

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de segundo grado de secundaria en tareas sobre la pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Cinthia Yeraldine Pulache Panta

Asesora:

Dra. Daysi Julissa García Cuéllar

Lima, 2023

Informe de Similitud


Yo, Daysi Julissa García Cuéllar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis de investigación titulada “Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de segundo grado de secundaria en tareas sobre la pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra”, de la autora Cinthia Yeraldine Pulache Panta,

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 16%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 02/09/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y confirmo que cada una de las coincidencias detectadas no constituyen plagio alguno.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima 02 de septiembre 2023

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: García Cuéllar, Daysi Julissa	
DNI: 41784433	Firma: 
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0243-6353	

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo analizar el trabajo matemático de estudiantes de segundo grado de secundaria cuando se enfrentan a tareas sobre la pirámide cuadrangular utilizando GeoGebra, dado que investigaciones antecedentes reportaron dificultades relacionadas con el aprendizaje de este objeto matemático. Además documentos como el Currículo Nacional y la *National Council of Teachers of Mathematics*, destacan la importancia del estudio de este objeto. La metodología de investigación que se utiliza es de tipo cualitativa, y está basada en el conjunto de fases propuestas por Hernández, Fernández, y Baptista, la cual se adapta a la naturaleza y al objetivo de esta investigación. Para el análisis de los resultados se tomaron en cuenta elementos teóricos y metodológicos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, la cual constituye una herramienta valiosa para analizar el trabajo matemático tomando en cuenta procesos cognitivos y elementos epistemológicos.

Los estudiantes que participaron de este estudio pertenecen a una institución educativa pública rural de Piura. Las tareas que se aplicaron para el recojo de la información fueron adaptadas de una ficha de actividades implementada en la estrategia Aprendo en Casa en el año 2020, que involucra el estudio de este objeto matemático. Los resultados muestran que las génesis que se activaron en mayor medida son las semiótica e instrumental. Este trabajo de investigación constituye un punto de partida para el estudio del trabajo matemático de los estudiantes cuando resuelven tareas que involucran el estudio de algún sólido geométrico.

Palabras clave: Pirámide cuadrangular; Espacio de Trabajo Matemático; Tarea; Génesis; Planos verticales.

Abstract

The objective of this research is to analyze the mathematical work of second grade secondary school students when they face tasks about the quadrangular pyramid using GeoGebra, since previous research reported difficulties related to the learning of this mathematical object. In addition, documents such as the National Curriculum and the National Council of Teachers of Mathematics highlight the importance of studying this object.

The research methodology used is qualitative and is based on the set of phases proposed by Hernández, Fernández, and Baptista, which is adapted to the nature of the objective of this research. For the analysis of the results, theoretical and methodological elements of the Mathematical Workspace theory were considered, which constitutes a valuable tool for analysing mathematical work, taking into account cognitive processes and epistemological elements.

The students who participated in this study belong to a rural public educational institution in Piura. The tasks that were applied to collect the information were adapted from an activity sheet implemented in the Aprendo en Casa strategy in 2020, which involves the study of this mathematical object. The results show that the geneses that were activated to a greater extent are semiotic and instrumental. This research work constitutes a starting point for the study of students' mathematical work when solving tasks that involve the study of a geometric solid.

Keywords: Quadrangular pyramid; Mathematical Workspace; Tasks; Genesis; Vertical Planes.

Resumo

Esta pesquisa visa analisar o trabalho matemático dos alunos do segundo grau do ensino médio quando eles enfrentam tarefas sobre a pirâmide quadrangular usando o GeoGebra, uma vez que pesquisas anteriores relataram dificuldades relacionadas ao aprendizado deste objeto matemático. Além disso, documentos como o Currículo Nacional e o Conselho Nacional de Professores de Matemática destacam a importância do estudo deste objeto.

A metodologia de investigação utilizada é qualitativa e baseia-se no conjunto de fases proposto por Hernández, Fernández e Baptista, que se adapta à natureza e ao objectivo desta pesquisa. Para a análise dos resultados, foram tidos em conta elementos teóricos e metodológicos da teoria do Espaço de Trabalho Matemático, que constitui uma ferramenta valiosa para a análise do trabalho matemático, tendo em conta processos cognitivos e elementos epistemológicos.

Os estudantes que participaram neste estudo pertencem a uma instituição de ensino público rural em Piura. As tarefas que foram aplicadas para recolher a informação foram adaptadas de uma ficha de actividade implementada na estratégia Aprendo en Casa em 2020, que envolve o estudo deste objecto matemático. Os resultados mostram que as géneses que foram activadas em maior grau são as semiótica e instrumental. Este trabalho de investigação constitui um ponto de partida para o estudo do trabalho matemático dos estudantes na resolução de tarefas que envolvem o estudo de um sólido geométrico.

Palavras-chave: Pirâmide quadrangular; Espaço de Trabalho Matemático; Tarefa; Génesis; Planos Verticais.



Dedicado a:

A mis padres, José y Rosa, con mucho amor.

A Jasiel y María, con todo mi corazón.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesora, la Dra. Daysi García Cuéllar, por su orientación y sugerencias. Sus aportes fueron de gran ayuda para concluir esta tesis de investigación.

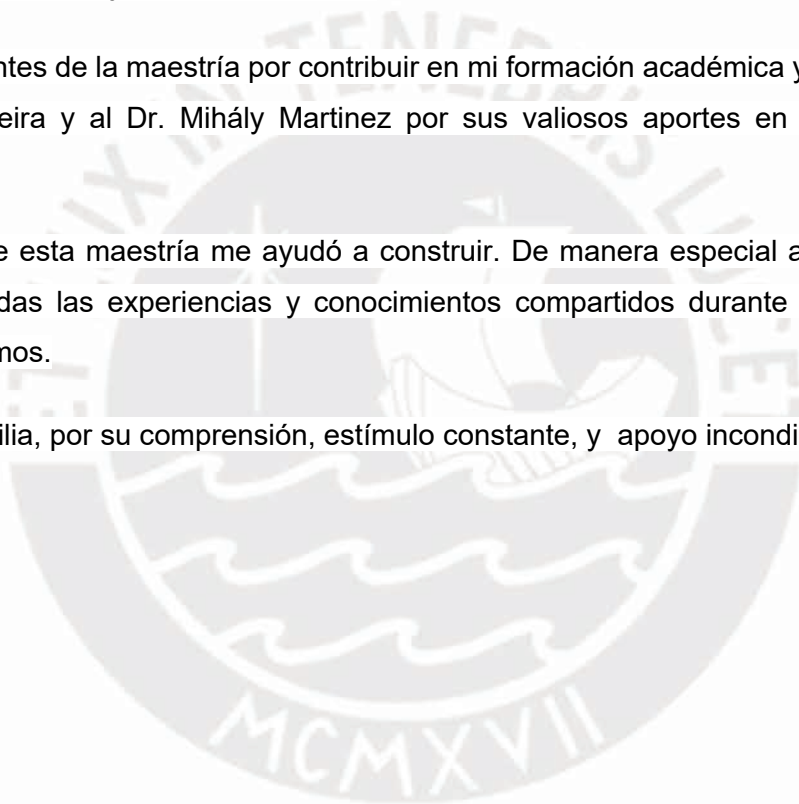
A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus aportes en la realización de este trabajo.

A los miembros del jurado, Dra. Jesús Flores y Mg. Magaly Campos, por sus sugerencias y observaciones para la mejora de este estudio.

A todos los docentes de la maestría por contribuir en mi formación académica y profesional. A la Dra. Verónica Neira y al Dr. Mihály Martínez por sus valiosos aportes en el diseño de las actividades.

A los amigos que esta maestría me ayudó a construir. De manera especial a Camila, Jorge y Segundo, por todas las experiencias y conocimientos compartidos durante cada uno de los cursos que llevamos.

A mi querida familia, por su comprensión, estímulo constante, y apoyo incondicional.



ÍNDICE

	Pág
Resumen	iii
Índice	VIII
Lista de tablas	IX
Lista de figuras	X
Introducción	XII
Capítulo I: Planteamiento del problema	14
1.1 Antecedentes	14
1.2 Justificación de la investigación	22
1.3 Pregunta de investigación	24
1.4 Objetivos de investigación	24
1.5 Supuestos teóricos en los que se sustenta la investigación	25
1.6 Metodología y procedimientos de la investigación	31
Capítulo II: Estudio de la pirámide cuadrangular	34
2.1 Aspectos históricos epistemológicos relacionados con la pirámide cuadrangular	34
2.2 Aspectos matemáticos de la pirámide cuadrangular	35
2.3 Estudio de la pirámide en el currículo y en libros de texto	37
Capítulo III: Experimento y análisis de la investigación	46
3.1 Sujetos de la investigación	46
3.2 Metodología para analizar el trabajo matemático personal de los estudiantes	46
3.3 Diseño y análisis de las tareas	47
3.4 Análisis del trabajo matemático de los estudiantes	62
Conclusiones	76
Referencias	78
Anexos	82

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Procedimientos metodológicos desarrollados en esta investigación	32
Tabla 2. Descripción de las etapas para analizar el trabajo matemático de los estudiantes	47
Tabla 3. Diseño de las tareas planteadas para los objetivos de este estudio	48
Tabla 4. Enunciados de la tarea 1	51
Tabla 5. Episodios identificados en el trabajo matemático previsto para la tarea 1	52
Tabla 6. Enunciados de la tarea 2	56
Tabla 7. Episodios identificados en el trabajo matemático previsto para la tarea 2	57
Tabla 8. Episodios identificados en el trabajo matemático previsto para la tarea 3	60
Tabla 9. Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante A en la tarea 1	63
Tabla 10. Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático	65
Tabla 11. Trabajo matemático global de los estudiantes A y B en el desarrollo de la tarea 1	67
Tabla 12. Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante A en la tarea 2	68
Tabla 13. Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante B en la tarea 2	70
Tabla 14. Trabajo matemático global de los estudiantes A y B en el desarrollo de la tarea 2	72
Tabla 15. Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante A en la tarea 3	73
Tabla 16. Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante B en la tarea 3	74
Tabla 17. Trabajo matemático global de los estudiantes A y B en el desarrollo de la tarea 3	75

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama del plano epistemológico y cognitivo del ETM	26
Figura 2. Diagrama de las génesis en el ETM	27
Figura 3. Los Tres planos verticales en el ETM según Kuzniak y Nechache (2021)	28
Figura 4. Procesos en una investigación cualitativa según Hernandez, Fernández y Baptista (2014)	31
Figura 5. Pirámide propuesta en el libro Geometría plana y del espacio de Wentworth y Smith (2010) para demostrar que el área lateral de la pirámide es igual a la mitad de la apotema por el perímetro	36
Figura 6. Sesión de aprendizaje sugerida en el libro Construye Matemática para el segundo grado de secundaria.	39
Figura 7. Actividades sugeridas para la sesión de aprendizaje del tema Poliedros, planteada en el libro Construye Matemática para el segundo grado de secundaria	40
Figura 8. Actividad sugerida para la sesión de aprendizaje del tema Poliedros, planteada en el libro Construye Matemática	40
Figura 9. Actividades sugeridas para la sesión de aprendizaje del tema Poliedros, en el libro Construye Matemática para el segundo grado de secundaria	41
Figura 10. Sesión de aprendizaje sugerida en el libro Construye Matemática para segundo grado de secundaria.	42
Figura 11. Actividades sugeridas para la sesión de aprendizaje del tema Volumen de la pirámide, en el libro Construye Matemática para el segundo grado de secundaria.	43
Figura 12. Actividades sugeridas en el libro de actividades para el segundo grado de secundaria de Ediciones Corefo	44
Figura 13. Actividad sugerida en el libro de actividades para el segundo grado de secundaria de Ediciones Corefo relacionada con la pirámide cuadrangular.	45
Figura 14. Tarea inicial	49
Figura 15. Ítem a de la tarea inicial	49
Figura 16. Ítem b de la tarea inicial	50
Figura 17. Ítem c de la tarea inicial	50
Figura 18. Espacio de trabajo matemático de un estudiante en la aplicación de la prueba piloto en la tarea 1	53

Figura 19. Descripción global del ETM previsto según los episodios de la tarea 1	55
Figura 20. Descripción global del ETM previsto según los episodios en la tarea 2	59
Figura 21. Descripción global del ETM previsto según los episodios en la tarea 3	62



Introducción

Para desenvolverse en la vida diaria es fundamental el aprendizaje de la Geometría ya que, para orientarse adecuadamente en el espacio, visualizar, interpretar y relacionar las características de los objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales son indispensables los conocimientos geométricos. En esto consiste el desarrollo de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, que propone el Currículo Nacional de la Educación Básica Peruana. El estudio de los objetos geométricos tridimensionales constituye un factor importante y para esto es necesario implementar actividades que permitan el modelado de estos objetos utilizando la tecnología como recurso indispensable e identificar las acciones que realizan los estudiantes para favorecer la construcción de los conceptos tridimensionales junto con sus representaciones. A partir de esto se prioriza en esta investigación el estudio del trabajo matemático cuando los estudiantes resuelven tareas que involucran uno de los objetos tridimensionales como la pirámide ya que diversos investigadores reportaron dificultades por parte de los estudiantes a la hora de trabajar con este objeto.

Es importante señalar que la investigación sobre el trabajo matemático de estudiantes ha sido foco de estudio en los últimos años en Educación Matemática, así lo señalan diversos investigadores que destacan la importancia de analizar la actividad de los estudiantes y vincularla con modelos teóricos que permitan reflexionar sobre los procesos cognitivos que realizan y los diversos aspectos epistemológicos que intervienen. En relación a lo mencionado en este trabajo de investigación se busca precisamente analizar el trabajo matemático de los estudiantes en relación al objeto pirámide utilizando como herramienta la teoría del Espacio de Trabajo Matemático.

Esta tesis de investigación está constituida por tres capítulos. En el primero se delimita el problema a partir de las investigaciones referentes y en base a esto se justifica el estudio. También se plantean los elementos teóricos que sustentan este trabajo y se proponen los objetivos y la metodología de investigación. En el segundo capítulo se realiza un estudio del objeto pirámide cuadrangular, a partir de aspectos históricos, y matemáticos. Se presenta un recorrido histórico desde la aparición de los poliedros hasta el papel que desempeñaron estas estructuras geométricas como la pirámide en diferentes aspectos culturales. En cuanto a los aspectos matemáticos se presenta la definición de pirámide según Wentworth y Smith (2010), además de algunas propiedades importantes que involucran el estudio de este objeto. También se realiza una revisión del objeto en estudio en el Currículo Nacional y en algunos libros de textos escolares. En el tercer capítulo se presentan los sujetos de investigación y sus características, la

estrategia para analizar el trabajo matemático personal de los estudiantes, el diseño y análisis de las tareas (tarea inicial, tarea 1, 2 y 3) y los resultados (el análisis del trabajo matemático personal de los estudiantes). Finalmente se presentan las conclusiones y sugerencias que surgieron de la investigación.



Capítulo I: Planteamiento del problema

En este capítulo se presentan los antecedentes relacionados con el estudio de la pirámide y la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, utilizada para el análisis de las tareas implementadas. Asimismo, se plantea el problema que motivó este estudio y se describen los argumentos que sustentan la justificación e importancia del mismo. Finalmente se presentan los objetivos de la investigación.

1.1 Antecedentes

En esta parte, se presentan primero las investigaciones en Educación Matemática relacionadas al objeto matemático en estudio, luego se presentan las investigaciones relacionadas con la influencia de los recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y por último se precisan algunos estudios relacionados al trabajo matemático de estudiantes cuando se enfrentan a tareas que involucran objetos geométricos.

Investigaciones relacionadas al objeto matemático en estudio

Con respecto al estudio de la pirámide como poliedro tenemos algunas investigaciones antecedentes:

León (2020) realizó una investigación con 38 estudiantes pertenecientes a séptimo grado (12-14 años) de educación básica en el nivel de secundaria de una institución pública. Este estudio tomó como referente a la teoría semiótica de Duval. El objetivo fue identificar y realizar un análisis acerca de los procesos relacionados con la visualización que se favorecen por deconstrucción dimensional, el cual involucra las formas y la articulación entre los registros figural y el de la lengua natural, para lograr el reconocimiento de las unidades figurales y elementales de las pirámides cuadrangulares, como actividades cognitivas fundamentales en los procesos de comprensión relacionados con los objetos propios de la geometría.

La investigación constituye un estudio de caso, el cual fue realizado en cuatro etapas metodológicas: la planeación y organización; el diseño y análisis a priori de las actividades; la implementación; y finalmente la evaluación y el análisis a posteriori de las producciones (geométricas y discursivas) de los estudiantes. De esta manera se realizó la observación y la sistematización de los procesos de visualización (según Duval) al identificar y realizar tratamientos de las unidades figurales y características dimensionales de los prismas rectos y

pirámides cuadrangulares, para el desarrollo de actividades que tienen que ver con la superficie y el volumen de dichos sólidos

Cabe destacar también que se tuvieron tres instrumentos para la recolección de los datos en la investigación: el principal que se utilizó para recolectar la información, lo constituyeron las producciones de los estudiantes de las actividades geométricas planteadas. Un segundo instrumento de comunicación principal fue el WhatsApp (intervención virtual individual) y un instrumento de intervención virtual colectiva se realizó a través de tres foros. Se encontró que los estudiantes visualizaron la representación figural del objeto tridimensional; sin perder de vista otros aspectos importantes (caras poligonales, los ángulos, las aristas, las diagonales y los vértices) que configuran el objeto geométrico. Cabe resaltar que a medida que los estudiantes trabajaron en el desarrollo de la situación planteada, las representaciones figurales se lograron visualizar a partir de los enunciados propuestos y la designación realizada sobre los objetos geométricos involucrados. Se comprobó también que la comprensión de las propiedades y las características de los objetos geométricos, se favorece a partir de la sinergia entre visualización y lenguaje (Duval, 2016). Esta investigación es relevante ya que analizar la visualización por deconstrucción es un aspecto importante para la comprensión de los objetos prismas y pirámides, aspecto que consideramos también en esta investigación.

La investigación de Herrera et al. (2016), donde se plantea una propuesta didáctica que tiene por objetivo que los estudiantes construyan el concepto de área de la pirámide recta a partir de su desarrollo plano. Para ello se utilizó como elementos teóricos y metodológicos la noción de escenario de investigación de Skovsmose (2000), la cual se sustenta desde la Educación Matemática Crítica, aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y los criterios de idoneidad didáctica que propone el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS). Esta tarea consistió en el planteamiento de un problema de carácter extramatemático, con intencionalidad didáctica que implicaba abordar el estudio de una pirámide recta en la cual el docente podía intervenir estratégicamente haciendo reflexionar al estudiante a través de interrogantes. La tarea fue implementada a 15 estudiantes para profesores de física, matriculados en el curso de matemática de la Universidad Nacional de San Juan de Argentina. Los resultados señalaron que la tarea propuesta promovió en los estudiantes la formulación de preguntas, también la búsqueda de explicaciones, además que se propiciaba la búsqueda y justificación de las propiedades matemáticas. Este estudio pone de manifiesto algunos elementos importantes que se priorizan en el planteamiento de las actividades para esta investigación y que se deben tomar en cuenta en el planteamiento de una actividad relacionada

con la superficie de la pirámide. Entre estos elementos que se consideran relevantes para esta investigación destacan: el comprender el concepto de área de la pirámide a partir de su desarrollo plano, y también el identificar y utilizar procedimientos para su construcción, la exploración y el descubrimiento para el planteamiento de conjeturas, la argumentación y la generalización de propiedades geométricas.

Otra investigación referente es la de Hernández et al. (2021), cuyo objetivo fue analizar los niveles de razonamiento geométrico de un grupo de 200 estudiantes de secundaria (entre 13 y 14 años) al resolver problemas relacionados con los conceptos de polígonos y poliedros, para lo cual se tomó en cuenta el modelo de Van Hiele. Este estudio fue cuantitativo, con enfoque descriptivo y como técnica para recolectar la información se propuso un banco de preguntas, a través del software educativo viaje por la Geometría. Los resultados de este estudio mostraron que los estudiantes desarrollaron los niveles de razonamiento 1 y 2, ya que lograron discriminar entre un polígono y un poliedro. Además pudieron clasificar las figuras en regulares, irregulares, convexos y cóncavos. Se encontró también que el 20% del total de los estudiantes no alcanzaron el razonamiento del nivel 3 (Clasificación), ya que se evidenciaron dificultades al trabajar con el teorema de Euler, el cual permite establecer la relación entre el número de caras, vértices y aristas del poliedro. Cabe mencionar que el nivel 4 (correspondiente a la deducción formal) fue logrado sólo por el 30% de los participantes, debido a que se evidenciaron dificultades relacionadas con el razonamiento que involucra la expresión algebraica que representa la apotema de un polígono en función de su lado y calcular la diagonal del paralelepípedo.

Esta investigación constituye un antecedente, que brinda un panorama de los diversos aspectos que se deben tener en cuenta cuando los estudiantes se enfrentan a una determinada tarea en el campo de la geometría y los conocimientos que se ponen en juego cuando se trabaja con objetos tridimensionales como la pirámide. También se destaca el aporte de los recursos tecnológicos como mediadores en la enseñanza – aprendizaje de los objetos geométricos.

