

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



AUTOMATIZACIÓN DEL DISEÑO DE ÁRBOLES DE TRANSMISIÓN

PARA CAJAS REDUCTORAS DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS Y

EJES PARALELOS

Tesis para obtener el título profesional de INGENIERO MECÁNICO

AUTOR:

Alec Gonzalo Delgado Marin

ASESOR:

Dr. Rosendo Franco Rodríguez

CO-ASESOR:

Dr. Quino Martín Valverde Guzmán

Lima, octubre de 2023

Informe de Similitud

Yo, Rosendo Franco Rodríguez,

docente de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia

Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado

AUTOMATIZACIÓN DEL DISEÑO DE ÁRBOLES DE TRANSMISIÓN PARA CAJAS REDUCTORAS DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS Y EJES PARALELOS,

del/de la autor(a)/ de los(as) autores(as)

Alec Gonzalo Delgado Marin,

.....,

.....,

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 10 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 19/11/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 19 de noviembre de 2023.

| | |
|---|--|
| Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: <u>Franco Rodríguez, Rosendo</u> | |
| DNI: 44623918 | Firma  |
| ORCID: 0000-0003-4335-8523 | |

Timado digitalmente por Rosendo Franco Rodríguez
Nombre de reconocimiento (DN): cn=Franco Rodríguez, ou=Pontificia Universidad Católica del Perú, ou=Grupo INACOM/Unidad PUCP-CIMNE, Scción Ing. Mecánica, Depto. de Ingeniería, email=rofranco@pucp.edu.pe, c=PE
Fecha: 2023.11.19 22:06:19 -05'00'

RESUMEN

El diseño de árboles de transmisión es una tarea habitual en la industria de maquinarias, para la cual se han desarrollado softwares especializados y procedimientos normalizados a lo largo de los años. No obstante, el nivel de automatización y optimización es limitado, tiene un enfoque general, y requiere de la intervención y experiencia de un diseñador en la mayoría de los casos. Por ello, el objetivo de la presente tesis consistió en desarrollar un algoritmo que diseñe árboles de transmisión con un alto grado de automatización, orientado específicamente a árboles para cajas reductoras de engranajes cilíndricos, ejes paralelos y distribución horizontal, para cajas reductoras de una, dos y tres etapas. El proceso de desarrollo del algoritmo implicó la recopilación de normativas y recomendaciones especializadas relacionadas con el diseño de árboles destinados a cajas reductoras. Luego, se estableció un conjunto de árboles tipificados teniendo en cuenta tanto su ubicación dentro de la caja reductora como los diversos tipos de uniones para transmitir potencia (uniones por chaveta, uniones estriadas y piñón solidario). Asimismo, con el fin de automatizar el proceso de diseño, se elaboraron los modelos CAD paramétricos de estos árboles, definiendo las variables dimensionales dependientes e independientes. Además, se estableció un procedimiento que permite automatizar los cálculos de tensiones y deformaciones mediante el modelado por elementos finitos (FEM). Sobre esta base, se implementó la verificación del diseño de los árboles según las normas técnicas DIN 743 para árboles, DIN 6885 para las uniones por chavetas y DIN-ISO 14 para uniones estriadas. A fin de optimizar el diseño, se incorporó un proceso iterativo que minimiza el volumen del árbol y asegura un factor de seguridad definido por el usuario, obteniéndose como resultado el modelo CAD del árbol óptimo. Todo el algoritmo fue implementado en el software comercial Autodesk Inventor, empleando el módulo Inventor Nastran para los cálculos por FEM. Por último, para verificar el trabajo realizado, se aplicó el algoritmo en el desarrollo de dos ejemplos relevantes. Los resultados obtenidos mostraron una tendencia similar en el diseño de cinco árboles, los cuales principalmente presentaron factores de seguridad mayores a los obtenidos mediante métodos analíticos, mostrando la capacidad de minimizar el volumen de material y evidenciando el carácter conservador de los métodos convencionales.

AGRADECIMIENTOS

Culminar esta tesis fue producto de muchas horas de estudio, trabajo y dedicación. No obstante, no hubiera sido esto posible sin el apoyo de diversas personas que estuvieron presentes en mi vida a lo largo de mis estudios universitarios.

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, Martín y Haydeé, pues gracias a su amor y apoyo incondicional pude concluir este objetivo en mi vida, sin su motivación cada día, no hubiese encontrado la fuerza para conseguirlo. También a mi hermana, Melina, que siempre tuvo tiempo para aconsejarme y motivarme a seguir con mis sueños. A ustedes, mi familia, les agradezco de todo corazón haberme dado la dicha de poder culminar esta etapa en mi vida.

En segundo lugar, quiero expresar mi agradecimiento a mi asesor, Dr. Rosendo, dado que su apoyo y orientación durante la realización de esta tesis fue fundamental para su culminación. Del mismo modo, agradezco a mi co-asesor, Dr. Quino, ya que su ayuda y asesoría fue necesaria para conseguir resolver los objetivos de esta tesis. Ambos fueron la guía necesaria para que este trabajo haya alcanzado su final.

En tercer lugar, quiero agradecer a mis amigos, tanto de la Facultad de Ciencias e Ingeniería como de otras, por las experiencias vividas y la buena amistad que me dieron. Definitivamente, todo ello me formó como persona y me hizo llegar hasta aquí. Su motivación fue muy importante en esta etapa de mi vida.

Finalmente, a todos ustedes, que fueron parte de mi vida y de este proyecto, les vuelvo a agradecer y les expreso mis mejores deseos.

ÍNDICE DE CONTENIDO

| | |
|---|----------|
| Introducción | 1 |
| Objetivos... .. | 3 |
| Objetivo general | 3 |
| Objetivos específicos..... | 3 |
| Capítulo 1. Estado del Arte | 4 |
| 1.1. Cajas reductoras | 4 |
| 1.1.1. Engranajes..... | 5 |
| 1.1.2. Árboles de transmisión | 7 |
| 1.1.3. Rodamientos | 8 |
| 1.1.4. Carcasa..... | 9 |
| 1.1.5. Acoplamientos | 10 |
| 1.2. Cálculo y diseño de árboles de transmisión | 11 |
| 1.2.1. Cálculo preliminar por torsión del diámetro de un árbol..... | 11 |
| 1.2.2. Cálculo de tensiones y deformaciones por elementos finitos | 12 |
| 1.2.3. Cálculo de la capacidad de carga según DIN 743..... | 13 |
| 1.2.3.1. Resistencia a la falla por deformación permanente | 14 |
| 1.2.3.2. Resistencia a la falla por fatiga..... | 15 |
| 1.2.4. Cálculo de velocidad crítica del árbol..... | 19 |
| 1.2.5. Desplazamiento transversal, angular y torsional | 20 |
| 1.3. Selección y cálculo de una unión para transmitir potencia | 22 |
| 1.3.1. Uniones por chaveta..... | 22 |
| 1.3.1.1. Cálculo y dimensionamiento de una chaveta plana de caras paralelas según DIN 6885... .. | 22 |
| 1.3.1.2. Presión admisible para cubos en uniones por chaveta..... | 23 |
| 1.3.2. Uniones estriadas | 24 |

| | | |
|--------------------|---|-----------|
| 1.3.2.1. | Cálculo y dimensionamiento de una unión estriada recta o paralela según DIN-ISO 14..... | 24 |
| 1.3.2.2. | Presión admisible para cubos en uniones estriadas | 25 |
| 1.3.3. | Piñón solidario | 26 |
| 1.4. | Diseño del ingreso y salida de potencia a un árbol de transmisión..... | 26 |
| 1.4.1. | Acoplamiento flexible con pines montados en elásticos | 27 |
| 1.4.2. | Transmisión por faja en V..... | 29 |
| 1.4.3. | Transmisión por cadena de rodillos | 31 |
| 1.5. | Materiales de diseño de árboles | 33 |
| 1.6. | Herramientas computacionales para el diseño del algoritmo..... | 35 |
| Capítulo 2. | Tipificación y parametrización de los árboles de transmisión..... | 36 |
| 2.1. | Diseño estructural de un árbol de transmisión | 36 |
| 2.1.1. | Diseño estructural en relación a los elementos montados | 37 |
| 2.1.2. | Diseño estructural para transmitir potencia | 40 |
| 2.2. | Configuración de los árboles de transmisión en cajas reductoras..... | 42 |
| 2.2.1. | Distribución de los engranajes en una caja reductora..... | 42 |
| 2.2.2. | Disposición de resaltes y anillos separadores para fijar engranajes | 43 |
| 2.2.3. | Distribución de rodamientos en un árbol de transmisión..... | 44 |
| 2.3. | Desarrollo de la tipificación de los árboles de transmisión..... | 45 |
| 2.4. | Designación de la nomenclatura en un árbol de transmisión | 50 |
| 2.4.1. | Segmentación de los árboles..... | 50 |
| 2.4.2. | Zonificación de los árboles | 52 |
| 2.5. | Parametrización de los árboles de transmisión | 52 |
| 2.5.1. | Variables dependientes e independientes para el dimensionamiento de los árboles tipificados | 53 |
| 2.5.2. | Primera fase: posicionamiento axial de los engranajes..... | 54 |
| 2.5.2.1. | Separación entre engranaje y carcasa | 54 |
| 2.5.2.2. | Posicionamiento de rodamientos en alojamientos de la carcasa | 55 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 2.5.2.3. | Resalte intermedio determinante | 56 |
| 2.5.2.4. | Posicionamiento axial de engranajes | 56 |
| 2.5.3. | Segunda fase: dimensionamiento de los árboles de transmisión | 60 |
| 2.5.3.1. | Dimensionamiento de longitudes y diámetros..... | 60 |
| 2.5.3.2. | Dimensionamiento de la unión para transmitir potencia | 66 |
| 2.5.3.3. | Dimensionamiento de redondeos y chaflanes | 68 |
| 2.6. | Ajustes en los árboles de transmisión | 71 |
| Capítulo 3. Modelado FEM de los árboles de transmisión | | 72 |
| 3.1. | Análisis de fuerzas críticas en los árboles de transmisión | 72 |
| 3.1.1. | Análisis de fuerzas en una caja reductora | 72 |
| 3.1.2. | Casos críticos para los árboles de transmisión..... | 73 |
| 3.2. | Modelado por elementos finitos de los árboles | 76 |
| 3.2.1. | Mallado | 76 |
| 3.2.2. | Sistema de fuerzas..... | 77 |
| 3.2.2.1. | Fuerzas aplicadas sobre el árbol de transmisión..... | 77 |
| 3.2.2.2. | Vectores fuerzas aplicadas en función a los casos críticos..... | 82 |
| 3.2.3. | Condiciones de contorno..... | 86 |
| 3.3. | Análisis de resultados preliminares del modelo planteado | 88 |
| 3.4. | Secciones transversales de análisis | 90 |
| 3.4.1. | Secciones transversales generales..... | 91 |
| 3.4.2. | Secciones transversales específicas | 91 |
| Capítulo 4. Algoritmo para la automatización y optimización del diseño..... | | 92 |
| 4.1. | Planteamiento del algoritmo general..... | 92 |
| 4.2. | Desarrollo de las rutinas del algoritmo general..... | 94 |
| 4.2.1. | Dimensionamiento de los diámetros del árbol..... | 94 |
| 4.2.2. | Cálculo y selección de los tipos de unión para transmitir potencia | 95 |
| 4.2.2.1. | Diseño por piñón solidario | 96 |

| | | |
|---|---|------------|
| 4.2.2.2. | Diseño de una unión por chaveta..... | 96 |
| 4.2.2.3. | Diseño de una unión estriada..... | 97 |
| 4.2.3. | Diseño y cálculo del acoplamiento flexible, faja en V o cadenas de rodillos.... | 98 |
| 4.2.4. | Selección y dimensionamiento del árbol de transmisión tipificado..... | 99 |
| 4.2.5. | Cálculo de tensiones y deformaciones por elementos finitos..... | 100 |
| 4.2.6. | Verificación del árbol dimensionado..... | 101 |
| 4.2.6.1. | Verificación de esfuerzo máximo por Von Mises | 103 |
| 4.2.6.2. | Extracción de valores de tensiones y deformaciones de una sección transversal de análisis | 103 |
| 4.2.6.3. | Verificación para evitar falla por deformación permanente..... | 104 |
| 4.2.6.4. | Verificación para evitar falla por fatiga..... | 105 |
| 4.2.6.5. | Verificación de la deflexión | 106 |
| 4.2.6.6. | Verificación del desplazamiento angular | 106 |
| 4.2.6.7. | Verificación del desplazamiento torsional | 107 |
| 4.2.6.8. | Verificación de velocidad crítica del árbol..... | 107 |
| 4.3. | Implementación del programa..... | 108 |
| 4.4. | Implementación de la interfaz de uso..... | 108 |
| 4.4.1. | Menú del Add-in..... | 109 |
| 4.4.2. | Ventanas de trabajo..... | 109 |
| Capítulo 5. Aplicación y verificación del procedimiento desarrollado | | 110 |
| 5.1. | Metodología de verificación del algoritmo | 110 |
| 5.1.1. | Método analítico de resolución para la verificación del algoritmo..... | 110 |
| 5.1.1.1. | Cálculo de reacciones y fuerzas internas | 110 |
| 5.1.1.2. | Cálculo de esfuerzos en el árbol | 111 |
| 5.1.1.3. | Cálculos según la norma DIN 743..... | 112 |
| 5.1.1.4. | Cálculos de deflexión y desplazamiento angular | 112 |
| 5.1.1.5. | Cálculo de desplazamiento torsional | 113 |

| | |
|---|------------|
| 5.1.1.6. Cálculo de velocidad crítica | 114 |
| 5.1.2. Método de comparación de resultados..... | 114 |
| 5.2. Aplicación del algoritmo implementado | 114 |
| 5.2.1. Ejemplo de aplicación 1 | 114 |
| 5.2.2. Ejemplo de aplicación 2..... | 120 |
| 5.3. Verificación del algoritmo implementado..... | 128 |
| 5.3.1. Análisis del ejemplo de aplicación 1 | 128 |
| 5.3.2. Análisis del ejemplo de aplicación 2 | 130 |
| Conclusiones | 132 |
| Recomendaciones | 135 |
| Bibliografía | 136 |
| Anexo A..... | 138 |
| Anexo B..... | 150 |
| Anexo C..... | 154 |
| Anexo D..... | 160 |
| Anexo E..... | 163 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|--|-----|
| Tabla 1 – Ancho de espesor de pared lateral de carcasa..... | 10 |
| Tabla 2 – Ancho de tapa lateral de carcasa..... | 10 |
| Tabla 3 – Valores de esfuerzo cortante admisible según tipo de acero | 12 |
| Tabla 4 – Desplazamiento angular admisible según el tipo de rodamiento..... | 21 |
| Tabla 5 – Valores de presión admisible del cubo del árbol en uniones por chaveta | 23 |
| Tabla 6 – Valores de presión admisible del cubo del árbol en uniones estriadas..... | 25 |
| Tabla 7 – Factores de servicio k_{1c} para cadenas de rodillos con una sola hilera | 32 |
| Tabla 8 – Factores de múltiples hileras k_{2c} para cadenas de rodillos | 33 |
| Tabla 9 – Materiales de árboles y sus propiedades mecánicas | 34 |
| Tabla 10 – Parametrización de árboles de entrada o árboles de salida con segmento externo alejado del engranaje..... | 61 |
| Tabla 11 – Parametrización de árboles de salida con el segmento externo cercano al engranaje | 62 |
| Tabla 12 – Parametrización de un árbol de entrada con piñón solidario | 63 |
| Tabla 13 – Parametrización de árboles intermedios sin piñón solidario | 64 |
| Tabla 14 – Parametrización de árboles intermedios con piñón solidario | 65 |
| Tabla 15 – Radios establecidos de redondeos..... | 68 |
| Tabla 16 – Parametrización de los redondeos..... | 70 |
| Tabla 17 – Dimensiones establecidas de los chaflanes..... | 70 |
| Tabla 18 – Parametrización de los chaflanes | 71 |
| Tabla 19 – Ajustes en los árboles de transmisión | 71 |
| Tabla 20 – Vectores fuerzas para árboles de entrada..... | 83 |
| Tabla 21 – Vectores fuerzas para árboles intermedios piñón-rueda | 84 |
| Tabla 22 – Vectores fuerzas para árboles intermedios rueda-piñón | 84 |
| Tabla 23 – Vectores fuerzas para árboles de salida en cajas reductoras de dos etapas | 85 |
| Tabla 24 – Vectores fuerzas para árboles salida en cajas reductoras de una y tres etapas | 85 |
| Tabla 25 – Vectores fuerzas para transmisión por polea o sprocket..... | 86 |
| Tabla 26 – Relación de transmisión de las distintas etapas en el ejemplo de aplicación 1 ... | 115 |
| Tabla 27 – Velocidad de giro de cada eje o árbol en el ejemplo de aplicación 1 | 115 |
| Tabla 28 – Factores de seguridad según la norma DIN 743 en el ejemplo de aplicación 1 mediante el programa implementado..... | 116 |

| | |
|--|-----|
| Tabla 29 – Deflexión y desplazamiento angular en el ejemplo de aplicación 1 mediante el programa implementado | 117 |
| Tabla 30 – Longitudes en los modelos de los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 1 | 117 |
| Tabla 31 – Fuerzas en las poleas y en los engranajes de los árboles de entrada y salida en el ejemplo de aplicación 1 | 118 |
| Tabla 32 – Reacciones en los árboles de entrada y salida en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico | 118 |
| Tabla 33 – Reacciones en los árboles de entrada y salida en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico | 119 |
| Tabla 34 – Factores de seguridad por el DIN 743 en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico | 119 |
| Tabla 35 – Deflexión y desplazamiento angular en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico | 119 |
| Tabla 36 – Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico | 120 |
| Tabla 37 – Relación de transmisión de las distintas etapas en el ejemplo de aplicación 2 ... | 121 |
| Tabla 38 – Velocidad de giro de cada eje o árbol en el ejemplo de aplicación 2 | 121 |
| Tabla 39 – Factores de seguridad según el DIN 743 en el ejemplo de aplicación 2 mediante el programa implementado | 123 |
| Tabla 40 – Deflexión y desplazamiento angular en el ejemplo de aplicación 2 mediante el programa implementado | 123 |
| Tabla 41 – Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional de los árboles en el ejemplo de aplicación 2 mediante el programa implementado | 124 |
| Tabla 42 – Longitudes en los modelos de los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 2 | 125 |
| Tabla 43 – Fuerzas en los engranajes de los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 2 | 126 |
| Tabla 44 – Reacciones en los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 2 | 126 |
| Tabla 45 – Factores de seguridad según el DIN 743 en el ejemplo de aplicación 2 mediante el método analítico | 126 |

| | |
|--|-----|
| Tabla 46 – Deflexión y desplazamiento torsional en el ejemplo de aplicación 2 mediante el método analítico..... | 127 |
| Tabla 47 – Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional en árboles del ejemplo de aplicación 2 mediante el método analítico..... | 127 |
| Tabla 48 – Comparación de resultados principales del ejemplo de aplicación 1 | 128 |
| Tabla 49 – Comparación de resultados principales del ejemplo de aplicación 2 | 130 |
| Tabla B1 – Posición axial de secciones transversales de análisis en árboles de entrada..... | 150 |
| Tabla B2 – Posición axial de secciones transversales de análisis en árboles intermedios | 151 |
| Tabla B3 – Posición axial de secciones transversales en árboles intermedios con piñón solidario | 151 |
| Tabla B4 – Posición axial de secciones transversales en árboles de salida con acoplamiento adyacente a la zona A | 152 |
| Tabla B5 – Posición axial de secciones transversales en árboles de salida con acoplamiento adyacente a la zona B..... | 152 |
| Tabla B6 – Posición axial de secciones transversales específicas en los árboles tipificados | 153 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Engranajes cilíndricos. | 5 |
| Figura 2 – Sentido de las fuerzas de un engranaje helicoidal con piñón derecho y rueda izquierda..... | 6 |
| Figura 3 – Sentido de las fuerzas de un engranaje helicoidal con piñón izquierdo y rueda derecha. | 7 |
| Figura 4 – Árbol de transmisión. | 8 |
| Figura 5 – Tipos de rodamientos. | 9 |
| Figura 6 – Carcasa de una caja reductora. | 9 |
| Figura 7 – Tipos de acoplamiento..... | 11 |
| Figura 8 – Esfuerzos generados en un árbol de transmisión..... | 13 |
| Figura 9 – Deformaciones generadas en un árbol de transmisión. | 13 |
| Figura 10 – Distribución de esfuerzos ideal en dirección axial en una sección de un árbol. .. | 17 |
| Figura 11 – Modelo de una unión por chaveta plana..... | 22 |
| Figura 12 – Modelo de una unión estriada..... | 24 |
| Figura 13 – Modelo de un piñón solidario..... | 26 |
| Figura 14 – Modelo de un acoplamiento flexible con pines en elásticos de goma..... | 27 |
| Figura 15 – Modelo de una transmisión por poleas por faja en V..... | 29 |
| Figura 16 – Modelo de un sprocket de una transmisión por cadena de rodillos..... | 31 |
| Figura 17 – Resalte en un árbol de transmisión para apoyar axialmente un engranaje. | 37 |
| Figura 18 – Espacio para garantizar un contacto entre superficies adecuado entre engranaje y anillo. | 37 |
| Figura 19 – Apoyo de los anillos de un rodamiento. | 38 |
| Figura 20 – Sistema de apoyo de los rodamientos de un árbol de transmisión. | 38 |
| Figura 21 – Disposición de un acoplamiento flexible. | 39 |
| Figura 22 – Tornillo y arandela para fijación axial de una polea o sprocket..... | 39 |
| Figura 23 – Disposición de una tapa lateral con agujero. | 40 |
| Figura 24 – Disposiciones para una unión por chaveta | 41 |
| Figura 25 – Disposición para una unión estriada..... | 41 |
| Figura 26 – Configuración de engranajes en cajas reductoras..... | 42 |
| Figura 27 – Disposición de resalte y anillo separador en un árbol de entrada..... | 43 |
| Figura 28 – Disposición de resalte y anillo separador en un árbol intermedio..... | 44 |
| Figura 29 – Disposición de resalte y anillo separador en un árbol de entrada de dos etapas. . | 44 |

| | |
|---|----|
| Figura 30 – Disposición de un rodamiento adyacente a un engranaje..... | 45 |
| Figura 31 – Disposición de rodamiento no adyacente a un engranaje o adyacente a un piñón solidario..... | 45 |
| Figura 32 – Configuración establecida para las cajas reductoras. | 46 |
| Figura 33 – Árbol #1: árbol de entrada o salida con unión por chaveta (variante 1)..... | 47 |
| Figura 34 – Árbol #2: árbol de entrada o salida con unión estriada (variante 1)..... | 47 |
| Figura 35 – Árbol #3: árbol de entrada con piñón solidario. | 47 |
| Figura 36 – Árbol #4: árbol de salida con unión por chaveta (variante 2). | 47 |
| Figura 37 – Árbol #5: árbol de salida con unión estriada (variante 2). | 48 |
| Figura 38 – Árbol #6: árbol intermedio con uniones por chaveta. | 48 |
| Figura 39 – Árbol #7: árbol intermedio con uniones estriados..... | 48 |
| Figura 40 – Árbol #8: árbol intermedio con unión por chaveta y unión estriada. | 49 |
| Figura 41 – Árbol #9: árbol intermedio con piñón solidario y rueda con unión por chaveta.. | 49 |
| Figura 42 – Árbol #10: árbol intermedio con piñón solidario y rueda con unión estriada. | 49 |
| Figura 43 – Casos posibles de un segmento externo. | 50 |
| Figura 44 – Casos posibles para un segmento de apoyo..... | 51 |
| Figura 45 – Casos posibles para un segmento principal..... | 51 |
| Figura 46 – Caso posible para un resalte intermedio..... | 52 |
| Figura 47 – Denominación por zonas A y B en un árbol de transmisión. | 52 |
| Figura 48 – Distancias entre engranajes y carcasa en una caja reductora de dos etapas. | 55 |
| Figura 49 – Posición axial del par de engranajes en una caja reductora de una etapa..... | 57 |
| Figura 50 – Posición axial de los pares de engranajes en una caja reductora de dos etapas. .. | 58 |
| Figura 51 – Posición de engranajes en una caja reductora de tres etapas..... | 59 |
| Figura 52 – Árboles de entrada o árboles de salida con segmento externo alejado del engranaje. | 61 |
| Figura 53 – Árboles de salida con el segmento externo cercano al engranaje. | 62 |
| Figura 54 – Árbol de entrada con piñón solidario. | 63 |
| Figura 55 – Árboles intermedios sin piñón solidario..... | 64 |
| Figura 56 – Árboles intermedios con piñón solidario..... | 65 |
| Figura 57 – Dimensiones relevantes a un segmento principal con unión por chaveta. | 66 |
| Figura 58 – Dimensiones relevantes a un segmento principal con unión estriada. | 67 |
| Figura 59 – Radio de redondeo máximo disponible en un escalón. | 69 |
| Figura 60 – Sistema de fuerzas axiales en una caja reductora de dos etapas..... | 73 |
| Figura 61 – Caso crítico de árboles de entrada. | 74 |

| | |
|--|----|
| Figura 62 – Caso crítico piñón-rueda en árbol intermedio. | 74 |
| Figura 63 – Caso crítico rueda-piñón en árbol intermedio. | 75 |
| Figura 64 – Caso crítico de árbol de salida para cajas reductoras de dos etapas. | 75 |
| Figura 65 – Caso crítico de árboles de salida para cajas reductoras de una y tres etapas. | 75 |
| Figura 66 – Mallado en un árbol de transmisión. | 76 |
| Figura 67 – Mallado fino sobre una superficie determinada. | 76 |
| Figura 68 – Fuerza radial sobre un árbol de transmisión. | 77 |
| Figura 69 – Fuerza tangencial sobre un árbol de transmisión. | 78 |
| Figura 70 – Fuerzas que equivalen al momento torsor sobre un árbol de transmisión. | 78 |
| Figura 71 – Fuerza radial sobre el árbol de transmisión. | 79 |
| Figura 72 – Fuerzas que equivalen al momento flector sobre el árbol de transmisión. | 80 |
| Figura 73 – Fuerza radial, tangencial y la que equivale el momento flector en un piñón solidario. | 81 |
| Figura 74 – Fuerza axial y la que equivale al momento torsor en un piñón solidario. | 81 |
| Figura 75 – Fuerzas generadas por una polea o un sprocket. | 82 |
| Figura 76 – Restricción radial en la superficie de contacto radial de un rodamiento. | 86 |
| Figura 77 – Restricción axial en el resalte de apoyo de un rodamiento. | 87 |
| Figura 78 – Restricción axial en el resalte intermedio. | 87 |
| Figura 79 – Resultados FEM de un modelo de árbol de entrada o de salida. | 88 |
| Figura 80 – Resultados FEM de un modelo de árbol de entrada con piñón solidario. | 89 |
| Figura 81 – Resultados FEM de un modelo de árbol intermedio. | 90 |
| Figura 82 – Ejemplo de una sección transversal en el segmento principal B de un árbol de entrada. | 91 |
| Figura 83 – Diagrama de flujo general para la automatización y optimización del diseño de árboles. | 93 |
| Figura 84 – Diagrama de flujo de la rutina para la determinación de los diámetros del árbol. | 95 |
| Figura 85 – Diagrama de flujo para el cálculo y selección del tipo de unión para transmitir potencia. | 95 |
| Figura 86 – Diagrama de flujo del subproceso para el diseño por piñón solidario. | 96 |
| Figura 87 – Diagrama de flujo del subproceso para el diseño de una unión por chaveta. | 97 |
| Figura 88 – Diagrama de flujo del subproceso para el diseño de una unión estriada. | 98 |
| Figura 89 – Diagrama de flujo para el diseño y cálculo de acoplamiento flexible, faja en V o cadena de rodillos. | 99 |

| | |
|--|-----|
| Figura 90 – Diagrama de flujo de la selección y el dimensionamiento del árbol de transmisión. | 100 |
| Figura 91 – Diagrama de flujo para el cálculo de tensiones y deformaciones por elementos finitos. | 101 |
| Figura 92 – Diagrama de flujo para la verificación del árbol de transmisión..... | 102 |
| Figura 93 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación de esfuerzo máximo por Von Mises. | 103 |
| Figura 94 – Diagrama de flujo del subproceso de extracción de esfuerzos y deformaciones en una sección transversal. | 104 |
| Figura 95 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación por deformación permanente. | 105 |
| Figura 96 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación por fatiga..... | 105 |
| Figura 97 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación de deflexión. | 106 |
| Figura 98 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación del desplazamiento angular. | 106 |
| Figura 99 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación del desplazamiento torsional. | 107 |
| Figura 100 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación de la velocidad crítica del árbol. | 107 |
| Figura 101 – Código de programación. | 108 |
| Figura 102 – Menú del programa implementado..... | 109 |
| Figura 103 – Ventana de nuevo proyecto. | 109 |
| Figura 104 – Diagrama de cuerpo libre del modelo analítico de un árbol de salida..... | 111 |
| Figura 105 – Árbol de entrada dimensionado del ejemplo de aplicación 1..... | 116 |
| Figura 106 – Árbol de salida dimensionado del ejemplo de aplicación 1. | 116 |
| Figura 107 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de entrada en el ejemplo de aplicación 1. | 117 |
| Figura 108 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de salida en el ejemplo de aplicación 1. .. | 118 |
| Figura 109 – Árbol de entrada dimensionado del ejemplo de aplicación 2..... | 122 |
| Figura 110 – Árbol intermedio dimensionado del ejemplo de aplicación 2..... | 122 |
| Figura 111 – Árbol de salida dimensionado del ejemplo de aplicación 2. | 122 |
| Figura 112 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de entrada en el ejemplo de aplicación 2. | 124 |
| Figura 113 – Diagrama de cuerpo libre del árbol intermedio en el ejemplo de aplicación 2..... | 125 |
| Figura 114 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de salida en el ejemplo de aplicación 2. .. | 125 |
| Figura A1 – Diagrama de cuerpo libre de una polea mayor. | 141 |
| Figura A2 – Diagrama de cuerpo libre de un sprocket. | 142 |

| | |
|--|-----|
| Figura A3 – Caja reductora de una etapa..... | 142 |
| Figura A4 – Caja reductora de dos etapas. | 143 |
| Figura A5 – Caja reductora de tres etapas. | 145 |
| Figura A6 – Diagrama de la fuerza generada por el momento tangencial..... | 146 |
| Figura A7 – Gráfico para calcular el alto de la pared del canal chavetero. | 146 |
| Figura A8 – Diagrama de cuerpo libre de ambos sistemas. Sistema I compuesto de engranaje, chaveta y árbol. Sistema II compuesto del árbol. | 147 |
| Figura A9 – Diagrama de cuerpo libre de ambos sistemas. Sistema I compuesto de engranaje y árbol. Sistema II compuesto del árbol con una unión por chaveta. | 148 |
| Figura A10 – Diagrama de cuerpo libre de ambos sistemas. Sistema I compuesto de engranaje y árbol. Sistema II compuesto del árbol con una unión estriada. | 149 |
| Figura C1 – Ventana de nuevo trabajo | 154 |
| Figura C2 – Ventana de datos generales y datos del material. | 154 |
| Figura C3 – Ventana de datos específicos / Pestaña que muestra el árbol seleccionado..... | 155 |
| Figura C4 – Ventana de datos específicos / Pestaña de valores relevantes a los engranajes. | 155 |
| Figura C5 – Ventana de datos específicos / Pestaña de rodamientos. | 156 |
| Figura C6 – Ventana de datos específicos / Pestaña de acoplamiento o faja en V..... | 156 |
| Figura C7 – Ventana de resultados / Pestaña de dimensiones del árbol..... | 157 |
| Figura C8 – Ventana de redondeos y chaflanes..... | 157 |
| Figura C9 – Pestaña de resistencia mecánica. | 158 |
| Figura C10 – Ventana de factores de seguridad según DIN 743..... | 158 |
| Figura C11 – Pestaña con las uniones para transmitir potencia..... | 158 |
| Figura C12 – Pestaña con los anillos separadores diseñados. | 159 |
| Figura C13 – Pestaña con un acoplamiento flexible diseñado. | 159 |
| Figura C14 – Pestaña con valores relevantes a la carcasa. | 159 |
| Figura D1 – Modelo FEM resuelto del árbol de entrada del ejemplo de aplicación 1. | 160 |
| Figura D2 – Modelo FEM resuelto del árbol de salida del ejemplo de aplicación 1..... | 160 |
| Figura D3 – Modelo FEM resuelto del árbol de entrada del ejemplo de aplicación 2. | 161 |
| Figura D4 – Modelo FEM resuelto del árbol intermedio del ejemplo de aplicación 2. | 161 |
| Figura D5 – Modelo FEM resuelto del árbol de salida del ejemplo de aplicación 2..... | 162 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| Símbolo | Descripción | Unidad |
|----------------|--|-----------------|
| a | Ancho de la tapa lateral con agujero de la carcasa | mm |
| A | Área de una sección transversal del árbol | mm ² |
| b | Ancho de un rodamiento | mm |
| B_i | Ancho de un engranaje número i | mm |
| b_{ch} | Ancho de la chaveta | mm |
| B_{eng} | Ancho de un engranaje | mm |
| b_{es} | Ancho del diente de una unión estriada | mm |
| $B_{piñ}$ | Ancho de un piñón | mm |
| ch_a | Chablán de un segmento externo | mm |
| ch_p | Chablán de un segmento principal | mm |
| ch_q | Chablán de un resalte intermedio | mm |
| ch_r | Chablán de un segmento de apoyo | mm |
| d_0 | Diámetro del árbol mediante el cálculo preliminar por torsión | mm |
| D_a | Diámetro del segmento externo | mm |
| d_{aco} | Diámetro del segmento donde se monta un acoplamiento | mm |
| d_{ar} | Diámetro de la sección de un árbol | mm |
| D_{ela} | Diámetro del elástico de un acoplamiento flexible | mm |
| d_{ex} | Diámetro del círculo externo en un engranaje | mm |
| d_i | Diámetro de iteración i | mm |
| d_{in} | Diámetro del círculo interno en un engranaje | mm |
| d_m | Diámetro medio de la sección con unión estriada | mm |
| D_{ma} | Diámetro mayor en unión estriada | mm |
| D_{me} | Diámetro menor en unión estriada | mm |
| D_{min} | Diámetro mínimo calculado en el árbol de transmisión | mm |
| D_p | Diámetro de un segmento principal | mm |
| $D_{c.pin}$ | Diámetro del eje circular de los agujeros de los pines en un acoplamiento flexible | mm |
| d_{pin} | Diámetro de los pines en un acoplamiento flexible | mm |

| | | |
|--------------|---|-----|
| d_{pol} | Distancia entre los centros de las poleas | mm |
| d_{pr} | Diámetro del círculo primitivo del engranaje | mm |
| D_r | Diámetro del segmento de apoyo | mm |
| d_{uni} | Diámetro del segmento del árbol donde se monta un engranaje | mm |
| $d_{h.aco}$ | Diámetro del cubo de un acoplamiento flexible | mm |
| DP | Diferencia porcentual entre un resultado obtenido mediante el algoritmo implementado y el método analítico | |
| D_q | Diámetro del resalte intermedio | mm |
| E | Módulo de elasticidad | GPa |
| e_{br} | Separación entre bridas de un acoplamiento flexible | mm |
| e_{ch} | Espacio para un canal chavetero | mm |
| e_{es} | Espacio para una unión estriada | mm |
| e_p | Espesor de pared lateral de una carcasa | mm |
| e_r | distancia axial del rodamiento en el alojamiento de la carcasa | mm |
| F_a | Fuerza axial de un engranaje | N |
| F_C | Fuerza centrífuga en una polea o sprocket | N |
| f_{Lq} | Factor de carga para el cálculo preliminar del resalte intermedio determinante | |
| F_{p1} | Fuerza mayor en una faja en V | N |
| F_{p2} | Fuerza menor en una faja en V | N |
| $F_{piñ1}$ | Fuerza radial sobre la superficie modelada para el piñón solidario | N |
| $F_{piñ2}$ | Fuerza transversal sobre la superficie modelada para el piñón solidario | N |
| F_{ps} | Fuerza generada por la faja en V o la cadena de rodillos sobre el árbol de transmisión | N |
| F_r | Fuerza radial de un engranaje | N |
| F_{s1} | Fuerza sobre una cadena de rodillos | N |
| F_t | Fuerza tangencial de un engranaje | N |
| F_i | Fuerza producida por la masa i | N |
| FM_a | Fuerza sobre el árbol que equivale al momento flector producida por el engranaje | N |
| FM_t | Fuerza sobre el árbol que equivale al momento torsor producida por el engranaje | N |
| $FM_{t.ACO}$ | Fuerza tangencial en el canal chavetero del segmento exterior producto del momento torsor presente en el árbol de transmisión | N |

| | | |
|--------------|--|-----------------|
| FS_{br} | Factor de seguridad recomendado de una brida en un acoplamiento flexible | |
| FS_{def} | Factor de seguridad por deformación permanente | |
| $FS_{def.R}$ | Factor de seguridad por deformación permanente recomendado | |
| FS_{pin} | Factor de seguridad de los pines en un acoplamiento flexible | |
| FS_{fat} | Factor de seguridad por fatiga | |
| $FS_{fat.R}$ | Factor de seguridad por fatiga recomendado | |
| G | Módulo de rigidez | GPa |
| h_a | Addendum de un engranaje | mm |
| h_{ch} | Altura de una chaveta | mm |
| h_d | Dedendum de un engranaje | mm |
| h_e | Separación para garantizar contacto entre engranaje y anillo separador | mm |
| h_{es} | Altura de un diente en una unión estriada | mm |
| H_r | Diámetro externo de un rodamiento | mm |
| i | Relación de transmisión | |
| i_p | Relación de transmisión parcial para dos etapas | |
| I | Momento de inercia | mm ⁴ |
| J | Momento polar de inercia | mm ⁴ |
| k | Juego o separación lateral entre carcasa y engranaje | mm |
| k_{1c} | Factor de servicio para cadenas de rodillos con una sola hilera | |
| k_{2c} | Factor de múltiples hileras para cadenas de rodillos | |
| k_{ch} | Factor de proporción en una unión por chaveta | |
| k_{dt} | Factor de proporción por transmisión irregular entre dientes | |
| K_f | Concentración de esfuerzos por flexión | |
| k_{rr} | Factor de ajuste sobre el valor de redondeo máximo disponible | |
| K_t | Concentración de esfuerzos por torsión | |
| L_a | Longitud del segmento externo | mm |
| l_{ch} | Longitud del canal chavetero | mm |
| L_{cub} | Longitud del cubo del engranaje | mm |
| $l_{e.ch}$ | Longitud efectiva de la chaveta | mm |
| $l_{e.es}$ | Longitud efectiva de la unión estriada | mm |

| | | |
|-------------|---|-----|
| L_{ela} | Longitud del elástico del acoplamiento flexible | mm |
| l_{es} | Longitud de la unión estriada | mm |
| L_p | Longitud del segmento principal | mm |
| L_q | Ancho del resalte intermedio | mm |
| L_r | Longitud de un segmento para rodamiento | mm |
| l_{rod} | Longitud entre rodamientos | mm |
| l_t | Longitud sujeta a torque en un árbol | mm |
| $l_{h.aco}$ | Longitud del cubo de un acoplamiento flexible | mm |
| L_q | Longitud del resalte intermedio determinante | mm |
| L_{q_2} | Longitud del resalte intermedio determinante en cajas reductoras de dos etapas | mm |
| L_{q_3} | Longitud del resalte intermedio determinante en cajas reductoras de tres etapas | mm |
| M_f | Momento flector en el árbol | Nmm |
| M_t | Momento torsor en el árbol | Nmm |
| m_i | Masa de la masa i | kg |
| m_n | Módulo normal del engranaje | mm |
| n | Velocidad angular de un árbol | rpm |
| N_{ch} | Número de chavetas | |
| N_{fu} | Número de fuerzas | |
| n_s | Velocidad angular del sprocket | rpm |
| N_c | Número de ciclos de carga | |
| $n_{p.ma}$ | Velocidad angular de una polea mayor | rpm |
| N_{pin} | Número de pines en el acoplamiento flexible | |
| P | Potencia en un árbol | kW |
| p_{ch} | Distancia de la fuerza que equivale un momento torsor en unión por chaveta | mm |
| p_{es} | Distancia de la fuerza que equivale un momento torsor en una unión estriada | mm |
| p_m | Distancia de la fuerza que equivale un momento torsor | mm |
| $p_{m.ACO}$ | Distancia de la fuerza tangencial en el canal chavetero del segmento externo producto del momento torsor presente en el árbol | mm |
| p_R | Paso de los rodillos en una cadena | mm |

| | | |
|---------------|--|-----|
| q_{ch} | Posición del punto medio de la cara de contacto para unión por chaveta (para FM_a) | mm |
| q_{es} | Posición del punto medio de la cara de contacto para unión estriada (para FM_a) | mm |
| q_m | Posición del punto medio de la cara de contacto (para FM_a) | mm |
| r_a | Redondeo del segmento externo | mm |
| $r_{c.es}$ | Radio del redondeo en la base de los dientes de uniones estriadas | mm |
| r_p | Redondeo del segmento principal | mm |
| $r_{p.ma}$ | Radio primitivo de la polea mayor en transmisión por faja en V | mm |
| $r_{p.me}$ | Radio primitivo de la polea menor en transmisión por faja en V | mm |
| r_r | Redondeo del segmento de apoyo | mm |
| r_s | Radio primitivo del sprocket | mm |
| Rp_y | Reacción en el eje y sobre el árbol de la fuerza generada por una polea o cadena de rodillos | N |
| Rp_z | Reacción en el eje z sobre el árbol de la fuerza generada por una polea o cadena de rodillos | N |
| s | Ancho de un anillo separador | mm |
| $t_{b.aco}$ | Espesor de la brida del acoplamiento flexible | mm |
| t_{ch} | Profundidad de la chaveta en el árbol | mm |
| $t_{p.aco}$ | Espesor del borde protección del acoplamiento flexible | mm |
| $t_{b.r}$ | Diferencia de anchos de rueda y piñón | mm |
| TE | Tamaño de elemento de la malla | mm |
| u | Resalte recomendado para un rodamiento | mm |
| U | Energía total de deformación | J |
| U_{axial} | Energía de deformación por carga axial | J |
| $U_{flexión}$ | Energía de deformación por flexión | J |
| w_f | Peso por unidad de longitud de una faja en V | N/m |
| x_1 | Posición del primer par de engranajes | mm |
| x_2 | Posición del segundo par de engranajes | mm |
| x_3 | Posición del tercer par de engranajes | mm |
| x_{eng} | Posición de un par de engranajes | mm |
| x_R | Distancia entre rodamientos | mm |
| X_o | Valor obtenido mediante el método analítico | |

| | | |
|--------------------|--|-------------------|
| X_{alg} | Valor obtenido mediante el algoritmo implementado | |
| y_{ADM} | Deformación admisible transversal o angular | mm |
| y_i | Deformación transversal o angular en una iteración i | mm |
| Z | Número de dientes en un engranaje | |
| Z_{es} | Número de dientes en una unión estriada | |
| Z_P | Número de dientes en un piñón | |
| Z_R | Número de dientes en una rueda | |
| Z_s | Número de dientes en el sprocket | |
| α | Ángulo de presión de un engranaje | rad |
| α_V | Ángulo de inclinación en una transmisión por poleas con faja en V | rad |
| α_s | Ángulo de inclinación en una transmisión por cadenas de rodillos | rad |
| β | Ángulo de hélice de un engranaje | rad |
| β_V | Mitad del ángulo que comprende la faja en V | rad |
| $\delta_{ADM.eng}$ | Deflexión admisible en una sección de un árbol | mm |
| δ_{ADM} | Deflexión admisible en una sección con engranaje en un árbol | mm |
| δ_i | Deflexión producida por la masa i | mm |
| $\theta_{ADM.eng}$ | Desplazamiento angular admisible en una sección con rodamiento en un árbol | rad |
| θ_{ADM} | Desplazamiento angular admisible en una sección con engranaje en un árbol | rad |
| λ | Relación entre velocidad de rotación de un árbol y su velocidad crítica | |
| σ_{ALT} | Esfuerzo alternante admisible para vida infinita | N/mm ² |
| $\sigma_{ALT.fin}$ | Esfuerzo alternante admisible para vida finita | N/mm ² |
| σ_f | Esfuerzo por flexión | N/mm ² |
| σ_{f_a} | Esfuerzo actuante alternante efectivo por flexión | N/mm ² |
| $\sigma_{f.ADM}$ | Esfuerzo admisible por flexión | N/mm ² |
| $\sigma_{f.ALT}$ | Esfuerzo alternante admisible por flexión | N/mm ² |
| σ_{f_m} | Esfuerzo actuante medio efectivo por flexión | N/mm ² |
| $\sigma_{f.máx}$ | Esfuerzo actuante máximo por flexión | N/mm ² |
| $\sigma_{máx}$ | Esfuerzo máximo en una sección del árbol | N/mm ² |
| $\sigma_{mín}$ | Esfuerzo mínimo en una sección del árbol | N/mm ² |

| | | |
|--------------------------|---|-------------------|
| σ_n | Esfuerzo por carga axial | N/mm ² |
| σ_{n_a} | Esfuerzo actuante alternante efectivo por carga axial | N/mm ² |
| $\sigma_{n.ADM}$ | Esfuerzo admisible por carga axial | N/mm ² |
| $\sigma_{n.ALT}$ | Esfuerzo alternante admisible por carga axial | N/mm ² |
| σ_{n_m} | Esfuerzo actuante medio efectivo por carga axial | N/mm ² |
| $\sigma_{n.m\acute{a}x}$ | Esfuerzo actuante máximo por carga axial | N/mm ² |
| σ_{pin} | Esfuerzo en los pines de un acoplamiento flexible | N/mm ² |
| σ_{ST} | Presión admisible del cubo de un engranaje | N/mm ² |
| σ_{VM} | Esfuerzo máximo por Von Mises | N/mm ² |
| $\sigma_{Y.br}$ | Límite de fluencia de una brida en un acoplamiento flexible | N/mm ² |
| $\sigma_{Y.pin}$ | Límite de fluencia del material de los pines en un acoplamiento flexible | N/mm ² |
| τ | Esfuerzo torsor | N/mm ² |
| $\tau_{0.ADM}$ | Esfuerzo cortante admisible para aceros para el cculo previo | N/mm ² |
| τ_{t_a} | Esfuerzo actuante alternante efectivo por torsión | N/mm ² |
| τ_{ADM} | Esfuerzo admisible por torsión | N/mm ² |
| $\tau_{ADM.pin}$ | Esfuerzo cortante admisible en los pines de un acoplamiento flexible | N/mm ² |
| $\tau_{t.ALT}$ | Esfuerzo alternante admisible por torsión | N/mm ² |
| $\tau_{br.1}$ | Esfuerzo cortante torsional en el cubo de la brida en acoplamientos flexibles | N/mm ² |
| τ_{t_m} | Esfuerzo actuante medio efectivo por torsión | N/mm ² |
| $\tau_{t.m\acute{a}x}$ | Esfuerzo actuante máximo por torsión | N/mm ² |
| $\tau_{m\acute{a}x}$ | Esfuerzo actuante máximo por torsión en una sección del rbol | N/mm ² |
| τ_{pin} | Esfuerzo cortante en los pines de un acoplamiento flexible | N/mm ² |
| φ | Desplazamiento torsional | rad |
| φ_{ADM} | Desplazamiento torsional admisible de un árbol | rad |
| φ | ngulo de contacto en la polea menor | rad |
| ψ | ngulo entre rodillos sobre un sprocket | rad |
| ω | Velocidad angular del árbol | rad/s |
| ω_c | Velocidad crítica del árbol | rpm |
| ω_{ii} | Velocidad crítica i-ésima producida por la masa i | rad/s |
| μ | Coefficiente de fricción entre goma y acero | |

Introducción

Antecedentes

El software inteligente de diseño mecánico aiGearboxDesigner es un programa que diseña y calcula cajas reductoras de velocidad, el cual incluye un conjunto de algoritmos para diseñar los engranajes, el sistema de transmisión, los árboles de transmisión, la carcasa, entre otros. En ese sentido, la presente tesis estuvo asociada al desarrollo de una parte fundamental de este software, específicamente al módulo de diseño de árboles de transmisión.

Anteriormente, se han trabajado dos tesis relacionadas al desarrollo de algoritmos de diseño de árboles de transmisión en cajas reductoras de ejes horizontales paralelos. Sin embargo, estos algoritmos utilizan procedimientos de cálculo convencionales y solo cuentan con uniones por chaveta para transmitir potencia.

Definición del problema

En la industria peruana, son muy empleadas las máquinas de media y alta potencia¹, tales como trituradoras, molinos, bandas transportadoras, etc. Estas máquinas se conectan a cajas reductoras de velocidad para poder reducir la velocidad del generador. Ahora bien, por sus elevados valores de potencia, estas cajas reductoras no suelen ser encontradas en el mercado y deben ser diseñadas específicamente para la aplicación requerida. No obstante, este proceso de diseño requiere que se destinen grandes cantidades de tiempo y recursos económicos, los cuales podría ahorrarse al automatizar el diseño mediante un algoritmo.

Actualmente, en el mercado existen distintos softwares para diseñar y calcular árboles de transmisión, los cuales son utilizados para elaborar los árboles para cajas reductoras como para otras aplicaciones. Sin embargo, estos son generalmente programas de cálculo generales de árboles o ejes, los cuales no están desarrollados específicamente para diseñar árboles de transmisión como parte de cajas reductoras de velocidad. Por ende, se evidencia la necesidad de un software especializado en el diseño de estos árboles de transmisión destinado a cajas reductoras, el cual incluso permita diseños de alta potencia.

¹ Las máquinas de media potencia suelen tener una potencia mayor a 10kW, mientras que las de alta potencia mayor a 100kW.

Propuesta de solución

Se propone desarrollar un algoritmo de diseño automatizado de árboles de transmisión definido para cajas reductoras de media o alta potencia, capaz de diseñar árboles con uniones para transmitir potencia por unión por chaveta según la norma DIN 6885, unión estriada según la norma DIN-ISO 14 o piñón solidario al árbol. Del mismo modo, el algoritmo contempla verificaciones mecánicas por resistencia a la deformación permanente y fatiga según la norma para el diseño de árboles DIN 743, análisis de deflexión y desplazamiento angular, velocidad crítica y desplazamiento torsional.

A fin de crear el software más potente, se propone utilizar un software asistido por computadora de modelado por elementos finitos en el cálculo y diseño de los árboles. Esto permite crear un algoritmo que garantice un diseño óptimo, pues se puede contar con valores de esfuerzos y deformaciones más precisos que los obtenidos por métodos convencionales.

Justificación

Actualmente, el diseño de árboles supone un proceso manual y específico, lo que implica que un diseñador experto invierta un elevado tiempo en la elaboración del diseño, así como emplear sumas de dinero considerables en ello; por ello, automatizar este proceso permite economizar ese tiempo y gasto. Además, el diseño resulta óptimo, lo que es muy difícil alcanzar con los métodos de diseño manuales y convencionales. Es importante destacar que esto se evidencia mayormente a altas potencias, pues es cuando el ahorro de material resulta considerable, lo que se refleja en que se requiera menos acero para manufacturar los árboles optimizados.

También es necesario mencionar que los árboles de transmisión, al estar destinados a cajas reductoras de media y alta potencia, pueden requerir un tipo de unión más complejo que una unión por chaveta para transmitir potencia. Lo señalado anteriormente hace evidente la razón de la inclusión de uniones estriadas y piñón solidario en la solución propuesta.

Asimismo, plantear un método de cálculo asistido por computadora en el proceso de diseño, el de elementos finitos, permite que este se pueda optimizar. Esto debido a que los valores de esfuerzos calculados por el método computarizado son más precisos, lo cual permite un mejor ajuste de los factores de seguridad en el proceso de diseño.

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un algoritmo que permita diseñar árboles de transmisión con un alto grado de automatización, orientado específicamente a árboles para cajas reductoras de engranajes cilíndricos, ejes paralelos y distribución horizontal, de una, dos y tres etapas

Objetivos específicos

- Establecer y tipificar un conjunto de árboles de transmisión que contemple uniones para transmitir potencia como unión por chaveta, unión estriada y piñón solidario en cajas reductoras de una, dos y tres etapas
- Desarrollar un dimensionamiento paramétrico dimensional de los árboles de transmisión tipificados
- Desarrollar modelos CAD de los árboles tipificados y parametrizarlos dimensionalmente en el software de diseño
- Desarrollar e implementar un algoritmo que calcule una unión para transmitir potencia mediante unión por chaveta, unión estriada o piñón solidario
- Elaborar un modelo de elementos finitos (FEM) para los árboles tipificados capaz de calcular las tensiones y deformaciones presentes en estos
- Desarrollar un algoritmo que considere un acoplamiento flexible, una transmisión por poleas con faja en V o una transmisión por cadenas para el ingreso y salida de potencia de la caja reductora
- Desarrollar e implementar un algoritmo para calcular el esfuerzo máximo de Von Mises, los factores de seguridad según la norma DIN 743, las deflexiones, los desplazamientos angulares, la velocidad crítica y el desplazamiento torsional
- Implementar el algoritmo de automatización y optimización del diseño de árboles de transmisión y crear el interfaz de trabajo de este
- Verificar el algoritmo implementado mediante ejemplos de aplicación al comparar sus resultados con los obtenidos por métodos convencionales de diseño

Capítulo 1

Estado del Arte

En el presente capítulo se realiza un análisis de los elementos relevantes en el diseño de cajas reductoras y, en particular, los relevantes en el diseño de los árboles de transmisión. Desde luego, se revisan los métodos de cálculo para la verificación mecánica del árbol siguiendo la norma DIN 743, junto con los procedimientos de selección de una unión por chaveta según la norma DIN 6885, de una unión estriada según DIN-ISO 14 y de un piñón solidario. Asimismo, se desarrollan tres alternativas para el ingreso y salida de potencia a la caja reductora, los cuales son acoplamientos flexibles, poleas con faja en V y cadenas de rodillos.

1.1. Cajas reductoras

Una caja reductora de velocidad es un mecanismo que transmite potencia y reduce la velocidad que recibe de una fuente de energía. Naturalmente, el diseño de este tipo de máquina se da en función a la potencia y a la velocidad de salida requerida. Generalmente, consta de una serie de engranajes diseñados para que, en su funcionamiento, se reduzca la velocidad de entrada manteniéndose la potencia, aunque siempre existen unas pequeñas pérdidas principalmente por fricción. Por ello, la **potencia**, la **velocidad de ingreso** (o del generador) y la **velocidad de salida** son la información necesaria para el diseño de una caja reductora.

Se pueden clasificar por el número de etapas, lo que implica el número de árboles que tendrá la caja reductora. Una caja reductora de una etapa apenas cuenta con dos árboles, ya que solo hay una transmisión; mientras que una caja reductora de dos etapas tiene tres árboles, lo que implica que haya dos transmisiones. La transmisión de potencia entre árboles se puede dar mediante engranajes (rectos, helicoidales o cónicos), o tornillo sinfín y corona. Además, también se pueden clasificar por la posición relativa entre ejes, los cuales podrían ser paralelos horizontales, paralelos verticales o paralelos inclinados.

La relación de transmisión total para cajas reductoras con engranajes no debe ser mayor a 8 en una etapa, a 45 en dos etapas y a 200 en tres etapas. En esta línea, para poder calcular la relación de transmisión parcial en una caja reductora de dos etapas, se presenta la ecuación 1, la cual contempla que los primeros dos árboles lleven en un 25% más la carga de transmisión de la caja reductora.

$$i_p = 1,25 \cdot \sqrt{i} \quad (1)$$

i = Relación de transmisión total

1.1.1. Engranajes

Un engranaje es un mecanismo que transmite potencia de un engranaje hacia otro. Consiste en dos ruedas dentadas: una pequeña denominada piñón y la otra más grande, corona. “Entre sus ventajas se tiene que son altamente eficientes (97-98%), tiene dimensiones relativamente pequeñas para una alta capacidad de carga y soportan una amplia gama de velocidades de giro, entre otros” (Lelikov, 2008, p. 334).

En el presente trabajo de tesis se utilizan engranajes cilíndricos. Estos engranajes pueden ser rectos o helicoidales, los cuales se muestran en la Figura 1. Los helicoidales son capaces de transmitir mayor potencia en comparación con los rectos, además de ser más duraderos; mientras que los rectos son usados frecuentemente para velocidades pequeñas o moderadas, y necesitan menos engrase para funcionar.



Figura 1 – Engranajes cilíndricos.

Tomado de “Engranajes a medida”, por DirectIndustry (2019).

Los engranajes cilíndricos generan fuerzas tangenciales (F_t), radiales (F_r), y, para el caso de contar con engranajes helicoidales, fuerzas axiales (F_a). Estas fuerzas se pueden calcular mediante las ecuaciones 2, 3 y 4. En caso de engranajes rectos, cuya fuerza axial es nula, se puede utilizar estas ecuaciones al reemplazar el ángulo de hélice (β) como 0 rad.

$$F_t = \frac{2M_t}{d_{pr}} \quad (2)$$

$$F_r = \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\beta)} \cdot F_t \quad (3)$$

$$F_a = \tan(\beta) \cdot F_t \quad (4)$$

$M_t =$ Torque transmitido (Nmm)

$d_{pr} =$ Diámetro primitivo del engranaje (mm)

$\alpha =$ Ángulo de presión (rad)

$\beta =$ Ángulo de hélice (rad)

Estas fuerzas son vectores, por lo que deben ser identificadas no solo en magnitud, sino también en sentido, ya que de esto depende del sentido de giro del árbol. En caso de contar con engranajes helicoidales, la Figura 2 y la Figura 3 muestran los sentidos de estas fuerzas para la combinación piñón derecho y rueda izquierda, y piñón izquierdo y rueda derecha respectivamente. Este modelo de fuerzas se puede utilizar para engranajes rectos, solo que no se debe considerar la fuerza axial.

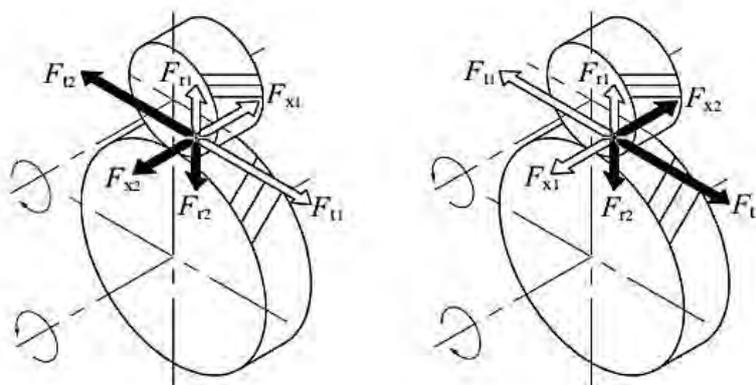


Figura 2 – Sentido de las fuerzas de un engranaje helicoidal con piñón derecho y rueda izquierda.

Tomado de “Gear Forces”, por KHK Stock Gears (2021).

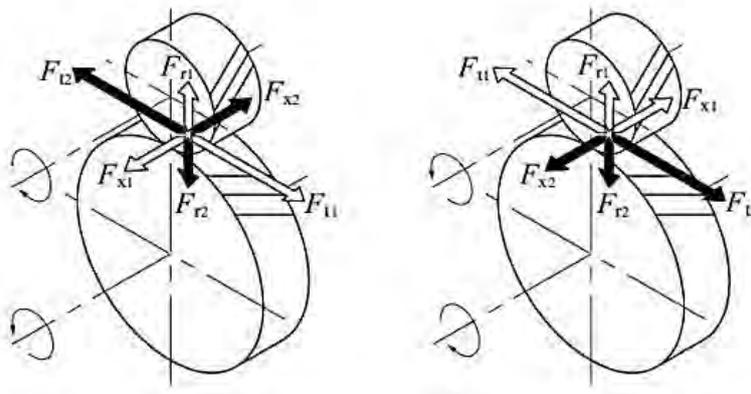


Figura 3 – Sentido de las fuerzas de un engranaje helicoidal con piñón izquierdo y rueda derecha.
Tomado de “Gear Forces”, por KHK Stock Gears (2021).

Los engranajes cilíndricos tienen un círculo primitivo que representa la línea de contacto entre engranajes. Además, también se identifica al diámetro externo e interno del engranaje, que representan el extremo externo del mismo y el extremo sin dientes respectivamente. Se puede calcular el diámetro primitivo de un engranaje mediante la ecuación 5, mientras que se calculan los diámetros externo e interno de un engranaje mediante las ecuaciones 6 y 7 respectivamente. En cuanto a los engranajes rectos, estos pueden calcular con las mismas ecuaciones considerando el ángulo de hélice (β) como 0 rad.

$$d_{pr} = \frac{m_n}{\cos(\beta)} \cdot Z \quad (5)$$

$$d_{ex} = d_{pr} + 2h_a m_n \quad (6)$$

$$d_{in} = d_{pr} - 2h_d m_n \quad (7)$$

m_n = Módulo normal del engranaje (mm)

Z = Número de dientes del engranaje (mm)

h_a = Addendum del engranaje (mm)

h_d = Dedendum del engranaje (mm)

1.1.2. Árboles de transmisión

Un árbol de transmisión es un componente giratorio generalmente de sección circular que es capaz de transmitir torque. “Son usados prácticamente en cada pieza de maquinaria rotacional para transmitir giro y torque de un lugar a otro” (Norton, 2010, p. 115). Un árbol

transmite torque desde una fuente de energía (motor) hacia otras maquinarias, aunque también es posible hacia otros árboles, lo cual se consigue mediante engranajes, poleas con fajas o cadenas. Un árbol de transmisión es soportado mediante rodamientos, los cuales dependen de la configuración del árbol y las cargas que contenga. Se elaboró la Figura 4, en la cual se muestra un árbol de transmisión con un engranaje mecanizado sobre él mismo. Asimismo, mediante la ecuación 8, se puede calcular la potencia de un árbol de transmisión.

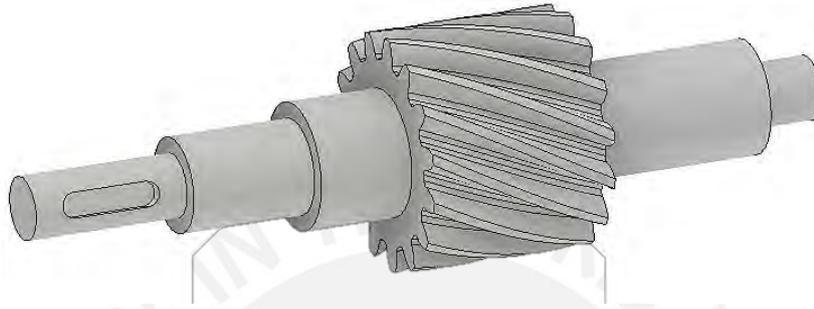


Figura 4 – Árbol de transmisión.

$$P = M_t \omega \quad (8)$$

P = Potencia transmitida a través del árbol (W)

M_t = Torque transmitido (Nm)

ω = Velocidad angular (rad/s)

Los árboles de transmisión se clasifican dependiendo de la posición que mantienen dentro de la caja reductora, puesto que ello implica una función específica y el diseño a seguir se realiza en base a esa consideración. Por eso mismo, son denominados árboles de entrada, intermedios y de salida, en función a su ubicación.

1.1.3. Rodamientos

Un rodamiento es “el soporte o la guía que determina la posición de partes móviles frente a otros componentes del mecanismo” (Lelikov, 2008, p. 460). Un rodamiento es intercambiable, por ello deben ser fácil de ensamblar y desmontar. “Entre sus ventajas se tiene que incurre en pocas pérdidas por fricción (especialmente a bajas revoluciones)” (Lelikov, 2008, p. 460). Las fuerzas que actúan sobre un rodamiento son solo axiales o radiales. Dependiendo de su aplicación existen rodamientos de distintos tipos, algunos de estos se pueden visualizar en la Figura 5.

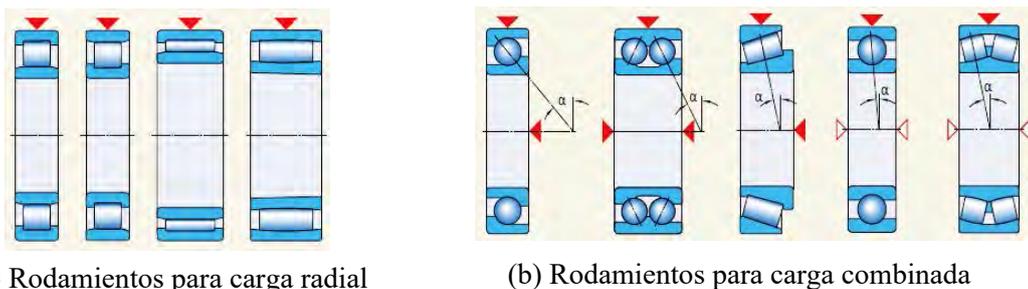


Figura 5 – Tipos de rodamientos.

Tomado del “Catálogo de rodamientos SKF”, por SKF (2015).

1.1.4. Carcasa

La carcasa de una caja reductora es la cubierta metálica que protege a los elementos en el interior de esta, así como fija la posición de los árboles. Se muestra una en la Figura 6. Usualmente, se fabrica por soldadura de planchas de metal o por fundición en un molde. La carcasa consta de dos bloques principales, que son la parte inferior y superior de ella, las cuales se unen mediante tornillos y tuercas. Adicionalmente, se agregan tapas con agujero, que es por donde se apoya un árbol y deja salir una porción de este para conectarla con un acoplamiento flexible o una polea que, a su vez, conecte a otro árbol transmitiendo o recibiendo potencia.



Figura 6 – Carcasa de una caja reductora.

Tomado de “Desarrollo de un algoritmo para el diseño de carcasas soldadas para cajas reductoras de engranajes cilíndricos”, por Michael Blas (2016)

El valor del espesor de carcasa es un valor recomendado en los manuales. Para este caso, se usará los lineamientos del Atlas de elementos de máquinas y mecanismos (Belíáev et al., 1971). Se elaboró la Tabla 1 para mostrar el ancho de espesor de carcasa recomendado en función al número de etapas. En esta tabla se muestra ecuaciones para el cálculo del espesor en base al módulo normal (m_n), ángulo de hélice (β), número de dientes del piñón (N_p) y de la

rueda (N_R). En dos y tres etapas, se toma el par de engranajes (piñón y rueda) cuyo número de dientes sea el mayor a los presentes en la caja reductora.

