformación al tiempo y a las coordenadas, podemos darnos cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dt} &= 1 + \epsilon \dot{\tau} \\ \frac{dL'}{d\epsilon} &= \frac{\partial L}{\partial q^u} \frac{\partial q^u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^u} \frac{\partial \dot{q}^u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial \epsilon}, \end{aligned}$$

donde

$$\dot{q}'^u = \frac{dq'^u}{dt'} = \frac{dq^u + \epsilon d\xi^u}{dt + \epsilon d\tau} = \frac{\dot{q}^u + \epsilon \dot{\xi}^u}{1 + \epsilon \dot{\tau}}.$$

De esta manera:

$$\left. \frac{\partial \dot{q}^u}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \dot{\xi}^u - \dot{q}^u \dot{\tau},$$

reemplazando esto en nuestra ecuación inicial:

$$L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q^u}\xi^u + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^u}(\dot{\xi}^u - \dot{q}^u \dot{\tau}) = 0. \quad (5.1.4)$$

□

Llamaremos a la expresión

$$\frac{\partial L}{\partial q^u}\xi^u + p_u \dot{\xi}^u + \frac{\partial L}{\partial t}\tau - H\dot{\tau} = 0, \quad (5.1.5)$$

como la identidad de Rund-Trautman ¹, la cual de manera concisa denominaremos **RTI (1)**. Usando algo de álgebra uno puede reescribir la ecuación RTI(1) como:

$$-(\xi^u - \dot{q}^u \tau) \left[\frac{\partial L}{\partial q^u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^u} \right] = \frac{d}{dt} [p_u \xi^u - H\tau]. \quad (5.1.6)$$

Llamaremos a este término **RTI(2)**.

Ejemplo 5.1.

$$L = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right] e^{\frac{bt}{m}},$$

es invariante bajo la transformación:

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon \\ x' &= x + \epsilon \left(\frac{-bx}{2m} \right). \end{aligned}$$

Demostración. Para que el lagrangiano sea invariante se debe cumplir Ecuación 5.1.5. Es decir,

¹Para más referencias puede revisar [9]

$$\frac{\partial L}{\partial x}\xi + p_x\dot{\xi} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau - H\dot{\tau} = 0. \quad (5.1.7)$$

Además de la transformación, podemos obtener que $\tau = 1$ y $\xi = \frac{-bx}{2m}$. Por otra parte, tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (-kx)e\frac{bt}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m\dot{x})e\frac{bt}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{b}{m}L,$$

reemplazando esto en Ecuación 5.1.7 tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{kbx}{2m}e\frac{bt}{m} - \frac{bx^2}{2}e\frac{bt}{m} + \frac{b}{m}L \\ &= \frac{-b}{m} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx}{2} \right] e\frac{bt}{m} + \frac{b}{m}L = 0. \end{aligned}$$

□

No siempre cada Lagrangiano será invariante bajo una transformación. Para ilustrarlo, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2. Sea un Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(t, x),$$

bajo una transformación $t' = t + \epsilon t$ y $x' = x + \frac{1}{2}\epsilon x$ de esta manera $\tau = t$ y $\xi = \frac{x}{2}$. Sin embargo, si reemplazamos los términos en Ecuación 5.1.5 nos queda:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \neq 0.$$

No necesariamente es idénticamente 0 para cualquier $U(t, x)$.

5.2. El Teorema de Noether

En este capítulo, vamos a demostrar uno de los teoremas más importantes en física debido a su amplia variedad de aplicaciones. Para ello, utilizaremos el concepto de invariancia y las identidades RTI que hemos presentado en el capítulo anterior.

Teorema 5.2. (*Teorema de Noether*)

Sea un funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

invariante bajo las transformaciones:

$$t' = t + \epsilon\tau + O(\epsilon^2)$$

$$q'^u = q^u + \epsilon\xi^u + O(\epsilon^2),$$

entonces la curva que es un extremal (la curva real) va a tener la siguiente cantidad conservada

$$p_u \xi^u - H\tau = cte. \quad (5.2.1)$$

Demostración. Como tenemos que nuestro sistema es invariante, entonces se cumple la identidad RTI(2)

$$-(\xi^u - \dot{q}^u \tau) \left[\frac{\partial L}{\partial q^u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^u} \right] = \frac{d}{dt} [p_u \xi^u - H\tau].$$

Dado que nos encontramos en una curva extremal, o en otras palabras, estamos en la curva real, esta debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange. De esta manera, podemos afirmar que:

$$p_u \xi^u - H\tau = cte.$$

□

Ejemplo 5.3. Sea el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] - U.$$

Caso 1: Sea la transformación $t' = t + \epsilon$, $r' = r$, $\theta' = \theta$, y $z' = z$. Si el Lagrangiano L es invariante bajo esta transformación, entonces, según el teorema de Noether, se conserva el Hamiltoniano $H = E = \text{cte}$. Esto implica que la invariancia de traslaciones temporales nos arrojan la conservación del Hamiltoniano, y en este caso particular, dado que $H = E$, la energía también se conserva.

Caso 2: Sea la transformación $t' = t$, $r' = r + \epsilon$, $\theta' = \theta$ y $z' = z$. Si el lagrangiano L es invariante bajo esta transformación, entonces por el teorema de Noether $p_r = \text{cte}$.

Caso 3: Sea la transformación $t' = t$, $r' = r$, $\theta' = \theta + \epsilon$ y $z' = z$. Si el lagrangiano L es invariante bajo esta transformación, entonces por el teorema de Noether $p_\theta = \text{cte}$.

Caso 4: Sea la transformación $t' = t$, $r' = r$, $\theta' = \theta$ y $z' = z + \epsilon$. Si el lagrangiano L es invariante bajo esta transformación, entonces por el teorema de Noether $p_z = \text{cte}$.

Ejemplo 5.4. Sea el lagrangiano:

$$L = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right] e^{\frac{bt}{m}},$$

y sea la transformación $t' = t + \epsilon$ y $x' = x + \epsilon \frac{-bx}{2m}$. Por las cuentas que hicimos antes, ya sabemos que L es invariante bajo estas transformaciones. Entonces por el teorema de Noether obtenemos la siguiente cantidad conservada:

$$\left[\frac{bx\dot{x}}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right] e^{\frac{bt}{m}} = \text{cte}. \quad (5.2.2)$$

Observación 5.2. Cada cantidad conservada proporcionada por el teorema de Noether se manifiesta en el espacio de fase como una hipersuperficie. Por ende, el lugar geométrico en el espacio de fase donde se llevará a cabo el movimiento será la intersección de todas estas hipersuperficies. Dicha intersección constituye la subvariedad lagrangiana que exploramos en el capítulo anterior.

5.3. Búsqueda de Invariantes

En secciones anteriores, solíamos conocer de antemano la transformación bajo la cual nuestro sistema lagrangiano era invariante. En este capítulo, aprenderemos a descubrir estas transformaciones. Para hacerlo, seguiremos el siguiente

procedimiento: Comenzaremos con un lagrangiano fijo, denotado como L , y consideraremos transformaciones arbitrarias de las variables tiempo y coordenadas, es decir, $t' = t + \epsilon\tau + \dots$ y $q'^u = q^u + \epsilon\xi'^u + \dots$. A partir de aquí:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\tau}{\partial q^u} \dot{q}^u$$

$$\dot{\xi}^u = \frac{\partial\xi^u}{\partial t} + \frac{\partial\xi^u}{\partial q^v} \dot{q}^v.$$

Para encontrar los generadores, introduciremos estas ecuaciones en la ecuación RTI(1) y obtendremos términos polinómicos en \dot{q}^u cuyos coeficientes deben ser idénticamente 0. Estos coeficientes nos darán un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que llamaremos ecuaciones de killing y que debemos resolver para encontrar los generadores deseados. Entenderemos mejor esto con un ejemplo.

Ejemplo 5.5. Sea el lagrangiano

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(t, x),$$

vamos a hallar todas sus simetrías para ello usemos:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\tau}{\partial x} \dot{x}$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x} \dot{x}.$$

Reemplazando en RTI(1) tenemos:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} \tau - \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U\right) \left[\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\tau}{\partial x} \dot{x}\right] + m\dot{x} \left[\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x} \dot{x}\right] - \frac{\partial U}{\partial x} \xi = 0,$$

reagrupando de manera polinómica en \dot{x}

$$\left[\frac{-m}{2} \frac{\partial\tau}{\partial x}\right] \dot{x}^3 + \left[\frac{-m}{2} \frac{\partial\tau}{\partial t} + m \frac{\partial\xi}{\partial x}\right] \dot{x}^2 + \left[-U \frac{\partial\tau}{\partial x} + m \frac{\partial\xi}{\partial t}\right] \dot{x} + \left[-\tau \frac{\partial\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial\tau}{\partial t} - \xi \frac{\partial U}{\partial x}\right] = 0,$$

de esta manera obtenemos las ecuaciones de killing.

