

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Caracterización de un estado puro camino-polarización, extensión del Teorema de polarización-coherencia y Relación de trialdad en sistemas tripartitos

Tesis para optar el grado académico de Doctor
en Física que presenta:

Jean Paul Marrou Osores

Asesor:

Francisco Antonio De Zela Martínez

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, Francisco De Zela docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis titulada *Caracterización de un estado puro camino-polarización, extensión del Teorema de polarización-coherencia y Relación de triadidad en sistemas tripartitos* del autor Jean Paul Marrou Osoros, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9.%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 01/08/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

.....Lima, 14 de agosto de 2023.....

Apellidos y nombres del asesor: De Zela Martínez Francisco Antonio	
DNI: 10540939	Firma
ORCID: 0000-0002-3757-1769	<i>Francisco De Zela</i>

Resumen

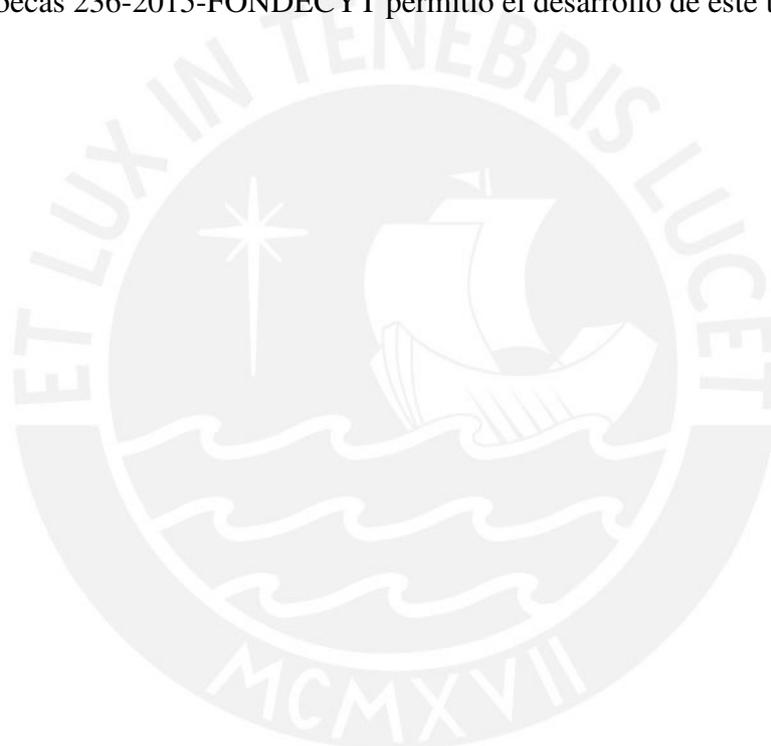
Esta tesis expone realizaciones experimentales sobre tres temas desarrolladas en el Grupo de Óptica Cuántica de la PUCP. Primero, tenemos el trabajo sobre tomografía de un estado puro bipartito de camino-polarización, donde se produjeron y caracterizaron dichos estados para luz clásica. Se propuso un método que requiere mediciones estándar de polarización, aun cuando el estado sea bipartito. Se obtuvieron resultados satisfactorios de tres estados con distintas fases y amplitudes. Luego, y también para luz clásica, se presenta la extensión para dos qubits del Teorema de polarización-coherencia (PCT) (Eberly *et al.*, 2017), que involucra la dualidad onda-partícula. Este teorema, que relaciona visibilidad, distinguibilidad y polarización, se extendió luego para el caso donde la polarización actúa como marcador (De Zela, 2018), sin embargo, el qubit de camino no tenía participación en las cantidades a medir. Es así que se expone una realización experimental que permite también su contribución, evidenciando la generalización del teorema. Finalmente, con fotones individuales, se proponen dos extensiones a estados puros tripartitos. Por un lado, la del PCT y, por otro, la Relación de triadidad (Qian *et al.*, 2018), que involucra visibilidad, distinguibilidad y concurrencia. Para ello, se aprovechó la restricción entre grado de polarización y concurrencia (Qian *et al.*, 2016), donde esta puede referirse ahora a sectores del estado tripartito, por lo que se usó una concurrencia generalizada (Rungta *et al.*, 2001). De esa manera, veremos que el entrelazamiento entre subsistemas participará en ambas relaciones que se buscan generalizar, además de ampliar la visión sobre el concepto de dualidad onda-partícula.

Abstract

This thesis presents experimental realizations on three topics developed in the Quantum Optics Group of the PUCP. First, we have the work on tomography of a pure bipartite state of path-polarization, where these states for classical light were produced and characterized. A method was proposed that requires standard polarization measurements, even if the state is bipartite. Satisfactory results were obtained from three states with different phases and amplitudes. Then, and also for classical light, the extension for two qubits of the Polarization-Coherence Theorem (PCT) (Eberly *et al.*, 2017) is presented, which involves wave-particle duality. This theorem, which relates visibility, distinguishability and polarization, was then extended for the case where polarization acts as a marker (De Zela, 2018), however, the path qubit had no participation in the quantities to be measured. Thus, an experimental realization is presented that also allows his contribution, evidencing the generalization of the theorem. Finally, with individual photons, two extensions to pure tripartite states are proposed. On the one hand, the PCT and, on the other, the triality relationship (Qian *et al.*, 2018), which involves visibility, distinguishability and concurrence. To do this, we took advantage of the restriction between degree of polarization and concurrence (Qian *et al.*, 2016), where this can now refer to sectors of the tripartite state, so a generalized concurrence was used (Rungta *et al.*, 2001). In this way, we will see that the entanglement between subsystems will participate in both relations that we seek to generalize, in addition to broadening the vision on the concept of wave-particle duality.

Agradecimientos

Agradezco profundamente mis padres, a mi familia, a mi asesor, compañeros y profesores del Grupo de óptica cuántica de la PUCP. Expreso mi gratitud también hacia el CONCYTEC, cuyo programa de becas 236-2015-FONDECYT permitió el desarrollo de este trabajo.