Tabla 1

Ancho de espesor de pared lateral de carcasa.

| Número de etapas | Espesor de pared lateral (mm) |
|------------------|---|
| Una etapa | $e_p = 0.025 \cdot \frac{m_n}{\cos(\beta)} \cdot (Z_P + Z_R) + 1, \quad e \geq 7,5 \text{ mm}$ |
| Dos etapas | $e_p = 0.025 \cdot \frac{m_n}{\cos(\beta)} \cdot (Z_P + Z_R)_{\text{máx}} + 3, \quad e \geq 8 \text{ mm}$ |
| Tres etapas | $e_p = 0.025 \cdot \frac{m_n}{\cos(\beta)} \cdot (Z_P + Z_R)_{\text{máx}} + 5$ |

Nota. Basado en tablas de “Atlas de elementos de máquinas y mecanismos”, por Beliáev et al. (1971).

El ancho de la tapa para la carcasa, también está referido en el Atlas de elementos de máquinas y mecanismos (Beliáev et al., 1971). Se elaboró la Tabla 2 para mostrar el ancho de tapa requerido para la carcasa en función al ancho externo de los rodamientos (H_r).

Tabla 2

Ancho de tapa lateral de carcasa.

| Ancho externo del rodamiento (mm) | Ancho de la tapa (mm) | Espacio adicional para la tapa (mm) | Ancho externo del rodamiento (mm) | Ancho de la tapa (mm) | Espacio adicional para la tapa (mm) |
|-----------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| $H_r \leq 35$ | 12 | 5 | $150 < H_r \leq 200$ | 28 | 10 |
| $35 < H_r \leq 65$ | 15 | 5 | $200 < H_r \leq 270$ | 35 | 12 |
| $65 < H_r \leq 100$ | 18 | 7 | $270 < H_r \leq 350$ | 44 | 15 |
| $100 < H_r \leq 150$ | 23 | 10 | | | |

Nota. Basado en tablas de “Atlas de elementos de máquinas y mecanismos”, por Beliáev et al. (1971).

1.1.5. Acoplamientos

Un acoplamiento es “un elemento de máquina usado para conectar dos árboles de transmisión, por lo que permite que las máquinas puedan ser diseñadas y fabricadas por separado y ser ensambladas posteriormente” (Ugural, 2015, p. 443). Se pueden agrupar en dos tipos, rígidos y flexibles, los cuales se muestra en la Figura 7.

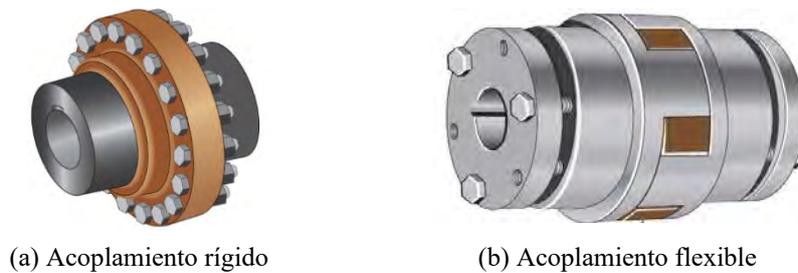


Figura 7 – Tipos de acoplamiento.

Tomado de “Machine Elements in Mechanical Design”, por Mott, Vavrek y Wang (2018).

Los acoplamientos rígidos son “utilizados si se puede garantizar una precisa alineación entre los árboles conectados, que se consigue en el montaje y se mantiene durante la operación” (Jiang, 2019, p. 367). Mientras que los acoplamientos flexibles pueden “acomodar las desalineaciones y reducir el esfuerzo inducido en los árboles conectados, lo que conduciría a reducir la posibilidad de un falla por fatiga temprana” (Jiang, 2019, p. 367).

1.2. Cálculo y diseño de árboles de transmisión

Las cargas en un árbol de transmisión “son originadas por los elementos montados” (Jiang, 2019, p. 262). En un árbol de transmisión típico, “estos elementos, tales como engranajes y rodamientos, aplican fuerzas tangenciales, radiales y axiales” (Jiang, 2019, p. 262). Además, “debido a que transmiten potencia, los árboles están sometidos a un torque” (Jiang, 2019, p. 262). Por ello, se puede afirmar que un árbol de transmisión está sometido a una combinación de carga axial, corte transversal, flexión y torsión, y estas cargas pueden ser estáticas, alternantes o pulsantes dependiendo de la aplicación.

El diseño por resistencia mecánica parte por identificar estas fuerzas y momentos; así mismo, calcular los esfuerzos y deflexiones presentes en determinadas secciones. Según la norma DIN 743, en un árbol, se verifica la resistencia a la deformación permanente y a la fatiga respecto a un factor de seguridad. También, es necesario asegurar que la velocidad de giro del árbol no sea cercana ni igual a la velocidad de resonancia. Finalmente, es necesario verificar que los desplazamientos presentes no excedan valores admisibles o límites.

1.2.1. Cálculo preliminar por torsión del diámetro de un árbol

Antes de determinar el diámetro del árbol, para con el cual se asegure que el árbol sea resistente mecánicamente, es necesario asignar un diámetro preliminar para empezar a modelar

el diseño del árbol. Al respecto, Jiang (2019) propone la ecuación 9 (p. 265) para realizar un cálculo preliminar por torsión del diámetro de un árbol.

$$d_0 = \left(\frac{9,55 \cdot 10^6 \cdot P}{0.2\tau_{0.ADM} \cdot n} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

$P =$ Potencia transmitida (kW)

$n =$ Velocidad angular (rpm)

$\tau_{0.ADM} =$ Esfuerzo cortante admisible para el cálculo preliminar (N/mm^2)

Se elaboró la Tabla 3, en la cual se puede encontrar valores para el esfuerzo cortante admisible según el tipo de acero para este cálculo preliminar por torsión. Se debe seleccionar “el mayor valor de la tabla si el árbol está sujeto solo a torsión, mientras que el menor valor si está sujeto a flexión y torsión” (Jiang, 2019, p. 265). Para la presente tesis, se considera que los árboles trabajan a flexión y torsión.

Tabla 3

Valores de esfuerzo cortante admisible según tipo de acero.

| Tipo de acero | $\tau_{0.ADM} (N/mm^2)$ |
|------------------|-------------------------|
| Acero al carbono | 20 – 40 |
| Acero inoxidable | 15 – 25 |
| Acero aleado | 40 – 52 |

Nota. Valores tomados de “Analysis and Design of Machine Elements”, por Jiang (2019).

1.2.2. Cálculo de tensiones y deformaciones por elementos finitos

Los cálculos de esfuerzos, esfuerzos cortantes y deformaciones son necesarios para poder diseñar un árbol de transmisión. Este cálculo se puede realizar mediante elementos finitos, el cual se utiliza en el presente trabajo de tesis.

El método de elementos finitos es “usado para resolver problemas físicos en análisis de ingeniería y diseño” (Bathe, 2014, p. 2). Se basa en plantear un modelo matemático que englobe el problema físico y que este sea lo más preciso posible. Los elementos finitos son “parecidos a fragmentos de una estructura” (Cook et al., 2001, p. 5) y pueden ser de diversos tipos, como lineales, triangulares o incluso tridimensionales.

El cálculo por elementos finitos será asistido mediante un software especializado. En la Figura 8, en la que se muestran los esfuerzos equivalentes por Von Mises calculados en un árbol de transmisión para ciertas condiciones de carga provocadas por las fuerzas de un engranaje helicoidal, un acoplamiento flexible en el extremo izquierdo mientras el árbol se encuentra apoyado en rodamientos. El detalle de las cargas sobre estos árboles se desarrollará en detalle en capítulos posteriores.

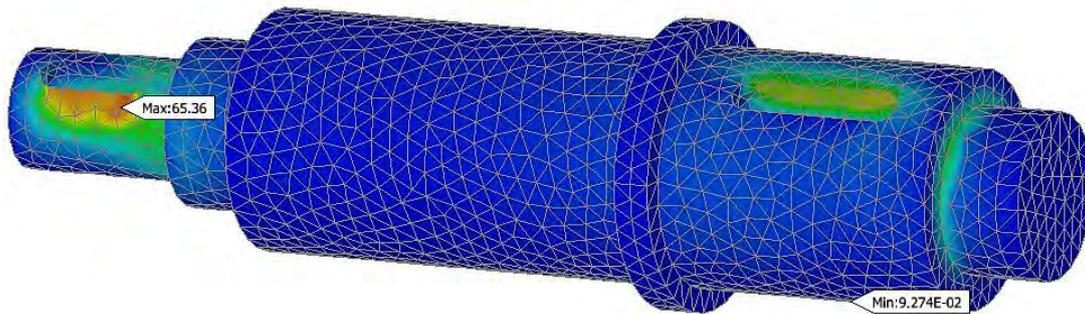


Figura 8 – Esfuerzos generados en un árbol de transmisión.

Del mismo modo, mediante elementos finitos se obtiene los valores de deformación en tres direcciones: un axial y dos transversales. En la Figura 9, se muestra la deformación producida en un árbol para las mismas condiciones de carga de la figura anterior, pero a una escala exagerada. Es importante aclarar que la deformación en el extremo del árbol se debe a la torsión del árbol y no a una carga de compresión sobre el mismo.

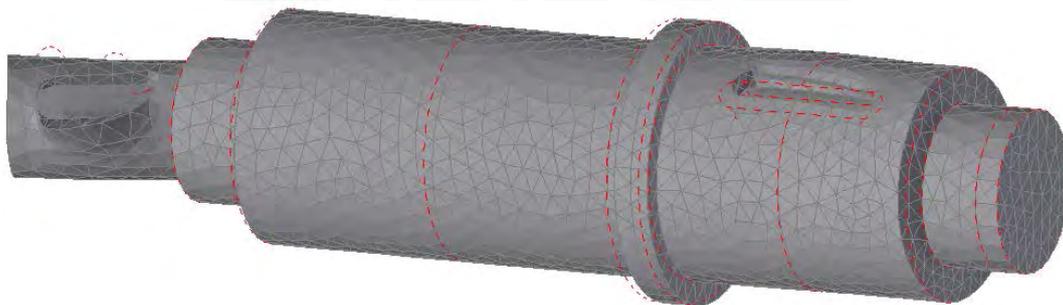


Figura 9 – Deformaciones generadas en un árbol de transmisión.

1.2.3. Cálculo de la capacidad de carga según DIN 743

La norma DIN 743 establece dos cálculos de verificación para árboles de transmisión: cálculo de verificación para evitar falla por deformación permanente y para evitar falla por fatiga. La misma normativa cuenta con ecuaciones y metodología para calcular la carga de un

árbol de transmisión. Además, cuenta con valores experimentales de resistencia de diversos materiales, usados para el análisis de resistencia.

1.2.3.1. Resistencia a la falla por deformación permanente

Un árbol de transmisión “está sujeto a fuerzas axiales, momentos flectores y torsionales; normalmente, los árboles están sujetos a una combinación de todas estas cargas” (Bhandari, 2010, p. 331). Este análisis busca evitar que algún punto del árbol exceda el límite de fluencia del material, pues, caso contrario, se generaría una deformación permanente en el árbol que se consideraría como una falla.

Factor de seguridad por deformación permanente según DIN 743

Según la norma DIN 743 (2012a), se utiliza la ecuación 10 para calcular el factor de seguridad que evita falla por deformación permanente.

$$FS_{def} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{n\acute{m}ax}}{\sigma_{nADM}} + \frac{\sigma_{f\acute{m}ax}}{\sigma_{fADM}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t\acute{m}ax}}{\tau_{tADM}}\right)^2}} \quad (10)$$

$\sigma_{n\acute{m}ax}$ = Esfuerzo actuante máximo por carga axial (N/mm^2)

$\sigma_{f\acute{m}ax}$ = Esfuerzo actuante máximo por flexión (N/mm^2)

$\tau_{t\acute{m}ax}$ = Esfuerzo actuante máximo por torsión (N/mm^2)

σ_{nADM} = Esfuerzo admisible por carga axial (N/mm^2)

σ_{fADM} = Esfuerzo admisible por flexión (N/mm^2)

τ_{tADM} = Esfuerzo admisible por torsión (N/mm^2)

Los valores de los esfuerzos admisibles son calculados en función al material del árbol, tratamiento térmico, acabado superficial y otras variables siguiendo el procedimiento establecido por la norma DIN 743.

Cálculo de los esfuerzos por carga axial, por flexión y por torsión

Los esfuerzos por carga axial, por flexión y por torsión se calculan en función a los esfuerzos obtenidos en una sección transversal del árbol, los cuales son un esfuerzo máximo y

otro mínimo en posiciones opuestas. Así, se cuenta con las ecuaciones 11, 12 y 13 para el esfuerzo por caga axial, por flexión y por torsión respectivamente.

$$\sigma_{n\acute{m}ax} = \frac{1}{2}(\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{min}) \quad (11)$$

$$\sigma_{f\acute{m}ax} = \frac{1}{2}(\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{min}) \quad (12)$$

$$\tau_{t\acute{m}ax} = \tau_{m\acute{a}x} \quad (13)$$

Recálculo del diámetro en caso de falla por deformación permanente

En caso de que el diámetro del árbol (d_i) no alcance para asegurar la resistencia a la deformación permanente del árbol, es decir, que los esfuerzos calculados por elementos finitos (σ_{n_i} , σ_{f_i} y τ_{t_i}) sean excesivos al punto que el factor de seguridad sea menor al recomendado, se puede recalculer el diámetro (d_{i+1}) en función a aquellos valores conocidos. Para esto, considerando el factor de seguridad recomendado se propone la ecuación 14 para este cálculo.

$$\frac{1}{FS_{def.R}^2} = \left[\frac{\sigma_{n\acute{m}ax(i)}}{\sigma_{n_{ADM}}} \left(\frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^2 + \frac{\sigma_{f\acute{m}ax(i)}}{\sigma_{f_{ADM}}} \left(\frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^3 \right]^2 + \left[\frac{\tau_{t\acute{m}ax(i)}}{\tau_{t_{ADM}}} \left(\frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^3 \right]^2 \quad (14)$$

En esta ecuación no es posible despejar el valor del nuevo diámetro d_{i+1} , pero puede ser resuelta por métodos numéricos. En el Anexo A, se puede encontrar el procedimiento de formulación y deducción de esta ecuación.

1.2.3.2. Resistencia a la falla por fatiga

Debido a la rotación del árbol de transmisión, los esfuerzos de flexión en diferentes puntos de una sección varían de acuerdo a un ciclo reversible en función esfuerzos alternos y medios. Además, los esfuerzos de torsión presentes son “proporcionales al torque y varían de acuerdo a un ciclo pulsante con un esfuerzo que varía de cero a un máximo” (Lelikov, 2008, p. 432). “Cerca del 80% de fallas de componentes mecánicos son debido a la fatiga como resultado de los esfuerzos fluctuantes” (Bhandari, 2010, p. 150). Por ello, esta falla suele ser considerada la principal razón de falla de los componentes mecánicos.

Factor de seguridad por fatiga según DIN 743

Según la norma DIN 743 (2012a), mediante la ecuación 15, se puede calcular el factor de seguridad para evitar falla por fatiga.

$$FS_{fat} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{n_a}}{\sigma_{n_{ALT}}} + \frac{\sigma_{f_a}}{\sigma_{f_{ALT}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t_a}}{\tau_{t_{ALT}}}\right)^2}} \quad (15)$$

σ_{n_a} = Esfuerzo actuante alternante efectivo por carga axial (N/mm^2)

σ_{f_a} = Esfuerzo actuante alternante efectivo por flexión (N/mm^2)

τ_{t_a} = Esfuerzo actuante alternante efectivo por torsión (N/mm^2)

$\sigma_{n_{ALT}}$ = Esfuerzo alternante admisible por carga axial (N/mm^2)

$\sigma_{f_{ALT}}$ = Esfuerzo alternante admisible por flexión (N/mm^2)

$\tau_{t_{ALT}}$ = Esfuerzo alternante admisible por torsión (N/mm^2)

Los valores de los esfuerzos alternantes admisibles son calculados en función al material del árbol, tratamiento térmico, acabado superficial y otras variables siguiendo un procedimiento establecido en la norma DIN 743.

Cálculo de los esfuerzos medios y alternantes

Los esfuerzos presentes en una sección transversal de un árbol de transmisión se pueden disgregar en esfuerzos por carga axial y flexión, y en esfuerzo cortante por torsión. Justamente, es necesario formular las ecuaciones para el cálculo del esfuerzo medio y alterno de cada uno de estos esfuerzos.

El esfuerzo por carga axial y flexión actúan juntos en la dirección axial; es decir, el árbol presenta estos dos esfuerzos sumados y para calcularlos, estos deben ser disgregados. Esto es posible dado que la fuerza axial sobre el árbol siempre es constante en magnitud y sentido independientemente del giro del árbol. Esto no ocurre con el esfuerzo por flexión cuando el árbol está girando. Para dar más detalle, en la Figura 10 se muestra la distribución axial de esfuerzos ideales en un corte transversal en un árbol de transmisión sometido a las fuerzas generadas en los engranajes y con rodamientos. Si bien, en la práctica esta distribución

ideal no es tan perfecta, sirve para mostrar cómo, cuándo gira el árbol, el esfuerzo por flexión presenta una fluctuación de esfuerzo mínimo a máximo sobre la superficie del árbol.

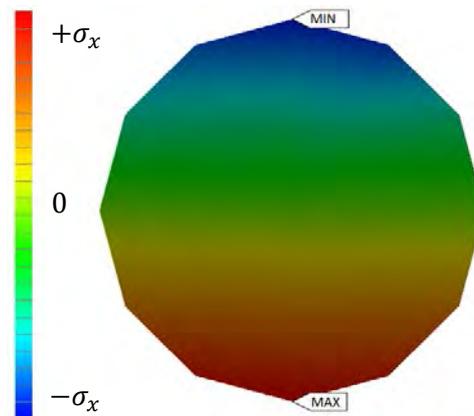


Figura 10 – Distribución de esfuerzos ideal en dirección axial en una sección de un árbol.

En base a todo lo establecido, se procede a formular las ecuaciones para el cálculo del esfuerzo medio y alterno del esfuerzo por carga axial, por flexión y el esfuerzo cortante por torsión. La formulación de estas ecuaciones se encuentra en el Anexo A.

En primer lugar, en caso del esfuerzo por carga axial, que implica esfuerzos por tensión/compresión, y se puede identificar que es constante en el tiempo. En ese sentido, mediante las ecuaciones 16 y 17, se puede calcular el esfuerzo medio y alterno.

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{2}(\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}) \quad (16)$$

$$\sigma_{na} = 0 \quad (17)$$

En segundo lugar, en caso del esfuerzo por flexión, que implica esfuerzos por tensión/compresión que varían a lo largo del tiempo, se pudo identificar que es alternante en el tiempo. En ese sentido, mediante las ecuaciones 18 y 19, se puede calcular el esfuerzo medio y alterno.

$$\sigma_{fm} = 0 \quad (18)$$

$$\sigma_{fa} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad (19)$$

En tercer lugar, en caso del esfuerzo cortante por torsión, se asume que es pulsante en el tiempo, al considerar que la máquina al encenderse presenta un incremento considerable de potencia. En esa línea, mediante las ecuaciones 20 y 21, se puede calcular el esfuerzo medio y alterno.

$$\tau_{t_m} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{2} \quad (20)$$

$$\tau_{t_a} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{2} \quad (21)$$

Esfuerzo alternante admisible para vida finita

En caso de requerir un ciclo de vida menor a los 10^6 ciclos, se puede calcular un esfuerzo alterno admisible mayor. Según la norma DIN 743, el esfuerzo alterno admisible para un ciclo de vida determinado puede ser calculado mediante la ecuación 22.

$$\sigma_{ALT_{fin}} = \sqrt{\frac{q \cdot 10^6}{N_c}} \sigma_{ALT} \quad (22)$$

σ_{ALT} = Esfuerzo admisible para vida infinita (N/mm^2)

N_c = Número de ciclos de carga, $10^3 < N < 10^6$

$q = 5$ para flexión o tensión/compresión. $q = 8$ para torsión

Recálculo del diámetro en caso de falla por fatiga

En caso de que el diámetro del árbol (d_i) no alcance para asegurar la resistencia por fatiga de árbol, es decir, que los esfuerzos calculados por elementos finitos (σ_{n_i} , σ_{f_i} y τ_{t_i}) sean excesivos e implique que el factor de seguridad sea menor al recomendado, se puede recalculer el diámetro (d_{i+1}) en función a aquellos valores conocidos. Por ello, considerando el factor de seguridad recomendado como el valor recomendado se propone la ecuación 23 para el cálculo del nuevo diámetro d_{i+1} .

$$d_{i+1} = d_i \left[FS_{fat.R}^2 \left(\frac{\sigma_{f(i)}^2}{\sigma_{f_{ALT}}^2} + \frac{\tau_{t(i)}^2}{4\tau_{t_{ALT}}^2} \right) \right]^{1/6} \quad (23)$$

En el Anexo A, se encuentra el procedimiento de deducción esta ecuación.

1.2.4. Cálculo de velocidad crítica del árbol

El sistema compuesto por el árbol de transmisión y los engranajes cuenta con una velocidad crítica de giro debido a la masa de estos elementos. En ese sentido, “a determinadas velocidades de rotación, el árbol es inestable con deflexiones que se incrementan sin un límite superior” (Budynas & Nisbett, 2011, p. 383) Por ello, la velocidad de rotación de un árbol de transmisión debe de ser tal que no sea cercana a la primera frecuencia natural del sistema que es la velocidad crítica.

Ahora bien, cada masa (engranaje, acoplamiento, polea o el propio árbol) tiene una velocidad crítica (ω_{ii}). Mediante la ecuación 24, se puede calcular la velocidad crítica en la que incurre una masa. La velocidad crítica de masas agrupadas (ω_c) puede ser calculada por la ecuación de Dunkerley, expresada en la ecuación 25.

$$\omega_{ii} = \left(m_i \cdot \frac{\delta_i}{F_i} \right)^{-1/2} \quad (24)$$

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ii}^2} \quad (25)$$

ω_{ii} = velocidad crítica i -ésima producida por la masa i (rad/s)

δ_i = deflexión producida por la masa i (m)

F_i = fuerza que produce la deflexión δ_{ii} (misma dirección y sentido) (N)

Para el análisis de velocidad crítica de la presente tesis, no se considera la influencia de la masa del árbol, debido a que no influye significativamente en el cálculo. En ese sentido, solo se considera la masa de los engranajes, acoplamientos o poleas montados en el árbol. Ahora bien, se presenta la ecuación 26 para dos masas aplicando la ecuación de Dunkerley.

$$\omega_c = \left(\frac{m_1 \delta_1}{F_1} + \frac{m_2 \delta_2}{F_2} \right)^{-1/2} \quad (26)$$

Valor admisible de velocidad crítica

La velocidad de rotación del árbol no debe ser cercana al valor de la primera velocidad crítica del sistema, lo cual se puede analizar con la relación λ , la misma que se calcula con la

ecuación 27. Al respecto, para considerar que un árbol no falla por velocidad crítica, la relación λ debe tener un valor dentro de $\lambda < 0,8$ en el lado subcrítico o un valor de $\lambda > 1,15$ en el lado supercrítico.

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (27)$$

$\omega =$ velocidad de rotación del árbol de transmisión (rad/s)

1.2.5. Desplazamiento transversal, angular y torsional

“Un componente rígido es denominado así cuando este no se deforma o este no se flexiona considerablemente debido a fuerzas externas” (Bhandari, 2010, p. 333). En ese sentido, se debe verificar que los desplazamientos presentes no excedan valores admisibles.

En primer lugar, el desplazamiento transversal o deflexión (δ) es generada por las fuerzas radiales presentes. Para esto, Jiang (2019) presenta valores admisibles, teniendo la ecuación 28 (p. 269) para cualquier zona del árbol y la ecuación 29 (p. 269) para el segmento donde se monta un engranaje.

$$\delta_{ADM} = (0,0003 \dots 0,0005)l_{rod} \quad (28)$$

$$\delta_{ADM.eng} = (0,01 \dots 0,03)m_n \quad (29)$$

$l_{rod} =$ Longitud entre rodamientos (m)

$m_n =$ Modulo normal del engranaje (m)

En segundo lugar, en cuanto al desplazamiento angular (θ), este es el ángulo que un plano paralelo a la sección transversal del árbol gira respecto a este y “debe ser verificada en zonas donde los engranajes y rodamientos están montados” (Jiang, 2019, p. 269). El valor admisible depende de los apoyos y varía en función al tipo de rodamiento, pues es el componente que podría fallar. En esta línea, Budynas y Nisbett (2011) presentan valores admisibles en función al tipo de rodamiento como se muestra en la Tabla 4 (p. 379), mientras que Jiang (2019) propone el valor admisible para segmentos montados con engranajes, el cual se presenta en la ecuación 30 (p. 269).

Tabla 4

Desplazamiento angular admisible según el tipo de rodamiento.

| Rodamiento | θ_{ADM} |
|------------------------------------|---------------------|
| Rodamiento de rodillos cónicos | 0,0005 – 0,0012 rad |
| Rodamiento de rodillos cilíndricos | 0,0008 – 0,0012 rad |
| Rodamiento esférico | 0,026 – 0,052 rad |
| Rodamiento de bolas a rótula | 0,026 – 0,052 rad |

Nota. Tomado de “Shigley’s Mechanical Engineering Design”, por Budynas y Nisbett (2011).

$$\theta_{ADM.eng} = 0,001 \dots 0,002 \text{ rad} \quad (30)$$

Por último, el desplazamiento torsional (φ) es el ángulo de torsión que genera un torque. Básicamente, “un árbol es torsionalmente rígido si no se tuerce mucho debido a la acción de un torque” (Bhandari, 2010, p. 333). En ese sentido, Jiang (2019) propone un valor admisible de desplazamiento torsional presentado en la ecuación 31 (p. 270) para árboles de transmisión. Es importante notar que la longitud sujeta a torque está en metros.

$$\varphi_{ADM} = (0,5 \dots 1^\circ) l_t \quad (31)$$

$l_t =$ Longitud sujeta a transmisión de torque (m)

Recálculo del diámetro en caso de falla por desplazamiento excesivo

En caso de que algún valor de desplazamiento exceda el valor admisible, es posible recalcular el valor de diámetro. Al respecto, “El momento de inercia I es proporcional al d^4 ” (Budynas & Nisbett, 2011, p. 381). Por ello, si cualquier desplazamiento es mayor al admisible en algún punto, Budynas & Nisbett (2011) proponen la ecuación 32 (p. 381) para determinar el nuevo diámetro d_{i+1} en función al diámetro d_i .

$$d_{i+1} = d_i \left| \frac{y_i}{y_{ADM}} \right|^{1/4} \quad (32)$$

$y_i =$ Deflexión, desplazamiento angular o desplazamiento torsional i

$y_{ADM} =$ Desplazamiento admisible

1.3. Selección y cálculo de una unión para transmitir potencia

1.3.1. Uniones por chaveta

Una chaveta es “un componente desmontable, el cual se ensambla dentro de un canal chavetero mecanizado en el árbol, y es capaz de transmitir un torque entre el árbol y el cubo” (Norton, 2010, p. 181). La chaveta tiene “la mitad del espesor de la chaveta ajustada al canal chavetero del árbol; mientras que la otra mitad, en la del cubo” (Bhandari, 2010, p. 350). Por ello, la transmisión de potencia debe a la resistencia al corte que tiene la chaveta. Además, “previene una relativa rotación entre el árbol y el componente que la chaveta une” (Bhandari, 2010, p. 347). Para la presente tesis, se establece la utilización de chavetas de caras paralelas de forma plana, los que vienen establecidos en la norma DIN 6885. Se selecciona este tipo de chaveta, ya que esta tiene una mayor estabilidad en comparación con la cuadrada. “Los aceros a medio carbono con esfuerzo de tracción menor a 590 N/mm^2 sirven de material para las chavetas, tales como aceros grado E355, C46, C45 o C50E” (Lelikov, 2008, p. 450).

1.3.1.1. Cálculo y dimensionamiento de una chaveta plana de caras paralelas según DIN 6885

Las chavetas son “seleccionadas de tablas estandarizadas en función al diámetro del árbol, para luego ser verificadas por resistencia” (Lelikov, 2008, p. 449). Al respecto, los canales chaveteros en el árbol se dimensionan según la norma DIN 6885. Se elaboró la Figura 11 para mostrar las partes relevantes a uniones por chavetas de caras paralelas de forma plana.

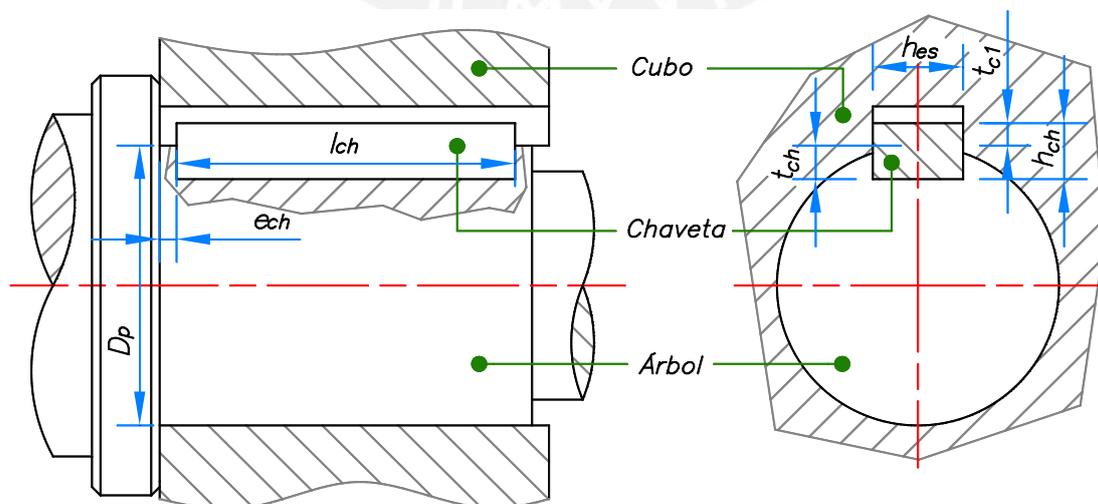


Figura 11 – Modelo de una unión por chaveta plana.

Los valores de longitud de la chaveta (l_{ch}) están normalizados según la norma DIN 6885, los cuales se establecen en función a la longitud efectiva ($l_{e.ch}$). Para calcular este valor, Lelikov (2008) propone la ecuación 33 (p. 449). Se puede extender la utilización de esta ecuación a dos y tres chavetas mediante la ecuación 34, para la cual el factor de proporción (k_{ch}) se toma considerando una eficiencia del 75%.

$$l_{e.ch} \geq \frac{2M_t}{D_p t_{c1} \sigma_{st}} = \frac{2M_t}{D_p (h_{ch} - t_{ch}) \sigma_{ST}} \quad (33)$$

$$l_{e.ch} \geq \frac{2k_{ch}M_t}{N_{ch}D_p(h_{ch} - t_{ch})\sigma_{ST}} \quad (34)$$

M_t = Momento torsor (Nmm)

$t_{c1} = h_{ch} - t_{ch}$ = Profundidad de la chaveta en el cubo (mm)

D_p = Diámetro del árbol (mm)

σ_{ST} = Presión admisible del cubo (MPa)

$k_{ch} = \frac{1}{0,75}$ = Factor de proporción de transmisión de múltiples chavetas

N_{ch} = Número de chavetas

1.3.1.2. Presión admisible para cubos en uniones por chaveta

En uniones por chaveta, el cubo del árbol de transmisión es la zona que debe ser verificada por corte y por presión de aplastamiento de la chaveta. Al respecto, en la Tabla 5, los valores de presión admisible del acero del árbol son seleccionados dependiendo de las condiciones de carga y condiciones de operación de la conexión.

Tabla 5

Valores de presión admisible del cubo del árbol en uniones por chaveta.

| Tipo de conexión, material del cubo | σ_{ST} : Presión admisible (N/mm^2) |
|--------------------------------------|--|
| Fijo, cubo de acero | 130 - 200 |
| Fijo, cubo de hierro o acero fundido | 80 - 110 |
| Deslizante sin carga, cubo de acero | 20 - 40 |

Nota. Tomado de "6. Design of Machine Elements" en Springer Handbook of Mechanical Engineering, por Lelikov (2008).

1.3.2. Uniones estriadas

Una unión estriada es “construida contorneando la superficie del árbol y en el interior del cubo con formas de diente de engranaje” (Norton, 2010, p. 201). Las principales ventajas de una unión estriada son la máxima resistencia que ofrece en la raíz del diente y la precisión del ajuste que implica. En comparación con un una unión por chaveta, una unión estriada “acomoda largos movimientos axiales entre el cubo y el árbol mientras que simultáneamente transmite torque” (Norton, 2010, p. 201).

1.3.2.1. Cálculo y dimensionamiento de una unión estriada recta o paralela según DIN-ISO 14

Las uniones estriadas rectas o paralelas constan de dientes de forma cuadrada, que se engranan a agujeros acanalados en el cubo. Las dimensiones normalizadas de esta unión se presentan en tablas normalizadas que dependen del diámetro. Por ello, para el diseño de uniones estriadas de caras paralelas, la norma DIN-ISO 14 se utiliza para seleccionar el número de dientes, así como las dimensiones de los dientes. Se elaboró la Figura 12, la cual muestra las partes relevantes a una unión estriada, así como algunas dimensiones relevantes.

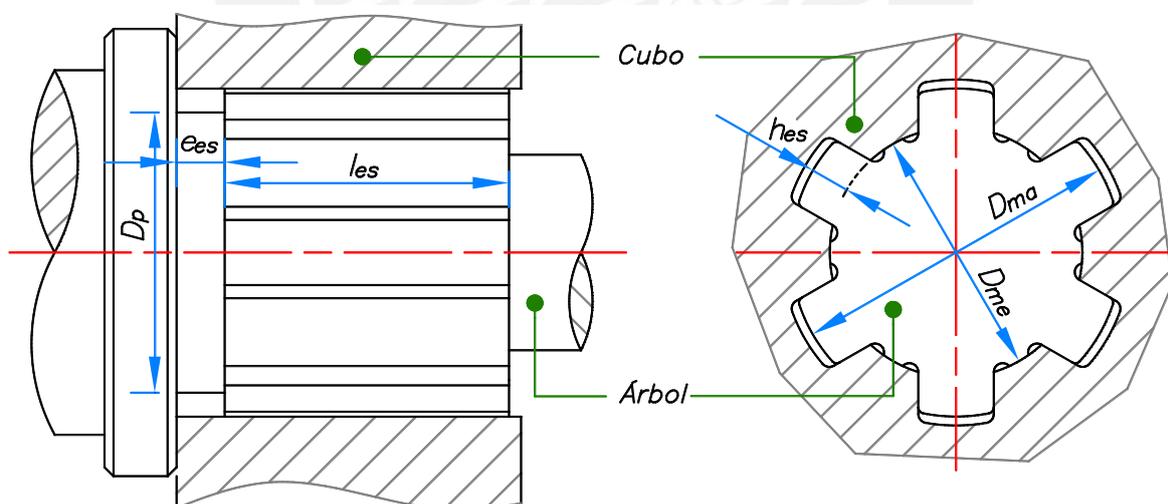


Figura 12 – Modelo de una unión estriada.

La longitud de una unión estriada (l_{es}) se calcula en función a la longitud efectiva ($l_{e.es}$). Al respecto, Lelikov (2008) propone la ecuación 35 (p. 453) para verificar su resistencia. Naturalmente, el factor de proporción irregular entre los dientes (k_{dt}) se toma considerando una eficiencia del 75%.

$$l_{e.es} \geq \frac{2k_{dt}M_t}{D_m Z_{es} h_{es} \sigma_{ST}} = \frac{8k_{dt}M_t}{(D_{ma}^2 - D_{me}^2) Z_{es} \sigma_{ST}} \quad (35)$$

$k_{dt} = \frac{1}{0,75} =$ Factor de proporción por transmisión irregular entre los dientes

$M_t =$ Momento torsor (Nmm)

$D_m =$ Diámetro medio de la sección con una unión estriada (mm)

$Z_{es} =$ Número de dientes

$h_{es} =$ Altura del diente (mm)

$D_{ma} =$ Diámetro mayor de la unión estriada (mm)

$D_{me} =$ Diámetro menor de la unión estriada (mm)

$\sigma_{ST} =$ Presión admisible del cubo (mm)

Según la norma DIN-ISO 14, el método de centrado del árbol y el cubo es respecto al diámetro interno. Es por ello, que “a lo largo del diámetro menor (D_{me}), se asegura un ajuste de transmisión, mientras que la altura del diente (h_{es}) es también es área de contacto” (Lelikov, 2008, p. 452). Desde luego, como el contacto entre superficies se da en la parte interna de los dientes, la superficie exterior de los dientes no tiene contacto con el cubo del árbol.

1.3.2.2. Presión admisible para cubos en uniones estriadas

En este caso, el cubo del árbol de transmisión es la zona que debe ser verificada. La presión admisible del cubo depende del método de centrado, que en este caso es respecto al diámetro interno. Esto significa que los cubos son de alta dureza ($\geq 40 HRC$) (Lelikov, 2008, p. 453). En la Tabla 6, se puede determinar la presión admisible del cubo.

Tabla 6

Valores de presión admisible del cubo del árbol en uniones estriadas.

| Tipo de junta | σ_{ST} : Presión admisible (N/mm^2) con dureza $\geq 40 HRC$ |
|-----------------------|--|
| Fijo | 100 – 140 |
| Deslizante sin carga | 30 – 60 |
| Deslizante bajo carga | 5 – 15 |

Nota. Tomado de “6. Design of Machine Elements” en Springer Handbook of Mechanical Engineering, por Lelikov (2008).

1.3.3. Piñón solidario

Un piñón es solidario a un árbol de transmisión, cuando el piñón se manufactura en el mismo árbol. Se elaboró la Figura 13 para ilustrar este tipo de unión. Este caso es muy utilizado debido a que el piñón normalmente no es muy grande en comparación con el diámetro del árbol, lo cual no ocurre cuando el módulo del engranaje tiene un valor elevado. Bhandari (2010) propone la inecuación 36 (p. 667) para determinar cuándo es factible utilizar un piñón solidario.

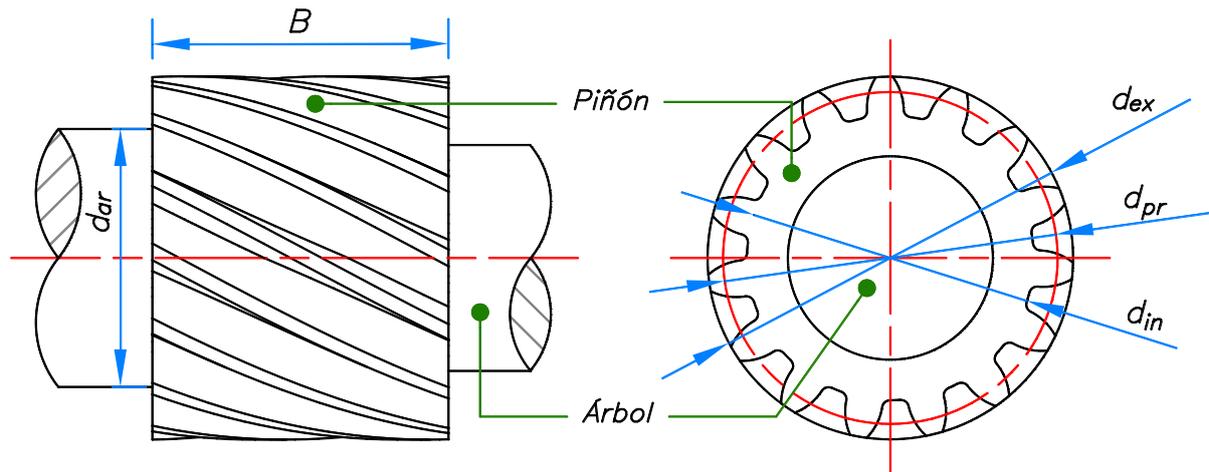


Figura 13 – Modelo de un piñón solidario.

$$d_{in} - d_{ar} < \frac{d_{ar}}{2} \quad (36)$$

d_{in} = Diámetro interno del engranaje

d_{ar} = Diámetro del árbol

1.4. Diseño del ingreso y salida de potencia a un árbol de transmisión

Un árbol de transmisión de entrada o de salida presenta un segmento para el ingreso o salida de potencia al árbol. Por un lado, este segmento en el árbol de entrada es sometido a un torque por parte del motor o máquina generadora, por medio del cual la caja reductora entra en funcionamiento. Por otro lado, en el árbol de salida, se transmite el torque hacia una máquina objetivo para que esta funcione. Para estos fines, se plantea acoplar un acoplamiento flexible que una el árbol de la caja reductora con otro. También se incluye la posibilidad de acoplar este segmento a pulea con transmisión por faja en V (para árboles de entrada), o una transmisión por cadena de rodillos (para árboles de salida).

1.4.1. Acoplamiento flexible con pines montados en elásticos

Un acoplamiento “tiende a desalinearse debido a la deflexión producida por fuerzas transversales, a errores en el montaje de los componentes, al propio uso de dos máquinas o a la dilatación térmica de las partes” (Bhandari, 2010, p. 356). En ese sentido, los acoplamientos flexibles son usados para solucionar la desalineación al contar con elementos flexibles. En la Figura 14, se muestra el modelo de un acoplamiento flexible con pines montados con elásticos de goma.

Bhandari (2010) propone el diseño y cálculo de verificación del tipo de brida mostrado en la figura, además de presentar el proceso de verificación del mismo (p. 368). A continuación, se presenta este proceso de diseño, dimensionamiento y verificación por resistencia.

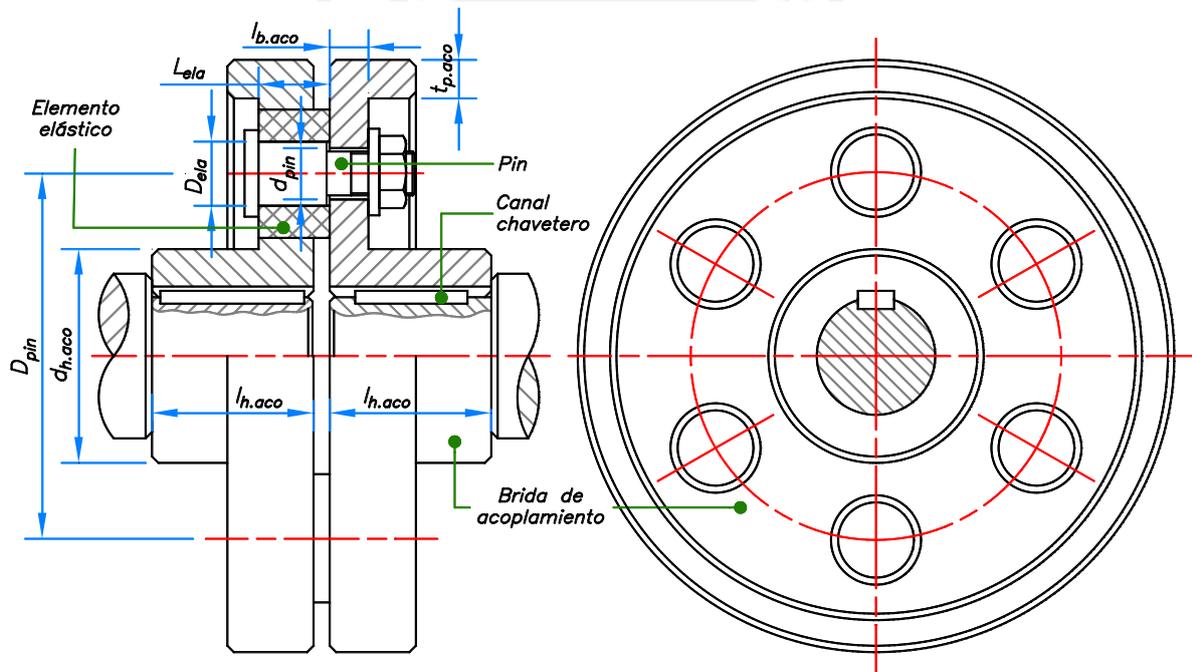


Figura 14 – Modelo de un acoplamiento flexible con pines en elásticos de goma.

Existen algunos valores recomendados para el diámetro externo del cubo $d_{h.aco}$, la longitud del cubo ($l_{h.aco}$), el diámetro del círculo primitivo de los pines (D_{pin}), el espesor de la brida del árbol ($t_{b.aco}$), el espesor del borde de protección ($t_{p.aco}$) y el diámetro de los pines (d_{pin}), los cuales se calculan según las ecuaciones 37, 38, 39, 40, 41 y 42 (Bhandari, 2010, p. 369) respectivamente.

$$d_{h.aco} = 2d_{aco} \quad (37) \qquad t_{b.aco} = 0,5d_{aco} \quad (40)$$

$$l_{h.aco} = 1,5d_{aco} \quad (38) \qquad t_{p.aco} = 0,25d_{aco} \quad (41)$$

$$D_{c.pin} = 3 \dots 4d_{aco} \quad (39) \qquad d_{pin} = \frac{0,5d_{aco}}{\sqrt{N_{pin}}} \quad (42)$$

d_{aco} = Diámetro del segmento para acoplamiento en un árbol

N_{pin} = Número de pines del acoplamiento

Para realizar la verificación mecánica, en primer lugar, se verifica la resistencia de la brida. Para ello, se calcula el esfuerzo cortante torsional en el cubo de la brida de acoplamiento ($\tau_{br.1}$) y se compara con un valor admisible según la ecuación 43 (Bhandari, 2010). También es necesario calcular el esfuerzo cortante de la brida en la unión del cubo ($\tau_{br.2}$) y se compara con un valor admisible siguiendo la ecuación 44 (Bhandari, 2010). Ambas ecuaciones utilizan un factor de seguridad de la brida (FS_{br}) de 6.

$$\tau_{br.1} = \frac{16M_t d_{h.aco}}{\pi(d_{h.aco}^4 - d_{aco}^4)} < \frac{0,5\sigma_{Y.br}}{FS_{br}} \quad (43)$$

$$\tau_{br.2} = \frac{2M_t}{\pi d_{h.aco}^2 \cdot t_{b.aco}} < \frac{0,5\sigma_{Y.br}}{FS_{br}} \quad (44)$$

M_t = Torque transmitido (Nmm)

$d_{h.aco}$ = Diámetro del cubo de la brida (mm)

d_{aco} = Diámetro del árbol (mm)

$t_{b.aco}$ = Espesor de la brida (Nmm)

$\sigma_{Y.br}$ = Límite de fluencia del material de la brida (N/mm²)

En segundo lugar, se dimensionan los pines y elásticos. Para ello se selecciona un número de pines (N_{pin}) (a partir de 4) para calcular el esfuerzo cortante en los pines y se compara con su valor admisible siguiendo la ecuación 45 (Bhandari, 2010). Luego, se calcula el diámetro (D_{ela}) y la longitud (L_{ela}) del elástico según la ecuación 46 (Bhandari, 2010).

$$\tau_{pin} = \frac{8M_t}{\pi d_{pin}^2 D_{c.pin} N_{pin}} < \tau_{ADM.pin} = 35 \text{ N/mm}^2 \quad (45)$$

$$D_{ela} = L_{ela} = \sqrt{\frac{2M_t}{D_{c.pin}N_{pin}}} \quad (46)$$

d_{pin} = Diámetro del pin (mm)

D_{pin} = Diámetro primitivo de los pines (mm)

En este punto es necesario una verificación adicional. Se calcula el esfuerzo en los pines (σ_{pin}) y se compara con su valor admisible siguiendo la ecuación 47 (Bhandari, 2010). En este caso, se toma un factor de seguridad de los pines (FS_{pin}) de 2, mientras que la separación entre bridas (e_{br}) suele ser 5 mm.

$$\sigma_{pin} = \frac{64M_t(e_{br} + L_{ela}/2)}{\pi d_{pin}^2 D_{c.pin} N_{pin}} < \sigma_{ADM.pin} = \frac{\sigma_{Y.pin}}{FS_{pin}} \quad (47)$$

1.4.2. Transmisión por faja en V

Una transmisión por faja en V transmite “potencia de un árbol a otro usando una faja en forma de V y poleas conectadas a los árboles” (Ugural, 2015, p. 597). “La eficiencia de esta transmisión varía entre 70% y 96%” (Ugural, 2015, p. 597). Se elaboró la Figura 15 para mostrar el modelo de transmisión por faja en V. Entre las ventajas de una faja en V, se tiene que “transmiten potencia en una considerable distancia entre los árboles, así como son simples de diseñar y suelen tener bajo costo inicial” (Bhandari, 2010, p. 499). La presente transmisión por poleas se designa para ser utilizadas solo en **árboles de entrada**, ya que este árbol tiene las cargas más ligeras de la caja reductora.

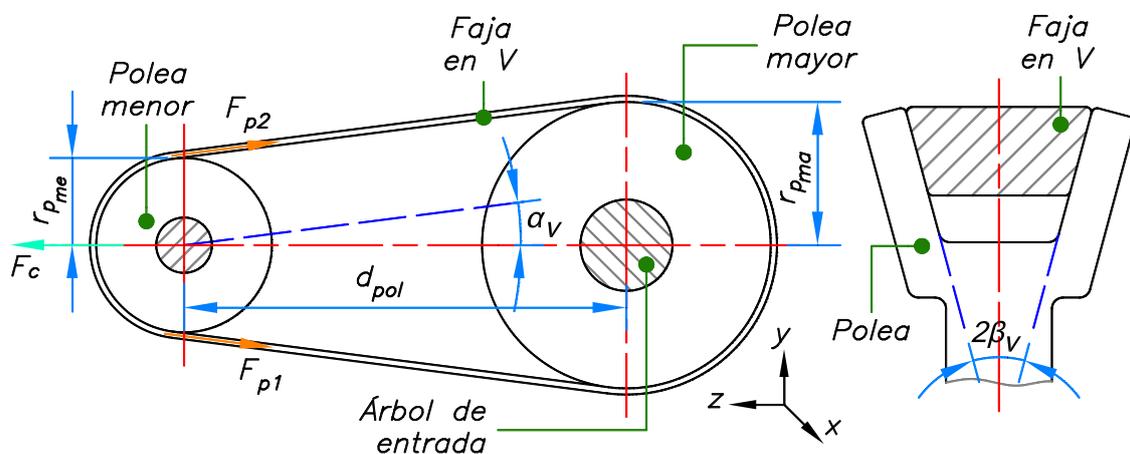


Figura 15 – Modelo de una transmisión por poleas por faja en V.

El ángulo de inclinación (α_V) se calcula mediante la ecuación 48. Además, “para representar el efecto de la inercia en la correa, es necesario calcular la fuerza centrífuga (F_c) de la faja” (Ugural, 2015, p. 601). Para lo cual, Ugural (2015) propone la ecuación 49 (p. 602).

$$\alpha_V = \text{sen}^{-1} \left(\frac{r_{Pma} - r_{Pme}}{d_{pol}} \right) \quad (48)$$

$$F_c = \frac{w_f}{g} \left(\frac{\pi \cdot n_{Pma} \cdot r_{Pma}}{30} \right)^2 \quad (49)$$

r_{Pma} = Radio primitivo de la polea mayor (mm)

r_{Pme} = Radio primitivo de la polea menor (mm)

d_{pol} = Distancia entre centros (mm)

w_f = Peso por unidad de longitud (N/m)

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ = Gravedad

n_{Pma} = Velocidad angular de la polea mayor (rpm)

Las poleas se ven cargadas por dos fuerzas generadas por la faja en V. La fuerza en el lado ajustado o mayor (F_{p2}) se resiste al movimiento de la correa, mientras que la fuerza en el lado flojo o menor (F_{p1}) cede más fácilmente al movimiento. En esta línea, Ugural (2015) presenta las ecuaciones 50 y 51 (p. 606) para el cálculo de cada fuerza respectivamente, ya considerando la fuerza centrífuga. El coeficiente de fricción habitual entre una faja de goma y una polea de acero es 0,3.

$$F_{p1} = F_c + \left(\frac{e^{\mu\varphi/\text{sen } \beta_V}}{e^{\mu\varphi/\text{sen } \beta_V} - 1} \right) \frac{M_t}{r_{Pma}} \quad (50)$$

$$F_{p2} = F_{p1} - \frac{M_t}{r_{Pma}} \quad (51)$$

$\mu = 0,3$ = Coeficiente de fricción entre la goma de la faja y acero

$\varphi = \pi - 2\alpha_V$ = Ángulo de contacto en la polea menor (rad)

β_V = Mitad del ángulo que comprende la faja en V (rad)

M_t = Momento torsor (Nmm)

r_{Pma} = Radio primitivo de la polea mayor (mm)

Ahora bien, es necesario determinar las reacciones que se generan en el árbol de entrada en función a las fuerzas generadas por la faja. Por ello, se propone las ecuaciones 52 y 53 para el cálculo de la reacción siguiendo los ejes de referencia mostrados en la Figura 15. La demostración del cálculo de estas reacciones puede revisarse en el Anexo A.

$$Rp_y = -(F_{p1} - F_{p2}) \text{sen } \alpha_V \quad (52)$$

$$Rp_z = -(F_{p1} + F_{p2}) \text{cos } \alpha_V - F_c \quad (53)$$

1.4.3. Transmisión por cadena de rodillos

La transmisión por cadena de rodillos puede “ser usada para altas cargas y cuando ratios precisos de velocidad se requieran” (Ugural, 2015, p. 608). Se elaboró la Figura 16 para mostrar la transmisión por cadena de rodillos en un sprocket². Como se puede observar, los rodillos “rotan en casquillos que se ajustan a discos interiores entrelazando dos casquillos” (Ugural, 2015, p. 610). “La eficiencia de esta transmisión varía entre 96% y 98%” (Bhandari, 2010, p. 544). Entre las ventajas que proporciona utilizar este tipo de transmisión, se tiene que “pueden ser usados para largas como cortas distancias entre centros, así como presenta dimensiones relativamente pequeñas que las poleas en una transmisión por faja” (Bhandari, 2010, p. 544). La presente transmisión se establece para su utilización en **árboles de salida**, debido a que este árbol presenta las mayores cargas en la caja reductora.

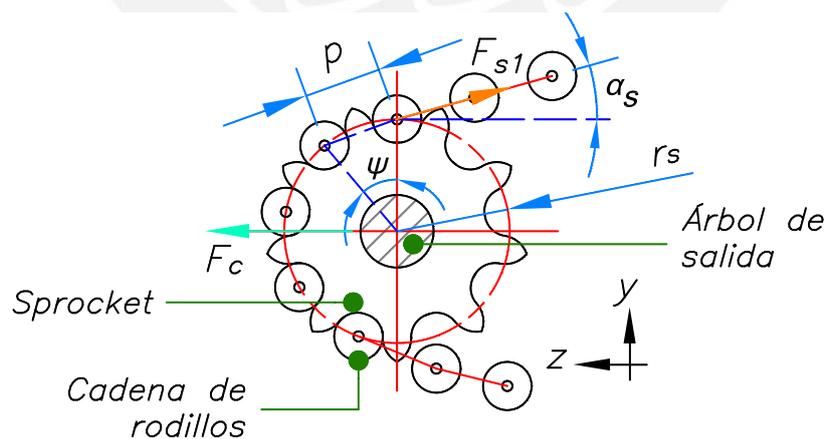


Figura 16 – Modelo de un sprocket de una transmisión por cadena de rodillos.

² En el presente trabajo de tesis, se utiliza el termino en inglés sprocket para referirse al piñón de una transmisión por cadenas para evitar confundirlo con el piñón de los engranajes.

Del mismo modo que poleas con fajas en V, el ángulo de inclinación (α_s) para transmisiones por cadena puede calcularse mediante la ecuación 48 y la fuerza centrífuga (F_c) mediante la ecuación 49. Para poder usar estas ecuaciones, se consideran los radios primitivos del sprocket y rueda, y la velocidad del sprocket. Asimismo, el ángulo entre cada rodillo (ψ) se puede calcular mediante la ecuación 54 en función al número de dientes del sprocket (Z_s).

$$\psi = \frac{2\pi}{Z_s} \quad (54)$$

Z_s = Número de dientes del sprocket

El piñón se encuentra cargado por una fuerza de tensión producido por el contacto que tiene con los rodillos de la cadena. Ante ello, Ugural (2015) propone la ecuación 55 (p. 609) para calcular la fuerza de tensión (F_{1s}) que una cadena transmite. Asimismo, Ugural (2015) también propone la ecuación 56 (p. 612) para el cálculo del radio primitivo (r_s) del sprocket.

$$F_{s1} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot (k_{1c} \cdot k_{2c} \cdot M_t)}{\pi \cdot n_s \cdot r_s} \quad (55)$$

$$r_s = \frac{p_R}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n_s}\right)} \quad (56)$$

k_{1c} = Factor de servicio para cadenas de rodillos con una sola hilera

k_{2c} = Factor de múltiples hileras para cadenas de rodillos

M_t = Potencia transmitida (kW)

n_s = Velocidad angular del sprocket (rpm)

p_R = Paso de los rodillos (mm)

La norma ANSI/ASME B29.1M-1993 presenta valores para el factor de servicio k_{1c} y el factor de múltiples hileras k_{2c} , los cuales están en la Tabla 7 y Tabla 8 respectivamente.

Tabla 7

Factores de servicio k_{1c} para cadenas de rodillos con una sola hilera.

| Tipo de carga impulsada | Factor de servicio k_{1c} |
|-------------------------|-----------------------------|
| Suave | 1.2 |
| Golpe moderado | 1.4 |

| Tipo de carga impulsada | Factor de servicio k_{1c} |
|-------------------------|-----------------------------|
| Golpe pesado | 1.7 |

Nota. Tomado de “Mechanical Design of Machine Components”, por Ugural (2015).

Fuente de los valores ANSI/ASME B29.1M-1993.

Tabla 8

Factores de múltiples hileras k_{2c} para cadenas de rodillos.

| Número de hebras en la cadena | Factor de múltiples hileras k_{2c} |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 2 | 1.7 |
| 3 | 2.5 |
| 4 | 3.3 |

Nota. Tomado de “Mechanical Design of Machine Components”, por Ugural (2015).

Fuente de los valores ANSI/ASME B29.1M-1993.

Ahora bien, es necesario calcular las reacciones en el árbol de salida en función a la fuerza de tensión y a la fuerza centrífuga. Se propone las ecuaciones 57 y 58 para el cálculo de las reacciones en el piñón siguiendo los ejes de referencia mostrados en la Figura 16. Se puede revisar la deducción de estas ecuaciones en el Anexo A.

$$Rp_y = -F_{s1} \text{sen } \alpha_s \quad (57)$$

$$Rp_z = F_{s1} \text{cos } \alpha_s - F_c \quad (58)$$

1.5. Materiales de diseño de árboles

En cuanto al material de diseño, “los aceros al carbono y los aceros aleados son los materiales básicos para fabricar árboles de transmisión debido a su dureza, su alto grado de elasticidad” (Lelikov, 2008, p. 427). Mayormente, los árboles “son fabricados con aceros de medio carbono (o aceros de maquinaria) que contienen carbono de 0,15 a 0,4 por ciento, tales como 30C8 o 40C8” (Bhandari, 2010, p. 331). Si se requiere mayor resistencia, “se utiliza aceros de alto carbono con carbono de 0,4 a 0,75 por ciento, tales como 45C8, 50C8 o incluso aceros aleados” (Bhandari, 2010, p. 331). Debido a su costo, los aceros aleados son utilizados siempre y cuando sea necesario. Los aceros aleados “más comúnmente usados tienen como

elementos aleados al Niquel, Niquel-Cromo y Molibdeno, tales como 16Mn5Cr4, 40Cr4Mo2, 16Ni3Cr2, 35Ni5Cr2, 40Ni6Cr4Mo2 y 40Ni10Cr4Mo6” (Bhandari, 2010, p. 331).

En la Tabla 9, se muestran algunos materiales también comunes en la elaboración de árboles de transmisión, pero en este caso, bajo la denominación ASTM/AISI. Se tienen los aceros al carbono, siendo el 1045 el más usado, aunque también se puede usar el 1020 si la aplicación no es muy importante (Jiang, 2019, p. 267). En cuanto a los aceros aleados, estos se usan cuando la carga es alta, con la recomendación de usar el 3140 cuando el árbol es muy importante, mientras que el 5120 tiene alta resistencia al igual que el (41CrAlMo74), solo que este último tiene resistencia al desgaste adicional (Jiang, 2019, p. 267). Naturalmente, los aceros inoxidable son recomendados para ambientes corrosivos, con la peculiaridad del 302 que soporta bajas y altas temperaturas adicionalmente (Jiang, 2019, p. 267).

Tabla 9

Materiales de árboles y sus propiedades mecánicas.

| | Material | Tratamiento térmico | Dureza (HBW) | Propiedades mecánicas (N/mm ²) | | | |
|--------------------|---------------|---------------------|--------------|--|----------------------|----------------------------|--------------------------|
| | ASTM/AISI No. | | | Límite a la tracción | Límite a la fluencia | Amplitud límite en flexión | Amplitud límite en corte |
| Aceros al carbono | 1020 | | 190 | 440 | 240 | 180 | 105 |
| | 1045 | N QT | 195 236 | 600 650 | 300 360 | 240 270 | 140 155 |
| Aceros aleados | 5120 | C Q T | 56-62 HCR | 850 650 650 | 550 400 400 | 375 280 280 | 215 160 160 |
| | 5140 | QT | 264 | 750 | 550 | 350 | 200 |
| | 3140 | QT | 285 | 1000 | 800 | 485 | 280 |
| | (41CrAlMo74) | QT | 229 | 990 | 850 | 495 | 285 |
| Aceros inoxidables | 410 | QT | 202 | 600 | 420 | 275 | 155 |
| | 304 | A | | 568 | 276 | 228 | 132 |
| | 302 | Q | 192 | 550 | 220 | 205 | 120 |

Nota: N=Normalizado, T=Revenido, C=Carbonización, Q=Templado, A=Recocido

Nota. Tomado de “6. Design of Machine Elements” en *Springer Handbook of Mechanical Engineering*, por Lelikov (2008).

1.6. Herramientas computacionales para el diseño del algoritmo

Se realiza una breve descripción de los softwares que se utilizan en la implementación del algoritmo, así como la función y la utilidad de cada uno de ellos.

Autodesk Inventor 2022

Es un software CAD que se utiliza para modelar sólidos tridimensionales, ensamblarlos, extraer los planos de estos sólidos e inclusive realizar modelado por elementos finitos sobre ellos. Para el presente trabajo de tesis, se implementa un Add-in³ para este software, por el cual se interactúa con el programa de diseño de árboles. Asimismo, se diseñan modelos CAD de los árboles de transmisión tipificados para diseñar cajas reductoras de una, dos y tres etapas, así como el dimensionamiento paramétrico de aquellas.

Inventor Nastran 2022

Es un complemento del software CAD Autodesk Inventor que permite realizar un análisis por elementos finitos a piezas elaboradas en el mismo software. Se implementa mediante reglas en iLogic, un lenguaje propio de Inventor, aunque basado en Visual Basic. En el presente trabajo de tesis, se implementa la automatización del modelado FEM para el cálculo de tensiones y deformaciones, con los cuales se verifica mecánicamente el árbol diseñado.

Visual Studio 2022

Es un software de programación integrado para Windows. En este software, se implementa el código madre del programa de diseño y las ventanas de interfaz del programa, ya que en este código se encuentra los procesos para conectar los árboles CAD con el interfaz de trabajo del Add-in en Inventor siguiendo la lógica de diseño programada.

³ Un Add-In es un complemento informático que extiende las funciones de un programa en particular.

Capítulo 2

Tipificación y parametrización de los árboles de transmisión

En el presente capítulo se realiza un análisis de recomendaciones y especificaciones para el diseño de los árboles de transmisión. En primer lugar, con el objetivo de identificar una disposición óptima dentro de las cajas reductoras, se analizan los requerimientos constructivos para la configuración y disposición de los engranajes, resaltes de los árboles, rodamientos y anillos separadores. En segundo lugar, se establece el conjunto de árboles típicos de cajas reductoras de una, dos o tres etapas distinguiendo entre la posición del árbol (de entrada, intermedio o salida) y la unión para transmitir potencia (unión por chaveta, unión estriada o piñón solidario). Del mismo modo, se establece una parametrización dimensional completa de los árboles de transmisión en función a normas estandarizadas, recomendaciones, deducciones propias e, incluso, generalizaciones. Finalmente, se identifican los ajustes dimensionales necesarios para los árboles tipificados en relación con los engranajes, rodamientos, poleas, sprockets o acoplamientos montados.

2.1. Diseño estructural de un árbol de transmisión

Un árbol de transmisión “debe de estar diseñado para ser capaz de transmitir torque a lo largo de su eje axial, soportar los elementos montados y resistir la acción de las fuerzas que estos elementos ejercen” (Lelikov, 2008, p. 426). Asimismo, “el diseño completo de un árbol de transmisión tiene mucha interdependencia con el diseño de sus componentes” (Budynas & Nisbett, 2011, p. 360). En efecto, “cada árbol debe ser diseñado específicamente para la aplicación establecida, considerando los elementos montados, cargas de operación y las condiciones de operación” (Klit & Pedersen, 2014, p. 81). En efecto, se establece una metodología de diseño estructural para los árboles de esta tesis, de tal manera que se identifiquen los elementos que se montan en él, tales como rodamientos y engranajes, y los tipos de unión para transmitir potencia siguiendo lineamientos y recomendaciones de autores como Jiang o Lelikov.