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\frac{-1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (5.3.2)$$

$$-U \frac{\partial \tau}{\partial x} + m \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial(U\tau)}{\partial t} + \xi \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (5.3.4)$$

De las Ecuación 5.3.1 y Ecuación 5.3.3 tenemos $\tau = \tau(t)$ y $\xi = \xi(x)$. De la Ecuación 5.3.2 tenemos:

$$\frac{d\tau}{dt} = 2 \frac{d\xi}{dx} = C,$$

integrando obtenemos los generadores

$$\tau = Ct + t_0 \quad (5.3.5)$$

$$\xi = \frac{C}{2}x + x_0, \quad (5.3.6)$$

usando el teorma de Noether tendríamos la única cantidad conservada

$$p\left(\frac{C}{2}x + x_0\right) - H(Ct + t_0) = cte. \quad (5.3.7)$$

Para entender mejor esta cantidad conservada, analicemosla por casos:

1er Caso : $C = 0, x_0 = 0$ pero $t_0 \neq 0$.

En este caso tendríamos que $H = E = cte$.

2do Caso : $C = 0, t_0 = 0$ pero $x_0 \neq 0$.

En este caso tendríamos que $p = cte$.

3er Caso : $x_0 = 0, t_0 = 0$ pero $C \neq 0$.

En este caso tendríamos que $\frac{1}{2}px - Ht = cte$ que es la conservación adiabática.

5.4. Potencial tipo oscilador armónico

En esta sección, aplicaremos las técnicas de búsqueda de invariantes que discutimos en la sección anterior para identificar las simetrías en el sistema con un potencial tipo oscilador armónico. Consideremos el siguiente lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k(x)x^2}{2},$$

llamando $U(x) = \frac{k(x)x^2}{2}$. Del capítulo anterior tenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \xi \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (5.4.1)$$

y además

$$\tau = Ct + t_0 \quad (5.4.2)$$

$$\xi = \frac{Cx}{2} + x_0, \quad (5.4.3)$$

y por el teorema de Noether tendríamos

$$p\left(\frac{Cx}{2} + x_0\right) - H(Ct + t_0) = cte.$$

Analizaremos las distintas cantidades conservadas caso por caso.

1) Conservación de Energía: Para que se conserve la energía en el contexto de Noether se debe exigir que $C = 0$, $x_0 = 0$ y $t_0 \neq 0$. Usando esto podemos verificar la Ecuación 5.4.1:

$$U(x)C + \xi(x)\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

como la Ecuación 5.4.1 se cumple independiente de la función $k(x)$ entonces la energía se conservará para cualquier función $k(x)$.

2) Conservación del momento: Para que se conserve el momento en el contexto de Noether se debe exigir $C = 0$, $t_0 = 0$ y $x_0 \neq 0$. Para obtener la función $k(x)$ que permita que el momento sea constante, se debe satisfacer la Ecuación 5.4.1

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

De aquí se obtiene:

$$k(x) = \frac{A}{x^2 x_0^2}.$$

3) Conservación adiabática: Para que se de la conservación adiabática en el contexto de Noether se debe exigir $x_0 = 0$, $t_0 = 0$ y $C \neq 0$. Para obtener la función "k(x)" que permita la conservación adiabática, se debe satisfacer la Ecuación 5.4.1

$$\begin{aligned} U(x)C + \xi(x) \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{dU(x)}{dx} &= -\frac{U(x)C}{\xi(x)} \\ \frac{dU}{U} &= \frac{-C}{\xi} dx, \end{aligned}$$

de aquí, tenemos que:

$$\begin{aligned} \ln(U) &= \int \frac{2dx}{x} \\ k(x) &= \frac{A}{C^2 x^4}. \end{aligned}$$

5.5. Caso general

En este capítulo analizaremos las simetrías de un lagrangiano homogéneo de grado 2 en las velocidades. Es decir:

$$L = \frac{m}{2} g_{uv}(q) \dot{q}^u \dot{q}^v - U(t, q).$$

Observación 5.3. Denotaremos a g^{uv} como la inversa de g_{uv} .

Recordemos que para la acción de un grupo sea invariante se debe satisfacer RTI:

$$\frac{\partial L}{\partial q^u} \xi^u + p_u \dot{\xi}^u + \frac{\partial L}{\partial t} \tau - H \dot{\tau} = 0.$$

En nuestro caso tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = \frac{m}{2} \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \dot{q}^u \dot{q}^v - \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \quad (5.5.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} = m g_{u\lambda} \dot{q}^u \quad (5.5.2)$$

$$H = \frac{1}{2m} g^{uv} p_u p_v + U(t, q) \quad (5.5.3)$$

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^u} \dot{q}^u \quad (5.5.4)$$

$$\dot{\xi}^u = \frac{\partial \xi^u}{\partial t} + \frac{\partial \xi^u}{\partial q^v} \dot{q}^v, \quad (5.5.5)$$

reemplazando en la formula de RTI, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \dot{q}^u \dot{q}^v - \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda + (m g_{u\lambda} \dot{q}^u) \left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial q^v} \dot{q}^v \right) \\ & - \frac{\partial U}{\partial t} \tau - \left(\frac{m}{2} g_{uv} \dot{q}^u \dot{q}^v + U(t, q) \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial q^u} \dot{q}^u \right) = 0, \end{aligned}$$

agrupando tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{-m}{2} g_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial q^l} \dot{q}^l \dot{q}^u \dot{q}^v + \left(\frac{m}{2} \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda + m g_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^v} - \frac{m}{2} g_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \dot{q}^u \dot{q}^v \\ & + (m g_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} - U \frac{\partial \tau}{\partial q^u}) \dot{q}^u + \left(-\frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda - \frac{\partial U}{\partial t} \tau - U \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Aquí uno puede verse tentado a decir que las ecuaciones de killing son:

- 1) $\frac{\partial \tau}{\partial q^l} = 0$
- 2) $\frac{1}{2} \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda + g_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^v} - \frac{1}{2} g_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$

$$3) \quad mg_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} - U \frac{\partial \tau}{\partial q^u} = 0$$

$$4) \quad \frac{\partial(U\tau)}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda = 0.$$

Designaremos a estas ecuaciones como el '*Caso Simplificado*'. Sin embargo, esta formulación no abarca el escenario completo, dado que no contemplamos la presencia de términos simétricos distintos de cero. Para alcanzar una descripción más abarcadora, es necesario simetrizar los coeficientes, lo que nos conducirá a las ecuaciones de Killing. Por lo tanto, es imperativo reformular el polinomio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left(\frac{-m}{2} g_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial q^l} + \frac{-m}{2} g_{ul} \frac{\partial \tau}{\partial q^v} + \frac{-m}{2} g_{lv} \frac{\partial \tau}{\partial q^u} \right) \dot{q}^l \dot{q}^u \dot{q}^v \\ & + \frac{1}{2} \left(m \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda + mg_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^v} - mg_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} + mg_{\lambda v} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^u} \right) \dot{q}^u \dot{q}^v \\ & + \left(mg_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} - U \frac{\partial \tau}{\partial q^u} \right) \dot{q}^u + \left(-\frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda - \frac{\partial U}{\partial t} \tau - U \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = 0, \end{aligned}$$

de esta manera las ecuaciones de killing serían:

$$1) \quad \left(g_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial q^l} + g_{ul} \frac{\partial \tau}{\partial q^v} + g_{lv} \frac{\partial \tau}{\partial q^u} \right) = 0$$

$$2) \quad \left(m \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda + mg_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^v} + mg_{\lambda v} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^u} - mg_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = 0$$

$$3) \quad mg_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} - U \frac{\partial \tau}{\partial q^u} = 0$$

$$4) \quad \frac{\partial(U\tau)}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda = 0$$

Aunque estas ecuaciones presentan una mayor completitud, es importante destacar que dan lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales notablemente complejo de resolver. Por consiguiente, no conviene descartar por completo el enfoque simplificado. A pesar de no proporcionar la solución general, tiene su propio valor, ya que su simplicidad permite una verificación más sencilla y facilita la obtención de soluciones analíticas. Por esta razón, no deberíamos subestimar su utilidad.

