PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

APREHENSIONES EN LA DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL EN DOCENTES EN FORMACIÓN CONTINUA MEDIADO POR EL GEOGEBRA

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

John Bryan Menacho Vilca

Asesor:

Tito Nelson Peñaloza Vara

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, TITO NELSON PEÑALOZA VARA, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada APREHENSIONES EN LA DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL EN DOCENTES EN FORMACIÓN CONTINUA MEDIADO POR EL GEOGEBRA, del autor John Bryan Menacho Vilca, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 09/11/23.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 13 de noviembre de 2023

Apellidos y nombres del asesor: Peñaloza Vara, Tito Nelson	
DNI: 08154677	Firma: Peñaloza VT
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-9682	

Dedicatoria

A Dios Elohim, por permitirme su ayuda y bendición inclusive en esta vida peregrina.

¡Gracias Padre y Madre!

Filipenses 3:20

Agradecimientos

A mi asesor, Mtro. Nelson Peñaloza Vara, por su apoyo, enseñanza y sugerencias dadas de manera constante para el desarrollo de la presente tesis.

A los profesores de la linea TECVEM, por sus sugerencias y observaciones realizadas de la tesis en cada una de las exposiciones de avance de tesis, lo cual me permitió mejorar mi investigación.

A los miembros del jurado, Dr. Mihály André Martínez Miraval y Mtra. Magaly Ethel Campos Motta, por sus observaciones, sugerencias y recomendaciones que me ayudaron a mejorar la presentación de la investigación.

A los docentes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontifica Universidad Católica del Perú, por permitirme conocer la otra cara de la enseñanza, desde el punto de vista de la didáctica, las teorías e investigaciones relevantes para mi formación docente y sobre todo la riqueza de hacer investigación.

A mis compañeros de posgrado que conocí, aprendí y sobre todo fueron participes de una manera directa o indirecta a la culminación de esta tesis.

A mis padres, quienes siempre me apoyaron a no truncar mis objetivos.

A Indira, quien, a pesar del tiempo, las dificultades y la situación, siempre estuvo a mi lado ayudándome pacientemente para lograr mis objetivos y desarrollo profesional.

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo el estudio de las aprehensiones desarrolladas por docentes en formación continua, cuando movilizan nociones geométricas preliminares asociado a la derivada direccional por medio de su registro gráfico dinámico mediado por el GeoGebra. Para tal propósito se recopiló información que permita justificar la relevancia de la investigación desde su perspectiva académica, además de su pertinencia e impacto del uso de software de representación (en este caso el GeoGebra) cuando se trabaja con representaciones gráficas en un ambiente tridimensional dinámico. Como marco teórico se consideró aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica, referido específicamente al registro gráfico dinámico y al estudio de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria. La investigación es de tipo cualitativa, ya que nuestro foco de atención es describir las acciones y comportamientos de los sujetos participantes al momento de interactuar en las actividades diseñadas bajo el objetivo de tesis, por lo cual, el procedimiento metodológico realizado sigue los criterios propios de una investigación de corte cualitativo.

Los resultados obtenidos nos permiten concluir que los docentes en formación continua logran desarrollar sus aprehensiones al movilizar conceptos geométricos asociados a la representación algebraica de la derivada direccional por medio de actividades mediadas por el GeoGebra, lo cual nos permite dar como respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra favorecería a los docentes en formación continua desarrollar su aprehensión perceptiva, discursiva y operatoria en relación a la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica?

Palabras clave: Aprehensiones, Registro gráfico dinámico, GeoGebra, Derivada direccional.

Abstract

The present research aims to study the apprehensions developed by teachers in continuing education, when they mobilize preliminary geometric notions associated with the directional derivative through its dynamic graphic register mediated by GeoGebra. For this purpose, information was gathered to justify the relevance of the research from an academic perspective, as well as the relevance and impact of the use of representation software (in this case GeoGebra) when working with graphic representations in a dynamic three-dimensional environment. As a theoretical framework, aspects of the Semiotic Representation Register Theory were considered, referring specifically to the dynamic graphic register and the study of perceptual, discursive and operative apprehensions. The research is qualitative, since our focus of attention is to describe the actions and behaviors of the participating subjects at the moment of interacting in the activities designed under the thesis objective, therefore, the methodological procedure followed follows the criteria of a qualitative research.

The results obtained allow us to conclude that the teachers in continuous training manage to develop their apprehensions when mobilizing geometric concepts associated to the algebraic representation of the directional derivative by means of activities mediated by GeoGebra, which allows us to answer the research question: How a didactic sequence mediated by GeoGebra would favor teachers in continuing education to develop their perceptual, discursive and operative apprehension in relation to the geometric understanding of the directional derivative associated to its algebraic representation?

Keywords: Apprehensions, Dynamic graphical register, GeoGebra, Directional derivative.

Índice

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

La presente investigación tiene por objetivo estudiar el desarrollo de las aprehensiones de los docentes en formación continua cuando movilizan conceptos relacionados con la concepción geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica, y para esto se establecieron actividades en un ambiente de representaciones dinámicas mediadas por el GeoGebra. Nuestro interés surge a raíz de los antecedentes recopilados, en función a la problemática que usualmente se tiene de englobar a un objeto matemático desde una única representación (en nuestro caso, se observa que representación algebraica de la derivada direccional es lo usualmente utilizado), es decir, no lograr entender de una mejor forma el objeto matemático por medio de sus otras representaciones posibles (natural, algebraico, gráfico, etc.), por tal razón se eligió a la Teoría de Registro de Representación Semiótica (TRRS) como soporte teórico que nos permita explorar dicha concepción en sus múltiples representaciones, específicamente para esta tesis nos centraremos en la concepción geométrica que se tiene de la representación algebraica de la derivada direccional a partir del estudio de las aprehensiones, por tal razón, nuestro objetivo de investigación se centrará en describir las posibles aprehensiones que fluyen de parte de los docentes al ser sometidos a actividades donde la noción de derivada direccional se encuentre en juego. Para esto, hemos estructurado la investigación en 3 capítulos descritos en el siguiente orden.

El primer capítulo se desarrolla en función a las investigaciones de referencia recopiladas, las cuales están relacionadas de una forma directa o indirecta a nuestro objetivo de investigación, la justificación, el marco teórico, la descripción de la pregunta y objetivos de investigación, y finalmente la metodología que seguiremos.

En el segundo capítulo presentaremos los aspectos matemáticos y didácticos del objeto matemático, desde la presentación usual que se tiene en los libros de texto utilizados usualmente en la formación profesional de un estudiante y/o en la práctica docente, además de la descripción del uso del GeoGebra como medio para generar representaciones gráficas dinámicas y/o construcciones de objetos matemáticos a partir de sus características geométricas.

Finalmente, en el tercer capítulo, se presenta la parte experimental y análisis de la investigación, donde se describe la secuencia de actividades elaboradas y su aplicación, lo cual nos permitirá observar, describir y analizar las acciones realizadas por los sujetos de experimentación para, posteriormente contrastar con nuestro objetivo de tesis y dar las conclusiones pertinentes.

Capítulo I: Problemática

Empezamos este capítulo presentando las investigaciones de referencia que servirán de guía para el desarrollo de nuestra investigación, explicando su pertinencia, los objetivos a seguir, el marco teórico que nos permitirá analizar desde un punto de vista de la didáctica de la matemática y la metodología a emplear en el desarrollo de la investigación; cabe resaltar que cada uno de estos elementos señalados están bajo el único propósito de lograr el objetivo de la tesis y su relación al objeto matemático que se analiza.

1.1 Investigaciones de referencia

A continuación, presentaremos investigaciones relacionadas de forma directa o indirecta con nuestro objeto matemático (derivada direccional), también en relación a los aspectos teóricos ligados a la manera de cómo es comprendido por los estudiantes en su formación académica en el curso de Cálculo multivariable, además, del aporte que se puede añadir cuando se usan softwares para generar representaciones dinámicas. Los artículos, tesis, revistas digitales que se incluyen dentro de este capítulo se obtuvieron en gran parte por medio de los repositorios de universidades, buscadores web y revisiones bibliográficas en torno a los artículos encontrados; siendo la mayoría de éstos ubicados a nivel latinoamericano y norteamericano.

Para una mejor comprensión preambular, se agrupa las investigaciones de referencia de acuerdo a los siguientes criterios que se indica a continuación; investigaciones en relación a la problemática en torno al objeto matemático, investigaciones relacionadas al uso de un software de representación dinámico para representaciones tridimensionales, investigaciones en relación al uso del marco teórico que se considera en esta investigación y finalmente acotaremos la relevancia relacionada a la formación docente. Antes de culminar esta sección, se enfatiza lo que se espera tratar en esta tesis en relación a las investigaciones de referencia y un preámbulo para su justificación de cómo contribuiría en la formación académica de los sujetos para una mejor comprensión significativa, en nuestro caso en la formación continua de docentes a nivel universitario.

Investigaciones sobre la problemática en relación al objeto matemático

McGee y Moore-Russo (2015), por medio de esta investigación explican, la conceptualización que la mayoría de autores de libros de texto de cálculo multivariable asumen en los estudiantes con respecto a la definición geométrica de la derivada direccional a partir de su representación algebraica, la cual, esta despendre del concepto de pendiente de una recta en el espacio 3D, pero esta “generalización” (explican los investigadores) es asumida por parte de los autores de textos como algo evidente que los estudiantes puedan entenderlo, es decir, que a partir de lo estudiado con respecto a pendiente de una recta en el plano bidimensional (2D) se asume que se comprenda si se tuviere una recta en un entorno tridimensional (3D); lo cual, según los resultados de McGee y Moore-Russo (2015), esto no se cumple. Además los investigadores afirman que, cuando a los estudiantes se les enseña el concepto de derivada y sus diversas representaciones asociadas, previamente ellos tienen la noción del concepto de pendiente de una recta en 2D (como una razón de cambio), permitiendo así una mejor comprensión por parte de los estudiantes en relación al concepto geométrico de derivada; sin embargo, con respecto a la derivada en el cálculo multivariable, los investigadores tienen una opinión contraria, ya que no se logra una discusión previa con respecto a cómo este se asocia a la definición de pendiente de una recta en 3D, lo cual hace que se perciba el concepto de una manera algebraica. McGee y Martínez (2013, como se citó en McGee y Moore-Russo, 2015) indican, que la mayoría de textos de cálculo de una variable, cuando se estudia algunos objetos matemáticos en 2D, se utiliza diversas representaciones y/o conceptos que están relacionados al objeto matemático que se desea enseñar, pero cuando se enseña este mismo objeto matemático de manera generalizada para un entorno tridimensional (cálculo multivariable), se presenta con un reducido conjunto de representaciones y/o conceptos asociados a este, lo cual muestra, en cuanto puede afectar significativamente la comprensión de los estudiantes en torno a los conceptos matemáticos asociados al nuevo objeto matemático que se desea enseñar, y cuando estas representaciones faltantes, en relación al objeto matemático, se logran presentar explícitamente, la comprensión del estudiante mejora significativamente.

Bajo esta premisa, McGee y Moore-Russo (2015) enfatizan que, para una mejor concepción geométrica del concepto de derivada en 3D, se debe entender previamente el concepto geométrico de una recta en el espacio tridimensional y la noción de pendiente que vincula a esta recta 3D, además del hecho de la comprensión de las pendientes direccionales (en relación a los ejes coordenados X, Y) asociados a un plano, lo cual permite vincular con el concepto de derivada direccional. Esta investigación de tipo cualitativa y experimental, se llevó a cabo con estudiantes de ingeniería de la Universidad de Puerto Rico-Mayagüez (URPM), lo cual con base en aspectos teóricos de la TRRS, se parte de la premisa de que si los estudiantes que experimentan la presentación explícita del concepto de pendiente en 3D por medio de diversos registros de representación y logran inclusive realizar tratamientos y conversiones para actividades específicas; son más capaces de lograr comprender el concepto de derivada en 3D (es decir, entenderlo como una razón de cambio en el espacio), a diferencia de aquellos que son instruidos de manera tradicional.

Dentro de las conclusiones señaladas por McGee y Moore-Russo (2015), se tiene que, los estudiantes que observan previamente registros de representación asociados con pendiente en 3D como intermediario al estudio del tema de derivada en 3D (derivada direccional); en comparación con aquellos estudiantes que no están familiarizados de forma explícita con las pendientes en 3D, se esfuerzan más para lograr tratamientos y conversiones simples asociadas con la derivada 3D, por tal razón, los investigadores concluyen que, a los estudiantes parte del grupo experimental, les fue significativamente mejor con los tratamientos y conversiones en tareas y actividades asociadas a la derivada en 3D, además, resaltando la importancia que tienen las representaciones semióticas para una plena concepción del objeto matemático, lo cual muchas veces se deja de lado, al querer enseñar el mismo objeto de estudio pero en un ámbito tridimensional..

Martínez-Planell et al. (2017) plantean un enfoque para ayudar a la comprensión geométrica de la derivada direccional a partir de la comprensión geométrica del cambio vertical en el plano tangente, lo cual permitiría a los estudiantes una herramienta importante para dar solución al problema de los dos cambios, con respecto a esto; Weber (2015, como se citó en Martínez-Planell et al., 2017) describe el "problema de los dos cambios", al hecho de comprender que para una función de dos variables (es decir en el plano tridimensional) se tiene más de dos tasas de cambio en un punto especifico y el problema de lo que significa el unirlos para obtener un único valor como resultado. De igual manera, y en base a la investigación de McGee y More-Russo (2015), a que la construcción geométrica de la noción de derivada direccional se entienda a partir de la construcción de pendiente de una recta en 3D; se plantean actividades relacionado a la concepción geométrica de las pendientes direccionales en un plano, asociados al llamado problema de los dos cambios.

La investigación realizada por Martínez-Planell et al. (2017) tuvo como marco teórico la teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), donde se buscó plantear una conjetura inicial llamada descomposición genética, de las posibles construcciones mentales que se necesitan hacer para que los estudiantes puedan comprender las nociones matemáticas que están estrechamente relacionada a la concepción geométrica de la derivada direccional de su usualmente representación algebraica; como por ejemplo, las nociones de plano tangente, derivadas parciales, cambio vertical en un plano; contrastando así con los resultados obtenidos después del análisis de datos para refinar la descomposición genética inicialmente presentada, lo cual posteriormente puede ser utilizado para el diseño de nuevas actividades que ayuden y guíen a la comprensión de los estudiantes de la derivada direccional.

En la fase experimental, Martínez-Planell et al. (2017) diseñaron actividades en términos de las construcciones descritas en la descomposición genética inicial, hacia 26 estudiantes de ciencias e ingeniería que acababan de terminar un curso de cálculo multivariable en la misma institución, lo cual se dividió en dos grupos (experimental y de control), lo cual posteriormente se recopilo lo observado por medio de entrevistas semiestructuradas. Dentro de las conclusiones que se presentan, está el hecho de que los resultados obtenidos muestran la importancia de la noción de cambio vertical en un plano y su relación geométrica que tiene este a un plano tangente y derivada direccional. Además, se descubre que varias construcciones mentales que se asume de antemano (o se supone que son obvias para los estudiantes), causaron dificultad al momento de la fase experimental, por ejemplo, el hecho de la coordinación de los cambios verticales en dirección a los ejes coordenados permite conocer el cambio vertical que se tiene en un plano. Aspectos como estos tuvo mucha influencia para el refinamiento de la descomposición genética inicialmente presentada, además de las sugerencias beneficiarias para el diseño de actividades para una mejor comprensión de las derivadas direccionales.

Esteban et al. (2019) siguiendo la línea de análisis y referencia dadas por McGee y Moore-Russo (2015), respecto a la derivada direccional y bajo la misma premisa que el problema de la enseñanza y aprendizaje recae en la carencia de la comprensión geométrica de la noción de pendiente de una recta en el espacio tridimensional; afirman que, "una buena concepción matemática de este tópico, permitirá posteriormente a un descubrimiento y conceptualización gradual de la derivada direccional en los estudiantes" (Esteban et al, 2019, p.3). Es por ello que los investigadores plantean una propuesta basada en una serie de actividades de aprendizaje elaboradas con el GeoGebra, cuyo objetivo permita al estudiante construir el significado de la derivada direccional a partir de los conceptos subyacente al objeto matemático. Debido al componente tecnológico utilizado y para el análisis de datos, los investigadores utilizaron aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel. Cabe resaltar que bajo dicho enfoque teórico se busca que el artefacto (herramienta usada como mediador para lograr dar solución a una tarea, que no necesariamente es un objeto material en su conjunto) permita al sujeto un proceso de interacción para descubrir la manera en que éste potencie las capacidades del sujeto para el desarrollo de la actividad propuesta. Este proceso de interacción, requiere de la persona el desarrollo interno de esquemas mentales (en el sentido de Vergnaud) lo cual finalmente se convertirá en un instrumento que medie la actividad a desarrollar.

Además, bajo este enfoque, se introduce la noción de esquemas de uso (que está orientado al manejo técnico sobre el artefacto) y los esquemas de acción instrumentados (relacionado a las estrategias para la realización de una tarea específica), estos esquemas no son visibles, pero se puede evidenciar a partir de las acciones tomadas por el sujeto al momento de realizar la tarea. El proceso de convertir un artefacto en un instrumento no es algo inmediato, requiere esfuerzo por parte del sujeto; a este proceso Drijvers y Trouche (2008, como se citó en Esteban et al, 2019) lo denominan génesis instrumental (proceso de apropiación, que permite que el artefacto medie la actividad matemática), además, este proceso implica dos acciones; el proceso de instrumentalización (ligado a los esquemas de uso sobre el artefacto), y el proceso de instrumentación (ligado al desarrollo de esquemas de acción instrumentadas).

En este artículo Esteban et al. (2019) diseñaron actividades usando representaciones gráficas dinámicas por medio del GeoGebra, lo que es denominado por los investigadores como objeto dinámico; y por medio de ellos se busca lograr una mejor concepción de la derivada direccional a partir de su representación algebraica, lo cual será usado como el artefacto que permitirá la movilización de los esquemas del sujeto hasta lograr convertirse en el instrumento que permita lograr el desarrollo de la actividad planteada.

Las actividades realizadas por los investigadores, fue propuesta a diez estudiantes del segundo año de la carrera de ingeniería de un grupo de treinta y uno (los cuales aceptaron a participar de forma voluntaria), y se iniciaban en la asignatura de cálculo en varias variables, las actividades que se realizaron fueron de manera gradual, con nociones básicas asociados a la parte geométrica de la derivada direccional, por ejemplo, el cálculo de la pendiente de una recta en el espacio bidimensional, hasta el planteo de determinar la pendiente de una recta sobre un plano no vertical en dirección de los ejes coordenados y en otras direcciones. Cabe resaltar que por medio de esta actividad se pretendía lograr que los estudiantes identificaran la variación que existe en el eje z $(\triangle z)$, en dirección de un vector $v = (\triangle x,\ \triangle y)$; con la finalidad de que los estudiantes conjeturen esto, como la suma de los cambios verticales sobre el plano, en las direcciones de los ejes coordenados x e y, es decir, $\triangle z = \triangle z_x + \triangle z_y$,y para lograr la pendiente de la recta contenida en el plano, asociarlo como el cociente que relaciona $\triangle z$ con la variación horizontal (en el sentido de la dirección de v) es decir; $m_{(\triangle x, \triangle zy)} = \frac{\triangle z}{||v||} = \frac{m_x \triangle x + m_y \triangle y}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}}$, expresión que permite la comprensión de la derivada direccional de forma algebraica como el producto punto del vector gradiente y un vector unitario, lo cual es presentado como un teorema en los libros de texto como $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y)\,.\,u$, pero que en forma general no se hace explicita.

Las conclusiones que obtuvieron los investigadores en el transcurso del desarrollo de las actividades propuestas hacia los estudiantes; es el hecho de lograr observar en forma general, distintos esquemas de uso y de acción instrumentada por parte de los estudiantes que permitió un significado geométrico sólido de la representación algebraica concerniente a la derivada direccional, evidenciándose así, el proceso de instrumentalización e instrumentación del objeto dinámico; es decir, se evidenció el proceso de génesis instrumental logrado por los estudiantes, al ser el objeto dinámico un mediador para la comprensión conceptual de objeto matemático en estudio. Además, Esteban et al. (2019), afirman que la presentación gráfica dinámica, numérico y textual utilizados (dentro del objeto dinámico) en las actividades, permitieron a los estudiantes interactuar y explorar cada uno las características geométricas de los objetos matemáticos de manera activa, encontrando así una retroalimentación instantánea.

Consideramos estas investigaciones relevantes para nuestra tesis, en el sentido que nos permite entender la “carencia” que se tiene al comprender la parte geométrica asociada al usualmente “método” de cálculo de la derivada direccional (es decir, su representación algebraica donde se usa el concepto de derivadas parciales), lo cual según los investigadores citados esto recae en el sentido de asociar el concepto geométrico de pendiente de una recta en 3D y sus cambios en dirección a los ejes coordenados, es decir, a partir de lo mencionado anteriormente, se espera plantear una secuencia didáctica donde se explore dichas conceptos matemáticos que permitan asociar con el concepto geométrico que se tiene de la representación algebraica de la derivada direccional; todo esto además, nos permite pensar desde una perspectiva que debería comprender también el docente de catedra al momento de poner en práctica en relación a temas que concierne a la explicación de la derivada direccional, lo cual influye en la propia formación académica de sus estudiantes, por tal razón, en nuestra investigación se contara con la participación de docentes en formación para la fase experimental.

Investigaciones relacionadas al uso de un software de representación dinámico para representaciones tridimensionales

Del Río (2017), por medio de este artículo abarca fundamentos teóricos que permiten sustentar la utilización de la vista gráfica 3D del GeoGebra como una herramienta para el aprendizaje y enseñanza cuando se abarca objetos matemáticos dentro del Cálculo Diferencial e Integral, el objetivo de la investigación como enfatiza la investigadora es que los estudiantes puedan familiarizarse con las representaciones gráficas de los objetos matemáticos que intervienen en el uso de funciones multivariable por medio de las representaciones dinámicas apreciadas en vista grafica 3D del GeoGebra, donde esto permitiría a los estudiantes animar e reinterpretar el concepto matemático inmerso, lo cual usualmente se considera de manera algebraica, es decir por medio de su representación gráfica dinámica explorar y conjeturar propiedades relacionadas a estos objetos matemáticos que posteriormente sean validadas al realizarlo en un entorno a lápiz y papel. Del Río (2017) enfatiza la importancia del trabajo del estudiante con diversos registros de representación, es decir, considera aspectos de la TRRS de Duval. Por tal razón, se ejemplifica propuestas didácticas asociados a los objetos matemáticos (en este caso, sólidos de revolución, límites de funciones de dos variables, extremos locales para funciones de dos variables), en la cual se busca que a partir del entorno de trabajo del GeoGebra, se pueda promover un trabajo a partir de lo gráfico a hacer acompañado de lo algebraico, cuando esto es manipulado por parte de los estudiantes en una secuencia de actividades, es decir promover la articulación entre dichos registros de representación semiótica, lo cual según la TRRS es esencial para la comprensión del objeto matemático.

Ryokiti (2019), a través de esta investigación presenta una secuencia didáctica para el aprendizaje significativo y el logro de una mejor comprensión conceptual de los objetos matemáticos en un curso de Cálculo de funciones multivariables, basado en la elaboración y uso de objetos de aprendizaje tridimensionales interactivos, que permiten obtener la estereoscopía, bajo la premisa que esto permite a los estudiantes un soporte en la visualización de las características geométricas y topológicas asociada a las representaciones gráficas de los objetos matemáticos que se desea estudiar, por ejemplo, las curvas de nivel, derivada parcial, derivada direccional, etc. En la fase experimental, el investigador contó con la participación de tres grupos de estudiantes de ingeniería del curso de Cálculo multivariable de la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA), los cuales interactuaron con los objetos de aprendizaje siendo estas monitoreadas y guiadas por el docente, para el análisis de datos se realizó por medio de las opiniones de los estudiantes durante el experimento, los cuales fueron grabados y transcritos. El investigador enfatiza el hecho de que, al representar los objetos matemáticos inmersos en un espacio tridimensional, muchas veces se realizan por medio de figuras bidimensionales como una perspectiva para que el estudiante logre una compresión de las características de los objetos matemáticos; lo cual, no se llega a ese objetivo, más aún, esto requiere una mayor capacidad del estudiante en la interpretación de la imagen bidimensional propuesta. Cabe resaltar que para el término “visualización” se hace referencia según Gutiérrez (1996, como se citó en Ryokiti, 2019) a la manera de organizar el pensamiento para la comprensión de conceptos matemáticos, cuando éstos son representados por medio de diversas maneras (dibujos, diagramas, representaciones computacionales, etc.) lo cual implica un mayor desarrollo en la parte cognitiva del estudiante; por otro lado el término de “objeto de aprendizaje”, indica a la propuesta diseñada por parte de Ryokiti (2019), mediados con el uso de recursos de soporte digital en la educación; al proporcionar situaciones que permitan a los estudiantes la exploración y formulación de conjeturas asociadas al objeto matemático que se desea enseñar, en este caso, los objetos de aprendizajes fueron diseñados por medio del GeoGebra, en el cual se usó paralelamente actividades donde se aprecie el objeto matemático para su interacción y visualización de los aspectos geométricos e interpretación.

Las conclusiones que se resalta en Ryokiti (2019); son el hecho de que el implemento de diseñar actividades como objetos de aprendizaje, dentro del curso de cálculo multivariable, permite en cierta forma a los estudiantes, minimizar los problemas de comprensión de las características geométricas de los objetos matemáticos que se estudian, lo cual ayuda a la formulación de conjeturas y comprensión de los conceptos matemáticos analizados, por ejemplo, el enseñar temas como la derivada direccional, curvas de nivel, derivada parcial, etc.

Por medio de estas investigaciones, podemos observar la importancia y aporte de los recursos tecnológicos como apoyo para el aprendizaje de objetos matemáticos asociados a un ambiente tridimensional, en estos casos se resalta el aporte del GeoGebra, al permitir generar representaciones dinámicas tridimensionales; lo cual, en la práctica docente puede influir para generar actividades (o una sesión de aprendizaje) donde se busque explorar conceptos o características geométricas de un objeto matemático, los cuales, no son del todo visible y/o entendible desde una perspectiva bidimensional estática, en nuestro caso y de acuerdo a lo acotado por los investigadores, se busca plantear una secuencia de actividades por medio del GeoGebra para dar un mejor apoyo a la concepción geométrica de la representación algebraica de la derivada direccional.

Investigaciones relacionadas al marco teórico

Ingar y Silva (2019), nos dan a conocer el proceso de articulación de las aprehensiones (según Duval) en un registro gráfico mediado a través de un sistema algebraico computacional, también conocido como CAS (*computer algebra system*, en inglés), para representar objetos matemáticos que involucren funciones representadas en un ambiente tridimensional, en ese caso, relacionado al aprendizaje de la derivada parcial; investigación de tipo cualitativa, donde adicionalmente se consideró aspectos teóricos de la TRRS y como referente metodológico, aspectos de la Ingeniería Didáctica. Por medio de esta investigación se enfatiza, el hecho de que en un curso de cálculo de funciones de dos variables al explicar conceptos que aborda los objetos matemáticos tridimensionales (derivadas parciales, derivadas direccionales, gradiente, plano tangente, curvas de nivel, etc.) o el resolver un problema, implica el uso de teoremas y fórmulas aplicado de manera algebraica; lo cual según las investigadoras, se pone muy poco énfasis en el uso de la representación gráfica para resolver un problema, o en el análisis de resultados; es decir, no se percibe que el estudiante logre desarrollar un proceso de visualización (según Duval) para una mejor comprensión matemática del objeto matemático que se estudia. Según Ingar (2014, como se citó en Ingar y Silva, 2019), la investigación se realizó con estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional del Callao en el segundo año de carrera en el curso de Cálculo III. Para esto, Ingar y Silva (2019) extienden lo planteado inicialmente por Duval en relación al estudio de las aprehensiones (lo cual inicialmente está asociado al registro figural), al presentar el registro gráfico mediado por un CAS; donde se detalla la manera como este "nuevo registro" es definido y como se definen las aprehensiones en este registro, detallando el proceso de cómo los estudiantes logran articular sus aprehensiones desarrolladas al ser sometidos a una situación didáctica; por ejemplo, el lograr un proceso de visualización (articulación de la aprehensión perceptiva y operatoria), logrando así una mejor concepción de los objetos matemáticos que se desea explicar.

Una conclusión que se destaca por medio de este artículo, es el hecho que Ingar y Silva (2019) detallan, que es factible estudiar las aprehensiones en un entorno donde se tiene representaciones gráficas dinámicas generadas a partir de un software de representación, además, de analizar las posibles articulaciones que se den en los sujetos al ser sometidos a una secuencia didáctica que involucre el objeto matemático a explicar.

Peñaloza y Salazar (2018), establecen la manera cómo se configura el registro Gráfico-Dinámico (RGD), generado por medio de las representaciones gráficas dinámicas obtenidas a través del GeoGebra 3D, además, de la manera que se desarrolla las aprehensiones y modificaciones en dicho registro, todo esto desde el aspecto teórico de la TRRS de Duval, donde se consideró como objeto matemático el paraboloide elíptico. En primera instancia los investigadores detallan las condiciones previas que permitan cumplir la característica de ser considerado un registro de representación (según Duval), pero adaptados en un ambiente de representación dinámica por medio del GeoGebra 3D, es decir, el uso de comandos y herramientas propias del software para lograr una representación gráfica, y donde se cumplan la formación, tratamientos y conversión entre registros de representación; en particular se busca detallar la manera como se asocia la representación del paraboloide elíptico en su representación algebraica y su representación gráfica dinámica. De igual manera Peñaloza y Salazar (2018), detallan las condiciones necesarias que debe realizar el sujeto para afirmar su desarrollo de aprehensiones en el RGD (perceptiva, discursiva, secuencial y operatoria). A manera de ejemplificación se presenta en la investigación una actividad en la cual se busca identificar las aprehensiones y modificación gráfica que desarrollaría el sujeto cuando se busca que este grafique una superficie (paraboloide elíptico), esta se logró a partir de cortes con planos paralelos a los planos coordenados, generados por medio del GeoGebra partir de las características planteadas para el RGD.

Dentro de las conclusiones que detallan en la investigación, se resalta que a partir de la Vista Gráfica 3D del GeoGebra, permite a los sujetos realizar tratamientos, modificaciones y el desarrollo de aprehensiones, además del establecer conjeturas y construcciones de significados que permitiría una mejor comprensión cuando son llevados a cabo en un medio de representaciones dinámicas (en ese caso, el GeoGebra).

Estas investigaciones nos permiten observar que también podemos hacer un análisis de las aprehensiones que pueden desarrollar los sujetos (en nuestro caso, los docentes en formación continua) en relación a un objeto matemático, en nuestro caso la derivada direccional, es decir, se piensa en una secuencia didáctica adecuada, a partir de la noción de pendiente de una recta en el espacio tridimensional y pendientes direccionales en un plano (todo esto asociado a la parte geométrica de la representación algebraica de la derivada direccional), diseñado en un software de representación dinámica (en nuestro caso el GeoGebra); lo cual permita observar el desarrollo de las aprehensiones que pueden desarrollar los sujetos a partir de las preguntas formuladas e inclusive lograr una mejor concepción del objeto matemático a partir de su representación geométrica.

Finalmente, cabe resaltar que, nuestra investigación está dirigido como sujetos de análisis, docentes en formación continua, bajo la premisa que, todo docente es guía, mediador y acompañante de los estudiantes en la construcción de sus conocimientos, por lo cual es relevante que los docentes tengan una mejor concepción de lo que se está instruyendo. Con respecto a esto, Chong y Torres-Rodríguez (2017), enfatizan el papel fundamental de todo docente de matemáticas en el nivel superior, donde manifiestan la necesidad de atender la formación y actualización del profesorado, de tal forma que esto proporcione al docente herramientas de tipo teórico-metodológico que le permitan integrarse en el campo de la investigación educativa. Por otro lado, Según Escudero (1999, como se citó en Chong y Torres-Rodríguez, 2017), la ruta de formación docente debe tener dos vertientes; una profundización y/o actualización de los contenidos disciplinares que se enseña y otra componente de naturaleza didáctica.

Es decir, los investigadores citados anteriormente muestran la importancia del estudio de la epistemología de la matemática, en relación a profundizar sobre la forma de cómo ha evolucionado el conocimiento y pensamiento matemático, lo cual constituye una fuerte herramienta para la adecuada transposición didáctica que se requiere en la enseñanza, además que todo docente sea capaz de identificar problemas concretos asociados a lo que se está abordando, lo cual permita abordar dicha problemática de forma crítica y poder construir propuestas de solución desde las teorías educativas para ser concretado en el trabajo de clase.

En conclusión, la formación docente debe incluir aspectos que no solo apliquen a un fortalecimiento del docente en el ámbito teórico de las matemáticas, sino que se busque integrar a este el componente didáctico, lo cual conlleve a una reflexión por parte del educador para la mejora en la enseñanza.

A continuación, presentaremos aspectos relacionados con la justificación vinculadas a nuestra investigación.

1.2 Justificación

Con base a las investigaciones de referencia revisadas podemos observar que, en el ámbito del Cálculo multivariable, algunos objetos matemáticos como, por ejemplo, la derivada direccional, derivada parcial, curvas de nivel, etc. son parte de estudio en la práctica docente en cursos de pregrado, donde muchas veces, el no tener una mejor concepción del contenido matemático que se cursa, tiene como consecuencia el uso y aplicación de los conceptos de una forma algebraica y mecanizada. Al respecto McGee y Moore-Russo (2015), en relación a la derivada direccional, nos muestran que para lograr una mejor concepción de la interpretación geométrica de la derivada direccional, influye el de asociarlo con el concepto de pendiente de una recta en 3D, según los investigadores, esto no es evidente en la práctica, ya que al extender el concepto de derivada en 2D al entorno tridimensional, no se presenta un mismo conjunto de representaciones semióticas asociados al objeto matemático de manera explícita, lo cual es necesario para asociarlo a su comprensión a un entorno tridimensional; por otro lado, el hecho de obviar esto, conlleva al hecho de estudiar la derivada direccional de una manera algebraica. Por tal razón, los investigadores afirman la importancia de que los estudiantes, puedan acceder primero el entender de manera explícita el concepto de pendiente en 3D y sus consecuencias, lo cual permitirá asociar posteriormente sus representaciones semióticas con el concepto de derivada direccional.

