PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

GÉNESIS INSTRUMENTAL VINCULADO AL USO DE GEOGEBRA EN EL ESTUDIO DE SUCESIONES GEOMÉTRICAS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Angel Estuard Antezana Elorrieta

Asesor:

Dr. Mihály André Martínez Miraval

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, Mihály André Martínez Miraval, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado GÉNESIS INSTRUMENTAL VINCULADO AL USO DE GEOGEBRA EN EL ESTUDIO DE SUCESIONES GEOMÉTRICAS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS, del autor Angel Estuard Antezana Elorrieta, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 8%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 23/11/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 23 de noviembre de 2023

Apellidos y nombres del asesor: Martínez Miraval, Mihály André	
DNI: 10287257	Firma:
ORCID: ttps://orcid.org/0000-0001-7734-1223	

RESUMEN

La revisión de la literatura centrada en la noción de sucesión geométrica permite identificar el predominio del campo algebraico al abordar dicha noción, relegando con ello el uso de tecnologías digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes que posiblemente podrían generar aprendizajes más completos. Es, en ese sentido, que se realiza esta investigación, el cual tiene por objetivo analizar cómo se produce el proceso de génesis instrumental vinculado al uso de GeoGebra al desarrollar una actividad sobre sucesiones geométricas con estudiantes universitarios.

Para el análisis, se toma en cuenta aspectos del Enfoque instrumental como sustento teórico y se emplea una metodología de carácter cualitativo, el cual permite analizar y describir los conocimientos matemáticos que moviliza el estudiante cuando resuelve una tarea, mediado por un ambiente de representación dinámica como GeoGebra, así como interpretar las acciones que realiza el estudiante con dicho software. Como parte del proceso metodológico, se considera un conjunto de fases que van desde el planteamiento del problema hasta las conclusiones del estudio, además se brindan recomendaciones para futuras investigaciones.

Se puede afirmar, a partir de los resultados de la secuencia de la actividad, que el sujeto de investigación utilizó un conjunto de herramientas de GeoGebra que le permitieron movilizar diferentes nociones matemáticas, como polígonos, áreas, puntos medio, funciones, entre otros, potenciando las propiedades del software y transformándolo en un instrumento para caracterizar la noción de sucesión geométrica.

Se concluye del estudio la importancia del uso del ambiente de geometría dinámica como GeoGebra, como complemento de los procesos algorítmicos y analíticos propios de la Enseñanza de las Matemáticas, brindando un aprendizaje más completo al conectar las diferentes representaciones del concepto estudiado de forma simultánea.

Palabras clave: Sucesión Geométrica; Enfoque instrumental; GeoGebra; Función exponencial.

ABSTRACT

The review of the literature focused on the notion of geometric sequence allows us to identify the predominance of the algebraic field when approaching this notion, thereby relegating the use of digital technologies in the teaching-learning process of students that could possibly generate more complete learning. It is, in this sense, that this research is carried out, which aims to analyse how the process of instrumental genesis linked to the use of GeoGebra is produced when developing an activity on geometric sequences with university students.

For the analysis, aspects of the Instrumental Approach are taken into account as theoretical support and a qualitative methodology is used, which allows us to analyse and describe the mathematical knowledge mobilised by the student when solving a task, mediated by a dynamic representation environment such as GeoGebra, as well as to interpret the actions performed by the student with this software. As part of the methodological process, a set of phases is considered, ranging from the statement of the problem to the conclusions of the study, and recommendations for future research are also provided.

It can be affirmed, from the results of the activity sequence, that the research subject used a set of GeoGebra tools that allowed him to mobilise different mathematical notions, such as polygons, areas, midpoints, functions, among others, enhancing the properties of the software and transforming it into an instrument to characterise the notion of geometric succession.

The study concludes the importance of the use of the dynamic geometry environment such as GeoGebra, as a complement to the algorithmic and analytical processes of Mathematics Education, providing a more complete learning by connecting the different representations of the concept studied simultaneously.

Keywords: Geometric succession; Instrumental approach; GeoGebra; Exponential Function.

Dedicado a mis padres Oswaldo y Justina, porque ellos son las personas que confiaron en mí y me apoyaron en todo momento y, a mis hermanos, quienes han sido testigos de todo este proceso. A todos ustedes, gracias estar siempre conmigo y por motivarme a ser mejor persona cada día.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor, Dr. Mihály André Martínez Miraval, por estar siempre presente en todo este proceso, por su amplia paciencia y consejos que siempre compartió.

A los miembros del Jurado, Dra. Daysi Julissa García Cuéllar y Mg. Tito Nelson Peñaloza Vara, por sus consejos, observaciones y sugerencias.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM- PUCP), por todo el apoyo que me brindaron.

A cada uno de los docentes de la maestría de Enseñanza de las Matemáticas de Pontificia Universidad Católica del Perú durante estos años, por la dedicación que pusieron en sus magistrales clases.

A todos mis amigos, en especial a Víctor, Giancarlo y Tomás, quienes me acompañaron en los trabajos grupales y por sus consejos de vida que siempre me compartieron.

A mis padres y Hermanos por su apoyo emocional constante.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La noción de sucesión geométrica se aborda en diferentes cursos de matemática en los primeros ciclos a nivel universitario. La importancia de su aprendizaje se da por diferentes razones: desarrollar en los estudiantes habilidades en el cálculo numérico para reconocer patrones, regularidades y realizar generalizaciones a partir de un conjunto de datos particulares. Del mismo modo, se utiliza como una herramienta para la comprensión de otros conceptos matemáticos más complejos, tales como series, ecuaciones diferenciales, entre otros.

Por otro lado, se presenta en algunas aplicaciones reales que describen patrones de conducta similares a los trabajados en este tipo de sucesiones. Estos aspectos describen de forma concisa la importancia de abordar este objeto matemático.

La experiencia en docencia del investigador en la enseñanza y aprendizaje de las sucesiones geométricas, así como lo identificado en la revisión de la literatura realizada para este estudio, pone en evidencia diversas dificultades de los estudiantes al trabajar esta noción, como el determinar el término general de la sucesión, que ocasiona dificultades para abordar nociones como suma de sucesiones parciales, convergencia, entre otros; así como diversas propuestas didácticas para abordar este tema, que involucran o no a las tecnologías digitales.

Las investigaciones reconocen que se prioriza el campo algebraico al trabajar la noción de sucesión geométrica, lo cual deja de lado el poder abordar esta noción desde otras perspectivas, como la geométrica o variacional, que pueden complementar la enseñanza de las sucesiones geométricas involucrando otras nociones matemáticas y representaciones de estas nociones.

En otro orden, los reducidos intentos de utilizar tecnologías digitales para abordar este concepto se reducen a presentar secuencias de figuras que aportan imágenes que cambian, para luego realizar un trabajo a lápiz y papel buscando patrones.

En este sentido, se desarrolla el presente estudio, que tiene por objetivo analizar cómo se produce el proceso de génesis instrumental de GeoGebra al trabajar la noción de sucesión geométrica con estudiantes universitarios. Para ello, trasladamos el trabajo con sucesiones geométricas de un plano algebraico a uno geométrico, donde pueden interactuar, así como el uso de un sistema de geometría dinámica como GeoGebra, que esperamos se convierta en un instrumento para el estudiante para la resolución y caracterización gráfica de diferentes sucesiones geométricas.

El desarrollo de la investigación consta de cuatro capítulos. En el capítulo 1, presentaremos la problemática de la investigación, donde se encuentran los antecedentes, que principalmente son investigaciones donde el objeto matemático estudiado son las sucesiones, en la que además se muestran la justificación, pregunta de investigación, objetivos y la metodología empleada.

En el capítulo 2, desarrollaremos los aspectos matemáticos del concepto de sucesión, sucesión geométrica y sucesiones de sumas parciales, donde se describen los teoremas y propiedades. Además, abordaremos los aspectos didácticos donde se muestra el tema de sucesiones desde un aspecto más didáctico.

En el capítulo 3, presentaremos el planteamiento de la actividad, además mostraremos el desarrollo y el análisis de la actividad desde el enfoque teórico del enfoque instrumental, donde se identifican los esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada.

Finalmente, en el capítulo 4, presentaremos las conclusiones a detalle, los cuales validan el logro de los objetivos y, en consecuencia, da respuesta a la pregunta de investigación y se brindan las consideraciones finales, acompañadas de algunas propuestas a futuro.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentaremos la problemática de nuestra investigación, que está relacionada al objeto de estudio sucesiones. Por ello, se realiza la búsqueda de información en artículos de revistas digitales y en tesis ubicadas en los repositorios de universidades nacionales e internacionales. Estas investigaciones fueron clasificadas en dos grupos con el fin de mostrar la pertinencia del objeto de estudio. Además, presentaremos la justificación, pregunta de investigación, los objetivos y procesos metodológicos.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta sección, se han considerado artículos de investigación y tesis que desarrollen el objeto matemático sucesiones en la Enseñanza de las Matemáticas desde distintos marcos teóricos. Del mismo modo, se han revisado artículos donde se realizan propuestas didácticas para que los estudiantes utilicen GeoGebra como recurso tecnológico al abordar el estudio de las sucesiones.

Las investigaciones se clasificaron en dos grupos: investigaciones que abordan el concepto de sucesiones (sucesiones numéricas y sucesiones geométricas) desde diferentes perspectivas teóricas e investigaciones que usan herramientas digitales para mejorar la comprensión de las sucesiones reales.

1.1.1 Investigaciones que abordan el concepto de sucesiones desde diferentes perspectivas teóricas.

Entre las investigaciones identificadas, figura la de Verdugo et al. (2022), quienes plantean una tarea sobre sucesiones a docentes universitarios con el objetivo de encontrar las características del Espacio del Trabajo Matemático (ETM) y sobre el conocimiento matemático que movilizan cuando desarrollan la tarea propuesta.

Se utilizó el ETM y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) como aproximaciones teóricas, identificando conexiones entre ellas, debido a que el ETM se concentra en el análisis de la tarea, mientras que el MTSK analiza los conocimientos del docente que emplea en dicha tarea, llegando a la conclusión de que, al combinar estas dos teorías, se logra un mejor análisis.

La metodología empleada es de carácter cualitativo y el método de investigación fue el estudio de casos de tipo instrumental. En esta investigación, se estudia una tarea matemática y su ejecución por parte de un docente investigador, que es doctor en matemáticas con amplia experiencia en la docencia. Se presentó un ejercicio de sucesiones que forma parte de los temas que se imparten en el curso de Cálculo II.

Verdugo et al. (2022) sostienen que, cuando el docente aborda el tema de sucesiones, por lo general, comienza con la definición de sucesión, la noción de límite de una sucesión, convergencia y acotamiento, donde además se incluye la aplicación de teoremas de convergencia. Los autores eligieron una pregunta que fue propuesta por el mismo docente en ciclos anteriores, sobre una sucesión de recurrencia (S_n), donde $S_{n+1} = \frac{{S_n}^2+a}{2S_n}$, $a > 0$ y $S_1 > 0$, y esta es tomada como la tarea a evaluar, donde el objetivo fue analizar la convergencia de tal sucesión.

La tarea se divide en cuatro ítems. En el ítem a), se solicita al docente demostrar que la sucesión (S_n) sea decreciente si y solo si la sucesión (S_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$; en el ítem b), se le pide demostrar que si el primer elemento de la sucesión es mayor que $\sqrt{a}$, entonces el termino enésimo de la sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{a}$; en el ítem c), se solicita utilizar los ítems a) y b) para demostrar que si el primer elemento de la sucesión es mayor que $\sqrt{a}$, entonces la sucesión es acotada inferiormente y decreciente; por último, en el ítem d), se debe probar que la sucesión es convergente y calcular su límite.

El análisis de la investigación consiste en dos partes: la primera se centró en el planteamiento de la tarea y la segunda parte consistió en estudiar el desarrollo de la tarea. Respecto al análisis del planteamiento de la tarea, se trata de una aplicación del método de Newton – Raphson, orientado al desarrollo de las ecuaciones no lineales, en particular, para aproximar raíces cuadradas. El ETM idóneo del docente se pone en juego al encontrar el valor de convergencia, pues esta tarea hace que ponga en práctica sus conocimientos de acotamiento, monotonía, convergencia y la relación de orden en los números reales.

Con respecto al análisis del desarrollo de la tarea, los investigadores mencionan que, en el ítem a), se evidencia el ETM personal del docente en el plano epistemológico referencial. Aquí, el docente utiliza conceptos relacionados con el principio de inducción matemática y algunas propiedades de desigualdad de los números reales, en la que muestra que conoce la inducción como una forma de probar propiedades y utiliza cuantificadores y equivalencia para mostrar la prueba, cuyas acciones corresponden al subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Por otro lado, cuando estudia la monotonía, es necesario que utilice la definición para realizar pruebas, lo cual corresponde al subdominio del Conocimiento de los temas matemáticos

(KoT). Además, cuando identifica el principio del buen orden y lo utiliza para demostrar la monotonía, corresponde al Conocimiento de la estructura matemática (KSM).

Verdugo et al. (2022) sostienen que en el ítem b) el docente nuevamente recurre al principio de inducción para probar que la sucesión es acotada inferiormente, ya que utiliza conceptos de función cuadrática y propiedades de desigualdad de los números reales, lo que pone en evidencia su KPM, KSM y KoT. Del mismo modo, el desarrollo propuesto por el docente muestra sus conocimientos sobre propiedades de una sucesión y la resolución de las inecuaciones cuadráticas como conocimientos de temas diferentes, lo que compromete herramientas semióticas y operacionales diferentes.

En el ítem c), el docente utiliza los resultados de a) y b) para probar que la sucesión (S_n) es decreciente y acotada inferiormente. En el ítem d), el sujeto de estudio utiliza el concepto de límite de una sucesión y el concepto de ecuación cuadrática (KoT). Este conocimiento sirve para determinar el valor del límite, donde se evidencia la conexión entre sucesiones y ecuaciones (KSM), en términos del Trabajo Matemático (ETM) utiliza una propiedad de sucesiones como herramienta teórica, que finalmente le sirve para calcular el límite de la sucesión.

En conclusión, se destaca la conexión del ETM-MTSK que permite un beneficio al incorporar elementos de un modelo cuando se utiliza el otro. Esto hace que se produzca un análisis más enriquecedor e interpretaciones más exactas sobre el espacio del trabajo matemático y el conocimiento especializado del docente. A todo esto, los autores consideran que se alcanza el objetivo de la investigación.

El estudio realizado por Codes y González-Martín (2017) tiene por objetivo analizar cómo los estudiantes comprenden la noción de serie numérica cuando desarrollan una actividad sobre sucesiones de sumas parciales. En este trabajo, presentan una descomposición genética de la noción de sucesión de las sumas parciales desde una perspectiva de la teoría de aprendizaje APOS (Action, Process, Object, Schema; APOE en su traducción al español). La metodología que adoptan es la cualitativa y el método es el estudio de casos.

Los autores realizan la investigación con 14 estudiantes de los primeros cursos de Ingeniería informática, los datos obtenidos fueron recolectados de las notas de clase, grabaciones de los estudiantes cuando discutían sobre las resoluciones de las tareas asignadas, y de capturas de pantalla del computador cuando los estudiantes desarrollaban comprobaciones de ejercicios por medio del software Maple.

Los investigadores formaron seis grupos de estudiantes a quienes se les presentaron dos tipos de ejercicios: los ejercicios del primer tipo eran tradicionales, centrados en el uso de definiciones sobre series y sucesiones, y los ejercicios del segundo tipo fueron preguntas elaboradas por los investigadores. Luego, se mostró el análisis de las respuestas de dos de los grupos, denominados S1 y S3; todos los grupos tuvieron un momento de debate para discutir las soluciones de dichos ejercicios, esto con la finalidad de observar el momento de construcción de las sucesiones de sumas parciales.

Dentro de los ejercicios desarrollados por los estudiantes se les presentó una actividad sobre rectángulos, que se presenta porque, según los investigadores, es la que introduce el concepto de series en forma gradual, además esta actividad permite el paso de un registro geométrico (RG) a un registro algebraico (RA), de tal manera que desarrolla los procesos iterativos y la idea de convergencia.

Codes y González-Martín (2017) muestran tres de los cinco apartados en que se dividieron las actividades. En el primer apartado, se pidió al estudiante observar cómo se construye una figura, partiendo de un cuadrado cuyo lado mide una unidad, al cual se añade la mitad de dicho cuadrado; es decir, un rectángulo, luego se añade la mitad del rectángulo y así sucesivamente. En el segundo apartado, se trabaja con la figura que se construye en el apartado anterior, donde se pide calcular el área de cada nuevo rectángulo que se agregó y también el área de la nueva figura.

En el tercer apartado, se mostró a los estudiantes una tabla de cinco filas y de cuatro columnas, donde en la primera columna se colocaba la variable *n,* que representaba el lugar del término de las figuras; es decir, $n = 0$ significaba el termino inicial de la figura, $n = 1$, el primer rectángulo agregado, etc. En la segunda columna, se mostró el área de cada rectángulo que se iba añadiendo; en la tercera columna, se presentó el área de la figura sombreada (compuesta por el área del cuadrado y la suma de las áreas de los rectángulos añadidos) y, en la cuarta, se muestran los valores aproximados de las áreas sombreadas.

Con esta información, se buscaba que los estudiantes reconocieran el tipo se sucesión que sé generó en la segunda y tercera columna. Además, se les pidió que representaran como pares ordenados en el plano cartesiano los valores de la primera y segunda columna, obteniendo una gráfica de puntos que representarían cómo cambia el área de cada uno de los rectángulos que se van adicionando a la figura. Del mismo modo, se solicitó representar en el plano cartesiano los valores de la primera y tercera columna como pares ordenados. En este caso, la gráfica de puntos representaría cómo cambia la suma de las áreas de las *n* regiones rectangulares sombreadas.

Con el objetivo de que los estudiantes tengan alguna idea sobre la convergencia, los autores pidieron encontrar el valor de la suma de los términos de la segunda columna, además de que se les pidió escribir el valor de la suma de las áreas de los rectángulos que no se sombrearon para comprobar la suma de infinitos términos.

A partir de las respuestas de los estudiantes, Codes y González-Martín (2017) señalan que, con relación a los dos primeros apartados, los estudiantes buscaron introducir el concepto de series numéricas mediante las sucesiones de sumas parciales. En este apartado, los estudiantes del grupo S1 respondieron correctamente y reconocieron la sucesión que relaciona el área de los rectángulos, eso les permitió que establecieran las relaciones entre sumas parciales (SSP) y el término general, mientras que los estudiantes que integraron el grupo S3, tuvieron un error de cálculo, lo que generó un arrastre de error y fue el motivo por el cual no pudieron encontrar el patrón de la sucesión de áreas.

Con relación al tercer apartado, los investigadores manifiestan que el grupo S1 dibujó el plano cartesiano en una hoja y ubicaron como puntos los valores que les habían proporcionado en la tabla. Luego de analizar el comportamiento de los puntos, los estudiantes reconocieron que se trataba de un proceso iterativo infinito. En tanto, el grupo S3 encontró el término enésimo de las sumas parciales y usó el software Maple para comprobar los valores y puntos de la gráfica.

Los investigadores evidencian, a partir del desarrollo de estas actividades, que ambos grupos construyeron el concepto de sumas parciales cuando encontraron los términos de la sucesión y lo concretizaron cuando encontraron el término general de dicha sucesión. Asimismo, sostienen que cuando los estudiantes se limitan a analizar el término general, no llegan a conceptualizar las sucesiones de las sumas parciales.

En esta misma dirección sobre el estudio de actividades con sucesiones, se tiene la investigación de Malla (2020), que realiza un estudio con estudiantes universitarios a quienes se les planteó una actividad sobre la sucesión de Fibonacci, que tuvo por objetivo implementar y analizar una propuesta que genere conexiones entre los conceptos de sucesión y límite con base en la construcción de la sucesión de Fibonacci. En su investigación, se consideraron aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), sobre todo los relacionados a la conversión entre los distintos registros.

Malla (2020) realiza su estudio con 40 estudiantes de Ingeniería de los primeros años de una universidad de Chile que fueron colocados en grupos de cuatro estudiantes. La metodología empleada en la investigación es de corte cualitativo y usa como método el estudio de clases. Este método consiste en la elaboración de un taller o un modelo de clase, donde se puedan identificar pasos, realizar preguntas y conjeturas que estarán a cargo de los maestros, quienes se encargan de evaluar y analizar los resultados que se obtengan.

El estudio desarrollado por la autora presenta tres momentos. El primer momento tuvo una duración de 40 minutos, en la que se les entregó a los estudiantes un tablero celeste y varias piezas cuadradas, cuya pieza más pequeña tenía 1 cm de longitud de lado. La actividad consistía en encontrar la secuencia de dichas piezas para cubrir este tablero, además se brindaron ciertas instrucciones en donde los estudiantes debían indicar cómo cubrieron la superficie del tablero, si existía otra forma de hacerlo; las dimensiones de una pieza adicional a la última colocada; las dimensiones de una pieza especifica; y que se realice una generalización para la enésima pieza. Estas dos últimas preguntas, se hicieron con el objetivo de deducir las posibles secuencias de Fibonacci con relación al área o al perímetro de la pieza.

El segundo momento tuvo una duración de 30 minutos para su desarrollo y se le asignó a cada grupo una computadora. Los estudiantes trabajaron con la hoja de cálculo de GeoGebra, donde digitaron los valores de la sucesión de Fibonacci. Además, se les pidió que realizaran el cociente del término siguiente de la sucesión con el término anterior de la lista de números obtenidos, con la intención de que los estudiantes reconocieran ciertas particularidades de la sucesión, que infieran posibles valores de estos cocientes si la lista de números siguiera aumentando, que representaran gráficamente la posición de las piezas y que intuyeran qué figura geométrica se lograría observar, entre otras preguntas. Todas estas preguntas fueron realizadas con el objetivo de que los estudiantes pudieran deducir la convergencia de ese cociente y pudieran estudiarlo geométricamente mediante el uso de GeoGebra.

El último momento tuvo una duración de 20 minutos, tiempo en el cual el docente explicó el motivo de la actividad y detalló los ejercicios realizados por los alumnos. Asimismo, generó un pequeño debate entre los estudiantes para profundizar la idea de sucesión y convergencia. Finalmente, describió algunos hechos históricos sobre la relación entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo.

Malla (2020) diseña el taller para usar los distintos registros de representación a través de las actividades. En el primer momento, se esperaba la conversión de la representación del objeto matemático del registro numérico (RN) al registro algebraico (RA) y luego al registro de lengua natural (RLN); en el segundo y tercer momento, se esperaba que se dé la conversión de la representación del objeto matemático entre los siguientes registros: Registro tabular (RT) - Registro grafico (RG) - Registro figural (RF), de tal manera que se genere un salto cognitivo en el pensamiento de los estudiantes.

A partir de los resultados de la investigación, Malla (2020) observa que la mayoría de estudiantes trabajaba la convergencia representada en el registro algebraico, lo que implicaba no reconocer que dicho objeto matemático se podía representar en otros registros. La investigadora afirma que el uso de métodos tradicionales en la enseñanza de la convergencia y privilegiar el campo algebraico para su estudio, pudieron motivar a que los estudiantes evidenciaban una falta de comprensión de este objeto matemático.

La investigadora concluye que cuando se trabaja la convergencia en distintos registros, se logra un mejor entendimiento de dicho objeto matemático. De esta manera, por ejemplo, el espiral de Fibonacci puede ser visto por los estudiantes como una curva sin una relación o sentido, pero cuando se presentan los datos obtenidos en una tabla del programa Excel y se representa gráficamente en un plano, posibilita comprender los procesos infinitos o convergencia al trabajar con sucesiones.

Otra investigación identificada fue la de Verdugo (2020), el cual tiene por objetivo analizar cómo los docentes universitarios desarrollan una actividad relacionada con la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Se utilizaron aspectos del enfoque teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM idóneo), orientado a encontrar las génesis que se pueden activar entre el plano cognitivo y en el plano epistemológico.

La investigadora da importancia al estudio de la sucesión a_n, porque que se relaciona con el número de Euler "e" y se aplica en áreas relacionadas a las finanzas al desarrollar problemas que involucran el interés compuesto. Dentro de este marco teórico y teniendo en cuenta tanto los aspectos matemáticos como los antecedentes de esta investigación, se encontraron los siguientes paradigmas del análisis real: Análisis-Geométrico/Aritmético (AG), Análisis-Calculatorio (AC) y Análisis-Real (AR)

La metodología empleada en la investigación es de carácter cualitativo, en donde la autora realizó una entrevista a tres docentes que denominó PU1, PU2 y PU3, quienes trabajaban en distintas universidades y enseñaban en distintas carreras, en lo que les preguntó: ¿cómo abordarías en tu clase la sucesión a_n?, para lo cual tuvieron 30 minutos para presentar su respuesta.

El docente PU1 dibujó en el plano un conjunto de puntos de la sucesión; seguidamente, propuso dos preguntas con sus respectivos objetivos: una relacionada a la monotonía, cuyo objetivo fue que el estudiante verificara, a través de la observación, que la sucesión sí era creciente y otra pregunta relacionada a las características de la sucesión, el cual tuvo por objetivo que el estudiante dedujera que esa sucesión convergía al valor de e ≈ 2,7, apoyado de un recurso tecnológico como la calculadora.

El docente PU2 presentó una solución que implicaba el cálculo del límite de sucesión a_n, para la cual utilizó la regla de L'Hôpital, porque los estudiantes se familiarizan bastante con su uso.

El docente PU3 señaló primero qué temas previos el estudiante debería manejar para poder afrontar el análisis de esa tarea. Luego, utilizó el desarrollo del binomio de Newton y planteó tres sucesiones que le ayudaron a comparar y darse cuenta de que la sucesión era acotada. A continuación, comprobó la acotación, usó el teorema de la media para probar que la sucesión es estrictamente creciente y concluyó que la sucesión es convergente y que ese límite es el valor de e. Para comprobar su conjetura, utilizó el programa Maple, graficó la sucesión y mostró que la convergencia se da alrededor de y = e.