5.5.1. Simetrías en coordenadas polares, caso simplificado

Una aplicación directa del capítulo anterior es encontrar las simetrías en las coordenadas polares de una partícula en el caso simplificado. Para llevarlo a cabo, consideremos el siguiente lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(t, r, \theta).$$

En este caso tenemos:

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (5.5.6)$$

reemplazando en las ecuaciones de killing, nos queda:

- 1) $\tau = \tau(t)$
- 2) $\frac{1}{2} \frac{\partial g_{uv}}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda + g_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \dot{q}^v} - \frac{1}{2} g_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$
- 3) $m g_{\lambda u} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} = 0$
- 4) $\frac{\partial(U\tau)}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} \xi^\lambda = 0,$

de la ecuación 3) se desprende que $\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial t} = 0$. La ecuación debe analizarse por casos:

1er caso: $u = 1, v = 1$

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{\partial \xi^1}{\partial r} - \frac{m}{4} \dot{r} \\ 2 \frac{\partial \xi^1}{\partial r} = \dot{r}. \end{aligned}$$

2do caso: $u = 1, v = 2$

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta} &= 0 \\ \xi^1 &= \xi^1(r). \end{aligned}$$

3er caso: $u = 2, v = 1$

$$\frac{mr^2}{2} \frac{\partial \xi^2}{\partial r} = 0$$

$$\xi^2 = \xi^2(\theta),$$

de aquí, podemos obtener τ y ξ^1 .

$$\tau = Ct + t_0$$

$$\xi^1 = \frac{C}{2}r + r_0.$$

Estos resultados debemos utilizarlos en el último caso.

4to caso: $u = 2, v = 2$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} + r\xi^1 - \frac{r^2}{2}C = 0$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = \frac{r^2}{2}C - r\left(\frac{C}{2}r + r_0\right) = -rr_0,$$

entonces $r_0 = 0$. En resumen, nos queda lo siguiente:

$$\tau = Ct + t_0 \tag{5.5.7}$$

$$\xi^1 = \frac{C}{2}r \tag{5.5.8}$$

$$\xi^2 = \theta_0, \tag{5.5.9}$$

reemplazando en el teorema de Noether:

$$p_r\left(\frac{C}{2}r\right) + p_\theta\theta_0 - H(Ct + t_0) = cte. \tag{5.5.10}$$

De esta manera podemos clasificar las simetrías:

Conservacion de Energía: $C = 0, \theta_0 = 0$. De aquí $\tau = t_0, \xi^1 = 0$ y $\xi^2 = 0$. Reemplazando en la ecuación 4).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

de esta manera, tenemos una condición necesaria $U = U(r, \theta)$ para la conservación de la energía.

Conservación del momento angular: $C = 0, t_0 = 0$. De aquí, $\tau = 0, \xi^1 = 0$ y $\xi^2 = \theta_0$. Reemplazando en la ecuación 4)

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

de esta manera, tenemos una condición necesaria $U = U(t, r)$ para la conservación del momento angular.

Conservación semiadivática: Esta cantidad conservada es $\frac{p_r r}{2} - Ht = cte$ y en el contexto de Noether se consigue cuando $\theta_0 = 0, t_0 = 0$. De aquí, $\tau = Ct$, $\xi^1 = \frac{C}{2}r$ y $\xi^2 = 0$. Reemplazando en la ecuación 4) y tomando $U = U(r, \theta)$

$$UC + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{Cr}{2} = 0$$

$$U = \frac{D}{r^2},$$

de esta manera, tenemos una condición necesaria $U = \frac{D}{r^2}$ para la conservación de la semiadivática.

5.6. Simetrías en el Electromagnetismo

En este capítulo, nos adentraremos en el análisis de las simetrías en el contexto del electromagnetismo. Para lograrlo, tomaremos como punto de partida el lagrangiano electromagnético, lo que nos permitirá derivar las ecuaciones de Killing correspondientes.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - e\phi + \frac{e}{c}(\dot{q}_1 A_1 + \dot{q}_2 A_2 + \dot{q}_3 A_3).$$

Vamos a calcular los términos que aparecen en la ecuación RTI(1):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} = m\dot{q}_u + \frac{e}{c}A_u \quad (5.6.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_u} = \frac{e}{c} \dot{q}_v \frac{\partial A_v}{\partial q_u} - e \frac{\partial \phi}{\partial q_u} \quad (5.6.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -e \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{e}{c} \dot{q}_u \frac{\partial A_u}{\partial t} \quad (5.6.3)$$

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (5.6.4)$$

$$\dot{\xi}^u = \frac{\partial \xi^u}{\partial \dot{q}_v} + \frac{\partial \xi^u}{\partial t} \quad (5.6.5)$$

$$H = \frac{1}{2m} \delta_{uv} p_u p_v + e\phi, \quad (5.6.6)$$

reemplazando en la fórmula RTI(1) tenemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{m}{2} \delta_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial q_l} \dot{q}_u \dot{q}_v \dot{q}_l + \left(m \frac{\partial \xi^u}{\partial q_v} - \frac{m}{2} \delta_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \dot{q}_u \dot{q}_v \\ & + \left(\frac{e}{c} \frac{\partial A_u}{\partial q_v} \xi^v + m \frac{\partial \xi^u}{\partial t} + \frac{e}{c} A_v \frac{\partial \xi^v}{\partial q_u} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_u}{\partial t} \tau - e\phi \frac{\partial \tau}{\partial q_u} \right) \dot{q}_u \\ & - e \frac{\partial \phi}{\partial q_u} \xi^u + \frac{e}{c} A_u \frac{\partial \xi^u}{\partial t} - e \frac{\partial \phi}{\partial t} \tau - e\phi \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos las siguientes ecuaciones de killing:

- 1) $\delta_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial q_l} + \delta_{lu} \frac{\partial \tau}{\partial q_v} + \delta_{vl} \frac{\partial \tau}{\partial q_u} = 0$
- 2) $\frac{\partial \xi^u}{\partial q_v} + \frac{\partial \xi^v}{\partial q_u} - \delta_{uv} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$
- 3) $\left(\frac{e}{c} \frac{\partial A_u}{\partial q_v} \xi^v + m \frac{\partial \xi^u}{\partial t} + \frac{e}{c} A_v \frac{\partial \xi^v}{\partial q_u} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_u}{\partial t} \tau - e\phi \frac{\partial \tau}{\partial q_u} \right) = 0$
- 4) $-e \frac{\partial \phi}{\partial q_u} \xi^u + \frac{e}{c} A_u \frac{\partial \xi^u}{\partial t} - e \frac{\partial \phi}{\partial t} \tau - e\phi \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$

Para un sistema determinado, nos encontramos ante el desafío de resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con el objetivo de identificar todas las posibles simetrías. Sin embargo, la complejidad de esta tarea puede aumentar significativamente dependiendo de la naturaleza específica del sistema en estudio. A pesar de ello, nos proponemos demostrar las condiciones que tanto el campo ϕ

como los campos A_u deben cumplir para obtener las simetrías más fundamentales: la conservación de la energía y la conservación del momento.

Conservación de Energía: Según el teorema de Noether tenemos;

$$p_1\xi^1 + p_2\xi^2 + p_3\xi^3 - H\tau = cte.$$

De esta manera, para confirmar la conservación de la energía en el sistema, es esencial que las ecuaciones de Killing se cumplan cuando $\xi^u = 0$ y $\tau = 1$ (Desde el punto de vista físico, esta afirmación indica que el sistema exhibe invariancia ante traslaciones en el tiempo).

En efecto,

Como ξ^u y τ son constantes entonces satisfacen las ecuaciones **1)** y **2)**. Finalmente las ecuaciones **3)** y **4)** nos dan la condición requerida para la conservación de energía.

$$\frac{\partial A_u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Conservación de momentum: Según el teorema de Noether tenemos;

$$p_1\xi^1 + p_2\xi^2 + p_3\xi^3 - H\tau = cte.$$

De esta manera, para confirmar la conservación de momentum en un eje entonces se debe pedir que las ecuaciones de Killing se satisfagan cuando solo un $\xi^u \neq 0$ y $\tau = 0$ (Desde el punto de vista físico, esta afirmación indica que el sistema exhibe invariancia ante traslaciones en la dirección q^u).

Por ejemplo, si queremos la conservación de momentum en el eje x se deben verificar las ecuaciones de Killing cuando $\xi^1 = 1$ y $\xi^2 = \xi^3 = \tau = 0$.

En efecto,

Como ξ^u y τ son constantes entonces satisfacen las ecuaciones **1)** y **2)**. Finalmente las ecuaciones **3)** y **4)** nos dan la condición requerida para la conservación de momentum en "x".

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A_u}{\partial x} = 0,$$

de este modo, si nuestro sistemas presenta conservación del momentum en todas las direcciones, entonces el criterio necesario que debe cumplir es $\phi = \phi(t)$ y $A_u = A_u(t)$.

5.6.1. Lagrangiano de Storer

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eM\rho^2\dot{\phi}^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

para este caso tomaremos $q_1 = \rho, q_2 = \phi$ y $q_3 = z$. Vamos a calcular los términos que aparecen en la ecuación $RTI(1)$.