De igual manera, Ryokiti (2019) afirma que, si logramos una representación gráfica dinámica de estos objetos matemáticos, inclusive se podría lograr comprender la definición algebraica del objeto matemático a partir de su representación geométrica, es decir, se prima la importancia y el papel que tiene los softwares de representación dinámica como mediadores para mejorar la comprensión geométrica de los objetos matemáticos en un entorno tridimensional. En las investigaciones de referencia tanto de Ryokiti (2019), Ingar y Silva (2019), Peñaloza y Salazar (2018), se pudo observar que las representaciones gráficas de los objetos matemáticos que consideraron los investigadores, fue mediado a través de un software de representación como el GeoGebra o Mathematica. En nuestro caso, usaremos el GeoGebra, como mediador para las representaciones gráficas en una secuencia didáctica planteada para el estudio de las aprehensiones, entorno al concepto geométrico de la derivada direccional; adicionalmente, Ryokiti (2019) afirma que; en un estudio que involucra funciones multivariables, el GeoGebra permite una mejor comprensión a los estudiantes para poder visualizar las características geométricas y propiedades de los objetos matemáticos que se estudia, además de considerar también lo sustentado por Del Río (2017) en relación al afirmar que a partir del entorno de trabajo en GeoGebra, podemos diseñar actividades que relacione lo gráfico acompañado de lo algebraico, es decir promover la articulación de dichas representaciones de un mismo objeto matemático en estudio, lo cual según la TRRS es esencial para una mejor concepción del objeto matemático.

El hecho de considerar el GeoGebra como una herramienta mediadora para el diseño de nuestra secuencia didáctica, recae también al hecho de ser un software libre (descarga gratuita) y fácil instalación en diversos equipos y sistemas operativos como también de contar con una versión de acceso al software de manera online también conocido cono GeoGebra Online, y más aún de contar con una versión portable, lo cual permitiría un mayor acceso para cada individuo, tal como se detalla en su sitio web (https://www.geogebra.org/about).

Por otro lado, con respecto a la derivada direccional como objeto de estudio, este forma parte de los diversos planes de estudio que sirven de guía de trabajo tanto por docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje dentro del curso de cálculo multivariable, que se lleva en carreras de ingeniería y de ciencias. La tabla 1 que se presenta a continuación se diseñó en base a la recopilación de diversos planes de estudio donde se enseña el curso de cálculo multivariable, lo es requisito para futuros cursos de formación profesional llevado a cabo tanto en universidades públicas como privadas.

Tabla 1.

El Cálculo multivariable en carreras de pregrado en Universidades del Perú

UNIVERSIDAD	CARRERA PROFESIONAL	CICLO DE ESTUDIO		
		TERCER CICLO	CUARTO CICLO	QUINTO CICLO
Universidad Nacional de Ingeniería	Física	**Cálculo Diferencial e integral Avanzado**	Física IV	Introducción a la Física moderna
	Ingeniería Naval	**Cálculo Multivariable**	Ecuaciones Diferenciales	Mecánica de Fluidos
Universidad Nacional del Callao	Matemática	**Cálculo III**	Cálculo IV	Introducciones a las Ecuaciones Diferenciales
	Ingeniería Química	**Matemática III**	Métodos numéricos	Balance de materia y energía
Universidad de Lima	Ingeniería Industrial	**Cálculo III**	Investigación de operaciones	Planeamiento y control de operaciones
Universidad Privada de Ciencias	Ingeniería Mecatrónica	**Matemática Analítica III**	Análisis de Circuitos Eléctricos I	Dispositivos y Circuitos Analógicos

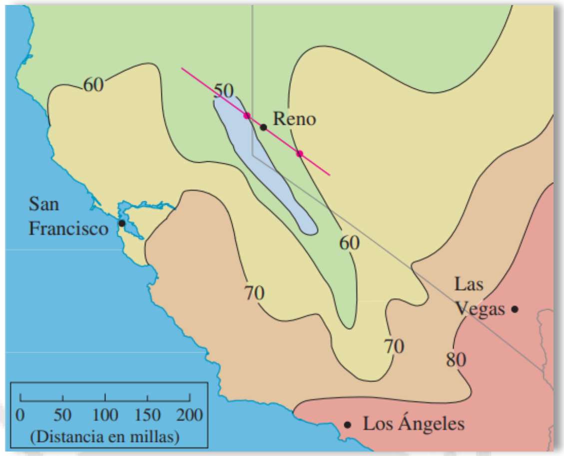
Nota. Datos tomados de planes de estudio de carreras en pregrado.

De la tabla 1 podemos observar que, en las carreras de pregrado, el curso de cálculo multivariable, usualmente se lleva a cabo en el segundo año de formación académica, donde uno de los temas a tratar incluye la derivada direccional.

Una de las razones para poder resaltar el porqué del cálculo multivariable como primordial en el proceso de enseñanza y aprendizaje, podría referirse al hecho que esto, es usualmente aplicado al espacio tridimensional, es decir, nuestro entorno físico; en la cual situaciones reales son modeladas en términos matemáticos, por lo cual, se busca que todo docente logre tener una mejor reflexión analítica y profesional de los objetos matemáticos enseñados para posteriormente ser transmitido como un conocimiento sólido a sus estudiantes.

Ahora con respecto a la derivada direccional, podemos observar que esta llega ser la generalización de las derivadas parciales (tema tratado también en el cálculo multivariable), es decir nos permite entenderlo como una razón de cambio en otra dirección diferente al de los ejes coordenados X e Y (lo que usualmente es expresado como un vector dirección), ahora, en un ambiente tridimensional los diversos fenómenos físicos pueden ser modelados matemáticamente por funciones, donde posteriormente pueden ser estudiados desde una perspectiva matemática, por ejemplo, en la figura 1, Stewart (2012) introduce el concepto de derivada direccional a partir de un mapa de contorno de una función temperatura $T(x, y)$ para ciertas ciudades, donde las curvas de nivel presentadas indican a sus isotermas $T(x, y)$, y a partir de esto estimar la razón de cambio de temperatura cuando se viaja en una dirección diferente al de los ejes coordenados.

Figura 1. *Ejemplo del cálculo de la derivada direccional aplicado a una situación física*



Nota. Tomado de Cálculo de varias variables trascendentes tempranas (p.933), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

Por otro lado, en el campo de la Matemática pura y aplicada, el concepto de derivada direccional es un preámbulo que posteriormente es estudiado y generalizado de manera abstracta como la llamada Derivada de Gateaux, en un curso de cálculo variacional, donde está asociado al cálculo de buscar máximos y mínimos sobre algún espacio funcional, dicho concepto forma parte de la llamada física teórica (Galiano, 2002, p. 10).

Por medio de lo mencionado anteriormente, podemos justificar la relevancia de la derivada direccional como objeto matemático en la formación académica de futuros profesionales, lo cual nos permite analizar el papel principal que llega a tener un docente en la formación de sus estudiantes, es decir, si un docente no tiene una mejor concepción del objeto matemático que se llega a enseñar esto influirá en la formación académica y profesional de sus estudiantes, conllevando así el replicar la manera tradicional o mecanizada de la enseñanza del objeto matemático, tal como Chong y Torres-Rodríguez (2017) detallan en relación al papel de la práctica docente, por tal razón, por medio de esta investigación se espera aportar a los docentes en formación (sujetos de experimentación) el lograr tener una mejor concepción geométrica de la derivada direccional en base a lo redactado anteriormente.

A continuación, presentaremos detalles del marco teórico en relación a nuestra investigación.

1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Según Duval (2006; 2011; 2012; 2016), los procesos de adquisición de conocimientos matemáticos son tan complejos que es necesario tener diversos enfoques para su análisis, como, por ejemplo, su análisis desde el punto epistemológico o educativo. Pero en ambos casos se requiere del uso de la representación para analizar el tipo de fenómeno que ocurre en un proceso de conocimiento o que lo constituyen. Es así, donde las representaciones por medio de signos (representaciones semióticas) se dan como herramientas para producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental particular.

Duval (2011) afirma que "los objetos matemáticos son solo accesibles por medio de sus representaciones, los cuales permiten a los estudiantes una mejor concepción del objeto" (p. 6).

Además, el autor enfatiza que los objetos matemáticos no deben ser confundidos con la representación que se hace de ellos, ya que esto puede producir a lo largo del tiempo una pérdida de comprensión del objeto matemático y que los conocimientos adquiridos se vuelven inutilizables a lo largo del aprendizaje, ya que se mantiene como representaciones "inertes" que no pueden ser modificadas. Por tal razón, es absolutamente necesario que un objeto matemático pueda ser representado por medio de diversas representaciones semióticas, ya que, al no ser accesible por medio de la percepción o la experiencia intuitiva, es necesario representarlos. El autor define dos tipos de representaciones:

- *Las Representaciones Mentales:* Son aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un sujeto puede poseer sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que le está asociado.
- *Las Representaciones Semióticas:* Son producciones constituidas por el uso de signos pertenecientes a un sistema de representación, por ejemplo, un enunciado en lengua natural, una formula algebraica, un gráfico, son representaciones semióticas que se detalla en sistemas semióticos diferentes.

En otras palabras, las representaciones semióticas llegan a ser la forma de cómo exteriorizamos las representaciones mentales que tiene el sujeto para fines de comunicación, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros. Cabe resaltar que, según Duval, las representaciones no son solamente para fines de comunicación, sino ello juega un papel esencial para la actividad cognitiva del pensamiento.

El autor afirma que, el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación. Donde, se llama "*Semiosis*" a la aprehensión o la producción de una representación semiótica y "*noesis*", a la aprehensión conceptual de un objeto, es preciso afirmar que la Semiosis es inseparable de la noesis, en el sentido que para que ocurra la aprehensión de un objeto matemático es necesario que la *noesis* (conceptualización) ocurra por medio de la *Semiosis* (representaciones).

Por otro lado, para que un sistema semiótico sea considerado un *registro de representación* debe permitir las 3 actividades cognitivas ligadas a la Semiosis, las cuales son:

La formación: Donde se hace referencia a la representación identificable del objeto matemático en un registró dado, por ejemplo; el dibujo de una figura geométrica, al expresar por medio de una formula un objeto matemático, etc. Para tal hecho, la formación implica una selección de reglas y de datos relacionado al objeto a representar, las cuales giran en torno al registro de representación que se desea usar, de esta manera, la formación de una representación podría ser comparada a la manera de describir el objeto matemático.

El tratamiento: Hace referencia al hecho de transformar la representación semiótica dada inicialmente en otra, pero, dentro del registro de donde fue formada (bajo las reglas propias de cada registro) es decir es una transformación interna de la representación dentro de un registro, por ejemplo, en el lenguaje natural el parafraseo de un texto es una forma de tratamiento, el cálculo también es una forma de tratamiento propio de las expresiones simbólicas dentro del cálculo numérico, algebraico, proposicional, etc.

La conversión: Es la transformación externa de una representación semiótica de un objeto en otro registro de representación, conservando la totalidad o una parte de la información contenida en la representación inicial. Por ejemplo, el traducir un texto dado en portugués hacia el español, (representaciones lingüísticas dadas en diferentes lenguas), el usar un lenguaje icónico (señas) para comunicar palabras a personas sordomudas se emplea una conversión.

Cabe resaltar que la conversión de una representación es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento que se realiza dentro del registro de representación dado, donde la parte operatoria está ligada a su representación, la cual no es la misma al momento de convertirlo en otro registro de representación. Duval hace referencia cuatro tipos de registros de representación semiótica: el lenguaje natural, algebraico, gráfico y figural. Ahora, en relación a esta tesis se empleará el uso de registros de lenguaje natural, algebraico y gráfico (esto es en relación a su representación del objeto matemático en el plano cartesiano tridimensional).

Al considerar la derivada direccional como objeto matemático para ejemplificar dichas definiciones, su representación habitual que es presentada de manera inicial en textos académicos, es una de tipo algebraica, donde es definido de la manera siguiente como se aprecia en la figura 2.

Figura 2. *Representación algebraica de la derivada direccional.*

$\boxed{2}$ **Definición** La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.934), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

En la figura 2 se observa que la derivada direccional de una función $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) de su dominio y en una dirección u, es definida por medio de un límite. Cabe resaltar que, a partir de esta representación, se usa tratamientos en su representación algebraica, para poder expresar la derivada direccional de una manera alterna, como se detalla en la figura 3.

Figura 3. *Tratamientos en la representación algebraica de la derivada direccional*

3 Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

DEMOSTRACIÓN Si definimos una función g de una variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

entonces según la definición de la derivada

$$\boxed{4} \qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

Si ahora hacemos $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$\boxed{5} \qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.935), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

En la figura 3, a partir de la representación algebraica de la derivada direccional como un límite de una función de dos variables, se realiza tratamientos algebraicos en relación a las reglas propias de límites, al definir previamente una función real $g(h)$ entorno al termino "h", lo cual posteriormente servirá para asociarlo con $f(x,y)$ como, $g(h) = f(x,y)$, posteriormente a ello, se procede a realizar tratamientos relacionado a las reglas propias de la regla de la cadena para la función $f(x,y)$ donde, las variables x e y dependerán del valor de "h", obteniendo así una representación alterna de la derivada direccional de $f(x,y)$ en (x_0, y_0) en dirección de un vector unitario u, como se muestra en la figura 4.

Figura 4. *Representación alterna de la derivada direccional*

3 Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.936), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

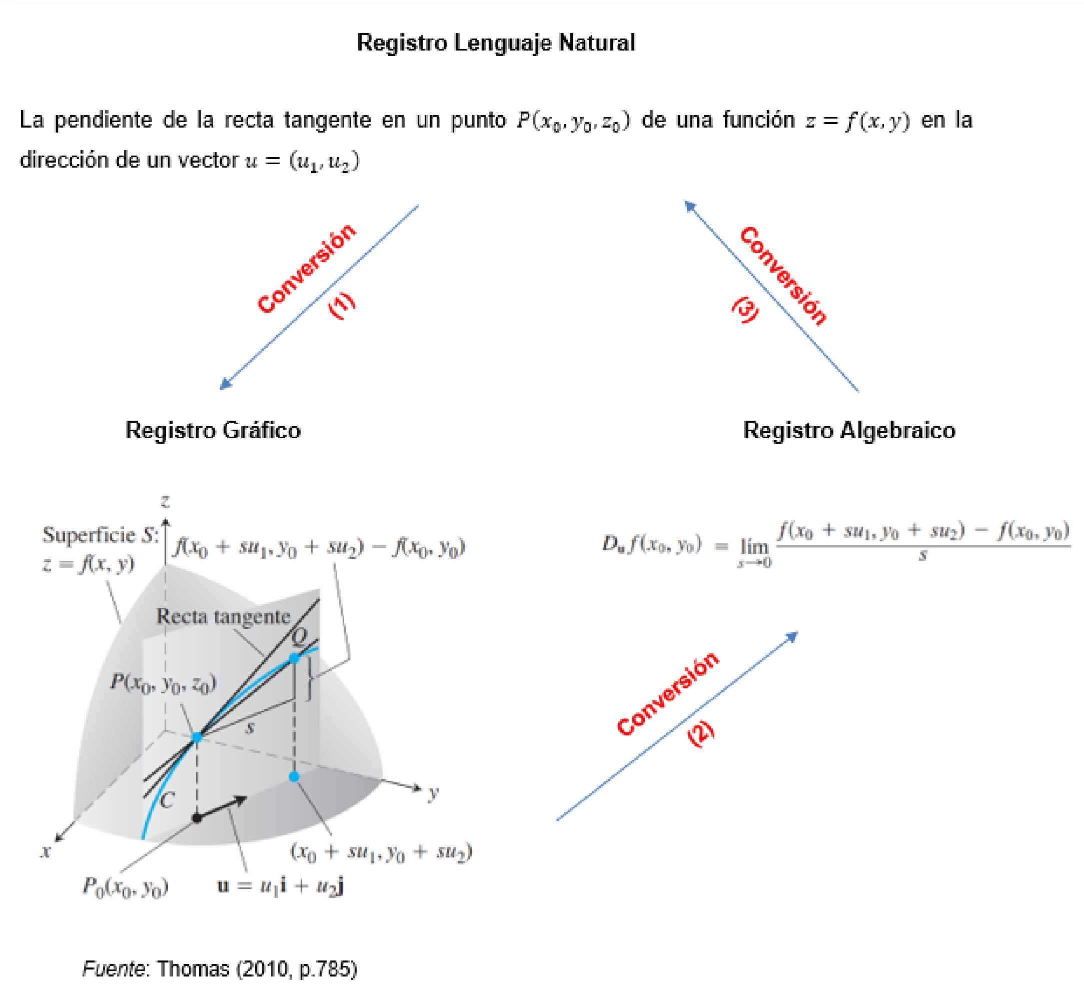
En la figura 4, se aprecia que el cálculo de la derivada direccional es definido como la suma del producto de las derivadas parciales con su respectiva componente del vector unitario, lo cual posteriormente a ello, al definirse el concepto de gradiente, se expresa dicha representación algebraica de una manera más corta.

Por otro lado, Duval (2006) afirma que las representaciones semióticas en relación al objeto matemático, deben implicar dos procesos cognitivos que no pueden considerase separadamente la una de la otra, las cuales son:

- *Propiedad de transformación*, ya que el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas.
- *El empleo de diversos sistemas de representación semiótica (registro de representación)*, lo cual permita al sujeto su debida elección de acuerdo al propósito de la actividad planteada, es decir, la actividad matemática requiere de una “coordinación interna”. “Sin esta coordinación dos representaciones diferentes significan dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos” (Duval, 2006, p. 145).

A continuación, en la Figura 5 se muestra la transformación entre registros de representación (conversión) relacionado a la derivada direccional en sus diversas representaciones semióticas vistas en libros de matemática referenciales en la práctica docente.

Figura 5. *Conversión entre Registros de representación semiótica de la derivada direccional*



Nota. Adaptado de Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación (p.146), por Duval, 2006, *La Gaceta de la RSME*, 9(1).

Cabe resaltar que en la representación gráfica mostrada en la figura 5, se busca que se entienda la interpretación geométrica de la derivada direccional como una razón de cambio de una recta tangente a la función $z = f(x, y)$ en un punto de su dominio y en dirección al vector $u = (u_1, u_2)$. Por otro lado, se aprecia que para llegar a la representación algebraica de la derivada direccional es necesario el transitar por su representación gráfica y el asociarlo con los objetos matemáticos vinculados a esta. Por otro lado, como se describió en la figura 3, dentro del registro algebraico se puede realizar tratamientos que permitan describir la derivada direccional a una forma más técnica, como un proceso algorítmico (usualmente comprendido y usados por los estudiantes) como se mostró en la figura 4, pero que no es del todo evidente su interpretación geométrica, o la forma como se asocia a las representaciones presentadas inicialmente.

Con respecto a la comprensión matemática que se lograría de un objeto matemático, Duval (2006) afirma que:

> La comprensión matemática requiere de una *coordinación interna* entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar. […] En otras palabras, lo que primero importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación, sino, lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos. (pp. 158-159)

Por otro lado, y en relación al uso de softwares de computador para generar representaciones gráficas de los objetos matemáticos, Duval (2006) indica, que estos softwares proporcionan herramientas que permite mostrar “instantáneamente” tantas representaciones diferentes tal como sea necesaria y además de dotarlas de una percepción dinámica a diferencia de una representación estática dada en lápiz y papel.

En relación a esto, Ingar (2014), detalla cómo a través del software *Mathematica* es posible realizar las tres actividades cognitivas ligadas a un registro de representación (formación, tratamiento, conversión) para la representación gráfica de una función de dos variables en el plano tridimensional, a partir del contacto entre el sujeto y los comandos propios del software, lo cual permite ser exhibido en la pantalla del computador; en nuestro caso, hacemos referencia a lo analizado por la autora ya que también usaremos un software computacional para la representación gráfica de los objetos matemáticos relacionados a la derivada direccional, en este caso, usaremos como mediador el GeoGebra.

Por otro lado Duval, en sus diversos artículos presentados trata sobre el aprendizaje de la geometría, donde desarrolla el concepto de aprehensiones de una figura geométrica, donde una aprehensión es la acción de aprehender, es decir, asimilar o comprender una idea o un conocimiento por completo por medio de las representaciones que se muestran, con respecto a esto Duval afirma que “ajudam a compreender a aprendizagem da geometria e também explicar certas dificuldades observadas na sua aprendizagem” [ayudan a comprender el aprendizaje de la geometría y también explicar ciertas dificultades observadas en su aprendizaje] (Moretti, 2013, p.1). Es allí donde se desarrolla las aprehensiones de tipo: perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria, todas estas en relación al registro de representación de las figuras geométricas.

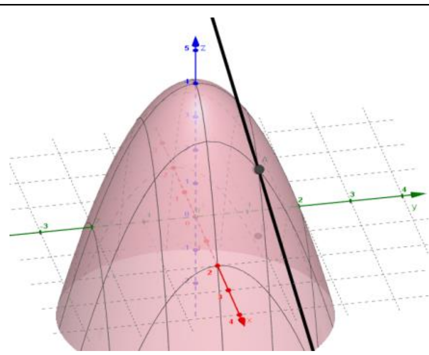
Posteriormente a ello, se tiene investigaciones bajo el marco teórico propuesto por Duval en relación al desarrollo de las aprehensiones en diversos registros, por ejemplo, en el caso del registro figural y gráfico mediado por un software de representación o también llamado, sistema Algebraico Computacional (CAS), donde tenemos a Ingar (2014), Salazar y Almouloud (2015), Peñaloza y Salazar (2018), expresado por los investigadores como el Registro gráfico Dinámico (RGD) o Registro gráfico CAS, donde, los investigadores coinciden en el hecho que previamente el sujeto, necesita comprender los comandos básicos del software que se usara, además, del conocer las nociones matemáticas envueltas para una adecuada representación.

Ahora, en relación a la parte teórica de nuestra investigación, deseamos analizar la manera de cómo es entendido la interpretación geométrica de la derivada direccional a partir de su representación algebraica vista en la figura 4, siendo asociado con la pendiente de la recta tangente que pasa por la función $f(x,y)$ en un punto de su dominio y en una dirección u específica; por tal razón adicionalmente presentamos la definición de aprehensiones propuestas por Duval, lo cual nos servirá para ser analizado en el desarrollo de las actividades que serán presentadas posteriormente en la fase experimental; pero dicha concepción de aprehensiones serán adaptados al registro gráfico dinámico; por tal razón, para esto se tiene en referencia las investigaciones de Ingar y Silva (2019) y Peñaloza y Salazar (2018); donde se detalla la manera que se desarrolla las aprehensiones cuando se tiene un software de representación como mediador para dicha representación (para nosotros será el GeoGebra).

Aprehensión perceptiva: Es aquella primera acción del sujeto de identificar un objeto matemático a partir de su representación gráfica (en este caso, a partir de su representación gráfica dinámica).

Tabla 2.

Aprehensión perceptiva de un registro gráfico dinámico

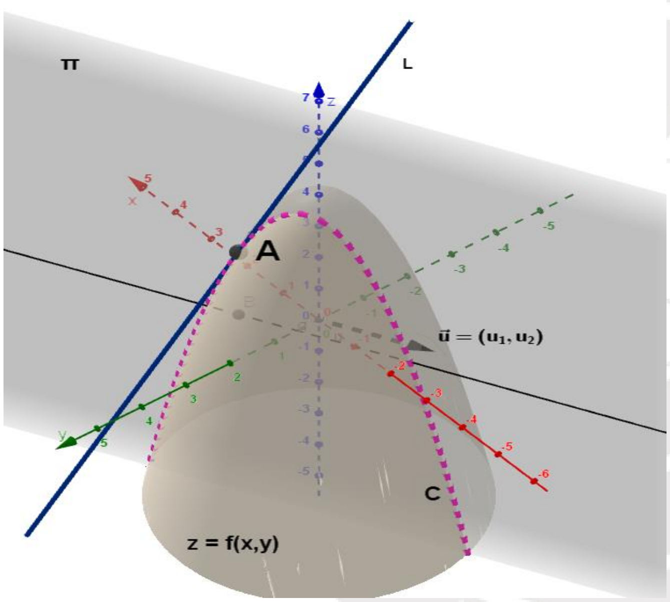
Representación gráfica del objeto	Aprehensión Perceptiva
	En la representación dada, se observa una recta en R^3 ta cual es tangente a la función $z = f(x,y)$ en el punto A.

En la figura mostrada en la tabla 2; si el sujeto a primera impresión reconoce la representación de una recta tangente en un punto de la superficie dada, se dice que desarrollo una aprehensión perceptiva, sin embargo, no podría reconocer bajo qué dirección la recta esta inclinada ni mucho menos un segundo punto de paso en el plano tridimensional para el cálculo de su pendiente.

Aprehensión discursiva: Es la capacidad del sujeto de reconocer propiedades internas en relación al objeto representado las cuales no fueron detalladas de forma explícita.

Tabla 3.

Aprehensión discursiva de una representación gráfica

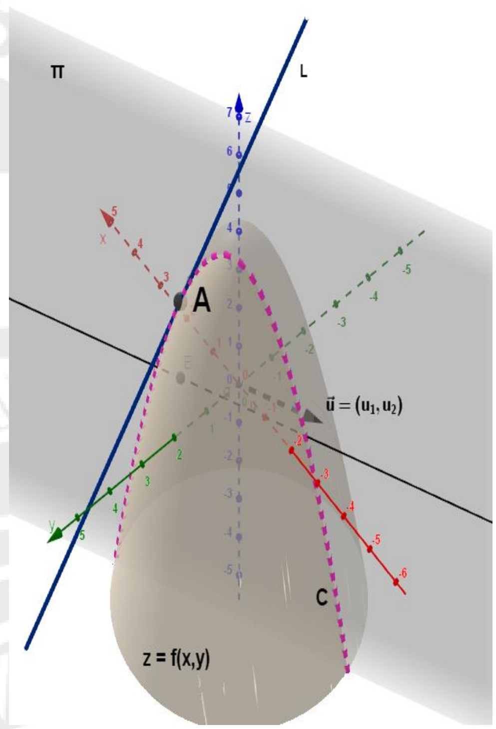
Representación gráfica del objeto	Aprehensión Discursiva
	El punto A es aquel por donde pasa la recta tangente que intercepta a la función $z = f(x, y)$ $u = (u_1, u_2)$ es un vector dirección en relación a la recta tangente L π es el plano que intercepta de forma perpendicular a $f(x, y)$ que pasa por A en dirección del vector $u = (u_1, u_2)$ C es la curva de intersección de la función $z = f(x, y)$ y el plano π L es la recta tangente a la curva C

En la tabla 3, se muestra la aprehensión discursiva que el sujeto puede realizar al reconocer los conceptos u objetos matemáticos inmerso en relación a la representación gráfica que se presenta.

Aprehensión secuencial: Se trata de la descripción o construcción de una figura, lo cual implica, no solo conocer las propiedades matemáticas del objeto, sino también de las técnicas que se usa para poder graficarlo (esto es en el caso del registro de las figuras geométricas). Ahora, para lograr una descripción gráfica de la derivada direccional por medio del GeoGebra, esta sería la descripción de comandos que es necesario ejecutar para lograr tal representación gráfica dinámica.

Tabla 4.

Aprehensión secuencial de la representación gráfica de la derivada direccional

Aprehensión Secuencial	Representación gráfica del objeto
Paso 1: Activar la vista gráfica 3D **Paso 2:** Ingresar en la barra de entrada la función a representar por ejemplo $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ **Paso 3:** Ingresar en la barra de entrada el punto del dominio de la función que vamos a utilizar y el punto en su superficie Entrada: $A = (1,1)$ Entrada: $A' = (1,1, f(1,1))$ **Paso 4:** Ingresar en la barra de entrada el vector dirección Entrada: $u =$ Vector ((-2,-1)) **Paso 5:** Generar la recta que pase por u y el punto A. Entrada: $g =$ Recta (A, u) **Paso 6:** Generar el plano que pase por A' en dirección a g Entrada: $\pi =$ Plano (A', g) **Paso 7:** Generar la curva de intersección entre el plano π y la función $f(x, y)$ Entrada: C=IntersecaRecorridos $(\pi, f(x, y))$ **Paso 8:** Generar la recta tangente a la curva C en A Obs: Para representar esto, se detallará en el capítulo 2.1	

En la tabla 4 se aprecia la construcción de la representación gráfica (por medio del GeoGebra) de la recta tangente en dirección de un vector dado, necesario para la construcción del concepto de derivada direccional. Cabe acotar que para esto se tiene en cuenta lo afirmado por Ingar y Silva: “no sólo precisamos conocer las herramientas técnicas utilizadas, es decir, el menú de comandos del software y su sintaxis, sino también requerimos los conocimientos matemáticos del usuario para estar en continua dialéctica con las representaciones semióticas propias del software” (2019, p. 210).

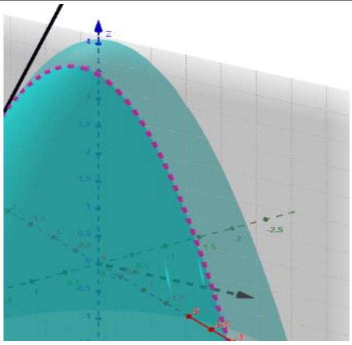
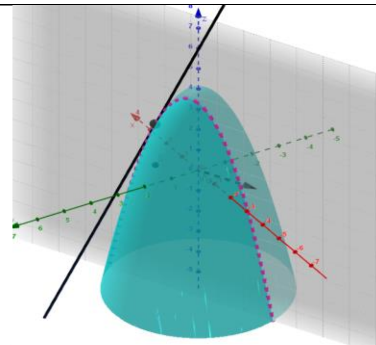
Aprehensión operatoria: Según Duval, hace referencia a las modificaciones que se puede hacer a una figura inicial en otras posibles (trasformación a figuras equivalentes y/o modificar su figura inicial), con la finalidad de una exploración heurística para dar solución a un determinado problema o una demostración. Además, Duval, distingue tres tipos de modificaciones, las cuales son: *modificaciones ópticas, modificaciones posicionales y modificaciones mereológicas* (todo esto en relación al registro figural). Ahora en relación a la aprehensión operatoria en la representación gráfica dinámica dado por medio de un software de representación, por un lado, Ingar (2014) afirma que, la exploración heurística si es posible con el apoyo el software, ya que nos permite tener representaciones dinámicas a diferencia de una representación estática hecho con lápiz y papel. De igual manera, Peñaloza y Salazar (2018) argumentan que la necesidad del sujeto para realizar modificaciones y/o transformaciones de su representación gráfica dadas en un software de representación para obtener información con respecto a elementos o características asociado a dicho objeto matemático, es una evidencia del desarrollo de su aprehensión operatoria.

Es así y en base a las investigaciones en referencia, presentaremos los tipos de modificaciones que se tendrá en cuenta en la representación gráfica mediada por el GeoGebra.

- *Modificación óptica:* es la variación de tamaño de la gráfica, manteniendo la forma de la representación, por ejemplo, en el GeoGebra, esto ocurre cuando en la *Vista Gráfica 3D* hacemos girar la rueda del mouse o también, por medio de las herramientas *Aproximar / Alejar* ; lo cual nos genera una ampliación o reducción de la gráfica, como se aprecia en la tabla 5.

Tabla 5.

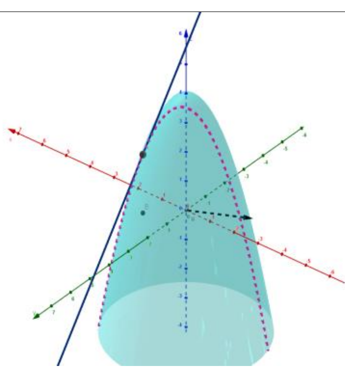
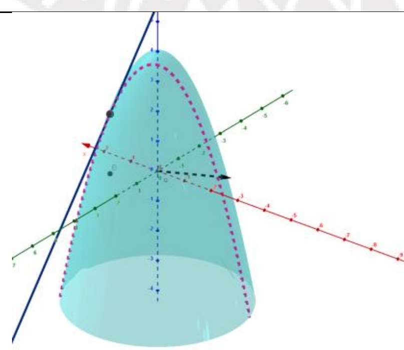
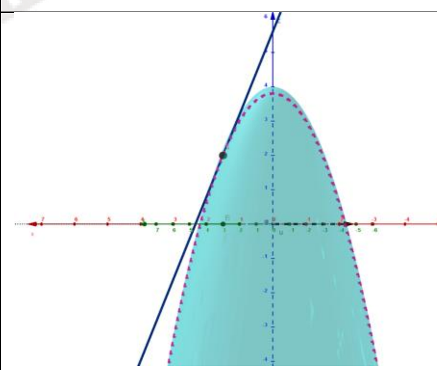
Modificación óptica

Aprehensión operatoria: Modificación óptica	
	

- *Modificación posicional:* es la variación de la posición inicial de la representación gráfica por medio de rotaciones o traslaciones sobre uno de los ejes coordenados, pero manteniendo el tamaño y la forma, lo cual permite una mejor visualización del objeto matemático que se está representado gráficamente, por ejemplo, en relación al GeoGebra, esto ocurre cuando, en la *Vista Gráfica 3D* mantenemos apretado el clic izquierdo del mouse y lo movemos manualmente o también, por medio de la herramienta *Rota la Vista Gráfica 3D* , *Desplaza Vista Gráfica*  logrando así, lo apreciado en la tabla 6.

Tabla 6.

Modificación posicional

Aprehensión operatoria: Modificación posicional		
Posición inicial	**Traslación**	**Rotación**
		

En relación al marco teórico presentado anteriormente, uno de los objetivos de tesis es identificar las posibles aprehensiones que surgirán en los sujetos de experimentación (docentes en formación continua) cuando son sometidos a una secuencia didáctica asociado al objeto matemático de estudio (en este caso, entender la descripción geométrica de la derivada direccional a partir de su representación algebraica), además de describir la manera de como estas aprehensiones que surgen, llegan a coordinarse para dar solución al objetivo de cada actividad; cabe resaltar que al referirnos con el termino de *coordinación de aprehensiones*, se hace referencia a la manera de como las aprehensiones surgen una tras otra en el desarrollo de la secuencia didáctica, todo esto siendo mediado por el GeoGebra.

Al haber definido aspectos a considerar en la investigación relacionado al marco teórico y su relación con el objeto matemático, procedemos a enunciar la pregunta y objetivos de tesis.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta de investigación:

¿Cómo una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra favorecería a los docentes en formación continua desarrollar su aprehensión perceptiva, discursiva y operatoria en relación a la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica?

Objetivo general:

Estudiar cómo una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra favorecería a los docentes en formación continua desarrollar su aprehensión perceptiva, discursiva y operatoria en relación a la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica.

Objetivos específicos:

- Identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los docentes en formación continua al resolver una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra para la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica.
- Describir como los docentes en formación continua coordinan las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que fueron desarrolladas al resolver una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra para la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica.

En la siguiente sección se describe los aspectos metodológicos necesarios, los cuales, guiaran nuestra investigación para responder nuestra pregunta de investigación.