Índice de contenidos

Resumen	I
Abstract	II
Agradecimientos	III
Índice de contenidos	IV
Índice de tablas	VII
1. Conceptos Introdutorios	1
1.1. Estado Puro de un qubit	1
1.2. Estado Mixto de un qubit	2
1.3. Evolución del estado	3
1.4. Estados de polarización	5
1.4.1. Esfera de Poincaré	8
1.5. Estado de camino	10
1.5.1. Operadores de camino	10
1.6. Sistemas de qubits	13
2. Caracterización de un estado puro bipartito de polarización y camino	15
2.1. Introducción	15
2.2. Tomografía de un qubit de polarización	16
2.3. Tomografía de estados puros bipartitos de polarización y camino	18
2.3.1. Generación del estado bipartito de camino-polarización	18
2.3.2. Tomografía de estado bipartito camino-polarización	21
2.3.3. Estimación de máxima verosimilitud (MLE)	24
2.4. Propuesta experimental y resultados	28
2.5. Conclusiones	31
3. Comprobación experimental de la dualidad onda-partícula generalizada	33
3.1. Introducción	33
3.2. Cuantificación de la dualidad onda-partícula (WPD)	34

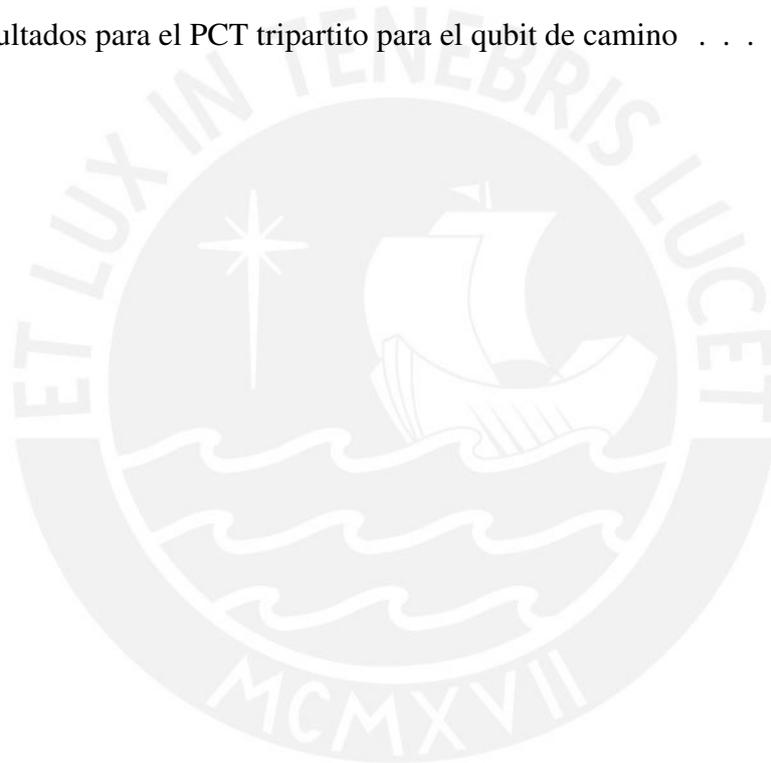
3.3.	Teorema de polarización-coherencia (PCT)	37
3.4.	Primera extensión del PCT	38
3.5.	Segunda extensión del PCT: WPD generalizada	42
3.6.	Propuesta experimental	45
3.7.	Resultados	48
3.8.	Conclusiones	51
4.	Dualidad onda-partícula para estados tripartitos	52
4.1.	Introducción	52
4.2.	Entrelazamiento cuántico	53
4.2.1.	Medida de entrelazamiento	54
4.2.2.	Concurrencia Generalizada	55
4.3.	Grado de polarización y concurrencia	56
4.3.1.	Restricción de P y C	56
4.3.2.	Extensión al caso de estados tripartitos puros	57
4.4.	Relación de Trialidad	59
4.5.	Propuestas experimentales	61
4.5.1.	Experimento I: Relación de trialidad extendida	61
4.5.2.	Experimento II: PCT para estado tripartito	66
4.6.	Conclusiones	69
	Referencias Bibliográficas	71

Índice de figuras

1.1. Esfera de Poincaré para estados de polarización	9
2.1. Arreglo experimental para preparar y medir estados puros arbitrarios	19
2.2. Partes real e imaginaria de la matriz densidad del estado objetivo de Bell	27
2.3. Amplitudes para el estado de Bell	28
2.4. Resultados para el estado de dos qubits con fases variables	30
2.5. Resultados para el estado de dos qubits con amplitudes variables	31
3.1. Interferencia de las componentes de un qubit de camino utilizando un BS.	34
3.2. Esquema de doble rendija para el PCT	37
3.3. Esquema experimental para PCT con qubit marcador	40
3.4. Esquema experimental para PCT extendido a dos qubits	43
3.5. Configuración experimental para la generalización de la dualidad onda-partícula	47
3.6. PCT generalizado: Primer caso	49
3.7. PCT generalizado: Segundo caso	50
3.8. PCT generalizado: Tercer caso	50
4.1. Partes real e imaginaria del estado inicial bipartito generado	62
4.2. Configuración experimental para un qubit de polarización con el rol de <i>quanton</i>	64
4.3. Relación de triadidad para estados tripartitos	66
4.4. Configuración experimental para un qubit de camino como <i>quanton</i>	67
4.5. PCT tripartito para el qubit de camino	70

Índice de tablas

2.1. Proyecciones para medir intensidades en tomografía de un qubit	17
4.1. Resultados para el PCT tripartito para el qubit de camino	69



Capítulo 1

Conceptos Introdutorios

1.1. Estado Puro de un qubit

En notación de Dirac, un estado está dado por un elemento de un espacio de Hilbert \mathcal{H} representado por un ket. En el caso particular de un estado puro de un qubit tendremos

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

donde α y $\beta \in \mathbb{C}$. También podemos expresar el estado en función de amplitudes y fases relativas escribiendo $\alpha = ae^{i\phi_a}$ y $\beta = be^{i\phi_b}$, donde $a, b, \phi_a, \phi_b \in \mathbb{R}$. Así, el estado quedará como

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle, \quad (1.2)$$

donde, $\phi = \phi_b - \phi_a$ es una fase relativa y la fase global ha sido descartada. Además, podemos utilizar la normalización del estado, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, para escribirlo en función de dos parámetros reales (θ, ϕ) . Estos controlan las amplitudes y la fase relativa respectivamente en el estado, que

ahora es dado por

$$|\Psi\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta e^{i\phi}|1\rangle. \quad (1.3)$$

1.2. Estado Mixto de un qubit

De manera más general, podemos representar un estado puro con el operador ρ , también llamado matriz densidad. En el caso de un estado puro de un qubit tenemos:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (1.4)$$

$$\hat{\rho} = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| \quad (1.5)$$

Este operador debe cumplir las siguientes propiedades para que sea considerado como un estado físico:

1. Traza 1: Suma de probabilidades igual a 1,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.6)$$

2. Hermiticidad: ser igual a su transpuesto conjugado,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger. \quad (1.7)$$

3. No-negatividad: es positivo semi-definido,

$$\hat{\rho} \geq 0, \quad (1.8)$$

lo que garantiza autovalores reales y no-negativos asociados a esta matriz densidad.