Con relación a lo presentado por los docentes, Verdugo (2020) señala que el desarrollo del docente PU1 se enmarcó dentro del paradigma AG/AC, pues se realizaron con frecuencia interpretaciones geométricas y cálculos aritméticos; con relación al docente PU2, identificó una debilidad en su propuesta, dado a que el concepto de función se define en un dominio continuo y la sucesión se define en un dominio discreto y no se comenta si se ha estudiado esa diferencia, ya que en los cursos se ha utilizado la regla de L'Hôpital para funciones, pero no para sucesiones, por lo que concluye que la respuesta del docente se enmarcó en un paradigma (AC), pues utiliza propiedades del análisis real y se activan la génesis instrumental y la génesis semiótica.

Finalmente, a la propuesta del docente PU3, la investigadora observa que se activó la génesis instrumental cuando realizó el gráfico mediante el uso de Maple y se activó la génesis discursiva orientada hacia la prueba de convergencia. Además, se pudo verificar que el docente usa el paradigma AC. La investigadora comenta que usar un software ayudó en la estructuración del ETM idóneo de los docentes.

En las investigaciones presentadas hasta el momento, se muestran diferentes enfoques teóricos y tareas o actividades para abordar sucesiones numéricas, series y sucesiones geométricas, pero existen otras centradas en analizar los errores y dificultades de los estudiantes cuando desarrollan actividades sobre sucesiones. Entre ellas, figura la investigación de Ferraza (2017), quien realiza un trabajo que consistió en analizar los errores que los estudiantes de pregrado y postgrado presentan al resolver una actividad de sucesiones numéricas, con el objetivo de reconocer los distintos registros de representación semiótica para elaborar un conjunto de tareas o actividades que se puedan usar para la formación de maestros de la licenciatura en Matemáticas.

El marco teórico en el que se apoyó este trabajo es la teoría de Registro de Representaciones Semióticas (TRRS), que sirvió para el análisis de las respuestas y la metodología empleada fue de corte cualitativo y el método utilizado fue el análisis del error.

Para su estudio, Ferraza (2017) realiza una revisión previa de los cursos donde se imparte el tema de sucesiones en 28 instituciones que, en su mayoría, eran universidades y pudo verificar, a través de los planes de estudio y de los sílabos, la importancia de este tema, ya que en el cálculo diferencial, cálculo integral y en los cursos de análisis se usa como herramienta a las sucesiones y series numéricas. Para realizar la parte experimental, selecciona dos grupos de estudiantes de la carrera de Matemáticas, un grupo de estudiantes de la carrera de Sistemas de información y un grupo de egresados de la carrera de Matemáticas que cursaban una maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

La investigadora elabora una pequeña actividad donde se les presentó un enunciado, que consistía en representar un triángulo equilátero de 5 cm. de lado, donde los puntos medios de sus lados sean los vértices de un nuevo triángulo que resulta ser equilátero, nuevamente se ubican los puntos medios del nuevo triángulo y así, sucesivamente, se continúa con el mismo procedimiento. La tarea propuesta fue encontrar la sucesión de los perímetros de los triángulos equiláteros; calcular el sexto término; escribir el término general; y encontrar la suma de los términos de la sucesión.

Luego de analizar las respuestas de los tres grupos de estudiantes, la autora comenta que los participantes del primer grupo de 15 estudiantes de la carrera de Matemática no cometieron muchos errores, por lo tanto, no hubo aporte a la investigación. En el trabajo de los siete estudiantes de la Maestría en Enseñanza, se hicieron visibles errores en la búsqueda del término general y en la suma de términos, ya que al parecer algunos estudiantes no recordaban la suma de la serie geométrica, mientras que en el grupo de estudiantes de la carrera de Sistemas de información, también se encontraron errores, siendo uno de los más comunes el relacionado con la obtención del término enésimo, a raíz de empezar a trabajarlo directamente con la parte algebraica en lugar de realizar previamente un esquema o figura. Otro de los errores comunes fue no recordar cómo hallar la suma de términos.

Ferraza (2017) realiza una entrevista a dos estudiantes de la Licenciatura en Matemática, con el fin de indagar acerca de la resolución de la tarea, la cual consistió en ocho preguntas divididas en cuatro grupos. El primer grupo de preguntas estuvo orientado a las dificultades que presentan los estudiantes; el segundo, orientado a identificar los registros que ellos manejan; en el tercer grupo, se solicitaron sugerencias de ejercicios que pudieran servir para el aprendizaje de los estudiantes; y el cuarto grupo de preguntas se centró en las dificultades de los maestros al enseñar sucesiones numéricas.

La entrevista permitió saber qué piensan los estudiantes sobre el tema de estudio, en el que se comentó acerca de las dificultades que presentan los estudiantes, que pueden ser debido a que, por lo general, resuelven ejercicios que desarrollan en ellos habilidades en el campo algebraico y no en otros campos de la matemática. Del mismo modo, recomienda que los estudiantes trabajen las sucesiones numéricas representadas primero en un registro natural, luego en un registro geométrico y, por último, en el registro tabular. Además, se dieron sugerencias de involucrar casos reales o problemas de contexto al trabajar las sucesiones numéricas, donde se brinden imágenes o figuras geométricas.

Ferraza (2017) concluye que la conversión de la representación de las sucesiones numéricas del registro de lengua natural al registro algebraico estuvo presente en todos los procesos de la actividad.

Otra investigación identificada es la de Genc y Akinci (2020), quienes señalan que las dificultades y errores que los estudiantes cometen cuando estudian sucesiones de sumas parciales se debe a la amplitud del campo de la matemática en que se aplica, sobre todo en los estudiantes de Ciencias e Ingeniería cuando se enfrentan a problemas del análisis y el cálculo. El objetivo de esta investigación es reconocer los errores cometidos por los estudiantes universitarios al resolver tareas sobre la convergencia de series infinitas.

Se consideró al conocimiento conceptual y procedimental en el aprendizaje de las matemáticas como marco teórico, en la que emplearon una metodología de carácter cualitativo exploratorio mediante el método de estudio de caso, con el que trabajaron con un total de 43 estudiantes de pregrado en Licenciatura de Matemáticas de una Universidad de Turquía y los datos se obtuvieron de una evaluación escrita de siete preguntas desarrolladas en hoja de papel. Para el análisis de los datos, se realizaron técnicas descriptivas y de análisis de contenido y se elaboraron 11 categorías para identificar los errores que tuvieron los estudiantes al resolver ejercicios sobre convergencia y divergencia de series.

Algunos de los errores y dificultades identificados por Genc y Akinci (2020) fueron el uso incorrecto de los criterios de convergencia de una serie y del criterio de comparación; considerar el operador sumatorio como una función multiplicativa; mal uso de las propiedades de las series telescópicas; considerar que en una serie no se puede determinar la convergencia por el hecho de no llegar a una conclusión luego de usar algún un criterio; confundir concepto de sucesión con el de serie, entre otros.

Los autores concluyen que la comprensión conceptual de función, límite y sucesiones es crucial para entender el concepto de convergencia de las series. Sostienen además que, incluso comprendiendo los conceptos mencionados, no aseguran una correcta comprensión del concepto de convergencia en los estudiantes, ya que este estudió también mostró que el nivel de aprendizaje de los estudiantes o la falta de aprendizaje de conceptos previos afecta en la correcta comprensión conceptual; es decir, los estudiantes con conocimientos procedimentales insuficientes, no podrán afrontar un problema dado.

En virtud de los resultados, los investigadores manifiestan que es necesario establecer un equilibrio entre conocimientos procedimentales y conceptuales en el aprendizaje de la convergencia de las series para reducir los errores o dificultades de aprendizaje y así desarrollar una comprensión matemática profunda.

1.1.2 Investigaciones que usan herramientas digitales para mejorar la comprensión de las sucesiones.

En esta sección, se presentan las investigaciones que usan herramientas digitales, como GeoGebra, como un medio tecnológico para abordar tareas relacionadas con el concepto de sucesiones numéricas.

González et al. (2021) diseñan una propuesta que consiste en una secuencia de actividades para abordar y comprender las sucesiones numéricas. La importancia de esta propuesta surge porque muchos estudiantes universitarios de los primeros ciclos no llegan a interiorizar la definición formal de las sucesiones numéricas, ya que las investigadoras sostienen que el uso de distintos registros para el objeto matemático y el manejo de herramientas digitales permitirán una mayor comprensión.

El objetivo de esta propuesta es fortalecer y corregir la concepción de las sucesiones de números reales en los estudiantes de Bioquímica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. La metodología es de corte cualitativo descriptivo.

Los investigadores plantearon ejercicios para los cuales utilizó GeoGebra para su desarrollo con el fin de permitir la comprensión del concepto relacionado con sucesiones numéricas respecto de su monotonía o de su convergencia, si oscila o no. Estas actividades se orientan también a que se logre comprender la noción de límite y el entendimiento de la definición formal de sucesiones.

González et al. (2021) diseñaron 14 ejercicios tomando en cuenta los errores comunes que comenten los estudiantes en el curso de Cálculo I al abordar sucesiones. Esta cantidad de ejercicios estuvo orientada a que el estudiante vaya construyendo el concepto paso a paso hasta que pueda concretizar dicho concepto. Entre los tipos de ejercicios figuran un enunciado simple, donde se les brinda tres gráficas de puntos que se desprenden de una función y se les pide verificar si es o no una sucesión; una gráfica de puntos, donde el objetivo es reconocer o encontrar el término enésimo; una gráfica de puntos con un deslizador con el objetivo observar el comportamiento de la sucesión; la gráfica de una sucesión, donde se pide a los estudiantes reconocer si la sucesión es acotada y si es monótona, entre otros.

Dentro de las consideraciones finales, los investigadores explican que estas actividades iterativas con el uso de GeoGebra permiten orientar a los estudiantes cuando trabajan el concepto de sucesiones. También destacan que la manera cómo se diseñaron las actividades, mediante esta herramienta digital, hace posible una mejor compresión de conceptos que resultan ser un poco más abstractos que otros, así como el manejo de distintos registros con el uso de GeoGebra, el cual facilita una mejor comprensión de dicho concepto.

En esta misma línea, De Oliveira et al. (2021) realizaron una investigación sobre el uso de la tecnología digital en el aula de clase como un medio para fortalecer y realizar situaciones didácticas que permitan un aprendizaje efectivo en la enseñanza de las matemáticas. Los autores sostienen que el uso de tecnologías en el aula exige un rediseño en la práctica docente que debe pasar por los procesos tecnológicos, pedagógicos y formativos.

Esta investigación usa la metodología cualitativa de tipo bibliográfica y exploratoria, en dirección a generar propuestas innovadoras y por tal motivo la recopilación de la información fue recogida de varios artículos científicos y libros.

Uno de los objetivos principales de esta investigación es desarrollar y modificar conceptos e ideas con miras a formular problemas, ya que GeoGebra se usa como herramienta de apoyo en las clases de Matemática, así como también el objeto de estudio fueron las sucesiones de recurrencia.

Respecto al uso de las tecnologías en situaciones de enseñanza en el contexto de metodologías activas, los autores están de acuerdo en que las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) son representadas por los softwares educativos, videos y audios con el propósito de mejorar el aprendizaje, así como también expandir la docencia en el modo virtual. Este mecanismo que incluye las TIC como apoyo a los docentes, para los investigadores, promueve que los estudiantes movilicen los conceptos, además que posibilita la capacidad de modelar lo real y expresar conocimientos construidos de distintas formas.

De Oliveira et al. (2021) explican que el diseño de las actividades se sostiene en dos fundamentos teóricos: uno de carácter tecnológico y el otro psicopedagógico. Es decir, el enfoque tecnológico refiere a GeoGebra como recurso para ayudar en la construcción del conocimiento y, se considera como ejemplo de un enfoque psicopedagógico, al uso de teorías de la enseñanza. Los investigadores consideran que GeoGebra es una herramienta educativa altamente potencial, además de ser gratuita, pues funciona con o sin internet y ofrece tres ventanas de visualización, que son la vista algebraica y las vistas gráficas 2D y 3D, empleadas exclusivamente para la enseñanza de las matemáticas que se pueden usar desde la Educación Primaria hasta la educación superior.

Los investigadores brindan una propuesta que consistió en dos problemas sobre sucesiones de recurrencia. Para el primer problema, plantearon una relación de recurrencia que dependía del término enésimo $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}, n > 1, a_1 = 8, a_2 = 18$, donde se pide a los estudiantes que encuentren todos los valores de n, para los cuales a_n es un cuadrado perfecto. Para este fin, se usó la hoja de cálculo de GeoGebra.

En el segundo problema, se planteó una sucesión de recurrencia t_n, con dos términos iniciales, y lo que se pidió a los estudiantes es que encuentren la fórmula de ese término enésimo. Aquí también los autores se apoyaron en la hoja de cálculo de GeoGebra, donde se usan algunos pasos para poder validar dicha fórmula, lo que ayudó a hacer los cálculos matemáticos necesarios para luego validar la fórmula por inducción.

Los autores concluyen que esta propuesta didáctica que se realizó con los estudiantes ha permitido que ellos tuvieran un comportamiento activo, incluso a través de la interacción con

GeoGebra para reafirmar los conceptos, conjeturas y poder verificar las relaciones de recurrencia. Es así como se entiende el uso del GeoGebra como una herramienta tecnológica que ayuda en la enseñanza de las matemáticas.

A continuación, presentaremos la justificación de la presente investigación.

1.2 Justificación

La revisión de la literatura pone de manifiesto la importancia y la relevancia del estudio de las sucesiones geométricas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los factores de su importancia es su relación directa con otros conceptos matemáticos de mayor complejidad.

A través de una actividad contextual relacionado a la sucesión geométrica, Codes y González-Martín (2017) muestran que la sucesión de sumas parciales asociada a esta es un buen ejemplo para la mejor comprensión de los estudiantes de los primeros años de universidad, sobre todo cuando se quiere establecer las diferencias entre sucesiones y sucesión de sumas parciales (serie numérica).

En otro ejemplo, tenemos a las sucesiones del número de Euler *e*, que aparecen en el cálculo diferencial. Generalmente, estas sucesiones se presentan cuando se estudia la función exponencial; en ecuaciones diferenciales las sucesiones están presentes cuando se analiza las trayectorias de las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); en el cálculo integral y en otros cursos se usan como herramientas para probar teoremas del análisis matemático, tal y como lo señalan las investigaciones de Malla et al. (2019) y Verdugo (2020).

Del mismo modo, algunas de las sucesiones geométricas están presentes en situaciones reales, como en múltiples configuraciones biológicas, en la manera como se distribuyen las ramas de los árboles o en la forma como se distribuyen los frutos de la piña tropical, dado por el desarrollo cognitivo que se genera al identificar patrones en estas sucesiones (Verdugo 2022).

Al respecto, Malla (2020) nos explica:

> A nivel universitario, las sucesiones y series representan uno de los objetos con los cuales estudiantes, de diferentes carreras, se enfrentan con mayor dificultad, considerando además que ocupan un lugar muy importante en la matemática debido a las múltiples conexiones con otros importantes objetos matemáticos como funciones y límites, sin olvidar el rol que desempeñan en los procesos de aproximaciones numéricas. (p. 5)

En este mismo sentido, Codes y González-Martín (2017) sostienen que el concepto de sucesiones y serie numérica son conceptos complejos debido al nivel de abstracción y la cantidad de elementos matemáticos que están relacionados con él.

Por otro lado, Ferraza (2017) y Genc y Akinci (2020) identificaron errores y dificultades en el desarrollo de tareas relacionadas al concepto de series, sucesiones y sucesiones geométricas. Una de estas dificultades se presenta cuando los estudiantes intentan encontrar patrones geométricos en una sucesión o cuando quieren determinar la suma de los términos que involucra el uso de sumatorias, así como identificaron que los estudiantes no entienden la noción de convergencia de las sucesiones.

Ferraza (2017) identificó que uno de los principales motivos de los errores que comenten los estudiantes es que en los problemas de sucesiones solo se acostumbra trabajar dentro de un lenguaje algebraico, limitando la comprensión de dicho concepto a un solo campo de la matemática, como es el algebraico, en lugar de ampliarlo al utilizar representaciones del objeto en registros como el gráfico o el verbal.

Por los motivos expuestos, consideramos importante seguir con el estudio de este concepto para generar propuestas de enseñanza que aporten en la comprensión de las sucesiones numéricas, en particular, de las sucesiones geométricas.

Una opción que se ha identificado en la literatura es el uso de tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las sucesiones. Gonzales et. al (2021) realizaron una propuesta didáctica que prioriza el uso de tecnología digitales a través de aplicaciones realizadas por los estudiantes mediante el uso de GeoGebra, en el que sostienen que esto permitirá una mejor comprensión en el concepto de límite de sucesiones y de otros inconvenientes que resulten de la interpretación gráfica y algebraica.

También tenemos la investigación de De Oliveira et al. (2021), quienes utilizan GeoGebra como medio facilitador para mostrar los cambios interactivos donde el estudiante tiene que identificar patrones numéricos a partir de deslizadores en actividades sobre sucesiones de recurrencia mostrar que puede haber un comportamiento funcional entre la posición del término y su valor en general. Además, mencionan que el uso de GeoGebra permite explorar conceptos matemáticos geométricos y algebraicos.

Se ha podido reconocer en las propuestas que involucran a las tecnologías digitales que los investigadores diseñan aplicativos con el fin que los estudiantes manipulen deslizadores y vean los cambios que se generan en las respectivas interfaces digitales, ya que no se identifica que se haya realizado una familiarización con la tecnología digital, por ejemplo de GeoGebra, con la intención de que el estudiante realice construcciones y se analicen los pasos que realiza para resolver la actividad, por lo que se puede pensar que dar al estudiante la libertad de explorar con la tecnología, permitiría entender su manera de razonar y cómo trabajaría el concepto representado en diferentes registros como el algebraico, numérico y gráfico de forma simultánea.

Por otra parte, se hizo una revisión de las mallas curriculares, así como también de los documentos de la Pontificia Universidad Católica de Perú (PUCP), como el sílabo del curso Cálculo Aplicado que se dicta en el cuarto ciclo de la Escuela de Estudios Generales Ciencias y el sílabo del curso Matemática I que se dicta en el primer ciclo de la Escuela de Estudios Generales Letras. La Tabla 1 presenta la información antes mencionada.

Tabla 1. *Cursos de Estudios Generales en la Pontificia Universidad Católica del Perú*

Curso	Facultad	Ciclo
Matemáticas I	Estudios Generales Letras	1
Cálculo Aplicado	Estudios Generales ciencias	4

Fuente: Plan de estudios generales Pontificia Universidad Católica de Perú. (Recuperado de https://www.pucp.edu.pe/)

En la Figura 1, se muestra el silabo del curso Cálculo aplicado de la PUCP y la unidad didáctica del capítulo 2. El tema de sucesiones geométricas es importante porque será utilizado para abordar temas como convergencia, series y en la resolución de ecuaciones diferenciales, que son trabajados en cursos superiores como series y transformadas, entre otros.

Figura 1*. Unidad didáctica del curso Cálculo aplicado de la PUCP*

Unidad didáctica Capítulo 2: Series de Potencias y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (13 Horas)
Descripción general de la unidad
Muchos modelos matemáticos usados en ingeniería y otras especialidades se establecen en base a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables. Existe un método para resolver dichas ecuaciones usando series de potencias. La solución que se obtiene es una función expresada como la suma de una serie de potencias.
Contenidos
Sucesiones numéricas. Convergencia. Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas. Propiedades de convergencia de sucesiones. Series numéricas. Convergencia y suma de una serie. Series geométrica, armónica y telescópica. Criterios de convergencia para series de términos no negativos: comparación, comparación por paso al límite y cociente. Criterio de la Raíz y criterio de la integral. Series alternantes. Criterio de Leibniz. Convergencia absoluta. Sucesiones y series de funciones. Serie de potencias. Radio de convergencia. Derivación e integración de series de potencias. Desarrollo de una función real en serie de potencias. Series de Taylor. Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias usando series de potencias.

Fuente: Silabo del curso Cálculo Aplicado (Recuperado de www.pucp.edu.pe)

En la Figura 2, se muestra la información de la semana 14 del curso de Matemática I, donde observamos que se abordan los temas de sucesiones aritméticas, sucesiones geométricas, propiedades sobre el término enésimo, series y sucesiones de sumas parciales. La importancia de abordar el tema de sucesiones geométricas en estudiantes de Estudios Generales Letras se asocia con desarrollar el razonamiento inductivo de los estudiantes con el fin de realizar generalización a partir de casos particulares, aspectos tomados en cuenta en la toma de decisiones a nivel cualitativo.

Figura 2. *Temas de la semana 14 del curso de Matemática I de la PUCP*

14	28 junio – 03 julio	Sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas. Propiedades sobre el término enésimo y la suma de los n primeros términos. Series. Sucesión de sumas parciales. Idea	PD6
		intuitiva de convergencia de una serie. Serie geométrica.	

Fuente: Silabo del curso Matemática I (Recuperado de www.pucp.edu.pe)

Por lo mencionado anteriormente, este trabajo de investigación es pertinente y el hecho de que se haya decidido involucrar al software GeoGebra en el estudio se centra en que el estudiante vea este concepto representado en distintos registros de manera simultánea y generar un aporte orientado con realizar innovación educativa en la enseñanza de la matemática.

Por esta razón, consideramos que la aproximación teórica del enfoque instrumental es la apropiada porque nos da herramientas para analizar las acciones que realiza el estudiante con tecnologías digitales.

1.3 Aspectos teóricos del Enfoque instrumental

En la presente investigación, utilizaremos como referencial teórico el Enfoque instrumental desarrollado por Rabardel (2011). A continuación, describiremos los elementos de dicho enfoque que se toman en consideración para la realización del estudio.

Artefacto

Según el investigador, el artefacto es todo objeto material o simbólico al que se le ha realizado una transformación, aunque sea mínima, por un sujeto que ejecuta una actividad.

Esquema de utilización

Los esquemas de utilización están relacionados con la utilización del artefacto, ya sea que la actividad realizada forme parte del proceso de reconocimiento de propiedades del artefacto o que la actividad se oriente al objetivo de la tarea. El autor las diferencia entre tareas segundas, que son las tareas relacionadas con la identificación y manejo de las características y propiedades del artefacto, y tareas primeras, que son las tareas orientadas con el objetivo de la actividad que se realiza, para las cuales el artefacto se transforma en una herramienta de ejecución.

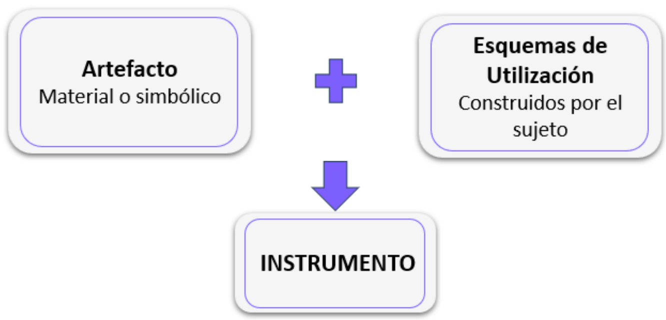
El investigador distingue tres clases de esquema: los esquemas de uso, de acción instrumentada y de actividad colectiva instrumentada. En esta investigación, solo se considerarán los dos primeros tipos.

Rabardel (2011) señala que los esquemas de uso se asocian con las tareas segundas y se caracterizan porque están orientadas al logro de objetivos específicos relacionados con las diferentes etapas que debe pasar un sujeto en la resolución de una actividad. Por otro lado, los esquemas de acción instrumentada, según el autor, se asocian con las tareas primeras y se caracterizan por su orientación al objetivo principal de la actividad.

Instrumento

Según Rabardel (2011), el instrumento es lo que un sujeto construye a partir del artefacto y se le considera una entidad mixta que contiene al mismo tiempo un artefacto, material o no, y los esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción con dicho artefacto. Trouche (2004) señala que el instrumento presenta un componente artefactual que utiliza para realizar un tipo de tarea, pero también presenta un componente psicológico asociado con los esquemas que moviliza, los cuales están a nivel cognitivo. La Figura 3 muestra estos tres elementos y cómo se relacionan.

Figura 3. *Componentes de un instrumento.*



Fuente: Adaptado de de García-Cuéllar (2014, p.21)

La Figura 3 muestra los componentes de un instrumento. Es decir, un artefacto movilizado para realizar un tipo de actividad y los esquemas que lo organizan.

Génesis Instrumental

Rabardel (2011) denomina proceso de génesis instrumental al proceso a partir del cual un artefacto se transforma en instrumento. Según el investigador, se identifican dos componentes fundamentales asociados con este proceso: la instrumentalización y la instrumentación.

El investigador manifiesta que el proceso de instrumentalización está dirigido hacia la parte artefactual del instrumento, en donde se potencian las propiedades del artefacto por parte del sujeto al asignarle funciones que lo ayuden a resolver una tarea. Esta atribución de propiedades puede generar la transformación del artefacto relacionado con su organización y funcionamiento.

Por otro lado, el proceso de instrumentación, señala el investigador, está dirigido hacia el sujeto a la generación y movilización de esquemas de uso al desarrollar ciertas tareas con el artefacto y a la creación de esquemas de acción instrumentada asociadas con el objetivo principal de la actividad.

La Figura 4 muestra los elementos que componen el proceso de génesis instrumental, donde se observamos el proceso para que el artefacto se convierta en un instrumento. Además, se muestra los procesos de Instrumentalización e Instrumentación.

Figura 4. *Génesis instrumental.*

Fuente: Extraído de García-Cuéllar y Salazar (2020, p.206)

A continuación, presentaremos la pregunta y objetivos de la investigación asociados con la problemática identificada y el estudio que se pretende realizar.

1.4 Pregunta y objetivos de la Investigación

¿Cómo se produce la génesis instrumental vinculada al uso de GeoGebra al desarrollar una actividad sobre sucesiones geométricas en estudiantes universitarios?

Objetivo General:

Analizar cómo se produce el proceso de génesis instrumental vinculado al uso de GeoGebra al desarrollar una actividad sobre sucesiones geométricas con estudiantes universitarios.

Objetivos específicos:

- Identificar los esquemas de utilización que se generan o movilizan sobre el artefacto GeoGebra al resolver una actividad sobre sucesiones geométricas.