1.5 Metodología de la Investigación

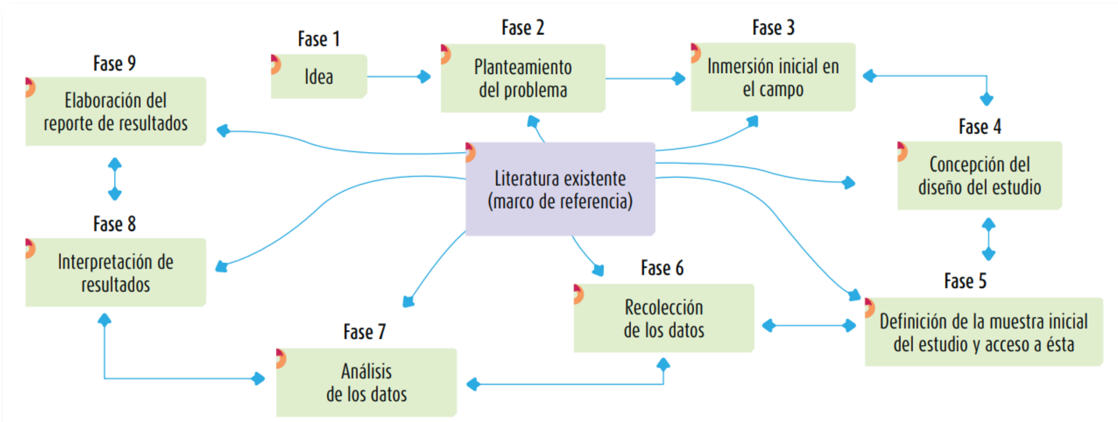
Existen diferentes tipos de investigaciones en educación matemática, donde cada uno de ellos está regido bajo sus propias etapas de descripción del tipo de investigación que se realiza, por ejemplo, según Sierra (2011), se pueden clasificar en: investigación descriptiva, investigación experimental, investigación cualitativa (o interpretativa), investigación histórica e investigación-acción. Además, como afirma el autor, actualmente se halla investigaciones en la cual se mezclan tipos de investigaciones experimentales, con corte cualitativo e histórico, ofreciendo así “una gran riqueza a la investigación, tanto en metodología como en resultados” (Sierra, 2011, p. 185).

Por otro lado, Sierra (2011) manifiesta que a diferencia de una investigación con un riguroso procedimiento experimental (investigación cuantitativa), en una investigación de tipo cualitativa no se exige un recojo de datos para contrastar con la hipótesis planteada, pero si se halla un análisis en relación a la pertinencia y significación de los datos recogidos, además, de la posibilidad de replicar o generalizar la investigación, ya que se busca capturar la complejidad del hecho educativo que se investiga; Knapp (1986, como se citó en Martínez, 2006) indica que, el investigador cualitativo debe tener la actitud de un enfoque inicial exploratorio y de apertura mental ante el problema a investigar, como también de dar a conocer los resultados escritos en los que se interpretan los eventos de acuerdo a los criterios que se consideraron, de tal forma que un lector pueda tener una vivencia profunda de lo que es esa realidad. De igual manera, Según Hernández et al. (2014), “La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa, centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)” (p. 9). En relación a las hipótesis o preguntas de investigación en torno a los datos recogidos, Hernández et al. (2014) afirman que “Los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos” (p. 7). Es decir, en el proceso de interpretación de los datos, se pueden afinar las preguntas de investigación o generar unas nuevas preguntas, resultando así, que el proceso cualitativo no sea un proceso estructurado lineal, sino de tipo circular, donde el proceso mismo, permite regresar a etapas previas, teniendo así un proceso de manera dinámica, logrando que la secuencia de pasos no siempre sea la misma, sino, esta dependa del estudio que se analiza.

De lo manifestado anteriormente podemos argumentar y justificar que nuestra investigación tiene las características propias de una investigación con un enfoque cualitativo ya que nuestro foco de estudio es percibir y describir las acciones que los sujetos van realizando en la fase experimental en relación al objetivo de tesis.

En la figura 6 se muestra el proceso metodológico de tipo cualitativo propuesta por Hernández et al. (2014), lo cual nos servirá de guía para considerar en nuestra investigación.

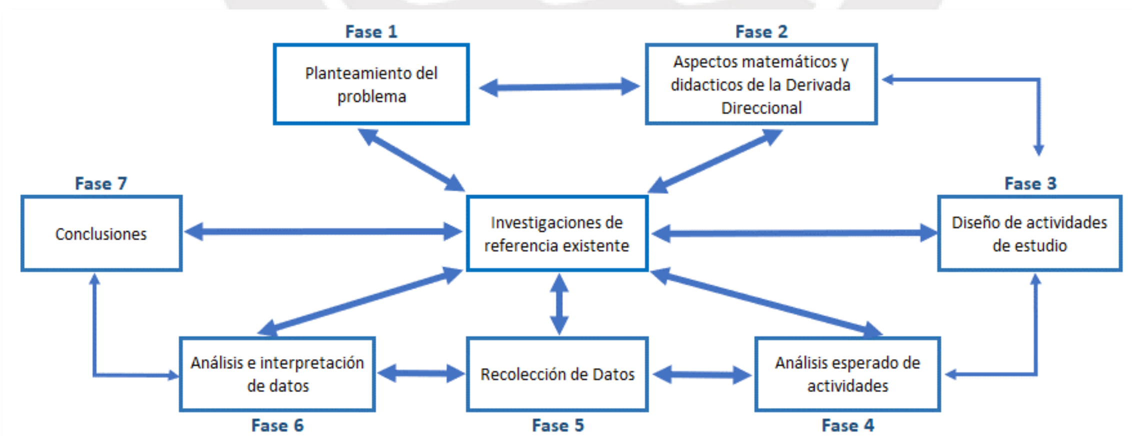
Figura 6. *Proceso de investigación cualitativa*



Nota. Tomado de Metodología de la Investigación (6ta ed.) (p.7), por R. Hernández et al., 2014, Ed. Mc Graw-Hill Interamericana.

En base a lo propuesto por Hernández et al. (2014), el procedimiento metodológico que seguiremos en nuestra investigación será de la forma que se muestra en la figura 7.

Figura 7. *Proceso de investigación cualitativa para nuestra investigación*



Nota. Adaptado de Metodología de la Investigación (6ta ed.) (p.7), por R. Hernández et al., 2014, Ed. Mc Graw-Hill Interamericana.

En la figura 7, se tiene el proceso metodológico cualitativo que se llevará a cabo en la investigación, donde cada fase tiene su propia característica en la estructura de tesis, todo esto a partir de lo propuesto por Hernández et al. (2014), donde se detalla de la siguiente manera:

Planteamiento del problema: En esta parte se presenta las investigaciones de referencia que están relacionados con los aspectos teóricos que se pretenda seguir e investigaciones en torno al objeto matemático, lo cuales permitan la justificación del porqué de la misma; también se diseña los objetivos (de forma exploratoria) a los que se desea alcanzar, como también, formular la pregunta de investigación describiendo el contexto que englobe la investigación, el marco teórico y la metodología que guiará a la investigación.

Aspectos matemáticos y didácticos de la Derivada Direccional: Se presenta aspectos matemáticos de la Derivada direccional a través de libros usualmente usados por los estudiantes y docentes en pregrado, en los cuales se hace una exploración entorno al planteamiento del problema, además de conocer la forma de cómo se percibe e interpreta el significado del objeto matemático a analizar, los cuales permitirán tener una idea del diseño que se desea plantear para las actividades a ejecutar.

Diseño de actividades de estudio: Se plantea una secuencia de actividades entorno al planteamiento del problema, por medio de situaciones que los estudiantes puedan experimentar respecto a un fenómeno o proceso, en la cual se busca explorar, analizar, entender y describir la experiencia común que puedan lograr los participantes.

Análisis esperado de actividades: Se describe las posibles acciones que realizan los sujetos en la fase experimental tras la ejecución de ella, así como la relación que existe en torno a las acciones realizadas desde nuestro marco teórico y objetivos de tesis, lo cual servirá para contrastar con lo obtenido y observado posteriormente.

Recolección de datos: Está parte está dirigido para proveer un mayor entendimiento de los significados y experiencias de las personas al ser sometidos a actividades ligadas a la investigación (fase experimental), a lo cual, el investigador a partir de diversas técnicas, comienza a aprender por observación y la descripción de los participantes, de tal forma concibe registrar los datos necesarios por medio de narraciones, videos, audios, que posteriormente servirán para el contraste con los objetivos de la investigación. Cabe resaltar que en una investigación de tipo cualitativa la recolección y análisis de datos se dan de manera paralela.

Análisis e interpretación de datos: En esta etapa posteriormente de la recolección de datos no estructurados, el investigador le proporciona una estructura, a partir del planteamiento del problema, es decir otorgar de sentido a lo recolectado, logra una interpretación y explicarlo, asociando con el conocimiento disponible y lo que se esperaba llegar por parte del investigador. Cabe resaltar que la interpretación de datos puede diferir de lo que podrían argumentar otros investigadores, lo cual no implica que una interpretación sea mejor que otra, sino que cada quien posee su propia perspectiva.

Conclusiones: Es una exposición narrativa con un estilo personal del investigador donde se presenta los resultados entorno al contexto que se presenta la investigación, en relación a contrastar una respuesta a la pregunta y objetivos de tesis, y de su vinculación a resultados de estudios anteriores; además de las reflexiones del investigador en relación a los datos que se pudieron recabar y del estudio realizado, como también las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

En el siguiente capítulo, abordaremos aspectos matemáticos y didácticos entorno a nuestro objeto matemático de estudio.

Capítulo II: Aspectos matemáticos y didácticos de la derivada direccional

En este capítulo se abordará aspectos matemáticos y didácticos en relación a la enseñanza percibida de la derivada direccional, todo esto visto a través de libros de aprendizaje usualmente utilizado por estudiantes y docentes, por otro lado, ya que se tendrá como medio de representación el GeoGebra, se presenta también aspectos básicos del software (como herramientas y comandos) que permita observar las representaciones dinámicas generadas a partir de este al construir el objeto matemático que se desee enseñar, en nuestro caso, la descripción geométrica de la derivada direccional.

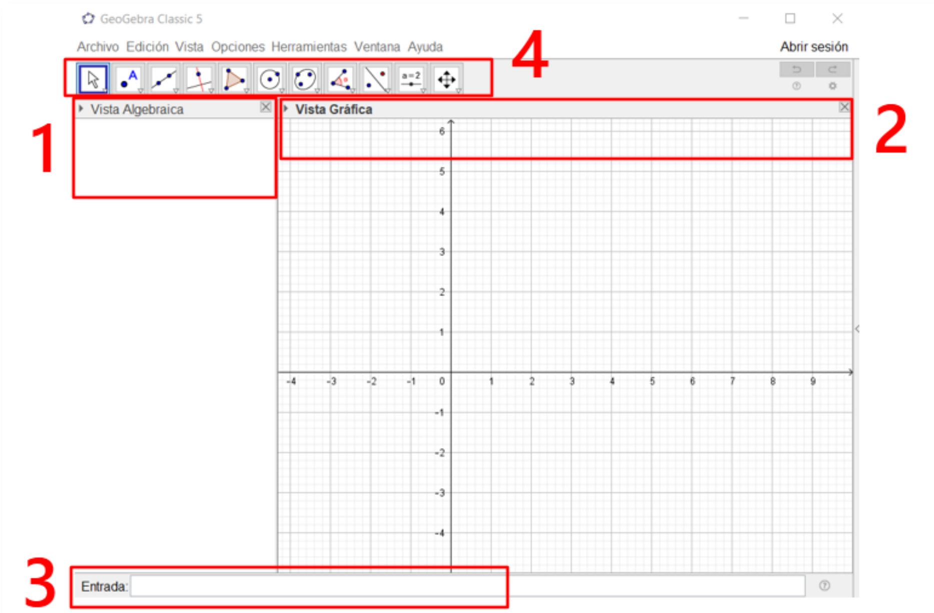
2.1 Representación gráfica de la derivada direccional por medio del GeoGebra

En esta sección se presenta una secuencia de pasos en el GeoGebra como guía para poder representar gráficamente lo aspectos matemáticos relacionado a la derivada direccional lo cual forma parte de la descripción geométrica usualmente presentada en los libros académicos. De igual manera, mostraremos el potencial y utilidad de las herramientas y comandos propios del GeoGebra para obtener una representación gráfica dinámica del objeto matemático.

El GeoGebra como lo indica en su página oficial; es un software de matemáticas para todo nivel educativo, donde a través de él, se puede dinamizar el estudio en diversas áreas, por ejemplo, la geometría, álgebra, estadística y cálculo, por medio de registros gráficos, de análisis o su organización por medio de hojas de cálculo, lo cual a la fecha es muy usado por la comunidad docente a nivel mundial, donde en su página oficial se puede apreciar aportes de todo nivel académico relacionado a diversos temas y objetos matemáticos. Además, el GeoGebra a diferencia de otros softwares matemáticos, actualmente es un software libre y fácil acceso para diversos sistemas operativos, teniendo así, diversas versiones (desarrolladas al paso del tiempo) tanto para pc y como para dispositivos portables, donde cada uno de estos puede ser descargado de su página oficial, adicionalmente a esto se cuenta con el acceso al software de monera online por medio de su página web. En nuestro caso usaremos la versión *GeoGebra Clásico 5.*

Al abrir el GeoGebra tenemos la primera presentación que se aprecia en la figura 8.

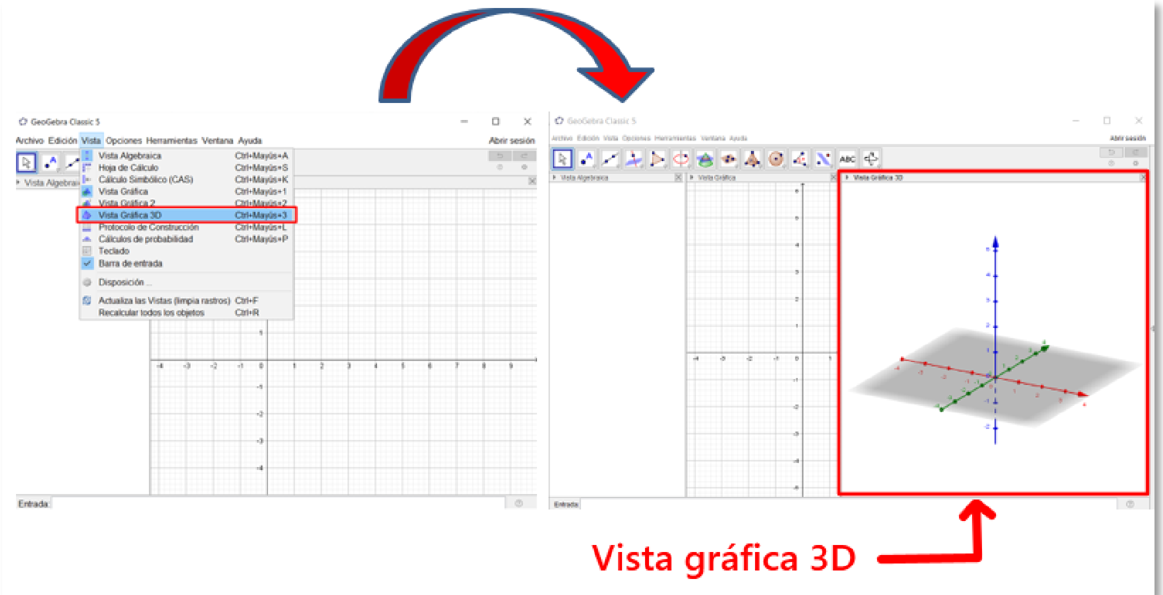
Figura 8. *Primera vista del GeoGebra*



En la figura 8, se aprecia en la parte (1) la *Vista Algebraica;* la cual mostrará las representaciones algebraicas de los objetos matemáticos que deseamos representar por medio del software, en la parte (2) la *Vista Gráfica*, mostrará su representación gráfica en un plano cartesiano bidimensional, en (3) en *Entrada,* se digitará los objetos que deseáramos representar por medio de los comandos propios del software y en (4) se tiene *la barra de comandos de fácil acceso*, que puede ser usados de forma paralela con la barra de *entrada*, para la interacción de los objetos representados, como por ejemplo, ubicar un punto de la gráfica, una recta, etc.

En nuestro caso ya que requerimos de una representación tridimensional, necesitamos una ventana que nos permita su visualización grafica entorno al plano tridimensional, por tanto, para habilitar esta opción se hará de la forma como se aprecia en la figura 9.

Figura 9. *Activación de la Vista gráfica 3D en el GeoGebra*



En la figura 9, se habilitó una ventana que permita visualizar las representaciones de forma tridimensional para funciones de dos variables. Donde se aprecia que *la barra de comando*, ahora nos dará diferentes opciones de acuerdo a la ventana donde se esté interactuando.

Por medio de esta primera introducción vamos a mostrar la manera como representamos gráficamente los aspectos inmersos a la derivada direccional de una función $z = f(x, y)$ en un punto de su dominio $A = (x_0, y_0)$ en dirección de un vector unitario $\bar{u} = (u_0, u_1)$, es decir, su representación gráfica. Para esto, comenzaremos introduciendo en la bandeja de *Entrada* los siguientes comandos para lograr representar una función de dos variables, en este caso consideramos una función $f(x, y)$ de forma arbitraria, expresado como $f(x, y) = x^2 + y^2$ y un punto A de su dominio, $(x_0, y_0) = (1,1)$ de la siguiente manera:

Entrada: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Entrada: x_0=1

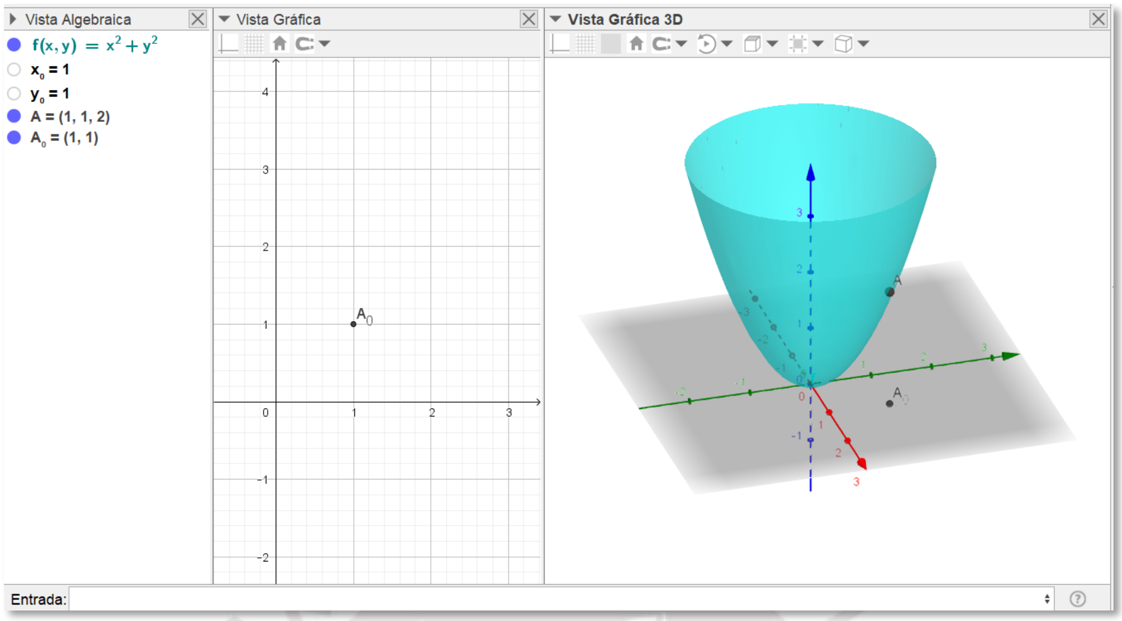
Entrada: y_0=1

Entrada: A_0=(x_0, y_0)

Entrada: A=(x_0, y_0, f(x_0, y_0))

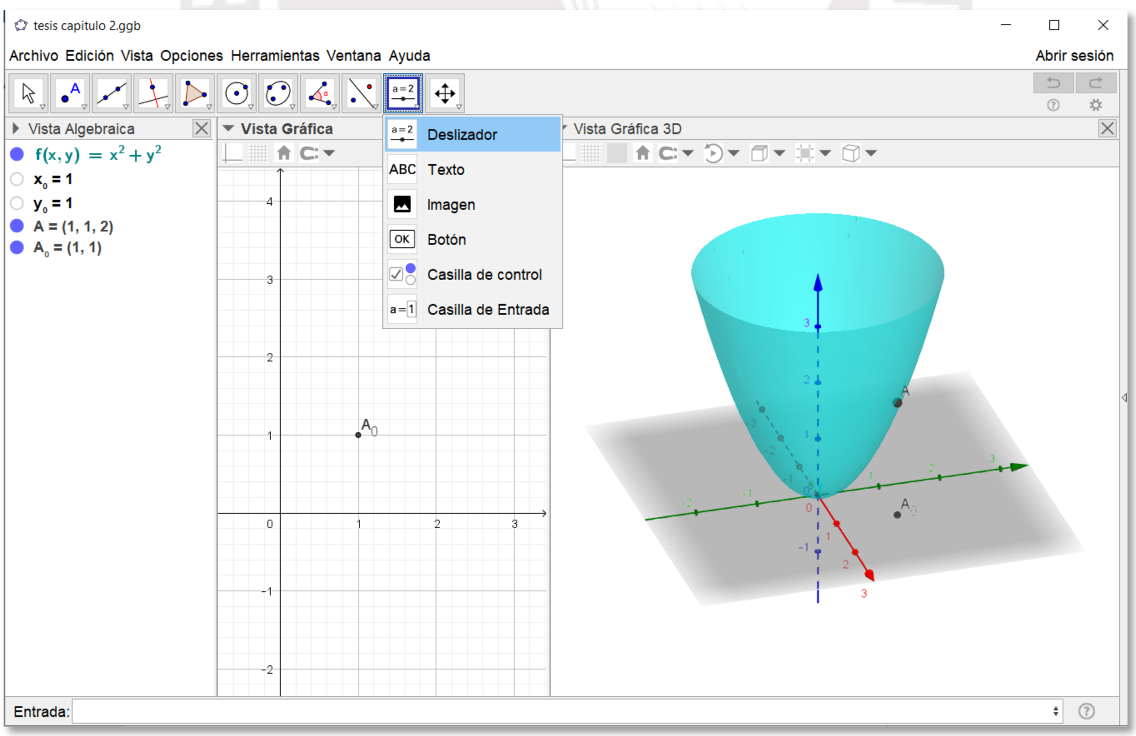
Obteniendo así, una representación gráfica a través del GeoGebra como se aprecia en la figura 10.

Figura 10. *Representación gráfica de la función $f(x, y)$ en el GeoGebra*



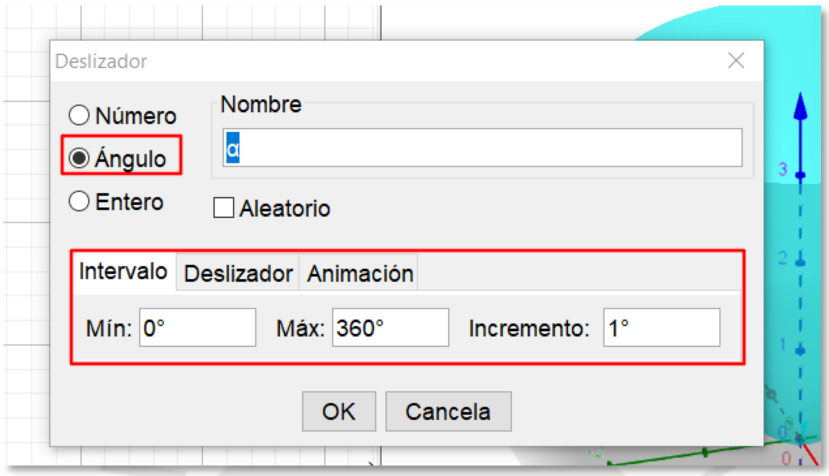
Para la representación del vector unitario, lo haremos a partir de la herramienta *deslizador* ubicado en la *barra de comandos* de la ventana *Vista Gráfica,* como se aprecia en la figura 11.

Figura 11. *Elección de la herramienta deslizador en el GeoGebra*



Para crear el deslizador damos clic en el icono y en una ubicación de la ventana de *Vista Gráfica*, dando paso así a su configuración, como se aprecia en la figura 12.

Figura 12. *Opciones de la herramienta Deslizador*



Como se aprecia en la figura 12, tenemos tres opciones para el deslizador; entre número, ángulo y entero, en nuestro caso usaremos la opción Ángulo y en la opción intervalo pondremos los valores para Min: 0, Máx: 360° e incremento de 1°; finalmente damos en OK.

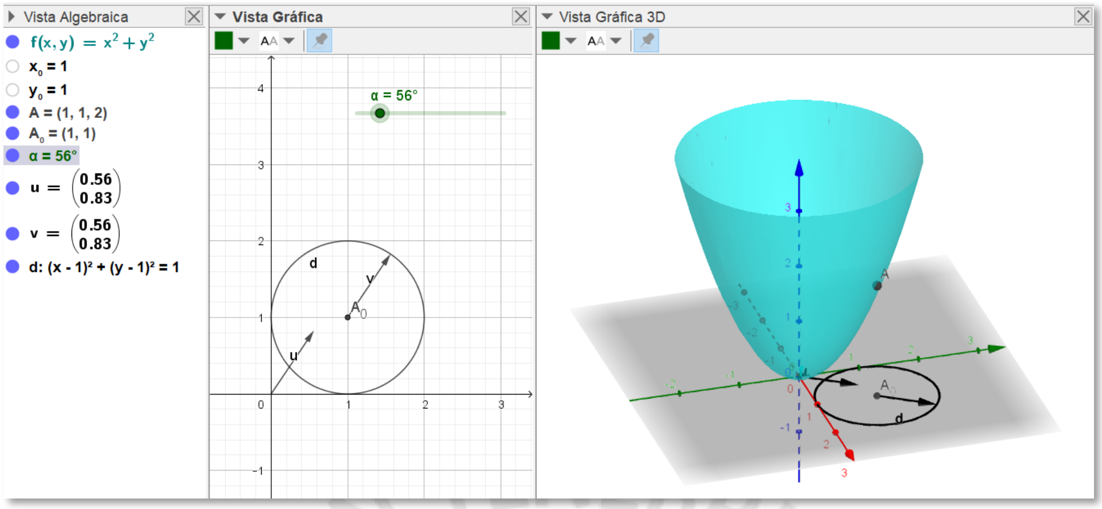
Ahora, vamos a representar nuestro vector dirección u en función del Ángulo que se creó por medio del deslizador y ubicando su punto inicial en A_0 , obteniéndose así, como se muestra en la figura 13.

Entrada: u=vector(cos(α), sen(α))

Entrada: v=vector(A_0, A_0+u)

Entrada: d=Circunferencia(A_0, 1)

Figura 13. *Representación del vector unitario* $\boldsymbol{u}$

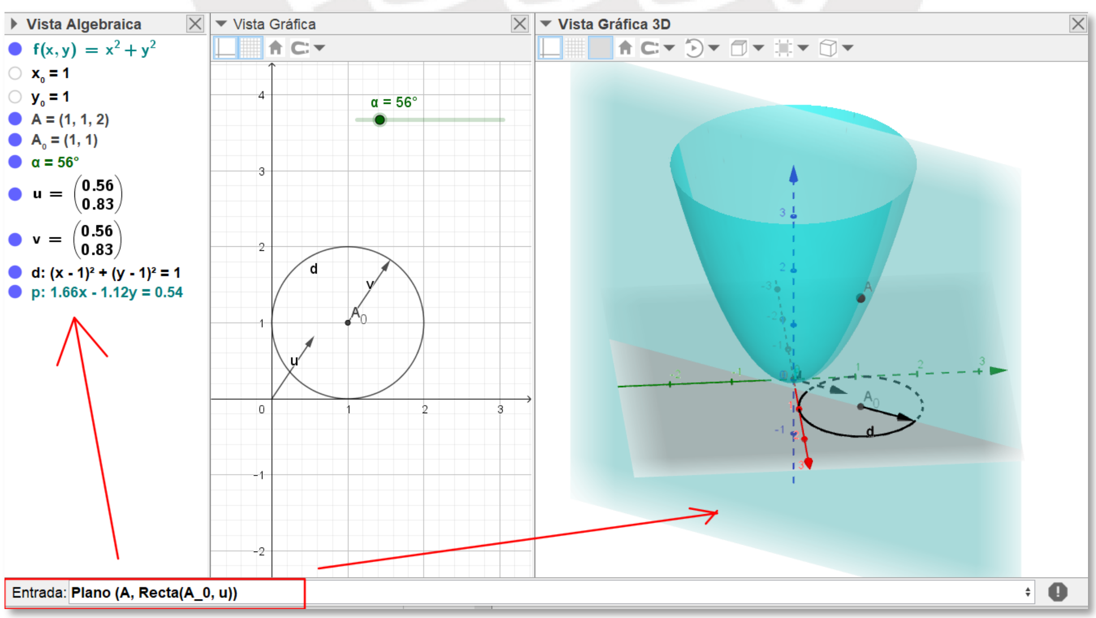


En la figura 13, hemos construido el vector dirección a partir del punto $A_0 = (x_0, y_0)$ que pertenece al dominio de la función $f(x, y)$, ahora vamos generar la recta que pasa por A_0 y el vector unitario u, además del plano que pasa por el punto A de la función y en la dirección del vector u, para esto digitaremos en la barra de entrada sus comandos respectivos, obteniéndose así, lo apreciado en la figura 14.

Entrada: L=Recta(A_0, u))

Entrada: Plano(A,L)

Figura 14. *Plano que pasa por* $\boldsymbol{A}$ *en dirección del vector dirección* $\boldsymbol{u}$



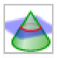
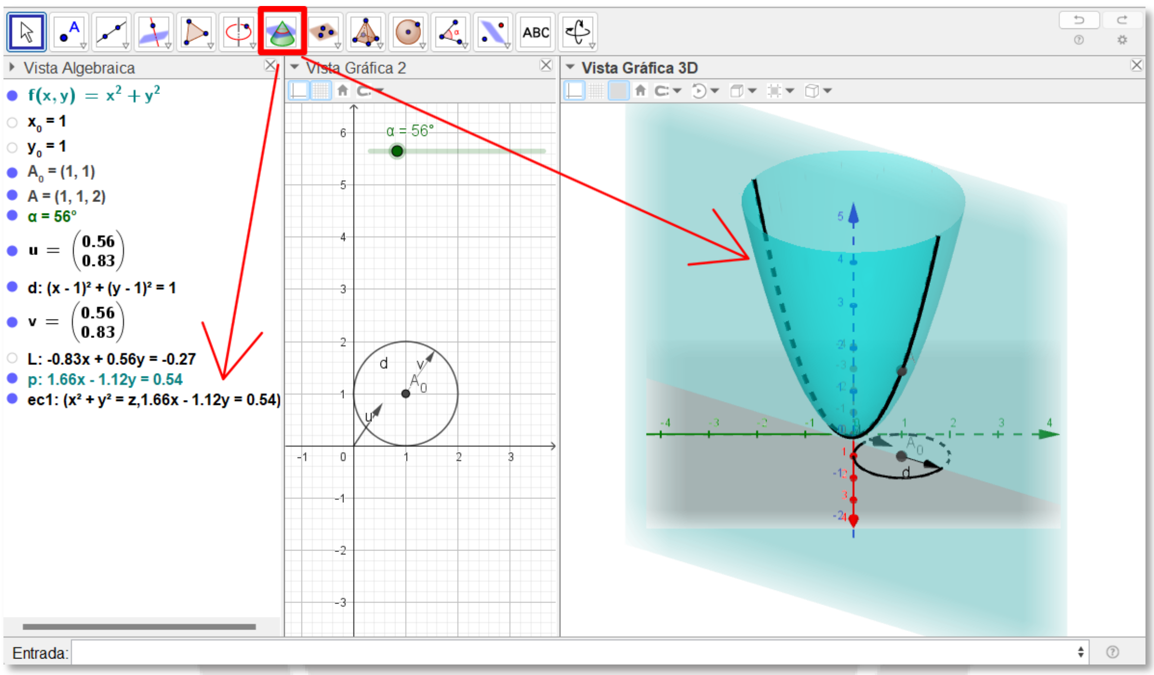
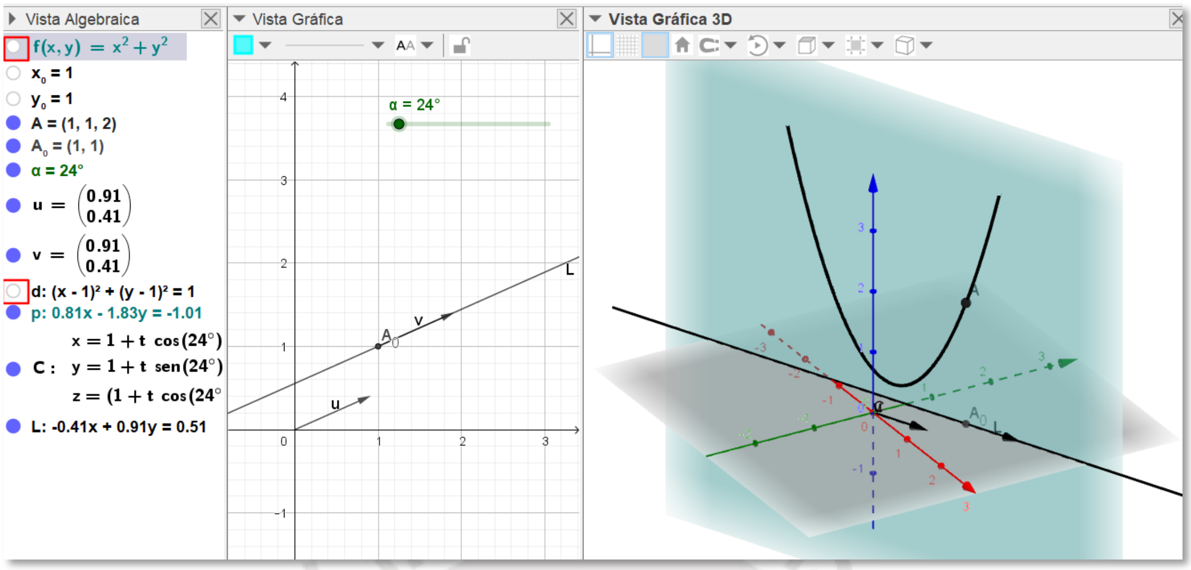
Como se aprecia en la figura 14, el plano generado en la dirección del vector unitario u intercepta a la función $f(x, y)$, observando así una curva de intersección; la cual se puede generar su representación gráfica por medio del uso de la herramienta *Intersección de superficies*  que se tiene en la ventana de la *Vista Gráfica 3D*.