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \dot{\phi} \left[m\rho + \frac{eM\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (2z^2 - \rho^2) \right] \quad (5.6.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (5.6.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{-3eM\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \dot{\phi} \quad (5.6.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad (5.6.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (5.6.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} + \frac{eM\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.6.12)$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2), \quad (5.6.13)$$

reemplazando en las ecuaciones $RTI(1)$ obtenemos las siguientes ecuaciones de Killing:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = \frac{\partial \tau}{\partial \phi} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (5.6.14)$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \rho} - \frac{\dot{\tau}}{2} = 0 \quad (5.6.15)$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} - \frac{\dot{\tau}}{2} = 0 \quad (5.6.16)$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial z} - \frac{\dot{\tau}}{2} = 0 \quad (5.6.17)$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} + \rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} = 0 \quad (5.6.18)$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial z} + \frac{\partial \xi^3}{\partial \rho} = 0 \quad (5.6.19)$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial \phi} + \rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial z} = 0 \quad (5.6.20)$$

$$m \frac{\partial \xi^1}{\partial t} + \frac{eM\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} = 0 \quad (5.6.21)$$

$$m \frac{\partial \xi^3}{\partial t} + \frac{eM\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \xi^2}{\partial z} = 0 \quad (5.6.22)$$

$$m \frac{\partial \xi^2}{\partial t} + \frac{eM\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} + \left\{ [m\rho + \frac{eM\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(2z^2 - \rho^2)] \xi^1 - \frac{3eM\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \xi^3 \right\} = 0 \quad (5.6.23)$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial t} = 0. \quad (5.6.24)$$

Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que debemos resolver. Primero notemos que $\tau = \tau(t)$ y que ξ^2 no depende del tiempo reemplazando esto en la Ecuación 5.6.16 tenemos que para que satisfaga la igualdad ambos términos deben ser iguales a una constante. De esta manera:

$$\tau = Ct + t_0 \quad (5.6.25)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + f_2(\rho, z), \quad (5.6.26)$$

donde f_2 es una función que depende solamente de ρ y de z . Reemplazando τ en las ecuaciones Ecuación 5.6.15 y Ecuación 5.6.17 y haciendo un procedimiento análogo tenemos:

$$\tau = Ct + t_0 \quad (5.6.27)$$

$$\xi^1 = \frac{C\rho}{2} + f_1(\phi, z, t) \quad (5.6.28)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + f_2(\rho, z) \quad (5.6.29)$$

$$\xi^3 = \frac{Cz}{2} + f_3(\rho, \phi, t), \quad (5.6.30)$$

reemplazando en la ecuación Ecuación 5.6.18 tenemos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi}(\phi, z, t) + \rho^2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, z) = 0,$$

de aquí, tenemos que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi}(\phi, z, t) = -\rho^2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, z).$$

Como son funciones de distintas variables entonces para que se tenga una igualdad ambas funciones deben ser igual a una función que dependa únicamente de z . Es decir,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi}(\phi, z, t) + \rho^2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, z) = 0,$$

de aquí, tenemos que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi}(\phi, z, t) = -\rho^2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, z) = k_1(z),$$

de esta manera f_1 y f_2 nos quedan:

$$f_1 = k_1(z)\phi + g_1(z, t)$$

$$f_2 = \frac{k_1(z)}{\rho} + g_2(z),$$

donde g_2 es una función que depende únicamente de z y g_1 es una función que depende de z y de t . Resumiendo los valores ξ^i son:

$$\xi^1 = \frac{C\rho}{2} + k_1(z)\phi + g_1(z, t) \quad (5.6.31)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + \frac{k_1(z)}{\rho} + g_2(z) \quad (5.6.32)$$

$$\xi^3 = \frac{Cz}{2} + f_3(\rho, \phi, t), \quad (5.6.33)$$

ahora reemplazaremos estos valores en la Ecuación 5.6.19

$$k'_1(z)\phi + \frac{\partial g_1}{\partial z}(z, t) + \frac{\partial f_3}{\partial \rho}(\rho, \phi, t) = 0,$$

de aquí, tenemos que:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \rho}(\rho, \phi, t) = -k'_1(z)\phi - \frac{\partial g_1}{\partial z}(z, t)$$

$$f_3(\rho, \phi, t) = -\rho(k'_1(z)\phi + \frac{\partial g_1}{\partial z}(z, t)) + g_3(\phi, t).$$

Notemos en esta última ecuación que si hacemos $\phi = 0$ nos queda:

$$f_3(\rho, 0, t) = -\rho\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}(z, t)\right) + g_3(0, t),$$

entonces debe cumplirse que $\frac{\partial g_1}{\partial z}(z, t)$ debe ser una función del tiempo. Es decir,

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}(z, t) = \lambda_0(t),$$

de esta manera:

$$g_1(z, t) = \lambda_0(t)z + \lambda_1(t).$$

Ahora si reemplazamos $\phi = 1$ tenemos:

$$f_3(\rho, 1, t) = -\rho(k'_1(z) + \lambda_0(t)) + g_3(\phi, t),$$

entonces $k'_1(z) = D = \text{constante}$. Resumiendo tenemos los siguientes valores de ξ^i :

$$\xi^1 = \frac{C\rho}{2} + (Dz + z_0)\phi + (\lambda_0(t)z + \lambda_1(t)) \quad (5.6.34)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + \frac{(Dz + z_0)}{\rho} + g_2(z) \quad (5.6.35)$$

$$\xi^3 = \frac{Cz}{2} - \rho(\lambda_0(t) + D\phi) + g_3(\phi, t), \quad (5.6.36)$$

reemplazando en la Ecuación 5.6.20 tenemos:

$$\frac{\partial g_3}{\partial \phi}(\phi, t) = -g'_2(z).$$

Esta ecuación tiene como única solución $g'(z) = 0$ ya que del lado izquierdo tenemos una ecuación con dos variables y del lado derecho una ecuación de una variable. De esta manera, nos queda:

$$g_2 = L_0 = \text{constante}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \phi}(\phi, t) = 0.$$

En resumen, los valores de los ξ^i son:

$$\xi^1 = \frac{C\rho}{2} + (Dz + z_0)\phi + (\lambda_0(t)z + \lambda_1(t)) \quad (5.6.37)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + \frac{(Dz + z_0)}{\rho} + L_0 \quad (5.6.38)$$

$$\xi^3 = \frac{Cz}{2} - \rho(\lambda_0(t) + D\phi) + g_3(t). \quad (5.6.39)$$

Finalmente vamos a usar las 3 últimas ecuaciones de killing. Empezemos por la Ecuación 5.6.21

$$(\lambda'_0(t)z + \lambda'_1(t)) = \frac{eM}{m(\rho^2 + z^2)}(Dz + z_0),$$

de aquí, tenemos $\lambda'_0(t) = \lambda'_1(t) = 0$ (es decir λ_0 y λ_1 son constantes) y $D = z_0 = 0$. Reescribiendo los valores de ξ^i tenemos:

$$\xi^1 = \frac{C\rho}{2} + (\lambda_0 z + \lambda_1) \quad (5.6.40)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + L_0 \quad (5.6.41)$$

$$\xi^3 = \frac{Cz}{2} - \rho\lambda_0 + g_3(t). \quad (5.6.42)$$

Usemos ahora la Ecuación 5.6.22, nos quedaría:

$$g'_3(t) = 0$$

De esta manera, g_3 es una constante que llamaremos a_0 . Esto reduce los valores de los ξ^i . Estos serían:

$$\xi^1 = \frac{C\rho}{2} + (\lambda_0 z + \lambda_1) \quad (5.6.43)$$

$$\xi^2 = \frac{C\phi}{2} + L_0 \quad (5.6.44)$$

$$\xi^3 = \frac{Cz}{2} - \rho\lambda_0 + a_0. \quad (5.6.45)$$

Finalmente, vamos a reemplazar la última ecuación, lo que nos dará un polinomio que debe ser idénticamente nulo.

$$\left\{ \left[m\rho + \frac{eM\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (2z^2 - \rho^2) \right] \left(\frac{C\rho}{2} + \lambda_0 z + \lambda_1 \right) - \frac{3eM\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{Cz}{2} - \rho\lambda_0 + a_0 \right) \right\} = 0,$$

de esta manera, tenemos $C = \lambda_0 = \lambda_1 = a_0 = 0$. Con esto las únicas simetrías que tenemos son:

$$\tau = t_0$$

$$\xi^1 = 0$$

$$\xi^2 = L_0$$

$$\xi^3 = 0,$$

de este modo, obtenemos que las únicas cantidades conservadas son la energía y el momento angular.

5.7. Simetrías en el caso Relativista

Nuestro formalismo matemático de acciones de grupo está formulado para aplicarse en cualquier tipo de variedad. Por lo tanto, podemos aplicar todo el desarrollo matemático cuando trabajemos en el caso relativista. La única diferencia será que ahora las curvas en el espacio-tiempo estarán parametrizadas por un factor 's' en lugar del tiempo 't'. Tomando las precauciones necesarias, enunciaremos las ecuaciones RTI para el caso relativista.

$$\xi^\lambda = \xi^\lambda(s, q)$$

$$\tau = \tau(s, q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^u} \dot{\xi}^u + p_u \dot{\xi}^u + \frac{\partial L}{\partial s} \tau - H \dot{\tau} = 0. \quad (5.7.1)$$

Esto nos permitirá abordar una variedad más amplia de sistemas físicos. No obstante, en este trabajo nos enfocaremos únicamente en el caso de una partícula libre.