- Reconocer elementos que indiquen que GeoGebra se convierte en un instrumento para trabajar con sucesiones geométricas en estudiantes universitarios.

A continuación, presentaremos la metodología de la investigación.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

La presente investigación es descriptiva e interpretativa y se ubica dentro de una perspectiva cualitativa, porque, según Denzin y Lincoln (2011), una investigación cualitativa busca dar sentido a los fenómenos que ocurren en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un tema matemático a partir de un conjunto de datos recolectados. Por lo tanto, la atención se centra en los procesos que sigue el sujeto en la resolución y no tanto en el resultado obtenido, así como en los significados que genera el sujeto sobre los conceptos trabajados al desarrollar una tarea o actividad.

Por tal motivo, como se pretende describir los conocimientos matemáticos que moviliza el estudiante cuando resuelve una actividad, mediado por un ambiente de representación dinámica como GeoGebra, así como interpretar las acciones que realiza el estudiante con dicho software bajo el sustento teórico del enfoque instrumental, con el fin de analizar cómo el estudiante logra la génesis instrumental, decimos que el estudio es cualitativo.

Según Hernández et al. (2014), en una investigación cualitativa, se incluye una variedad de concepciones, interpretaciones, técnicas, entre otros aspectos, y presenta una serie de etapas que no son aisladas unas de otras, sino que se interrelacionan a lo largo de la investigación. Los investigadores proponen un conjunto de fases por las que transita un estudiante al realizar este tipo de investigación. Para este trabajo, se ha realizado una adaptación del proceso de investigación cualitativa propuesto por Hernández et. al, que se compone de cuatro fases que se muestran a continuación:

Fase 1: Planteamiento del problema

Hernández et al. (2014) ubican en esta fase la revisión de la literatura para conocer el estado de investigación sobre el tema estudiado, la justificación del estudio y la pregunta y objetivo de investigación que especifican la problemática a tratar.

Con relación a esta fase, se realizó la búsqueda de investigaciones de referencia en revistas indexadas, en tesis de maestría y de doctorado relacionadas con el objeto matemático sucesión real y las nociones relacionadas a esta, tales como sucesiones numéricas, sucesiones de recurrencia, sucesiones de sumas parciales. Además, se identificaron investigaciones relacionadas a la convergencia de estas sucesiones que desarrollan actividades con el uso del GeoGebra.

La revisión de la literatura brindó insumos para justificar la presente investigación, la cual se realizó desde tres perspectivas diferentes: *pertinencia*, debido a la importancia del estudio de las sucesiones en los cursos básicos de los primeros años de universidad presente en los sílabos oficiales de diferentes universidades, como es el caso de la Pontificia Universidad Católica del Perú, así como también algunos modelos de aplicación de sucesiones en Ingeniería; *relevancia*, al hacer visible las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentar actividades sobre sucesiones, además de los beneficios del GeoGebra que permiten tener la idea y la comprensión de convergencia de las sucesiones; e *impacto*, al presentar una propuesta que involucra el uso de un sistema de geometría dinámica como GeoGebra como mediador del aprendizaje del estudiante y como un aporte en innovación educativa.

Esto llevó al planteamiento de la pregunta de investigación, objetivo general y objetivos específicos relacionados al análisis de actividades sobre sucesiones de números reales, considerando aspectos teóricos del Enfoque Instrumental enunciados en este capítulo.

Fase 2: Aspectos Teóricos de la Investigación: Aspectos del Enfoque Instrumental

En esta fase, se seleccionarán los aspectos teóricos de la investigación. Estos son los Aspectos del Enfoque instrumental desarrollado por Rabardel (2011), donde se define los conceptos de artefacto e instrumento. Además, se describen los procesos de la instrumentalización y la instrumentación de la Génesis instrumental, así como también se definen los esquemas de utilización.

Fase 3: Estudio de las sucesiones

Esta fase comenzará con el estudio de los aspectos matemáticos de la sucesión de números reales, en la que mostraremos la definición formal de una sucesión, definición del límite de una sucesión, algunos teoremas y propiedades de convergencia de sucesiones, tal y como se presentan en un libro teórico, en este caso, usaremos el libro Lages (1997). Desde un punto de vista didáctico, se presenta cómo se aborda el tema de sucesiones en los libros Zill y Wrigth (2011) y Stewart (2012).

Fase 4: Elaboración de la actividad, aplicación y análisis

Con relación a las acciones realizadas en esta fase, se presenta al sujeto de investigación y se describe qué conocimientos matemáticos trabajó en aula previo a la parte experimental de la investigación, así como las herramientas de GeoGebra que conoce y que ha trabajado tanto en el colegio como en el curso Introducción al cálculo.

Del mismo modo, se presenta la secuencia de una actividad diseñada con el fin de analizar cómo el estudiante consigue la génesis instrumental del artefacto GeoGebra al transformarlo en instrumento para la resolución de sucesiones geométricas; se describe cómo se llevó a cabo la implementación de la parte experimental; cómo se realizó la recolección de información; el análisis de lo que se esperaba realizara el estudiante; y la presentación de los resultados analizados con el referencial teórico del enfoque instrumental.

Fase 5: Conclusiones

En esta fase, se detallan los aspectos relevantes observados al realizar el análisis de los resultados, la justificación de la manera en la que se logra responder a la pregunta de investigación y cómo se consiguieron los objetivos del estudio, así como las conclusiones que se desprenden de la investigación y posibles investigaciones que se podrían realizar, tomando como base el objeto de estudio y el uso de sistemas de geometría dinámica como GeoGebra. Es importante mencionar que se brindarán recomendaciones futuras para próximas investigaciones.

A continuación, presenta los aspectos matemáticos y didácticos relacionados con las sucesiones geométricas que forman parte del segundo capítulo de la presente investigación.

CAPÍTULO II: ASPECTOS MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS DE LAS SUCESIONES

En este capítulo, presentaremos los aspectos matemáticos y didácticos de las sucesiones, así como la noción y definición formal de sucesiones abordado en los distintos libros de educación superior antiguos y actuales.

2.1 Aspectos matemáticos de las sucesiones y sucesión de sumas parciales

Los aspectos matemáticos del concepto de sucesiones generalmente se presentan en los libros de introducción al análisis matemático o fundamentos del cálculo. Para ello, se han revisado los libros de texto de Lages (1997), Bartle (2010) y Apóstol (2002), que están direccionados al análisis matemático y es por eso que, en la mayor parte de su contenido, se observa que los autores se movilizan en el plano algebraico.

Definición de sucesión

En palabras de Lages (1997), "una sucesión de números reales (o sucesión en $\mathbb{R}$) es una función que se define en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ de tal manera que las imágenes están incluidas en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales" (p. 25).

Respecto a la notación de una sucesión, el investigador advierte que "no debe confundirse el conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ de sus términos con la sucesión (x_n), expone como ejemplo la sucesión $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ e indica que no es lo mismo que $\{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$, ya que este conjunto es igual a {1}" (Lages, 1997, p. 25).

Límite de una sucesión

El autor define que a es el límite de una sucesión (x_n) cuando para todo $\mathcal{E} > 0$ se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que todos los x_n con índice $n > n_0$ cumplan con la propiedad de $|x_n - a| < \mathcal{E}$. Siendo así, se escribirá que $a = lím\, x_n$. Esta definición se puede escribir de manera simbólica como se muestra en la Figura 5, donde se presenta la definición formal del límite

Figura 5. *Límite de una sucesión según Lages*

$$a = \lim x_n \quad \cdot \equiv \cdot \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Fuente. Lages (1997, p. 26)

Por otro lado, Bartle (2010) define de manera similar al límite de una sucesión, tal y como se muestra en la Figura 6.

Figura 6. *Límite de una sucesión según Bartle*

3.1.3 Definición Se dice que una sucesión $X = (x_n)$ en $\mathbb{R}$ **converge** a $x \in \mathbb{R}$, o que x es el **límite** de (x_n), si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número natural $K(\varepsilon)$ tal que para toda $n \geq K(\varepsilon)$ los términos x_n satisfacen $|x_n - x| < \varepsilon$.

Fuente. Bartle (2010, p. 68)

Es claro que las definiciones en matemática no cambian; sin embargo, se pueden presentar en distintas versiones, pues en el texto Bartle (2010) se denota a las sucesiones con $f(n)$, mientras que en los textos de Lages con x_n. Además de las definiciones mencionadas, se tiene una lista de teoremas que facilitan el estudio de las operaciones con el caculo de límites de las sucesiones.

Algunos teoremas sobre sucesiones

Teorema 1: Una sucesión no puede converger a dos límites diferentes. (Lages, 1997, p. 27)

Teorema 2: Toda sucesión monótona converge si y solo si es acotada. Según Lages (1997) la prueba del teorema es la siguiente:

Demostración: Sea (x_n) monótona, supongamos que es creciente y acotada. Escribimos $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ y $a = sup\, X$. Afirmamos que $a = lím\, x_n$. En efecto, dado $\mathcal{E} > 0$, el número $a - \mathcal{E}$ no es una cota superior de X. Luego existe n_0 tal que $a - \mathcal{E} < x_{n_0} \leq a$.Así, $n > n_0 \Rightarrow a - \mathcal{E} < x_{n_0} \leq x_n < a + \mathcal{E}$, de donde $lím\, x_n = a$. (p. 29)

Apostol (1996) también presenta una prueba similar del teorema 2, pero se apoya en un gráfico para representar a las sucesiones, donde asume que $f(n)$ es una sucesión creciente y muestra el gráfico que se muestra en la Figura 7.

Figura 7. *Sucesión creciente*

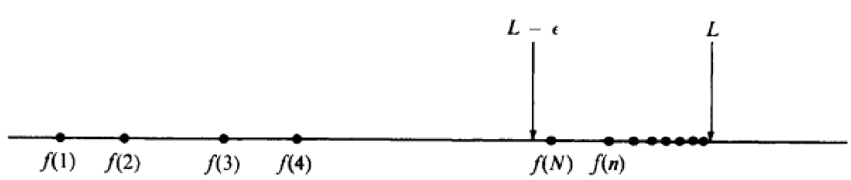


FIGURA 10.3 *Una sucesión creciente acotada converge hacia su extremo superior.*

Fuente. Apostol, 1996, p. 466

Teorema 3: Toda sucesión convergente es acotada.

Teorema 4: Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Teorema 5: (Teorema del Sándwich)

Si $lím\, x_n = lim\, y_n = a \ y \ x_n \leq z_n \leq y_n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $lím\, z_n = a$

(Lages, 1997, p. 30)

Operaciones con Límites

Teorema 6

Si $lím\, x_n = 0 \ e \ (y_n)$ una sucesión acotada (que puede ser convergente o no), entonces $lím \ x_n \cdot y_n = 0$. (Lages, 1997, p. 30)

Teorema 7

Si $lím\, x_n = a$ y $lím\, y_n = b$, entonces:

1. $lím\,(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $lím\,(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. $lím \ \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$

Sucesión Geométrica

Lages (1997) define una sucesión geométrica como aquella en el que el cociente de dos términos consecutivos es un valor constante al que llamaremos “ r ”, también llamado razón y esta puede ser positiva o negativa.

Ejemplo:

1) Sea la sucesión:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$$

Aquí observamos que la razón es igual a “$r = 3$”

2) Sea la sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

Aquí observamos que la razón es igual a “$r = \frac{1}{2}$ ”

Notación general:

$$\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} = \{a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^n\}$$

Convergencia de una sucesión geométrica

Consideremos $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ una sucesión geométrica de razón $\boldsymbol{r}$**.**

- Si $|r| < 1$, entonces multiplicando por $|r^n| \geq 0$ obtenemos $0 \leq |r^{n+1}| \leq |r^n|$. Luego, $\{|r^n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, acotado inferiormente y, por lo tanto, es convergente, digamos que converge a l. Ahora tenemos:$|r^{n+1}| = |r||r^n|$ entonces, aplicando limites, tenemos que $l = |r|l$. Como $|r| \neq 1$, tenemos que $l = 0$. Es decir $\{|r^n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.
- Si $|r| > 1$, entonces $|r| = 1 + h$, con $h > 0$. Sabemos por la desigualdad de Bernoulli $|r|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$, entonces $|r^n| \to +\infty$. En particular, $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Serie numérica o sucesión de sumas parciales

Lages (1997) en su texto define a una serie como una suma $s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ como un número infinito de sumandos. Para que esto tenga sentido, escribiremos

$s = \lim\limits_{n\to+\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$. Como todo límite, este puede existir o no. Por eso hay series convergentes y divergentes. (p. 53)

Series convergentes

A partir de una sucesión $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ de números reales dada formamos una nueva sucesión $\{\boldsymbol{S_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$**,** donde

$$s_1 = a_1, \;\; s_2 = a_1 + a_2, \cdots, \;\; s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \text{ etc.}$$

Los números s_n se llaman sumas parciales de la serie $\sum a_n$. El sumando a_n es el n-ésimo término o término general de la serie. Cuando existe el límite $s = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ decimos que la serie $\sum a_n$ es convergente y $s = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ se llama suma de la serie. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ no existe, decimos que $\sum a_n$ es divergente.

Ejemplo: Consideramos una Serie geométrica de termino general $a_n = r^{n-1}$. Tenemos

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

Si $r = 1$, se tiene de inmediato que $S_n = n$. Concluimos que $\{\boldsymbol{S_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ diverge y por lo tanto $\sum a_n$ diverge. Ahora, supongamos que $r \neq 1$. Multiplicando por r a S_n tenemos que:

$$rS_n = r + r^2 + r^3 \cdots + r^{n-1} + r^n$$
$$= 1 + r + r^2 + r^3 \cdots + r^{n-1} + r^n - 1$$
$$= S_n + r^n - 1$$

Por lo tanto, $S_n = (r^n - 1)/(r - 1)$. Luego, $\sum a_n$ converge si y solamente si, $|r| < 1$ y en este caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-r}$$

A continuación, mostraremos los aspectos didácticos de las sucesiones y sucesiones de sumas parciales.

2.2 Aspectos didácticos de las sucesiones y sucesión de sumas parciales

Para tener una idea de cómo se desarrolla el tema de sucesiones en los primeros ciclos de la universidad, revisamos los textos destacados en la Tabla 2:

Tabla 2. *Libros didácticos donde se trabaja el tema de sucesiones*

Autor	Titulo	Capitulo	Páginas
Zill, D. y Wright, W. (2011)	Cálculos trascendentes tempranas	9	690-727
Stewart, J (2012)	Cálculo De Una Variable Trascendentes Tempranas	11	476-554

Fuente: Elaboración propia

Stewart (2012), en el capítulo 11 de su libro, presenta la noción de sucesión, así como también la definición de ésta. Al respecto, menciona:

> Una sucesión se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ El número a_1 recibe el nombre de primer término, a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el n-ésimo término. Aquí tratamos exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}. (p. 690).

El autor hace una aclaración sobre las notaciones; es decir, menciona las distintas formas en que puede representarse una sucesión.

Figura 8. *Notación de sucesión*

Notación y términos En lugar de la notación de función usual $f(n)$, una sucesión suele denotarse mediante $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. El entero n algunas veces recibe el nombre de **índice** de a_n. Los **términos** de la sucesión se forman dejando que el índice n tome los valores $1, 2, 3, \ldots$; el número a_1 es el *primer término*, a_2 es el *segundo término*, y así en lo sucesivo. El número a_n se denomina el *término n-ésimo* o el **término general** de la sucesión. De tal modo, $\{a_n\}$ es equivalente a

$$\begin{array}{ccccccl} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n, & \ldots & \leftarrow \text{números en el rango} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & n & & \leftarrow \text{números en el dominio} \end{array}$$

Por ejemplo, la sucesión definida en el ejemplo 1 sería escrita $\{(1 + 1/n)^n\}$.

En algunas circunstancias es conveniente tomar el primer término de una sucesión como a_0 y la sucesión es entonces

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$$

Fuente: Zill y Wrigth (2011)

Por otro lado, Zill y Wrigth (2011) presentan la definición de límite de sucesión, tal como se muestra en la Figura 9.

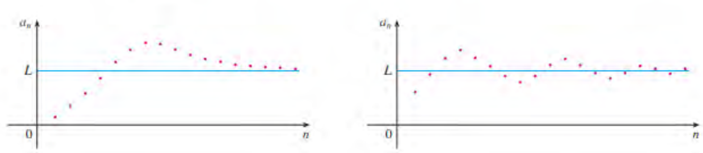
Figura 9. *Límite de una sucesión*

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos hacer que los términos a_n se aproximen a L tanto como se quiera tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n \to \infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o que es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

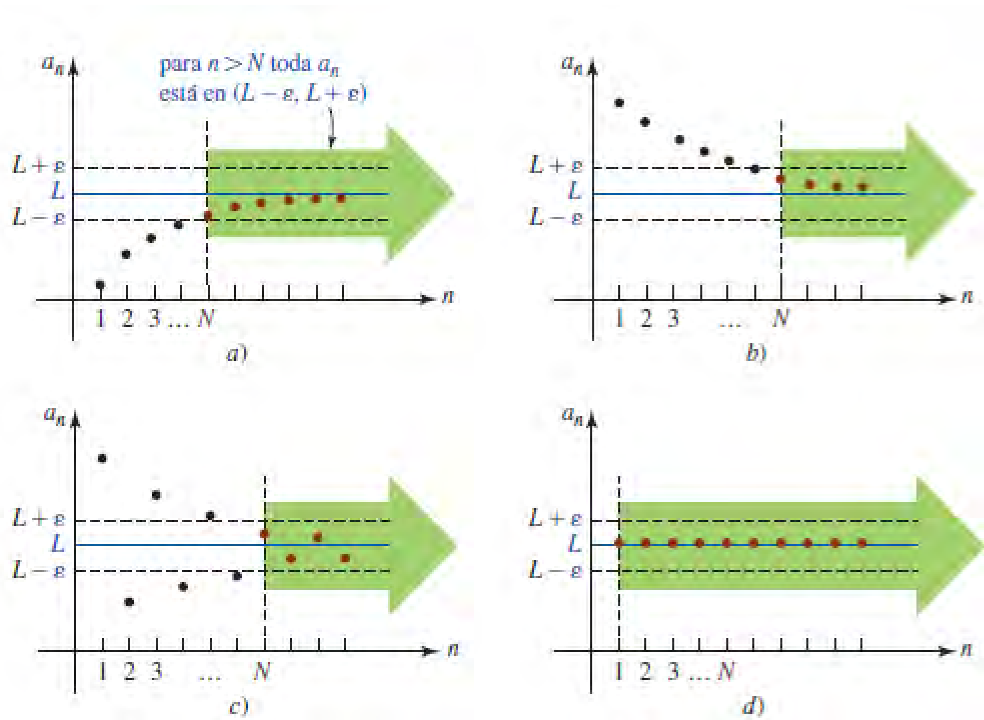
En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de dos sucesiones que tienen como límite L.



Fuente: Stewart (2012, p. 692)

En la Figura 10, se presenta la definición de límite de una sucesión y observamos que el autor se apoya de un gráfico para explicar el significado del límite de una sucesión. También se muestra que los valores de la sucesión se representan con a_n y n indica la posición del término enésimo, en el que se puede observar que Zill y Wrigth (2011) usa la recta L para representar el valor del límite de la sucesión.

Figura 10. *Convergencia de una sucesión*



Fuente: Zill y Wrigth (2011)*,* p. 477*.*

Respecto a la convergencia de una sucesión se menciona:

"Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, (1) significa que los términos a_n pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L para n suficientemente grande. Se indica que una sucesión converge a un número L escribiendo: $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$" (Zill, 2011, p. 477)

En la Figura 10, observamos que Zill y Wrigth (2011) muestran todos los casos en que una sucesión converge y hace uso de gráficos para mostrar su idea, además que en cada caso usa una sucesión monótona. Es decir, la primera gráfica se trata de una sucesión creciente; la segunda es una decreciente; la tercera es una aleatoria; y la cuarta es una sucesión constante. También se evidencia el énfasis en la didáctica para mostrar una definición abstracta.

Análisis de las tareas de la sucesión.

En Zill y Wrigth (2011) se presentan problemas de sucesiones relacionadas al cálculo numérico y la tabulación, tal y como se muestra en la Figura 11.

Figura 11. *Términos de una sucesión*

EJEMPLO 2 Términos de una sucesión

Escriba los primeros cuatro términos de las sucesiones

a) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ ***b)*** $\{n^2 + n\}$ ***c)*** $\{(-1)^n\}$.

Fuente: Zill y Wrigth (2011)

En la Figura 12, se muestra la solución que brindaron Zill y Wrigth (2011), donde podemos observar que el proceso es directo y no se hace mayor detalle.

Figura 12. *Solución propuesta para encontrar los términos de una sucesión*

Solución Al sustituir $n = 1, 2, 3, 4$ en el término general respectivo de cada sucesión, obtenemos

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ***b)*** $2, 6, 12, 20, \ldots$ ***c)*** $-1, 1, -1, 1, \ldots$ ■

Fuente: Zill y Wrigth (2011), p. 476

En la Figura 13, se observa cómo se aborda en este texto la noción de convergencia para las sucesiones del ejemplo 2 de la Figura 12, siendo la 2 a) una sucesión geométrica, para lo cual el autor plantea como solución lo que se muestra en la Figura 13, donde la solución usa un razonamiento directo y no usa ninguna propiedad formal, al igual que en los ítems b) y c) son sucesiones directas.

Figura 13. *Ejemplo de noción de convergencia de una sucesión*

Sucesión convergente Para la sucesión del inciso *a)* del ejemplo 2, se ve que a medida que el índice n se vuelve progresivamente más grande, los valores $a_n = \frac{1}{2^n}$ no se incrementan sin límite. En realidad, observamos que cuando $n \to \infty$, los términos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$$

se aproximan al valor límite 0. Se afirma que la sucesión $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ **converge** a 0. En contraste, los términos de las sucesiones en los incisos *b)* y *c)* no se aproximan a un valor límite cuando $n \to \infty$. En general se tiene la siguiente definición.

Fuente: Zill y Wrigth (2011), p. 476

Enseguida, se muestran tres ejercicios de sucesión geométricas, donde se refleja el valor de convergencia identificando la razón de cada sucesión, tal como se puede ver en la Figura 14.

Figura 14. *Ejemplo de sucesiones geométricas*

EJEMPLO 10 Aplicaciones de los teoremas 9.1.3 y 9.1.4

a) La sucesión $\{e^{-n}\}$ converge a 0 por el teorema 9.1.3, ya que $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ y $r = 1/e < 1$.

b) La sucesión $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ diverge por el teorema 9.1.3, ya que $r = \frac{3}{2} > 1$.

c) La sucesión $\left\{\frac{4}{n^{5/2}}\right\}$ converge a 0 por el teorema 9.1.2*ii*) y el teorema 9.1.4, ya que $r = \frac{5}{2}$ es un número racional positivo. ■

Fuente: Zill y Wrigth (2011), p. 480

En el libro de Stewart (2012), tal como se muestra en la Figura 15, también se presentan ejemplos sobre sucesiones.

Figura 15. *Ejemplo de sucesiones*

V EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

Fuente: Stewart (2012)*,* p. 480

Como se observa en la Figura 16, se muestra el desarrollo de la sucesión

Figura 16. *Desarrollo de sucesiones geométricas*

SOLUCIÓN Sabemos que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y se incrementan una unidad al pasar al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el siguiente numerador es 5; en general, el *n-ésimo* término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene por denominador 5^n. El signo de los términos es alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por una potencia de -1. En el ejemplo 1b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo, usamos $(-1)^{n-1}$, o bien $(-1)^{n+1}$. Por tanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

Fuente: Stewart (2012)*, p. 480*

A continuación se presenta la parte experimental de la investigación y el análisis respectivo de la información recolectada.

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, se describiremos a los sujetos de nuestra investigación, el escenario donde se desarrolla la investigación y las actividades propuestas con su respectivo análisis a priori y a posteriori según los procesos metodológicos y el enfoque instrumental.

3.1 Sujeto de investigación

La presente investigación se desarrolló con un estudiante del primer ciclo de la carrera de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Perú (PUCP). El estudiante trabajó de manera individual con su laptop en el aula de clase y la evaluación duró exactamente dos horas en un solo día. Además, se tomaron anotaciones de todo lo que respondió el estudiante. Durante la aplicación de la actividad estaban presentes dos docentes, uno es el docente del curso y otro evaluador.

3.1.1 Conocimientos matemáticos del estudiante

El estudiante, antes de desarrollar la actividad, había recibido clases sobre temas matemáticos como la de la ecuación de la recta, sistema de ecuaciones lineales, conceptos básicos de intervalos en R, inecuaciones lineales, inecuaciones cuadráticas, conceptos básicos de geometría analítica, introducción a la programación lineal, así como también sobre la noción de función lineal, cuadrática y exponencial.

3.1.2 Conocimientos sobre GeoGebra

El estudiante tenía conocimientos básicos de herramientas de GeoGebra como punto o polígono deslizador, así como también tenía nociones de cómo usar la hoja de cálculo.

3.2 Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos de recolección de información fueron la grabación del video al momento de evaluar la actividad, fotos tomadas de la solución del estudiante, un archivo de GeoGebra de la actividad desarrollada y la videograbación de la entrevista semiestructurada.

3.3 Análisis de la secuencia de la actividad

La secuencia estuvo compuesta por una actividad que se detalla a continuación.

3.3.1 Actividad

La actividad tuvo tres etapas: i. se dio un conjunto de instrucciones para generar el contexto del problema; ii. el estudiante debía resolver un conjunto de preguntas que componían la actividad, a partir de las cuales el estudiante utilizó GeoGebra y lápiz y papel para apoyarse en la resolución de ellas; y iii. se realizaron preguntas a lo largo de la actividad que correspondían a la entrevista semiestructurada para identificar y clarificar los procesos seguidos por el estudiante.