Figura 15. *Curva de intersección entre la función* $\boldsymbol{f(x, y)}$ *y el plano "p"*



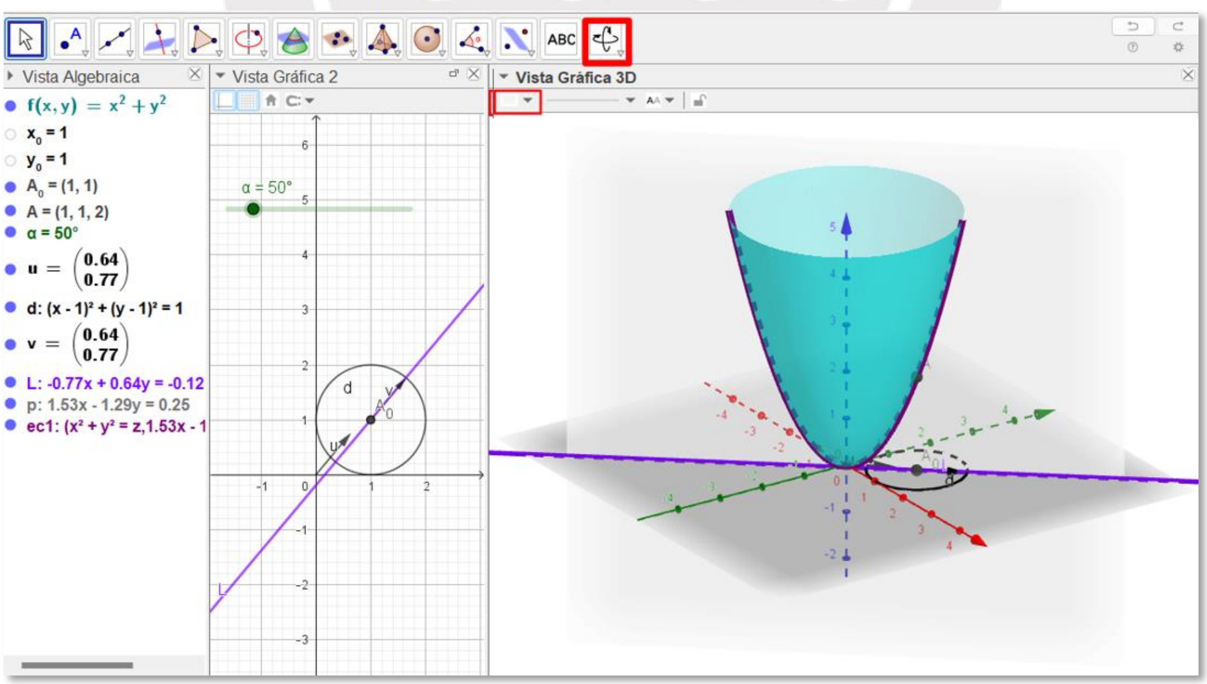
En la figura 15, la expresión $ec1: (x^2 + y^2 = z, 1.66x - 1.12y = 0.54)$ es aquella generada a partir de la intersección del plano "p" y la función $f(x, y)$ en el punto A, con un vector dirección $u = (cos\alpha, sen\alpha)$, el cual, como se aprecia en la figura, cambiará de posición y forma mientras varíe el ángulo dirección. Es así, que podemos observar e intuir que la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ con el plano "p" (generado por el vector u) en el punto A, llegaría hacer lo que se denomina, derivada direccional de f en A_0 en la dirección del vector unitario u. Si hacemos clic derecho en cada uno de los objetos representados y elegimos la opción *Objeto visible* podemos tener una mejor representación geométrica de la recta que debe pasar por A, lo cual permite asociar lo obtenido con la definición geométrica de la derivada en 2D, como se aprecia en la figura 16.

Figura 16. *Opción de Objeto visible para las representaciones*



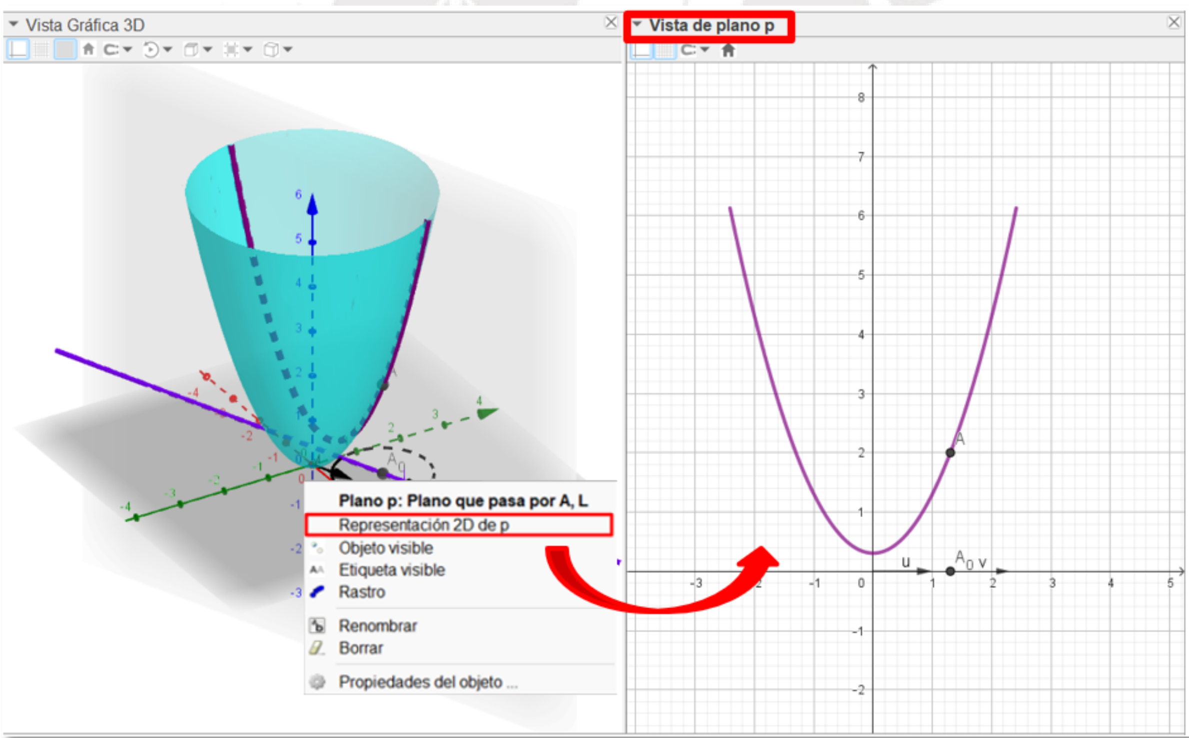
Además, el uso de herramientas propias del software, permite tener una mejor presentación de las representaciones gráficas generadas, por ejemplo, el uso de la herramienta *Rota la Vista Gráfica 3D*  y la opción de variar el color de cada uno de los objetos, obteniéndose así, como se aprecia en la figura 17.

Figura 17. *Modificaciones internas de los objetos representados en el software GeoGebra*



El posicionar nuestra representación gráfica como se aprecia en la figura 17, permite observar que se forma un “plano cartesiano UZ” en función del vector dirección "u" y el eje "z" , lo cual podemos asociarlo desde una perspectiva a una gráfica de una función en 2D, además que pensar que la pendiente de la recta tangente a la curva en A en dirección de u (la cual sería una recta en 3D), sería la derivada usual que conocemos, pero ahora de manera general podemos lograr obtener diversas rectas tangentes de acuerdo al punto del dominio de $f(x,y)$ que se tenga, además de contar con la dirección en la cual se desee conocer su variación, permitiendo así una mejor apreciación del concepto geométrico de la derivada direccional gracias a su representación gráfica tridimensional y dinámica generado a partir del GeoGebra. Con respecto a lo dicho anteriormente el GeoGebra permite generar una ventana dimensional que permite representar el “plano cartesiano UZ” además de la curva de intersección generada, para esto basta dar clic derecho en el plano "p", y seleccionar la opción Representación 2D de p, como se aprecia en la figura 18.

Figura 18. *Vista gráfica del plano cartesiano generado por el vector dirección* $\boldsymbol{u}$



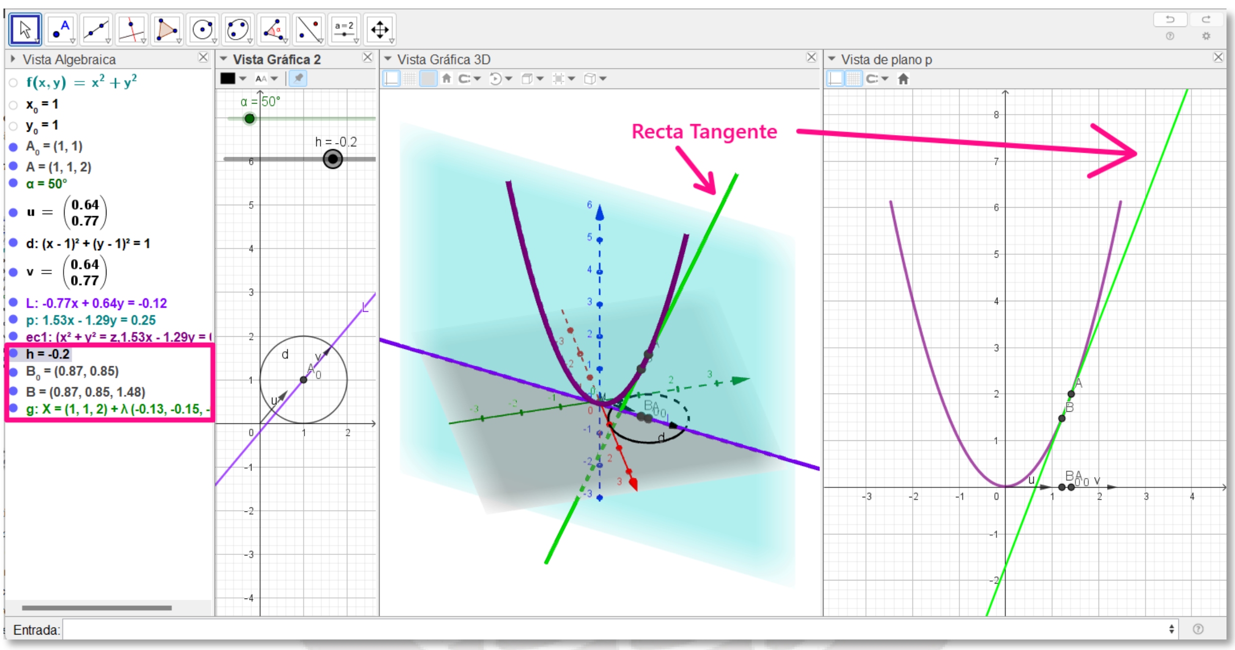
.

Con respecto a lo manifestado en el párrafo anterior podemos dar una representación gráfica de la recta tangente que pase por A y sea tangente a la función $f(x,y)$ de la siguiente manera. Primero crearemos un deslizador h que tenga como característica ser un *Número* considerando como valor *Mínimo* igual a -0.6 y un valor *Máximo* de 0, con un incremento de 0.02 (como se apreció en la figura 12), posteriormente a esto crearemos un punto B el cual esté ubicado de manera arbitraria en la curva $ec1$ y que dependa del valor de h, además de una recta T que pase por los puntos A y B cuyos comandos respectivos y su representación gráfica se muestra a continuación:

Entrada: B=Punto((x_0 + h cos(α), y_0 + h sen(α), f(x_0 + h cos(α), y_0 + h sen(α)))

Entrada: T=Recta(A, B)

Figura 19. *Representación gráfica de la recta tangente a $f(x,y)$ por medio de un deslizador*



En la figura 19 se aprecia que por medio del deslizador h la recta secante que pasa por los puntos A y B llega ser una recta tangente a la función $f(x,y)$ en el punto A, a medida que los valores del deslizador h tiende a cero; lo cual, es la manera que se representa algebraicamente la derivada direccional por medio de un límite como se apreció en la figura 2; adicionalmente a esto, podemos observar que por medio de las herramientas del GeoGebra podemos dotar de dinamismo a la representación gráfica lo cual nos permite una mejor comprensión de las características geométricas que podemos conjeturar a partir de esta, lo cual es primordial al contar con representaciones tridimensionales.

En la siguiente sección se presenta aspectos históricos vinculados al origen de la derivada direccional dentro del cálculo multivariable.

2.2 Aspectos históricos de la derivada direccional

En nuestro estudio concerniente al concepto de derivada direccional, describiremos aspectos históricos relacionado al concepto de la derivada, visto inicialmente desde el ámbito de lo que hoy conocemos en el cálculo diferencial en una variable y posteriormente se mostrará aspectos del inicio relacionado al cálculo multivariable, lo cual engloba aspectos matemáticos relacionados a la derivada direccional, para tal efecto, se consideró extractos descritos por Ponce (2014), e información extraída por medio de buscadores web relacionados a los aspectos históricos del cálculo multivariable.

El concepto de derivada es fundamental en el cálculo debido a sus múltiples aplicaciones. Por ejemplo, se utiliza para calcular la velocidad y aceleración instantánea de un cuerpo en movimiento; los valores máximos y mínimos de funciones; asimismo se usa para optimizar la producción y ganancias o minimizar costos de operación. Básicamente, la derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente. Esta idea está basada esencialmente en la noción de límite que hoy en día se conoce, ejemplos de lo que actualmente reconocemos como derivadas se usaron primeramente en un contexto particular para resolver problemas, descubriéndose así, el concepto general inmerso detrás de estos usos; posteriormente con el paso del tiempo muchas de las propiedades de la derivada fueron explicadas y desarrolladas en aplicaciones matemáticas y físicas. Finalmente, estableciéndose así una definición precisa del concepto de derivada dentro de una teoría rigurosa. A menudo se menciona que la idea de la derivada se originó principalmente en la física. Newton, después de todo, inventó el cálculo y estableció un método riguroso para el estudio del movimiento, sin embargo, ya en la edad media, muchos físicos que seguían la tradición aristotélica se habían enfocado en el estudio del "cambio", un concepto central en la física de ese entonces. De hecho, se analizaron y clasificaron de manera lógica las diferentes formas en la que una variable podría cambiar de manera uniforme, no uniforme, o como una combinación uniforme y no uniforme.

A pesar de la importancia de la física en el desarrollo del cálculo, las cuestiones físicas no fueron el motivo del desarrollo del cálculo. Ciertamente el contexto físico preparó el camino para el establecimiento de algunas propiedades de la derivada y para la introducción del concepto de cambio dentro de las matemáticas. Sin embargo, la principal motivación para el concepto general de derivada no se originó en la física, sino que la idea principal de la derivada, así como sus aplicaciones, se originó para resolver problemas en un contexto geométrico. Posteriormente al trabajo de Fermat en la década de 1630, la derivada (todavía no definida rigurosamente) se desarrollaría gradualmente, relacionándose de manera inesperada al mismo tiempo junto con otras ideas tales como extremos, tangentes, áreas, límites, continuidad y función. Si bien es conocido que Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) son considerados como los creadores del cálculo, esta afirmación es una excesiva simplificación de los hechos. En realidad, el cálculo es el producto de una larga evolución de ideas en la cual, ciertamente, estos dos personajes desempeñaron un papel decisivo, donde, Newton y Leibniz retomaron los métodos existentes para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, incorporándolos dentro de dos conceptos más generales, conceptos que actualmente conocemos como integral y derivada. Asimismo, desarrollaron una notación que haría más sencillo, el uso de conceptos generales, por ejemplo, actualmente seguimos usando la notación $\dot{x}$ de Newton y también la notación $\frac{dy}{dx}$ y $\int ydx$ de Leibniz. Además de sus contribuciones de manera independiente, cada uno de ellos dieron un argumento para demostrar lo que actualmente conocemos como el Teorema Fundamental del Cálculo. Newton llamó fluxión a su “derivada”, la cual consideraba como la razón de un flujo o cambio. Leibniz consideró a la “derivada” como una razón de diferencias infinitesimales y le llamó cociente Diferencial. A pesar de que las contribuciones por parte de Newton y Leibniz fueron atacadas por el uso de los infinitesimales, estos fueron aceptados en el hecho de que sus descubrimientos y procedimientos conducían a resultados correctos. Los infinitesimales fueron una herramienta muy útil y exitosa, así que las cuestiones acerca de su validez fueron subsanadas debido a su eficacia.

Por otro lado, el cálculo de varias variables surgió en los siglos XVIII y XIX paralelamente junto a otras ramas tales como el análisis vectorial, la geometría dimensional, etc. Los primeros en elaborar estos trabajos fueron Newton y Nicolaus Bernoulli. Pero principalmente los autores que destacan en el desarrollo de la teoría fueron, Alexis Fontaine de Bertins, Euler, Clairaut y Alembert. Los matemáticos del siglo XVII establecieron grandes cambios con respecto a las matemáticas ya conocidas desde la antigüedad. Aparte de los matemáticos ya mencionados surgieron después matemáticos muy importantes en la rama tales como Lagrange, Legendre, Laplace, Condorcet, Monge y Carnot. Todos ellos destinaron alguno de sus trabajos al cálculo multivariable, por ejemplo, Euler hizo una amplia investigación sobre lo que era la derivación parcial en el año de 1734 y entre los años 1744 y 1745 Alembert amplio el cálculo de las derivadas parciales investigando en la rama de dinámica. Podemos decir que la mayor parte de las matemáticas y la física entre los años 1600 a los 1900 están aplicados a lo que es el cálculo integral y diferencial, los cuales se han aplicado en diferentes fenómenos físicos como lo son, la medición de la electricidad, gravitación, calor, entre otros elementos similares.

Como se observó, muchos de los conceptos usados inicialmente en el estudio de funciones de una variable, tales como límite, continuidad, entorno, rectas, derivación, máximos, mínimos, etc., son revisados de manera general en el estudio del cálculo multivariable, dando así una manera más general o abstracta del cálculo diferencial presentado a inicios por Newton y Leibniz.

Como tercera parte, se presenta los aspectos matemáticos de la derivada direccional, teniendo referencia textos universitarios empleados usualmente por docentes dentro del curso del cálculo multivariable.

2.3 Aspectos matemáticos de la derivada direccional

Uno de los textos usualmente asociados al proceso de enseñanza para temas inmersos del cálculo multivariable, es el de *Calculo Multivariable* de Stewart (2012) o también el *Cálculo Vectorial* de Pita (1995), por tal razón, en esta sección revisaremos y haremos un análisis de dichos textos desde la perspectiva del marco teórico referencial (TRRS); concerniente a la sección de la Derivada Direccional, considerando la estructura presentada por ambos autores.

En este sentido se observa que, en *Cálculo Multivariable,* Stewart (2012), para tratar el concepto de Derivada direccional, se estudia aspectos matemáticos previos estructurado de la siguiente manera, como se observa en la figura 20.

Figura 20. *Índice presentado por Stewart (2012)*

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.7), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

Se observa en la figura 20, que para el autor, el dar a conocer el concepto matemático de derivada direccional, previamente el estudiante debe tener la noción de derivada parcial, plano tangente, aproximaciones lineales y la regla de cadena, lo cual permita tratar en la sección 14.6

de una forma donde estos objetos matemáticos no sean ajenos para el estudiante, es así donde se introduce el concepto de Derivada direccional por medio de una situación asociada al concepto de Derivada parciales, como se aprecia en la figura 21.

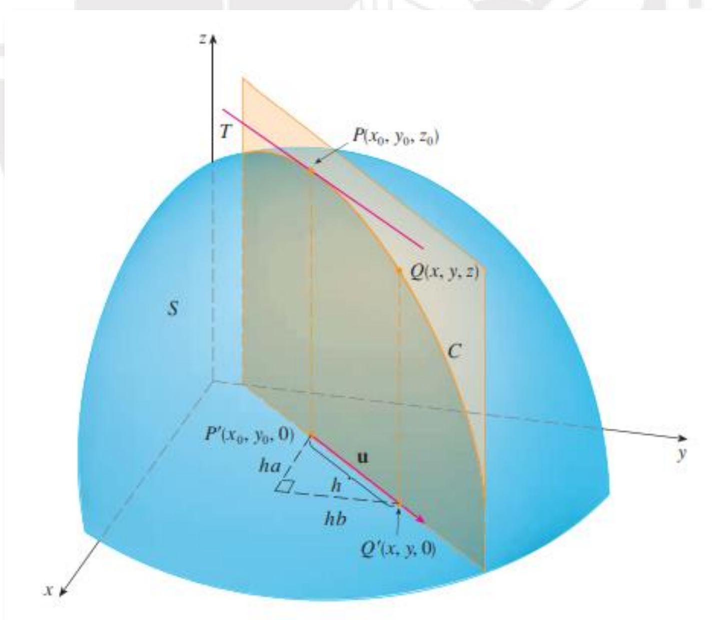
Figura 21. *Presentación del concepto de Derivada direccional en lenguaje natural*

Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\mathbf{u}$ interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$.

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.933), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

Es allí donde el autor, usa una representación en el registro de lengua natural para dar a explicar la idea del concepto que se desea presentar, dando así paso a una conversión a una representación gráfica de lo explicado anteriormente, como se aprecia en la figura 22.

Figura 22. *Presentación gráfica de la Derivada direccional*



Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.933), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

Posteriormente a lo presentado en la figura 22, se procede a usar la representación gráfica para formalizar la representación algebraica de la derivada direccional, por medio de los objetos matemáticos inmerso en la gráfica y sus definiciones previamente conocidas por el estudiante, como se observa en la figura 23.

Figura 23. *Presentación algebraica de la Derivada direccional*

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a $\mathbf{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\mathbf{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$.

2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.934), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

En la figura 23, se puede observar el tránsito entre registros de representación de la derivada direccional, comenzando desde su representación en lenguaje natural hacia su representación algebraica por medio de su representación gráfica, haciendo referencia a características propias del concepto que se define para su aplicación por parte de los estudiantes; pero a diferencia de la forma presentada en la figura 21, el autor emplea a partir de esta, un tratamiento interno que permita transformar su representación algebraica dada, a una más accesible para el cálculo de la derivada direccional; lo cual a partir de conceptos previamente conocidos por el estudiante surge el siguiente proceso realizado como se apreció en la figura 3; donde al realizar tratamientos internos a partir de su representación algebraica por medio de límite, y en concerniente a los tratamientos internos que se tiene al definir una derivada por medio de la regla de la cadena para una función del tipo $g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$, se puede concluir una representación alternativa de la derivada direccional, en función de las derivadas parciales en "x" e "y", evaluadas en un punto de su dominio (x_0, y_0), la cual es una forma muy usada por mayoría de estudiantes para el cálculo relacionado a la derivada direccional, como se apreció en la figura 4.

Posteriormente, el autor detalla propiedades asociado a la derivada direccional, como, por ejemplo, la maximización, minimización y su relación que tiene con el vector gradiente, presentando así diversos ejemplos que permita su comprensión con la parte teórica presentada.

Algo que resaltar en el texto, es lo relacionado a la versión alternativa de la derivada direccional, como se tiene en la figura 4, pero, no existe un apartado donde se explique o ejemplifique su concepto geométrico que se tiene a partir de ella, o como se asocia con sus representaciones presentadas inicialmente, o quizás su relación con conceptos preliminares llevados antes de esta sección, lo cual nos hace llevar a la reflexión lo expresado por McGee & Moore-Russo (2015) en afirmar que "*la mayoría de autores de textos parecen asumir que los estudiantes son capaces de extender naturalmente el concepto de una pendiente 2D a 3D y en consecuencia, no se necesario explicitar los aspectos relacionados a pendiente de una recta en 3D*"; lo cual al analizar de manera general lo argumentado por dichos investigadores, eso está asociado con el concepto geométrico de la derivada direccional lo cual no es del todo evidente cuando se presenta a los estudiantes de manera algebrizada.

Por otro lado, Pita (1995) en el capítulo 2 del libro de *Calculo Vectorial,* abarca aspectos iniciales de funciones de varias variables para estudiar el concepto de derivadas direccionales, como se aprecia en la figura 24, además se observa que el concepto de gradiente o plano tangente se encuentra después de 4 secciones a la derivada direccional lo cual dista de lo presentado por Stewart (2012), es decir podemos intuir que se hará una definición previa en relación a la derivada direccional sin tratar aspectos que lo vinculen al plano tangente o el vector gradiente.

Figura 24. *Índice presentado por Pita (1995)*

Nota. Tomado de *Cálculo vectorial* (p.xi), por C. Pita, 1995, Prentice Hall.

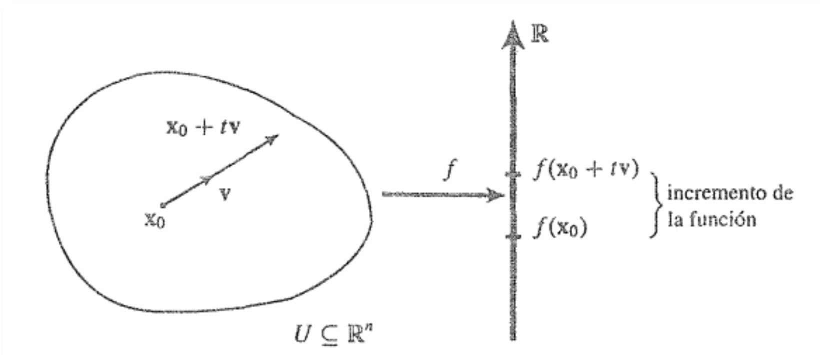
Ahora, en la sección 2.5 para la introducción de la Derivada direccional, el autor describe el proceso a seguir por medio de una representación en lengua natural (frase subrayada de color verde en la figura 25), relacionando con la idea que conocen los estudiantes de una derivada en una variable (frase sombreada de color amarillo en la figura 25), es decir, describiéndolo como un límite de una función multivariable en una dirección dada, y terminando la explicación por medio de una representación figural como se aprecia en la figura 26.

Figura 25. *Introducción en lenguaje natural de la derivada direccional por Pita (1995)*

Consideremos la función $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector dado de $\mathbb{R}^n$, cuya norma es 1. Ahora queremos estudiar la variación de la función f en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$ cuando su argumento varía en la dirección marcada por el vector $\mathbf{v}$. La idea para lograr esto será la misma que aparece en el concepto de derivada de una función de una variable, y, más recientemente, en el estudio de las derivadas parciales en la sección anterior, a saber, la derivada será "el límite cuando el incremento de la variable tiende a cero del cociente del incremento de la función, dividido entre el incremento de la variable". En el caso de las derivadas parciales, "el incremento de la variable" correspondía al de la variable respecto de la cual se estaba derivando. Lo que haremos ahora será tomar el "incremento de la variable", comenzando en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$, y yendo en la dirección del vector unitario $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dado. Esquemáticamente

Nota. Tomado de *Cálculo vectorial* (p.158), por C. Pita, 1995, Prentice Hall.

Figura 26. *Representación figural de la derivada direccional por Pita (1995)*



Nota. Tomado de *Cálculo vectorial* (p.158), por C. Pita, 1995, Prentice Hall.

Es así como el autor describe el concepto matemático, dando la representación algebraica de la derivada direccional previamente analizado en la parte inicial de la sección como se aprecia en la figura 27. Algo que podemos acotar, es la manera generalizada que presenta el autor para un espacio $n - dimencional$.

Figura 27. *Representación algebraica de la derivada direccional por Pita (1995)*

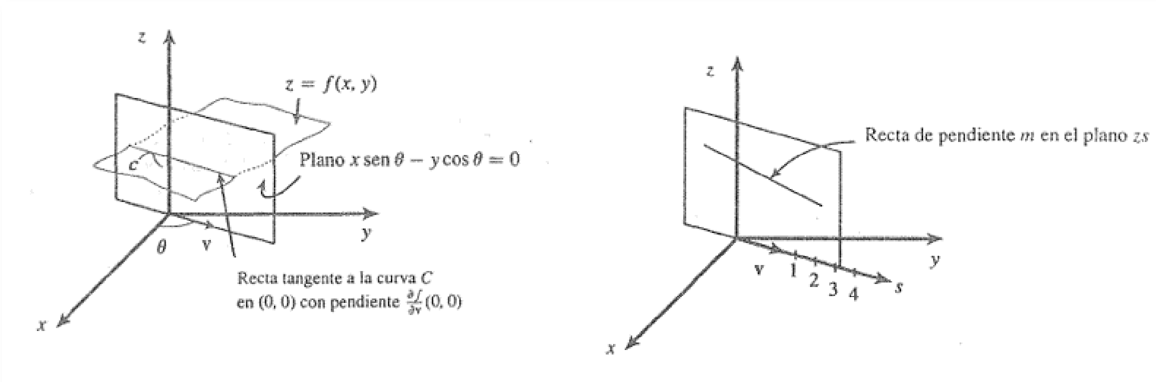
Definición. **(derivada direccional)** Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in U$ un punto dado de U. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en $\mathbf{x}_0$, en la dirección del vector $\mathbf{v}$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$, o $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$, como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \qquad \blacksquare$$

Nota. Tomado de *Cálculo vectorial* (p.158), por C. Pita, 1995, Prentice Hall.

Posteriormente, el autor hace un paralelo con la definición de derivada parcial que se estudió en la sección anterior, dando así a conocer a la derivada direccional como una generalización de la derivada parcial pero en una dirección dada en el plano R^2, después, se ejemplifica lo presentado a través de ejemplos aplicativos que permita unificar los conceptos vistos en secciones anteriores, además de dar hincapié a preguntas que refuercen lo aprendido hasta el momento, por ejemplo; “cuando se dice que una función multivariable es diferenciable”, por otro lado, se puede observar por parte del autor, el dar a conocer una interpretación geométrica de la derivada direccional a medida que se va trabajando en los ejemplos, como se aprecia en la figura 28.

Figura 28. *Interpretación geométrica de la derivada direccional, Pita (1995)*



Nota. Adaptado de *Cálculo vectorial* (p.161-162), por C. Pita, 1995, Prentice Hall.

Cabe resaltar que la figura 28, presenta aspectos muy interesantes a diferencia de lo tratado en Stewart (2012), ya que puede apreciarse “el nuevo sistema de coordenadas” que se originaría entorno al vector dirección "v" y el eje "z", lo cual está relacionado a la interpretación geométrica de la derivada direccional vista como un límite, y más aún, asocia dicha representación gráfica al concepto de derivada en un plano bidimensional, es decir, como la pendiente de una recta en el plano de dirección v, y vertical el eje Z. Algo que se puede acotar es la poca visibilidad que se tiene de las representaciones, lo cual no permite una mejor percepción por parte de los estudiantes en relación al concepto que se desea presentar, lo cual nos pone a pensar en lo manifestado por Ryokiti (2019) al afirmar que, en el estudio que se involucra funciones multivariables, un software de representación (en ese caso el GeoGebra) permite una mejor comprensión de su representación gráfica, al visualizar las características geométricas y propiedades de los objetos matemáticos que se estudia y más aún si se dar una manipulación de la representación gráfica por parte de los estudiantes.

Finalmente el autor termina la sección a través de otros ejemplos que permitan la conexión con definiciones en relación a la continuidad o límite de funciones multivariables; cabe resaltar, que en esta parte no se trata el análisis de la versión alterna de la derivada direccional como se aprecia en la figura 23, lo cual se hace mayor detalle posteriormente en secciones subsiguientes, lo cual implica una mayor demanda de estudio y análisis a través del texto, para lograr consolidar tal objetivo por parte de los estudiantes.

En referencia a lo analizado y a nuestros antecedentes presentados en esta investigación, se busca proponer una secuencia didáctica por medio de la cual los sujetos participantes puedan comprender el concepto geométrico que se encuentra detrás de la representación algebraica de la derivada direccional (ver figura 23), lo cual se basa al concepto de pendiente de una recta en el plano tridimensional; tal como fue mencionado por los investigadores de referencia. Por tal razón, nuestra investigación se centrará a identificar la manera que desarrollan los sujetos sus aprehensiones, al resolver actividades propuesta en la secuencia didáctica, todo esto mediado por el GeoGebra.

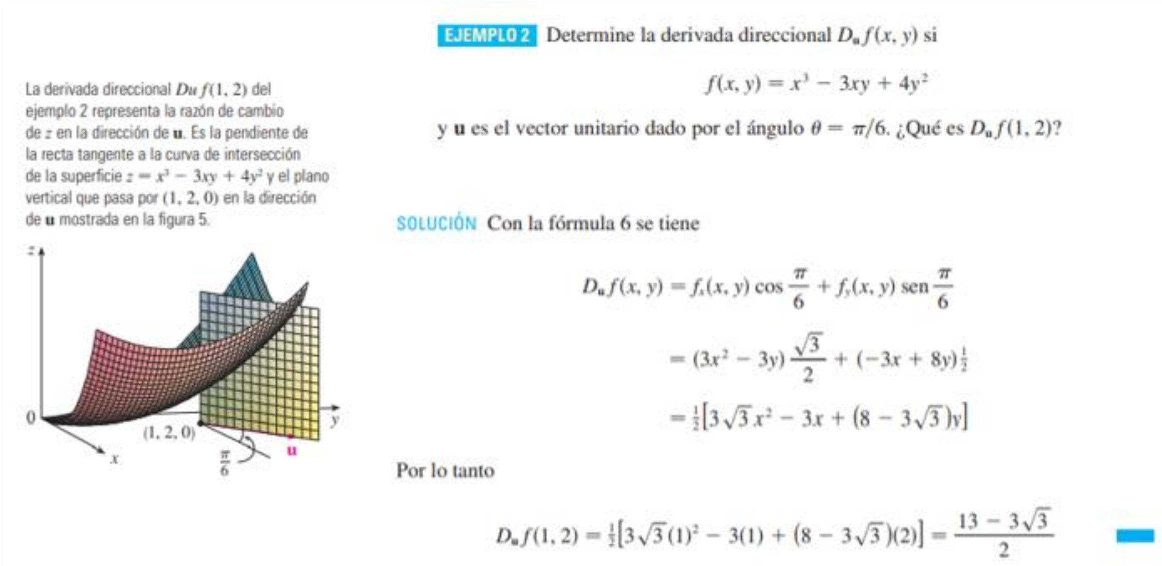
Finalmente, en la siguiente sección, revisaremos la manera como los autores mencionados anteriormente, ejemplifican los conceptos presentados por medio de ejercicios resueltos y propuestos en relación al objeto matemático.

2.4 Aspectos didácticos en relación a la ejemplificación de la derivada direccional

A continuación, se mostrará la manera cómo es ejemplificado el concepto de derivada direccional tanto por Stewart (2012) y Pita (1995), y a través de ello, analizaremos desde el punto de vista de nuestro referencial teórico.

En la figura 29, se presenta un ejemplo dado por Stewart (2012), en la cual se observa el determinar el valor de la derivada direccional, lo cual se aprecia su resolución por medio de cálculos algebraicos en relación a su representación algebraica, al igual que una representación gráfica de la situación propuesta para dar a conocer una visión geométrica de lo que se pide, acotando aspectos propios de la derivada direccional, como por ejemplo, el indicar que la derivada direccional representa la razón de cambio en z en dirección de u. Y aspectos geométricos relacionado a la pendiente de recta tangente en el punto de su superficie, todo esto a partir de la representación gráfica que se detalla al finalizar el ejemplo mostrado pero todo ello de manera muy puntual. Cabe resaltar que los ejemplos planteados en el texto, están relacionados con su aplicación por medio de su representación algebraica de la derivada direccional y no desde una perspectiva a partir de su representación gráfica o de una representación dada por medio del lenguaje natural.