5.7.1. Partícula libre

Tenemos el siguiente lagrangiano:

$$L = -mc\sqrt{\eta_{uv}\dot{x}^u\dot{x}^v}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$H = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} = \frac{-mc}{\sqrt{\eta_{uv}\dot{x}^u\dot{x}^v}}\eta_{\lambda v}\dot{x}^v,$$

reemplazando en la formula RTI(1) tenemos:

$$\frac{-mc}{\sqrt{\eta_{uv}\dot{x}^u\dot{x}^v}}g_{\lambda v}\dot{x}^v\left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial s} + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^l}\dot{x}^l\right) = 0$$

$$\eta_{\lambda v}\dot{x}^v\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial s} + g_{\lambda v}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^l}\dot{x}^l = 0,$$

de aquí, obtenemos las ecuaciones de killing

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\xi^\lambda}{x^l},$$

de aquí, $\xi^1 = a_1$, $\xi^2 = a_2$, $\xi^2 = a_2$ y $\xi^3 = a_3$ donde a_i son constantes. Entonces usando el teorema de Noether:

$$p_0a_0 + p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 = cte,$$

como los valores de $a(i)$ pueden ser arbitrarios, entonces tenemos:

$$p_0 = cte$$

$$p_1 = cte$$

$$p_2 = cte$$

$$p_3 = cte.$$

En conclusión, el teorema de Noether nos da la conservación del cuádrimomento.



Capítulo 6

Aplicaciones

En el transcurso de este capítulo, exploraremos ejemplos concretos que demuestran cómo la teorías de invariantes y geometría simpléctica convergen de manera significativa para abordar cuestiones físicas. Este entrelazamiento nos ofrece una perspectiva innovadora para la resolución de problemas en la mecánica, proporcionando un enfoque más geométrico para enfrentar diversas situaciones en el ámbito de la mecánica clásica.

A continuación, presentamos un procedimiento meticuloso que fusiona los principios de la teoría de invariantes y la geometría simpléctica. El objetivo primordial de este procedimiento es discernir trayectorias periódicas en un sistema dado, simultáneamente desentrañando las simetrías intrínsecas que subyacen en dicho sistema. El esquema de este algoritmo se desglosa de la siguiente manera:

1. **Definición del Lagrangiano (L):** Iniciamos tomando L como el Lagrangiano que describe el sistema en análisis, estableciendo así la base esencial para el estudio.
2. **Identificación de Simetrías con Ecuaciones de Killing:** Mediante la aplicación meticulosa de las ecuaciones de Killing, identificamos las simetrías fundamentales inherentes al sistema, proporcionando una comprensión detallada de su estructura subyacente.
3. **Traducción de Simetrías al Lenguaje de Momentos:** Transponemos estas simetrías al lenguaje de momentos, capitalizando la Proposición 4.6 del

capítulo de geometría simpléctica. Este enfoque nos capacita para analizar minuciosamente el comportamiento de las superficies lagrangianas.

4. **Análisis de Características de Subvariedades Lagrangianas:** Al examinar con detenimiento las características de las subvariedades lagrangianas, determinamos de manera concluyente la presencia o ausencia de trayectorias periódicas en el sistema.

Este procedimiento no solo integra de manera coherente la teoría de invariantes y la geometría simpléctica, sino que también ofrece una metodología paso a paso, revelando la complejidad intrínseca de los sistemas dinámicos mientras busca comprender sus trayectorias periódicas.

Vamos a ilustrar esto con dos ejemplos.

6.1. Lagrangiano de Störmer en el plano

El lagrangiano de Störmer es:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eM\rho^2\dot{\phi}^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vamos a analizar el movimiento en el plano $z = 0$. De esta manera el nuevo lagrangiano sería:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{eM\dot{\phi}}{\rho}.$$

Vamos a calcular los elementos que intervienen en la ecuación RTI(1):

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{eM\dot{\phi}}{\rho^2} \quad (6.1.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2 \dot{\phi} + \frac{eM}{\rho} \quad (6.1.4)$$

$$H = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{m}{2} \rho^2 \dot{\phi}^2, \quad (6.1.5)$$

reemplazando en la ecuación RTI(1) tenemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{m}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \dot{\rho}^3 - \frac{m}{2} \rho^2 \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \dot{\phi}^3 - \frac{m}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \dot{\rho}^2 \dot{\phi} - \frac{m}{2} \rho^2 \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \dot{\phi}^2 \dot{\rho} + (m\rho^2 \xi^1 + m\rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} - \frac{1}{2} m\rho^2 \frac{\partial \tau}{\partial t}) \dot{\phi}^2 \\ & + (m \frac{\partial \xi^1}{\partial \rho} - \frac{m}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t}) \dot{\rho}^2 + (m \frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} + m\rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho}) \dot{\phi} \dot{\rho} + (m \frac{\partial \xi^1}{\partial t} + \frac{eM}{\rho} \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho}) \dot{\rho} \\ & + (m\rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial t} + \frac{eM}{\rho} \frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} - \frac{eM}{\rho^2} \xi^1) \dot{\phi} + \frac{eM}{\rho} \frac{\partial \xi^2}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

De esta manera las ecuaciones de killing serían:

- 1) $\tau = \tau(t)$
- 2) $\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} - \frac{1}{2} \dot{\tau} + \xi^1 = 0$
- 3) $\frac{\partial \xi^1}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \dot{\tau} = 0$
- 4) $\frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} + \rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} = 0$
- 5) $m \frac{\partial \xi^1}{\partial t} + \frac{eM}{\rho} \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} = 0$
- 6) $\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} - \frac{\xi^1}{\rho} = 0$
- 7) $\xi^2 = \xi^2(\rho, \phi)$.

Vamos a resolver este sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Usando 7) en 6) tenemos:

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi}(\rho, \phi) = \frac{\xi^1}{\rho}(\rho, \phi, t),$$

de esta manera, nos queda $\xi^1 = \xi^1(\rho, \phi)$. Reemplazando este resultado en 5) tenemos:

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} = 0,$$

de esta manera, tenemos $\xi^2 = \xi^2(\phi)$. Reemplazando en 4):

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} = 0,$$

de esta manera, tenemos $\xi^1 = \xi^1(\rho)$. Reemplazando en 3) tenemos:

$$\begin{aligned} \tau &= Ct + t_0 \\ \xi^1 &= \frac{C}{2}\rho + a_0, \end{aligned}$$

reemplazando en 2) tenemos:

$$\xi^2 = \frac{C}{2}\phi + \frac{a_0\phi}{\rho} + b_0.$$

Finalmente reemplazando en 6) tenemos:

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} - \frac{1}{2}\dot{\tau} + \xi^1 = 0$$

$$\frac{C}{2} + \frac{a_0}{\rho} - \frac{C}{2} + \frac{C\rho}{2} + a_0 = 0$$

$$\frac{C}{2}\rho^2 + a_0\rho + a_0 = 0,$$

de aquí, tenemos $C = a_0 = 0$. De esta manera las únicas simetrías que tiene nuestro sistema son:

$$\tau = t_0 \tag{6.1.6}$$

$$\xi^1 = 0 \tag{6.1.7}$$

$$\xi^2 = b_0, \quad (6.1.8)$$

usando el teorema de Noether tenemos:

$$p_\phi b_0 - H t_0 = cte.$$

Haciendo $t_0 = 1$ y $b_0 = 0$ tenemos $H = cte$. Haciendo $b_0 = 1$ y $t_0 = 0$ tenemos $p_\phi = cte$ que serían nuestras cantidades conservadas.

Si bien estas son las simetrías de nuestro sistema este resultado por si solo no nos sirve para analizar la existencia de curvas periódicas. Para lograrlo tenemos que escribir estas simetrías en lenguaje del espacio de fase y aplicar Proposición 4.6. Es decir, sea nuestra variedad simpléctica $M = ((0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con la forma simpléctica $w = d\rho \wedge dP_\rho + d\phi \wedge dP_\phi$ vamos a definir las siguientes funciones:

$$H : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\rho, \phi, P_\rho, P_\phi) \mapsto H(\rho, \phi, P_\rho, P_\phi) = \frac{P_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(P_\phi - \frac{eM}{\rho}\right)^2,$$

y la función

$$L_\phi : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\rho, \phi, P_\rho, P_\phi) \mapsto L(\rho, \phi, P_\rho, P_\phi) = P_\phi.$$

Notemos que estas dos funciones estan inspiradas en las cantidades que ya sabemos que van a ser constantes gracias al teorema de Noether. Lo que vamos a hacer a continuación es verificar en el contexto de geometría simpléctica si forman un sistema completamente integrable. Es decir, vamos a probar que $\{H, L_\phi\} = 0$.