Actividad: (Análisis sobre variaciones de los términos de la sucesión)

Abra un archivo en GeoGebra, asigne el nombre Actividad.ggb, y realice las siguientes instrucciones:

i. Construya un deslizador ***a*** que varíe desde -3 hasta 3 con incrementos de 0.1 unidades. Luego, fije el valor ***a*** = 0 y ubique los puntos (0, 0); (4 + ***a***, 0); (4 + ***a***, 4 + ***a***); (0, 4 + ***a***). A continuación, construya un primer cuadrado.

ii. Determine el área del primer cuadrado y represente el resultado obtenido como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.

iii. Construya un segundo cuadrado inscrito en el primero, cuyos vértices se ubiquen en los puntos medios de los lados del primer cuadrado. Luego, determine su área y represente el resultado como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.

iv. Repita el procedimiento descrito en el inciso iii) para dibujar 4 cuadrados adicionales.

A partir de estas instrucciones, dé respuesta a las siguientes preguntas:

a) Si se dibujara un séptimo cuadrado, ¿Cuánto sería su área? Explique su procedimiento.

b) Si se continuara con este procedimiento, ¿Es posible calcular el área de cualquiera de los cuadrados inscritos? Justifique su respuesta.

c) ¿Existirá una curva que pase por todos los puntos ubicados en la vista grafica 2? Justifique su respuesta.

d) Manipule el deslizador ***a***.

   i. ¿Qué cambios observa en ambas vistas gráficas?

   ii. ¿Es posible determinar una expresión, tal como lo hizo en el inciso b), que modele cómo cambia el área de los cuadrados?

e) Brinde características sobre las siguientes sucesiones geométricas:

   i. 36, 18, 9, 9/2, …

   ii. 24, 12, 6, 3, …

   iii. 72, 24, 8, 8/3, …

3.3.2 Procedimientos y respuestas esperadas sobre la Actividad

Como el estudiante tenía conocimiento sobre el uso de diversas herramientas de GeoGebra; es decir, conocía de sus propiedades y de sus funcionalidades, se esperaba observar un proceso de instrumentalización de GeoGebra al adaptar dichos conocimientos en un nuevo contexto.

El diseño de un deslizador, la creación de los vértices de los cuadrados, el dibujo de polígonos y la representación gráfica de funciones forman parte de este proceso y se observan a lo largo de la actividad. Como el contexto es dinámico, se debían crear puntos asociados con el deslizador, lo que movilizaban conocimiento sobre relaciones funcionales, se debían realizar generalizaciones sobre casos particulares con el fin de obtener una función como modelo matemático que represente el término general de la sucesión geométrica y realizar modificaciones a este modelo para resolver y caracterizar diferentes sucesiones geométricas, las asociaciones y construcciones generaron la creación de esquemas de uso y de acción instrumentada, que son acciones propias del proceso de instrumentación.

Las preguntas que se muestran a continuación tienen diferentes funciones: de instrucción, para guiar al estudiante en la construcción de un contexto dinámico y de activadores de esquemas de utilización, para que oriente su mirada en la construcción del modelo matemático que represente el término general de la sucesión geométrica y que lleven al estudiante a realizar los procesos de instrumentalización e instrumentación para que utilice GeoGebra como un instrumento que le permita desarrollar y caracterizar sucesiones geométricas.

A continuación, presentaremos las acciones que esperábamos que el estudiante E1 realizara con GeoGebra previo al planteamiento de las preguntas:

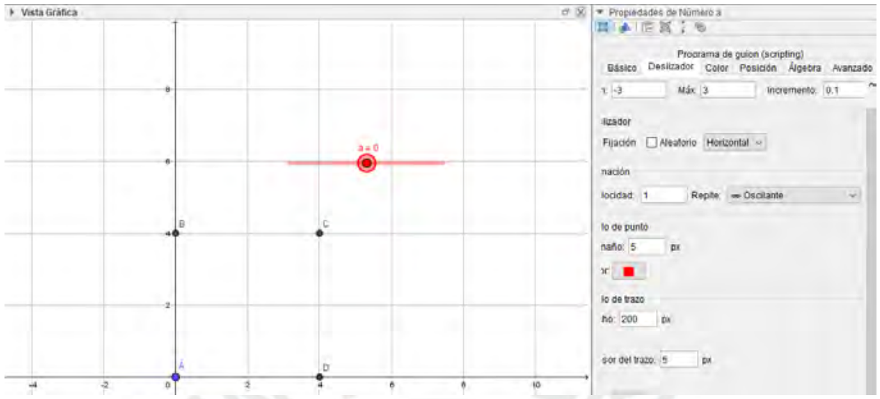
Análisis esperado

Instrucción: i. *Construya un deslizador a que varíe desde -3 hasta 3 con incrementos de 0.1 unidades. Luego, fije el valor a = 0 y ubique los puntos (0, 0); (4 + a, 0); (4 + a, 4 + a); (0, 4 + a). A continuación, construya un primer cuadrado.*

Análisis esperado para i)

Se espera que el estudiante abra un archivo de GeoGebra, seleccione la herramienta *deslizador* y la configure colocando -3 como valor mínimo, 3 como valor máximo e incrementos de 0.1 unidades. Por defecto, GeoGebra asigna al deslizador con el símbolo *a*. Luego, en la barra de entrada, se espera que escriba los puntos A = (0, 0); B = (4 + *a*, 0); C = (4 + *a*, 4 + *a*); D = (0, 4 + *a*). La Figura 17 muestra la construcción realizada de los vértices del cuadrado asociados con el deslizador.

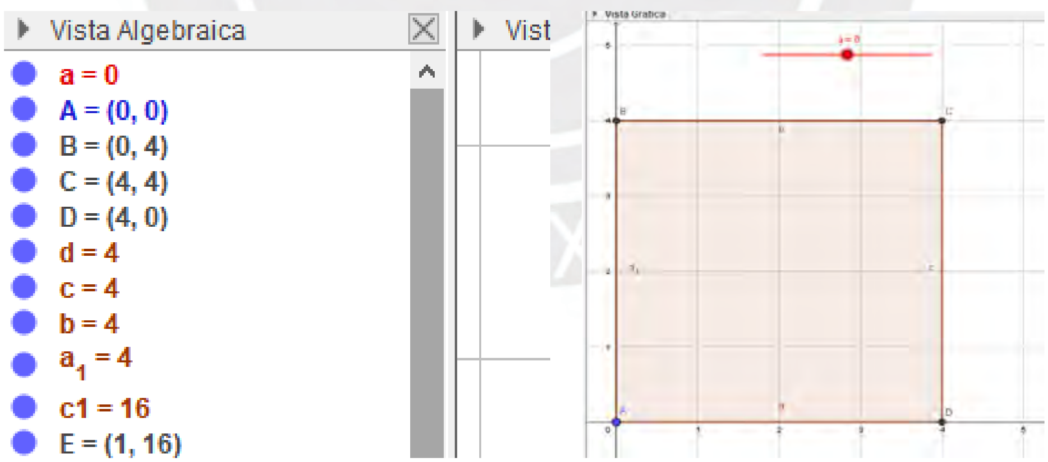
Figura 17. *Deslizador asociado a los vértices del cuadrado*



Fuente: Elaboración propia

Enseguida, el estudiante debería utilizar la herramienta *polígono* y dibujar un cuadrado uniendo los puntos A, B, C, D que corresponden a los puntos de coordenadas (0, 0); (4 + *a*, 0); (4 + *a*, 4 + *a*); (0, 4 + *a*) respectivamente. La Figura 18 muestra la vista algebraica de GeoGebra, donde aparece el símbolo *c*1, que representa el valor del área del primer cuadrado, que también se muestra en la Vista Gráfica.

Figura 18. *Construcción esperada del primer cuadrado*



Fuente: Elaboración propia

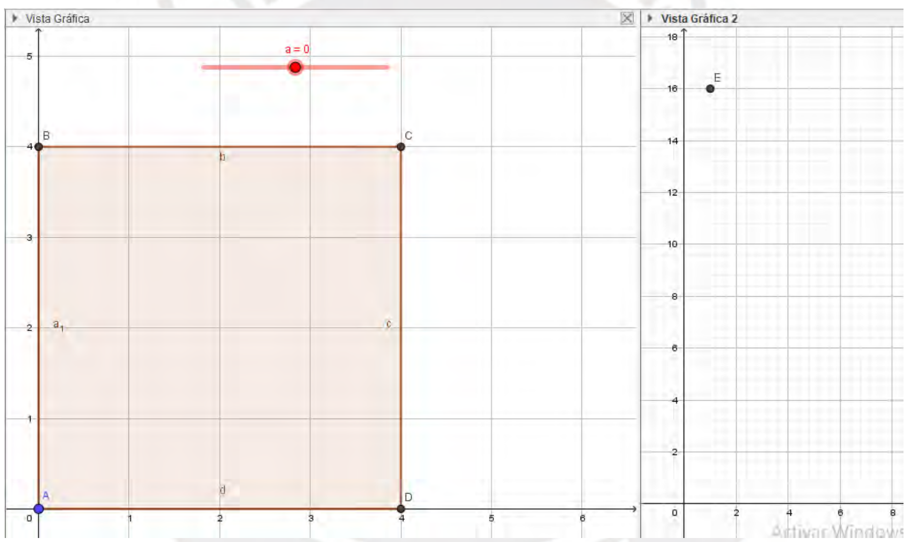
Estas acciones se relacionan con el proceso de instrumentalización porque, según Rabardel (2011), se potencian las propiedades del artefacto por parte del sujeto al asignarle funciones que lo ayuden a resolver una tarea.

Instrucción: ii. *Determine el área del primer cuadrado y represente el resultado obtenido como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.* *Nota: El punto debe tener como abscisa el número del cuadrado y como ordenada su área.*

<u>Análisis esperado para ii)</u>

Se espera que el estudiante añada una Vista Gráfica 2 de GeoGebra y escriba en la barra de entrada el par coordenado (1, *c*1), tal como se observa en la Figura 19.

Figura 19. *Figura del primer cuadrado y su par ordenado asociado E en la Vista Gráfica 2.*



Fuente: Elaboración propia

Al crear este punto que relacionan dos variables en sus coordenadas, tanto la posición del cuadrado como abscisa del punto y su respectiva área como ordenada, el estudiante movilizaría su **esquema de uso punto**, asociado con la noción de relación funcional. Se hace la distinción que el punto creado indirectamente está asociado con el deslizador, por tal motivo, es un punto variable que cambiaría de posición al variar el deslizador. La creación de puntos, a partir de asociaciones de herramientas, implica movilizar esquemas, por lo que esta acción formaría parte de un proceso de instrumentación.

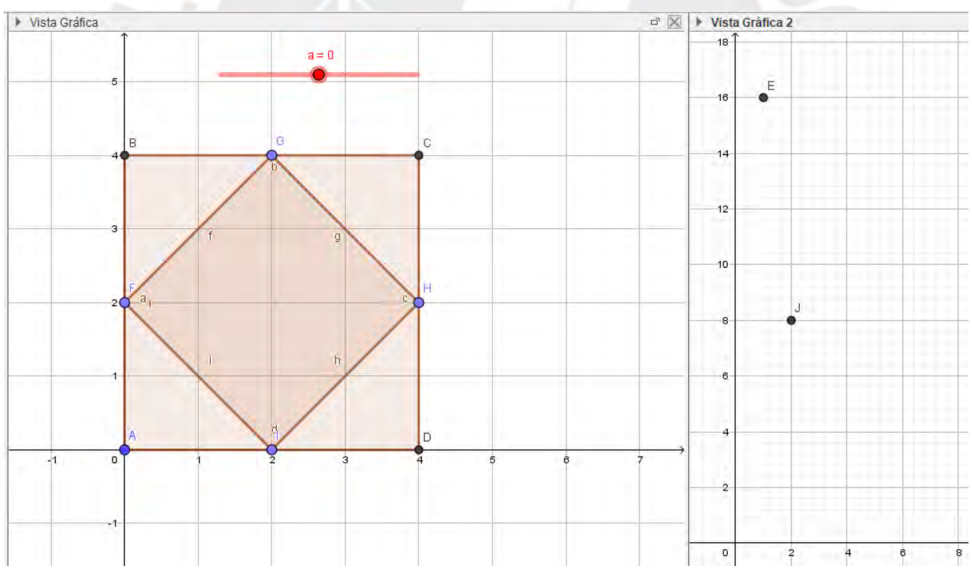
Instrucción: iii. *Construya un segundo cuadrado inscrito en el primero, cuyos vértices se ubiquen en los puntos medios de los lados del primer cuadrado. Luego, determine su área y represente el resultado como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.*

<u>Análisis esperado para iii)</u>

En esta instrucción, se espera que el estudiante use la herramienta *punto* de GeoGebra para ubicar los puntos medios de los lados de dicho cuadrado, aprovechando la cuadrícula de la Vista Gráfica de GeoGebra. Enseguida, debería utilizar la herramienta *polígono* para formar otro cuadrado con los puntos medios encontrados y al hacerlo se generaría el símbolo *c2* en la vista algebraica, el cual representa el área del segundo cuadrado inscrito en el primero.

Por último, se espera que el estudiante escriba en la barra de entrada (2, *c*2), con el fin de dibujar un segundo punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra asociado con el contexto de la actividad. La Figura 20 muestra el resultado de estas acciones en las vistas gráficas de GeoGebra.

Figura 20. *Figura del par E y J asociados al primer y segundo cuadrado respectivamente*



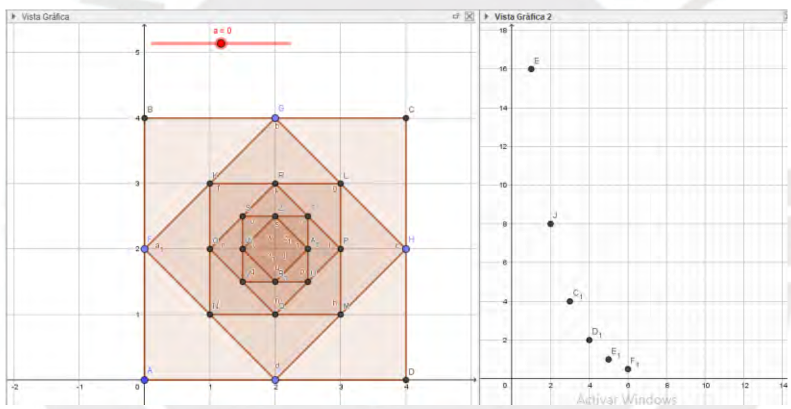
Fuente: Elaboración propia

Instrucción: iv. *Repita el procedimiento descrito en el inciso iii) para dibujar 4 cuadrados adicionales.*

Análisis esperado para iv)

Se espera que el estudiante repita el proceso que se realizó en el ítem (iii) y dibuje cuatro cuadrados adicionales, escribiendo en la barra de entrada los puntos (3, *c*3); (4, *c*4); (5, *c*5) y (6, *c*6), donde *c*3, *c*4, *c*5 y *c*6 son las áreas del tercer, cuarto, quinto y sexto cuadrado respectivamente. La Figura 21 muestra los seis cuadrados que se espera que el estudiante construya y los seis puntos asociados a estos, que relacionan la posición de cada rectángulo y sus respectivas áreas.

Figura 21. *Construcción esperada de los seis primeros cuadrados y sus puntos asociados en la Vista Gráfica 2*



Fuente: Elaboración propia

Se espera que el estudiante movilice su esquema de uso punto medio, relacionado con la noción de punto medio de un segmento, para determinar los vértices del sexto cuadrado, dado que la cuadrícula de GeoGebra no le permitiría encontrarlos directamente. Como se emplean herramientas conocidas por el estudiante y el trabajo es repetitivo, se identifican elementos de ambos procesos de instrumentalización e instrumentación, por lo que se dificulta diferenciarlos.

Luego de realizar las instrucciones planteadas, se espera que el estudiante se instrumentalice localmente con las herramientas de GeoGebra: La herramienta *deslizador* le brinda la posibilidad de caracterizar una variable al colocar un rango de valores que puede tomar y de cuánto se incrementaría, así como la posibilidad de asociarla con otras herramientas y realizar cambios simultáneos; la herramienta *punto* que, de acuerdo a su uso, le permite movilizar la noción de par ordenado cuando se asocia con el vértice del cuadrado, así como la noción de relación funcional al relacionar las variables de estudio posición del cuadrado y área del cuadrado, pero también le brinda la posibilidad de asociarlo con otras herramientas para realizar cambios simultáneos y dinámicos; la herramienta *polígono* le da la posibilidad de dibujar un polígono a partir de la construcción de sus vértices y le brinda las medidas tanto de cada lado como de su área, siendo esta última de vital importancia para el estudio que se lleva a cabo; y la herramienta *medio*, el cual permite determinar directamente el punto medio de un segmento, en lugar de realizar otras construcciones geométricas para hacerlo.

Por otro lado, se espera observar la generación o movilización de esquemas de uso, como es el caso del **esquema de uso punto**, al construir un punto relacionado indirectamente con el deslizador, que, al movilizarlo, generará una familia de puntos asociado con alguno de los términos de una sucesión geométrica; así como del **esquema de uso punto medio**, necesario en la construcción de cuadrados cada vez más pequeños donde el apoyo visual ya no le es útil. Estas acciones corresponden al proceso de instrumentación y son necesarios para realizar una de las tareas principales de la investigación, que está relacionada con la generalización de casos particulares en la búsqueda de un modelo matemático, así como en las modificaciones de este modelo para caracterizar diferentes sucesiones geométricas.

Luego de realizar las instrucciones planteadas en la actividad, se espera que el estudiante responda a las preguntas que se muestran a continuación:

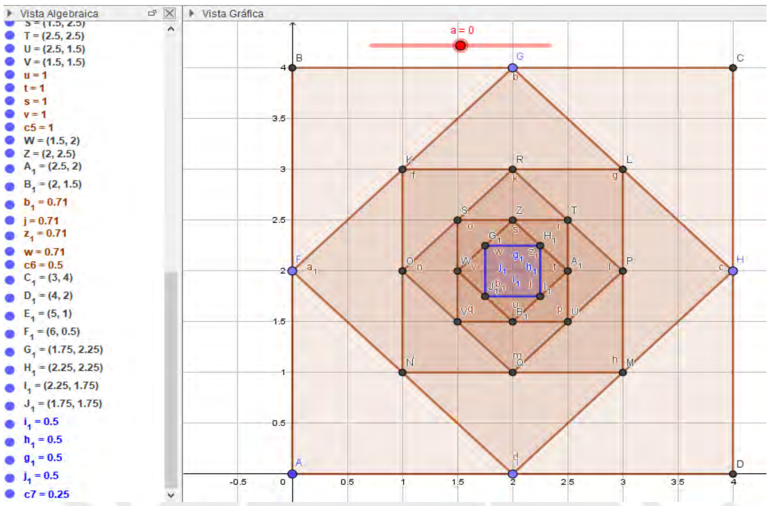
Ítem a): Si se dibujara un séptimo cuadrado, ¿Cuánto sería su área? Explique su procedimiento.

Análisis esperado para el ítem 1 a)

Se espera que el estudiante, luego de observar en la vista algebraica los valores de las áreas de los cuadrados, pueda deducir que el área de cada cuadrado es la mitad del área del cuadrado anterior. Es decir, como el área del sexto cuadrado es 0.5 u^2 , entonces debería concluir que el área del séptimo cuadrado es 0.25 u^2. La información brindada por GeoGebra sobre el comportamiento del área de los cuadrados, permitiría al estudiante movilizar su esquema de uso que denominaremos ***esquema de uso patrones***, asociado con identificar una razón entre las áreas de dos cuadrados consecutivos.

Otro camino que puede seguir el estudiante es utilizar la herramienta *medio o centro* de GeoGebra para encontrar los puntos medios del sexto cuadrado. Luego, se espera que utilice la herramienta *polígono* de GeoGebra para dibujar el séptimo cuadrado. El estudiante podría corroborar su resultado al observar que se genera el símbolo *c*7 que representaría al área del séptimo cuadrado. La Figura 22 muestra el séptimo cuadrado que se espera sea construido por el estudiante.

Figura 22. Figura de la construcción esperada de los siete cuadrados



Fuente: Elaboración propia

Ítem b): Si se continuara con este procedimiento, ¿Es posible calcular el área de cualquiera de los cuadrados inscritos? Justifique su respuesta.

<u>Análisis esperado para el ítem 1 b)</u>

Se espera que el estudiante movilice su **esquema de uso patrones** para reconocer que la razón entre las áreas de dos cuadrados consecutivos: 16, 8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25 es igual a 0.5. Asimismo, se espera que considere importante el área del primer cuadrado con el fin de hacer las cuentas que crea conveniente y poder determinar un modelo matemático que le brinde el área de un cuadrado ubicado en cualquier posición. Este modelo matemático sería la generalización de la sucesión de números. Se espera también que movilice su **esquema de uso función** relacionado con la construcción de la regla de correspondencia de una función exponencial, y obtenga como expresión:

$$y = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

La forma en la que se espera que determine el modelo exponencial dista de la manera en la que se le fue enseñado en clase, determinando las constantes de una regla de correspondencia ya definida: $f(x) = C \cdot a^x$, a partir de dos puntos que pertenecen a su gráfica. En este caso, se espera que involucre nociones de patrones, que emplee un razonamiento inductivo, que encuentre regularidades, entre otras nociones matemáticas. Por ello, decimos que se espera que el estudiante movilice su **esquema de uso función**, dado que conoce el concepto de función, pero tendría que adaptarlo al contexto de la actividad.

Ítem c): ¿Existirá una curva que pase por todos los puntos ubicados en la Vista Gráfica 2? Justifique su respuesta.

Análisis esperado para el ítem 1 c)

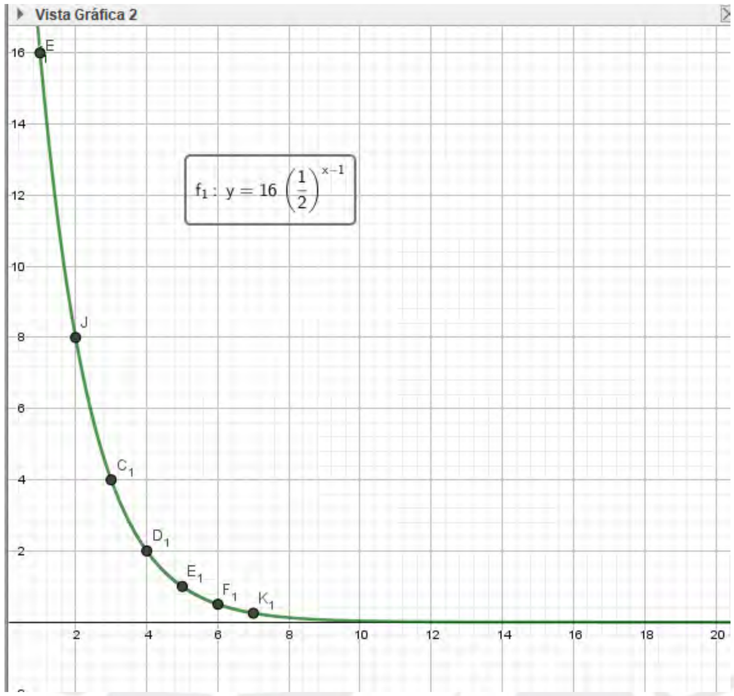
Luego de movilizar su **esquema de uso función** y determinar un modelo matemático, cuya regla de correspondencia se asocia con una función exponencial, se espera que lo haga efectivo al escribir en la barra de entrada:

$$y = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Si el estudiante escribe la expresión de esa manera, se entiende que está pensando en una función de variable independiente x, que representaría la posición de cada uno de los cuadrados, donde $f(x)$ simbolizaría el área del cuadrado en la posición x. Cabe mencionar que, al escribir dicha expresión en la barra de entrada, se utiliza la herramienta *función* de GeoGebra, que representa algebraica y gráficamente a una función definida en su dominio natural o implícito.

Se espera que la curva que se trace pase por los siete puntos dibujados por el estudiante con anterioridad en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra, permitiéndole reconocer que la función exponencial puede ser aplicada en contextos como el de la actividad. La Figura 23 muestra el posible modelo matemático que permite hallar el área de un cuadrado según la posición que ocupe (puede haber otras representaciones algebraicas para la misma función) y la gráfica de la función exponencial que brinda el comportamiento gráfico de cómo varían las áreas de los cuadrados según la posición que ocupen.

Figura 23. *Curva asociada a la expresión general.*



Fuente: Elaboración propia

Se espera que el estudiante se instrumentalice localmente con la herramienta *función de GeoGebra* al asociar la regla de correspondencia de una función exponencial con una sucesión de números que presentan una razón constante entre dos números consecutivos de dicha sucesión. Asimismo, identificar en dicha regla dónde se ubica el área del primer cuadrado (valor ubicado en la primera posición) así como la razón entre dos valores consecutivos de la sucesión de números.

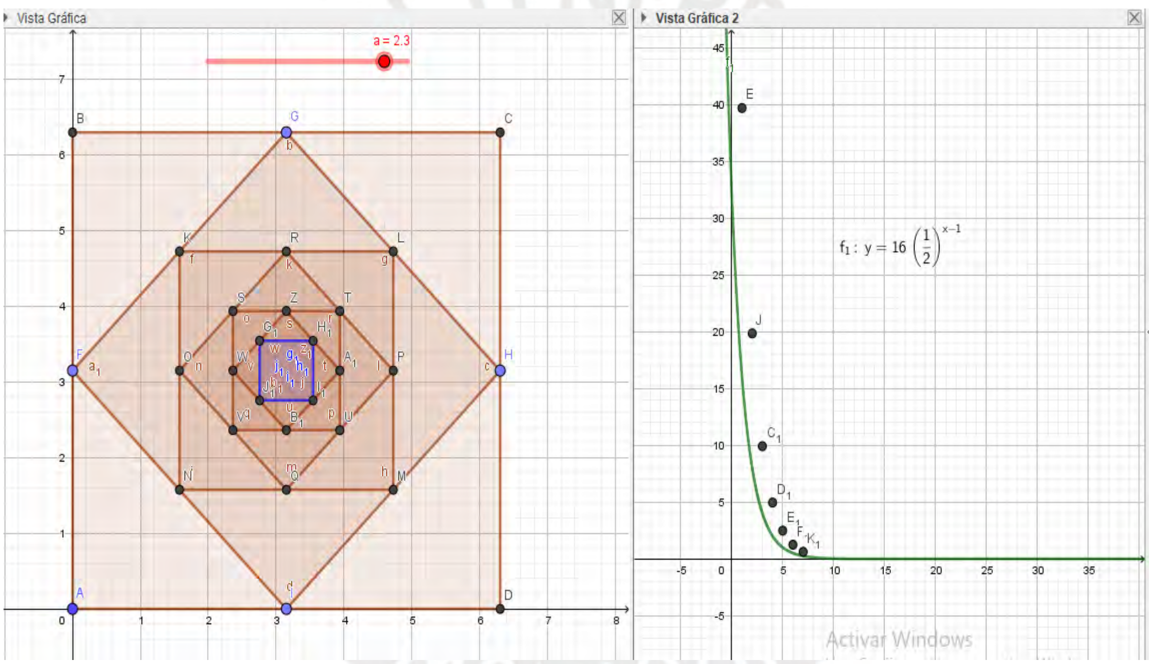
Por otro lado, se espera observar la generación o movilización de esquemas de uso, como los **esquemas de uso patrones y función**, que surgen por la necesidad de responder a una pregunta hipotética, acciones que evidenciarían que el estudiante se encuentra en un proceso de instrumentación, dado que estos esquemas tienen una relación directa con la consecución del objetivo principal de la actividad.