Figura 29. *Ejemplo didáctico propuesto en Steward (2012)*



La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de **u**. Es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y el plano vertical que pasa por $(1, 2, 0)$ en la dirección de **u** mostrada en la figura 5.

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y **u** es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

SOLUCIÓN Con la fórmula 6 se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y) \cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

Nota. Tomado de *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (p.936), por J. Stewart, 2012, Cengage Learning.

Posteriormente en el texto, se detalla aspectos relacionado a la derivada direccional y sus propiedades en relación al vector gradiente, plano tangente, los máximos y mínimos, presentando ejemplos resueltos a manera de ejemplificar cada apartado mencionado. Por otro lado, en la figura 30, Pita (1995), presenta ejemplos del cálculo de la derivada direccional en relación a su representación algebraica dada a través de un límite, lo cuales, por medio de tratamientos en su registro algebraico, se describe su resolución.

Figura 30. *Ejemplo didáctico propuesto en Pita (1995)*

Ejemplo 4. Considere la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$. La superficie que esta función representa es la misma que la del paraboloide $z = x^2 + y^2$, recorrido su vértice al punto $(1, 1, 0)$. Calculemos la derivada direccional de esta función en $(0, 0)$ en la dirección del

vector unitario $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\sqrt{2}t/2, \sqrt{2}t/2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\sqrt{2}t/2 - 1)^2 + (\sqrt{2}t/2 - 1)^2 - 2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}(t - 2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Por otra parte, el plano $y = x$ es el plano perpendicular al plano xy, que contiene al vector $\mathbf{v}$, (el cual corresponde al valor de $\theta = \pi/4$ en la ecuación $x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta = 0$). La intersección de este plano con la superficie $z = (x-1)^2 + (y-1)^2$ es $z = 2(x-1)^2 = \varphi(x)$. Esta función $z = \varphi(x)$ mide *la variación de z respecto de x* en la curva de intersección de la superficie con el plano $y = x$. Para obtener la variación de z con respecto a la variable s que se encuentra en el eje marcado por el vector

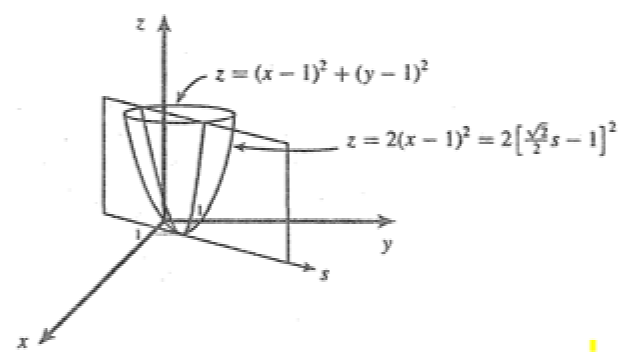


Figura 5. Gráfica del ejemplo 4.

$\mathbf{v}$ —que llamamos "eje s"—(es decir, para obtener la "ecuación natural" de la curva en el plano en el que se encuentra ella), observamos que una unidad en el eje x corresponde a $\sqrt{2}$ unidades en el eje s, de modo que la expresión que relaciona este "cambio de unidades" en los ejes x y s es $s\sqrt{2}x$ o bien $x = \sqrt{2}s/2$. Entonces, al sustituir en $z = \varphi(x)$, obtenemos $z = \psi(s) = 2(\sqrt{2}s/2 - 1)^2$ que es la ecuación de la curva en el plano en el que ella se encuentra. Su derivada en $s = 0$ nos da la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Tenemos $\psi'(s) = 4(\sqrt{2}s/2 - 1)(\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}s/2 - 1)$, de donde $\psi'(0) = -2\sqrt{2}$, valor que coincide con el obtenido de la derivada direccional calculado al principio del ejemplo (Fig 5). ■

Nota. Tomado de *Cálculo vectorial* (p.162), por C. Pita, 1995, Prentice Hall.

Un comentario que podemos añadir concerniente a la figura 30, es en relación a los ejemplos propuestos por el autor, la conexión que se hace con temas tratados en apartados anteriores y una descripción geométrica por medio de una representación gráfica vinculado a cada ejemplo que se presenta, pero la mayoría de estos, son analizados desde el punto de vista de su representación algebraica y después el dar paso a un análisis geométrico de la misma, pero no ocurre de manera inversa, lo cual pensamos que se crearía en los estudiantes una idea de asumir que la representación algebraica es en sí, es la manera principal de asociarlo con el objeto matemático, lo cual en términos de Duval indica que: “el confundir el objeto matemático con la representación que se hace de ellos, puede producir a lo largo del tiempo una pérdida de comprensión del objeto matemático y que los conocimientos adquiridos se vuelven inutilizables a lo largo del aprendizaje; por tal razón, es absolutamente necesario que un objeto matemático pueda ser representado por medio de diversas representaciones semióticas”. A manera de acotación podemos observar el hecho que Pita (1995) al expresar la regla de correspondencia del paraboloide en la representación gráfica, usa un tipo de notación de la manera $z = (x-1)^2 + (y-1)^2$, lo cual desde el punto de vista de la didáctica podría prestarse a una confusión al hecho de entenderlo como una ecuación y no como una función, cuyas definiciones no son iguales.

Al finalizar el capítulo, hemos podido observar la manera que los autores de texto tratan el estudio de la derivada direccional dentro del cálculo multivariable, lo cual desde el punto de vista del marco teórico referencial (TRRS), nos permite observar la manera como es usualmente percibido el objeto matemático, ayudándonos el plantear nuestra propuesta de secuencia didáctica bajo los aspectos matemáticos que deberían ser reforzados para la concepción del objeto matemático, asociado con el objetivo de nuestra investigación.

Capitulo III: Fase experimental y análisis

En este capítulo se describe las características que intervienen en la fase experimental, por ejemplo, una descripción de los sujetos participantes, el escenario y herramientas usadas para la realización de la misma, una descripción de las actividades diseñadas, como también, los posibles resultados que esperamos lograr que se presente, los cuales posteriormente será contrastado con los resultados obtenidos analizados desde de nuestro marco referencial.

3.1 Datos informáticos de los sujetos participantes de la Fase experimental

La investigación está diseñada para ser aplicada a docentes en formación continua, cuya formación profesional radica en carreras donde se llevó cursos de cálculo diferencial, integral en dos y tres variables, es decir, que el objeto matemático que se presenta no es ajeno a su formación; por otro lado, cabe resaltar que los sujetos de investigación cursan estudios de posgrado en una universidad particular de Lima. En nuestro caso se consideró la participación de dos docentes, cuya forma de elección fue en base a sus disponibilidad, aceptación al proyecto, su familiaridad con el GeoGebra y compromiso de participación, además de indicar que la manera de realización de las actividades en ambos no fue la misma; uno de los docentes participantes realizó las actividades de manera virtual por medio de una videoconferencia vía zoom, para dicho docente nos referiremos a él con el nombre de Josué; y por otro lado, para el segundo docente participante se desarrollaron las actividades de manera presencial, nos referiremos a él con el nombre de Caleb.

3.2 Escenario de la experimentación

Para el desarrollo de la fase experimental y la recolección de datos en ambos participantes, se consideró programar sesiones personalizadas para cada uno; donde el desarrollo de las actividades será por medio de un ordenador (en el caso de Caleb se le facilitará una laptop) con el GeoGebra instalado (en el caso de Josué se realizará por medio del GeoGebra Online) y el trabajo realizado en máquina será capturado en video y audio por medio de un programa propio del sistema operativo Windows instalado (Windows + G), por otro lado, para la recolección y análisis de datos, esto será realizado por medio de una entrevista semiestructurada en relación a las preguntas diseñadas en las actividades a realizar con algunas acotaciones (si fuera necesario) por parte del investigador; el tiempo total de la entrevista dura entre 60 a 90 minutos.

3.3 Descripción de Actividades

Se consideró agrupar las actividades en dos fichas de trabajo, donde cada una de ellas fue diseñada para su uso en el GeoGebra y con preguntas planteadas por el investigador en relación a conclusiones y sugerencias de las investigaciones de referencia, específicamente aquella donde se aborda la problemática del objeto matemático. Las actividades fueron ordenadas de manera secuencial, donde inicialmente se abarca el concepto geométrico de pendiente de una recta en el espacio tridimensional, y posterior a ello, el análisis de la variación vertical que se obtiene, a partir de cambios en dirección a los ejes coordenados en un plano, todo esto permite ser unificado, para consolidar una mejor concepción geométrica que se tiene de la representación algebraica de la derivada direccional.

Por otro lado, en cada actividad que se plantea, se busca identificar las aprehensiones que surgirán por parte de los sujetos de experimentación y para esto se tendrá en cuenta lo que es realizado por ellos en la resolución de las actividades; adicionalmente, la participación del investigador será de presentador y guía, donde posteriormente a manera de una entrevista semiestructurada se tomará nota de las acciones realizadas por los participantes, lo cual servirá para su contraste con lo esperado inicialmente. En la Tabla 7 se detalla la descripción y objetivos de cada actividad a presentar.

Tabla 7.

Descripción y objetivos de las actividades diseñadas

Actividad	Descripción de la Actividad	Objetivos
1ra Parte	A partir de la representación gráfica de una recta en el espacio 3D, se busca que el sujeto movilice sus conceptos de pendiente de una recta, pero ahora desde una perspectiva tridimensional, para lo cual, es necesario que el sujeto realice tratamientos a partir de la representación gráfica presentada.	Identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los sujetos al resolver actividades donde se movilice el concepto de pendiente de una recta, pero desde una perspectiva tridimensional por medio de las herramientas propias del GeoGebra.

2da Parte	A partir de la representación gráfica de un plano en el primer octante se busca que el sujeto movilice conceptos de pendientes direcciones sobre dicho plano, además de la variación vertical asociado a este.	Identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los sujetos al resolver actividades que asocie la variación vertical que se tenga a partir de los cambios direccionales presentados en un plano, por medio de las herramientas propias del GeoGebra.

3.4 Análisis esperado en el desarrollo de actividades propuestas

En esta sección, presentaremos el análisis de cada una de las preguntas dadas en cada actividad (ver anexo), además se expone los posibles resultados esperados, todo esto bajo los argumentos de nuestro marco teórico referencial y la estructura de nuestra metodología. A continuación, se presenta la primera parte de las actividades que se dará a los docentes participantes.

ACTIVIDAD 1

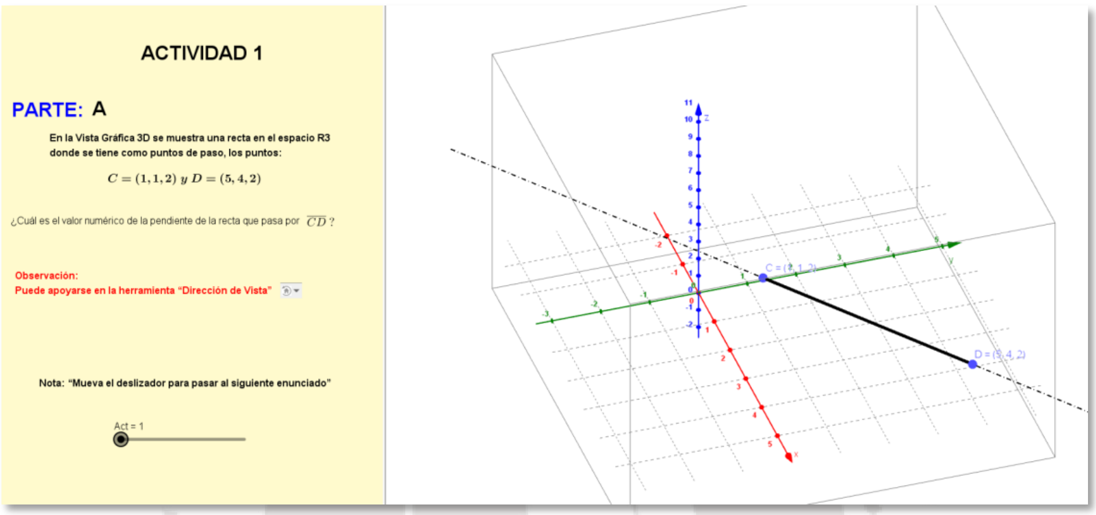
Abra el archivo **Actividad1.ggb** (de manera expandida en la ventana del ordenador) y apreciará la representación gráfica de una recta en el espacio 3D, por otro lado, en la parte inferior encontrará la herramienta *deslizador*, de tal forma que a medida que este se mueva, obtendrá la representación gráfica de otras dos rectas tridimensionales. y conforme a lo presentado responda la siguiente pregunta para los tres casos. ¿Cuál es el valor numérico de la pendiente de la recta en el espacio? Explique su procedimiento.

La Actividad 1 consta de una pregunta, pero dividido en tres situaciones diferentes, en la cual se busca que el docente participante empiece a explorar y analizar los conceptos relacionado a pendiente de una recta, pero aplicado ahora desde una perspectiva tridimensional. El análisis esperado por parte de los docentes participantes se detalla a continuación.

Análisis de la Actividad 1

Al abrir el archivo ***Actividad1.ggb,*** se puede apreciar la primera representación gráfica de una recta en el espacio 3D que pasa por los puntos C y D, correspondiente a la Parte A, como se observa en la figura 31.

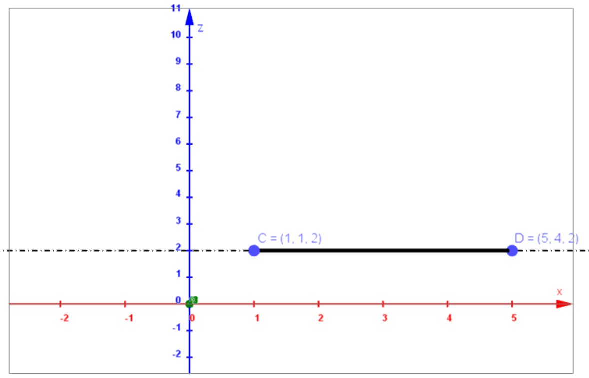
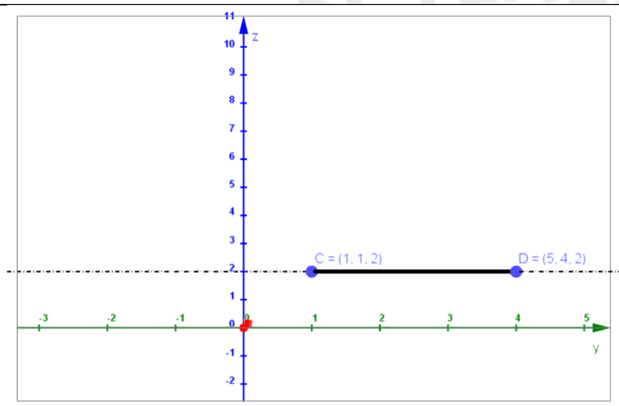
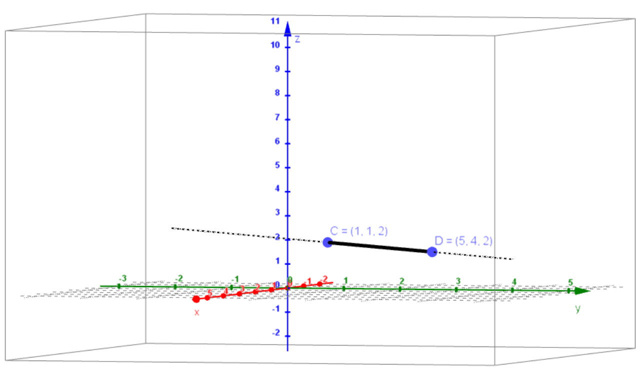
Figura 31. *Representación gráfica de una recta en el espacio 3D (Parte A)*



En la figura 31, se busca que los sujetos encuentren el valor de la pendiente de la recta tridimensional presentado, por tal razón se espera que a partir de su aprehensión perceptiva, el sujeto primero identifique lo observado como una recta que pasa por los puntos de paso C y D, lo cuales permitan asociarlo con un segmento de recta en el espacio 3D, pero a primera instancia no podrá identificar cual es el desplazamiento horizontal y vertical necesario para lograr agruparlo con el concepto de pendiente de una recta, para esto, se espera que primero se realice una modificación de la representación gráfica dada, por medio de una modificación óptica o posicional de su representación inicial, lo cual evidenciaría un desarrollo de su aprehensión operatoria, obteniendo algo referencial como se presenta en la tabla 8.

Tabla 8.

Aprehensión operatoria en relación a la Actividad 1 – Parte A.

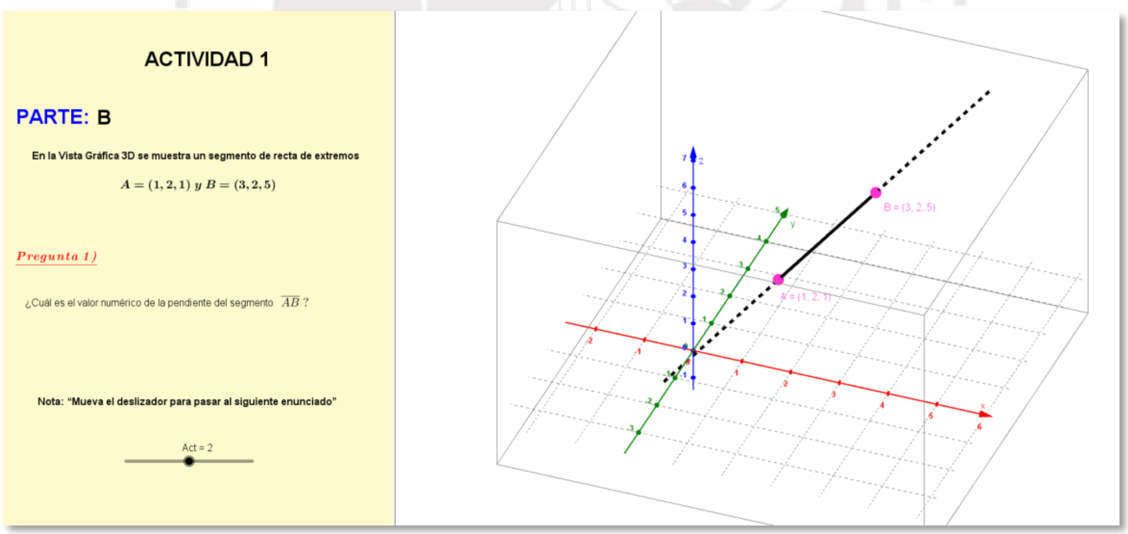
<table>
<tr><th>Posibles modificaciones ópticas y posicionales</th><th>Observación</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Vista desde una perspectiva puesta en el plano XZ</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Vista desde una perspectiva puesta en el plano YZ</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Vista desde una perspectiva puesta en el plano XYZ</td></tr>
</table>

Lo presentado en la tabla 8, permitiría al sujeto asociar la recta en 3D como una recta en 2D pero ahora bajo la mirada de un entorno tridimensional (cabe resaltar que una vista desde una perspectiva en el plano XY implica una puesta de la recta sin ningún tipo de desplazamiento vertical, como se aprecia también en la tercera figura de la tabla 8), lo cual conjeturaría que la pendiente de la recta que pasa por CD estaría dado por, “la variación vertical en relación al eje

Z” sobre “la variación horizontal ubicado en el plano XY”, obteniendo así un resultado de cero, ya que como se observa tras las modificaciones ópticas que se realizó, no se aprecia un desplazamiento de forma vertical, lo cual implica que la pendiente sea $m_{CD} = 0$, lo cual no era del todo apreciable lograr inferir este resultado a partir de la posición inicial que se tenía; todo esto, permitiría evidenciar por parte del sujeto el desarrollo de su aprehensión discursiva ya que a partir del concepto previamente conocido lograr asociarlo para dar respuesta a la actividad. Por otro lado, adicionalmente a esto, el sujeto podría también lograr dicho resultado a partir de las modificaciones realizadas a la representación gráfica inicial, ya que al tener identificado la dirección que se tiene la variación vertical y al observar las coordenadas de los extremos del segmento CD, donde la tercera componente es igual para ambos puntos, concluiría que no existe un desplazamiento vertical en dirección al eje Z, (al restar dichas componentes de la terna ordenada) es decir el valor de la pendiente sería cero, dicha acción también está asociado al desarrollo de su aprehensión discursiva.

Para la Parte B, se tendrá una recta que pasa por los puntos A y B, cuyas coordenadas difieren a lo propuesto en la Parte A, como se aprecia en la figura 32.

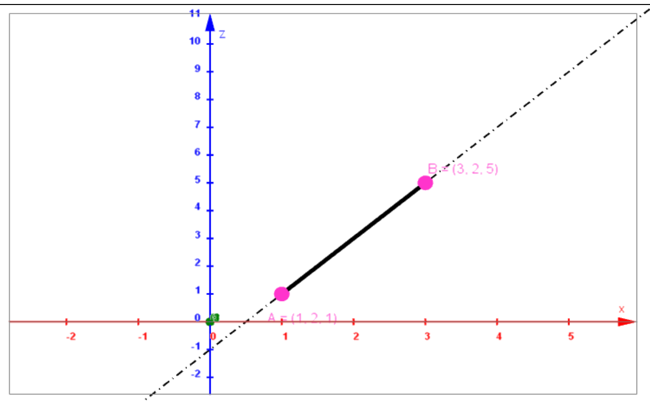
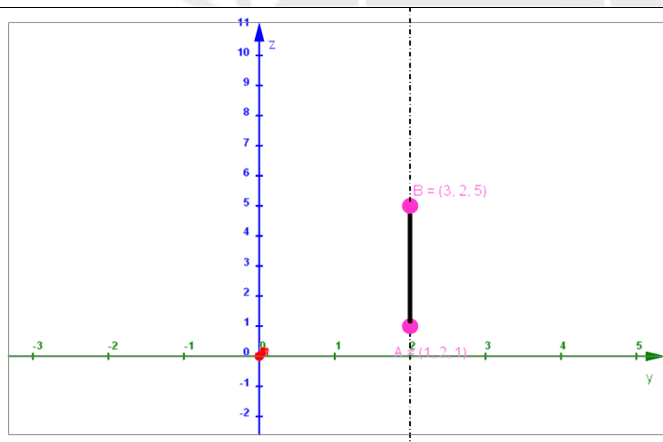
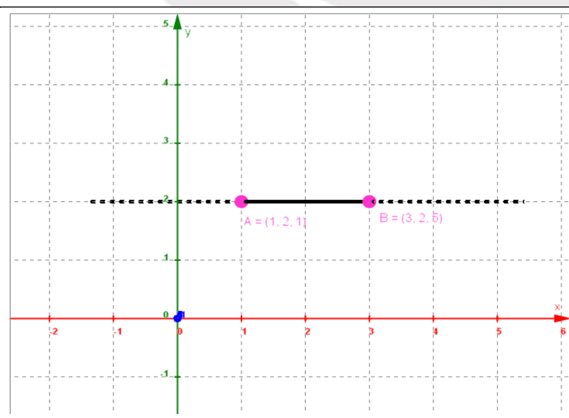
Figura 32. *Actividad 1 - Parte B*



Para encontrar el valor de la pendiente, se espera que el sujeto inicialmente pueda realizar modificaciones ópticas y posicionales de la representación gráfica inicial, lo cual permita reconocer las variaciones que existan en relación a los ejes coordenados, para luego poder asociarlo con su conocimiento previo de cálculo de pendiente en 2D y dar como respuesta lo esperado, todo esto evidenciaría un desarrollo de su aprehensión operatoria al realizar modificaciones posicionales de tipo rotacional entorno a los ejes coordenados, como se aprecia en la tabla 9.

Tabla 9.

Aprehensión operatoria en relación a la Actividad 1 – Parte B

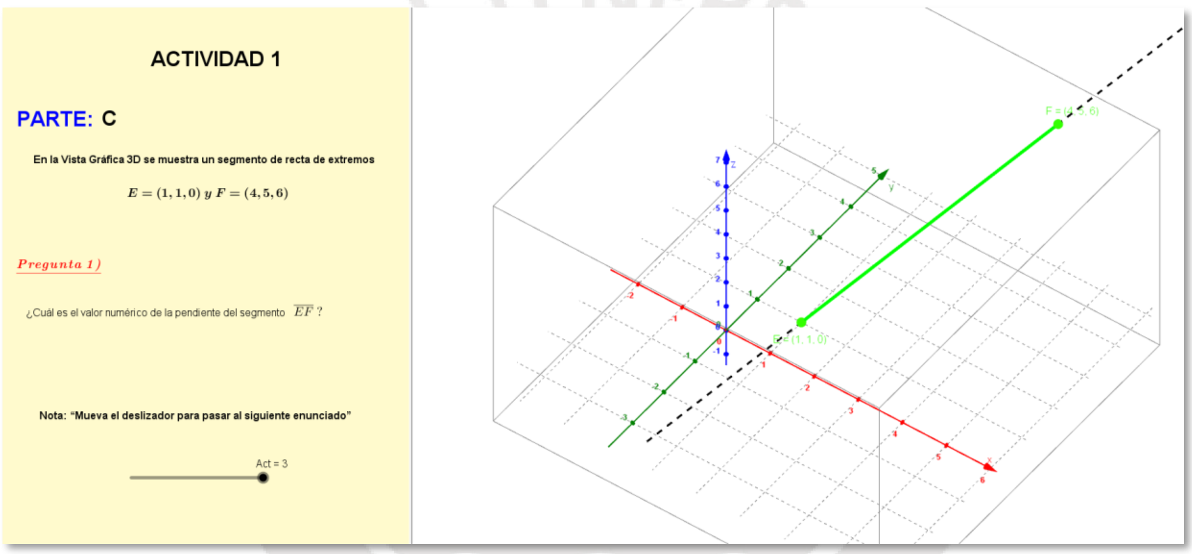
Posibles Modificaciones Posicionales posibles	**Observación**
	Modificación posicional de tipo rotacional en relación a una vista en el plano XZ
	Modificación posicional de tipo rotacional en relación a una vista en el plano YZ
	Modificación posicional de tipo rotacional en relación a una vista en el plano XY

En la tabla 9, tras las modificaciones realizadas se espera que el sujeto a partir de su aprehensión perceptiva observe que la recta tridimensional mantiene fija la componente "y" de sus puntos de paso, es decir, el sujeto plantea el desarrollo de la actividad como una donde la recta estuviera situada en un plano dimensional XZ, lo cual implicaría que la pendiente, sea expresada de la siguiente manera:

$$m_{AB} = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

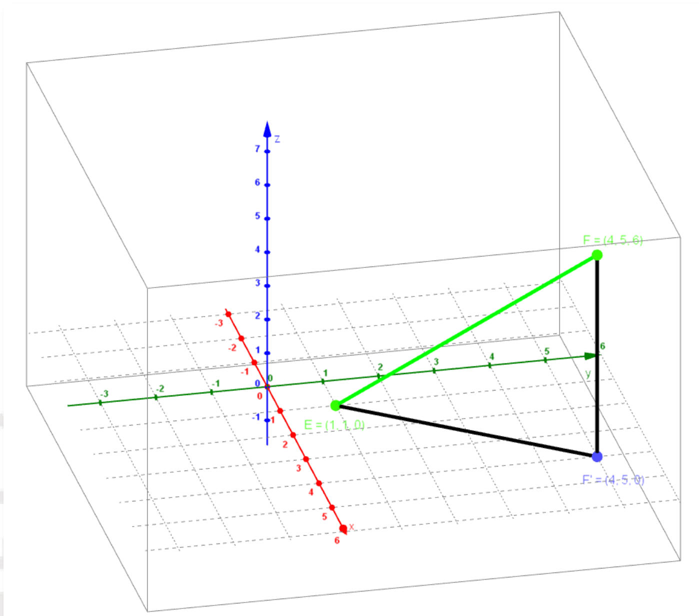
Lograr realizar estas acciones evidenciaría el desarrollo por parte del sujeto de su aprehensión discursiva. Finalmente, para la Parte C de la Actividad 1, se tiene una recta que pasa por los puntos E y F, cuyas 3 componentes de los puntos de paso de la recta son diferentes, como se aprecia en la figura 33.

Figura 33. *Actividad 1 - Parte C*



A diferencia de las actividades A y B, en esta situación el sujeto a partir de su aprehensión perceptiva podría observar que los puntos de paso E y F, son diferentes en sus tres componentes, lo cual implica que la variación horizontal no podría ser hallado de las formas anteriores; para encontrar el valor de la pendiente de la recta que pasa por E y F, el sujeto a partir de sus conocimientos previos de la manera de representar las variaciones verticales y horizontales por medio de un triángulo asociado a la recta, podría también hacer uso de eso, para representar la variación vertical (en el eje Z) y la variación horizontal por medio de un triángulo rectángulo con hipotenusa EF y base EF', es decir, el punto $F' = (4,5,0)$ es la proyección del punto de paso F a una altura igual en la componente Z correspondiente al punto de paso E, en este caso sería la proyección sobre el plano XY; cuya representación gráfica podría ser representado en la vista gráfica 3D, para esto, se espera un posible uso de la herramienta *segmento*  del GeoGebra para formar los catetos que permitiera reconocer los valores necesarios para formar la pendiente de la recta 3D, como se aprecia en la figura 34; si se lograra dicha construcción por parte del sujeto esto evidenciaría un desarrollo de su aprehensión discursiva al evocar conceptos que no son percibidos a primera impresión pero son percibidos a partir de la construcción realizada.

Figura 34. *Uso de herramienta del GeoGebra para el cálculo de la pendiente en EF*



A partir del triángulo rectángulo construido, como se aprecia en la figura 34, se espera que el sujeto pueda reconocer la variación vertical como la diferencia de las componentes en el eje Z de los puntos E y F', $\Delta z = z_1 - z_0 = 6 - 0 = 6$, y el desplazamiento horizontal, será la distancia entre los puntos situados en el plano XY, obteniendo el valor de:

$$d(E, F') = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$$

Finalmente, se concluye que la $m_{EF} = \frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{6}{5}$, todos los pasos expresados anteriormente permitirían evidenciar por parte del sujeto un desarrollo de su aprehensión discursiva y perceptiva ya que se evoca sus conocimientos internos y necesarios concernientes para dar resolución a la actividad.

Seguidamente veamos la Actividad 2 y su posterior análisis previo.

ACTIVIDAD 2

Abra el archivo ***Actividad2.ggb*** (de manera expandida en la ventana del ordenador) y responda las siguientes preguntas:

a) En el plano mostrado, se aprecia la recta “L_x” que pasa por el punto $(0,0,0)$ y está ubicada en dirección al eje X. ¿Cuál es la pendiente de la recta L_x?. Explique.
b) Si consideramos un punto arbitrario “$C = (x_0, y_0, z_0)$” ubicado dentro del plano, ¿Qué otras rectas que pasen por “C”, tendrían igual pendiente que L_X? Puede apoyarse en las herramientas propias del software para explicar su respuesta.
c) Si llamamos la pendiente calculada en la parte a), como pendiente de la recta en dirección al eje X (m_x), ¿cuál será el valor de la pendiente de la recta, pero ahora en dirección al eje Y (m_y), teniendo como un punto de paso el origen de coordenadas? Explique.
d) Si partimos arbitrariamente de cualquier punto $C = (x_0, y_0, z_0)$ ubicado en el plano y nos desplazamos una distancia de 2 unidades paralela al eje X, ¿En cuánto variaría el desplazamiento vertical?, de manera general, exprese la variación del desplazamiento vertical al desplazarnos una distancia Δx paralela al eje X. Explique.
e) Considerando lo analizado en la actividad anterior, ¿Cuál es la variación vertical en el eje “Z” al desplazarnos de un punto arbitrario $C = (x_0, y_0, z_0)$ ubicado en el plano, hacia 3 unidades paralela al eje “X” y seguidamente 2 unidades paralela al eje “Y”? Explique.

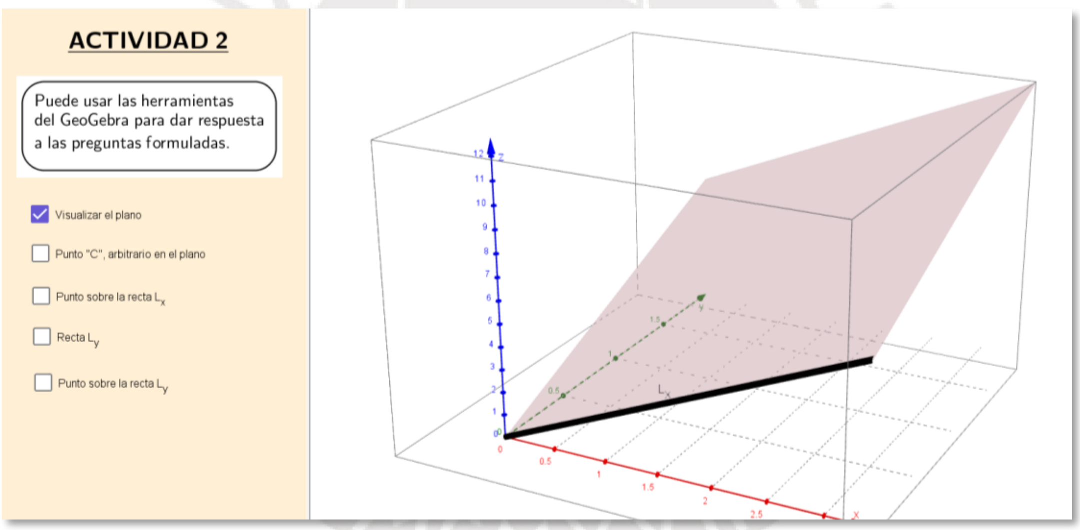
La Actividad 2 consta de cinco preguntas, ordenadas de manera secuencial, en la cual se busca que el sujeto pueda analizar el concepto de variación vertical que se produce en un plano, cuando surgen cambios de manera independiente en dirección a los ejes coordenados, y también se presenta una actividad final en la cual se pide calcular la variación vertical cuando se tiene un desplazamiento de manera simultánea en ambos ejes coordenados, lo cual posteriormente a ello, se podrá apreciar el paralelo que existe al plantear dicha solución como al ser presentado por medio de la representación algebraica de la derivada direccional. En cada una de las actividades, se busca identificar las aprehensiones que los sujetos desarrollaran en el proceso de dar solución a las actividades que se les plantea. El análisis esperado por parte de los participantes se detalla a continuación.

Análisis de la pregunta 2a)

> Abra el archivo ***Actividad2.ggb*** (de manera expandida en la ventana del ordenador) y responda las siguientes preguntas:
>
> a) En el plano mostrado, se aprecia la recta “L_x” que pasa por el punto $(0,0,0)$ y está ubicada en dirección al eje X. ¿Cuál es la pendiente de la recta L_x?. Explique.

Al abrir el archivo *Actividad2.ggb,* se tiene la siguiente representación gráfica de un plano en el primer octante, como se aprecia en la figura 35, adicionalmente de contar con unas casillas de control cuya función está asociado para ser usados para visualizar u ocultar parte de los objetos inmersos a las actividades que prosiguen.