2.1.1. Diseño estructural en relación a los elementos montados

Disposición de engranajes rectos o helicoidales

Los engranajes son posicionados en un árbol de transmisión por intermedio de resaltes, anillos, anillos de sujeción u otros, los cuales evitan el desplazamiento axial de los engranajes. En ese sentido, respecto a los resaltes se puede mencionar que “un resalte para engranajes debe contar con un diámetro lo suficientemente grande para asegurar un posicionamiento sólido” (Jiang, 2019, p. 274). En línea con lo anterior, Jiang (2019) propone las ecuaciones 59 y 60 (p. 274) para el dimensionamiento de resaltes, como se muestra en la Figura 17.

$$h = (0,07 \dots 0,1) \cdot d \quad (59)$$

$$b \geq 1,4 \cdot h \quad (60)$$

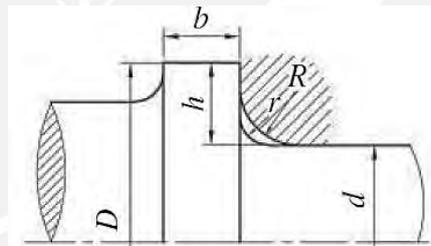


Figura 17 – Resalte en un árbol de transmisión para apoyar axialmente un engranaje.

Tomado de “*Analysis and Design of Machine Elements*”, por Jiang (2019).

Por su parte, como se muestra en la Figura 18, la fijación axial de un engranaje contra el resalte puede obtenerse con un anillo. Para ello, “es necesario dejar un espacio en el árbol de 2 a 3 mm para asegurar el contacto entre engranaje y anillo” (Jiang, 2019, p. 274).

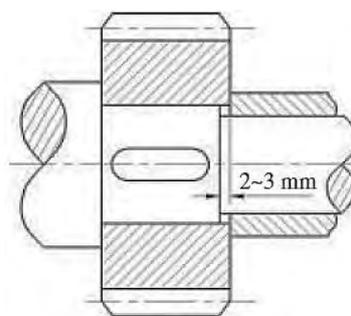


Figura 18 – Espacio para garantizar un contacto entre superficies adecuado entre engranaje y anillo.

Tomado de “*Analysis and Design of Machine Elements*”, por Jiang (2019).

Disposición de los rodamientos

Los árboles de transmisión de la presente tesis cuentan con un resalte para apoyar el anillo interno de un rodamiento. En ese caso, “su dimensión radial deber ser lo suficiente como para proporcionar un adecuado contacto entre superficies” (Jiang, 2019, p. 274). En la Figura 19, se muestra un resalte, el cual depende del tamaño y tipo de rodamiento. Usualmente, los fabricantes de rodamientos son quienes recomiendan los valores más apropiados.

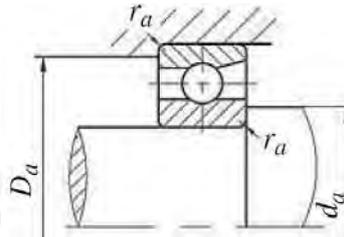


Figura 19 – Apoyo de los anillos de un rodamiento.

Tomado de “*Analysis and Design of Machine Elements*”, por Jiang (2019).

El sentido y la magnitud de las reacciones de apoyo en los rodamientos se establecen en función a la posición del rodamiento. Ahora bien, es necesario notar que “si los dos rodamientos están ajustados muy estrechamente, cualquier pequeño cambio dimensional debido a una dilatación térmica podría acarrear peligrosas inesperadas cargas en los rodamientos” (Jiang, 2019). Al respecto, se muestra en la Figura 20 el modelo de apoyos seleccionado para los árboles de la presente tesis, en el que se visualiza las fuerzas inducidas en los puntos O_1 y O_2 . Nótese que los rodamientos se fijan axialmente por resaltes en el árbol y por las tapas montadas en la carcasa, a lo cual, dependiendo del sentido de la fuerza axial del engranaje, ajustan o desajustan un rodamiento más que otro.

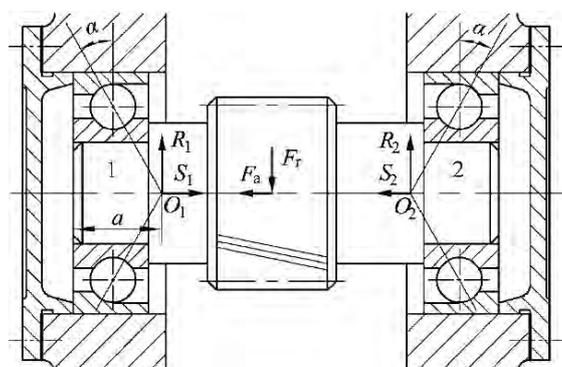


Figura 20 – Sistema de apoyo de los rodamientos de un árbol de transmisión.

Tomado de “*Analysis and Design of Machine Elements*”, por Jiang (2019).

Disposición de un acoplamiento flexible, una polea o un sprocket

Los acoplamientos flexibles son bridas que se conectan mediante pines montados en un elemento elástico con el fin de absorber pequeñas desalineaciones que se puedan encontrar. Estos se acoplan directamente al árbol mediante una o más chavetas. Ahora bien, en la Figura 21, se aprecia la fijación axial de los acoplamientos, la cual se produce mediante resaltes de los propios árboles de transmisión.

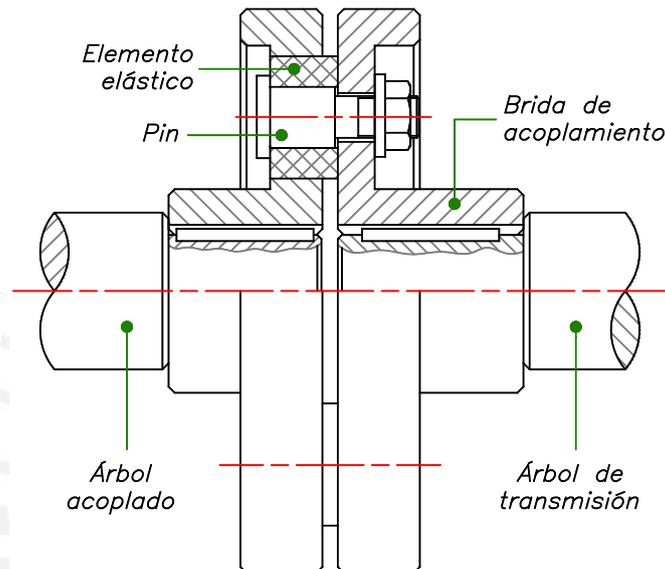


Figura 21 – Disposición de un acoplamiento flexible.

Una polea o un sprocket se acopla al árbol mediante una o más chavetas. Este componente se apoya axialmente en el resalte del árbol de transmisión, mientras que, del otro lado, es necesario una arandela de tope con un tornillo para fijarlo axialmente. En la Figura 22, se puede apreciar lo expuesto anteriormente.

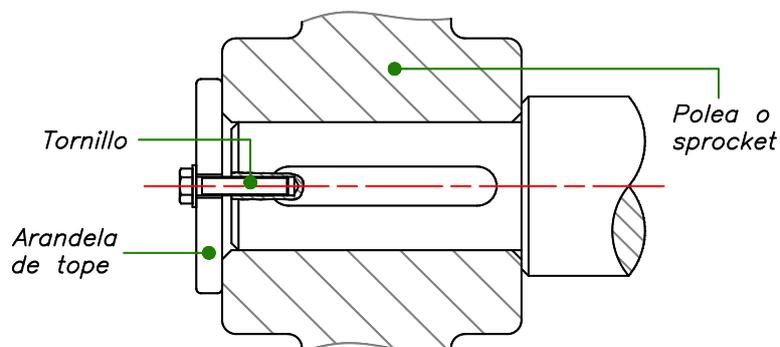


Figura 22 – Tornillo y arandela para fijación axial de una polea o sprocket.

Disposición de la tapa lateral de la carcasa

Las tapas laterales se montan sobre la carcasa mediante tornillos. Sin embargo, algunas tapas llevan un agujero a fin de permitir que el árbol reciba o entregue potencia, pues por esa abertura un árbol puede sobresalir de la caja reductora. En la Figura 23, se aprecia una tapa lateral con agujero montada mediante tornillos a la carcasa.

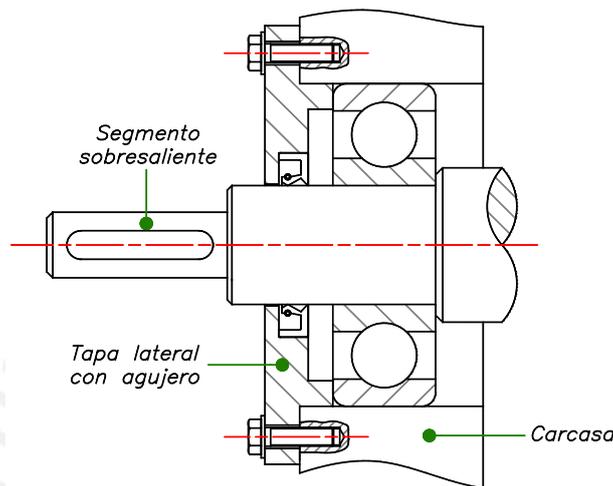


Figura 23 – Disposición de una tapa lateral con agujero.

2.1.2. Diseño estructural para transmitir potencia

Para el presente trabajo, se designa que la transmisión de potencia se realice mediante uniones por chaveta, uniones estriadas o piñones solidarios. En efecto, se selecciona estas uniones para montar engranajes rectos o helicoidales, mientras que solo las uniones por chaveta se disponen para el montaje del cubo de un acoplamiento flexible, una polea con fajas en V o un sprocket para una cadena de rodillos. Al respecto, los lineamientos para los cálculos de resistencia de estos tipos de unión se muestran en el apartado 1.3.

Respecto a la unión por chaveta o unión estriada, “para disminuir la irregularidad de la distribución de esfuerzos a lo largo del alto y largo de la chaveta, esta unión está limitada a la inecuación 61” (Lelikov, 2008, p. 450). Para emplear esta expresión, se considera el diámetro del árbol en uniones por chaveta y el diámetro menor de las estrías en uniones estriadas.

$$L_{cub} \leq 1,5d_{uni} \quad (61)$$

L_{cub} = Longitud del cubo del engranaje (mm)

d_{uni} = Diámetro de la unión (mm)

Disposición de una unión por chaveta

Una unión por chaveta “consta de una chaveta rectangular con esquinas que presentan chaflanes de 45°” (Lelikov, 2008, p. 449). En realidad, se define el número de canales chaveteros en función de los cálculos de longitud efectiva. Asimismo, se busca que el canal chavetero se encuentre centrado respecto al ancho del cubo del elemento que se monta. La Figura 24 muestra las dos disposiciones empleadas en el presente trabajo.

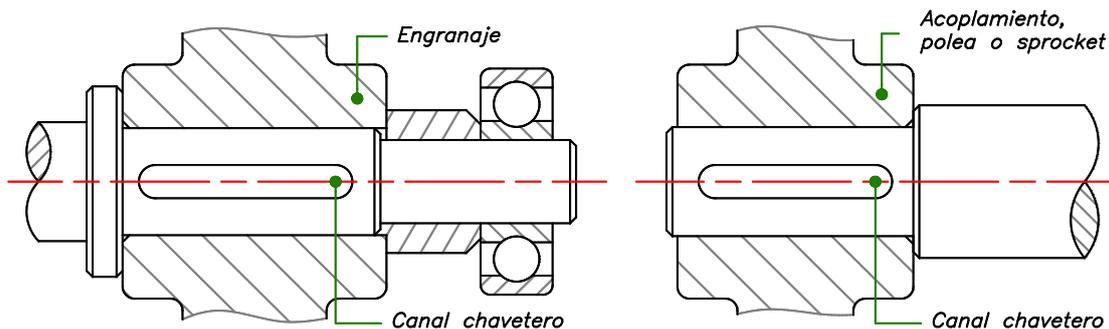


Figura 24 – Disposiciones para una unión por chaveta

Disposición de una unión estriada

Para la presente tesis, una unión estriada se emplea para transmitir potencia entre engranaje y árbol, así como se monta el engranaje en la misma unión. Una unión estriada consta de una serie de dientes o estrías espaciadas equitativamente sobre la superficie diametral del árbol. Por un lado, para evitar que el resalte intermedio interfiera con la parte estriada se limita la longitud de este último y se reduce el diámetro de este segmento, tal como se muestra en la Figura 25. Por otro lado, según la norma DIN-ISO 14 en sus series ligera y media, el número de dientes está normalizado en seis, ocho o diez.

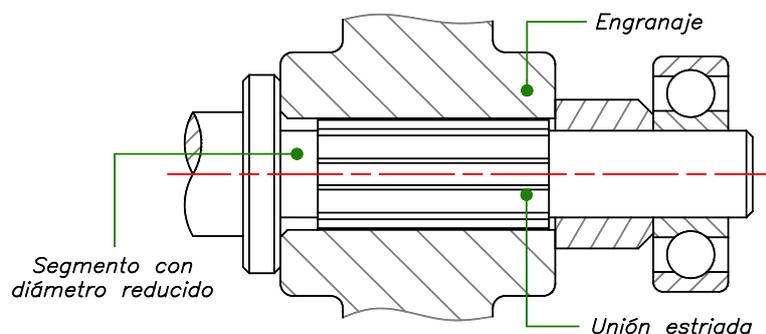


Figura 25 – Disposición para una unión estriada.

Disposición de un piñón solidario al árbol

Una unión por piñón solidario consiste en que el piñón sea directamente mecanizado sobre el árbol de transmisión. Este tipo de unión suele ser empleado cuando el módulo del engranaje no tiene un valor alto. Además, se recomienda redondeos elevados en los bordes del piñón solidario para evitar una alta concentración de esfuerzos.

2.2. Configuración de los árboles de transmisión en cajas reductoras

2.2.1. Distribución de los engranajes en una caja reductora

La distribución de los engranajes en una caja reductora busca emplear de manera eficiente el espacio disponible, lo cual es de gran relevancia. Se elaboró la Figura 26 para mostrar la configuración establecida de los engranajes en cajas reductoras de una, dos y tres etapas para el presente trabajo de tesis.

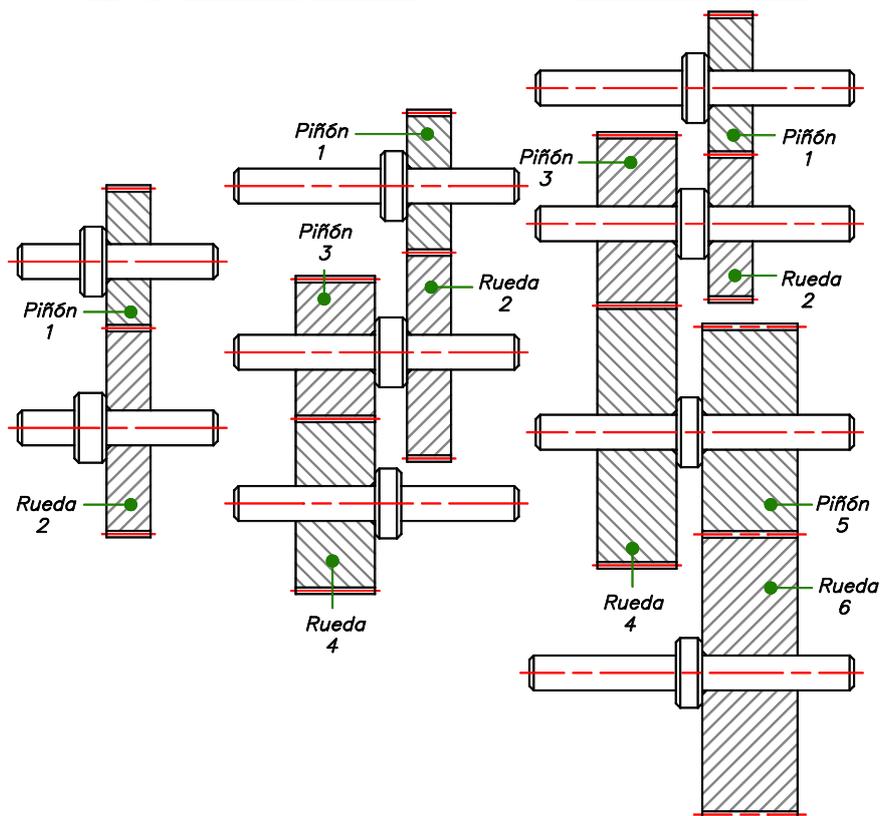


Figura 26 – Configuración de engranajes en cajas reductoras.

Los engranajes se conectan en pares: piñón y rueda. La caja reductora de una etapa posee un par de engranajes para la transmisión, lo que implica un árbol de entrada y otro de

salida. Por su parte, en cajas reductoras de dos etapas, la potencia se transmite a través de un árbol de entrada, uno intermedio y otro de salida. Mientras que las cajas reductoras de tres etapas poseen, además de árboles de entrada y salida, dos árboles intermedios. Asimismo, a fin de optimizar el volumen en la caja reductora de tres etapas, se considera pertinente alinear lo más posible los engranajes de las diferentes etapas.

2.2.2. Disposición de resaltes y anillos separadores para fijar engranajes

Los engranajes al ser montados en el árbol deben ser fijados axialmente para evitar su desplazamiento. Para ello, se utiliza anillos de fijación junto con el resalte intermedio del árbol, que se encuentra prácticamente en medio de la longitud del árbol. A su vez, los anillos de fijación cumplen la función de separar los engranajes de los rodamientos, es por ello que se les denomina anillos separadores. A continuación, se establece la utilización de resaltes intermedios y anillos separadores en árboles de entrada, intermedios y de salida.

Árboles de entrada

Los árboles de entrada cuentan con un resalte intermedio y un anillo separador, tal como se muestra en la Figura 27. Es importante resaltar que, en el caso de mecanizar el piñón solidario, no es necesario ni el resalte ni el anillo separador.

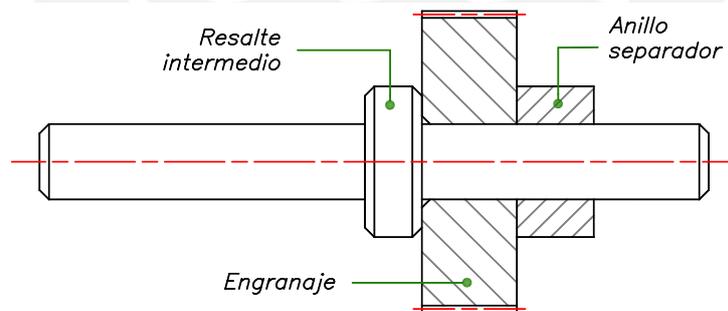


Figura 27 – Disposición de resalte y anillo separador en un árbol de entrada.

Árboles intermedios

En la Figura 28, se aprecia que los árboles intermedios cuentan con un resalte intermedio para ambos engranajes; mientras que, por cada lado, un anillo separador fija axialmente al respectivo engranaje. En caso de contar con un piñón solidario, el resalte intermedio se mantiene para la fijación del engranaje sobrante.

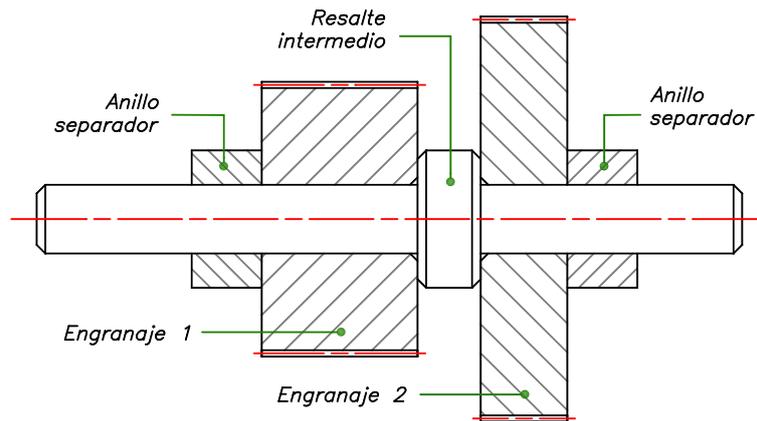


Figura 28 – Disposición de resalte y anillo separador en un árbol intermedio.

Árboles de salida

En árboles de salida, al igual que en árboles de entrada, se cuenta con el resalte intermedio y el anillo separador del engranaje, el cual puede estar posicionado a la izquierda o derecha dependiendo del número de etapas siguiendo la distribución de engranajes establecida anteriormente. Sin embargo, el engranaje siempre se apoya en el resalte intermedio y es fijado axialmente mediante el anillo separador, como se aprecia en la Figura 29.

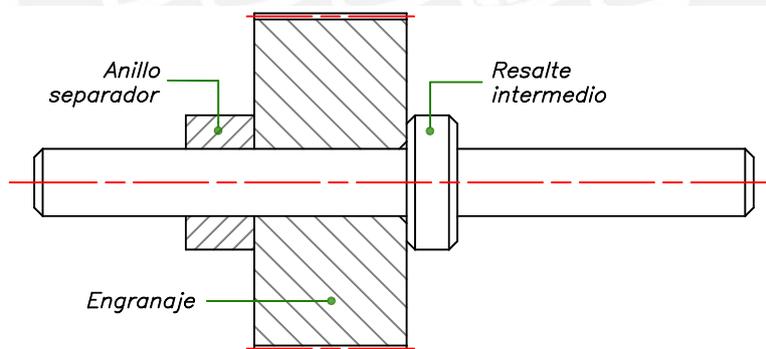


Figura 29 – Disposición de resalte y anillo separador en un árbol de entrada de dos etapas.

2.2.3. Distribución de rodamientos en un árbol de transmisión

Los rodamientos en una caja reductora son posicionados uno en cada extremo del árbol. En tal sentido, se elaboró la Figura 30, la cual muestra el caso de un rodamiento adyacente a un engranaje junto con su anillo separador. En esta situación se fija axialmente el anillo interno del rodamiento mediante el anillo separador, el mismo que cuenta con un chaflán para respetar la dimensión del resalte recomendado por el fabricante del rodamiento.

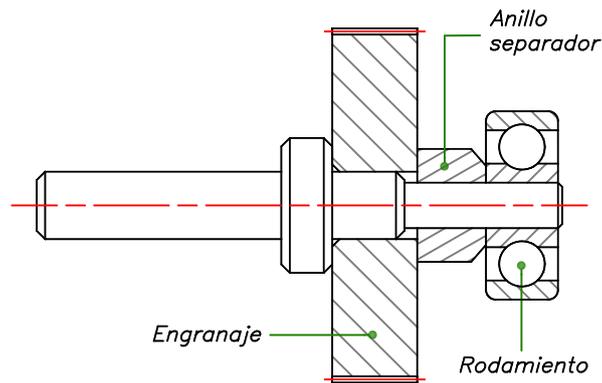


Figura 30 – Disposición de un rodamiento adyacente a un engranaje.

La Figura 31 muestra el caso de un rodamiento no adyacente a un engranaje o adyacente a un piñón solidario. En ambos casos, es necesario un resalte en el árbol para apoyar axialmente el anillo interno del rodamiento.

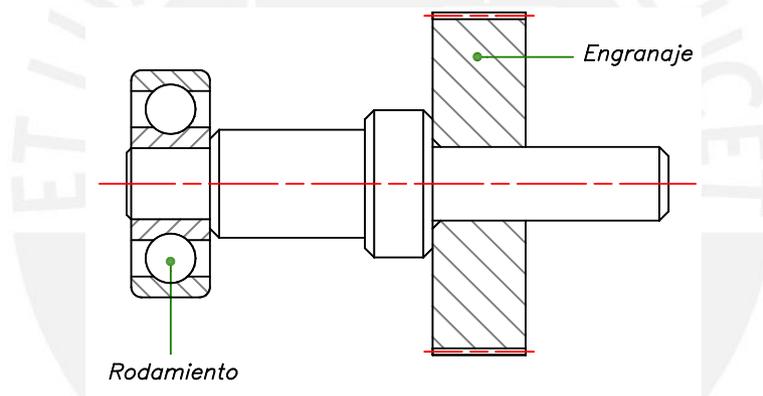


Figura 31 – Disposición de rodamiento no adyacente a un engranaje o adyacente a un piñón solidario.

Es necesario indicar que la fijación axial del anillo externo del rodamiento se realiza por intermedio de la carcasa siguiendo el sistema de fuerzas recomendado en la Figura 20.

2.3. Desarrollo de la tipificación de los árboles de transmisión

Los árboles de transmisión son tipificados en función al número de etapas, su posición dentro de la caja reductora y el tipo de unión para transmitir potencia que presenta. Al respecto, la Figura 32 muestra la configuración de las cajas reductoras de una, dos y tres etapas, la cual se basa en la configuración de los engranajes que presentada en el apartado 2.2.1., en la disposición de los resaltes intermedios y anillos separadores definida en la sección 2.2.2., y la distribución de rodamientos determinada en el punto 2.2.3.

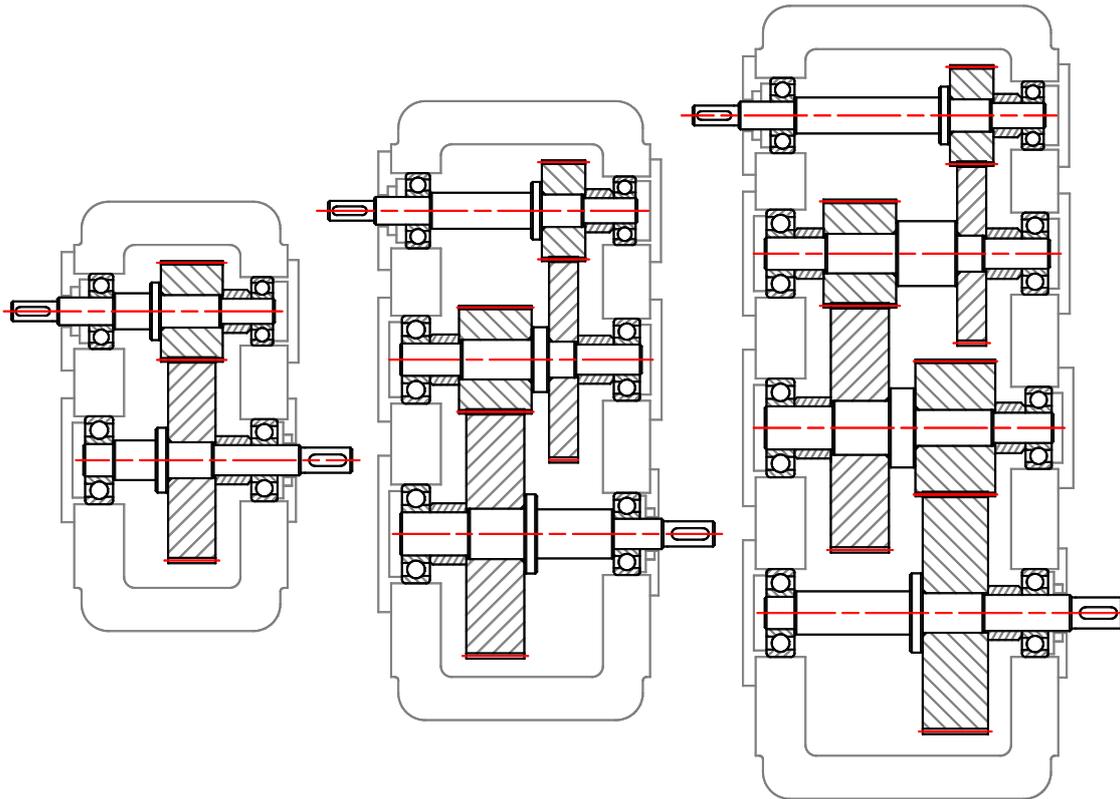


Figura 32 – Configuración establecida para las cajas reductoras.

A continuación, en base a los árboles de transmisión trazados o esbozados que se pueden identificar en la configuración establecida para las cajas reductoras, se procede a detallar la tipificación de árboles de entrada, intermedios y de salida.

Árboles de entrada y salida

Respecto a los árboles de entrada o salida, el criterio de la tipificación es la posición del engranaje, de modo que existen dos posibilidades o variantes para este caso. Se considera la primera variante cuando el engranaje se ubique en el extremo opuesto al sector donde entra o sale potencia, mientras se considera la segunda variante cuando el engranaje se ubique en el mismo lado respecto al resalte intermedio. En ese sentido, los árboles de entrada pertenecen a la primera variante, mientras que los árboles de salida pueden pertenecer a ambas variantes en función al número de etapas y la posición de salida de potencia de la caja.

Otro criterio en la tipificación de estos árboles es el tipo de unión para la transmisión de potencia, los cuales son unión por chaveta, unión estriada o piñón solidario. Los árboles de entrada pueden contar con los tres tipos de unión, mientras que los árboles de salida pueden contar solo con los dos primeros.

De esta manera, siguiendo la configuración de la primera variante, se presenta la tipificación de **tres árboles de entrada y salida**, los cuales contemplan los tres tipos de uniones disponibles para transmitir potencia. La Figura 33 muestra la primera variante con unión por chaveta; la Figura 34, con unión estriada; y la Figura 35, con piñón solidario.

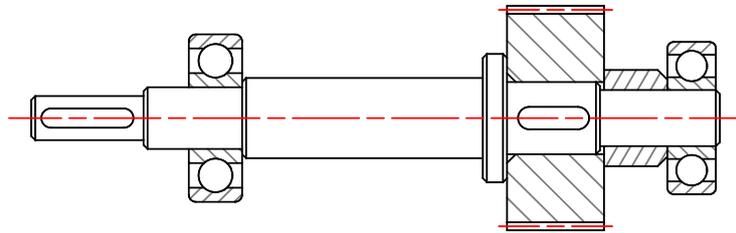


Figura 33 – Árbol #1: árbol de entrada o salida con unión por chaveta (variante 1).

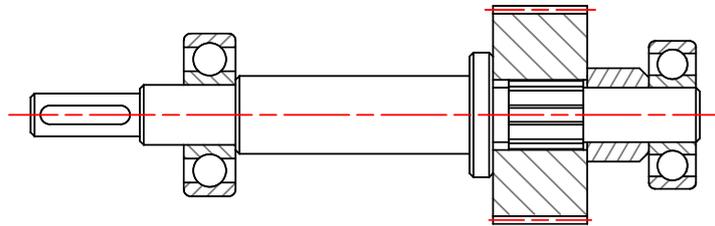


Figura 34 – Árbol #2: árbol de entrada o salida con unión estriada (variante 1).

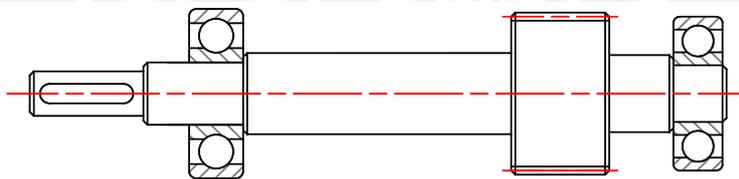


Figura 35 – Árbol #3: árbol de entrada con piñón solidario.

Finalmente, siguiendo la configuración establecida para la segunda variante, se presenta la tipificación de **dos árboles de salida**, los cuales contemplan unión por chaveta y unión estriada. La Figura 36 muestra esta segunda variante con unión por chaveta, mientras que la Figura 37 con unión estriada.

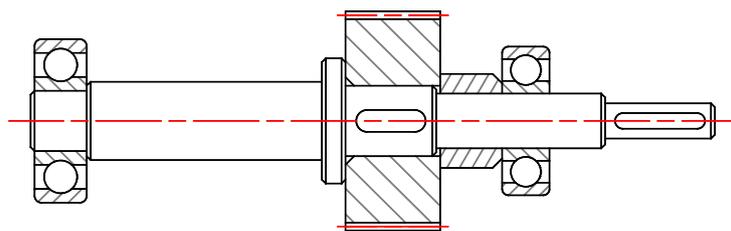


Figura 36 – Árbol #4: árbol de salida con unión por chaveta (variante 2).

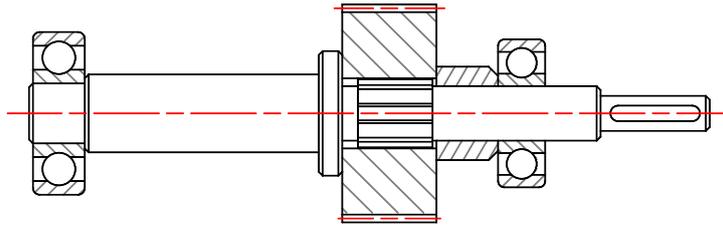


Figura 37 – Árbol #5: árbol de salida con unión estriada (variante 2).

Árboles intermedios

De acuerdo a la configuración determinada para las cajas reductoras, los árboles intermedios cuentan con dos engranajes y estos pueden presentar una unión por claveta o una unión estriada. De acuerdo con esto, se presenta la tipificación de **tres árboles intermedios**. La Figura 38 muestra el caso con ambas uniones por claveta, la Figura 39, con uniones estriadas, y la Figura 40, con una combinación de ambas.

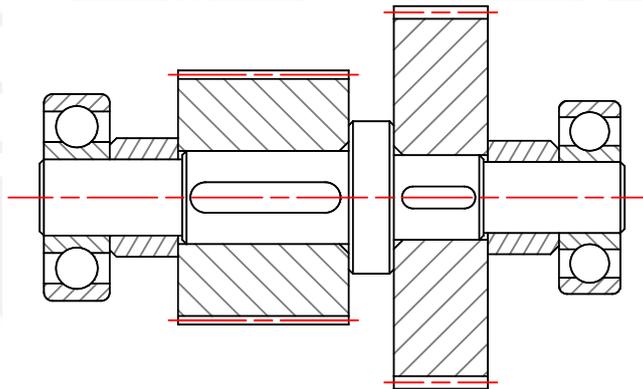


Figura 38 – Árbol #6: árbol intermedio con uniones por claveta.

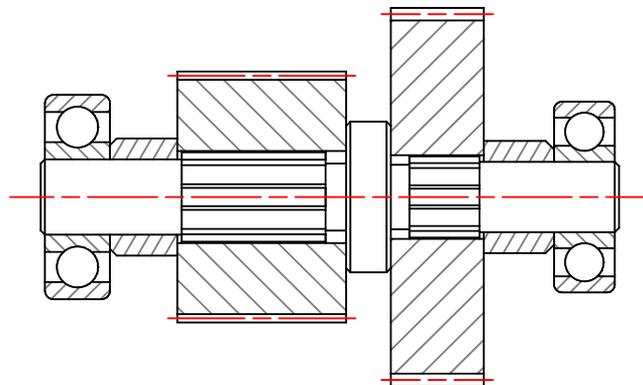


Figura 39 – Árbol #7: árbol intermedio con uniones estriados.

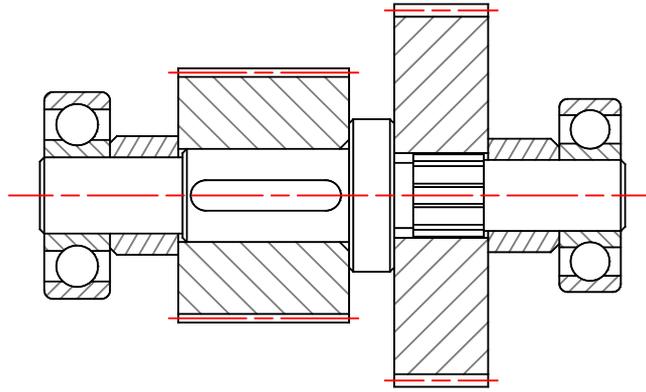


Figura 40 – Árbol #8: árbol intermedio con unión por chaveta y unión estriada.

Por último, es también posible que los árboles intermedios cuenten con el piñón solidario al árbol; ante ello, se presenta la tipificación de **dos árboles intermedios con piñón solidario**. La Figura 41 muestra un piñón solidario en combinación con una unión por chaveta, mientras que la Figura 42, la combinación con una unión estriada.

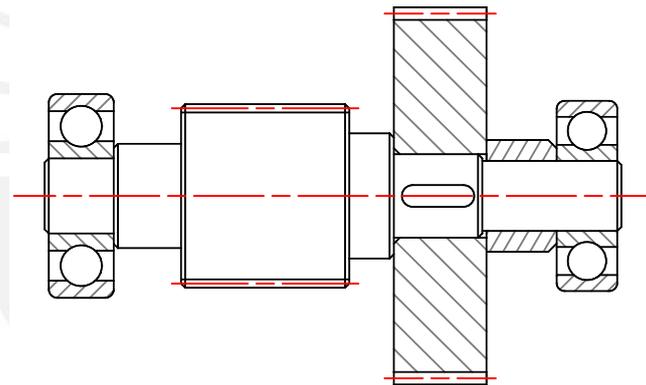


Figura 41 – Árbol #9: árbol intermedio con piñón solidario y rueda con unión por chaveta.

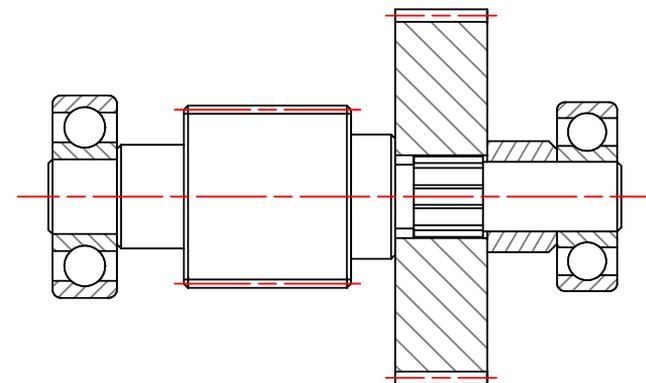


Figura 42 – Árbol #10: árbol intermedio con piñón solidario y rueda con unión estriada.

2.4. Designación de la nomenclatura en un árbol de transmisión

Una vez descrita la tipificación de diez árboles de transmisión, para facilitar el posterior desarrollo de la parametrización dimensional, es importante especificar los distintos segmentos generados por los escalones de los árboles, los cuales permiten el funcionamiento de los diferentes elementos montados. Por ello, se designa la nomenclatura de estos segmentos en base a su posición o su función en el árbol de transmisión.

2.4.1. Segmentación de los árboles

La segmentación implica la identificación de los segmentos que se encuentran en los árboles. A continuación, se presenta la nomenclatura establecida para los segmentos generados por los cambios de diámetro (escalones) en los árboles de transmisión.

Segmento externo

Este segmento es el de menor diámetro, el cual se presenta solo en árboles de entrada o salida y siempre sobresale de la caja reductora. La Figura 43 muestra los segmentos externos y el montaje de un acoplamiento flexible, una polea o un sprocket con una unión por chaveta.

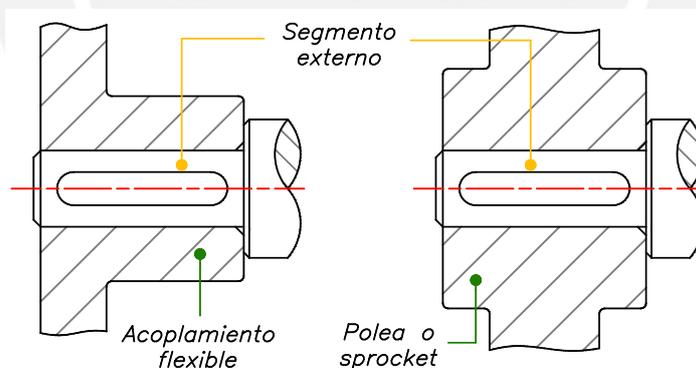


Figura 43 – Casos posibles de un segmento externo.

Segmento de apoyo

Este segmento es el de menor diámetro en un árbol intermedio y, como su nombre lo indica, es donde se apoya el árbol. En caso de ser un árbol de entrada o de salida, en este segmento también aloja la tapa lateral con agujero, la cual se monta a la carcasa. La Figura 44 muestra estos posibles casos de uso de este segmento.

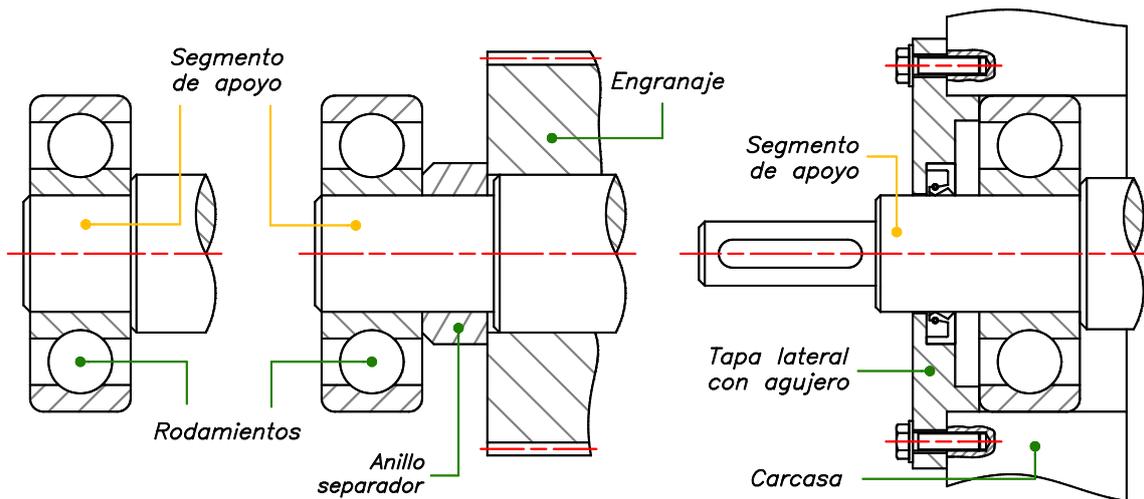


Figura 44 – Casos posibles para un segmento de apoyo.

Segmento principal

Este segmento es en el cual se ubica un engranaje independientemente del tipo de unión. A fin de evitar una nomenclatura extensa, los segmentos en los árboles que no cuentan con engranajes (en árboles de entrada o de salida) presentan esta misma denominación. Ahora bien, se elaboró la Figura 45 para mostrar los casos de uso de este segmento.

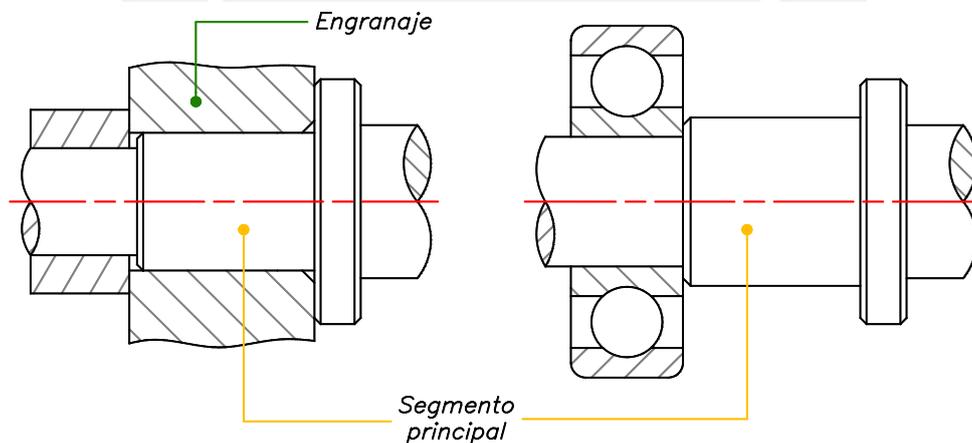


Figura 45 – Casos posibles para un segmento principal.

Resalte intermedio o segmento intermedio

Este segmento es el de mayor diámetro en un árbol de transmisión y cumple la función de fijar y soportar axialmente uno o dos engranajes. En ese sentido, se elaboró la Figura 46 para mostrar el resalte intermedio.

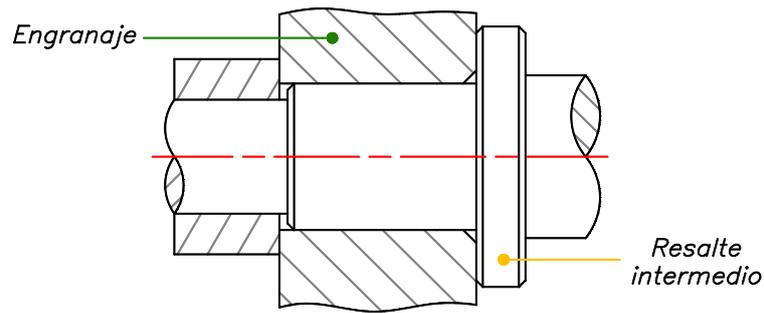


Figura 46 – Caso posible para un resalte intermedio.

2.4.2. Zonificación de los árboles

Un árbol de transmisión cuenta con dos segmentos principales y dos segmentos de apoyo, por lo que estos podrían confundirse entre sí. Es por ello que, para distinguir de mejor manera esta duplicidad de segmentos, se divide al árbol en dos zonas respecto del resalte intermedio. Tal como se puede apreciar en la Figura 47, se nombra a la zona izquierda como zona A y a la zona derecha como zona B.

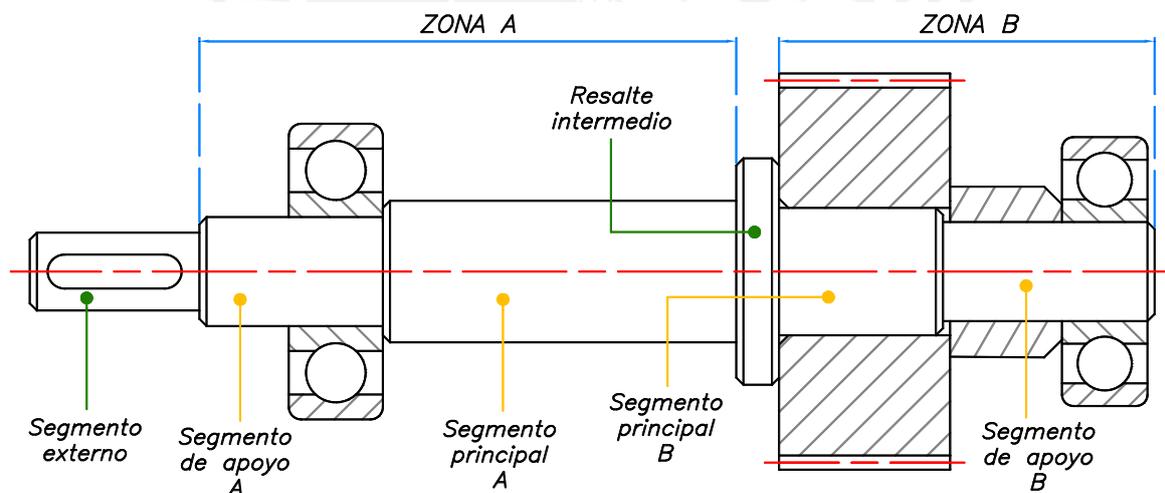


Figura 47 – Denominación por zonas A y B en un árbol de transmisión.

2.5. Parametrización de los árboles de transmisión

La parametrización de los árboles de transmisión tiene como objetivo dimensionar un árbol de transmisión en función a variables independientes, las cuales se establecen al identificar requerimientos de diseño en función al posicionamiento de los pares de los engranajes en la caja reductora, así como también en base al diseño de cada árbol en particular.

Para todos estos casos, se definen y formulan ecuaciones para el dimensionamiento siguiendo recomendaciones de bibliografía especializada y normas técnicas.

2.5.1. Variables dependientes e independientes para el dimensionamiento de los árboles tipificados

A fin de dimensionar los árboles de transmisión en una caja reductora, se identifican las variables dependientes e independientes. Para organizar de la mejor manera las variables que se encuentren, el proceso paramétrico de dimensionamiento se divide en dos fases o pasos. La primera fase implica establecer las medidas que competen a la interacción de todos los árboles de una caja reductora entre sí, mientras que la segunda fase está referida al dimensionamiento de cada árbol por separado. A continuación, se presenta el análisis de estas fases.

Primera fase: Variables para el posicionamiento de los engranajes

La interacción de los árboles en una caja reductora se condiciona a la interacción de los engranajes. Por tanto, se entiende que la variable dependiente en esta fase es la posición axial de los engranajes sobre los árboles de transmisión. En tal sentido, se formulan las ecuaciones necesarias para calcular esta variable siguiendo la configuración de engranajes definida en el apartado 2.2.1. De modo que las variables independientes en esta fase son:

- Número de etapas (uno, dos o tres)
- Ancho del cubo del engranaje
- Espesor lateral de la carcasa
- Longitud del mayor resalte intermedio de la caja reductora

El desarrollo de los procedimientos requeridos para el dimensionamiento paramétrico en esta fase se describirá en la sección 2.5.2.

Segunda fase: Variables para dimensionar los árboles de transmisión

En este caso, las variables dependientes son los diámetros y longitudes de los segmentos, las dimensiones necesarias para cada tipo de unión para transmitir potencia, y las dimensiones de los redondeos y chaflanes. Además, en esta fase se requiere la posición de los engranajes, calculado en la primera fase, la cual ahora se considera como variable independiente. De modo que las variables independientes en esta fase son las siguientes:

- Tipo de árbol (entrada, intermedio o salida)
- Número de etapas (uno, dos o tres)
- Posición axial de los engranajes (de la primera fase)
- Diámetro mínimo calculado para el árbol
- Ancho del cubo del engranaje
- Ancho de rodamiento

El desarrollo de los procedimientos necesarios para esta fase se describirá en la sección 2.5.3. donde se analiza por separado el dimensionamiento de diámetros y longitudes, los tipos de unión para transmitir potencia, y las medidas de redondeos y chaflanes.

2.5.2. Primera fase: posicionamiento axial de los engranajes

La primera fase de dimensionamiento consiste en formular las ecuaciones para el cálculo de la posición axial de los engranajes sobre la longitud de los árboles, lo cual implica analizar los árboles en conjunto y la posición de los engranajes. Aunque la distribución de los engranajes para una, dos y tres etapas está establecida en el apartado 2.2.1., esta configuración aún carece de ecuaciones y lineamientos completos para su posicionamiento. Por ende, para formular estas ecuaciones es necesario identificar las implicancias de posicionar engranajes en cajas reductoras de una, dos y tres etapas, así como las recomendaciones identificadas para la separación necesaria entre los elementos rodamiento, engranaje y carcasa.

2.5.2.1. Separación entre engranaje y carcasa

Los engranajes y la carcasa deben tener una separación necesaria para que estos no se raspen y el lubricante pueda fluir de una manera adecuada sobre todo el interior de la caja reductora. A su vez, esta separación debe ser lo mínima posible a fin de minimizar el volumen de la caja reductora. Al respecto, Beliáev et al. (1971) recomiendan la ecuación 62 (p. 187) para calcular la separación entre engranaje y carcasa (k). La Figura 48 ilustra una caja reductora de dos etapas y se distingue la separación entre los engranajes y los rodamientos.

$$k = 1,1 \cdot e_p \geq 10 \text{ mm} \quad (62)$$

e_p = espesor lateral de la carcasa (mm)

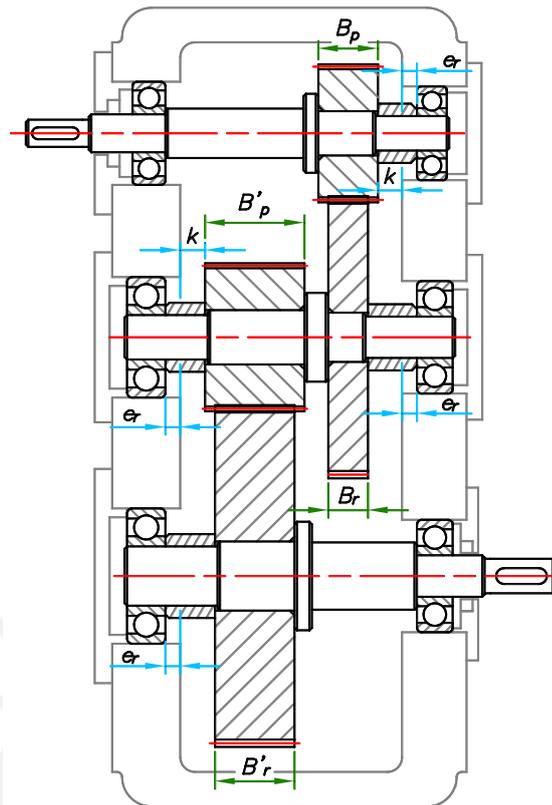


Figura 48 – Distancias entre engranajes y carcasa en una caja reductora de dos etapas.

Los engranajes trabajan en pares: piñón y rueda. “Un piñón es, entre 5 y 10 mm, más ancho que una rueda, debido a que este ancho adicional asegura una estable transmisión entre ambos e incrementa la eficiencia” (Jiang, 2019, p. 208). Por ello, la separación entre engranaje y carcasa debe realizarse respecto a los piñones montados.

2.5.2.2. Posicionamiento de rodamientos en alojamientos de la carcasa

Es importante posicionar adecuadamente los rodamientos en el alojamiento hueco que provee la carcasa, pues esa posición tiene implicancia en el posicionamiento del árbol de transmisión. En la Figura 48, se distingue la ubicación de los rodamientos en los alojamientos de la carcasa. Para la presente tesis, se considera la posición axial del rodamiento respecto al borde interno lateral de la carcasa (e_r) como la mitad de la separación entre engranaje y rodamiento, obteniendo la ecuación 63 para su cálculo.

$$e_r = \frac{k}{2} \geq 6 \text{ mm} \quad (63)$$

2.5.2.3. Resalte intermedio determinante

Según la configuración de los árboles, los árboles intermedios cuentan con un resalte intermedio que separa y ajusta los dos engranajes montados. Este resalte tiene una longitud que debe ser calculada para poder posicionar los engranajes, pues influye en la posición axial de los engranajes. Se formula una ecuación para su cálculo en función al diámetro previo del árbol según la ecuación 9, la medida de los resaltes que vienen por las ecuaciones 59 y 60, y considerando un factor de carga (f_{Lq}) de 2,5 para asegurar que el resalte sea resistente, ya que se utiliza un diámetro preliminar que será optimizado más adelante.

$$Lq = f_{Lq} \cdot (0,14 \cdot d_0) \geq 25 \text{ mm} \quad (64)$$

$f_{Lq} = \text{Factor de carga} = 2,5$

$d_0 = \text{Diámetro previo (mm)}$

Este resalte intermedio es único por caja reductora, por lo que en cajas reductoras de tres etapas se considera al segundo árbol intermedio, ya que cuenta con los engranajes más anchos. Además, es importante mencionar que estos resaltes son fijos una vez calculados, es decir no cambiarán en el proceso de optimización del árbol para evitar un proceso de iteración más complejo que ocupe mucha capacidad computacional e incremente los tiempos de diseño.

2.5.2.4. Posicionamiento axial de engranajes

La posición axial de los engranajes sobre los árboles de transmisión se calcula en función al número de etapas, a la separación entre engranaje y carcasa (k), a la posición del rodamiento dentro de su alojamiento y a la longitud del resalte intermedio determinante (Lq_2 o Lq_3) para cajas reductoras de dos o tres etapas.

Una etapa

Se elaboró la Figura 49 para mostrar el planteamiento en una caja reductora de una etapa. Nótese que una línea azul representa la posición del único par de engranajes respecto a una línea de referencia (LR) y se designa que el par de engranajes se alinee al centro de la caja reductora. En ese sentido, se plantea la ecuación 65 para calcular la posición axial del par de engranajes y la ecuación 66 para determinar la distancia entre rodamientos x_R . Al respecto, la demostración de la formulación de estas ecuaciones se encuentra en el Anexo A.

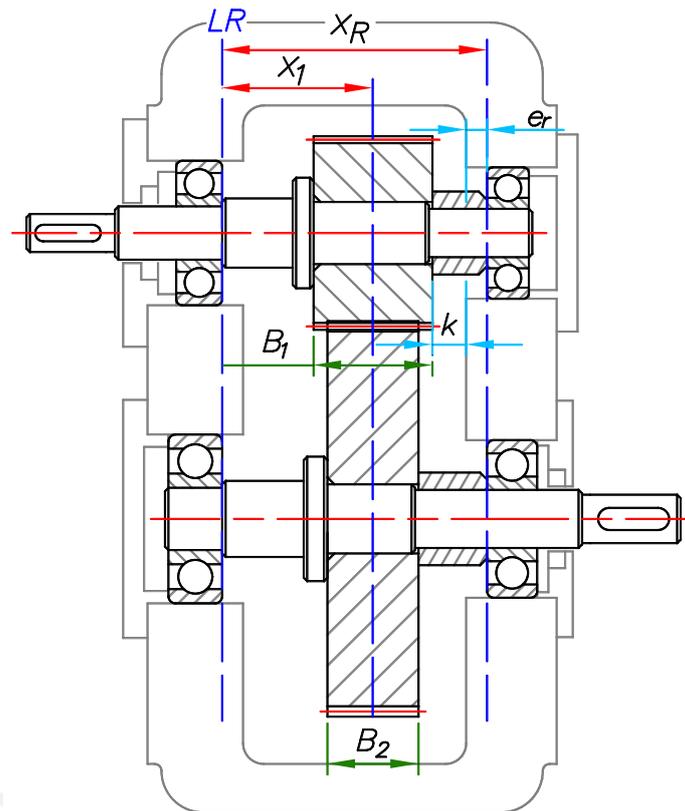


Figura 49 – Posición axial del par de engranajes en una caja reductora de una etapa.

$$x_1 = (e_r + k) + \left(\frac{B_1}{2}\right) \quad (65)$$

$$x_R = (2e_r + 2k) + (B_1) \quad (66)$$

Dos etapas

Por su parte, se elaboró la Figura 50 para presentar el planteamiento en una caja reductora de dos etapas. Nótese que una línea azul representa cada par de engranajes presente respecto a una línea de referencia (LR). En esta situación, el árbol intermedio es el determinante en el dimensionamiento de la caja reductora y de los árboles de transmisión. De modo que se formulan las ecuaciones 67 y 68 para el cálculo de la posición axial de primer y segundo par de engranajes respectivamente, así como la ecuación 69 para determinar la distancia entre rodamientos x_R . En cuanto a la demostración de las ecuaciones propuestas, esto se puede encontrar en el Anexo A.

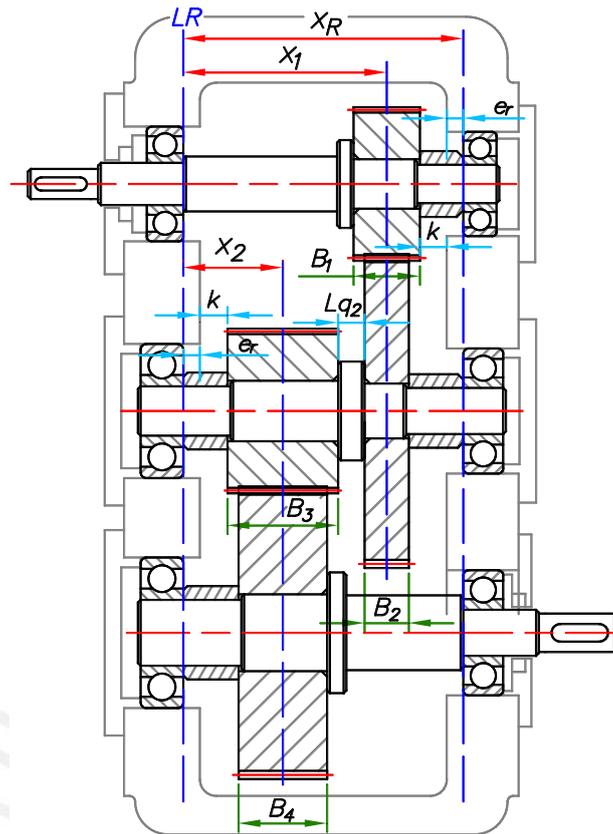


Figura 50 – Posición axial de los pares de engranajes en una caja reductora de dos etapas.

$$x_1 = (e_r + k + Lq_2) + \left(\frac{B_2}{2} + B_3\right) \quad (67)$$

$$x_2 = e_r + k + \frac{B_3}{2} \quad (68)$$

$$x_R = (2e_r + 2k + Lq_2) + \left(\frac{B_1 + B_2}{2} + B_3\right) \quad (69)$$

Tres etapas

Se elaboró la Figura 51 para representar el planteamiento en una caja reductora de tres etapas. Nótese que una línea azul representa cada par de engranajes respecto a una línea de referencia (LR). En este caso, el segundo árbol intermedio resulta ser el determinante en el dimensionamiento de la caja reductora. Ahora bien, se propone las ecuaciones 70, 71 y 72 para determinar la posición axial del primer, segundo y tercer par de engranajes respectivamente; así como, se presenta la ecuación 73 para el cálculo de la distancia entre distancia entre rodamientos x_R . Al respecto, la demostración de las ecuaciones se encuentra en el Anexo A.

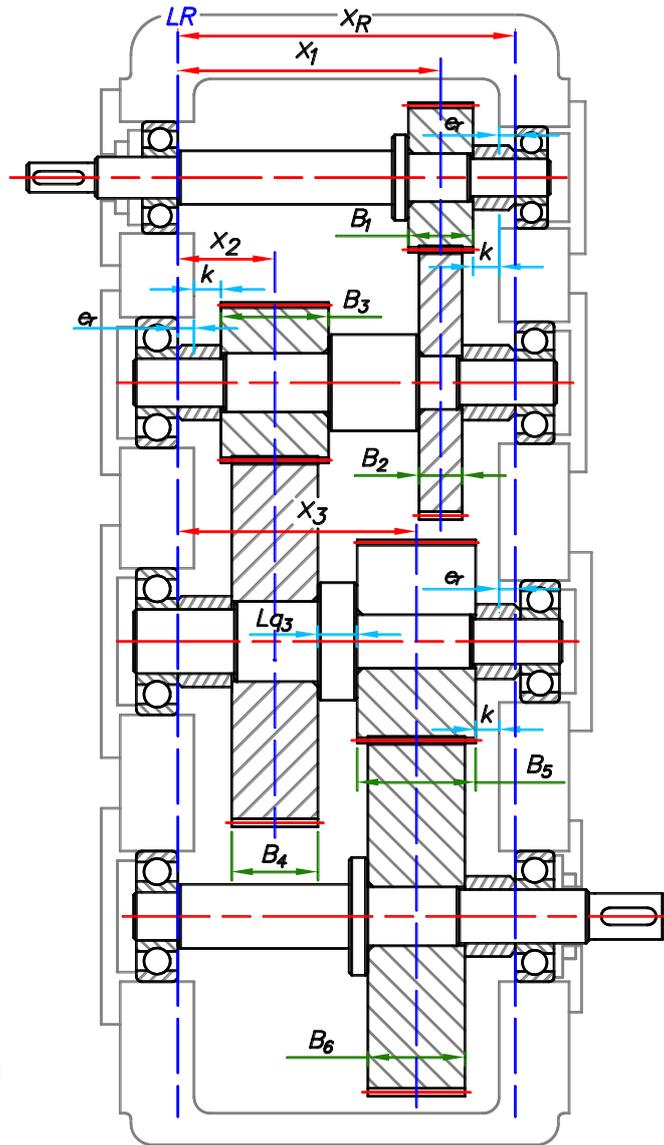


Figura 51 – Posición de engranajes en una caja reductora de tres etapas.

$$x_1 = (e_r + k + Lq_3) + \left(\frac{B_3 + B_4 - B_1}{2} + B_5 \right) \quad (70)$$

$$x_2 = e_r + k + \frac{B_3}{2} \quad (71)$$

$$x_3 = (e_r + k + Lq_3) + \left(\frac{B_3 + B_4 + B_5}{2} \right) \quad (72)$$

$$x_R = (2e_r + 2k + Lq_3) + \left(\frac{B_3 + B_4}{2} + B_5 \right) \quad (73)$$

2.5.3. Segunda fase: dimensionamiento de los árboles de transmisión

La segunda fase de dimensionamiento consiste calcular las medidas completas de los árboles de transmisión. Este proceso se divide en tres partes: i) el dimensionamiento de longitudes y diámetros del árbol, ii) el dimensionamiento de las uniones para transmitir potencia, y iii) los redondeos y chaflanes del árbol. Es necesario destacar que para este procedimiento se adecuan a los diez árboles tipificados anteriormente. A continuación, se describe cada parte de esta segunda fase.

2.5.3.1. Dimensionamiento de longitudes y diámetros

El dimensionamiento paramétrico de las longitudes y diámetros es establecido en base a la estructura de los árboles tipificados. Si bien se cuenta con diez árboles de transmisión tipificados, para dimensionar, en este paso, solo las longitudes y los diámetros, se distingue que basta con parametrizar cinco casos específicos. Ahora bien, en esta parametrización aún no se está dimensionando el tipo de unión para transmitir potencia, a excepción del piñón solidario, ya que estos últimos cambian considerablemente la estructura de los árboles. De modo que, siguiendo estos lineamientos, los cinco casos necesarios para dimensionar longitudes y diámetro de los árboles de transmisión tipificados son los siguientes:

- Caso 1: Para todos los árboles de entrada sin piñón solidario y cuando los árboles de salida cuentan con el segmento externo alejado del engranaje.
- Caso 2: Cuando los árboles de salida cuentan con el segmento cercano al engranaje
- Caso 3: Cuando los árboles de entrada cuentan con un piñón solidario
- Caso 4: Cuando los árboles intermedios no cuentan con un piñón solidario
- Caso 5: Cuando los árboles intermedios cuentan con un piñón solidario

Como ya se mencionó, todos estos casos no diferencian entre unión por chaveta o unión estriada, debido a que el segmento principal, que es donde viene esta unión, será dimensionado con la unión para transmitir potencia más adelante. También es necesario indicar que para el dimensionamiento de los diámetros se utiliza el diámetro previo calculado para cada árbol, el cual se presenta en estos casos como el diámetro mínimo del árbol (D_{min}).

A continuación, se presentan los cinco casos de parametrización establecidos. Además, se exponen los anillos separadores que sean necesarios en su dimensionamiento.

Caso 1: Árboles de entrada o árboles de salida con segmento externo alejado

Se aprecia el caso en la Figura 52 y las ecuaciones para su dimensionamiento en la Tabla 10. Ahora bien, las variables independientes se muestran en color verde, mientras que las dependientes se presentan en color rojo (diámetros), azul (longitudes) y amarillo (otros).