Ítem d): Manipule el deslizador a. i. ¿Qué cambios observa en ambas vistas gráficas? ii. ¿Es posible determinar una expresión, tal como lo hizo en el inciso b), que modele cómo cambia el área de los cuadrados?

Análisis esperado para el ítem (i) de la pregunta 1 d)

Se espera que el estudiante manipule el deslizador *a*. Bien puede hacerlo hacia la derecha o hacia la izquierda, donde además debe visualizar que, si *a* se desliza hacia la derecha, el lado del cuadrado inicial aumenta en *a* unidades, sumado a que los puntos generados en la Vista Gráfica 2 se desplazarían por encima de la curva que se obtuvo en el ítem 1c), tal y como se aprecia en la Figura 24.

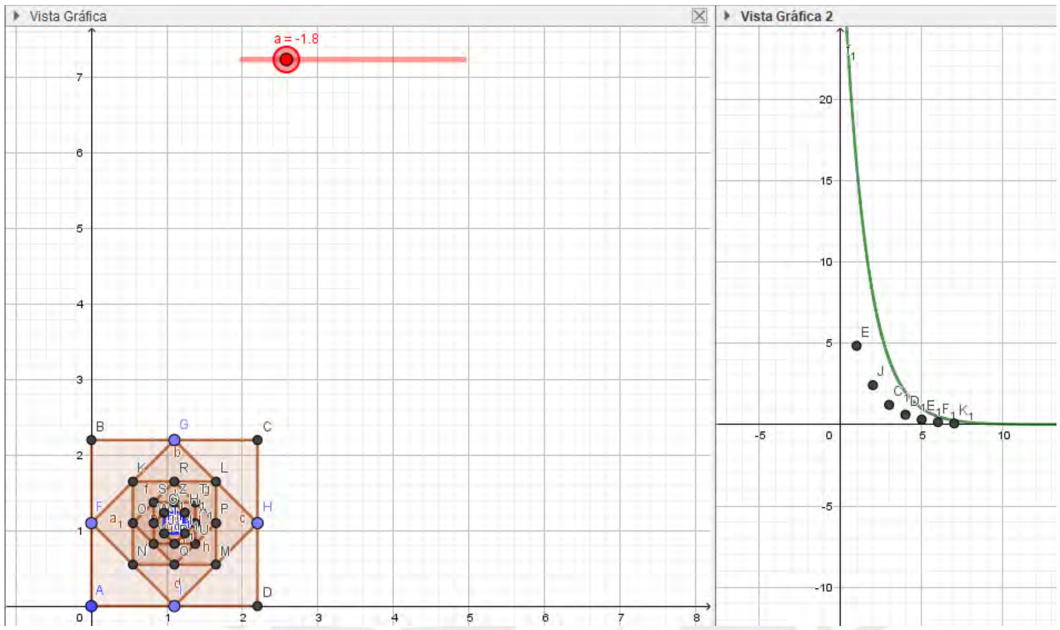
Figura 24. *Vista Gráfica 1 y 2 de GeoGebra para a = 2,3*



Fuente: Elaboración propia

Del mismo modo, si *a* se desliza hacia la izquierda, el lado del cuadrado inicial disminuye en *a* unidades y los puntos se desplazan por debajo de la curva que se obtuvo en el ítem 1c), tal y como se aprecia en la Figura 25.

Figura 25. *Vista Gráfica 1 y 2 de GeoGebra para a = -1,8*



Fuente: Elaboración propia

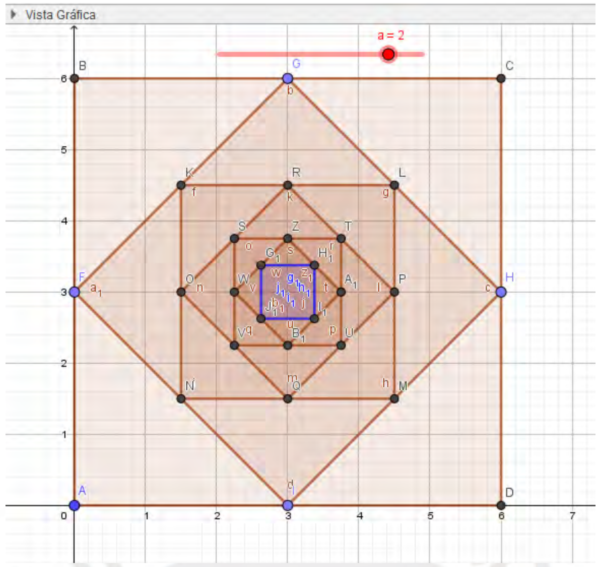
Se espera que el estudiante movilice su **esquema de uso variación** que le permita identificar que, al mover el deslizador, cambia el área del cuadrado inicial (y todos los posteriores); sin embargo, la razón entre las áreas de dos cuadrados consecutivos se mantiene fija igual a $\frac{1}{2}$. Esto le ayudaría a realizar modificaciones a su modelo matemático con el fin de que, al mover el deslizador, la gráfica de la función también se mueva junto con los puntos construidos en la Vista Gráfica 2.

<u>Análisis esperado para el ítem (ii) de la pregunta 1 d)</u>

Luego de que el estudiante movilice su **esquema de uso variación**, se espera que realice modificaciones en su modelo matemático, interpretando que el valor del deslizador afecta al valor del área del primer cuadrado y que la base de la función exponencial permanece constante.

Se espera que el estudiante trabaje con un valor particular de *a*. Por ejemplo, *a* = 2, generando un cuadrado inicial de longitud de lado igual a 6u y de área igual a 36u^2, tal y como se muestra en la Figura 26.

Figura 26. *Gráfico un conjunto de cuadrados para a = 2*



Fuente: Elaboración propia

Se espera que el estudiante se fije en las constantes del modelo matemático creado cuando la medida del lado del primer cuadrado era 4u. Es decir, constantes 16 (área del primer cuadrado) y 0.5 (razón entre las áreas de dos cuadrados consecutivos). Para el caso particular del cuadrado cuya medida del lado es 6u (*a* = 2), se espera que pruebe modificando en GeoGebra la constante 16 de su modelo matemático por 36 y logre con ello que la gráfica pase por los puntos creados en la Vista Gráfica 2. Luego, movilizaría sus **esquemas de uso patrones y función** para asociar el modelo matemático con el deslizador *a,* de modo que los cambios se realicen de forma simultánea, por lo que para ello debería identificar que dicha constante (16 en el modelo matemático inicial) debería ser $(4+a)^2$ y reescriba en GeoGebra su modelo como sigue:

$$y = (4+a)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Estas acciones evidenciarían que el estudiante generó su **esquema de acción instrumentada**, dado a que conseguiría construir un modelo matemático que describa el comportamiento de las áreas de una familia de cuadrados en función de la posición que ocupan.

Se espera que el estudiante se instrumentalice localmente con la herramienta *deslizador* de GeoGebra para asociarlo con otras herramientas, como *puntos, polígonos* y *funciones*, que le permita diseñar un contexto dinámico (como modificar las dimensiones de un cuadrado) y trabajar con familias de funciones (nuevo modelo matemático asociado con el deslizador) y no sólo con contextos estáticos (como lo sería trabajar con un primer cuadrado de dimensiones fijas). Asimismo, se instrumentalice con la herramienta *función de GeoGebra* al generalizar y representar el comportamiento de una sucesión de números, que cambian dinámicamente al variar un deslizador.

Por otro lado, se espera observar cómo la generación o movilización de los **esquemas de uso patrones, variación y función** lleven al estudiante a construir su **esquema de acción instrumentada** al diseñar e implementar un modelo matemático que represente algebraica, numérica y gráficamente el comportamiento de una familia de sucesiones geométricas de razón igual a $\frac{1}{2}$ y de valor inicial el área del primer cuadrado, lo que sería caracterizar diferentes sucesiones geométricas que cumplan las condiciones antes mencionadas.

Si el estudiante llega a este punto, diremos que ha logrado la génesis instrumental de GeoGebra en el estudio de sucesiones geométricas de razón igual a $\frac{1}{2}$ y de valor inicial el área del primer cuadrado, porque mostraría elementos que validarían haber realizado los procesos de instrumentalización e instrumentación para lograr el objetivo principal de la actividad.

Antes de mostrarle al estudiante el ítem (e), el investigador comentaría que la actividad está centrada en trabajar con sucesiones geométricas, donde el modelo matemático representaría el término enésimo se la sucesión.

Ítem e): *Brinde características sobre las siguientes sucesiones geométricas:*

i. 36, 18, 9, 9/2, …
ii. 24, 12, 6, 3, …
iii. 72, 24, 8, 8/3, …

<u>Análisis esperado para el ítem 1 e)</u>

Se espera que el estudiante utilice su modelo matemático para brindar características de cada una de las sucesiones mostradas. Es decir, construir la expresión general T_x de cada una de ellas (término enésimo), representar los términos de la sucesión como pares ordenados y dibujar una curva que pase por dichos puntos.

Con relación a la sucesión planteada en el ítem (i), se espera que el estudiante relacione el primer término con el área de un cuadrado, cuya medida de su lado es igual a 6u. Para ello, colocaría el deslizador en el valor *a* = 2 y obtendría la expresión general de la sucesión como se muestra a continuación:

$$T_x = (4+2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Con relación a la sucesión planteada en el ítem (ii), se espera que el estudiante relacione el primer término con el área de un cuadrado, cuya medida de su lado es igual a $\sqrt{24}$u, número que no se puede colocar con el deslizador *a*. Se espera también que busque estrategias para modelar el término general de la sucesión sin depender del deslizador diseñado en GeoGebra. Como la razón de la sucesión geométrica sigue siendo de $\frac{1}{2}$, se espera que el estudiante modifique manualmente la constante inicial y coloque el valor 24, lo que significaría que amplía su modelo para valores irracionales. La expresión general de la sucesión sería como la que se muestra a continuación:

$$T_x = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Con relación a la sucesión planteada en el ítem (iii), se espera que el estudiante salga del contexto de la actividad y centre su atención en realizar modificaciones a su modelo matemático. Como ya reconoció en el ítem anterior que el valor inicial de la sucesión es la constante inicial del modelo, reemplazaría 24 por 72. Del mismo modo, reconocería que la razón de la sucesión es la base de la función exponencial (modelo matemático). La expresión general de la sucesión sería como la que se muestra a continuación:

$$T_x = 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}.$$

Para resolver las tareas planteadas, el estudiante debería realizar modificaciones a su esquema de acción instrumentada, que viene a ser su modelo general asociado con el deslizador. Es decir, el esquema de acción instrumentada cumple el rol de esquema de uso para poder caracterizar las sucesiones geométricas planteadas.

Salirse del contexto de la actividad para generalizar con GeoGebra distintas sucesiones geométricas, realizando modificaciones a su modelo matemático, sería un indicador de que GeoGebra se transformó en un instrumento para el estudiante con el fin de caracterizar cualquier sucesión geométrica. Es decir, el estudiante lograría transformar el artefacto GeoGebra en un instrumento para el estudio de sucesiones geométricas.

3.3.3 Análisis de la información recolectada en la Actividad

Con relación a la forma en la que el estudiante, a quien llamaremos en adelante José, siguió las instrucciones para generar el contexto del problema, se pudo identificar el uso de diferentes herramientas de GeoGebra y la generación y movilización de esquemas de uso sobre el artefacto GeoGebra. A continuación, se presenta el análisis de la información recolectada de José, a partir de instrumentos como archivos de GeoGebra, grabaciones de video y de una entrevista semiestructurada.

Análisis de la actividad desarrollada por José

Instrucción: i. *Construya un deslizador a que varíe desde -3 hasta 3 con incrementos de 0.1 unidades. Luego, fije el valor a = 0 y ubique los puntos (0, 0); (4 + a, 0); (4 + a, 4 + a); (0, 4 + a). A continuación, construya un primer cuadrado*

Análisis de i)

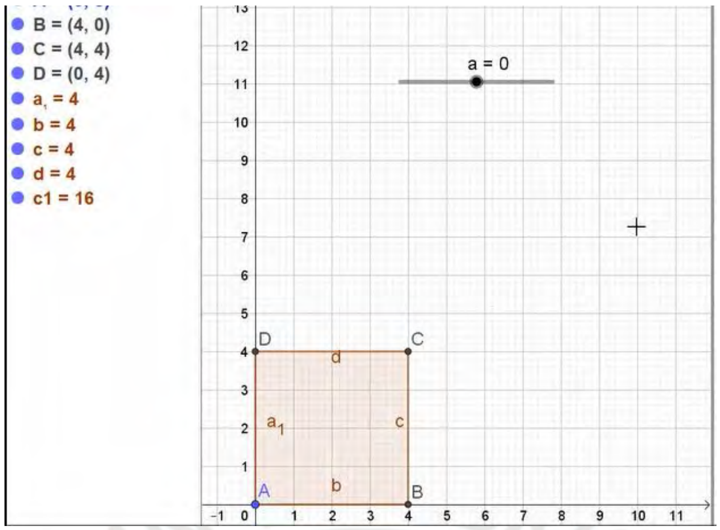
José abrió un archivo de GeoGebra para realizar sus exploraciones y desarrollar la actividad propuesta. El estudiante utilizó la herramienta *deslizador* de GeoGebra para variar dinámicamente las dimensiones de un cuadrado. Para ello, siguió las indicaciones y configuró el deslizador colocando -3 como valor mínimo, 3 como valor máximo e incrementos de 0.1 unidades.

Luego, con la herramienta *punto* de GeoGebra, asociado con la noción de punto como par ordenado, construyó los puntos: (0, 0); (4 + a, 0); (4 + a, 4 + a) y (0, 4 + a), que fueron simbolizados con las letras A, B, C y D respectivamente.

A continuación, José utilizó la herramienta *polígono* de GeoGebra, relacionado con las características y propiedades de dicho objeto matemático, como que presente vértices, lados, área y que sea cerrado. Para ello, seleccionó de forma consecutiva los vértices A, B, C, D y A, formando el cuadrado solicitado.

La Figura 27 muestra el resultado de la construcción realizada por el estudiante, aunque parece estática, al mover el deslizador a, las dimensiones del cuadrado cambian.

Figura 27. *Gráfica del cuadrado formado por los puntos A, B, C, D.*



Fuente: Producción del estudiante de la Actividad i

Lo dicho en el párrafo anterior, se puede corroborar en el extracto de la entrevista semiestructurada que se muestra a continuación:

01. Investigador: ¿Qué función cumple el deslizador *a*?

02. Estudiante: el *a* hace crecer los lados. Este en particular porque, bueno, el único punto fijo es el punto A, no el que no se mueve, pero el punto D, B y C son los que están en constante movimiento cuando yo muevo el deslizador. Es decir, aumentan las medidas de los lados [del cuadrado, agregado por el investigador], justamente colocaba punto donde decían cuatro más *a*. Así que conforme yo voy añadiendo *a*, va aumentando los lados.

Luego, se corroboró que el estudiante reconocía la información brindada por GeoGebra al construir el polígono, tal y como se muestra en el siguiente diálogo:

03. Investigador: ahora dime, ¿Qué información te brinda GeoGebra en la vista algebraica?

04. Estudiante: a ver, la vista algebraica, puedo decir que a_1 , b, c y d son las medidas de todos los lados y pues considero que $c1$ es el área que se forma automáticamente, pero del cuadrado, me doy cuenta por ello, porque cuando estaba en *a* = 1 los lados del

cuadrado miden cinco, entonces sería cinco al cuadrado, sale 25 entonces ahí confirmé eso.

05. Investigador: ahora, coloca el deslizador en *a* = 0 para trabajar la primera parte de la actividad.

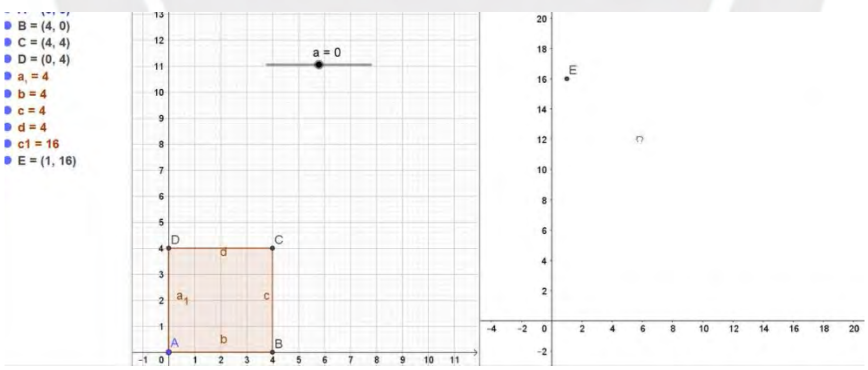
Esta corroboración fue importante, ya que justifica que José haya utilizado estos símbolos en las construcciones que realizó a lo largo del proceso de resolución, lo que permitieron que, al variar el deslizador, se dieran cambios simultáneos en otros objetos matemáticos, como la construcción de puntos que se describen a continuación.

Instrucción: ***ii.*** *Determine el área del primer cuadrado y represente el resultado obtenido como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.*
Nota: *El punto debe tener como abscisa el número del cuadrado y como ordenada su área.*

Análisis de ii)

El estudiante añadió una Vista Gráfica 2 de GeoGebra, donde ubicaría un conjunto de puntos según las instrucciones dadas. Para ello, movilizó su **esquema de uso punto** relacionado con la noción de relación funcional, ejecutado al escribir en la barra de entrada escribió el par ordenado E = (1, *c*1), tal como se observa en la Figura 28.

Figura 28. *Gráfica del par E en la vista grafica 2*



Fuente: Producción del estudiante de la Actividad ii

Además, durante el desarrollo de esta instrucción se tuvo el siguiente dialogo:

06. Estudiante: ok, luego me dice que represente este. El área como un punto en la Vista Gráfica 2, ¿Cómo lo representaría eso? A ver.

07. Investigador: ahí hay una nota

08. Estudiante: ¿A qué se refiere con el número del cuadrado, profesor?

09. Investigador: lo que pasa es que tú vas a seguir haciendo cuadrados, entonces, por ejemplo, este es el primer cuadrado. Puedo decir que el número que le corresponde es el uno.

10. Estudiante: ah, ok

11. Investigador: uno es el número del cuadrado en este caso y *c*1 su área

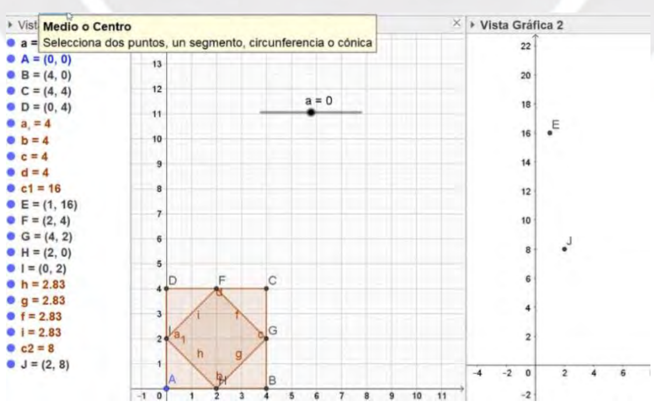
12. Estudiante: ok. Si es así, entonces esta gráfica voy a usar, 1 y el área que sería *c*1.

Instrucción: iii. *Construya un segundo cuadrado inscrito en el primero, cuyos vértices se ubiquen en los puntos medios de los lados del primer cuadrado. Luego, determine su área y represente el resultado como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.*

<u>Análisis para iii)</u>

José utilizó la cuadrícula de GeoGebra para ubicar los puntos medios de cada lado del cuadrado inicial. Luego, con la herramienta polígono, unió los puntos y dibujó un segundo cuadrado. Al conocer el área del segundo cuadrado: *c*2, movilizó su **esquema de uso punto** para construir el par coordenado (2, *c*2), que relaciona las variables posición del cuadrado y área del cuadrado, con lo cual movilizó la noción de relación funcional. La Figura 29 muestra los resultados de las acciones de José con GeoGebra.

Figura 29. *Gráfica del primer y segundo cuadrado y de los puntos E y J*



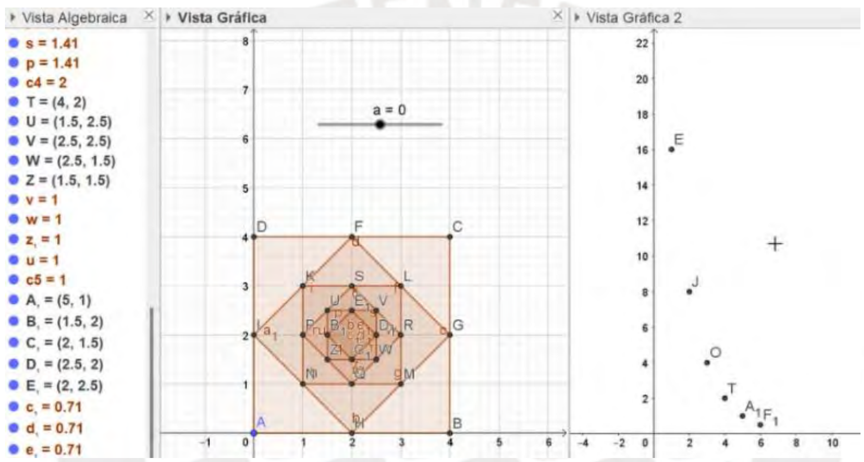
Fuente: Producción del estudiante de la Actividad iii

Instrucción: iv. *Repita el procedimiento descrito en el inciso iii) para dibujar 4 cuadrados adicionales.*

<u>Análisis para iv):</u>

El estudiante utilizó las herramientas *punto* y polígono de GeoGebra, de la misma manera en la que lo hizo en el ítem (iii), con los que construyó los cuatro cuadrados adicionales, y movilizó su **esquema de uso punto** para construir los puntos E, J, O, T, A1 y F1, que representan la relación entre las variables posición del cuadrado y área del cuadrado. La Figura 30 muestra los cuadrados dibujados por José, así como los puntos creados en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.

Figura 30. *Gráfica de los primeros seis cuadrados y de los pares E, J, O, T, A1, F1*



Fuente: Producción del estudiante de la Actividad iv

Luego de esta primera parte en la que José debía seguir instrucciones para construir la situación planteada en la actividad, se observa que casi todas las acciones que fueron previstas se realizaron. La única diferencia se dio en que se había previsto que utilice la herramienta *medio* de GeoGebra para dibujar el sexto cuadrado; sin embargo, no fue necesario para él, dado que se guio de la cuadrícula, aunque presentó dudas de si había colocado correctamente los vértices de dicho cuadrado, lo que lo hizo mirar la vista algebraica para ver las medidas de longitud y área asociadas con ese cuadrado.

José potenció las propiedades y funcionalidades del artefacto GeoGebra al utilizar sus herramientas *deslizador*, *punto* y *polígono* en un contexto diferente al que las había utilizado. Según Rabardel (2011), podemos decir que José ha instrumentalizado GeoGebra al reconocer las características de las herramientas utilizadas, que le servirían luego en la construcción de su modelo matemático. Por otro lado, se observó la movilización de esquemas de uso, como el

esquema de uso punto, asociado con la noción matemáticas de relación funcional, el cual guarda relación con el proceso de instrumentación de GeoGebra.

A continuación, se presenta el análisis de la información recolectada de José a partir de instrumentos como archivos de GeoGebra, grabaciones de video y de una entrevista semiestructurada.

Ítem a): *Si se dibujara un séptimo cuadrado, ¿Cuánto sería su área? Explique su procedimiento.*

<u>Análisis del ítem 1 a)</u>

José mencionó que, para conseguir el área del séptimo cuadrado, debía continuar con la misma lógica que en el ítem anterior, como hallar los puntos medios de cada lado del sexto cuadrado, unirlos, determinar su área y representarlo gráficamente; sin embargo, presentó dificultades para hallar los puntos medios de los lados del séptimo cuadrado, porque ya no los podía hallar a partir de la cuadrícula, tal como lo hizo en los casos anteriores.