Investigaciones relacionadas a la enseñanza de la Geometría utilizando Recursos tecnológicos

El estudio de Scalabrin (2019), cuyo objetivo fue investigar acerca de las contribuciones del software GeoGebra 3D en el aprendizaje de los objetos propios de la geometría en la escuela secundaria, utilizando elementos teóricos del modelo de Van Hiele. En este estudio se elaboró, una secuencia didáctica con el objetivo de que los estudiantes comprendan los conceptos geométricos de poliedros, a través de la construcción, experimentación, manipulación y

visualización gráfica. El análisis de los datos se realizó considerando la descripción de los procesos de enseñanza y aprendizajes desarrollados durante la investigación. Esta investigación se realizó con 33 estudiantes de secundaria cuyas edades fluctúan entre los 15 y 17 años. Los resultados pusieron en evidencia que construir y mover objetos integrados en el software GeoGebra, permite la visualización de objetos y el reconocimiento de propiedades de los poliedros (prismas y pirámides). Para la recolección de la información se utilizaron cuestionarios, guión de observación, registros fotográficos, archivos digitales formulados con el software GeoGebra y producciones de las actividades propuestas. Este trabajo destaca porque una de las conclusiones fue que en el diseño de las actividades propuestas, utilizando como mediador el GeoGebra, se favoreció el descubrimiento de conjeturas y se contribuyó de manera efectiva en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, en relación a los conceptos estudiados, desde la visualización (nivel 0) hasta la deducción formal (nivel 4) del Modelo Van Hiele. Este estudio constituye además un referente importante ya que nos brinda luces sobre el uso del software como mediador en la construcción, experimentación, manipulación y visualización para la comprensión de los objetos geométricos como la pirámide, que constituye el objeto de estudio de esta investigación.

La investigación de Díaz et al. (2018) que tuvo por objetivo analizar los efectos al utilizar GeoGebra en la enseñanza de la geometría con estudiantes de secundaria en el desarrollo del razonamiento, la demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas. Este estudio se realizó en Perú y se llevó a cabo con dos grupos, los cuales estuvieron conformados por 24 estudiantes cada uno, entre 15 y 16 años. El grupo intervenido recibió el curso de Geometría del 4to año de secundaria con el empleo del software GeoGebra. El otro grupo (de control) también recibió el curso pero con enseñanza tradicional, sin el empleo del software. Esto se llevó a cabo en dos meses. El curso que recibieron estuvo conformado por 11 sesiones con una duración de tres horas cada una, en donde una hora fue utilizada para compartir con los participantes los conceptos y principios geométricos necesarios, y dos horas para trabajar en la resolución de problemas utilizando GeoGebra. El planteamiento de los problemas fue el centro en torno al cual se organizó la totalidad del proceso de aprendizaje, ya que fueron diseñados para desplegar las capacidades de razonamiento, la demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas en los estudiantes. Para ello, debían buscar, y seleccionar la información necesaria, para utilizarla y poder plantear los procedimientos que representen las soluciones a los problemas formulados y comunicar y justificar utilizando propiedades geométricas propias de la geometría formal.

Se aplicó una evaluación a los grupos intervenidos y de comparación antes y después de la intervención. Los resultados mostraron que el uso de GeoGebra tuvo efectos en el fortalecimiento de las tres capacidades, con mejoras significativas. También se observó que trabajar con GeoGebra favorece el trabajo en grupos y los procesos de colaboración en el aprendizaje. Este estudio resulta relevante ya que se destaca que el uso del software GeoGebra tuvo efectos importantes en relación al fortalecimiento de las capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas.

El estudio de Kusumah et al. (2020) cuyo objetivo fue analizar el efecto de GeoGebra en el aprendizaje de la geometría tridimensional, enfatizando en la capacidad de comunicación matemática. Esta investigación de tipo cuasi experimental incluyó a 84 estudiantes de grado XII de secundaria en el centro de Yakarta, Indonesia. Las edades de los estudiantes fluctúan entre 13 y 15 años. Se aplicaron 2 pruebas de habilidades que constaban de 7 preguntas que luego fueron analizadas. El instrumento de prueba de habilidad utilizado en este estudio midió tres aspectos, a saber, texto escrito, dibujo y expresión matemática. El análisis de datos utilizado en este estudio es el análisis estadístico descriptivo e inferencial. Los resultados mostraron diferencias significativas en habilidades matemáticas de comunicación en los estudiantes que fueron asistidos por GeoGebra en comparación con los estudiantes que obtuvieron un aprendizaje matemático convencional.

Este estudio resulta relevante ya que muestra que el aprendizaje con recursos tecnológicos es más eficaz que el aprendizaje convencional ya que se evidenció que el software GeoGebra ayuda a los estudiantes a descubrir nuevas formas de pensar, manipular y analizar modelos matemáticos. Según los investigadores este recurso apoya el aprendizaje en aspectos de representaciones, cálculos, y características compatibles con la web que lo favorecen.

Investigaciones relacionadas al estudio del trabajo matemático

El estudio de Prior (2020) donde se investiga acerca de la transición desde las primeras justificaciones de propiedades geométricas hacia la demostración matemática en un contexto deductivo. Según este investigador la teoría del Espacio de Trabajo matemático proporciona un marco teórico que permite entender el ambiente institucional en que se lleva a cabo la actividad geométrica, sumado a ello utiliza también el modelo de Razonamiento Configural para analizar el espacio de trabajo matemático personal del estudiante en una tarea donde se trabaja la comprobación de una propiedad geométrica. Se asume como razonamiento configural cuando se involucra la coordinación entre la aprehensión discursiva y la operativa, dado que Duval definió los procesos de visualización en términos de aprehensiones. Es decir en este estudio se toma

en cuenta el razonamiento configural como el desarrollo de las aprehensiones (discursiva y operativa) realizadas por un estudiante cuando se enfrenta a un problema que involucra los objetos geométricos. Además se precisa que la actividad de demostración, está ligada al ámbito institucional en donde se lleva a cabo, es decir en torno a la institución en la que se desarrolla la actividad matemática. En esta investigación se describe y analiza la parte discursiva en las respuestas que brindaron los estudiantes de secundaria a los cuatro problemas planteados, en los que se pide probar una propiedad geométrica, y a partir de ello se determinan los razonamientos configurales que realizan. El análisis de las respuestas de los estudiantes permitió identificar las características específicas del razonamiento configural propio de la Geometría al asumir que la coordinación entre lo visual y lo analítico cobra importancia para el desarrollo de las pruebas matemáticas. Este análisis aporta evidencias acerca del tránsito que realizan los estudiantes desde las primeras justificaciones (en la Geometría Natural) hasta llegar al razonamiento matemático propio de la Geometría Axiomática Natural. En esta investigación el Razonamiento Configural se presenta como un referente teórico que permite abordar la articulación entre visualización y razonamiento. Este estudio está enmarcado en la caracterización de los procesos cognitivos que ponen de manifiesto los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría. Participaron 38 estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria, entre los 15-16 años. Estos estudiantes resolvieron cuatro problemas en los que se planteaba que probasen una propiedad geométrica. Cabe mencionar que en los enunciados de cada problema se planteaba una figura. Los resultados mostraron que el estudio del razonamiento configural y de las organizaciones discursivas de las respuestas de los estudiantes permitió desarrollar un modelo teórico para el análisis de las respuestas. También se encontraron dos obstáculos de naturaleza epistemológica que impiden el tránsito desde la Geometría Natural, propia de las etapas elementales, hasta la Geometría Axiomática Natural, cuyo desarrollo es importante para el final de la etapa secundaria ya que favorece el paso a la Geometría Formal Axiomática. Estos son: la distinción entre dibujo (una representación particular de una figura) y figura (objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades matemáticas que lo definen). Además se evidenció que el contexto en que se propone una tarea (ETM idóneo) prevalecen determinados procedimientos, y esto conlleva la pertinencia de unos razonamientos configurales, dado que se infieren algunas características del ETM personal en el que se desarrolla la tarea a partir del razonamiento configural realizado.

Este estudio resulta relevante ya que pone de manifiesto aspectos importantes del trabajo geométrico (validación de procedimientos, análisis de propiedades matemáticas, tipos de

aprehensiones, entre otras) que realizan los estudiantes frente a actividades específicas de la matemática.

La investigación de Henríquez y Kuzniak (2021) tuvo por objetivo analizar el trabajo geométrico desarrollado por profesores de matemática en formación, al enfrentarse a tareas en un contexto tecnológico y con lápiz y papel. Esta investigación está sustentada en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, la cual permite identificar y analizar los procesos cognitivos y aspectos epistemológicos que se precisan en el trabajo de un individuo. Este estudio se realizó bajo un enfoque cualitativo y se utilizó el estudio de caso como estrategia de diseño de investigación para comprender cómo se realiza el trabajo geométrico de los participantes. Para ello se diseñó una tarea geométrica con uso de lápiz y papel, que favorece la visualización y privilegia la construcción de determinadas configuraciones en coordinación con razonamientos discursivos para la validación, y otra tarea en versión adaptada para ambientes tecnológicos, la cual involucró el proceso de visualización basado en la práctica de arrastre (visualización dinámica), además de la exploración y la validación de conjeturas y/o propiedades involucradas, lo que además favoreció la justificación mediada por el uso de la tecnología. La primera tarea se aplicó a dieciocho estudiantes, y la segunda a trece. Ambas tareas geométricas se aplicaron en momentos distintos de un curso de Didáctica de la Matemática y los resultados mostraron diferencias entre el ETM previsto y ETM personal de los participantes y el privilegio de determinadas fases de trabajo matemático.

Esta investigación muestra que es posible identificar la distancia entre el espacio de trabajo matemático personal previsto y el espacio de trabajo matemático efectivo realizado por cada individuo. De los resultados obtenidos en este estudio se rescata el uso del marco del Espacio de Trabajo Matemático, como herramienta teórica y metodológica para analizar las acciones de los estudiantes cuando resuelven determinadas tareas.

Las investigaciones relacionadas al objeto matemático en estudio muestran los diversos aspectos que intervienen cuando los estudiantes se enfrentan a tareas sobre pirámides. Estos aspectos (visualización, el reconocimiento de las unidades figurales y elementales, la formulación de preguntas, la justificación de las propiedades, aspectos discursivos, entre otros) constituyen valiosos elementos a estudiar desde la perspectiva de la enseñanza aprendizaje de la Geometría y en particular del objeto pirámide. Así mismo los estudios que se han realizado con el involucramiento de recursos tecnológicos, principalmente con el GeoGebra evidencian las contribuciones de este software en la comprensión de los conceptos geométricos ya que se

favorece la construcción, la manipulación y la visualización en el sentido de Duval. Por consiguientes las investigaciones que se han realizado tomando como marco de referencia el espacio de trabajo matemático dan indicios de que esta teoría constituye una herramienta para estudiar el trabajo que realizan estudiantes cuando resuelven problemas en un determinado campo de la matemática.

Las investigaciones que se han visto reportan que muchos estudiantes presentan diversas dificultades, relacionadas con el proceso de visualización de las formas, el razonamiento geométrico, la interpretación geométrica, con la deconstrucción visual, etc. Estas dificultades se presentan precisamente cuando trabajan actividades que involucran diferentes aspectos relacionados con los objetos geométricos y específicamente aquellos relacionados con la pirámide. Este problema no solo se presenta en la escolaridad, sino también a nivel superior e inclusive en la formación de profesores. Esto se debe a que la enseñanza de la geometría se ha visto reducida a la sola aplicación de fórmulas, lo que evidencia lo dificultoso que puede resultar su enseñanza aprendizaje. Según Duval (2016) este campo de conocimiento exige la actividad cognitiva más completa ya que implica actividades cognitivas fundamentales como la visualización, la construcción y el razonamiento, lo que necesariamente requiere la coordinación entre dos registros esenciales para el aprendizaje y la comprensión de los objetos propios de la geometría: el registro de la representación figural y el registro de la lengua natural.

Diversos investigadores señalan que los recursos tecnológicos pueden favorecer diversos procesos en el aprendizaje de los objetos geométricos. Así por ejemplo Salazar y Neira (2017) afirman que en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos con el uso de recursos tecnológicos, particularmente el uso de softwares de representaciones dinámicas puede favorecer, en el sentido de Duval, la visualización de propiedades de ciertos objetos matemáticos representados que con otros recursos podrían no ser descubiertas. Además según Codina y Romero (2016) las interacciones entre los recursos tecnológicos y los signos juegan un papel relevante en la construcción epistemológica en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Desde esta perspectiva surge el interés por investigar acerca del trabajo matemático que realizan los estudiantes del nivel secundaria (del segundo grado cuyas edades están entre 12 - 14 años) cuando se enfrentan a una actividad que tiene por objetivo que aprendan la noción de pirámide y sus elementos, así como el área de este poliedro interactuando a través del software GeoGebra. Según Montoya (2020) la teoría del Espacio de Trabajo Matemático es una herramienta importante para analizar el trabajo de los estudiantes, ya que permite analizar las

acciones de los estudiantes y observar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, así mismo la activación respectiva de los planos.

1.2 Justificación de la investigación

Una de las competencias que plantea el Currículo Nacional y que tiene que ver con el aprendizaje de la geometría es la competencia 26 Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, la cual:

Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además describen trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico (Minedu, 2016, p.144)

En este sentido es importante que los estudiantes trabajen actividades donde descubran las relaciones entre las formas y figuras geométricas utilizando los diversos recursos y las propiedades geométricas que les permita construir su propio conocimiento. Desde esta perspectiva el Ministerio de Educación (2016) plantea las capacidades que se deben trabajar para el desarrollo de la competencia mencionada, las mismas que están relacionadas con la modelación de los objetos utilizando formas geométricas, la comprensión sobre las formas y relaciones, el uso de estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio y la argumentación sobre las propiedades y relaciones geométricas.

Según el programa curricular de educación secundaria, cuando el estudiante de segundo grado de secundaria resuelve problemas de forma, movimiento y localización y logra el nivel esperado del ciclo VII, debe realizar los siguientes desempeños (aquellos relacionados con el objeto matemático pirámide y la noción de área):

- Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asocia estas características y las representa con formas bidimensionales compuestas y tridimensionales.
- Expresa, con dibujos, construcciones con regla y compás, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de la semejanza y

congruencia de formas bidimensionales (triángulos), y de los prismas, pirámides y polígonos. Los expresa aun cuando estos cambien de posición y vistas, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.

- Selecciona y emplea estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud, el perímetro, el área o el volumen prismas pirámides, polígonos y círculos, así como de áreas bidimensionales, empleando unidades cartesianas y unidades convencionales.
- Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos, entre objetos y formas geométricas, y entre las formas geométricas, sobre la base de simulaciones y la observación de casos. Las justifica con ejemplos y sus conocimientos geométricos.

Cabe resaltar también que existen diversas investigaciones relevantes como la de Díaz et al. (2018), Hernández et al. (2021), Salazar y Neira (2017), Scalabrin (2019) entre otras, que desde la perspectiva de la enseñanza aprendizaje de la geometría plana centran su atención en el análisis de procesos matemáticos como analizar, modelar, generalizar, particularizar, justificar y otras que se enfocan en las representaciones y la visualización. Sin embargo, desde la revisión realizada para las investigaciones de referencia se encontraron escasos estudios que tomen en cuenta estos procesos desde las formas tridimensionales en el contexto escolar. Por ello esta investigación también se justifica ya que permitirá vislumbrar una serie de problemas que se pueden abordar desde la perspectiva de la enseñanza de los objetos tridimensionales, y considerarlos como objeto de investigación desde la Educación matemática. De hecho muchos investigadores señalan la importancia del estudio de los objetos tridimensionales en la enseñanza de las matemáticas ya que los estudiantes podrían tener serios problemas cuando se enfrentan a actividades que los involucran.

Por otro lado el documento de estándares de la *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM (2000) propone que los estudiantes aprendan a visualizar relaciones entre objetos bidimensionales y tridimensionales, analizando las características y propiedades de los prismas, las pirámides y otras figuras sólidas. Además en el NCTM (2014) en el que se plantean los principios que guían la educación matemática se rescata que para un aprendizaje significativo de las matemáticas, y particularmente en la geometría, herramientas como la tecnología deben ser características indispensables en el salón de clases para ayudar a los estudiantes a dar sentido a lo que aprenden, desarrollar el razonamiento matemático, la argumentación y la comunicación matemática.

Por lo mencionado se considera importante analizar los diversos aspectos que se involucran cuando los estudiantes se enfrentan a tareas que involucran objetos tridimensionales, aspectos relacionados con el trabajo matemático que realizan cuando se enfrentan a las actividades relacionadas con el objeto pirámide cuadrangular.

Montoya et. al (2018) manifiesta que la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, constituye una estructura organizada que permite describir y comprender el trabajo matemático en una institución, aunque, toda la actividad de enseñanza y aprendizaje no se limita solamente al trabajo matemático, sino que además es importante considerar algunos aspectos relevantes que se encuentran fuera de este trabajo, como el papel de las emociones, el trabajo colaborativo, las formas de pensar, el contexto cultural y social. En este estudio se utilizará la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, dado que interesa saber cuáles son los conocimientos que se involucran cuando los estudiantes resuelven las tareas, que aspectos instrumentales intervienen, aspectos discursivos, la visualización, etc.

1.3 Pregunta de investigación

Para esta investigación se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es el espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de segundo grado de secundaria al resolver tareas sobre pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra?

1.4 Objetivos de investigación

A continuación se precisan los objetivos de la investigación:

Objetivo general:

- Analizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes de segundo grado de secundaria cuando resuelven tareas sobre pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra.

Objetivos específicos:

- Identificar las génesis semiótica, instrumental y discursiva que activan los estudiantes al desarrollar una tarea sobre la pirámide cuadrangular
- Reconocer los planos verticales que se priorizan cuando los estudiantes desarrollan las actividades propuestas

- Identificar los paradigmas de la geometría que los estudiantes privilegian al desarrollar una tarea sobre pirámide cuadrangular

1.5 Supuestos teóricos en los que se sustenta la investigación

A continuación se detallan los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático que constituyen los referentes teóricos en este estudio: El trabajo matemático, aspectos cognitivos y epistemológicos del Espacio de Trabajo Matemático, paradigmas en geometría, tipos de Espacio de Trabajo Matemático.

- El Trabajo Matemático

El trabajo matemático debe entenderse como un proceso de producción en curso que combina elementos sintácticos y semánticos para generar enunciados y prácticas aplicables a tareas (Kuzniak y Nechache, 2021).

Para Kuzniak y Nechache (2021), el trabajo matemático implica la consideración de tres aspectos de su ejecución: el objetivo del trabajo (para distinguir el trabajo de una actividad simple, se asigna un propósito a una acción, resaltando que lo que está en juego de ese trabajo son específicamente matemáticos), los procesos de la obra (relacionados con los procedimientos y restricciones de la implementación en las tareas dadas, la apropiación y el respeto de las reglas de funcionamiento para la observación de la obra) y los resultados del trabajo (los cuales deben ser válidos dentro del dominio matemático).

- Aspectos cognitivos y epistemológicos del Espacio de Trabajo Matemático:

Kuzniak (2022) manifiesta que un Espacio de Trabajo Matemático constituye una estructura abstracta y organizada, que genera trabajo matemático y permite a los individuos realizar tareas en un dominio matemático específico (geometría, cálculo, probabilidad, etc.). Estos individuos generalmente no son expertos sino estudiantes, como en el caso de las matemáticas escolares.

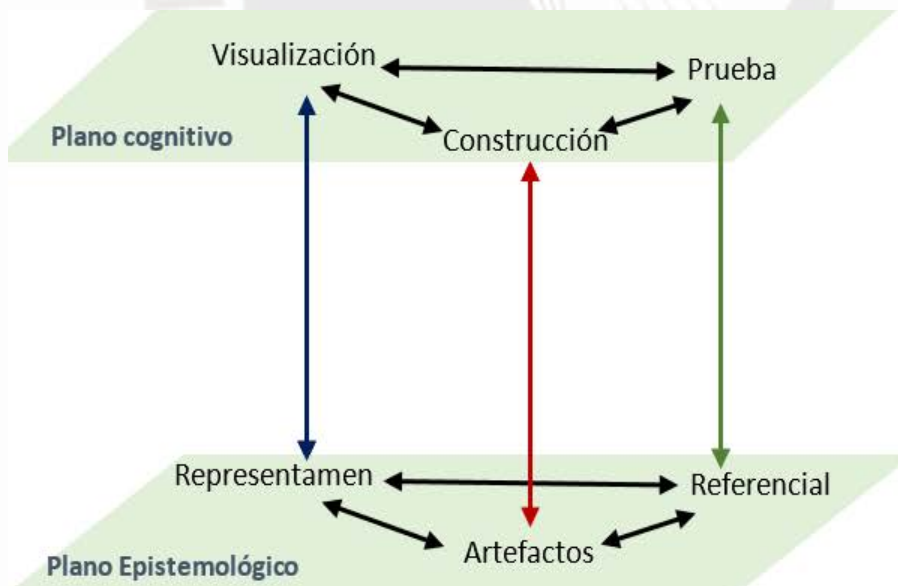
La teoría del Espacio de Trabajo matemático (en adelante ETM) se introdujo en el campo de la Didáctica de la matemática para describir y comprender el trabajo en el que los estudiantes y profesores se involucran durante las sesiones de clase cuando están resolviendo problemas en un dominio específico de la matemática. Para comprender este trabajo, Kuzniak (2019) plantea que es necesario tener en cuenta dos aspectos estrechamente ligados: el primero de carácter epistemológico, que está relacionado con el contenido matemático del dominio

estudiado y el segundo, de carácter cognitivo, relacionado con los procesos y modos de hacer que adoptan los individuos al resolver tareas matemáticas. Estos dos aspectos se identifican, se describen y se relacionan en dos planos o niveles organizados de manera triádica: el nivel epistemológico y el nivel cognitivo.