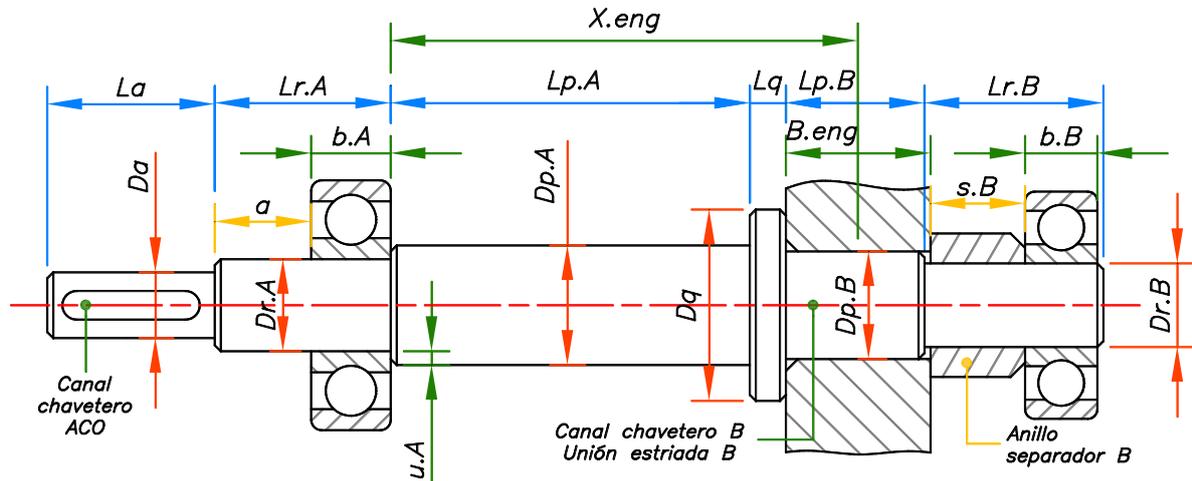


Figura 52 – Árboles de entrada o árboles de salida con segmento externo alejado del engranaje.

Tabla 10

Parametrización de árboles de entrada o árboles de salida con segmento externo alejado del engranaje.

| Segmento o elemento | Zona A | Zona B |
|---------------------|---|--|
| Segmento externo | $D_a = D_{min.A}$ $L_a = l_{ch} + 10 \text{ mm}$ | No presenta |
| Anillo separador | No presenta | $s_B = \begin{cases} (e_r + k) + \frac{t_{p.r}}{2}, & \text{para rueda} \\ (e_r + k), & \text{para piñón} \end{cases}$ |
| Segmento de apoyo | $D_{r.A} = 1,2 \cdot D_a$ $L_{r.A} = b_A + a$ | $D_{r.B} = D_{min.B}$ $L_{r.B} = b_B + s_B + h_e$ |
| Segmento principal | $D_{p.A} = D_{r.A} + 2u_A$ $L_{p.A} = x_{eng} - \frac{B_{eng}}{2} - L_q$ | $D_{p.B} = D_{r.B} + 5 \text{ mm}$ $L_{p.B} = B_{eng} + h_e$ |
| Resalte intermedio | | $D_q = 1,2 \cdot D_{p.B}$ $L_q = 0,14 \cdot D_{p.B}$ |

$t_{p.r}$: Diferencia de anchos entre rueda y piñón en un par de engranajes

a : Ancho para la tapa lateral con agujero de la carcasa

h_e : Separación para garantizar contacto entre engranaje y anillo separador

Caso 2: Árboles de salida con segmento externo cercano al engranaje

Se ve el caso en la Figura 53 y las ecuaciones para su dimensionamiento en la Tabla 11. Es necesario señalar que las variables independientes se muestran en color verde, mientras que las dependientes se presentan en color rojo (diámetros), azul (longitudes) y amarillo (otros).

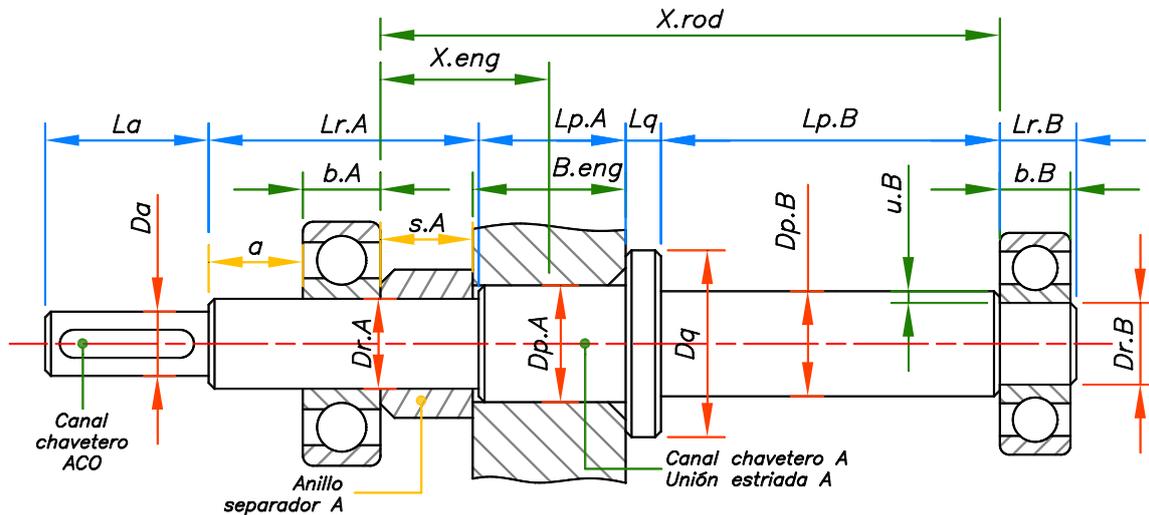


Figura 53 – Árboles de salida con el segmento externo cercano al engranaje.

Tabla 11

Parametrización de árboles de salida con el segmento externo cercano al engranaje.

| Segmento o elemento | Zona A | Zona B |
|---------------------|--|---|
| Segmento externo | $D_a = D_{min.A}$ $L_a = l_{ch} + 10 \text{ mm}$ | No presenta |
| Anillo separador | $s_A = \begin{cases} (e_r + k) + \frac{t_{p.r}}{2}, & \text{para rueda} \\ (e_r + k), & \text{para piñón} \end{cases}$ | No presenta |
| Segmento de apoyo | $D_{r.A} = 1,2 \cdot D_a$ $L_{r.A} = a + b_A + s_A + h_e$ | $D_{r.B} = D_{min.B}$ $L_{r.B} = b_B$ |
| Segmento principal | $D_{p.A} = D_{r.A} + 5 \text{ mm}$ $L_{p.A} = B_{eng} - h_e$ | $D_{p.B} = D_{r.B} + 2u_B$ $L_{p.B} = x_{rod} - x_{eng} - \frac{B_{eng}}{2} - L_q$ |
| Resalte intermedio | $D_q = 1,2 \cdot D_{p.A}$ $L_q = 0,14 \cdot D_{p.A}$ | |

$t_{p.r}$: Diferencia de anchos entre rueda y piñón en un par de engranajes

a : Ancho para la tapa lateral con agujero de la carcasa

h_e : Separación para garantizar contacto entre engranaje y anillo separador

Caso 3: Árboles de entrada con piñón solidario

Se aprecia el caso en la Figura 54 y las ecuaciones para su dimensionamiento en la Tabla 12. Ahora bien, las variables independientes se muestran en color verde, mientras que las dependientes se muestran en color rojo (diámetros), azul (longitudes) y amarillo (otros). Se puede notar que este árbol no cuenta con resalte intermedio ni con anillos separadores.

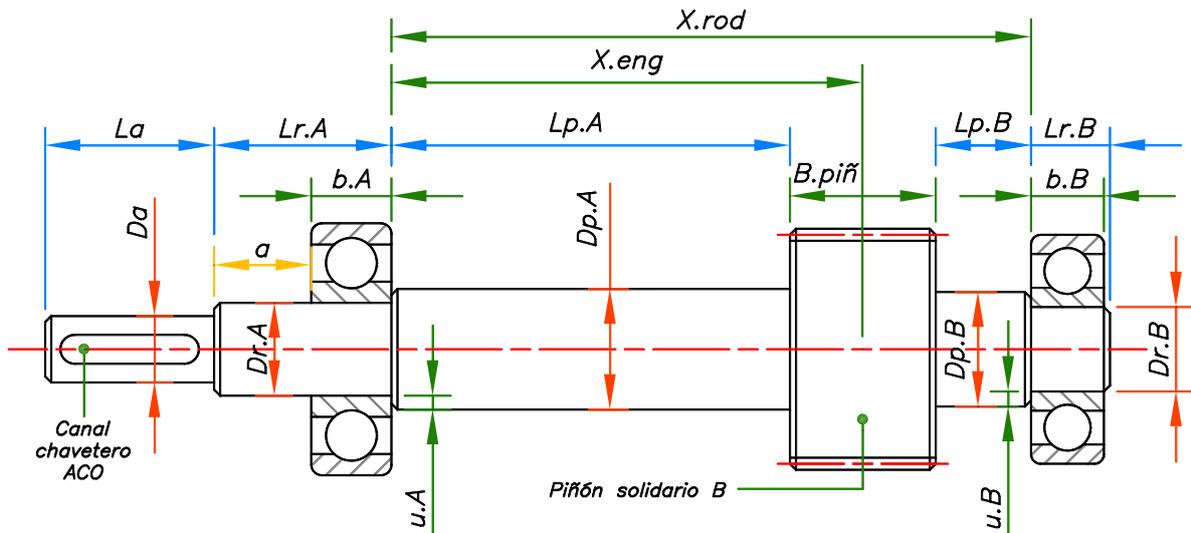


Figura 54 – Árbol de entrada con piñón solidario.

Tabla 12

Parametrización de un árbol de entrada con piñón solidario.

| Segmento o elemento | Zona A | Zona B |
|---------------------|---|---|
| Segmento externo | $D_a = D_{min.A}$ $L_a = l_{ch} + 10 \text{ mm}$ | No presenta |
| Segmento de apoyo | $D_{r.A} = 1,2 \cdot D_a$ $L_{r.A} = b_A + a$ | $D_{r.B} = D_{min.B}$ $L_{r.B} = b_B$ |
| Segmento principal | $D_{p.A} = D_{r.A} + 2u_A$ $L_{p.A} = x_{eng} - \frac{B_{piñ}}{2}$ | $D_{p.B} = D_{r.B} + 2u_B$ $L_{p.B} = x_{rod} - x_{eng} - \frac{B_{piñ}}{2}$ |

a: Ancho para la tapa lateral con agujero de la carcasa

Caso 4: Árboles intermedios sin piñón solidario

Se muestra el caso en la Figura 55 y las ecuaciones para su dimensionamiento en la Tabla 13. Ahora bien, las variables independientes se muestran en color verde, mientras que las dependientes se muestran en color rojo (diámetros), azul (longitudes) y amarillo (otros).

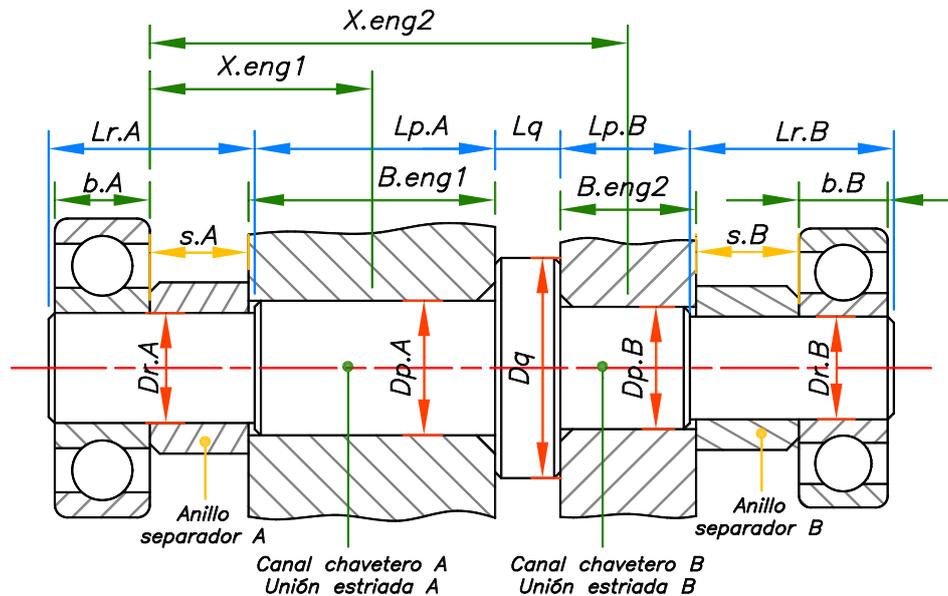


Figura 55 – Árboles intermedios sin piñón solidario.

Tabla 13

Parametrización de árboles intermedios sin piñón solidario.

| Segmento o elemento | Zona A | Zona B |
|---------------------|--|--|
| Anillo separador | $s_A = \begin{cases} (e_r + k) + \frac{t_{p.r.A}}{2}, & \text{para rueda} \\ (e_r + k), & \text{para piñón} \end{cases}$ | $s_B = \begin{cases} (e_r + k) + \frac{t_{p.r.B}}{2}, & \text{para rueda} \\ (e_r + k), & \text{para piñón} \end{cases}$ |
| Segmento de apoyo | $D_{r.A} = D_{min.A}$ $L_{r.A} = b_A + s_A + h_e$ | $D_{r.B} = D_{min.B}$ $L_{r.B} = b_B + s_B + h_e$ |
| Segmento principal | $D_{p.A} = D_{r.A} + 5 \text{ mm}$ $L_{p.A} = B_{eng.1} - h_e$ | $D_{p.B} = D_{r.B} + 5 \text{ mm}$ $L_{p.B} = B_{eng.2} - h_e$ |
| Resalte intermedio | $D_q = 1,2 \cdot \max(D_{p.A}; D_{p.B})$ $L_q = \begin{cases} x_{eng.2} - x_{eng.1} - \frac{B_{eng.1}}{2} - \frac{B_{eng.2}}{2}, & \text{para 1er intermedio (3 etapas)} \\ 0,14 \cdot \max(D_{p.A}; D_{p.B}), & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$ | |

$t_{p.r}$: Diferencia de anchos entre rueda y piñón en un par de engranajes

h_e : Separación para garantizar contacto entre engranaje y anillo separador

Caso 5: Árboles intermedios con un piñón solidario

Se presenta en caso en la Figura 56 y las ecuaciones para su dimensionamiento en la Tabla 14. Ahora bien, las variables independientes se muestran en color verde, mientras que las dependientes se presentan en color rojo (diámetros), azul (longitudes) y amarillo (otros).

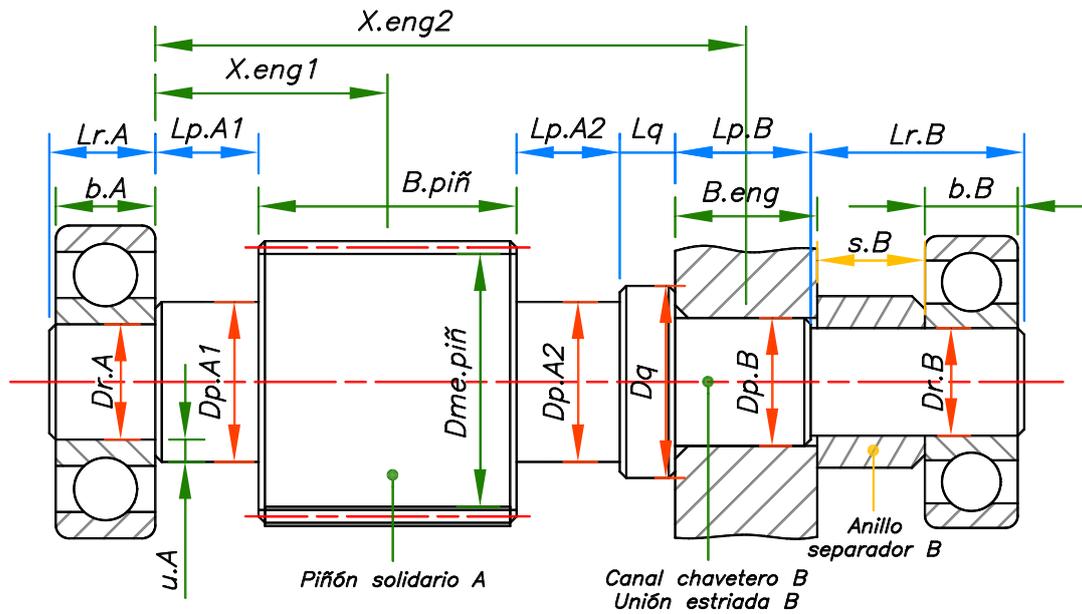


Figura 56 – Árboles intermedios con piñón solidario.

Tabla 14

Parametrización de árboles intermedios con piñón solidario.

| Segmento o elemento | Zona A | Zona B |
|----------------------|---|--|
| Anillo separador | No presenta | $s_B = \begin{cases} (e_r + k) + \frac{t_{p.r}}{2}, & \text{para rueda} \\ (e_r + k), & \text{para piñón} \end{cases}$ |
| Segmento de apoyo | $D_{r.A} = D_{min.A}$ $L_{r.A} = b_A$ | $D_{r.B} = D_{min.B}$ $L_{r.B} = b_B + s_B + h_e$ |
| Segmento principal 1 | $D_{p.A1} = D_{r.A} + 2u_A$ $L_{p.A1} = \begin{cases} \left(x_{eng.1} - \frac{B_{piñ}}{2}\right) - 10 \text{ mm}, & \text{para 2 etapas} \\ x_{eng.1} - \frac{B_{piñ}}{2}, & \text{para 3 etapas} \end{cases}$ | $D_{p.B} = D_{r.B} + 5 \text{ mm}$ $L_{p.B} = B_{eng} - h_e$ |

| | | |
|-----------------------------|---|-------------|
| Segmento principal 2 | $D_{p.A2} = \min\left(\frac{D_{me.piñ}}{2} - 5 \text{ mm}; \frac{D_q}{2} - 8 \text{ mm}\right)$ $L_{p.A2} = \begin{cases} 20 \text{ mm}, & \text{para 2 etapas} \\ x_{eng.2} - x_{eng.1} - L_q - \frac{B_{piñ}}{2} - \frac{B_{eng}}{2}, & \text{para 3 etapas} \end{cases}$ | No presenta |
| Resalte intermedio | $D_q = 1,2 \cdot \max(D_{p.A}; D_{p.B})$ $L_q = \begin{cases} x_{eng.2} - x_{eng.1} - \frac{B_{eng.1}}{2} - \frac{B_{eng.2}}{2}, & \text{para 1er intermedio (3 etapas)} \\ 0,14 \cdot \max(D_{p.A}; D_{p.B}), & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$ | |

$t_{p,r}$: Diferencia de anchos entre rueda y piñón en un par de engranajes

h_c : Separación para garantizar contacto entre engranaje y anillo separador

2.5.3.2. Dimensionamiento de la unión para transmitir potencia

El dimensionamiento paramétrico de las uniones por chaveta o uniones estriadas se basa en el procedimiento de cálculo establecido para estas uniones, así como en la norma DIN 6885 para uniones por chaveta y la norma DIN-ISO 14 para uniones estriadas. Es importante mencionar que el presente trabajo de tesis no plantea redimensionar el ancho del cubo del engranaje, ya que ese procedimiento implicaría alargar aún más el árbol, lo cual incrementaría el ancho de la caja reductora haciéndola menos óptima. Además, se tendría que volver a calcular la posición axial de los engranajes, lo cual implicaría una mayor carga computacional para iterar el diseño las veces que sea necesario, lo que haría al algoritmo menos eficiente.

Unión por chaveta

Se elaboró la Figura 57 para mostrar las dimensiones relevantes a este segmento.

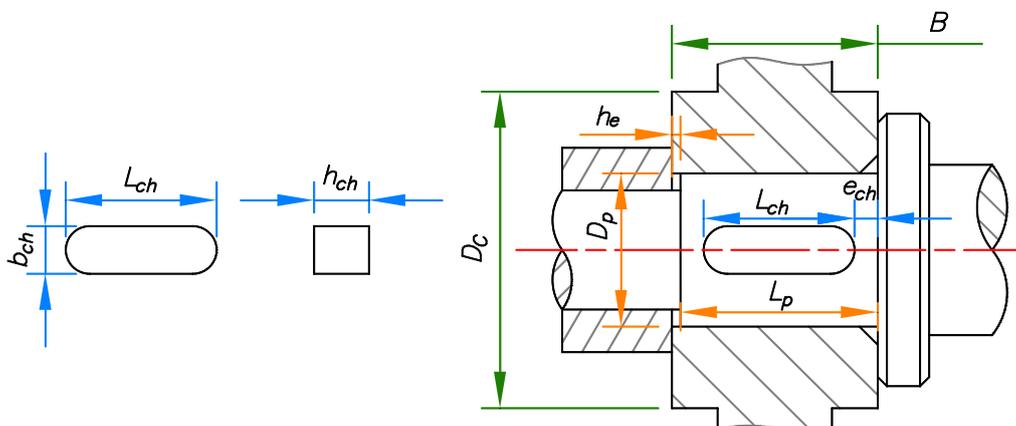


Figura 57 – Dimensiones relevantes a un segmento principal con unión por chaveta.

El diámetro de un segmento principal con una unión por chaveta es el diámetro principal (D_p) de dicha zona, cuyo valor se ajusta durante el procedimiento iterativo de diseño. Por su parte, el espaciado entre engranaje y anillo separador (h_e) es necesario para garantizar el contacto axial entre el engranaje y anillo separador, el cual es 3 mm según lo establecido en el apartado 2.1.1.

El ancho (b_{ch}) y el alto (h_{ch}) de la chaveta, así como el ancho de la ranura en el árbol (t_{ch1}) y en el cubo (t_{ch2}) son valores normalizados en función al diámetro del árbol según la norma DIN 6885. Además, la longitud de la chaveta (L_{ch}) también está normalizada según la norma DIN 6885, pero su valor depende de los cálculos realizados según el procedimiento establecido en el apartado 1.3.1.1. Asimismo, “el ancho del cubo (B) debe ser al menos 10 mm más grande que la longitud de la chaveta” (Lelikov, 2008, p. 450). Por ello, se puede considerar que el espacio (e_{ch}) entre el borde del canal chavetero y el resalte intermedio sea como mínimo 5 mm, y su valor exacto puede ser calculado mediante la ecuación 74.

$$e_{ch} = \frac{B_{eng} - l_{ch}}{2} \geq 5mm \quad (74)$$

Unión estriada

Se elaboró la Figura 58 para ilustrar este segmento y su dimensionamiento relevante.

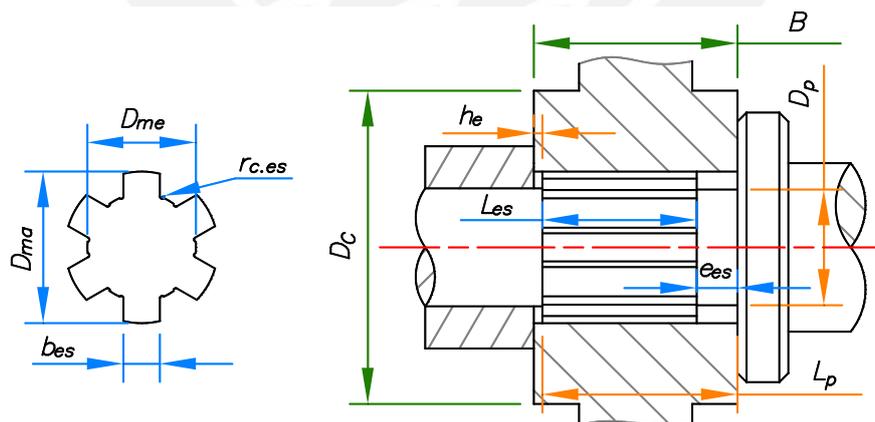


Figura 58 – Dimensiones relevantes a un segmento principal con unión estriada.

El diámetro menor (D_{me}), el diámetro mayor (D_{ma}), el ancho de los dientes (b_{es}) y el número de dientes (N_{es}) se seleccionan en función al diámetro principal (D_p) de dicha zona siguiendo la norma DIN-ISO 14. Es importante notar que el segmento que queda con el

diámetro principal debe ser menor que el diámetro menor de la unión estriada. Por último, el radio del redondeo en la base de los dientes ($r_{c.es}$) viene dado por valores normados.

La longitud de la unión estriada (l_{es}) se puede calcular mediante la ecuación 75. Para ello, “el ancho del cubo (B_{eng}) debe ser al menos entre 4 y 6 mm más grande que la longitud estriada en el árbol” (Lelikov, 2008, p. 453). Por ende, se considerará el espacio (e_{es}) entre el borde de la unión estriada y el resalte intermedio como 10 mm. Además, el espaciamiento entre engranaje y anillo separador (h_e) tendrá el mismo valor que para uniones por chaveta.

$$l_{es} = B_{eng} - e_{es} - h_e \quad (75)$$

2.5.3.3. Dimensionamiento de redondeos y chaflanes

El dimensionamiento paramétrico de redondeos y chaflanes se realiza en función a recomendaciones en bibliografía especializada. Estas dimensiones son analizadas meticulosamente, pues tienen incidencia en el funcionamiento y resistencia del árbol.

Redondeos

Los redondeos sobre un árbol de transmisión son necesarios para disminuir la concentración de esfuerzos en estos puntos que eventualmente pueden llevar al árbol a fallar por fatiga. “Para incrementar la resistencia a la falla por fatiga, existen técnicas de mejora de material, así como mejoras en la estructura del árbol que reducen la concentración de esfuerzos” (Lelikov, 2008, p. 438). En ese sentido, Lelikov (2008) menciona que esta concentración de esfuerzos se reducen cuando la razón r/d disminuye, al punto que si $r/d < 0.1$ la concentración de esfuerzos es 2 o más (p. 438). Ahora bien, estas dimensiones de los redondeos serán valores normalizados según DIN, siguiendo sus números normalizados R10, los cuales se muestran en la Tabla 15.

Tabla 15

Radios establecidos de redondeos.

| Radio de redondeos | | | | | | | | | | |
|--------------------|------|-----|----|------|------|----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 1.25 | 1.6 | 2 | 2.5 | 3.15 | 4 | 5 | 6.3 | 8 | 10 |
| 12.5 | 16 | 20 | 25 | 31.5 | 40 | 50 | 63 | 80 | 100 | 125 |

Para poder dimensionar los redondeos en los escalones de los árboles de transmisión, es necesario identificar el espacio que se dispone para estos resaltes; esto supone, básicamente, la altura de cada resalte. Esto es lo mismo que afirmar que el radio de redondeo cumpla que $r \leq (D_2 - D_1)/2$, siendo D_1 y D_2 los diámetros menor y mayor en un escalón del árbol. Sin embargo, la cuestión no es tan simple, pues no todo ese espacio se puede disponer en algunos casos y, también, es necesario realizar consideraciones tales como si hubiese anillo separador o el tipo de unión para transmitir potencia presente. En ese sentido, el dimensionamiento paramétrico de redondeos consiste en determinar cuánto se puede usar ese espacio disponible, lo cual matemáticamente se calcula con un factor de ajuste k_{rr} sobre el valor de redondeo máximo disponible, el cual se muestra visualizar en la Figura 59.

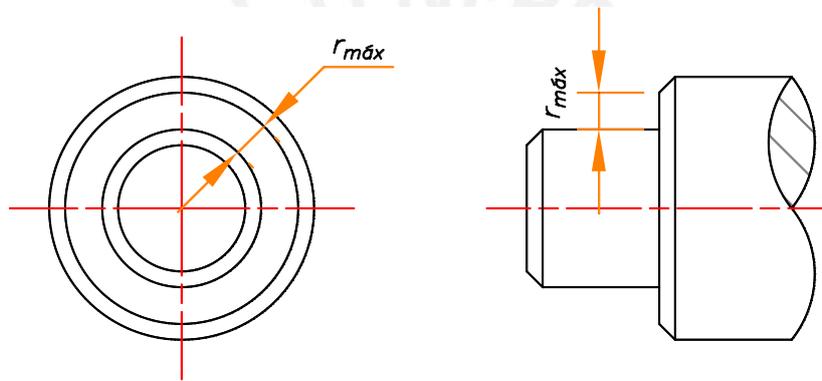


Figura 59 – Radio de redondeo máximo disponible en un escalón.

Ahora bien, para un redondeo en un segmento externo, segmento principal libre y los bordes de un piñón solidario se considera un factor de ajuste del 95% del radio disponible ($k_{rr} = 0.95$), ya que estos segmentos están libres de otros componentes. Los segmentos de apoyo con anillo separador contarán con un redondeo no mayor a los 3 mm, debido a que es la distancia entre el borde del segmento y el anillo; mientras que un segmento de apoyo sin anillo separador se considera la recomendación del fabricante. Asimismo, en un segmento principal con unión por chaveta, el resalte apoya al engranaje, de modo que el redondeo más grande posible tiene un factor de ajuste del 30% del radio disponible ($k_{rr} = 0.3$). Por último, para el caso de los redondeos en el segmento reducido adyacente a una unión estriada, se plantea utilizar solo el 40% del radio disponible que es de 10 mm de distancia de esta sección reducida, lo que implica un redondeo de máximo 4mm. En función a esto, los redondeos posibles se presentan en la Tabla 16 en función a los segmentos establecidos en un árbol de transmisión.

Tabla 16

Parametrización de los redondeos.

| Tipo de segmento | | Radio de redondeo según geometría |
|--------------------|----------------------|---|
| Segmento externo | | $r_a \leq k_{rr} \cdot 0.5 \cdot (D_r - D_a - 2 \cdot ch_a)$ $= 0.475 \cdot (D_r - D_a - 2 \cdot ch_a)$ |
| Segmento de apoyo | Con anillo separador | $r_r \leq 3 \text{ mm}$ |
| | Sin anillo separador | Radio recomendado por el fabricante de rodamiento |
| Segmento principal | Libre | $r_p \leq k_{rr} \cdot 0.1 \cdot D_p = 0.095 \cdot D_p$ |
| | Piñón solidario | $r_p \leq k_{rr} \cdot 0.5 \cdot (D_{me} - D_p) = 0.475 \cdot (D_{me} - D_p)$ |
| | Chaveta | $r_p \leq k_{rr} \cdot 0.1 \cdot D_p = 0.03 \cdot D_p$ |
| | Estriado | $r_p \leq 4 \text{ mm}$ |

Chaflanes

Los chaflanes son las superficies oblicuas que se forman en los bordes de los escalones de un árbol de transmisión. Estos se mecanizan con un ángulo de 45° con respecto a los ejes coordenados. Al respecto, se elaboró la Tabla 17, para mostrar los valores de chaflán que se usan en los árboles de transmisión de la presente tesis.

Tabla 17

Dimensiones establecidas de los chaflanes.

| Dimensiones de chaflanes | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Para dimensionar los chaflanes, se realiza un análisis similar al de los redondeos. Esto es que, en función al espacio disponible y los componentes presentes en cada borde, se designa el espacio destinado al chaflán. El dimensionamiento específico consiste en seleccionar el valor de chaflán menor posible. En ese sentido, el espacio que se dispone para un segmento cuyo borde es el extremo del árbol es el 2,5% del diámetro de ese segmento. En cambio, para un segmento cuyo borde no es extremo del árbol, el chaflán es de 1,5% del diámetro. Sin embargo, una excepción a estas reglas es el segmento principal, pues este apoya un rodamiento, por ello se establece el chaflán máximo como la cuarta parte de la diferencia entre los diámetros en cuestión. En ese sentido, los chaflanes parametrizados se presentan en la Tabla 18.

Tabla 18

Parametrización de los chaflanes.

| Tipo de segmento | | Dimensión de un chaflán según geometría |
|--------------------|-----------------------------------|---|
| Segmento externo | | $ch_a \leq 0.025 \cdot D_a$ |
| Segmento de apoyo | Colindante al segmento externo | $ch_r \leq 0.015 \cdot D_a$ |
| | No colindante al segmento externo | $ch_r \leq 0.025 \cdot D_a$ |
| Segmento principal | | $ch_p \leq \frac{D_p - D_r}{4}$ |
| Resalte intermedio | | $ch_q \leq 0.015 \cdot D_a$ |

2.6. Ajustes en los árboles de transmisión

Los ajustes dimensionales requeridos por los árboles de la presente tesis vienen dados en la Tabla 19. Ahora bien, los segmentos principales tienen un ajuste de gran precisión, para que pueda montarse manualmente sin deterioro. Mientras que los segmentos de apoyo cuentan con un ajuste indeterminado. Por su parte, un segmento externo debe tener un ajuste que permita montarlo y desmontarlo fácilmente, por lo cual se tiene un sistema de eje único. Los ajustes referidos al canal chavetero o la unión estriada vienen dados por su norma respectiva.

Tabla 19

Ajustes en los árboles de transmisión.

| Segmento o parte del árbol | Dimensión en el árbol | Tipo de ajuste | Ajuste ISO |
|--|---|----------------|------------|
| Segmento externo | Diámetro de segmento externo con acoplamiento | Apriete | h6 |
| | Diámetro de segmento externo con polea o sprocket | Indeterminado | h6 |
| Segmento de apoyo | Diámetro de segmento de apoyo | Juego | f7 |
| Segmento principal con unión por chaveta | Diámetro principal | Juego | h6 |
| Canal chavetero | Ancho del canal chavetero | Asiento ligero | N9 |
| Segmento principal con unión estriada | Diámetro mayor de la unión estriada | Indeterminado | a11 |
| | Diámetro menor de la unión estriada | Indeterminado | g7 |
| Unión estriada | Ancho de los dientes | Indeterminado | f9 |

Nota. Basado en “Atlas de elementos de máquinas y mecanismos”, por Beliáev et al. (1971); dimensiones normalizadas para uniones por chaveta y chavetas DIN 6885 (1968); y dimensiones normalizadas para uniones estriadas DIN-ISO 14 (1982).

Capítulo 3

Modelado FEM de los árboles de transmisión

En este capítulo se presenta una descripción detallada del modelo de elementos finitos mediante el cual se calculan los esfuerzos y deformaciones en los árboles de transmisión, objeto de la presente tesis. Para ello, se identifican las posibilidades de carga que presenta cada árbol y se define cuándo esta carga es crítica, encontrando así que la fuerza axial generada por los engranajes helicoidales es determinante. Posteriormente, se realiza el modelado por elementos finitos de estos árboles, que consiste en definir el mallado, aplicar las fuerzas presentes y establecer las condiciones de contorno. Además, se hace un breve análisis de resultados preliminares con el objetivo de confirmar el correcto funcionamiento del modelo. Por último, se examinan las secciones transversales de los árboles, de las cuales se extraen los valores de esfuerzos y deformaciones que se utilizan para los cálculos de verificación mecánica.

3.1. Análisis de fuerzas críticas en los árboles de transmisión

Las fuerzas presentes en los puntos de contacto de dos engranajes son vectores con una dirección y un sentido en función al sentido de giro del árbol y, en caso de ser engranajes helicoidales, en función al sentido de la hélice. En esa línea, la fuerza axial generada por los engranajes helicoidales resulta determinante para determinar la carga crítica sobre los árboles. A continuación, se presenta el desarrollo de identificación de estos casos críticos.

3.1.1. Análisis de fuerzas en una caja reductora

Una caja reductora cuenta con varios árboles de transmisión, los cuales dependiendo de si son de entrada, intermedio o de salida cuentan con un piñón, una rueda y un piñón, o solo una rueda. Un piñón y una rueda engranados presentan una fuerza axial de misma magnitud, pero de diferente sentido. Desde luego, el sentido de estas fuerzas depende si el giro del árbol es horario o antihorario. En ese sentido, como se muestra en la Figura 60, las fuerzas axiales

en una caja reductora de dos etapas varían en función al sentido de giro del árbol. Naturalmente, el caso crítico de cada árbol de transmisión se da cuando esta carga axial se carga sobre el resalte intermedio sin importar si el giro es horario o antihorario. Esto se debe a que los árboles de transmisión objeto de diseño en la presente tesis son diseñados para funcionar en ambos sentidos de giro; es decir, que no se fija un solo sentido de giro a las cajas reductoras.

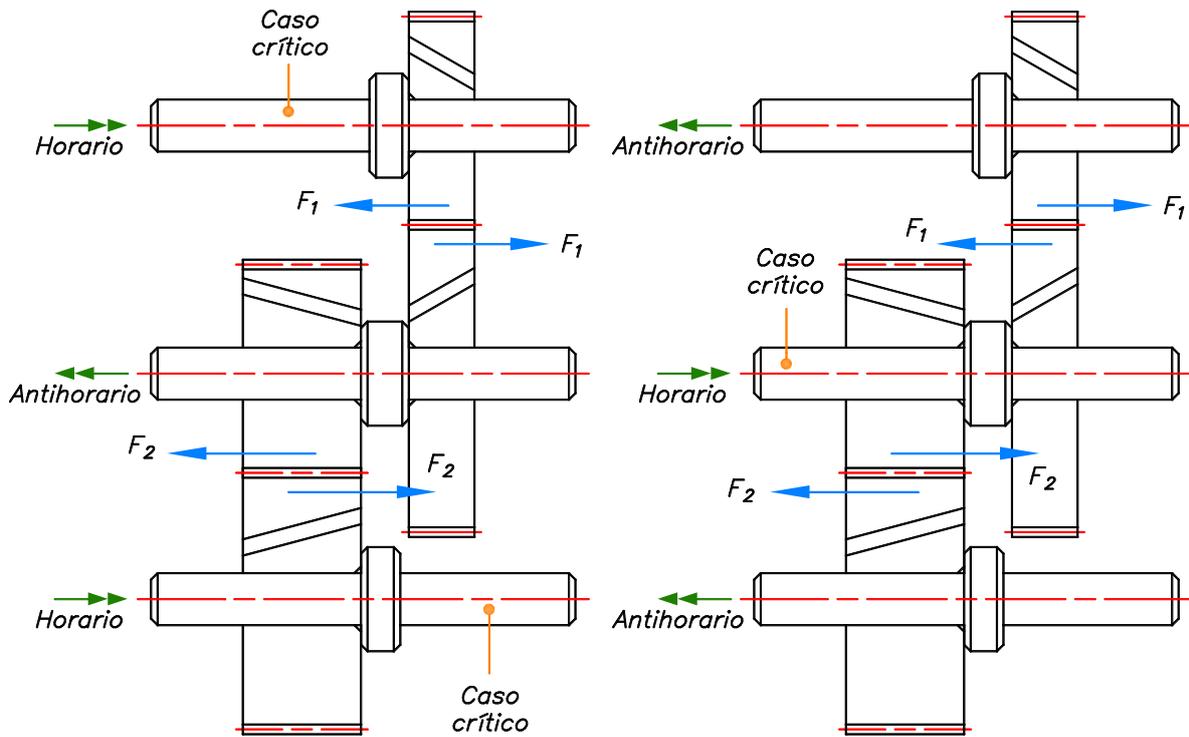


Figura 60 – Sistema de fuerzas axiales en una caja reductora de dos etapas

Por su parte, la fuerza radial y tangencial en el punto de contacto son incluidas en el modelo de elementos finitos con el sentido y dirección que corresponde con el caso crítico subsecuente del sentido de la carga axial. Es por ello, que se puede decir que la fuerza axial es determinante en el modelamiento de las fuerzas de los engranajes.

3.1.2. Casos críticos para los árboles de transmisión

Se presentan cinco casos críticos de árboles para cajas reductoras de una, dos y tres etapas, los cuales son identificados en función a la carga axial generada por engranajes helicoidales. Es importante mencionar que, por simplicidad, dado que la carga axial no se genera en engranajes rectos, los árboles con este tipo de engranaje se consideran con la fuerza

tangencial en el sentido de giro del árbol. Ahora bien, se presenta la posición y sentido de la carga axial de los casos críticos.

Árboles de entrada

El caso crítico en cualquier árbol de entrada se da cuando la fuerza axial se apoya sobre el resalte intermedio del árbol. Se elaboró la Figura 61, en la cual se puede visualizar este caso representado por la fuerza axial F_B sobre el piñón B.

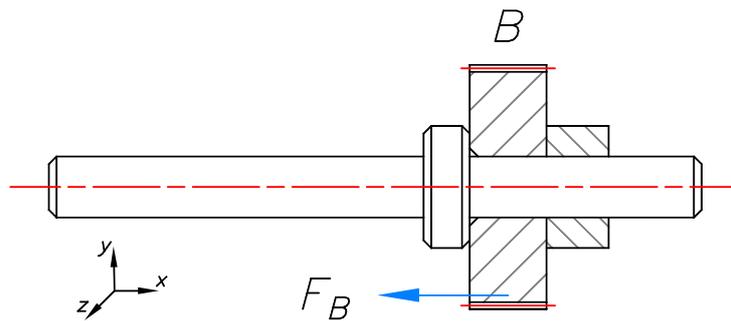


Figura 61 – Caso crítico de árboles de entrada.

Árboles intermedios

Los casos críticos en árboles intermedios se dan cuando la carga axial de cada engranaje se apoya sobre el resalte intermedio. Se elaboró la Figura 62 y la Figura 63, en los cuales se ven el caso piñón A y rueda B, y rueda A y piñón B respectivamente. Nótese que en ambos casos el árbol se carga con fuerzas axiales F_A y F_B .

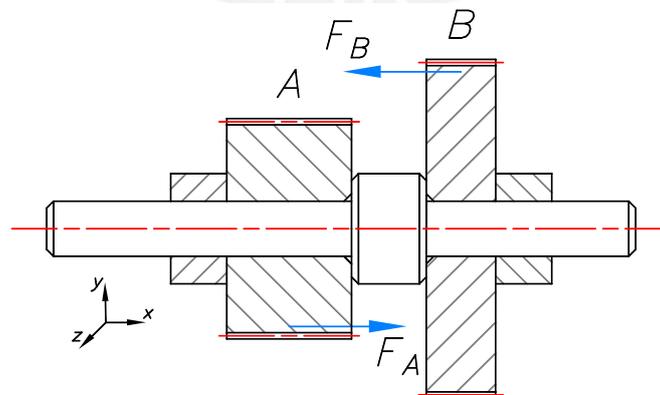


Figura 62 – Caso crítico piñón-rueda en árbol intermedio.

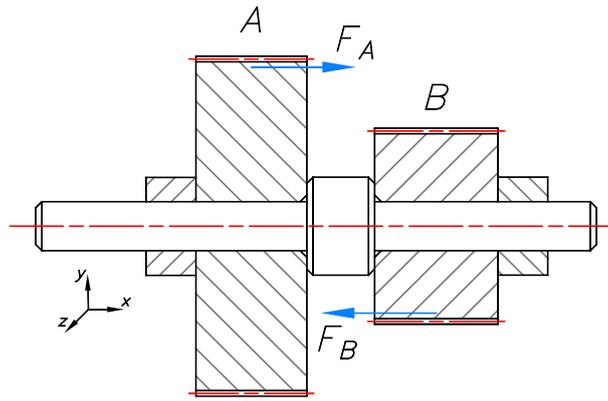


Figura 63 – Caso crítico rueda-piñón en árbol intermedio.

Árboles de salida

Los casos críticos en árboles de salida se dan cuando el resalte intermedio soporta la fuerza axial de la rueda. Se elaboró la Figura 64 y la Figura 65, para mostrar el caso para una caja de dos etapas, y una o tres etapas respectivamente. Nótese en ambos casos la carga sobre el árbol con las fuerzas axiales F_A en la rueda A o F_B en la rueda B.

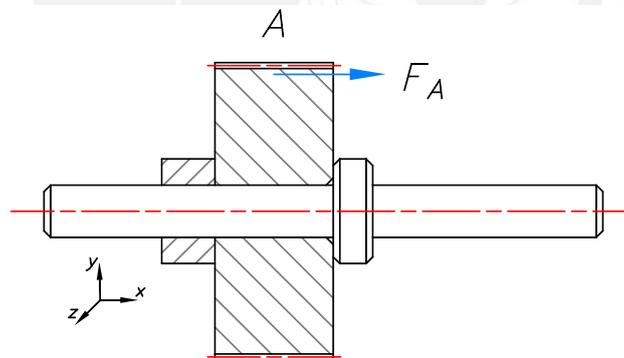


Figura 64 – Caso crítico de árbol de salida para cajas reductoras de dos etapas.

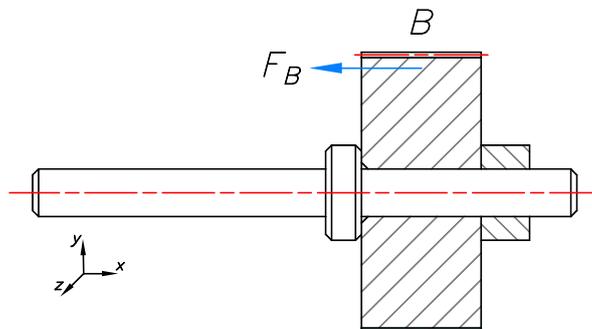


Figura 65 – Caso crítico de árboles de salida para cajas reductoras de una y tres etapas.

3.2. Modelado por elementos finitos de los árboles

El modelado por elementos finitos de los árboles consiste en establecer el mallado, identificar el sistema de fuerzas y las condiciones de contorno. A continuación, se presenta el desarrollo del modelo para los árboles del presente trabajo de tesis.

3.2.1. Mallado

Se considera como elemento para el mallado al tetraedro tridimensional. En la Figura 66, se muestra el mallado en un árbol de transmisión. En esa línea, para determinar el tamaño de cada elemento (TE) se propone la ecuación 76 en relación angular del diámetro principal mayor.

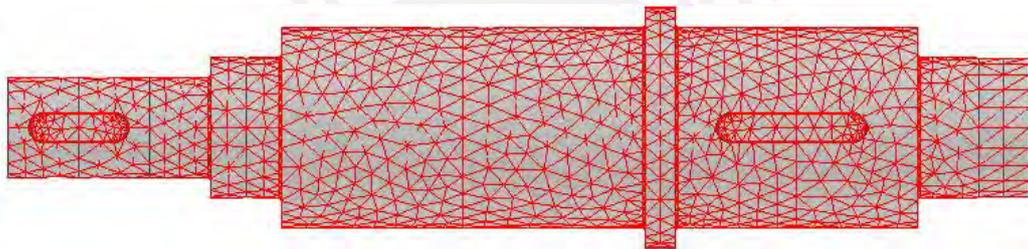


Figura 66 – Mallado en un árbol de transmisión.

$$TE = 0,8 \cdot \frac{\pi}{36} \cdot \text{máx}\{D_{p,A} ; D_{p,B}\} \quad (76)$$

$D_{p,A}$ = Diámetro principal A (mm)

$D_{p,B}$ = Diámetro principal B (mm)

Asimismo, se considera un mallado más fino en algunos sectores del árbol para optimizar los resultados de esfuerzos en dichas zonas. En la Figura 67, se muestra el mallado fino alrededor de un canal chavetero.

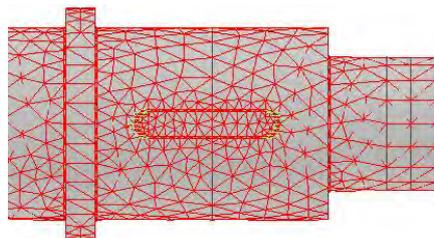


Figura 67 – Mallado fino sobre una superficie determinada.

3.2.2. Sistema de fuerzas

Las cargas a las que es sometido un árbol de transmisión se basan en aquellas fuerzas generadas por los engranajes, acoplamientos, poleas o sprockets. Estas fuerzas deben trasladarse al árbol a fin de poder establecerlas en el modelo de elementos finitos con magnitud, dirección y sentido sobre una superficie o cara del árbol modelado. Así, se presenta el análisis de cada una de las fuerzas presentes en un árbol siguiendo los casos críticos establecidos,

3.2.2.1. Fuerzas aplicadas sobre el árbol de transmisión

A continuación, se identifican las fuerzas presentes en un árbol de transmisión ocasionadas por engranajes helicoidales o rectos, y por un acoplamiento, polea o sprocket.

Fuerza radial de los engranajes

La fuerza radial F_r se traslada directamente sobre el árbol y esta no genera ningún momento flector ni torsor. En el modelo de elementos finitos se establece a esta fuerza como una carga distribuida. Se elaboró la Figura 68, para mostrar el modelo de aplicación de esta fuerza sobre un árbol de transmisión.

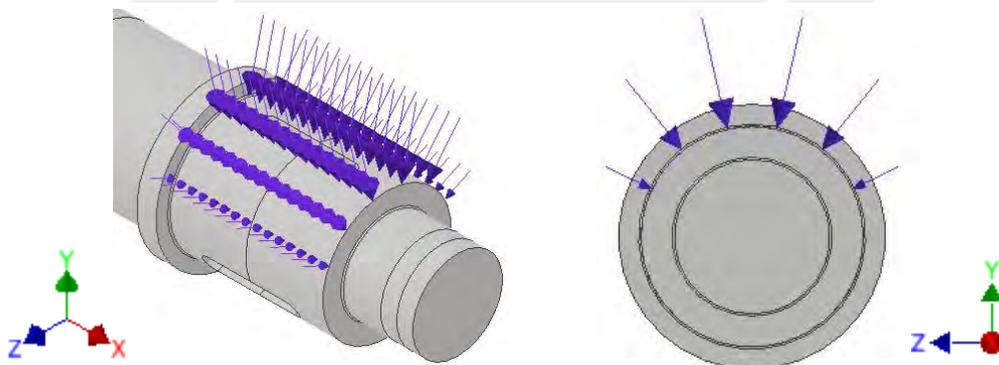


Figura 68 – Fuerza radial sobre un árbol de transmisión.

Fuerza tangencial de los engranajes

Al trasladar la fuerza tangencial F_t del engranaje sobre el árbol, se genera un momento torsor sobre el árbol. La fuerza tangencial se establece como una carga distribuida en el modelo de elementos finitos. Se elaboró la Figura 69, para mostrar el modelo de aplicación de esta fuerza sobre un árbol de transmisión.

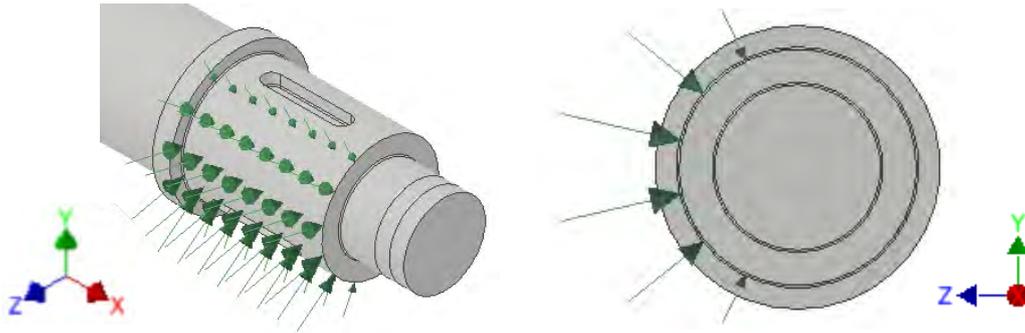


Figura 69 – Fuerza tangencial sobre un árbol de transmisión.

En los árboles, el momento torsor se considera con la aplicación de fuerzas FM_t , las cuales multiplicadas por la distancia radial del punto de aplicación de la fuerza equivalga el momento torsor. Esta fuerza es establecida como una fuerza normal a la superficie del canal chavetero en el modelo de elementos finitos, aunque este modelado también es válido para las uniones estriadas. Se elaboró la Figura 70, para mostrar el modelo de aplicación de esta fuerza.

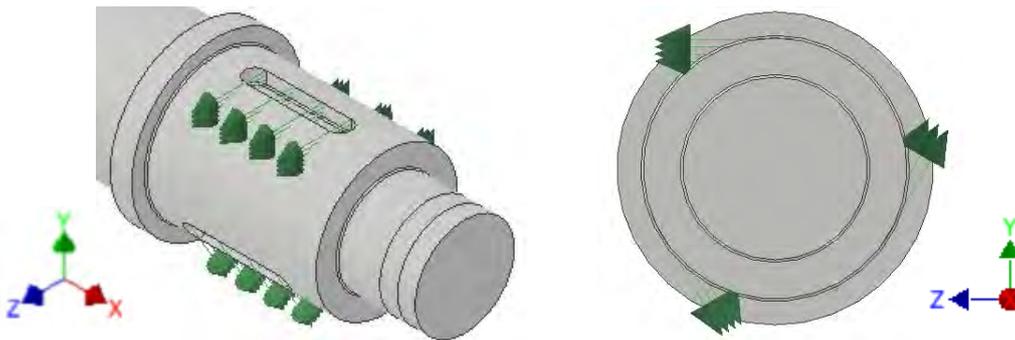


Figura 70 – Fuerzas que equivalen al momento torsor sobre un árbol de transmisión.

La fuerza que equivale al momento torsor (FM_t) se puede calcular mediante la ecuación 77, cuya demostración se presenta en el Anexo A. La distancia de la fuerza (p_m) se calcula mediante la ecuación 78 o 79 para uniones por chaveta y uniones estriadas respectivamente. La formulación de esta ecuación para uniones por chaveta se encuentra en el Anexo A.

$$FM_t = \frac{d_{pr}}{2 \cdot N_{fu} \cdot p_m} \cdot F_t \quad (77)$$

$$p_{ch} = \frac{d_{ar}}{2} - t_{ch} + \frac{\sqrt{d_{ar}^2 - b_{ch}^2} + 2t_{ch} - d_{ar}}{4} \quad (78)$$

$$p_{es} = \frac{D_{ma} - D_{me}}{2} \quad (79)$$

F_t = Fuerza tangencial (N)

d_{pr} = Diámetro primitivo del engranaje (mm)

N_{fu} = Número de fuerzas (#chavetas o #estriás)

d_{ar} = Diámetro del árbol (mm)

t_{ch} = Profundidad de la chaveta (mm)

b_{ch} = Ancho de la chaveta (mm)

D_{ma} = Diámetro mayor de la unión estriada (mm)

D_{me} = Diámetro menor de la unión estriada (mm)

Fuerza axial de los engranajes

Al trasladar la fuerza axial F_a sobre el árbol, se genera un momento flector sobre el árbol. La fuerza axial es establecida como una fuerza normal a la superficie en el modelo de elemento finitos. Se elaboró la Figura 71, en la cual se muestra el modelo de aplicación de la fuerza axial sobre el resalte del árbol de transmisión.

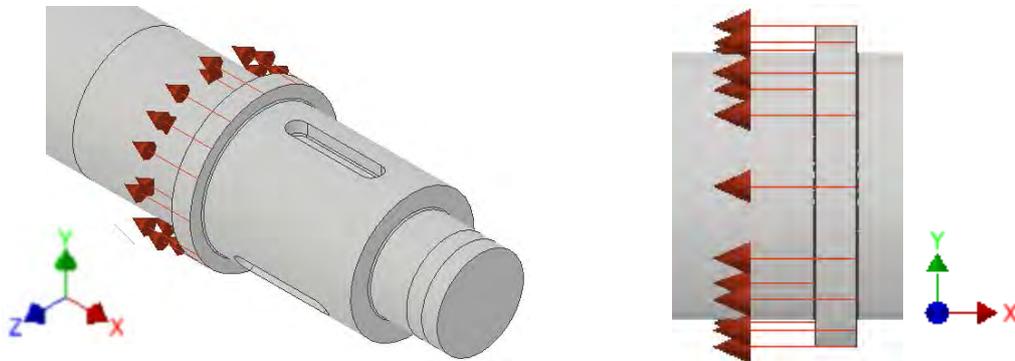


Figura 71 – Fuerza radial sobre el árbol de transmisión.

En los árboles, el momento flector se considera con una fuerza FM_a , que es aplicada en diferentes sentidos sobre la primera y segunda cara⁴ respectivamente, de modo que su resultante equivalga el momento flector. Esta fuerza es establecida como una carga distribuida en el modelo de elementos finitos. Se elaboró la Figura 72, la cual muestra el modelo de aplicación de esta fuerza.

⁴ El segmento principal en cuestión es seccionado en dos caras en el modelo CAD.

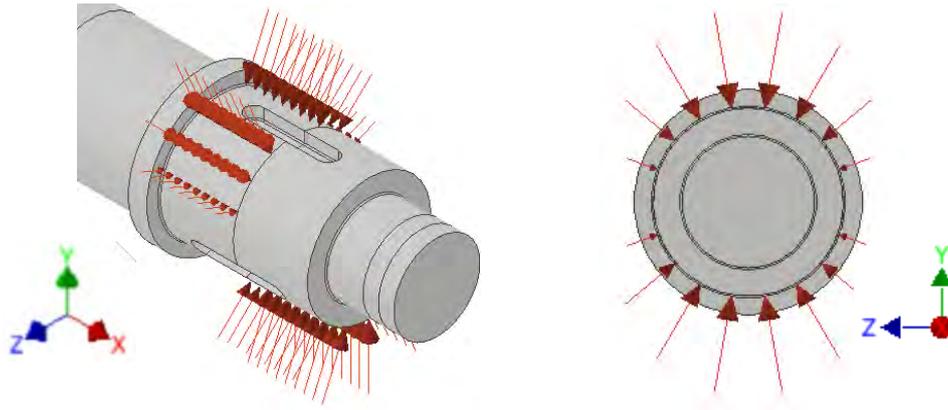


Figura 72 – Fuerzas que equivalen al momento flector sobre el árbol de transmisión.

La fuerza que equivale el momento flector (FM_a) se puede calcular mediante la ecuación 80, cuya demostración se encuentra en el Anexo A. Para estas fórmulas, se requiere el punto medio de la cara de contacto (q_m), el cual se puede calcular mediante la ecuación 81 o 82 para uniones por chaveta o uniones estriadas respectivamente.

$$FM_a = \frac{d_{pr}}{4 \cdot q_m} \cdot F_a \quad (80)$$

$$q_{ch} = \frac{L_p - ch_p}{4} \quad (81)$$

$$q_{es} = \frac{L_p - e_{es}}{4} \quad (82)$$

FM_a = Fuerza para el momento axial (N)

F_a = Fuerza axial (N)

d_{pr} = Diámetro primitivo del engranaje (mm)

q_m = Posición de la fuerza sobre la cara de contacto (mm)

L_p = Longitud principal (mm)

ch_p = Chaflán del segmento principal (mm)

e_{es} = Separación entre resalte y unión estriada (mm)

Fuerzas sobre un piñón solidario

En caso de contar con un piñón solidario al árbol, se simplifica el modelo del engranaje a un cilindro cuyo diámetro es el diámetro interno del piñón. Esto se hace para conseguir que

el efecto de las fuerzas del piñón sobre el árbol de transmisión sea modelado de la mejor manera sobre el árbol de transmisión en el análisis por elementos finitos. Justo por ello, se considera el diámetro interno del piñón como el límite entre los dientes del piñón y el árbol de transmisión.

En tanto, el modelo de fuerzas es aplicado en dos partes. La primera parte, cuyo modelo de aplicación se muestra en la Figura 73, consta de la fuerza radial, tangencial y la que equivale el momento flector generado por la carga axial establecidas como fuerzas distribuidas sobre la primera y segunda cara. La fuerza sobre estas caras se calcula mediante la ecuación 83. La segunda parte, cuyo modelo de aplicación se muestra en Figura 74, consta de la fuerza axial y la generada por el momento torsor establecida como una fuerza tangencial sobre la superficie cilíndrica en cuestión. Esta fuerza esta descrita en la ecuación 84.

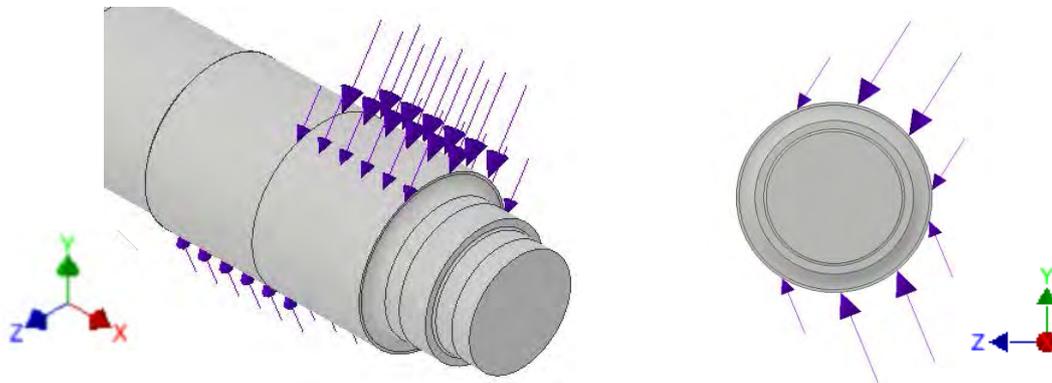


Figura 73 – Fuerza radial, tangencial y la que equivale el momento flector en un piñón solidario.

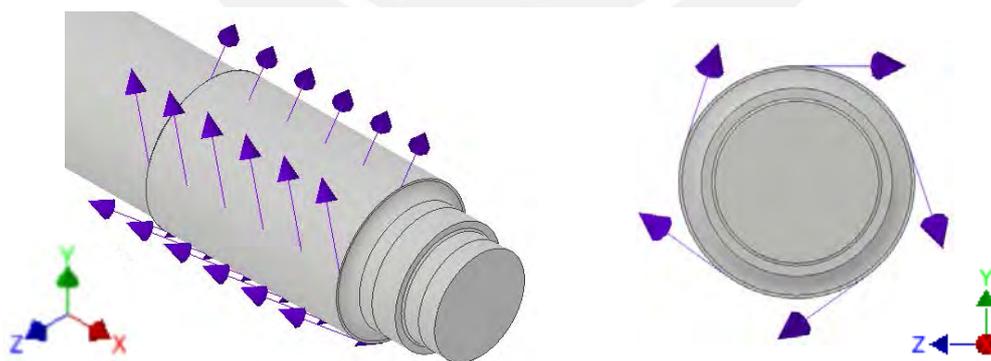


Figura 74 – Fuerza axial y la que equivale al momento torsor en un piñón solidario.

$$\vec{F}_{piñ1} = \vec{F}_r + \vec{F}_t + \overline{FM}_a \quad (83)$$

$$\vec{F}_{piñ2} = \vec{F}_x + \overline{FM}_t \quad (84)$$

Fuerzas producidas por una polea o un sprocket

En caso de contar con una polea o sprocket montada en un extremo del árbol de entrada o de salida, ya se faja en V o cadena de rodillos, se genera una fuerza producto de la tensión en la faja o en la cadena. Por eso mismo, esta fuerza se traslada al árbol y es necesario modelarla. Esta fuerza es establecida como carga distribuida en el modelo de elementos finitos. Se elaboró la Figura 75 para mostrar el modelo de aplicación de esta fuerza sobre el segmento externo del árbol de transmisión.

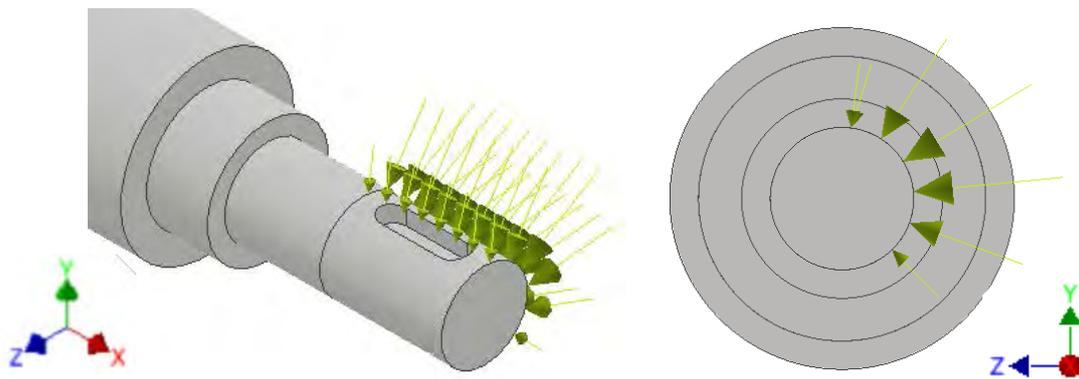


Figura 75 – Fuerzas generadas por una polea o un sprocket.

3.2.2.2. Vectores fuerzas aplicadas en función a los casos críticos

Los casos críticos en árboles de entrada, intermedios y de salida establecidos condicionan a una dirección y sentido. En el apartado 1.1.1. se muestra como las fuerzas presentes en un engranaje tienen cierta dirección y sentido en función al sentido de hélice y sentido de giro del árbol. De esta manera, se establece los vectores fuerzas producidos por los casos críticos para árboles de entrada, intermedios y de salida. Asimismo, se determina los vectores fuerzas producidos por la tensión en una faja en V o en una cadena de rodillos en los segmentos externos.

Caso de árboles de entrada

En un árbol de entrada, los vectores fuerza requeridos son establecidos para un piñón B, es decir que se encuentra en la zona B. Se elaboró la Tabla 20, en la cual se cuenta con los vectores fuerza para un árbol de entrada.

Tabla 20

Vectores fuerzas para árboles de entrada.

| Tipo de fuerza | | Vector fuerza Piñón B |
|-------------------------------|------------------|---|
| Fuerza radial | | $\vec{F}_r = +F_r \hat{j}$ |
| Fuerza axial | | $\vec{F}_a = -F_a \hat{i}$ |
| Fuerza para el momento axial | primera cara | $\overrightarrow{FM}_{a1} = +FM_a \hat{j}$ |
| | segunda cara | $\overrightarrow{FM}_{a2} = -FM_a \hat{j}$ |
| Fuerza tangencial | recto | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| | hélice derecha | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| | hélice izquierda | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| Fuerza para el momento torsor | recto | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice derecha | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice izquierda | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |

En este caso, se genera un vector fuerza tangencial en el canal chavetero del segmento externo producto del momento torsor presente en el árbol. Esta fuerza sigue el modelo establecido para la fuerza generada por momento torsor \overrightarrow{FM}_t . Ahora bien, mediante la ecuación 85, se puede calcular el vector fuerza tangencial del segmento externo ($\overrightarrow{FM}_{t.ACO}$). El signo negativo en esta ecuación implica que el sentido de este vector siempre es opuesto al de la fuerza tangencial del engranaje (F_t). Para resolver esta ecuación, se requiere la distancia de la fuerza sobre el canal chavetero ($p_{m.ACO}$), la cual se puede calcular mediante la ecuación 78.

$$\overrightarrow{FM}_{t.ACO} = -\frac{d_{pr}}{2 \cdot N_{fu.ACO} \cdot p_{m.ACO}} \cdot F_t \cdot \frac{\overrightarrow{FM}_t}{\|\overrightarrow{FM}_t\|} \quad (85)$$

d_{pr} = Diámetro primitivo del engranaje (mm)

$N_{fu.ACO}$ = Número de fuerzas = Número de chavetas del segmento exterior

Caso de árboles intermedios

En un árbol intermedio, los vectores fuerza se dan para dos casos críticos: piñón A y rueda B, y rueda A y piñón B. Se elaboró la Tabla 21 y la Tabla 22, para mostrar los vectores fuerza en ambos casos respectivamente.