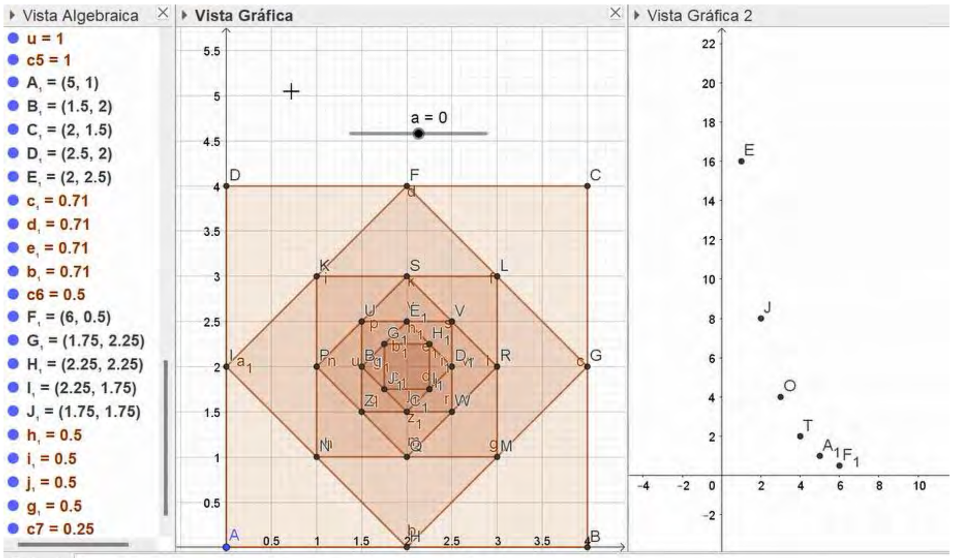
El estudiante se tomó unos segundos para pensar en los pasos a seguir y luego describió su procedimiento de la siguiente manera:

13. Estudiante: bueno, para construir el séptimo cuadrado pues se divide en esta misma lógica, ¿No? Conseguir los puntos medios de este cuadradito más pequeño que está aquí ¿No? Solo que en este caso tal vez, para hallar las medidas de sus lados de este cuadrado, tal vez qué podría hacer…..Bueno, tal vez podría hacer las herramientas del mismo GeoGebra para medir la distancia de dos puntos para que me dé las medidas de los lados no esté de séptima. Es decir, primero, pues con la opción de medio centro no hallaría los vértices del séptimo cuadrado. Luego, los unificaría ¿No? Los uniría a través de la herramienta de polígono, para posteriormente emplear a este la herramienta que nos menciona acá: distancia longitud, y poder hallar a los lados del cuadrado, ¿No?

14. Investigador: pero puedes hacerlo. Normal.

Una vez descrita la forma en la que iba a resolver lo pedido en la pregunta, el investigador solicitó que el estudiante lo hiciera en GeoGebra. A partir de la construcción realizada, se evidenció que José utilizó la herramienta *medio* de GeoGebra, movilizando con su **esquema de uso punto medio,** relacionado con la obtención del punto medio de un segmento, y con la herramienta *polígono* de GeoGebra dibujó el séptimo cuadrado. La Figura 31 muestra el resultado de dicha construcción y permitió al estudiante indicar que el área del séptimo cuadrado era 0,25 u^2.

Figura 31. *Gráfica de los siete cuadrados y c7.*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 a)

Del extracto de la entrevista semiestructura (línea 13), se observa que el estudiante tenía conocimiento de otras herramientas de GeoGebra que lo hubieran llevado a realizar otro procedimiento de resolución para hallar el área del séptimo cuadrado.

Se observa la instrumentalización de GeoGebra por parte de José al utilizar la herramienta *medio* que le permite hallar con exactitud el punto medio de un segmento. Así como la movilización de la noción de punto medio asociado con su **esquema de uso punto medio** y de la noción de relación funcional asociado con su **esquema de uso punto**, como parte del proceso de instrumentación de GeoGebra.

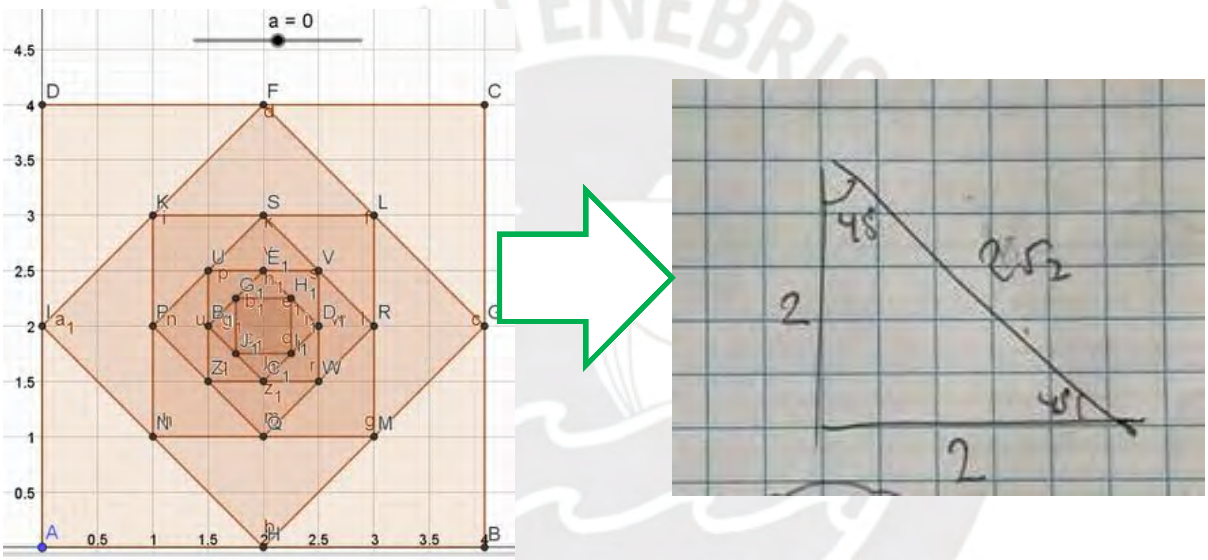
Ítem b): *Si se continuara con este procedimiento, ¿Es posible calcular el área de cualquiera de los cuadrados inscritos? Justifique su respuesta.*

Análisis para el ítem 1 b)

José mencionó que sí es posible calcular el área de cualquiera de los cuadrados inscritos. Inicialmente, para justificar su afirmación, el estudiante trató de encontrar una relación entre la longitud de cada uno de los cuadrados dibujados en GeoGebra y sus respectivas áreas, movilizando su **esquema de uso área de un cuadrado**, asociado con la fórmula geométrica que permite hallar el área de un cuadrado a partir de la medida de uno de sus lados.

Para este procedimiento, José no utilizó GeoGebra, ya que lo realizó con lápiz y papel en su cuaderno de apuntes. El estudiante simbolizó el lado del cuadrado con la letra x y con la letra y su respectiva área. La medida del lado del primer cuadrado dibujado en GeoGebra era de 4 u $(x = 4)$ y su área era igual a 16 u^2 $(y = 16)$. Como los vértices del segundo cuadrado eran los puntos medios del primer cuadrado, el estudiante halló la medida del lado del segundo cuadrado, que no era visible directamente en la Vista Gráfica de GeoGebra, utilizando el triángulo notable de 45°, tal como se refleja en la Figura 32.

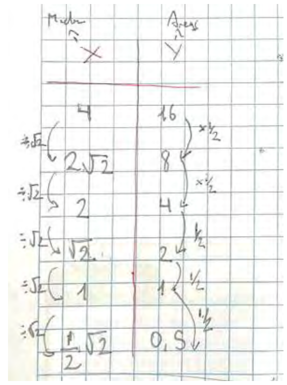
Figura 32. *Longitud del lado del segundo cuadrado.*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 b)

Para el tercer cuadrado, la medida del lado se obtenía directamente de la Vista Gráfica de GeoGebra, que era igual a 2 unidades y su área de 4 u^2. José repitió el mismo procedimiento hasta el sexto cuadrado y los resultados obtenidos los organizó en una tabla, tal como se muestra en la Figura 33.

Figura 33. *Tabla de valores de los lados de los cuadrados (x) y el área (y).*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 b)

En cada una de las columnas de la tabla mostrada en la Figura 33, se observa que José movilizó su **esquema de uso patrones**, relacionado con la identificación de regularidades en una secuencia de números, lo que le permitió identificar un patrón de cambio para cada una de las variables. El estudiante reconoció que los valores del lado del cuadrado siguen una progresión geométrica de razón igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, y que el área de dichos cuadrados está en progresión geométrica de razón igual a $\frac{1}{2}$.

El estudiante presentó dificultades para poder encontrar la relación entre los valores mostrados en la tabla, razón por la cual se presentó el siguiente diálogo entre José y el investigador:

15. Investigador: para ti, ¿Qué es x ?
16. Estudiante: x representa las medidas de los lados
17. Investigador: y, ¿Qué es "y"?
18. Estudiante: las áreas del cuadrado
19. Investigador: entonces, ¿Cuál sería la relación?
20. Estudiante: a ver, bueno aquí lo más obvio sería de que sin la medida de los lados, no podemos obtener las áreas, […] nos damos cuenta que tanto si las medidas de los lados decrecen, las áreas decrecen también. Es algo también que he notado. Ahora, quiero ver qué comportamiento va a ir detrás. Aquí el comportamiento que puedo hallar es la mitad, ¿No? Un medio. Entonces, sería por un medio [se refiere a los cambios en el área de los cuadrados], de igual manera aquí, de la misma manera aquí, […], pero hay que tener también entre raíz de 2. Aquí, con esto y esto vamos a ver, porque entre raíz

de 2 tal vez, sí. Creo que sí, o bueno por 1. Entre raíz de 2 [se refiere a los cambios en la medida del lado del cuadrado], si elevo al cuadrado, entonces …

21. Investigador: ¿Te cumple?

22. Estudiante: me he dado cuenta de que sí me cumple. Por ejemplo, 4 al cuadrado es 16, 2 raíz de 2 al cuadrado, sí me da 8.

23. Investigador: ok. Entonces muy bien, […] la relación que hay entre "x “ e "y" es la que has puesto acá [José escribió en su cuaderno de apuntes $y = x^2$], pues porque si este es el área del cuadrado y este es su lado, entonces, al final la relación entre el lado y el área del cuadrado, es que lo elevas al cuadrado.

24. Estudiante: claro. Este es el área del cuadrado pues.

En ese momento, el investigador retomó la pregunta planteada al inicio, con el fin de que José centrara su atención en relacionar la posición del cuadrado (primero, segundo, tercero y así sucesivamente) con su respectiva área:

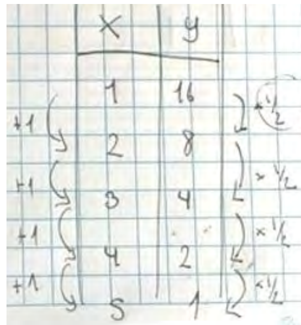
25. Investigador: ahora, regresemos a la pregunta. ¿Si es posible calcular el área de cualquier cuadrado ósea en cualquier posición? O sea, te están diciendo que encuentres una relación entre estos [se refiere a la relación entre los valores de la columna "x “ e "y"], porque este es la posición y este es el área [se refiere a los valores de la columna “x” e “y”]. Entonces, como te dije, ¿Cuál sería el área del cuadrado número 20? ¿Cuál sería el área del cuadrado número 100? ¿Es factible tal vez una expresión que te permita obtener el área en una posición cualquiera a partir de esta información que está acá?

Luego de la pregunta, José centró su atención en el comportamiento de los puntos construidos en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra, cuyas coordenadas representaban la posición del cuadrado y su respectiva área. El estudiante expresó verbalmente lo siguiente:

26. Estudiante: creo que sí. Sí se va a poder, porque algo también que he notado aquí es que tal vez va a existir que la expresión va a ir muy pegada al eje de las abscisas, porque el área no puede ser cero. Por ende, estas cantidades se van a ir reduciendo hasta tal límite de llegar a ser tal vez un número diminuto, pero nunca cero.

José decidió crear una nueva tabla, el cual se puede ver en la Figura 34, en la que denominó a la primera columna “x”, que representaba la posición del cuadrado, y a la segunda columna la denominó “y”, que representaba el área de cada cuadrado. Estos valores fueron transcritos de las coordenadas de los puntos construidos en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.

Figura 34. *Tabla que relaciona la posición del cuadrado y su área*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 b)

En esta nueva tabla, el estudiante reconoció que los valores numéricos asociados con la posición de los cuadrados aumentaban de uno en uno; sin embargo, presentó dificultades para encontrar la relación esperada, tal y como se muestra en el siguiente diálogo.

27. Investigador: ¿Qué significan los valores de tu tabla?

28. Estudiante: que para el cuadrado 1, su área es 16; para el segundo, 8. Bueno, aquí siempre he tenido problemas tan solo con decir el número ¿No? Es decir, digamos que puedo poner el número 20, me tiene que dar el área de dicho cuadrado.

29. Investigador: sí.

30. Estudiante: ah ya. Ok, … A ver, entonces veamos lo siguiente: “x” representa los números de cuadrado y “y” su área. Aquí podemos darnos cuenta de que el comportamiento de aquí está sumando uno en este lado cada vez que es más uno [se refiere a que en la columna “x” los valores aumentan en una unidad] y acá una división por 1/2 [se refiere a la columna “y” donde los valores consecutivos se multiplican por 1/2]

31. Investigador: tú tienes 16. Para uno, es 16. Ahora, ¿Este segundo número cómo se obtiene? El 8, ¿Qué haces para obtener el 8?

32. Estudiante: en este caso, bueno sería elevar al cuadrado $2\sqrt{2}$ para que me de 8.

33. Investigador: ya, pero vamos a centrar en estos dos [se refiere a la primera fila de las columnas “x” e “y”], para $x = 1$ es $y = 16$, ahora cómo llego a 8, ¿Qué has hecho para llegar a 8?

34. Estudiante: bueno, de 16 a 8 me doy cuenta que es una división. O sea, se divide entre 2.

35. Investigador: divides entre 2 y como producto, ¿Qué significa? O sea, expresarlo como producto no como división, ¿Por quién estás multiplicando 16?

36. Estudiante: por un medio estoy multiplicando

37. Investigador: por un medio. Entonces tú puedes, a partir de este primero [se refiere al valor de 16, ver figura 34], encontrar el segundo ahora y ¿Tú puedes encontrar este de acá el tercero a partir del primero?

38. Estudiante: a decir ya, no sería sí elevando. En este caso, multiplicando por cuatro.

39. Investigador: ¿Por 1/4?

40. Estudiante: por 1/4! Ah claro... Sería 16 a 4 tendría que ser

41. Investigador: y ¿Tú puedes llegar de 16 a 2?

42. Estudiante: creo que sí. Sí se podría llegar. Es decir, tendríamos de que de 16 a 4 sí me doy cuenta de que existe un valor si le saco la raíz cuadrada a 16 llego a 4, pero con 2 me doy cuenta de que podría elevarlo a un medio. 16 a un medio me da 4, 2 sería tal vez 2 elevado a un cuarto, creo que…

43. Investigador: ¿ $2^{\frac{1}{4}}$?

44. Estudiante: ah no. Eso creo que no ¡…

Hasta este momento de la entrevista observamos que José no logra reconocer la relación entre los valores de la columna x e y. Es por eso que se le brinda unas observaciones para que tenga una mejor idea, tal y como se muestra en el dialogo siguiente:

45. Investigador: a ver. Otra vez. Te voy a guiar un poquito más. Tú me has dicho hace ratito si yo empiezo en 16 para llegar al segundo término, lo multiplico por un medio. Yo empiezo en 16, para llegar a 8, he multiplicado por un medio. Ahora, de 8 para llegar al otro otra vez por un medio según lo que tú has puesto acá, ¿No? Entonces, para llegar de 16 a 4 he tenido que multiplicar [ver figura 34, segunda columna]

46. Estudiante: dos veces un medio

47. Investigador: un medio por un medio

48. Estudiante: entonces me doy cuenta aquí de que tal vez esto sería lo que se podría elevar a cuántas veces yo quiera disminuir, ¿No? Entonces sería, a ver vamos a ver si así sale. Sí, porque en el primero es multiplicar 1/2 y en el segundo sería multiplicar por otro 1/2 y así sucesivamente. Entonces, eso lo podríamos colocar de este modo ¿No?, en el cual este “x” representaría los números de cuadrados que voy. Es decir, cuantas veces yo voy a multiplicar, entonces considero que este podría ser, tal vez, la forma en la cual se podría llegar (el estudiante escribe $16 * (1/2)$^x)

49. Investigador: 16 por un medio de “x”. A ver, vamos a ver si funciona

Observamos en el diálogo previo (fila 48) que José encuentra una relación entre los valores de x e y; sin embargo, aún falta comprobar que sea la relación correcta. Para ello, el estudiante usa su cuaderno y comprueba los valores y se da cuenta que cuando el número del cuadrado es uno, o $x = 1$, el valor del área es 8, o lo que es lo mismo $y = 8$. Esta verificación le hace darse cuenta que no es correcto. Observamos también que el estudiante utiliza su **esquema de uso patrones,** además que sigue con la comprobación, tal como se puede leer en la siguiente conversación.

50. Investigador: si $x = 2$, ¿Cuánto te sale?

51. Estudiante: si $x = 2$, me sale $y = 4$

52. Investigador: claro. Por ahí va, pero ¿Qué modificación le harías?, porque por ejemplo, si $x = 1$, debería darte 16

53. Investigador: pero ¿Dónde debes cambiar? Porque si te das cuenta, cuando le has dado $x = 1$ y te sale 8, cuando le has dado 2 es 4. Entonces, ¿Qué es lo que debes variar?

54. Estudiante: tal vez. A ver, si le pongo 16 es 32. No sé. Vamos a ver qué tal me sale. A ver, si es uno sale 16, si es 2 me da 8, si es 3 me da 4 creo que…

55. Estudiante: 32 por un medio a la "x"

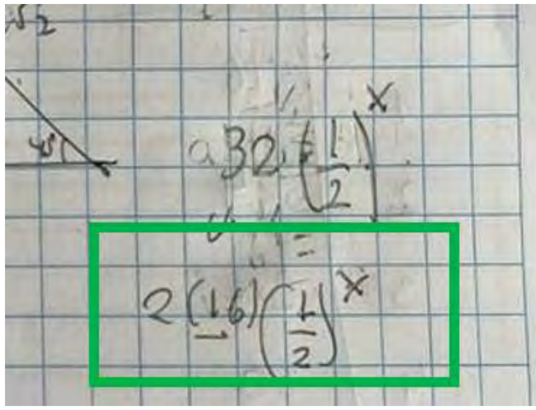
56. Investigador: 32 por un medio a la "x" [se refiere a la ecuación $32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$].

Finalmente, José reconoció que los valores numéricos asociados con la posición de los cuadrados aumentaban de uno en uno y que, para obtener el área de un siguiente cuadrado, se debía multiplicar por un medio al área del cuadrado anterior, tal y como lo señala en las líneas 54 y 55 del dialogo anterior. Esto nos permite afirmar que José nuevamente utilizó su **esquema de uso patrones** al realizar cuentas para obtener los valores correctos. En resumen, se tiene que el estudiante expresó la relación entre estas variables como una función exponencial

$$y = 2 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

donde x representa el número del cuadrado e y su respectiva área, tal como se puede ver en la Figura 35.

Figura 35. *Expresión general de la sucesión Geométrica*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 b)

Estas acciones nos permiten afirmar que el estudiante movilizó su **esquema de uso patrones** y lo llevó a movilizar su **esquema de uso función** al encontrar una regla de correspondencia que modela el área de los cuadrados para un conjunto de valores de x, que representan la posición de estos. Cabe mencionar que José utilizó lápiz y papel para hacer sus cuentas, dado que le resultaba más cómodo hacerlo de esa manera.

Identificamos diferencias entre lo que habíamos previsto y lo que se evidenció en la parte experimental, dado a que el estudiante entendió la pregunta del ítem (b) como si se le estuviera solicitando una relación entre el área de un cuadrado y la medida de uno de sus lados. Los intentos que mostró José para encontrar tal relación nos hace pensar que primó en él la búsqueda de una generalización en lugar de utilizar la fórmula geométrica que permite hallar el área de un cuadrado a partir de la medida de su lado. Por ese motivo, es que se señala que José moviliza su esquema de uso patrones.

La intervención del investigador fue oportuna para encaminar al estudiante en que reconociera la relación entre la posición del cuadrado y la medida de su área como un acercamiento hacia la noción de término general de una sucesión geométrica. Las acciones realizadas por el estudiante, hasta modelar su función que representa la relación antes mencionada, involucraron la movilización de nociones matemáticas como patrones, razonamiento inductivo, función exponencial, entre otros, que fueron puestos en juego al movilizar su **esquema de uso función**. Estas acciones pudieron haber sido realizadas en una hoja de cálculo de GeoGebra, como parte de un proceso de instrumentación de GeoGebra.

Cabe mencionar que José llega a plantear una expresión diferente a la que se había previsto; sin embargo, al realizar operaciones matemáticas relacionadas con la teoría de exponentes, se logra ver que representan a la misma función:

Modelo matemático previsto: $y = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot 2 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

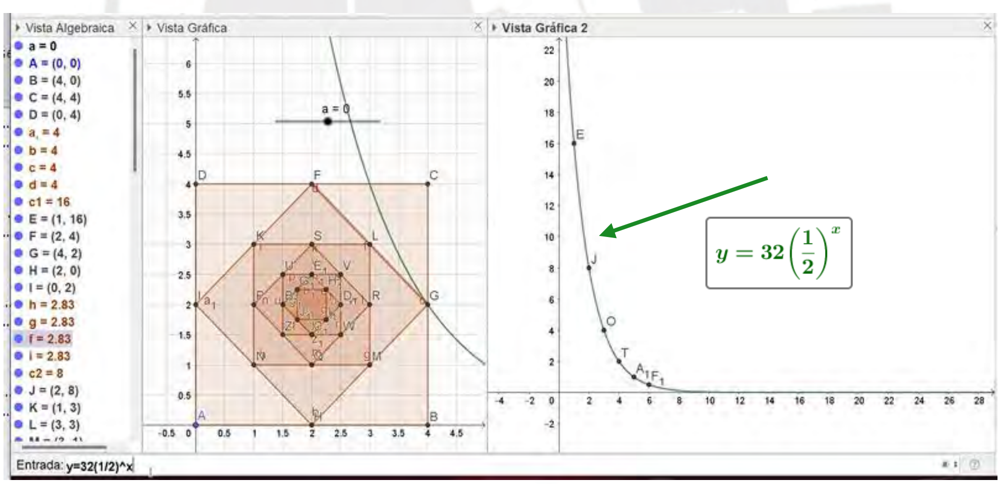
Modelo matemático del estudiante: $y = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

Ítem c): *¿Existirá una curva que pase por todos los puntos ubicados en la Vista Gráfica 2? Justifique su respuesta.*

Análisis del ítem 1 c)

José mencionó que sí es posible, pues en el ítem anterior logró encontrar el término general asociado con una función exponencial y mencionó que en esta pregunta lo que le piden es comprobarlo. Es así que el estudiante digitó en la barra de entra de GeoGebra la ecuación: $y = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, tal y como se muestra en la Figura 36.

Figura 36. *Gráfica de una función que modela el n-ésimo término de la sucesión*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 c)

Se evidencia que José movilizó su **esquema de uso función** relacionado con la regla de correspondencia de una función exponencial definido en su dominio natural, ejecutado con la herramienta función de GeoGebra. Los resultados obtenidos fueron previstos por el investigador.

José utilizó una diversidad de herramientas de GeoGebra como *medio*, *polígono*, *función*, *punto*, *deslizador*, así como las diferentes vistas del software que ya conocía previamente al haberlas utilizado al trabajar con otros conceptos. Esto evidencia que José potenció las propiedades del artefacto GeoGebra al asignarle nuevas funciones para resolver parte de la actividad. Desde la perspectiva de Rabardel (2011), estos son componentes de un proceso de instrumentalización.

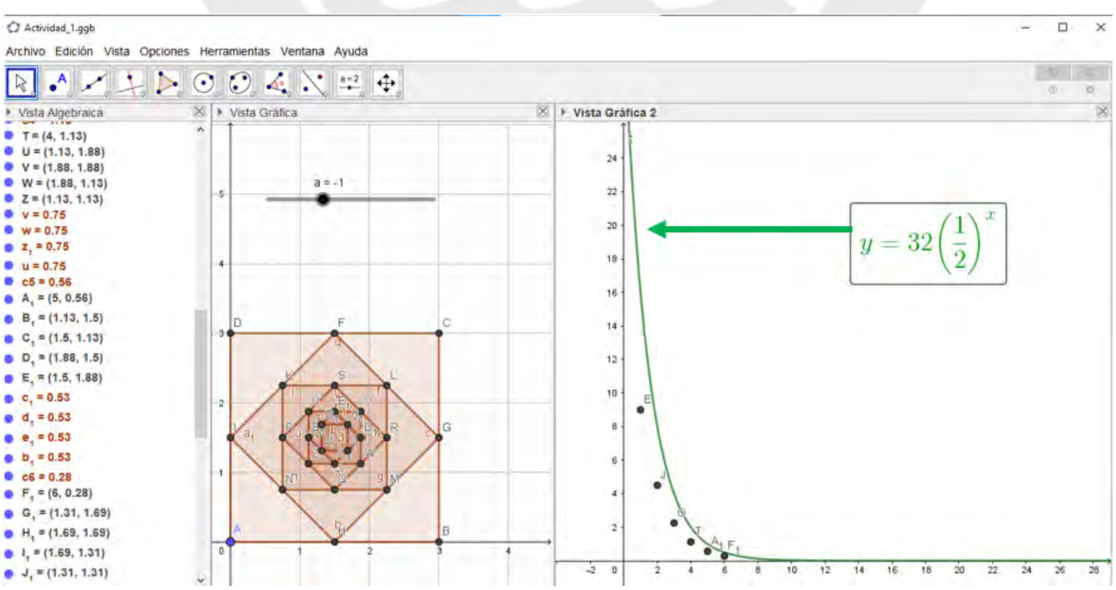
Asimismo, la instrumentación de GeoGebra se basó en representar gráficamente su modelo matemático, lo que permite caracterizar una sucesión geométrica de valor inicial 16 y razón 0.5 al movilizar su *esquema de uso función.*

Ítem d): *Manipule el deslizador **a**.* *i. ¿Qué cambios observa en ambas vistas gráficas?* *ii. ¿Es posible determinar una expresión, tal como lo hizo en el inciso b), que modele cómo cambia el área de los cuadrados?*

<u>Análisis del ítem 1 d)</u>

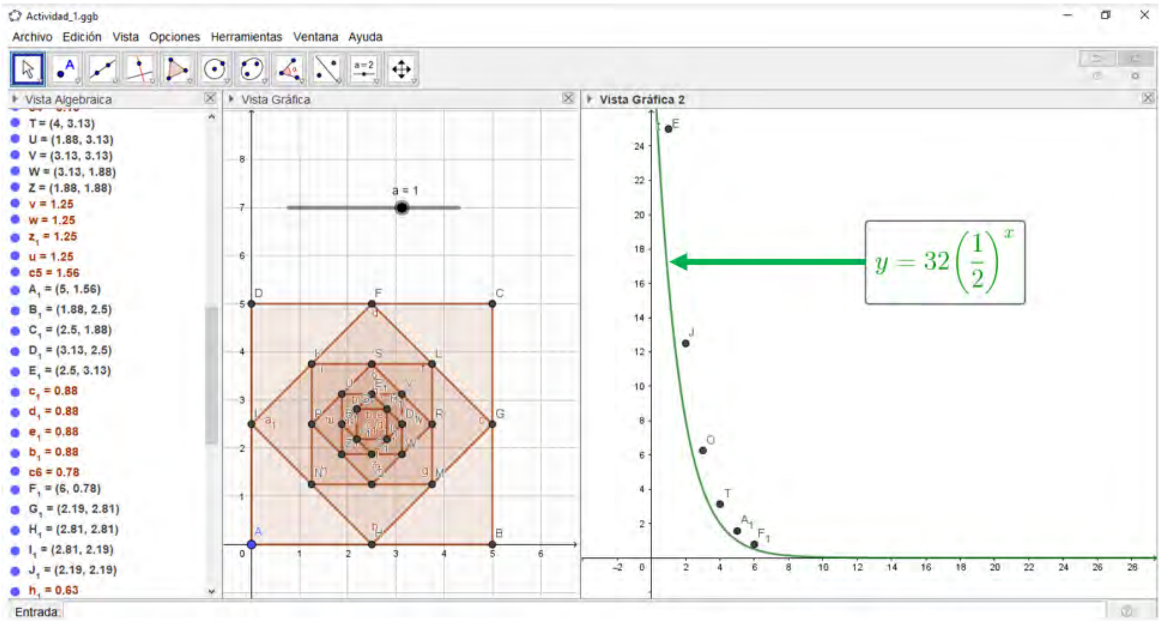
Con relación al ítem (i) de la pregunta d), el estudiante manipuló el deslizador *a* de 0 a 3 y mencionó que los puntos E, J, O, T, A1 y F1, que pertenecen a la gráfica de la función $y = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, representada en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra, se desplazaron por encima de dicha curva. Además, mencionó que el cuadrado mayor aumenta de lado. Por otro lado, cuando movilizó el deslizador de 0 a -3, indicó que los puntos E, J, O, T, A1 y F1 se desplazaron por debajo de la curva y que el cuadrado mayor disminuyó de lado. Estas modificaciones en las dimensiones de los lados del cuadrado se pueden observar en las Figuras 37 y 38:

Figura 37. *Cuadrado de lado 3 unidades (a = -1)*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) i

Figura 38. *Cuadrado de lado 5 unidades (a = 1)*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) i

Observamos que José moviliza su **esquema de uso variación**, relacionado con la identificación de los cambios de los elementos del cuadrado (vértices, lados, área) asociados con los cambios en los valores del deslizador *a* que fue diseñado en GeoGebra. Esta manipulación del deslizador ayuda a que el estudiante pueda relacionar el deslizador *a* con el termino general encontrado en el ítem b).