El primer plano o nivel tiene tres componentes que interactúan: un conjunto de símbolos concretos y tangibles que son parte del representamen; un conjunto de artefactos como herramientas de dibujo o software; y un sistema teórico de referencia (el referencial) basado en definiciones, propiedades y teoremas. Para Kuzniak (2015) estos componentes no se yuxtaponen simplemente, sino que se organizan con un objetivo preciso en función del dominio matemático en su dimensión epistemológica. Esto justifica el nombre de plano epistemológico dado a este primer nivel. El segundo plano o nivel centrado en el individuo se estructura en torno a tres procesos: la visualización ligada al desciframiento e interpretación de signos; la construcción que depende de los artefactos que se utilicen y las técnicas asociadas; y el proceso de prueba basado en el referencial. A continuación se presenta el diagrama de los componentes de los respectivos planos en la figura 1:

Figura 1

Diagrama del plano epistemológico y cognitivo del ETM

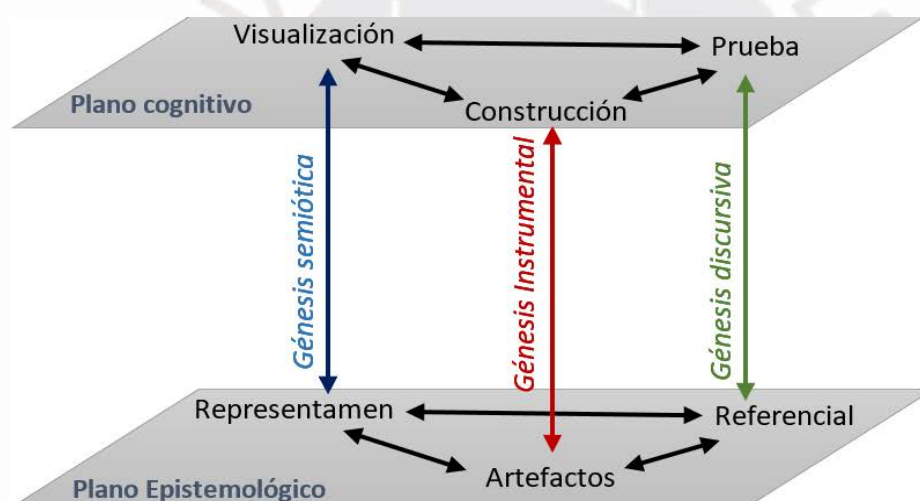


Nota. El diagrama representa los componentes de cada uno de los planos organizados de manera triádica. Adaptado de Kuzniak y Nechache (2021)

En la figura se puede observar la estrecha relación que hay entre el plano epistemológico y el plano cognitivo, y además la interacción entre cada uno de sus componentes. Según Kuzniak (2019) esta relación corresponde a una estructura organizada que permite el análisis de la actividad matemática de los individuos, y es visible en las actividades de resolución de problemas, pues es en donde los estudiantes aplican las técnicas y los conocimientos, es decir donde se activa su trabajo matemático. Es importante mencionar que Kuzniak y Nechache (2021) señalan que la unión de estos planos o niveles es parte del trabajo matemático y se puede caracterizar como un proceso generador (en el sentido de generar formas específicas de razonamiento, toma de decisiones, etc.) a lo largo de tres génesis fundamentales: semiótica, instrumental y discursiva, que corresponden a los componentes constitutivos de la teoría, tal como se observa en la figura 2.

Figura 2

Diagrama de las génesis en el ETM



Nota. El diagrama representa las tres génesis fundamentales que articulan los planos epistemológicos y cognitivos. Adaptado de Kuzniak y Nechache (2021)

Según Kuzniak y Richard (2014) las tres génesis fundamentales que aparecen en el ETM son:

- La génesis instrumental, aquella que hace funcional los artefactos en el proceso de construcción y que hace posible el trabajo matemático.
- La génesis semiótica que está basada en los registros de representación semiótica, y que le confiere sentido a los objetos del ETM y les proporciona su estatus de objetos matemáticos operatorios.

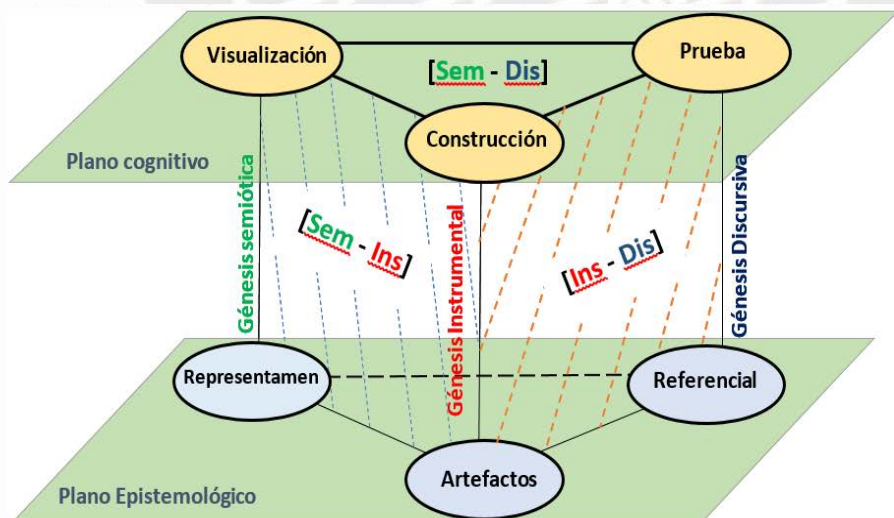
- La génesis discursiva de la prueba donde resultan necesarias las propiedades que se encuentran en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusiva icónica, gráfica o instrumentada.

En la figura 2 se observa también que ambos niveles (el cognitivo y el epistemológico), necesitan articularse para asegurar un trabajo coherente y organizado. Según Kuzniak (2019) este proceso prescinde de algunas transformaciones que se pueden precisar a través de tres génesis fundamentales estrictamente relacionados. Y para comprender estas relaciones, es necesario identificar las formas de trabajo en términos del tipo de proceso de generación en los que se basan.

En la figura 3, se observan estas relaciones a través de tres planos verticales que corresponden a las dimensiones a lo largo de las cuales el trabajo geométrico puede desarrollarse, lo que permite distinguir justamente entre las articulaciones semiótico-instrumental [Sem-Ins], las articulaciones instrumental-discursiva [Ins-Dis] y semiótico-discursiva [Sem-Dis]. El uso de estos diferentes planos verticales ayuda a especificar la manera en que se realiza el trabajo matemático.

Figura 3

Los Tres planos verticales en el ETM según Kuzniak y Nechache (2021)



Nota. El diagrama muestra cómo las génesis *instrumental*, *discursiva* y *semiótica* posibilitan la interacción de los planos cognitivos y epistemológicos a través de la articulación de sus componentes. Adaptado de Kuzniak y Nechache (2021).

Para analizar las diferentes entradas al ETM y la articulación que se da en los planos mediante las génesis, se hace necesario utilizar la denominación de circulación entre las componentes de los planos (Montoya et. al, 2014).

Para Montoya et. al (2014) una determinada tarea puede activar una o varias génesis en el estudiante, lo que se puede evidenciar en la *circulación* que se realiza entre los componentes de los planos. Cabe resaltar que según Kuzniak (2022) una circulación apropiada (la activación de todas las génesis) favorece la construcción del objeto matemático bajo estudio, aunque también pueden darse interacciones variadas entre todos los planos del espacio de trabajo matemático. En este caso, según Kuzniak (2022) menciona que es posible hablar de un trabajo matemático completo, lo que significa una relación estrecha entre los planos epistemológico y cognitivo, lo que significa la articulación entre las distintas génesis y los planos verticales

La contribución de cada génesis al proceso de trabajo se puede evaluar estudiando cómo ciertos objetos del plano epistemológico operan como herramientas que serán semióticas, tecnológicas, o de tipo teórico, según el tipo de génesis con el que se relacionen (Kuzniak et. al, 2016).

- **Tipos de Espacio de Trabajo Matemático**

Según Kuzniak (2011) se pueden identificar tres tipos de ETM:

- *El ETM de referencia*, relacionado con el saber, que se define sobre la base de criterios matemáticos y del cual depende la organización esperada del trabajo.
- *El ETM idóneo*, en torno a cómo se enseña este saber, que consiste en el acondicionamiento y organización del ETM de referencia, con el propósito de presentarlo en una institución educativa .
- *El ETM personal*, cómo es enfrentado el problema por el individuo, que sintetiza la forma en que el ETM idóneo es utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. De esta manera cada individuo establece su propio ETM personal de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y sus propias capacidades cognitivas.

- **Espacio de Trabajo Matemático personal del estudiante**

El ETM personal del estudiante aparece cuando el estudiante se enfrenta a una tarea proporcionada por el profesor, el cual está basado en una actividad racional orientada hacia un

objetivo particular, es decir el tratamiento matemático que el estudiante realiza y que lo conduce a su ETM personal (Kuzniak y Richard, 2014).

- Paradigmas en el dominio de la Geometría

Houdement y Kuzniak (1999) definieron un marco conceptual, que organiza la geometría sobre tres tipos de conocimiento: intuición, experiencia y deducción. Con ello introdujeron la noción de paradigmas geométricos con el objetivo de establecer las diferencias de estilos en el campo de la didáctica de la geometría. Para ello se utilizan tres perspectivas (epistemológico, histórico y didáctico), cuyo ensamblaje condujeron a la identificación de tres paradigmas llamados Geometría I (o Geometría Natural), Geometría II (o Geometría Axiomática Natural), y Geometría III (o Geometría Axiomática Formal). Kuzniak (2019) manifiesta que estos paradigmas no están organizados en una jerarquía, sino que sus ámbitos de trabajo son diferentes y la elección de un camino para resolver un problema depende del propósito del problema y de la persona que lo resuelve.

A continuación se describen cada uno de estos paradigmas según Kuzniak (2019):

El paradigma denominado Geometría I: Donde se evidencia una relación con la realidad, de tal manera que los objetos se definen por el modelo geométrico en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo, y las afirmaciones válidas se generan usando argumentos basados sobre la percepción, el experimento y la deducción. Hay mucha semejanza entre modelo y realidad y se permite cualquier argumento para justificar una afirmación y para convencer a la audiencia. De hecho, las pruebas dinámicas y experimentales son aceptables en Geometría I. Estas son de tipo material, objetos concretos u artefactos que se utilizan para la representación del objeto y aparecen con una concepción de las matemáticas como un conjunto de herramientas para fomentar negocios y actividades económicas en las que la geometría proporciona herramientas para resolver problemas en la vida cotidiana. La perspectiva de Geometría I es de carácter tecnológico.

El paradigma denominado Geometría II, cuyo arquetipo está basado en los conocimientos propios de la geometría euclidiana clásica, la cual se construye sobre un modelo que se acerca a la realidad sin fundirse con ella, es decir concebida como el esquema de la realidad. En este paradigma una vez que se establecen los axiomas, las pruebas tienen que desarrollarse dentro del sistema de axiomas para ser válido. El sistema de axiomas (propiedades, definiciones, etc.) puede quedar incompleto ya que el proceso axiomático es dinámico y tiene modelado en su

núcleo. Ambas geometrías, I y II, tienen estrechos vínculos con el mundo real, aunque en variantes.

El paradigma denominado Geometría III: Aquí el propio sistema de axiomas está desconectado de la realidad, el sistema es completo y despreocupado de posibles aplicaciones al mundo real. La conexión con el espacio se rompe y esta geometría está más preocupada por problemas lógicos. Hay rigurosidad y formalismo. Esta geometría no suele estar presente en la escolarización pero sí en la formación de profesores de matemáticas o en matemáticas avanzadas.

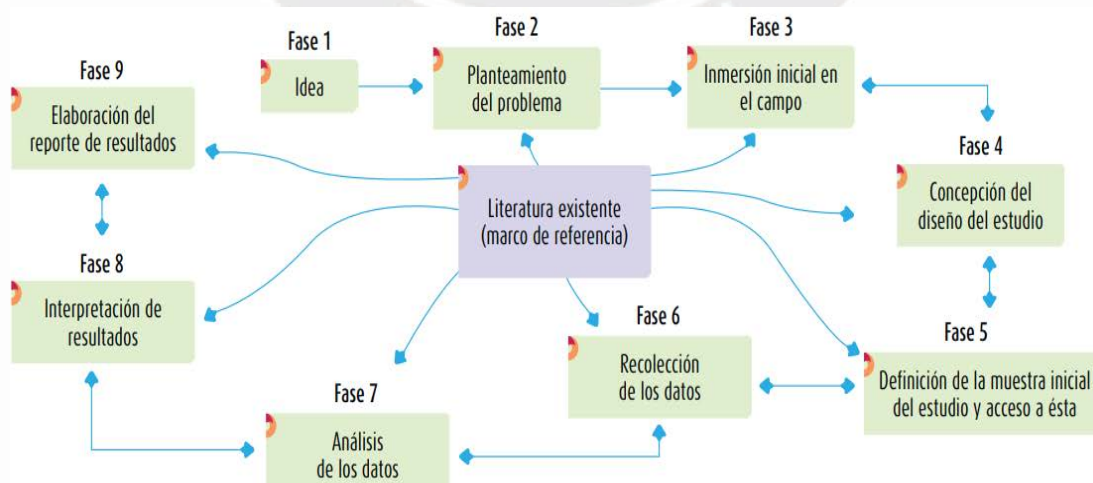
1.6 Metodología y procedimientos metodológicos de la investigación

Siendo el objetivo fundamental en la presente investigación, describir el Trabajo Matemático de los estudiantes del segundo grado de secundaria cuando resuelven tareas sobre pirámide, la metodología que se ha considerado es de tipo cualitativa dado que Hernández et. al (2014) definen este tipo de metodología como un conjunto de prácticas interpretativas que buscan comprender, transformar y convertir en representaciones las anotaciones, documentos, etc. Además, según estos investigadores este tipo de investigación también es propicia para analizar realidades subjetivas ya que proporciona riqueza interpretativa.

Este tipo de investigación es un proceso dinámico y organizado, como se observa en la figura 4.

Figura 4

Procesos en una investigación cualitativa según Hernandez et. al (2014)



Según estos investigadores los procesos que se siguen en este tipo de investigación pueden ajustarse y/o complementarse en cualquier etapa según las características de la muestra, los ambientes de estudio, la factibilidad de la investigación, etc. Por ello en este estudio se propone el siguiente procedimiento metodológico:

Tabla 1:

Procedimientos metodológicos desarrollados en esta investigación

Procedimiento	Descripción
1. Determinación del problema	En esta fase inicial, se delimita el problema a partir de las investigaciones de referencia y en base a esto se justifica este estudio. También se plantean los elementos teóricos que sustentan la investigación.
2. Planteamiento de los objetivos	Se plantea el objetivo general a partir de la pregunta planteada que direcciona esta investigación. En base a ello se plantean objetivos y se propone la metodología y los procedimientos a utilizar.
3. Estudio de la pirámide cuadrangular	En esta fase se plantean los aspectos históricos epistemológicos relacionados con la pirámide cuadrangular y los aspectos matemáticos y didácticos del objeto de estudio (pirámide cuadrangular)
4. Diseño y análisis de las tareas	En esta fase se presentan los sujetos de investigación sus características, se diseñan y analizan las tareas que permitirán el recojo de la información.
5. Aplicación y análisis de los resultados	Se aplican las tareas a los participantes y luego se analiza la información recogida. El análisis de los datos se realiza utilizando la estrategia de análisis de datos que proponen Kuzniak y Nechache (2021) donde se profundiza la comprensión del trabajo matemático personal de un sujeto dentro de una institución escolar a partir de dos etapas: la etapa adentro para describir las principales acciones en la realización de una tarea y la etapa afuera para describir globalmente el trabajo matemático con base en el esquema del ETM.

6. Conclusiones Se establecen las conclusiones según el análisis y se plantean algunas sugerencias

En la tabla 1 se detalla la ruta a seguir de cada uno de los procedimientos de esta investigación para lograr los objetivos que se han planteado. Cabe precisar que la ruta es flexible y se ajusta al tipo de investigación que se precisa.



Capítulo II : Estudio de la pirámide cuadrangular

En este capítulo se detalla el surgimiento y la evolución de la noción de poliedros, específicamente del objeto pirámide, así como los aspectos matemáticos y la forma como este es abordado en el Currículo Nacional y en los libros de textos escolares.

2.1 Aspectos históricos sobre la pirámide cuadrangular

Recurrir a la historia de la pirámide, es tener en cuenta la historia de los poliedros, objetos geométricos famosos por su historia, aplicaciones, belleza y propiedades matemáticas. Lo primero que se sabe de estas estructuras, es gracias a algunas de las ruinas del neolítico encontradas en Escocia, las cuales principalmente son figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C. Algunos historiadores señalan que fueron elementos decorativos o, tal vez, algún tipo de juego, y aunque se piensa que no había ninguna comprensión matemática de estos objetos, ya se tenían identificados exactamente cinco sólidos (el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Esto significa que algunos pueblos neolíticos ya conocían la existencia de estas estructuras. Dado que además en esa época, se construyeron también las pirámides en Egipto.

Aunque las pirámides de Egipto que son cuadrangulares no tienen la forma exacta del tetraedro, ya que la base es cuadrada; las pirámides presentan la forma de octaedros cortados por la mitad, en el caso de los egipcios un templo sagrado con un semi octaedro. Esto evidencia el conocimiento geométrico que tuvieron los egipcios. Sin embargo según Quesada (2006) la primera cultura que investigó acerca de estos poliedros fue la antigua Grecia, ya que hubo personas interesadas en cultivar el saber en torno a estas estructuras, aproximadamente en el año 530 a.C. cuando nace la primera escuela matemática de la historia, fundada por Pitágoras. Los pitagóricos concebían la matemática como una especie de verdad trascendental, y por eso consideraron importante estudiarlos. Aristóteles defendía la idea de que los números eran la esencia de todas las cosas, y que los cielos eran armonía y número. En la escuela pitagórica fueron estos cinco poliedros uno de los problemas que más les inquietó y fascinó, por ello iniciaron su estudio asignándoles a estos objetos un nombre distintivo, los sólidos pitagóricos. Por otro lado según Merzabach y Boyer (2012), documentos históricos revelan que los antiguos egipcios ya calculaban áreas geométricas, ello lo prueban los registros de triángulos, trapecios, rectángulos y cuadriláteros, hechos de piedra y papiro. Según estos investigadores, la gente calculaba el área de estas estructuras basándose en situaciones geométricas particulares.

Es importante señalar que fue Empédocles (480 – 430 a.C.) quien asoció inicialmente el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con algunos elementos naturales como la tierra, el

fuego, el agua y el aire, aunque Platón (447 – 347 a.C.) también estableció relaciones entre el dodecaedro con la sustancia de la que estaban compuestas las estrellas, ya que por aquellos años se tenía la idea de que ésta habría de ser diferente a cualquiera de las de la Tierra. De esta manera algunos griegos seguidores de Platón manifestaron que el fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, el dodecaedro pentagonal, el cual ha sido utilizado por Dios para que sirva de límite al mundo. Es por eso que los sólidos pitagóricos pasaron a llamarse sólidos platónicos, nombre con el que suelen ser estudiados en la actualidad.

Para Quesada (2006) quién verdaderamente formaliza, y consagra estos sólidos como elementos matemáticos fue Euclides de Alejandría, quien en su libro los Elementos demuestra un total entendimiento de estas figuras, ya que en esa obra se recogen todos los saberes sobre matemáticas conocidos hasta su tiempo, además de añadir resultados de su propio trabajo. Este libro está dividido en 13 libros en los que se estudian las figuras y algunas cuestiones como área, volúmen, ángulos y todo tipo de construcciones, con sus respectivas demostraciones. El libro aporta proposiciones fundamentales para poder construir en el libro XIII estos 5 poliedros regulares inscribiéndolos en una circunferencia, además de argumentar, porque existen solo 5 sólidos platónicos en total.

2.2 Aspectos matemáticos de la pirámide cuadrangular

Definición de pirámide: Según Wentworth y Smith (2010) se considera pirámide a un poliedro en que una de las caras, llamada base, es un polígono cualquiera y las otras caras son triángulos que tienen un vértice común (vértice de la pirámide) y las intersecciones de sus planos se llaman aristas laterales. Una pirámide es triangular, cuadrangular, etc., según sea la base sea un triángulo, un cuadrilátero, etc

Según los autores mencionados los aspectos que se pueden identificar en una pirámide son:

- Área lateral: corresponde a la suma de las áreas de sus caras
- Altura: corresponde a la longitud de la perpendicular del vértice al plano de la base.