Recordemos que $\{H, L_\phi\} = w(X_H, X_{L_\phi})$ donde:

$$i_{X_H} w = dH$$

$$dH = \left[\left(P_\phi - \frac{eM}{\rho}\right) \frac{eM}{m\rho^4} - \left(P_\phi - \frac{eM}{\rho}\right)^2 \frac{1}{m\rho^3} \right] d\rho + \frac{P_\rho}{m} dP_\rho + \frac{1}{m\rho^2} \left(P_\phi - \frac{eM}{\rho}\right) dP_\phi,$$

de esta manera

$$X_H = \left(\frac{P_\rho}{m}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(P_\phi - \frac{eM}{\rho}\right) \frac{1}{m\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - \left(P_\phi - \frac{eM}{\rho}\right) \frac{eM}{m\rho^4} \frac{\partial}{\partial P_\rho},$$

además $X_{L_\phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}$, de esta manera:

$$\{H, L_\phi\} = w(X_H, X_{L_\phi}) = (i_{X_H} w)(X_{L_\phi}) = dH\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) = 0.$$

Ahora tenemos un sistema completamente integrable y podemos usar la Proposición 4.6 entonces tenemos que definir la función $f = (H, L_\phi)$ y las componente conexas de sus valores regulares van a ser de la forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R} \times S^1$ o T^2 . En un primer paso, vamos a ver como son los valores regulares de la función f .

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \rho} & \frac{\partial H}{\partial \phi} & \frac{\partial H}{\partial P_\rho} & \frac{\partial H}{\partial P_\phi} \\ \frac{\partial L_\phi}{\partial \rho} & \frac{\partial L_\phi}{\partial \phi} & \frac{\partial L_\phi}{\partial P_\rho} & \frac{\partial L_\phi}{\partial P_\phi} \end{bmatrix},$$

reemplazando el valor de H y de L_ϕ tenemos:

$$df = \begin{bmatrix} (P_\phi - \frac{eM}{\rho})\frac{eM}{m\rho^4} - (P_\phi - \frac{eM}{\rho})^2\frac{1}{m\rho^3} & 0 & \frac{P_\rho}{m} & \frac{1}{m\rho^2}(P_\phi - \frac{eM}{\rho}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera los valores regulares van a ser aquellos donde no se cumple la condición de $\{(P_\phi) = \frac{2eM}{\rho} \vee P_\phi = \frac{eM}{\rho}\} \wedge (P_\rho = 0)$. La siguiente proposición nos va dar las formas de las preimágenes de f .

Proposición 6.1. Sea (E, l) un valor regular de la función $f = (H, L_\phi)$ entonces sus componentes conexas van a ser de la forma T^2 (toro) o $\mathbb{R} \times S^1$

Demostración. Notemos que si $(\rho, \phi, P_\rho, P_\phi) \in f^{-1}(E, l)$ tenemos:

$$\frac{P_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}(P_\phi - \frac{eM}{\rho})^2 = E \quad (6.1.9)$$

$$P_\phi = l \quad (6.1.10)$$

Recordemos que por la Proposición 4.6 las componentes conexas de $f^{-1}(E, l)$ son de la forma $\mathbb{R}^k \times T^{2-k}$. Notemos que tanto ϕ y P_ϕ están acotadas entonces queda descartado que $f^{-1}(E, l)$ sea de la forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces las componentes conexas de $f^{-1}(E, l)$ son de la forma T^2 o $\mathbb{R} \times S^1$.

□

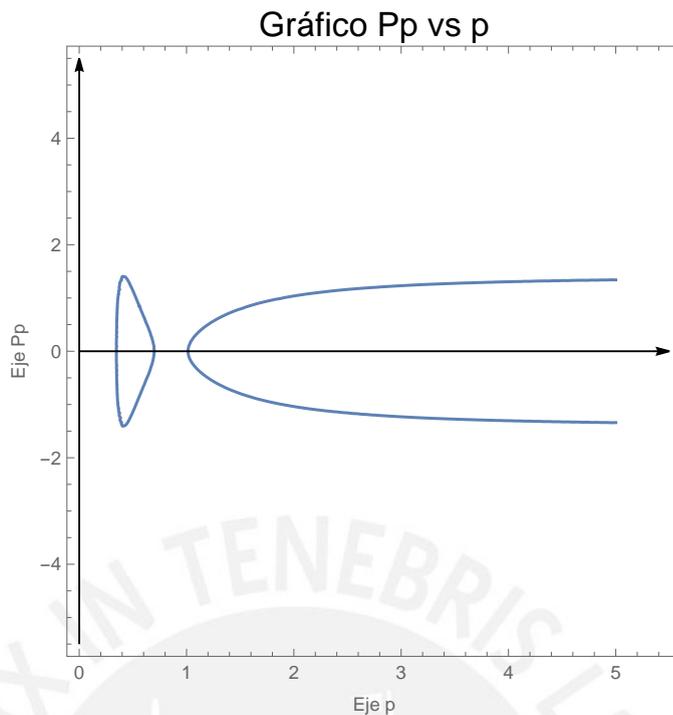


FIGURA 6.1: Gráfico P_ρ vs ρ , tomando $e = E = m = M = 1$ y $l = 2,42$.

Ahora grafiquemos las componentes conexas de la superficie de $H = cte$ y $P_\phi = cte$ bajo estas mismas condiciones.

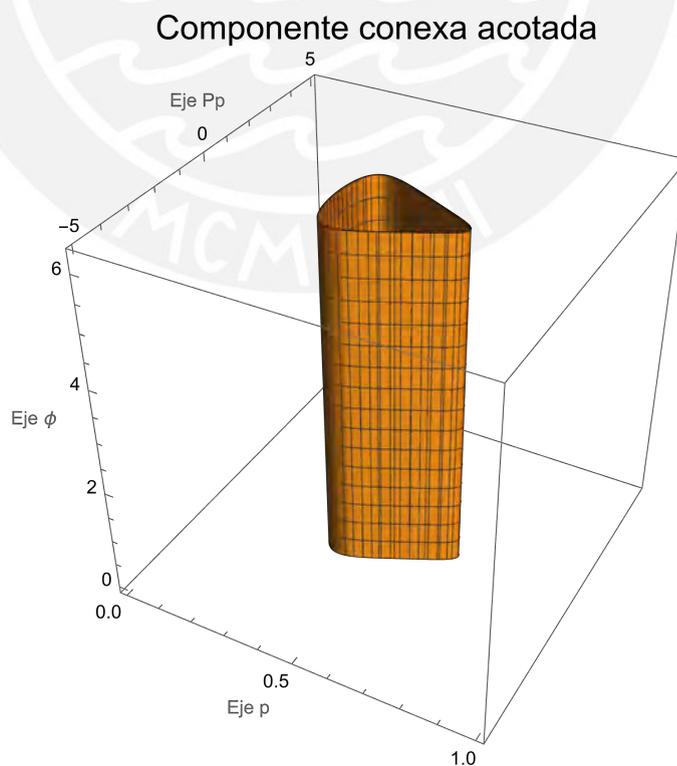


FIGURA 6.2: Subvariedad lagrangiana

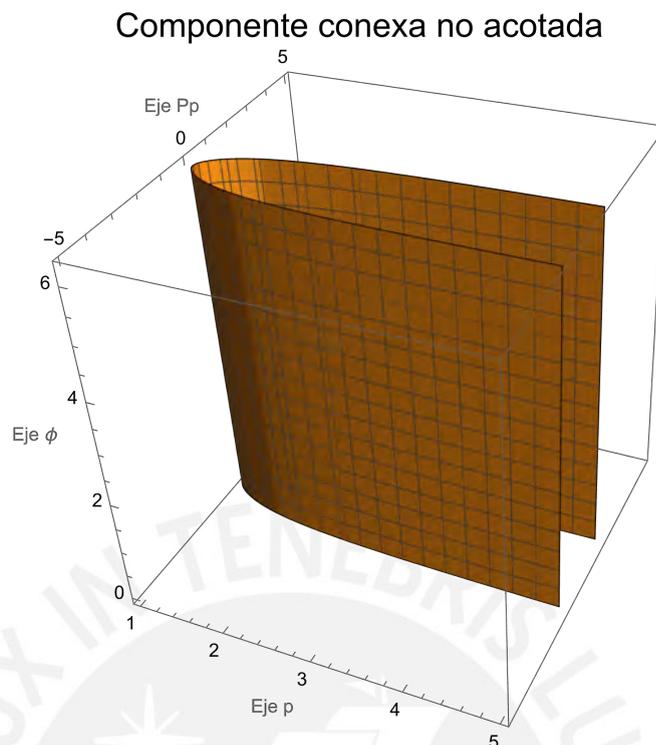


FIGURA 6.3: Subvariedad lagrangiana

Debido a que la variable ϕ es periódica, las líneas rectas que conectan $\phi = 0$ con $\phi = 2\pi$ eventualmente se juntarán, formando así un círculo. Este fenómeno da lugar a las trayectorias periódicas que estábamos buscando. Es importante destacar que hemos justificado la existencia de estas trayectorias utilizando únicamente conceptos de teoría de invariantes y geometría simpléctica, evitando la necesidad de resolver las ecuaciones de movimiento de manera explícita. Este enfoque nos permite abordar la mecánica desde una perspectiva más geométrica en lugar de depender exclusivamente de técnicas de sistemas dinámicos.