A diferencia de un estado puro, un estado mixto no puede representarse con un ket y requiere necesariamente una representación matricial. Por ello es conveniente definir la pureza del estado, que viene dada por

$$P = \text{Tr}(\hat{\rho}^2). \quad (1.9)$$

Podemos notar que para un estado puro $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$.

1.3. Evolución del estado

Mediciones

Podemos realizar mediciones relativas a observables, los cuales se representan mediante operadores que se aplican a un estado, como por ejemplo $\hat{A}|\psi\rangle$. Aquí el operador \hat{A} debe satisfacer la ecuación de autovalores dada por

$$A|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle, \quad (1.10)$$

en la que sus autovalores a_i deben ser números reales que corresponden a los autoestados $|\phi_i\rangle$. Luego, es posible descomponer espectralmente a \hat{A} mediante la base ortogonal dada por los estados $|\phi_i\rangle$:

$$\hat{A} = \sum_i a_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|. \quad (1.11)$$

Al hacer la medición de \hat{A} , la probabilidad P de obtener un autovalor a_i ligado a un autoestado $|\phi_i\rangle$ viene dada por

$$P(a_i) = \langle \psi | (|\phi_i\rangle \langle \phi_i|) | \psi \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} |\phi_i\rangle \langle \phi_i|). \quad (1.12)$$

Y el valor esperado de \hat{A} será

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}A) \quad (1.13)$$

Al final, después de una medición proyectiva el estado que queda será

$$\hat{\rho}' = \frac{\Pi_i \hat{\rho} \Pi_i}{\text{Tr}(\Pi_i \hat{\rho} \Pi_i)}, \quad (1.14)$$

donde $\Pi_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ es el proyector del estado $|\phi_i\rangle$ asociado al autovalor a_i .

Evolución unitaria

Si hablamos de un sistema cerrado podemos utilizar la ecuación de Schrödinger para ver la evolución temporal de este. En el caso de un estado $|\psi\rangle$ que cambia en el tiempo (imagen de Schrödinger) tenemos

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t}. \quad (1.15)$$

En ella podemos ver un estado dependiente del tiempo evolucionado con un operador de manera que

$$U|\psi_0\rangle = |\psi_t\rangle, \quad (1.16)$$

donde el operador evolución U está dado por

$$U(t) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}. \quad (1.17)$$

Análogamente, usando $|\psi_t\rangle\langle\psi_t| = U|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger$, para la matriz densidad obtenemos

$$\hat{\rho}_t = U\hat{\rho}_0U^\dagger \quad (1.18)$$

y de lo anterior obtenemos la ecuación de Von Neumann que rige la evolución del operador densidad:

$$\dot{\rho} = -i[\hat{H}, \rho]. \quad (1.19)$$

1.4. Estados de polarización

En un contexto clásico podemos tener un campo óptico

$$E(z, t) = E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y}, \quad (1.20)$$

que podría ser el campo eléctrico de un haz cuasi-monocromático que estamos representando con cada una de sus componentes. Estas dependen de la dirección de propagación z y el tiempo, dado un sistema de referencia. Con dicho campo podemos calcular una matriz de polarización-coherencia [1]

$$\mathcal{W}_E(z, t) = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

donde los corchetes implican un promedio y con dicha matriz podemos calcular el grado de polarización

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathcal{W}_E}{(\text{Tr } \mathcal{W}_E)^2}}. \quad (1.22)$$

En el caso de un campo óptico polarizado, hablamos de polarización como aquella característica que describe la dirección de oscilación del campo eléctrico, el cual oscila perpendicular a la dirección de propagación, es decir, en el plano transversal, donde podemos tener polarización lineal, circular, o en general elíptica. Dependiendo de nuestro sistema de referencia, podemos ver la polarización como la combinación de dos componentes de luz polarizada linealmente. Cuando están en fase, tenemos luz polarizada lineal, pero si hay desfase (una retrasada respecto a la otra), tenemos polarización circular. Mientras que la oscilación de la polarización lineal

ocurre solo en una dirección, la dirección de oscilación de la luz polarizada circular varía con el tiempo. Lo mismo ocurre también para la polarización elíptica.

Usando notación de Dirac y sin asumir un contexto cuántico [2] podemos representar en la base $|H\rangle, |V\rangle$, el estado de un qubit de polarización, dejando los otros estados como combinaciones lineales de estos estados según

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}, & |A\rangle &= \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |R\rangle &= \frac{|H\rangle - i|V\rangle}{\sqrt{2}}, & |L\rangle &= \frac{|H\rangle + i|V\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde las etiquetas significan D: diagonal, A: anti-diagonal, R: circular derecha, L: circular izquierda. Como el espacio de polarización es el espacio de qubits, usamos las matrices de Pauli que generan el grupo SU(2) para escribir:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^n S_i \cdot \sigma_i \right) = \sum_{i=0}^n S_i \cdot \sigma_i \quad (1.24)$$

Con σ_i , las matrices de Pauli que son

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

y S es el vector de Stokes, que en este caso está relacionado con el grado de polarización.