Pirámide regular: aquella cuya base corresponde a un polígono regular y cuyo vértice se halla en la perpendicular levantada al plano de la base en el centro de ese polígono

Esta investigación está centrada en la pirámide cuadrangular, específicamente en aquella de base cuadrada, la cual es una figura de tres dimensiones que tiene una base formada por un polígono de cuatro lados con cuatro caras triangulares, esta pirámide es considerada una pirámide regular. A continuación algunos aspectos importantes de este tipo de pirámide:

Apotema de una pirámide regular: es la altura común de los triángulos que forman sus caras, tomando por bases de los triángulos los lados de la base de la pirámide.

Propiedades de las pirámides regulares

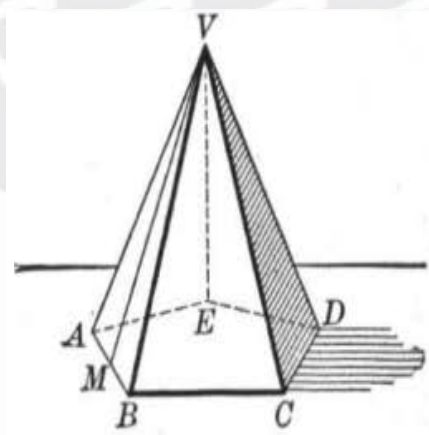
Según Wentworth y Smith (2010) las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de principios ya demostrados, como por ejemplo que las aristas laterales de una pirámide regular son iguales y que sus caras constituyen triángulos isósceles iguales, y que la altura común de estos triángulos corresponde al apotema de la pirámide.

Área lateral de una pirámide regular

El área lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del producto del apotema por el perímetro de la base, tal como se observa en la figura 5:

Figura 5

Pirámide propuesta en el libro Geometría plana y del espacio de Wentworth y Smith (2010) para demostrar que el área lateral de la pirámide es igual a la mitad de la apotema por el perímetro



Sea $V-ABCDE$ una pirámide regular en que el perímetro de la base es p , el área lateral L y el apotema a

$$\text{Demostrar que: } L = \frac{1}{2}ap$$

Demostración: Los triángulos VAC , VBC , VCD , VDE y VEA son iguales y sea b la base de cada triángulo.

El área de cada triángulo será igual a: $\frac{1}{2} a b$

La suma de las bases de los triángulos es igual a: p

La suma de las áreas de los triángulos será igual a: $\frac{1}{2} ap$

La suma de las áreas de los triángulos (área lateral de la pirámide) es igual a L .

$$\text{Entonces: } L = \frac{1}{2} ap$$

2.3 Estudio de la pirámide en el currículo y en libros de texto

El estudio de la pirámide como objeto matemático aparece específicamente en el nivel 6 de la competencia *Resuelve problemas de Forma, movimiento y localización*, tal como se observa en el estándar de aprendizaje de la competencia en este nivel:

Resuelve problemas en los que modela características de objetos mediante prismas, pirámides y polígonos, sus elementos y propiedades, y la semejanza y congruencia de formas geométricas; así como la ubicación y movimiento mediante coordenadas en el plano cartesiano, mapas y planos a escala, y transformaciones. Expresa su comprensión de las formas congruentes y semejantes, la relación entre una forma geométrica y sus diferentes perspectivas; usando dibujos y construcciones. Clasifica prismas, pirámides, polígonos y círculos, según sus propiedades. Selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen de formas geométricas en unidades convencionales y para construir formas geométricas a escala. Plantea afirmaciones sobre la semejanza y congruencia de formas, entre relaciones entre áreas de formas geométricas; las justifica mediante ejemplos y propiedades geométricas (Ministerio de Educación, 2016, p.146).

Cabe mencionar que para llegar al nivel que se ha descrito se debe recorrer otros niveles de menor complejidad, en la cual se han debido abordar aspectos matemáticos relacionados con los elementos de estas formas geométricas (vértices, caras, formas poligonales, noción de área, volumen, representación de las formas geométricas, entre otras características y aspectos de las

formas bidimensionales), ya que según el Ministerio de Educación (2016), la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización:

Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además describen trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico. (p.146)

Cabe resaltar además la presencia del objeto matemático no se precisa en los diversos libros de texto que el Ministerio de Educación del Perú imparte a los estudiantes de la educación básica regular para segundo grado de secundaria. Sin embargo, en libros de editoriales para instituciones educativas privadas se pueden encontrar actividades que involucran el objeto matemático pirámide. A continuación se presenta un breve análisis de algunos de estos:

- Construye Matemática 2 secundaria: Guía del docente de editorial Norma

En esta guía docente se proponen dos sesiones de aprendizaje (que constituyen el tema 8 en el respectivo libro) secuenciadas en inicio, desarrollo y cierre para las cuales se plantea los aprendizajes esperados como la competencia, la capacidad a trabajar y el desempeño que se pretende abordar. En la primera se plantea una actividad introductoria en donde se busca que los estudiantes tengan un acercamiento con la definición de poliedro e identifiquen sus elementos, luego a partir de la pregunta ¿Cómo son las caras de los poliedros regulares? Los estudiantes deberán determinar el número de caras, vértices y aristas para finalmente deducir a partir del teorema de Euler y resolver problemas que involucran el cálculo de áreas de poliedros. Finalmente se pretende que los estudiantes elaboren un afiche donde se coloque el desarrollo del poliedro y su relación con los elementos de la naturaleza. A continuación se presenta en la figura 6 la primera sesión de aprendizaje que se propone en este libro:

Figura 6

Sesión de aprendizaje sugerida en el libro *Construye Matemática para el Segundo grado de secundaria*.

Tema 8

Poliedros

Aprendizajes esperados		
Competencia	Capacidad	Desempeño
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	<ul style="list-style-type: none">• Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	<ul style="list-style-type: none">• Emplea estrategias heurísticas para aplicar el Teorema de Euler y resolver problemas que implican áreas de poliedros.

Inicio

- Solicite a los estudiantes que traigan cajitas de diferentes formas.
- Pídales que lean la definición de poliedros y sus elementos. Verifique la comprensión de lo leído; para ello, animelos a señalar las cajitas que tienen forma de poliedros y que verbalicen e indiquen los elementos de un poliedro seleccionado.

Desarrollo

- Luego de leer la información sobre poliedros regulares, pregunte lo siguiente: *¿Cómo son las caras de los poliedros regulares?*
- Motívelos a deducir el teorema de Euler. Para ello, solicíteles que determinen el número de caras, vértices y aristas de los poliedros regulares.

Cierre

- Organice a los estudiantes en equipos y pídale que desarrollen las actividades propuestas en el Libro de actividades.
- Propóngales que elaboren un afiche sobre uno de los poliedros regulares. Cada afiche debe presentar el desarrollo del poliedro, sus elementos, características y con qué elemento de la naturaleza se le relaciona.

Se puede observar que el estudiante no tiene la oportunidad de construir la definición de poliedro y sus elementos ya que se precisa que va a tener que extraer la información del libro de texto y verificar con material concreto. Luego durante el desarrollo se plantea una sola interrogante, donde el estudiante va a describir las características de las caras de los poliedros. Hasta aquí no se observa que se busque desarrollar o deducir alguna propiedad que involucre el trabajo con poliedros. Luego se les solicita al final de la sesión (no se menciona estrategia o procedimiento para el trabajo con los estudiantes) que deduzcan el teorema de Euler. En el cierre se les plantea que elaboren un afiche sobre un poliedro, pero no se plantea el objetivo de esta actividad. Lo que básicamente se solicita es información sobre Finalmente se les pide que organicen y desarrollen las actividades propuestas que se observan en las figura 7 y 8:

Figura 7

Actividades sugeridas para la sesión de aprendizaje del tema Poliedros, planteada en el libro *Construye Matemática para el Segundo grado de secundaria*.

Tema 8 Poliedros

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por regiones poligonales planas situadas en distintos planos.

En todo poliedro convexo se cumple que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más 2. A esta expresión se le denomina teorema de Euler. En símbolos:

$$C + V = A + 2$$

donde C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas.

- Completa la siguiente tabla haciendo uso del teorema de Euler.

Poliedro	Forma de las caras	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
Tetraedro	Triángulos	4	4	6
Cubo	Cuadrados	6	8	12
Octaedro	Triángulos	8	6	12
Icosaedro	Triángulos	20	12	30
- Un poliedro está formado por 6 octógonos y 8 triángulos. Halla el número de caras, aristas y vértices.

$$6 + 8 = 14 \text{ caras}$$

$$(6 \cdot 8 + 8 \cdot 3) / 2 = 72 / 2 = 36 \text{ aristas}$$

$$14 + V = 36 + 2 \rightarrow V = 24 \text{ vértices}$$
- ¿Cuántos vértices tiene el poliedro que está formado por 20 triángulos equiláteros, 4 pentágonos regulares y 30 cuadrados?

Las tareas que se presentan centran su interés en la aplicación del Teorema de Euler. Se presenta la definición de poliedro y el teorema de Euler, pero no se observan actividades que propicien en los estudiantes la construcción de la definición de poliedro a través de sus diversas representaciones. En la tarea 1 se precisa utilizar el referencial del plano epistemológico ya que esta tarea demanda conocer las características y propiedades de cada tipo de poliedro, mientras que la tarea 4 y 5 está orientada para que el estudiante al resolver utilice como artefacto simbólico del plano epistemológico la definición del teorema de Euler.

Figura 8

Actividad sugerida para la sesión de aprendizaje del tema Poliedros, en el libro *Construye Matemática*

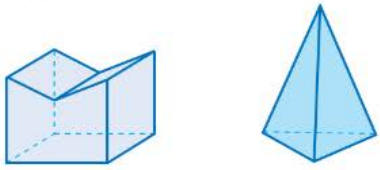
Determina el valor de verdad de las siguientes expresiones. Justifica tu respuesta

- El número de aristas de un poliedro que concurren en un vértice es como mínimo 3. (V)
- Las caras de un poliedro son siempre iguales. (F)
- Se puede construir un poliedro con tres caras. (F)
- En cada vértice de un poliedro concurren siempre el mismo número de aristas. (F)

En esta tarea se pide determinar la veracidad o falsedad de las expresiones. Desde la teoría del Espacio de Trabajo Matemático se puede decir que para determinar el valor de verdad de las expresiones se va a prescindir del referencial del plano epistemológico, ya que se necesitan definiciones de poliedros, caras, vértices, aristas. Sin embargo la tarea no propicia un proceso de prueba, ya que no se observa que se pida la argumentación para sustentar y/o desarrollar el razonamiento sobre las propiedades geométricas involucradas.

Figura 9

Actividades sugeridas para la sesión de aprendizaje del tema Poliedros, planteada en el libro Construye Matemática para el Segundo grado de secundaria

<p>¿Cuál de los siguientes poliedros puede ser apoyado sobre cualquiera de sus caras? Clasifícalos en convexos o cóncavos y explica el porqué.</p>	<p>Calcula el área total de un dodecaedro cuyo lado de la cara que lo forma mide 3 cm y su apotema, 2,1 cm.</p>
	$A = 12 \left(\frac{3 \times 5 \times 2,1}{2} \right) = 189 \text{ m}^2$
<p>El primero no se puede apoyar en todas sus caras; por ello, es un poliedro cóncavo. El segundo sí se puede apoyar en cualquiera de sus caras; por ello, es un poliedro convexo.</p>	<p>¿Cuánto mide la arista de un tetraedro regular de $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ de área total?</p>
	$4 \cdot \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 100\sqrt{3} \rightarrow a = 10 \text{ cm}$

Las actividades que se presentan en esta parte involucran al objeto pirámide. Por lo cual el estudiante al trabajarla necesitará del referencial (definición de tetraedro, poliedro cóncavo y convexo, noción de área) Sin embargo se observa que no hay actividades que propicien el reconocimiento o identificación de sus elementos (vértices, caras, aristas), la construcción y comprensión del significado de área de la pirámide, poliedro cóncavo y convexo. Cabe resaltar que las actividades que se proponen carecen de contexto y no se propician las diferentes representaciones del objeto matemático en estudio. Estas actividades están limitadas al aprendizaje de ejercicios de aplicación de algoritmos donde no se observa una conexión o secuencialidad en el desarrollo de los conceptos o significados involucrados (área total de la pirámide, número de aristas, número de vértices, diagonal, polígonos regulares, poliedros regulares, entre otros).

A continuación se presenta en la figura 10, la segunda sesión de aprendizaje que se propone en el libro de texto mencionado.

Figura 10

Sesión de aprendizaje sugerida en el libro *Construye Matemática para el Segundo grado de secundaria*.

Tema 10

Volumen de la pirámide

Aprendizajes esperados		
Competencia	Capacidad	Desempeño
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	<ul style="list-style-type: none"> • Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio. 	<ul style="list-style-type: none"> • Emplea estrategias heurísticas para resolver problemas que implican volúmenes de pirámides.

Inicio

- Solicite a los estudiantes que lean a la información inicial de la página 200 del Texto escolar. Pregunte lo siguiente: *¿Qué diferencias existe entre una pirámide y un prisma?*
- Presente una pirámide e identifique con los estudiantes sus elementos. Recuerde la aplicación del teorema de Pitágoras para hallar la medida del apotema de la pirámide.

Desarrollo

- Organice a los estudiantes en equipos y pídale que realicen la demostración del volumen de una pirámide, tal como se indica en la sección **Argumenta**.
- Destaque la fórmula para calcular el volumen de una pirámide. Formule lo siguiente: *¿Qué datos se necesitan para hallar el volumen?*

Cierre

- Proponga a los estudiantes que desarrollen las actividades de la sección **Para practicar** para consolidar los aprendizajes de la sesión.
- Pregunte lo siguiente: *¿Qué conocimiento aprendiste? ¿En qué situaciones del contexto podrás aplicar lo aprendido?*

En esta sesión se busca que los estudiantes planteen estrategias para calcular el volumen de la pirámide, pero no se observa que el estudiante deba construir esta noción. Al inicio se plantea la interrogante *¿Qué diferencias existen entre una pirámide y un prisma?* donde los estudiantes deben identificar los elementos de la pirámide y encontrar la medida de la apotema a partir del teorema de Pitágoras. No se observa una relación entre las preguntas que se plantean y lo que se menciona en el desempeño. Durante el desarrollo de la sesión los estudiantes deben demostrar cómo calcular el volumen de una pirámide para finalmente desarrollar las actividades utilizando la fórmula respectiva Finalmente se propone a los estudiantes actividades para consolidar lo trabajado. Estas actividades se pueden observar en la figura 11.

42

Figura 11

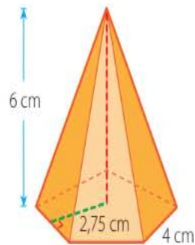
Actividades sugeridas para la sesión de aprendizaje del tema Volumen de la pirámide, planteada en el libro *Construye Matemática para el Segundo grado de secundaria*.

Tema 10 Volumen de la pirámide

El volumen de una pirámide (V) se calcula hallando la tercera parte del producto del área de su base (A_b) por la medida de su altura (h): $V = \frac{A_b \times h}{3}$

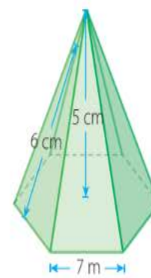
1. Determina el volumen de cada una de las siguientes pirámides:

a.



$$A_b = 5(4) \cdot 2,75 / 2 = 27,5 \text{ cm}^2$$
$$V = 27,5 \cdot 6 / 3 = 55 \text{ cm}^3$$

d.



$$ap^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 \rightarrow ap = \sqrt{11}$$
$$A_b = 6(7) \cdot \sqrt{11} / 2 = 21\sqrt{11}$$
$$V = 21\sqrt{11} \cdot 5 / 3 = 35\sqrt{11} \approx 116,08 \text{ cm}^3$$

Se destaca que en estas actividades no se promueve la construcción de la noción de volumen. Tampoco se plantean preguntas que promuevan la reflexión con respecto a la comprensión del volumen de un cuerpo geométrico como la pirámide. Se presenta la expresión para calcularlo y las actividades que se sugieren promueven la aplicación de la fórmula. Se muestra la representación figural de los objetos pero el estudiante no tiene la oportunidad de trabajar sobre ellos ya que está limitado a la aplicación de algoritmos.

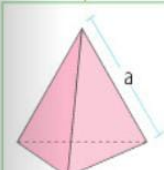
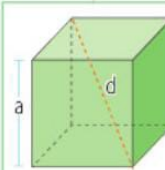
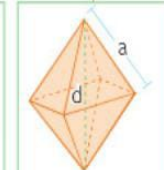
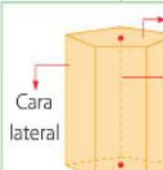
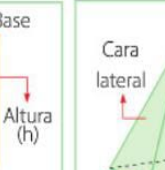
- Libro de actividades para segundo grado de secundaria: Ediciones Corefo

En este libro de actividades se propone en un primer momento que el estudiante revise información relacionada con los tipos de poliedros (apotema, caras, aristas, altura, base), la identificación de algunas fórmulas para calcular el área y volumen de estos objetos, sin embargo no se precisan definiciones de estos, luego en la sección de práctica se proponen 3 situaciones

donde deben calcular número de caras, área, volumen y altura de algunos poliedros. A continuación se presentan las actividades que se sugieren en este libro.

Figura 12

Actividades sugeridas en el libro de actividades para el Segundo grado de secundaria de Ediciones Corefo.

POLIEDROS				
TETRAEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR O CUBO	OCTAEDRO REGULAR	PRISMA RECTO	PIRÁMIDE REGULAR
 $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ $A_T = a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	 $d = a\sqrt{3}$ $A_L = 4a^2$ $A_T = 6a^2$ $V = a^3$	 $d = a\sqrt{2}$ $A_T = 2a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	 $A_L = 2p_B \cdot \text{arista}$ $A_T = A_L + 2A_B$ $V = A_B \cdot h$	 $A_L = p_B \cdot a_p$ $A_T = A_L + A_B$ $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

Practica
 Revisa la página 231 del Libro del área. Luego, desarrolla las actividades.

1. **Determina** el número de caras de un poliedro convexo que tiene 19 aristas y 12 vértices.

Resolución:

Resolución:

Rpta.:

3. **Calcula** la altura de un tetraedro regular cuya área total es $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

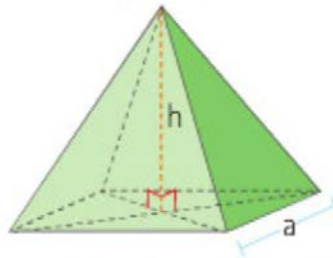
Las actividades que se presentan muestran la representación figural de los objetos (tetraedro, hexaedro, octaedro, prisma recto y pirámide regular) y se plantean las fórmulas para calcular la altura, el área, el volumen. En la actividad 1 se plantea una tarea orientada a determinar las caras de un poliedro de 19 aristas y 12 vértices, pero no se observan actividades donde el estudiante tenga la oportunidad de identificar estos elementos (caras, vértices y aristas) tampoco las características y propiedades de estos objetos geométricos.

En la figura 13 se observa una situación donde se propone calcular el volumen de la pirámide cuadrangular a partir de la altura y el apotema.

Figura 13

Actividad sugerida en el libro de actividades para el Segundo grado de secundaria de Ediciones Corefo relacionada con la pirámide cuadrangular.

Calcula el volumen de la pirámide cuadrangular regular, si $h = 6$ cm y $a = 4$ cm.



Resolución:

En esta actividad se pide al estudiante calcular el volumen de la pirámide a partir de la fórmula que se presenta al inicio de la actividad. No se propicia la reflexión a través de preguntas, por ende la actividad del estudiante se reduce a la aplicación de la fórmula. Se observa que solo se presenta al estudiante la representación figural pero no se observa que el estudiante deba trabajar tal representación y con esta podría solamente activarse la génesis semiótica ya que se favorece la visualización por la información que le aportan los signos.

A continuación se presenta el capítulo III, en el cual se abordará la parte experimental de este estudio.

Capítulo III: Experimento y análisis de la investigación

En este capítulo se presentan los sujetos de investigación, la técnica que se utiliza para analizar el trabajo personal de los estudiantes, el diseño de las tareas y el análisis del trabajo matemático de los estudiantes

3.1. Sujetos de la investigación

Los sujetos que participaron en este estudio son estudiantes del segundo grado del nivel secundaria que pertenecen a una institución educativa pública rural ubicada en el distrito de Tambogrande, departamento y provincia de Piura. Sus edades oscilan entre 13 a 15 años. Estos estudiantes dedican 6 horas semanales al área de matemática (distribuidas en tres bloques de dos horas). La mayoría de los estudiantes pertenecen a familias que se dedican a labores agrícolas, además no cuentan con los recursos básicos de agua y desagüe, y con poca accesibilidad al servicio de internet. Sin embargo, el Ministerio de Educación del Perú les proporcionó el año 2021 una tableta que cuenta con diversas aplicaciones y softwares que contribuyen al aprendizaje, entre ellos destacan GeoGebra.

