

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



La comprensión del concepto de función en estudiantes de  
educación básica regular del Perú.

Tesis para obtener el grado de Maestra en Enseñanza de las

Matemáticas

que presenta:

*Irma Leonor Bellido Rojas*

Asesor:

*Dr. Francisco Javier Ugarte Guerra*

Lima, 2023

## Informe de Similitud

Yo, Francisco Javier Ugarte Guerra, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado

La comprensión del concepto de función en estudiantes de educación básica regular del Perú, de la autor(a) Irma Leonor Bellido Rojas, de constancia de lo siguiente:

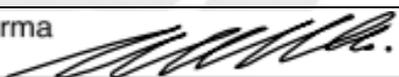
El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 15.%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 27/04/2023.

He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.

Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 29/04/23

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Ugarte Guerra Francisco Javier	
DNI: 06779604	Firma 
ORCID: 0000-0001-5071-8924	

## AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis, el Dr. Francisco Ugarte, por su apoyo y asesoría constante a lo largo de esta investigación.

Al jurado de mi sustentación de tesis conformado por la Dra. Cecilia Gaita y el Mg. Elvin Bustamante, por sus observaciones y aportes en este trabajo de investigación.

A la Dra. Corine Castela, por su apoyo, aportes y observaciones oportunas en la elaboración del cuestionario de este trabajo de investigación.

A los profesores de la Maestría en enseñanza de las Matemáticas, por sus grandiosas enseñanzas a lo largo de estos años de estudio.

A la institución educativa participante en esta investigación, por brindarme todas las facilidades para realizar el trabajo de evaluación a las estudiantes.

A las estudiantes de quinto de secundaria participantes de esta investigación, por su buen recibimiento, compromiso y dedicación al responder cada una de las preguntas del cuestionario.

A mis padres, Fernando y Rosa, por su constante ánimo y apoyo para culminar esta tesis. A mis hermanos, Katia y Dénzel, por estar siempre presentes en cada uno de mis logros, y de los cuales espero ser un ejemplo a seguir.

## RESUMEN

Distintas investigaciones han analizado la relación entre la comprensión y el uso de los diferentes registros de representación cuando se trata de representar un objeto matemático, evidenciando que algunos de ellos son predominantes respecto a otros; además, nos muestran también las conversiones que son más utilizadas y su relación con las dificultades que presentan los estudiantes. Esto evidencia la importancia de identificar los tipos de registros y conversiones predominantes en las prácticas matemáticas de estudiantes de educación básica regular (EBR) del Perú. En esta investigación analizaremos la comprensión del objeto función, tomando como referencia las investigaciones realizadas en otros países con estudiantes de educación secundaria y primeros ciclos de educación superior. Esta investigación toma como base teórica la Teoría de Registros de Representación Semiótica y sigue principios metodológicos de la ingeniería didáctica. En primer lugar, tomando en cuenta el Currículo Nacional y los materiales de clase de la institución se eligieron los registros de representación para la investigación y se elaboró un cuestionario. Después, se llevó a cabo la experimentación, la cual tuvo una duración de dos horas pedagógicas, se realizó con 16 alumnas de quinto de secundaria, cuyas edades oscilan entre 15 y 17 años. Finalmente, se realizó el análisis a posteriori de las respuestas de las estudiantes, realizando una comparación con las investigaciones de referencia y encontrando nuevos resultados en base a los procesos de tratamiento y conversión, como por ejemplo que algunas conversiones son realizadas de manera natural, pero al realizar la conversión inversa se presenta gran dificultad, es el caso de las conversiones entre los registros algebraico y gráfico.

**Palabras clave:** función, registros de representación, concepto.

## ABSTRACT

Several researchs have analyzed the relationship between the understanding and the use of the different registers of representation when it comes to representing a mathematical object, being some of them predominant over others; in addition, they also show us the conversions that are most used and how they are related to the difficulties that students present. This proves the importance of identifying the types of records and the predominant conversions in the mathematical practices of peruvian students of regular basic education (EBR). In this research we will analyze the conceptual understanding of the function object, taking as a reference the research carried out in other countries with high school and first years of higher education students. We will take as a theoretical basis the Theory of Semiotic Representation Records and we will use methodological principles of didactic engineering. In the first place, the representation records were chosen for the research and a questionnaire was elaborated based on the National Curriculum and the class materials of the institution. Then, we started with the experimental phase, wich lasted two pedagogical hours. The questionnaire was solved by 16 fifth-year female high school students, whose ages range between 15 and 17 years old. Finally, we made a posteriori analysis of the student's responses, making a comparison with the references research and finding new results based on the treatment and conversion processes, as for example, some conversions are carried out naturally, but when we carry out the inverse conversion, it presents a lot of difficulty, as is the case of the conversions between the algebraic and graphic records..

**Keywords:** function, representation registers, concept.

# ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS .....	ii
RESUMEN .....	iii
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA .....	2
1.1 Investigaciones de referencia.....	2
1.2 Justificación.....	10
1.3 Pregunta y objetivos de la investigación .....	10
CAPITULO II: LAS FUNCIONES COMO OBJETOS DE ESTUDIO.....	12
2.1 Aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos .....	12
2.2 La función en los libros didácticos de Educación Secundaria .....	14
CAPITULO III: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN.....	19
3.1 Elementos teóricos que guiarán la investigación.....	19
3.2 Metodología y procedimientos .....	29
CAPITULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN.....	32
4.1 Construcción del cuestionario .....	32
Caracterización de los sujetos de investigación .....	42
4.2 Descripción de las actividades y sus objetivos .....	42
4.3 Experimentación y análisis de las actividades .....	43
CONSIDERACIONES FINALES .....	88
REFERENCIAS .....	91
ANEXOS.....	93

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.....	23
Figura 2. Desempeño de Primero de Secundaria.....	23
Figura 3. Desempeño de Tercero de Secundaria .....	23
Figura 4. Desempeño de Quinto de Secundaria .....	24
Figura 5. Ejercicio de función cuadrática para quinto de secundaria .....	24.
Figura 6. Situación significativa de función cuadrática para quinto de secundaria.....	25
Figura 7. Situación significativa de función lineal para primero de secundaria.....	25
Figura 8. Situación significativa de función cuadrática para cuarto de secundaria .....	26
Figura 9. Ejercicios de una Práctica Calificada de quinto de secundaria .....	26
Figura 10. Ejercicio trabajado en clase de quinto de secundaria.....	27
Figura 11. Esquema de conversiones en libros de texto.....	32
Figura 12. Esquema de conversiones en material de la institución.....	32
Figura 13. Esquema de conversiones en el trabajo de investigación.....	33
Figura 14. Respuesta de alumna 16 a pregunta 1.....	64
Figura 15. Respuesta de alumna 10 a pregunta 1.....	65
Figura 16. Respuesta de alumna 01 a pregunta 1.....	66
Figura 17. Respuesta de alumna 16 a pregunta 2.....	67
Figura 18. Respuesta de alumna 10 a pregunta 2.....	68
Figura 19. Respuesta de alumna 03 a pregunta 2.....	69
Figura 20. Respuesta de alumna 10 a pregunta 3.....	70
Figura 21. Respuesta de alumna 13 a pregunta 3.....	71

Figura 22. Respuesta de alumna 13 a pregunta 3 .....	71
Figura 23. Respuesta de alumna 16 a pregunta 4.....	72
Figura 24. Respuesta de alumna 16 a pregunta 5.....	73
Figura 25. Respuesta de alumna 10 a pregunta 4.....	75
Figura 26. Respuesta de alumna 13 a pregunta 6.....	76
Figura 27. Respuesta de alumna 12 a pregunta 6.....	77
Figura 28. Respuesta de alumna 07 a pregunta 7.....	78
Figura 29. Respuesta de alumna 01 a pregunta 7.....	79
Figura 30. Respuesta de alumna 16 a pregunta 8.....	80
Figura 31. Respuesta de alumna 15 a pregunta 8.....	81
Figura 32. Respuesta de alumna 12 a pregunta 8.....	81
Figura 33. Respuesta de alumna 07 a pregunta 8.....	82
Figura 34. Respuesta de alumna 09 a pregunta 8.....	82
Figura 35. Respuesta de alumna 12 a pregunta 9.....	83
Figura 36. Respuesta de alumna 03 a pregunta 9.....	84
Figura 37. Respuesta de alumna 16 a pregunta 10.....	85
Figura 38. Respuesta de alumna 10 a pregunta 10.....	86
Figura 39. Respuesta de alumna 16 a pregunta 11.....	87
Figura 40. Respuesta de alumna 10 a pregunta 11.....	88
Figura 41. Respuesta de alumna 16 a pregunta 12.....	89
Figura 42. Respuesta de alumna 01 a pregunta 12.....	90
Figura 43. Respuesta de alumna 03 a pregunta 12.....	90
Figura 44. Respuesta de alumna 10 a pregunta 12.....	91
Figura 45. Respuesta de alumna 14 a pregunta 12.....	91
Figura 46. Respuesta de alumna 16 a pregunta 12.....	92
Figura 47. Respuesta de alumna 10 a pregunta 12.....	93

Figura 48. Respuesta de alumna 10 a pregunta 13.....	94
Figura 50. Ficha de evaluación de matemática.....	123
Figura 51. Ficha de trabajo de matemática.....	124
Figura 52. Ficha de trabajo de matemática.....	125
Figura 53. Ficha de trabajo de matemática.....	126
Figura 54. Ficha de trabajo de matemática.....	127
Figura 55. Cuaderno de estudiante.....	128
Figura 56. Cuaderno de estudiante.....	129

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Preguntas asociadas al concepto de función.....	42
Tabla 2. Preguntas asociadas a función lineal.....	42
Tabla 3. Preguntas asociadas a función cuadrática.....	43
Tabla 4. Preguntas respondidas y no respondidas .....	53

## INTRODUCCIÓN

En el Capítulo I, se realiza el planteamiento del problema; para ello nos basamos en investigaciones de referencia que reportan las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de función. Además, se formula la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos.

En el Capítulo II, se presentan los aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos del objeto función. Además, se analiza cómo es abordada la función en los libros del Ministerio de Educación y en el material de clase de la institución.

En el Capítulo III, se presentan los elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) que son usados en esta investigación. También se detalla los aspectos de la Ingeniería didáctica, usada como metodología en nuestro trabajo.

En el Capítulo IV, se describe el diseño y la elaboración del cuestionario, desde la TRRS: También, se presenta la experimentación y el análisis a posteriori de las respuestas de las estudiantes.

Finalmente, en base a los resultados obtenidos en el Capítulo IV, se presentan las consideraciones finales y las conclusiones de este trabajo de investigación.

# CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo presentamos investigaciones en relación al objeto función, investigaciones donde se reporten dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de función, así como investigaciones que tengan como marco teórico referencial a la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Además, justificamos la relevancia de esta investigación para la didáctica de las matemáticas. Finalmente, planteamos la pregunta de investigación y los objetivos, tanto generales como específicos.

## 1.1 Investigaciones de referencia

Presentamos las investigaciones de referencia organizándolas según sean de tipo diagnóstico en relación a las dificultades presentadas por los estudiantes, o de tipo propuestas de enseñanza.

### **Investigaciones de tipo diagnóstico en relación a las dificultades presentadas por los estudiantes al enfrentarse a problemas sobre funciones.**

Prada-Núñez et al. (2017) reportan una investigación hecha a alumnos del curso de Cálculo Diferencial, matriculados en el primer semestre del año 2015, de la Facultad de Ingeniería de una universidad pública de Colombia. Para ello se utiliza una prueba de 8 preguntas, que promueven el uso de diversos registros de representación en torno al concepto de función.

Los investigadores afirman que los alumnos conocen técnicas que les ayudan a tratar el concepto de función de manera algebraica o gráfica, estos algoritmos que han sido enseñados por sus propios maestros para resolver problemas específicos no garantizan el aprendizaje de dicho concepto, debido a la forma en que ha sido estructurada la clase por los docentes. Es así como los autores toman como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

Esta investigación tiene como objetivo evaluar los cambios en la habilidad de los alumnos para articular diferentes registros de representación semiótica de la noción de función. Para ello, se elaboraron dos pruebas que fueron aplicadas en distintos momentos: un diagnóstico (llamado pretest), con el cual se identificaron las dificultades que presentaron los estudiantes; y un protest, que se comparó con la prueba inicial. Para aplicar este último, los profesores intervinieron durante

cuatro semanas, después del pretest, para subsanar las dudas encontradas y potenciar la articulación de los registros de representación de la noción de función. Esta investigación reporta que los alumnos trabajan desde el colegio con el registro algebraico de la función, sin ahondar en el concepto gráfico más que como una simple técnica de tabular valores, siempre enteros y positivos para " $x$ " y unir dichos puntos en el plano cartesiano. Para los investigadores, esto se debe a que en su mayoría los profesores suelen dar más importancia al registro algebraico, en lugar de mostrar la variedad de registros y lo importante de la articulación entre ellos. Los resultados del trabajo de investigación presentados por los investigadores muestran que las dificultades de los alumnos podrían tener relación en gran parte con la enseñanza que han recibido por parte del docente y su manera de presentar el tema de función. Cuando los profesores intervinieron poniendo énfasis en la articulación de los registros, dándole igual importancia a todos (tabular, algebraico, gráfico y verbal) y no solo al algebraico, se observó una mejora después del pretest, esto lleva a los autores a concluir que cuando se cambia la manera tradicional de enseñanza, se presentan mejoras que llevan al objetivo de todo docente: el aprendizaje de los alumnos.

Como conclusiones importantes, los investigadores señalan que, si bien para los alumnos es más fácil trabajar con representaciones algebraicas, no tienen un dominio total de estas. Además, estos mismos estudiantes presentan dificultades al pasar de lo gráfico, de la tabla o lo verbal a lo algebraico y recalcan que los alumnos no presentan un concepto formal de función, solamente poseen una noción intuitiva.

Consideramos el trabajo de este investigador es relevante para nuestra investigación, pues nos muestra cómo obtener datos a partir de una serie de actividades y como analizar la adquisición del concepto de función. Creemos que estas actividades pueden ser replicadas y adaptadas para nuestro trabajo.

Otra de las investigaciones que hemos tomado en cuenta es la de Zardo y Lutaif (2016), que presenta un estudio cuyo objetivo es identificar las concepciones sobre las nociones de función que tienen los estudiantes de primer año del curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de una Universidad particular de São Paulo.

En este artículo se investigan las concepciones sobre la noción de función en estudiantes del primer año de un curso superior, a través de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Para identificar los fragmentos de los conceptos de los estudiantes con respecto a las funciones, se realiza una investigación de diagnóstico, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Esta investigación es cuali-cuantitativa, de naturaleza cuasi-experimental.

Primero, se elaboró una prueba (tomado como un instrumento de diagnóstico) que consistía en dos preguntas para la primera clase de Cálculo, propuesto a 79 estudiantes, con el objetivo de identificar las nociones que tienen los estudiantes con respecto al concepto de función. Para analizar los datos recolectados de esa prueba y poder validar la hipótesis, se emplearon categorías. Estos datos fueron analizados en dos niveles: como transcripción de los datos que fueron recogidos en la prueba que dieron los estudiantes; y agrupando los datos obtenidos para identificarlos y categorizarlos.

Dichas categorías fueron dadas, mediante la noción de la Teoría de Registros de Duval, dándose las siguientes: categoría (L), que es el registro de representación en lenguaje natural, donde se incluyen algunas palabras que el estudiante menciona de la definición de función como “correspondencia”, “es una relación”, “para un  $x$  se tiene un  $y$ ”, y también se incluyen datos como “recta”, “parábola”, “función cuadrática”, etc. La categoría (G) es el registro de representación gráfica y reúne los datos en los cuales los estudiantes mencionaron algún gráfico de función conocido por ellos. La categoría (A) es el registro de representación algebraica y se incluyen los datos en los que los estudiantes brindan una respuesta expresada de manera algebraica. La categoría (F), que es el registro de representación figural, donde están las respuestas que los estudiantes dieron de manera de figuras como los Diagramas de Venn. La categoría (N) es el registro de representación numérica, y son los datos en los que los estudiantes respondieron con tablas de números. La categoría (C) son las falsas concepciones, y en esta categoría se refiere a las respuestas que los estudiantes dieron sobre concepciones falsas o erradas de función, es decir, los estudiantes tienen ideas incorrectas sobre una función. Y, por último, la categoría (I) son los elementos indeseables, y aquí se incluyen las respuestas a los conceptos y/o nociones de

funciones que no tienen ninguna relación con algún registro de representación semiótica como por ejemplo “es un punto o algo ficticio”, “algo que se puede calcular encontrando las rectas”, etc.

En el artículo, Zardo y Lutaif (2016) consideran que, si la respuesta dada por el estudiante presenta dos o más categorías, se puede indicar que dicho estudiante moviliza dos o más registros de representación semiótica.

Con la pregunta 1: “¿Qué es lo que entiendes por función? De un ejemplo”, las investigadoras buscaban que el alumno expresara en lenguaje natural lo que él entiende por este concepto, mas no la definición formal de función. Al solicitar un ejemplo al alumno, se buscaba que él interiorice dentro de sus conocimientos previos alguna representación gráfica, representación figural, representación algebraica o representación tabular que pudiera asociar con el concepto de función.

Con la pregunta 2, donde se muestran una serie de gráficos y se pide averiguar cuáles de ellos son funciones, las autoras buscaban evidenciar como realiza el alumno el cambio del registro gráfico a otros registros donde pueda explicar el porqué de la respuesta.

Una propuesta importante de las investigadoras es la de una actividad para las clases de Cálculo, donde el docente va a detenerse en la construcción del concepto de función en cada una de sus representaciones y con diferentes situaciones, para que el alumno tenga una visión más amplia de los diferentes registros existentes y pueda realizar conversiones entre ellos, sin que una conversión entre un registro y otro sea la predominante.

Las investigadoras recalcan que se debe extender el estudio a otras funciones en el Ensino Medio (Enseñanza Media), además de la afín y cuadrática, pues se observan resultados no satisfactorios en la pregunta 2 relacionada a las gráficas de algunas funciones que no eran familiares para los estudiantes.

La conclusión más importante de este trabajo para las investigadoras es que son pocos los alumnos que pueden movilizar más de un registro de representación semiótica respecto al concepto de función. Otro hallazgo importante es, que para los estudiantes, el concepto de función equivale con ejemplificarlo en algún registro, sin antes haber interiorizado el concepto.

La investigación de Morales (2013) fue realizada con la participación de alumnos de 16 y 17 años de quinto de secundaria de la Educación Básica Regular (EBR) en un colegio privado del Perú, con el objetivo de analizar los problemas de aprendizaje que presentan los estudiantes respecto al objeto matemático función logarítmica. Se aplicó un cuestionario de preguntas que consta de 5 actividades con los cuales se buscaba medir si los estudiantes lograban realizar las transformaciones esperadas entre registros de representación semiótica, reportando mayores dificultades cuando los estudiantes tienen que realizar conversiones con el registro verbal o registro gráfico.

Como conclusiones importantes de este trabajo de investigación el autor sostiene que gran parte de las dificultades se dieron cuando se requería la coordinación entre distintos registros que involucran una situación de contexto aplicando la función logarítmica. Una dificultad menor observada fue la realización de tratamientos y se daba cuando el sistema semiótico era desconocido por el alumno. Otra conclusión significativa es que el alumno tiene mayor facilidad de realizar transformaciones del registro simbólico al registro gráfico, pero no en viceversa.

De esta investigación consideramos importante tomar como referencia las dificultades presentadas al realizar transformaciones entre los registros simbólico, verbal y gráfico, pues consideramos que estas mismas dificultades podrían presentarse cuando se inicie con el concepto de función, lo cual se verificará en la aplicación del cuestionario que desarrollaremos durante nuestra investigación.

La siguiente investigación es la realizada por Oliveira y Pires (2012), que nos presentan un estudio realizado a 38 estudiantes del 9° grado de educación primaria de una escuela pública de São Paulo, a los cuales se les presentan situaciones matemáticas relacionadas a las funciones.

Los investigadores también basan su análisis en la Teoría de Registros de Representación Semiótica y buscan identificar cómo es que los estudiantes realizan la coordinación de registros relacionados a actividades matemáticas del pensamiento funcional.

Para la investigación, los autores aplicaron 3 actividades extraídas de Mendonça y Oliveira, considerando que la dificultad en las actividades sea ascendente a medida que avanzan las preguntas.

La primera actividad es una secuencia donde se muestran cuatro figuras y un cierto patrón que van cumpliendo el número de puntos de la figura con la posición en la secuencia, se busca con las preguntas planteadas por los investigadores, que los alumnos puedan llegar a obtener una ley de formación. Dicha actividad busca una conversión del registro gráfico al registro algebraico, y como dicha conversión pueda transformar el problema en uno más fácil para el alumno.

En el análisis de las respuestas de los alumnos, los investigadores observaron que no hubo mayor dificultad en hallar la cantidad de puntos de una figura respecto a la posición donde se encontraba; en cambio al intentar realizar la ley de formación, la cantidad de errores fue mayor que los aciertos, notando como un error típico el hecho de escribir la ley de formación teniendo en cuenta solo la quinta posición que era la solución a un ítem anterior. Entonces, la mayor dificultad encontrada fue en hacer la conversión del registro numérico, que es un registro multifuncional discursivo, al registro algebraico que es un registro monofuncional discursivo.

La segunda actividad evalúa la relación de dependencia entre magnitudes, donde se pide crear diferentes rectángulos con un área determinada para luego crear una tabla donde se especifique para cada medida de los lados su respectiva área y perímetro. Esta actividad busca que el alumno perciba la relación funcional que existe entre área y perímetro de polígonos regulares, y para ello realice una conversión del registro numérico al registro algebraico.

Al analizar las respuestas de los alumnos, los investigadores encontraron que hubo dificultad en la conversión del registro numérico al registro algebraico, así como también en argumentar sobre el comportamiento del lado y área del rectángulo a través del registro de lengua natural.

La tercera actividad es una secuencia generalizada algebraicamente, donde a partir de un juego que consiste en ubicar 10 pinos en 11 lugares distintos, realizando la mínima cantidad de movimientos posibles, se pide a los alumnos responder preguntas sobre la cantidad de movimientos para cierta cantidad de pinos, elaborar una tabla con esos datos y expresar una ley de formación que relacione el número de pinos con el número de movimientos mínimos. Esta actividad busca que los alumnos realicen una conversión del registro tabular al registro algebraico.

Dicha actividad fue realizada en grupos de 5 a 6 alumnos, elaborando un esquema con material concreto. Los investigadores observaron que para los alumnos fue complicado completar la tabla que relaciona la cantidad de pinos con los movimientos a partir del segundo par, esto era algo esperado por los investigadores dado el nivel de dificultad de la pregunta para alumnos de 9° grado de Enseñanza Fundamental.

Los investigadores concluyen que los registros más utilizados por los estudiantes de 9° grado de Enseñanza fundamental son los multifuncionales discursivos y los monofuncionales discursivos. Además, observaron que la mayor dificultad de los alumnos está en pasar del registro de lenguaje natural o registro numérico al registro algebraico, pues es difícil generalizar una situación como un todo.

Esta investigación al ser realizada con alumnos de escuela secundaria nos da luces para abordar de donde partirían los problemas que surgen después en las aulas universitarias. Se presentan dificultades constantes como el uso predominante del registro algebraico, gráfico o lengua natural, pero de manera aislada. Esto genera que no se dé un cambio de registro; por lo tanto, estas dificultades como hemos observado en la investigación de Prada-Núñez et al. (2017) se conservan en los primeros ciclos de la universidad.

Por otro lado, tenemos la investigación de Ospina (2012), que busca comprender cómo es que los estudiantes realizan el tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en situaciones del objeto matemático función lineal. Para ello, desarrolló dos cuestionarios: el primero, con el objetivo de indagar sobre las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que realizan los estudiantes sobre el concepto de función lineal antes de abordarlo; y el segundo instrumento con cuatro situaciones planteadas en el registro verbal, que constan de cuatro preguntas de respuesta abierta, que busca que los alumnos realicen conversiones a diferentes registros de representación. Este cuestionario fue aplicado a 12 estudiantes, entre 13 y 15 años de octavo grado, de un colegio del municipio de Manizales.

Una conclusión significativa que nos muestra Ospina (2012) es que los alumnos suelen pasar en un primer momento por el registro gráfico para llegar hacia otros registros, pues es dentro de este registro donde hay una mayor visualización del objeto matemático función lineal.

Otro de los resultados importantes encontrados por la investigadora al analizar las respuestas de los estudiantes, es la gran dificultad que poseen los alumnos en pasar al registro algebraico desde un registro diferente al gráfico. Esta dificultad también la comparten Oliveira y Pires (2012), que obtuvieron resultados similares con alumnos de la misma edad, evaluando otras preguntas referentes al objeto matemático función, en diferentes contextos. Esta conclusión en común de ambas investigaciones es relevante para nuestro trabajo, pues es probable que en el contexto de la Educación Básica Regular (EBR), donde deseamos realizar nuestro trabajo, se pueda verificar esta dificultad importante en el aprendizaje del concepto de función.

### **Investigaciones de tipo propuesta de enseñanza en relación al concepto del objeto matemático función.**

Otra investigación importante es la de Lopes (2003) que fue realizada en una clase de 8° de Ensino Fundamental (Enseñanza Fundamental) de una escuela pública de Sao Paulo. El autor busca, mediante un conjunto de 12 actividades, analizar los fenómenos didácticos ocurridos en la resolución de problemas realizando conversiones del registro gráfico al registro algebraico y viceversa, del objeto matemático: función afín.

Las actividades propuestas por el autor fueron trabajadas en 17 clases de 55 minutos cada una. La mayor importancia radica en el cambio de registros de representación, se seleccionaron los registros: verbal, geométrico, aritmético, algebraico y tabular de la función afín.

El autor basa su investigación en elementos teóricos propuestos por Duval y B. J. Caraça. Siendo que el objeto función no es accesible perceptivamente o por experiencias intuitivas, según Duval es necesario utilizar varios registros de representación y realizar una coordinación entre ellos para que se realice el aprendizaje.

El análisis de las producciones de los alumnos y de los fenómenos didácticos pedagógicos que se observaron en el aula, permitió validar como una propuesta de enseñanza basada en actividades de conversión y tratamientos de registros de representación permite el dominio del concepto matemático función lineal afín.

Creemos que de esta investigación es importante rescatar las actividades validadas por el investigador respecto al concepto de función lineal afín, las cuales adaptaremos a nuestro trabajo de investigación.

## **1.2 Justificación**

Presentaremos la justificación de esta investigación desde tres aspectos fundamentales: pertinencia del estudio para la didáctica de la matemática, presencia del objeto en la programación curricular e importancia del objeto en la matemática.

En las distintas investigaciones revisadas como las de Ospina (2012), Zardo y Lutaif (2016), Lopes (2003), Morales (2013), y Oliveira y Pires (2012) se muestran las dificultades que existen en la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático función. En términos generales todos coinciden en que la dificultad de la adquisición de este concepto se debe a la falta de movilización entre registros.

También, en nuestra labor docente en Educación Básica Regular (EBR) y enseñanza superior hemos observado las mismas dificultades en los alumnos de secundaria presentan con este concepto matemático.

Por otro lado, revisando la Programación Curricular de Educación Secundaria (2016), notamos que el objeto matemático función se desarrolla en la competencia “*Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio*”, la cual analizaremos con más detalle en el siguiente capítulo.

Además, Stewart (2012) revela la importancia del concepto de función en los fenómenos físicos que observamos en la realidad, donde se presenta dependencia entre magnitudes. Esta dependencia nos lleva a la modelación matemática de situaciones reales con el concepto matemático de función, un tema esencial en el aprendizaje de las matemáticas.

## **1.3 Pregunta y objetivos de la investigación**

La pregunta que nos planteamos para nuestra investigación es:

*¿Cómo evidenciar la comprensión del concepto de función en estudiantes de educación básica regular, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica?*

Para responder a la pregunta de investigación diseñada, planteamos el objetivo general:

*Analizar la comprensión del concepto de función en estudiantes de educación básica regular, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica.*

Con el propósito de lograr el objetivo general, nos planteamos los objetivos específicos.

- Analizar el uso de registros de representación semiótica para el concepto de función, en estudiantes que finalizan la EBR.
- Analizar los procesos de tratamiento y conversión de representaciones de registros de semióticos del concepto de función, en estudiantes que finalizan la EBR.



## CAPITULO II: LAS FUNCIONES COMO OBJETOS DE ESTUDIO

En este capítulo se usaron estudios epistemológicos del concepto de función, con el fin de comprender su evolución. Asimismo, dado que nuestro estudio se realizará a estudiantes de quinto año de secundaria, se revisó los aspectos relacionados a la enseñanza de función en la escuela secundaria peruana y en los materiales de clase de la institución elegida en nuestra investigación.

### 2.1 Aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos

Sastre (2008) resume la evolución de las definiciones de función. A continuación, presentamos una tabla que ayuda a visualizar como se perfiló la definición actual de función.

De esta tabla observamos que el concepto de función inició con ideas centrales de relación, variación y dependencia, luego, en las definiciones más cercanas aparecer como una correspondencia entre variable y conjuntos. Estos cambios en las definiciones nos hacen pensar que la forma en que se representaba cada una de estas definiciones en sus respectivas épocas también fue evolucionando con el tiempo.

Época	Definición
Siglo XVII	Cualquier relación entre variables. Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra operación imaginable. Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva. Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables y constantes.
Siglo XVIII	Cantidades que dependen de una variable. Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma por variables y constantes. Cualquier expresión útil para calcular.
Siglo XIX	Correspondencia entre variables. Correspondencia entre un conjunto $A$ y los números reales. Correspondencia entre dos conjuntos.

(p.153)

También, como observa Chacón (2017), el concepto de función podemos encontrarlo en la Edad Antigua en Babilonia y Grecia, mediante las tablillas matemáticas, aunque de una manera bastante rudimentaria. Consideramos importante para nuestra investigación notar que desde la antigüedad se mostraba una representación de lo que hoy conocemos como representación tabular de función.

Más adelante, según Luján (2019), gracias a los trabajos de Fermat y Descartes establece que la función es una relación de dependencia entre variables. El autor nos muestra que la función, en ese momento, es representada de manera algebraica y afirma que esto dará lugar a la representación gráfica.

Finalmente, según el mismo investigador, la formalización de función ocurre al utilizarse como herramienta del cálculo infinitesimal y, además con el trabajo de Euler aparece la notación  $f(x)$  como una expresión analítica.

En Ospina (2012) encontramos las definiciones de Goursat (en 1923) y Bourbaki (en 1939), las cuales son las más cercanas a lo que se presenta en la mayoría de los textos:

Goursat nos dice que  $y$  es una función de  $x$  si a cada valor de  $x$  le corresponde un valor de  $y$ .

Bourbaki, en cambio, agrega la cualidad de unicidad sosteniendo que: Si  $E$  y  $F$  son dos conjuntos, llamamos función a la operación que asocia cada elemento  $x$  de  $E$  con un único elemento  $y$  de  $F$ .

Por otro lado, la investigadora hace referencia a las definiciones del concepto de función deducidas de Planchart (2005), en las que a cada definición le asocia un tipo de registro de representación semiótico.

Esta asociación de definición con registro nos parece importante para nuestra investigación, pues nos hace notar que la construcción del concepto de función está relacionada con los diversos registros de representación y las actividades que se realicen entre ellos.

Un estudio epistemológico e histórico, puede ser visto a más detalle en Ospina (2012), Sastre (2008), Chacón (2017) y Luján (2019).

## 2.2 La función en los libros didácticos de Educación Secundaria

En primer lugar, al revisar la Programación Curricular de Matemática de Educación Secundaria (2016), la cual está basada en la Resolución de Problemas, con el objetivo de buscar que el estudiante desarrolle cuatro competencias; de la figura 1 observamos que el objeto matemático función se desarrolla de manera explícita en la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”.

### **Competencia RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO.**

Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos.

*Figura 1: Competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016)*

Como observamos en las figuras 2, 3 y 4, los desempeños de esta competencia ponen en evidencia la importancia del estudio del objeto matemático función durante la Educación Secundaria, pues está presente desde primer grado de secundaria hasta quinto grado de secundaria, y modeliza diferentes fenómenos a través de la función lineal, la función afín, la función cuadrática hasta llegar a la función exponencial.

A continuación, mostraremos algunos desempeños de esta competencia:

Interrelaciona representaciones gráficas, tabulares y algebraicas para expresar el comportamiento de la función lineal y sus elementos: intercepto con los ejes, pendiente, dominio y rango, para interpretar y resolver un problema según su contexto.