Figura 35. *Representación gráfica de un plano en el primer octante de la Actividad2.ggb*



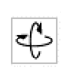
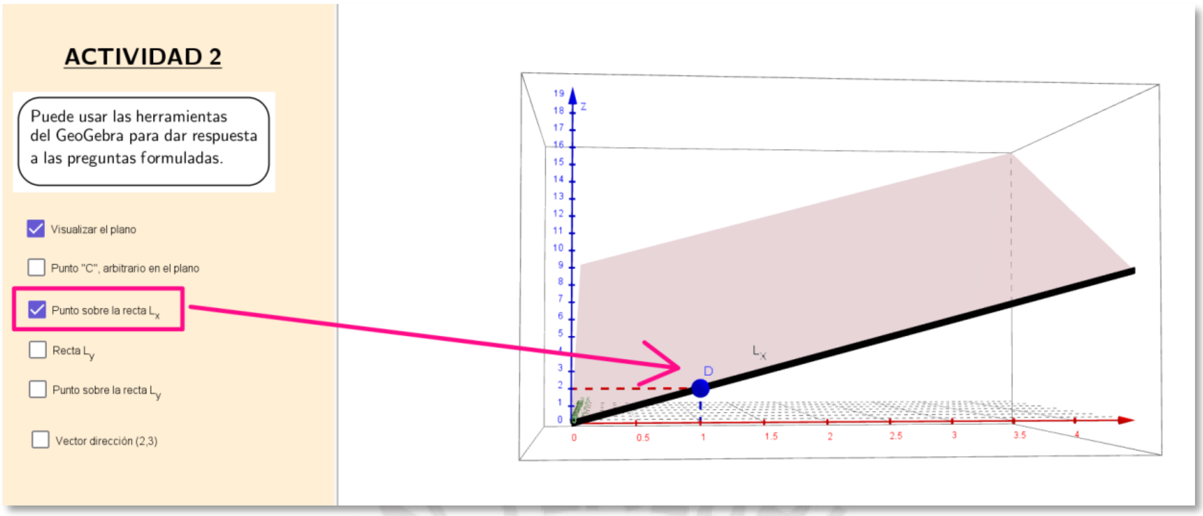
La pregunta 2a), tiene como objetivo de actividad el calcular la pendiente de la recta L_x (recta de color negro), para tal efecto se espera que el sujeto realice tratamientos ligados a la representación gráfica del plano dentro de la *Vista Gráfica 3D* como el rotar alrededor del sistema de coordenadas, por medio de la herramienta *Rota la Vista Gráfica 3D* , o dar una mejor acercamiento de la recta por medio de las herramientas *Aproximar / Alejar* , o hacerlo de manera directa por medio de los botones del *mouse,* para que se permita observar las variaciones en los ejes considerando un punto de paso en L_x, lo cual dichas acciones está asociado al desarrollo de su aprehensión operatoria, como se aprecia en la figura 36.

Figura 36. *Aprehensión operatoria de la representación gráfica de la Actividad2.ggb.*



En la figura 36, se presenta un desarrollo de la aprehensión operatoria que se tendría realizado por parte del sujeto, al modificar la representación gráfica por medio de rotaciones en los ejes coordenados para lograr obtener así una perspectiva de manera 2D a la recta L_x, además de la activación de la casilla que nos permita apreciar un punto de paso D sobrepuesto en dicha recta, posteriormente a ello calcular las variaciones; se espera que, a partir de lo realizado el sujeto logre identificar la recta L_x (como se aprecia en la figura 36) como si se tratase de una recta en el plano 2D, lo cual sería una evidencia de su aprehensión perceptiva, lo cual permita asociar el concepto de pendiente de una recta pero bajo una perspectiva tridimensional, es decir, identificaría la pendiente de la recta L_X , como la variación de las "ordenadas" sobre "abscisas" pero desde una perspectiva vista en el plano "XZ", obteniéndose un valor de 2. Si el sujeto logra dar dicha respuesta de acuerdo a lo planteado, diremos que esto lo realizó a partir de su aprehensión discursiva ya que evoca propiedades matemáticas que no eran permisibles a primera instancia relacionando a la actividad propuesta.

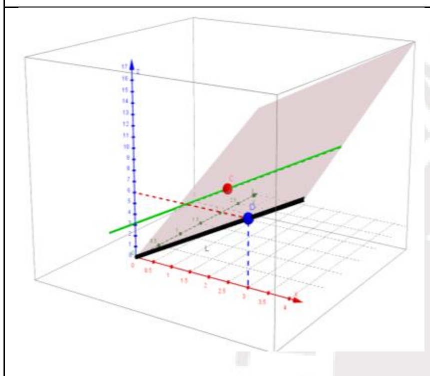
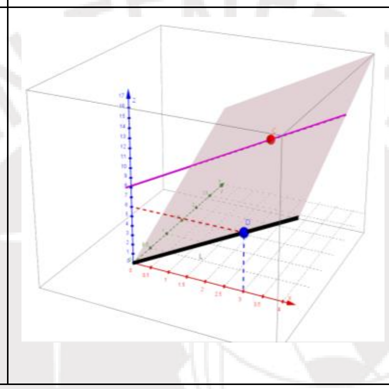
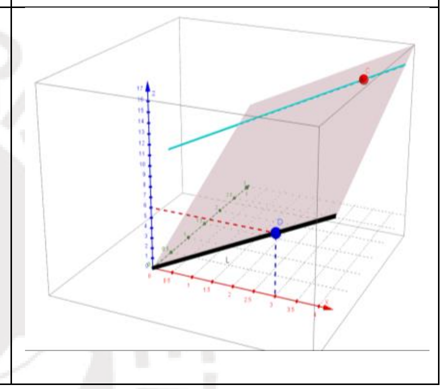
Análisis de la pregunta 2b)

b) Si consideramos un punto arbitrario "$C = (x_0, y_0, z_0)$ " ubicado dentro del plano, ¿Qué otras rectas que pasen por "C", tendrían igual pendiente que L_X?.

En la pregunta 2b), se busca que el sujeto a partir de sus conocimientos de pendiente de una recta en el plano 2D, identifique que aquellas que comparten dicha características son las rectas que sean paralelas a la recta "L_x" (pero ahora desde un perspectiva 3D), lo cual permitiría evidenciar un desarrollo de su aprehensión discursiva y en base a esto, el sujeto podría construir dichas rectas ayudado por el GeoGebra, por ejemplo, haciendo uso de la herramienta *Paralela* , trazaría rectas paralelas a "L_x" que pasen por C, (previamente activando la casilla de visualización del punto C en el plano), lo cual permitiría concluir que todas estas rectas trazadas tienen las misma pendiente que L_x. Lo descrito anteriormente se presenta en la tabla 10 (el punto arbitrario "C" es el de color rojo ubicado en las rectas representadas),

Tabla 10.

Representación gráfica de rectas paralelas sobre un mismo plano

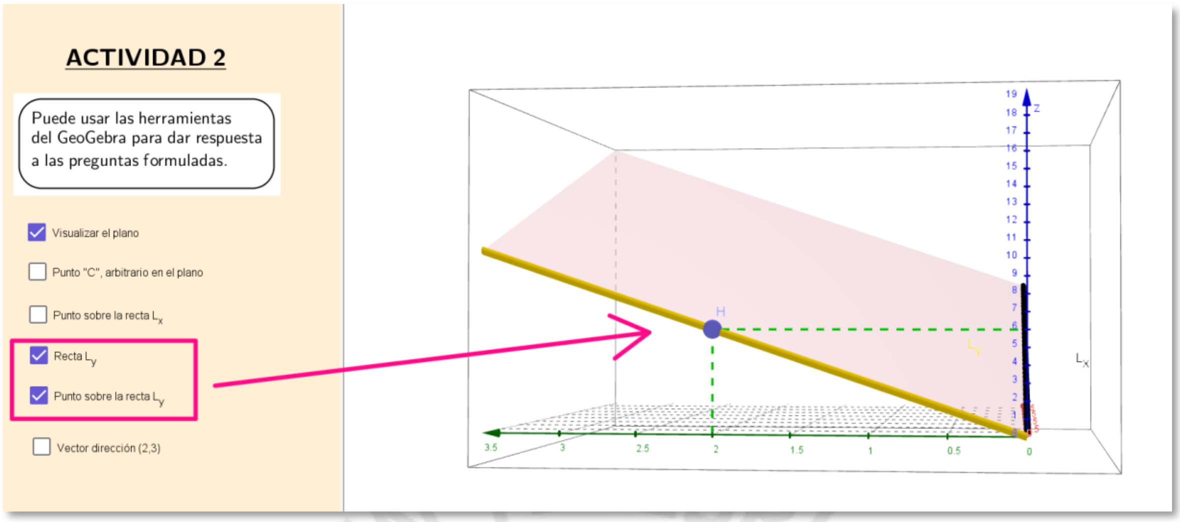
Opción 1	**Opción 2**	**Opción 3**
		

Análisis de la pregunta 2c)

c) Si llamamos la pendiente calculada en la parte a), como pendiente de la recta en dirección al eje X (m_x). ¿Cuál será el valor de la pendiente de la recta, pero ahora en dirección al eje Y (m_y), teniendo como un punto de paso el origen de coordenadas? Explique.

En la pregunta 2c), para dar respuesta lo planteado se espera que el sujeto pueda movilizar lo analizado en las actividades anteriores, pero ahora para una perspectiva bidimensional en un plano YZ, para encontrar el valor de la pendiente m_y, lo cual al igual que la actividad anterior abarcaría el desarrollo de su aprehensión operatoria al realizar modificaciones de tipo rotación a la representación gráfica de la recta, para obtener una mejor representación gráfica de lo analizado, como se aprecia en la figura 37.

Figura 37. *Modificación rotacional de la representación gráfica para la actividad 2c)*



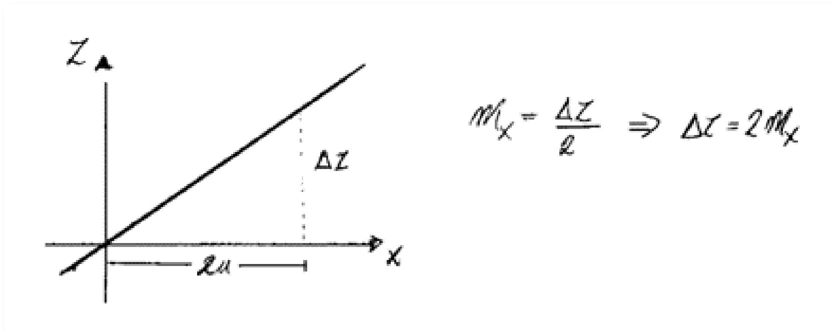
Cabe resaltar que, para la representación de la recta en dirección al eje Y (recta de color mostaza), el sujeto previamente activaría la casilla de "Recta L_y" para conocer las respectivas componentes en un punto arbitrario "H" sobrepuesto en la recta L_y como se aprecia en la figura 37. Ahora, al igual que la actividad a), se espera que el sujeto, tras rotar la presentación gráfica y posicionarlo en una vista al plano YZ (desarrollo de su aprehensión operatoria) y a partir de su aprehensión perceptiva pueda relacionar dicha recta como una recta en 2D, además de reconocer el valor de la pendiente m_y como la razón de cambio de la variación vertical de la recta L_y (sobre el eje Z) en dirección al eje Y, obteniendo así el valor de 3, cuyas acciones para lograr conjeturar su solución evidenciaría observar el desarrollo de su aprehensión discursiva.

Análisis de la pregunta 2d)

d) Si partimos arbitrariamente de cualquier punto $C = (x_0, y_0, z_0)$ ubicado en el plano y nos desplazamos una distancia de 2 unidades paralela al eje X, ¿En cuánto variaría el desplazamiento vertical?, de manera general, exprese la variación del desplazamiento vertical al desplazarnos una distancia Δx paralela al eje X. Explique.

La pregunta 2d), se espera que a partir de lo obtenido en la actividad 2a con respecto a la variación vertical en dirección al eje X que resultó igual a $m_x = 2$, pueda asociarlo con el valor del desplazamiento vertical para cualquier desplazamiento horizontal posible; para esto un posible camino de resolución sería dando una representación gráfica a lápiz y papel de la pendiente de una recta en 2D, lo cual permita identificar la variación vertical a partir de su "horizontal", lo cual evidenciaría el desarrollo de su aprehensión discursiva, ya que evoca propiedades en relación a pendiente de una recta en 2D, pero ahora asociándolo desde una mirada tridimensional, es decir se tendría una posible estrategia de resolución como se aprecia en la figura 38.

Figura 38. *Representación gráfica y algebraica de la pendiente de una recta en 2D*



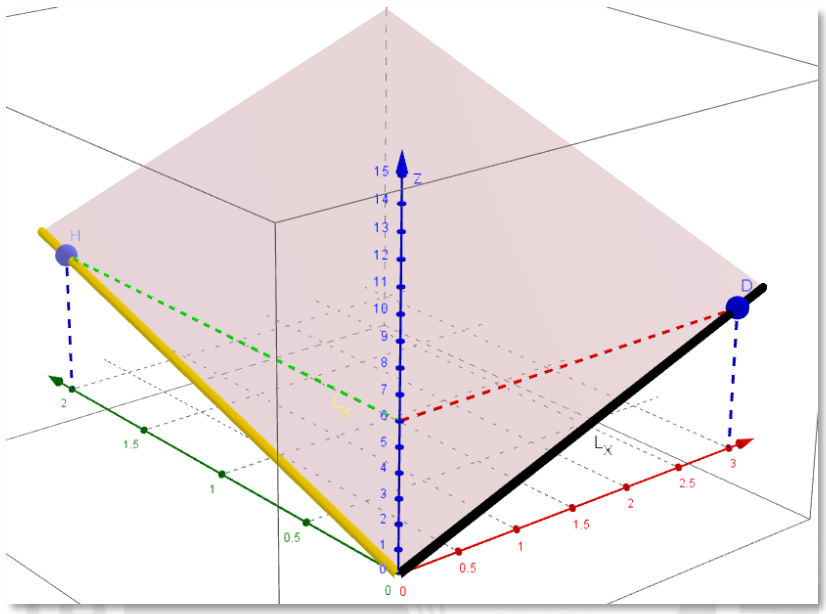
Por medio de un tratamiento en la representación algebraica de la pendiente de una recta como se detalla en la figura 38, se llegaría a asociar el valor del desplazamiento vertical a partir de su desplazamiento horizontal como $\Delta z = 2m_x$, lo cual permite en nuestra actividad se tendrá como respuesta que la variación en el eje Z cuando se tiene un desplazamiento horizontal de 2 unidades como $\Delta z = 2(2) = 4u$. De manera general, y a partir de lo analizado anteriormente, el sujeto lograría expresar la variación vertical que se tendría al desplazarse una distancia Δx en dirección al eje X, como $\Delta z_x = m_x\,\Delta z$.

Análisis de la pregunta 2e)

e) Considerando lo analizado en la actividad anterior, ¿Cuál es la variación vertical en el eje "Z" al desplazarnos de un punto arbitrario $C = (x_0, y_0, z_0)$ ubicado en el plano, hacia 3 unidades paralela al eje "X" y seguidamente 2 unidades paralela al eje "Y"? Explique.

Para esta parte, se espera por parte del sujeto que logre reconocer que la variación vertical en relación al eje "Z", resulte de la suma de la variación que se produce en el eje "Z" en dirección a un desplazamiento en el eje "X" (Δz_x), con la variación que se tiene en el eje "Z" en dirección a un desplazamiento en el eje "Y" $\left(\Delta z_y\right)$, es decir $\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y$. Para esto, se esperaría que el sujeto considere como punto arbitrario al origen de coordenadas $(0,0,0)$, además para lograr una mejor perspectiva de esto, realizar una modificación de la representación gráfica tanto en la escala del eje "X" para 3 unidades de distancia y una modificación gráfica de la escala del eje “Y” para 2 unidades de distancia, lo cual evidencia su aprehensión operatoria al realizar acercamientos del plano en dirección a los ejes coordenados, además de una modificación rotacional para tener otra perspectiva de lo analizado, obteniéndose como referencia a lo presentado en la figura 39.

Figura 39. *Configuración de la escala en los ejes coordenados para la actividad 2 e)*



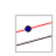
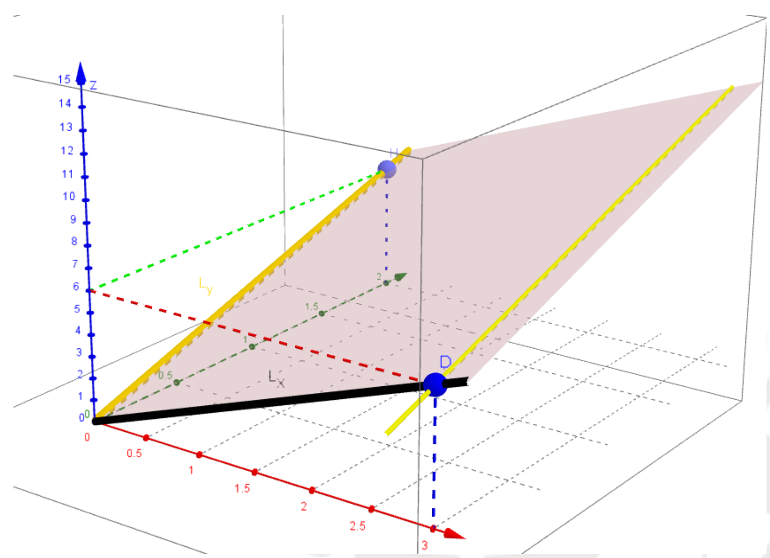
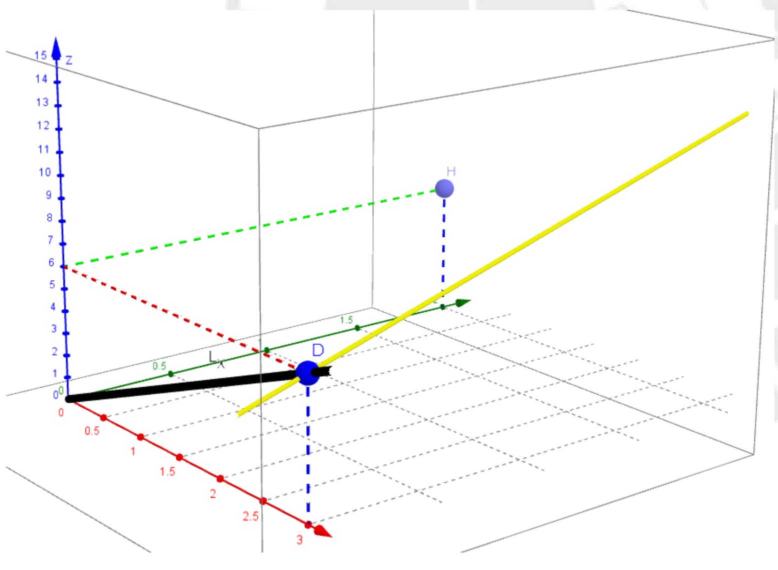
Posteriormente, el sujeto podría representar una recta paralela a L_y pero que ahora pase por el punto D (que está ubicado a 3u en el eje X), por medio de la herramienta *Paralela*  del GeoGebra, para observar la variación vertical que se tiene en el eje “Z”, como se aprecia en la tabla 11, todo esto evidencia el desarrollo de su aprehensión secuencial relacionado a la construcción de dicha recta paralela.

Tabla 11.

Representación gráfica realizado para la actividad 2 e)

Representación gráfica	Detalle
	Construcción de una recta paralela a L_y que pase por el punto D que está ubicado a 3 unidades a partir de $(0{,}0{,}0)$ en dirección al eje X.
	Rectas paralelas a los ejes coordenados unidas de manera secuencial.

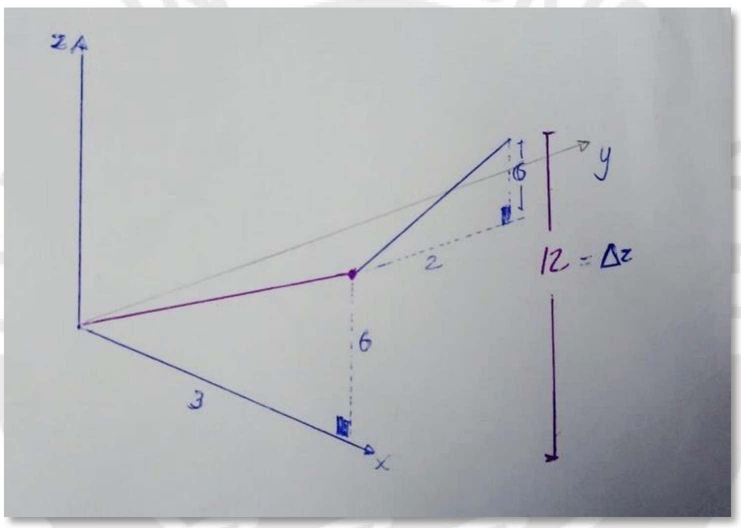
Finalmente, para conocer la variación vertical que se tiene al recorrer una distancia en dirección al eje "X" de 3 unidades seguido de una distancia de 2 unidades en dirección al eje "Y", se espera que el sujeto, identifique a partir de su aprehensión discursiva que la suma de los cambios verticales que se tiene en cada tramo de las rectas L_x y L_y, permite conocer el cambio vertical total, es decir, cuando se genera un desplazamiento de 3 unidades en dirección al eje

"X", su variación vertical será, $\Delta z_x = 3m_x$, de igual manera al tener un desplazamiento seguido de 2 unidades en dirección al eje "Y", su variación vertical estará dado por $\Delta z_y = 2m_y$, obteniendo así la variación total vertical (Δz) expresado de la siguiente manera por su representación algebraica como:

$$\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y = \mathbf{3}m_x + \mathbf{2}m_y = \mathbf{3}(2) + \mathbf{2}(3) = 12\,u$$

Cabe resaltar que, de una manera directa por parte del sujeto, también podría darse el caso que el valor de la variación total vertical (Δz), sea calculado a partir de su aprehensión discursiva, tras reconocer que la altura final que se tiene al recorrer ambas rectas es la suma de alturas en cada tramo, como se aprecia en la figura 40.

Figura 40. *Apreciación de la variación vertical a partir de la altura total*



La figura 40, es una representación gráfica diseñada a lápiz y papel que realizaría el sujeto para dar respuesta a lo solicitado pero diseñado posteriormente a la construcción presentada en la tabla 11, todo esto para conocer la variación vertical como la altura total después de recorrer ambos tramos de recta.

Finalmente, de esta manera se espera que lo presentado en esta secuencia de actividades pueda permitir al sujeto asociar el significado geométrico que se tiene de la definición algebraica de la derivada direccional, a partir del concepto de pendiente de una recta en 3D y las pendientes en dirección a los ejes coordenados visto en un plano, además de evidenciar por medio de estas actividades el desarrollo de las aprehensiones que emergerían del sujeto a partir de su planteo de resolución, donde moviliza conceptos inmersos a rectas en 3D y 2D como se apreció en la descripción de los análisis preliminares detallados anteriormente, cabe resaltar que en cada una de las actividades, por otro lado, también se observa aprecia la manera de cómo las aprehensiones surgen de manera natural y estas se articulan de secuencialmente para dar solución a cada una de las actividades propuestas, es decir, estas aprehensiones no son ajenas una de la otra, sino, son necesarias para una mejor comprensión de las características geométricas que se tiene de la representaciones presentadas, así como de lo esencial para conjeturar una camino de solución.

Seguidamente, se presenta lo realizado por los docentes participantes en la fase experimental en relación al diseño de actividades anteriormente presentado.

3.5 Interpretación de resultados obtenidos en la Fase Experimental

En esta sección, se describe los resultados obtenidos a partir del desarrollo de actividades realizadas en la entrevista semiestructurada por parte de los sujetos de experimentación, cabe resaltar que a partir de nuestro análisis esperado se buscó identificar las posibles acciones realizadas por parte de los sujetos los cuales estén relacionados a los objetivos de tesis, por tal razón, parte de la entrevista donde se aprecie dichas acciones será redactada para cada sujeto de experimentación y finalmente haremos una contraste por parte de las acciones realizadas tanto de Josué y Caleb desde la perspectiva de nuestro marco teórico y objetivos de tesis.

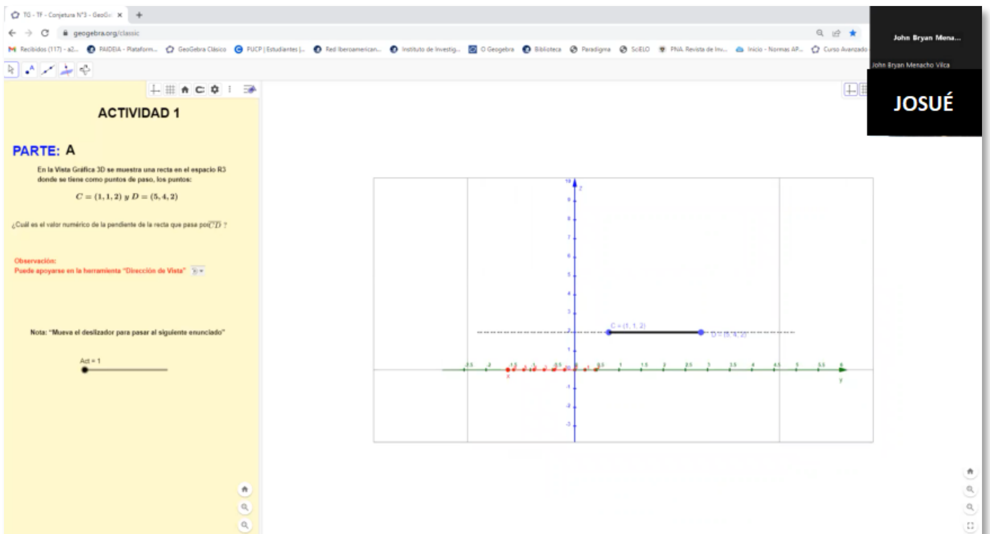
Análisis de resultados de la Actividad 1a por parte de Josué

A primera instancia para la realización de lo pedido en la actividad 1a, se observó el asombro de parte de Josué al pedir el cálculo de la pendiente de la recta en 3D, tal como se muestra en la siguiente transcripción:

- Investigador: ¿Podría dar el valor de la pendiente de la recta mostrada?
- Josué: ¿Pendiente de una recta en 3D?, eso nunca había realizado, ¿Es posible hacer eso?, sé que es una recta en el espacio y podría calcular el vector dirección, veo unos puntos de paso, pero ¿pendiente?, yo sé que para dos dimensiones se puede calcular con la diferencia de coordenadas en “Y” sobre la diferencia de coordenadas en “X”, pero en tres dimensiones no habría como dividir ya que son tres puntos.

De lo argumentado anteriormente se puede apreciar por parte de Josué una evidencia de su aprehensión perceptiva al identificar la recta como una en el espacio 3D, además por lo manifestado a partir de la representación gráfica, se aprecia su aprehensión discursiva al evocar propiedades matemáticas que no son identificadas a primera instancia; como el argumentar el cálculo del vector dirección, la ecuación vectorial de la recta y el cálculo de pendientes como un cociente de variaciones. Posteriormente a la aclaración de lo que debía realizarse en la actividad y al ser comprendido por parte de Josué, se puede apreciar la manipulación de las herramientas del GeoGebra por parte de este; realizando modificaciones posicionales de tipo rotación, al observar cómo rota los ejes coordenados para posicionarlo desde una perspectiva que esta se sitúe en una vista frontal bidimensional, lo cual evidencia un desarrollo de su aprehensión operativa, como se aprecia en la figura 41.

Figura 41. *Acción realizada en la actividad 1a por parte de Josué*



[segunda parte de la entrevista realizada a Josué]

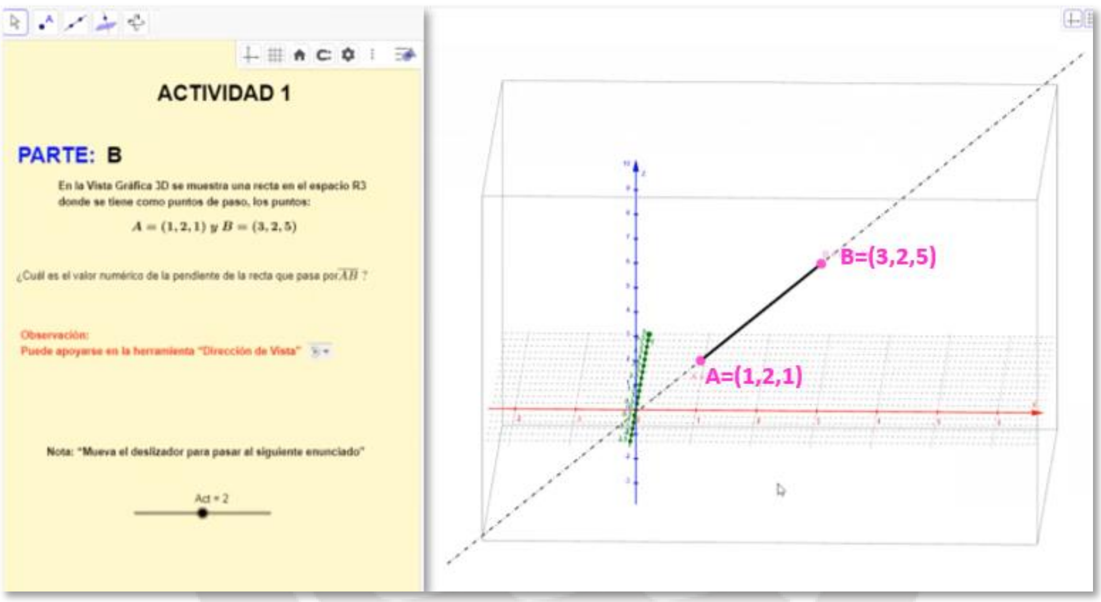
- Investigador: ¿Que puedes concluir ahora al hacer esas rotaciones?
- Josué: Se observa que los puntos de paso tienen la misma componente en el eje Z, y si lo vemos desde una perspectiva "desde arriba", se puede apreciar que la recta esta como inmersa en un plano $z = 2$, la cual es paralela al plano XY, si es así, la variación vertical en el eje Z sería cero, concluyendo que a partir del concepto de pendiente de una recta el resultado sería cero.

Lo observado anteriormente nos permite apreciar que a partir de la modificación posicional de la recta, es decir su aprehensión operatoria, conlleva a Josué el identificar la recta como una inmersa en un plano $z = 2$, lo cual es evidencia de su aprehensión perceptiva, y a partir de esta reconoce las variaciones respectivas para expresar el valor de la pendiente de la recta, lo cual está asociado al desarrollo de su aprehensión discursiva, obteniendo así lo pedido en la actividad, pero, apreciando que para dicho logro, existe una coordinación de sus aprehensiones desarrolladas de manera secuencial.

Análisis de resultados de la Actividad 1b por parte de Josué

A raíz de lo realizado en la primera actividad, para esta segunda parte no se tuvo mucha dificultad por parte de Josué ya que a partir de su aprehensión perceptiva pudo observar, que la componente en “Y” de los puntos de paso en la recta se mantiene constante, lo cual fue posible para Josué situarla desde una perspectiva bidimensional sobre el plano XZ; lo cual el realizar modificaciones posicionales de tipo rotación a la representación gráfica evidencia el desarrollo de su aprehensión operatoria, como se puede apreciar en la figura 42.

Figura 42. *Acción realizada en la actividad 1b por parte de Josué*



La siguiente transcripción describe parte de la entrevista formulada a Josué.

- Investigador: ¿Cuál sería la pendiente para este caso?
- Josué: A partir de esos puntos de paso, se aprecia que en Z está cambiando de 1 a 5, así como las componentes en X, por tal razón la pendiente sería, variación en Z sobre variación en X, de la forma normal que se calcula la pendiente de una recta en el plano, obteniendo el valor de 2.
- Investigador: ¿Por qué no consideró la componente en el eje Y?
- Josué: Como las componentes en el eje Y es constante, esto no afectaría el desplazamiento horizontal, por eso no se consideró. [señala la representación gráfica tras la modificación posicional realizada]

De lo manifestado anteriormente se observó que Josué sitúa la gráfica desde una perspectiva bidimensional en el plano XZ, donde a partir de este argumenta que allí se aprecia que no hay cambio en relación a la componente Y, por eso relaciona el cálculo de la pendiente de una recta a una manera tradicional; esta acción evidencia que al coordinar su aprehensión operatoria y su aprehensión discursiva logra encontrar una manera de dar solución a la actividad presentada, tal como se había supuesto en el análisis previo.

Análisis de resultados de la Actividad 1c por parte de Josué

Para la tercera parte, Josué observa que las tres componentes de los puntos de paso de la recta varían, por lo cual la estrategia de resolución que tenía en función a las actividades anteriores no era posible aplicarlo para este inciso, a continuación, se transcribe parte de la entrevista asociada a Josué.

- Investigador: ¿Cómo calcularíamos ahora la pendiente de esta recta?
- Josué: Aquí varía las 3 componentes [Se queda pensativo y hace algunas anotaciones], creo que sería 2 si lo viéramos desde una perspectiva en el plano XZ [sitúa la gráfica desde una visión del plano XZ], pero también saldría 1.5 desde esta perspectiva [sitúa la gráfica desde una visión del plano YZ]
- Investigador: ¿Entonces si es así, lo viéramos como para 2 direcciones?, es decir como si hubiera dos pendientes. ¿Pero de manera general, cómo sería?
- Josué: Exacto, parece que inclusive la variación en Y está asociado al desplazamiento en el eje X, como habíamos calculado, entonces si es así, seria $\frac{1}{2}$, es decir, $\frac{\frac{\Delta Z}{\Delta X}}{\Delta Y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Pero no estoy seguro si es lo correcto [El cociente mostrado anteriormente proviene de las anotaciones y cálculos que eran realizados por Josué]

Se observa por lo argumentado y las acciones realizadas por Josué, que a partir de su aprehensión operatoria (donde se apreció al haber realizado modificaciones posicionales de tipo rotación a la representación gráfica) y discursiva (al evocar propiedades matemáticas asociadas a la actividad), logra inferir que hay una variación vertical en Z la cual depende de lo que se varié en X e Y, pero la manera como trató de asociar la variación vertical en función de los cambios generados en los ejes X e Y de manera simultánea no era del todo correcto, ya que ambas pendientes son independientes una de la otra; esto es algo que en el análisis previo no se tomó en consideración pero, es una evidencia que a partir de las modificaciones posicionales realizadas a la representación gráfica (aprehensión operatoria), permite generar conjeturas asociadas a dichas acciones.