Con relación al ítem (ii) de la pregunta d), el estudiante, al inicio, responde que no le quedó claro la pregunta. Por ese motivo, el investigador replanteó la pregunta como se muestra a continuación:

> 57. Investigador: ¿Qué cambios podrías hacer en la expresión matemática que hallaste en una pregunta anterior, de modo que, cuando cambies las dimensiones del cuadrado inicial con el deslizador, puedas identificar los valores de las áreas en las diferentes posiciones de los cuadrados?
> 58. Estudiante: bueno, mi expresión corresponde más que nada cuando los lados del cuadrado son 4 [se refiere a la medida de los lados].
> 59. Estudiante: con 1 y 5 [se refiere cuando en deslizador *a* = 1 y el lado del cuadrado mayor en ese momento es de 5 unidades]

Hasta ese momento, el estudiante movilizó su **esquema de uso variación**, pues desplazó el deslizador y lo colocó en la posición *a* = 1. En pantalla, se observa que el lado que corresponde al cuadrado mayor mide 5 unidades y los puntos construidos en la Vista Gráfica 2 se desplazaron verticalmente. José no identificó rápidamente qué cambio debía realizar en la función para que su gráfica pase por los puntos que se habían desplazado, dado que, si conseguía hacerlo, hubiera encontrado el término general de la nueva sucesión geométrica de valor inicial 25 y razón ½. Para conocer cómo el estudiante iba a trabajar la sucesión con *a* = 1, se presentó el siguiente diálogo:

> 60. Investigador: ¿qué ha pasado con los puntos construidos en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra y con las áreas de los cuadrados cuando moviste el deslizador y lo colocaste en *a* = 1?
>
> 61. Estudiante: me doy cuenta, inicialmente, de que cuando muevo "*a*" a un valor positivo mayor que cero, las áreas se incrementan. Por eso que también estos puntos se mueven, ya cuando es negativo no sucede lo mismo. Al contrario, se reducen porque "*a*" está adentro de este lado porque es "(4 + a)". Si lo reduzco, pues se reduce también la medida del lado. Bueno, aquí el comportamiento de 1/2 ese sí se mantiene [se refiere a la razón 1/2 encontrado en el ítem (b)]. Es decir, este comportamiento desde el lado mayor hasta el menor siempre es 1/2, porque de eso me doy cuenta aquí: 25 por un medio 12,5, 12,5 por un medio 6,25. Entonces creo que ese 1/2, en la expresión que me ha salido, creo que tal vez debería quedar.

De lo mencionado por el estudiante, se observa que reconoce que el valor del deslizador afecta la medida del lado del cuadrado inicial y, por ende, el resto, al mencionar en la línea 61: "… porque "*a*" está adentro de este lado porque es "$(4 + a)$". Del mismo modo, reconoce que la razón entre las áreas de los diferentes cuadrados sigue siendo ½, al indicar en la línea 61: "… aquí el comportamiento de 1/2 ese sí se mantiene. Es decir, este comportamiento desde el lado mayor hasta el menor siempre es 1/2". Esto es importante para que el estudiante logre encontrar el término general de una familia de sucesiones geométricas de razón ½ y valor inicial $(4 + a)^2$

Para que el estudiante plasme sus ideas y responda a la pregunta (ii) del ítem d, se le realizaron algunas preguntas que se muestran en el siguiente extracto de la entrevista semiestructurada:

> 62. Investigador: y siguiendo esa misma lógica, ¿Qué cambios podrías hacer en la función?

63. Estudiante: tal vez aquí me doy cuenta que al área inicial sería multiplicarle por dos al área total de este primer cuadrado. Si multiplico por 2, es decir, $25 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$ me da 25 [se refiere a que cuando *a* = 1 el área del cuadrado mayor es 25].

64. Investigador: ¿Puedes hacer ese cambio en tu modelo matemático [el investigador se refiere a la función exponencial] y ver si tu lógica funciona?

65. Estudiante: sí. En mi modelo, tengo que $2 \cdot 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Esto es siempre y cuando yo sepa el área del primer cuadrado [se refiere al modelo encontrado para el caso que *a* = 0]. Es decir, cuando ya no lo sé, varía. Eso, lo de la multiplicación por 2, queda, pero lo que sí no voy a saber cuál es el área. En este caso, por ejemplo, cuando yo esté aquí [se refiere cuando *a* = 1], necesitaría saber cuál es el área de este cuadrado, de que va a seguir esta misma lógica. Estoy seguro de que sí, pero necesitaría saber obligatoriamente cuál sería el área para poder utilizar este procedimiento

66. Investigador: ¿Y no sabes cuál es el área?

67. Estudiante: sí sé cuál es el área.

68. Investigador: entonces, ¿Qué cambio harías a tu modelo?

69. Estudiante: aquí creo que he notado algo. De que tal vez como yo tengo *c1* [se refiere al símbolo que GeoGebra le asignó al área del cuadrado de la posición 1]. A ver un ratito. He notado que *c1* me da el área inicial y como yo estoy diciendo si multiplico el área inicial por 2 es igual a la misma lógica, tal vez sería representar, con esta expresión, a 2 por *c1*, que representaría el área del cuadrado mayor por un medio elevado a la “X” y “X” representaría cuántos cuadrados, el orden de los cuadrados [se refiere a la posición de los cuadrados]

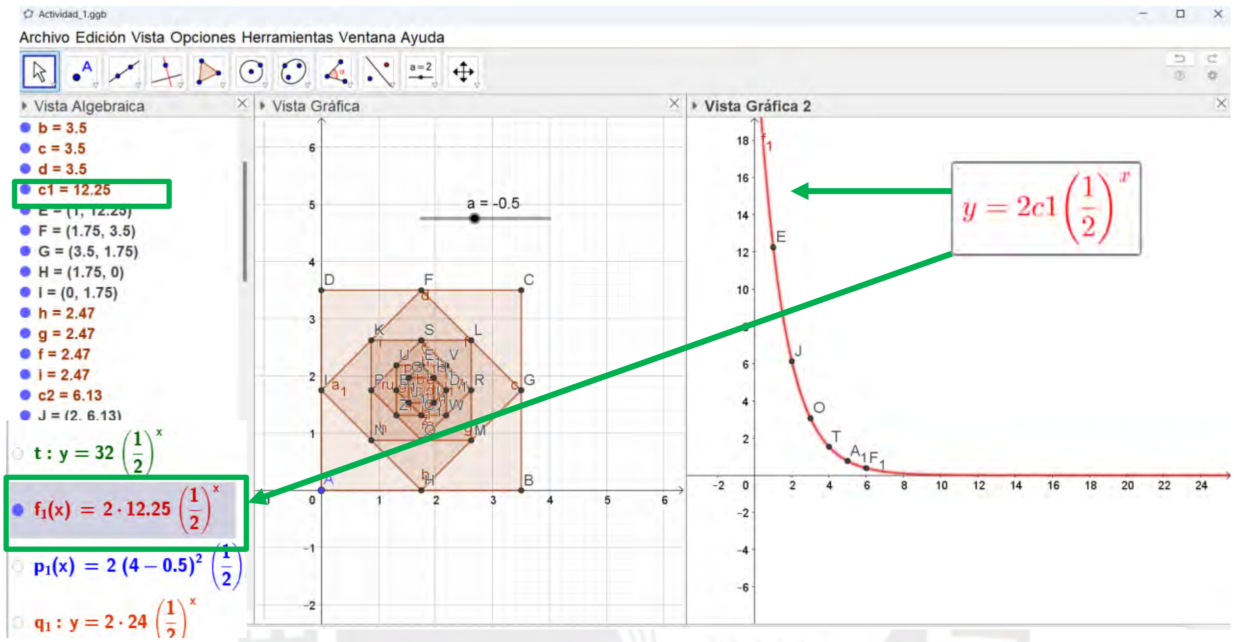
70. Investigador: Y con ese cambio, ¿Logras tu objetivo?

71. Estudiante: vamos a ver si se cumple

José movilizó su **esquema de uso patrones** al reconocer que la razón entre las áreas de los cuadrados se mantiene aun cambiando los valores del deslizador e identificar cómo se relaciona el valor del deslizador con el área de los cuadrados y movilizó su **esquema de uso función** al realizar cambios en la regla de correspondencia de la función exponencial, adaptándola a los cambios en el deslizador. Esto lo hizo efectivo al escribir en la barra de entrada: $2 \cdot c1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, donde $c1$ representa el área del cuadrado inicial y x la posición que toman los cuadrados, tal y como se muestra en la Figura 39. Cabe resaltar que el estudiante reconoce que x es un número natural y empieza en el valor 1, que significa la primera posición.

Luego, José movilizó su **esquema de uso variación** y reconoció y validó que su expresión o modelo matemático se desplazaba de forma simultánea con los puntos construidos en la Vista Gráfica 2 y que estos formaban parte de la gráfica. Para ello consideró dos valores del deslizador: *a* = -*0.5*, tal como se ve en la Figura 39 y *a* = *1.7*, como se refleja en la Figura 40.

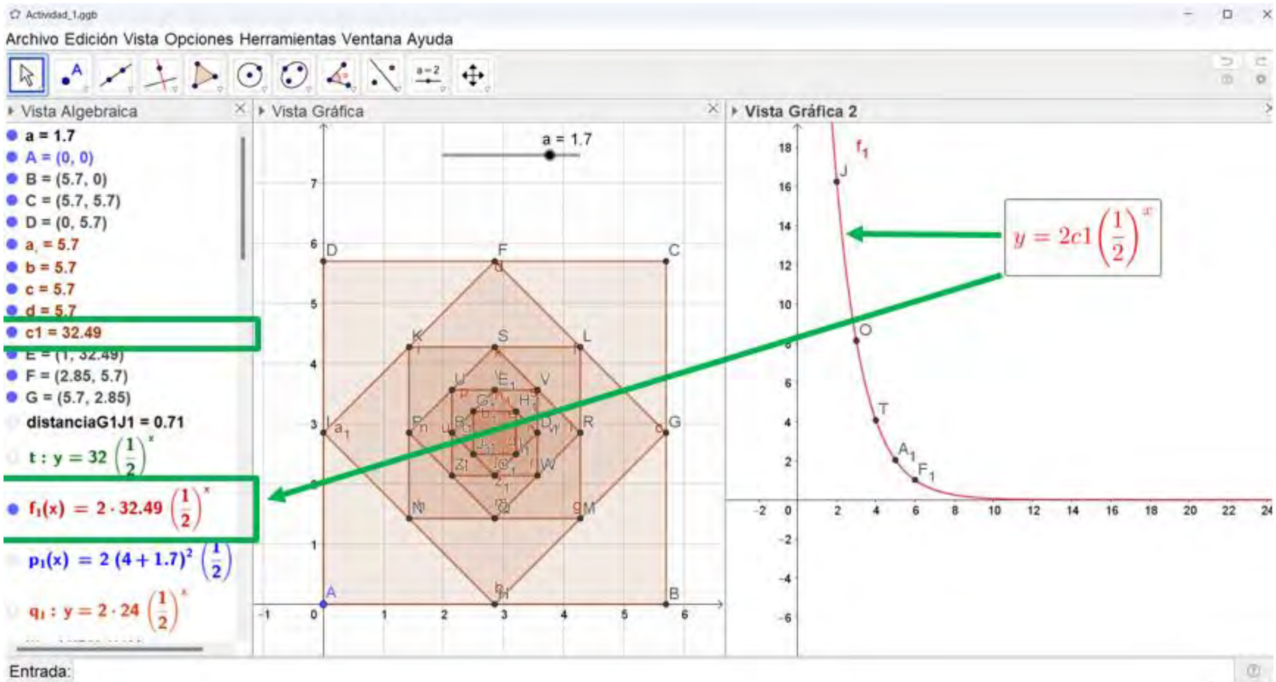
Figura 39. *Cuadrado de lado 3.5 unidades (a = -0.5) y cuando c1=12.25*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) ii

Las Figuras 39 y 40 muestran lo que observaba José en el interfaz de GeoGebra, al modificar el deslizador y colocarlo en dos valores distintos: a = -0,5 y a = 1,7, para los que $c1$ = 12.25 y $c1$ = 32.49 respectivamente; sin embargo, al colocar el símbolo $c1$, se oculta el valor del deslizador y no permite ver el modelo matemático con dicho parámetro.

Figura 40. *Cuadrado de lado 5.7 unidades (a = 1.7) y cuando c1=32.49*



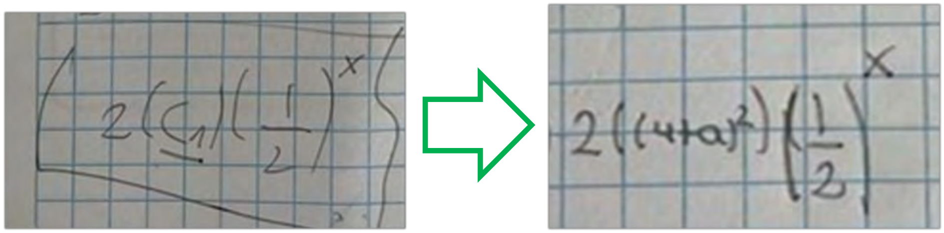
Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) ii

Esto hizo que el investigador le consulte al estudiante si reconocía el papel del deslizador en su expresión, por lo que se dio el siguiente diálogo:

> 72. Investigador: ¿Dónde se ubica el valor *a* del deslizador en tu expresión?
>
> 73. Estudiante: creo que el *a* está detrás del *c1*. Es decir, creo que tal vez detrás de ese *c1* sería elevar a $(4 + a)$ al cuadrado por 2 por un medio a la x. Creo que también sería una manera en la cual se puede representar.

La Figura 41 muestra una imagen de los apuntes que tomaba José en su cuaderno de notas.

Figura 41. *Expresión general en términos de a*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) ii

Luego, el investigador continuó con la entrevista semiestructurada, con el fin de que el estudiante comprobara que ya sea que se coloque *c*1 o una expresión en términos de *a* resultaba lo mismo.

74. Investigador: ¿Podrías reescribir tu ecuación en términos de *a*?

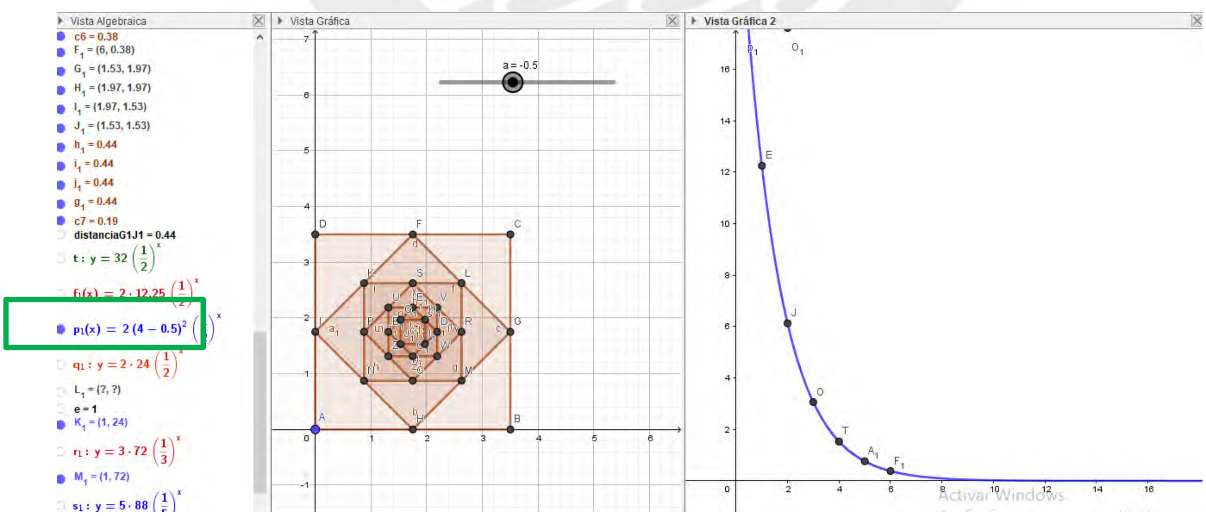
75. Estudiante: esto sería como había dicho [el estudiante escribe en la barra de entrada $2 \cdot (4+a)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$].

76. Investigador: ¿La gráfica obtenida es la misma que la anterior?

77. Estudiante: sí, y ahora con *a*, sí, porque sabía de que *a* estaba involucrado de alguna manera dentro del comportamiento de las funciones.

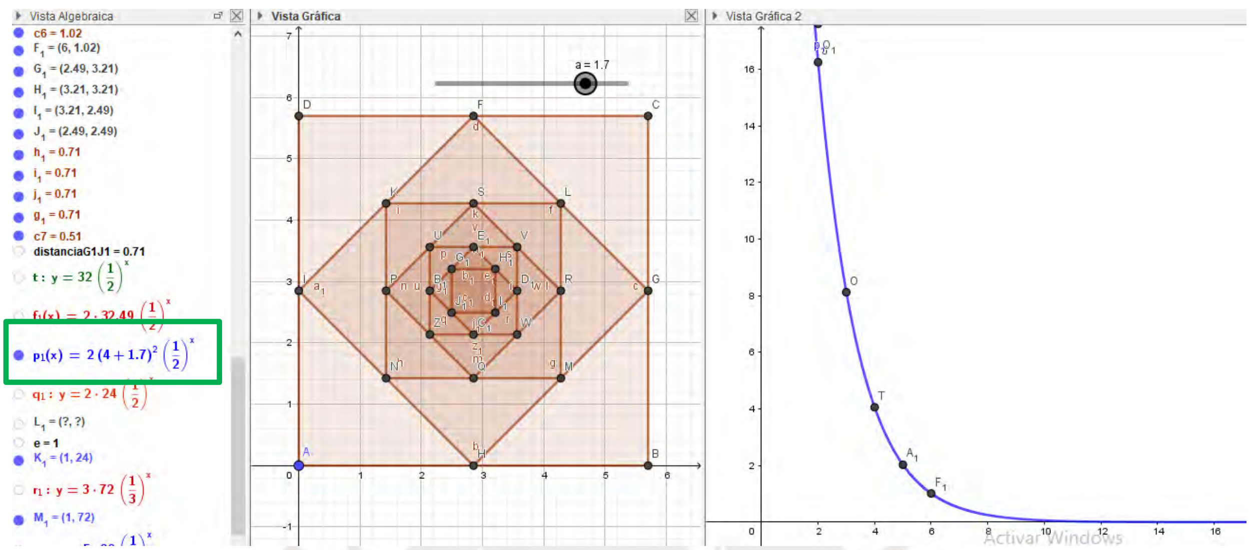
Las Figuras 42 y 43 muestran lo que observaba José en el interfaz de GeoGebra al modificar el deslizador y colocarlo en dos valores distintos: *a* = -0,5 y *a* = 1,7, lo que le permitió validar su modelo matemático.

Figura 42. Cuadrado de lado 5.7 unidades (a = -0.5) y cuando c1= $(4-0.5)^2$



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) ii

Figura 43. *Cuadrado de lado 5.7 unidades (a = 1.7) y cuando c1=* $(4 + 1.7)^2$



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 d) ii

José encontró una expresión general que le permite hallar los términos de una sucesión geométrica compuesta por las áreas de diferentes cuadrados de razón igual a ½ y valor inicial igual a $2\ (a + 4)^2$, así como su comportamiento gráfico para diferentes valores de un deslizador. Para ello, movilizó sus **esquemas de uso variación, patrones y función** con los que generó su **esquema de acción instrumentada**, el cual le permite caracterizar una familia de sucesiones geométricas de razón igual a ½ y valor inicial igual a $2\ (a + 4)^2$, con *a* que toma valores entre -3 y 3 con incrementos de 0.1.

La movilización de esquemas de uso asociadas a las diferentes herramientas de GeoGebra empleadas por José, hizo que generara un esquema de acción instrumentada asociado con uno de los objetivos principales de la actividad, que es construir un modelo matemático que permita caracterizar una familia de sucesiones geométricas de elementos indicados en el párrafo anterior. Desde la perspectiva de Rabardel (2011), estos son componentes de un proceso de instrumentación.

Las acciones realizadas por José con GeoGebra, que fueron previstas por el investigador tanto en el uso de diversas herramientas como en la generación y movilización de esquemas de uso, le permitieron generar su esquema de acción instrumentada al construir un modelo matemático que relacione las variables posición de un cuadrado y su respectiva área, para una familia de cuadrados que variaban sus dimensiones con el deslizador, permiten corroborar que instrumentalizó e instrumentó GeoGebra y, según Rabardel (2011), habría logrado la génesis instrumental de GeoGebra al trabajar sucesiones geométricas de base igual a $\frac{1}{2}$ y valor inicial el área de un cuadrado de cualquier medida de sus lados.

El investigador mencionó que el contexto de la actividad se relaciona con el estudio de las sucesiones geométricas y que lo que se buscaba era caracterizar dichas sucesiones con GeoGebra.

Ítem e): *Brinde características sobre las siguientes sucesiones geométricas:* *i. 36, 18, 9, 9/2, …* *ii. 24, 12, 6, 3, …* *iii. 72, 24, 8, 8/3, …*

Análisis del ítem e)

Para el inciso i) del ítem e), José respondió que utilizando el razonamiento anterior y usando el término general construido en el ítem d) el resultado de i) es:

$$y = 2 \cdot 36 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Además, se muestra el dialogo que se sostuvo durante la entrevista.

78. Estudiante: en primer lugar, me logro dar cuenta ahí de que existe una multiplicación por un medio [se refiere a la razón]. Un medio por 36 es 18 y así entonces vamos a ver. ¿Lo grafico también?

79. Investigador: no es necesario, pero si deseas, lo haces.

80. Estudiante: ah claro, pero primero voy a encontrar el patrón. Bueno, la regla de correspondencia. ¿Entonces con *"a"* también trabajo?

81. Investigador: depende de ti

82. Estudiante: claro

83. Investigador: por ejemplo, acá con el *"a"*, ¿Qué tendrías que usar?

84. Estudiante: bueno, creo que con los cuadrados de aquí ya puedo hallar la respuesta, porque sería cuestión solo de aumentarle 2 a "*a*" [se refiere a que en (4+2) en vez de (4+a)] y sí cumple con lo que dice.