Podemos verificar que para cada matriz se cumple

$$\langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\sigma_i) = S_i, \quad (1.29)$$

es decir, de los valores esperados de los operadores de Pauli accedemos a las componentes del vector de stokes. Por ejemplo, en nuestro caso, la base de polarización, tenemos $\sigma_3 = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}\sigma_3) = \text{Tr}(\hat{\rho}(|H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|)), \quad (1.30)$$

donde vemos que podemos calcular la componente S_3 haciendo la resta de las proyecciones sobre cada estado de la base de polarización $|H\rangle, |V\rangle$.

$$S_3 = \langle H|\hat{\rho}|H\rangle - \langle V|\hat{\rho}|V\rangle. \quad (1.31)$$

Análogamente para las otras componentes tenemos

$$S_2 = \langle R|\hat{\rho}|R\rangle - \langle L|\hat{\rho}|L\rangle, \quad (1.32)$$

$$S_1 = \langle D|\hat{\rho}|D\rangle - \langle A|\hat{\rho}|A\rangle. \quad (1.33)$$

En cuanto a S_0 , es la intensidad total dada por

$$S_0 = \langle D|\hat{\rho}|D\rangle + \langle A|\hat{\rho}|A\rangle = \langle R|\hat{\rho}|R\rangle + \langle L|\hat{\rho}|L\rangle = \langle H|\hat{\rho}|H\rangle + \langle V|\hat{\rho}|V\rangle, \quad (1.34)$$

la cual usamos para normalizar las otras componentes. Por lo tanto, se puede caracterizar un

estado de un qubit, como por ejemplo el asociado con el grado de libertad de polarización, al determinar su vector de Stokes.

1.4.1. Esfera de Poincaré

De manera similar a la esfera de Bloch para qubits que representan un spin-1/2, tenemos la esfera de Poincaré para los estados de polarización. Cualquier estado, ya sea puro o mixto, puede ser representado en este espacio con su respectivo vector de Stokes. Retomando la definición clásica del grado de polarización de la Ec. (1.22), vemos que para calcularlo se utiliza la matriz hermítica de polarización-coherencia de la Ec. (1.21). De manera análoga, podemos calcular el grado de polarización utilizando la matriz densidad ρ , la cual también es hermítica. Entonces tenemos

$$P = \sqrt{1 - 4 \det \rho}, \quad (1.35)$$

donde ya dimos por hecho que $\text{Tr} \rho = 1$. Adicionalmente, se puede notar la semejanza estructural matemática que existe entre la Ec. (1.20) y un qubit arbitrario de polarización $\rho = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$.

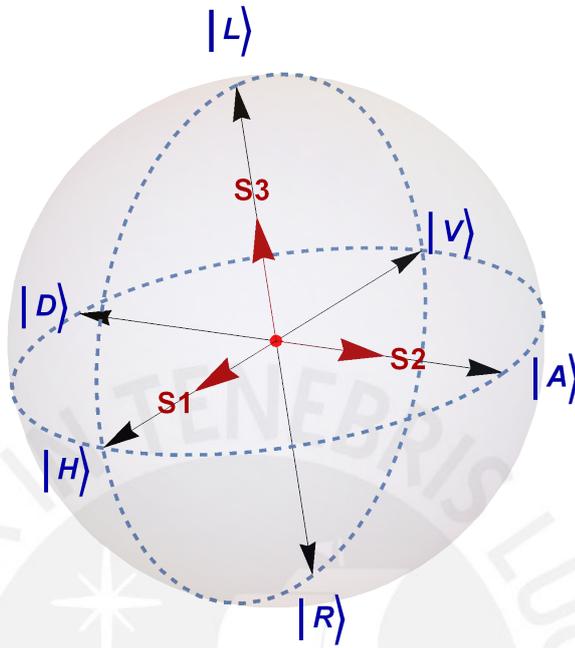


Figura 1.1: Esfera de Poincaré para estados de polarización. Se muestran las componentes del vector de Stokes \vec{S} de un estado arbitrario.

Este estado de polarización ρ tiene un grado de polarización equivalente al módulo del vector de Stokes, el cual podemos ver representado en la esfera a través de sus componentes en la Fig (1.1). En el plano ecuatorial de la esfera están las polarizaciones lineales y fuera de él, las polarizaciones elípticas. En el eje vertical están las polarizaciones circulares. Los puntos sobre la superficie de la esfera, que tiene radio 1, son los estados puros de polarización. Los estados mixtos son los puntos dentro de la misma, dejando al estado incoherente o completamente mixto como el centro de la esfera. Las evoluciones temporales del estado se representan como trayectorias en la esfera. Es por esto que es de gran utilidad. En general, podemos afirmar que una operación que mantenga las propiedades físicas del sistema, como es un canal cuántico, debería generar estas trayectorias. Por ejemplo podemos representar la acción de un retardador de media onda (HWP) como una rotación de 180° al rededor de un eje, el cual será determinado

por el retardador y resultará de rotar 2θ el eje horizontal alrededor del eje vertical, siendo θ el ángulo en que fue rotada la lámina. El cambio hecho por esta se representa como la evolución unitaria

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Lo mismo ocurre con el retardador de cuarto de onda (QWP) solo que la rotación es de 90° respecto al eje determinado por la lámina, dando al estado componentes de polarización circular.

$$Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 - i \sin(\theta)^2 & (-1 - i) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ (-1 - i) \cos(\theta) \sin(\theta) & -i \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

1.5. Estado de camino

Vamos a considerar ahora dos caminos y un haz que puede propagarse en uno de ellos o en un estado de superposición descrito por el qubit

$$|\Psi\rangle_{path} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.38)$$

donde $|0\rangle$, $|1\rangle$ son ortogonales. Las direcciones de propagación espacial que corresponden a estos vectores no necesariamente son perpendiculares entre sí.

1.5.1. Operadores de camino

Los siguientes operadores corresponden a los elementos más utilizados en los arreglos experimentales. Se muestran sus respectivas matrices en la base de camino $|0\rangle$, $|1\rangle$.

Espejos

Una operación σ_{\pm} con una fase i es realizada por el espejo al cambiar la dirección de propagación y por lo tanto el estado de camino. Tiene la matriz

$$U_M = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Si bien no se aprecia en esta definición, que es la usual, experimentalmente podemos notar que el espejo puede introducir una fase que depende de la polarización entrante.

Divisor de haz (BS)

El divisor de haz superpone dos estados de camino con pesos de acuerdo a su transmisibilidad y reflectividad. Este tiene una representación

$$U_{BS} = \begin{bmatrix} \sqrt{T} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

donde T, R son dichos coeficientes, respectivamente. Si el divisor de haz es 50/50, es decir transmite la mitad de la señal entrante y refleja perpendicularmente la otra, será el análogo a una puerta Hadamard en el estado de camino. Entonces su operador, en forma matricial, es dado por

$$U_{BS} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ i & 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Adicionalmente, por eficiencia experimental podremos recurrir a un divisor de haz de desplazamiento lateral (LDBS), que tiene un funcionamiento análogo salvo la dirección de salida del haz reflejado. Para el LDBS, en lugar de ser perpendicular a la señal incidente como en el BS,

será paralela y desplazada.