*Figura 2: Desempeño de Primero de Secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016)*

Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e interceptos, su eje de simetría, vértice y orientación, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.

*Figura 3: Desempeño de Tercero de Secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016)*

Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la dilatación, la contracción, los desplazamientos horizontales y verticales, las intersecciones con los ejes de una función cuadrática, y la función exponencial al variar sus coeficientes.

*Figura 4: Desempeño de Quinto de Secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016)*

Ahora, mostraremos cómo se presenta la función en los Cuadernos de Trabajo proporcionados por el Ministerio de Educación del Perú a los alumnos de Educación Secundaria.

Es importante notar que los textos presentan en primer lugar una situación llamada “significativa”, la cual parece tener como objetivo estudiar un problema cotidiano para cuya solución se requiera hacer uso del objeto de estudio función. Después de presentar estas situaciones, se presentan diferentes ejercicios que buscan que el estudiante cumpla con los desempeños de la Programación Curricular.

Encontramos un grupo de problemas que se plantean en el registro algebraico y solo requieren hacer tratamiento en el mismo, sin necesidad de hacer ningún cambio de registro, como se observa en la figura 5.

5. En una función de segundo grado de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a \neq 0$ , para que  $f(x)$  tenga un valor máximo, se determinan las coordenadas de sus vértices, en este caso  $x = \frac{-b}{2a}$ .  
Calcula el valor de  $x$  para que  $f(x) = x(16 - 2x)300$  tenga el máximo volumen.

*Figura 5: Ejercicio de función cuadrática para quinto de secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017c, p.81)*

Encontramos también preguntas en donde la información se presenta empleando como registro de partida el registro tabular, y para su solución se hace necesario realizar una conversión a otro registro. Sin embargo, no queda claro cuál es el registro al que se desea llegar, pues el alumno tendrá que usar algunas de las definiciones que conoce de función y asociar a ella un registro, como se observa en la figura 6.

### Situación significativa A

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. Luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que la altura que alcanzaba la rana en cada instante del salto podía modelarse como una **función** cuadrática. En la tabla adjunta, se muestra la altura que alcanza la rana en un mismo salto, en cinco instantes diferentes.

$t$ (s)	0	0,5	1	1,5	2
$h$ (m)	0	0,75	1	0,75	0

- Escribe una **función** cuadrática para modelar la situación que planteó el experto en anfibios.
- Determina algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y el tiempo que emplea en llegar ahí.
- ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

Figura 6: Situación significativa de función cuadrática para quinto de secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017c, p.82)

También encontramos situaciones significativas que tienen como registro de partida el registro algebraico, y su objetivo es llegar a otro registro. Esta es una de las primeras situaciones abordadas para el tema de funciones en la Educación Secundaria, como se puede evidenciar en la figura 7.

### Situación A

La siguiente función representa la temperatura (en °C) de un refrigerador nuevo a los  $x$  minutos de haberlo encendido:

$$f(x) = 20 - 2x$$

Grafica dicha función y responde:

- ¿Qué clase de función es?
- ¿La función es creciente o decreciente? ¿Por qué?
- ¿Qué representa el 20 y qué significado tiene?
- ¿Qué representa el  $-2$  y qué significado tiene?



Figura 7: Situación significativa de función lineal para primero de secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017a, p.192)

Del mismo modo encontramos preguntas que exigen que el alumno transite del registro gráfico al registro algebraico, y viceversa. Como se ilustra en la figura 8, el Cuaderno de Trabajo tiene preguntas que buscan el tránsito entre registros en ambos sentidos.

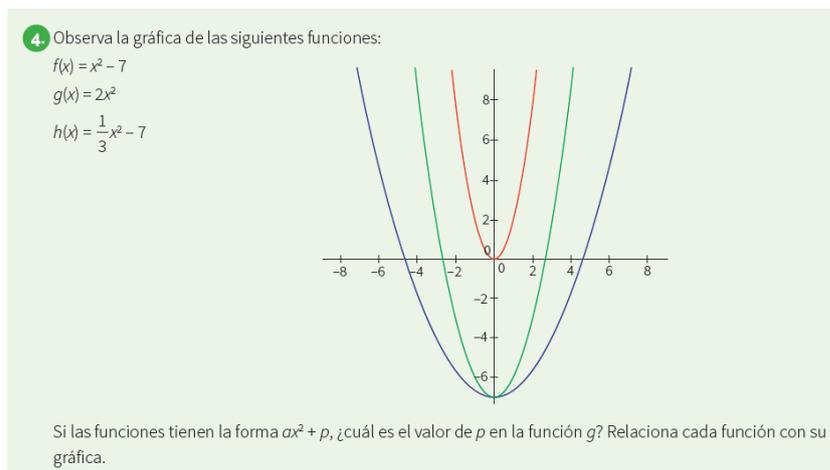


Figura 8: Situación significativa de función cuadrática para cuarto de secundaria  
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017b, p.126)

Es importante recalcar que en la revisión de Perú (2017), no se han encontrado ejercicios, problemas o situaciones donde el alumno pueda discutir cuando una expresión algebraica o los datos ordenados en una tabla corresponden a una función.

En segundo lugar, mostraremos como se presenta la función en el material de clase (en el último año) en la institución educativa donde se realizó la investigación. Cabe resaltar que la institución no cuenta con un libro de texto, sino con fichas creadas por el docente a cargo del curso, las cuales son presentadas en el Anexo A. Además, solo se ha analizado el material correspondiente al último año, mas no el de años anteriores.

En cuanto al objeto matemático función, la institución cuenta con seis fichas de ejercicios y problemas, y dos fichas de evaluaciones, de las cuales se analizaron 5 fichas desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que fueron las proporcionadas por el docente a cargo del curso.

Es importante notar que existen preguntas para pasar del registro algebraico al gráfico, como se observa en la figura 9. Sin embargo, el material de clase no presenta preguntas inversas, es decir, partir del registro gráfico y llegar al algebraico.

1. (6ptos.) Graficar:  $f(x) = 2x + 5$

2. (8ptos) Graficar:  $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$  y hallar las coordenadas del vértice.

3. (8ptos) Graficar:  $f(x) = 2 + 2^x$

Figura 9: Ejercicios de una Práctica Calificada de quinto de secundaria

Fuente: Anexo 2

El material de clase muestra predominio de ejercicios que parten del registro verbal y exigen transitar al registro algebraico y tabular, sin embargo, no hay ninguna pregunta que lleve el alumno a transitar del registro verbal al gráfico.

La figura 10 muestra justamente lo que detallamos líneas arriba.

Un fabricante de zapatos tiene gastos fijos mensuales de S/. 20 000 y un costo unitario de producción de S/. 40. El producto se vende a S/. 80 la unidad.

- ¿Cuál es la función de costos?
- ¿Cuál es la función de ingresos?
- ¿Cuál es la función de ganancia?
- Encuentra el nivel de pérdida o ganancia si se producen 4 00 y 1200 unidades.

Figura 10: Ejercicios trabajado en clase de quinto de secundaria

Fuente: Anexo 2

Observamos también que no existen ejercicios donde los alumnos al ver alguna expresión algebraica, texto o gráfica puedan saber si representa una función o no, por lo cual asumimos que el objetivo de la institución ha sido asociar algunos cambios predominantes entre registros con la definición de función, por ejemplo, mostrar una regla de correspondencia y pedir que se grafique correspondería al tránsito entre el registro algebraico al gráfico, pero las estudiantes podrían entender función como una fórmula que se grafica.

Como podemos notar, los registros de representación semiótica trabajados en la institución son: verbal, tabular, algebraico y gráfico. Según las figuras 9 y 10 mostradas observamos que no se prioriza trabajar con problemas que busquen distintas conversiones entre los registros.

## **CAPITULO III: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo presentaremos algunos aspectos del marco teórico elegido para nuestra investigación, así como también los aspectos metodológicos en los cuales se sustenta nuestro trabajo.

### **3.1 Elementos teóricos que guiarán la investigación**

El marco teórico elegido para nuestra investigación es la Teoría de Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Duval (2004), pues diferentes investigaciones en didáctica de las matemáticas muestran la importancia del uso de las representaciones semióticas como parte del aprendizaje del concepto de función; además, según Perú (2016), el concepto de función está enmarcado en la competencia RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO y en los desempeños de esta competencia, para todos los grados de Educación Secundaria, se espera que el estudiante haga uso de las representaciones gráfica, tabular, simbólica, de lenguaje natural y algebraica, estableciendo relaciones entre dichas representaciones.

#### **Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica**

Esta teoría sustenta el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en la utilización de registros de representación semiótica. Por ello, es que Duval (2006) sostiene que las representaciones semióticas tienen como rol primordial ser el único medio de acceso a los objetos matemáticos. Duval (2012) refiere esta idea afirmando lo siguiente: “La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva” (p. 282)

Un aspecto relevante para el aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos es la coordinación entre registros de representación semiótica, como un tránsito espontáneo entre registros; es decir, no basta que se pase de un registro a otro o se use un registro como auxiliar, se debe ver que al momento de salir del contexto

donde se realizó el aprendizaje, los alumnos sean capaces de movilizar los conocimientos adquiridos.

### **Representación mental y representación semiótica**

Según Duval (2004), toda actividad matemática se desarrolla dentro de un entorno de representaciones. Así, el autor define dos tipos de representaciones: representación mental y representación semiótica.

Las representaciones mentales son definidas como las concepciones que cada individuo posee sobre un objeto o situación, y todo lo relacionado a ello. Al ser propias de cada persona, son de carácter interno, es decir, no se pueden observar directamente.

Las representaciones semióticas son definidas como aquellas que son expresadas a través de un sistema de signos, de tal forma que cumplen una cierta cantidad de reglas en su interior y tienen carácter externo.

Según Duval (1999), las representaciones semióticas pueden ser: figuras, símbolos, notaciones, gráficos, etc, además las representaciones semióticas dependen principalmente de las representaciones mentales lo cual son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática.

Para Duval (1996), manifiesta que una representación semiótica se logra definir como el conjunto signo y objeto.

### **Registros de representación de la función**

La finalidad de nuestra investigación es conocer que concepciones de función tienen los alumnos de 5to año de secundaria de Educación Básica Regular, teniendo en cuenta el tránsito entre distintos registros de representación semiótica. Con base en las investigaciones de Ospina (2012) y Ledezma et al. (2018) tomamos en cuenta los siguientes registros de representación semiótica para el concepto de función: registro verbal, registro tabular, registro aritmético, registro algebraico, registro figural, registro gráfico y registro simbólico.

La descripción de cada uno de estos registros será basada en Ospina (2012).

**Registro verbal:** O también llamado de lengua natural, describe la función mediante una frase la relación existente entre una variable independiente y una dependiente.

**Registro tabular:** Describe la función mediante una tabla los valores, con correspondencia entre un valor para la variable independiente con un valor para la variable dependiente.

**Registro aritmético:** Describe la función mediante un conjunto de pares ordenados, con correspondencia entre un valor para la variable independiente con un valor para la variable dependiente.

**Registro algebraico:** Mediante una ecuación, describe la función que relaciona dos variables.

**Registro figural:** Describe la función haciendo uso de los diagramas sagitales o también llamados diagramas de Venn.

**Registro gráfico:** Describe una función como una correspondencia en el plano cartesiano entre valores del eje horizontal valores del eje vertical, mediante puntos sobre una gráfica.

**Registro simbólico:** Describe una relación entre variables mediante una representación de conjuntos de pares ordenados.

De los registros descritos, en Perú (2017a) están presentes, como ya hemos visto, los registros verbal, algebraico, gráfico y tabular. Sin embargo, en el material de la institución donde se realizó la investigación, se da prioridad a los registros: verbal, gráfico y tabular, como se muestra en el Anexo B.

### **Operaciones cognitivas del Registro de Representación Semiótica.**

Según Duval (2004), los sistemas semióticos permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas fundamentales, inherentes a toda representación: la formación, el tratamiento y la conversión.

#### **La Formación**

Es la representación identificable de un objeto real en un registro determinado.

Duval (2004) señala que;

La formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se “quiere” representar. (Duval, 2004, p.42)

Al realizar la formación de una representación semiótica se emplean reglas de cumplimiento y selección de algunas características y propiedades que se quieren representar. Estas reglas ya están establecidas por la comunidad Matemática, de modo que al utilizarlas podamos reconocer tales representaciones.

### **Tratamiento y Conversiones**

Según Duval (2016), afirman que existen dos tipos de representación semiótica, las cuales son totalmente distintas: los tratamientos y conversiones; que son procesos cognitivos diferentes. Un tratamiento hace mención a las transformaciones de las representaciones que ocurren en el interior de un mismo registro. Mientras que la conversión se comprende como la transformación de representación la cual consiste en cambiar de un registro a otro, pero sin cambiar de objeto matemático.

Al realizar una revisión general de los ejercicios relacionados al objeto matemático función para 5to de secundaria en Perú (2017a), observamos que existen ejercicios que buscan conversión entre los registros verbal y algebraico, otros donde se busca conversión entre los registros algebraico y gráfico, entre registros verbal y tabular, y, finalmente, algunos entre gráfico y tabular, siendo que esta última conversión puede aparecer o no según la estrategia que el alumno utilice para resolver esos ejercicios.

En la figura 11 que presentamos a continuación mostramos los registros presentes y las conversiones representadas mediante flechas, siendo que las flechas en líneas punteadas significan que, si bien está presente en la resolución de algunos ejercicios, el alumno puede escoger resolverlos de otra manera y no habría este tránsito entre registros.

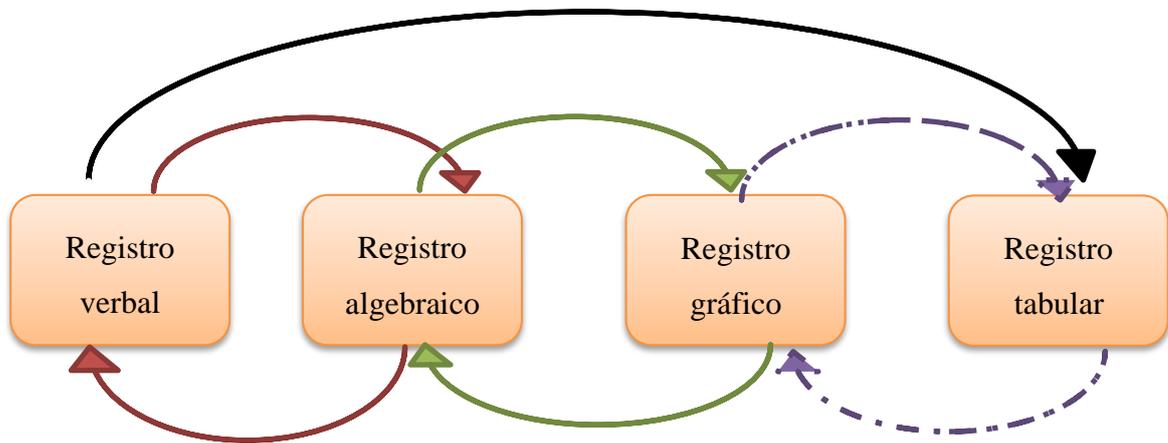


Figura 11: Esquema de conversiones en libros de texto  
Fuente: propia

Además, tomando en cuenta el material de la institución donde realizamos el trabajo de investigación, observamos que existen ejercicios que buscan conversión entre los registros verbal y algebraico, otros donde se busca conversión entre los registros algebraico y gráfico, otros entre registros verbal y tabular, y, finalmente, algunos entre gráfico y tabular, sin embargo, no todas las conversiones son en ambos sentidos, como se muestra en el gráfico que presentamos a continuación.

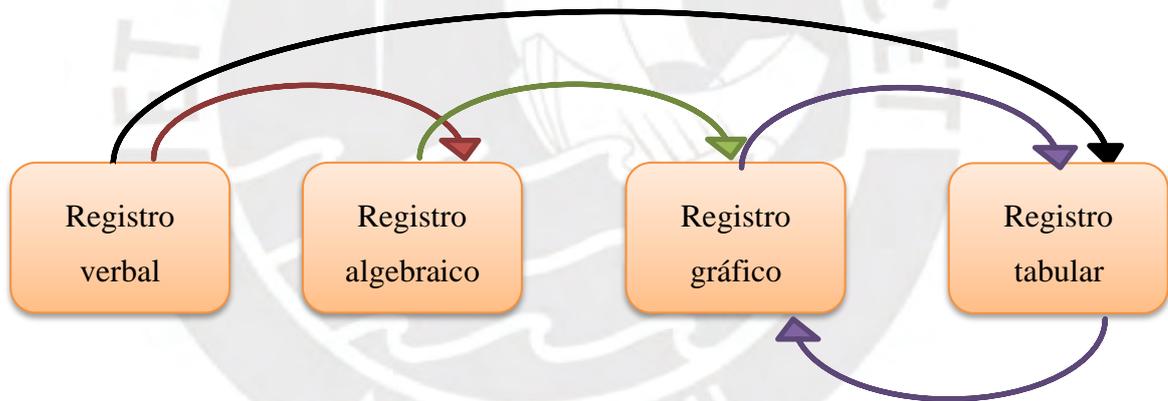


Figura 1: Esquema de conversiones en material de la institución  
Fuente: propia

Teniendo en cuenta la revisión del material y los registros predominantes en ellos, trabajaremos con algunos de estos registros para enfatizar nuestro estudio en los tratamientos que se realizan en ellos y las conversiones entre dos o más de ellos. En el gráfico que presentamos a continuación, mostramos con flechas las conversiones que buscamos analizar en los estudiantes.

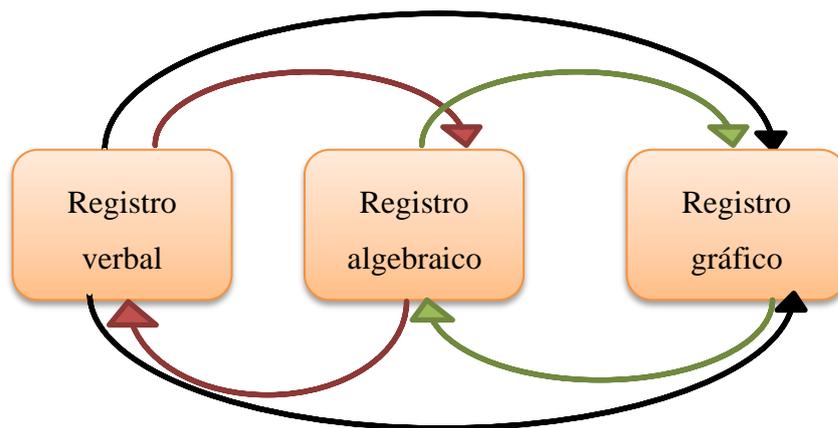


Figura 13: Esquema de conversiones en el trabajo de investigación  
Fuente: propia

El estudio de las conversiones en los demás registros no se ha considerado para esta investigación porque los registros escogidos son los predominantes en el material de texto de la institución; sin embargo, en el análisis de las respuestas de los estudiantes veremos si ellos utilizan algunos de los otros registros.

Definimos las siguientes categorías para realizar un análisis posterior de los tratamientos en los registros para función.

Basándonos en Ospina (2012), definimos los tratamientos para la función lineal y la función cuadrática.

### 1. Tratamientos en el registro algebraico.

- Reemplazar la variable “ $x$ ” con diversos valores.
- Realizar operaciones para dar forma de la regla de correspondencia de la función lineal o función cuadrática.

Ejemplo:

***La escala Fahrenheit ( $F$ ) y la escala Celsius ( $C$ ), son dos escalas de temperatura que cumplen la siguiente relación***

$$F = 1,8C + 32.$$

***En base a esta información, ¿podemos decir que  $F$  está en función de  $C$ ?***

***Además, determine a que temperatura hierve el agua en la escala Fahrenheit.***

## 2. Tratamientos en el registro gráfico.

- Realizar traslaciones verticales y horizontales a partir del gráfico de la función base.
- Identificar la pendiente e intersección con el eje Y en el gráfico de la función lineal.
- Identificar el vértice e intersección con el eje Y en el gráfico de la función cuadrática.

Ejemplo:

*Esboce en el plano cartesiano mostrado, los gráficos de:*

**a.**  $f(x) = x^2$

**b.**  $g(x) = (x - 1)^2$

**c.**  $h(x) = x^2 + 1$

*Observe el gráfico y explique en el siguiente recuadro qué sucede con los gráficos de g y h con respecto al gráfico de f.*

*Tome en cuenta las conclusiones a las que ha llegado con la observación realizada y realice el gráfico de*

$$p(x) = (x - 1)^2 + 1$$

## 3. Tratamiento en el registro verbal.

- Extraer y discriminar la información de una situación de la vida cotidiana relacionada a la función lineal o función cuadrática.
- Explicar con palabras propias lo que se entiende por algún concepto o por lo que sucede en alguna situación.

Ejemplo:

*Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.*

Por otro lado, definimos las siguientes categorías para realizar un análisis posterior de las conversiones entre registros.

### 1. Conversión del registro verbal al registro algebraico.

Consideramos importante el estudio de esta conversión en nuestra investigación porque observamos que en el material de texto de la institución se exige este tipo de tránsito entre registros y las investigaciones de Ospina (2012), Pires (2014) y

Prada-Nuñez et al. (2017) concuerdan en una dificultad existente en esta conversión.

Ejemplo:

*Un bus de 32 asientos fue elegido para una excursión. La compañía exigió a cada uno de los pasajeros 80 soles más 20 soles por cada asiento vacío. ¿Para qué cantidad de pasajeros la rentabilidad de la empresa es máxima?*

## 2. Conversión del registro algebraico al gráfico

Según las investigaciones de Prada-Nuñez et al. (2017), esta es la conversión que los alumnos realizan con mayor facilidad, pues hay una predominancia de trabajar mayor cantidad de ejercicios que muestren este tránsito de registros. En el material de texto de la institución predominan las tareas de este tipo.

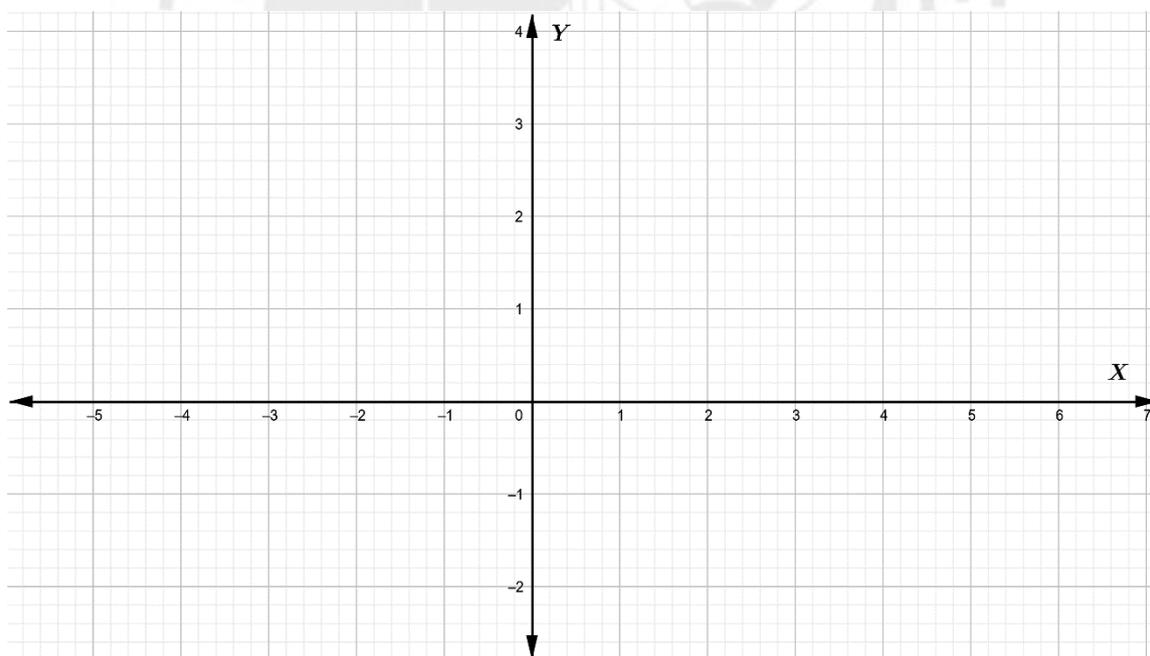
Ejemplo:

*Esboce en el plano cartesiano mostrado, los gráficos de:*

**a.**  $f(x) = x^2$

**b.**  $g(x) = (x - 1)^2$

**c.**  $h(x) = x^2 + 1$



## 3. Conversión del registro verbal al registro gráfico

Según las investigaciones de Zardo y Lutaif (2016) y Pires (2014), los estudiantes identifican la función con su representación gráfica o su representación algebraica.

Ejemplo:

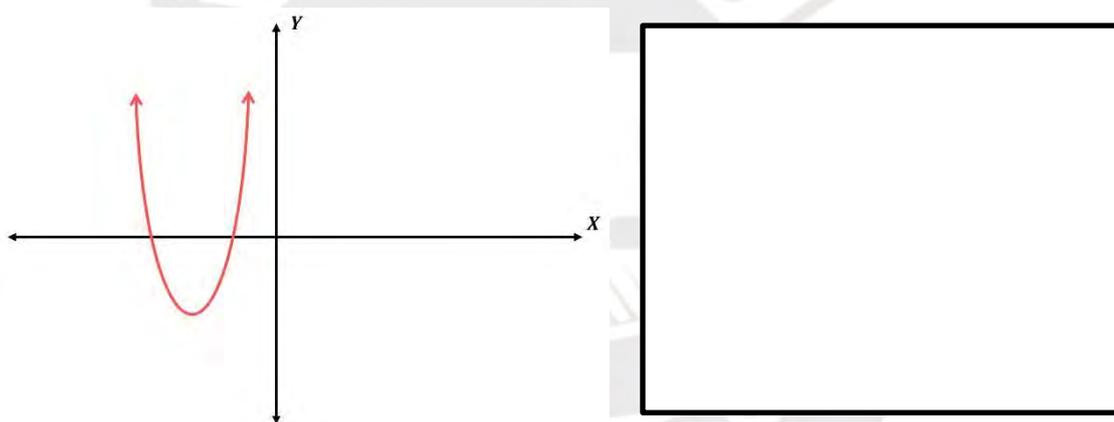
*Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.*

#### 4. Conversión del registro gráfico al registro verbal

Tomando como referencia la investigación de Prada-Nuñez et al. (2017), observamos que hay dificultad en explicar el por qué un gráfico es una función. El estudiante suele aplicar reglas prácticas enseñadas por el docente, sin entender el concepto.

Ejemplo:

*Dados los gráficos, identifica cuales representan o no funciones y justifica tus respuestas. Además, si el gráfico representa una función, indica si se trata de una función lineal, cuadrática, exponencial, etc. Utiliza los recuadros para la justificación de tus respuestas.*

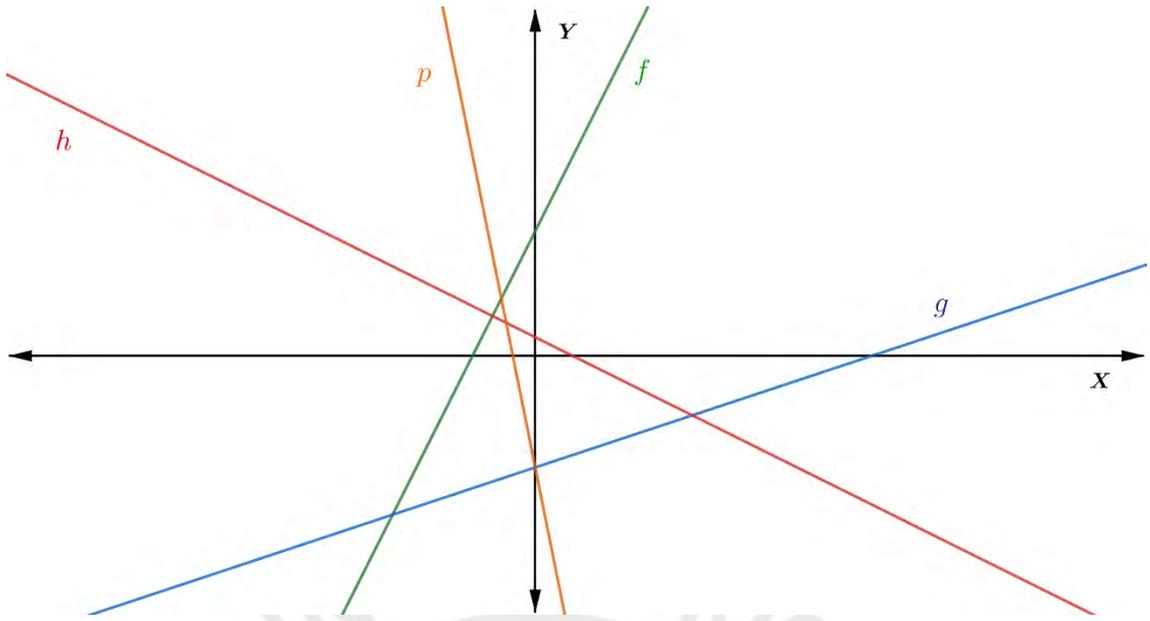


#### 5. Conversión del registro gráfico al algebraico

Según las investigaciones de Pires (2014), Zardo y Lutaif (2016) y Prada-Nuñez et al. (2017), los alumnos pueden pasar del registro gráfico al algebraico usando un registro intermedio.

Ejemplo:

*Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.*



$$y = \frac{1}{3}x - 2 \quad ( \quad ) \qquad y = -0,5x + \frac{1}{3} \quad ( \quad )$$

$$y = 2x + \sqrt{5} \quad ( \quad ) \qquad y = -5x + 2 \quad ( \quad )$$

$$y = -5x - 2 \quad ( \quad ) \qquad y = \frac{1}{3}x + 100 \quad ( \quad )$$

### 6. Conversión del registro algebraico al verbal

Según el material de clase de la institución observamos que no hay preguntas donde se exija un tránsito partiendo del registro algebraico al verbal, sin embargo, como ya hemos notado líneas arriba, la conversión inversa presenta dificultad en los estudiantes, por lo que asumimos que este tipo de conversión puede causar ese mismo efecto.

Ejemplo:

**Pregunta 11: Relacione la regla de correspondencia con alguna o algunas de las situaciones de la vida cotidiana mostradas.**

$$f(x) = -300x + 8000$$

Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.

José gana 8000 soles al mes, pero gasta 300 soles mensualmente al pagar su celular.

### **Congruencia entre las conversiones**

Según Duval (1995) existen dificultades para realizar la coordinación entre representaciones. Así, define la congruencia entre dos representaciones como el grado de correspondencia que existe entre una y la otra.

Duval define tres criterios para analizar la congruencia:

Criterio 1: Correspondencia semántica, entre las unidades significantes (que se entiende como todas aquellas unidades dependientes del léxico de un registro de representación que no admiten descomposición en otras más simples.

Criterio 2: Univocidad semántica, que busca que a cada unidad significativa de la representación de salida le corresponda una unidad significativa en el registro de llegada.

Criterio 3: Mismo orden de aprehensión de las unidades significantes, que busca que exista un mismo número de unidades significantes y que sean aprehendidas en un mismo orden en ambos registros.

### **3.2 Metodología y procedimientos**

Para Taylor y Bodgan (1987), una metodología corresponde al modo en que enfocamos los problemas y buscamos las respuestas adecuadas a los mismos.

Nuestra investigación es cualitativa. Según Taylor y Bodgan (1987) esta metodología se caracteriza por ser aquella en la que se obtienen datos descriptivos, que se refieren a las palabras y conductas de los sujetos de investigación.

La presente investigación posee las cinco características establecidas por Bodgan y Biklen (1994) para que una investigación sea cualitativa:

- 1) En la investigación cualitativa la fuente directa de los datos es el ambiente natural, siendo el investigador el instrumento principal. El investigador revisa todos los datos recogidos mediante diversos instrumentos de análisis, y reconoce la importancia de que dichos datos hayan sido tomados del contexto habitual donde ocurren los hechos.

- 2) La investigación cualitativa es descriptiva. Para los investigadores, todo dato recogido con entrevistas, videos, fotografías, cuestionarios, documentos personales u otros instrumentos, es de suma importancia para realizar una comprensión adecuada del objeto de estudio.
- 3) En la investigación cualitativa, los investigadores se interesan más por los procesos que por los resultados; es decir, existe una preocupación por comprender los procedimientos e interacciones de los sujetos en su ambiente habitual.
- 4) En la investigación cualitativa, el análisis de los datos suele darse de forma inductiva. Es decir, después de la recolección de datos y del tiempo compartido con los sujetos, se establece el camino de la investigación, sin el fin de confirmar o verificar hipótesis. La investigación se basa en un marco teórico designado anteriormente que sirve como guía en la recolección de datos y el posterior análisis.
- 5) El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo. Los investigadores están interesados en informar lo que los sujetos experimentan, para ellos establecen estrategias, las cuales le permiten tener en cuenta las experiencias desde el punto de vista de informante.