85. Investigador: ¿Sí?

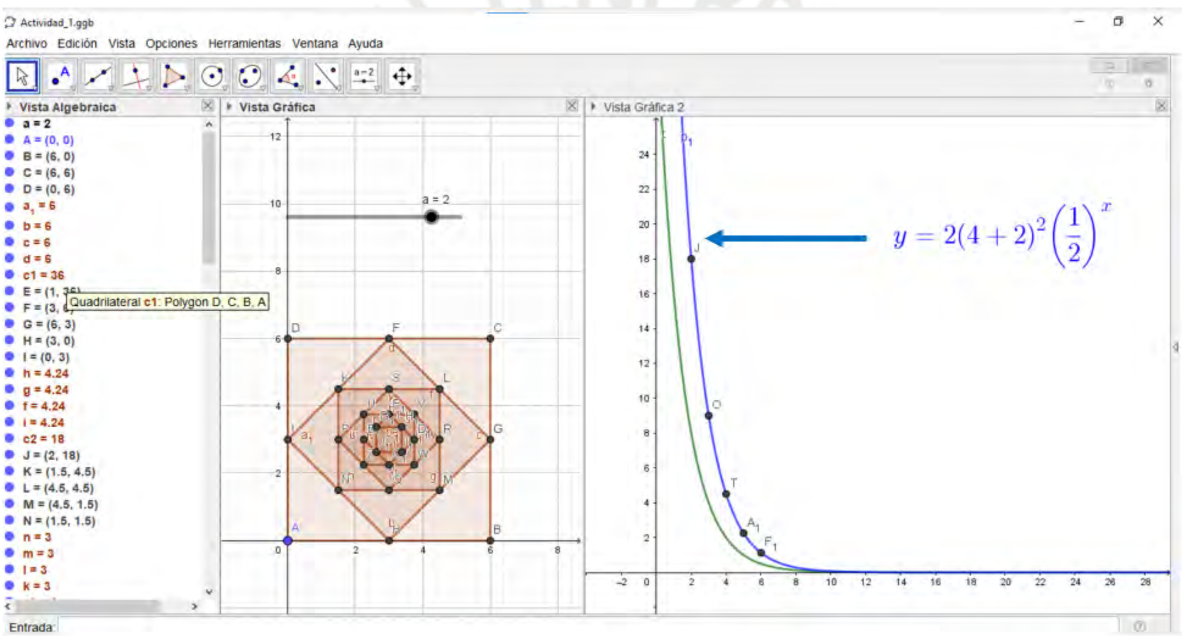
86. Estudiante: sí, porque bueno sigue ese mismo orden. Como ya conozco el patrón que sigue, sería pues cuestión de aumentarle a mi lado 2 para que me de 36, que sería el área del primer cuadrado. Sería 6 por 6. Detrás de 36, existe más 2, que sería el valor de *a* al cuadrado me da 36 [se refiere a que la nueva expresión es $y = 2 \cdot (4+2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$]

87. Investigador: ¿Y lo asocias con eso?

88. Estudiante: lo asocio con eso.

Además, para poder corroborar si su desarrollo es correcto, observó la vista algebraica, donde verificó que *c*1 = 36, *c*2 = 18, *c*3 = 9, etc. y así confirmó que la curva generada pasa por esos puntos. Es así como responde que ese término general es el correcto.

Figura 44. Grafica de la sucesión 36, 18, 9, 9/2, …



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 e) i

Se puede afirmar que el **esquema de acción instrumentada** que se generó en un ítem anterior, para este nuevo ítem, funciona como un **esquema de uso** que llamaremos **esquema de uso sucesión geométrica**, asociado con un modelo matemático que permite caracterizar numérica, algebraica y gráficamente una sucesión geométrica de razón igual a $\frac{1}{2}$ y valor inicial el área de un cuadrado de dimensiones variables mediante un deslizador.

Con relación a la sucesión geométrica planteada en el inciso (ii) del ítem e), José se percata que ya no puede caracterizar la sucesión geométrica manipulando el deslizador, dado que la medida del lado del cuadrado sería un número irracional.

A continuación, se muestra el dialogo donde expresa la conclusión mencionada.

89. Estudiante: bueno, sería primero cuestión de hallar mi valor de *a* entonces... ¿O no puedo usarlo?

90. Investigador: ¿Qué valor le pondrías a *a* para obtener los valores de la sucesión?

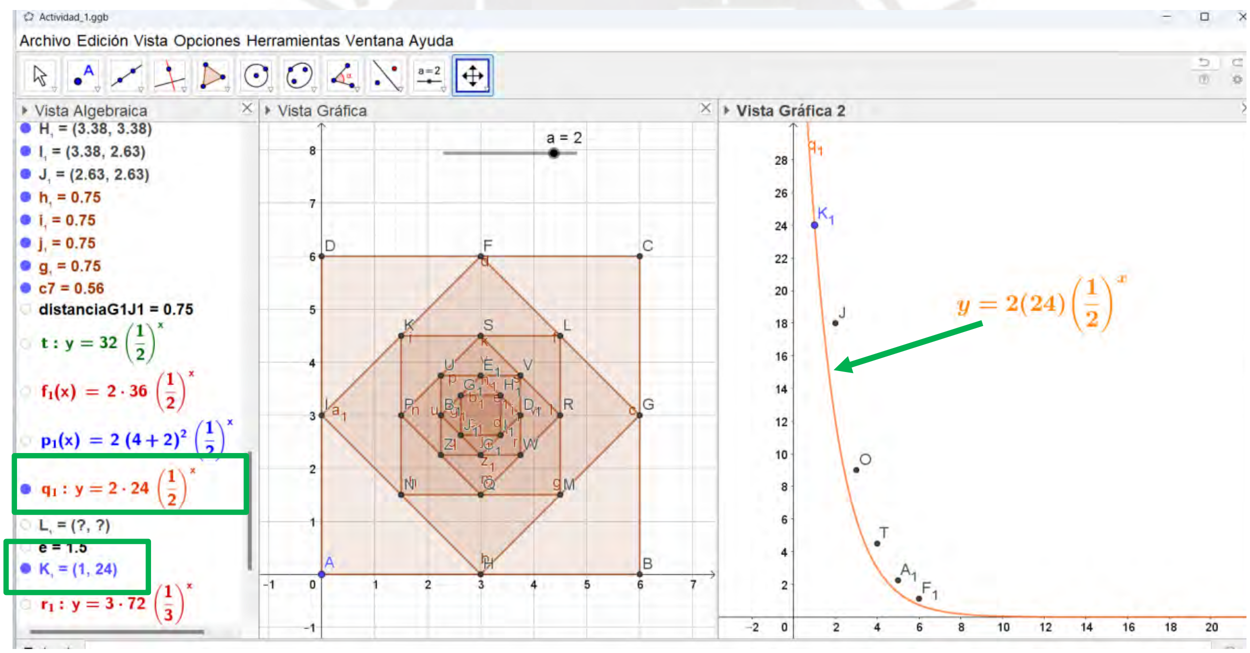
91. Estudiante: creo que seguiría lo que había hecho inicialmente: 2 por 24 esto por un medio [se refiere a $y = 2 \cdot 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$]

92. Investigador: a ver. Ponlo en tu gráfica

93. Estudiante: ya. Sí cumple

Y para verificar en la barra de entrada de GeoGebra, el estudiante escribe el punto (1, 24) y observa que pertenece a la gráfica de la ecuación y = $2 \cdot 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. A eso, José asegura que la expresión escrita es la correcta, tal como se puede ver en la Figura 45.

Figura 45. *Grafica de la sucesión 24, 12, 6, 3, …*



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 e) ii

José transforma su modelo matemático para adaptarlo a la situación planteada. Reconoce que el deslizador ya no le es útil y en vez de él, le basta multiplicar por dos el primer término de la sucesión. El estudiante amplía su modelo para trabajar con sucesiones de valores reales, pero positivas. También genera un nuevo esquema de acción instrumentada a partir del cual sólo necesita conocer el primer término de la sucesión y la razón igual a $\frac{1}{2}$.

Pero para el inciso (iii) del ítem e), el estudiante se da cuenta que la razón ya no es $\frac{1}{2}$, ahora es $\frac{1}{3}$, y que su modelo matemático no le es útil para caracterizar dicha sucesión geométrica. A continuación, se muestra el dialogo que se tuvo con José durante la resolución del inciso (iii):

94. Estudiante: bueno, aquí me logro dar cuenta de que el comportamiento es por 1/3, por 1/3, por 1/3. Entonces, tal vez eso sería la modificación. En este caso, en vez 1/2 sería tal vez: $y = 2 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

95. Investigador: ¿Cumple?

96. Estudiante: voy a reemplazar el primer punto (1, 72). Creo que no lo he hecho bien. Ah, no cumple.

97. Investigador: ¿Qué pasó?

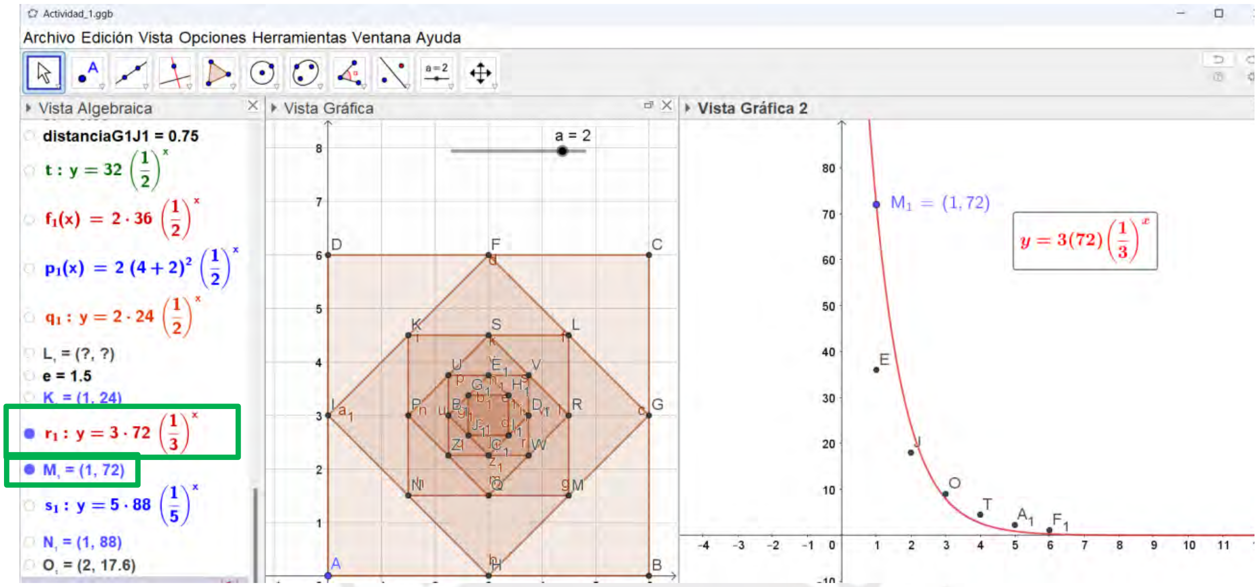
98. Estudiante: es 2 por 72. Ah, es que ya no sería por 2. Sería por 3. Ajá, ahora sí

99. Investigador: y ¿Por qué no puede ser 2?

100. Estudiante: porque en el primer caso nos dábamos cuenta de que necesitábamos un número anterior que a la vez sea multiplicado. Bueno, es decir, si en el primero hemos trabajado con un medio, porque anteriormente sabíamos de que teníamos que multiplicarlo por 2, creo que había una conexión con el denominador y el que multiplica de igual manera sucedería aquí. Porque si multiplico por 3, me va a dar 144 [se refiere a utilizar el modelo $y = 3 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en lugar del modelo $y = 2 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$]

José dibujó la curva asociada con la función exponencial $\boldsymbol{y = 3 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x}$ y para cerciorarse de que el modelo servía, escribió en la barra de entrada el punto: (1, 72) y se dibujó en la Vista Gráfica 2 un punto M_1 sobre la gráfica de la función, tal como se puede ver en la Figura 46. Podemos afirmar que José construyó un nuevo esquema de acción instrumentada que le permite caracterizar cualquier tipo de sucesión geométrica a partir de modificaciones en su modelo matemático.

Figura 46. Grafica de la sucesión 72, 24, 8, 8/3…



Fuente: Producción del estudiante del ítem 1 e) iii

José construyó un modelo matemático para caracterizar una familia de sucesiones de razón igual $\frac{1}{2}$ y término inicial igual al área de un cuadrado de dimensiones variables mediante un deslizador. Luego, adaptó su modelo matemático para que pudiera caracterizar sucesiones de razón igual $\frac{1}{2}$ y término inicial igual al área de un cuadrado de cualquier dimensión. Finalmente, la última sucesión planteada, hizo que dejara de utilizar su modelo asociado a una situación en particular, sino que lo utilizara para cualquier tipo de sucesión conocidos el valor inicial y la razón entre dos valores consecutivos.

La manipulación de herramientas, la movilización de esquemas de uso y la generación de esquemas de acción instrumentada relacionados con la adaptación de su modelo matemático en la búsqueda de un modelo más general que le permita caracterizar cualquier sucesión geométrica, nos permite afirmar que José realizó la instrumentalización e instrumentación de GeoGebra. Es decir, logró su génesis instrumental, pero también transformó GeoGebra en un instrumento que le permitió trabajar con diferentes sucesiones geométricas fuera del contexto de la actividad.

CAPÍTULO IV: CONSIDERACIONES FINALES Y CONCLUSIONES

En este capítulo, mostraremos las evidencias que confirman el logro del objetivo principal de la investigación y de los objetivos específicos, se da respuesta a la pregunta de investigación, se detallan algunas conclusiones que se desprenden de la investigación realizada y se propondrán trabajos a futuro relacionados con la presente investigación.

En relación con el primer objetivo específico: *Identificar los esquemas de utilización que se generan o movilizan sobre el artefacto GeoGebra al resolver una actividad sobre sucesiones geométricas*, se identificaron diferentes esquemas de utilización que fueron presentados en el análisis realizado.

Por un lado, se identificó que el estudiante movilizó nociones matemáticas que hizo efectivas con diferentes herramientas de GeoGebra. Para utilizarlas, el estudiante reconoció propiedades de estas nociones que le permitieron resolver tareas segundas en el sentido de Rabardel (2011), porque eran tareas secundarias involucradas en el proceso que lo fue guiando en la construcción de un modelo matemático que permitía obtener el término general de una sucesión geométrica.

Entre los esquemas de uso que se identificaron figuran: esquema de uso variación, relacionado con la noción de cambio y que hizo efectivo con la herramienta deslizador; esquema de uso punto, relacionado con la noción de par ordenado que hizo efectivo con la herramienta punto de GeoGebra cuando construyó los vértices del primer cuadrado asociados con el deslizador y con la noción de relación funcional de variable discreta al relacionar la posición de los cuadrados y sus respectivas áreas; esquema de uso punto medio, relacionado con la noción de punto medio de un segmento que hizo efectivo con la herramienta punto medio de GeoGebra; esquema de uso patrones, relacionado con la identificación de regularidades en un conjunto de números hecho efectivo a lápiz y papel al construir un par de tablas de datos; y esquema de uso función, relacionado con la noción de regla de correspondencia al obtener una expresión matemática luego de realizar una generalización a partir del valor de las áreas de un conjunto de cuadrados.

El objetivo principal de la actividad era que el estudiante encuentre un modelo matemático que le permitiera caracterizar de forma numérica, algebraica y gráfica el comportamiento de los elementos de una sucesión geométrica, considerada esta la tarea primera en términos de

Rabardel (2011). Al movilizar los esquemas de uso variación, patrones y función, el estudiante logró generar su esquema de acción instrumentada asociada con la construcción del modelo matemático: $T_x = 2(a+4)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, que caracterizaba una familia de sucesiones geométricas de razón ½ y valor inicial $2(a+4)^2$, valor asociado con el área del primer cuadrado que dependía de los valores del deslizador a.

La identificación de estos esquemas relacionados con las tareas segundas y la tarea primera corroboran el logro del primer objetivo específico.

En relación con el segundo objetivo específico: *Reconocer elementos que indiquen que GeoGebra se convierte en un instrumento para trabajar con sucesiones geométricas en estudiantes universitarios*, se reconocieron elementos que hacen pensar que el estudiante utilizó GeoGebra como un instrumento. Esto se puede observar en el análisis relacionado con el último ítem de la actividad.

Por un lado, el estudiante halló un modelo matemático que le permitía caracterizar una sucesión geométrica de razón igual a ½ y valor inicial 16, este último asociado con el área de un primer cuadrado. Como los vértices de ese cuadrado estuvieron asociados con el deslizador, al manipularlo, se generaban diferentes sucesiones geométricas de razón igual a ½ y valor inicial el área de otro cuadrado de diferente lado.

Las modificaciones que realizó el estudiante en el modelo matemático, que le permitieron caracterizar con GeoGebra el comportamiento, tanto de forma numérica, algebraica y gráfica de las diferentes sucesiones geométricas, fue un primer elemento que hace pensar que utilizó GeoGebra como un instrumento para esa familia de sucesiones geométricas. Hecho que se corrobora al construir con GeoGebra la sucesión: 36, 18, 9, 9/2,…, para lo cual solo colocó el deslizador en su valor *a* = 2, logrando diagramar un cuadrado de lado 6 unidades.

Otro elemento que valida el uso de GeoGebra como un instrumento es dejar de pensar en que con el deslizador se podía conseguir cualquier valor inicial de la sucesión. Esto fue corroborado al plantearle la sucesión 24, 12, 6, 3,…, que al ver imposibilitado obtener el valor 24 con el deslizador, dejó de pensar en el deslizador y escribió en la barra de entrada la expresión $2 \cdot 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Esto es sinónimo de que el estudiante puede caracterizar con GeoGebra cualquier sucesión geométrica de razón igual a ½.

Un último elemento que valida el uso de GeoGebra como un instrumento, es dejar de pensar en que con el deslizador y con las áreas de los cuadrados se podía conseguir cualquier sucesión geométrica, como por ejemplo: 72, 24, 8, 8/3,… Esta sucesión no se consigue ni con el deslizador, ni con la construcción de cuadrados, cuya razón entre las áreas era de ½. Se puede afirmar entonces que el estudiante adaptó su modelo matemático a las nuevas condiciones planteadas que lo llevó a escribir en la barra de entrada la expresión $3 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$. Esto es sinónimo de que el estudiante puede caracterizar con GeoGebra cualquier sucesión geométrica de cualquier razón.

La identificación de estos elementos corrobora el logro del segundo objetivo específico.

El logro de estos dos objetivos específicos brindó elementos sustanciales para el cumplimiento del objetivo general de la investigación: *Analizar cómo se produce el proceso de génesis instrumental vinculado al uso de GeoGebra al desarrollar una actividad sobre sucesiones geométricas con estudiantes universitarios.*

A lo largo del desarrollo de la actividad, observamos que el estudiante utilizó diversas herramientas de GeoGebra asociadas con diferentes conceptos matemáticos, potenciando sus propiedades al adaptarlas a la tarea que estaba desarrollando.

Se distinguieron dos momentos en la actividad: por un lado, la construcción del entorno dinámico, relacionado con el dibujo de un conjunto de cuadrados con particularidades específicas y la representación gráfica de cómo iban variando sus áreas; y un segundo momento, en la búsqueda de un modelo matemático que permita determinar las áreas de estos cuadrados al reemplazar valores enteros en la variable independiente, primero, para una dimensión específica del lado del cuadrado y luego una generalización de estas al variar un deslizador que cambiaba las medidas del cuadrado inicial.

Se observaron en estos momentos el proceso de instrumentalización, asociado con la apropiación de las propiedades del artefacto y de sus herramientas. En nuestro caso, GeoGebra y el proceso de instrumentación, al identificar los esquemas de utilización, de uso y de acción instrumentada, movilizados y generados por el estudiante al transformar el artefacto GeoGebra en un instrumento que le permitiría luego caracterizar el comportamiento numérico, algebraico y gráfico de cualquier sucesión geométrica, conocida su razón y el término inicial. Desde la perspectiva de Rabardel (2011), relacionada con el logro de la génesis instrumental y los procesos que se siguen para transformar un artefacto en instrumento, se puede afirmar que el estudiante José logró la génesis instrumental de la noción de sucesión geométrica.

En este trabajo, se planteó la pregunta de investigación: *¿Cómo se produce la génesis instrumental vinculada al uso de GeoGebra al desarrollar una actividad sobre sucesiones* *geométricas en estudiantes universitarios?* A continuación, se presentan algunos indicadores que caracterizaron cómo se realizó la transformación del artefacto en instrumento:

- El estudiante José estaba familiarizado con el uso de GeoGebra. Herramientas como punto, punto medio, deslizador, polígono, área, función, entre otros, los había utilizado en actividades de otros contextos para abordar temas relacionados con funciones diferentes al contexto de la actividad presentada en nuestra investigación. Asimismo, el estudiante desconocía que iba a trabajar con sucesiones geométricas, término que no fue empleado en el discurso del investigador hasta llegar al último ítem de la actividad. Por ese motivo, consideramos que GeoGebra era un artefacto para el estudiante para el tipo de actividad que iba a desarrollar.
- Obtener la función exponencial que pasaba por los puntos construidos, considerando la posición de los cuadrados y sus respectivas áreas, fue un logro para el estudiante; sin embargo, al mover el deslizador y cambiar las dimensiones de todos los cuadrados, la sucesión de puntos se modificó, manteniéndose constante su función. Ese fue un punto de quiebre para que el estudiante empiece a realizar modificaciones a la regla de correspondencia de dicha función que le permitiera caracterizar o lograr que al variar el deslizador también su gráfica describa el comportamiento de la sucesión. Este proceso le permitió construir un modelo matemático para caracterizar cualquier sucesión geométrica de razón igual a ½ y término inicial un valor restringido por un deslizador.
- Por último, el haber logrado caracterizar con GeoGebra tres sucesiones geométricas, donde ya no era factible el uso del deslizador y de los cuadrados, dado a que se trataba de un valor inicial y de una razón diferente, nos da indicios de que su modelo matemático, creado en GeoGebra, le es útil para trabajar cualquier sucesión geométrica. Es decir, GeoGebra se volvió un instrumento para él.

Se concluye del proceso la importancia del uso de GeoGebra en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, dado que, cuando el estudiante está familiarizado con la tecnología y la utiliza como medio para la resolución de tareas y como medio que le da retroalimentación instantánea, se puede analizar cómo se ponen en juego diferentes conocimientos previos que posee y las emplea para generar nuevos. Asimismo, genera un aprendizaje más completo de ciertos conceptos matemáticos que, por lo general, se abordan con mucho énfasis en un plano algebraico y no gráfico o variacional.

El presente estudio puede dar paso a otras investigaciones relacionadas con el uso de GeoGebra para abordar temas relacionados con sucesiones geométricas, como estudiar diferentes técnicas instrumentadas con GeoGebra que permitan analizar la convergencia de series de sucesiones geométricas o analizar cómo impacta el uso de herramientas de GeoGebra en el razonamiento covariacional de los estudiantes cuando se trabajan sucesiones geométricas o temas afines, entre otras.

REFERENCIAS

Apostol, T. (2002). *Calculus.* Reverté

Bartle, R. y Sherbert, D. (2010). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Editorial Limusa.

Codes, M. y González-Martín, A. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las ciencias, 35*(1), 89-110. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

De Oliveira, R., de Oliveira, J., Paiva, R. y de Lages, A. (2021). O software GeoGebra como aporte para o Ensino de Matemática e aplicação em sequências numéricas. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 10*(1), 92-107. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i1p092-107

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2011). Introduction. The discipline and practice of qualitative research. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 1-20). Thousand Oaks, CA: Sage.

Ferraza, M. (2017). Análise De Erros Em Questões Sobre Sequências Numéricas: Uma Contribuição Para A Formação Do Professor De Matemática [Tesis de Maestría]. Universidad Franciscana Brasil.

García-Cuéllar, D. (2014). *Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de Educación Secundaria.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontifica Universidad católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/5651

García-Cuéllar, D. y Salazar, J.V.F. (2020). Aproximação Instrumental: sua origem e seu desenvolvimento no Peru. En Basniak, Maria; Rubio-Pizzorno, Sergio (Eds.), *Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco* (pp. 45-66). São Paulo: Pimenta Cultural.

Genc, M. y Akinci, M. (2020). Errors in Using Convergence Tests in Infinite Series. *Acta Didactica Napocensia, 13*(2), 113-127. https://doi.org/10.24193/adn.13.2.8

González, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2021). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con GeoGebra. *Revista De Educación Matemática*, 1-19. https://doi.org/10.33044/revem.10227

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill.

Lages, E. (1997). Análisis real. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI.

Malla, K. (2020). *Una Propuesta Didáctica para la enseñanza de las sucesiones y los procesos infinitos desde la mirada de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Trad. por M. Acosta). Universidad Industrial de Santander.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable*. *Trascendentes Tempranas*. Cengage Learning.

Verdugo, P. (2020). Aproximación a la enseñanza de las sucesiones de números reales por medio de los espacios de trabajo matemático. *Revista Chilena de Educación Matemática 12*(2), 71-80. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.28

Verdugo, P., Espinoza, G. y Carrillo, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza De Las Ciencias, 2*(40) 125-145. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo trascendentes tempranas* (4th ed.) McGraw Hill.

ANEXOS

Actividad: (Análisis sobre variaciones de los términos de la sucesión)

Abra un archivo en GeoGebra, asigne el nombre Actividad.ggb, y realice las siguientes instrucciones:

i. Construya un deslizador a que varíe desde -3 hasta 3 con incrementos de 0.1 unidades. Luego, fije el valor a = 0 y ubique los puntos (0, 0); (4 + a, 0); (4 + a, 4 + a); (0, 4 + a). A continuación, construya un primer cuadrado.

ii. Determine el área del primer cuadrado y represente el resultado obtenido como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.

iii. Construya un segundo cuadrado inscrito en el primero, cuyos vértices se ubiquen en los puntos medios de los lados del primer cuadrado. Luego, determine su área y represente el resultado como un punto en la Vista Gráfica 2 de GeoGebra.

iv. Repita el procedimiento descrito en el inciso iii) para dibujar 4 cuadrados adicionales.

A partir de estas instrucciones, dé respuesta a las siguientes preguntas:

a) Si se dibujara un séptimo cuadrado, ¿Cuánto sería su área? Explique su procedimiento.

b) Si se continuara con este procedimiento, ¿Es posible calcular el área de cualquiera de los cuadrados inscritos? Justifique su respuesta.

c) ¿Existirá una curva que pase por todos los puntos ubicados en la Vista Gráfica 2? Justifique su respuesta.

d) Manipule el deslizador ***a***.

   i. ¿Qué cambios observa en ambas vistas gráficas?

   ii. ¿Es posible determinar una expresión, tal como lo hizo en el inciso b), que modele cómo cambia el área de los cuadrados?

e) Brinde características sobre las siguientes sucesiones geométricas:

   i. 36, 18, 9, 9/2, …

   ii. 24, 12, 6, 3, …

   iii. 72, 24, 8, 8/3, …