Divisor de haz polarizado (PBS)

Un divisor de haz polarizado separa el haz entrante en sus componentes horizontal y vertical. Visto de manera general, en la base $|H\rangle, |V\rangle$, vendrá dado por

$$U_{PBS} = |H\rangle\langle H| \otimes U_{BS_H} + |V\rangle\langle V| \otimes U_{BS_V}, \quad (1.42)$$

en el cual U_{BS_i} define la reflectividad y transmitividad de cada componente y esta en la base de camino $|0\rangle, |1\rangle$. De manera particular, el PBS que refleja la componente vertical y permite pasar a la horizontal, tiene el operador matricial

$$U_{PBS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

donde internamente notamos que

$$U_{BS_H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y} \quad (1.44)$$

$$U_{BS_V} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Además, y también por eficiencia experimental, podemos recurrir a un Desplazador de haz (BD), el cual desplaza lateralmente la componente horizontal. Opcionalmente podremos usar un divisor de haz polarizado de desplazamiento lateral (LDPBS), que tiene la misma función pero para el haz vertical.

1.6. Sistemas de qubits

En notación de Dirac podemos expresar un estado puro bipartito que pertenece al producto de espacios de Hilbert $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ y se escribe como

$$|\psi_{ab}\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle, \quad (1.46)$$

que de manera simplificada podemos expresar como $|\psi_{ab}\rangle = |\psi_a\rangle|\psi_b\rangle$ prescindiendo del símbolo de producto tensorial. Análogamente para la matriz densidad $\rho_{ab} = |\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|$ tenemos la expresión

$$\rho_{ab} = \rho_a \otimes \rho_b, \quad (1.47)$$

con la cual podemos expresar también estados mixtos. Si bien estos estados no tienen que necesariamente ser de dos niveles, en el presente trabajo se abordará sistemas bipartitos y tripartitos compuestos por qubits. En general nos referiremos a los estados de más de un qubit como sistemas y cualquier subconjunto de qubits como subsistema. Ahora, para expresar la matriz densidad de solo un subsistema utilizaremos

$$\rho_a = \text{Tr}_b \rho_{ab}, \quad (1.48)$$

que es el resultado de hacer la traza parcial al sistema completo sobre los estados de un subsistema. La evolución del sistema ρ_{ab} , si es cerrado, será dada por el operador evolución $\rho_{ab}^{(f)} = U \rho_{ab}^{(i)} U^\dagger$ que podría ser, por ejemplo, una puerta controlada, que para el caso de un estado bipartito camino(c)-polarización(p) sería

$$U_{cp} = |0_c\rangle\langle 0_c| \otimes \mathbf{I}_p + |1_c\rangle\langle 1_c| \otimes U_p. \quad (1.49)$$

En esta vemos que cada operador actuará en su respectivo espacio y que tenemos dos caminos $|0_c\rangle$ y $|1_c\rangle$, donde solo en uno de ellos se verá afectada la polarización del estado allí presenta con la evolución U_p . Todo lo anterior se puede aplicar análogamente para un estado tripartito $\rho_{abc} = \rho_a \otimes \rho_b \otimes \rho_c$ como veremos en el último capítulo.



Capítulo 2

Caracterización de un estado puro bipartito de polarización y camino

2.1. Introducción

En este capítulo se abordará el tema de tomografía de dos qubits, específicamente para el caso de un estado puro bipartito de polarización y camino óptico. Como sabemos, la cantidad mínima de mediciones necesarias para caracterizar un estado arbitrario de n qubits es 4^n . Es por este escalamiento exponencial que la eficiencia es tan valorada e investigada desde la introducción del método estroboscópico de Jamiołkowski [3]. Sobre métodos de estados bipartitos de polarización tenemos como principal referente al expuesto por James [4], donde se desarrolla un algoritmo que hace uso de 16 mediciones proyectivas para reconstruir una matriz densidad 4×4 . Luego para el caso de estados puros d -dimensionales Heinosaari *et al.* [5] encontraron que para el caso cuatridimensional el límite inferior era de 10 mediciones. Más recientemente, Ma *et al.* [6] probaron que para determinar la unicidad de un estado puro bipartito entre todos los estados posibles se necesitaban 11 mediciones (tipo Pauli). Después, el estudio estuvo enfocado también en protocolos que verifiquen la calidad de los estados producidos con respecto a un

estado objetivo como en [7, 8]; sin embargo, estos no abordan métodos de caracterización y no trataremos este tipo de métodos. Lo que haremos será abordar generación y tomografía de estados puros camino-polarización como vemos en el trabajo de Gonzales *et al.*[9], pero logrando superar el inconveniente de tener dos posibles resultados. Si bien para el caso de polarización existe un método bien ilustrado, para el caso de camino-polarización no hay un método análogo, al menos no como el que proponemos. En este no se necesitan elementos adicionales a los que se utiliza usualmente en los arreglos ópticos de tomografía estándar de polarización. El protocolo expuesto se describe en [10].

2.2. Tomografía de un qubit de polarización

Para caracterizar un estado de polarización ρ_p necesitamos determinar el vector de Stokes asociado a este, como vemos en la Ec. (1.24). La información de 6 medidas de intensidad será utilizada para calcular cada componente de dicho vector, las cuales son

$$S_1 = \frac{I_D - I_A}{S_0} \quad (2.1a)$$

$$S_2 = \frac{I_R - I_L}{S_0} \quad (2.1b)$$

$$S_3 = \frac{I_H - I_V}{S_0} \quad (2.1c)$$

Sin embargo, podemos limitarnos a medir solo 4 y obtener las demás gracias a la normalización del estado hecha con la intensidad total

$$S_0 = I_D + I_A = I_R + I_L = I_H + I_V. \quad (2.2)$$

Se tiene, entonces, un conjunto de 6 ecuaciones con 10 variables que tendrá solución al determinar, por lo menos, 4 de estas [11]. El arreglo óptico para realizar esta medición consiste de

un dispositivo QHP, compuesto por retardadores de media onda (H), de cuarto de onda (Q) y un polarizador (P). Haciendo las rotaciones respectivas al vector de Stokes, podemos ver las componentes relacionadas a cada polarización. Para ello, elegimos un conjunto no único de ángulos (α, β) para fijar las láminas retardadoras antes de la medida de intensidades dada por $I(\alpha, \beta) = \text{Tr}\{P_h H(\alpha) Q(\beta) \rho_p Q^\dagger(\alpha) H^\dagger(\beta)\}$. Las mencionadas cuatro intensidades serán:

$$I(0, 0) = I_H, \quad (2.3a)$$

$$I(\pi/4, 0) = I_V, \quad (2.3b)$$

$$I(\pi/8, \pi/4) = I_D, \quad (2.3c)$$

$$I(-\pi/8, 0) = I_R, \quad (2.3d)$$

donde $P_h = |H\rangle\langle H|$ se elige como la proyección en el estado de polarización $|H\rangle$. Finalmente, con estas medidas podemos calcular el vector de stokes $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ por medio de (2.1).