Tabla 21

Vectores fuerzas para árboles intermedios piñón-rueda.

| Tipo de fuerza | | Vector fuerza Piñón A | Vector fuerza Rueda B |
|-------------------------------|------------------|---|---|
| Fuerza radial | | $\vec{F}_r = +F_r \hat{j}$ | $\vec{F}_r = -F_r \hat{j}$ |
| Fuerza axial | | $\vec{F}_a = +F_a \hat{i}$ | $\vec{F}_a = -F_a \hat{i}$ |
| Fuerza para el momento axial | primera cara | $\overrightarrow{FM}_{a1} = -FM_a \hat{j}$ | $\overrightarrow{FM}_{a1} = -FM_a \hat{j}$ |
| | segunda cara | $\overrightarrow{FM}_{a2} = +FM_a \hat{j}$ | $\overrightarrow{FM}_{a2} = +FM_a \hat{j}$ |
| Fuerza tangencial | recto | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| | hélice derecha | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| | hélice izquierda | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| Fuerza para el momento torsor | recto | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |
| | hélice derecha | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice izquierda | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |

Tabla 22

Vectores fuerzas para árboles intermedios rueda-piñón.

| Tipo de fuerza | | Vector fuerza Rueda A | Vector fuerza Piñón B |
|-------------------------------|------------------|---|---|
| Fuerza radial | | $\vec{F}_r = -F_r \hat{j}$ | $\vec{F}_r = +F_r \hat{j}$ |
| Fuerza axial | | $\vec{F}_a = +F_a \hat{i}$ | $\vec{F}_a = -F_a \hat{i}$ |
| Fuerza para el momento axial | primera cara | $\overrightarrow{FM}_{a1} = +FM_a \hat{j}$ | $\overrightarrow{FM}_{a1} = +FM_a \hat{j}$ |
| | segunda cara | $\overrightarrow{FM}_{a2} = -FM_a \hat{j}$ | $\overrightarrow{FM}_{a2} = -FM_a \hat{j}$ |
| Fuerza tangencial | recto | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| | hélice derecha | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| | hélice izquierda | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| Fuerza para el momento torsor | recto | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice derecha | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice izquierda | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |

Caso árboles de salida

En árboles de salida, los vectores fuerza son establecidos para dos casos: uno para cajas reductoras de dos etapas, y otra para cajas reductoras de una y tres etapas. Se elaboró la Tabla

23 y la Tabla 24, para mostrar los vectores fuerza en ambos casos críticos. Además, en estos árboles, hay segmentos externos con unión por chaveta, para los cuales es necesario calcular el vector fuerza tangencial que se aplica sobre la superficie lateral de los canales chaveteros. Al igual que para los árboles de entrada, esto se determina mediante la ecuación 85.

Tabla 23

Vectores fuerzas para árboles de salida en cajas reductoras de dos etapas.

| Tipo de fuerza | | Vector fuerza Rueda B |
|-------------------------------|------------------|---|
| Fuerza radial | | $\vec{F}_r = -F_r \hat{j}$ |
| Fuerza axial | | $\vec{F}_a = +F_a \hat{i}$ |
| Fuerza para el momento axial | primera cara | $\overrightarrow{FM}_{a1} = +FM_a \hat{j}$ |
| | segunda cara | $\overrightarrow{FM}_{a2} = -FM_a \hat{j}$ |
| Fuerza tangencial | recto | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| | hélice derecha | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| | hélice izquierda | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| Fuerza para el momento torsor | recto | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |
| | hélice derecha | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |
| | hélice izquierda | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |

Tabla 24

Vectores fuerzas para árboles salida en cajas reductoras de una y tres etapas.

| Tipo de fuerza | | Vector fuerza Rueda A |
|-------------------------------|------------------|---|
| Fuerza radial | | $\vec{F}_r = -F_r \hat{j}$ |
| Fuerza axial | | $\vec{F}_a = -F_a \hat{i}$ |
| Fuerza para el momento axial | primera cara | $\overrightarrow{FM}_{a1} = -FM_a \hat{j}$ |
| | segunda cara | $\overrightarrow{FM}_{a2} = +FM_a \hat{j}$ |
| Fuerza tangencial | recto | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| | hélice derecha | $\vec{F}_t = +F_t \hat{k}$ |
| | hélice izquierda | $\vec{F}_t = -F_t \hat{k}$ |
| Fuerza para el momento torsor | recto | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice derecha | $\overrightarrow{FM}_t = +FM_t \hat{k} \text{ (ant)}$ |
| | hélice izquierda | $\overrightarrow{FM}_t = -FM_t \hat{k} \text{ (hor)}$ |

Caso de polea o sprocket

En caso de que un árbol de entrada o de salida cuente con una transmisión por poleas por faja en V o cadena de rodillos respectivamente, los vectores fuerza de la reacción de la polea sobre el árbol depende de la ubicación de la polea o sprocket respecto al árbol. Se elaboró la Tabla 25 para mostrar los vectores fuerza dependiendo de su tipo de transmisión.

Tabla 25

Vectores fuerzas para transmisión por polea o sprocket.

| Tipo de transmisión | Posición de la segunda polea o sprocket (respecto al árbol) | Vector fuerza |
|---------------------|---|---|
| Faja en V | Hacia la izquierda | $\vec{F}_{ps} = -Rp_y\hat{j} + Rp_z\hat{k}$ |
| | Hacia la derecha | $\vec{F}_{ps} = +Rp_y\hat{j} + Rp_z\hat{k}$ |
| Cadena de rodillos | Hacia la izquierda | $\vec{F}_{ps} = +Rp_y\hat{j} - Rp_z\hat{k}$ |
| | Hacia la derecha | $\vec{F}_{ps} = +Rp_y\hat{j} + Rp_z\hat{k}$ |

3.2.3. Condiciones de contorno

Las restricciones de movimiento del árbol se generan en los segmentos de apoyo y en el resalte intermedio. Al respecto, se analizan estas restricciones en los árboles tipificados.

Soporte radial

El soporte radial implica una restricción radial del árbol en los segmentos de apoyo, en específico, en la superficie de contacto de los rodamientos con el árbol. En la Figura 76, se presenta el modelo de aplicación de esta restricción.

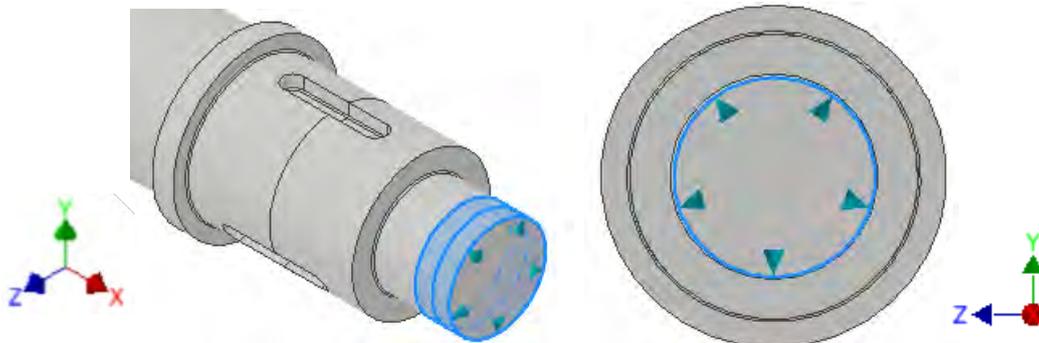


Figura 76 – Restricción radial en la superficie de contacto radial de un rodamiento.

Soporte axial

El soporte axial implica la restricción del desplazamiento axial del árbol. Se presentan dos casos para la configuración establecida en los árboles tipificados. El primer caso se da cuando el resalte que apoya un rodamiento se encarga de restringir el movimiento axial. Se elaboró la Figura 77 para mostrar el modelo de aplicación de este caso.

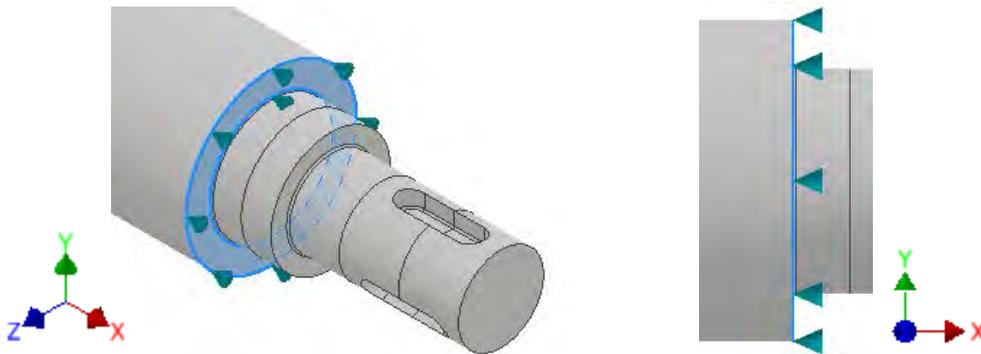


Figura 77 – Restricción axial en el resalte de apoyo de un rodamiento.

El segundo caso se presenta cuando el resalte intermedio (que soporta el engranaje) se encarga, a su vez, de restringir axialmente al árbol. Esto se da, debido a que, cuando se trabaja con anillos separadores, los rodamientos no se apoyan sobre el árbol, sino que permiten que la fuerza axial se transmita a través de ellos. Se elaboró la Figura 78 para mostrar el modelo de aplicación de este segundo caso.

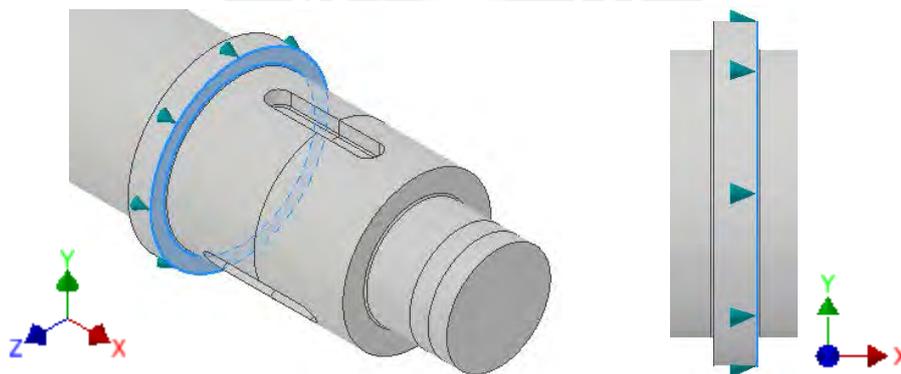


Figura 78 – Restricción axial en el resalte intermedio.

3.3. Análisis de resultados preliminares del modelo planteado

El análisis preliminar tiene como objetivo el garantizar el óptimo funcionamiento del modelo de elementos finitos. Esto se consigue realizando un proceso de retroalimentación de los resultados obtenidos de los modelos que se fueron elaborando en el desarrollo de la presente tesis. Naturalmente, en este apartado solo se presenta un breve análisis del modelo final u óptimo para simplificar el contenido de este documento.

Por ejemplo, en un árbol de entrada o de salida, se tiene una unión para transmitir potencia por una chaveta y una polea al extremo del árbol unida por chavetas. Se aprecia en la Figura 79 los resultados obtenidos siguiendo el modelo FEM aplicado al árbol en particular. Al respecto, se puede apreciar que los sectores con mayor esfuerzo son los que se tiene contacto con las chavetas. En efecto, este resultado concuerda con la teoría de árboles de transmisión que establece esos puntos del árbol con la mayor carga y que deben ser analizados con un factor de seguridad recomendado.

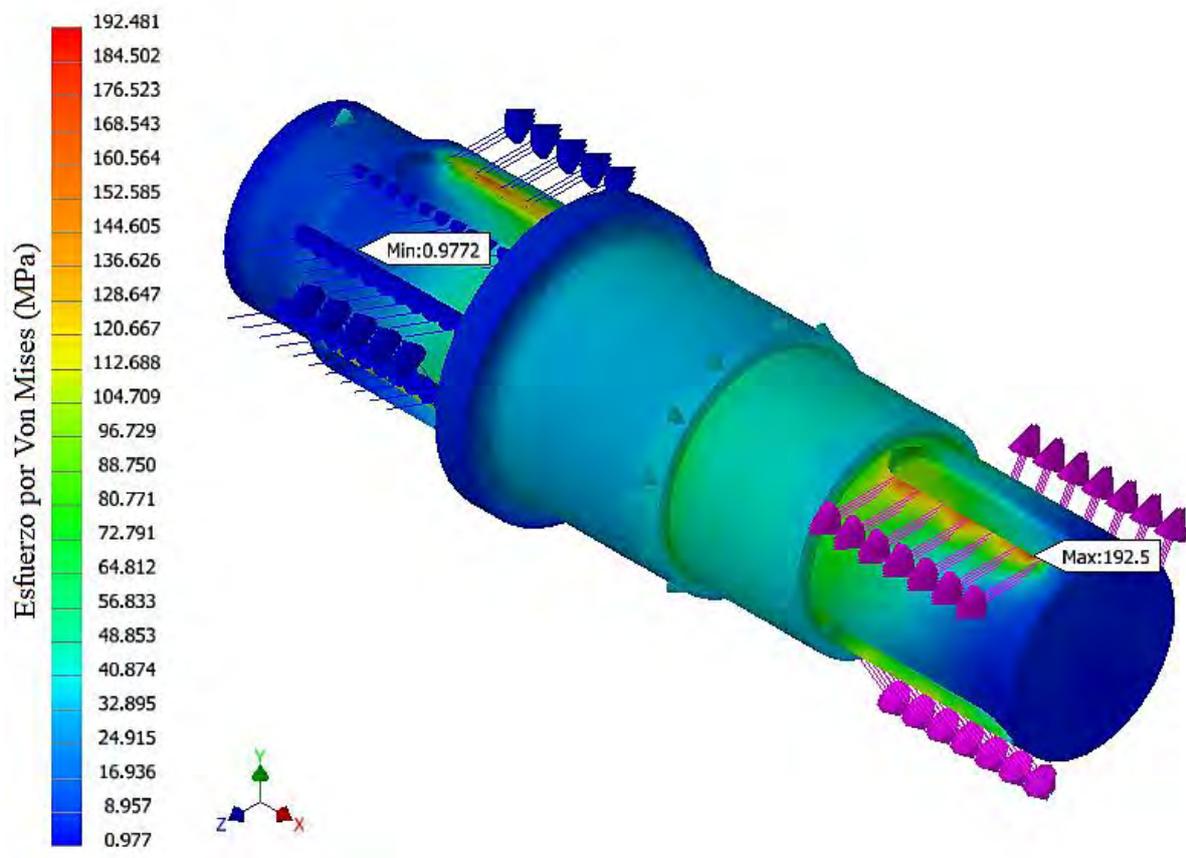


Figura 79 – Resultados FEM de un modelo de árbol de entrada o de salida.

Sin embargo, no todos los árboles de entrada presentan ese comportamiento. Se plantea el caso de un árbol de entrada para una caja reductora de una etapa con piñón solidario en vez de una unión por chaveta. Se aprecia en la Figura 80 los resultados siguiendo el modelo FEM establecido. En este caso, se puede observar que el esfuerzo máximo se aleja de la zona transmisión del engranaje y, ahora, se presenta en el canal chavetero del segmento externo y en los sectores de apoyo de los rodamientos. Por ello, en caso de árboles con piñón solidario, el área simplificada de análisis del piñón solidario no contiene la mayor carga.

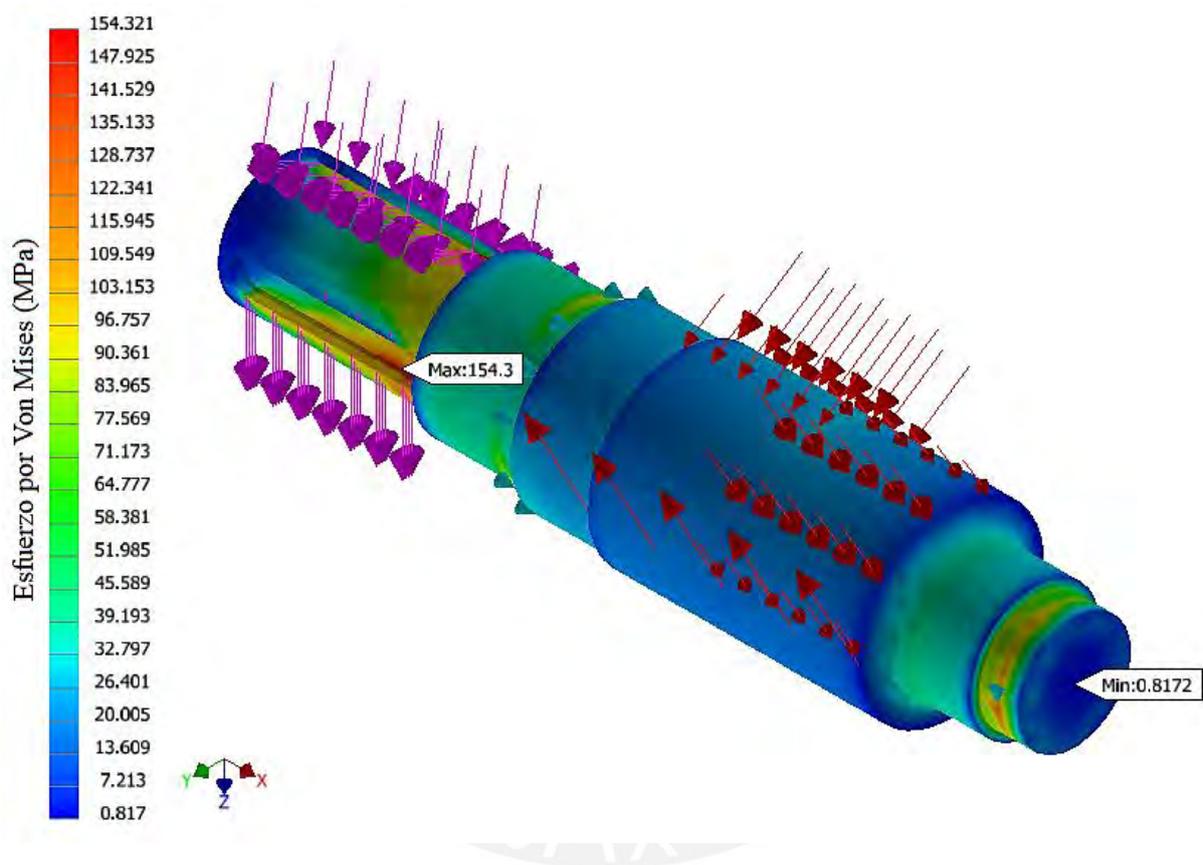


Figura 80 – Resultados FEM de un modelo de árbol de entrada con piñón solidario.

Por su parte, en caso de un árbol intermedio, se plantea un árbol con uniones por chaveta en ambas zonas. Se puede apreciar en la Figura 81 los resultados del modelo FEM aplicado a este tipo de árbol. Esta vez, se puede visualizar, como en el primer caso, que la mayor carga se presenta en las uniones por chaveta, precisamente en los puntos de contacto de la fuerza. Asimismo, es importante indicar que la zona de contacto axial, que es el resalte intermedio, también se encuentra ligeramente cargado, de modo que se hace evidente la necesidad de verificarlo mecánicamente.

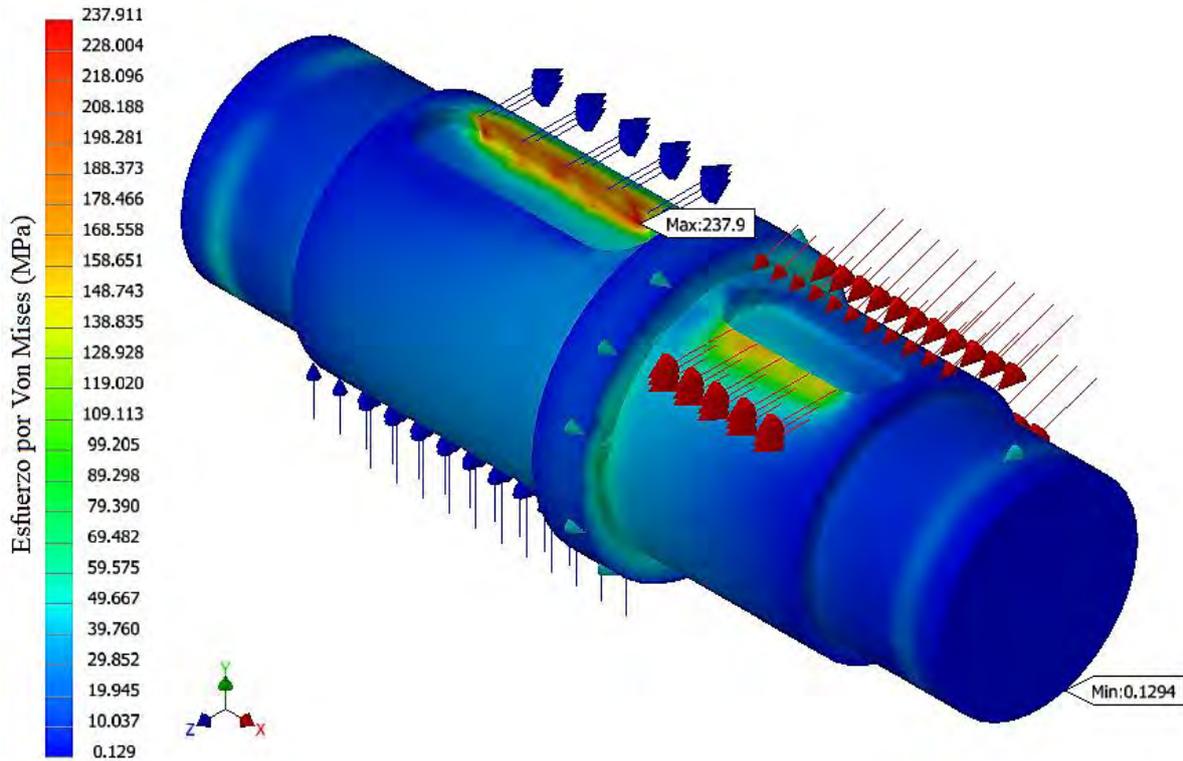


Figura 81 – Resultados FEM de un modelo de árbol intermedio.

En base a los resultados obtenidos al utilizar el modelo FEM establecido en los puntos anteriores de este capítulo, se garantiza el correcto funcionamiento del modelo; asimismo, se pudo identificar los sectores más cargados en distintos árboles a fin de considerarlos para su análisis por resistencia mecánica en función a un factor de seguridad específico.

3.4. Secciones transversales de análisis

Se debe realizar un análisis de esfuerzos y rigidez en distintos puntos de análisis a lo largo de los árboles de transmisión. Al haber desarrollado el modelo FEM sobre modelos tridimensionales, es natural que estos puntos de análisis se examinen como planos o secciones transversales a los árboles de transmisión. En efecto, esto implica el análisis de los valores de tensiones y deformaciones obtenidos en dichas secciones.

Por un lado, es necesario establecer secciones de análisis en los segmentos donde un engranaje, rodamiento, acoplamiento, polea o sprocket es montado. Estos tipos de secciones son denominados generales, pues son analizadas en todos los árboles tipificados. Por otro lado, con el fin de minimizar lo más posible las secciones de análisis, se procesan los árboles tipificados mediante el modelo FEM con el fin de identificar las secciones con mayor carga en

cada árbol tipificado. Estas secciones son denominadas secciones transversales específicas, pues son secciones adicionales a las generales que dependen de cada árbol tipificado.

3.4.1. Secciones transversales generales

Las secciones transversales generales sirven para analizar la implicancia de los elementos de máquina que se montan sobre el árbol. En particular, estas secciones están en medio de los segmentos en los que se montan un engranaje, rodamiento, acoplamiento, polea o sprockets. Por ejemplo, en la Figura 82, se puede apreciar una sección transversal en el medio de un segmento principal donde se monta un engranaje. Es importante indicar que existen cuatro secciones transversales en todos los árboles de transmisión tipificados.

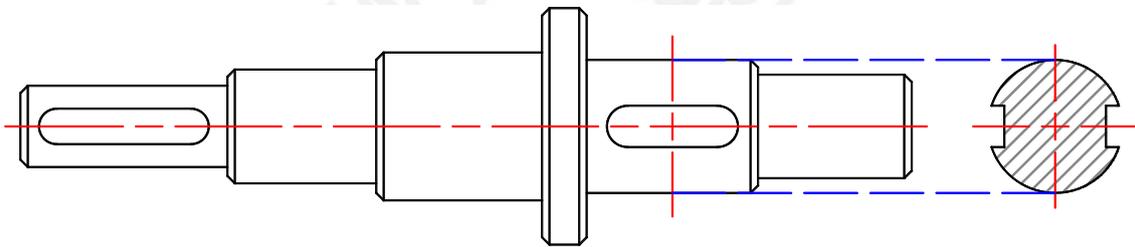


Figura 82 – Ejemplo de una sección transversal en el segmento principal B de un árbol de entrada.

A fin de poder identificar estas secciones, se presentan ecuaciones para calcular la posición axial de estas secciones respecto al borde izquierdo de los árboles. Estas ecuaciones se encuentran en el Anexo B, en función a los modelos de árboles establecidos en la parametrización dimensional en el apartado 2.5.3.1, así como las dimensiones de elementos como rodamientos, anillos separadores o engranajes.

3.4.2. Secciones transversales específicas

Las secciones trasversales específicas son analizadas con el fin de asegurar una verificación completa y adecuada de los árboles de transmisión, ya que se establecen mediante el postprocesamiento FEM al conseguir identificar aquellas secciones que presenten el mayor esfuerzo en cada uno de los árboles tipificados. Al igual que las secciones generales, se presentan ecuaciones para cálculo de la posición axial de estas secciones respecto al borde izquierdo de los árboles. Estas ecuaciones se pueden encontrar en el Anexo B, en función a las dimensiones longitudinales del árbol y de los elementos montados, como rodamientos, anillos separadores o engranajes.

Capítulo 4

Algoritmo para la automatización y optimización del diseño

En el presente capítulo se desarrolla el algoritmo general para el procedimiento de diseño y se plantea su diagrama de flujo. En ese sentido, se elaboran las rutinas y diagramas de flujo de los procesos que componen el algoritmo general, siguiendo lo establecido para los árboles tipificados, la parametrización dimensional, el modelado FEM y los cálculos de verificación mecánica. Asimismo, se desarrolla la interfaz de trabajo del algoritmo, incluyendo las ventanas de entrada y salida de datos que interactúan con el programa.

4.1. Planteamiento del algoritmo general

Es importante destacar que, dado que los elementos finitos son usados en el proceso de cálculo de tensiones y deformaciones, es imprescindible que el algoritmo dimensione el árbol de transmisión antes de realizar el cálculo de tensiones y deformaciones. Esto hace evidente que, para poder alcanzar un dimensionamiento adecuado que cumpla con un factor de seguridad definido por el usuario, es necesario iterar el diseño de los árboles de transmisión.

Procedimiento de diseño de los árboles de transmisión

“El procedimiento de diseño de árboles inicia con la selección del material, luego el diseño de la geometría y finalmente la verificación mecánica de cargas, esfuerzos y rigidez” (Budynas & Nisbett, 2011, p. 360). Desde luego, esta secuencia va acorde a la naturaleza iterativa del algoritmo planteado. De modo que el diseño automatizado empieza al seleccionar un árbol tipificado, luego dimensionar el árbol, modelarlo por elementos finitos para poder obtener los valores de tensiones y deformaciones, y, por último, verificar la resistencia a fin de determinar si es necesario redimensionar el mismo.

Es necesario extender estos pasos generales en funciones más específicas. Por ello, en la Figura 83, se muestra el diagrama de flujo general del algoritmo de automatización y

optimización del diseño de árboles. Desde luego, es indispensable identificar que, para seleccionar un árbol tipificado, es necesario establecer los diámetros del árbol y poder calcular el tipo de unión para transmitir potencia más adecuado, así como calcular el acoplamiento flexible, polea o sprocket definido por el usuario en caso de árboles de entrada o salida. Posteriormente, se establecen las dimensiones faltantes del árbol de transmisión siguiendo la parametrización dimensional establecida y, con ello, se modela el árbol por elementos finitos. Por último, se lleva a cabo la verificación mecánica, la cual implica realizar los cálculos de resistencia y rigidez en función a los valores de tensiones y deformaciones calculados.

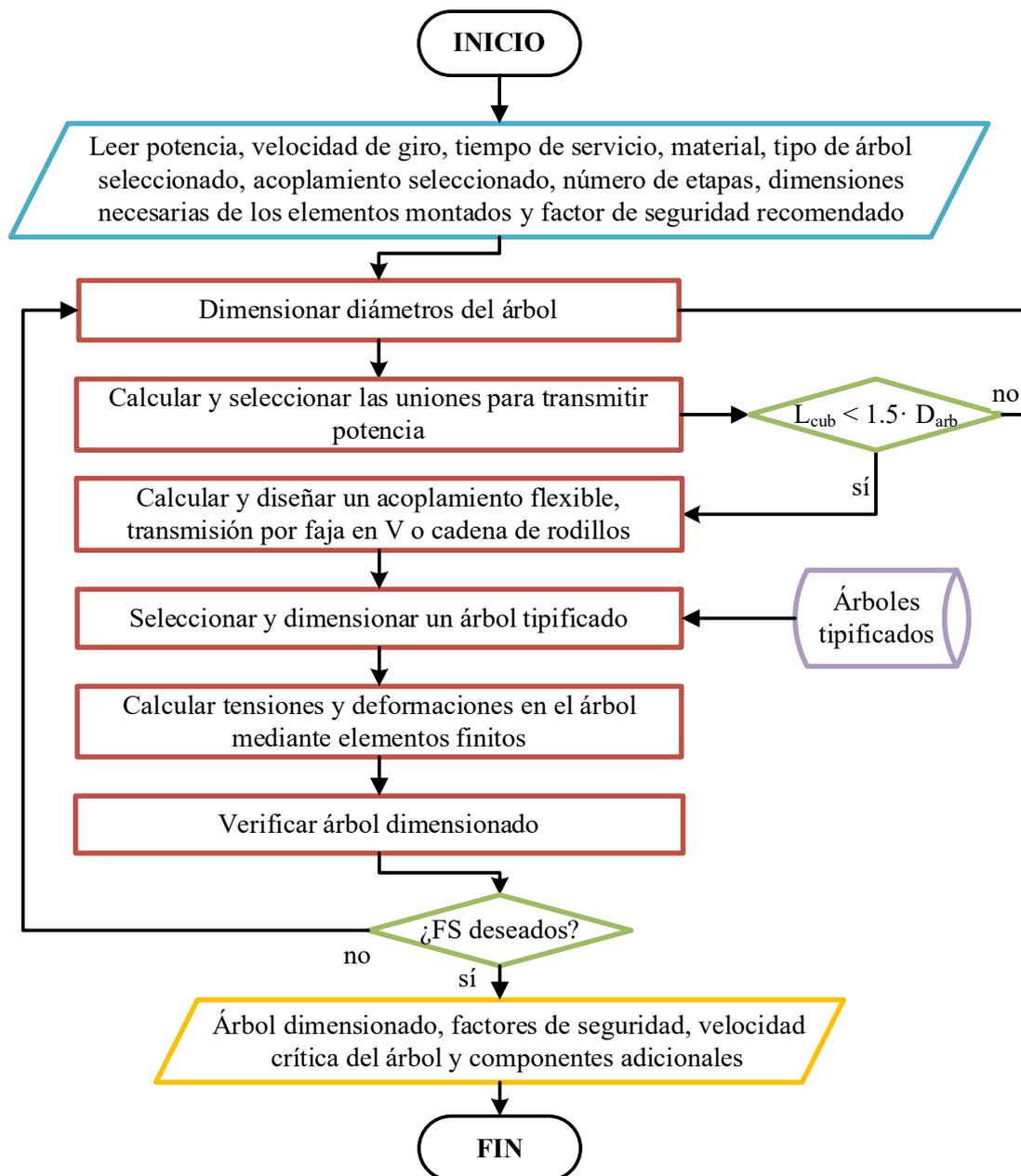


Figura 83 – Diagrama de flujo general para la automatización y optimización del diseño de árboles.

En el diagrama de flujo general se puede identificar datos de entrada y de salida. Por un lado, los datos de entrada más elementales son la potencia y velocidad de giro del árbol de entrada; sin perjuicio de ello, es necesario como dato de entrada el tiempo de servicio (ciclo de trabajo), el material de los árboles, la temperatura de trabajo, el tipo de árbol (entrada, intermedio o salida), el tipo de acoplamiento (acoplamiento flexible, polea o sprocket), el número de etapas de la caja reductora, las dimensiones necesarias de los elementos montados (como el ancho de los engranajes o el ancho de los rodamientos) y el factor de seguridad recomendado por el usuario.

Por otro lado, los datos de salida son el árbol de transmisión dimensionado, factores de seguridad, velocidad crítica y componentes adicionales (como anillos). Asimismo, el algoritmo tiene almacenado información en librerías para el uso en el proceso de diseño. En específico, están guardados modelos CAD de los árboles tipificados, dimensiones de chavetas según DIN 6885, dimensiones de uniones estriadas según DIN-ISO 14 y propiedades mecánicas de diferentes aceros al carbono, aleados e inoxidables.

4.2. Desarrollo de las rutinas del algoritmo general

Cada rutina dentro del algoritmo general de diseño debe contar con un diagrama de flujo para así poder especificar más detalladamente el procedimiento que lleva a cabo. A continuación, se presentan los diagramas de flujo de estos procesos.

4.2.1. Dimensionamiento de los diámetros del árbol

Para poder seleccionar el tipo de unión para transmitir potencia es necesario contar con el diámetro de cada segmento principal, lo que, a su vez, implica la necesidad de dimensionar los demás diámetros del árbol. Se elaboró la Figura 84 para mostrar la rutina de la determinación de los diámetros del árbol. Para poder dimensionar los diámetros del árbol, se establece el diámetro mínimo (D_{min}) del árbol. Si es la primera iteración, este diámetro se calcula como el diámetro preliminar mediante la ecuación 9. A partir de la segunda iteración, se recalcula este diámetro mínimo por medio de las ecuaciones de recálculo, siendo las ecuaciones 14 y 23 para los casos de que no se cumpliera el factor de seguridad recomendado por deformación permanente y por fatiga respectivamente; mientras que se tiene la ecuación 32 para el caso en que las deformaciones obtenidas superen valores máximos o límite. Por último, el árbol es redimensionado con este nuevo diámetro.

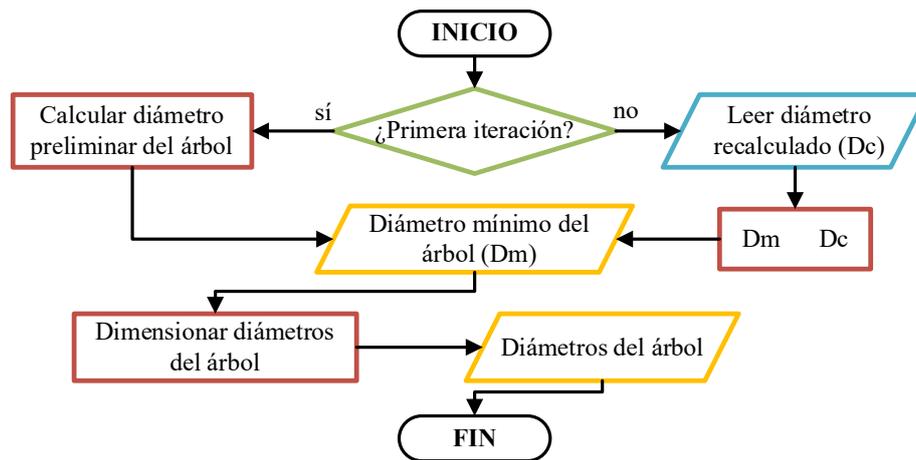


Figura 84 – Diagrama de flujo de la rutina para la determinación de los diámetros del árbol.

4.2.2. Cálculo y selección de los tipos de unión para transmitir potencia

El procedimiento de la rutina, cuyo diagrama de flujo se muestra en la Figura 85, empieza analizando la posibilidad de utilizar un piñón solidario como unión, lo cual, naturalmente, se realiza solo si el engranaje es un piñón siguiendo los procedimientos de la sección 1.3.3. En caso de no ser posible, la rutina analiza la unión por chaveta mediante los lineamientos definidos en el apartado 1.3.1. Del mismo modo, en caso que esta última unión no sea factible, se procede a analizar la unión estriada siguiendo lo establecido en el punto 1.3.2. Por último, en caso de esta última unión tampoco sea posible, la rutina recalcula el diámetro principal del árbol para devolver este valor al proceso de dimensionamiento de diámetros.

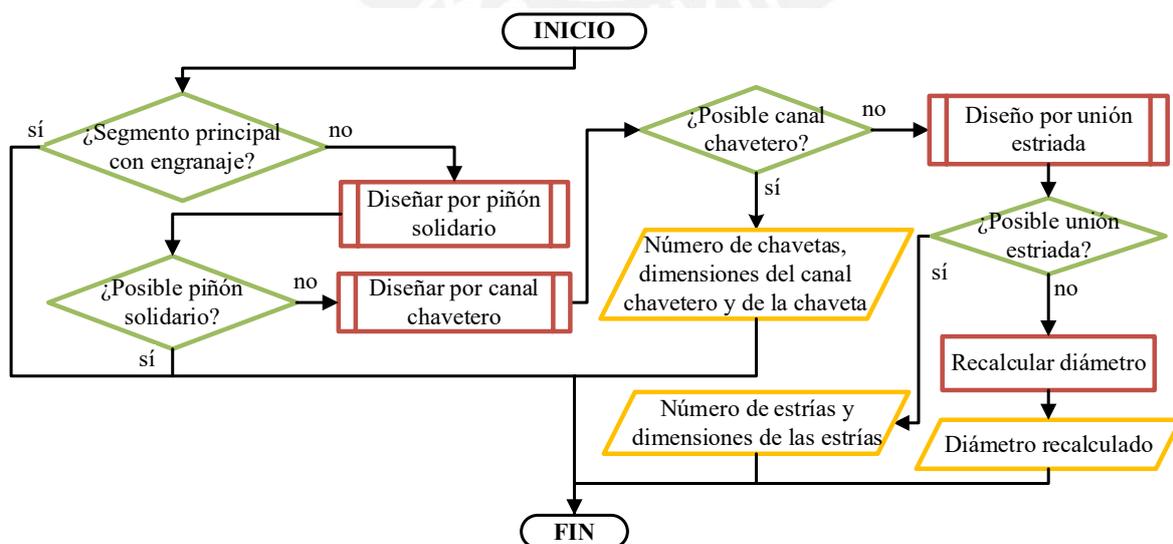


Figura 85 – Diagrama de flujo para el cálculo y selección del tipo de unión para transmitir potencia

A continuación, se desarrolla en detalle los procesos dentro de la selección del tipo de unión para transmitir potencia.

4.2.2.1. Diseño por piñón solidario

El diseño por piñón solidario se basa en analizar la posibilidad de mecanizar el piñón directamente en el árbol. Se elaboró la Figura 86 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. La rutina calcula el diámetro interno del engranaje, para con este valor se analice la factibilidad de la utilización de un piñón solidario siguiendo la inecuación 36. En caso de cumplirse la inecuación, se determina que es posible utilizar piñón solidario y se procede a calcular el diámetro primitivo y externo del engranaje. En caso de no cumplirse la inecuación, la rutina envía una orden para proseguir con el análisis de la unión por chaveta.

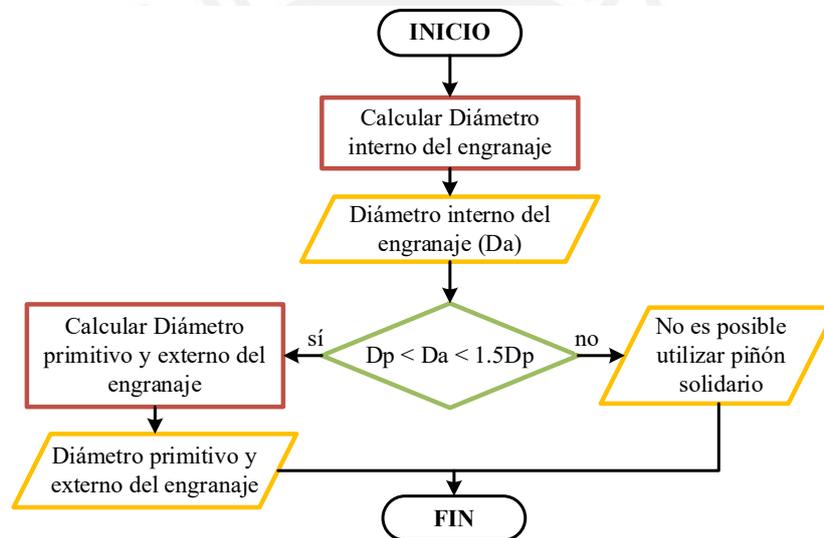


Figura 86 – Diagrama de flujo del subproceso para el diseño por piñón solidario.

4.2.2.2. Diseño de una unión por chaveta

El diseño de uniones por chaveta se basa en el dimensionamiento de este según la norma DIN 6885. Se elaboró la Figura 87 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. En primer lugar, esta rutina determina las dimensiones de la chaveta y la longitud máxima posible que puede tener el canal chavetero. En segundo lugar, se determina la presión admisible del cubo del engranaje. En tercer lugar, se sigue un proceso iterativo de cálculo de la longitud de la chaveta. Este proceso calcula la longitud efectiva del canal chavetero mediante la ecuación 33 y determina la longitud estandarizada de esta. Este proceso se repite de ser necesario con una, dos o tres chavetas hasta que se cumpla que la longitud normalizada sea menor que la longitud

máxima posible de la chaveta. Por último, en caso de que se haya conseguido esta condición hasta con un máximo de tres chavetas, se calcula la longitud principal del segmento; caso contrario, la rutina envía una orden para proseguir con el cálculo de una unión estriada.

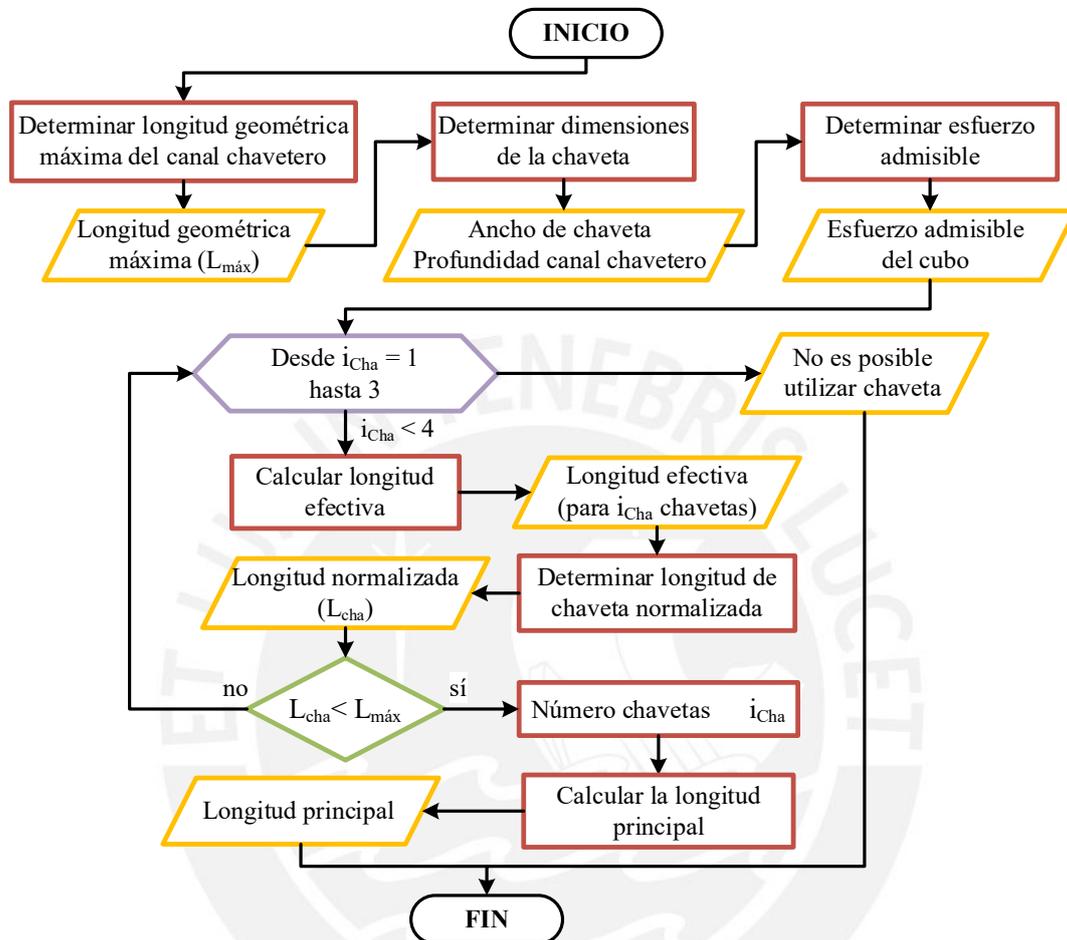


Figura 87 – Diagrama de flujo del subproceso para el diseño de una unión por chaveta.

4.2.2.3. Diseño de una unión estriada

El diseño por unión estriada se basa los lineamientos de la norma DIN-ISO 14. Se elaboró la Figura 88 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. En primer lugar, la rutina determina la longitud máxima posible de la unión estriada. En segundo lugar, se determina la presión admisible del cubo del engranaje. En tercer lugar, para serie ligera según DIN-ISO 14 se determina el número de dientes, las dimensiones de los dientes y la longitud de la unión estriada efectiva. Si la longitud efectiva no es menor que la longitud máxima posible, entonces se da hace la misma operación, pero para serie media según DIN-ISO 14. En caso sea factible para alguna de estas series, la rutina procede a calcular la longitud del segmento principal; caso contrario, la rutina envía una orden para recalculer el diámetro del árbol.

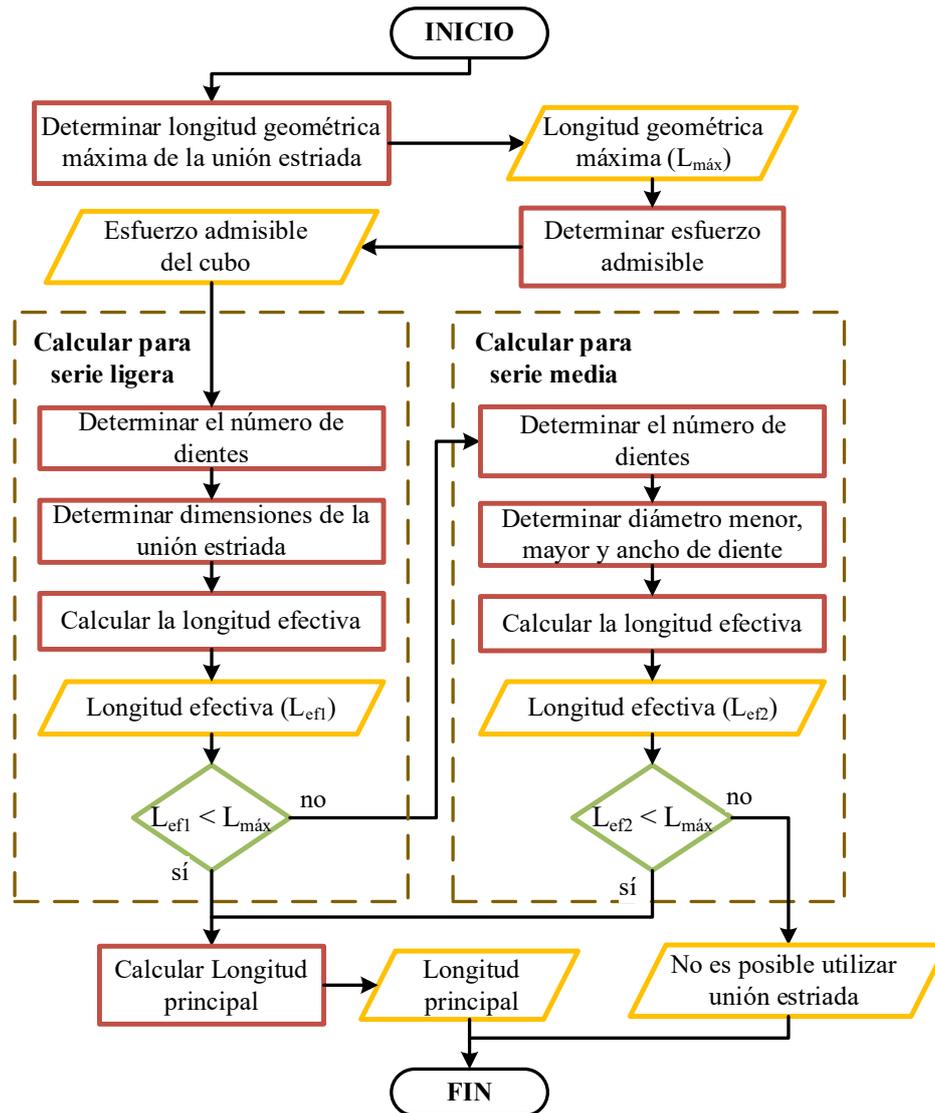


Figura 88 – Diagrama de flujo del subproceso para el diseño de una unión estriada.

4.2.3. Diseño y cálculo del acoplamiento flexible, faja en V o cadenas de rodillos

El usuario del programa define si se diseña un acoplamiento flexible, una faja en V o una cadena de rodillos. Se elaboró la Figura 89 para mostrar esta rutina. La rutina, primero, dimensiona la tapa lateral con agujero de la carcasa que se monta en el segmento externo. Segundo, la rutina diseña el canal chavetero en el que se monta el cubo del acoplamiento, polea o sprocket. Esto implica el cálculo del número de chavetas y la longitud del cubo. En caso de que la unión por chaveta no sea factible, la rutina recalcula el diámetro del segmento externo para devolver este valor al dimensionamiento de los diámetros. Tercero, solo en caso de que la unión por chaveta sea factible, continúa con el diseño. Esto implica la posibilidad de un acoplamiento flexible, el cual se realiza siguiendo los procedimientos establecidos en la sección

1.4.1. , una transmisión por faja en V en árboles de entrada siguiendo los procedimientos en la sección 1.4.2. o una transmisión por cadena de rodillos en árboles de salida siguiendo los procedimientos de la sección 1.4.3. Por último, una vez diseñado el acoplamiento, faja en V o cadena de rodillos, la rutina calcula la masa (en kg) del elemento diseñado.

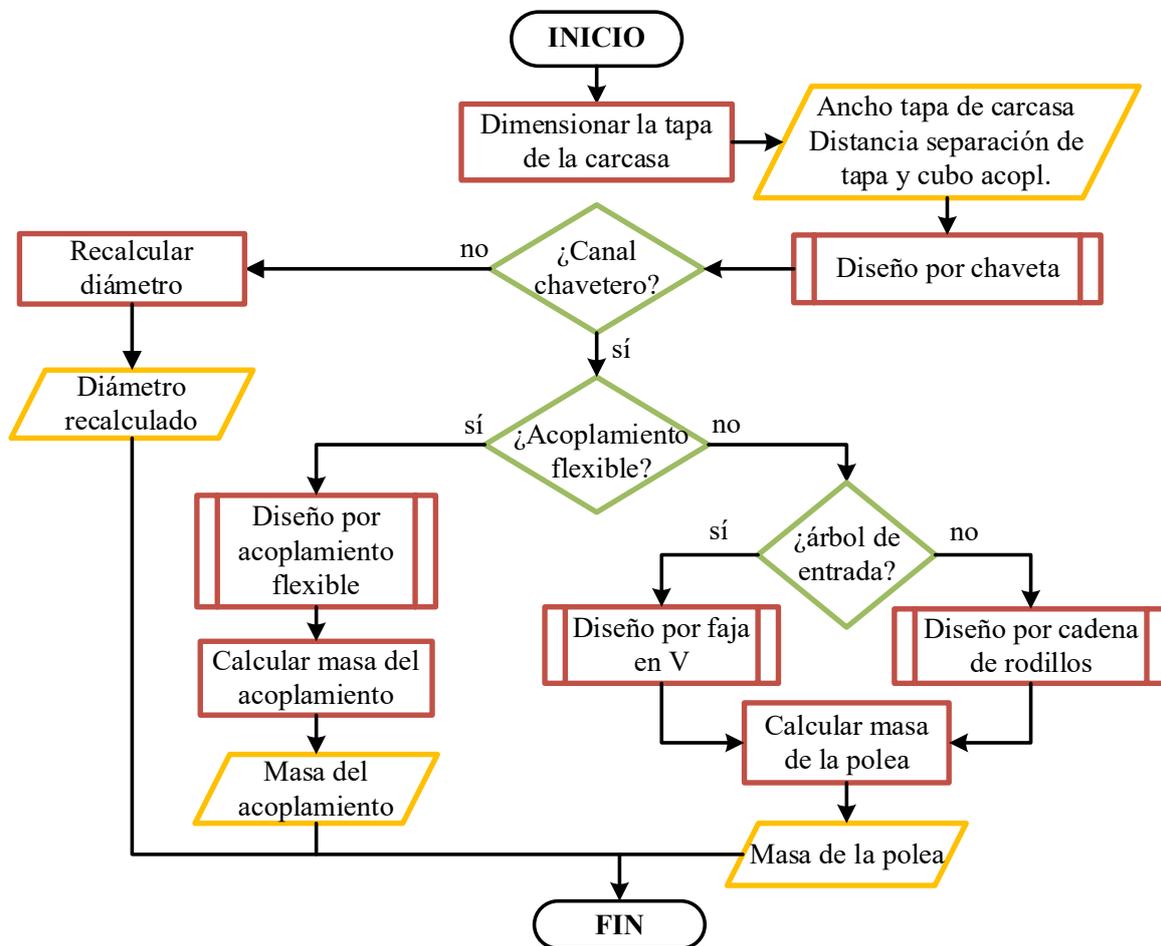


Figura 89 – Diagrama de flujo para el diseño y cálculo de acoplamiento flexible, faja en V o cadena de rodillos.

4.2.4. Selección y dimensionamiento del árbol de transmisión tipificado

La selección y el dimensionamiento del árbol es el procedimiento por cual se crea el archivo CAD del árbol diseñado. Se elaboró la Figura 90 para mostrar el diagrama de flujo de la rutina. En primer lugar, la rutina selecciona el árbol tipificado en función al número de etapas, tipo de árbol y las uniones para transmitir potencia. Luego, la rutina hace una copia del modelo CAD del árbol tipificado. En segundo lugar, la rutina calcula las posiciones axiales de los pares de engranajes y determina la longitud del resalte intermedio determinante. En tercer lugar, se dimensionan los diámetros y longitudes del árbol, las dimensiones relevantes a las uniones para transmitir potencia, y los redondeos y chaflanes presentes. En cuarto lugar, se

dimensiona los anillos separadores que fueran necesarios. En quinto lugar, la rutina transmite todas las dimensiones al archivo CAD a fin de actualizarlo. Por último, la rutina calcula la longitud del árbol y la distancia entre rodamientos, pues serán usados más adelante.

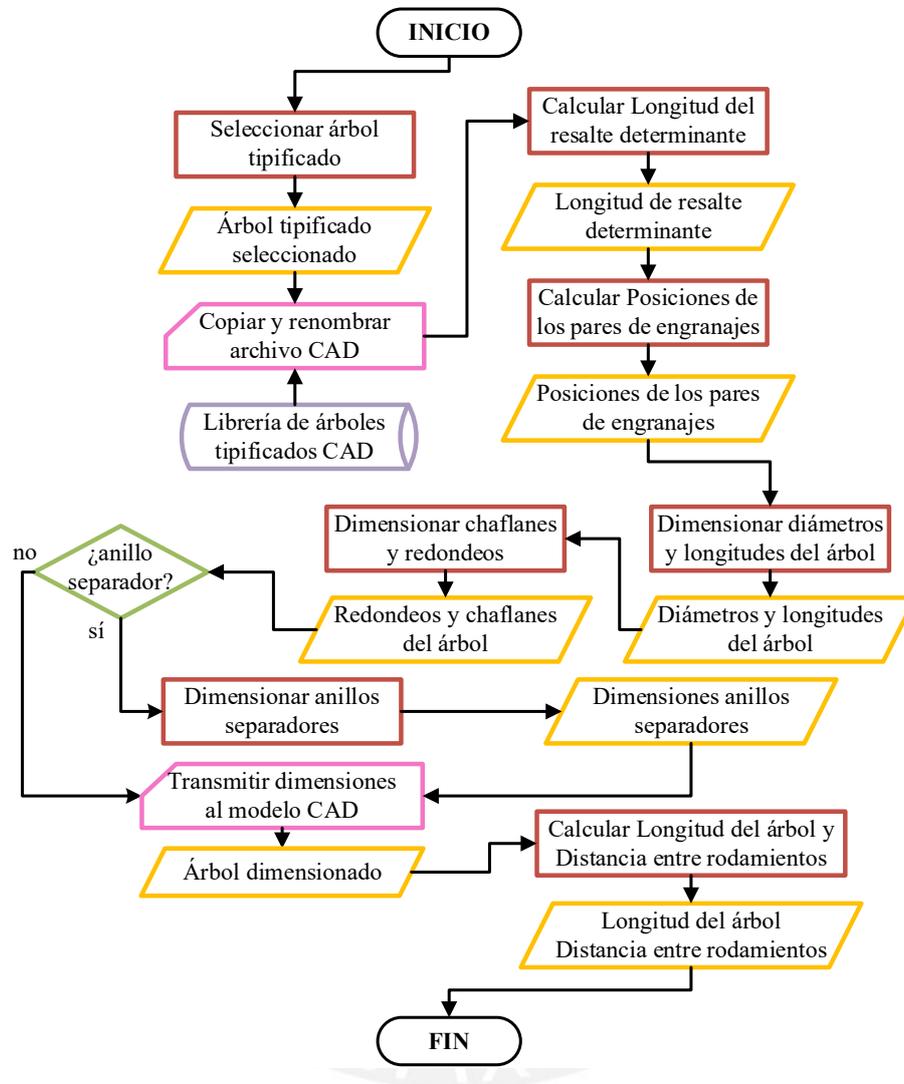


Figura 90 – Diagrama de flujo de la selección y el dimensionamiento del árbol de transmisión.

4.2.5. Cálculo de tensiones y deformaciones por elementos finitos

El cálculo de las tensiones y deformaciones por elementos finitos es el procedimiento por el cual se utiliza el modelo FEM establecido. Se elaboró la Figura 91 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. Primero, la rutina calcula la fuerza radial, tangencial y axial en los engranajes montados en el árbol siguiendo las ecuaciones 2, 3 y 4. Segundo, la rutina calcula los vectores fuerza que soporta el árbol mediante las ecuaciones según el caso crítico que corresponda, lo que se encuentra en el apartado 3.2.2.2. Tercero, en caso de ser un árbol de entrada o de salida, la rutina determina el vector fuerza sobre el segmento externo mediante

la ecuación 85. Cuarto, en caso de contar con una transmisión por faja en V o cadena de rodillos, la rutina calcula el vector fuerza de la reacción de la tensión en la faja o cadena siguiendo las ecuaciones en la Tabla 25. Quinto, la rutina calcula el tamaño de elemento para el mallado. Sexto, se procede a transmitir los datos de propiedades mecánicas del material, características del mallado, vectores fuerza sobre el árbol y vectores fuerza del segmento externo hacia el modelo FEM. Séptimo, el modelo FEM se resuelve y se obtiene un archivo que contiene los datos de tensiones y deformaciones de todos los nodos del árbol.

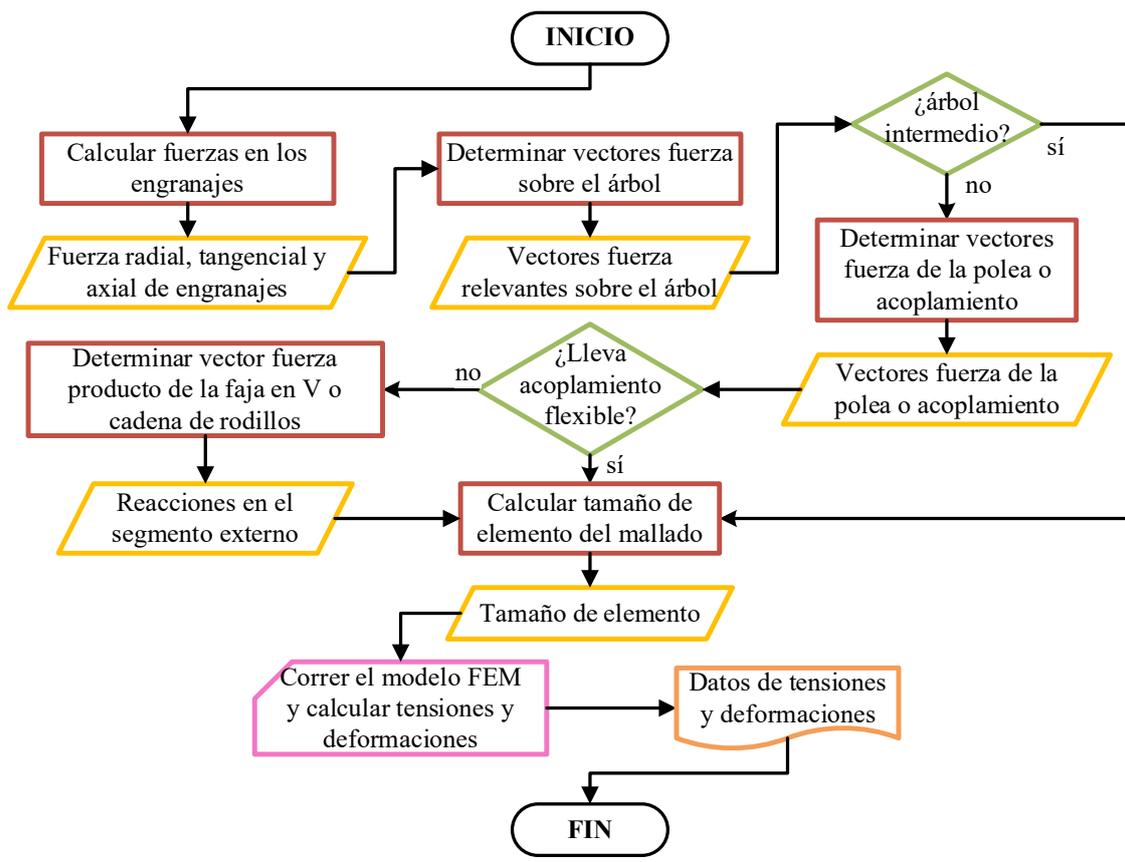


Figura 91 – Diagrama de flujo para el cálculo de tensiones y deformaciones por elementos finitos.

4.2.6. Verificación del árbol dimensionado

La verificación del árbol dimensionamiento consiste en realizar los cálculos de resistencia mecánica y rigidez. Se elaboró la Figura 92 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. En primer lugar, la rutina identifica el número de nodos del modelo y divide los datos de tensión y deformación en un archivo cada uno. En segundo lugar, la rutina verifica el esfuerzo máximo por Von Mises. En tercer lugar, si no falla el árbol, la rutina extrae de cada sección transversal de análisis, los cuales están establecidos en la sección 3.4, valores de tensión y deformación para verificar posible falla por deformación permanente y fatiga según

la norma DIN 743 y, por último, analizar los desplazamientos transversales y angulares presentes. En cuarto lugar, si ninguna sección falló, se verifica la velocidad crítica del sistema árbol-engranajes y el desplazamiento torsional del árbol. Si este último procedimiento o cualquier anterior fallase, la rutina calcula el diámetro de recálculo; caso contrario, se da por concluido el procedimiento de diseño del árbol.

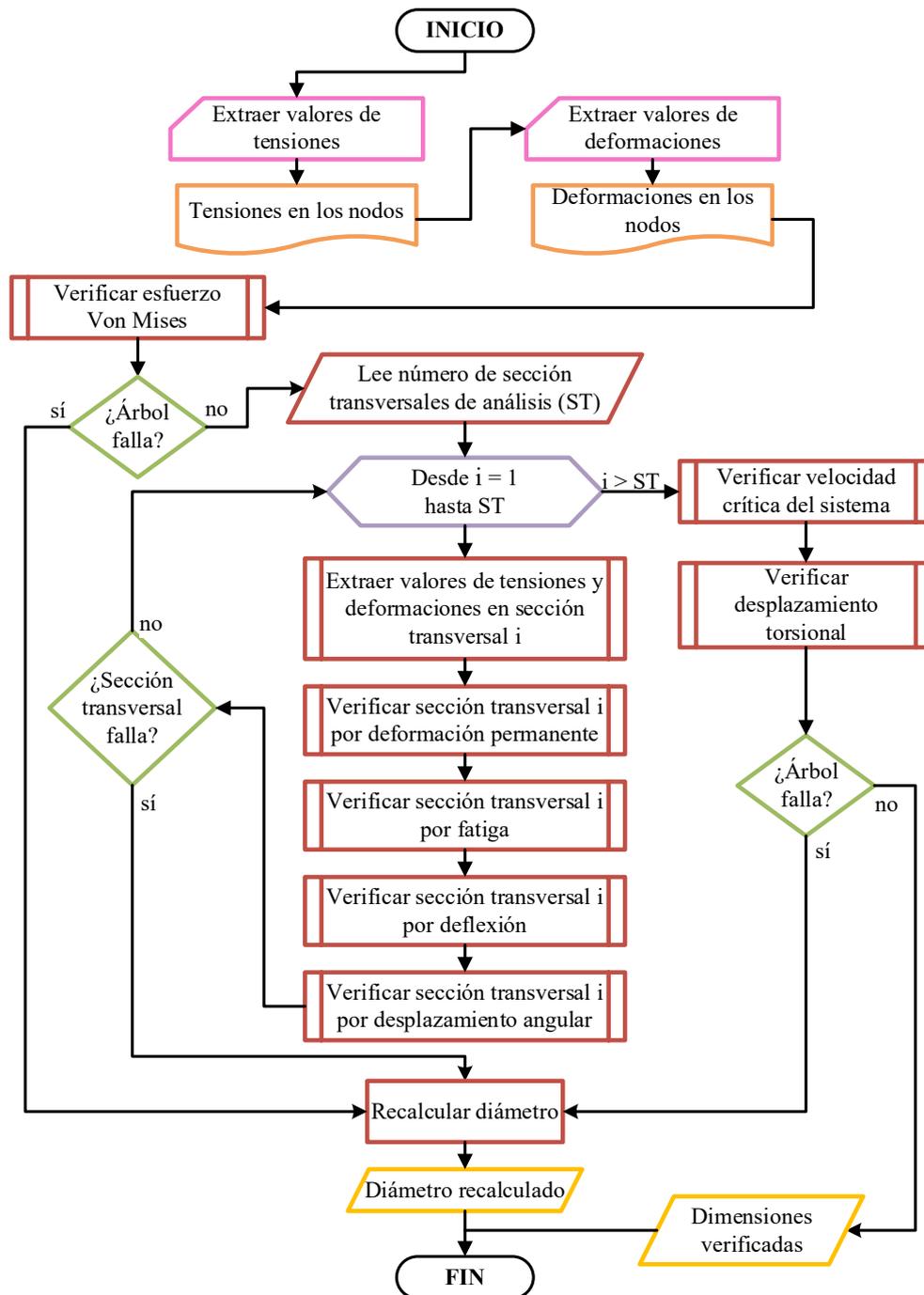


Figura 92 – Diagrama de flujo para la verificación del árbol de transmisión.