3.2. Estrategia para analizar el trabajo personal de los estudiantes

El estudio del ETM personal, desde la teoría del ETM, implica analizar el trabajo a través de sus diferentes componentes (procesos cognitivos y aspectos epistemológicos que se involucran). Para analizar el trabajo matemático de los estudiantes, se ha considerado en el trabajo matemático previsto y en el personal utilizar la estrategia de análisis de datos basada en el ETM que plantean Kuzniak y Nechache (2019), donde se proponen dos etapas: etapa adentro y afuera. A continuación, se describen las etapas de esta estrategia en la tabla 2:

Tabla 2*Descripción de las etapas para analizar el trabajo matemático de los estudiantes*

	Adentro	Afuera
Etapas de análisis de trabajo matemático	Se analizan los principales episodios del trabajo interpretando las acciones de los estudiantes con el objetivo de identificar las articulaciones de las dimensiones o componentes durante la ejecución de las tareas.	Se describe globalmente el trabajo matemático usando el diagrama del ETM para obtener una visión general del mismo durante la realización de cada de las tareas.

3.3. Diseño y análisis de las tareas

Para Kuzniak (2011) los problemas no forman parte del espacio de trabajo, pero constituyen un papel importante ya que son su activador. En efecto, cualquier tipo de problema con enunciados y preguntas formuladas con un objetivo constituyen la tarea.

Las tareas planteadas en esta investigación constituyen una adaptación de la secuencia didáctica presentada en una de las actividades implementadas en la estrategia Aprendo en Casa (ficha de actividades de la semana 15 del año 2020) en donde se toman en cuenta aspectos importantes en la enseñanza aprendizaje del objeto pirámide cuadrangular, los mismos que se rescatan para esta investigación tales como el reconocimiento de los elementos y las formas poligonales que la constituyen, su representación figural, así como la exploración y el descubrimiento de propiedades que involucran el área de este objeto matemático.

A continuación se presenta en la tabla 3 el diseño de las tareas y el análisis a priori en relación a las acciones matemáticas que se espera que los estudiantes realicen. Cabe resaltar que se analizará la tarea 1, 2 y 3. La tarea inicial no se analizará ya que ésta tarea introductoria busca familiarizar a los estudiantes con las herramientas de GeoGebra. Dicho análisis se realiza tomando como referente teórico aspectos fundamentales del ETM.

Tabla 3:*Diseño de las tareas planteadas para los objetivos de este estudio*

Tareas	Objetivo de la tarea	Recursos	Tiempo estimado
Tarea inicial	Familiarizar al estudiante con la barra de herramientas de GeoGebra	https://www.geogebra.org/m/wqmeknsd Barra de herramientas de GeoGebra Ítems a,b y c	30 min
Tarea 1	Identificar y relacionar los elementos de la pirámide con los diversos aspectos que se deben tomar en cuenta en la construcción de una carpa	Ítems a, b y c	40 min
Tarea 2	Calcular el área total de la pirámide cuadrangular regular a través de la interacción con los deslizadores y comandos que ofrece GeoGebra para encontrar los metros cuadrados de tela que se necesitaran en la construcción de la carpa	https://www.geogebra.org/m/zxbfn26n Deslizadores y barra de herramientas de GeoGebra Ítems a, b, c y d	40 min
Tarea 3	Calcular el área total de una pirámide cuadrangular irregular a través de los comandos que ofrece GeoGebra	https://www.geogebra.org/m/eg2kuzar Barra de herramientas de GeoGebra	20 min

La tarea inicial:

La tarea inicial (anexo 1) pretende que los estudiantes identifiquen aspectos fundamentales (vértices, ángulos, lados) y puedan calcular perímetros, áreas, trazar alturas de formas poligonales con ayuda del artefacto GeoGebra. A partir de ello el estudiante se familiariza con la barra de herramientas que puede encontrar a su disposición para trabajar las tareas que vendrán a continuación.

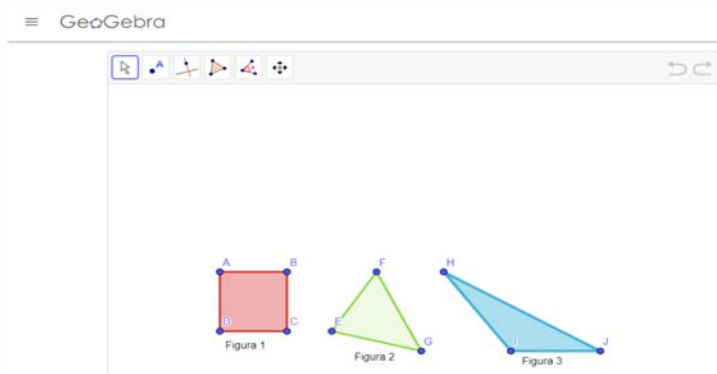
Si bien esta actividad propicia un acercamiento inicial a GeoGebra en su forma de artefacto en cuanto al reconocimiento y descubrimiento de las herramientas y las funciones que

ofrecen, y que se muestran para disposición del estudiante y que podrá enriquecer el trabajo matemático.

A continuación se muestra la tarea inicial, la cual plantea 3 actividades:

Figura 14

Tarea inicial



Nota: Las figuras mostradas se encuentran en el siguiente link:

<https://www.geogebra.org/m/wqmeknsd>

La tarea inicial presenta un link de GeoGebra en el cual se pueden observar las representaciones figurales de formas geométricas, en las cuales el estudiante debe utilizar la barra de herramientas de GeoGebra deberá realizar las actividades que se solicitan.

Figura 15

Ítem a de la tarea inicial

- a) Identifique los elementos de las siguientes figuras y complete la tabla con la información que se solicita:

Elementos a identificar	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Vértices			
Lados			
Ángulos			

En este primer ítem de la tarea inicial se busca recoger saberes previos sobre los elementos de las formas poligonales que se trabajan en la pirámide cuadrangular (vértices, lados, ángulos) a partir de la representación figural que se presenta en el software GeoGebra.

Figura 16

Ítem b de la tarea inicial

- b) Trace las alturas de las figuras 2 y 3, y complete la tabla con las medidas de sus longitudes

Medida a calcular	Figura 2	Figura 3
Longitud de la alturas		

En este ítem los estudiantes deben recurrir a herramientas de punto, de medición, de trazados especiales como rectas perpendiculares, paralelas, etc. Así tendrán un primer acercamiento con estos artefactos los cuales predisponen al estudiante hacia el desarrollo del trabajo matemático.

Figura 17

Ítem c de la tarea inicial

- c) Utilizando las herramientas de GeoGebra calcule las medidas que se solicitan y completa la tabla:

Medidas a calcular	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Perímetro			
Área			

En este último ítem de la tarea se pide al estudiante calcular el perímetro y área de las figuras a partir de su representación figural y haciendo uso de la barra de herramientas. Para ello los estudiantes deben tener conocimiento de algunas propiedades relacionadas con los objetos geométricos (como el área de un cuadrado, de un triángulo, rectas perpendiculares, etc.). Esto con el objetivo que los estudiantes conozcan cómo utilizar las herramientas que podrían usar para dar solución a las tareas que les propusieron.

Tarea 1

Esta tarea está constituida por un problema, en el cuál se plantean 3 ítems (a, b y c), los cuales están orientados a que los estudiantes pongan de manifiesto su trabajo matemático cuando logran identificar y relacionar los elementos de la pirámide cuadrangular dadas las

condiciones para la construcción de una carpa para acampar. A continuación, se presenta la tarea 1 y en la tabla 3 se precisan los ítems respectivos que se plantearon en esta tarea:

Construyendo una carpa para acampar

A Daniel y su hermano Luis se les ha ocurrido acampar en un parque cercano a casa, pues es su deseo realizar esta actividad en algunos lugares de nuestro Perú. El problema es que ellos no tienen una carpa y por este motivo deciden hacer una. Para lograrlo, estuvieron viendo en internet hasta que encontraron un diseño que podían construir en el que caben dos personas, el cual tiene una base cuadrangular donde la distancia entre dos esquinas opuestas es 2,8 metros y la altura de la carpa es 1 metro. Cuando se coloque la tela en la carpa, se desea tener una entrada por una cara lateral realizando un corte a dicha cara y para cerrarla se colocará un cierre de contacto que vaya desde el punto más alto de la carpa hasta la mitad de uno de los lados de la base.

A continuación se muestran los ítems de esta tarea 1:

Tabla 4
Enunciados de la tarea 1

Ítems	Enunciados
a	Realice un esbozo de la carpa armada con el cierre que representa la entrada de la carpa, en donde se coloquen las medidas dadas como datos
b	¿Qué formas poligonales puedes identificar en la carpa que pretenden construir Daniel y su hermano? ¿Qué características tienen estas formas?
c	¿Cuál sería la longitud del cierre de la carpa? Detalla el procedimiento para calcular

Análisis del Espacio de trabajo matemático personal previsto en la tarea 1

- Etapa adentro de la tarea 1

En esta tarea se identifican 3 episodios (E) de trabajo matemático previsto. A continuación se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 5*Episodios identificados en el trabajo matemático previsto para la tarea 1*

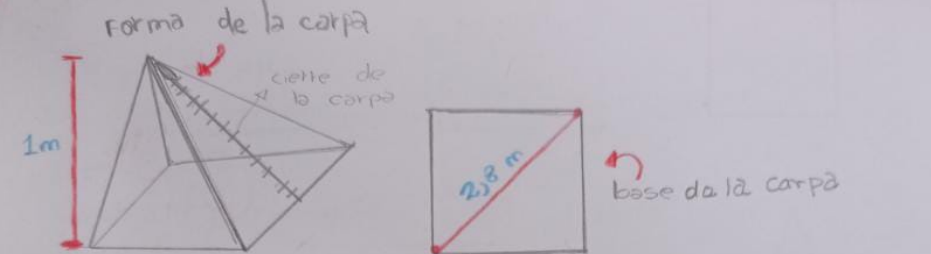
Ítems	Episodios
a	E1: Construcción de la representación de la pirámide según las condiciones del enunciado de la tarea
b	E2: Identificación de las formas poligonales que forman parte del objeto tridimensional y reconocimiento de las características que lo constituyen
c	E3: Cálculo de la medida del cierre de la carpa (apotema de la pirámide) a partir de propiedades geométricas involucradas

Cabe mencionar que los episodios que se precisan en cada uno de los análisis del Espacio de trabajo matemático personal previsto son el resultado de la prueba piloto que se realizó con dos estudiantes del segundo grado de secundaria, con el objetivo de evaluar si las preguntas resultaban ser claras y pertinentes para su posterior aplicación. Por ello se toman como referentes estas acciones que se identificaron para poder analizar luego el espacio de trabajo matemático personal con la aplicación respectiva de las tareas. Por ejemplo, se observa en la figura 18 lo que realizó uno de los estudiantes en la aplicación de la prueba piloto en la tarea 1:

Figura 18

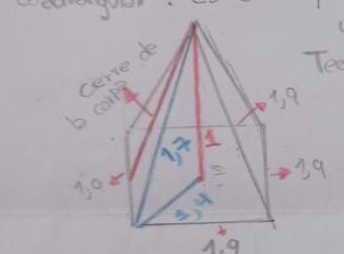

Espacio de trabajo matemático de un estudiante en la aplicación de la prueba piloto en la tarea 1

Forma de la carpa



b) Los laterales son de forma triangular y la base es una forma cuadrangular. Es una pirámide utilizando Teorema de Pitagoras

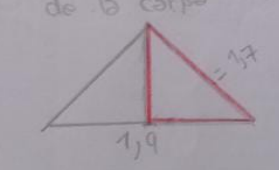
c)

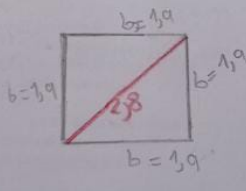
$P^2 = 1^2 + (1,4)^2$
 $P^2 = 1 + 1,96$
 $P^2 = 2,96$
 $P = \sqrt{2,96}$
 $P = 1,7$

Respuesta
 b longitud de el cierre de la carpa es 0,9

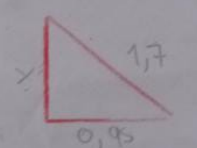
Lateral donde va ubicado el cierre de la carpa



$1,9 \div 2 = 0,95$



$2,8^2 = b^2 + b^2$
 $7,84 = 2b^2$
 $\sqrt{7,84} = b^2$
 $3,62 = b^2$
 $\sqrt{3,62} = 1,9$



$1,7^2 = (0,95)^2 + x^2$
 $1,89 = 0,9025 + x^2$
 $1,39 - 0,9025 = x^2$

0,9 = x

En el E1, la construcción de la representación figural de la pirámide según las condiciones del enunciado de la tarea, lo primero que podría realizar el estudiante es identificar las condiciones y datos que debe tener en cuenta en el diseño, los cuales toma como representamen para poder realizar el proceso de visualización. Esto haría activar la génesis semiótica. Esto con ayuda de los artefactos (lápiz, papel, reglas, datos y condiciones establecidas en el enunciado del problema), lo cual significa la activación del plano [Sem-Ins] ya que al considerar la conversión del enunciado a la construcción de la representación juegan un papel

importante en el proceso de visualización. Esto también exige considerar los elementos de la pirámide en la componente referencial (las definiciones que tenga de base cuadrada, altura, caras laterales, lados de la base y otros elementos del objeto matemático) y su uso como artefactos simbólicos (al considerar las condiciones establecidas como la altura, distancia entre vértices), lo que supone la activación del plano [Sem-Ins] y [Sem-Dis] ya que con ayuda de los signos el estudiante construye el modelo de la carpa valiéndose de las nociones y propiedades que disponga en la componente referencial.

En este episodio se espera que las interacciones entre los componentes del ETM sean dadas por:

Visualización → Artefactos → [Sem-Ins] → Referencial → [Sem-Dis]

En el E2 se espera que el estudiante luego de construir la representación de la pirámide (diseño de la carpa), a partir de este conjunto de signos (que constituyen el representamen del plano epistemológico) que interprete se remita el objeto matemático, sus elementos y características y entonces se produzca la visualización. A partir de ello se activa la génesis semiótica (articulación de las representaciones con la visualización). Luego, la identificación de las formas que constituyen el objeto y sus características geométricas exige considerar los diferentes aspectos de la pirámide en la componente referencial del plano epistemológico (noción de polígonos, vértices, aristas, caras, apotema, entre otras características, y propiedades del objeto en estudio) para completar el proceso de prueba basado en las preguntas y utilizarlos también como artefactos simbólicos en el proceso de construcción, lo que significa que posiblemente se activará la génesis discursiva e instrumental. Esto involucra el plano [Sem-Dis], basado en las propiedades que identifican los signos y la visualización, y el plano [Sem-Ins] basado en los artefactos simbólicos que utilice en el proceso de construcción que contribuye a la realización del trabajo matemático. En el desarrollo de esta tarea se espera que las interacciones en el ETM involucre:

Representamen → Visualización → Referencial → Prueba → [Sem-Ins] → [Sem-Dis]

En el E3 el procedimiento a seguir del estudiante para calcular la longitud del cierre podría ser primero observar en la imagen los elementos de la pirámide para identificar lo que se está solicitando y a partir de las representaciones se produzca la visualización. Con esto se activa la génesis semiótica. Luego, para calcular la medida de la longitud del cierre de la carpa un

estudiante podría utilizar el teorema de Pitágoras (Artefacto) y realizar las operaciones (tratamientos) pues se conoce la distancia del centro de la base a uno de los vértices de la base y la altura. Se toma en cuenta que para encontrar la longitud del parante lateral y luego la medida de la mitad del lado de la base se hacen operativos también los artefactos como son las condiciones planteadas en el problema (la medida de la longitud de la base, la altura y los recursos que ofrece GeoGebra) lo que implica la activación de la génesis instrumental. A partir de ello se espera activar el plano [Sem- Ins], donde se podrá calcular la medida de la longitud que corresponde al apotema de la pirámide (que constituye el largo del cierre).

En el desarrollo de esta tarea se espera que la interacción en el ETM involucre:

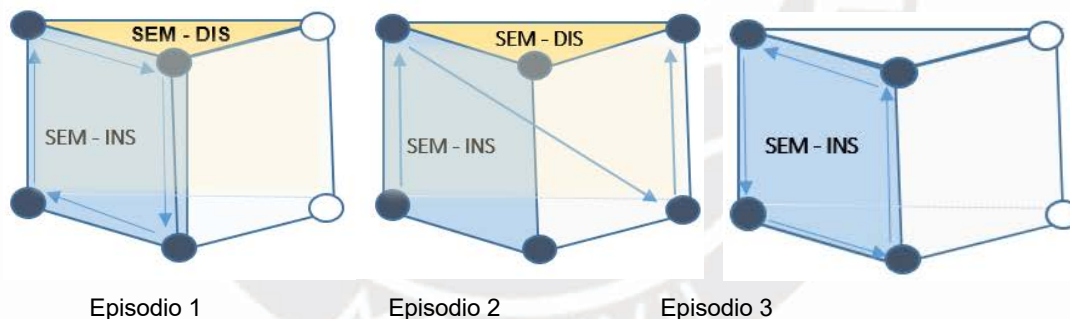


- Etapa afuera de la tarea 1

A continuación se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático previsto según los episodios identificados en la tarea 1.

Figura 19

Descripción global del Espacio de Trabajo Matemático personal previsto según los episodios de la tarea 1



Se observa en la descripción que el trabajo matemático esperado incluye aspectos relacionados con las representaciones y los artefactos. Se espera activar el plano [Sem-Ins], ya que con las génesis semiótica e instrumental que se activan, cuando los artefactos se usan para construir bajo ciertas condiciones (dada la barra de herramientas), para explorar las representaciones o descubrir nuevas propiedades.

Tarea 2

Esta tarea está constituida por 4 ítems y pretende que los estudiantes calculen el área total de la pirámide cuadrangular regular a través de la interacción con las herramientas que ofrece GeoGebra en Geometría (punto, rectas, segmentos, etc) para encontrar la cantidad de tela que se utilizará en la construcción de la carpa y con ello puedan descubrir las propiedades que se involucran (por ejemplo que la cantidad total de tela está determinada por la suma del área de la base y las caras laterales).

Tabla 6

Enunciados de la tarea 2

Ítems Enunciados

- a) Observa el modelo matemático que representa la carpa que desean construir Daniel y su hermano en el siguiente link: <https://www.geogebra.org/m/zxbfn26n> e indica lo que muestran cada uno de los deslizadores en la siguiente tabla.

Deslizador	Este deslizador indica
h	
o	
g	

- b) ¿Cuántos metros cuadrados de tela necesitarán Daniel y su hermano para la construcción de la carpa? Explica tu procedimiento
- c) Buscando mayor comodidad para entrar y salir de la carpa, Daniel y su hermano prefieren que la carpa sea de mayor altura, manteniendo las dimensiones de la base, ¿cómo variaría el área de la tela? Explica tu procedimiento.
- d) Para tener un mayor espacio dentro de la carpa donde se puedan colocar todas las pertenencias, y objetos a utilizar en el campamento, Daniel y su hermano prefieren que la longitud de la base de la carpa sea mayor, manteniendo la altura ¿cómo variaría el área de la tela en total? Explica tu procedimiento

Análisis del espacio de trabajo matemático personal previsto en la tarea 2

- Etapa adentro de la tarea 2

En esta tarea se identifican 5 episodios (E) de trabajo matemático previsto. A continuación se

presentan en la siguiente tabla:

Tabla 7

Episodios identificados en el trabajo matemático previsto para la tarea 2

Ítems	Episodios
a	E1: Identificación en los deslizadores de las variaciones de altura, longitud de la base y desarrollo de la pirámide de base cuadrada
b	E2: Exploración de la representación de la pirámide con el uso de las herramientas de GeoGebra. E3: Cálculo el área de la pirámide cuadrangular regular
c	E4: Identificación de la relación que hay entre la variación de la altura y el área de la pirámide cuadrangular
d	E5: Identificación de la relación que hay entre la longitud de la base y el área de la pirámide cuadrangular

En el E1 de la tarea 2 para la identificación de las variaciones (altura, longitud de la base y desarrollo) utilizando los deslizadores, se presenta al estudiante la representación del objeto pirámide cuadrangular en el GeoGebra, donde podrá interactuar con los mismos. Los deslizadores constituyen artefactos que luego serán instrumentos que favorecen la visualización del objeto pirámide cuadrangular. Por ello, es importante que los estudiantes reconozcan e identifiquen su función y los puedan utilizar en los demás apartados de esta tarea. En base a lo mencionado el uso de los deslizadores podrían activar el plano [Sem-Ins].

En el E2 el estudiante debe primero realizar una exploración de la representación (conjunto de signos del representamen) de la carpa con el uso de las herramientas de GeoGebra (artefacto material de tipo tecnológico). Esto involucra el proceso de visualización y la relación entre las componentes del plano [Sem-Ins]. Por ello en el E2 se activaría el plano [Sem-Ins] y el referencial (por las propiedades que pueda descubrir por ejemplo a mayor longitud de la base mayor área total de la pirámide).