I	Q(β)	H(α)
H	0°	0°
V	0°	45°
R	0°	22.5°
L	90°	22.5°
D	45°	22.5°
A	45°	-22.5°

Tabla 2.1: Proyecciones para medir intensidades $I(\alpha, \beta)$ en tomografía de un qubit. Se muestran los ángulos que deben tener las láminas retardadoras de media y cuarto de onda para las respectivas proyecciones.

Cabe aclarar que para ganar precisión usualmente se realizan las 6 mediciones completas descritas en la Tab.(2.2), a menos que, tal vez, tengamos sistemas de n qubits de polarización y necesitaremos la misma cantidad de dispositivos QHP para realizar las 4^n mediciones. En ese caso, la ventaja de medir el mínimo se hace importante. Por otro lado, una vez que ya hemos caracterizado nuestro estado, puede ser necesario verificar la fidelidad de este ρ_{exp} , con respecto

a un estado teórico objetivo ρ . Para ello usamos la medida de fidelidad que se define como [12]

$$\mathcal{F}(\rho, \rho_{\text{exp}}) = \text{Tr} \left[\sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \rho_{\text{exp}} \rho^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (2.4)$$

donde $0 \leq \mathcal{F} \leq 1$ y además se cumple la simetría $\mathcal{F}(\rho, \rho_{\text{exp}}) = \mathcal{F}(\rho_{\text{exp}}, \rho)$. Esto es más evidente en la expresión de fidelidad para estados puros que es dada por $\mathcal{F}(\psi_{\text{exp}}, \psi) = |\langle \psi_{\text{exp}} | \psi \rangle|^2$. Evidentemente, en el caso ideal de un estado experimental idéntico al objetivo se tendría $\mathcal{F} = 1$.

2.3. Tomografía de estados puros bipartitos de polarización y camino

2.3.1. Generación del estado bipartito de camino-polarización

Nuestra propuesta hace uso de dos grados de libertad del haz de luz proveniente del láser: la polarización y los dos caminos que puede seguir dentro de un arreglo interferométrico. El estado de polarización se puede describir como una combinación lineal de estados de polarización horizontal y vertical, $|h\rangle$ y $|v\rangle$, por lo que usamos la notación de Dirac sin implicar que estamos describiendo un fenómeno cuántico. De manera similar, si los dos caminos dentro del interferómetro están etiquetados por x e y , un estado general de camino es una superposición de los estados ortogonales $|x\rangle$ e $|y\rangle$. Por lo tanto, los estados de polarización y los estados de camino constituyen la realización física de nuestros dos qubits. El estado del sistema bipartito camino-polarización se puede escribir como una combinación lineal de cuatro estados base: $|xh\rangle$, $|xv\rangle$, $|yh\rangle$, y $|yv\rangle$, donde se ha usado la notación simplificada $|xh\rangle \equiv |x\rangle \otimes |h\rangle$, etc. El estado puro más general es una combinación lineal de estos estados base. Por lo tanto, implica cuatro coeficientes complejos, es decir, ocho números reales. Sin embargo, se pueden reducir a seis el número de parámetros independientes que caracterizan un estado si lo consideramos

normalizado y con una de sus fases factorizada y descartada como fase global. Entonces un estado puro general de dos qubits está dado por

$$|\psi\rangle = \alpha e^{i\phi_\alpha}|xh\rangle + \beta e^{i\phi_\beta}|xv\rangle + \gamma e^{i\phi_\gamma}|yh\rangle + \delta|yv\rangle, \quad (2.5)$$

con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$.

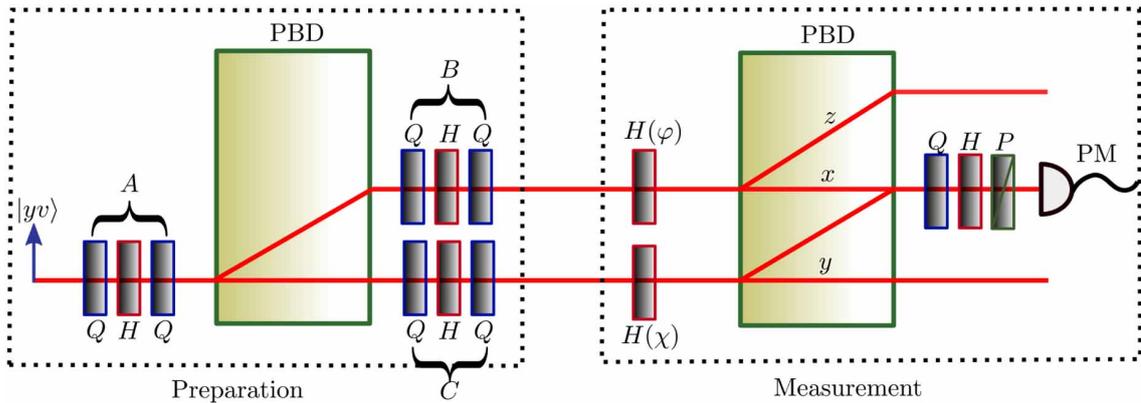


Figura 2.1: Arreglo experimental para preparar y medir estados puros arbitrarios. El cuadro punteado de la izquierda es la etapa de preparación. Primero, un estado polarizado verticalmente pasa por un dispositivo *quarter-half-quarter* (QHQ), el cual es capaz de realizar cualquier transformación $SU(2)$ (Simon & Mukunda, 1990). Luego, el estado resultante pasa a través de un desplazador de haz polarizado (PBD), que desplaza la componente horizontal del haz. Los haces pasan por dispositivos QHQ para completar la preparación del estado. En la siguiente etapa, ambos haces entran en placas retardadoras de media onda en ángulos específicos, lo que determina cómo se combinarán los haces en el segundo PBD. Finalmente, la tomografía de polarización se lleva a cabo en el brazo x utilizando placas de cuarto y de media onda seguidas de un polarizador (P). Los resultados se registran con un medidor de potencia (PM) y se usan para reconstruir el estado.