6.2. Lagrangiano de Störmer en el cilindro

El lagrangiano de Störmer es:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eM\rho^2\dot{\phi}^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vamos a analizar el movimiento en el cilindro $\rho = \rho_0 \neq 0$. De esta manera el nuevo lagrangiano sería:

$$L = \frac{m}{2}(\rho_0^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eM\rho_0^2 \phi}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Vamos a calcular los elementos que intervienen en la ecuación RTI(1):

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho_0^2 \dot{\phi} + \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{-3eM\rho_0^2 z \dot{\phi}}{(\rho_0^2 + z^2)^{5/2}} \quad (6.2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (6.2.4)$$

$$H = \frac{m}{2}(\rho_0^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2), \quad (6.2.5)$$

reemplazando en la ecuación RTI(1) tenemos:

$$-\frac{m}{2}\rho_0^2 \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \dot{\phi}^3 - \frac{m}{2} \frac{\partial \tau}{\partial z} \dot{z}^3 - \frac{m}{2}\rho_0^2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \dot{\phi}^2 \dot{z} - \frac{m}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} \dot{z}^2 \dot{\phi} + (m\rho_0^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} - \frac{m}{2}\rho_0^2 \frac{\partial \tau}{\partial t}) \dot{\phi}^2$$

$$(m \frac{\partial \xi^2}{\partial z} - \frac{m}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t}) \dot{z}^2 + (m\rho_0^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial z} + m \frac{\partial \xi^2}{\partial \phi}) \dot{\phi} \dot{z} + (m \frac{\partial \xi^2}{\partial t} + \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\partial \xi^1}{\partial z}) \dot{z}$$

$$(m\rho_0^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial t} + \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} - \frac{3eM\rho_0^2 z \xi^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{5/2}}) \dot{\phi} + \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\partial \xi^1}{\partial t} = 0,$$

de esta manera, las ecuaciones de killing serían:

- 1) $\tau = \tau(t)$
- 2) $\frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$
- 3) $\frac{\partial \xi^2}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$

- 4) $\rho_0^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial z} + \frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} = 0$
- 5) $\frac{\partial \xi^2}{\partial t} + \frac{eM\rho_0^2}{m(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\partial \xi^1}{\partial z} = 0$
- 6) $m\rho_0^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial t} + \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} - \frac{3eM\rho_0^2 z}{(\rho_0^2 + z^2)^{5/2}} \xi^2$
- 7) $\xi^1 = \xi^1(\phi, z)$.

Vamos a resolver este sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Usando 7) en 6) tenemos:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \phi}(\phi, z) = \frac{3z}{(\rho_0^2 + z^2)} \xi^2(t, \phi, z),$$

de esta manera, nos queda $\xi^2 = \xi^2(\phi, z)$. Reemplazando este resultado en 5) tenemos:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial z} = 0,$$

de esta manera, tenemos $\xi^1 = \xi^1(\phi)$. Reemplazando en 4):

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} = 0,$$

de esta manera, tenemos $\xi^2 = \xi^2(z)$. Reemplazando en 2) y 3) tenemos:

$$\begin{aligned} \tau &= Ct + t_0 \\ \xi^1 &= \frac{C}{2}\rho + a_0 \\ \xi^2 &= \frac{C}{2}z + b_0, \end{aligned}$$

reemplazando en:

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \phi} = \frac{3z}{(\rho_0^2 + z^2)} \xi^2,$$

esto nos da el siguiente polinomio:

$$Cz^2 + 3b_0z - \frac{C\rho_0^2}{2} = 0,$$

entonces $C = 0$ y $b = 0$.

De esta manera las únicas simetrías que tiene nuestro sistema son:

$$\tau = t_0 \quad (6.2.6)$$

$$\xi^1 = a_0 \quad (6.2.7)$$

$$\xi^2 = 0, \quad (6.2.8)$$

usando el teorema de Noether tenemos:

$$p_\phi a_0 - H t_0 = cte.$$

Haciendo $t_0 = 1$ y $a_0 = 0$ tenemos $H = cte$. Haciendo $a_0 = 1$ y $t_0 = 0$ tenemos $p_\phi = cte$ que serían nuestras cantidades conservadas.

Si bien estas son las simetrías de nuestro sistema, este resultado por si solo no nos sirve para analizar la existencia de curvas periódicas. Para lograrlo tenemos que escribir estas simetrías en lenguaje del espacio de fase y aplicar la Proposición 4.6. Es decir, sea nuestra variedad simpléctica $M = ([0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con la forma simpléctica $w = d\phi \wedge dP_\phi + dz \wedge dP_z$ vamos a definir las siguientes funciones:

$$H : ([0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi, z, P_\phi, P_z) \mapsto H(\phi, z, P_\phi, P_z) = \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho_0^2} \left(P_\phi - \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2,$$

y la función

$$L_\phi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi, z, P_\phi, P_z) \mapsto L_\phi(\phi, z, P_\phi, P_z) = P_\phi.$$

Notemos que estas dos funciones están inspiradas en las cantidades que ya sabemos que van constantes gracias al teorema de Noether. Lo que vamos a hacer a continuación es verificar en el contexto de geometría simpléctica si forman un sistema completamente integrable. Es decir, vamos a probar que $\{H, L_\phi\} = 0$.

Recordemos que $\{H, L_\phi\} = w(X_H, X_{L_\phi})$ donde:

$$i_{X_H} w = dH.$$

Notemos que $\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$ y que $X_{L_\phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}$.

De esta manera

$$\{H, L_\phi\} = w(X_H, X_{L_\phi}) = (i_{X_H}w)(X_{L_\phi}) = dH\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.$$

Ahora tenemos un sistema completamente integrable y podemos usar la Proposición 4.6 entonces tenemos que definir la función $f = (H, L_\phi)$ y las componentes conexas de sus valores regulares van a ser de la forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{R} \times S^1$ o T^2 . En un primer paso, vamos a ver como son los valores regulares de la función f y se procede como en el caso anterior.

Proposición 6.2. Sea (E, l) un valor regular de la función $f = (H, L_\phi)$ entonces sus componentes conexas van a ser de la forma $\mathbb{R} \times S^1$.

Demostración. Notemos que si $(\phi, z, P_\phi, P_z) \in f^{-1}(E, l)$ tenemos:

$$\frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho_0^2} \left(P_\phi - \frac{eM\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2 = E \quad (6.2.9)$$

$$P_\phi = l. \quad (6.2.10)$$

Notemos que tanto ϕ y P_ϕ están acotadas entonces queda descartado que $f^{-1}(E, l)$ sea de la forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ahora de la Ecuación 6.2.9 tenemos que la variable z puede tomar cualquier valor real menos 0. Es decir, z no está acotada entonces se descarta T^2 . De esta manera, las componentes conexas de $f^{-1}(E, l) \simeq \mathbb{R} \times S^1$.

□

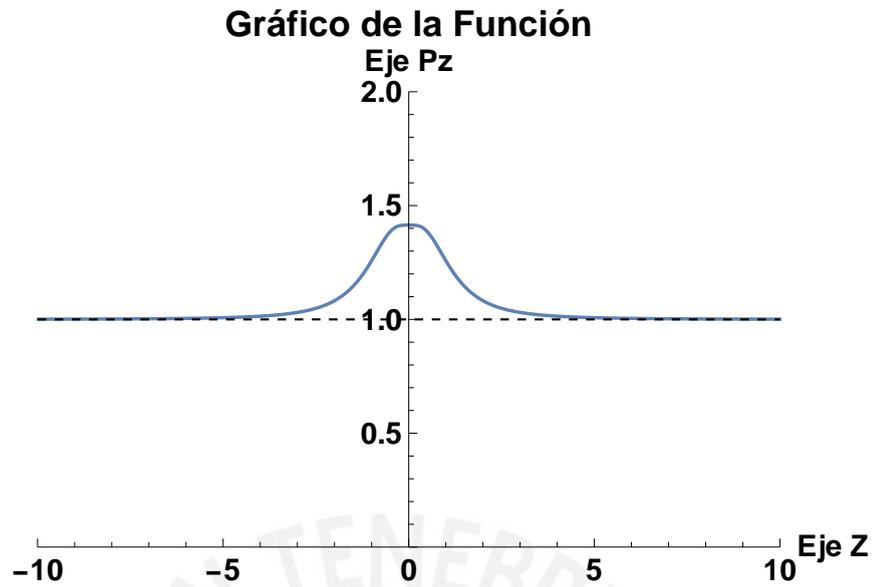


FIGURA 6.4: Gráfico P_z vs z , tomando $e = E = m = M = 1$ y $l = 1$.