Luego, en E3 podrá calcular el área de la pirámide cuadrangular de base regular a partir de la representación presentada en GeoGebra (conjunto de signos del representamen), podrá relacionar con la interpretación de las características y propiedades involucradas e identificar los elementos importantes de la pirámide de base cuadrada, tales como la altura de la pirámide, el apotema, etc. Esto involucra el proceso de visualización dentro del plano cognitivo, lo que favorece la activación de la génesis semiótica. Luego, se espera que los estudiantes utilicen los

deslizadores del artefacto GeoGebra (artefactos) para la exploración de la figura (que muestran las variaciones de altura, de longitud de la base y el desarrollo plano de la pirámide) y tomando en cuenta las condiciones planteadas de la tarea, se produciría la activación de la génesis instrumental, ya que se utiliza GeoGebra como artefacto, lo que favorece el proceso constructivo en el trabajo. Cabe destacar que el deslizador del desarrollo plano y el arrastre permitirán determinar diferentes configuraciones de la figura inicial, lo produciría la visualización y el uso del artefacto material. Se precisa que el estudiante tendría varias posibilidades para calcular el área de la tela. Esto implica la interrelación entre las componentes del plano [Sem-Ins], ya que al utilizar la barra de herramientas para las medidas que necesite encontrar se activa también la génesis instrumental (lo que permite que los artefactos sean operatorios). Luego, el estudiante va a necesitar la noción de área de la pirámide como representamen a partir de su desarrollo plano (y realizar la visualización en la génesis semiótica) para después realizar las conversiones y tratamientos que le permitan obtener el área y para ello hará uso del componente referencial en el plano epistemológico, a través de la utilización de las definición de área con el objetivo de calcular la cantidad de tela. Con estas génesis mencionadas, se espera que en esta tarea los estudiantes activen el plano semiótico-discursivo.

En estos episodios (E2 y E3) se espera que el trabajo matemático en relación al ETM involucre:

Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins] → Representamen → Visualización → Referencial

En los E4 y E5, donde el estudiante descubre las relaciones que hay entre la variación de la altura, la longitud de la base y el área de la pirámide cuadrangular se espera que el estudiante trabaje con los deslizadores (artefactos) correspondientes para explorar y descubrir las relaciones involucradas. Esto demanda que los estudiantes identifiquen e interpreten los signos llevando al proceso de visualización del plano cognitivo, con esto es esperado la activación de la génesis semiótica e instrumental (lo que implica que se active el plano [Sem-Ins]) que muestra la variación del área de la tela en relación a la longitud de la base y la altura y luego. Cabe resaltar que esto demanda la noción de área en la componente referencial y su uso como artefacto simbólico para poder justificar las relaciones descubiertas (proceso de prueba del plano cognitivo) lo que lleva a la activación del plano [Ins-Dis]. Así, con la activación de las génesis mencionadas, en el desarrollo de esta tarea se espera que la interacción involucre:

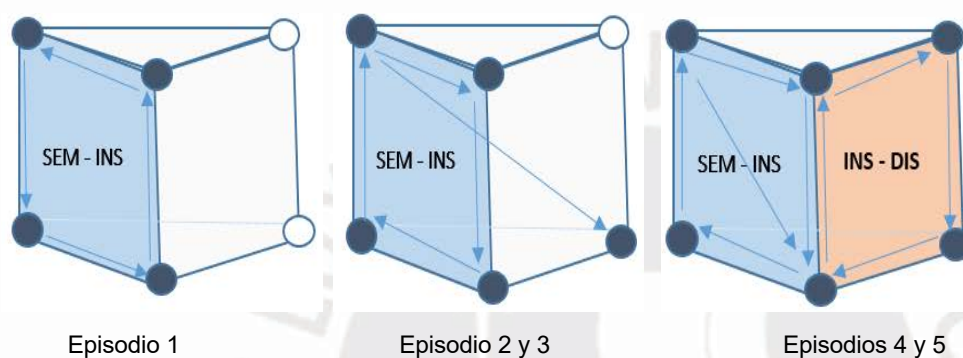
Artefactos → Visualización → [Sem-Ins] → Referencial → Artefactos → [Ins- Dis]

- Etapa afuera de la tarea 2

A continuación se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático previsto según los episodios identificados en la tarea 2.

Figura 20

Descripción global del ETM previsto según los episodios en la tarea 2



Se puede observar en la figura 20 la descripción global del trabajo matemático esperado que incluye el proceso de visualización como punto de partida, además se involucran los artefactos, que favorecen el plano [Sem-Ins], para explorar las representaciones y las propiedades geométricas involucradas. El plano [Ins-Dis], se activa en los episodios 4 y 5 ya que se involucran las las génesis instrumental y discursiva, ya que la prueba (determinación de las relaciones existentes) está basada en una exploración (de la representación) a través de artefactos concretos y simbólicos.

La tarea 3

Esta tarea se presenta un ítem en el cual se pretende que el estudiante calcule el área de la pirámide cuadrangular irregular a través de la interacción con los deslizadores y herramientas que ofrece GeoGebra para encontrar los metros cuadrados de tela que se necesitaran en este diseño de carpa.

A continuación se presenta el enunciado de esta tarea:

A Daniel y a su hermano les han propuesto otro diseño de carpa diferente al anterior, cuyo modelo se encuentra en el siguiente link: <https://www.geogebra.org/m/eg2kuzar>

Los hermanos están pensando en elegir este diseño propuesto. Sin embargo, desean saber si la cantidad de tela que utilizarán será mayor o menor al modelo anterior ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarán los hermanos para la construcción de esta carpa? Explica detalladamente el procedimiento a seguir.

Análisis del trabajo previsto en la tarea 3

- Etapa adentro de la tarea 3

En esta tarea se identifican 2 episodios (E) de trabajo matemático previsto. A continuación se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 8

Episodios identificados en el trabajo matemático previsto para la tarea 3

Episodios
E1: Exploración de la representación de la pirámide con el uso de las herramientas de GeoGebra
E2: Cálculo del área de la pirámide cuadrangular regular
E3: Justificación de la relación del área total de la pirámide con la cantidad de metros de tela en el diseño de la carpa

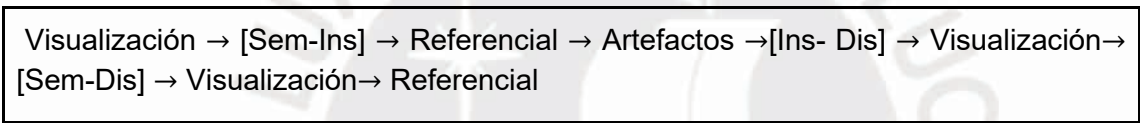
El E1 está basado en la exploración de la representación de la pirámide (lo que significa la representación de la carpa para el estudiante) con el uso de las herramientas de GeoGebra, que constituye un artefacto material de tipo tecnológico. Esto involucra el proceso de visualización y la interrelación entre las componentes del plano [Sem-Ins]. Por ello en este episodio se activaría el plano [Sem-Ins] y el referencial (por las propiedades que pueda descubrir).

En el E2 para calcular el área total de la pirámide, el estudiante podría calcular primero el área de cada una de las caras de la pirámide en su desarrollo plano. Esto implica el trazado de las alturas de cada una de las formas triangulares de las caras laterales, y para ello debe interactuar con la barra herramientas de puntos, de medición, de trazados especiales como perpendicular, paralelas, etc (artefactos que ayudan al proceso de Construcción, por lo tanto se podría activar la génesis instrumental) y para poder trabajar con el deslizador variación de longitud de la base y analizar la relación que hay entre esta y el área, a partir del conjunto de

signos que utilizan del componente representamen del plano epistemológico en que los alumnos deberán identificar y relacionar los símbolos llevando al proceso de visualización en el plano cognitivo, con esto es esperado la activación de la génesis semiótica y también para esto debe utilizar las propiedades del referencial para poder calcular el área que se pide, con esto se espera la activación de la génesis discursiva, por ende el plano [Ins-Dis] y [Sem-Dis].

En el E3 se espera que el estudiante justifique la relación del área total de la pirámide con la cantidad de metros de tela en el diseño de la carpa. Esta relación podría justificarse por un proceso de visualización de la representación que se presenta a través de GeoGebra, involucrando también el componente referencial del plano epistemológico, para concluir que la cantidad de tela total de la carpa se corresponde con la suma total del área de la base de la pirámide y el área de las cuatro caras laterales de este objeto en estudio.

Con el desarrollo de esta tarea las interacciones que se producirían en los tres episodios serían las siguientes:

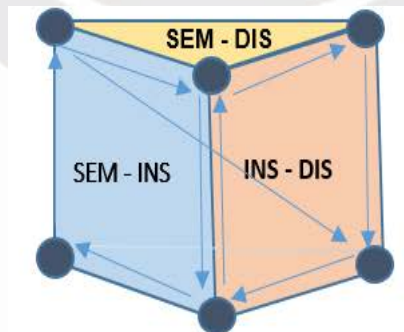


- **Etapafuera**

A continuación, se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático previsto según los episodios identificados en la tarea 3.

Figura 21

Descripción global del ETM previsto según los episodios en la tarea 3



Se observa que en el trabajo previsto se activarán los tres planos verticales del ETM, ya que la tarea demanda precisamente de la representación que se favorece con el uso de las herramientas de GeoGebra, las cuales también juegan un papel relevante como instrumentos

para el descubrimiento y la justificación de propiedades geométricas que se demandan para esta tarea.

En relación a los paradigmas que se podrían priorizar en el trabajo matemático de los estudiantes en cada una de las tareas sería el de Geometría I, ya que el estudiante buscaría una relación con la realidad al intentar resolver la tarea que se le plantea, en este caso relacionando las características de la pirámide con las propiedades geométricas del objeto pirámide cuadrangular. Las acciones de los estudiantes podrían realizarse básicamente basados en la percepción, la experimentación o deducción.

3.4. Análisis del trabajo matemático de los estudiantes

En este apartado se analiza el trabajo matemático de los estudiantes en cada una de las tareas propuestas: tarea 1 (anexo 2), tarea 2 (anexo 3) y tarea 3 (anexo 4)

Tarea 1

A continuación, se muestra el trabajo matemático en la tarea 1 de los estudiantes A y B, dada las etapas adentro y afuera.

Etapas adentro de la tarea 1

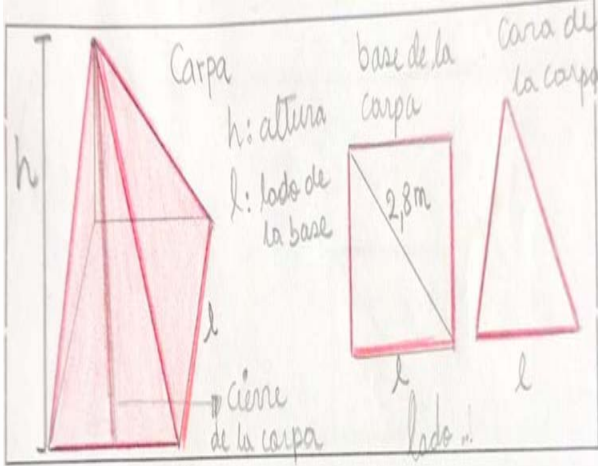
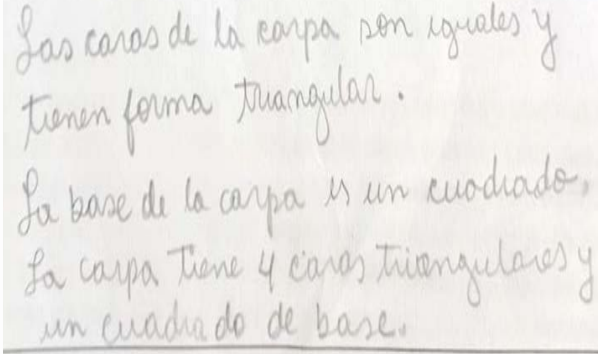
En el desarrollo de esta tarea se puede observar que los estudiantes A y B utilizaron artefactos como lápiz, papel, reglas, datos y condiciones establecidas en el enunciado del problema para la construcción del diseño de la carpa. Ambos estudiantes inician su trabajo en el dominio de la geometría, pues identifican y utilizan elementos geométricos como altura, lado de la base, base, caras de la carpa, polígonos (cuadrado, triángulo). A continuación se muestran los episodios identificados en el trabajo de ambos estudiantes:

Estudiante A

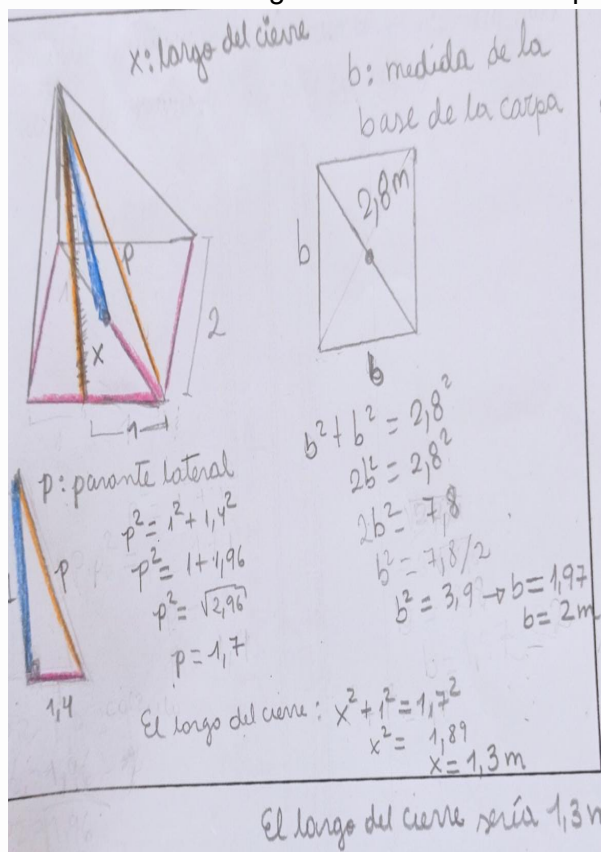
En la siguiente tabla se presentan los episodios identificados en el trabajo matemático del estudiante A y su respectivo análisis según la teoría del ETM.

Tabla 9

Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante A en la tarea 1

Episodios identificados en el estudiante A	Análisis
	<p>Se puede observar que la génesis semiótica se activó ya que en este inicio del trabajo el estudiante logró articular en las representaciones (Representamen) que construyó (por el proceso de visualización) con los datos del enunciado. Se utilizó como componente referencial (las definiciones de base cuadrada, altura, caras laterales, lados de la base y su uso como artefactos simbólicos (al considerar las condiciones establecidas como la altura, distancia entre vértices), lo que activó el plano [Sem-Ins]. Por ende es el referencial del plano epistemológico el que activa el trabajo matemático que realiza este estudiante ya que como se aprecia precisa de algunas definiciones como altura, base, caras.</p>
En el desarrollo de esta tarea, E1 la interacción en el ETM involucra:	Referencial → Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins]
E2: Identificación de las formas que forman parte del objeto y reconocimiento de las características	<p>Se observa que el estudiante interpreta la representación (representamen) que construye, la cual remite el objeto matemático, sus elementos y características por el proceso de visualización. A partir de ello se activó la génesis semiótica. Luego utiliza como referencial (noción de polígonos, vértices, aristas, caras, base) para responder a las preguntas (el proceso de prueba) lo que significa que activó la génesis discursiva. Esto involucra el plano [Sem-Dis].</p>
	En el E2 la interacción en el ETM involucra:
Representamen → Visualización → Referencial → Prueba → [Sem-Dis]	

E3: Cálculo de la longitud del cierre de la carpa



Se puede observar que el estudiante primero realiza una representación de lo que sería la base de la carpa y una de las caras laterales (Representamen), es decir interpreta estas formas geométricas como elementos que constituyen el objeto matemático, por el proceso de visualización para reproducir la figura, lo que significa la activación de la génesis semiótica. Cabe mencionar que este estudiante utiliza la regla como artefacto y realiza un proceso de construcción para dibujar la pirámide, la base y colocar las medidas. Lo que activa la génesis instrumental. Luego utiliza como referencial el Teorema de Pitágoras, y operaciones aritméticas las cuales pueden considerarse como artefactos simbólicos, lo que activa el plano [Sem-Ins] .

En el E3 la interacción en el ETM involucra:

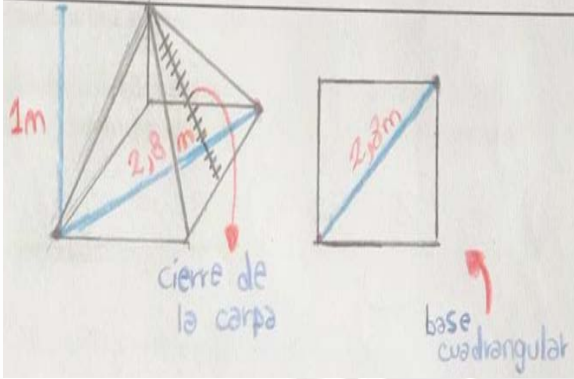
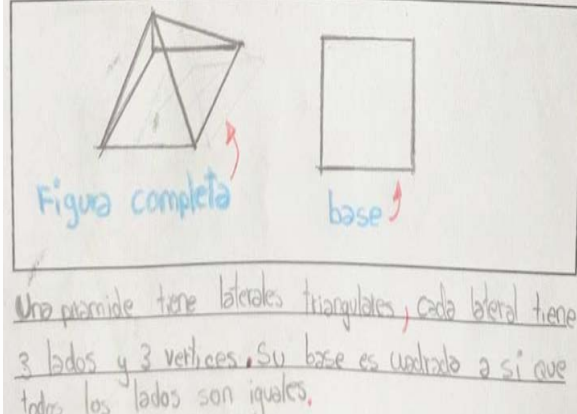
Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins]

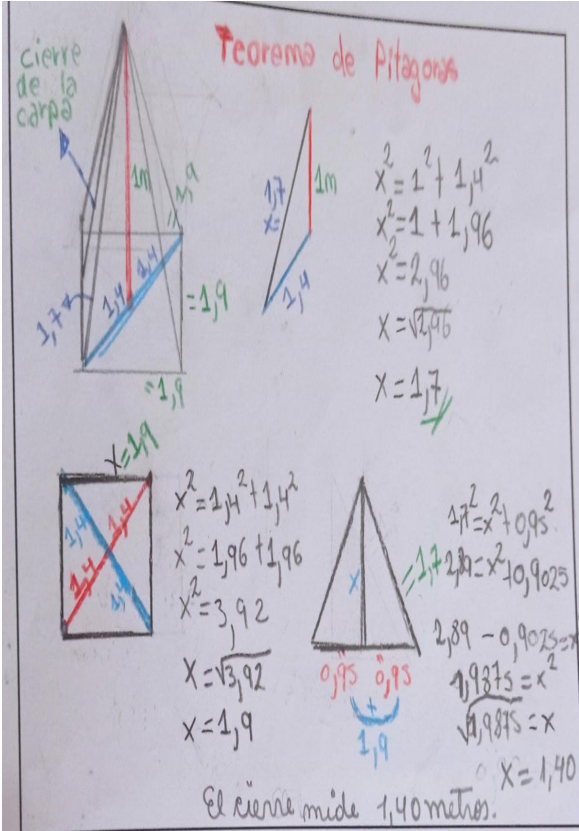
Estudiante B

En la siguiente tabla se presentan los episodios identificados en el trabajo del estudiante B y su respectivo análisis según la teoría del ETM.

Tabla 10

Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante B en la tarea 1

Episodios identificados en el estudiante B	Análisis
E1: Construcción de la representación de la pirámide según las condiciones del enunciado de la tarea	Se observa que el estudiante B identifica y relaciona las medidas y características del enunciado, según las condiciones establecidas en el diseño que construye. Esto favorece la activación de la génesis semiótica (articulación de las representaciones con la visualización), dado el uso de los artefactos (lápiz, papel, reglas, datos y condiciones establecidas en el enunciado del problema) en el proceso de construcción. Lo que implica que al igual que el estudiante A, también activó la génesis instrumental. Lo que involucra el plano [Sem-Ins].
	
En el E1 la interacción en el ETM involucra:	
Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins]	
E2: Identificación de las formas que forman parte del objeto y reconocimiento de las características4	Se observa que el estudiante toma como representamen la figura de la pirámide y su base, los cuales representa y realiza un proceso de visualización, para identificar que las caras laterales son triangulares y la base es cuadrada. Esto indica que se activó la génesis semiótica. Además para esto también consideró los elementos de la pirámide (lados, vértices, laterales y base) en la componente referencial del plano epistemológico basado en la prueba para responder a lo que se pregunta y también los utilizó como artefactos simbólicos en la realización del trabajo matemático. Esto indica que se activó la génesis discursiva e instrumental. Esto involucra el plano [Sem-Dis] y [Sem-Ins].
	
En el E2 la interacción en el ETM involucra:	
Representamen → Visualización → Referencial → Prueba → [Sem-Ins] → [Sem-Dis]	



El procedimiento que ha seguido el estudiante para calcular el largo del cierre fue primero dibujar la pirámide según las condiciones planteadas en el enunciado y a partir de la representación (Representamen) se produjo la visualización, ya que identificó en la representación las condiciones (distancia entre vértices opuestos, altura, cierre de la carpa). Esto indica que se activó la génesis semiótica. Luego utiliza el teorema de Pitágoras y operaciones aritméticas como artefactos simbólicos para calcular la medida del parante lateral y el lado de la base. Finalmente calcula la medida de la longitud del cierre de la carpa . En este proceso donde se hacen operativos los artefactos se activa la génesis instrumental. Esto indica que se activó el plano [Sem-Ins].