Por medio de un arreglo óptico como el de la Fig. (2.1). se puede generar y caracterizar un estado puro bipartito como el antes mencionado. En dicho arreglo, un haz viaja por el camino y con polarización vertical— i.e., el estado $|yv\rangle$ — se ve afectado por una transformación que afecta su polarización al ser sometido a la acción de dos láminas de cuarto de onda (Q) y una de media onda (H). Esta secuencia QHQ le llamamos A en la Fig. 2.1. Vamos a describir la acción de estos elementos retardadores de fase, ya ilustrados en forma matricial en la Sec. (1.4.1), con los

operadores:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 - i \cos 2\alpha)|h\rangle\langle h| - i \sin 2\alpha(|h\rangle\langle v| + |v\rangle\langle h|) + (1 + i \cos 2\alpha)|v\rangle\langle v|], \quad (2.6)$$

$$H(\beta) = -i[\cos 2\beta(|h\rangle\langle h| - |v\rangle\langle v|) + \sin 2\beta(|h\rangle\langle v| + |v\rangle\langle h|)]. \quad (2.7)$$

Aquí, α y β son los ángulos de inclinación de los ejes rápidos de las placas con respecto a la dirección vertical. Luego de pasar por A , se aplica un desplazador de haz polarizado (PBD), para separar la componente vertical de horizontal. Usamos x para denotar el camino desplazado. Los haces de luz en cada camino tienen sus polarizaciones transformadas por dos QHQ s adicionales que están etiquetadas como B y C . Elegimos las orientaciones de las placas retardadoras que constituyen los tres conjuntos QHQ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &: Q\left(\frac{\pi}{4}\right) H\left(\frac{-4\theta_1 - \phi_\beta + \phi_\gamma - \phi_\alpha - 2\pi}{8}\right) Q\left(\frac{\pi}{4} - \theta_1\right), \\ B &: Q\left(\frac{\pi}{4}\right) H\left(\frac{2\phi_2 + \phi_\beta - \phi_\alpha}{4}\right) Q\left(\phi_2 - \frac{\pi}{4}\right), \\ C &: Q\left(\frac{\pi}{4}\right) H\left(\frac{-2\phi_1 - \phi_\gamma}{4}\right) Q\left(-\phi_1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Con estos ángulos, obtenemos el estado

$$|\psi\rangle = \sin \theta_1 \sin \phi_2 e^{i\phi_\alpha} |xh\rangle + \sin \theta_1 \cos \phi_2 e^{i\phi_\beta} |xv\rangle + \cos \theta_1 \cos \phi_1 e^{i\phi_\gamma} |yh\rangle + \cos \theta_1 \sin \phi_1 |yv\rangle. \quad (2.9)$$

Este es el estado puro de dos qubits más general salvo la fase global y la normalización, la cual se evidencia en la parametrización de las amplitudes en términos de los ángulos θ_1 , ϕ_1 y ϕ_2 . Como se ve, la propuesta involucra tres dispositivos QHQ , que son capaces de realizar cualquier transformación [13]. Estos podrían ser reducidos a un menor número de placas retardadoras, ya que hacemos solo una rotación de un estado de polarización, como la que puede hacer un

dispositivo QQ [14, 15]; Sin embargo, elegimos el QHQ pues nos permite fijar fácilmente sus orientaciones en términos de los parámetros que definen el estado objetivo. Adicionalmente, el número de placas también podría verse reducido si se busca preparar estados más simples que dependen de menos parámetros.

2.3.2. Tomografía de estado bipartito camino-polarización

Para obtener los parámetros que definen el estado puro bipartito camino-polarización, se tendrá un procedimiento que esencialmente es el mismo que el utilizado en el caso de un solo qubit. Supongamos que hemos preparado el estado dado por la Ec. (2.9). Su caracterización se puede realizar con la etapa de medición que se muestra en Fig. (2.1). Cada uno de los haces, x e y , que provienen de la etapa de preparación, se someten a una placa HWP antes de ingresar a un PBD. Dependiendo de los valores de φ y χ , a los que se han fijado las placas HWP en los brazos x e y , respectivamente, se pueden presentar distintas combinaciones de los haces. La componente horizontal del haz x es desplazada por el PBD hacia un nuevo camino, z , que termina siendo bloqueado. Esto también ocurre con el haz y no desviado. Por otro lado, el rayo y desviado se superpone con el rayo x no desviado para luego ser sometidos a una tomografía de polarización estándar de un solo qubit.

Veamos ahora el estado más general, puro de dos qubits, en el cual no anularemos una de las cuatro fases como una fase global:

$$|\psi\rangle = \alpha e^{i\phi_\alpha} |xh\rangle + \beta e^{i\phi_\beta} |xv\rangle + \gamma e^{i\phi_\gamma} |yh\rangle + \delta e^{i\phi_\delta} |yv\rangle. \quad (2.10)$$

El objetivo será caracterizar ese estado desconocido puro de dos qubits. Para ello, determinaremos las cuatro amplitudes del estado general $|\psi\rangle$ junto a todas sus posibles fases relativas. El estado $|\psi\rangle_x$ al que sometemos a tomografía de polarización resulta de hacer la proyección en el

camino x (ver Fig. 2.1). Este estado será

$$|\psi\rangle_x = -i \left[(e^{i\phi_\gamma} \gamma \cos 2\chi + e^{i\phi_\delta} \delta \sin 2\chi) |h\rangle + (-e^{i\phi_\beta} \beta \cos 2\varphi + e^{i\phi_\alpha} \alpha \sin 2\varphi) |v\rangle \right] \otimes |x\rangle, \quad (2.11)$$

el cual contiene toda la información que caracteriza a $|\psi\rangle$, así como los ángulos (φ, χ) de las HWPs antes del segundo PBD. Como $|\psi\rangle$ contiene cuatro fases, hay $4 \times 3/2 = 6$ fases relativas involucradas. Si colocamos dichas HWPs antes del PBD en la etapa de medición de la Fig. (2.1) en los ángulos $\varphi = 0$ y $\chi = \pi/4$, entonces las intensidades de las Ecs. (2.3) serán dadas por

$$i_1 = \delta^2, \quad (2.12a)$$

$$i_2 = \beta^2, \quad (2.12b)$$

$$i_3 = \frac{1}{2} (\beta^2 + \delta^2 - 2\beta\delta \cos(\phi_\beta - \phi_\delta)), \quad (2.12c)$$

$$i_4 = \frac{1}{2} (\beta^2 + \delta^2 - 2\beta\delta \sin(\phi_\beta - \phi_\delta)). \quad (2.12d)$$