En nuestra investigación, respecto a los apartados 1) y 2), los datos serán recolectados usando observaciones de clase y un cuestionario de preguntas relacionadas al concepto de función. Este cuestionario será aplicado en el salón de clases, un lugar habitual para los estudiantes.

Dado que nos interesa conocer cuál es la comprensión del concepto de función que poseen los alumnos, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, utilizando los instrumentos descritos, se cumplen las características 3) y 4) de la investigación cualitativa.

Con los datos recolectados en esta investigación se busca informar sobre los significados que poseen los sujetos de estudio, con la finalidad de realizar una retroalimentación y validación de las respuestas de los estudiantes.

Además, a continuación, nombraremos los procedimientos metodológicos a seguir en nuestra investigación para cumplir con nuestro objetivo general:

- a. Para comenzar nuestro estudio, elegimos el objeto matemático a estudiar: la función, centrándonos en la problemática de cómo los alumnos comprenden el concepto de función.
- b. En una segunda etapa se realizó una búsqueda bibliográfica, donde se hallaron antecedentes que reflejaban la dificultad existente en la comprensión del concepto de función desde la secundaria hasta el nivel universitario. Estos antecedentes consistieron en tesis de maestría, artículos de investigación, actas de congreso, etc. Así también, se eligió el marco teórico que guiará la investigación: la Teoría de Registros de Representación Semiótica,
- c. En base al estudio exhaustivo realizado en la etapa anterior, formulamos nuestro problema de investigación, así como también el objetivo general y los objetivos específicos; que son los que en conjunto guiarán la investigación.
- d. En una cuarta etapa se realizó el diseño de un cuestionario, el cual contiene algunas preguntas adaptadas de trabajos relevantes mostrados en nuestros antecedentes, y otras creadas por nosotros. Todas estas preguntas buscan realizar un análisis de la comprensión conceptual de la función, desde el marco teórico elegido.
- e. En una quinta etapa se evalúa el cuestionario a alumnas de 5to de secundaria, utilizando el tiempo de 2 horas pedagógicas.
- f. En una sexta etapa se realiza el análisis de las respuestas dadas por las estudiantes, basándonos en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.
- g. En una séptima etapa se recogen algunas conclusiones del análisis de las respuestas de las estudiantes, así como los principales resultados de la investigación.

## **CAPITULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo se explica la construcción y aplicación del cuestionario utilizado en nuestra investigación, sustentando cada una de las preguntas. Algunas preguntas fueron tomadas de los antecedentes presentados en el capítulo 1, y otras fueron creadas según la conversión o tratamiento que se esperaba movilizar en las estudiantes.

### **4.1 Construcción del cuestionario**

Las trece preguntas presentes en nuestro cuestionario buscan analizar los tratamientos y conversiones entre los tres registros del objeto función ya elegidos: verbal, gráfico y algebraico, estas preguntas buscan movilizar en el estudiante el concepto de función, a través de la definición, de la función lineal y la función cuadrática.

Al realizar la implementación del cuestionario, utilizaremos dos cuestionarios: A y B, siendo la diferencia entre ellos el orden en que se han colocado las preguntas.

Decidimos no considerar los tratamientos en el registro verbal para la función lineal, pues este tratamiento ya está siendo evaluado en la función cuadrática; de igual manera no consideramos los tratamientos en el registro algebraico para la función cuadrática.

También utilizamos preguntas abiertas en las cuales cada respuesta del alumno será clasificada en algún registro. Estas preguntas consideradas en nuestro cuestionario porque nos dan información de cuál es el registro predominante para cada estudiante y de manera general para todos los alumnos evaluados.

En algunas preguntas el estudiante puede elegir si usar función lineal o función cuadrática. Estas preguntas nos darán información de con qué tipo de función el alumno se siente preparado de dar una respuesta.

Detallaremos la conversión y tratamientos entre registros mediante las siguientes tablas de doble entrada donde, cuando la fila y columna de un mismo registro se intersectan hablaremos de un tratamiento en ese registro; mientras que en los otros casos serán las conversiones.

En las tablas 1, 2 y 3 construidas a continuación, haremos referencia a la enumeración de las preguntas utilizada en el Cuestionario A.

Es importante realizar algunas aclaraciones que se observarán en las tablas presentadas.

Las columnas corresponden al registro en que se enuncia el problema, y las columnas corresponden al registro en que se espera que los estudiantes den la solución. Se muestran espacios vacíos en algunas celdas, pues esos tratamientos son evaluados de manera similar con otras preguntas. Algunas preguntas se repiten en más de una celda, esto es porque existe varias posibilidades y dependerá de la respuesta del alumno.

Tabla 1. Preguntas asociadas al concepto de función.

Concepto de función a través de su definición			
	Registro verbal	Registro gráfico	Registro algebraico
Registro Verbal	1;6	1	1
Registro gráfico	2	2	2
Registro algebraico	3	3	3

Tabla 2. Preguntas asociadas a función lineal.

Concepto de función a través de la función Lineal			
	Registro verbal	Registro gráfico	Registro algebraico
Registro Verbal	13	10	10
Registro gráfico	12		4
Registro algebraico	8;11	4	8

Tabla 3. Preguntas asociadas a función cuadrática.

Concepto de función a través de la función cuadrática			
	Registro verbal	Registro gráfico	Registro algebraico
Registro Verbal	7	7	7
Registro gráfico	12	9	5
Registro algebraico		5;9	5

### Questionario

La pregunta 1 propuesta en nuestra investigación fue la siguiente:

*Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.*

Esta pregunta fue adaptada de Zardo y Lutaif (2016) y decidimos cambiar la pregunta original buscando ser más específicos al dar la indicación de escribir lo que se entiende por función. Este cambio lo consideramos necesario porque por referencia del docente a cargo en las entrevistas realizadas previa evaluación del cuestionario, y las distintas experiencias en la enseñanza en etapa escolar, las alumnas necesitan tener una indicación clara de lo que se busca y de esta manera evitar preguntas durante la experimentación o confusión sobre lo que se les solicita.

La pregunta 1 tiene como objetivo conocer cuál es el concepto que las estudiantes poseen de función, realizando una conversión del registro verbal a cualquiera de los otros registros. Además, se pretende observar las respuestas que surgirán ante una pregunta fuera de lo usual en el material de la institución.

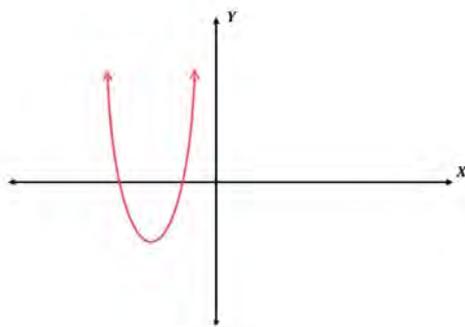
La pregunta 2 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación fue adaptada de Zardo y Lutaif (2016); decidimos cambiar la pregunta original colocando otros gráficos donde la alumna pueda decidir si el gráfico que se le presenta representa una función o no justificando su respuesta. Además, esta pregunta pide identificar si los gráficos presentados corresponden a la representación de una función que ya conoce. Este cambio lo consideramos necesario porque por referencia del

docente a cargo en las entrevistas previas a la evaluación del cuestionario, y las distintas experiencias en la enseñanza en etapa escolar, algunas alumnas tienden a no reconocer si se trata de una función lineal o cuadrática al ver su gráfica.

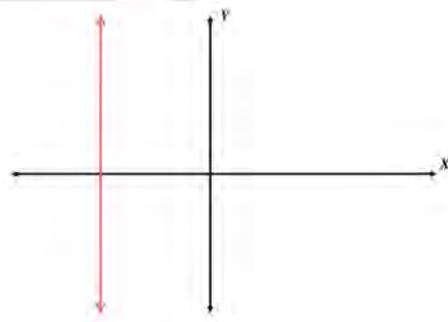
La pregunta 2 tiene como objetivo conocer cuál es el concepto que las estudiantes poseen de función, realizando una conversión del registro gráfico a cualquiera de los otros registros o realizando tratamientos en el mismo. Además, pretendemos observar que registros usarán las alumnas en una pregunta que no ha sido trabajada en clase.

***Dados los gráficos, identifica cuáles representan o no funciones y justifica tus respuestas. Además, si el gráfico representa una función, indica si se trata de una función lineal, cuadrática, exponencial, etc. Utiliza los recuadros para la justificación de tus respuestas.***

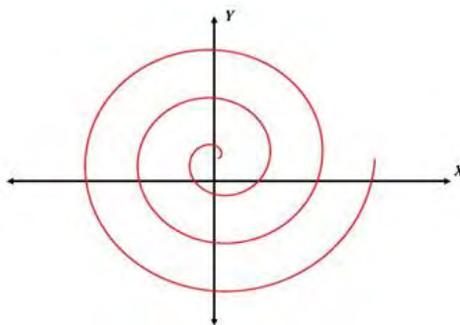
a.



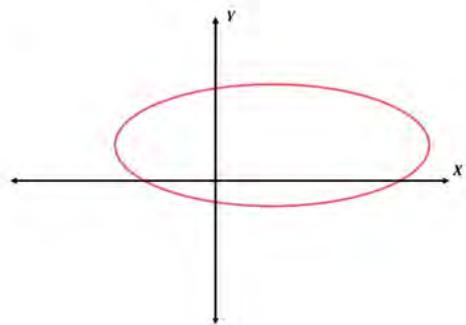
b.



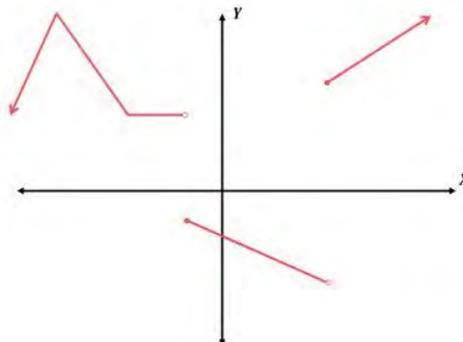
c.



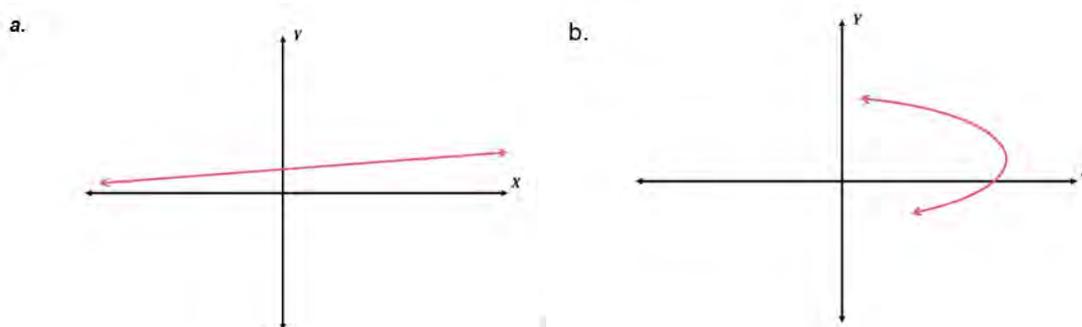
d.



e.



En el cuestionario B, la Pregunta 2 fue enumerada como Pregunta 9, y los ítems c, d y e anteriores permanecieron, sin embargo, los ítems a y b fueron reemplazados por los siguientes que nombraremos a\_B y b\_B.



La pregunta 3 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación fue creada con el objetivo de conocer cuál es el concepto que las estudiantes poseen de función, realizando una conversión del registro algebraico a cualquiera de los otros registros, o realizando tratamientos en el mismo. Además, las alumnas identificarán si la ecuación presentada corresponde a la representación de una función que ya conoce.

***Dadas las expresiones algebraicas, identifica cuales cumplen que  $y$  sea una función de  $x$ . Además, si la expresión representa dicha función, indica si se trata de una lineal, cuadrática, exponencial, etc.***

a.  $x^2 + y^2 = 9$

b.  $(x - 5, 53)^2 = 4y$

c.  $y = -2x + \sqrt{3}$

d.  $y^2 = 8(x - 8, 245)$

En el cuestionario B, la Pregunta 3 fue enumerada como Pregunta 10, y los ítems b y d anteriores permanecieron, sin embargo, los ítems a y c fueron reemplazados por los siguientes que nombraremos a\_B y c\_B.

a.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

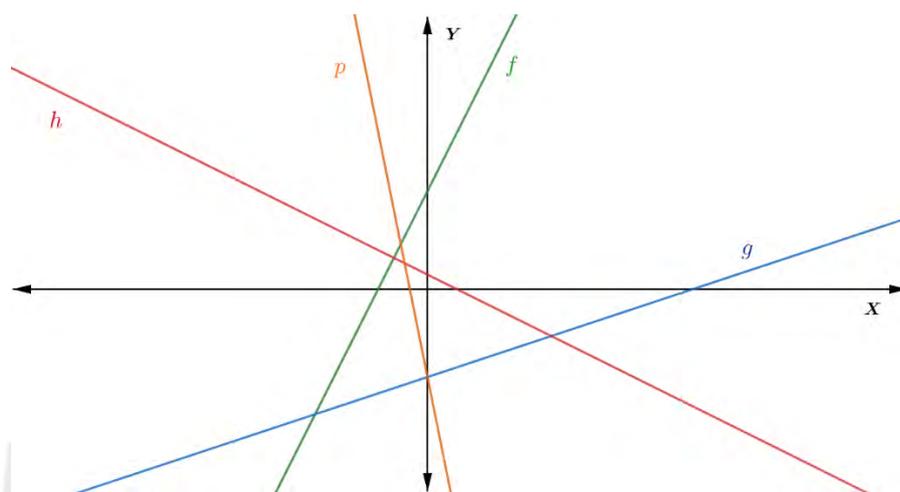
c.  $y = 245, 64$

La pregunta 4 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 11 en el cuestionario B), fue elaborada con el objetivo de que los estudiantes realicen tratamientos en el registro gráfico utilizando las propiedades de pendiente positiva o negativa, e intercepto con el Eje Y, para la

función lineal y además realicen una conversión al registro algebraico, para así encontrar la expresión algebraica correspondiente.

Para la justificación de la elección de las expresiones adecuadas se ha colocado un recuadro donde las estudiantes deberán explicar cómo llegaron a elegir 4 de las 6 expresiones mostradas.

**Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.**



$$y = \frac{1}{3}x - 2 ( \quad )$$

$$y = -0,5x + \frac{1}{3} ( \quad )$$

$$y = 2x + \sqrt{5} ( \quad )$$

$$y = -5x + 2 ( \quad )$$

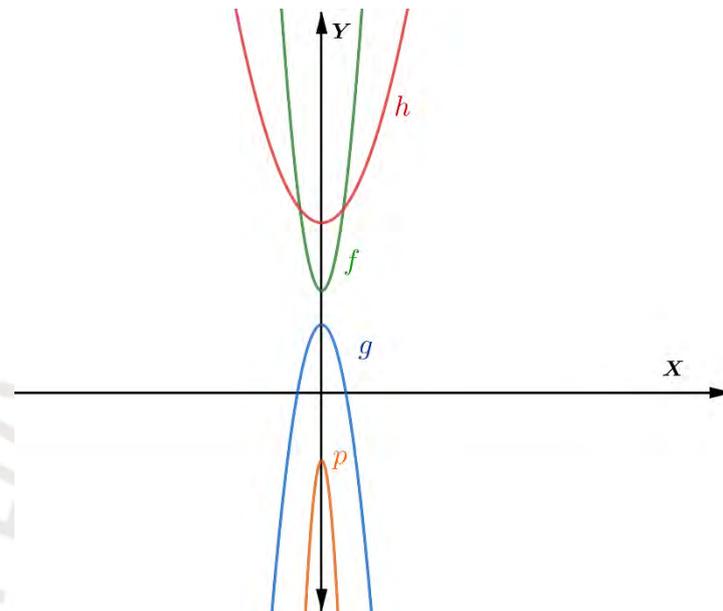
$$y = -5x - 2 ( \quad )$$

$$y = \frac{1}{3}x + 100 ( \quad )$$

La pregunta 5 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 12 en el cuestionario B), fue elaborada con el objetivo de que los estudiantes realicen tratamientos en el registro gráfico utilizando las propiedades hacia donde se abre la parábola según el coeficiente del término cuadrático y el intercepto con el Eje Y, para la función cuadrática y además realicen una conversión al registro algebraico, para así encontrar la expresión algebraica correspondiente.

Para la justificación de la elección de las expresiones adecuadas se ha colocado un recuadro donde los estudiantes deberán explicar cómo llegaron a elegir 4 de las 6 expresiones mostradas.

**Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.**



$$y + 3x^2 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y - 0,5x^2 - 10 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y - 3x^2 - 6 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 2x^2 - 4 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 10x^2 + 4 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 3x^2 - 2x - 7 = 0 \quad ( \quad )$$

La pregunta 6 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 13 en el cuestionario B), tiene como objetivo que el alumno use el concepto que tiene de función para identificar cuál de las opciones representa a una función o no.

En esta pregunta el alumno trabajará en el registro verbal y no se exige el paso a otro registro.

**En cada uno de los siguientes casos indique si la relación entre las variables dadas corresponde a una función. En caso de que sea una función, señale la variable dependiente y la variable independiente. Justifique sus respuestas.**

a) **Las actrices de películas y las películas en las que han participado.**

b) **Las estudiantes del aula de 5to de secundaria y sus cursos preferidos.**

La pregunta 7 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 13 en el cuestionario B), fue traducida y adaptada de (Pires 2014, pp. 426) y tiene como objetivo que el alumno parta del registro verbal y realice una conversión al registro algebraico, llegando a hallar la regla de correspondencia de una función cuadrática.

***Un bus de 32 asientos fue elegido para una excursión. La compañía exigió a cada uno de los pasajeros 80 soles más 20 soles por cada asiento vacío. ¿Para que cantidad de pasajeros la rentabilidad de la empresa es máxima?***

La pregunta 8 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada de la misma manera en el cuestionario B), fue traducida y adaptada de (Pires 2014, pp. 426) y tiene como primer objetivo que las estudiantes movilicen el concepto de función que poseen para relacionar las variables  $F$  y  $C$ . Además, un segundo objetivo de esta pregunta es que las alumnas realicen una conversión del registro algebraico al registro verbal.

***La escala Fahrenheit ( $F$ ) y la escala Celsius ( $C$ ), son dos escalas de temperatura que cumplen la siguiente relación***

$$F = 1,8C + 32.$$

***En base a esta información, ¿podemos decir que  $F$  está en función de  $C$ ?***

***Además, determine a que temperatura hierve el agua en la escala Fahrenheit.***

La pregunta 9 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 2 en el cuestionario B), fue creada con dos partes importantes.

La primera parte de la pregunta busca que las estudiantes pasen del registro algebraico al registro gráfico, tal vez usando un registro intermedio como el registro tabular. Este tipo de preguntas se repite continuamente en el material de clase de la institución, sin embargo, al solicitar que expliquen que sucedió con las representaciones gráficas de las funciones  $g$  y  $h$  respecto de  $f$ , buscamos que

puedan notar los tratamientos que se realizan en el registro gráfico para la función cuadrática.

La segunda parte de la pregunta, donde se pide representar gráficamente la función  $p$ , tiene como objetivo que se realicen tratamientos en el registro gráfico para la función cuadrática a partir de lo observado más arriba.

***Esboce en el plano cartesiano mostrado, los gráficos de:***

***a.  $f(x) = x^2$***

***b.  $g(x) = (x - 1)^2$***

***c.  $h(x) = x^2 + 1$***

***Observe el gráfico y explique en el siguiente recuadro qué sucede con los gráficos de  $g$  y  $h$  con respecto al gráfico de  $f$ .***

***Tome en cuenta las conclusiones a las que ha llegado con la observación realizada y realice el gráfico de***

$$p(x) = (x - 1)^2 + 1$$

La pregunta 10 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 3 en el cuestionario B), fue traducida y adaptada de (Pires 2014, pp. 426) y tiene como objetivo que el alumno parta del registro verbal y realice una conversión al registro algebraico o gráfico, al hallar la regla de correspondencia o gráfica de una función lineal. En este tipo de pregunta observaremos cuál es el registro predominante del salón de clases, pues elegirán explicar de manera gráfica o algebraica su respuesta.

***Una nueva aplicación de taxis que está ingresando al mercado, muestra un cobro de tarifa diferente a las demás. El cobro será de la siguiente manera: 5 soles como valor fijo inicial, más dos soles por cada kilómetro recorrido.***

***De acuerdo con la información dada, explique de manera algebraica o gráfica cómo es la relación de dependencia entre la cantidad de kilómetros recorridos y el cobro total realizado.***

La pregunta 11 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 4 en el cuestionario B), fue elaborada con el objetivo de que las alumnas realicen una conversión del registro algebraico al registro verbal o viceversa. Al presentar opciones para que se pueda elegir con cual

relacionar la expresión algebraica, buscamos que las estudiantes identifiquen cuál es la variable dependiente e independiente en el contexto y que pueda ser modelada mediante la regla de correspondencia mostrada.

**Relacione la regla de correspondencia con alguna o algunas de las situaciones de la vida cotidiana mostradas.**

$$f(x) = -300x + 8000$$

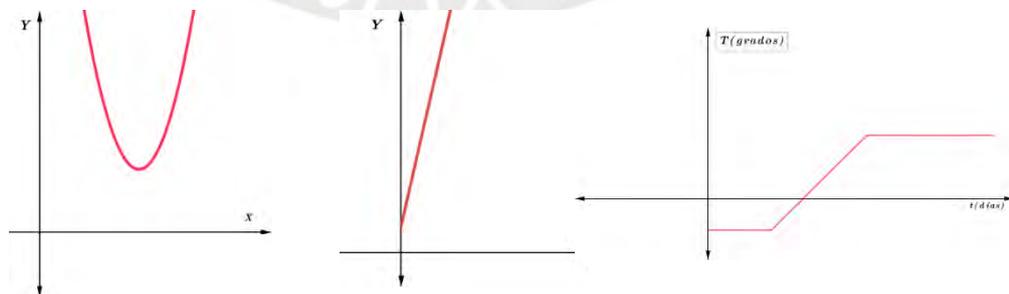
*Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.*

*María compró una computadora en 8000 soles, pero le indicaron que anualmente debe pagar 300 soles de garantía.*

*José gana 8000 soles al mes, pero gasta 300 soles mensualmente al pagar su celular.*

La pregunta 12 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 5 en el cuestionario B) es la siguiente, fue elaborada con el objetivo de que las alumnas realicen una conversión del registro gráfico al registro verbal. Al solicitar escoger entre tres opciones se busca conocer también con cuál de ellas las estudiantes prefieren trabajar.

**Escoja alguno de los gráficos mostrados y describa las características que conoce de la función representada o cree una situación de la vida cotidiana que pueda modelarse con la función representada en dicho gráfico.**



La pregunta 13 propuesta en el cuestionario A de nuestra investigación (y enumerada como Pregunta 6 en el cuestionario B), fue traducida y adaptada de (Pires 2014, pp. 426) y tiene como objetivo que las alumnas realicen tratamientos

en el registro verbal, sin embargo, se contempla que para responder a alguna de las preguntas se pase por un registro intermedio como el tabular o el algebraico.

*Una familia gasta 4 kg de gas de cocina por cada 7 días. Si compraron un balón de gas de 13 kg,*

*a. ¿Será posible que ese balón de gas dure un mes?*

*b. ¿Cuántos kilogramos de gas quedarán en el balón después de 10 días de uso?*

*c. ¿Cuántos días serán necesarios para consumir 6 kg de gas?*

### **Caracterización de los sujetos de investigación**

Participaron las estudiantes de 4° y 5° de Secundaria del colegio particular María de la Providencia, cuyos padres autorizaron su participación mediante el consentimiento informado presentado en el Anexo 3.

El cuestionario se desarrolló en el salón de 4° (piloto) y en el de 5° de secundaria, en ambos se tenía el mismo profesor a cargo.

Todas las estudiantes que respondieron el cuestionario presentaban conocimientos previos referentes a función, siendo este tema tratado 2 meses antes (aproximadamente) de la evaluación de nuestro cuestionario. (Ver anexo 2)

### **4.2 Descripción de las actividades y sus objetivos**

Llevamos a cabo la experimentación en las aulas de 4° y 5° de secundaria, del colegio particular María de la Providencia, en el horario de clases del curso de Matemáticas, tomando 2 horas pedagógicas (90 minutos) en cada uno de los grados.

El cuestionario presentado a los alumnos contiene 13 preguntas diseñadas considerando el marco de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y centró en conocer cuál es la comprensión conceptual de función basada en los registros verbal, algebraico y tabular, de los estudiantes de 5° de secundaria de la institución que participa en nuestra investigación.

### 4.3 Experimentación y análisis de las actividades

La experimentación se realizó en dos días distintos. La primera experimentación se realizó con alumnas de 4° de secundaria, tomando esta evaluación como una prueba piloto que nos permitió ajustar tiempos, reordenar las preguntas y validar la redacción.

Respecto al piloto, durante la experimentación con las alumnas de 4° de secundaria se observó que colocaron mayor énfasis al resolver las primeras preguntas, pero de la mitad en adelante las dejaron en blanco o las respondían con poco interés, pues al analizar respuestas no encontramos que fueran fundamentadas. Concluimos que el tiempo destinado fue adecuado, sin embargo, las estudiantes indicaron que entendían el enunciado de las preguntas, pero no sabían cómo responder pues no se parecían a lo trabajado en clase.

La segunda experimentación se realizó con alumnas de 5° de secundaria, una semana después de la primera experimentación, teniendo en cuenta las observaciones de la prueba piloto. Todas las preguntas son respondidas de manera individual en un lapso de tiempo de 2 horas pedagógicas.

El cuestionario tuvo una duración de 2 horas pedagógicas, todas las alumnas respondieron el cuestionario.

De las 13 preguntas de nuestro cuestionario, realizamos un conteo de las preguntas respondidas y no respondidas, y observamos que la pregunta menos contestada fue la pregunta 8, esto nos hace pensar que existen dificultades para realizar tratamientos en el registro algebraico referido al objeto matemático función cuadrática. También, notamos que las preguntas 1, 2, 4 y 16 fueron contestadas por todas las alumnas.

La tabla 4 muestra las observaciones anteriores:

Tabla 4. Conteo de preguntas respondidas y no respondidas

PREGUNTAS	CONTESTADAS	EN BLANCO	TOTAL
Pregunta 1	16	0	16
Pregunta 2	16	0	16
Pregunta 3	12	4	16
Pregunta 4	16	0	16
Pregunta 5	12	4	16
Pregunta 6	15	1	16
Pregunta 7	13	3	16
Pregunta 8	11	5	16
Pregunta 9	14	2	16
Pregunta 10	16	0	16
Pregunta 11	14	2	16
Pregunta 12	13	3	16
Pregunta 13	15	1	16

En general, no hubo preguntas en las cuales todas las estudiantes las dejaran en blanco; esto nos da un indicativo de que el tiempo, la cantidad de preguntas y las preguntas elegidas en este cuestionario fueron adecuados.

A continuación, desarrollaremos la descripción, el análisis a priori, el análisis a posteriori y el contraste entre ambos por cada pregunta del cuestionario; además, realizaremos observaciones y conclusiones de la conexión entre las respuestas de diferentes preguntas de las mismas alumnas.

## ANÁLISIS POR PREG

### UNTA DEL CUESTIONARIO

En este apartado realizaremos el análisis a priori por cada pregunta del cuestionario

Las preguntas 1,2,3 presentes en el cuestionario A de nuestra investigación, han sido planteadas de manera que la estudiante pueda dar su respuesta en diferentes registros y las iremos presentando una a una detallando sus características.

Es importante aclarar que el docente a cargo del curso nos explicó que, si bien mencionó el concepto de función durante las clases impartidas, no ahondó en él más allá de mencionarlo; además, no hay ninguna pregunta similar en sus materiales de clase, en las evaluaciones o en los cuadernos de las alumnas.

#### ***Pregunta 1***

Para efectos de la experimentación decidimos que la pregunta 1 sea presentada en una hoja distinta a las demás, para que su respuesta no se vea influenciada por alguna de las otras 12 preguntas. Se repartió primero esta pregunta y las alumnas demoraron en responderla entre 1 y 6 minutos. A las que terminaban de responder esta pregunta, se les recogía dicha hoja e inmediatamente se les entregaba el cuestionario A o B al azar. Ver anexo E.

#### **Análisis a priori**

Basándonos en los resultados de Zardo y Lutaif (2016), pensamos que las estudiantes podrían dar las siguientes respuestas:

- Respecto a escribir lo que conoce por función

Primera posibilidad: Decir que es una relación entre dos conjuntos donde a cada elemento del primer conjunto (dominio) le corresponde un **único** elemento del segundo conjunto (rango).

Segunda posibilidad: Decir que es una relación entre dos conjuntos donde a cada elemento del primer conjunto (dominio) le corresponde un elemento del segundo conjunto (rango).

Tercera posibilidad: Decir que es una ecuación con las variables “ $x$ ” e “ $y$ ”.

Cuarta posibilidad: Confundir la definición con su representación, es decir, decir que una función es una ecuación o un gráfico o una tabla con valores, etc.

Quinta posibilidad-, Decir que es una fórmula con la cual se puede graficar.

- Respecto al ejemplo

Primera posibilidad: Dar un ejemplo en el registro verbal, con una situación de la vida cotidiana que se pueda modelar mediante una función (probablemente lineal, cuadrática y/o exponencial).

Segunda Posibilidad: Dar un ejemplo en el registro gráfico o algebraico, con algún gráfico o expresión algebraica (regla de correspondencia) que conozca o le hayan enseñado en clase que corresponde a una función, lo más probable es que sea una función lineal, cuadrática y/o exponencial.

Tercera posibilidad: Es posible que alguna alumna pueda dar la respuesta en algún otro registro como el tabular, aritmético o figural. Consideramos que estas respuestas serán muy poco frecuentes pues las fichas de clase nos indicaron cuales fueron los registros más trabajados para este concepto y por lo tanto por eso fueron elegidos para esta investigación.

## **Pregunta 2**

### **Análisis a priori**

Pensamos que las estudiantes podrían dar las siguientes respuestas:

Primera posibilidad: Las alumnas justificarán que los gráficos a, e y a\_B si representan funciones y que los gráficos b, c, d y b\_B no representan funciones usando el criterio de la recta vertical. Además, identificarán que (a\_B) representa una función lineal, (a) representa una función cuadrática y (e) representa una función por tramos que contiene tramos lineales.

Segunda posibilidad: Las alumnas justificarán que los gráficos a, e y a\_B si representan funciones y que los gráficos b, c, d y b\_B no representan funciones usando la definición de función y darán su justificación en el registro verbal. Además, identificarán que (a\_B) representa una función lineal, (a) representa una

función cuadrática y (e) representa una función por tramos que contiene tramos lineales.

Tercera posibilidad Las alumnas justificarán que los gráficos a, e y a\_B si representan funciones y que los gráficos b, c, d y b\_B no representan funciones encontrando una representación algebraica asociada a cada gráfico y relacionándola con las expresiones algebraicas que conoce que representan funciones. Además, identificarán que (a\_B) representa una función lineal, (a) representa una función cuadrática y (e) representa una función por tramos que contiene tramos lineales.

Quinta posibilidad: Es posible que las estudiantes relacionen los gráficos de parábolas con funciones cuadráticas y los gráficos de rectas con funciones lineales, sin embargo, no podrán relacionar (e) con alguna representación gráfica que les resulte familiar, pues este tipo de gráfico no ha sido trabajado en el material de clase de la institución.

### **Pregunta 3**

#### **Análisis a priori**

Pensamos que las estudiantes podrían dar las siguientes respuestas:

Primera posibilidad: Las alumnas justificarán que las expresiones b, c y c\_B si representan funciones y que los gráficos a, d y a\_B no representan funciones usando los conocimientos que poseen en el registro algebraico, relacionando las expresiones presentadas con las reglas de correspondencia de funciones que si conocen. Además, identificarán que (b) representa una función cuadrática y (c) y (c\_B) representan funciones lineales.

Segunda posibilidad: Las alumnas justificarán que las expresiones b, c y c\_B si representan funciones y que los gráficos a, d y a\_B no representan funciones, relacionando las expresiones presentadas con sus gráficos. Además, identificarán que (b) representa una función cuadrática y (c) y (c\_B) representan funciones lineales.