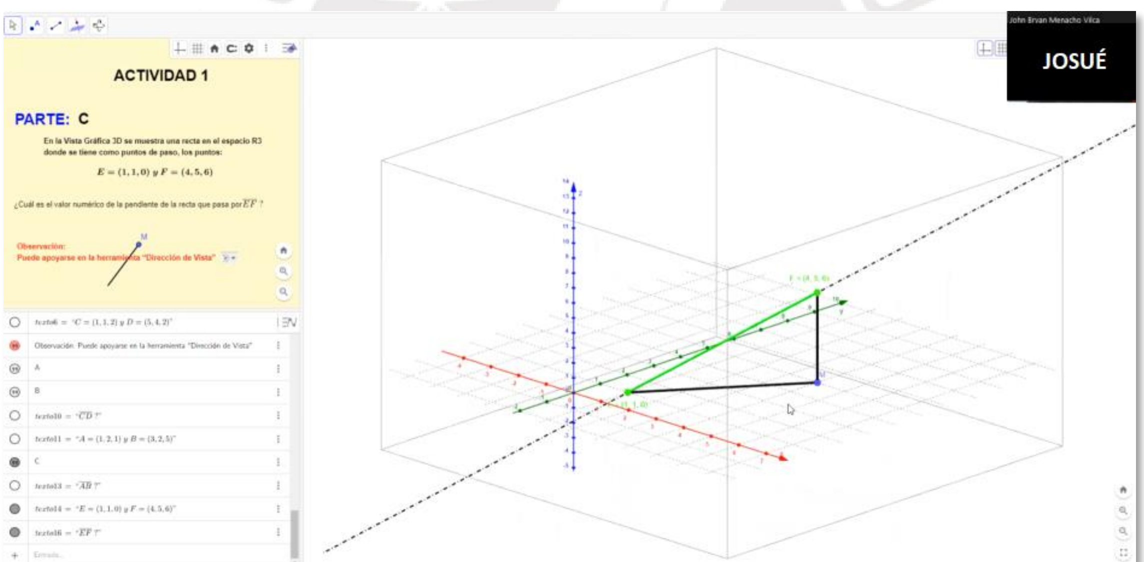
[segunda parte de la entrevista realizada a Josué]

Posteriormente a esto, se orienta al sujeto para que logre unificar dichas concepciones indicando que la variación horizontal sea vista desde una perspectiva al plano XY, es decir proyectar los puntos de paso de la recta en el plano.

- Josué: Si proyecto el punto de paso $F = (4, 5, 6)$ sobre el plano XY, ¿Eso en que me ayudaría? [queda pensativo observando la gráfica]
- Investigador: Y qué pasaría si trazaras un segmento horizontal a partir de lo proyectado y lo unimos como un triángulo rectángulo, ¿Te ayudaría en algo para visualizar las variaciones necesarias para el cálculo de pendiente?

Posteriormente a esto, y siguiendo las indicaciones dadas Josué representa dicho triángulo en la vista gráfica 3D a partir de las herramientas del GeoGebra, como se aprecia en la figura 43.

Figura 43. *Acción realizada en la actividad 1c por parte de Josué*



[tercera parte de la entrevista realizada a Josué]

- Investigador: Ahora, ¿Qué podrías deducir de lo realizado?
- Josué: En ese caso, la horizontal lo calcularía por distancia entre los puntos que están en el plano XY resultando así 5, es decir, la pendiente de la recta seria 6 (que corresponde a la variación vertical) sobre 5 (la variación horizontal, calculado a partir de la proyección).

De manera general para esta sección se puede concluir que la actividad misma invita a Josué a realizar modificaciones operatorias de tipo posicional a partir de su representación gráfica (aprehensión operatoria), para posteriormente evocar las propiedades matemáticas que no son perceptibles a primera instancia pero que es indispensable en esta parte (aprehensión discursiva) observándose así la manera como estas aprehensiones que surgieron por parte de Josué se coordinan para dar solución a la actividad, todo esto tal como se supuso de manera inicial a excepción de lo observado en el párrafo anterior. Por otro lado, cabe resaltar que la orientación dada para Josué, posteriormente permitieron dar por culminado la actividad, lo cual, si no hubiese habido dicha observación, no se hubiese llegado al objetivo de la actividad.

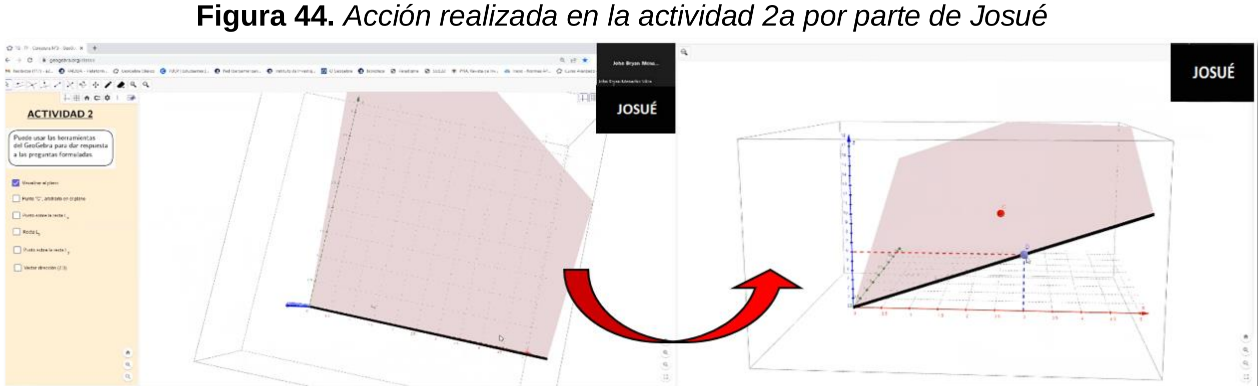
Análisis de resultados de la Actividad 2a por parte de Josué

A continuación, se transcribe parte de la entrevista realizada a Josué en la actividad 2a.

- Investigador: ¿Cuál sería la pendiente de la recta L_x?
- Josué: [realiza modificaciones posicionales a la representación gráfica, como se aprecia en la figura 44] por lo que se observa de esta manera la pendiente sería 2.
- Investigador: ¿Cómo así obtuvo la respuesta?
- Josué: Bajo esta perspectiva [señala la vista frontal situado en el plano XZ], se tendría una recta común, es decir variación en Z, sobre variación en X.

De lo realizado por Josué se aprecia que a partir de su aprehensión operatoria (al realizar modificaciones posicionales de tipo rotación a la representación gráfica para posicionarlo desde otra perspectiva), permite asociar dicha representación con un plano bidimensional, lo cual, permite evocar propiedades en referencia a pendiente de una recta en 2D (aprehensión discursiva), logrando así obtener el valor de la pendiente de la recta L_x, todo esto tal como se presentó en el análisis preliminar.

Figura 44. *Acción realizada en la actividad 2a por parte de Josué*

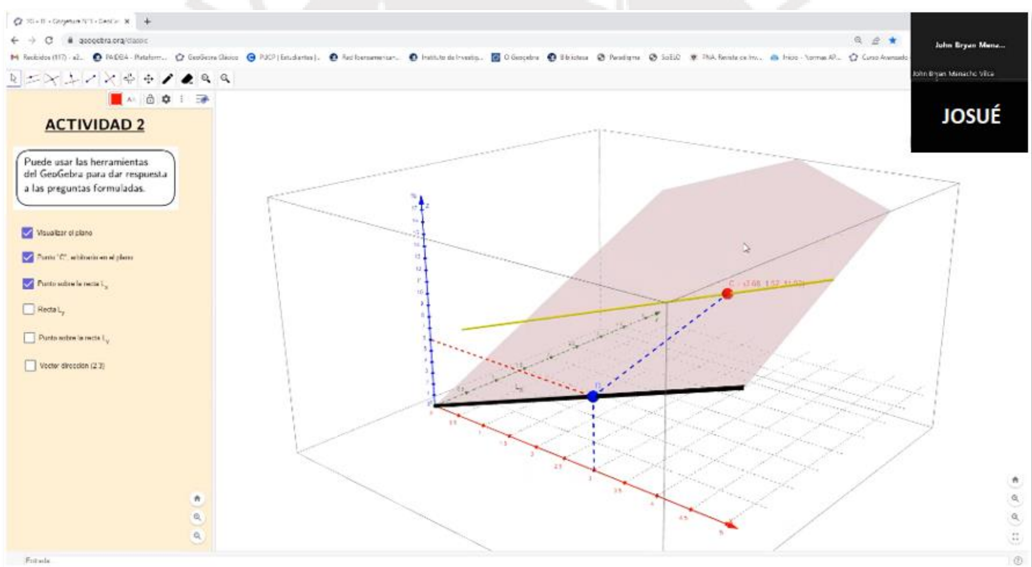


Análisis de resultados de la Actividad 2b por parte de Josué

Previamente se indica al sujeto los elementos necesarios que debe incluir por medio de la activación de las casillas de control para la realización de la actividad 2b, como se aprecia en la figura 44. En el siguiente párrafo se describe parte de la entrevista dada a Josué.

- Investigador: ¿Cómo serían aquellas rectas que tengan igual pendiente que L_x de acuerdo a las indicaciones dadas?
- Josué: Recta que tenga la misma pendiente que L_x y que pase por "C" [empieza a manipular la representación gráfica mientras deduce su estrategia], A ver, si realizo algunos trazos […], [tras ello, empieza a utilizar las herramientas del GeoGebra para trazar un segmento de recta que parte de "C" hacia un punto arbitrario de L_x como se aprecia en la figura 45]

Figura 45. *Acción realizada en la actividad 2b por parte de Josué*



[segunda parte de la entrevista realizada a Josué]

- Josué: Creo que cualquier recta que sea paralela a L_x y pase por el punto "C" tendrían la misma pendiente en dirección al eje X [usando la herramienta *Paralela* representa gráficamente dicha recta que se pedía]
- Investigador: ¿En base a que concluye que estas rectas tienen las mismas pendientes?
- Josué: Lo que estoy haciendo es "trasladar" la recta L_x en cualquier posición que pase por "C", es decir, estas rectas tienen el mismo vector dirección, pero, no necesariamente

estas rectas pueden estar en el plano, inclusive fuera de él para concluir que tendrán la misma pendiente en dirección al eje X.

De lo observado por parte de Josué, se puede observar que, a partir de la representación gráfica, infiere propiedades matemáticas que le permita asociar con la actividad, por ejemplo el hecho de mencionar el vector dirección para definir rectas paralelas en el espacio, además de asociarlo bajo una perspectiva 2D, al mencionar que las rectas paralelas tendrían la misma pendiente, todo esto evidencia el desarrollo por parte de Josué de su aprehensión discursiva, además que, a partir de esto, Josué representa dichas rectas que tienen la misma pendiente a L_x por medio del uso de las herramientas propias del GeoGebra; finalmente se observó que las acciones realizadas por parte de Josué fueron tal como se supuso al inicio de la experimentación a excepción de asociar de las propiedades vectoriales de una recta en el espacio, como el caso del vector dirección de una recta.

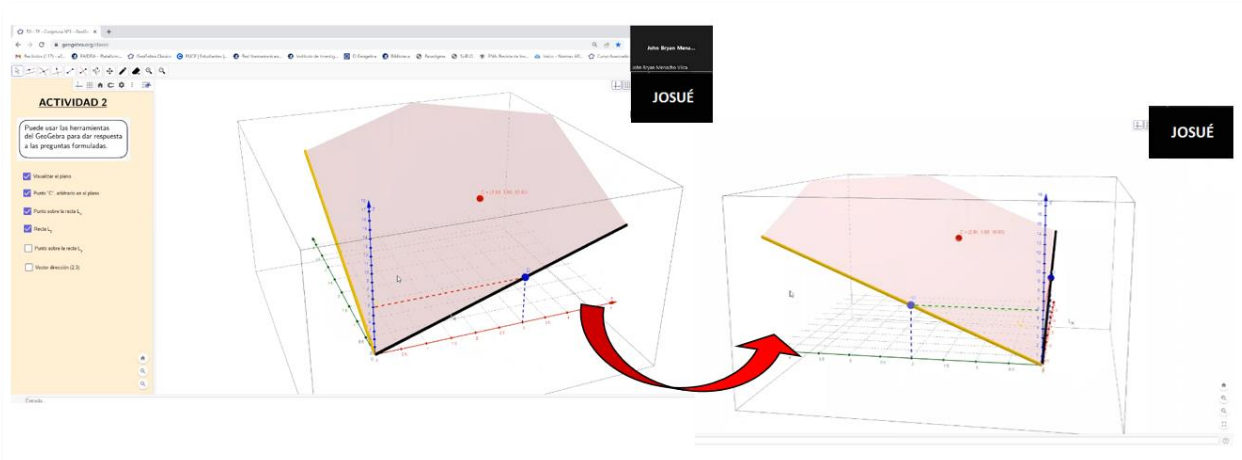
Análisis de resultados de la Actividad 2c por parte de Josué

A partir de lo analizado en la actividad 2a, Josué realiza modificaciones a la representación gráfica de tipo rotacional, situándola desde una perspectiva al plano YZ, lo cual posteriormente a partir de esto asocia el concepto de pendiente de una recta en 2D para el cálculo de la pendiente de la recta L_y , donde Josué expresa lo siguiente:

- Investigador: ¿Por qué realizaste dichas acciones en la representación gráfica?
- Josué: Porque a partir de esto, se aprecia a dicha recta como una superpuesta en un plano 2D, donde puedo inferir los desplazamientos horizontales y verticales, obteniendo así que el valor de la pendiente de L_y resulta ser 3, como se aprecia en la gráfica [señala la vista frontal en el plano YZ]

De lo observado en la actividad, la modificación realizada a la representación gráfica es una de tipo rotacional (aprehensión operatoria), permite a Josué asociar conceptos conocidos de pendiente de una recta en 2D, pero ahora para una perspectiva tridimensional, lo cual evidencia el desarrollo de su aprehensión discursiva al evocar propiedades matemáticas que no eran permisibles a inicio, todo esto al igual de lo planteado en análisis preliminar. Lo realizado por Josué se puede apreciar en la figura 46.

Figura 46. *Acción realizada en la actividad 2c por parte de Josué*



Análisis de resultados de la Actividad 2d por parte de Josué

A continuación, se transcribe parte de la entrevista dada a Josué.

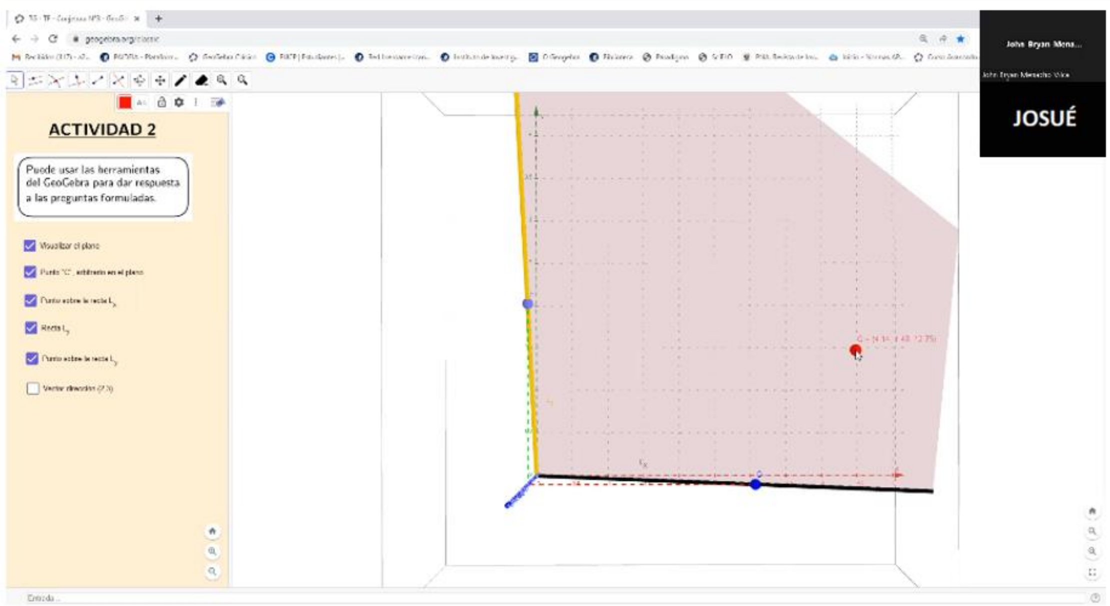
- Investigador: Si consideramos el punto "C" ubicado arbitrariamente en el plano, y nos movemos en dirección al eje X en 2 unidades, ¿Cuánto es la variación en el eje vertical?
- Josué: Por lo obtenido con respecto a la pendiente de L_x habría un desplazamiento de 4 unidades de forma vertical, ya que se observa que por cada unidad de desplazamiento en dirección al eje X, hay un cambio de 2 unidades en el eje Z.
- Investigador: Podría generalizar dicha situación si es que ahora hay desplazamiento Δx en el eje X.
- Josué: En ese caso, el desplazamiento en el eje Z seria $2\Delta x$

De lo argumentado anteriormente se observa que a partir de lo obtenido en el apartado anterior con respecto a la representación algebraica de la pendiente en dirección al eje X, Josué realiza un tratamiento a su representación algebraica de la pendiente de L_x que le permita identificar el desplazamiento vertical en función a la pendiente de recta en dirección al eje X, tal como se planteó en la parte preambular.

Análisis de resultados de la Actividad 2e por parte de Josué

Para la realización de la actividad 2e, se observó que Josué manipula la representación gráfica del plano por medio de modificaciones posicionales para posicionarlo desde una perspectiva bidimensional vista en el plano XY, como se aprecia en la figura 47, lo cual posteriormente empieza a hacer manipulaciones al punto “C” ubicado en el plano de acuerdo a lo solicitado en la actividad.

Figura 47. *1° Acción realizada en la actividad 2d por parte de Josué*



Parte de la entrevista dada a Josué será transcrito a continuación:

- Investigador: ¿Qué es lo que estas tratando de realizar? [Josué se queda en un momento de reflexión mientras observa la gráfica]
- Josué: Pensaba ubicar el punto “C” en un punto fijo del plano y a partir de ello mover en las direcciones que nos piden.

De lo planteado por Josué, se observa que la ubicación inicial del punto “C” fue el origen (0;0;0), posteriormente a esto realiza los traslados concernientes en dirección a los ejes coordenados para obtener el punto “C” cuya coordenada final aproximada es de (2.9; 1.95; 11.94)

- Josué: Se observa que aproximadamente hay un cambio vertical de 12 unidades, como indica la coordenada tras moverlo, pero no estoy del todo seguro porqué resulta esto.
- Investigador: ¿Y si consideras las pendientes que calculaste anteriormente, te serviría en algo?
- Josué: A ver, si es así, la pendiente en dirección al eje X es 2, lo cual se tiene que al moverse 3 unidades en el eje X, hay un cambio vertical de 6, y con la otra también sería 6, obteniendo la suma que sería un total de 12, pero […] no sé por qué se tendría que

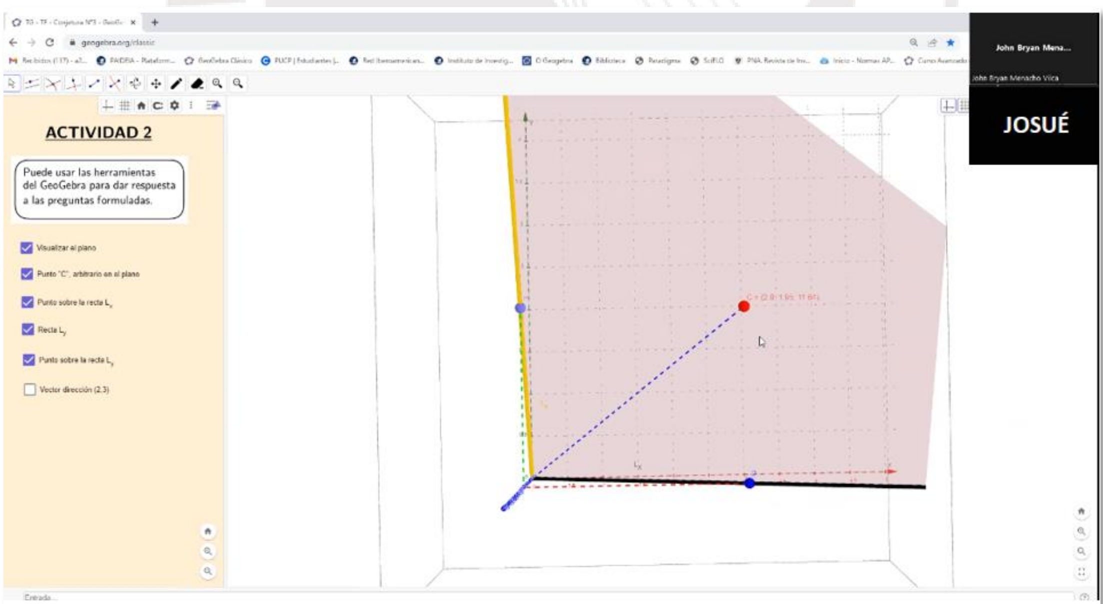
sumar ambos resultados, sé que por medio de la gráfica obtengo dicho valor, pero teóricamente todavía no lo entiendo.

De lo observado anteriormente, y tras las acotaciones pertinentes para lograr consolidar la razón del valor obtenido, se observó lo siguiente de parte de Josué.

- Josué: Ahora lo veo mejor, es como un vector dirección, pero que ahora lo estamos descomponiendo en 2 direcciones, tanto para el eje X como el de Y, por eso, se tiene que el desplazamiento vertical total sería la suma de ambos desplazamientos parciales.

De lo observado anteriormente se tiene que Josué asocia el desplazamiento en ambas direcciones como un vector dirección a partir de un punto arbitrario y posteriormente a esto, descomponer en dirección a los ejes coordenados como se aprecia en la figura 48, esto es algo que no habíamos supuesto en el análisis previo, ya que se evocar propiedades vectoriales de la recta para asociarlo con el desplazamiento solicitado, es decir, estas acciones de evocar propiedades geométricas que no eran evidentes en la actividad es una evidencia de su aprehensión discursiva por parte de Josué, lo cual permitió posteriormente a la resolución de la actividad.

Figura 48. *2° Acción realizada en la actividad 2e por parte de Josué*



En esta segunda parte describiremos los resultados obtenidos en la fase experimental ahora por parte de Caleb.

Análisis de resultados de la Actividad 1a por parte de Caleb

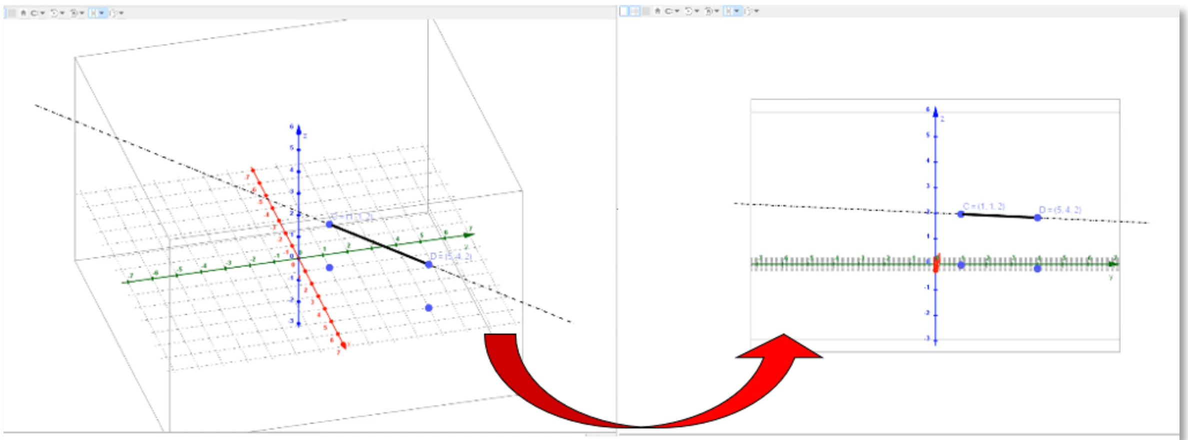
A primera instancia Caleb empieza a realizar modificaciones de tipo rotacional a la representación gráfica, lo cual se observa que busca inferir propiedades asociada a la actividad, a continuación, se transcribe parte de la entrevista dada a Caleb.

- Caleb: ¿Pero una recta en el espacio, tiene pendiente?
- Investigador: En este caso, ¿Como asociarías el concepto de pendiente para esta recta?
- Caleb: La pendiente es la diferencia de ordenadas sobre diferencia de abscisas, pero […] parece que no tiene mucho sentido aplicar esto en la actividad [empieza a observar las modificaciones rotacionales realizadas a la gráfica]
- Investigador: Para este caso, ¿Quién sería la “ordenada” y “abscisa”?
- Caleb: De aquí se puede observar que la “ordenada” seria la variación en el eje Z, que si podría calcular [señala la representación gráfica, pero desde una perspectiva donde no se aprecia que ambos extremos del segmento de recto son iguales], ahora, me faltaría saber el desplazamiento horizontal, es decir la “abscisa”.

Posteriormente a esto, Caleb observa que, para conocer el valor de la variación horizontal, proyecta dichos extremos del segmento de recta al plano XY, calculando dicho valor por medio de distancia entre 2 puntos. Pero tras el cálculo observa que la variación en la vertical resulta ser donde expresa lo siguiente:

- Caleb: La variación vertical sería 4, a no espera, es 0, entonces es una recta paralela al plano XY, lo cual la pendiente de dicha recta sería 0, […], no me percaté que era una recta paralela [empieza a rotar la representación gráfica a una posición donde se aprecia lo mencionado anteriormente, tal como se muestra en la figura 49]

Figura 49. *Acción realizada en la actividad 1a por parte de Caleb*



Tras lo analizado anteriormente se tiene que a partir de su aprehensión perceptiva, Caleb hace referencia a lo representado por una recta en el espacio, pero no encuentra la manera de poder hacer referencia a las variaciones verticales como horizontales, por tal razón tras realizar modificaciones de tipo rotacional a la gráfica (lo cual evidencia su aprehensión operatoria), infiere que la variación vertical es nula, donde logra asociar el valor de la pendiente como 0, todo esto a partir de sus concepciones previas analizadas a partir de la representación gráfica con relación al cálculo de pendiente de una recta (evidencia de su aprehensión discursiva), todo esto al igual de lo planteado inicialmente en los análisis previos.

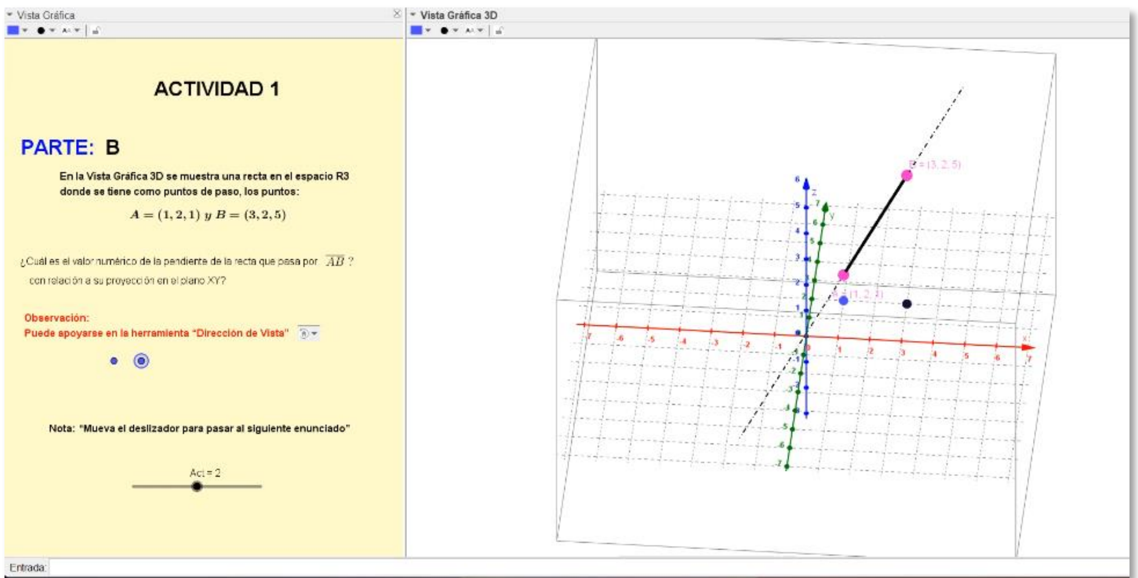
Análisis de resultados de la Actividad 1b por parte de Caleb

Para esta actividad, Caleb empieza realizando modificaciones por medio del GeoGebra a la representación gráfica inicial, realizando rotaciones para posicionarlo en una forma que permita asociarlo con el cálculo de pendiente de una recta, pero desde una perspectiva bidimensional, todo esto en base a lo ya realizado en la actividad anterior y, a partir de su intervención, se presentó el siguiente diálogo:

- Caleb: La variación vertical sería de 4, y para la horizontal se tendría 2 [señala la distancia proyectada sobre el plano XY después de haber realizado una modificación a la representación gráfica como se observa en la figura 50] de allí se obtiene que la pendiente es 2
- Investigador: ¿Cómo logro inferir este resultado?
- Caleb: Me pude percatar que, desde la primera perspectiva, parece que no se puede hacer mucho, y cometer incluso errores, pero al realizar modificaciones a la gráfica, puedo

extraer fácilmente lo que necesito para el cálculo de las variaciones desde una perspectiva bidimensional.

Figura 50. *Acción realizada en la actividad 1b por parte de Caleb*



A partir de las acciones realizadas por Caleb, podemos concluir que a partir del uso de las herramientas del GeoGebra al realizar modificaciones posicionales de tipo rotación y traslación a la representación gráfica (lo cual está asociado a su aprehensión operatoria), esto permitió que pueda extraer propiedades matemáticas que no era a primera instancia fácil de deducir para la resolución de la actividad, lo cual evidencia a partir de esto su aprehensión discursiva.

Análisis de resultados de la Actividad 1c por parte de Caleb

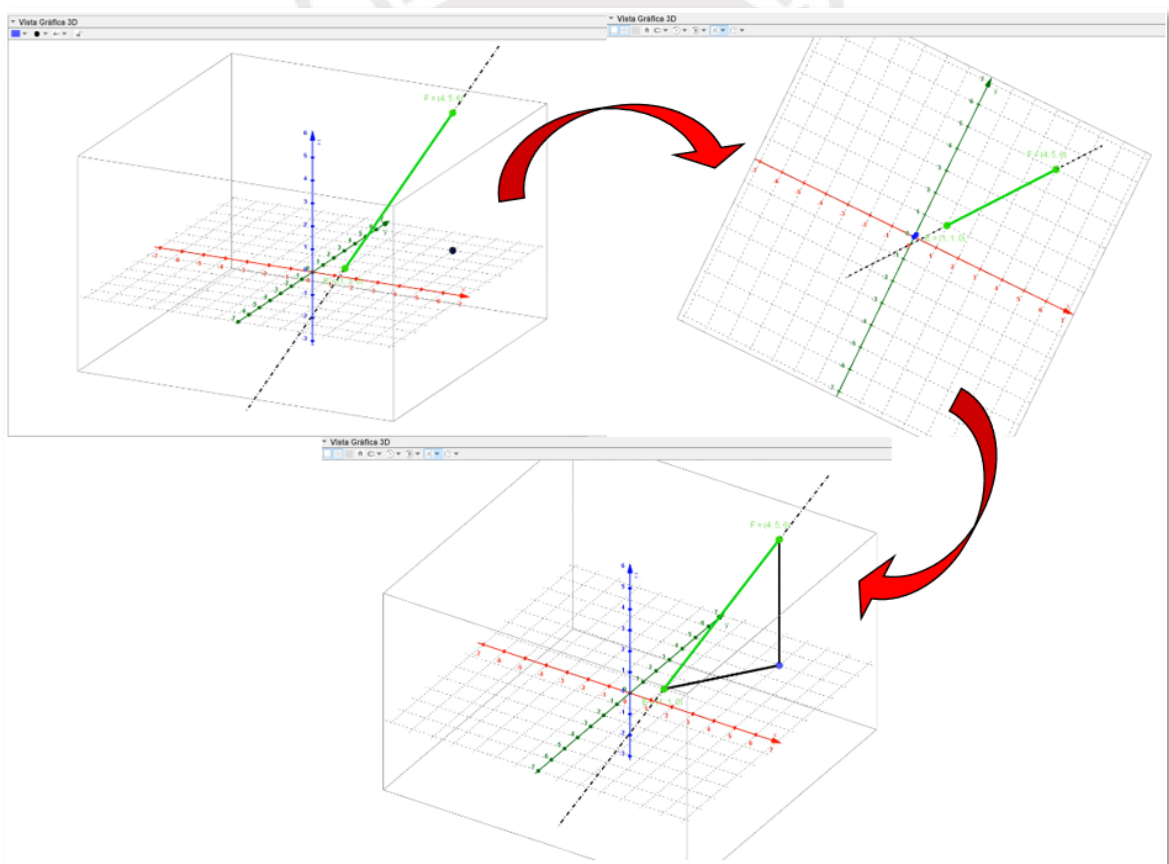
Para la parte 1c, Caleb empieza proyectando las coordenadas de los puntos de paso al plano XY, por medio de las herramientas del GeoGebra, donde dicha componente en Z de los puntos de paso es igual a cero. A continuación, se transcribe parte de la entrevista.

- Caleb: [se queda pensativo un momento mientras contempla la gráfica]
- Investigador: ¿Qué es lo que estás pensando realizar?
- Caleb: Si trazo un triángulo que pase por dichas coordenadas [usa la herramienta de *segmento* para construir dicho triángulo rectángulo], obtengo que la vertical sería 6 y la horizontal sería la distancia entre estos 2 puntos en el plano XY [rota la representación

gráfica desde una vista al plano XY] obteniendo el valor de 5, obteniendo así que la pendiente de esa recta sería 6 sobre 5.

De lo observado anteriormente, podemos nuevamente percibir por parte de Caleb, que a primera perspectiva hay datos que no son fácilmente entendible para su cálculo, pero tras las modificaciones posicionales de tipo rotación realizadas a la gráfica (aprehensión operatoria) y además de apoyarse de herramientas propias del GeoGebra para tener una mejor concepción de las variaciones (para la representación del triángulo), esto permitió a Caleb inferir propiedades que no era al inicio de fácil interpretación (aprehensión discursiva), logrando así la resolución de dicha actividad, todo esto al igual que lo planteado en el análisis previo. Parte de las acciones realizadas por Caleb en la actividad 1c se muestra en la figura 51.