En el E3 la interacción en el ETM involucra:

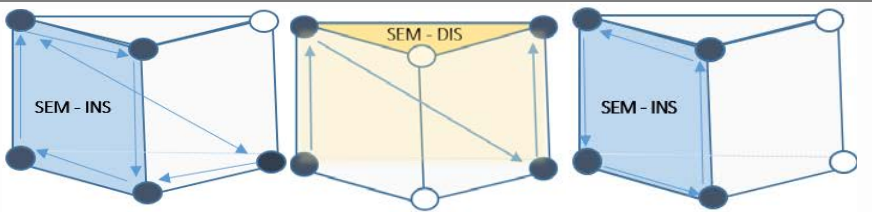
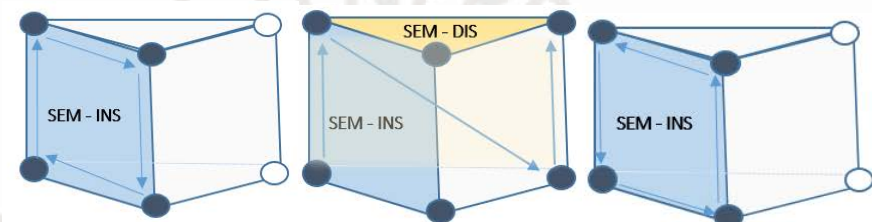
Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins]

Etapa afuera de la tarea 1 - Estudiantes A y B

A continuación se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático según los episodios identificados en la tarea 1 de los estudiantes A y B

Tabla 11

Trabajo matemático global de los estudiantes A y B en el desarrollo de la tarea 1

Estudiante A	
Estudiante B	
Análisis del trabajo global de ambos estudiantes	Se observa que ambos estudiantes tuvieron un trabajo similar y parecido al trabajo previsto. Se prioriza el plano [Sem-Ins], ya que se favorece la visualización y el uso de los artefactos en el trabajo, el descubrimiento de los elementos y las características que son parte del objeto matemático en el plano [Sem-Dis]. El estudiante A precisa del referencial del plano epistemológico ya que en su trabajo se evidencia que recurre a definiciones de caras, base, altura, aristas.

Tarea 2

A continuación se muestra el trabajo matemático en la tarea 2 de los estudiantes A y B, dada las etapas adentro y afuera.

Etapa adentro de la tarea 2

En el desarrollo de esta tarea, ambos estudiantes exploraron la representación tridimensional del objeto pirámide cuadrada, e interactuaron a través de los deslizadores que muestran variaciones de altura, de longitud de la base y el desarrollo plano de la pirámide, para calcular el área e identificar las relaciones que involucra esta noción en el objeto matemático.

A continuación, se muestran los episodios identificados en el trabajo de ambos estudiantes:

Estudiante A

En la siguiente tabla se presentan los episodios identificados en el trabajo de los estudiantes y su respectivo análisis según la teoría del ETM.

Tabla 12

Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante A en la tarea 2

Episodios identificados en el estudiante A

Deslizador	Este deslizador indica
h	la variación de la altura
o	la variación del desarrollo de la estructura de la pirámide
g	la variación de la longitud de la base

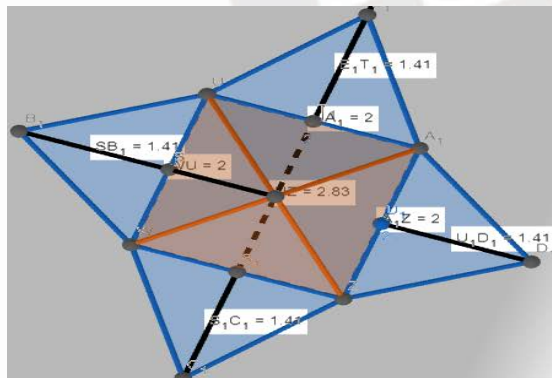
De acuerdo a la información que el estudiante colocó, que a través de los deslizadores (artefactos) pudo identificar lo que él reconoce como variación de altura, el desarme de la estructura del objeto (así le llama a la función del deslizador que indica el desarrollo de la pirámide) y la variación de la longitud de la base. Esto lo realizó a través de un proceso de visualización, lo que significa la activación del plano [Sem-Ins]

E1: Identificación en los deslizadores de las variaciones de altura, longitud de la base y desarrollo de la pirámide de base cuadrada.

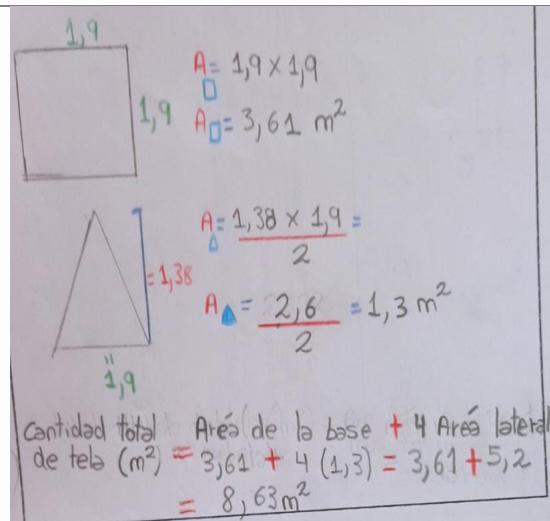
En este ETM se involucró: Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins]

E2: Exploración de la representación de la pirámide con el uso de las herramientas de GeoGebra

Se puede observar que el estudiante luego de explorar las características del objeto e interpretar los signos de la representación (por visualización) en el software y el uso de los deslizadores, traza cada una de las alturas de las caras triangulares en su desarrollo plano. Esto indica que se activó la génesis instrumental y discursiva ya que tomó como referencia la noción de altura de un triángulo en el proceso de construcción. Luego se evidencia en el dibujo que realizó que toma como representamen el cuadrilátero que representa la base de la pirámide y realiza un proceso de visualización para reproducir la figura, lo que significa que activó la génesis semiótica. Usa la regla como artefacto y realiza un proceso de construcción para dibujar el cuadrado que representa la base de la pirámide, lo que significa que se activó la génesis instrumental. Luego toma como referencial la definición de área del cuadrado y realiza un proceso de prueba para justificar que sus lados tienen igual longitud, lo que indica que



E3: Cálculo del área de la pirámide cuadrangular



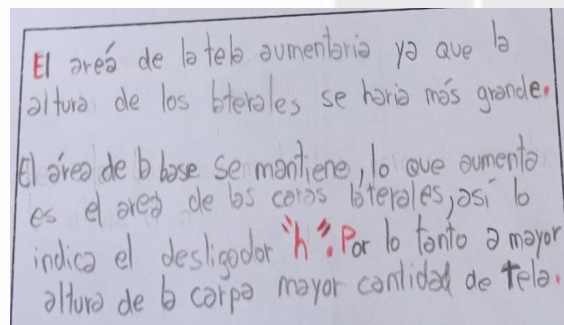
activó la génesis semiótica y discursiva. Luego toma como artefacto las operaciones aritméticas y realiza un proceso de construcción para obtener el área del cuadrado, lo que activa la génesis instrumental. Sucede igual con el área del triángulo al identificarla como la cara lateral de la pirámide. Finalmente, el estudiante por el proceso de visualización en la representación que realizó a través de las herramientas de los deslizadores pudo identificar que el área total resulta de sumar el área de la base y el área de las caras laterales.

En el E2 y E3, la interacción en el ETM involucró:

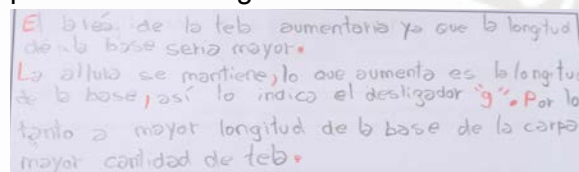
Visualización → [Ins- Dis] → Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins] Referencial → Prueba → [Sem-Dis] → Artefactos → Visualización

E4: Identificación de la relación que hay entre la variación de la altura y el área de la pirámide cuadrangular

En los E4 y E5, se observa que el estudiante relaciona el área de la tela con la altura de los laterales. Esta relación que descubre debió necesitar de la activación de la génesis semiótica e instrumental ya que al trabajar con los deslizadores (artefactos) correspondientes para explorar y descubrir las relaciones involucradas. Esto demanda que también identifique e interprete los signos llevando al proceso de visualización del plano cognitivo. Lo que indica que se activó el plano [Sem-Ins]). Luego basado en lo que le muestra el deslizador (artefacto) el estudiante realiza una justificación, cuando menciona por lo tanto a mayor altura de la carpa , mayor cantidad de tela, si la altura se mantiene lo que aumenta es la longitud de la base, así lo indica el deslizador h. Por lo tanto (el estudiante está justificando) a mayor longitud de la base mayor cantidad de tela, lo que indica que se activa la génesis discursiva, lo que lleva a la activación del plano [Ins-Dis].



E5: Identificación de la relación que hay entre la longitud de la base y el área de la pirámide cuadrangular



En el E4 y E5 la interacción en el ETM involucró:

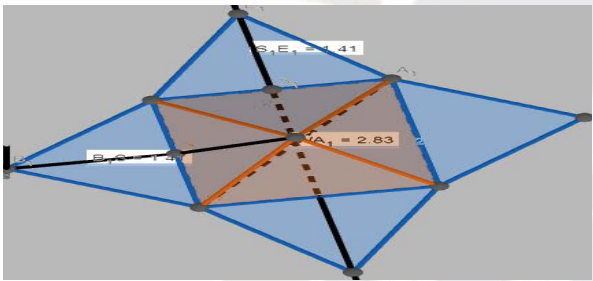
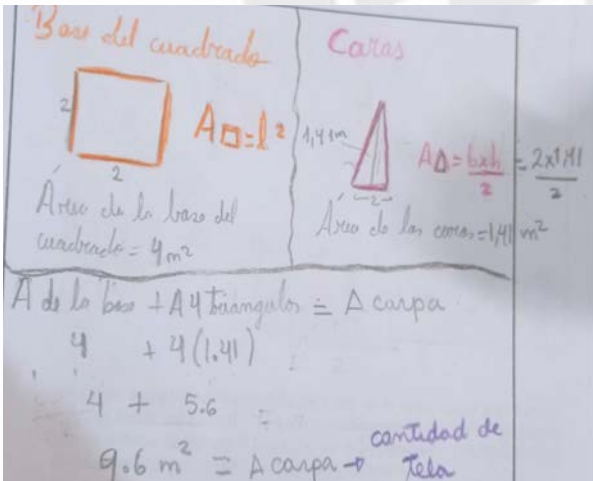
Artefactos → Visualización → [Sem-Ins] → Artefactos → [Ins- Dis]

Estudiante B

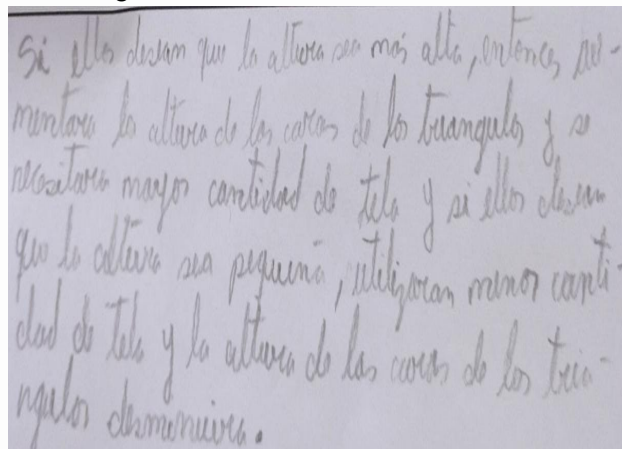
En la siguiente tabla se presentan los episodios identificados en el trabajo de los estudiantes y su respectivo análisis según la teoría del ETM.

Tabla 13

Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante B en la tarea 2

Episodios identificados en el estudiante A	Análisis								
<p>E1: Identificación de las variaciones de altura, longitud de la base y desarrollo de la pirámide</p>	<p>El estudiante pudo identificar en el deslizador h la variación de la altura, la formación de la estructura de la carpa, y la variación de la base (cuando menciona indica que la base sea más grande). Esto al igual que el estudiante A lo realizó a través de un proceso de visualización lo que indica que se activó el plano [Sem-Ins]</p>								
<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="203 514 422 556">Deslizador</th> <th data-bbox="422 514 820 556">Este deslizador indica</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="203 556 422 619">h</td> <td data-bbox="422 556 820 619">Indica la altura de la carpa.</td> </tr> <tr> <td data-bbox="203 619 422 682">o</td> <td data-bbox="422 619 820 682">Indica que se forme la estructura de la carpa.</td> </tr> <tr> <td data-bbox="203 682 422 766">g</td> <td data-bbox="422 682 820 766">Indica que la base sea más grande.</td> </tr> </tbody> </table>	Deslizador	Este deslizador indica	h	Indica la altura de la carpa.	o	Indica que se forme la estructura de la carpa.	g	Indica que la base sea más grande.	
Deslizador	Este deslizador indica								
h	Indica la altura de la carpa.								
o	Indica que se forme la estructura de la carpa.								
g	Indica que la base sea más grande.								
<p>En el desarrollo de esta tarea, E1 la interacción en el ETM involucra:</p>									
<p>Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins]</p>									
	<p>Se observa en el trabajo del estudiante que a partir de las representaciones de la base y una de las caras laterales realiza un proceso de visualización y coloca los datos según las condiciones del enunciado (por ende, se activa la génesis semiótica), además se manifiesta la activación de la génesis instrumental (ya que utiliza como artefactos simbólicos la noción de área del cuadrado y triángulo y el uso de las operaciones aritméticas en el proceso de construcción). Esto indica que se activó el plano [Sem-Ins]. Luego el deslizador desarrollo plano permitió que pueda visualizar que la cantidad de tela a utilizar corresponde al área total de la tela, es decir a la suma del área de la base y las cuatro caras laterales</p>								
<p>E2: Exploración de la representación de la pirámide</p>									
									
<p>E3: Calculo el área de la pirámide</p>									
<p>En el E2 la interacción en el ETM involucra:</p>									
<p>Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins] → Visualización</p>									

E4: Identificación de la relación que hay entre la variación de la altura y el área de la pirámide cuadrangular



Si ellos desean que la altura sea más alta, entonces aumentarán la altura de las caras de los triángulos y se necesitará mayor cantidad de tela y si ellos desean que la altura sea pequeña, utilizarán menor cantidad de tela y la altura de las caras de los triángulos disminuirá.

E5: Identificación de la relación que hay entre la longitud de la base y el área de la pirámide cuadrangular

En estos episodios el estudiante relaciona el área de la tela con la altura de las caras laterales. Al igual que el estudiante A para esta relación que descubre debió necesitar de la activación de la génesis semiótica e instrumental ya que al trabajar con los deslizadores (artefactos) correspondientes para explorar y descubrir las relaciones involucradas. Lo que indica que realizó el proceso de visualización del plano cognitivo. Lo que indica que se activó el plano [Sem-Ins]). Luego basado en lo que le muestra el deslizador (artefacto) el estudiante realiza una justificación, cuando menciona si desean que la altura de la carpa sea mayor, entonces aumentará la altura de las caras laterales y se necesitará mayor cantidad de tela, lo que indica que se activa la génesis discursiva, lo que lleva a la activación del plano [Ins-Dis].

En el E4 y E5, la interacción en el ETM involucró:

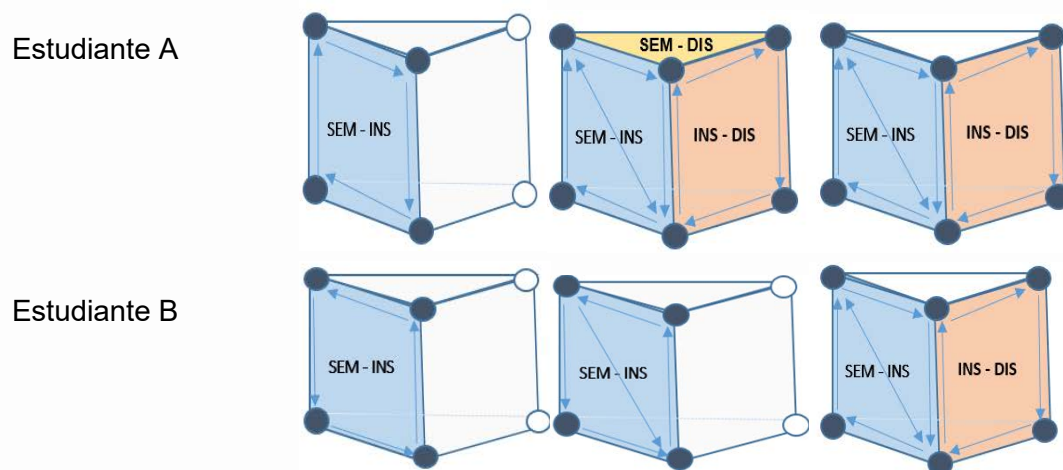
Artefactos → Visualización → [Sem-Ins] → Artefactos → [Ins-Dis]

Etapafuera de la Tarea 2 - Estudiantes A y B

A continuación se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático según los episodios identificados en la tarea 2 de los estudiantes A y B

Tabla 14

Trabajo matemático global de los estudiantes A y B en el desarrollo de la tarea 2.



Análisis del trabajo global de ambos estudiantes

Se observa que ambos estudiantes priorizan el plano [Sem-Ins], debido al proceso de visualización el cual se favorece por la representación del objeto matemático y el uso de la barra de herramientas como artefactos en el proceso de construcción. Se observa que el estudiante activa el plano [Sem-Dis] e [Ins-Dis], dado que utiliza las representaciones y definiciones como artefactos simbólicos para justificar las relaciones que descubre con respecto al área total del objeto en estudio.

Tarea 3

A continuación se muestra el trabajo matemático en la tarea 3 de los estudiantes A y B, dada las etapas adentro y afuera.

Etapas adentro de la tarea 3

En el desarrollo de esta tarea, ambos estudiantes exploraron la representación tridimensional del objeto pirámide cuadrangular ahora irregular y utilizaron también la barra de herramientas para calcular el área de este objeto matemático. A continuación se muestran los episodios identificados en el trabajo de ambos estudiantes:

Estudiante A

En la siguiente tabla se presentan los episodios identificados en el trabajo del estudiante A y su respectivo análisis según la teoría del ETM.

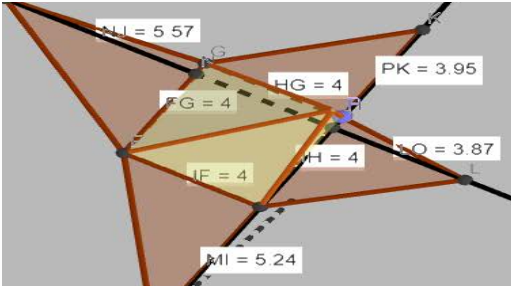
Tabla 15

Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante A en la tarea

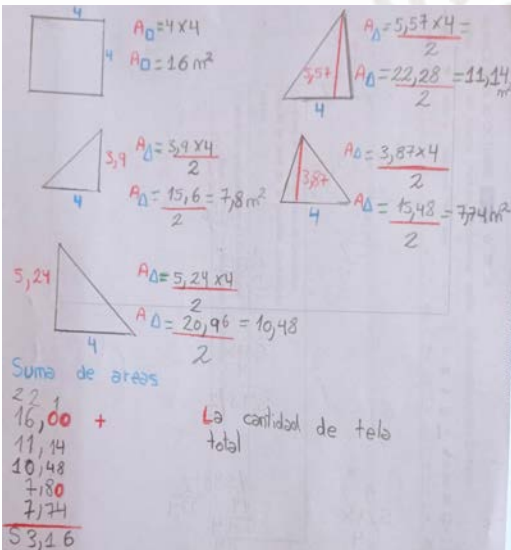
3

Episodios identificados en el estudiante A

Análisis



Exploración de la representación de la pirámide con el uso de las herramientas de GeoGebra.



Cálculo del área de la pirámide
Justificación de la relación del área total de la pirámide con la cantidad de metros de tela en el diseño de la carpa.

El estudiante inicia su trabajo tomando en cuenta el desarrollo plano del objeto, (con la herramienta desarrollo) lo que le permite visualizar la estructura de la pirámide. Inicia un proceso de visualización luego de interpretar la representación con ayuda de las herramientas de GeoGebra. Esto indica que se activó el plano [Sem-Ins] Luego traza y mide las alturas para después por el proceso de visualización representar en el papel cada una de las caras laterales y colocar las medidas que calculo. Es decir toma como representamen las figuras que representan las caras laterales y realiza un proceso de visualización para reproducir las figuras. Por ello se activó la génesis semiótica. Usa la regla como artefacto y toma como referencial teórico la definición de área y como artefactos las operaciones aritméticas en el proceso de construcción para calcular el área de cada una de las figuras. Se utilizan operaciones de adición (artefactos simbólicos) para hallar la cantidad total de tela (porque interpretó al inicio con ayuda del desarrollo plano que la suma de áreas era la cantidad total de tela de la carpa). Finalmente por visualización el estudiante realiza una suma de áreas, lo que supone pensar que está justificando la correspondencia del área total de la pirámide con la cantidad de metros de tela que se necesitaran.