Tercera posibilidad: Las alumnas justificarán que las expresiones b, c y c\_B si representan funciones y que los gráficos a, d y a\_B no representan funciones

usando la definición de función y dando su justificación en el registro verbal. Además, identificarán que (b) representa una función cuadrática y (c) y (c\_B) representan funciones lineales.

#### Pregunta 4

##### Análisis a priori

Respuesta esperada:

$$y = \frac{1}{3}x - 2 \quad (g) \qquad y = -0,5x + \frac{1}{3} \quad (h)$$

$$y = 2x + \sqrt{5} \quad (f) \qquad y = -5x + 2 \quad ( )$$

$$y = -5x - 2 \quad (p) \qquad y = \frac{1}{3}x + 100 \quad ( )$$

Pensamos que las estudiantes podrían llegar a esta elección mediante los siguientes procesos:

Primera posibilidad: Las estudiantes observan que la recta p y g se cortan con el Eje Y en un número negativo y además una de ellas tiene pendiente negativa y la otra pendiente positiva, con lo cual las únicas posibilidades son  $y = \frac{1}{3}x - 2$  e  $y = -5x - 2$ . Luego, las dos restantes cortan con el eje Y en número positivos y además f está menos inclinada que g y p menos inclinada que h, con lo cual se puede descartar las otras dos ecuaciones por sus pendientes.

Segunda posibilidad: Las estudiantes grafican cada una de las expresiones mostradas y luego comparan su gráfico con el gráfico mostrado para así ver cual se le aproxima más.

Tercera posibilidad: Las estudiantes no saben cómo enfrentarse a una tarea de este tipo, así que relacionan las 6 expresiones con una o más de sus representaciones gráficas.

#### Pregunta 5

##### Análisis a priori

Respuesta esperada:

$$y + 3x^2 = 0 ( \quad )$$

$$y - 0,5x^2 - 10 = 0 ( \quad h \quad )$$

$$y - 3x^2 - 6 = 0 ( \quad f \quad )$$

$$y + 2x^2 - 4 = 0 ( \quad g \quad )$$

$$y + 10x^2 + 4 = 0 ( \quad p \quad )$$

$$y + 3x^2 - 2x - 7 = 0 ( \quad )$$

Pensamos que las estudiantes podrían llegar a esta elección mediante los siguientes procesos:

Primera posibilidad: Las estudiantes observan que las parábolas f, g y h se cortan con el Eje Y en un número positivo y luego se descartan de acuerdo al coeficiente cuadrático para saber si se abre hacia arriba o hacia abajo. Además, ninguna de las gráficas debe ser representada por una ecuación con coeficiente lineal, pues el vértice siempre se ubica en el eje Y.

Segunda posibilidad: Las estudiantes grafican cada una de las expresiones mostradas y luego comparan su gráfico con el gráfico mostrado para así ver cual se le aproxima más.

Tercera posibilidad: Las estudiantes no saben cómo enfrentarse a una tarea de este tipo, así que relacionan las 6 expresiones con una o más de sus representaciones gráficas.

## **Pregunta 6**

### **Análisis a priori**

Respuesta esperada:

Si consideramos a las actrices de películas como conjunto de partida y las películas donde han participado como conjunto de llegada, esta relación no representa una función pues una actriz puede trabajar en más de una película.

Si consideramos a las estudiantes de 5to de secundaria como conjunto de partida y sus cursos preferidos como conjunto de llegada, esta relación no corresponde a una función pues una estudiante puede tener más de un curso preferido.

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Las estudiantes realizan tratamientos en el registro verbal para explicar que la relación entre esos dos conjuntos no corresponde a una función.

Segunda posibilidad: Las estudiantes realizar un tránsito al registro figural, mediante diagramas sagitales para establecer como es la relación entre los conjuntos, luego vuelven al registro verbal para explicar que no corresponde a una función.

Tercera posibilidad: Las estudiantes que en algunos de los casos (o en ambos) corresponde a una función porque encuentran que pueden establecer una relación entre los conjuntos.

### **Pregunta 7**

#### **Análisis a priori**

Respuesta esperada:

Asigna una variable a la cantidad de pasajeros:  $x$

Halla el pago de cada pasajero en función de la cantidad de pasajeros:

$$80 + 20(32 - x)$$

Halla la rentabilidad como el producto de la cantidad de pasajeros y el pago de cada pasajero:

$$R(x) = x(80 + 20(32 - x))$$

Reduce la expresión:

$$R(x) = -20x^2 + 720x$$

Hala el valor de  $x$ , tal que  $R$  es máxima. Esto es usando el vértice de la parábola:

$$h = -\frac{720}{2(-20)} = 18$$

Responde a la pregunta:

Cuando viajan 18 pasajeros la rentabilidad es máxima.

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Los alumnos realizan un tránsito del registro verbal al registro algebraico, además realizando tratamiento en este último, y finalmente vuelve al registro verbal para dar la respuesta a la pregunta.

Segunda posibilidad: Además de lo anterior, puede apoyarse del registro gráfico para notar que el máximo se encuentra en el vértice de la función  $R$ .

Tercera posibilidad: No logra expresar el pago de cada pasajero en función del número de pasajeros, por lo cual le asigna otra variable. Así, la expresión que obtiene no le ayudará a saber la rentabilidad máxima.

Cuarta posibilidad: No toma en cuenta el pago que realizará cada pasajero por asiento vacío, por lo cual se limitará a hacer cálculos numéricos para llegar a la respuesta.

## **Pregunta 8**

### **Análisis a priori**

Respuesta esperada:

Decimos que  $F$  está en función de  $C$  porque a cada valor de  $C$  le corresponde un único valor de  $F$  según la expresión algebraica mostrada.

Para determinar a qué temperatura hierve el agua hacemos  $C = 100$ :

$$F = 1,8(100) + 32 = 212$$

Dar la respuesta a la pregunta:

El agua hierve a 212 °F.

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Justifica usando la definición de función que  $F$  está en función de  $C$ . Reemplaza adecuadamente el valor de  $C = 100$ .

Segunda posibilidad: Puede decir que  $F$  está en función de  $C$  porque hay una relación entre esas variables, y reemplaza adecuadamente el valor de  $C = 100$ .

Tercera posibilidad; Da alguna explicación equivocada de por qué  $F$  no está en función de  $C$ . Además, puede reemplazar erróneamente  $F = 100$ .

### **Pregunta 9**

#### **Análisis a priori**

Respuesta esperada:

Al realizar las gráficas de  $f$ ,  $g$  y  $h$  debe notar que la gráfica de  $g$  se ha trasladado una unidad a la derecha respecto a la gráfica de  $f$ , y también que la gráfica de  $h$  se ha trasladado una unidad hacia arriba respecto a la gráfica de  $f$ .

Con las traslaciones observadas debe graficar  $p$ .

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Realiza los gráficos de las funciones, reconoce las traslaciones y las utiliza en la gráfica de la última función.

Segunda posibilidad: Realiza los gráficos de las funciones, pero no reconoce alguna o todas las traslaciones. Entonces, para graficar la última función, pasa por un registro tabular.

### **Pregunta 10**

#### **Análisis a priori**

Respuesta correcta:

Nombra una de las variables como el número de kilómetros recorridos:  $x$

Reconoce la expresión que modela el cobro total realizado en función de los kilómetros recorridos:

$$C(x) = 2x + 5$$

O realiza una representación gráfica que muestre la relación entre estas dos variables.

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Las estudiantes realizan el tránsito del registro verbal al registro algebraico, esto debido que es un tránsito trabajado dentro de los materiales de clase.

Segunda posibilidad: Además de lo anterior, realiza una gráfica para modelar la expresión algebraica. De darse este caso mostraríamos que el paso del registro verbal al registro gráfico no es directo, pues debe tener algún registro intermedio.

Tercera posibilidad: Puede darse que confunda los términos de valor fijo y costo por cada kilómetro con lo que corresponde en el registro algebraico.

### **Pregunta 11**

#### **Análisis a priori**

Respuesta esperada:

Elige el primer recuadro.

Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Dada la expresión algebraica, encuentran adecuadamente su ejemplo en el registro verbal identificando la variable  $x$ .

Segunda posibilidad: Hallan una regla de correspondencia para cada una de las opciones identificando a que se refiere la variable  $x$ , y luego asocian la adecuada con la premisa.

### **Pregunta 12**

#### **Análisis a priori**

Primera posibilidad: Escoge la parábola o recta porque le resultan funciones conocidas y trabajadas en clase y a partir de ellas crea una situación de la vida cotidiana o describe sus principales características.

Segunda posibilidad: Escoge la función seccionada con tramos lineales y crea una situación de la vida cotidiana sobre temperatura según los días transcurridos, basándose en el nombre de los ejes.

### **Pregunta 13**

#### **Análisis a priori**

Respuesta esperada:

- a) El balón de gas no durará 1 mes, pues en 28 días necesita 16 kg y un balón de gas solo contiene 13 kg.
- b) Si en 7 días se gastan 4 kg de gas, entonces en 10 días se gastan  $40/7$  kg de gas. Entonces después de 10 días quedarán  $13 - 40/7 = 51/7$  kg.
- c) Si 4 kg son consumidos en 7 días, entonces 6 kg serán consumidos en 10,5 días.

Pensamos que las estudiantes podrían dar respuesta a esta pregunta de la siguiente manera:

Primera posibilidad: Realiza tratamientos en el registro verbal para dar respuesta a las preguntas, puede mostrar algunos cálculos aritméticos que no son parte de nuestro objeto matemático.

Segunda posibilidad: Puede apoyarse del registro tabular para mostrar la relación que existe entre la cantidad de días que dura el gas y los kg que se utilizan.

#### **ANÁLISIS DE RESPUESTAS**

En esta sección analizaremos las respuestas de las estudiantes y la relación entre las respuestas de diferentes preguntas. Además de buscar obtener una conclusión sobre la comprensión de función.

Se mostrarán algunas de las respuestas para ilustrar cuáles se acercan más a lo esperado o las que muestran algún procedimiento no previsto.

## Descripción y análisis a posteriori de pregunta 1

**Pregunta 1:** Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.

Presenta tu respuesta en este recuadro.

Una función es una relación entre dos objetos. Por ejemplo, en un grupo A, los componentes de este mantienen una posesión sobre los de otro grupo llamados B.

Hay tres tipos de funciones: lineal, cuadrática y exponencial

**Lineal**

**Cuadrática**

$$f(x) = 5x^2 + 10x + 2$$
$$a=5 \quad b=10 \quad c=2$$
$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(5)} = -1$$
$$Y_v = 5(-1)^2 + 10(-1) + 2 = 5 + (-10) + 2 = -3$$

**Exponencial**

$$f(x) = 2^x$$

x	f(x)
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

Figura 14: Respuesta de alumna 16 a pregunta 1

Fuente: propia

La respuesta de la alumna 16 es la más cercana a lo esperado en nuestro análisis a priori, pues observamos que ve la función como una relación entre dos elementos. Este resultado también fue recogido de Zardo y Lutaif (2016), sin embargo, el término “posesión” sobre los elementos de otro grupo, es un resultado nuevo en nuestra investigación.

Respecto a los ejemplos presentados, vemos que la alumna 16 muestra sus ejemplos en 4 registros, realizando tratamientos en cada uno de ellos.

En el caso de la función lineal, no reconoce la representación gráfica que le corresponde, observamos que ha ubicado puntos en la gráfica y luego los unió, pero no sabemos si obedecen a una regla en particular.

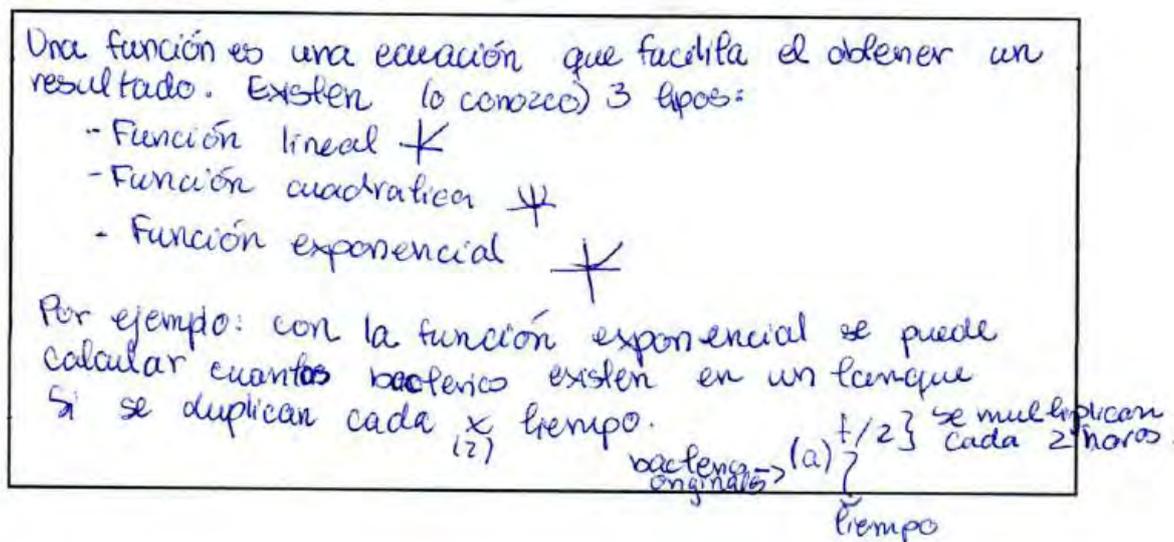
En el caso de la función cuadrática observamos que realiza tratamientos en el registro algebraico a pesar de no ser necesario como parte del ejemplo pedido, creemos que esto se debe a que según el material de clase se practicaron bastantes ejercicios donde se hallaba el vértice de la función cuadrática.

En el caso de la función exponencial, realiza tratamientos en el registro tabular de manera adecuada.

Cada uno de estos ejemplos fue también resultado de Zardo y Lutaif (2016), sin embargo, no se dio el caso de que una estudiante colocara los 4 ejemplos al mismo tiempo.

**Pregunta 1:** Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.

Presenta tu respuesta en este recuadro.



Una función es una ecuación que facilita el obtener un resultado. Existen (lo conozco) 3 tipos:

- Función lineal ✗
- Función cuadrática ✗
- Función exponencial ✗

Por ejemplo: con la función exponencial se puede calcular cuantos bacterias existen en un tanque si se duplican cada  $x$  tiempo.

$\left. \begin{array}{l} \text{bacteria} \rightarrow (a) \\ \text{original} \end{array} \right\} \begin{array}{l} +/2 \\ \text{se multiplican} \\ \text{Cada } 2 \text{ horas} \end{array}$

tiempo

Figura 15: Respuesta de alumna 10 a pregunta 1  
Fuente: propia

La concepción que tiene la alumna 10 de lo que es una función no estaba presente dentro de nuestro análisis a priori, y está relacionado al trabajo realizado durante las clases donde en los problemas de aplicaciones de funciones se solicita hallar algún resultado en el contexto a partir de una regla de correspondencia (lo que la alumna entiende por ecuación).

Tres de las estudiantes concuerdan en que existen tres tipos de funciones: la lineal, cuadrática y exponencial, esto está relacionado con los tipos de funciones que presentó el profesor durante las clases.

**Pregunta 1:** Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.

Presenta tu respuesta en este recuadro.

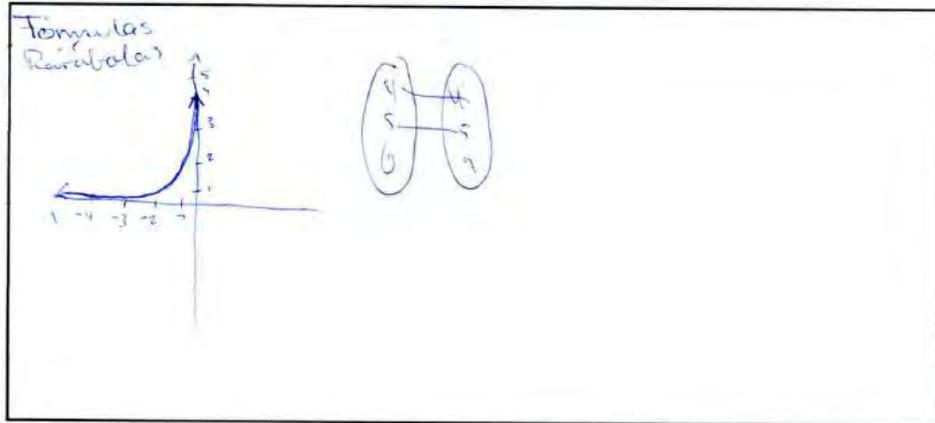


Figura 16: Respuesta de alumna 01 a la pregunta 1  
Fuente: propia

Observamos además en algunas respuestas, como la de la alumna 1, la presencia de una solución donde prevalece el registro figural, haciendo uso de los diagramas sagitales. Este tipo de tarea no se ha visto trabajada en los materiales de clase o en el cuaderno de las alumnas, por lo que asumiremos que se debe a un conocimiento de la estudiante de sus primeros años de secundaria.

De las respuestas a esta pregunta podemos concluir que las estudiantes presentan ejemplos en los diferentes registros de representación semiótica aun cuando estos no han sido trabajados en el material de la institución en el último año, como por ejemplo el registro figural. Además, las estudiantes dieron una definición parcial al concepto de función, por lo que podemos decir que no movilizan el concepto, pero si pueden representar algunos ejemplos en diferentes registros como: verbal, gráfico, algebraico, tabular y figural. El registro predominante en que aparecieron los ejemplos fue el registro gráfico, un resultado también obtenido de la investigación de Zardo y Lutaif (2016).

## Descripción y análisis a posteriori de pregunta 2

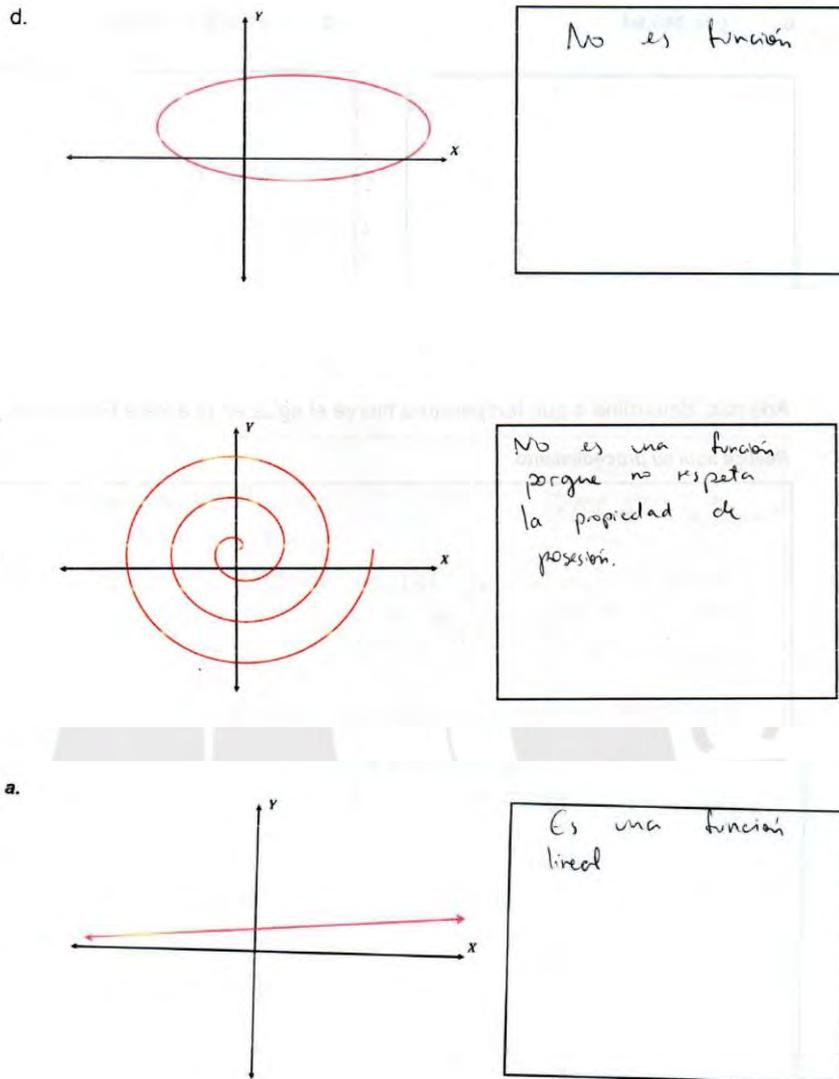


Figura 17: Respuesta de alumna 16 a pregunta 2  
Fuente: propia

En la pregunta anterior observamos que la Alumna 16 indicó en su definición de función el término “posesión”, el cual se repite para justificar la pregunta 2.

Observamos que sí reconoce la representación gráfica que no corresponden a una función, haciendo uso de su noción de posesión.

La alumna 16 no respondió a los ítems b y e de la pregunta 2. En el caso de la parábola, la ausencia de respuesta frente a una gráfica conocida se explicaría porque no cumple con la definición que ella tiene de “posesión”. En cambio, en e) la ausencia de respuesta puede asociarse a una gráfica discontinua.

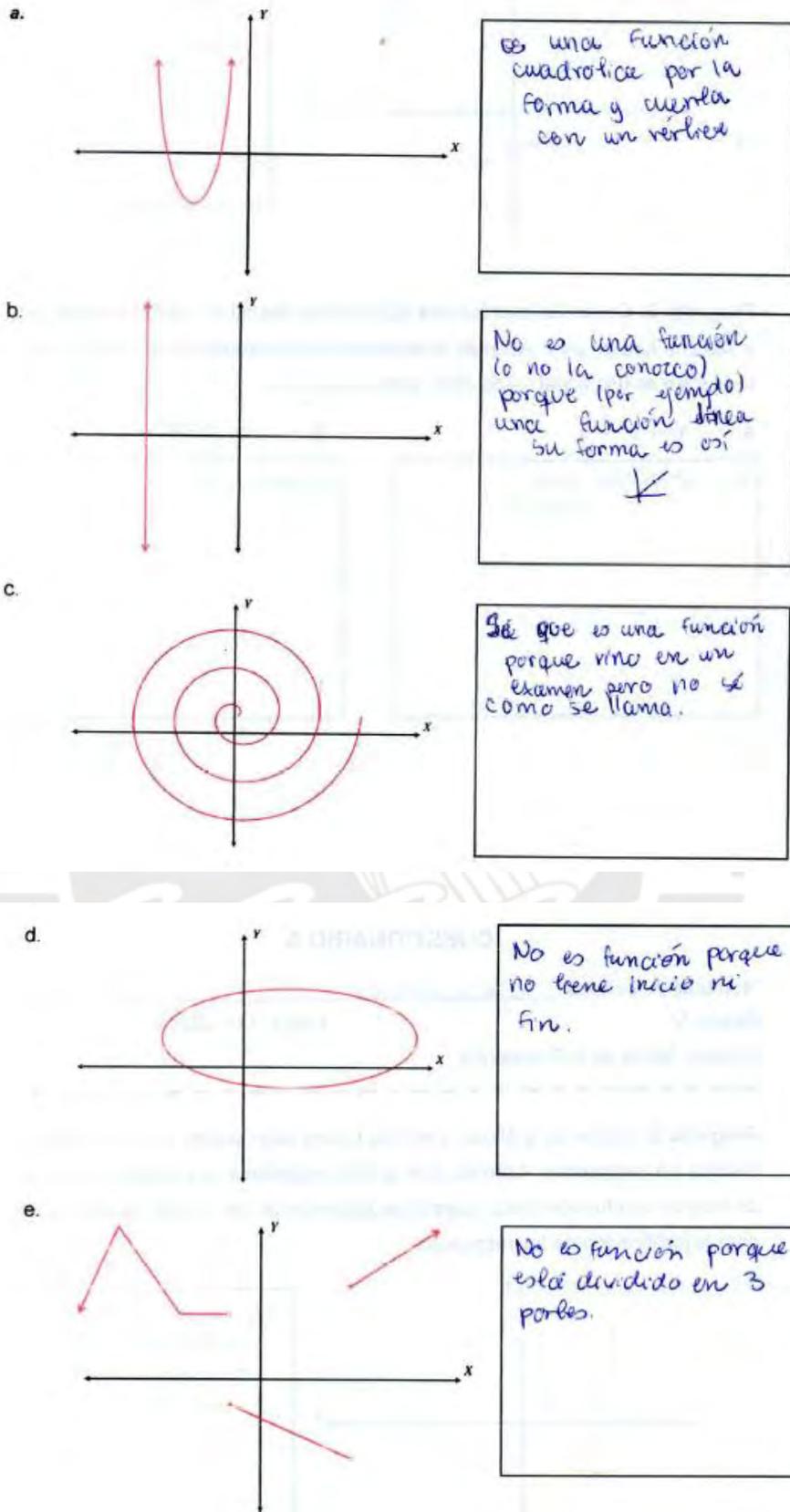


Figura 18: Respuesta de alumna 10 a pregunta 2  
Fuente: propia

Observamos que la alumna 10 intenta relacionar las representaciones gráficas mostradas en la pregunta con las representaciones gráficas estudiadas en clase que se asocian a algún tipo de función que le resulta familiar, este tipo de respuestas concuerda con lo establecido por Zardo y Lutaif (2016).

Notamos que la concepción que la alumna tiene de una función (mostrada en la respuesta de la pregunta 1) no le ayuda a descartar que las gráficas representan funciones o no. Además, la representación gráfica en el ítem e presenta tramos lineales muy similares a la sustentación que presenta en el ítem b, sin embargo el hecho de observar un gráfico “por tramos” es suficiente para que la alumna lo descarte pues no se ha mostrado un ejemplo similar en los materiales de clase.

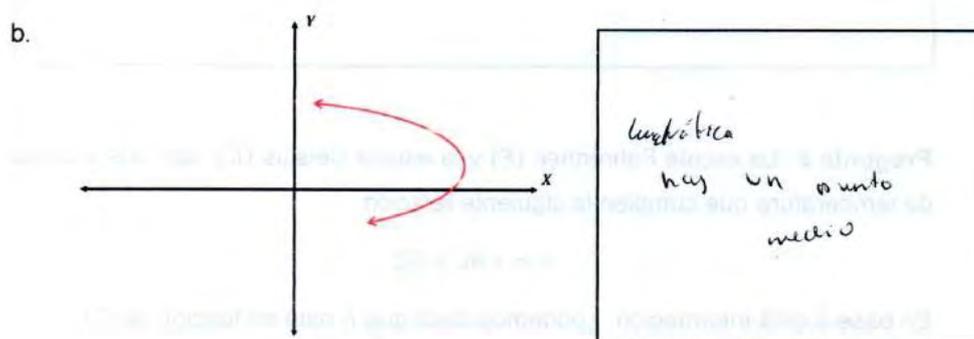


Figura 19: Respuesta de alumna 03 a pregunta 2  
Fuente: propia

La respuesta dada por la alumna 03 se repite en una estudiante más, y es un resultado recogido también de la investigación de Zardo y Lutaif (2016). Observamos que la estudiante intenta relacionar la representación mostrada con la representación mental que posee de una función cuadrática, es decir, una parábola.

De las respuestas obtenidas en esta pregunta podemos concluir que las alumnas intentan relacionar los conocimientos adquiridos en la institución sobre las 3 funciones estudiadas en clase: lineal, cuadrática y exponencial, pero sin el éxito esperado.

Además, observamos que la definición que conocen de función, colocada en la pregunta anterior. Interviene en la justificación sobre si las representaciones gráficas mostradas son funciones o no.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 3

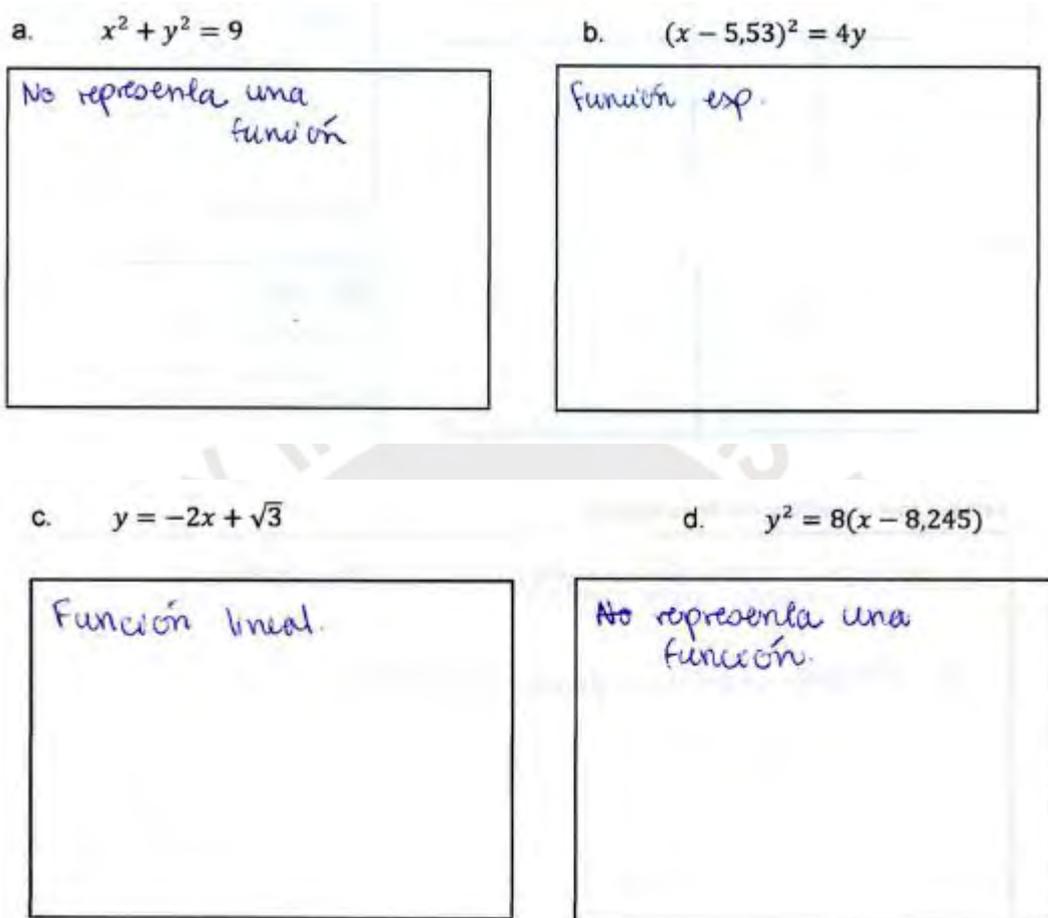
La pregunta 3 fue una de las preguntas donde se obtuvo menor cantidad de justificaciones respecto a si corresponden a funciones o no.

a.  $x^2 + y^2 = 9$

b.  $(x - 5,53)^2 = 4y$

c.  $y = -2x + \sqrt{3}$

d.  $y^2 = 8(x - 8,245)$



Handwritten student responses for question 3:

- a.  $x^2 + y^2 = 9$ : No representa una función.
- b.  $(x - 5,53)^2 = 4y$ : función exp.
- c.  $y = -2x + \sqrt{3}$ : Función lineal.
- d.  $y^2 = 8(x - 8,245)$ : No representa una función.

Figura 20: Respuesta de alumna 10 a pregunta 3  
Fuente: propia

Observamos, que al igual que en la pregunta 2, la alumna 10 intenta asociar las representaciones algebraicas mostradas en la pregunta con las representaciones algebraicas estudiadas en clase, y además asignarle el tipo de función que le corresponde si le resulta una expresión familiar. Este tipo de respuesta estaba contemplada en nuestro análisis a priori.

Notamos que, si bien logra acertar al decir que expresiones no son funciones, no presenta una sustentación para su decisión, algo que no se observa en la pregunta 2. Es decir, podemos inferir que, la concepción que la alumna tiene de función se puede explicar mejor en el registro gráfico que en el algebraico.

a.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Yo veo que esta es una función cuadrática.

b.  $(x - 5,53)^2 = 4y$

Esta es una función exponencial.

Figura 21: Respuesta de alumna 13 a pregunta 3  
Fuente: propia

Notamos que la alumna 13, en su intento por relacionar las expresiones algebraicas con las funciones que conoce de las sesiones de clase, utiliza el siguiente razonamiento: para las variables que están elevadas a algún exponente es una función exponencial, si todas las variables están elevadas al cuadrado es una función cuadrática y si no hay exponentes es una función lineal.

c.  $y = 245,64$

lineal

d.  $y^2 = 8(x - 8,245)$

Exponencial

Figura 22: Respuesta de alumna 13 a pregunta 3  
Fuente: propia

Esta es una justificación que se repite en dos estudiantes más.