A continuación, se detalla cada una de las subrutinas de verificación.

4.2.6.1. Verificación de esfuerzo máximo por Von Mises

La verificación del esfuerzo máximo por Von Mises consiste en asegurar que este valor no exceda el límite de fluencia del material. Se elaboró la Figura 93 para mostrar el diagrama de flujo de la rutina. La rutina extrae el valor de esfuerzo máximo por Von Mises de la data correspondiente. Luego, calcula el factor de seguridad. Finalmente, si este factor de seguridad es menor al recomendado, envía de vuelta que el árbol falla.

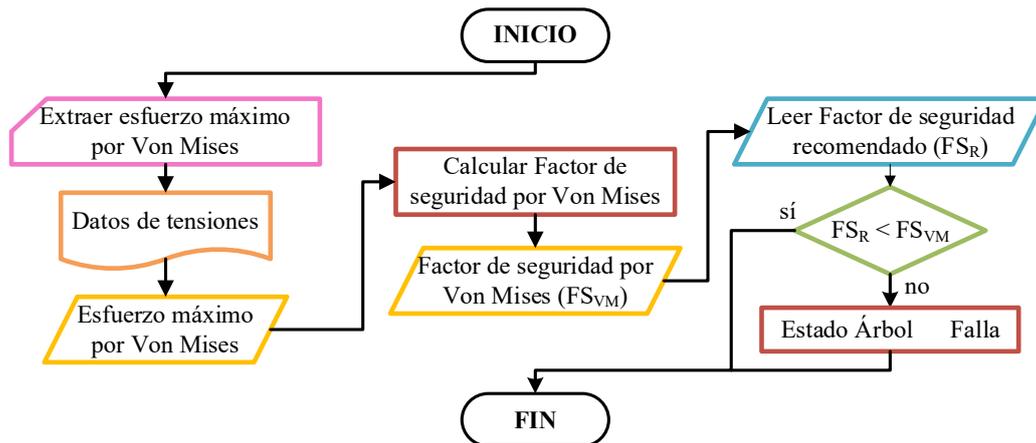


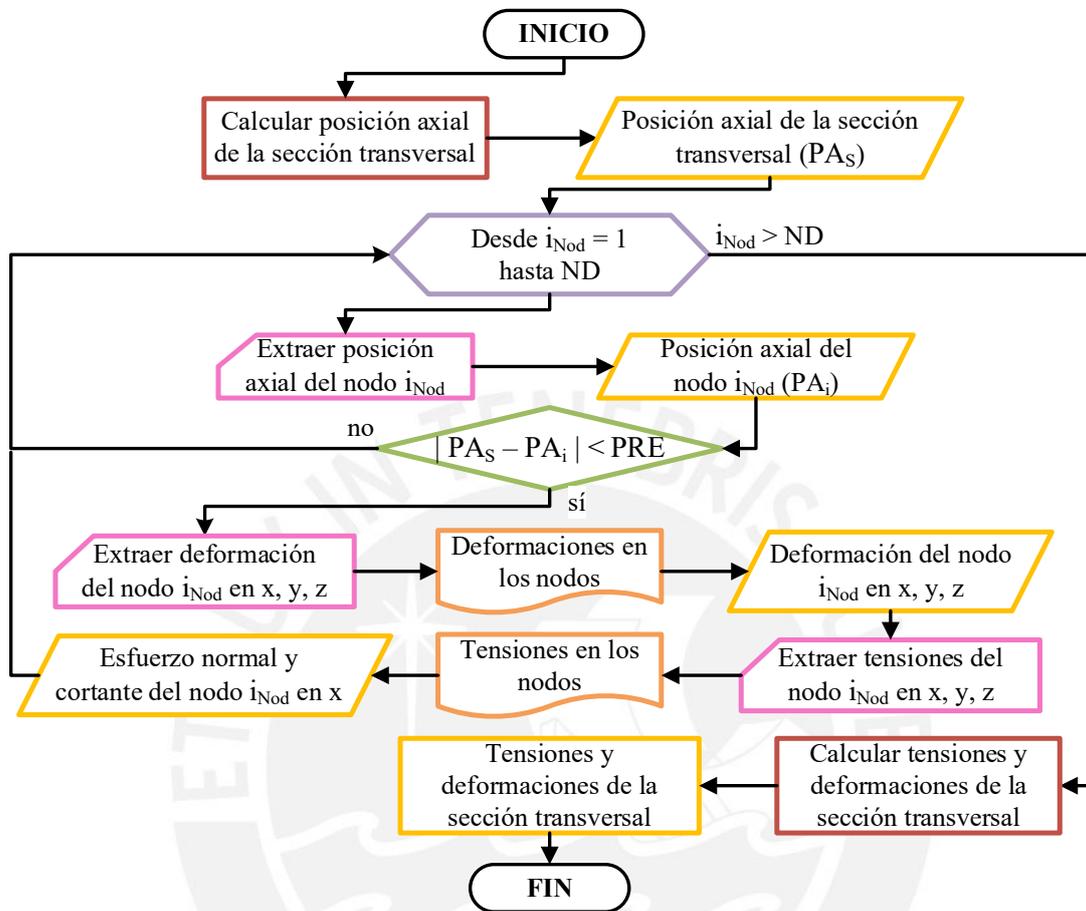
Figura 93 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación de esfuerzo máximo por Von Mises.

4.2.6.2. Extracción de valores de tensiones y deformaciones de una sección transversal de análisis

La extracción de valores de tensiones y deformaciones presentes en una sección transversal consiste en extraer estos valores de los nodos que tengan la misma posición axial que la sección. Se elaboró la Figura 94, para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. Primero, para cada nodo del modelo FEM, la rutina extrae su posición axial respecto al borde izquierdo del árbol. Luego, analiza si esta posición se encuentra lo suficientemente cerca de la posición axial de la sección transversal de análisis al compararla con un valor de precisión transversal⁵. Solo en caso de que se cumpla esta comparación, se extraen los valores de tensiones y deformaciones del nodo, los cuales se acumulan. Segundo, una vez acumulados todos los valores, se realizan diversos cálculos para determinar algunos valores buscados. Esto es, calcular el promedio de deflexión de la sección, determinar el desplazamiento axial mínimo y máximo de la sección, determinar el desplazamiento en el eje z mínimo y máximo de la

⁵ La precisión transversal de una sección se refiere a que tan ancho es el plano transversal, de modo que todos los nodos que se encuentren dentro de ese ancho (en mm) son considerados como parte de la sección transversal.

sección, calcular el esfuerzo axial mínimo y máximo de la sección, y calcular el esfuerzo cortante máximo en los planos XY y ZX de la sección.

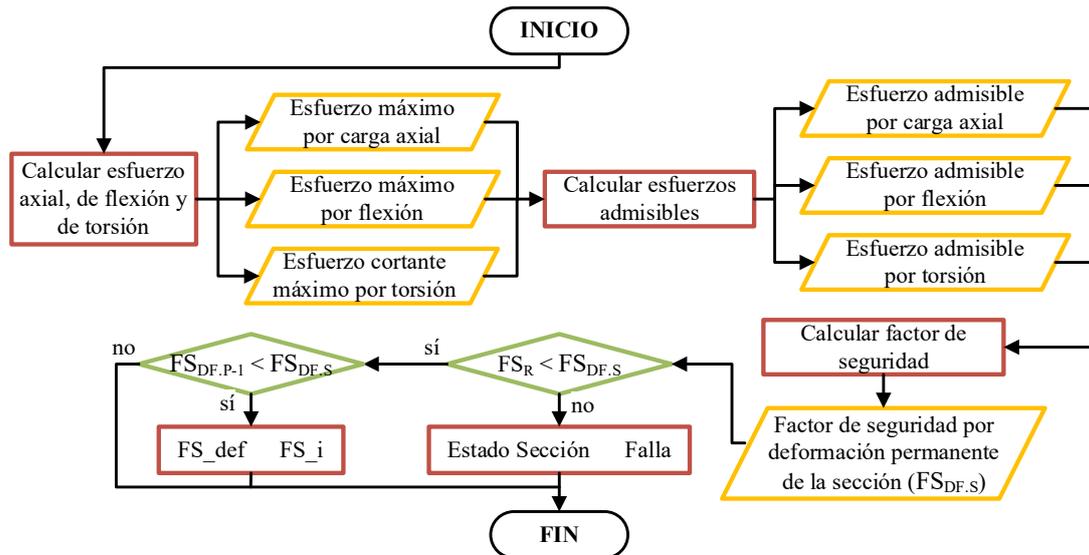


PRE = Precisión de la sección transversal (en mm)

Figura 94 – Diagrama de flujo del subproceso de extracción de esfuerzos y deformaciones en una sección transversal.

4.2.6.3. Verificación para evitar falla por deformación permanente

La verificación para evitar falla por deformación permanente consiste en analizar lo establecido en la sección 1.2.3.1. Se elaboró la Figura 95 para mostrar el diagrama de flujo de la rutina. Primero, la rutina calcula el esfuerzo máximo por carga axial y por flexión, así como el esfuerzo cortante máximo por torsión. Segundo, la rutina calcula el esfuerzo admisible por carga axial, por flexión y por torsión siguiendo los lineamientos de la norma DIN 743. Tercero, la rutina calcula el factor de seguridad por deformación permanente. En caso de que este valor no sea mayor al factor de seguridad recomendado, la rutina termina indicando que dicha sección falla. Cuarto, en caso de que se cumpla el factor de seguridad, el factor calculado, solo si es mayor que el de anteriores secciones, se acumula como el factor de seguridad del árbol.

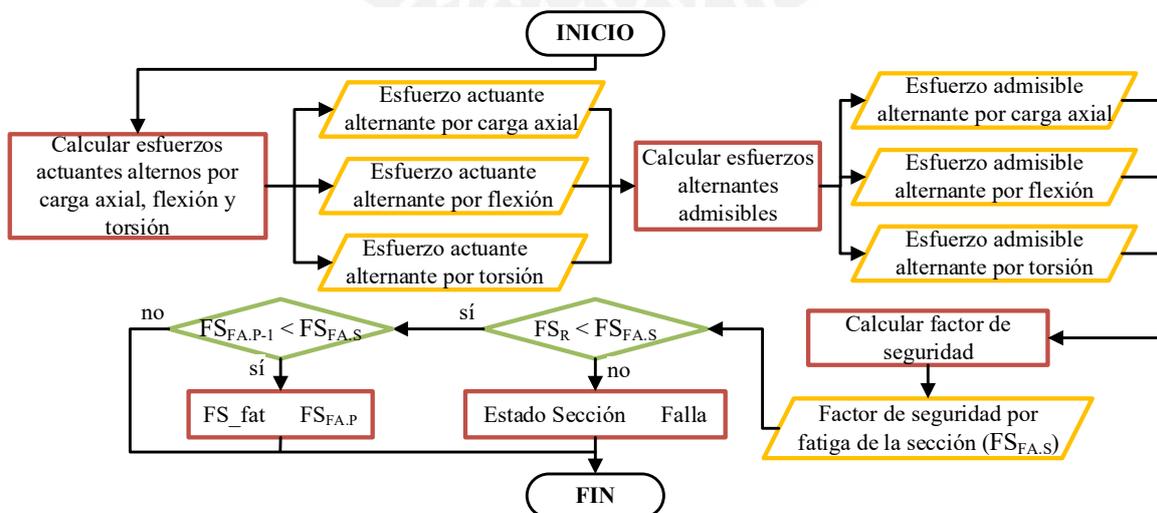


FS_R = Factor de seguridad recomendado (definido por el usuario)

Figura 95 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación por deformación permanente.

4.2.6.4. Verificación para evitar falla por fatiga

La verificación para evitar falla por fatiga se basa en los procedimientos establecidos en el punto 1.2.3.2. Se elaboró la Figura 96 para mostrar el diagrama de flujo de la rutina. Primero, la rutina calcula el esfuerzo actuante alternante por carga axial, flexión y torsión. Segundo, el esfuerzo admisible por carga axial, flexión y torsión según la norma DIN 743. Tercero, el factor de seguridad por fatiga. Si este valor no supera el recomendado, la sección falla. Cuarto, si se cumple el factor de seguridad recomendado y el valor calculado es mayor a las anteriores secciones, se acumula como el factor de seguridad por fatiga del árbol.



FS_R = Factor de seguridad recomendado (definido por el usuario)

Figura 96 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación por fatiga.

4.2.6.5. Verificación de la deflexión

La verificación de la deflexión en la que incurre una sección consiste en evitar que este valor exceda un valor admisible. Se elaboró la Figura 97 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. Primero, la rutina calcula la deflexión de la sección. Luego, se determina la deflexión admisible dependiendo en que segmento se encuentra la sección. Finalmente, si la deflexión supera el valor admisible, la rutina concluye que la sección falla.

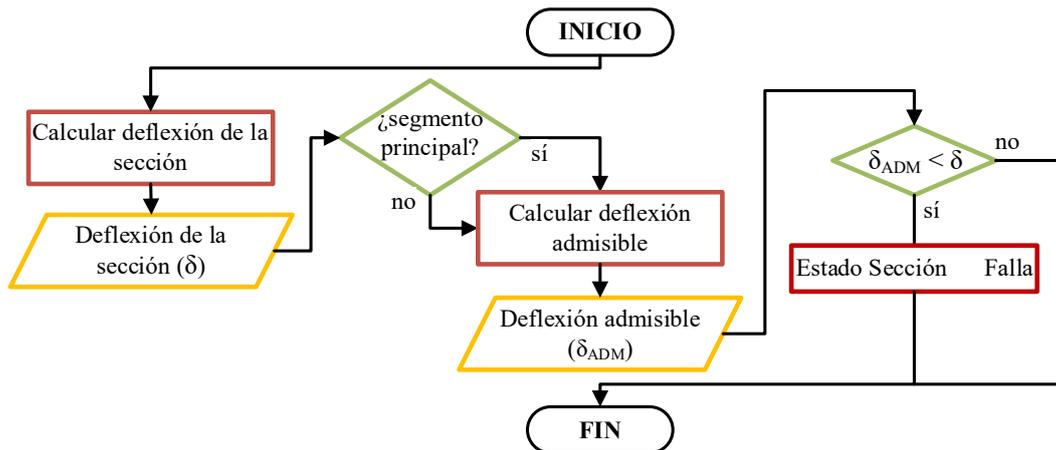


Figura 97 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación de deflexión.

4.2.6.6. Verificación del desplazamiento angular

La verificación del desplazamiento angular consiste en verificar que no exceda un valor admisible. Se elaboró la Figura 98 para mostrar el diagrama de flujo de esta rutina. Primero, la rutina calcula el desplazamiento angular de la sección. Luego, se determina el desplazamiento angular admisible dependiendo del segmento donde se encuentra la sección. Finalmente, si este desplazamiento supera el valor admisible, la rutina concluye que la sección falla.

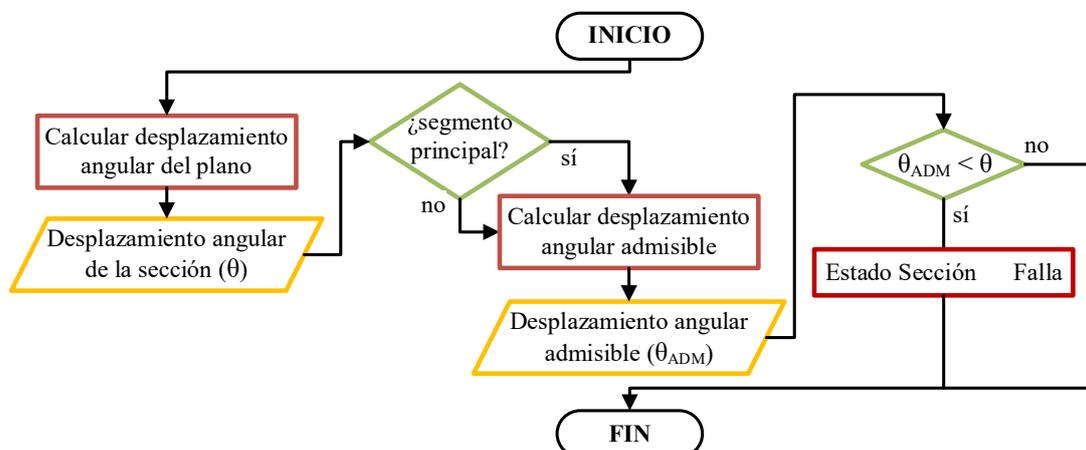


Figura 98 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación del desplazamiento angular.

4.2.6.7. Verificación del desplazamiento torsional

La verificación del desplazamiento torsional en el árbol consta en evitar que su valor exceda un valor admisible. Se elaboró la Figura 99 para mostrar el diagrama de flujo de la rutina. Primero, la rutina calcula el desplazamiento torsional presente en el árbol. Luego, calcula el desplazamiento torsional admisible. Finalmente, si este desplazamiento torsional supera un valor admisible, la rutina concluye que el árbol falla.

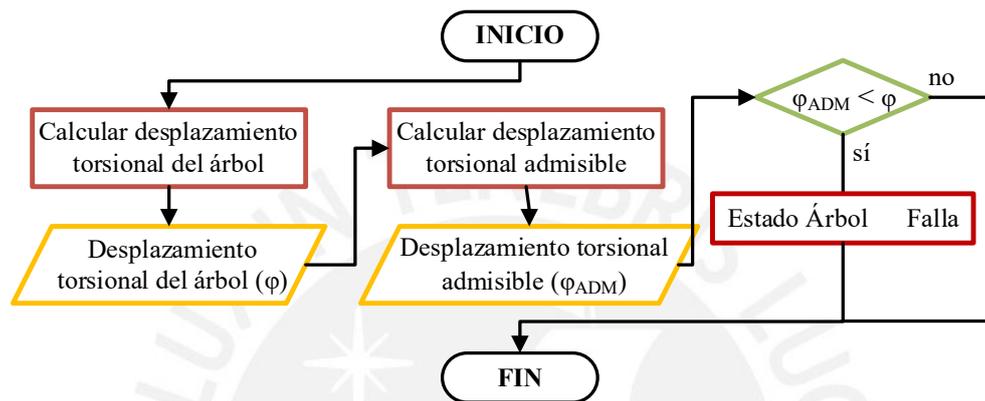


Figura 99 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación del desplazamiento torsional.

4.2.6.8. Verificación de velocidad crítica del árbol

La verificación de la velocidad crítica del árbol consiste en asegurar que la velocidad de giro no provoque inestabilidad en el sistema. Se elaboró la Figura 100 para mostrar el diagrama de flujo de la rutina. La rutina calcula la velocidad crítica del sistema en función al tipo de árbol, para que con este valor se asegure que este alejado un 20% encima y debajo de la velocidad de giro del árbol.

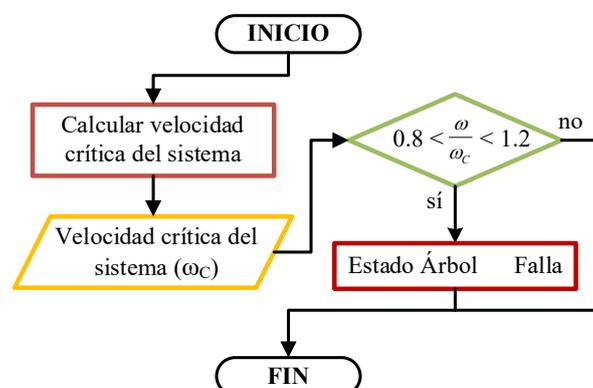
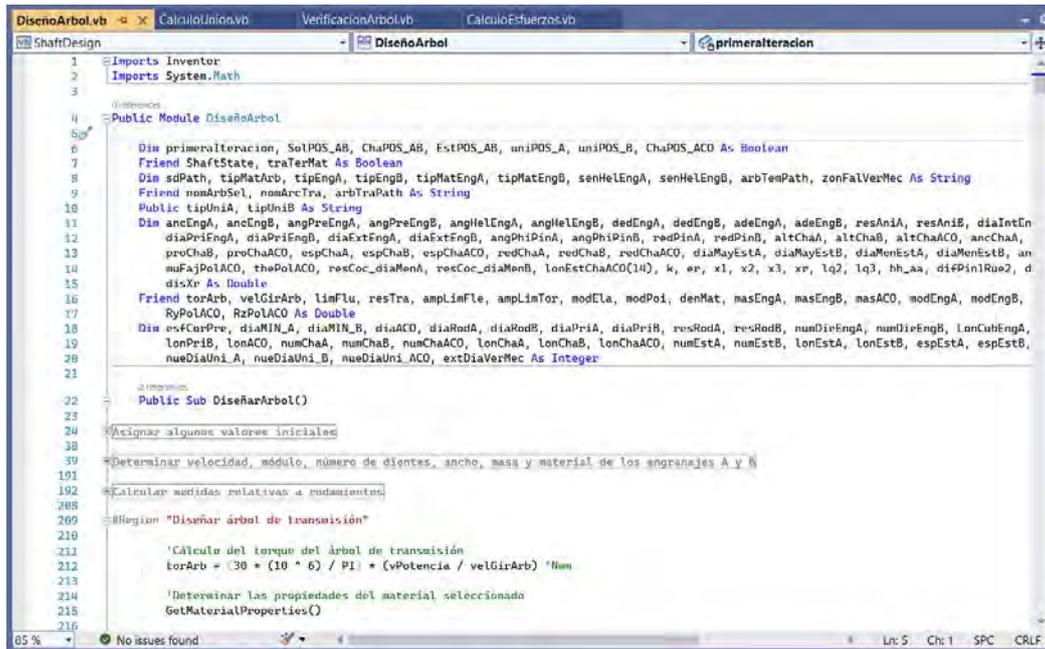


Figura 100 – Diagrama de flujo del subproceso de verificación de la velocidad crítica del árbol.

4.3. Implementación del programa

El programa está implementado en función a las rutinas y procedimientos establecidos en el diagrama de flujo general del algoritmo desarrollados en el punto 4.1. Este se implementa en Visual Studio 2022 mediante el lenguaje de programación Visual Basic. Se muestra en la Figura 101, una captura de pantalla del proceso de programación.



```

1 Imports Inventor
2 Imports System.Math
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

```

Figura 101 – Código de programación.

Fuente: Visual Studio 2022.

Todas las rutinas desarrolladas están implementadas en Visual Studio; sin embargo, se cuenta con rutinas para que el algoritmo interactúe con los modelos CAD de los árboles tipificados para poder analizar el modelo FEM en el mismo modelo CAD mediante Inventor Nastran, que es parte del mismo Autodesk Inventor. Esto es posible gracias a que el algoritmo transmite datos de cargas y restricciones de movimiento hacia el modelo CAD, ordena la realización del análisis FEM y después lee los resultados de tensiones y deformaciones.

4.4. Implementación de la interfaz de uso

Para poder interactuar con el algoritmo, está implementada una interfaz por la cual se ingrese datos y se obtengan otros de salida. En ese sentido, se cuenta con un menú en el programa de uso con el cual realizar el diseño de los árboles al interactuar con ventanas de

trabajo (de ingreso de datos o salida de resultados). A continuación, se presenta la interfaz desarrollada para el funcionamiento del algoritmo.

4.4.1. Menú del Add-in

El menú por el cual se interactúa con el programa es implementado en el software Visual Studio 2022. En la Figura 102, se muestra este menú como una pestaña en Autodesk Inventor 2022. Este menú cuenta con un botón para iniciar un nuevo diseño, dos botones para el ingreso de datos que abren ventanas para datos generales y de los componentes presentes en el árbol, un botón para empezar el diseño del árbol de transmisión y un último botón para mostrar los resultados obtenidos.

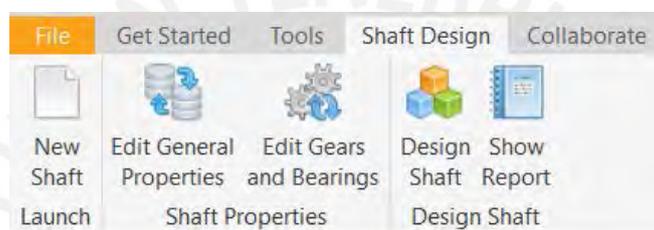


Figura 102 – Menú del programa implementado.

4.4.2. Ventanas de trabajo

Las ventanas de datos son la interfaz por la cual el usuario del programa ingresa los datos de entrada del algoritmo o para que el programa muestre el diseño resuelto. En ese sentido, están implementadas una serie de ventanas referidas a la caja reductora, engranajes y rodamientos, así como también ventanas para reportar el diseño resuelto. Por ejemplo, se muestra en la Figura 103 la ventana para iniciar un nuevo proyecto. Al respecto, todas las ventanas implementadas para la interfaz están presentadas en el Anexo C.

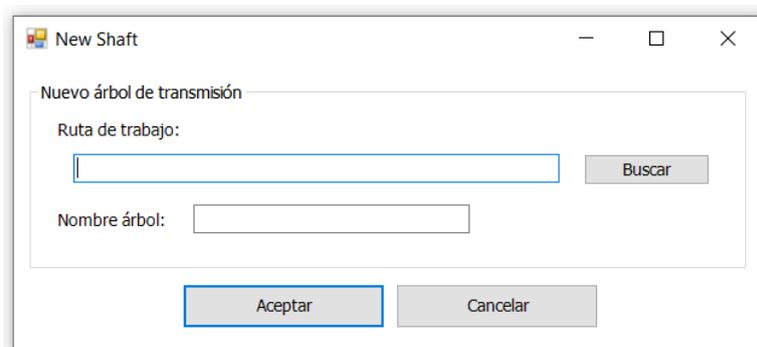


Figura 103 – Ventana de nuevo proyecto.

Capítulo 5

Aplicación y verificación del procedimiento desarrollado

En el presente y último capítulo se presenta la aplicación y verificación del algoritmo implementado mediante dos ejemplos de diseño. Para ello, se detalla la metodología de verificación, basada en la comparación de los resultados obtenidos usando el algoritmo desarrollado con los obtenidos por un método convencional. Finalmente, se presentan los resultados en tablas y la discusión correspondiente, para dar por verificado el algoritmo.

5.1. Metodología de verificación del algoritmo

La metodología que se emplea para verificar el algoritmo consiste en calcular las tensiones y deformaciones mediante un método diferente, para así poder compararlos con los obtenidos mediante elementos finitos. Esto implica comparar dos métodos de diferente naturaleza, lo cual hace válido el procedimiento de verificación.

5.1.1. Método analítico de resolución para la verificación del algoritmo

El método de cálculo alternativo de los ejemplos se basa en los procedimientos convencionales de diseño, lo cual implica, calcular las tensiones y deformaciones siguiendo los diagramas de fuerzas y momentos. Luego, se calcula las verificaciones de resistencia y rigidez que se calcula en el algoritmo implementado, salvo las implicaciones particulares de cada cálculo. Por ende, los cálculos a realizar son el esfuerzo máximo por Von Mises, factores de seguridad según la norma DIN 743, deflexiones y desplazamientos angulares mediante el método de Castigliano, la velocidad crítica del sistema y el desplazamiento angular.

5.1.1.1. Cálculo de reacciones y fuerzas internas

Es necesario calcular las reacciones en un árbol de transmisión para poder graficar el diagrama de fuerza cortante, el diagrama de momento flector y el diagrama de momento torsor,

a partir de los cuales se pueda calcular los esfuerzos y deformaciones en cualquier punto del árbol. Para este tipo de cálculo se considera idealizar el árbol de transmisión como una viga con sección transversal circular. Se elaboró la Figura 104 para mostrar un diagrama de cuerpo libre de un árbol de salida, con reacciones en A y B, y las fuerzas de un engranaje y polea.

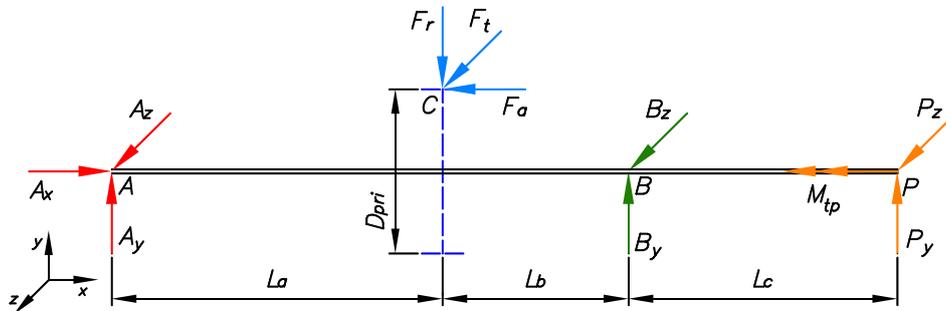


Figura 104 – Diagrama de cuerpo libre del modelo analítico de un árbol de salida.

5.1.1.2. Cálculo de esfuerzos en el árbol

Los árboles de transmisión están sujetos a un momento flector y torsor, así como un esfuerzo normal o axial en caso de contar con engranajes helicoidales. En ese sentido, se tiene la ecuación 86 para el cálculo del esfuerzo axial (σ_n), la ecuación 87 para el cálculo del esfuerzo flector (σ_f) y la ecuación 88 para el cálculo del esfuerzo torsor (τ). Además, los factores de concentración de esfuerzos para flexión y torsión en los radios de redondeo de los resaltes vienen dados por la norma DIN 743 (2012b).

$$\sigma_n = \frac{4F_a}{\pi d_{ar}^2} \quad (86)$$

$$\sigma_f = K_f \cdot \frac{32M_f}{\pi d_{ar}^3} \quad (87)$$

$$\tau = K_t \cdot \frac{16M_t}{\pi d_{ar}^3} \quad (88)$$

F_a = Fuerza axial (N)

K_f = Factor de concentración de esfuerzos por flexión

M_f = Momento flector (Nmm)

K_t = Factor de concentración de esfuerzos por torsión

M_t = Momento torsor (Nmm)

d_{ar} = Diámetro de la sección del árbol (mm^2)

El esfuerzo de Von Mises o también llamada teoría de Von Mises-Hencky, según explica Budynas y Nisbett (2011), es una teoría que predice que ocurrirá la falla por fluencia cuando la energía de distorsión por unidad de volumen alcance o exceda la energía de distorsión por unidad de volumen que se da en el momento de fluencia en un ensayo de simple tensión o compresión del mismo material (p. 221). Para el análisis por este método analítico, se considera el árbol de transmisión como una viga en la cual solo tres de las seis tensiones son diferentes de cero (una tensión normal y dos tensiones tangenciales), el cual se puede calcular mediante la ecuación 89. En esa línea, para poder utilizar esta ecuación se calculará el momento torsor resultante de las componentes transversales.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{(\sigma_n + \sigma_f)^2 + 3(\tau)^2} \quad (89)$$

5.1.1.3. Cálculos según la norma DIN 743

Estos cálculos se basan en calcular los factores de seguridad para evitar falla por deformación permanente y para evitar falla por fatiga según los lineamientos de la norma DIN 743. Ciertamente, esta norma está planteada para ser calculada por métodos analíticos, por lo que no es necesario ninguna consideración adicional al respecto. Es por ello que las ecuaciones establecidas en el apartado 1.2.3. son suficientes para estos cálculos.

5.1.1.4. Cálculos de deflexión y desplazamiento angular

Se utiliza el teorema de Castigliano para calcular la deflexión producto de las fuerzas cortantes y, también, calcular el desplazamiento angular producto del momento flector. Al respecto, la ecuación 90 se puede utilizar para el cálculo de las deflexiones, mientras que la ecuación 91, para los desplazamientos angulares.

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (90)$$

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \quad (91)$$

U = Energía total de deformación (J)

F_i = Fuerza en el punto i actuando en dirección de δ_i

M_i = Momento en el punto i actuando en el sentido de θ_i

Con respecto a este cálculo, “si se considera que no haya pérdidas de energía, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante la deformación incurrida se transforma en trabajo interno, el cual viene a ser la energía de deformación” (Norton, 2010, p. 256). Para lo que Norton (2010) presenta la ecuación 92 y ecuación 93 (p. 257) para el cálculo de la energía de deformación por carga axial y la energía de deformación por momento flector respectivamente.

$$U_{axial} = \frac{F_a^2 L}{2AE} \quad (92)$$

$$U_{flexión} = \int_L \frac{M_f^2}{2EI} dx \quad (93)$$

F_a = Fuerza axial (N)

M_f = Momento flector (Nmm)

M_t = Momento torsor (Nmm)

L = Longitud del componente (m)

E = Módulo de elasticidad (N/m²)

A = Área de la sección transversal (m²)

I = Momento de inercia (m⁴)

5.1.1.5. Cálculo de desplazamiento torsional

El desplazamiento torsional se da debido a la torsión que se genera al transmitir torque de los engranajes al árbol. En ese sentido, Jiang (2019) presenta la ecuación 94 (p. 270) para el cálculo del desplazamiento torsional en un árbol escalonado.

$$\varphi = \frac{1}{G} \cdot \sum_{i=1}^z \frac{M_{t_i} L_i}{J_i} \quad (94)$$

G = Módulo de rigidez (N/mm²)

M_{t_i} = Torque del segmento i (Nmm)

L_i = Longitud del segmento i (mm)

J_i = Momento polar de inercia del segmento i (mm⁴)

5.1.1.6. Cálculo de velocidad crítica

Para este cálculo es necesario utilizar la deflexión calculada en los puntos en los cuales se montan los engranajes, acoplamiento, polea o sprocket, así como la fuerza radial en los mismos puntos. En ese sentido, se calcula la velocidad crítica con las mismas ecuaciones que se utilizan para el algoritmo, pero con los valores ya indicados.

5.1.2. Método de comparación de resultados

El programa implementado dimensiona y calcula los árboles de transmisión correspondientes por cada ejemplo de aplicación. Luego, cada uno de estos árboles se calcula mediante el método analítico propuesto. Así, se puede comparar los resultados de verificación obtenidos por estos dos métodos. Por último, se realiza una breve discusión de estos resultados con el objetivo de verificar el algoritmo implementado.

5.2. Aplicación del algoritmo implementado

Se presenta dos ejemplos de aplicación: uno para diseñar los árboles de una caja reductora de una etapa con engranajes helicoidales y el otro para los árboles de una caja de dos etapas con engranajes rectos. A continuación, se detallan los cálculos de ambos ejemplos.

5.2.1. Ejemplo de aplicación 1

Se requiere diseñar los árboles de transmisión para una caja reductora de una etapa para accionar un molino de bolas con una potencia máxima de 170 hp (126,8 kW) y una velocidad de trabajo de 20 rpm con un tiempo estimado de servicio de 10000 horas. El motor que acciona la caja reductora cuenta con una potencia máxima de 175 hp (130,5 kW) y una velocidad de trabajo de 600 rpm. Asimismo, es necesario establecer el número de dientes de los engranajes, los cuales son engranajes helicoidales con módulo normal de 6 mm, ángulo de presión de 20° y ángulo de hélice de 34° . El piñón cuenta con 18 cm de ancho y sentido de hélice izquierdo, mientras la rueda cuenta con 17,4 cm de ancho. El árbol de entrada cuenta con una transmisión por faja en V ($2\beta=38^\circ$) con un peso de 0,41 kg/m, con poleas de diámetros primitivos de 44,3 y 21 cm y una distancia entre centros de 53,5 cm, mientras que la salida cuenta con una transmisión por cadena de rodillos de dos hebras con un piñón y rueda de 23 y 71 dientes respectivamente y una distancia entre centros de 74,6 cm, con un paso entre rodillos de $1\frac{3}{4}$ in. Además, el factor de seguridad recomendado es 2 y se usan rodamientos de contacto angular.

a) Análisis previo al diseño

Los árboles de transmisión son conectados mediante poleas al eje del motor y mediante cadenas al eje del molino de bolas. Además, se establece que el piñón tenga 19 dientes y la rueda, 87 dientes, de modo que se consigue la relación de transmisión para la caja reductora. Se elaboró la Tabla 26 para presentar las relaciones de transmisión presentes en la caja reductora, mientras que la Tabla 27 muestra las velocidades de rotación de los ejes presentes.

Tabla 26

Relación de transmisión de las distintas etapas en el ejemplo de aplicación 1.

| Transmisión | Relación de transmisión |
|--------------------|-------------------------|
| Faja en V | 2,11 |
| Par de engranajes | 4.58 |
| Cadena de rodillos | 3,11 |

Tabla 27

Velocidad de giro de cada eje o árbol en el ejemplo de aplicación 1.

| Eje o árbol | Velocidad de giro |
|--------------------------|-------------------|
| Eje del motor | 600 rpm |
| 1er árbol caja reductora | 284,4 rpm |
| 2do árbol caja reductora | 62,1 rpm |
| Eje del molino de bolas | 20 rpm |

Debido al torque alto provocado por la relativa baja velocidad de giro, es pertinente seleccionar un material capaz de soportar esta carga. En ese sentido, se selecciona el AISI 5120 con revenido como material de ambos árboles de transmisión.

b) Diseño y cálculo de los árboles mediante el programa implementado

Con los datos específicos de trabajo, el programa implementado calcula y dimensiona los árboles de transmisión. Al respecto, la distribución de esfuerzos en los árboles diseñados se puede apreciar en el Anexo D. Ahora bien, se elaboró la Figura 105 y la Figura 106 para mostrar el árbol de entrada y de salida dimensionado respectivamente, aunque los planos de diseño detallados de cada árbol se pueden encontrar en el Anexo E.

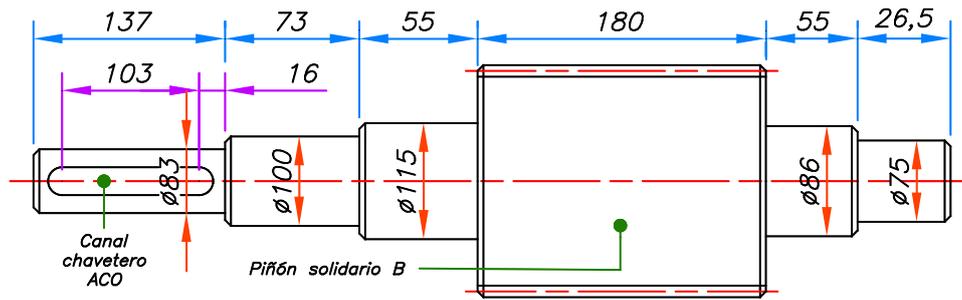


Figura 105 – Árbol de entrada dimensionado del ejemplo de aplicación 1.

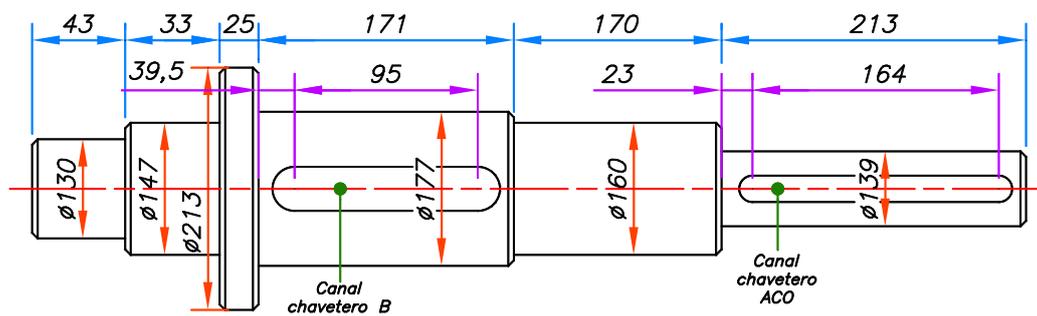


Figura 106 – Árbol de salida dimensionado del ejemplo de aplicación 1.

En distintas secciones de análisis, las cuales están establecidas y detalladas en el apartado 3.4, el algoritmo calcula los factores de seguridad según el DIN 743, lo cual se muestra en la Tabla 28, así como las deflexiones y desplazamientos angulares presentados en la Tabla 29. Además, el algoritmo calcula el esfuerzo máximo y el factor de seguridad por Von Mises, la velocidad crítica y el desplazamiento torsional, mostrados en la Tabla 30.

Tabla 28

Factores de seguridad según la norma DIN 743 en el ejemplo de aplicación 1 mediante el programa implementado.

| Árbol de entrada | | | Árbol de salida | | |
|-----------------------------|------------|------------|------------------------------------|------------|------------|
| Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} | Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} |
| S1: Polea | 3,1 | 3,5 | S1: Rodamiento A | 6,5 | 6,0 |
| S2: Rodamiento A | 2,6 | 3,5 | S2: Engranaje | 4,5 | 4,3 |
| S3: Piñón solidario | 11,9 | 9,4 | S3: Rodamiento B | 3,7 | 4,4 |
| S4: Rodamiento B | 2,6 | 3,7 | S4: Sprocket | 3,5 | 3,7 |
| S5: Redondeo Piñón – Seg. A | 4,4 | 3,8 | S5: Redondeo Rod. B - Acoplamiento | 2,4 | 3,4 |

Tabla 29

Deflexión y desplazamiento angular en el ejemplo de aplicación 1 mediante el programa implementado.

| Árbol de entrada | | | Árbol de salida | | |
|---------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) | Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S1: Polea | 23 μm | 0,0098 ° | S1: Rodamiento A | – | 0,0044 ° |
| S2: Rodamiento A | – | 0,0057 ° | S2: Engranaje | 7 μm | 0,0065 ° |
| S3: Piñón solidario | 16 μm | 0,0014 ° | S3: Rodamiento B | – | 0,0042 ° |
| S4: Rodamiento B | – | 0,0087 ° | S4: Sprocket | 38 μm | 0,0157 ° |

Tabla 30

Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional en el ejemplo de aplicación 1 mediante el programa implementado.

| Cálculo | Árbol de entrada | Árbol de salida |
|---|------------------|-----------------|
| Esfuerzo máximo por Von Mises | 182 MPa | 125 MPa |
| Factor de seguridad por Von Mises (FS_{VM}) | 2,2 | 3,2 |
| Velocidad crítica (ω_c) | 51419 rpm | 36229 rpm |
| Desplazamiento torsional (φ) | 0,0977 ° | 0,0950 ° |

c) Cálculo de los árboles mediante el método analítico

Ambos árboles se modelan como vigas, los cuales cuentan con dos reacciones A y B, un punto P para la reacción de la polea o sprocket y un punto C para las fuerzas de los engranajes. Se elaboró la Figura 107 y la Figura 108 para mostrar los diagramas de cuerpo libre para ambos árboles, mientras que la Tabla 31 muestra los valores dimensionales relevantes.

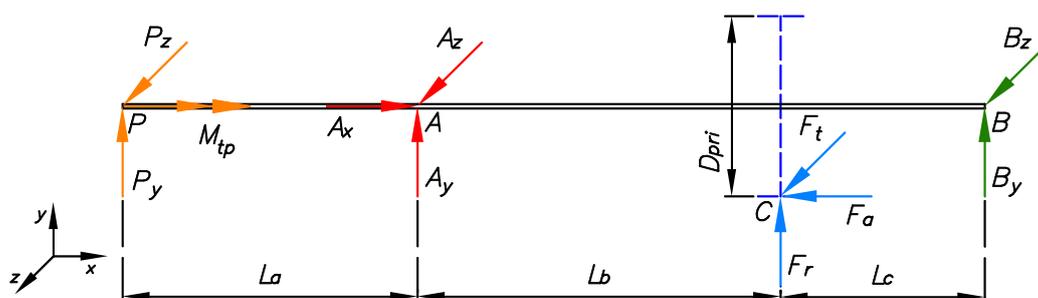


Figura 107 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de entrada en el ejemplo de aplicación 1.

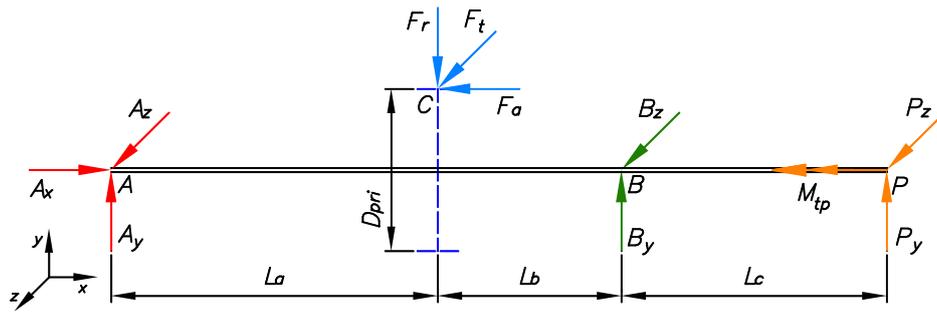


Figura 108 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de salida en el ejemplo de aplicación 1.

Tabla 31

Longitudes en los modelos de los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 1.

| Árbol de entrada | | Árbol de salida | |
|------------------|----------|-----------------|----------|
| D_{pri} | 13,75 cm | D_{pri} | 62,96 cm |
| L_a | 123,5 mm | L_a | 163,5 mm |
| L_b | 162 mm | L_b | 170,5 mm |
| L_c | 157,5 mm | L_c | 190 mm |

Ahora bien, es necesario calcular las fuerzas presentes en el diagrama de cuerpo libre. Al respecto, se elaboró la Tabla 32 para mostrar los valores de fuerza de la polea, del spocket y de los engranajes. Luego, se calcula las reacciones en A y B, y el momento reacción, lo cual se muestra en la Tabla 33.

Tabla 32

Fuerzas en las poleas y en los engranajes de los árboles de entrada y salida en el ejemplo de aplicación 1.

| Árbol de entrada | | Árbol de salida | |
|----------------------------------|----------|--|-----------|
| Poleas con faja en V | | Sprocket con cadena de rodillos | |
| P_y | -3,29 kN | P_y | 12,55 kN |
| P_z | 17,77 kN | P_z | -24,45 kN |
| Fuerzas de los engranajes | | Fuerzas de los engranajes | |
| F_t | 63,73 kN | F_t | 63,74 kN |
| F_r | 27,98 kN | F_r | 27,98 kN |
| F_a | 42,99 kN | F_a | 42,99 kN |

Tabla 33

Reacciones en los árboles de entrada y salida en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico.

| Árbol de entrada | | Árbol de salida | |
|------------------|-------------|-----------------|---------------|
| M_{tp} | 4381,8 kNmm | M_{tp} | 20067,36 kNmm |
| A_x | 42,99 kN | A_x | 42,99 kN |
| A_y | -18,48 kN | A_y | 61,95 kN |
| A_z | -56,06 kN | A_z | -46,45 kN |
| B_y | -6,21 kN | B_y | -46,51 kN |
| B_z | -25,45 kN | B_z | 7,15 kN |

En las mismas secciones analizadas mediante el algoritmo, se calculan los factores de seguridad según el DIN 743, lo cual se muestra en la Tabla 34, así como la deflexión y desplazamiento angular que se muestra en la Tabla 35. Finalmente, se elaboró la Tabla 36 para mostrar el esfuerzo máximo y el factor de seguridad por Von Mises, la velocidad crítica y el desplazamiento torsional.

Tabla 34

Factores de seguridad por el DIN 743 en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico.

| Árbol de entrada | | | Árbol de salida | | |
|-----------------------------|------------|------------|-----------------------------------|------------|------------|
| Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} | Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} |
| S1: Polea | 2,3 | 3,2 | S1: Rodamiento A | 16,1 | 11,4 |
| S2: Rodamiento A | 3,2 | 4,0 | S2: Engranaje | 2,9 | 2,9 |
| S3: Piñón solidario | 6,9 | 5,6 | S3: Rodamiento B | 6,5 | 8,3 |
| S4: Rodamiento B | 12,1 | 10,9 | S4: Sprocket | 1,9 | 3,7 |
| S5: Redondeo Piñón - Seg. A | 5,9 | 6,7 | S5: Resalte Rod. B - Acoplamiento | 2,6 | 3,0 |

Tabla 35

Deflexión y desplazamiento angular en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico.

| Árbol de entrada | | | Árbol de salida | | |
|---------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) | Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S1: Polea | 19 μm | 0,0114 ° | S1: Rodamiento A | — | 0,0051 ° |
| S2: Rodamiento A | — | 0,0085 ° | S2: Engranaje | 10 μm | 0,0033 ° |

| Árbol de entrada | | | Árbol de salida | | |
|---------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) | Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S3: Piñón solidario | 18 μm | 0,0025 ° | S3: Rodamiento B | – | 0,0072 ° |
| S4: Rodamiento B | – | 0,0126 ° | S4: Sprocket | 33 μm | 0,0144 ° |

Tabla 36

Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional en el ejemplo de aplicación 1 mediante el método analítico.

| Cálculo | Árbol de entrada | Árbol de salida |
|---|------------------|-----------------|
| Esfuerzo máximo por Von Mises | 214,6 MPa | 158,4 MPa |
| Factor de seguridad por Von Mises (FS_{VM}) | 1,9 | 2,5 |
| Velocidad crítica (ω_c) | 47009 rpm | 29842 rpm |
| Desplazamiento torsional (φ) | 0,0930 ° | 0,0932 ° |

5.2.2. Ejemplo de aplicación 2

Se requiere diseñar los árboles de transmisión de una caja reductora de dos etapas para accionar una trituradora de mandíbula hidráulica con una potencia máxima de 330 kW y una velocidad de trabajo de 200 rpm con un tiempo de servicio estimado de 10000 horas. El motor que acciona la caja reductora cuenta con una potencia máxima de 340 kW y una velocidad de trabajo de 1800 rpm. Se sabe que los engranajes rectos tienen módulo normal de 5 mm y ángulo de presión de 20°, pero se debe establecer el número de dientes. El primer par de engranajes tiene 116 y 110 mm de ancho, mientras que el segundo par de engranajes tiene 148 y 142 mm de ancho, el piñón y rueda respectivamente. El árbol de entrada y el árbol de salida se conectan mediante un acoplamiento flexible al eje del motor y al eje de la trituradora respectivamente. Estos acoplamientos son fabricados con acero St 60, los pines que unen las bridas del acoplamiento con acero St 42 y el elemento elástico presente es de goma. Además, el factor de seguridad recomendado es 2 y los árboles se apoyan en rodamientos de contacto angular.

a) Análisis previo al diseño

Los árboles de entrada y de salida son conectados mediante acoplamientos flexibles directamente al motor y la trituradora; esto implica que la reducción de velocidad se genera

exclusivamente en la caja reductora. La relación de transmisión de la caja reductora es de 9, a lo que se recomienda que la reducción en el primer par de engranajes sea de $1,25\sqrt{9} = 3,75$. Para encajar esta relación de transmisión, se dispone que el primer par de engranajes tenga 21 y 79 dientes para el piñón y la rueda respectivamente. Además, se selecciona para el segundo par de engranajes 23 y 55 dientes para el piñón y la rueda respectivamente alcanzado la reducción requerida. Se elaboró la Tabla 37 para mostrar las relaciones de transmisión, mientras que se elaboró la Tabla 38 para mostrar la velocidad de cada árbol en cuestión.

Tabla 37

Relación de transmisión de las distintas etapas en el ejemplo de aplicación 2.

| Transmisión | Relación de transmisión |
|-----------------------|-------------------------|
| 1er par de engranajes | 3,76 |
| 2do par de engranajes | 2,39 |

Tabla 38

Velocidad de giro de cada eje o árbol en el ejemplo de aplicación 2.

| Eje o árbol | Velocidad de giro |
|--|-------------------|
| Eje del motor / 1er árbol caja reductora | 1800 rpm |
| 2do árbol caja reductora | 478,5 rpm |
| 3er árbol caja reductora / Eje de la trituradora | 200,1 rpm |

Debido a la alta potencia de diseño de los árboles, se selecciona el acero aleado AISI 5120 con tratamiento térmico de revenido. Incluso, este material resulta idóneo para el árbol de salida que cuenta con el mayor torque.

b) Diseño y cálculo de los árboles mediante el programa implementado

Con los datos específicos de trabajo, el programa implementado calcula y dimensiona un árbol de entrada, uno intermedio y otro de salida. Al respecto, la distribución de esfuerzos en los árboles en cuestión se puede visualizar en el Anexo D. Ahora bien, se elaboró la Figura 109, la Figura 110 y la Figura 111 para mostrar el árbol de entrada, intermedio y de salida dimensionados respectivamente. Además, los planos de diseño completos y detallados de cada árbol se pueden revisar en el Anexo E.

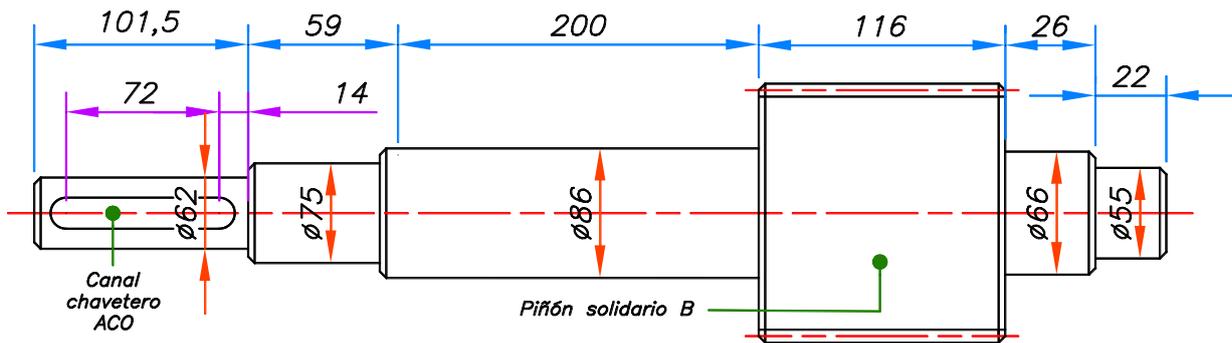


Figura 109 – Árbol de entrada dimensionado del ejemplo de aplicación 2.

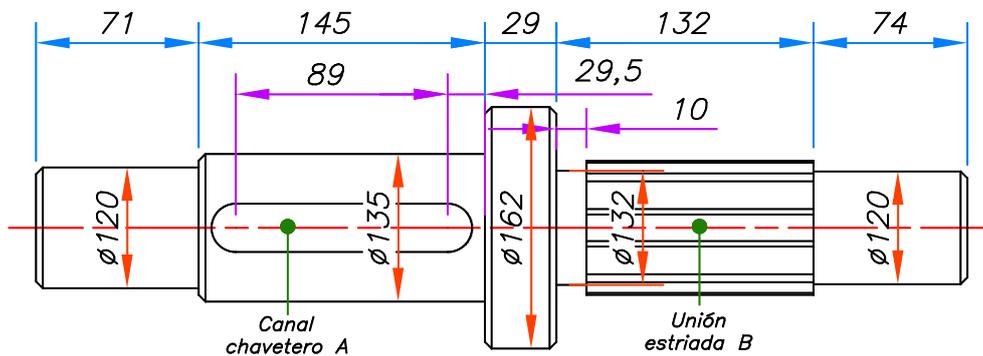


Figura 110 – Árbol intermedio dimensionado del ejemplo de aplicación 2.

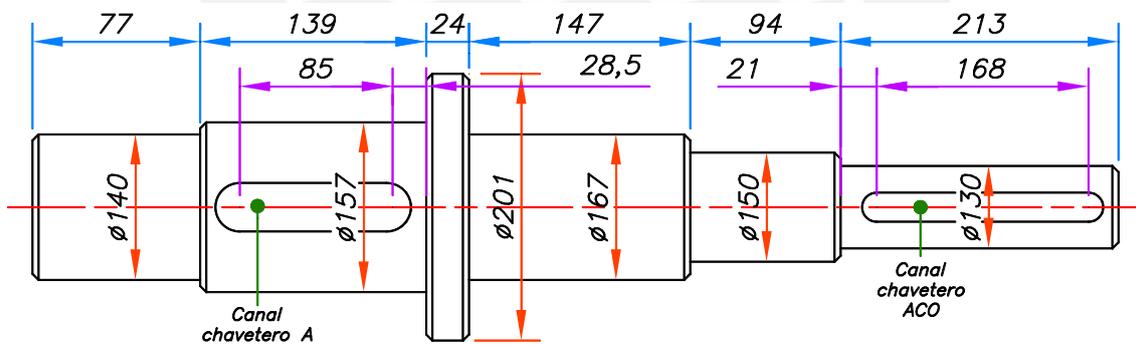


Figura 111 – Árbol de salida dimensionado del ejemplo de aplicación 2.

En distintas secciones de análisis, las cuales están establecidas para cada árbol, se calcula el factor de seguridad por DIN 743, los cuales se presentan en la Tabla 39, así como la deflexión y el desplazamiento angular que se muestran en la Tabla 40. Finalmente, se elaboró la Tabla 41 para mostrar el esfuerzo máximo y el factor de seguridad por Von Mises, la velocidad crítica y el desplazamiento torsional.

Tabla 39

Factores de seguridad según el DIN 743 en el ejemplo de aplicación 2 mediante el programa implementado.

| Árbol de entrada | | | Árbol intermedio | | |
|------------------------------------|------------|------------|--|------------|------------|
| Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} | Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} |
| S1: Acoplamiento | 2,7 | 3,1 | S1: Rodamiento A | 5,0 | 3,4 |
| S2: Rodamiento A | 2,3 | 2,3 | S2: Engranaje A | 4,8 | 3,7 |
| S3: Piñón solidario | 10,3 | 6,9 | S3: Engranaje B | 3,3 | 3,1 |
| S4: Rodamiento B | 2,4 | 2,8 | S4: Rodamiento B | 3,1 | 2,4 |
| S5: Redondeo Piñón – Seg. A | 5,1 | 2,1 | S5: Redondeo Resalte int – Seg. B | 3,3 | 2,1 |

| Árbol de salida | | |
|-------------------------------------|------------|------------|
| Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} |
| S1: Rodamiento A | 35,9 | 23,3 |
| S2: Engranaje | 2,7 | 2,5 |
| S3: Rodamiento B | 4,2 | 5,1 |
| S4: Acoplamiento | 3,0 | 3,0 |
| S5: Redondeo Seg. B – Rod. B | 2,2 | 2,7 |

Tabla 40

Deflexión y desplazamiento angular en el ejemplo de aplicación 2 mediante el programa implementado.

| Árbol de entrada | | | Árbol intermedio | | |
|----------------------------|------------------------|---------------------------------|-------------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) | Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S1: Acoplamiento | 13 μm | 0,0174 ° | S1: Rodamiento A | – | 0,0331 ° |
| S2: Rodamiento A | – | 0,0119 ° | S2: Engranaje A | 34 μm | 0,0469 ° |
| S3: Piñón solidario | 26 μm | 0,0056 ° | S3: Engranaje B | 52 μm | 0,0146 ° |
| S4: Rodamiento B | – | 0,0168 ° | S4: Rodamiento B | – | 0,0345 ° |

| Árbol de salida | | |
|-------------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S1: Rodamiento A | – | 0,0088 ° |
| S2: Engranaje | 14 μm | 0,0031 ° |

| Árbol de salida | | |
|---------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S3: Rodamiento B | – | 0,0043 ° |
| S4: Acoplamiento | 12 μm | 0,0040 ° |

Tabla 41

Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional de los árboles en el ejemplo de aplicación 2 mediante el programa implementado.

| Cálculo | Árbol de entrada | Árbol intermedio | Árbol de salida |
|---|------------------|------------------|-----------------|
| Esfuerzo máximo por Von Mises | 182,7 MPa | 185,4 MPa | 170,8 MPa |
| Factor de seguridad por Von Mises (FS_{VM}) | 2,2 | 2,2 | 2,3 |
| Velocidad crítica (ω_c) | 5857 rpm | 20870 rpm | 9267 rpm |
| Desplazamiento torsional (φ) | 0,1431 ° | 0,0199 ° | 0,0970 ° |

c) Cálculo de los árboles mediante el método analítico

Los tres árboles de transmisión se modelan como vigas considerando dos reacciones en los puntos A y B, el momento reacción en un punto P producto del acoplamiento flexible, y las fuerzas de los engranajes en los puntos C y D. Al respecto, se elaboró la Figura 112, la Figura 113 y la Figura 114 para mostrar el diagrama de cuerpo libre del árbol de entrada, intermedio y de salida respectivamente. Asimismo, se elaboró la Tabla 42 para indicar las longitudes relevantes a estos diagramas.

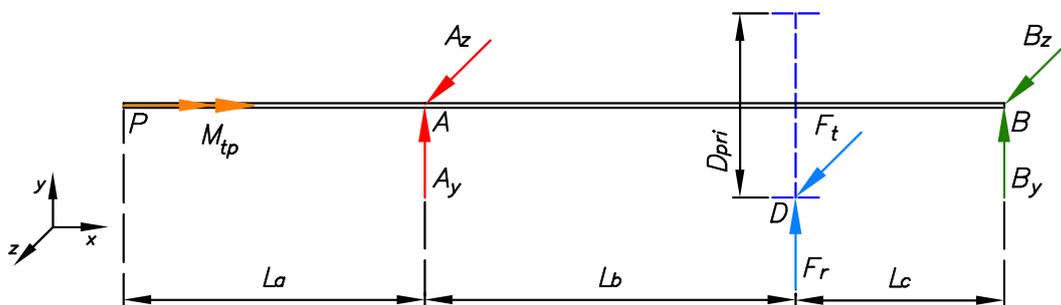


Figura 112 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de entrada en el ejemplo de aplicación 2.

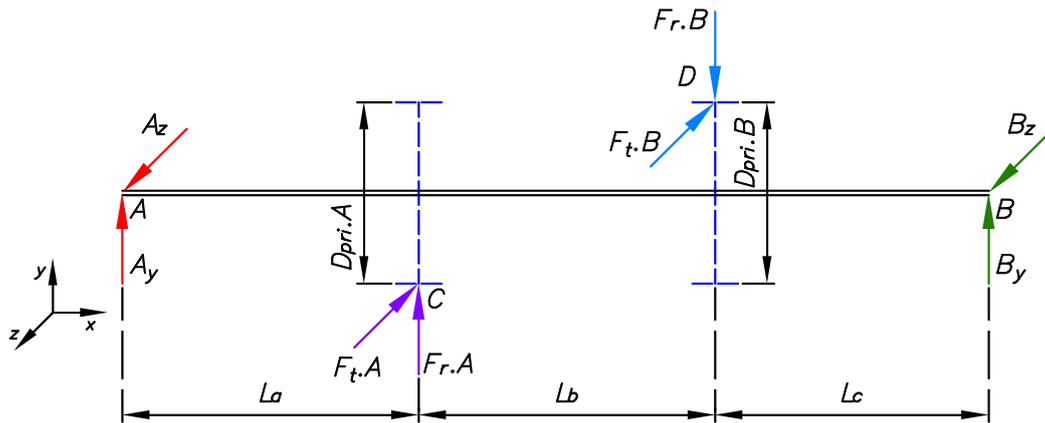


Figura 113 – Diagrama de cuerpo libre del árbol intermedio en el ejemplo de aplicación 2.

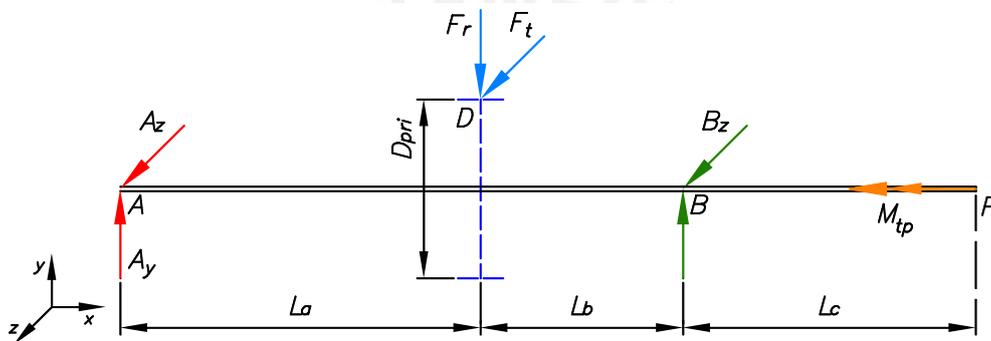


Figura 114 – Diagrama de cuerpo libre del árbol de salida en el ejemplo de aplicación 2.

Tabla 42

Longitudes en los modelos de los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 2.

| Árbol de entrada | | Árbol intermedio | | Árbol de salida | |
|------------------|----------|------------------|----------|-----------------|----------|
| D_{pri} | 10,5 cm | $D_{pri.A}$ | 11,5 cm | D_{pri} | 27,5 cm |
| L_a | 96,5 mm | $D_{pri.B}$ | 39,5 cm | L_a | 122,5 mm |
| L_b | 270,5 mm | L_a | 121,5 mm | L_b | 263 mm |
| L_c | 94,5 mm | L_b | 160 mm | L_c | 176,5 mm |
| | | L_c | 100,5 mm | | |

Asimismo, se calcula las fuerzas de los engranajes como parte de los diagramas de cuerpo libre. Se elaboró la Tabla 43 para mostrar estas fuerzas. Luego, se calcula las reacciones en A y B, así como el momento reacción en los árboles de entrada y de salida utilizando ecuaciones de equilibrio. Se elaboró la Tabla 44 para indicar estos valores.