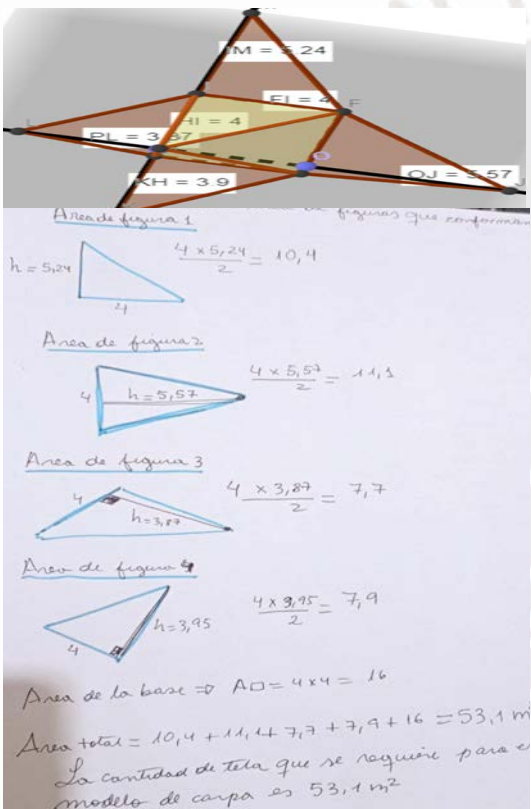
La interacción en el ETM involucró: Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins] → Visualización → referencial → Artefactos → Construcción

Estudiante B

En la siguiente tabla se presentan los episodios identificados en el trabajo del estudiante B y su respectivo análisis según la teoría del ETM.

Tabla 16

Análisis de los episodios (E) identificados en el trabajo matemático del estudiante B en la tarea 3

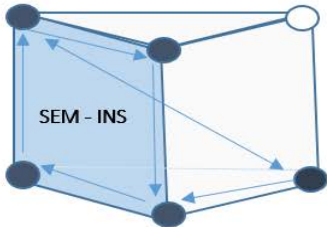
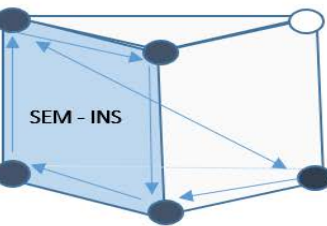
Episodios identificados en el estudiante B	Análisis
<p>E1: Identificación en los deslizadores de las variaciones de altura, longitud de la base y desarrollo de la pirámide de base cuadrada.</p> 	<p>Se evidencia que el estudiante ha trazado las alturas de cada una de las caras laterales en su desarrollo plano y con el uso de la herramienta de medición ha medido sus longitudes. Esto implica que se activó la génesis instrumental ya que utilizó como artefactos la barra de herramientas y artefactos simbólicos la noción de altura de un triángulo. Luego por el proceso de visualización representa en el papel cada una de las caras laterales y coloca las medidas que calculo. Es decir toma como representamen las figuras que representan las caras laterales y realiza un proceso de visualización para reproducirlas. Por ello se activó la génesis semiótica. Usa la regla como artefacto y realiza un proceso de construcción, toma como referencial teórico la definición de área y como artefactos las operaciones aritméticas en el proceso de construcción para calcular el área de cada una de las figuras. Finalmente interpreta que la cantidad de tela es la suma de todas las áreas de las figuras (por visualización con ayuda del artefacto desarrollo plano).</p>
<p>El uso de los deslizadores en el ETM involucró: Representamen → Visualización → Artefactos → [Sem-Ins] → Visualización → referencial → Artefactos → Construcción]</p>	

Se precisa que tanto el trabajo del estudiante A y B es activado por el representamen, dada la riqueza de los signos que proporciona la representación que favorece GeoGebra.

Tabla 17

A continuación se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático según los episodios identificados en la tarea 3 de los estudiantes A y B

Trabajo matemático global de los estudiantes A y B en el desarrollo de la tarea 3

Estudiante A	
Estudiante B	
Análisis del trabajo global de ambos estudiantes	Se observa que ambos estudiantes presentan un trabajo muy similar apoyado en las representaciones y los artefactos que constituyen la barra de herramientas, además utilizan el referencial en el proceso de visualización.

Cabe mencionar que el trabajo matemático de los estudiantes A y B, se encuentra enmarcado en el paradigma de la Geometría I, ya que ambos estudiantes establecieron relaciones entre las características del diseño de la carpa y las características geométricas que involucra el objeto pirámide, estableciendo semejanzas entre el modelo (la representación de la pirámide que permitió GeoGebra) y la realidad. Se prioriza este paradigma dado que además estos estudiantes utilizan recursos como reglas, escuadras, la medida como técnica, el dibujo y las operaciones básicas y definiciones que han construido empíricamente y que logran conectar con el objeto matemático a partir de la representación que se favorece en GeoGebra. Sin embargo también se observa en algunos episodios que algunas acciones de los estudiantes estarían enmarcadas en el paradigma de la Geometría II, ya que se ponen en juego algunas propiedades y definiciones que están involucradas en el estudio del objeto, por ejemplo han sido necesarias las definiciones de área, altura, entre otras, el Teorema de Pitágoras, y algunas operaciones básicas como el cálculo de raíces y el planteamiento de ecuaciones.

Conclusiones

En relación al objetivo general de Analizar el trabajo matemático que realizan los estudiantes cuando resuelven tareas sobre pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra, esto se realizó a través del análisis de las acciones de los estudiantes tomando en cuenta aspectos de representaciones, instrumentales y discursivos que la teoría del Espacio de Trabajo Matemático aporta. En base a ello y respondiendo al primer y segundo objetivo específico se concluyó que:

Las génesis que los estudiantes activan en mayor frecuencia en el desarrollo de las tareas son las génesis semiótica e instrumental, las cuales se favorecen por la riqueza de signos (representaciones que brinda el uso del software GeoGebra) que se logran interpretar (visualizar) y el uso de las herramientas (artefactos) que aporta GeoGebra. Por ende los planos que se priorizan son el plano [Sem-Ins] (dado que se utilizaron las herramientas de GeoGebra en la exploración de las representaciones y el plano [Ins- Dis] ya que se justificaron algunas relaciones a través de los artefactos. También es importante señalar que en algunos episodios la activación de las génesis semiótica e instrumental se debió al referencial del plano epistemológico.

La génesis discursiva también se activó aunque en menor medida, pero se destaca el aporte instrumental en el proceso de construcción y el de descubrimiento y justificación de las relaciones y propiedades geométricas que se involucraron en el estudio de la pirámide cuadrangular.

Con respecto al tercer objetivo específico se rescata que el trabajo matemático que los estudiantes priorizan corresponde al paradigma de la Geometría I o natural, ya que en cada una de las tareas al analizar los episodios se observó que los estudiantes relacionan la representación del objeto pirámide con la realidad (diseño de la carpa), utilizando recursos como el dibujo, la medida, la representación que favorece GeoGebra y las operaciones que logran plantear para justificar las relaciones que encuentran en el estudio del objeto pirámide. También se encontró en algunos episodios que priorizaron el paradigma de la Geometría II ya que prescindieron de definiciones, y propiedades para resolver las tareas.

La teoría del Espacio de Trabajo Matemático constituye una herramienta importante para estudiar aspectos instrumentales, discursivos y semióticos que se ponen en juego cuando se resuelve una determinada tarea, aspectos que se deben tomar en cuenta en la construcción de los conocimientos matemáticos y que podrían ser considerados en el diseño de las actividades de aprendizaje. Esto es importante si lo miramos desde la perspectiva del desarrollo de las competencias que establece el Currículo Nacional, ya que si buscamos que los estudiantes

resuelvan problemas (enfoque que sustenta el desarrollo de las competencias en el área de matemáticas) debemos tener en cuenta las definiciones y propiedades que se ponen en juego, los recursos, los procedimientos y estrategias que se utilizan, los argumentos y justificaciones que se plantean, es decir todos los aspectos epistemológicos y cognitivos que se involucran en el trabajo matemático que desarrollan cuando resuelven un problema, y esto se puede analizar tomando como referente la teoría del Espacio de Trabajo Matemático. Esto también se puede considerar en el diseño de las actividades que se plantean en los libros de texto de matemática, si se busca precisamente desarrollar las competencias en cuestión.

De manera general también como parte de las conclusiones es importante considerar algunos aspectos relacionados con la enseñanza aprendizaje de los sólidos:

La enseñanza aprendizaje de los sólidos implica un análisis didáctico del trabajo matemático que desarrollan los estudiantes y que aporta una riqueza en relación a procesos cognitivos y aspectos epistemológicos que deben ser tomados en cuenta en la implementación de actividades y estudiados en la formación de profesores de matemática.

El uso de la tecnología en la enseñanza aprendizaje de la geometría es fundamental, así lo rescantan diversos investigadores ya que pueden haber herramientas potenciales que facilitan procesos cognitivos (en relación al ETM se favorece la visualización, la construcción y la prueba). Por lo mencionado se sugiere el estudio de softwares o programas que favorezcan el aprendizaje de los objetos tridimensionales y que constituyan un valioso apoyo en la tarea docente.

Se sugiere desarrollar investigaciones relacionadas al análisis del Espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes cuando resuelven tareas que involucren otros objetos geométricos o de otros dominios de la matemática, en donde se utilice otro tipo de software o herramienta tecnológica. Esto sería un aporte en términos de caracterización de los Espacio de trabajo matemáticos personales de los estudiantes y puede ser un insumo a tomar en cuenta para el diseño de las tareas que se proponen en el aula. También se sugiere estudiar el ETM personal e idóneo del docente a partir de las tareas que propone en sus actividades de aprendizaje y de esta manera conocer que génesis prioriza y que aspectos instrumentales y discursivos favorece en la construcción de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes.

Referencias

- Codina, A. y Romero, I. (2016). Entornos Tecnológicos y su influencia en los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, 30 (54), 95-119. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/XdQMbFfxybs6xPkzxrQRfG/?lang=es&format=pdf>
- Díaz-Nunja, L., Rodríguez-Sosa, J., y Lingán, S.K. (2018). Enseñanza de geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y Representaciones*, 6(2), 217-251. <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2018.v6n2.251>
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. [ArchivoPDF]. <http://funes.uniandes.edu.co/12176/1/Duval2016Las.pdf>
- Educactiva. (2022a). Construye, Matemática. Guía del docente para segundo grado de secundaria. Editorial Norma.
- Educactiva. (2022b). Construye, Matemática. Libro de actividades para segundo grado de secundaria. Editorial Norma.
- Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: D. Reidel. <https://vdoc.pub/download/mathematics-as-an-educational-task-59gv3jpgl4c0>
- Henríquez, C. y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema, Rio Claro*, 35 (71), 1550-1572.
- Hernández, R., Useche, V. y Mariño, L. (2021). Explorando los conceptos de polígonos y poliedros desde el modelo de Van Hiele. *Revista boletín Redipe*, 10(6), 407-420. <https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1336>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). Metodología de la Investigación (Sexta ed.). <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- Herrera, E., Soto, M., Quiroga, V., Puzzella, A y Pochulú, M. (2016). Entre el diseño y la implementación de una actividad de geometría: el área de la pirámide recta. *Educación Matemática*, 28(1), 153-171. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40545377007>

- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283–312.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16 (1), 9- 24.
- Kuzniak, A. (2015). Understanding the Nature of the Geometric Work Through Its Development and Its Transformations. Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education, DOI 10.1007/978-3-319-17187-6_1
- Kuzniak, A. (2019). Thinking About the Teaching of Geometry Through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*, 13 (1). https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_2
- Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces- Theoretical Characteristics. En A. Kuzniak, P. Richard y E. Montoya (Ed.), *Mathematical Work in Educational Context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Editorial Board.
- Kuzniak, A., Nechache, A., y Drouhard, J.(2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics Education*, 48(6), 861–874.
- Kuzniak, A. y Nechache, A. (diciembre de 2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile.
- Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kusumah, Y., Kustiawati, D. y Herman, T. (2020). The Effect of GeoGebra in Three-Dimensional Geometry Learning on Students' Mathematical Communication Ability. *International Journal of Instruction*. 13 (2), 895-908.
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-1), 5-39. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>

- León, A. (2020). *La visualización por deconstrucción dimensional como proceso central en la comprensión de los elementos constitutivos de los prismas rectos y pirámides cuadrangulares. Una propuesta didáctica para su aprendizaje* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78982>
- Merzabach, J. y Boyer, C (2012). *História da Matemática. Tradução Norte-americana*: Helena Castro. São Paulo: Blucher.
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima, Perú.
- Ministerio de Educación del Perú. (2020). *Construimos una carpa para salir sin acampar de casa. Aprendo en Casa. Educación Secundaria*. <https://resources.aprendoencasa.pe/perueduca/secundaria/4/semana-15/pdf/s15-sec-4-guia-matematica-dia-3-4.pdf>
- Montoya, E. (07 de noviembre de 2020). *Espacio de trabajo matemático en el dominio del análisis*. [Archivo de video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=4B8peuGmUxA>
- Montoya, E., Philippe, R., Vivier, L., Gómez-chacón, I., Kuzniak, A., Maschieto, M. y Tanguay, D. (13-18 de diciembre de 2018). *Sexto simposio sobre el trabajo matemático*. Actas ETM 6. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
- Montoya - Delgadillo, E., & Mena - Lorca, A., y Mena - Lorca, J. (2014). *Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-1), 181-197. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1749>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Executive Summary. Principles and Standards for School Mathematics*. https://www.nctm.org/uploadedFiles/standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. NCTM. Reston, EEUU.
- Ojeda, E. (2020). *Matemática. Libro de actividades para segundo grado de secundaria*. Ediciones Corefo. https://s3.amazonaws.com/corefo.corefonet/2017/Docentes/Ebook/Secundaria/SEC_MAT_2/mobile/index.html#p=1

- Prior, M. (2020). Razonamiento Configural y Espacio de Trabajo Geométrico en la Resolución de Problemas de Probar. *Bolema: Rio Claro*, 34 (66), 178-198.
- Quesada, C. (2006). Los sólidos platónicos. Historia, Propiedades y Arte. <https://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ga20132/poliedros/arch5.pdf>
- Salazar, J. y Neira, V. (2017). Tecnologías y visualización en Educación Matemática: desarrollo y desafíos actuales. *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 12 (24), 118 – 129. https://oasisbr.ibict.br/vufind/Record/UFGA-6_e52773f5ba17ea30e133e5efb249802f
- Scalabrin, A. (2019). *Geometria espacial com o software GeoGebra 3D: Análise dos processos de ensinar e de aprender no ensino médio* [Dissertação de Mestrado, Universidades Estadual de Roraima]. https://uerr.edu.br/ppgec/wp-content/uploads/2019/07/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Ana-Maria-Mota-Oliveira-Scalabrin.pdf
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Educación matemática*, 6(1), 3- 26. <https://core.ac.uk/reader/12341595>
- Wentworth, J. y Smith, D. (2010). Geometría Plana y del Espacio. Ginn y Compañía. <http://beceneslp.edu.mx/pagina/sites/default/files/Geometr%C3%ADa%20plana%20y%20del%20espacio.pdf>

Anexos

Anexo 1: Tarea de inicio

Nombre:

Grado:

Fecha:

Indicaciones:

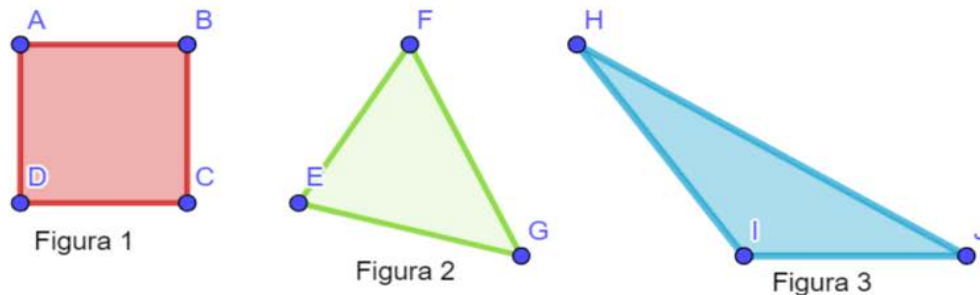
- Lee con atención cada una de las tareas, antes de responder lo solicitado
- Detalla los procedimientos utilizados de manera ordenada para responder a cada una de las preguntas planteadas.

Tarea de inicio:

Tiempo: 30 min

Las figuras mostradas se encuentran en el siguiente link de GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/classroom/gkcwktp2>



- a) Identifique los elementos de las siguientes figuras y complete la tabla con la información que se solicita:

Elementos a identificar	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Vértices			
Lados			
Ángulos			

- b) Trace las alturas de las figuras 2 y 3, y complete la tabla con las medidas de sus longitudes

Medida a calcular	Figura 2	Figura 3
Longitud de la alturas		

c) Utilizando las herramientas de GeoGebra calcule las medidas que se solicitan y completa la tabla:

Medidas a calcular	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Perímetro			
Área			



Anexo 2

Tarea 1:

Tiempo: 40 min

Construyendo una carpa para acampar

A Daniel y su hermano Luis se les ha ocurrido acampar en un parque cercano a casa, pues es su deseo realizar esta actividad en algunos lugares de nuestro Perú. El problema es que ellos no tienen una carpa y por este motivo deciden hacer una. Para lograrlo, estuvieron viendo en internet hasta que encontraron un diseño que podían construir en el que caben dos personas, el cual tiene una base cuadrangular donde la distancia entre dos esquinas opuestas es 2,8 metros y la altura de la carpa es 1 metro. Cuando se coloque la tela en la carpa, se desea tener una entrada por una cara lateral realizando un corte a dicha cara y para cerrarla se colocará un cierre de contacto que vaya desde el punto más alto de la carpa hasta la mitad de uno de los lados de la base.

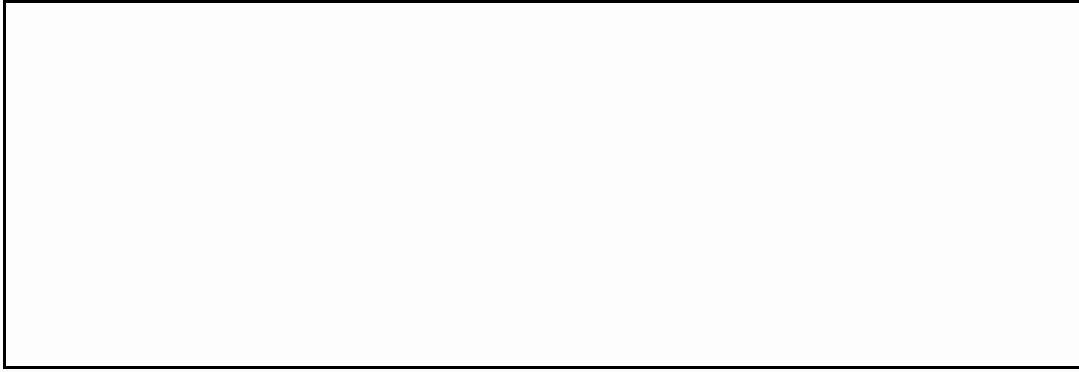
Responde a las interrogantes:

- Realice un esbozo de la carpa armada con el cierre que representa la entrada de la carpa, en donde se coloquen las medidas dadas como datos.



- ¿Qué formas poligonales puedes identificar en la carpa que pretenden construir Daniel y su hermano? ¿Qué características tienen estas formas?





c) ¿Cuál sería la medida del cierre de la carpa? Detalla el procedimiento para calcular



Anexo 3

Tarea 2

Tiempo: 40 min

- a) Observa el modelo matemático que representa la carpa que desean construir Daniel y su hermano en el siguiente link: <https://www.geogebra.org/classroom/yvynnhc3>

e indica lo que muestran cada uno de los deslizadores en la siguiente tabla.

Deslizador	Este deslizador indica
h	
o	
g	

- b) ¿Cuántos metros cuadrados de tela necesitarán comprar Daniel y su hermano para la construcción de la carpa? Explica tu procedimiento. Puedes guiarte del enlace en donde se encuentra el modelo matemático que representa la carpa que desean construir los hermanos.



- c) Buscando mayor comodidad para entrar y salir de la carpa, Daniel y su hermano prefieren que la carpa sea de mayor altura, manteniendo las dimensiones de la base, ¿cómo variaría el área de la tela? Explica tu procedimiento. Puedes utilizar los deslizadores que proporciona GeoGebra en el link proporcionado



- d) Para tener un mayor espacio dentro de la carpa donde se puedan colocar todas las pertenencias, y objetos a utilizar en el campamento, Daniel y su hermano prefieren que la longitud de la base de la carpa sea mayor, manteniendo la altura ¿cómo variaría el área de la tela en total? Explica tu procedimiento. Puedes utilizar los deslizadores que proporciona GeoGebra en el link proporcionado.



Anexo 4

Tarea 3:

Tiempo: 20 min.

A Daniel y a su hermano les han propuesto otro diseño de carpa diferente al anterior, cuyo modelo se encuentra en el siguiente link: <https://www.geogebra.org/m/eg2kuzar>

Link de classroom para el alumno: <https://www.geogebra.org/classroom/u8dcwxuw>

Los hermanos están pensando en elegir este diseño propuesto. Sin embargo, desean saber si la cantidad de tela que utilizarán será mayor o menor al modelo anterior ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarán los hermanos para la construcción de esta carpa? Explica detalladamente el procedimiento a seguir.