De las respuestas a la pregunta 3 podemos concluir que, al igual que en la pregunta 2, las estudiantes intentan relacionar los conocimientos adquiridos durante las sesiones de clase con las representaciones que se presentan.

Es importante recalcar que previo al tema de funciones, las estudiantes habían trabajado el tema de cónicas, es por ello que podrían reconocer las expresiones algebraicas asociadas a parábolas, hipérbolas, elipses o circunferencias, sin embargo, esta asociación no apareció en ninguna justificación para decir que no es función.

En el análisis a priori se esperaba que las estudiantes realizarán tránsitos del registro algebraico al registro gráfico, ya que este es un tipo de tarea trabajado permanentemente en la institución, sin embargo, se observó este tipo de conversión solo en dos estudiantes.

### Descripción y análisis a posteriori de preguntas 4 y 5

Esta pregunta fue una de las más respondidas de nuestra investigación, sin embargo, dichas respuestas no fueron justificadas como se solicitaba en la pregunta.

**Pregunta 11:** Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde..

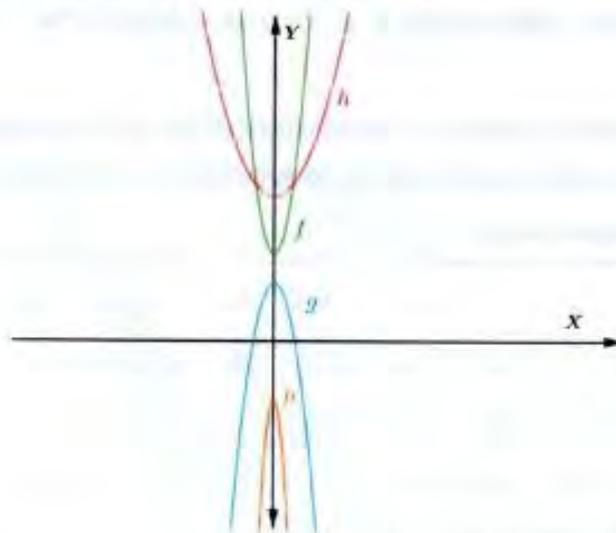
$y = \frac{1}{3}x - 2$ ( )	$y = -0,5x + \frac{1}{3}$ ( p )
$y = 2x + \sqrt{5}$ ( g )	$y = -5x + 2$ ( )
$y = -5x - 2$ ( h )	$y = \frac{1}{3}x + 100$ ( f )

Figura 23: Respuesta de alumna 16 a pregunta 4  
Fuente: propia

Cuando se creó la pregunta se colocó un cuadro para que las alumnas explicarán la elección de sus respuestas, sin embargo, la alumna 16 no hizo uso de ese cuadro y solo relacionó de manera incorrecta las 4 representaciones gráficas con 4 expresiones algebraicas.

En la asociación que la alumna presenta notamos que relaciona rectas que crecen con expresiones algebraicas que presentan pendiente positiva, y rectas que decrecen con expresiones algebraicas que presentan pendiente negativa, pero sin tener en cuenta cómo sería la inclinación de acuerdo con el valor de la pendiente. Además, en cuanto a los interceptos no hay alguna correspondencia, pues en las asociaciones que realizó los interceptos no coinciden. Por ejemplo, debió notar que  $p$  y  $g$  presentan el mismo intercepto en la gráfica, sin embargo, las expresiones algebraicas que eligió no lo muestran.

**Pregunta 12:** Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.



$$y + 3x^2 = 0 \text{ ( )}$$

$$y - 0,5x^2 - 10 = 0 \text{ ( f )}$$

$$y - 3x^2 - 6 = 0 \text{ ( h )}$$

$$y + 2x^2 - 4 = 0 \text{ ( g )}$$

$$y + 10x^2 + 4 = 0 \text{ ( p )}$$

$$y + 3x^2 - 2x - 7 = 0 \text{ ( )}$$

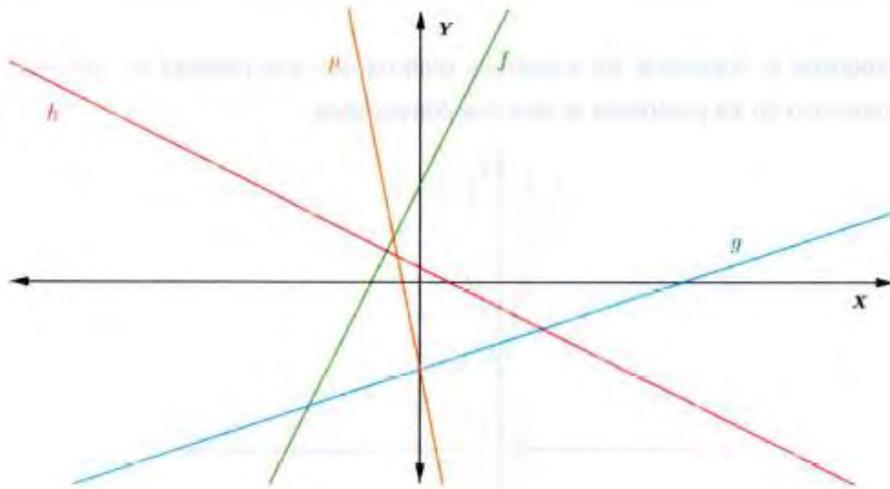
Figura 24: Respuesta de alumna 16 a pregunta 5  
Fuente: propia

En esta pregunta también se colocó un cuadro para que la alumna explique la elección en esta pregunta, sin embargo, nuevamente la alumna no explicó sus respuestas.

Observamos que en esta pregunta será necesario realizar tratamientos en el registro algebraico para poder expresar  $y$  en función de  $x$ . Según las respuestas que presenta la alumna, creemos que si realizó los tratamientos respectivos pues relaciona correctamente coeficiente principal positivo con parábola que se abre hacia arriba y coeficiente principal negativo con parábola que se abre hacia abajo, pero no toma en cuenta el valor del coeficiente y su relación con la abertura de la parábola en los casos de  $f$  y  $h$ . Además, en cuanto a los interceptos también observamos que en el caso de estas dos funciones tampoco coincide, pues según el gráfico el intercepto de  $f$  está debajo del de  $h$ , y esto no coincide con las expresiones algebraicas relacionadas.

Resaltamos que, en esta pregunta, la alumna 16 descarta adecuadamente las dos opciones que no corresponden a ninguna de las representaciones gráficas presentadas,

De las preguntas 4 y 5, encontramos que la transición entre los registros gráfico y algebraico es parcial para esta alumna, pues solo puede reconocer algunos elementos en el registro gráfico y representarlos en el registro algebraico.



$$y = \frac{1}{3}x - 2 \quad ( \quad )$$

$$y = 2x + \sqrt{5} \quad ( f )$$

$$y = -5x - 2 \quad ( g )$$

$$y = -0,5x + \frac{1}{3} \quad ( p )$$

$$y = -5x + 2 \quad ( \quad )$$

$$y = \frac{1}{3}x + 100 \quad ( \quad )$$

Coloque aquí la justificación de su elección.

$p$  porque tiene poca inclinación (sus coordenadas están más juntas)

$g$  porque comenzó desde el punto  $-y$  y  $-x$

Figura 25: Respuesta de alumna 10 a pregunta 4  
Fuente: propia

En la asociación que la alumna presenta notamos que solo está correcta la representación algebraica de  $f$

Notamos que en la explicación de la elección de  $p$  hace referencia a la inclinación, lo que puede estar relacionado con el signo de la pendiente. También en la elección de  $g$ , se hace referencia al signo negativo de "y", esto puede estar relacionado con observar que el intercepto es negativo.

Aunque las elecciones no son correctas, observamos que la explicación mostrada en el recuadro es de mucha ayuda para entender que elementos de la función lineal puede reconocer.

De la misma manera que la alumna 16, las expresiones algebraicas elegidas no muestran que  $p$  y  $g$  tengan el mismo intercepto como se observa en la representación gráfica.

La alumna 10 dejó en blanco la pregunta 5, sin embargo, con las respuestas analizadas concluimos que esta alumna también realiza una transición parcial entre los registros gráfico y algebraico, pues solo es capaz de detectar algunos elementos en el registro gráfico y representarlos adecuadamente en el registro algebraico.

De las respuestas obtenidas en las preguntas 4 y 5 observamos que la conversión del registro gráfico al algebraico no es congruente, pues notamos que las estudiantes reconocen algunas unidades significantes en el registro gráfico y al hacer la conversión no reconocen dichas unidades significantes en el registro algebraico.

### Descripción y análisis a posteriori de la pregunta 6

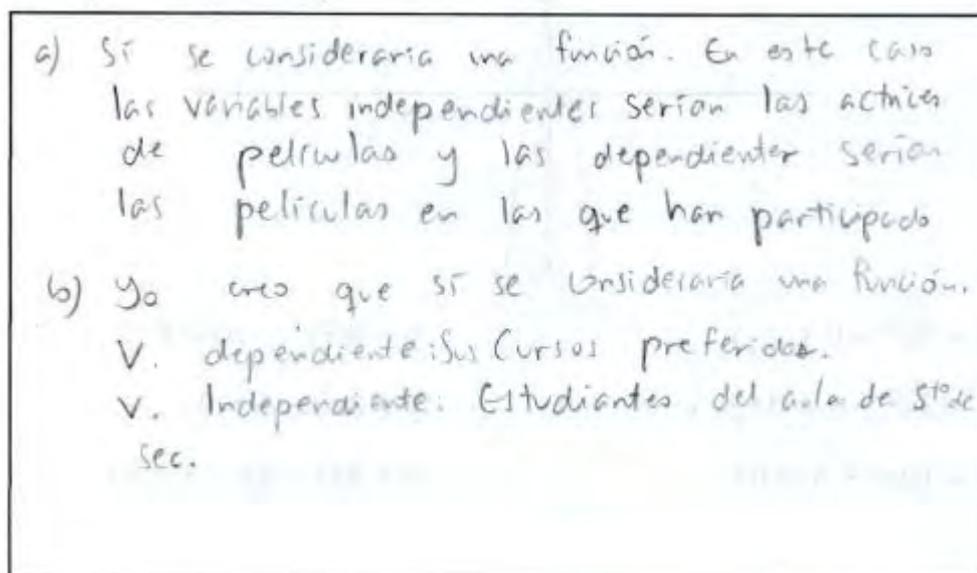


Figura 26: Respuesta de alumna 13 a la pregunta 6  
Fuente: propia

En la respuesta de la alumna 13 observamos que se realizó tratamientos en el registro verbal. Además, la estudiante describe erróneamente que la relación es

una función, señalando de manera equivocada la variable independiente y la variable dependiente.

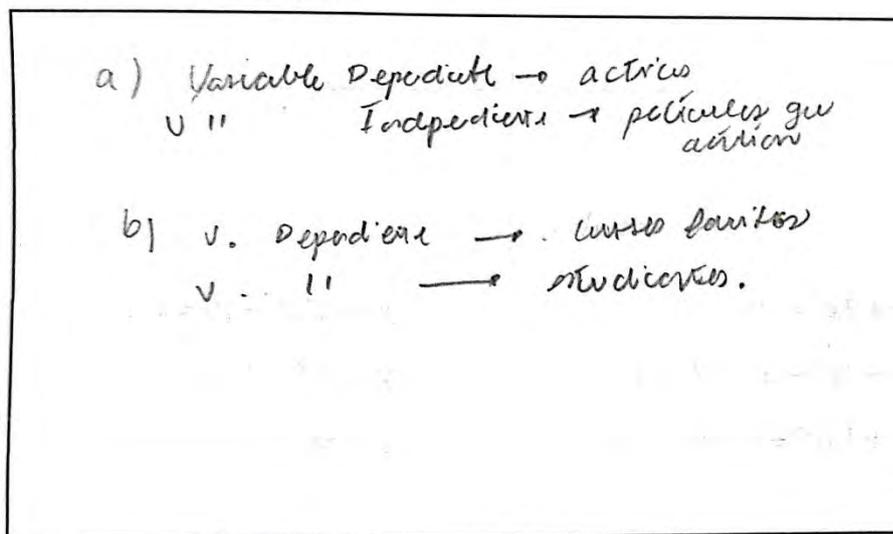


Figura 14: Respuesta de alumna 12 a la pregunta 6  
Fuente: propia

La respuesta de la alumna 12 es la que más se repite en las estudiantes, donde intentan identificar la variable dependiente y la variable independiente, es decir están asumiendo que si son funciones cuando no lo son.

Además, no hay explicación de la elección de la variable dependiente e independiente.

De las respuestas obtenidas en la pregunta 6, observamos que ninguna de las estudiantes realizó un paso al registro figural, es decir haciendo uso del diagrama sagital. Todas las alumnas intentaron explicar su respuesta en el registro verbal.

Ninguna de las estudiantes da una explicación adecuada de que las relaciones no son funciones.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 7

De la experimentación realizada en esta pregunta, tenemos que son 13 estudiantes las que colocan alguna respuesta y 3 que la dejan en blanco.

Dado que esta pregunta fue tomada y adaptada de la investigación de Pires (2014), en los resultados se obtuvo que la mayoría de las estudiantes del grupo de Enseñanza Media suma el precio por asiento vacío y no vacío y lo multiplica por el total de pasajeros; este resultado, en contraste con nuestra experimentación no se repite en la mayoría de los estudiantes, pues solo hemos obtenido que dos de las alumnas realizan este proceso.

Otro resultado obtenido en la investigación de Pires (2014) es que un grupo menor de estudiantes indica que el máximo se dará cuando el total de pasajeros tengan ocupados todos los asientos. Este resultado fue obtenido en 4 de las estudiantes de nuestro grupo, de la forma en que se muestra en la respuesta de la alumna 07.

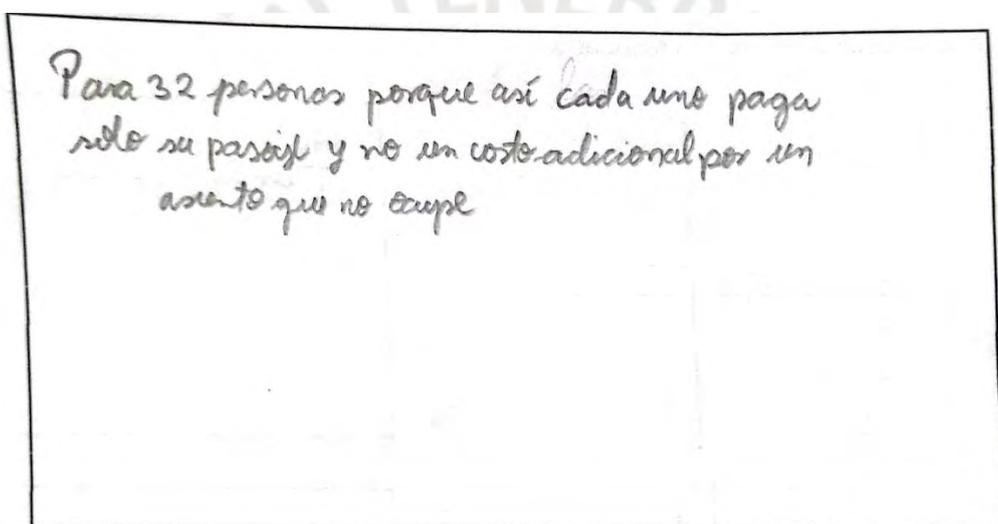
A rectangular box containing handwritten text in Spanish. The text reads: "Para 32 personas porque así cada uno paga solo su pasaje y no un costo adicional por un asiento que no ocupa". The handwriting is in cursive and appears to be written on a piece of paper with a faint watermark in the background.

Figura 28: Respuesta de la alumna 07 a la pregunta 7  
Fuente: propia

Un resultado encontrado en la investigación de Pires (2014) es que 2 estudiantes llegaron a un modelo cuadrático que no era el correcto y a partir de ello hallaban el número de pasajeros que hacía máxima la rentabilidad. En nuestra investigación no encontramos ningún estudiante que llegue a formalizar mediante el registro algebraico algún modelo cuadrático (correcto o no), con lo cual observamos, lo cual establece una diferencia principal con el trabajo de Pires (2014).

Otro resultado en común con la investigación de Pires (2014) es que se realizan procesos aritméticos como tabular valores. Este resultado se repite en 6 de las estudiantes de nuestra investigación, pero sin mayor éxito al concluir con la

respuesta. En cambio, en el trabajo de Pires (2014), los alumnos que realizan este proceso llegan a concluir correctamente con la respuesta, a pesar de que la justificación no es suficiente para el investigador. Este tipo de respuesta es similar a la respuesta de la alumna 10.

La mayor parte de los estudiantes se queda del registro verbal al numérico,

32 asientos  
80 s/le + 20

$$80x + 20(32 - x)$$

32	= 2560
31	= 2500
30	= 2440

la rentabilidad es max cuando está lleno.

Figura 29: Respuesta de la alumna 01 a la pregunta 7  
Fuente: propia

De las respuestas analizadas, podemos coincidir con la conclusión obtenida por Pires (2014), al decir que no hay congruencia en la conversión del registro verbal al registro algebraico, ya que para Duval

Además, observamos que los únicos registros que aparecen en las respuestas son: registro verbal, registro numérico, registro algebraico; sin embargo, en nuestro análisis a priori se había considerado que solo trabajarían solo con el registro algebraico. Además, en los registros numérico y algebraico observamos que las estudiantes realizaron tratamientos.

Es importante recalcar que, en contraste con los materiales de la institución, este tipo de pregunta no es visible en los cuadernos de los estudiantes y en las fichas usadas, pues como se observa en el ANEXO B, las alumnas han trabajado preguntas donde a partir de una expresión algebraica pueden encontrar los valores máximos, apoyándose del registro gráfico y tratamientos en el registro algebraico.

Sin embargo, dado que esta pregunta busca el tránsito del registro verbal al registro algebraico, observamos que al no poder realizar con éxito este tratamiento, no pueden utilizar los conocimientos previos sobre máximos y mínimos para una función cuadrática. Por lo cual, es recomendable incluir este tipo de preguntas para desarrollar este tipo de conversión.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 8

En las respuestas de esta pregunta observamos que 7 estudiantes lograron realizar tratamientos en el registro algebraico.

**Pregunta 8:** La escala Fahrenheit ( $F$ ) y la escala Celsius ( $C$ ), son dos escalas de temperatura que cumplen la siguiente relación

$$F = 1,8C + 32.$$

En base a esta información, ¿podemos decir que  $F$  está en función de  $C$ ?

Además, determine a que temperatura hierve el agua en la escala Fahrenheit.

**Realice aquí su procedimiento.**

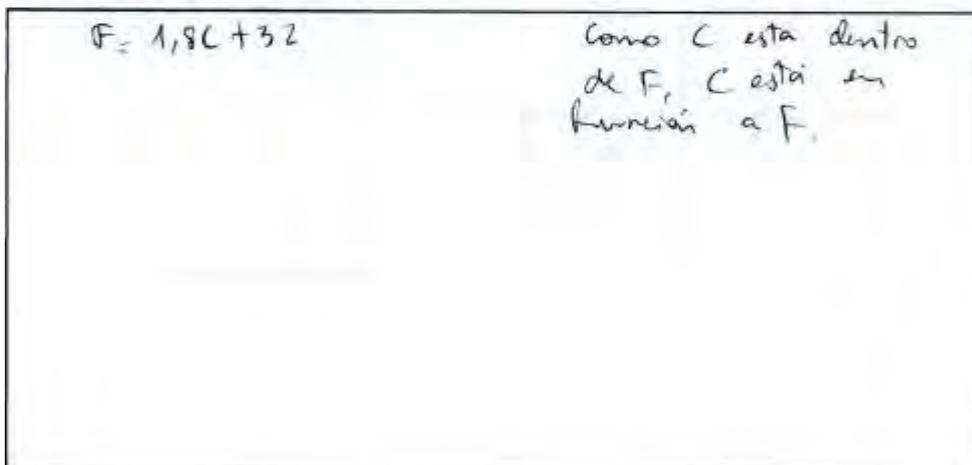


Figura 30: Respuesta de alumna 16 a pregunta 8

Fuente: propia

Encontramos que la alumna 16 explica la relación funcional entre dos variables de una manera no esperada dentro de nuestro análisis a priori. La alumna muestra que la variable que está dentro de una expresión es la que está en función de la que está afuera, esto sería por ejemplo tomar  $y = f(x)$  y decir que  $x$  está en función de  $y$ .

Notamos una confusión entre lo que es la variable dependiente y la variable independiente.

¿Podemos decir que  $F$  está en función de  $C$ ?

- Sí

$$F = 1,8(C) + 32$$
$$F = 1,8(100) + 32$$
$$F = 180 + 32$$
$$F = 212$$

Figura 31: Respuesta de la alumna 15 a la pregunta 08  
Fuente: propia

En la respuesta de la alumna 15 observamos que es capaz de realizar tratamientos en el registro algebraico, sin embargo, no llega a realizar una conversión de este registro al registro verbal. Este mismo tipo de solución se observa también en 3 estudiantes más.

Es decir, solo 4 alumnas lograron realizar los tratamientos en el registro algebraico, pero no lograron desde ahí transitar al registro verbal para lograr responder la pregunta.

En cuanto a las respuestas sobre la justificación sobre si  $F$  está en función de  $C$ , observamos dos justificaciones similares.

Sí, porque incluye a los  $^{\circ}C$  en su función

$$F = 1,8(100) + 32$$
$$F = 180 + 32$$
$$F = 192$$

Figura 32: Respuesta de la alumna 12 a la pregunta 08  
Fuente: propia

Realice aquí su procedimiento.

Si porque el resultado de F depende del valor que tome C

$$F = 1,8 \cdot 100 + 32$$
$$F = 212$$

Figura 33: Respuesta de la alumna 07 a la pregunta 8  
Fuente: propia

Observamos que la alumna 07 y la alumna 12 justifican que F está en función de C verificando una relación de dependencia ente ambas variables.

También encontramos dos alumnas que realizaron tratamiento en el registro algebraico, sin embargo, los principios matemáticos utilizados no fueron los correctos.

$$F = 1,8C + 32$$
$$F = 33,8C$$

C está en función de F.

Figura 34: Respuesta de la alumna 09 a la pregunta 8  
Fuente: propia

De las respuestas obtenidas en la pregunta 8 podemos decir, en general, que la mayoría de las estudiantes logran realizar las conversiones en el registro algebraico. Esto se debe a que esta tarea es trabajada constantemente en el material de la institución.

**Descripción y análisis a posteriori de pregunta 9:**

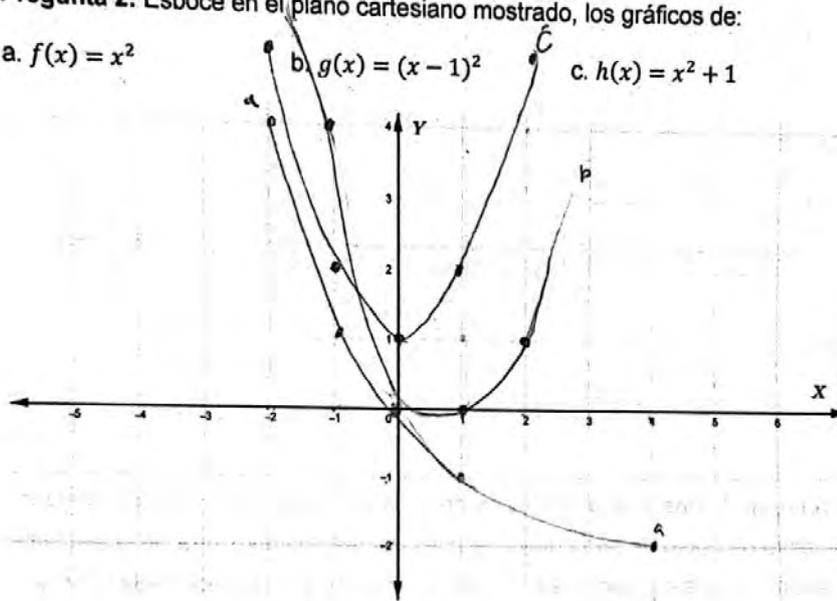
Se observa que ninguna de las estudiantes realiza una observación adecuada de traslaciones realizadas a partir de la función  $f$  para obtener las funciones  $g$  y  $h$ . Es decir, no observan los tratamientos en el registro gráfico que se han realizado. Sin embargo, solo 3 de las estudiantes logran realizar la representación gráfica adecuada de la función  $p$ , pero tomando como registro intermedio el registro tabular. Es decir, no utilizaron los tratamientos en el registro gráfico, que era el objetivo de esta pregunta.

**Pregunta 2:** Esboce en el plano cartesiano mostrado, los gráficos de:

a.  $f(x) = x^2$

b.  $g(x) = (x-1)^2$

c.  $h(x) = x^2 + 1$



Observe el gráfico y explique en el siguiente recuadro qué sucede con los gráficos de  $g$  y  $h$  con respecto al gráfico de  $f$ .

x	y	en abscisas		en ordenadas	
		$g(x)$	$(x-1)^2$	$h(x)$	$x^2 + 1$
4	16	9	9	17	17
2	4	1	1	5	5
0	0	1	0	1	1
-1	1	4	4	2	2
-2	4	9	9	5	5

Figura 35: Respuesta de la alumna 12 a la pregunta 9  
Fuente: propia

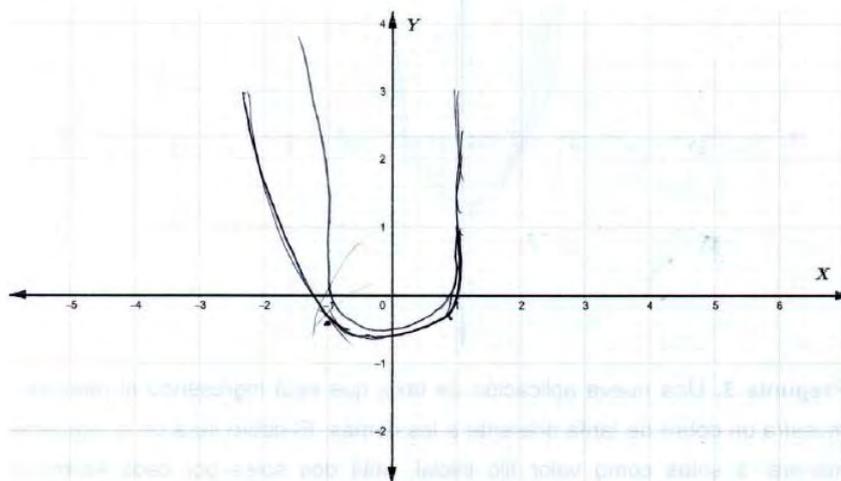
El tipo de respuesta de la alumna 12 se repite en 3 estudiantes más. Observamos que hay un tránsito del registro algebraico al registro tabular. No hay observación

ni descripción de las traslaciones realizadas. Además, predomina el uso del registro tabular para representar gráficamente la última función.

a.  $f(x) = x^2$

b.  $g(x) = (x - 1)^2$

c.  $h(x) = x^2 + 1$



El gráfico  $g$  está en una posición negativa y el gráfico  $h$  está en un punto positivo respecto a  $f(x)$  se ubica en medio, lo que permite formar una parábola.

$p(x) = (x - 1)^2 + 1$

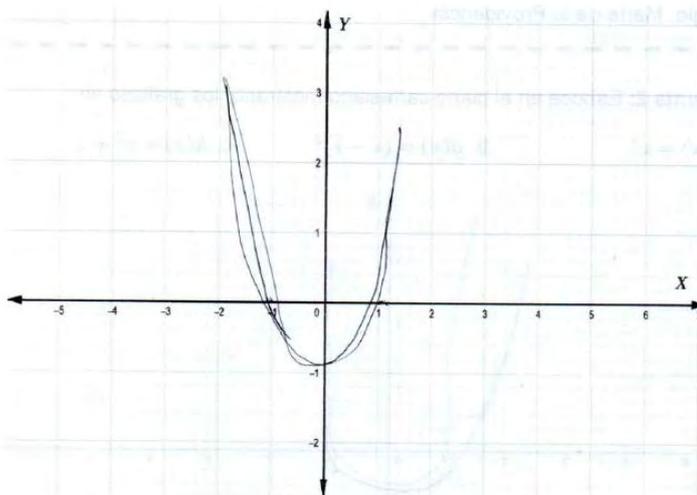


Figura 23: Respuesta de la alumna 03 a la pregunta 9  
Fuente: propia

Observamos que hay un tránsito del registro algebraico al registro gráfico, sin apoyarse del registro tabular. No hay justificación sobre alguna traslación realizada. Nuevamente, no se apoya del registro tabular para realizar la representación gráfica de  $p$ .

De las respuestas obtenidas en la pregunta 9, se observa que ninguna de las estudiantes realiza una observación adecuada de traslaciones realizadas a partir de la función  $f$  para obtener las funciones  $g$  y  $h$ . Es decir, no observan los tratamientos en el registro gráfico que se han realizado. Sin embargo, solo 3 de las estudiantes logran realizar la representación gráfica adecuada de la función  $p$ , pero tomando como registro intermedio el registro tabular. Es decir, no utilizaron los tratamientos en el registro gráfico, que era el objetivo de esta pregunta.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 10

The image shows a handwritten response in a rectangular box. On the left, it says "5 = cf" and "2 = Comisión". Below that, it says "Por cada ~~kilómetro~~ alterando,". On the right, it shows the equation  $Ct = 5 + 2x$  with a double underline. Below the equation, it says "Kilómetro que se recorra, sea  $x$  se va".

Figura 37: Respuesta de alumna 16 a pregunta 10  
Fuente: propia

En cuanto a la respuesta en la pregunta 10, encontramos que la alumna 16 realiza una conversión del registro verbal al registro algebraico con el cual puede dar respuesta a la pregunta. Además, es importante notar que reconoce que la cantidad de kilómetros recorridos es lo que varía para hallar el costo total. Si bien no las reconoce como variable dependiente o independiente, establece una adecuada relación de dependencia entre las dos variables.

Esta alumna, como en su mayoría las de todo el grupo, decidió dar su respuesta en el registro algebraico. Esto nos hace notar que el tránsito del registro verbal al registro algebraico es más natural que del registro verbal al gráfico.

Además, al analizar su respuesta en la pregunta 11, que busca ver el tránsito entre registros de manera inversa, es decir, del registro algebraico al registro verbal; encontramos que la alumna logra realizar esta conversión.

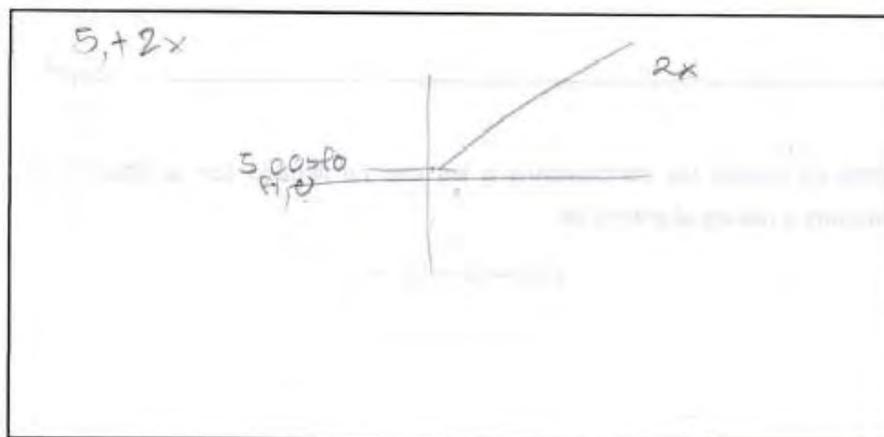


Figura 25: Respuesta de alumna 10 a pregunta 10  
Fuente: propia

En cuanto a la respuesta en la pregunta 10, encontramos que la alumna realiza un tránsito del registro verbal al registro algebraico con el cual puede dar respuesta parcial la pregunta, pero sin reconocer cuáles son las variables dependientes o independientes. Notamos que la pregunta le pide establecer la relación de dependencia entre dos variables, pero en su representación algebraica solo muestra una de ellas. Con esta información podemos interpretar que la estudiante no reconoce a totalidad que es lo que está representando algebraicamente.

Además de dar su respuesta en el registro algebraico, decidió responder también mediante una representación gráfica. Nuevamente al no declarar que es la variable  $x$ , comete un error al realizar el gráfico tomando valores negativos en esa variable.

Podemos decir que se realizó una conversión parcial al registro algebraico y al registro gráfico para la función lineal, por la ausencia de la declaración de variables.