Tabla 43

Fuerzas en los engranajes de los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 2.

| Árbol de entrada | | Árbol intermedio | | | | Árbol de salida | |
|------------------|----------|------------------|-----------|---------|----------|-----------------|-----------|
| Piñón 1 | | Rueda 2 | | Piñón 3 | | Rueda 4 | |
| F_t | 34,36 kN | F_t | 118,01 kN | F_t | 34,36 kN | F_t | 118,01 kN |
| F_r | 12,51 kN | F_r | 42,95 kN | F_r | 12,5 kN | F_r | 42,95 kN |

Tabla 44

Reacciones en los árboles de entrada y salida en ejemplo de aplicación 2.

| Árbol de entrada | | Árbol intermedio | | Árbol de salida | |
|------------------|--------------|------------------|----------|-----------------|---------------|
| M_{tp} | 1803,76 kNmm | | | M_{tp} | 16625,69 kNmm |
| A_y | -3,24 kN | A_y | -26,0 kN | A_y | 29,3 kN |
| A_z | -8,9 kN | A_z | 89,51 kN | A_z | -80,51 kN |
| B_y | -9,27 kN | B_y | -4,45 kN | B_y | 13,65 kN |
| B_z | -25,46 kN | B_z | 62,85 kN | B_z | -37,5 kN |

En las mismas secciones analizadas mediante el algoritmo, se calculan los factores de seguridad según la norma DIN 743, lo cual se muestra en la Tabla 45, así como las deflexiones y los desplazamientos angulares que se presentan en la Tabla 46. Finalmente, se elaboró la Tabla 47 para mostrar el esfuerzo máximo y el factor de seguridad por Von Mises, la velocidad crítica y el desplazamiento torsional.

Tabla 45

Factores de seguridad según el DIN 743 en el ejemplo de aplicación 2 mediante el método analítico.

| Árbol de entrada | | | Árbol intermedio | | |
|------------------------------------|------------|------------|-------------------------------------|------------|------------|
| Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} | Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} |
| S1: Acoplamiento | 2,0 | 1,9 | S1: Rodamiento A | 12,3 | 3,4 |
| S2: Rodamiento A | 3,2 | 2,4 | S2: Engranaje A | 7,1 | 2,2 |
| S3: Piñón solidario | 10,6 | 4,4 | S3: Engranaje B | 8,2 | 3,4 |
| S4: Rodamiento B | 12,2 | 5,5 | S4: Rodamiento B | 17,2 | 4,9 |
| S5: Redondeo Piñón – Seg. A | 4,6 | 3,4 | S5: Redondeo Rod. A – Seg. A | 2,5 | 1,9 |

| Árbol de salida | | |
|-------------------------------------|------------|------------|
| Sección de análisis | FS_{def} | FS_{fat} |
| S1: Rodamiento A | 7,8 | 5,2 |
| S2: Engranaje | 2,4 | 2,5 |
| S3: Rodamiento B | 7,0 | 9,7 |
| S4: Acoplamiento | 1,8 | 2,4 |
| S5: Redondeo Seg. B y Rod. B | 3,5 | 4,8 |

Tabla 46

Deflexión y desplazamiento torsional en el ejemplo de aplicación 2 mediante el método analítico.

| Árbol de entrada | | | Árbol intermedio | | |
|----------------------------|------------------------|---------------------------------|-------------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) | Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S1: Acoplamiento | 32 μm | 0.0189 ° | S1: Rodamiento A | – | 0,1198 ° |
| S2: Rodamiento A | – | 0.0189 ° | S2: Engranaje A | 152 μm | 0,0945 ° |
| S3: Piñón solidario | 34 μm | 0.0135 ° | S3: Engranaje B | 213 μm | 0,0915 ° |
| S4: Rodamiento B | – | 0,0273 ° | S4: Rodamiento B | – | 0,0540 ° |

| Árbol de salida | | |
|-------------------------|------------------------|---------------------------------|
| Sección de análisis | Deflexión (δ) | Desplazam. angular (θ) |
| S1: Rodamiento A | – | 0,0105 ° |
| S2: Engranaje | 17 μm | 0,0038 ° |
| S3: Rodamiento B | – | 0,0071 ° |
| S4: Acoplamiento | 22 μm | 0,0071 ° |

Tabla 47

Esfuerzo máximo por Von Mises, factor de seguridad por Von Mises, velocidad crítica y desplazamiento torsional en árboles del ejemplo de aplicación 2 mediante el método analítico.

| Cálculo | Árbol de entrada | Árbol intermedio | Árbol de salida |
|---|------------------|------------------|-----------------|
| Esfuerzo máximo por Von Mises | 198,3 MPa | 205,4 MPa | 202,1 MPa |
| Factor de seguridad por Von Mises (FS_{VM}) | 2,0 | 1,9 | 2,0 |

| Cálculo | Árbol de entrada | Árbol intermedio | Árbol de salida |
|-------------------------------------|------------------|------------------|-----------------|
| Velocidad crítica (ω_c) | 5290 rpm | 23269 rpm | 8372 rpm |
| Deformación torsional (φ) | 0,1290 ° | 0,0234 ° | 0,1047 ° |

5.3. Verificación del algoritmo implementado

La verificación del algoritmo consiste en comparar los cálculos obtenidos por ambos métodos. Para ello, se calcula la diferencia porcentual de ambos mediante la ecuación 95, en función al valor obtenido por el algoritmo (X_{alg}) y por el método analítico (X_o).

$$DP = \frac{X_{alg} - X_o}{X_o} \quad (95)$$

5.3.1. Análisis del ejemplo de aplicación 1

En la Tabla 48, se presentan los resultados mediante ambos métodos del ejemplo de aplicación 1, el cual contiene árboles de transmisión con engranajes helicoidales.

Tabla 48

Comparación de resultados principales del ejemplo de aplicación 1.

| Cálculo | Método algoritmo | Método analítico | Diferencia porcentual |
|--|------------------|------------------|-----------------------|
| Árbol de entrada | | | |
| Factor de seguridad por Von Mises | 2,2 | 1,9 | 16% |
| Factor de seguridad (deformación permanente) | 2,6 | 2,3 | 13% |
| Factor de seguridad (fatiga) | 3,5 | 3,2 | 9% |
| Deflexión en la polea | 23 μm | 19 μm | 21% |
| Deflexión en el piñón solidario | 16 μm | 18 μm | -11% |
| Desplazamiento angular en la polea | 0,0098 ° | 0,0114 ° | -14% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento A | 0,0057 ° | 0,0085 ° | -33% |
| Desplazamiento angular en el piñón solidario | 0,0014 ° | 0,0025 ° | -44% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento B | 0,0087 ° | 0,0126 ° | -31% |
| Velocidad crítica del sistema | 51419 rpm | 47009 rpm | 9% |
| Desplazamiento torsional del árbol | 0,0977 ° | 0,0930 ° | 5% |

| Cálculo | Método algoritmo | Método analítico | Diferencia porcentual |
|---|------------------|------------------|-----------------------|
| Árbol de salida | | | |
| Factor de seguridad por Von Mises | 3,2 | 2,5 | 28% |
| Factor de seguridad (deformación permanente) | 2,4 | 1,9 | 26% |
| Factor de seguridad (fatiga) | 3,4 | 2,9 | 17% |
| Deflexión en el engranaje | 7 μm | 10 μm | -30% |
| Deflexión en el sprocket | 38 μm | 33 μm | 15% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento A | 0,0044 ° | 0,0051 ° | -14% |
| Desplazamiento angular en el engranaje | 0,0065 ° | 0,0033 ° | 97% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento B | 0,0042 ° | 0,0072 ° | -42% |
| Desplazamiento angular en el sprocket | 0,0157 ° | 0,0144 ° | 9% |
| Velocidad crítica del sistema | 36229 rpm | 29842 rpm | 21% |
| Desplazamiento torsional del árbol | 0,0950 ° | 0,0932 ° | 2% |

En primer lugar, la diferencia de los factores de seguridad se encuentra en el rango de 9-28%, lo que evidencia la aproximación adecuada del algoritmo y la eficacia del método por elementos finitos. Es importante destacar que los factores de seguridad calculados mediante el programa implementado son ligeramente mayores que los obtenidos por el método analítico, ya que el método computacional es más preciso y permite una mejor optimización.

En segundo lugar, la deflexión presenta una diferencia de 11-30%, lo cual muestra una aproximación confiable entre ambos métodos. El desplazamiento angular presenta una diferencia de 9-97% con un máximo de 0.004° de diferencia absoluta. Esta diferencia angular no representa una variación considerable, por lo que se confirma la confiabilidad del algoritmo.

En tercer lugar, la velocidad crítica resultó con una diferencia de 9% y 21% de diferencia, lo que también implica un adecuado resultado. También, el desplazamiento torsional presenta 5% y 2%, lo que muestra una excelente aproximación.

En base a esta información, se puede concluir que el programa implementado es eficaz para diseñar árboles de transmisión con engranajes helicoidales y uniones por chaveta. Por ello, se entiende que está verificado el algoritmo para elaborar árboles que contemplen engranajes helicoidales.

5.3.2. Análisis del ejemplo de aplicación 2

En la Tabla 49, se presentan los resultados mediante ambos métodos del ejemplo de aplicación 2, el cual contiene árboles de transmisión con engranajes rectos.

Tabla 49

Comparación de resultados principales del ejemplo de aplicación 2.

| Cálculo | Método algoritmo | Método analítico | Diferencia porcentual |
|--|------------------|------------------|-----------------------|
| Árbol de entrada | | | |
| Factor de seguridad por Von Mises | 2,2 | 2,0 | 10% |
| Factor de seguridad (deformación permanente) | 2,3 | 2,0 | 15% |
| Factor de seguridad (fatiga) | 2,1 | 1,9 | 11% |
| Deflexión en el acoplamiento | 13 μm | 32 μm | -59% |
| Deflexión en el piñón solidario | 26 μm | 34 μm | -24% |
| Desplazamiento angular en el acoplamiento | 0,0174 ° | 0,0189 ° | -8% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento A | 0,0119 ° | 0,0189 ° | -37% |
| Desplazamiento angular en el piñón solidario | 0,0056 ° | 0,0135 ° | -59% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento B | 0,0168 ° | 0,0273 ° | -38% |
| Velocidad crítica del sistema | 5857 rpm | 5290 rpm | 11% |
| Desplazamiento torsional del árbol | 0,1431 ° | 0,1290 ° | 11% |
| Árbol intermedio | | | |
| Factor de seguridad por Von Mises | 2,2 | 1,9 | 16% |
| Factor de seguridad (deformación permanente) | 3,1 | 2,5 | 24% |
| Factor de seguridad (fatiga) | 2,1 | 1,9 | 11% |
| Deflexión en el engranaje A | 34 μm | 152 μm | -78% |
| Deflexión en el engranaje B | 52 μm | 213 μm | -76% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento A | 0,0331 ° | 0,1198 ° | -72% |
| Desplazamiento angular en el engranaje A | 0,0469 ° | 0,0945 ° | -50% |
| Desplazamiento angular en el engranaje B | 0,0146 ° | 0,0915 ° | -84% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento B | 0,0345 ° | 0,0540 ° | -36% |
| Velocidad crítica del sistema | 20870 rpm | 23269 rpm | -10% |
| Desplazamiento torsional del árbol | 0,0199 ° | 0,0234 ° | -15% |

| Cálculo | Método algoritmo | Método analítico | Diferencia porcentual |
|---|------------------|------------------|-----------------------|
| Árbol de salida | | | |
| Factor de seguridad por Von Mises | 2,3 | 2,0 | 15% |
| Factor de seguridad (deformación permanente) | 2,2 | 1,8 | 22% |
| Factor de seguridad (fatiga) | 2,5 | 2,4 | 4% |
| Deflexión en el engranaje | 14 μm | 17 μm | -18% |
| Deflexión en el acoplamiento | 12 μm | 22 μm | -45% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento A | 0,0088 ° | 0,0105 ° | -16% |
| Desplazamiento angular en el engranaje | 0,0031 ° | 0,0038 ° | -18% |
| Desplazamiento angular en el rodamiento B | 0,0043 ° | 0,0071 ° | -39% |
| Desplazamiento angular en el acoplamiento | 0,0040 ° | 0,0071 ° | -44% |
| Velocidad crítica del sistema | 9267 rpm | 8372 rpm | 11% |
| Desplazamiento torsional del árbol | 0,0970 ° | 0,1047 ° | -7% |

En primer lugar, la diferencia porcentual en los factores de seguridad se encuentra el rango de 4-24%, lo cual muestra la aproximación correcta del algoritmo y la eficacia del método por elementos finitos mostrando que el programa optimiza mejor al árbol diseñado.

En segundo lugar, la deflexión presenta una diferencia porcentual en el rango de 18-78% con una diferencia absoluta máxima de 118 μm ; mientras que el desplazamiento angular presenta una diferencia porcentual en el rango de 8-84% con una diferencia absoluta máxima de 0.077°. Ahora bien, las diferencias más considerables se dan en el árbol intermedio, el cual cuenta con unión estriada. Por ello, se entiende que, al usar uniones estriadas, los resultados de deflexión y desplazamiento angular no se aproximan mucho en ambos métodos, pero esto no implica una poca confiabilidad de los resultados.

En tercer lugar, la velocidad crítica resulto de 11%, 10% y 11%, lo que muestra valores tolerables. Asimismo, el desplazamiento torsional alcanzo diferencias de 11%, 15% y 7%, lo que también muestra una aproximación adecuada.

En base a esta información, se puede afirmar que el programa implementado es eficaz para diseñar árboles con engranajes rectos, uniones por chaveta y uniones estriadas. Así, de da por verificado el algoritmo para elaborar árboles que contemplen engranajes rectos.

Conclusiones

- Se cumplieron los objetivos y alcances propuestos en la presente tesis, pues se logró implementar un algoritmo capaz de automatizar y optimizar el diseño de árboles de transmisión para cajas reductoras de engranajes cilíndricos, ejes paralelos y distribución horizontal, de una, dos y tres etapas. El referido programa permite diseñar árboles, consiguiendo ajustarse adecuadamente a un factor de seguridad establecido que garantiza la resistencia mecánica, así como también asegura la rigidez del árbol al analizar la deflexión, el desplazamiento angular y el desplazamiento torsional.
- Se logró tipificar diez modelos de árboles de transmisión que cumplen las exigencias constructivas de normas y recomendaciones, con los que es factible diseñar árboles destinados a cajas reductoras con los alcances planteados para la tesis. Al respecto, en el diseño estructural de los árboles se contemplaron uniones por chaveta, uniones estriadas y piñones solidarios, en árboles de entrada, intermedios y de salida. Además, en estas tipificaciones se consideró el tipo de transmisión para el ingreso o salida de potencia, la cual puede ser una transmisión por faja en V, una cadena de rodillos o un acoplamiento flexible.
- Se parametrizaron dimensionalmente los árboles tipificados, esto fue posible al haber formulado las ecuaciones y establecido los procedimientos necesarios para el dimensionamiento de longitudes, diámetros, redondeos y chaflanes, considerando variables dependientes e independientes. Asimismo, se elaboró el código necesario para asignar estos valores a los modelos CAD tipificados, lo que implicó el dimensionamiento automatizado del árbol, incluyendo el número de canales chaveteros, el número de dientes de la unión estriada y el número de dientes del piñón solidario. Esta tarea fue particularmente desafiante en la parametrización de árboles con piñón solidario y dientes helicoidales, dada la dificultad de establecer la correcta interacción con los otros elementos del árbol.
- Se elaboró un modelo de elementos finitos eficaz para obtener valores de tensión y deformación en los árboles de transmisión, el cual contempla las condiciones de carga más críticas de cada árbol tipificado. En ese sentido, se trasladaron las fuerzas radial, tangencial y axial de los engranajes hacia el árbol de transmisión, así como las fuerzas

generadas por el ingreso o salida de potencia de la caja reductora. Esto implicó la formulación de ecuaciones para el traslado de las fuerzas tangencial y axial, pues fue necesario adecuar el momento que estas producen. Asimismo, se estableció el mallado automatizado de los árboles con tetraedros y un tamaño de elemento proporcional al diámetro del árbol. Por último, se establecieron las condiciones de contorno correspondientes a las restricciones de movimiento provocadas por los rodamientos.

- Se implementó un extenso algoritmo para automatizar el diseño de árboles de transmisión, que se puede dividir en tres grandes partes. La primera parte está relacionada con la parametrización de los modelos CAD de los árboles tipificados, haciendo uso de la interfaz de programación de aplicaciones (API) de Inventor, a través de códigos de programación desarrollados en la plataforma Visual Studio. La segunda parte corresponde al análisis de esfuerzos y deformaciones, utilizando simulación por elementos finitos, mediante la técnica iLogic (diseño basado en reglas) de Inventor y el módulo Inventor Nastran. Por último, la tercera parte consiste en el posprocesamiento de los resultados de la simulación, para obtener los valores de esfuerzos y deformaciones en las distintas secciones transversales de los árboles tipificados, los cuales se utilizan para realizar los cálculos de verificación por resistencia mecánica y rigidez. En un caso concreto, estas tres etapas están incluidas en un proceso iterativo, que termina cuando se alcanza el factor de seguridad deseado y, por tanto, con un diseño optimizado.
- Se realizó la verificación del algoritmo implementado. Al respecto, se desarrollaron dos ejemplos de aplicación relevantes, los cuales fueron resueltos mediante el programa implementado en la tesis y, a su vez, por métodos convencionales o analíticos, con el fin de comparar los resultados obtenidos. En el primer ejemplo, se diseñaron los árboles de una caja reductora de una etapa, 126,8 kW y engranajes helicoidales; mientras que, en el segundo ejemplo, se diseñaron los árboles de una caja reductora de dos etapas, 340,0 kW y engranajes rectos. Por un lado, el FS por resistencia en todos los árboles diseñados, según el algoritmo implementado, oscila entre 2,1 y 3,5; mientras que por el método analítico varía entre 1,8 y 3,2. Al respecto, se puede apreciar que el FS por métodos convencionales llega incluso, en algunos casos, a ser menor al recomendado ($FS_R = 2$). Ahora bien, la tendencia muestra que los FS obtenidos mediante el algoritmo son mayores a los obtenidos mediante métodos convencionales. Por otro lado, la

deflexión presente en los árboles diseñados oscila entre 7 y 52 μm mediante el algoritmo implementado, mientras que mediante el teorema de Castigliano estos varían entre 10 y 213 μm ; así como el desplazamiento angular oscila entre $0,0014^\circ$ y $0,0469^\circ$ mediante el algoritmo, y varía $0,0025^\circ$ y $0,1198^\circ$ mediante el teorema de Castigliano. Asimismo, el desplazamiento torsional en todos los árboles varía entre $0,0199^\circ$ y $0,1431^\circ$ según el algoritmo, mientras que entre $0,0234^\circ$ y $0,1290^\circ$ mediante métodos analíticos. Al respecto, se puede apreciar que la tendencia muestra que los valores de desplazamiento obtenidos mediante el algoritmo suelen ser menores a los obtenidos mediante métodos analíticos. En conclusión, es visible que la tendencia es similar en todos los árboles diseñados, lo que indica que se logra disminuir (minimizar) el volumen de material y, a su vez, evidencia el carácter conservador de los métodos convencionales.



Recomendaciones

- A partir de esta investigación, se propone a los estudiantes, técnicos e ingenieros replicar la metodología de diseño, parametrización y desarrollo del modelo FEM, a fin de poder automatizar y optimizar el diseño de diversos elementos de máquina y equipos destinados a la industria peruana.
- En el diseño de árboles de transmisión con unión estriada, se obtuvieron valores de deflexión y desplazamiento angular con una diferencia medianamente considerable en los valores obtenidos por el algoritmo implementado y en los calculados por el método analítico. Al respecto, se recomendaría un estudio más profundo de diseño de árboles con uniones estriadas a fin de disminuir la diferencia alcanzada.
- El software en el que se implementó el programa fue Autodesk Inventor 2022, este se actualiza todos los años, pues lanza al mercado nuevas y mejoradas versiones. Esto implica que la versión de la interfaz de programación de aplicaciones (API) también se pueda actualizar y, quizás, permitirá el acceso a nuevas funcionalidades que, actualmente, no están disponibles. En un futuro, se podrían implementar estas novedades en el algoritmo, a fin de mejorar su funcionamiento y, con ello, alcanzar mejores resultados.

Bibliografía

- Bathe, K. (2014). *Finite Element Procedures* (2.º ed.). Prentice-Hall.
- Beliáev, N. V., Bogatirev, I. S., Bulanzh , A. V., Vibornov, P. V., Gadolin, V. L., Govman, N. A., Drozdov, N. A., Zaitsev, L. I., Ivanov, V. N., Korovin, B. I., Lukin, V. I., Morin, I. S., Ogrinchuk, I. A., P lochkina, N. V., Poliakov, D. G., Parguin, D. P., Raspopov, A. G., & Shuvalov, S. A. (1971). *Atlas de elementos de máquinas y mecanismos* (1.º ed). Ediciones CEAC.
- Bhandari, V. B. (2010). *Design of Machine Elements* (3.º ed.). McGraw-Hill.
- Blas, M. (2016). *Desarrollo de un algoritmo para el diseño de carcasas soldadas para cajas reductoras de engranajes cilíndricos*. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Budynas, R., & Nisbett, K. (2011). *Shigley's Mechanical Engineering Design* (9.º ed.). McGraw-Hill.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2001). *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley.
- DIN (Deutsches Institut fur Normung). (1968). *Standard DIN 6885-1:1968-08, Drive Type Fastenings Without Taper Action - Parallel Keys, Keyways, Deep Pattern*.
- DIN (Deutsches Institut fur Normung). (2012a). *Standard DIN 743-1:2012-12, Calculation of load capacity of shafts and axles - Part 1: General*.
- DIN (Deutsches Institut fur Normung). (2012b). *Standard DIN 743-2:2012-12, Calculation of load capacity of shafts and axles - Part 2: Theoretical stress concentration factors and fatigue notch factors*.
- DIN (Deutsches Institut fur Normung). (2023). *Standard DIN 743-3:2023-09, Calculation of load capacity of shafts and axles - Part 3: Strength of materials*.
- DirectIndustry. (2019). *Engranajes a medida*.
<https://www.directindustry.es/fabricante-industrial/engranaje-medida-94071.html>

- ISO (International Organization for Standardization). (1982). *Standard ISO 14:1982-10, Straight-sided splines for cylindrical shafts with internal centering; Dimensions, tolerances and verification.*
- Jiang, W. (2019). *Analysis and Design of Machine Elements* (1.º ed.). JohnWiley & Sons Singapore Pte.
- KHK Stock Gears. (2021). *Gear Forces*.
https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/gear_forces.html
- Klit, P., & Pedersen, N. L. (2014). *Machine Elements Analysis and Design* (2º ed.). Polyteknisk Forlag.
- Lelikov, O. P. (2008). Design of Machine Elements. In *Springer Handbook of Mechanical Engineering* (1.º ed., pp. 327–519). Springer Science & Business Media.
- Mott, R., Vavrek, E., & Wang, J. (2018). *Machine Elements in Mechanical Design* (6.º ed.). Pearson Education.
- Norton, R. L. (2010). *Machine design: An Integrated Approach* (4.º ed.). Prentice-Hall.
- SKF. (2015). *Catálogo de rodamientos SKF*. Grupo SKF.
- Ugural, A. C. (2015). *Mechanical Design of Machine Components* (2.º ed.). Taylor & Francis Group.

Anexo A

DEMOSTRACIONES DE ECUACIONES

I. Ecuación para el recálculo del diámetro en caso de que el factor de seguridad por deformación permanente sea menor al recomendado

Considerando que en la iteración i , el factor de seguridad por deformación permanente no alcanza el valor recomendado, se establece la ecuación para el factor de seguridad en términos correspondientes a la siguiente iteración $i+1$:

$$\frac{1}{FS_{def.R}^2} = \left(\frac{\sigma_{n\text{máx}(i+1)}}{\sigma_{nADM}} + \frac{\sigma_{f\text{máx}(i+1)}}{\sigma_{fADM}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{t\text{máx}(i+1)}}{\tau_{tADM}} \right)^2$$

Ahora bien, el esfuerzo generado por una fuerza axial es inversamente proporcional al d^2 , mientras que el esfuerzo generado por momento flector o torsional es inversamente proporcional al d^3 . Con estas proporciones, se puede establecer una relación entre un valor de esfuerzo en la iteración i respecto a un valor de esfuerzo en la iteración $i+1$, obteniendo:

$$\frac{\sigma_{n\text{máx}(i+1)}}{\sigma_{n\text{máx}(i)}} = \frac{d_i^2}{d_{i+1}^2} \quad \frac{\sigma_{f\text{máx}(i+1)}}{\sigma_{f\text{máx}(i)}} = \frac{d_i^3}{d_{i+1}^3} \quad \frac{\tau_{t\text{máx}(i+1)}}{\tau_{t\text{máx}(i)}} = \frac{d_i^3}{d_{i+1}^3}$$

Por ende, al reemplazar los esfuerzos normales, de flexión y torsión en función al nuevo diámetro d_{i+1} la ecuación del factor de seguridad recomendado, se tiene:

$$\frac{1}{FS_{def.R}^2} = \left[\frac{\sigma_{n\text{máx}(i)}}{\sigma_{nADM}} \left(\frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^2 + \frac{\sigma_{f\text{máx}(i)}}{\sigma_{fADM}} \left(\frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^3 \right]^2 + \left[\frac{\tau_{t\text{máx}(i)}}{\tau_{tADM}} \left(\frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^3 \right]^2$$

II. Ecuación para el recálculo del diámetro en caso de que el factor de seguridad por fatiga sea menor al recomendado

Considerando que en la iteración i , el factor de seguridad por fatiga no alcanza el valor recomendado, se establece la ecuación para el factor de seguridad en términos correspondientes a la siguiente iteración $i+1$:

$$\frac{1}{FS_{fat.R}^2} = \left(\frac{\sigma_{f_{a(i+1)}}}{\sigma_{f_{ALT}}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{t_{a(i+1)}}}{\tau_{t_{ALT}}} \right)^2$$

Se conoce que el esfuerzo de flexión alternante y el esfuerzo de torsión son:

$$\sigma_{f_{a(i+1)}} = \sigma_{f_{(i+1)}} \quad \tau_{t_{a(i+1)}} = \frac{\tau_{t_{(i+1)}}}{2}$$

Cuando se cuenta con carga por momento flector o torsional, el esfuerzo es inversamente proporcional al d^3 . Con esta proporción, se puede establecer una relación entre un valor de esfuerzo en la iteración i respecto a un valor de esfuerzo en la iteración $i+1$, obteniendo:

$$\frac{\sigma_{f_{(i+1)}}}{\sigma_{f_{(i)}}} = \frac{d_i^3}{d_{i+1}^3} \quad \frac{\tau_{t_{(i+1)}}}{\tau_{t_{(i)}}} = \frac{d_i^3}{d_{i+1}^3}$$

Por ende, al reemplazar los esfuerzos de flexión y torsión en función al nuevo diámetro d_{i+1} , la ecuación del factor de seguridad recomendado resulta:

$$\frac{1}{FS_{fat.R}^2} = \frac{\sigma_{f_{(i)}}^2}{\sigma_{f_{ALT}}^2} \left(\frac{d_i^3}{d_{i+1}^3} \right)^2 + \frac{\tau_{t_{(i)}}^2}{4\tau_{t_{ALT}}^2} \left(\frac{d_i^3}{d_{i+1}^3} \right)^2$$

Con ello, al despejar el diámetro d_{i+1} , se obtiene la ecuación para calcular un nuevo diámetro en función al primer diámetro y los esfuerzos calculados en la iteración i , siendo:

$$d_{i+1} = d_i \left[FS_{fat.R}^2 \left(\frac{\sigma_{f_{(i)}}^2}{\sigma_{f_{ALT}}^2} + \frac{\tau_{t_{(i)}}^2}{4\tau_{t_{ALT}}^2} \right) \right]^{1/6}$$

III. Ecuaciones para el cálculo de los esfuerzos medios y alternos para esfuerzo por carga axial, por flexión y esfuerzo cortante por torsión en una sección transversal de un árbol de transmisión

El esfuerzo máximo y mínimo en una sección transversal puede calcularse en función a una componente de esfuerzo axial y otra de esfuerzo por flexión. Esto es,

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_n + \sigma_f \quad \sigma_{m\acute{i}n} = \sigma_n - \sigma_f$$

De las ecuaciones anteriores, se puede despejar σ_n y σ_f para obtener sus valores.

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{min}) \quad \sigma_f = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

Ahora bien, en caso de la carga axial, la cual genera un esfuerzo de tensi3n/compresi3n constante en el tiempo, se obtiene el esfuerzo medio y alterno.

$$\sigma_{n_m} = \frac{\sigma_{n_{sup}} + \sigma_{n_{inf}}}{2} = \frac{\sigma_n + \sigma_n}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right)}{2}$$

$$\sigma_{n_m} = \frac{1}{2}(\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{min})$$

$$\sigma_{n_a} = \frac{\sigma_{n_{sup}} - \sigma_{n_{inf}}}{2} = \frac{\sigma_n - \sigma_n}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right)}{2}$$

$$\sigma_{n_a} = 0$$

Mientras que el momento por flexi3n genera un esfuerzo alternante en el tiempo, por lo que se obtiene el siguiente esfuerzo medio y alterno.

$$\sigma_{f_m} = \frac{\sigma_{f_{sup}} + \sigma_{f_{inf}}}{2} = \frac{(+\sigma_f) + (-\sigma_f)}{2} = \frac{\left(+\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right)}{2}$$

$$\sigma_{f_m} = 0$$

$$\sigma_{f_a} = \frac{\sigma_{f_{sup}} - \sigma_{f_{inf}}}{2} = \frac{(+\sigma_f) - (-\sigma_f)}{2} = \frac{\left(+\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{max} - \sigma_{min})\right)}{2}$$

$$\sigma_{f_a} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

Por 3ltimo, el esfuerzo cortante por torsi3n se considera pulsante en el tiempo, para lo cual se obtiene el esfuerzo medio y alterno.

$$\tau_{t_m} = \frac{\tau_{t_{sup}} + \tau_{t_{inf}}}{2} = \frac{\tau_{m\acute{a}x} + 0}{2}$$

$$\tau_{t_m} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{2}$$

$$\tau_{ta} = \frac{\tau_{t_{sup}} - \tau_{t_{inf}}}{2} = \frac{\tau_{m\acute{a}x} - 0}{2}$$

$$\tau_{ta} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{2}$$

IV. Ecuaciones para el cálculo de las reacciones en el árbol producidas por una transmisión por faja en V

Se presenta el diagrama de cuerpo libre, el cual se muestra en la Figura A1, de la polea conectada al árbol de entrada a fin de obtener los valores de las reacciones sobre el árbol de transmisión en función a los valores de tensión en la faja y la fuerza centrufuga.

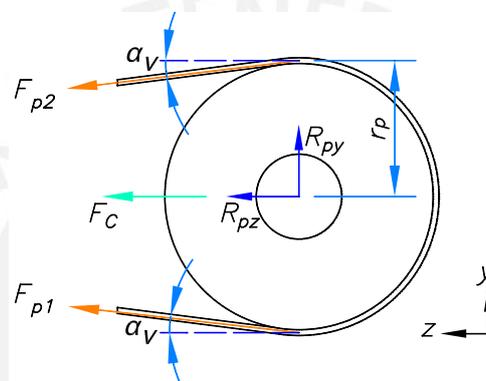


Figura A1 – Diagrama de cuerpo libre de una polea mayor.

Al realizar sumatoria de fuerzas en ambos ejes, se obtienen las reacciones:

$$\sum F_z: F_{p1} \cos(\alpha_V) + F_{p2} \cos(\alpha_V) + F_C + R_{pz} = 0$$

$$R_{pz} = -(F_{p1} + F_{p2}) \cos(\alpha_V) - F_C$$

$$\sum F_y: F_{p1} \sen(\alpha_V) - F_{p2} \sen(\alpha_V) + R_{py} = 0$$

$$R_{py} = -(F_{p1} - F_{p2}) \sen(\alpha_V)$$

V. Ecuaciones para el cálculo de las reacciones en el árbol producidas por una transmisión por cadena de rodillos

Se presenta el diagrama de cuerpo libre, el cual se muestra en la Figura A2, de la polea conectada al árbol de salida a fin de obtener los valores de reacciones sobre el árbol de transmisión en función al valor de tensión en la cadena y a la fuerza centrufuga.

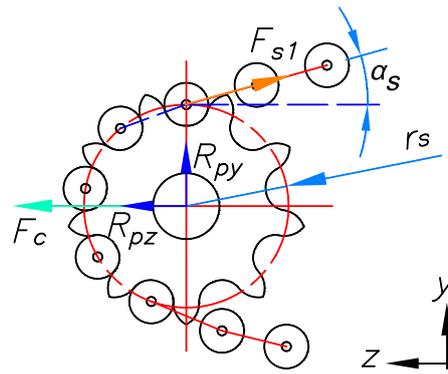


Figura A2 – Diagrama de cuerpo libre de un sprocket.

Al realizar sumatoria de fuerzas en ambos ejes, se obtienen las reacciones:

$$\sum F_z: -F_{s1} \cos(\alpha_s) + F_c + R_{pz} = 0$$

$$R_{pz} = F_{1s} \cos(\alpha_s) - F_c$$

$$\sum F_y: F_{s1} \sin(\alpha_s) + R_{py} = 0$$

$$R_{py} = -F_{1s} \sin(\alpha_s)$$

VI. Ecuación para calcular la posición axial del par de engranajes en una caja reductora de una etapa

En la Figura A3, se presenta el modelo de caja reductora de una etapa.

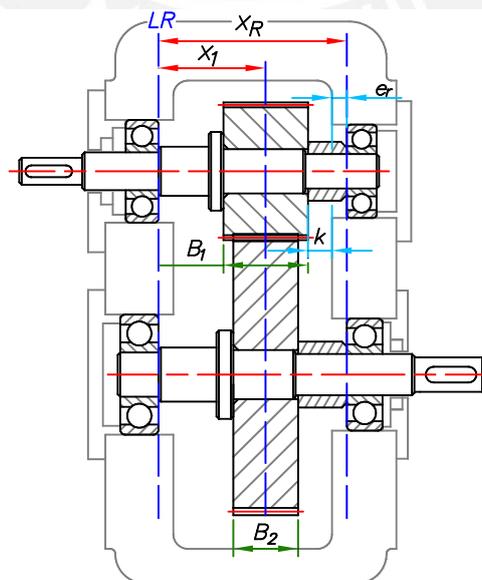


Figura A3 – Caja reductora de una etapa.

Del árbol de entrada se puede obtener la siguiente ecuación:

$$x_1 + \frac{B_1}{2} + (k + e_r) = x_R \quad \dots (1)$$

La condición establecida para esta caja reductora es que el par de engranajes se encuentre en el medio de la caja reductora, esto se puede traducir en otra ecuación:

$$x_1 = \frac{x_R}{2} \quad \dots (2)$$

Así, resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$x_1 = (e_r + k) + \left(\frac{B_1}{2}\right)$$

$$x_R = (2e_r + 2k) + (B_1)$$

VII. Ecuaciones para calcular la posición axial de los pares de engranajes en una caja reductora de dos etapas

En la Figura A4, se plantea el modelo de la caja reductora de dos etapas.

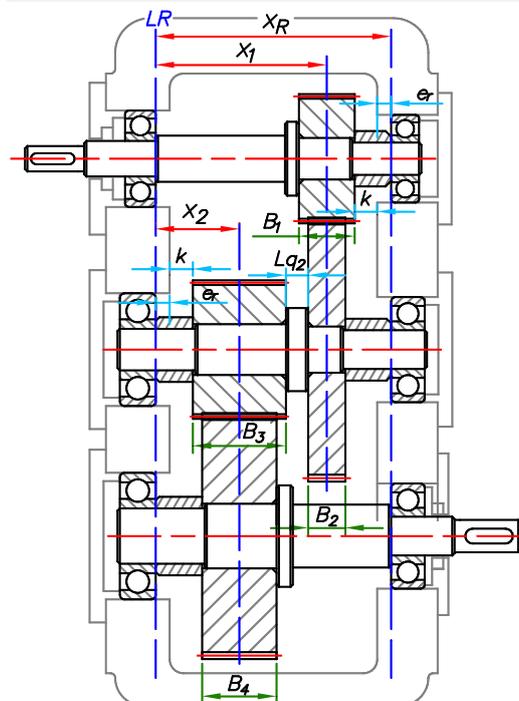


Figura A4 – Caja reductora de dos etapas.

Del árbol de entrada se puede obtener la siguiente ecuación:

$$x_1 + \frac{B_1}{2} + (k + e_r) = x_R \quad \dots (1)$$

Del árbol intermedio se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(e_r + k) + \frac{B_2}{2} = x_2 \quad \dots (2)$$

$$x_2 + \frac{B_3}{2} + Lq_2 + \frac{B_2}{2} = x_R \quad \dots (3)$$

De modo que resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene:

$$x_1 = (e_r + k + Lq_2) + \left(\frac{B_2}{2} + B_3\right)$$

$$x_2 = e_r + k + \frac{B_3}{2}$$

$$x_R = (2e_r + 2k + Lq_2) + \left(\frac{B_1 + B_2}{2} + B_3\right)$$

VIII. Ecuaciones para calcular la posición axial de los pares de engranajes en una caja reductora de tres etapas

En la Figura A5, se plantea el modelo de la caja reductora de tres etapas.

Del árbol de entrada se puede obtener la siguiente ecuación:

$$x_1 + \frac{B_1}{2} + (k + e_r) = x_R \quad \dots (1)$$

Del primer árbol intermedio se puede obtener la siguiente ecuación:

$$(e_r + k) + \frac{B_2}{2} = x_2 \quad \dots (2)$$

Del segundo árbol intermedio se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$x_2 + \frac{B_4}{2} + Lq_3 + \frac{B_5}{2} = x_3 \quad \dots (3)$$

$$x_3 + \frac{B_5}{2} + (k + e_r) = x_R \quad \dots (4)$$

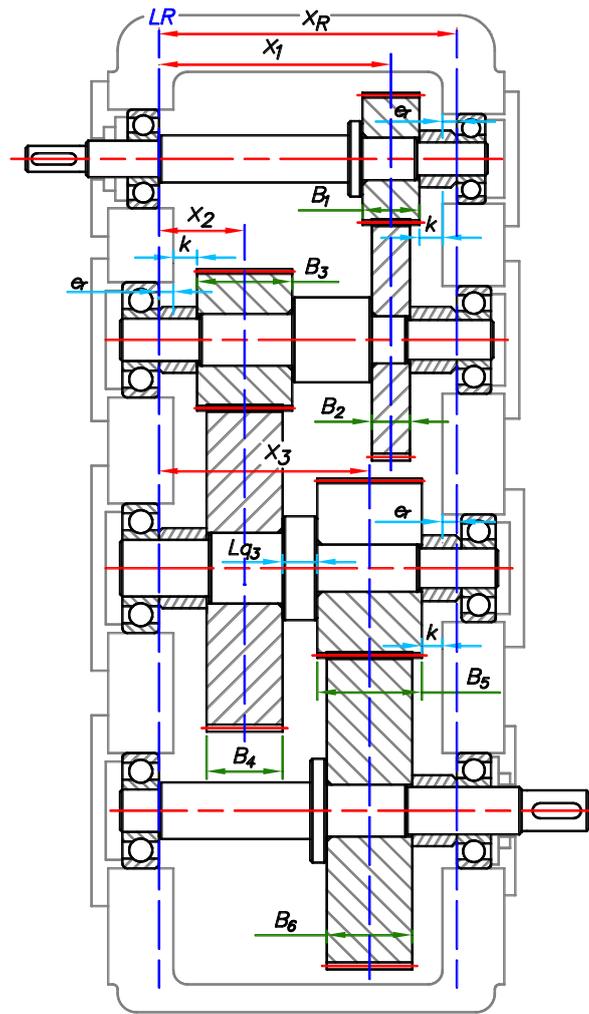


Figura A5 – Caja reductora de tres etapas.

De modo que, resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2), (3) y (4), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = (e_r + k + Lq_3) + \left(\frac{B_3 + B_4 - B_1}{2} + B_5 \right)$$

$$x_2 = e_r + k + \frac{B_3}{2}$$

$$x_3 = (e_r + k + Lq_3) + \left(\frac{B_3 + B_4 + B_5}{2} \right)$$

$$x_R = (2e_r + 2k + Lq_3) + \left(\frac{B_3 + B_4}{2} + B_5 \right)$$

IX. Ecuación para calcular la posición de la fuerza que equivale el momento torsor

Se busca calcular la distancia p_{ch} desde el centro del árbol hasta la fuerza generada por la fuerza tangencial sobre el árbol de transmisión.

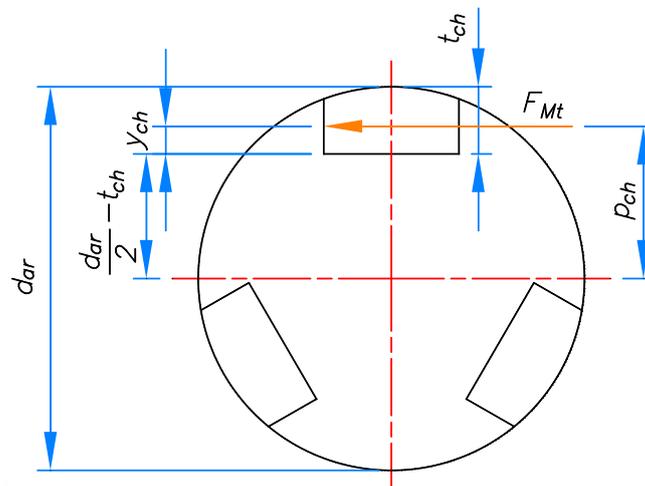


Figura A6 – Diagrama de la fuerza generada por el momento tangencial.

Tal como muestra la Figura A6, la distancia requerida se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$p_{ch} = \frac{d_{ar}}{2} - t_{ch} + y_{ch}$$

Para calcular la distancia y_{ch} , se analiza el triángulo rectángulo en la Figura A7.

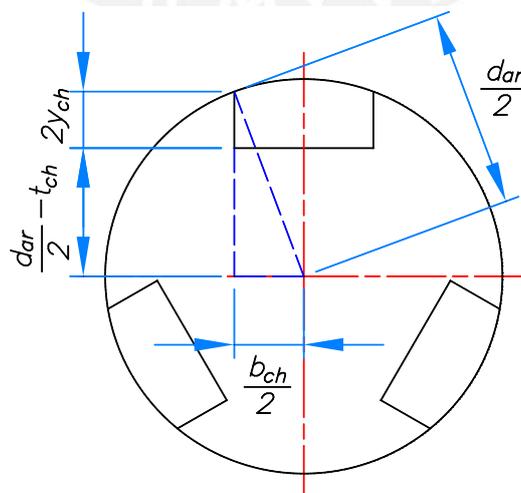


Figura A7 – Gráfico para calcular el alto de la pared del canal chavetero.

En ese triángulo rectángulo, se aplica el Teorema de Pitágoras y se despeja el valor de y_{ch} .

$$\left(\frac{d_{ar}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b_{ch}}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_{ar}}{2} - t + 2y_{ch}\right)^2$$

$$y_{ch} = \frac{\sqrt{d_{ar}^2 - b_{ch}^2 + 2t_{ch} - d_{ar}}}{4}$$

Reemplazando este valor en la ecuación para el cálculo de la distancia p_{ch} , se obtiene:

$$p_{ch} = \frac{d_{ar}}{2} - t_{ch} + \frac{\sqrt{d_{ar}^2 - b_{ch}^2 + 2t_{ch} - d_{ar}}}{4}$$

X. Ecuación para el cálculo de la fuerza que equivale al momento torsor en uniones por chaveta

En la Figura A8, se plantean dos sistemas de fuerzas equivalentes. El sistema I presenta el DCL del conjunto de engranaje, chavetas y árbol afectadas por la fuerza tangencial en el engranaje (F_t), mientras que el sistema II presenta el DCL del árbol cargado con las fuerzas que equivalen al momento torsor (FM_t).

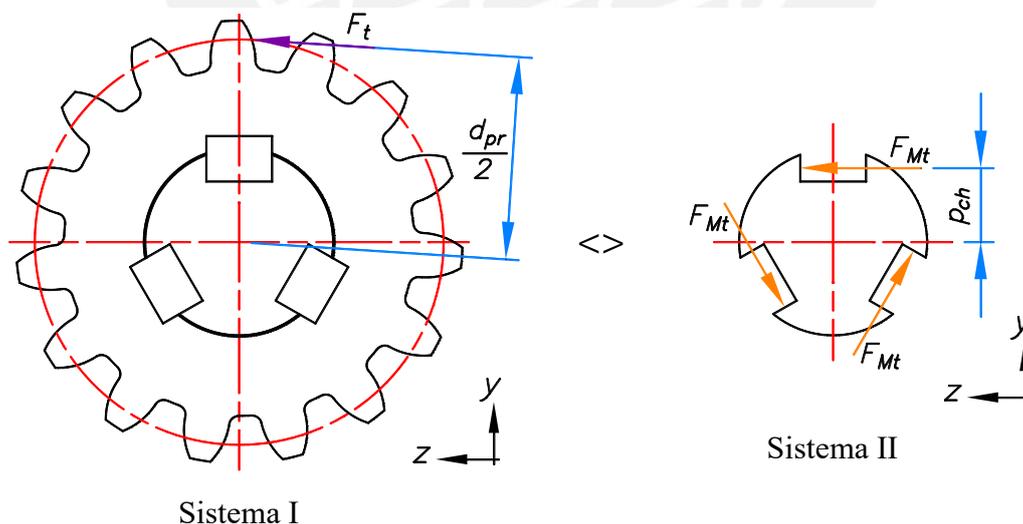


Figura A8 – Diagrama de cuerpo libre de ambos sistemas. Sistema I compuesto de engranaje, chaveta y árbol. Sistema II compuesto del árbol.

Para efectos prácticos, se generaliza el número de chavetas como el número de fuerzas (N_{fu}).

Ahora bien, al ser sistemas equivalentes, se entiende que la sumatoria de momentos respecto al eje “x” es igual en ambos sistemas. De esta manera se obtiene el valor buscado:

$$\sum M_{x(I)} = \sum M_{x(II)}$$

$$\frac{d_{pr}}{2} \cdot F_t = N_{fu} \cdot (p_{ch} \cdot FM_t)$$

$$FM_t = \frac{d_{pr}}{2 \cdot N_{fu} \cdot p_{ch}} \cdot F_t$$

XI. Ecuación para el cálculo de la fuerza que equivale el momento flector en uniones por chaveta y uniones estriada

En la Figura A9, se plantean dos sistemas de fuerzas equivalentes para el caso con unión por chaveta. El sistema I presenta el DCL del conjunto de engranaje y árbol cargado con la fuerza axial en el engranaje (F_a), mientras que el sistema II presenta el DCL del árbol con una unión por chaveta cargado con las fuerzas equivalentes al momento flector (FM_a).

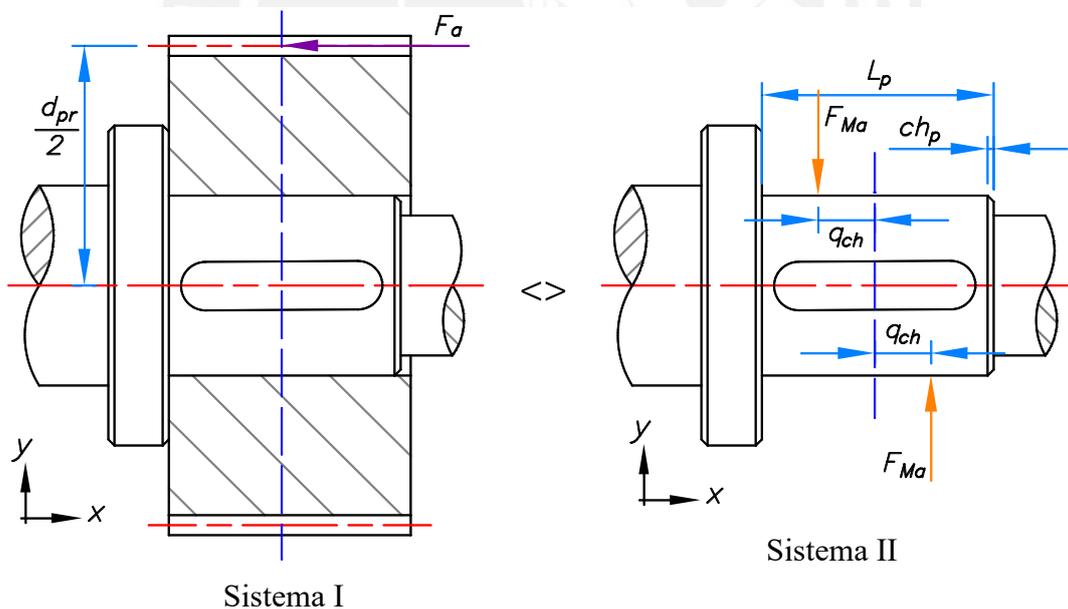


Figura A9 – Diagrama de cuerpo libre de ambos sistemas. Sistema I compuesto de engranaje y árbol. Sistema II compuesto del árbol con una unión por chaveta.

En la Figura A10, se presentan dos sistemas de fuerzas equivalentes para el caso con unión estriada. El sistema I presenta el DCL del conjunto de engranaje y árbol cargado con la fuerza

axial en el engranaje (F_a), mientras que el sistema II presenta el DCL del árbol con una unión estriada cargado con las fuerzas equivalentes al momento flector (FM_a).

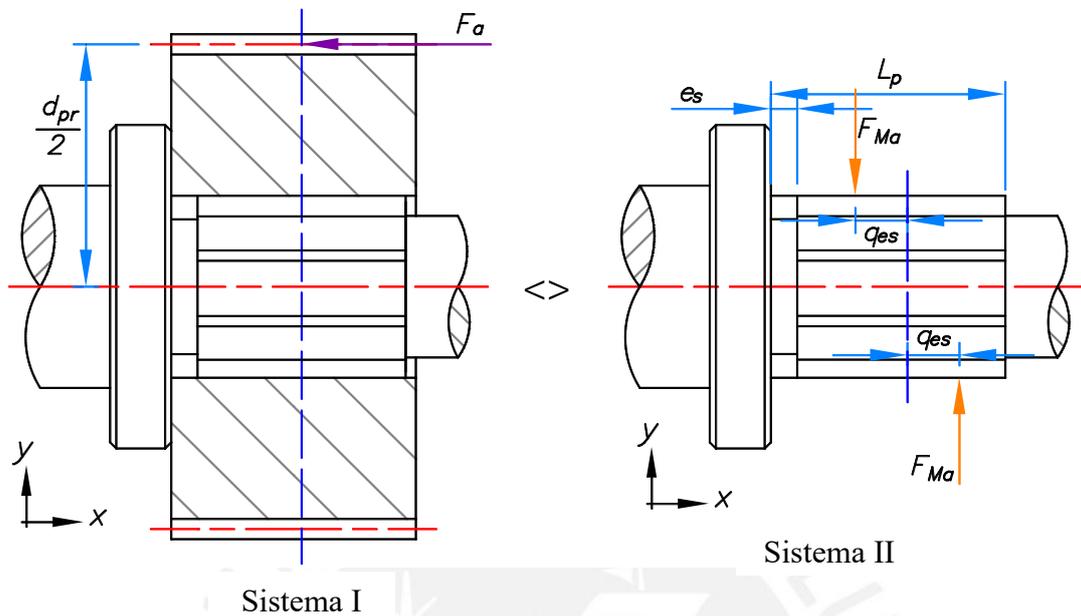


Figura A10 – Diagrama de cuerpo libre de ambos sistemas. Sistema I compuesto de engranaje y árbol. Sistema II compuesto del árbol con una unión estriada.

En ambos casos, en el sistema II se puede establecer las ecuaciones para el cálculo de la posición de la fuerza sobre las caras de contacto de los árboles, siendo q_{ch} para uniones por chaveta y q_{es} para uniones estriadas.

$$q_{ch} = \frac{L_p - ch_p}{4} \quad q_{es} = \frac{L_p - e_s}{4}$$

Para generalizar ambos casos, se considera q_m a una distancia que represente q_{ch} o q_{es} . Ahora bien, al ser sistemas equivalentes, la sumatoria de momentos en ambos sistemas respecto al eje “y” deben ser equivalentes también. De modo que se obtiene lo siguiente:

$$\sum M_{y(I)} = \sum M_{y(II)}$$

$$\frac{d_{pr}}{2} \cdot F_a = 2 \cdot (q_m \cdot FM_a)$$

$$FM_a = \frac{d_{pr}}{4 \cdot q_m} \cdot F_a$$

Anexo B

ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DE LA POSICIÓN AXIAL DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE ANÁLISIS

Elementos de máquinas montados sobre un árbol de transmisión:

Acoplamiento, polea o sprocket: Segmento externo

Rodamiento: Segmento de apoyo

Engranaje: Segmento principal

Tipos de unión en un árbol de transmisión:

Chaveta: Unión por chaveta

Estriado: Unión estriada

Solidario: Piñón solidario al árbol

I. Secciones generales

Árboles de entrada

Tabla B1

Posición axial de secciones transversales de análisis en árboles de entrada.

| Ítem | Sección con | Tipo de unión | Posición axial (mm) |
|------|--------------------------------|-------------------------|---|
| #1 | Acoplamiento, polea o sprocket | - | $x_{p1} = e_{ch.a} + \frac{l_{ch.a}}{2}$ |
| #2 | Rodamiento A | - | $x_{p2} = L_a - (L_{r.A} - r_{r.A})$ |
| #3 | Engranaje | Chaveta B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + \frac{L_{p.B}}{2}$ |
| | | Estriado B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + e_{es.B} + \frac{l_{es.B}}{2}$ |
| | | Solidario B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + \frac{B_{piñ}}{2}$ |
| #4 | Rodamiento B | Chaveta B Estriado B | $x_{p4} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B} + (L_{r.B} - \frac{b_B}{2} - ch_{r.B})$ |
| | | Solidario B | $x_{p4} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + B_{piñ} + L_{p.B} + r_{r.B}$ |

Árboles intermedios

Tabla B2

Posición axial de secciones transversales de análisis en árboles intermedios.

| Ítem | Sección con | Tipo de unión | Posición axial (mm) |
|------|--------------|---------------|--|
| #1 | Rodamiento A | - | $x_{p1} = ch_{r.A} + \frac{b_A}{2}$ |
| #2 | Engranaje A | Chaveta A | $x_{p2} = L_{r.A} + \frac{L_{p.A}}{2}$ |
| | | Estriado A | $x_{p2} = L_{r.A} + \frac{l_{es.A}}{2}$ |
| #3 | Engranaje B | Chaveta B | $x_{p3} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + \frac{L_{p.B}}{2}$ |
| | | Estriado B | $x_{p3} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + e_{es.B} + \frac{l_{es.B}}{2}$ |
| #4 | Rodamiento B | - | $x_{p4} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B} + r_{r.B}$ |

Tabla B3

Posición axial de secciones transversales en árboles intermedios con piñón solidario.

| Ítem | Sección con | Tipo de unión | Posición axial (mm) |
|------|--------------|---------------------------|--|
| #1 | Rodamiento A | - | $x_{p1} = ch_{r.A} + \frac{b_A}{2}$ |
| #2 | Engranaje A | Chaveta A | $x_{p2} = L_{r.A} + \frac{L_{p.A}}{2}$ |
| | | Estriado A | $x_{p2} = L_{r.A} + \frac{l_{es.A}}{2}$ |
| | | Solidario A | $x_{p2} = L_{r.A} + L_{p.A1} + \frac{B_{piñ}}{2}$ |
| #3 | Engranaje B | Solidario B | $x_{p3} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B1} + \frac{B_{piñ}}{2}$ |
| | | Solidario A Chaveta B | $x_{p3} = L_{r.A} + L_{p.A1} + B_{piñ} + L_{p.A2} + L_q + \frac{L_{p.B}}{2}$ |
| | | Solidario A Estriado B | $x_{p3} = L_{r.A} + L_{p.A1} + B_{piñ} + L_{p.A2} + L_q + e_{es.B} + \frac{l_{es.B}}{2}$ |
| #4 | Rodamiento B | Solidario A | $x_{p4} = L_{r.A} + L_{p.A1} + B_{piñ} + L_{p.A2} + L_q + L_{p.B} + r_{r.B}$ |
| | | Solidario B | $x_{p4} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B1} + B_{piñ} + L_{p.B2} + r_{r.B}$ |

Árboles de salida

Tabla B4

Posición axial de secciones transversales en árboles de salida con acoplamiento adyacente a la zona A.

| Ítem | Sección con | Tipo de unión | Posición axial (mm) |
|--------|--------------------------------|---------------|--|
| #1 | Acoplamiento, polea o sprocket | - | $x_{p1} = e_{ch.a} + \frac{l_{ch.a}}{2}$ |
| #2 | Rodamiento A | - | $x_{p2} = L_a - (L_{r.A} - r_{r.A})$ |
| #3 (1) | Engranaje A | Chaveta A | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + \frac{L_{p.A}}{2}$ |
| | | Estriado A | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + \frac{l_{es.A}}{2}$ |
| #3 (2) | Engranaje B | Chaveta B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + \frac{L_{p.B}}{2}$ |
| | | Estriado B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + e_{es.B} + \frac{l_{es.B}}{2}$ |
| #4 | Rodamiento B | - | $x_{p4} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B} + r_{r.B}$ |

Tabla B5

Posición axial de secciones transversales en árboles de salida con acoplamiento adyacente a la zona B.

| Ítem | Sección con | Tipo de unión | Posición axial (mm) |
|--------|--------------------------------|---------------|---|
| #1 | Rodamiento A | - | $x_{p1} = L_{r.A} - r_{r.A}$ |
| #2 (1) | Engranaje A | Chaveta A | $x_{p3} = L_{r.A} + \frac{L_{p.A}}{2}$ |
| | | Estriado A | $x_{p3} = L_{r.A} + \frac{l_{es.A}}{2}$ |
| #2 (2) | Engranaje B | Chaveta B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + \frac{L_{p.B}}{2}$ |
| | | Estriado B | $x_{p3} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + e_{es.B} + \frac{l_{es.B}}{2}$ |
| #3 | Rodamiento B | - | $x_{p4} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B} + r_{r.B}$ |
| #4 | Acoplamiento, polea o sprocket | - | $x_{p4} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B} + \left(L_a - e_{ch.a} - \frac{l_{ch.a}}{2} \right)$ |

II. Secciones específicas

Tabla B6

Posición axial de secciones transversales específicas en los árboles tipificados.

| Árbol tipificado | Zona de la sección | Posición axial (mm) |
|------------------|--------------------|--|
| #1 | Acoplamiento ACO | $x_{s5} = L_a - r_a$ |
| #2 | Principal B | $x_{s5} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + r_{p.B}$ |
| #3 | Principal A | $x_{s5} = L_a + L_{r.A} + L_{p.A} - r_{p.A}$ |
| #4 | Acoplamiento ACO | $x_{s5} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + L_{p.B} + L_{r.B} + r_a$ |
| #5 | Rodamiento A | $x_{s5} = L_{r.A} - r_{r.A}$ |
| #6 | Principal A | $x_{s5} = L_{r.A} + L_{p.A} - e_{ch.A} - \frac{b_{ch.A}}{4}$ |
| #7 | Principal A | $x_{s5} = L_{r.A} + L_{p.A} - r_{p.B}$ |
| | Principal B | $x_{s6} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + r_{p.B}$ |
| #8 | Principal B | $x_{s5} = L_{r.A} + L_{p.A} + L_q + r_{p.B}$ |
| #9 | Principal A | $x_{s5} = L_{r.A} + L_{p.A} - r_{p.A}$ |
| #10 | Principal B | $x_{s5} = L_{r.A} + L_{p.A1} + B_{piñ} + L_{p.A2} + L_q + r_{p.B}$ |

Anexo C

VENTANAS DE LA INTERFAZ DE TRABAJO

La información presentada en las ventanas no representa ningún ejemplo en particular y solo están presentes de manera ilustrativa.

I. Ventanas para el ingreso de datos

Figura C1 – Ventana de nuevo trabajo

Figura C2 – Ventana de datos generales y datos del material.

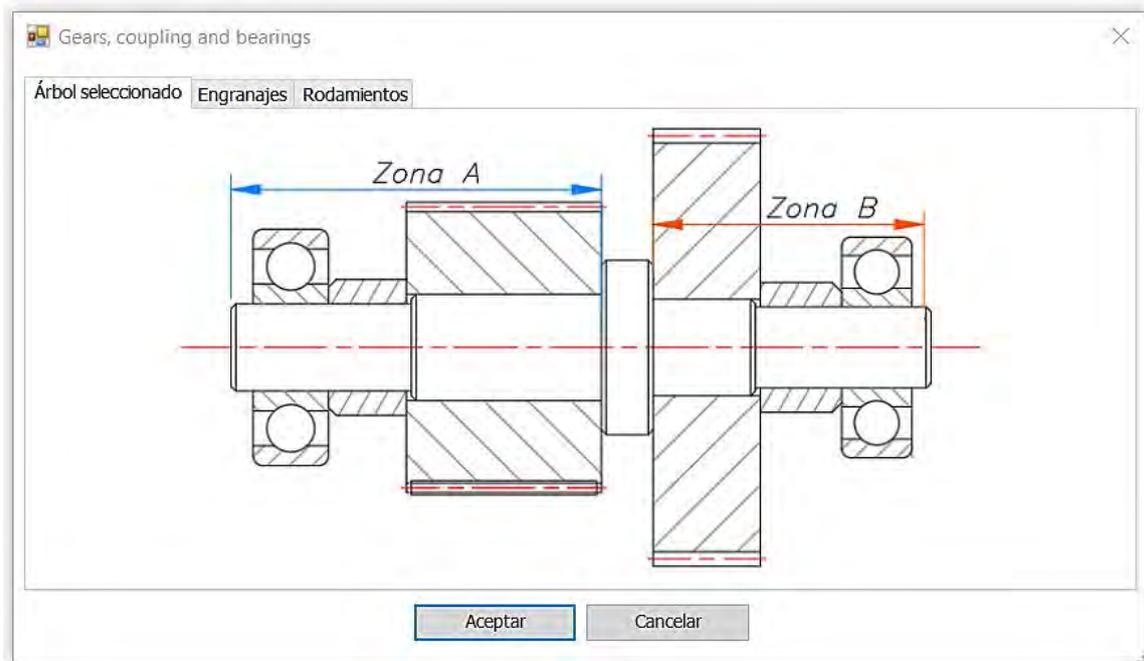


Figura C3 – Ventana de datos específicos / Pestaña que muestra el árbol seleccionado.

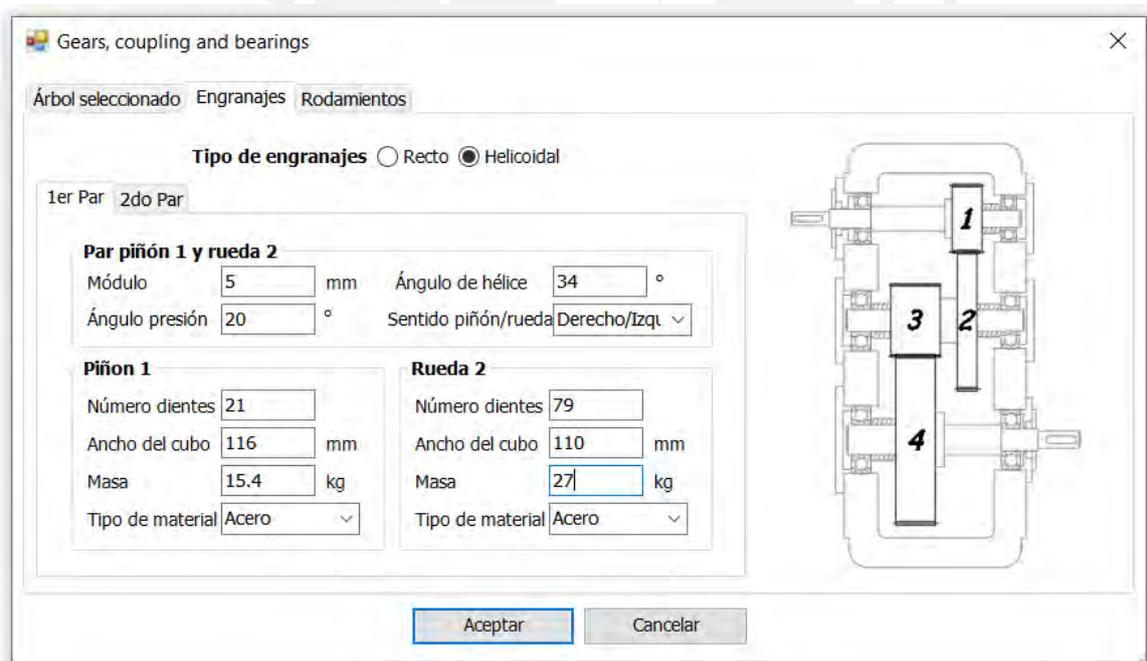


Figura C4 – Ventana de datos específicos / Pestaña de valores relevantes a los engranajes.