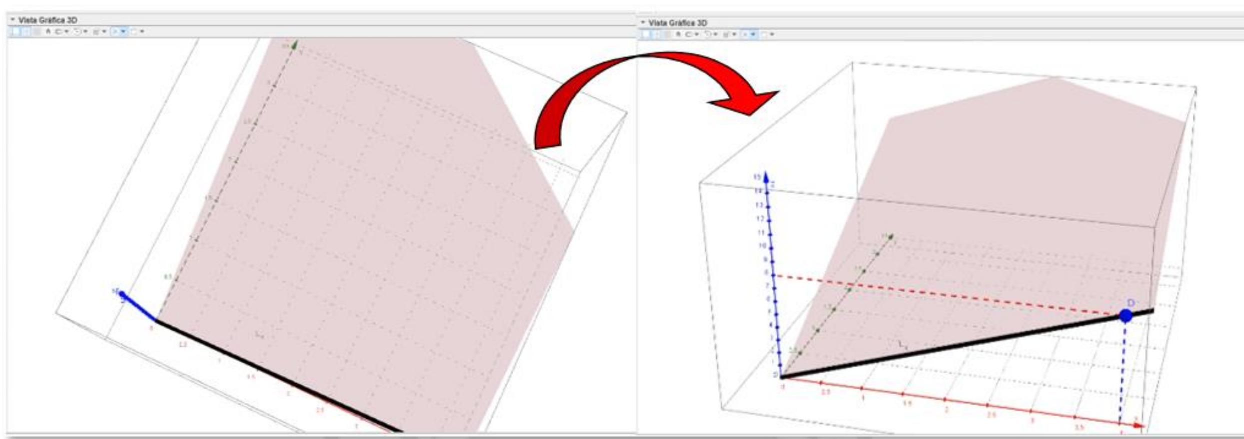
Figura 51. *Acción realizada en la actividad 1c por parte de Caleb*



Análisis de resultados de la Actividad 2a por parte de Caleb

A primera instancia Caleb no podía asimilar que la recta L_x era una recta en dirección al eje X, tras una modificación de tipo rotacional a la figura representada, logro situar dicha recta desde una vista al plano XY, para asimilar la dirección de L_x, como una recta "posicionada" bajo una perspectiva en el plano XZ, como se aprecia en la figura 52.

Figura 52. *Acción realizada en la actividad 2a por parte de Caleb*



Posteriormente a esto, se indica a Caleb el uso de la casilla de control que permita presentar el punto de paso "D" ubicado en la recta L_x (al igual como se indicó al Josué), a continuación, describiremos parte de la entrevista realizada por Caleb tras sus acciones realizadas.

- Investigador: Ahora, ¿Podría conocer las variaciones respectivas para calcular la pendiente de L_x?
- Caleb: Con la ayuda del punto D (punto de paso en L_x) la pendiente sería 2, ya que la "vertical" sería 8 y la "horizontal" sería de 4, obteniendo que la pendiente de L_x sea 2.

De lo observado en esta actividad, podemos concluir el papel fundamental que tuvo para Caleb el uso de las herramientas propias del GeoGebra, para modificar la posición inicial de la representación gráfica, ya que al realizar rotaciones (lo cual evidencia su aprehensión operatoria) esto permitió posteriormente a Caleb inferir la manera de usar conceptos matemáticos conocidos (evidencia de su aprehensión discursiva) asociándolo a la resolución de la actividad, tal como se planteó en el análisis previo.

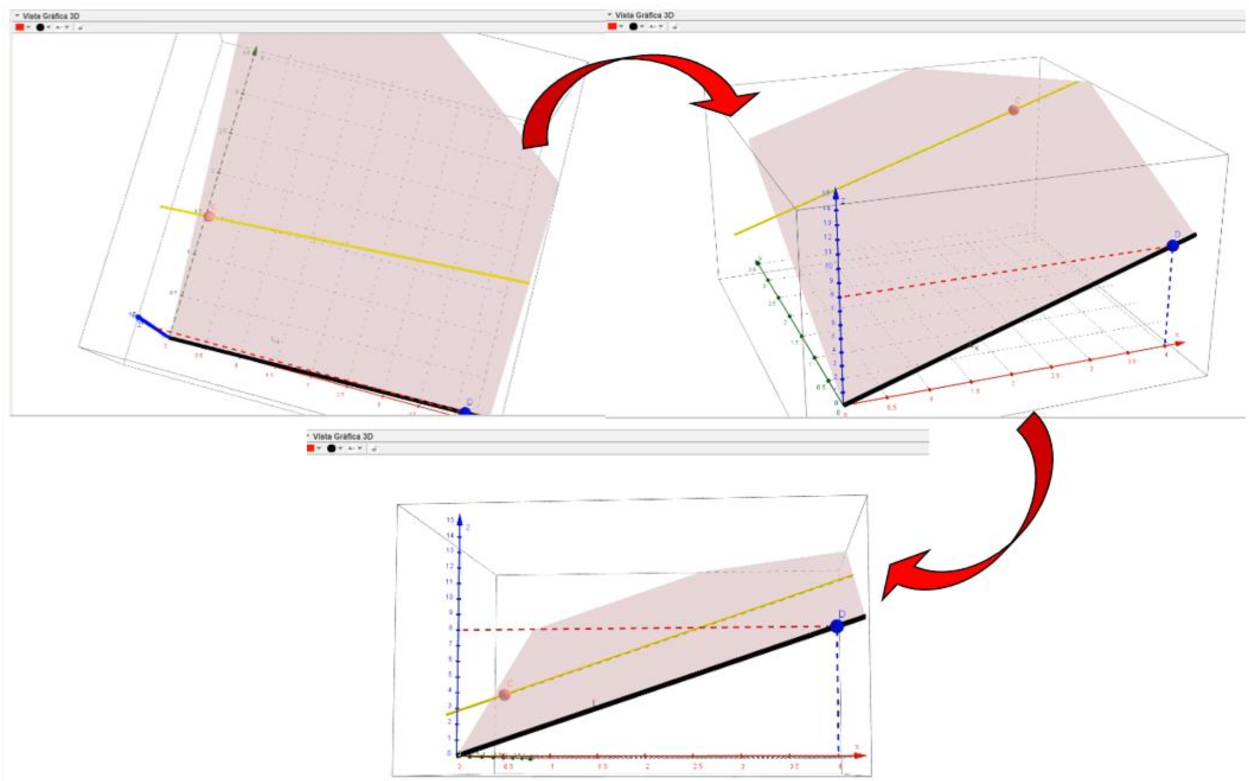
Análisis de resultados de la Actividad 2b por parte de Caleb

Inicialmente se explica a Caleb que active la casilla de control para visualizar el punto “C” ubicado en el plano; adicionalmente se indica, que puede hacer uso de las herramientas del GeoGebra para representar los objetos solicitados, pero a partir de una justificación lógica que permita realizar dichas acciones, a partir de la intervención realizada se presentó el siguiente diálogo:

- Caleb: Visualmente quizás hay como una confusión, ya que por la misma representación no es del todo permisible el cómo otras rectas lleguen a tener la misma pendiente que L_x, pero si nos vamos a lo teórico es algo seguro.
- Investigador: ¿Entonces que podrías afirmar?
- Caleb: En el espacio para que 2 rectas o más sean paralelas, deben tener el mismo vector dirección, por ende, podríamos representar aquellas rectas que tengan la misma dirección a L_x es decir, esas serían las rectas paralelas, además de incluir que pasen por el punto C, es decir, todas esas rectas que cumplan dichas características tendrán la misma pendiente a L_x.

Tras lo argumentado por Caleb, empieza a trazar dichas rectas por medio de la herramienta *Paralelas* del GeoGebra, teniendo como referencia la recta L_x y el punto “C”, lo cual posteriormente a esto sitúa la representación gráfica desde una perspectiva ubicado al plano XZ, situándola como si fuese rectas paralelas en 2D; todas estas acciones nos permiten concluir que, en el caso de Caleb, las conjeturas planteadas al inicio, son reforzadas tras las modificaciones posicionales de tipo rotación que realiza a la representación gráfica (evidencia de su aprehensión operatoria), lo cual permite desarrollar la actividad. Algo que al igual que Josué coinciden es el hecho de considerar adicionalmente las características vectoriales de una recta en el espacio para tratar de asociarlo con la actividad. Parte de las acciones realizadas por Caleb a la representación gráfica se muestra en la figura 53.

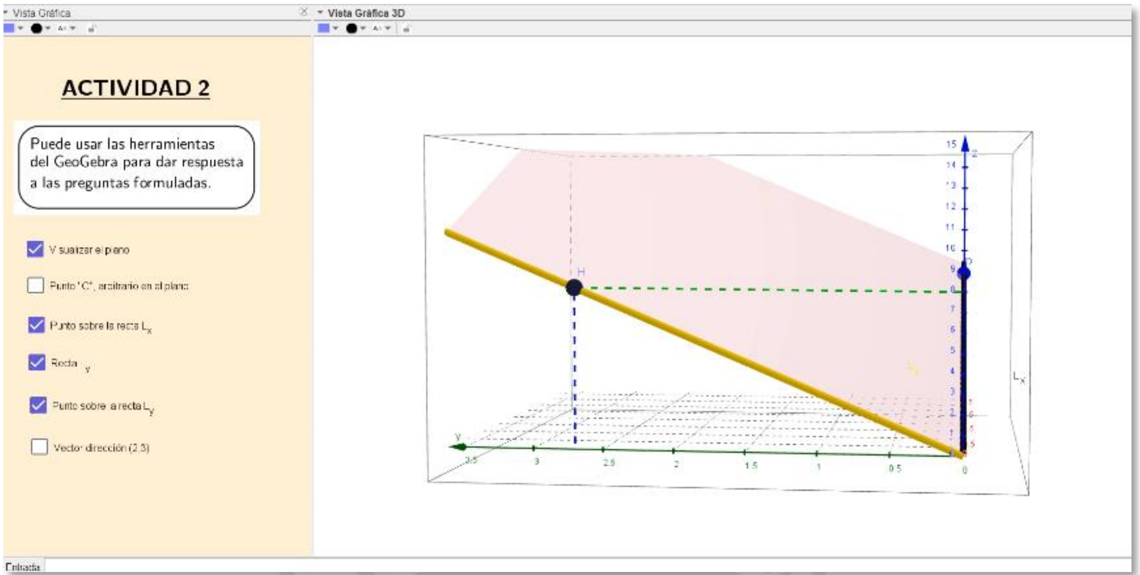
Figura 53. *Acciones realizadas en la actividad 2b por parte de Caleb*



Análisis de resultados de la Actividad 2c por parte de Caleb

En relación a la actividad de calcular la pendiente para L_y fue realizado de manera similar a lo anterior, solo que ahora para tener una mejor percepción de la recta, Caleb realiza modificaciones de tipo rotacional a la representación gráfica (evidencia de su aprehensión operatoria), bajo una mirada en el plano YZ, lo cual permite identificar y asociar fácilmente las variaciones respectivas para el cálculo de la pendiente en dirección al eje Y, a partir del concepto de pendiente de una recta en un plano bidimensional; tal como se analizó en el análisis previo. Parte de las acciones realizadas se aprecia en la figura 54.

Figura 54. *Acciones realizadas en la actividad 2c por parte de Caleb*



Análisis de resultados de la Actividad 2d por parte de Caleb

Al igual que la actividad anterior, se indica a Caleb el uso de la casilla de control para visualizar el punto “C” en el plano, tras esto; Caleb busca la manera de relacionar la recta L_x con el vector dirección al eje X, ya que la actividad describe un desplazamiento en dirección a dicho eje, pero se observa que no encontraba la manera de asociarlo con la variación vertical que se pedía; tras la intervención, se presenta el siguiente dialogo, cuya descripción se presenta a continuación.

- Caleb: ¿Es posible conocer dicho cambio vertical? [empieza a manipular dicha representación por medio de rotaciones], lo que observo que debería moverse el punto D (punto ubicado en la recta L_x) en dirección al vector (1;0;0) [el cual es el vector dirección de L_x], pero no sé cómo podría relacionarlo con el desplazamiento vertical.
- Investigador: ¿La pendiente de L_x que se calculó anteriormente serviría de algo?
- Caleb: [realiza anotaciones sobre cómo se calculó la pendiente en dirección al eje X, $m_x = \frac{\Delta z}{\Delta x}$], si es así, entonces, como hay un desplazamiento de 2 unidades en la “horizontal”, habría un cambio de 4 en la “vertical” ya que la pendiente era 2.
- Investigador: Pero si se considera el punto C en vez del punto que usó, ¿el cambio producido de forma vertical, sería el mismo?
- Caleb: Claro, sería la misma variación desde un punto arbitrario, ya que la pendiente se mantiene.

- Investigador: Y si de manera general, el desplazamiento en dirección al eje X fuera Δx, ¿Cuál sería la variación vertical?
- Caleb: Seria simplemente 2 veces Δx, ya que solo despeje Δz. [haciendo referencia a la representación algebraica escrita de la pendiente de L_x]

De lo observado anteriormente, se puede concluir que a pesar de conocer Caleb el valor de la pendiente de L_x, se tuvo dificultad en relación a su interpretación geométrica para una situación particular, de tal forma que a partir de esto pueda conocer el desplazamiento vertical, por esa razón al inicio el sujeto planteaba una forma de resolución que no lo condujo a algo sólido, posteriormente a esto y tras las acotaciones pertinentes, Caleb logra asociar el significado geométrico de la pendiente de L_x para dar sentido a lo pedido en la actividad, tal como se manifestó en el análisis inicial. Lo que se pudo apreciar en esta actividad es la influencia del GeoGebra para dar una mejor perspectiva de la vista gráfica para observar propiedades geométricas no era de fácil entendimiento.

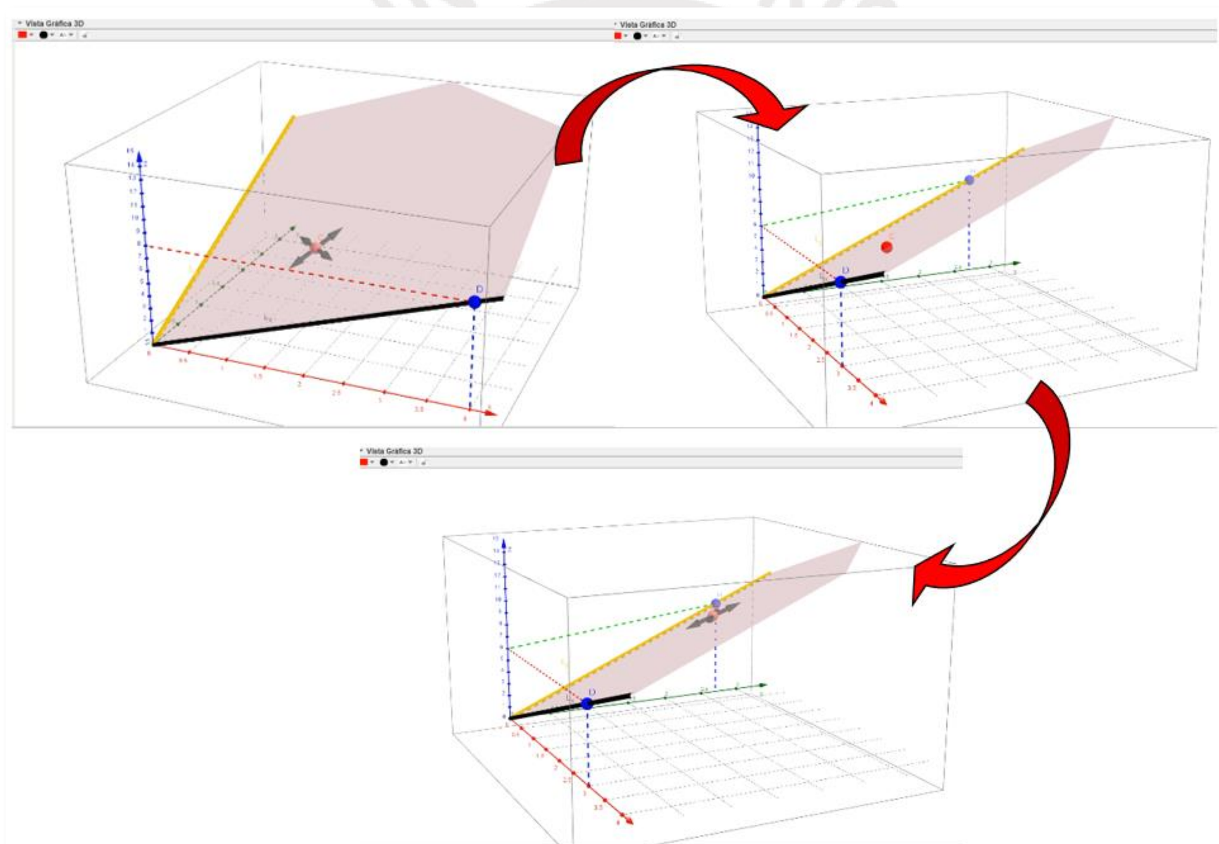
Análisis de resultados de la Actividad 2e por parte de Caleb

Al inicio de la actividad Caleb empezó a cuestionarse la manera de como conocer la variación vertical tras los desplazamientos solicitados, pero no consiguiendo algo conciso, por tal razón tras la orientación por parte del investigador en relación a lo realizado en la actividad anterior, se describe lo argumentado por Caleb como se aprecia a continuación:

- Caleb: Si me moviera en dirección al eje X, 3 unidades, se tendría un desplazamiento vertical de 6, ya que $m_x = 2$ (por lo calculado anteriormente). [señala dicho desplazamiento al rotar la figura en dirección al plano XZ]
- Investigador: ¿Y si seguidamente se tiene un desplazamiento en dirección al eje Y?
- Caleb: Analíticamente no debería haber cambio en la vertical, ya que solo se desplaza ahora en dirección al eje Y a partir del primer tramo recorrido, sin embargo, cuando lo veo gráficamente observo que se desplaza en algo [manipula la gráfica rotándola desde una perspectiva al plano YZ mientras hace que el punto C se mueva en dirección al eje Y]

Posteriormente a ello, Caleb expresa el valor de la variación vertical como la suma de cada tramo recorrido en función a las pendientes calculadas en dirección a los ejes X e Y, cabe resaltar que para lograr esto, Caleb por medio de un material concreto (hoja bond), lo sitúa como si fuera el plano representado y por medio de inclinaciones a la hoja, simula una situación en la cual a partir de un punto se observa el cambio en la vertical, tanto del primer tramo recorrido como del segundo, lo cual afirma que el cambio vertical total radica en la suma de cada tramo recorrido en cada dirección a los ejes coordenados, esto es algo que adicionalmente no se había supuesto que podría realizarse para la comprensión de la misma. De igual manera por medio del GeoGebra, Caleb expresa lo explicado anteriormente, estas acciones nos permiten observar que al rotar la gráfica inicial y de acuerdo a lo argumentado por el material concreto usado, se aprecia el desarrollo de su aprehensión operatoria, así como, el percibir el desplazamiento vertical total por medio de la representación gráfica final, lo cual evidencia su aprehensión perceptiva, es decir para lograr dicho resultado, se da una coordinación de forma secuencial de sus aprehensiones que fluyen de manera natural, lo cual permiten lograr el objetivo de la actividad. Parte de las acciones realizadas por Caleb se muestra en la figura 55.

Figura 55. *Acciones realizadas en la actividad 2e por parte de Caleb*



Resultado final de la aplicación de las Actividades tanto en Josué y Caleb

Tras la fase experimental realizado para ambos sujetos de experimentación se logró observar que por medio de cada una de las actividades a realizadas, los sujetos a primera instancia pudieron identificar el objeto representado, pero no fue de fácil acceso para ellos el inferir propiedades y/o conceptos matemáticos que permitan encaminar a los objetivos de las tareas asignadas, por tal razón, tras una manipulación de la representación gráfica por medio de las herramientas propias del GeoGebra, tanto Josué y Caleb, ejecutaron cambios posicionales de tipo rotación o traslación (tratamientos a su representación gráfica, según la TRRS), logran enunciar propiedades matemáticas que no eran visibles a primera percepción y tras ello, lograr dar respuesta a lo planteado en la actividad.

Según Duval, estas acciones realizadas evidencian el desarrollo por parte de los sujetos de su aprehensión tanto perceptiva (al identificar), discursiva (al evocar propiedades no perceptibles inicialmente) y operatoria (al realizar modificaciones a la representación gráfica), tal como se detalló anteriormente para cada actividad. De igual manera se observó que cada una de estas acciones estaban encaminadas bajo una coordinación de las aprehensiones apreciadas de manera secuencial, donde es evidenciable en las acciones propias que cada sujeto llevó a cabo al momento de plantear su estrategia de resolución; por ejemplo, a partir de su aprehensión perceptiva conllevó a realizar tratamientos a la representación gráfica inicial, lo cual es evidencia de su aprehensión operatoria; y posteriormente a partir de estas acciones logra inferir propiedades matemáticas que conllevan a ser usados para sustentar sus resoluciones, lo cual evidencia su aprehensión discursiva.

Por lo tanto, en relación a lo anteriormente descrito en la aplicación de la fase experimental llevado a cabo, podemos afirmar que, a partir de lo observado y expresado en relación a las acciones realizadas para cada sujeto de experimentación, el cumplimiento de nuestros objetivos de actividades, lo cual, está asociado a los objetivos específicos que se buscaba estudiar en la investigación.

Conclusiones

Las actividades presentadas en la fase experimental abarcaron concepciones preliminares que asociadas a la comprensión de la interpretación geométrica de la derivada direccional en relación a su representación algebraica que usualmente es usado (como se presenta en la figura 4), para esto, se tomó en consideración las observaciones y pautas recopiladas por parte de McGee y Moore-Russo (2015), Martínez-Planell et al. (2017) y Esteban et al. (2019) lo cual coinciden en afirmar que para entender dicha conexión debería estudiarse la manera de "como es entendido el cálculo de pendiente de una recta tridimensional" además de asociarlo de igual forma a "los cambios verticales que se producen en un plano cuando se realizan cambios en dirección a los ejes coordenados X e Y", lo cual, permitirán asociar a los sujetos la manera que es descrita la derivada direccional en su representación algebraica usualmente utilizada, dicho de otra manera, el por qué se calcula de esa forma.

Ya que se trabajó con objetos matemáticos asociados a ser representados en un ambiente tridimensional, el aporte del GeoGebra como medio para dichas representaciones fue de gran ayuda, por un lado, el dinamismo que otorga el software a las representaciones gráficas, permitió a los docentes participantes tener una perspectiva diferente de los objetos al momento de resolver las actividades, ya que al modificarlo posicionalmente por medio de rotaciones y/o situarlo desde otra vista, facilitó en ellos el poder extraer conceptos matemáticos necesarios para la resolución de las actividades planteadas, los cuales a primera instancia no eran del todo permisible, hasta que hubo de parte de los docentes interacción con el medio, todo esto bajo las pautas y recomendaciones formuladas por Ryokiti (2019) y Del Rio (2017) en relación al aporte que se tiene de dicho software para objetos matemáticos en un ámbito tridimensional.

En relación al diseño de actividades dadas por medio del GeoGebra, fueron en base a lo revisado y observado en los antecedentes, siendo adaptados para ser presentados en el software que se consideró, teniendo en cuenta las limitaciones propias que se tenían en el GeoGebra a diferencia de los programas usados por McGee y Moore-Russo (2015), Martínez-Planell et al. (2017), por tal razón se optó a hacer usos de casillas de control u otros detalles que permitieran replicar dichas actividades, cabe resaltar que si se hubiese considerado otro tipo de software de representación, se podría explorar desde otra perspectiva dichos objetivos que se buscaba alcanzar, pero también, analizando los pro y contra que pudiesen suscitar.

Nuestro objetivo general de tesis es; *Estudiar cómo una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra favorecería a los docentes en formación continua desarrollar su aprehensión* *perceptiva, discursiva y operatoria en relación a la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica.* Para alcanzar dicho objetivo, se planteó objetivos específicos que están asociados a esta, lo cuales son:

- Identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los docentes en formación continua al resolver una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra para la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica.

  Con respecto al primero objetivo específico, podemos resumir, que efectivamente en la secuencia didáctica planteada a los docentes, las acciones que emergieron por parte de ellos para resolver dichas actividades conllevaron a realizar tratamientos a la representación gráfica dada inicialmente, lo cual posteriormente a ello, pudieron asociar propiedades matemáticas que eran posibles ser usadas en dichas actividades, todo estas acciones, permitió observar en los sujetos el desarrollo de sus aprehensiones; por ejemplo, en la actividad 1, donde se pedía calcular el valor de la pendiente de una recta en 3D, al inicio de sesión, los sujetos tuvieron que realizar cambios posicionales por medio de rotaciones para observar que dichas rectas podrían ser asociadas a un perspectiva bidimensional, lo cual, dicha acción es evidencia de haber desarrollado su aprehensión operatoria, seguidamente, y partir de lo realizado, ayudo a los docentes a inferir la manera que era posible de obtener el valor de la pendiente, considerando "los nuevos ejes coordenados", lo cual evidencia su aprehensión discursiva, al evocar propiedades matemáticas que no eran del todo visible a primera instancia, pero eran necesarios para la actividad, cabe resaltar que adicionalmente a ello, la percepción de los docentes al identificar lo que se tiene representado en el transcurso de la actividad es evidencia de su aprehensión perceptiva, todo esto nos permite evidenciar el cumplimiento del primer objetivo específico.

- Describir como los docentes en formación continua coordinan las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que fueron desarrolladas al resolver una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra para la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica.

  En relación al segundo objetivo específico, podemos acotar que efectivamente hubo una coordinación entre las acciones manifestadas por los docentes, todo esto se evidenció al momento que buscaban la manera de dar solución a las actividades planteadas, donde sus acciones realizadas (la cual está asociada a una aprehensión especifica), fluían de manera secuencial, por ejemplo, se observó que en las actividades, antes que fluya su aprehensión discursiva, se aprecia su aprehensión operatoria (evidenciado en las modificaciones que se realizaba a la representación gráfica), pero inicialmente hubo de parte de los sujetos el identificar los objetos asociados a la actividad, es decir, primero fluye naturalmente su aprehensión perceptiva. Todo esto nos permite evidenciar que se cumplió el segundo objetivo específico, ya que las actividades mismas permitieron observar que existió una coordinación interna de las aprehensiones desarrolladas por cada docente, las cuales en ambos sujetos fueron similares.

De manera general al lograr alcanzar dichos objetivos específicos, se puede afirmar que se logró el objetivo general y por consiguiente dar respuesta a la pregunta de investigación la cual fue: *¿Cómo una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra favorecería a los docentes en formación continua desarrollar su aprehensión perceptiva, discursiva y operatoria en relación a la comprensión geométrica de la derivada direccional asociado a su representación algebraica?*

Concerniente a nuestros resultados obtenidos en esta tesis, surge todavía interrogantes específicas, por ejemplo, el cómo los sujetos podrían realizar conversiones y/o tratamientos relacionado al objeto matemático que se consideró, que podrían no ser del todo obvio, lo cual podría servir también como indicio para futuras investigaciones, como también, el implementar propuestas didácticas a partir de su representación gráfica dinámica, las cuales permitan explorar las aprehensiones que desarrollan los sujetos en otra actividad a implementarse.

Finalmente, pensamos que por medio de esta tesis pueda motivar a futuras investigaciones relacionados con otros objetos matemáticos asociados a un nivel superior, estudiados en el cálculo diferencial, integral, vectorial, aplicado, etc., considerando y explorando previamente las carencias y/o problemática que puede suscitar en su comprensión y/o enseñanza, que también son entendidos únicamente de manera mecanizada sin explorar la concepción geométrica que pueda enriquecer lo estudiado, por ejemplo, el caso del vector gradiente, ¿cuál es su funcionalidad en una situación física? o ¿cómo influye su concepción teórica para ser interpretado desde una perspectiva geométrica?, o investigaciones donde se realice tratamientos y conversiones en sus registros de representación, e inclusive el de explorar a partir de su representación gráfica el estudio de las aprehensiones, para posteriormente quizás ser aplicado en la práctica docente, lo cual permita ayudar a nuestros estudiantes a lograr una mejor concepción de los objetos matemáticos que se explican.

A manera de reflexión personal, resalto la riqueza que se puede estudiar por medio de la TRRS en relación a lo dicho por Duval (2011) al afirmar que; *los objetos matemáticos no deben ser confundidos por su representación, ya que, a largo tiempo, esto puede producir una pérdida de comprensión del objeto matemático y los conocimientos adquiridos se vuelven inutilizables, por tal razón es necesario que el sujeto comprenda la relación de todas sus representaciones para una mejor concepción de este*, lo cual hoy en día, en el proceso de enseñanza y aprendizaje usualmente ocurre; por esa razón, como docente, no solo nuestra labor debe enfocarse desde una perspectiva teórica matemática sino también asociarlo con la parte didáctica.

Referencias

Chong, M. y Torres-Rodríguez, A. (2017). Relevancia de la formación de profesores de matemáticas del nivel superior, *Revista de Educación, Cooperación y Bienestar Social-IEPC 12*(2), 5-12. https://www.revistadecooperacion.com/numero12/numero12.pdf

Costa, V., Landerreche, F. y Colman, J. (2013, mayo). El Cálculo Vectorial en la formación del ingeniero. Una perspectiva de alumnos de los últimos años de las carreras: Aeronáutica y civil. *II Jornadas de Investigación y Transferencia de la Facultad de Ingeniería,* La Plata, Argentina. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/37779

Del Río, L. (2017). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 17*(1). https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2739/2504

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), pp. 143-168. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1984436

Duval, R. (2011). Ver e ensinar a Matemática de outra forma. Primera Edición. São Paulo. PROEM.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: R. Eletr. De Edu. Matem, v. 07*(2), pp. 266-297. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Esteban, P., Mejía, H. y Rojas, L. (2019). Conceptualización de la derivada direccional a partir de la pendiente de una recta en el espacio. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *12*(1), 13-26. https://recacym.org/index.php/recacym/article/download/31/17/

Galiano, G. (2002). *Introducción al Cálculo Variacional N – dimensional.* Recuperado de https://www.unioviedo.es/galiano/images/PDF/DOCENCIA/CV_varias.pdf

García, N. (2014, 11 de abril). *Historia del cálculo multivariable*. Slideshare. https://es.slideshare.net/negag/historia-del-calculo-multivariable

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.) Ed. Mc Graw-Hill Interamericana.

Ingar, K. V. (2014). *A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais* [Tesis doctoral en Educación Matemática, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]. Archivo digital. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.2734.3765

Ingar, K. V. y Silva, M. J. F (2019). Las aprehensiones en el registro gráfico para el estudio de la derivada parcial. *Educación XXVIII* (55), 203-224. https://doi.org/10.18800/educacion.201902.010

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI, 9*(1), 123-146. https://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf

Martínez-Planell, R., Trigueros, M. y McGee, D. (2017). Students´ understanding of the relation between tangent plane and directional derivaties of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46(2017), 13-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.001

McGee, D., & Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students' understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 357–384. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9542-0

Moretti, M. (2013). Estudo das apreensões e dos olhares em geometria [conferencia]. *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, Canoas – Rio Grando do Sul, Brasil. https://1library.org/document/y864772q-conferencia-estudo-das-apreensoes-dos-olhares-em-geometria.html

Peñaloza, T. y Salazar, J. V. F (2018). Aprehensiones y modificaciones en el registro Gráfico-Dinámico del paraboloide elíptico. *Educação Matemática e pesquisa, 20*(1). https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p61-83

Pita, C. (1995). *Cálculo vectorial* (1 ed.). Prentice Hall.

Ponce, J. (2015, 01 de enero). *Breve historia del concepto de derivada*. Researchgate. https://www.researchgate.net/publication/270684035_Breve_historia_del_concepto_de_derivada

Ryokiti, A. I. (2019). Objetos de aprendizaje tridimensionales construidos con el software GeoGebra. *Paradigma*, *40*(1), 69 - 79. http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/8598/5182

Salazar, J. V. F y Almouloud, S. (2015). Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. *Educação Matemática e Pesquisa, 17*(5). http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/742/738

Sierra, V. M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 173-198. https://revistas.um.es/educatio/article/view/133021

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (7 ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. (2010). *Cálculo varias variables* (12 ed.). Pearson Education.

Universidad de Lima (2022). Plan de estudios, Facultad de Ingeniería y Arquitectura. https://www.ulima.edu.pe/sites/default/files/page/file/plan_de_estudios_2022-1.pdf

Universidad Nacional de Ingeniería (2018). Malla curricular, Facultad de Física. https://acreditacion.uni.edu.pe/es/physics/curriculum/

Universidad Nacional de Ingeniería (2018). Malla curricular, Facultad de Ingeniería Naval. http://acreditacion.uni.edu.pe/es/naval/curriculum/

Universidad Nacional del Callao (2019). Plan de estudios, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. https://www.unac.edu.pe/images/transparencia/documentos/resoluciones-consejo-universitario/2019/286-19-CU%20PLAN%20DE%20ESTUDIOS%20DE%20LA%20CARRERA%20PROFESIONAL%20DE%20MATEMATICA%20(ANEXO).pdf

Universidad Nacional del Callao (2019). Plan de estudios, Facultad de Ingeniería Química. https://unac.edu.pe/images/transparencia/documentos/resoluciones-consejo-universitario/2019/151-19-CU%20(ANEXO)%20PLAN%20ESTUDIOS%20CARRERA%20PROFESIONAL%20ING%20QUIMICA%20FIQ.pdf

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (2020). Malla curricular, Facultad de Ingeniería Mecatrónica. https://cdn.upc.edu.pe/static/pdf/sunedu/ingenieria_mecatronica_upc_2020_1.pdf

Anexos

ANEXO N°1

ACTIVIDAD 1

Abra el archivo ***Actividad1.ggb*** (de manera expandida en la ventana del ordenador) y apreciará la representación gráfica de una recta en el espacio 3D, por otro lado, en la parte inferior encontrará la herramienta *deslizador*, de tal forma que a medida que este se mueva, obtendrá la representación gráfica de otras dos rectas tridimensionales. y conforme a lo presentado responda la siguiente pregunta para los tres casos.

¿Cuál es el valor numérico de la pendiente de la recta en el espacio? Explique su procedimiento

ANEXO N°2

ACTIVIDAD 2

Abra el archivo ***Actividad2.ggb*** (de manera expandida en la ventana del ordenador) y responda las siguientes preguntas:

a) En el plano mostrado, se aprecia una recta "L_x" la cual pasa por el punto $(0,0,0)$ y está ubicada en dirección al Eje X. ¿Cuál es la pendiente de la recta L_x?. Explique.

b) Si consideramos un punto arbitrario "C" ubicado dentro del plano, ¿Qué otras rectas que pasen por "C", tendrían igual pendiente que L_X?. Puede apoyarse en las herramientas propias del software para explicar su respuesta.

c) Si llamamos la pendiente calculada en la parte a), como pendiente de la recta L_X en dirección al eje X (m_x). ¿Cuál será el valor de la pendiente de la recta L_Y, pero ahora en dirección al eje Y (m_y), teniendo como un punto de paso el origen de coordenadas?

d) Si partimos arbitrariamente de cualquier punto (x_0, y_0, z_0) ubicado en el plano y nos desplazamos una distancia de 2u paralela al eje X, ¿En cuánto variaría el desplazamiento vertical?, de manera general, exprese la variación del desplazamiento vertical al desplazarnos una distancia Δx paralela al eje X. Explique.

e) Considerando lo analizado en la actividad anterior, ¿Cuál es la variación vertical en "Z" al desplazarnos de un punto arbitrario "C" ubicado en el plano, hacia 3 unidades en dirección al eje "X" y seguidamente 2 unidades en dirección al eje "Y"? Explique.