De las respuestas obtenidas en la pregunta 10 podemos decir que el registro predominante al que las alumnas deciden realizar la conversión es el registro algebraico, esto se debe a que es el tipo de tarea más trabajado en la institución. Además, es importante recalcar que se observó un mayor éxito en esta conversión

para la función lineal, que la misma conversión que se exigía para la función cuadrática en la pregunta 07.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 11

**Pregunta 4:** Relacione la regla de correspondencia con alguna o algunas de las situaciones de la vida cotidiana mostradas.

$$f(x) = -300x + 8000$$

X Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.

María compró una computadora en 8000 soles, pero le indicaron que anualmente debe pagar 300 soles de garantía.

José gana 8000 soles al mes, pero gasta 300 soles mensualmente al pagar su celular.

Utilice el recuadro para justificar su elección.

En relación con la primera situación, se entiende que 8000 es positivo al ser una suma que se agrega al dinero que vale el auto; sin embargo, el 300 en negativo se puede multiplicar por el número de años que pasan ( $x$ ) y se restan con el valor monetario original.

Figura 39: Respuesta de alumna 16 a pregunta 11  
Fuente: propia

De la misma manera que en la pregunta 10, la alumna reconoce a que se refiere la variable  $x$  en el contexto, sin embargo, en la explicación que da notamos que no le queda claro que significa  $f$  en el contexto. Asocia el signo positivo de 8000 como el dinero que vale el auto, y el signo negativo de 300 con lo que entiende por devaluación.

Entonces, encontramos que para esta alumna la conversión del registro algebraico al verbal no es tan natural como en el sentido contrario.

**Pregunta 11:** Relacione la regla de correspondencia con alguna o algunas de las situaciones de la vida cotidiana mostradas.

$$f(x) = -300x + 8000$$

Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.

María compró una computadora en 8000 soles, pero le indicaron que anualmente debe pagar 300 soles de garantía.

José gana 8000 soles al mes, pero gasta 300 soles mensualmente al pagar su celular.

Utilice el recuadro para justificar su elección.

Con los casos de Juan y Maria porque, a diferencia de José, ellos ya no generan más ingresos con respecto a la operación. Es decir, la función sigue válida a pesar del tiempo, donde  $x$  equivale a los años.  
Sin embargo, en el caso de José, solo sigue ganando y perdiendo dinero.

Figura 40: Respuesta de alumna 10 a pregunta 11  
Fuente: propia

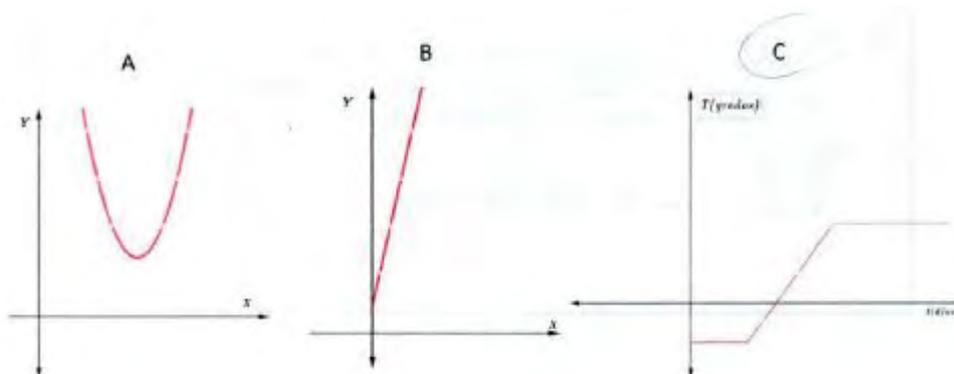
A diferencia de la pregunta 10, en este caso la alumna asigna adecuadamente una equivalencia a la variable  $x$ , sin embargo, en la explicación que da notamos que no le queda claro que significa  $f$  en cada contexto.

Entonces observamos que al no reconocer que indica cada variable, la alumna no realiza la conversión del registro algebraico al registro verbal. Si bien la conversión en el sentido inverso es más natural, con la alumna 10 y 16 observamos que esta transición no es directa, es decir, los resultados de la conversión no son equivalentes.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 12

Una de las preguntas menos respondida de nuestro cuestionario, esto se debe a que en el material de clase de la Institución no hay ejercicios donde se trabaje el

concepto de función a través de una conversión del registro gráfico al registro verbal.



Realice aquí su elección y proceso.

En el gráfico C, se puede interpretar sobre la temperatura de un lugar expuesto a cierto estímulo que altere gradualmente los resultados dentro de un período de tiempo.  
Por ejemplo, se analiza el cambio de temperatura de una zona que pasa del invierno a la primavera.

Figura 41: Respuesta de alumna 16 a pregunta 12  
Fuente: propia

En la pregunta 12 observamos que la alumna 16 logra realizar el tránsito del registro gráfico al verbal. La situación de la vida cotidiana que la alumna muestra corresponde al gráfico mostrado, a pesar de que es un tipo de gráfico no abordado en el material de clase.

Debemos notar que nuevamente como en algunas preguntas anteriores, la alumna hace referencia a las variables dependiente e independiente presentes, sin tener en claro a cuál corresponde cada una de ellas.

Realice aquí su elección y proceso.

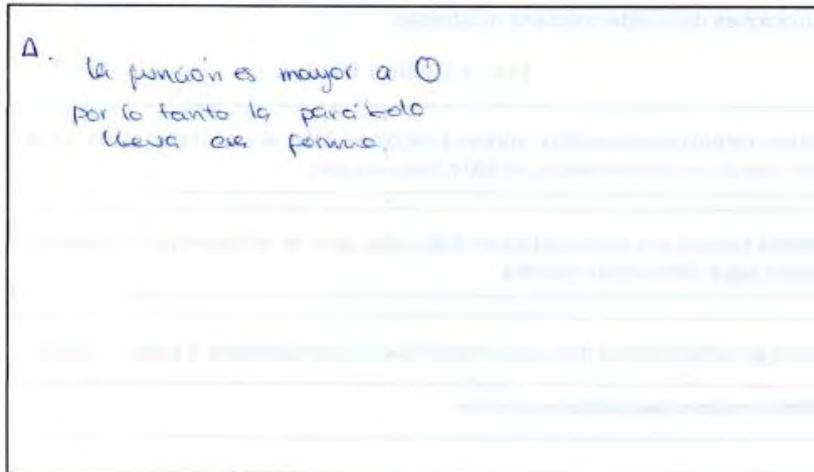


Figura 42: Respuesta de alumna 01 a la pregunta 12  
Fuente: propia

La alumna 01 hace referencia a una de las características que relaciona la representación algebraica con la representación gráfica de una función.

Realice aquí su elección y proceso.

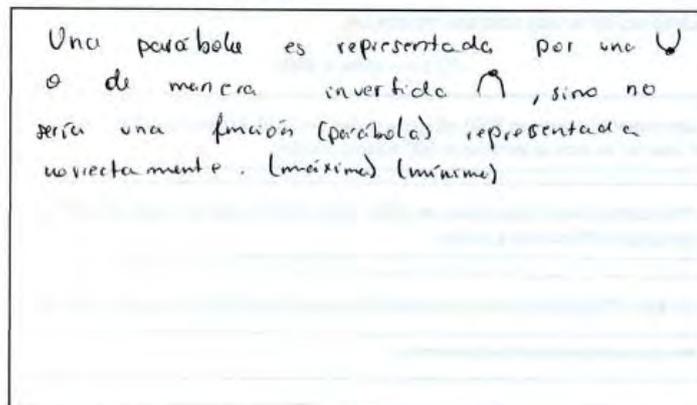


Figura 43: Respuesta de la alumna 03 a la pregunta 12  
Fuente: propia

La respuesta de la alumna 03 se repite en una estudiante más, y podemos notar que coinciden con la primera posibilidad de nuestro análisis a priori, donde las estudiantes eligieron la función cuadrática por ser una función conocida por haber sido trabajada en clase.

A partir de esta elección, las estudiantes describen la forma de su representación gráfica: que se caracteriza por la forma parabólica que se abre hacia arriba o hacia

abajo. Además, identifican una de las características principales de la función cuadrática; la existencia de los máximos y mínimos.

Realice aquí su proceso.

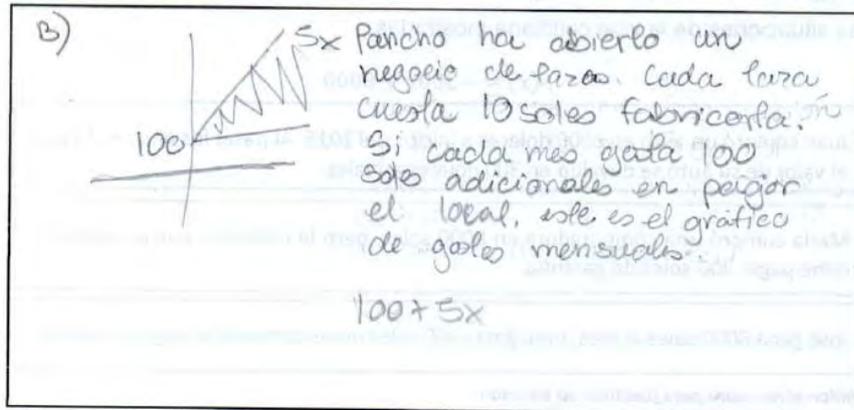


Figura 44: Respuesta de alumna 10 a la pregunta 12  
Fuente: propia

Observamos que la estudiante modela una situación de la vida cotidiana donde relaciona el costo de fabricar tazas según la cantidad de tazas producidas. Si bien la representación verbal coincide con la representación gráfica, se agrega además una representación algebraica que no coincide con la representación verbal de la función.

Realice aquí su proceso.

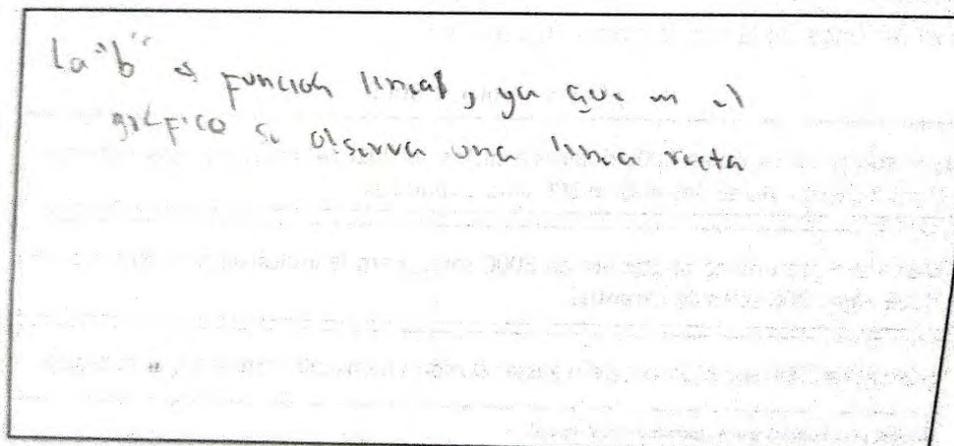


Figura 45: Respuesta de alumna 14 a la pregunta 12  
Fuente: propia

La alumna 14 es la única estudiante que relaciona la gráfica de la función lineal con la forma que conoce de los materiales de clase, sin embargo, no describe alguna característica de la función lineal como la pendiente o el intercepto con el Eje Y:

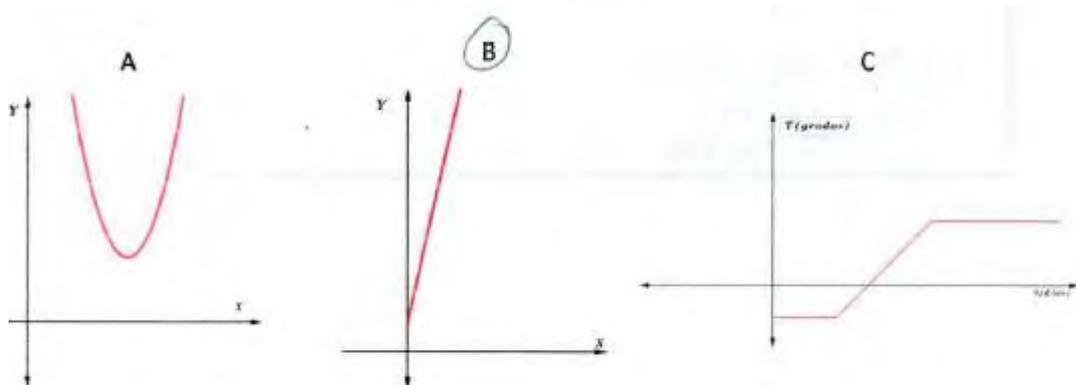
**Realice aquí su elección y proceso.**

En el gráfico C, se puede interpretar sobre la temperatura de un lugar expuesto a cierto estímulo que altere gradualmente los resultados dentro de un periodo de tiempo.  
 Por ejemplo, se analiza el cambio de temperatura de una zona que pasa del invierno a la primavera.

Figura 46: Respuesta de alumna 16 a la pregunta 12  
 Fuente: propia

La alumna 16 es la única estudiante que elige la opción C, donde describe acertadamente una relación sobre el cambio de temperatura a través del tiempo.

Observamos que la estudiante hace referencia a un paso del invierno a la primavera para hacer referencia a su interpretación de la representación gráfica de la temperatura negativa a la temperatura positiva.



Realice aquí su proceso.

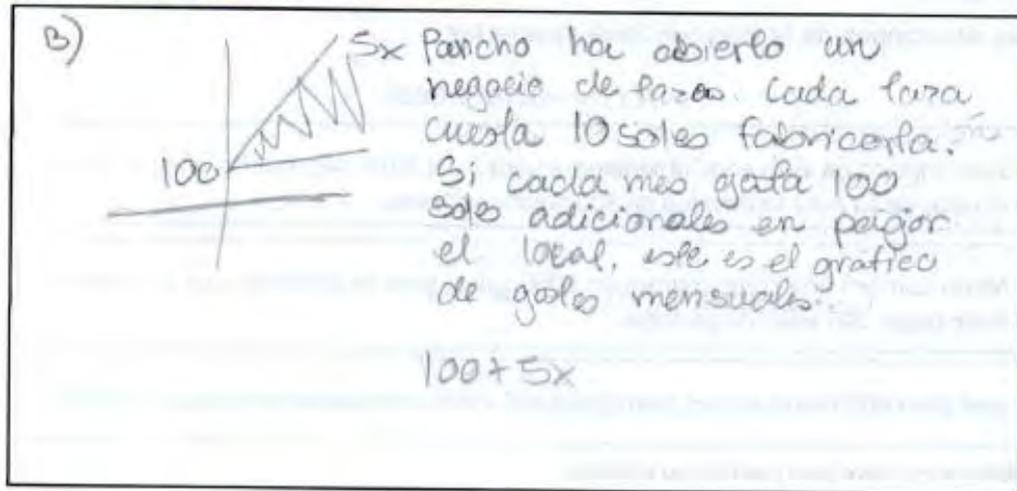


Figura 47: Respuesta de alumna 10 a pregunta 12

Fuente: propia

En la pregunta 12 observamos que la alumna 10 logra realizar el tránsito del registro gráfico al verbal. La situación de la vida cotidiana que la alumna ha creado corresponde al gráfico mostrado, lo cual estaba descrito dentro de nuestras posibilidades pues en el material de clase se trabajaron preguntas sobre aplicaciones de funciones. Es importante notar que el tipo de situación creada por la alumna es similar a la situación presentada en la pregunta 10, por lo cual podemos notar que la conversión del registro gráfico al verbal fue más natural que de forma inversa.

Además, la alumna realiza un tránsito del registro verbal al registro algebraico, en el cual nuevamente presenta una expresión (incorrecta) con una sola variable, a pesar de que los ejes en la representación gráfica muestran variables  $x$  e  $y$ .

De las respuestas obtenidas en la pregunta 12, observamos que más del 50% de las estudiantes que respondieron la pregunta, eligen el gráfico A para relacionarlo con problemas de contexto trabajados en el material de la institución, es decir, están realizando una conversión en el sentido inverso al que acostumbran a realizar en las sesiones de clase.

Además, notamos que ninguna de las estudiantes que eligió la representación gráfica de la función cuadrática intentó crear una situación de la vida cotidiana modelada. Esto coincide con los resultados de la pregunta 7, donde ninguna de las

estudiantes logró representar algebraicamente una situación de la vida cotidiana correspondiente a la función cuadrática.

### Descripción y análisis a posteriori de pregunta 13

<p>a) 4kg cada 7 días 13kg</p> $13 - (4 \cdot \frac{x}{7})$ <p>a) <math>13 - (4 \cdot \frac{30}{7})</math> <math>13 - \frac{120}{7} = -4</math> No</p> <p>b) <math>13 - (4 \cdot \frac{10}{7})</math> <math>13 - (5,714 \cdot \dots)</math> <math>= 7,28 \text{ Kg}</math></p>	<p>c) <math>4 \cdot \frac{11}{7}</math> 11 días <math>= 6,29</math></p>
--	---

Figura 35: Respuesta de alumna 10 a pregunta 13  
Fuente: propia

Observamos que la alumna realizó una conversión del registro verbal al registro algebraico, creando una expresión que entendemos indica la cantidad de kg de gas que quedan en el balón según los días transcurridos, pero nuevamente usando solo una variable ( $x$ ) y sin indicar a qué corresponde. Luego, realiza tratamientos en el registro algebraico dando valores a  $x$  según la pregunta.

Este resultado no estaba pensado en nuestro análisis a priori pues Pires (2014) reportó que los estudiantes realizaban solo cálculos numéricos o realizaban tratamientos en el registro verbal. Además, por los datos considerados en la pregunta, creímos que sería difícil que se realice una conversión al registro algebraico.

Notamos que en la pregunta c, al estar ausente la variable a la cual se hace referencia en la pregunta, la alumna decide seguir probando valores en  $x$  hasta obtener lo que la pregunta le solicita. Esto quiere decir que la alumna sabe que esa

expresión le indicará la cantidad de kg que quedarán en el balón, aunque no la haya declarado.

a. 1 semana = 4kg  
4 semanas = 16kg > 13kg de un balón. ∴ El balón no puede durar un mes gastando 4kg semanalmente.

b.  $4\text{kg} - 7\text{d}$   
 $x\text{kg} - 10\text{d}$   
 $\frac{40}{7} = 5,71\text{kg}$  ∴ Luego de 10 días de uso, se habrá gastado un balón y 1,71 de uno nuevo, por lo que quedarían 3,29 kg en el balón de gas.

c.  $4\text{kg} - 7\text{d}$   
 $6\text{kg} - x\text{d}$   
 $\frac{6x}{4} = \frac{21}{2} = 10,5$  ∴ En 10,5 (casi 11) días, se consumirá 6kg de gas.

Figura 49: Respuesta de la alumna 16 a la pregunta 13  
Fuente: propia

Este tipo de respuesta es la que más se repite y coincide con el resultado de Pires (2016) donde se observa una conversión del registro verbal al registro numérico. Además, observamos que la estudiante realiza tratamientos en el registro numérico exitosamente.

De las respuestas de la pregunta 13 observamos una mayor presencia de conversión al registro numérico y tratamientos en él.

## ANÁLISIS GENERAL DE LAS RESPUESTAS DEL CUESTIONARIO

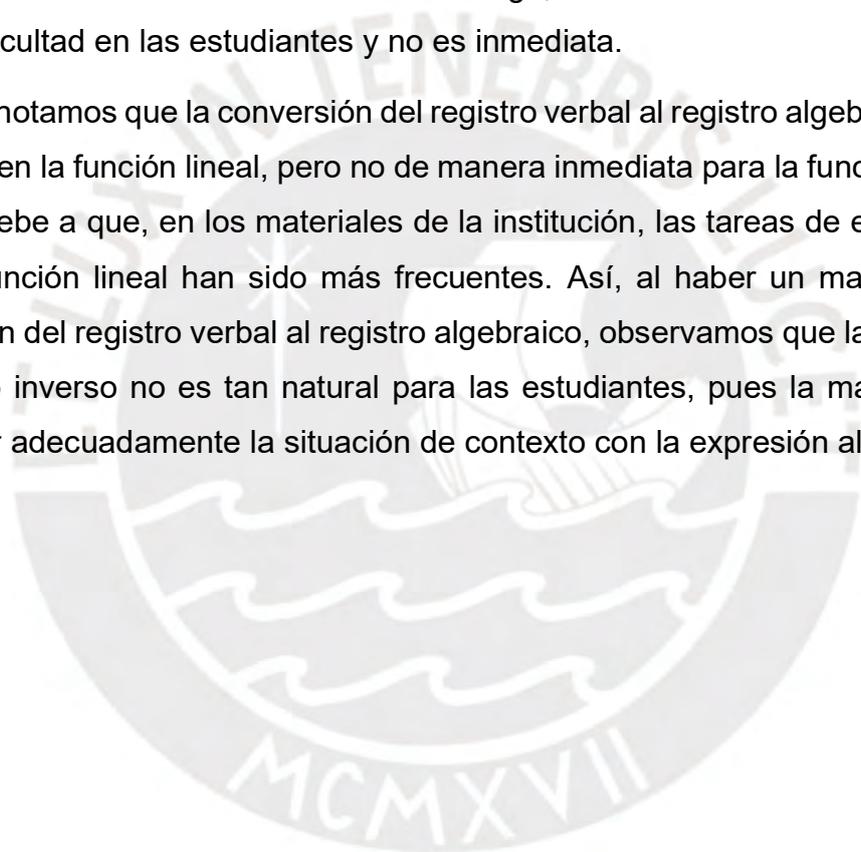
Al realizar una visión general de todas las respuestas vistas en el cuestionario podemos decir que la concepción que las estudiantes poseen de función se ve reflejada en su respuesta y justificación en las demás preguntas, por lo cual consideramos que fue una adecuada decisión que la pregunta 1 sea respondida sola en un inicio sin tener acceso al resto del cuestionario, así la respuesta no se vio influenciada por las demás preguntas.

Así también, al analizar los procesos de tratamiento de las estudiantes observamos que los tratamientos trabajados durante las sesiones con el docente son los que las

alumnas priorizan en sus respuestas, como por ejemplo el tratamiento en el registro algebraico. Es clara la necesidad de que las estudiantes puedan enfrentarse a preguntas que exijan realizar tratamientos en otros registros, como por ejemplo en el registro gráfico.

También, al analizar los procesos de conversión de las estudiantes, observamos que las conversiones trabajadas durante las sesiones con el docente son las que se ven presentadas con más naturalidad en sus respuestas, como por ejemplo la conversión del registro algebraico al registro gráfico, pasando por el registro tabular como registro intermedio durante la conversión. Sin embargo, la conversión inversa presenta una mayor dificultad en las estudiantes y no es inmediata.

Además, notamos que la conversión del registro verbal al registro algebraico se realiza con éxito en la función lineal, pero no de manera inmediata para la función cuadrática. Esto se debe a que, en los materiales de la institución, las tareas de esta conversión para la función lineal han sido más frecuentes. Así, al haber un mayor éxito en la conversión del registro verbal al registro algebraico, observamos que la conversión en el sentido inverso no es tan natural para las estudiantes, pues la mayoría no logró relacionar adecuadamente la situación de contexto con la expresión algebraica.



## CONSIDERACIONES FINALES

En este apartado reflexionaremos sobre los aspectos más importantes obtenidos en nuestra investigación, para ello tendremos en cuenta la metodología, el marco teórico y los aportes para futuras investigaciones.

La aplicación del cuestionario permitió que las estudiantes movilizaran los registros verbal, algebraico y gráfico referentes al concepto de función. Los tratamientos y conversiones nos permitieron describir y analizar las respuestas de las estudiantes de 5° de secundaria de EBR, así como también observar si las alumnas alcanzaban los objetivos de cada pregunta y como las respuestas se acercaban o no a las posibilidades planteadas en nuestro análisis a priori.

Consideramos que la pregunta 1 fue relevante en nuestra investigación, pues nos ayudaba a conocer que concepción de función poseían las estudiantes. Además, la respuesta de esta pregunta se veía reflejada en las respuestas de las preguntas 2 y 3, con lo cual se visualizaba las dificultades para aplicar el concepto de función cuando este objeto matemático es representado en diferentes registros.

En las demás preguntas, observamos que las alumnas movilizaron sus conocimientos previos referentes a función lineal y cuadrática, sin embargo, notamos dificultades al reconocer los elementos principales cuando se realizan conversiones entre registros.

A partir de las respuestas dadas, concluimos que las estudiantes no poseen una definición completa para función, sus justificaciones muestran que confundían la definición con el ejemplo mismo. Así también, concluimos que algunas conversiones son realizadas de manera natural, pero al realizar la conversión inversa se presenta gran dificultad, como por ejemplo la conversión del registro algebraico al gráfico es realizada de manera natural, en base a lo trabajado en los materiales de la institución, sin embargo, la conversión inversa no es lograda por las estudiantes.

Por otro lado, la metodología cualitativa nos ayudó a describir las acciones y comportamientos que las alumnas mostraron mientras se desarrolló la actividad.

**Con respecto al primer objetivo específico:**

“Analizar el uso de registros de representación semiótica para el concepto de función, en estudiantes que finalizan la EBR”.

Luego de haber aplicado el cuestionario, se procedió a analizar las respuestas de las preguntas 1, 2 y 3, de donde se encontró que las estudiantes presentan una noción intuitiva de función, es decir una definición incompleta, relacionada con los tipos de funciones estudiadas en clase, sobre todo asociada a las representaciones gráfica, algebraica y tabular. Dichos registros de representación evidenciados en las respuestas de las estudiantes concuerdan con lo mostrado en el material de la institución.

Por lo anterior expuesto, se puede afirmar que se ha alcanzado el primer objetivo específico, pues se consiguió analizar el uso de registro de representación semiótica para el concepto de función en estudiantes de EBR.

**Con respecto al segundo objetivo específico:**

“Analizar los procesos de tratamiento y conversión de representaciones de registros de semióticos del concepto de función, en estudiantes que finalizan la EBR”.

Al describir y analizar las respuestas de las estudiantes, basándonos en la TRRS, se logró observar los procesos de tratamiento y conversión presentes en las alumnas. Por ejemplo, observamos que la conversión del registro gráfico al algebraico tanto para función lineal y cuadrática presenta gran dificultad, Sin embargo, observamos que la conversión del registro algebraico al gráfico se da de manera más natural, pasando por el registro tabular, algo que coincide con los materiales de clase.

En el caso de los tratamientos, las preguntas 8 y 13 nos mostraron que las estudiantes tienen facilidad para realizar tratamientos en el registro algebraico, pero la pregunta 8 nos mostró que las estudiantes no realizan tratamientos en el registro gráfico.

El uso de registros se vio analizado en la pregunta 1, donde la mayoría de las estudiantes decidió dar ejemplos en el registro gráfico.

Por lo anterior expuesto, se puede afirmar que se ha alcanzado el segundo objetivo específico, pues se consiguió analizar el uso de registros y los procesos de tratamiento y conversión de representaciones de registros semióticos, del concepto de función en estudiantes de EBR”.

Dado que se cumplen todos los objetivos específicos y por el enfoque cualitativo de nuestro trabajo de investigación, podemos afirmar que se alcanzó el objetivo general de la investigación, el cual es *“Analizar la comprensión del concepto de función en estudiantes de educación básica regular, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica”*.

Los hallazgos reportados en este trabajo pueden ayudar a que las instituciones revisen los materiales trabajados durante las sesiones de matemática, e implementen nuevas tareas que busquen realizar la mayor variedad de tratamientos y conversiones entre los distintos registros de representación semiótica para función.

A continuación, se muestra el aporte de nuestro trabajo a futuras investigaciones:

- Replicar este estudio en estudiantes de primer ciclo de universidad antes de abordar el tema de función, pues este tema es tratado en la mayoría de las carreras universitarias.
- Realizar un estudio con profesores de enseñanza escolar y superior de primer ciclo, con el objetivo de conocer cuales son los registros que predominan en la enseñanza docente y mejorar la articulación entre ellos.
- Recomendamos realizar un estudio de los textos escolares de 5° de secundaria y los textos universitarios de primer ciclo de la universidad donde se aborde el tema de función, con el propósito de analizar las similitudes y diferencias en el uso de registros de representación semiótica que exigen las tareas planteadas a los estudiantes.

## REFERENCIAS

- Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Trad. María Álvarez, Sara Bahia y Telmo Mourinho. Portugal: Porto Editora.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*.9(1), pp. 143-168. Recuperado de [http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME\\_2006\\_9\\_1\\_05.pdf](http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf)
- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista eletrónica de Educação Matemática*, 7(2), 266-297.
- Duval, R. y Sáenz – Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.
- Lima, E. (1997). *Análisis real volume 1*. Instituto de Matemática Ciencias Afines.
- Lopes W. (2003). *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil. Recuperado de <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11233>
- Morales, Z. (2013). *Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Oliveira P. y Pires R. (2012). O conceito de função na educação básica via registros de representação semiótica. *Reflexão e Ação*, 20(2), 215 – 239.
- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función Lineal*. (tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales, Colombia). Recuperado de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis>

- Perú, Ministerio de Educación (2016). *Programación curricular de Educación Secundaria*. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/03062016-programa-nivel-secundaria-ebr.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2017a). *Resolvamos problemas 1. Cuaderno de trabajo de Matemática*. Lima.
- Perú, Ministerio de Educación (2017b). *Resolvamos problemas 4. Cuaderno de trabajo de Matemática*. Lima.
- Perú, Ministerio de Educación (2017c). *Resolvamos problemas 5. Cuaderno de trabajo de Matemática*. Lima.
- Prada – Nuñez, R., Hernández – Suarez, C. y Jaimes L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama*, 11(20), 34 – 44.
- Pires, R. (2014). *Concepções de Professores e Estudantes dos Ensinos Médio e Superior* (tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil. Recuperado de: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10984>
- Lopes W. (2003). *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- Sastre P., Rey G. y Boubée C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Unión*, 16, 141-155. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5914823>
- Stewart, J. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. D.F, México: Cengage Learning.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos*. Barcelona: Paidós. Recuperado de: <http://mastor.cl/blog/wpcontent/uploads/2011/12/Introduccion-a-metodos-cualitativos-deinvestigaci%C3%B3n-Taylor-y-Bogdan.-344-pags-pdf.pdf>
- Zardo L. y Lutaif B. (2016). Concepções dos alunos sobre a noção de função. *Research. Society and Development*, 1(2), 156-167. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6070064>

## ANEXOS

### Anexo 1

En este anexo recopilaremos los cuestionarios (en sus dos versiones) que fueron trabajados por las estudiantes de nuestra investigación.

### CUESTIONARIO

Nombres y Apellidos: \_\_\_\_\_

Grado: 5°

Fecha: 13/11/2019

Colegio: María de la Providencia

-----

**Pregunta 1:** Escribe lo que entiendes por función y da un ejemplo.

*Presenta tu respuesta en este recuadro.*

## CUESTIONARIO A

Nombres y Apellidos: \_\_\_\_\_

Grado: 5°

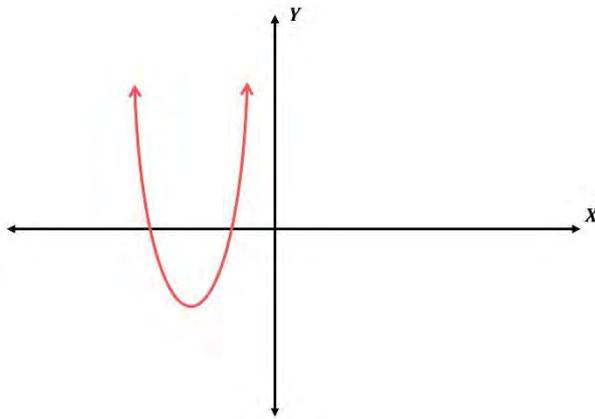
Fecha: 13/11/2019

Colegio: María de la Providencia

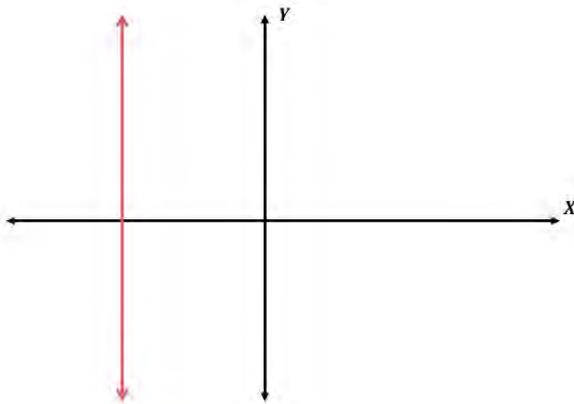
-----

**Pregunta 2:** Dados los gráficos, identifica cuales representan o no funciones y justifica tus respuestas. Además, si el gráfico representa una función, indica si se trata de una función lineal, cuadrática, exponencial, etc. Utiliza los recuadros para la justificación de tus respuestas.