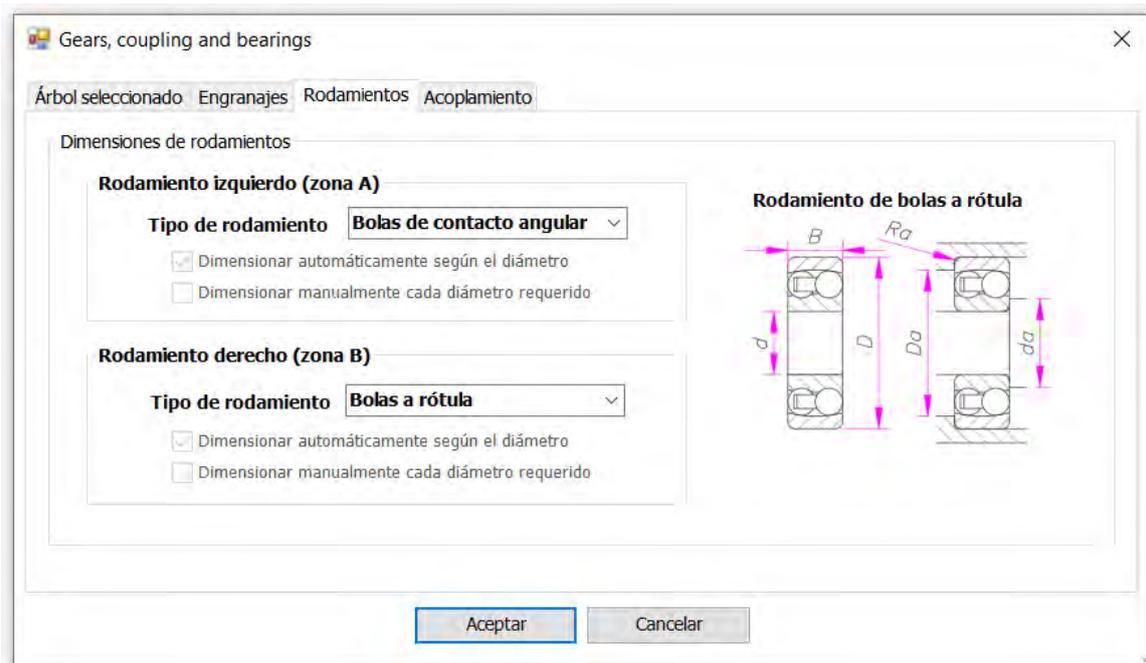


Figura C5 – Ventana de datos específicos / Pestaña de rodamientos.

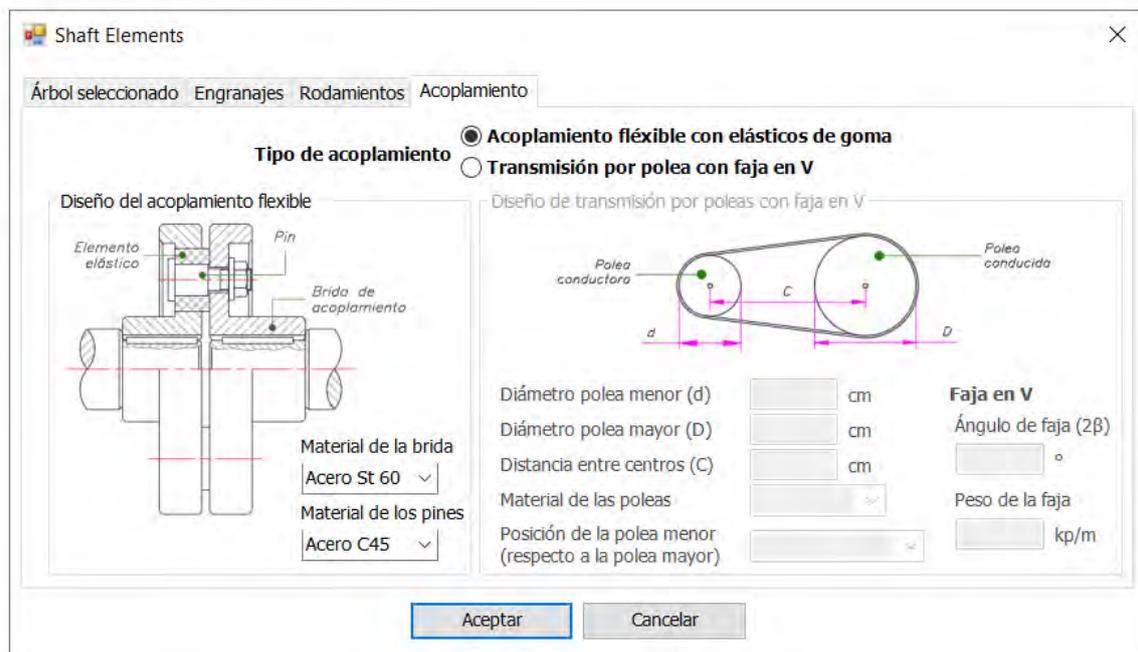


Figura C6 – Ventana de datos específicos / Pestaña de acoplamiento o faja en V.

II. Ventanas para la salida de datos

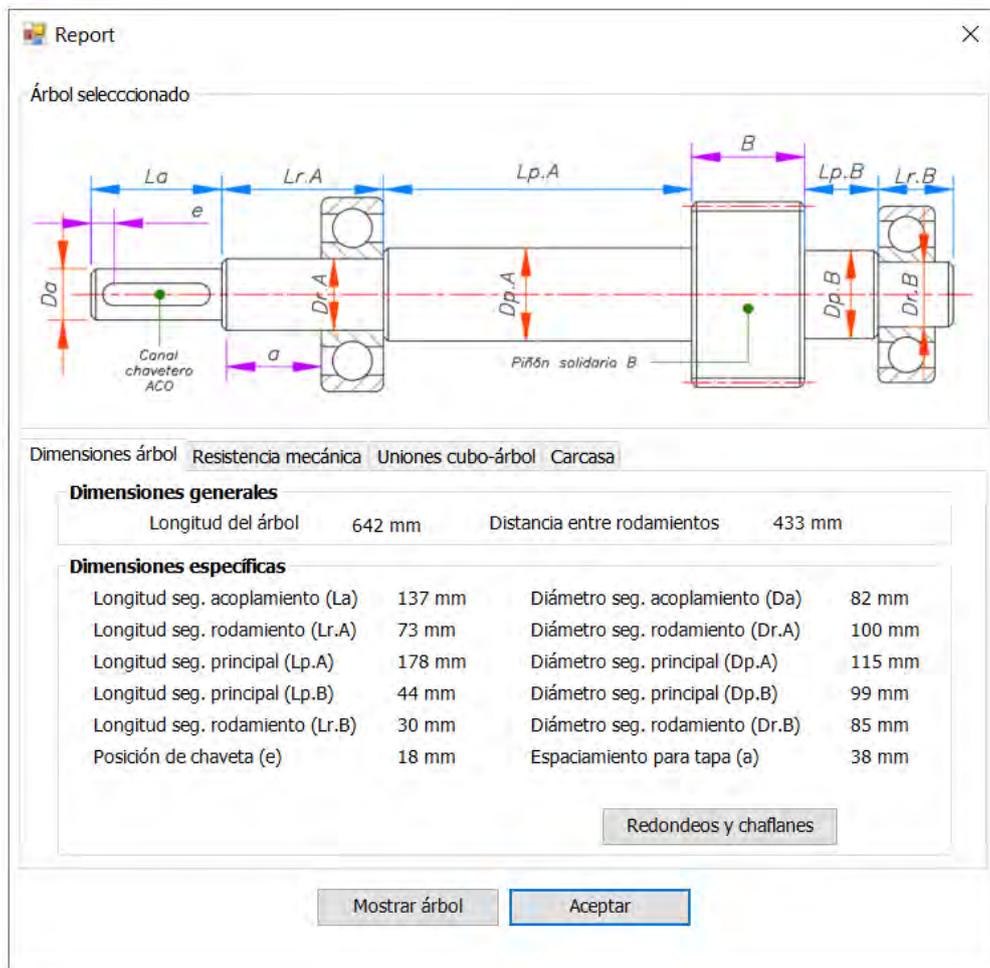


Figura C7 – Ventana de resultados / Pestaña de dimensiones del árbol.

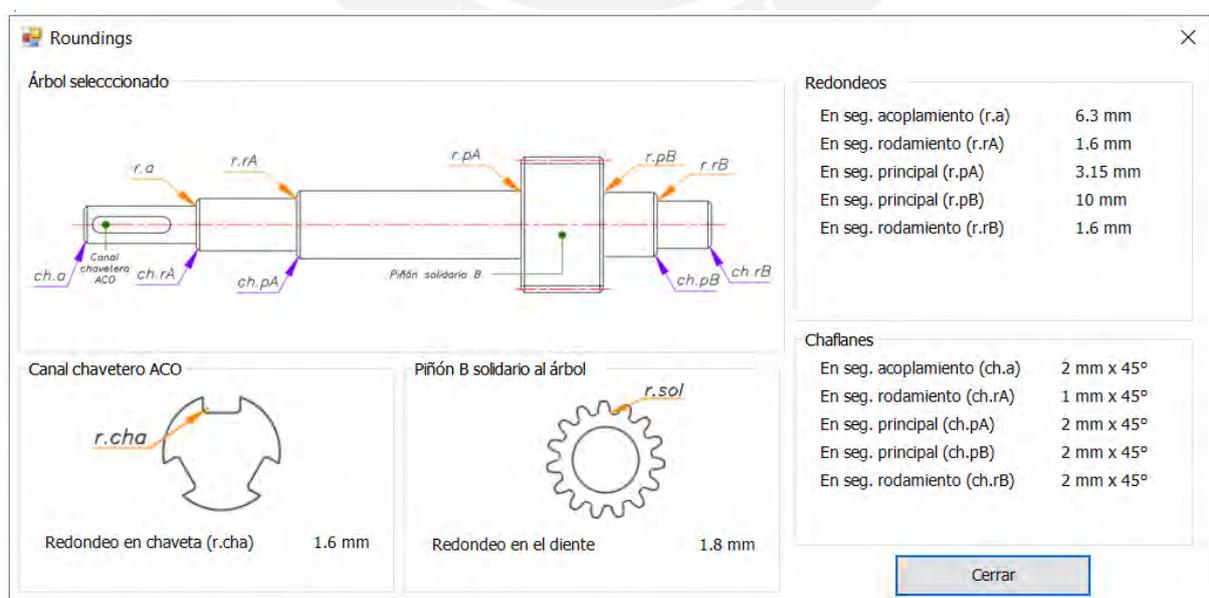


Figura C8 – Ventana de redondeos y chaflanes.

Dimensiones árbol | Resistencia mecánica | Uniones cubo-árbol | Acoplamiento flexible | Carcasa

| | | |
|---|--|---|
| <p>Von Mises</p> <p>Esfuerzo máx. 189.6 MPa</p> <p>Factor de seguridad 2.11</p> | <p>Deflexiones</p> <p>Deflexión máxima 28 μm</p> <p>Deflexión acoplamiento 12 μm</p> <p>Deflexión engranaje B 25 μm</p> | <p>Desplazamientos angulares</p> <p>Despl. angular acoplamiento 0.012°</p> <p>Despl. angular rodamiento A 0.0024°</p> <p>Despl. angular engranaje B 0.0059°</p> <p>Despl. angular rodamiento B 0.0076°</p> |
| <p>DIN 743</p> <p>FS (def. perm.) 2.36</p> <p>FS (fatiga) 2.17</p> <p>Detalles</p> | <p>Velocidad crítica</p> <p>5928 RPM</p> | <p>Desplazamiento torsional</p> <p>0.1269°</p> |

Figura C9 – Pestaña de resistencia mecánica.

Safety Factors

Factores de seguridad según DIN743

| Segmento | FS (deformación permanente) | FS (fatiga) |
|------------------------------|-----------------------------|-------------|
| Segmento con esfuerzo máximo | 3.68 | 1.7 |
| Segmento con polea | 2.37 | 2.35 |
| Segmento con rodamiento A | 4.65 | 5.64 |
| Segmento con engranaje | 10.9 | 6.44 |
| Segmento con rodamiento B | 4.94 | 5.26 |

Cerrar

Figura C10 – Ventana de factores de seguridad según DIN 743.

Dimensiones árbol | Resistencia mecánica | Uniones cubo-árbol | Anillos separadores | Carcasa

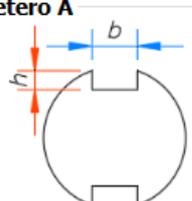
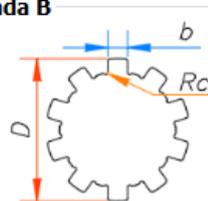
| | |
|---|---|
| <p>Canal chavetero A</p>  <p>Chaveta DIN 6885 36x20x125</p> <p>Número de chavetas 2</p> <p>Ancho (b) 36 mm</p> <p>Alto (h) 20 mm</p> <p>Largo de chaveta 125 mm</p> | <p>Unión estriada B</p>  <p>Unión estriada 10x142x152</p> <p>Número de dientes 10</p> <p>Diámetro mayor (Dma) 152 mm</p> <p>Diámetro menor (Dme) 142 mm</p> <p>Ancho diente (b) 24 mm</p> <p>Radio círculo (Rc) 1.9 mm</p> |
|---|---|

Figura C11 – Pestaña con las uniones para transmitir potencia.

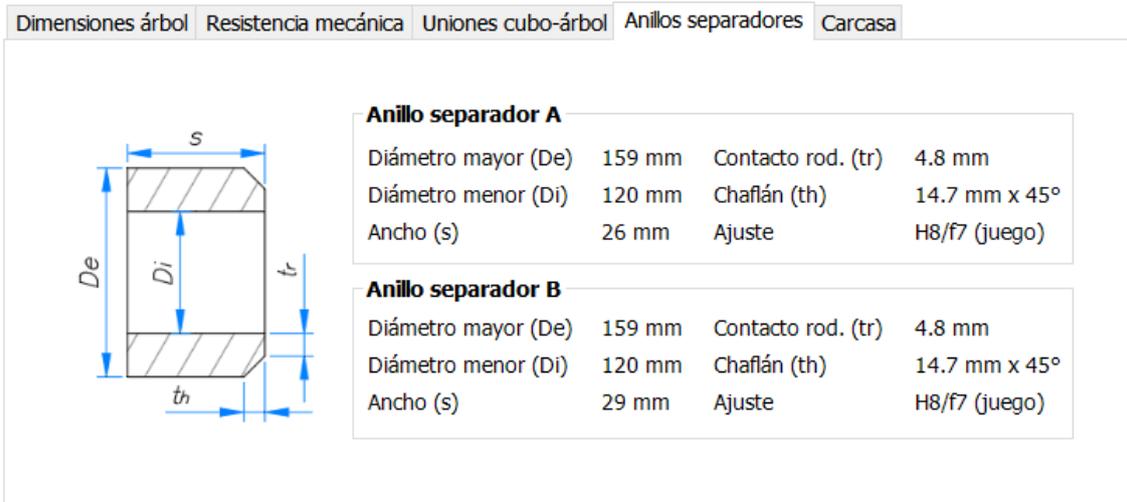


Figura C12 – Pestaña con los anillos separadores diseñados.

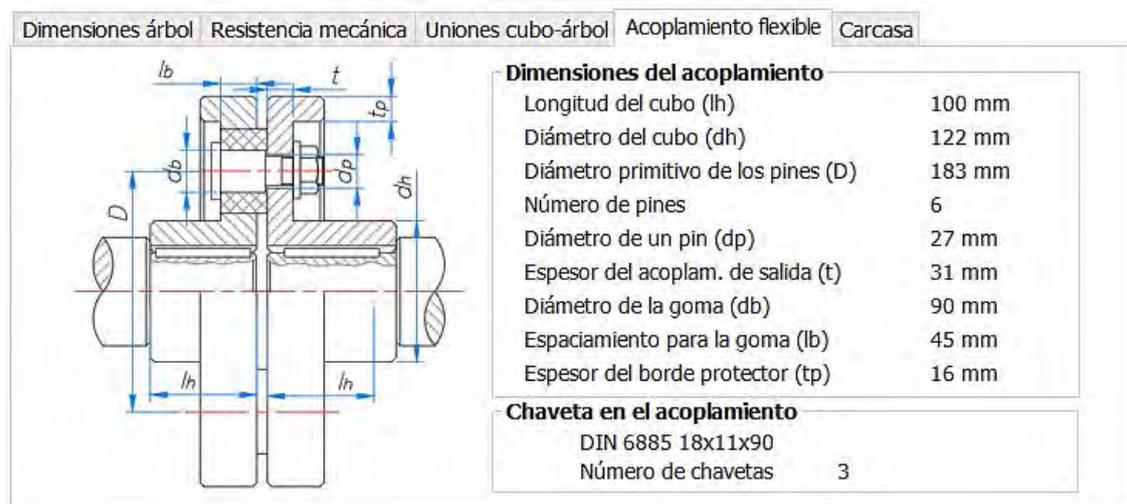


Figura C13 – Pestaña con un acoplamiento flexible diseñado.

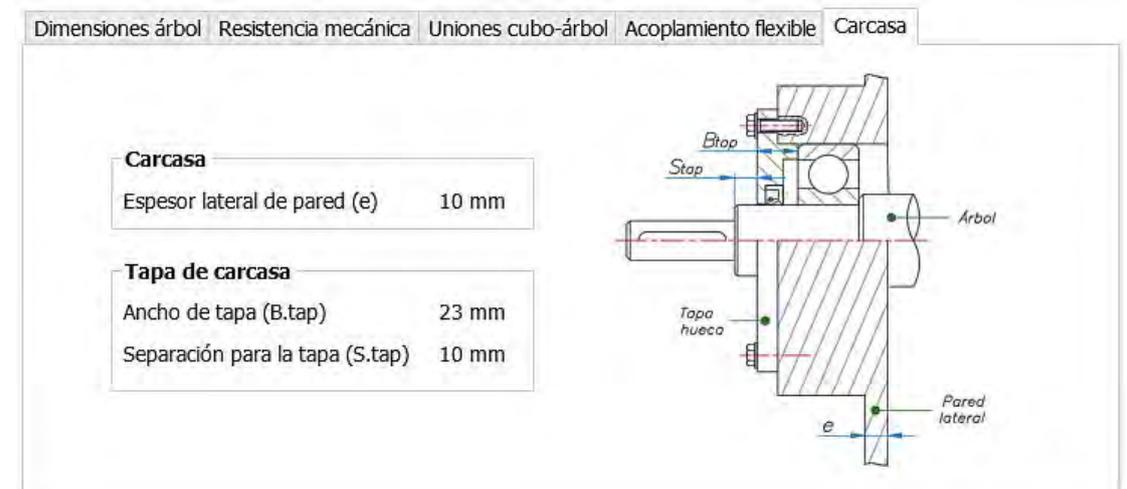


Figura C14 – Pestaña con valores relevantes a la carcasa.

Anexo D

ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE LOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN

I. Ejemplo de aplicación 1

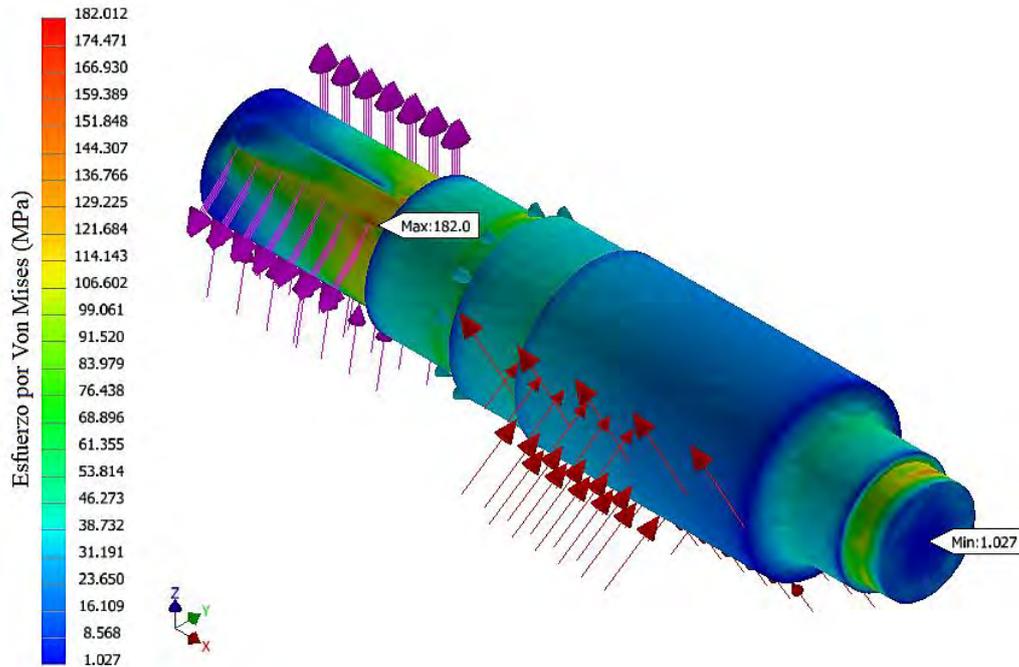


Figura D1 – Modelo FEM resuelto del árbol de entrada del ejemplo de aplicación 1.

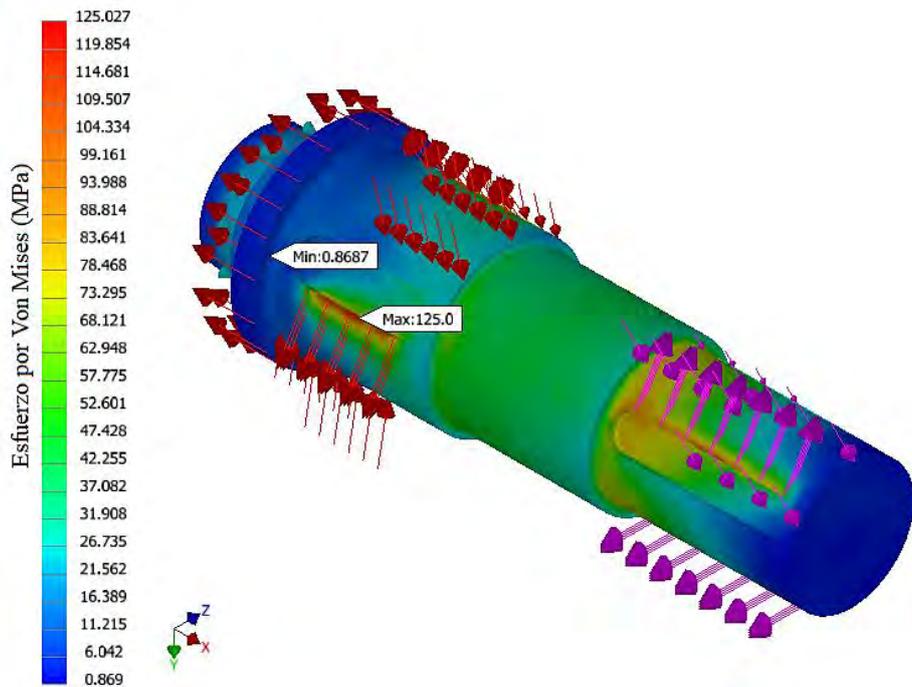


Figura D2 – Modelo FEM resuelto del árbol de salida del ejemplo de aplicación 1.

II. Ejemplo de aplicación 2

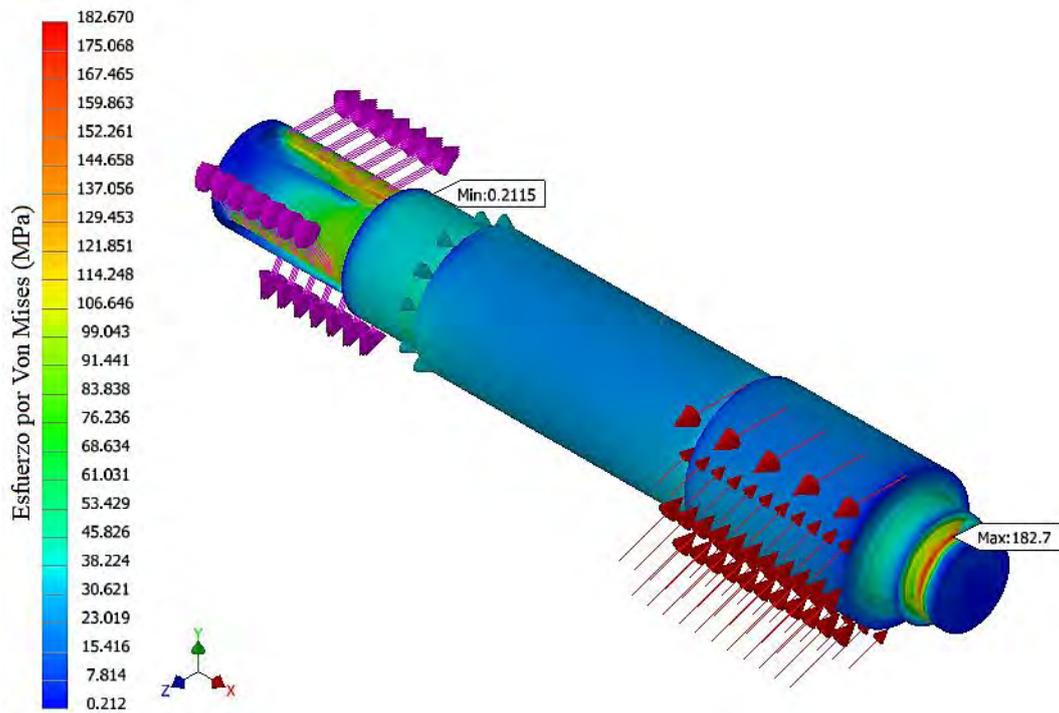


Figura D3 – Modelo FEM resuelto del árbol de entrada del ejemplo de aplicación 2.

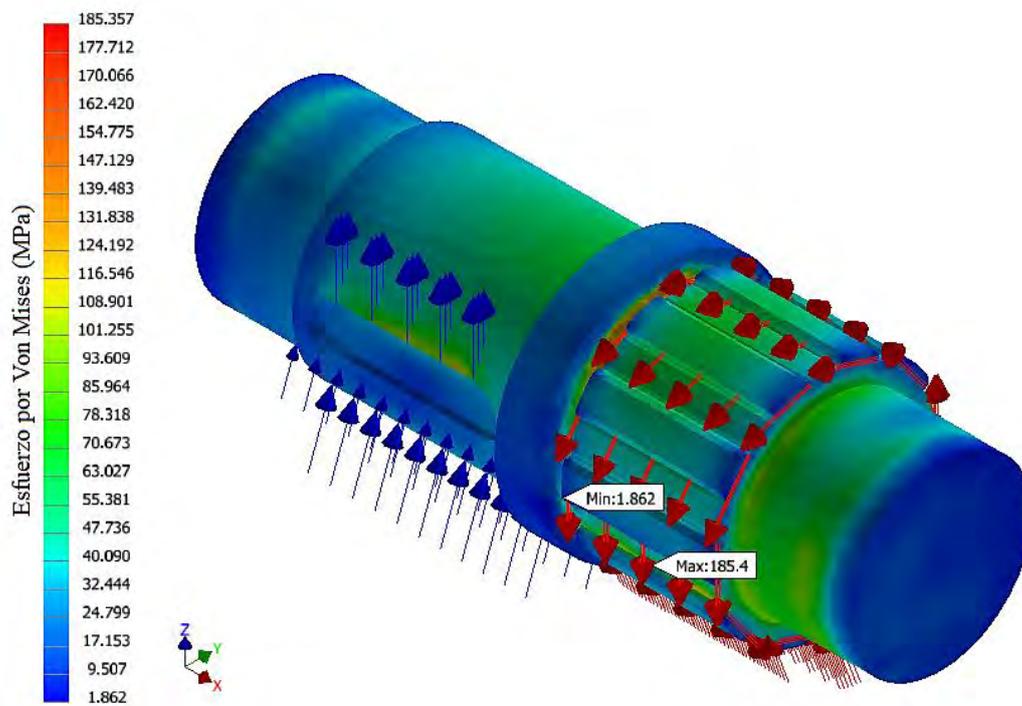


Figura D4 – Modelo FEM resuelto del árbol intermedio del ejemplo de aplicación 2.

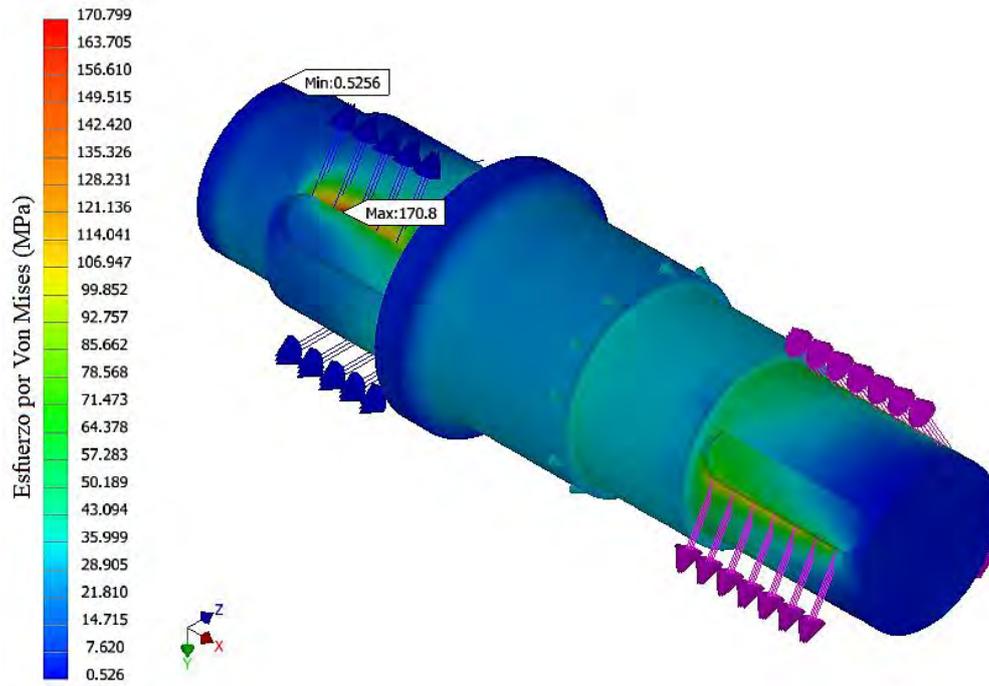
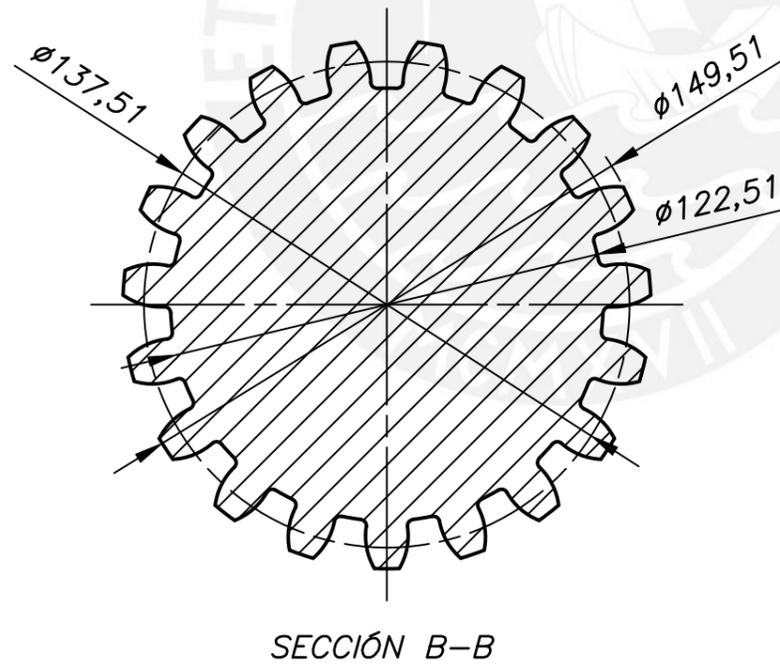
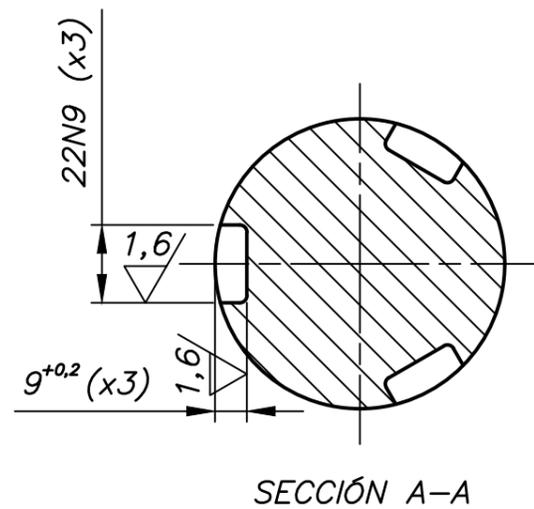
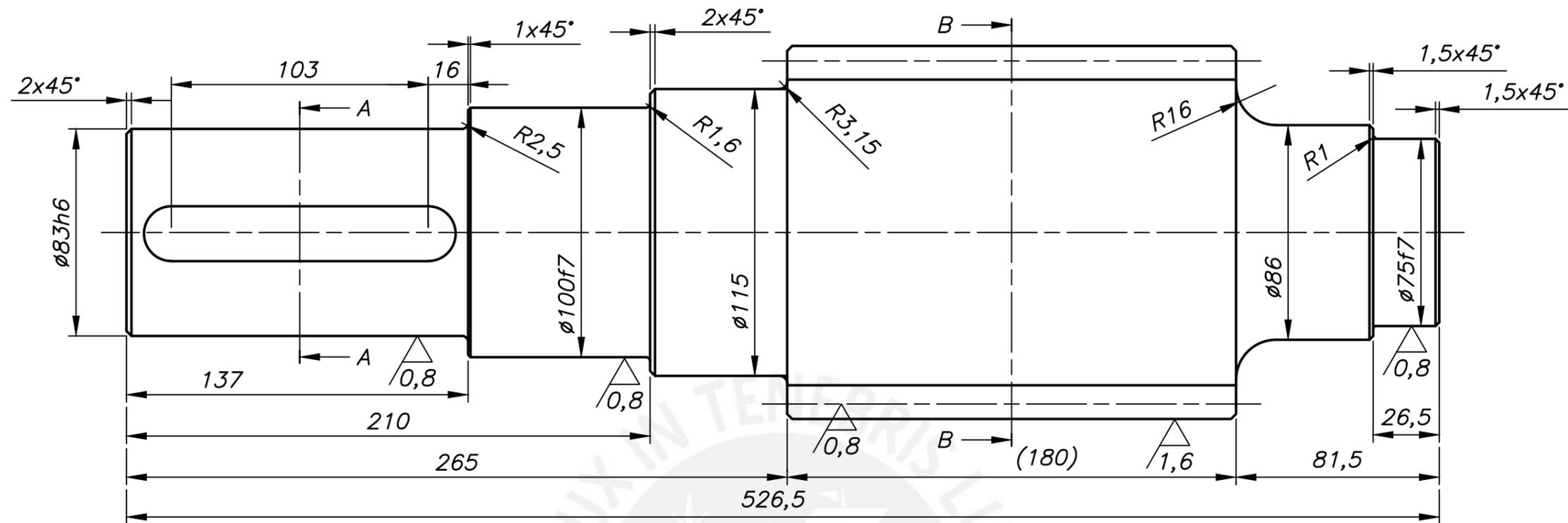


Figura D5 – Modelo FEM resuelto del árbol de salida del ejemplo de aplicación 2.

Anexo E

PLANOS DE DISEÑO DE LOS ÁRBOLES EN LOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN





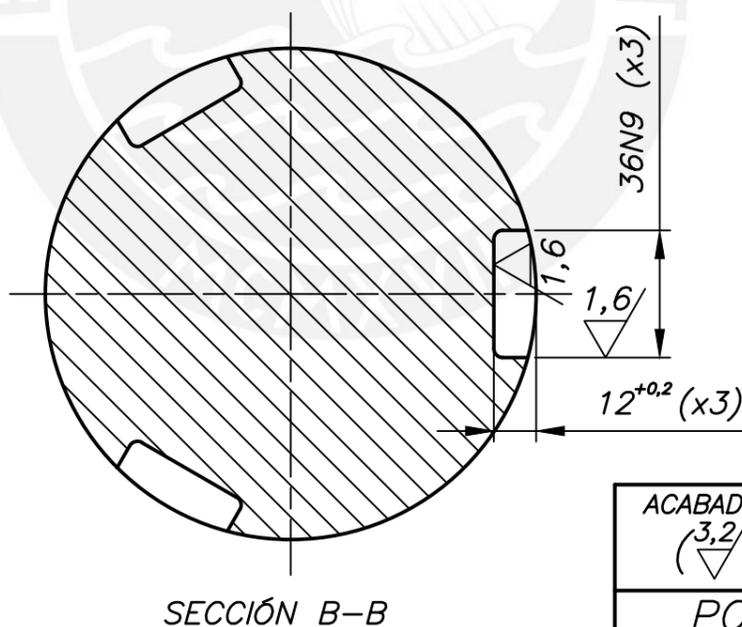
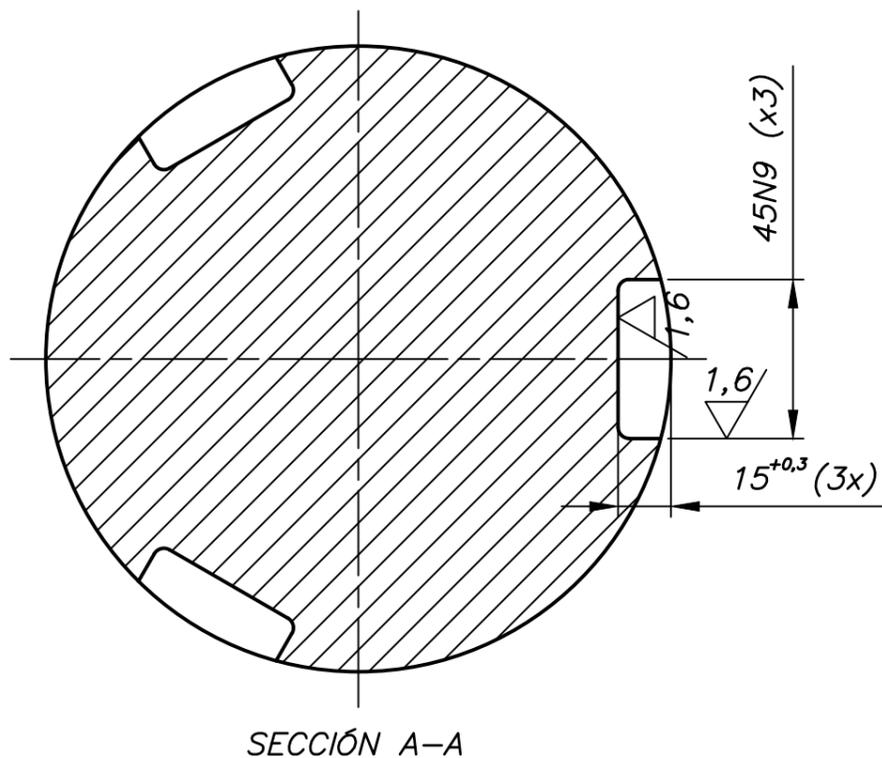
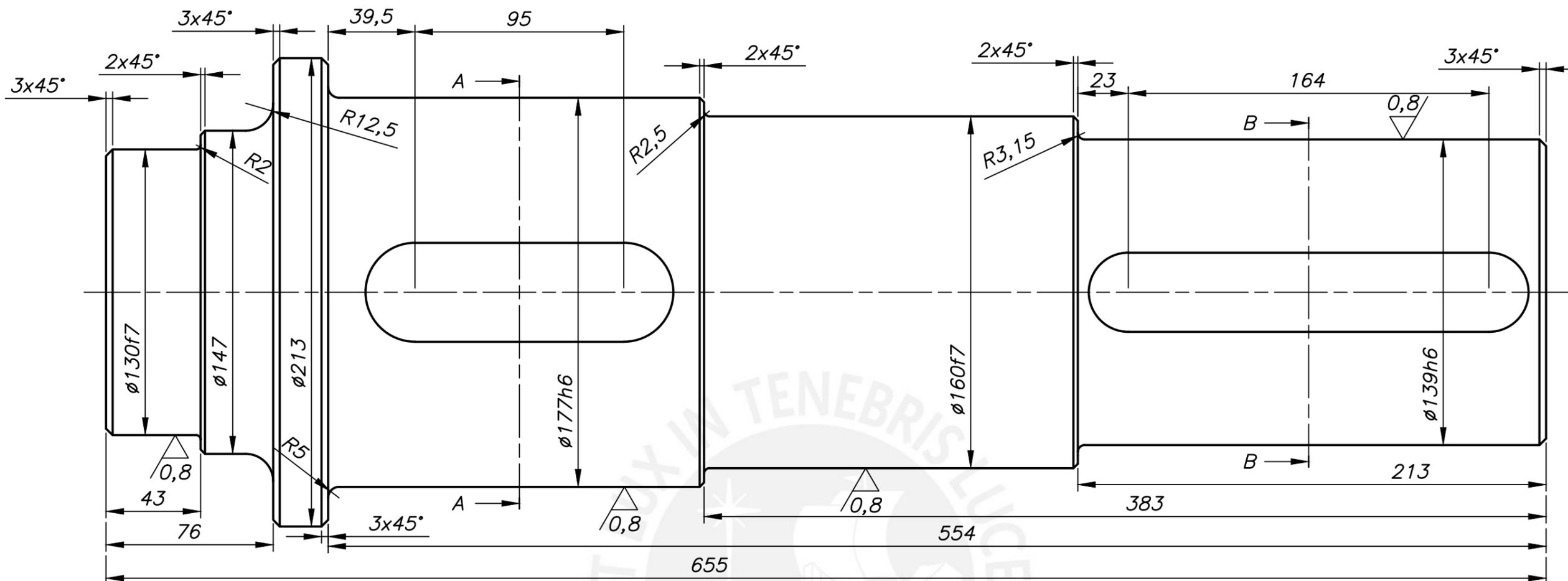
| | | |
|---|---|----------------------------------|
| ACABADO SUPERFICIAL ($\frac{3,2}{\nabla}$; $\frac{1,6}{\nabla}$; $\frac{0,8}{\nabla}$) | TOLERANCIA GENERAL SEGÚN DIN 7168 GRADO MEDIO | MATERIAL AISI 5120 (Revenido) |
|---|---|----------------------------------|

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA – ESPECIALIDAD: ING. MECÁNICA

| | | |
|--------------------------|---|----------------------|
| METODO DE PROYECCION | EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 ÁRBOL DE ENTRADA | ESCALA 1:2 |
| 20134936 | DELGADO MARIN, ALEC GONZALO | FECHA: 24.02.2023 |
| | | LAMINA: A3-1 |

| TOLERANCIAS DIMENSIONALES SEGUN DIN 7168 | | | | | |
|---|--------------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------|
| GRADO DE EXACTITUD | Más de 0,5 hasta 3 | Más de 3 hasta 6 | Más de 6 hasta 30 | Más de 30 hasta 120 | Más de 120 hasta 400 |
| MEDIO | ±0,1 | ±0,1 | ±0,2 | ±0,3 | ±0,5 |

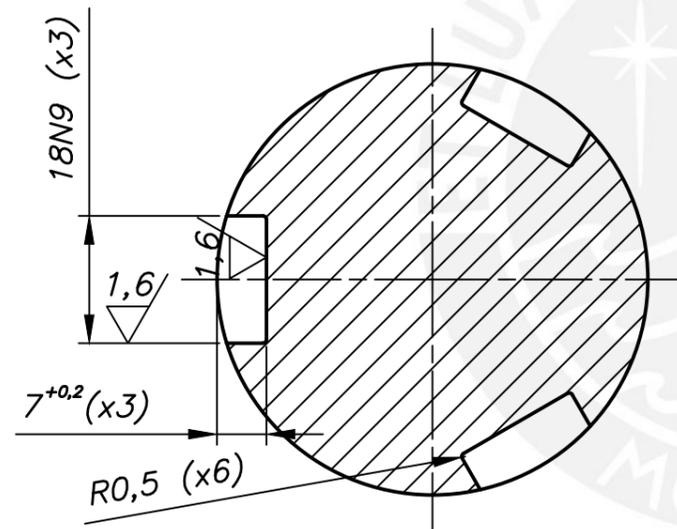
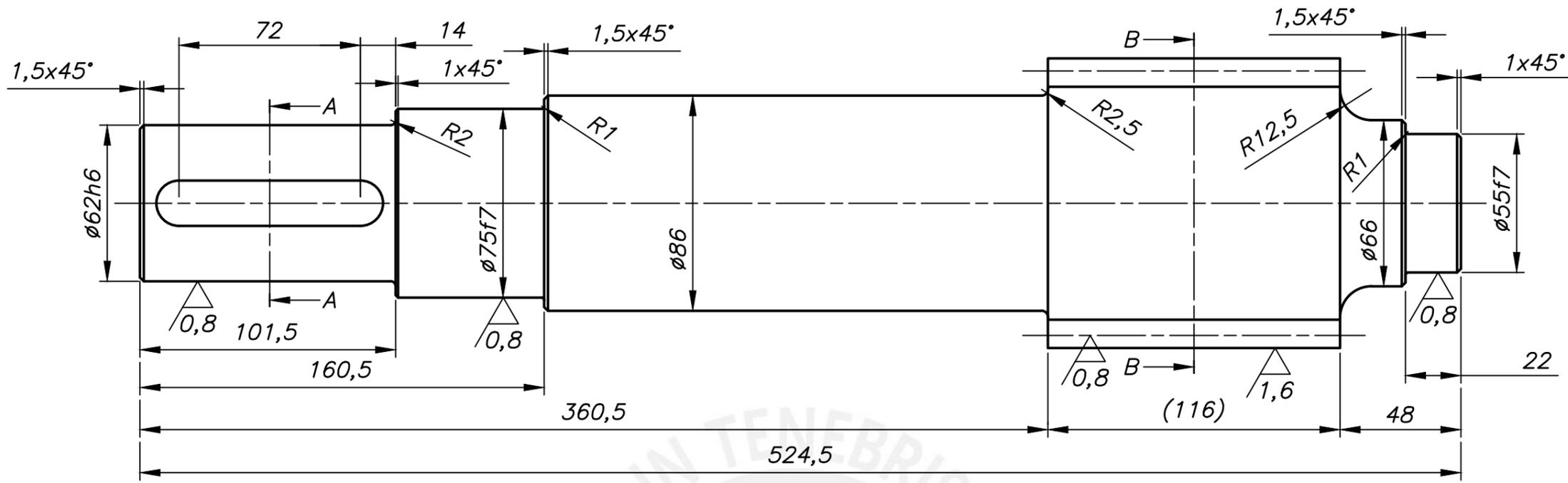
| | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 22N9 | 22,000 | 21,948 |
| 75f7 | 74,970 | 74,940 |
| 83h6 | 83,000 | 82,978 |
| 100f7 | 99,964 | 99,929 |
| COTA NOMINAL | COTA MAXIMA | COTA MINIMA |



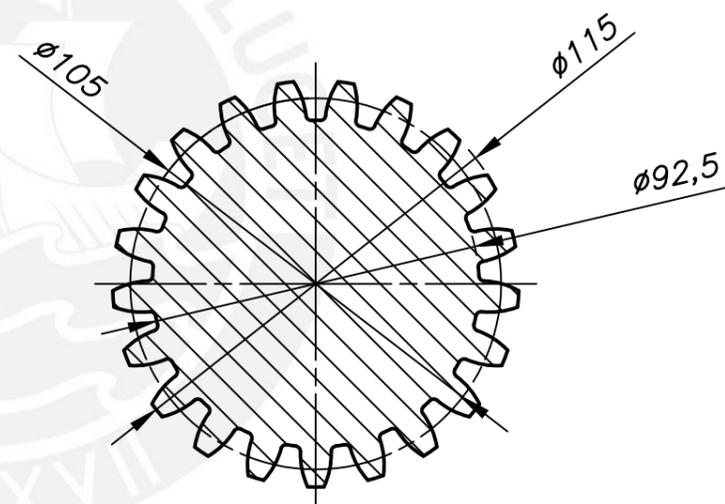
| TOLERANCIAS DIMENSIONALES SEGUN DIN 7168 | | | | | |
|--|--------------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------|
| GRADO DE EXACTITUD | Más de 0,5 hasta 3 | Más de 3 hasta 6 | Más de 6 hasta 30 | Más de 30 hasta 120 | Más de 120 hasta 400 |
| MEDIO | ±0,1 | ±0,1 | ±0,2 | ±0,3 | ±0,5 |

| | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 36N9 | 36,000 | 35,938 |
| 45N9 | 45,000 | 44,938 |
| 130f7 | 129,957 | 129,917 |
| 139h6 | 139,000 | 138,975 |
| 160f7 | 159,957 | 159,917 |
| 177h6 | 176,000 | 176,975 |
| COTA NOMINAL | COTA MAXIMA | COTA MINIMA |

| | | |
|---|---|----------------------------------|
| ACABADO SUPERFICIAL ($\frac{3,2}{\nabla}$; $\frac{1,6}{\nabla}$; $\frac{0,8}{\nabla}$) | TOLERANCIA GENERAL SEGUN DIN 7168 GRADO MEDIO | MATERIAL AISI 5120 (Revenido) |
| PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA - ESPECIALIDAD: ING. MECANICA | | |
| METODO DE PROYECCION | EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 ÁRBOL DE SALIDA | ESCALA 1:2 |
| 20134936 | DELGADO MARIN, ALEC GONZALO | FECHA: 24.02.2023 |
| | | LAMINA: A3-1 |



SECCIÓN A-A
ESCALA 1:1

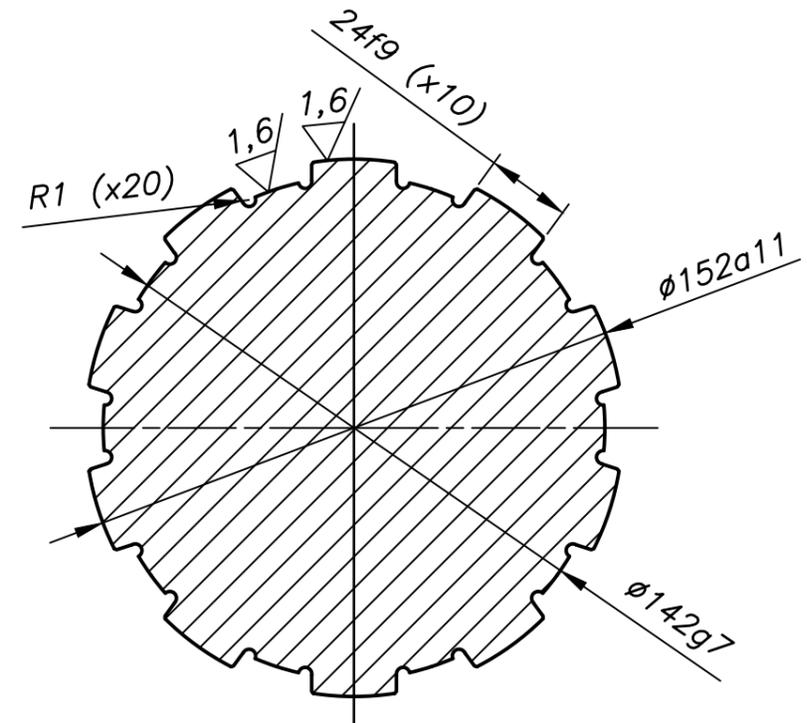
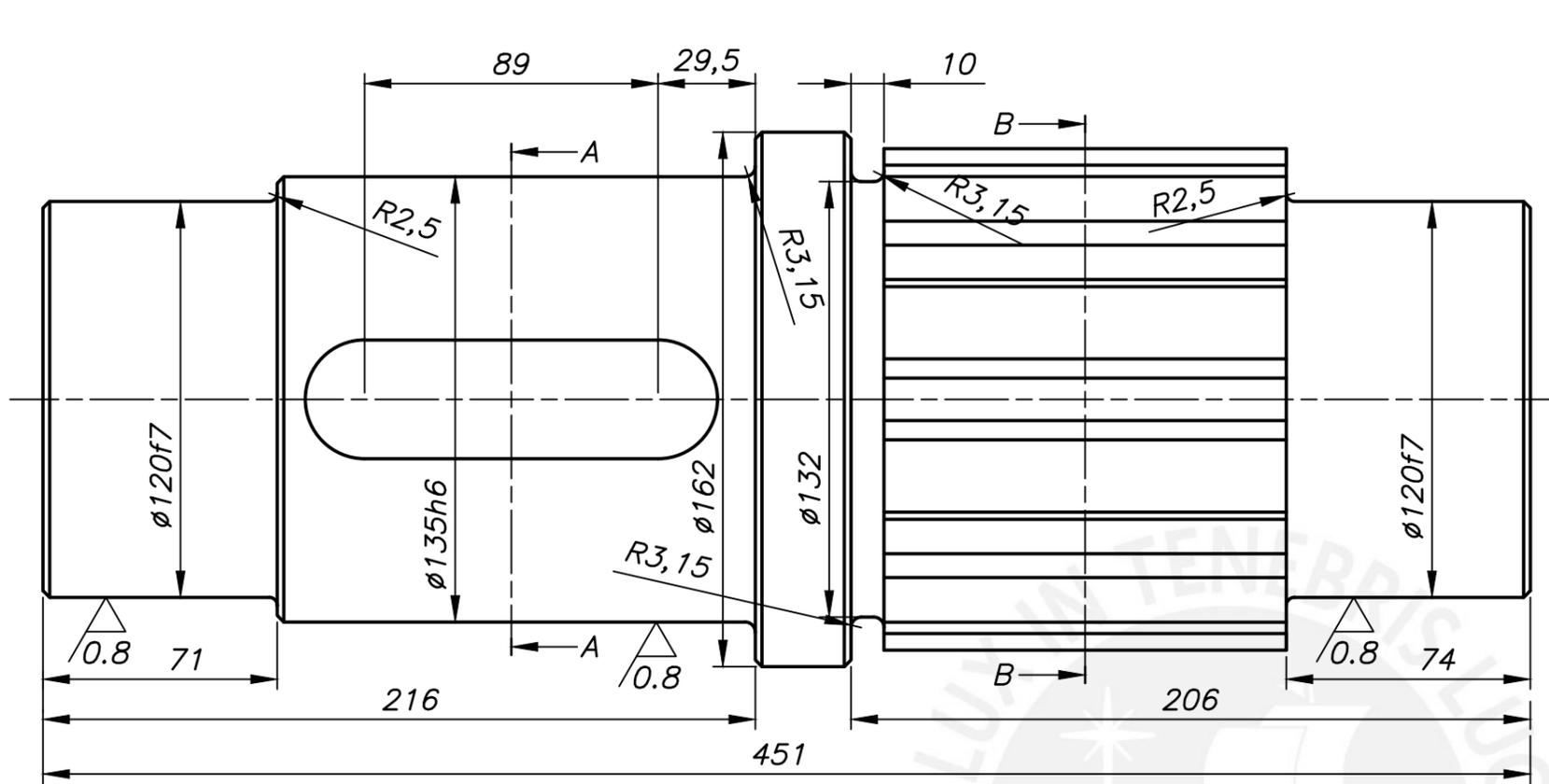


SECCIÓN B-B

| TOLERANCIAS DIMENSIONALES SEGUN DIN 7168 | | | | | |
|---|--------------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------|
| GRADO DE EXACTITUD | Más de 0,5 hasta 3 | Más de 3 hasta 6 | Más de 6 hasta 30 | Más de 30 hasta 120 | Más de 120 hasta 400 |
| MEDIO | ±0,1 | ±0,1 | ±0,2 | ±0,3 | ±0,5 |

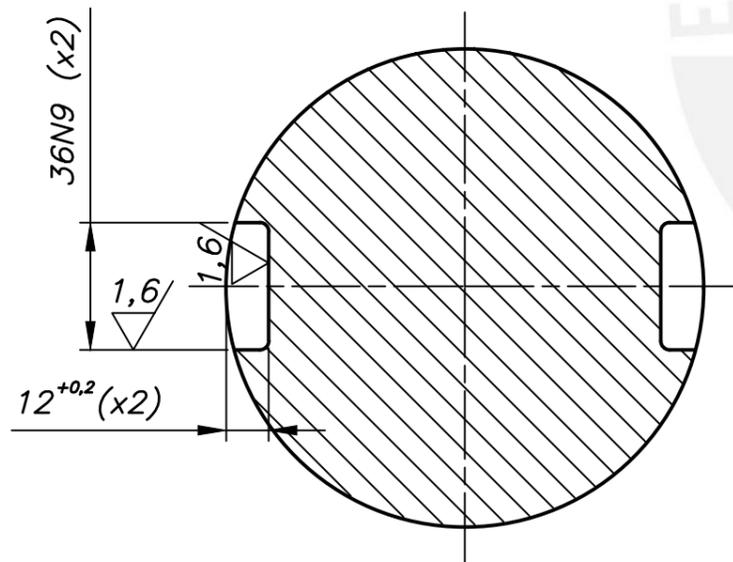
| | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 18N9 | 18,000 | 17,957 |
| 55f7 | 54,970 | 54,940 |
| 62h6 | 62,000 | 61,981 |
| 75f7 | 74,970 | 74,940 |
| COTA NOMINAL | COTA MAXIMA | COTA MINIMA |

| | | |
|---|---|----------------------------------|
| ACABADO SUPERFICIAL (3,2 / 1,6 / 0,8) | TOLERANCIA GENERAL SEGUN DIN 7168 GRADO MEDIO | MATERIAL AISI 5120 (Revenido) |
| PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA - ESPECIALIDAD: ING. MECANICA | | |
| METODO DE PROYECCION | EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 | ESCALA |
| | ÁRBOL DE ENTRADA | 1:2 |
| 20134936 | DELGADO MARIN, ALEC GONZALO | FECHA: 09.03.2023 |
| | | LAMINA: A3-1 |



SECCIÓN B-B

CHAFLANES NO INDICADOS 2x45°

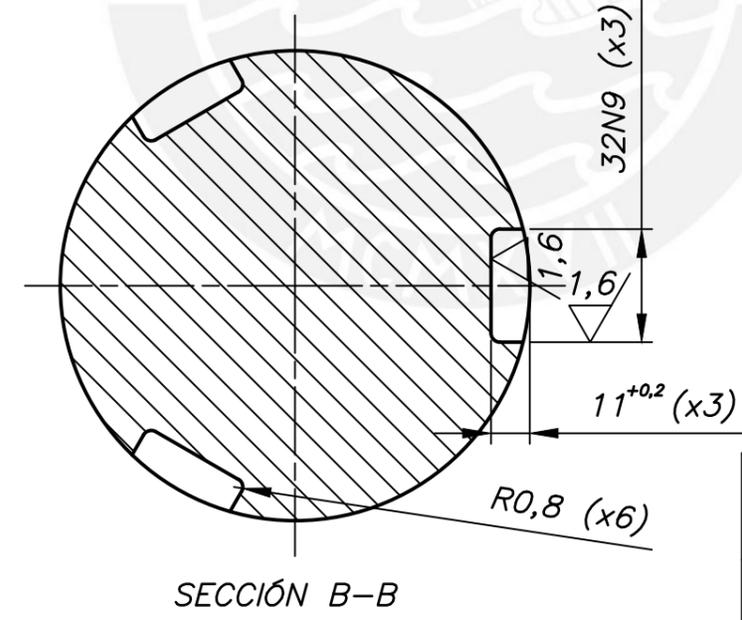
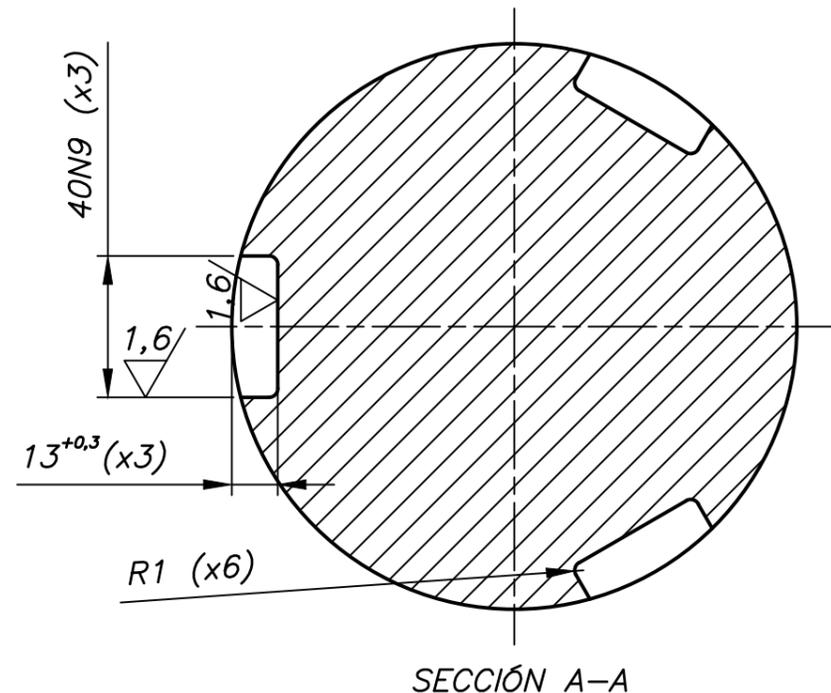
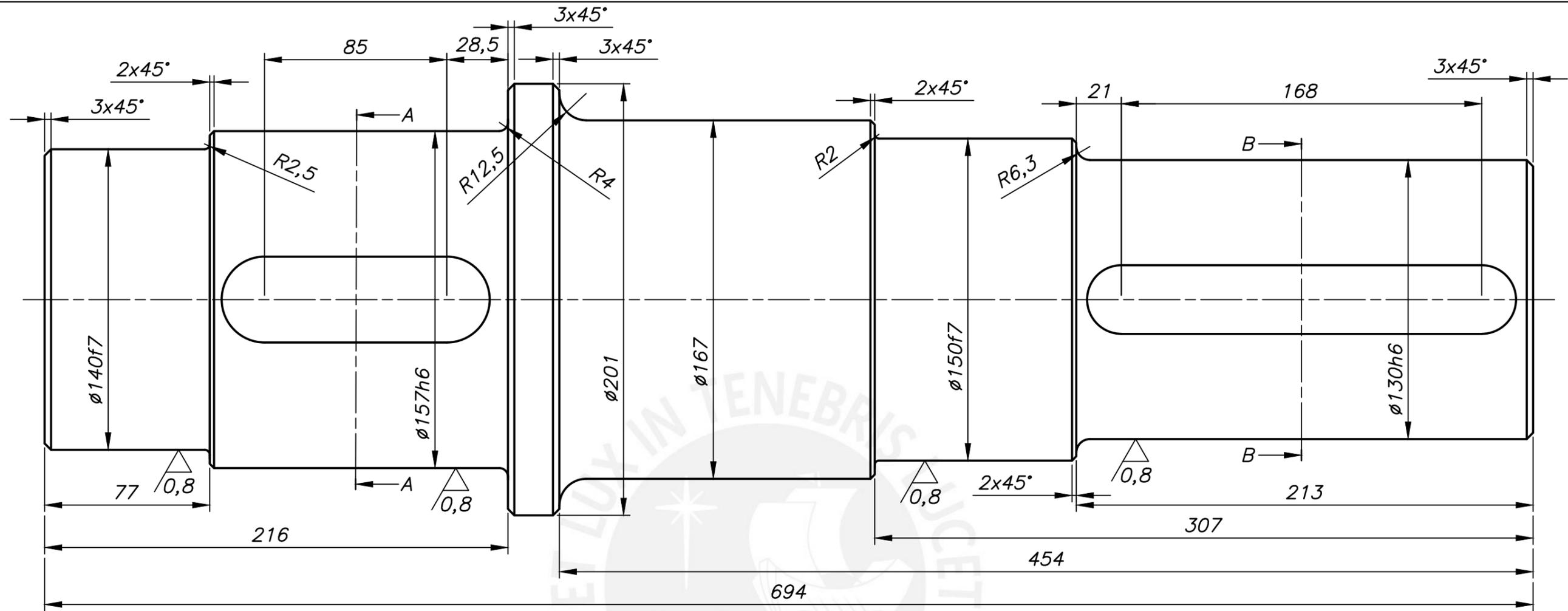


SECCIÓN A-A

| TOLERANCIAS DIMENSIONALES SEGUN DIN 7168 | | | | | |
|--|--------------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------|
| GRADO DE EXACTITUD | Más de 0,5 hasta 3 | Más de 3 hasta 6 | Más de 6 hasta 30 | Más de 30 hasta 120 | Más de 120 hasta 400 |
| MEDIO | ±0,1 | ±0,1 | ±0,2 | ±0,3 | ±0,5 |

| | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 24f9 | 23,980 | 23,928 |
| 36N9 | 36,000 | 35,938 |
| 120f7 | 119,964 | 119,929 |
| 135h6 | 135,000 | 134,975 |
| 142g7 | 141,986 | 141,946 |
| 152a11 | 151,480 | 151,230 |
| COTA NOMINAL | COTA MAXIMA | COTA MINIMA |

| | | |
|---|---|----------------------------------|
| ACABADO SUPERFICIAL (3,2/; 1,6/; 0,8/) | TOLERANCIA GENERAL SEGUN DIN 7168 GRADO MEDIO | MATERIAL AISI 5120 (Revenido) |
| PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA - ESPECIALIDAD: ING. MECANICA | | |
| METODO DE PROYECCION | EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 ÁRBOL INTERMEDIO | ESCALA 1:2 |
| 20134936 | DELGADO MARIN, ALEC GONZALO | FECHA: 09.03.2023 |
| | | LAMINA: A3-1 |



| TOLERANCIAS DIMENSIONALES SEGUN DIN 7168 | | | | | |
|--|--------------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------|
| GRADO DE EXACTITUD | Más de 0,5 hasta 3 | Más de 3 hasta 6 | Más de 6 hasta 30 | Más de 30 hasta 120 | Más de 120 hasta 400 |
| MEDIO | ±0,1 | ±0,1 | ±0,2 | ±0,3 | ±0,5 |

| | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 32N9 | 32,000 | 31,938 |
| 40N9 | 40,000 | 39,938 |
| 130h6 | 130,000 | 129,975 |
| 140f7 | 139,957 | 139,917 |
| 150f7 | 149,957 | 149,917 |
| 157h6 | 157,000 | 156,975 |
| COTA NOMINAL | COTA MAXIMA | COTA MINIMA |

| | | |
|---|---|----------------------------------|
| ACABADO SUPERFICIAL (3,2/; 1,6/; 0,8/) | TOLERANCIA GENERAL SEGUN DIN 7168 GRADO MEDIO | MATERIAL AISI 5120 (Revenido) |
| PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA - ESPECIALIDAD: ING. MECANICA | | |
| METODO DE PROYECCION | EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 ÁRBOL DE SALIDA | ESCALA 1:2 |
| 20134936 | DELGADO MARIN, ALEC GONZALO | FECHA: 09.03.2023 |
| | | LAMINA: A3-1 |