Ahora grafiquemos la superficie de $H = cte$ y $P_\phi = cte$ bajo estas mismas condiciones.

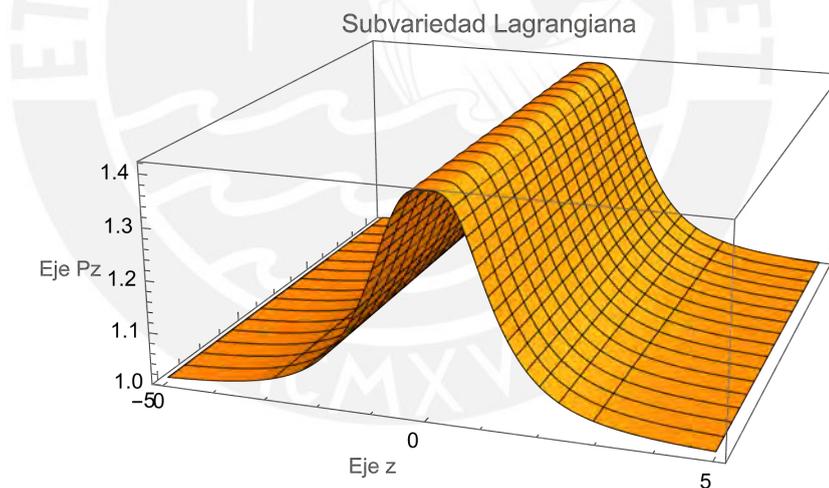


FIGURA 6.5: Subvariedad lagrangiana.

Debido a que la variable ϕ es periódica, las líneas rectas que conectan $\phi = 0$ con $\phi = 2\pi$ eventualmente se juntarán, formando así un círculo. Y al igual que el caso anterior hemos justificado la existencia de trayectorias periódicas sin usar técnicas de sistemas dinámicos.

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos llegado a los siguientes resultados:

1. La formulación de la Mecánica Clásica revela un enfoque geométrico que enriquece notablemente el estudio de esta disciplina. Este enfoque nos capacita para describir cada sistema físico mediante herramientas de geometría diferencial y geometría simpléctica, proporcionando así una perspectiva integral. Resulta interesante destacar que, con frecuencia, las referencias en los textos de física dedicados a la Mecánica Clásica no resaltan este enfoque geométrico. Esta omisión impide una descripción completa de las características de un sistema; sin la geometría diferencial, no sería posible detectar invariantes, y sin la geometría simpléctica, se perdería la capacidad de identificar curvas periódicas. Por consiguiente, subrayamos la importancia de considerar la formulación geométrica, ya que proporciona una visión enriquecedora y esencial para lograr una comprensión más profunda de los sistemas físicos.
2. En la mecánica clásica, el lenguaje de la física y las formulaciones matemáticas de la geometría se entrelazan de manera complementaria para describir dinámica.
3. Uno puede utilizar el formalismo de Lagrange y puede encontrar los invariantes del sistema sin tener que encontrar las ecuaciones de movimiento.
4. La teoría de invariantes por si sola no alcanza para encontrar las curvas periódicas de un sistema se necesita herramientas que vienen de la geometría simpléctica.

5. Esta nueva perspectiva geométrica en la mecánica clásica nos brinda la oportunidad de ampliarla, ya sea incorporando la geometría simpléctica para describir la dinámica a través de la función H , o utilizando la teoría de invariantes al describir la mecánica mediante la función L . Esta combinación de enfoques proporciona una visión integral y fortalece la comprensión de los sistemas físicos.
6. Finalmente, podemos aprovechar ambas herramientas proporcionadas por cada área para abordar problemas físicos desde una perspectiva más geométrica, ampliando así nuestra comprensión más allá de la teoría de sistemas dinámicos.



Bibliografía

- [1] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011.
- [2] John Milnor. *Differential Topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1958.
- [3] Zdravko Cvetkovski. *Inequalities: Theorems, Techniques, and Selected Problems*. Springer, New York, NY, 2012. ISBN 978-1447121051.
- [4] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Editora IMPA, 1996.
- [5] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Editora IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, 2002.
- [6] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. OUP Oxford, 2017. ISBN 9780192514011. URL <https://books.google.com.br/books?id=cjddDgAAQBAJ>.
- [7] Michael Artin. *Algebra*. Pearson College Div, first edition, 1991. ISBN 0130047635.
- [8] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1980. ISBN 978-0201029185.
- [9] A. Trautman. Noether equations and conservation laws. *Communications in Mathematical Physics*, 6(4):248–261, 1967. doi: 10.1007/BF01646018. URL <https://doi.org/10.1007/BF01646018>.
- [10] John Milnor. Review: Norman steenrod, the topology of fibre bundles. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64(4):202–203, 07 1958. URL <https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183522568>.
- [11] Michael F. Atiyah. Riemann surfaces and spin structures. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4(1):47–62, 1971. URL <http://eudml.org/doc/81875>.

- [12] Mamoru Mimura and Hiroshi Toda. Homotopy groups of $su(3)$, $su(4)$ and $sp(2)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3(2):217–250, 1963. doi: 10.1215/kjm/1250524818. URL <https://doi.org/10.1215/kjm/1250524818>.
- [13] J.W. Milnor, H. Bass, J. McCleary, T.Y. Lam, and A. Bonifant. *Collected Papers of John Milnor: Differential topology*. CWorks / American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2007. ISBN 9780821842300. URL <https://books.google.com.br/books?id=YpQdyBv8cMUC>.
- [14] J. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Number v. 76 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2016. ISBN 9781400881826. URL <https://books.google.com.br/books?id=vJbKCwAAQBAJ>.
- [15] S. M. Salamon. Orthogonal complex structures. *Proceedings of the Conference on Differential Geometry in Bmo*, 1995.
- [16] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521795401. URL <https://books.google.com.br/books?id=BjKs86kosqgC>.
- [17] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, 2013. ISBN 9780817634902. URL <https://books.google.com.br/books?id=ct91XCWkWEUC>.
- [18] N. Jacobson. *Basic Algebra II: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN 9780486135212. URL <https://books.google.com.br/books?id=hn75exNZZ-EC>.
- [19] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Number v. 3 in A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, Incorporated, 1975. ISBN 9780914098027. URL <https://books.google.com.br/books?id=-lXvAAAAMAAJ>.
- [20] R.W. Sharpe and S.S. Chern. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000. ISBN 9780387947327. URL <https://books.google.com.br/books?id=Ytqs4xU5QKAC>.

- [21] D. Husemöller. *Fibre Bundles*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN 9781475722611. URL <https://books.google.com.br/books?id=pCX1BwAAQBAJ>.
- [22] J. Roe. *Elliptic Operators, Topology, and Asymptotic Methods, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series. Taylor & Francis, 1999. ISBN 9780582325029. URL <https://books.google.com.br/books?id=SANq53mw008C>.
- [23] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn. *Spin Geometry (PMS-38)*. Number v. 38 in Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 2016. ISBN 9781400883912. URL <https://books.google.com.br/books?id=xfgbDAAAQBAJ>.
- [24] A. Hatcher. *Vector bundles and k-theory*, 2003. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [25] P.R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2017. ISBN 9780486822266. URL <https://books.google.com.br/books?id=qws1DwAAQBAJ>.
- [26] Arnaldo Garcia; Yves Lequain. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides. IMPA, 2002. ISBN 85-244-0190-7.
- [27] J. Milnor. *Morse Theory. (AM-51)*. Number v. 51 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2016. ISBN 9781400881802. URL <https://books.google.com.br/books?id=8uqWCwAAQBAJ>.
- [28] K.M. Hoffman and R.A. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice-Hall Mathematics Series. N.J., Prentice-Hall, 1971. URL <https://books.google.com.br/books?id=I4kQAQAIAAJ>.
- [29] E.L. Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento: Segunda Edição*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 1998.
- [30] Norman Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.
- [31] G.E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer New York, 2013.
- [32] John Milnor. *Topology from the Differentiable viewpoint*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1965.

- [33] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre. Espaces fibrés et groupes d'homotopie. II. Applications. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:393–395, 1952.
- [34] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, New York, NY, 1st edition, 2001.
- [35] Jean-Pierre Serre. Sur la suspension de Freudenthal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:1340–1342, 1952.
- [36] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN 9781468494495. URL <https://books.google.com.br/books?id=emTmBwAAQBAJ>.
- [37] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre. Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I. Constructions générales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:288–290, 1952.