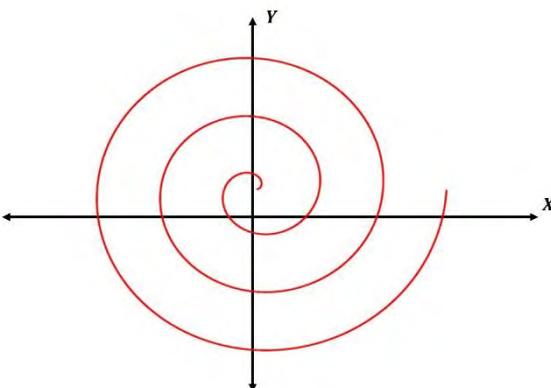
a.



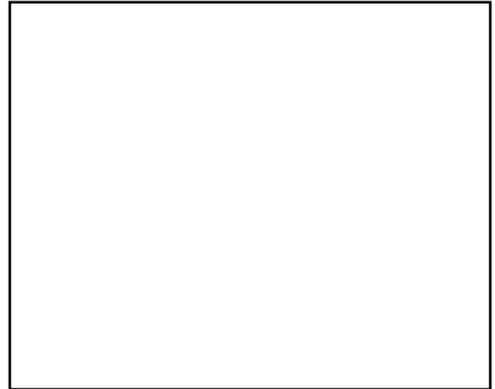
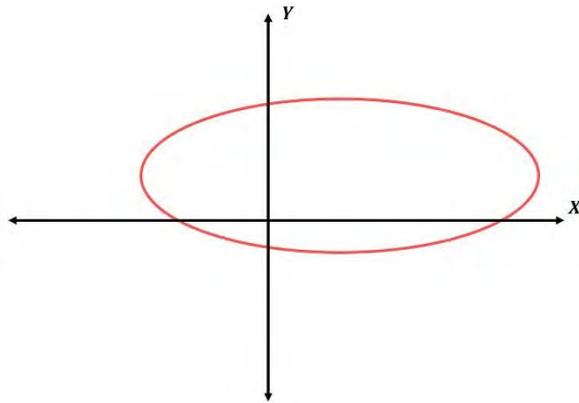
b.



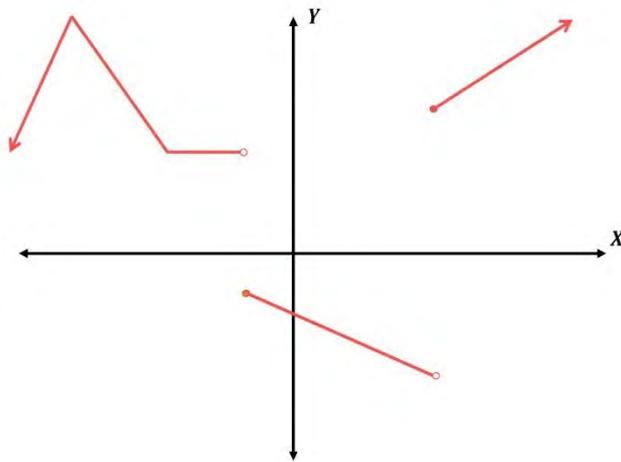
c.



d.



e.



**Pregunta 3:** Dadas las expresiones algebraicas, identifica cuales cumplen que  $y$  sea una función de  $x$ . Además, si la expresión representa dicha función, indica si se trata de una lineal, cuadrática, exponencial, etc.

a.  $x^2 + y^2 = 9$

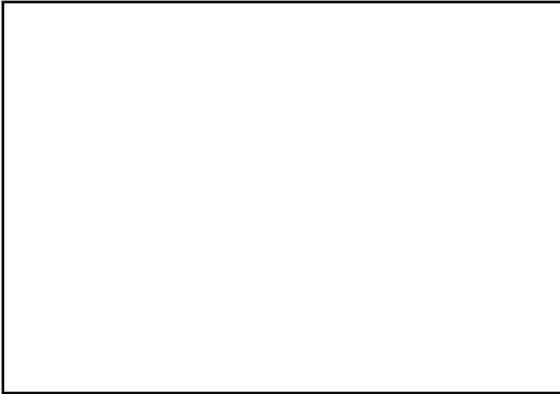


b.  $(x - 5,53)^2 = 4y$

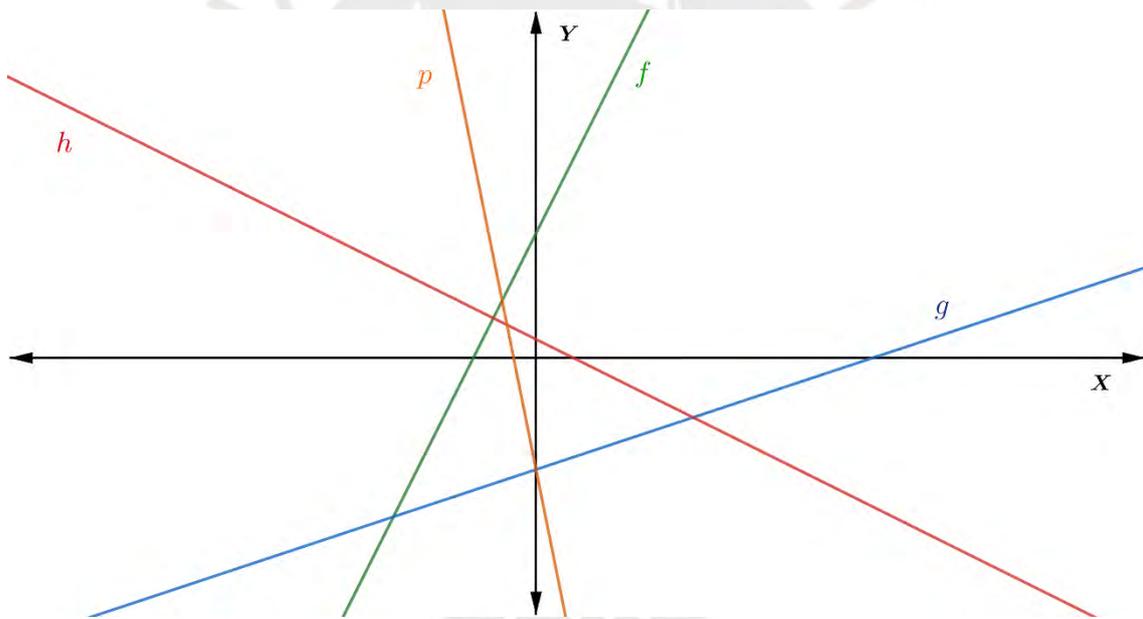


c.  $y = -2x + \sqrt{3}$

d.  $y^2 = 8(x - 8,245)$



**Pregunta 4:** Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.



$y = \frac{1}{3}x - 2$  (      )

$y = -0,5x + \frac{1}{3}$  (      )

$y = 2x + \sqrt{5}$  (      )

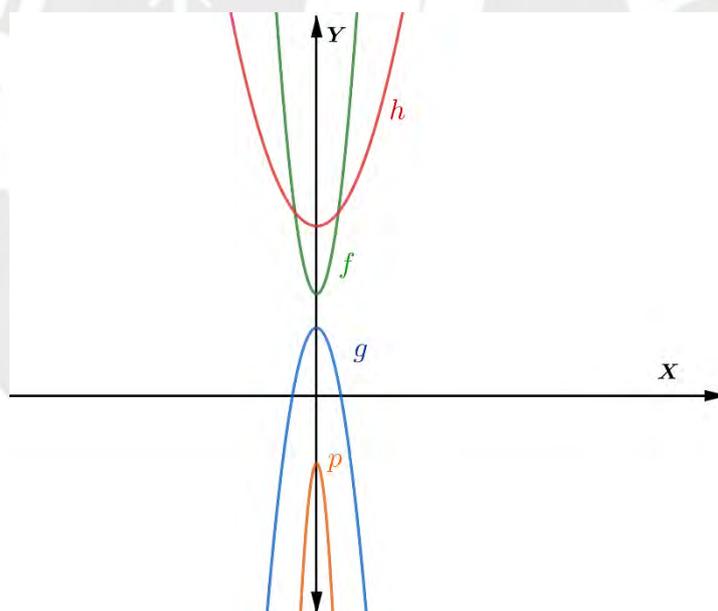
$y = -5x + 2$  (      )

$y = -5x - 2$  (      )

$y = \frac{1}{3}x + 100$  (      )

Coloque aquí la justificación de su elección.

**Pregunta 5:** Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.



$$y + 3x^2 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y - 0,5x^2 - 10 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y - 3x^2 - 6 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 2x^2 - 4 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 10x^2 + 4 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 3x^2 - 2x - 7 = 0 \quad ( \quad )$$

**Coloque aquí la justificación de su elección.**

**Pregunta 6:** En cada uno de los siguientes casos indique si la relación entre las variables dadas corresponde a una función. En caso de que sea una función, señale la variable dependiente y la variable independiente. Justifique sus respuestas.

- c) Las actrices de películas y las películas en las que han participado.
- d) Las estudiantes del aula de 5to de secundaria y sus cursos preferidos.

**Justifique sus respuestas aquí.**

**Pregunta 7:** Un bus de 32 asientos fue elegido para una excursión. La compañía exigió a cada uno de los pasajeros 80 soles más 20 soles por cada asiento vacío. ¿Para qué cantidad de pasajeros la rentabilidad de la empresa es máxima?

*Realice aquí su procedimiento.*

**Pregunta 8:** La escala Fahrenheit ( $F$ ) y la escala Celsius ( $C$ ), son dos escalas de temperatura que cumplen la siguiente relación

$$F = 1,8C + 32.$$

En base a esta información, ¿podemos decir que  $F$  está en función de  $C$ ?

Además, determine a que temperatura hierve el agua en la escala Fahrenheit.

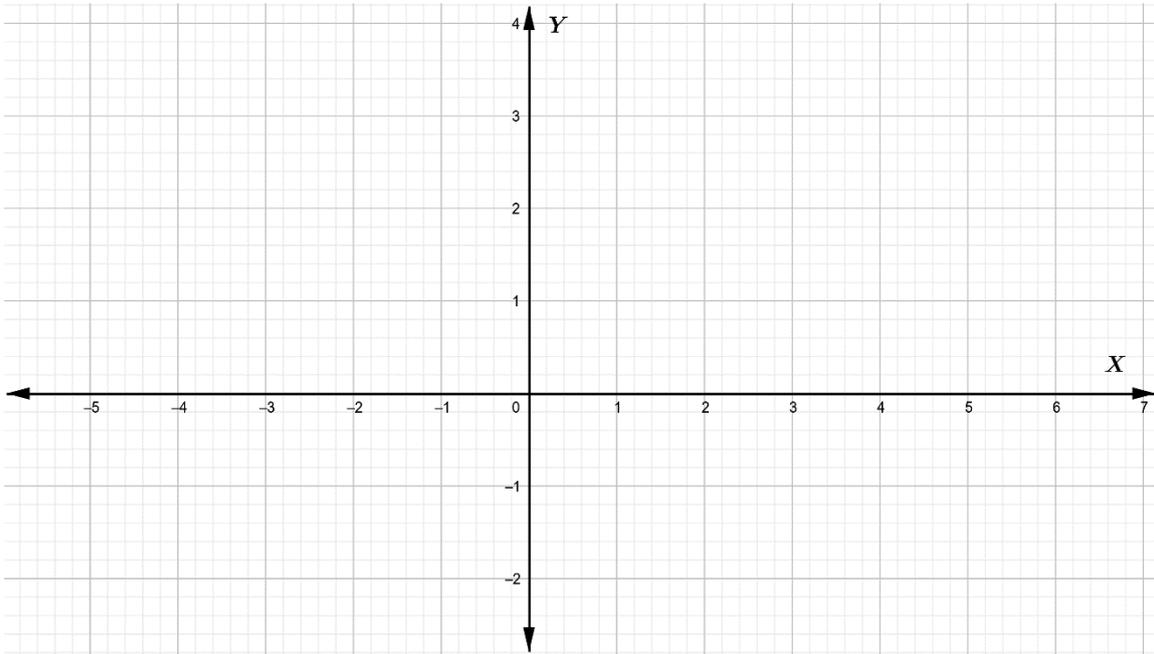
*Realice aquí su procedimiento.*

**Pregunta 9:** Esboce en el plano cartesiano mostrado, los gráficos de:

a.  $f(x) = x^2$

b.  $g(x) = (x - 1)^2$

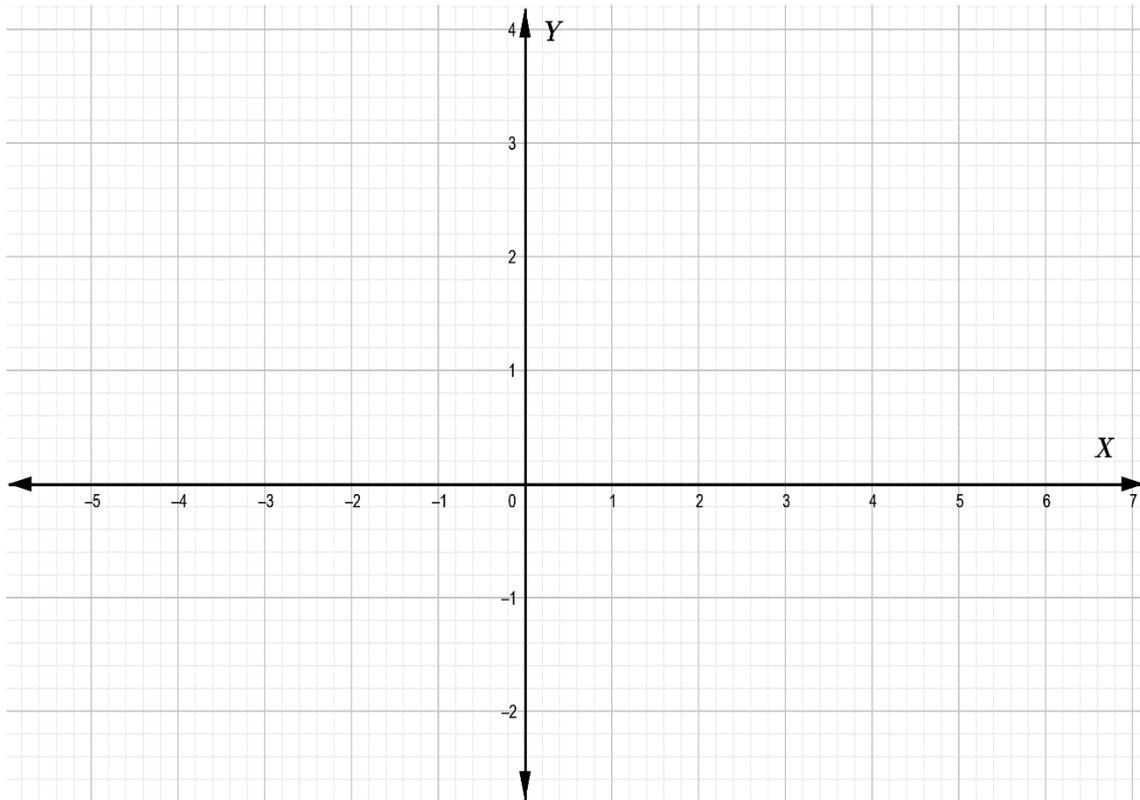
c.  $h(x) = x^2 + 1$



Observe el gráfico y explique en el siguiente recuadro qué sucede con los gráficos de  $g$  y  $h$  con respecto al gráfico de  $f$ .

Tome en cuenta las conclusiones a las que ha llegado con la observación realizada y realice el gráfico de

$$p(x) = (x - 1)^2 + 1$$



**Pregunta 10:** Una nueva aplicación de taxis que está ingresando al mercado, muestra un cobro de tarifa diferente a las demás. El cobro será de la siguiente manera: 5 soles como valor fijo inicial, más dos soles por cada kilómetro recorrido.

De acuerdo con la información dada, explique de manera algebraica o gráfica cómo es la relación de dependencia entre la cantidad de kilómetros recorridos y el cobro total realizado.

**Realice aquí su proceso.**

**Pregunta 11:** Relacione la regla de correspondencia con alguna o algunas de las situaciones de la vida cotidiana mostradas.

$$f(x) = -300x + 8000$$

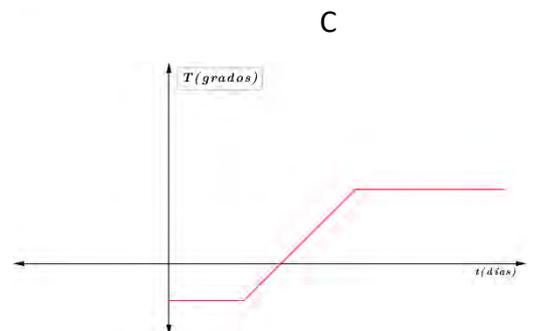
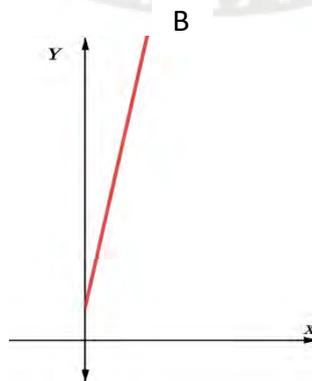
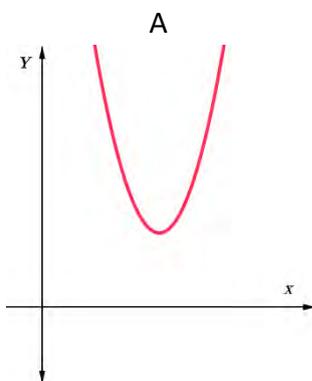
Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.

María compró una computadora en 8000 soles, pero le indicaron que anualmente debe pagar 300 soles de garantía.

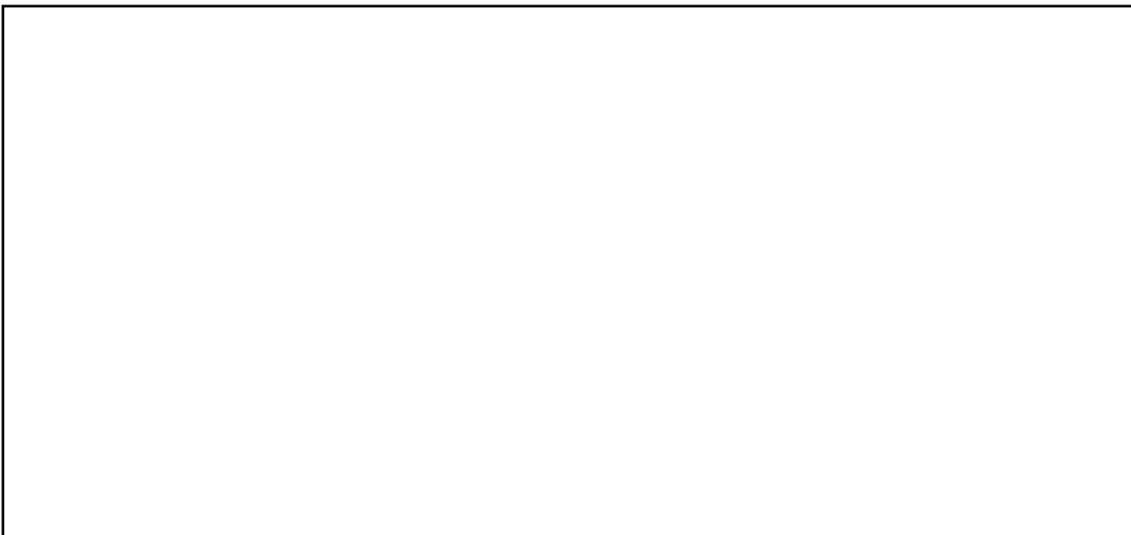
José gana 8000 soles al mes, pero gasta 300 soles mensualmente al pagar su celular.

*Utilice el recuadro para justificar su elección.*

**Pregunta 12:** Escoja alguno de los gráficos mostrados y describa las características que conoce de la función representada o cree una situación de la vida cotidiana que pueda modelarse con la función representada en dicho gráfico.



**Realice aquí su proceso.**



**Pregunta 13:** Una familia gasta 4 kg de gas de cocina por cada 7 días. Si compraron un balón de gas de 13 kg,

- a. ¿Será posible que ese balón de gas dure un mes?
- b. ¿Cuántos kilogramos de gas quedarán en el balón después de 10 días de uso?
- c. ¿Cuántos días serán necesarios para consumir 6 kg de gas?

**Realice aquí su proceso.**



## CUESTIONARIO B

Nombres y Apellidos: \_\_\_\_\_

Grado: 5°

Fecha: 13/11/2019

Colegio: María de la Providencia

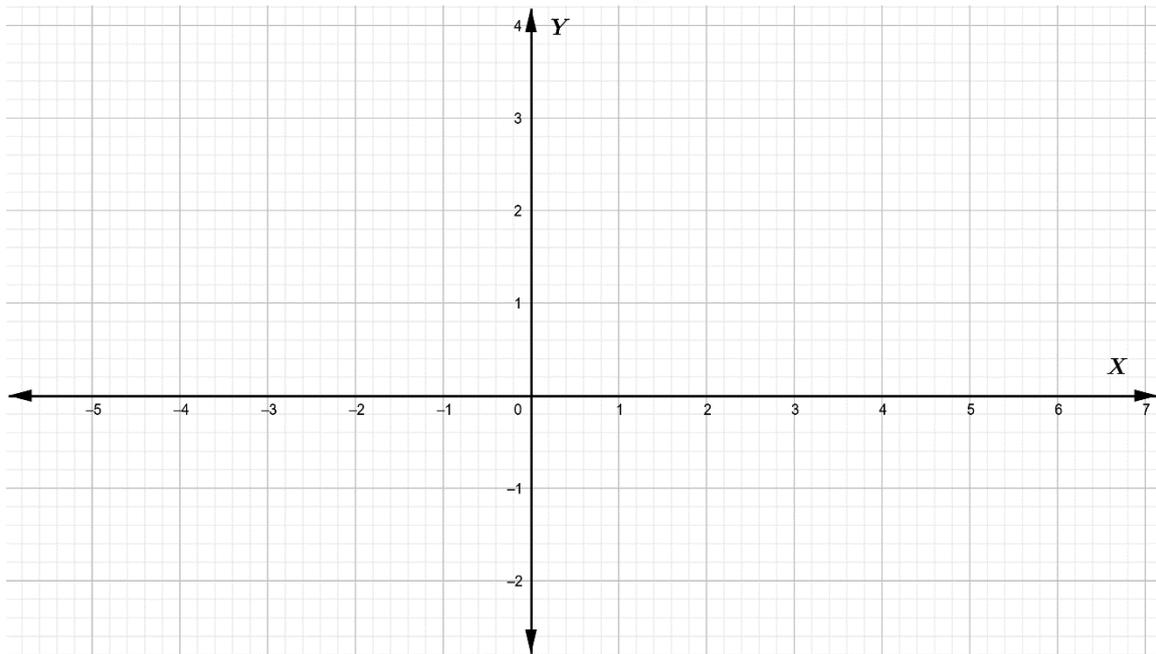
-----

**Pregunta 2:** Esboce en el plano cartesiano mostrado, los gráficos de:

a.  $f(x) = x^2$

b.  $g(x) = (x - 1)^2$

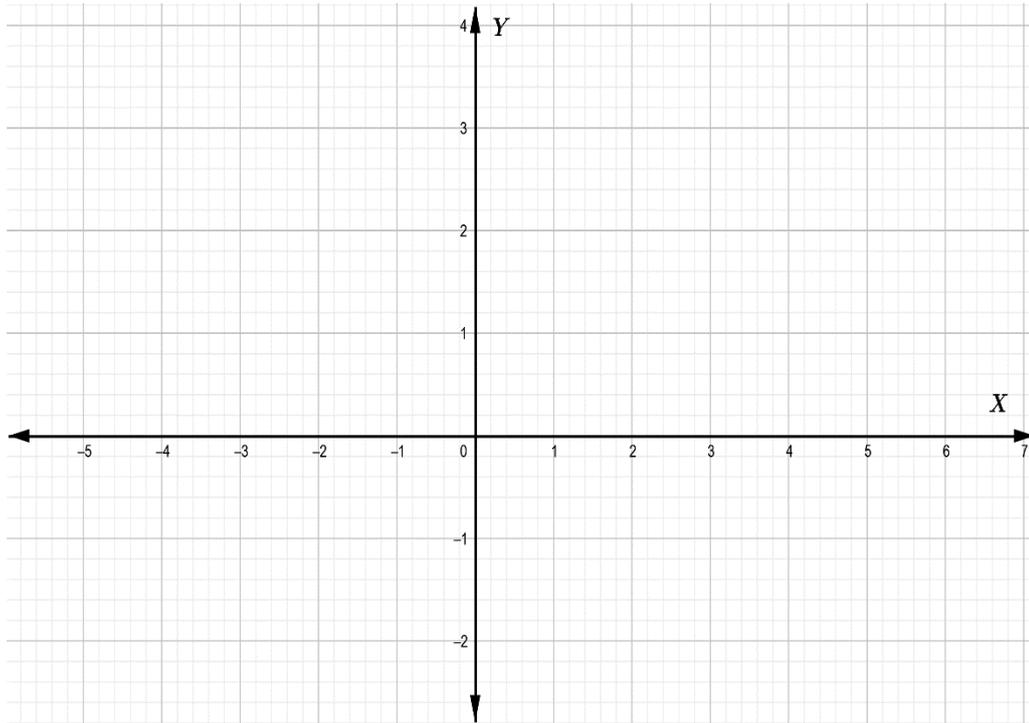
c.  $h(x) = x^2 + 1$



Observe el gráfico y explique en el siguiente recuadro qué sucede con los gráficos de  $g$  y  $h$  con respecto al gráfico de  $f$ .

Tome en cuenta las conclusiones a las que ha llegado con la observación realizada y realice el gráfico de

$$p(x) = (x - 1)^2 + 1$$



**Pregunta 3:** Una nueva aplicación de taxis que está ingresando al mercado, muestra un cobro de tarifa diferente a las demás. El cobro será de la siguiente manera: 5 soles como valor fijo inicial, más dos soles por cada kilómetro recorrido.

De acuerdo con la información dada, explique de manera algebraica o gráfica cómo es la relación de dependencia entre la cantidad de kilómetros recorridos y el cobro total realizado.

**Realice aquí su proceso.**

**Pregunta 4:** Relacione la regla de correspondencia con alguna o algunas de las situaciones de la vida cotidiana mostradas.

$$f(x) = -300x + 8000$$

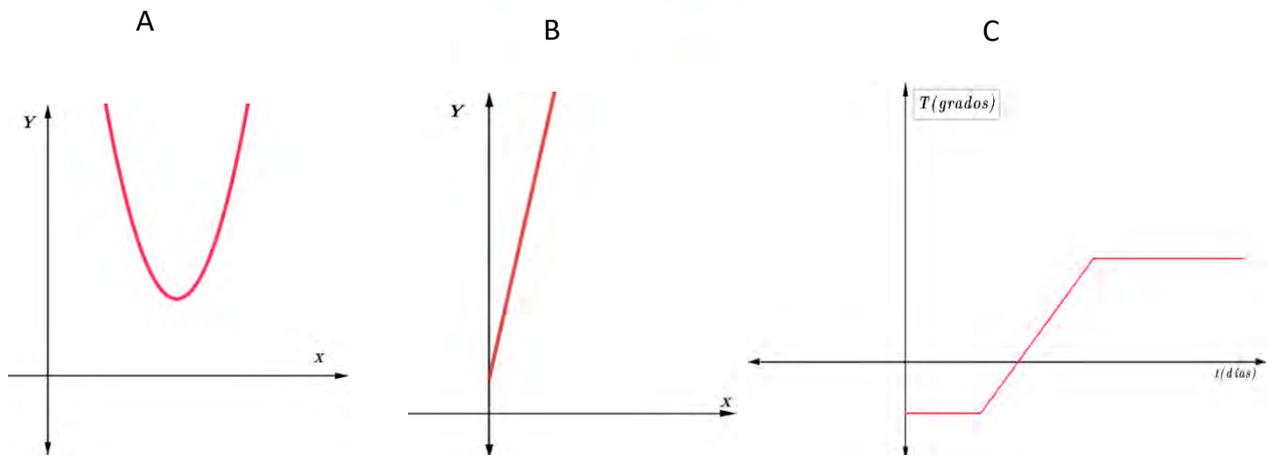
Juan compró un auto en 8000 dólares a inicios del 2016. Al pasar los años, notó que el valor de su auto se devaluó en 300 dólares anuales.

María compró una computadora en 8000 soles, pero le indicaron que anualmente debe pagar 300 soles de garantía.

José gana 8000 soles al mes, pero gasta 300 soles mensualmente al pagar su celular.

**Utilice el recuadro para justificar su elección.**

**Pregunta 5:** Escoja alguno de los gráficos mostrados y describa las características que conoce de la función representada o cree una situación de la vida cotidiana que pueda modelarse con la función representada en dicho gráfico.



**Realice aquí su elección y proceso.**



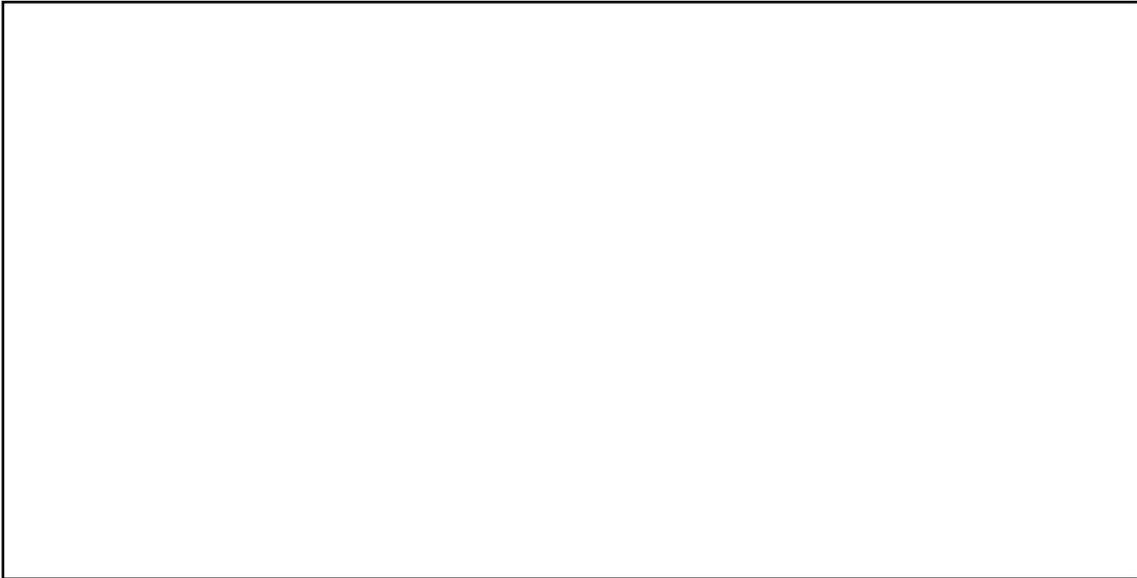
**Pregunta 6:** Una familia gasta 4 kg de gas de cocina por cada 7 días. Si compraron un balón de gas de 13 kg,

- a. ¿Será posible que ese balón de gas dure un mes?
- b. ¿Cuántos kilogramos de gas quedarán en el balón después de 10 días de uso?
- c. ¿Cuántos días serán necesarios para consumir 6 kg de gas?



**Pregunta 7:** Un bus de 32 asientos fue elegido para una excursión. La compañía exigió a cada uno de los pasajeros 80 soles más 20 soles por cada asiento vacío. ¿Para qué cantidad de pasajeros la rentabilidad de la empresa es máxima?

*Realice aquí su procedimiento.*



**Pregunta 8:** La escala Fahrenheit ( $F$ ) y la escala Celsius ( $C$ ), son dos escalas de temperatura que cumplen la siguiente relación

$$F = 1,8C + 32.$$

En base a esta información, ¿podemos decir que  $F$  está en función de  $C$ ?

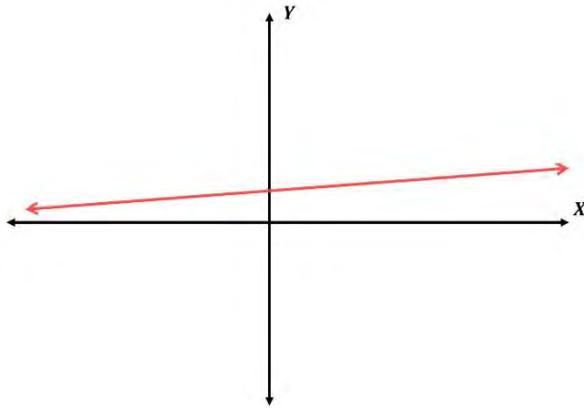
Además, determine a que temperatura hierve el agua en la escala Fahrenheit.

*Realice aquí su procedimiento.*

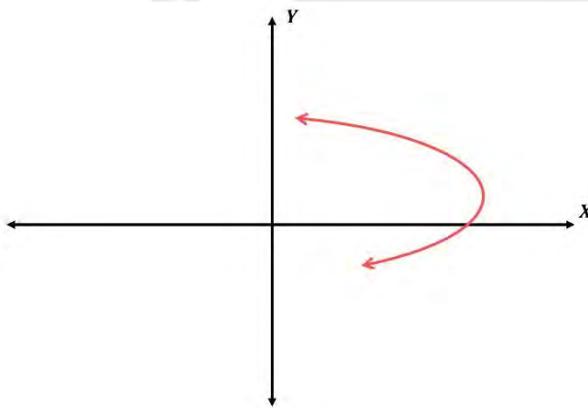


**Pregunta 9:** Dados los gráficos, identifica cuales representan o no funciones y justifica tus respuestas. Además, si el gráfico representa una función, indica si se trata de una función lineal, cuadrática, exponencial, etc. Utiliza los recuadros para la justificación de tus respuestas.

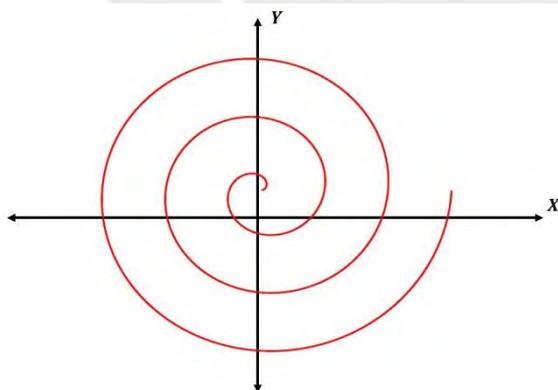
a.



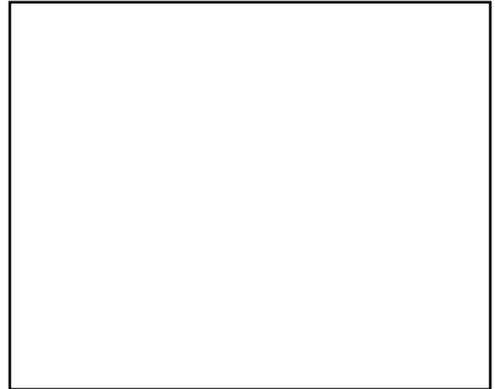
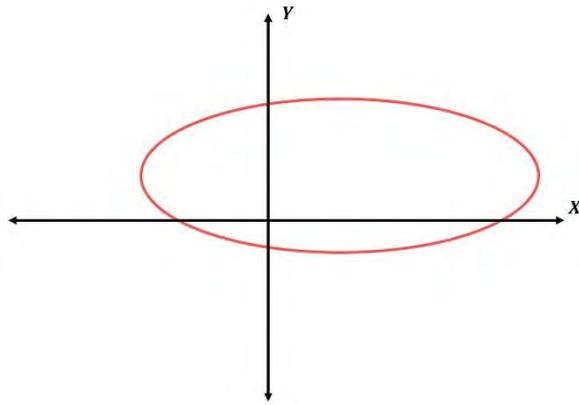
b.



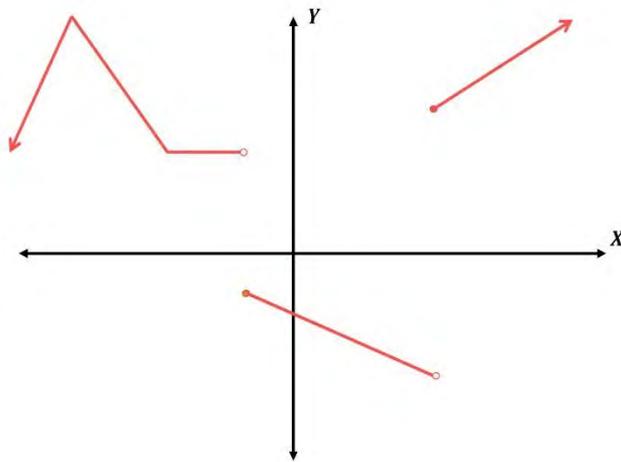
c.



d.



e.



**Pregunta 10:** Dadas las expresiones algebraicas, identifica cuales cumplen que  $y$  sea una función de  $x$ . Además, si la expresión representa dicha función, indica si se trata de una lineal, cuadrática, exponencial, etc.

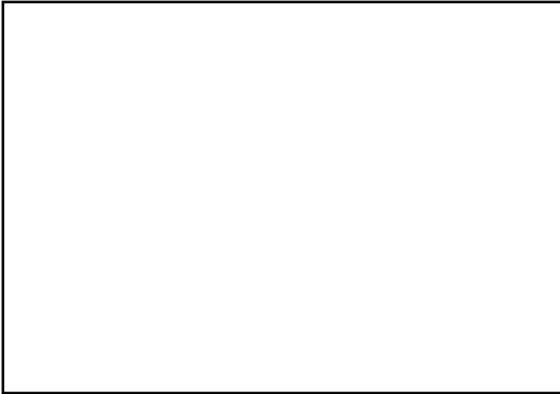
a.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

b.  $(x - 5,53)^2 = 4y$

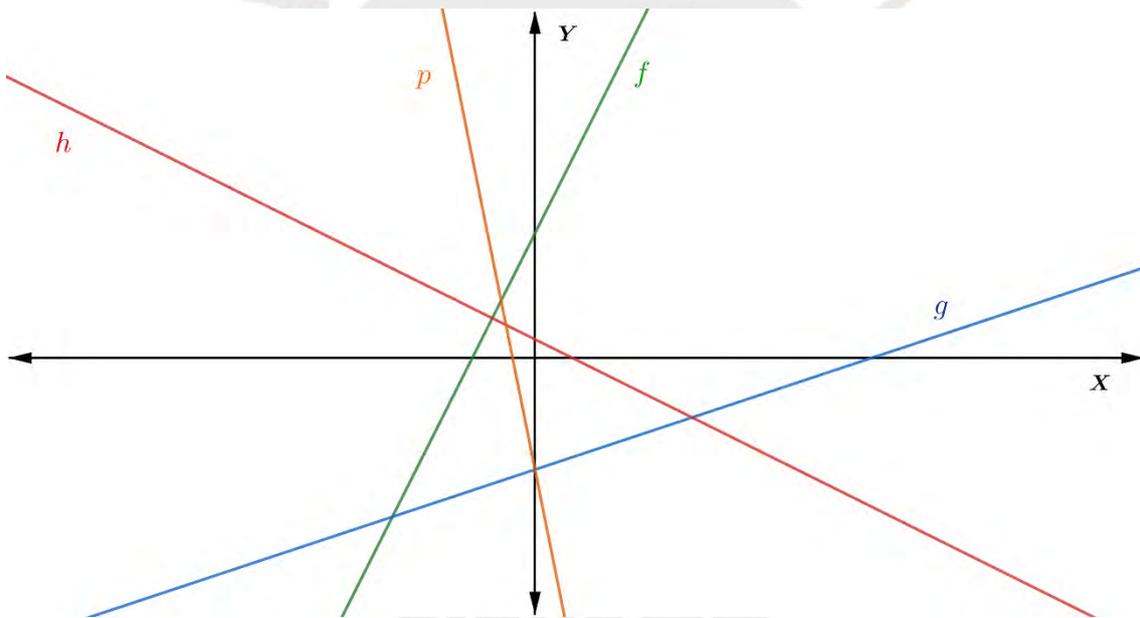


c.  $y = 245,64$

d.  $y^2 = 8(x - 8,245)$



**Pregunta 11:** Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.



$y = \frac{1}{3}x - 2$  ( )

$y = -0,5x + \frac{1}{3}$  ( )

$y = 2x + \sqrt{5}$  ( )

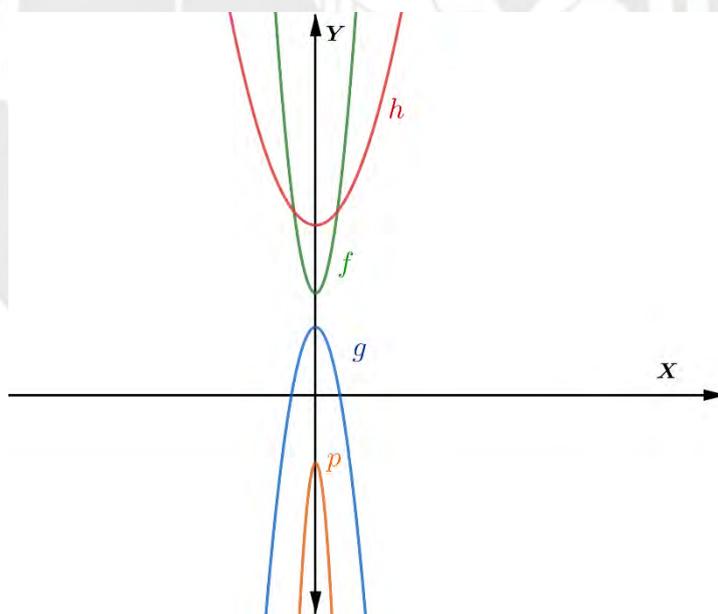
$y = -5x + 2$  ( )

$y = -5x - 2$  ( )

$y = \frac{1}{3}x + 100$  ( )

Coloque aquí la justificación de su elección.

**Pregunta 12:** Relacione los siguientes gráficos con sus posibles ecuaciones, colocando en los paréntesis la letra que corresponde.



$$y + 3x^2 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y - 0,5x^2 - 10 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y - 3x^2 - 6 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 2x^2 - 4 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 10x^2 + 4 = 0 \quad ( \quad )$$

$$y + 3x^2 - 2x - 7 = 0 \quad ( \quad )$$

**Coloque aquí la justificación de su elección.**

**Pregunta 13:** En cada uno de los siguientes casos indique si la relación entre las variables dadas corresponde a una función. En caso de que sea una función, señale la variable dependiente y la variable independiente. Justifique sus respuestas.

- a) Las actrices de películas y las películas en las que han participado.
- b) Las estudiantes del aula de 5to de secundaria y sus cursos preferidos.

**Justifique sus respuestas aquí.**

## Anexo 2

En este anexo recopilamos las fichas de trabajo creadas por el docente y fotos de los apuntes de las estudiantes en sus cuadernos.



C.E.Pq. "MARÍA DE LA PROVIDENCIA"  
RD N° 12040 - 2016 Coeducación Primaria RD N° 05151 - 2014 - Inicial RD N° 04299 - 63 - Primaria RD N° 1112 - 65 - Secundaria  
Congregación Religiosa de Las Hermanas Misioneras de la Inmaculada Concepción  
"56 años educando a mujeres y hombres de bien para el mundo"



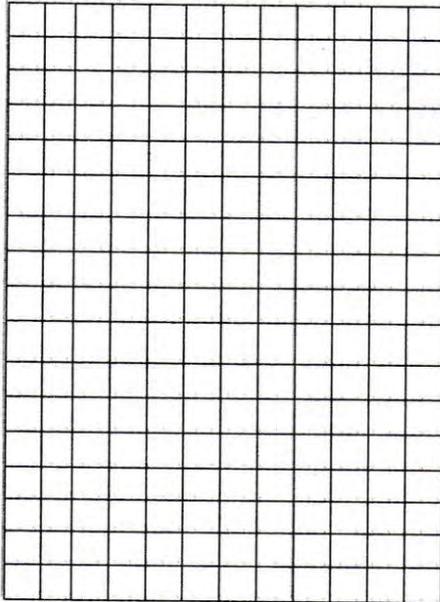
Ven. Delia Tétrault  
Fundadora MIC

### Práctica calificada 2019 5° de secundaria

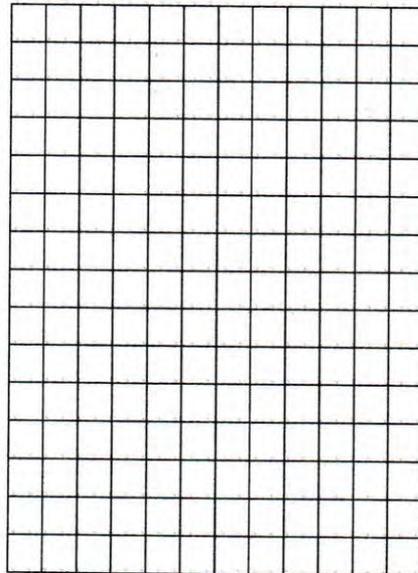
NOMBRE:		
PROFESOR:	José Quispe Salsavilca	FECHA:

- **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas**
- **Expresa su comprensión sobre funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, usando lenguaje algebraico y diversas representaciones.**

1. (6ptos.) Graficar:  $f(x) = 2x + 5$



2. (8ptos) Graficar:  $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$  y hallar las coordenadas del vértice.



3. (8ptos) Graficar:  $f(x) = 2 + 2^x$

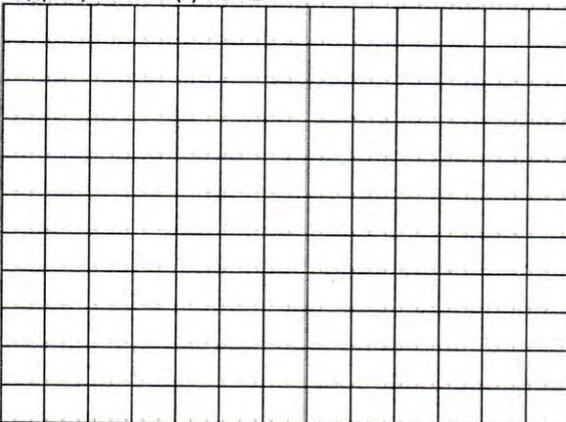


Figura 50: Ficha de Evaluación de matemática  
Fuente: Institución educativa



**APLICACIONES DE FUNCIONES**

1. El costo de traslado de sacos de harina de pescado de una empresa está en función del número de sacos. Si por un saco de harina cobran S/. 3, además de S/. 25 por gastos de envió:

a) Exprese el modelo matemático que relaciona el número de sacos de harina y el costo de traslado.

b) Complete la tabla.

<b>Número de Sacos</b>	<b>x</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>250</b>	<b>300</b>
<b>Costo de Traslado</b>	<b>f(x)</b>					

2. El sueldo mensual de un empleado de una empresa dedicada a la venta de monitores PLS de la marca Samsung depende linealmente del número de monitores vendidos durante el mes. Según la información de la siguiente tabla:

<b>N° de Monitores vendidos</b>	<b>x</b>	<b>10</b>	<b>13</b>
<b>Sueldo Mensual (S/.)</b>	<b>F(x)</b>	<b>1255</b>	<b>1406,5</b>

a) Determine el sueldo mensual del empleado  $f(x)$  en función al número de monitores vendidos.

b) ¿Cuánto será el sueldo mensual de un empleado que ha vendido 15 monitores?

c) ¿Cuántos Monitores ha vendido un empleado, si su sueldo mensual es S/. 1 760?

3. Una empresa produce una camisa a S/. 40 y tiene un costo fijo mensual de S/. 2000. Además, vende cada camisa a S/. 90. Determine la función ganancia, si produce y vende  $x$  camisas.

4. El costo variable de fabricar juntas para maquina es de \$ 2 por unidad y los costos fijos por día son de \$30. Escriba la fórmula de costo total y construya su gráfica ¿Cuánto cuesta fabricar 25 juntas de maquina por día?

5. Una empresa vende un artículo a un precio de \$100.00, si sus gastos por mano de obra son de \$10.00 por producto y por concepto de materia prima de \$15.00 por producto teniendo costos fijos de \$1'000, 000.00 mensuales, si su producción mensual es de 50,000 artículos determina la utilidad mensual de la empresa.

6. Un empresario que pretende abrir una empresa, después de hacer un estudio de mercado para la zona

en que lo pretende hacer, encuentra que los costos variables por mano de obra y materia prima son de \$22.50. Los costos fijos de producción se determinaron en \$ 250 000. Además en el estudio de mercado se encontró que el precio que el cliente está dispuesto a pagar por el producto que se fabricará en la empresa es de \$ 30.00. Determine la cantidad mínima de productos que deben venderse para no tener pérdidas.

7. **Ingresos:** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender  $x$  unidades de cierta mercancía está dado por la función:

$R(x) = 80x - 0.4x^2$ , donde el ingreso  $R(x)$  se mide en dólares.

¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

8. **Ventas:** Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende  $x$  latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por:

$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

9. **Publicidad:** La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad  $E$  se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$

Donde  $n$  es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

10. Bajo condiciones ideales, cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente hay 1000 en una colonia.

(a) Encuentre un modelo para la población de bacterias después de  $t$  horas.

(b) ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 15 horas?

(c) ¿Cuándo llegará a 100,000 el número de bacterias?

11. Cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100 y se duplica cada 3 meses.

(a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

(b) Estime la población a un año después que los conejos fueron introducidos en la isla.

(c) Trace una gráfica de la población de conejos.

Figura 51: Ficha de trabajo de matemática  
 Fuente: Institución educativa



## APLICACIONES DE LAS FUNCIONES

### 1. Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento  $M$  para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -1/28s^2 + 3s - 31, \quad 15 \leq s \leq 70$$

donde  $s$  es la rapidez en mi/h y  $M$  se mide en mi/gal.

¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

### 2. Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

**3. Altura de una pelota** Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de  $t$  segundos está dada por  $y = 40t - 16t^2$ . ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

**Ingresos** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender  $x$  unidades de

cierta mercancía está dado por la función  $R(x) = 80x - 0.4x^2$ , donde el ingreso  $R(x)$  se mide en dólares.

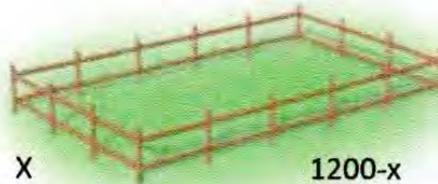
¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

### 5. Cercar un corral para caballos

Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho  $x$  del corral.

(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.



**6. Ingresos en un estadio** Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumenta en 3000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

**7. Costo de producción** El costo  $C$  en dólares por producir  $x$  yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 15003x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre  $C(10)$  y  $C(100)$ .

(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?

(c) Encuentre  $C(0)$ . (Este número representa los costos fijos.)

Figura 52: Ficha de trabajo de matemática  
 Fuente: Institución educativa

• **Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales**

Emplea diversas estrategias para resolver problemas de contexto real relacionados con las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.

<p>1. Un fabricante de zapatos tiene gastos fijos mensuales de S/. 20 000 y un costo unitario de producción de S/. 40. El producto se vende a S/. 80 la unidad.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Cuál es la función de costos?</li> <li>Cuál es la función de ingresos?</li> <li>¿Cuál es la función de ganancia?</li> <li>Encuentra el nivel de pérdida o ganancia si se producen 4 00 y 1200 unidades.</li> </ol>	<p>2. Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende <math>x</math> latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por:  <math>P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1600</math>            ¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?</p>
<p>3. Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender <math>x</math> unidades de cierta mercancía está dado por la función <math>R(x) = 60x - 0.5x^2</math>, donde el ingreso <math>R(x)</math> se mide en dólares.            ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?</p>	<p>4. Bajo condiciones ideales, cierta población de bacterias se duplica cada cuatro horas. Inicialmente hay 1000 en una colonia.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Encuentre un modelo para la población de bacterias después de <math>t</math> horas.</li> <li>¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 12 horas?</li> <li>¿Cuándo llegará a 100,000 el número de bacterias?</li> </ol>

Figura 53: Ficha de trabajo de matemática  
 Fuente: Institución educativa



## FUNCIÓN EXPONENCIAL

### Análisis inicial

Se dice que una cantidad *aumenta* (o *disminuye*) *exponencialmente* cuando su valor aumenta (o disminuye) al ser multiplicado por un factor fijo en cada unidad de tiempo. Si el factor fijo por el que queda multiplicado es  $a$ , la función exponencial  $f$  queda definida por:  $f(x) = a^x$  donde  $a$  es una constante positiva distinta de 1.

Las funciones exponenciales aparecen en muchos modelos económicos, sociales y físicos importantes. Por ejemplo, se pueden describir mediante funciones exponenciales fenómenos como el crecimiento económico, crecimiento demográfico, interés compuesto acumulado continuamente, desintegración radioactiva, y disminución del analfabetismo. Además, la función exponencial es una de las más importantes en estadística.

### Gráfica

Si construimos la gráfica de:

$$f(x) = 2^x$$

a partir de una tabulación, obtenemos:

X	-2	-1	0	1	2	3	4
F(x)	0.25	0,5	1	2	4	8	16

### Modelo de crecimiento exponencial

Cuando el tamaño de una población cambia a lo largo del tiempo a un ritmo constante, podemos modelar su tamaño mediante una función exponencial  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = Ae^{kx},$$

donde  $A$  es el tamaño inicial de la población y  $k$  es una constante positiva en los casos de crecimiento exponencial y negativa en los casos de decrecimiento exponencial.

- Grafica las siguientes funciones:

Sugerencia: complete la siguiente tabla para graficar cada función

X	-2	-1	0	1	2	3	4
F(x)							

a.  $f(x) = 4^x$

b.  $g(x) = 3^x$

c.  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d.  $f(x) = 3(2^x)$

e.  $f(x) = 3^x$

f.  $f(x) = 3^{-x}$

g.  $f(x) = 3^x + 1$

h.  $f(x) = 3^x - 1$

i.  $f(x) = 3^{-x} + 1$

j.  $f(x) = -3^{-x} - 1$

3. La población proyectada de una ciudad está dada por  $P = 125000(1,11)^t / 20$ , donde  $t$  es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población que se pronostica para el año 2015?

4. La publicidad de una determinada compañía ha sufrido una rápida reducción. El ingreso anual  $R$  al final de  $t$  años de negocio satisface la ecuación:

$$R(t) = 200\,000 e^{-0,2t}. \text{ Encuentra el ingreso anual:}$$

- Al final de 2 años.
  - Al final de tres años.
  - ¿Qué sucedería si el tiempo creciera indefinidamente?
5. Supongamos que un cultivo de bacterias se inicia con 5000 de ellas y la población se duplica cada hora.
- Halla el número  $N$  de bacterias después de
    - Una hora.
    - Dos horas.
    - Tres horas.
    - 100 horas.
  - Expresa el número  $N$  de bacterias en términos del tiempo  $t$  (horas).
6. El INEI utiliza una fórmula muy similar a  $N(t) = 25939e^{0,01497t}$  para predecir la población, donde  $N$  es la cantidad de peruanos en miles y  $t$  es el tiempo en años. Determina:

- La cantidad inicial de habitantes.
- ¿Cuántos habitantes habrá dentro de seis años?
- ¿Cuánto tiempo tomará para que seamos 35 millones de peruanos?
- Si  $t = 0$  es el año 2005, en que año seremos el doble.

Figura 54: Ficha de trabajo de matemática  
 Fuente: Institución educativa

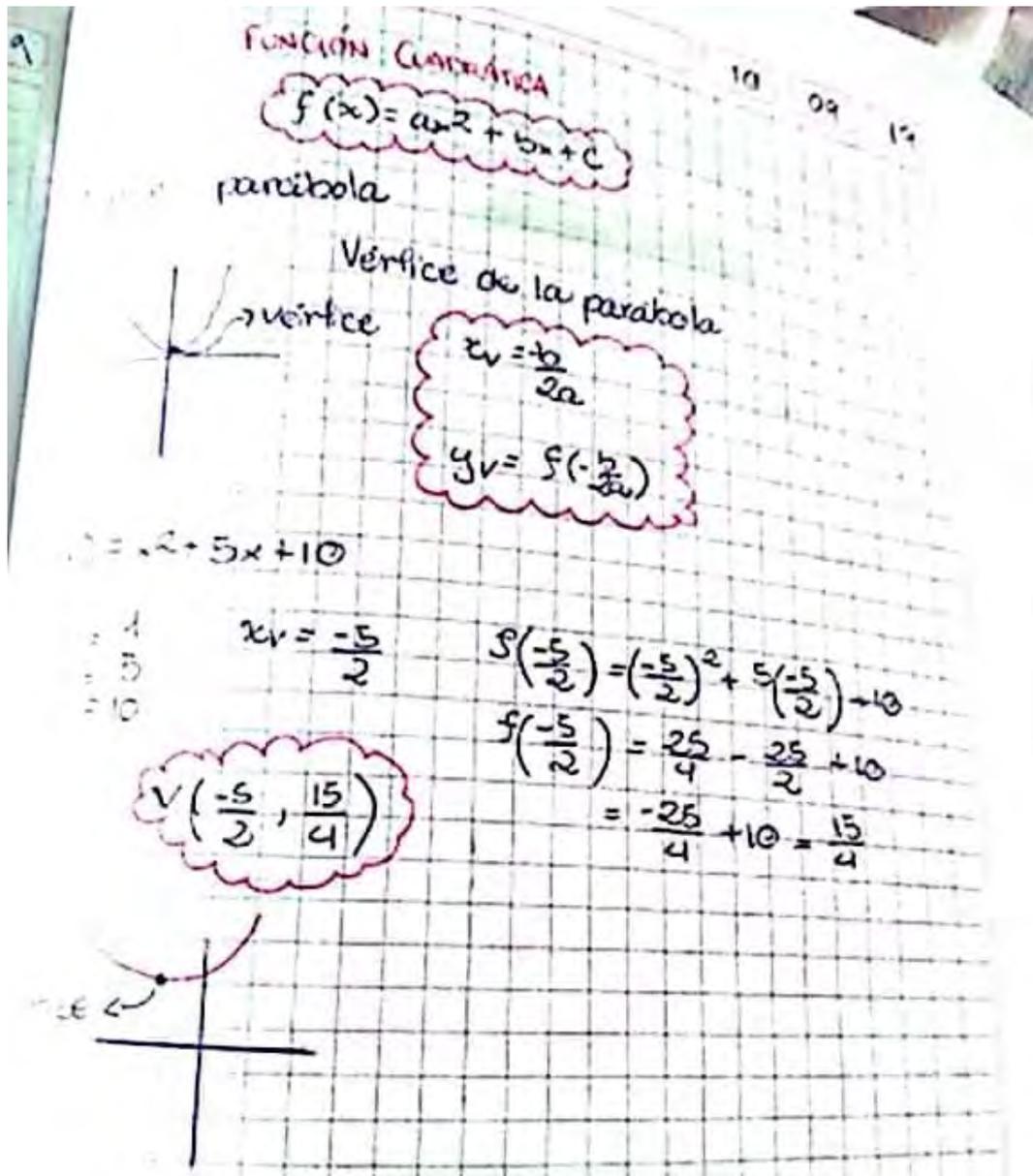


Figura 55: Cuaderno de estudiante  
Fuente: Institución educativa

1. Realice la gráfica de la función, halle los máximos o mínimos, calcule las coordenadas del vértice de:

$$f(x) = 4x^2 + 8x + 7$$

$$a = 4 \quad b = 8 \quad c = 7$$

coordenadas del vértice

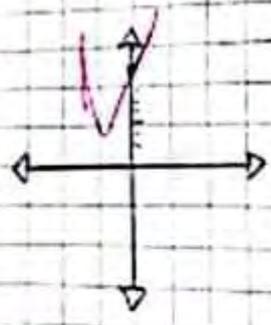
$$V(-1, 3)$$

cálculos:

$$x_v = -\frac{b}{a} = -1$$

$$y_v = \frac{4(-1)^2 + 8(-1) + 7}{4 - 8} = 3$$

$a > 0$   $\cup$  máx  
 $a < 0$   $\cap$  mín



x	y
0	7

$$0 = 4x^2 + 8x + 7$$

$$x = -1$$

$$f(x) = -x^2 + 4x + 2$$

$$a = -1 \quad b = 4 \quad c = 2$$

coordenadas del vértice:

$$V(2, 6)$$

Figura 56: Cuaderno de estudiante  
 Fuente: Institución educativa

## Anexo 3

En este anexo presentamos la invitación realizada a la Institución Educativa para participar de nuestra investigación.

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN  
SOBRE LA ENSEÑANZA DE  
LAS MATEMÁTICAS



**PUCP**

Lima, 28 de octubre de 2023

Señora  
Silvia Sarmiento Herrera  
Directora de la I.E.P. María de la Providencia

Reciba un saludo muy cordial desde el Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP).

El motivo de nuestra comunicación es invitarle a participar de una investigación que tiene por objetivo conocer la comprensión conceptual del concepto de función en situaciones de secundaria. El estudio será realizado por la Srta. Irma Leonor Belido Rojas, estudiante en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, y colaboradora del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP).

En caso decida a participar en esta investigación, le solicitaremos a los alumnos de secundaria responder preguntas en un cuestionario. Esto tomará aproximadamente 30 minutos del tiempo destinado a sus clases de Matemáticas. La participación en este estudio es estrictamente voluntaria, la información que se recoge será confidencial y no se usará para ningún otro propósito que los de la investigación. Las respuestas al cuestionario que damos los alumnos serán codificadas usando un número de identificación y por lo tanto, serán anónimas; sólo se hará referencia al nombre de la institución y al grado de secundaria que responde al cuestionario.

Para cualquier información adicional que desee puede contactarse al correo [Monica.Bellido@pucp.edu.pe](mailto:Monica.Bellido@pucp.edu.pe) o comunicarse directamente conmigo al correo [fguerra@pucp.edu.pe](mailto:fguerra@pucp.edu.pe).

Sin otro particular, quedo a la espera de sus noticias.

Cordialmente,

  
Dr. Francisco Ugarte Guerra  
Director del IREM-PUCP



## Anexo 4

En este anexo presentamos los consentimientos informados que fueron firmados por el docente de matemáticas de la institución y los padres o apoderados de las alumnas presenten en nuestra investigación.

### Consentimiento Informado para alumnas

Estimado Padre de Familia:

Le pedimos su apoyo en la realización de una investigación conducida por Irma Leonor Bellido Rojas, estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Esta investigación tiene como objetivo conocer la comprensión conceptual del concepto de función en estudiantes de secundaria.

Si usted accede a que su menor hija participe en este estudio, se le solicitará responder preguntas en un cuestionario en la fecha \_\_\_\_\_, y de ser necesario responder algunas preguntas por parte de la investigadora, posteriormente. La participación en este estudio es estrictamente voluntaria, las respuestas al cuestionario que darán las alumnas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas. Después de finalizado el estudio se darán a conocer los resultados a la Institución Educativa con la finalidad de que pueda reconocer las fortalezas y dificultades de sus procesos de aprendizaje con respecto al concepto matemático de función.

Para cualquier información adicional que desee, puede obtenerla contactándose al correo: leonor.bellido@pucp.edu.pe.

Desde ya le agradecemos su participación.

Yo, \_\_\_\_\_,  
doy mi consentimiento para que mi menor hija

\_\_\_\_\_ participe en el estudio y autorizo que la información recogida se utilice en este.

\_\_\_\_\_  
Nombre completo del padre de familia

\_\_\_\_\_  
Firma

## Consentimiento Informado para docente de Matemática

Estimado docente

Le pedimos su apoyo en la realización de una investigación conducida por Irma Leonor Bellido Rojas, estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Esta investigación tiene como objetivo conocer la comprensión conceptual del concepto de función en estudiantes de secundaria.

Si usted accede a participar en este estudio, se le solicitará acceder a su material de clase y ser entrevistado sobre la clase que imparte respecto al tema de función. La participación en este estudio es estrictamente voluntaria y su identidad permanecerá anónima. Después de finalizado el estudio se darán a conocer los resultados a la Institución Educativa con la finalidad de que pueda reconocer las fortalezas y dificultades de los procesos de aprendizaje de sus alumnas con respecto al concepto matemático de función.

Para cualquier información adicional que desee, puede obtenerla contactándose al correo: leonor.bellido@pucp.edu.pe.

Desde ya le agradecemos su participación.

Yo, \_\_\_\_\_,

doy mi consentimiento para participar en el estudio y autorizo que la información recogida se utilice en este.

---

Nombre completo del docente

Firma