Si fijamos $\varphi = \pi/4$ y $\chi = 0$, se tiene

$$i_5 = \gamma^2, \quad (2.13a)$$

$$i_6 = \alpha^2, \quad (2.13b)$$

$$i_7 = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma \cos(\phi_\alpha - \phi_\gamma)), \quad (2.13c)$$

$$i_8 = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma \sin(\phi_\alpha - \phi_\gamma)). \quad (2.13d)$$

Fijando $\varphi = \chi = \pi/4$, se tendrán los siguientes valores para las componentes diagonal y

circular derecha:

$$i_9 = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta \cos(\phi_\alpha - \phi_\delta)), \quad (2.14a)$$

$$i_{10} = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta \sin(\phi_\alpha - \phi_\delta)), \quad (2.14b)$$

mientras que para $\varphi = \chi = 0$, respectivamente estas serán

$$i_{11} = \frac{1}{2} (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos(\phi_\beta - \phi_\gamma)), \quad (2.15a)$$

$$i_{12} = \frac{1}{2} (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin(\phi_\beta - \phi_\gamma)). \quad (2.15b)$$

Con esto los valores absolutos de las cuatro amplitudes, α , β , γ y δ , son dados respectivamente por i_6 , i_2 , i_5 e i_1 . La condición de normalización, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, define la intensidad: $i_0 = i_1 + i_2 + i_5 + i_6$. Para calcular las cuatro fases mostradas en las ecuaciones anteriores usaremos:

$$\phi_\beta - \phi_\delta = \tan^{-1} \left(\frac{2i_4 - i_2 - i_1}{2i_3 - i_2 - i_1} \right), \quad (2.16a)$$

$$\phi_\alpha - \phi_\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{2i_8 - i_6 - i_5}{2i_7 - i_6 - i_5} \right), \quad (2.16b)$$

$$\phi_\alpha - \phi_\delta = \tan^{-1} \left(\frac{2i_{10} - i_6 - i_1}{2i_9 - i_6 - i_1} \right), \quad (2.16c)$$

$$\phi_\beta - \phi_\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{2i_{12} - i_2 - i_5}{2i_{11} - i_2 - i_5} \right). \quad (2.16d)$$

Las Ecs. (2.16) determinan las fases restantes: $\phi_\alpha - \phi_\beta = (\phi_\alpha - \phi_\delta) - (\phi_\beta - \phi_\delta)$ y $\phi_\delta - \phi_\gamma = (\phi_\alpha - \phi_\gamma) - (\phi_\alpha - \phi_\delta)$. Por lo tanto, midiendo doce intensidades $i_{j=1,\dots,12}$, logramos nuestro objetivo de reconstruir el estado puro bipartito de camino-polarización. Podríamos cuestionarnos ahora por qué hemos mostrado cómo calcular cuatro fases relativas si solo tres son suficientes para determinar el estado total. La respuesta es que, si alguna amplitud fuera cero, su fase corres-

pendiente sería indeterminada, por lo que sería imposible reconstruir el estado asumiendo solo tres fases relativas. Por ejemplo, para un estado con $\delta = 0$, no podríamos usar las Ecs. (2.16a) y (2.16c) para tener $\phi_\beta - \phi_\delta$ y $\phi_\alpha - \phi_\delta$, pero las tres fases determinadas podrían ser obtenidas de las Ecs. (2.16b) y (2.16d). Por lo tanto, para el estado más general, es necesario medir doce intensidades; sin embargo, si se sabe que ninguna amplitud es cero o cuál de las amplitudes es cero, cualquier estado podría caracterizarse completamente a partir de solo diez mediciones, el mínimo teórico encontrado por Heinosaari *et. al.* [5]. Adicionalmente resaltamos que, si bien tenemos estados de dos qubits, el protocolo descrito requiere, salvo las configuraciones de las placas en la plataforma de medición, que realicemos solo tomografía estándar de polarización de un solo qubit.

2.3.3. Estimación de máxima verosimilitud (MLE)

Nuestro protocolo tenía como intención tener ventaja sobre otros métodos dando por hecho que estamos produciendo y midiendo estados puros. Sin embargo, como pueden haber cuestionamientos sobre qué tan puro es un estado preparado en el laboratorio, se implementó un procedimiento de estimación de máxima verosimilitud adaptado también del planteamiento en [4], que fue diseñado para estados de dos qubits.

Por lo visto en la sección anterior, para el estado puro de dos qubits más general necesitamos doce mediciones, i_1, \dots, i_{12} , en el estado objetivo

$$|\psi\rangle = (\alpha e^{i\phi_\alpha}, \beta e^{i\phi_\beta}, \gamma e^{i\phi_\gamma}, \delta e^{i\phi_\delta})^T, \quad (2.17)$$

cuya matriz es

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^2 & e^{i(\phi_\alpha - \phi_\beta)}\alpha\beta & e^{i(\phi_\alpha - \phi_\gamma)}\alpha\gamma & e^{i(\phi_\alpha - \phi_\delta)}\alpha\delta \\ e^{-i(\phi_\alpha - \phi_\beta)}\alpha\beta & \beta^2 & e^{i(\phi_\beta - \phi_\gamma)}\beta\gamma & e^{i(\phi_\beta - \phi_\delta)}\beta\delta \\ e^{-i(\phi_\alpha - \phi_\gamma)}\alpha\gamma & e^{-i(\phi_\beta - \phi_\gamma)}\beta\gamma & \gamma^2 & e^{i(\phi_\gamma - \phi_\delta)}\gamma\delta \\ e^{-i(\phi_\alpha - \phi_\delta)}\alpha\delta & e^{-i(\phi_\beta - \phi_\delta)}\beta\delta & e^{-i(\phi_\gamma - \phi_\delta)}\gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Esta depende, como ya vimos, de cuatro amplitudes ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) y seis fases relativas, de las cuales cuatro son independientes una de la otra. Llamaremos $\rho^{(\text{exp})}$ a la matrix experimental que representa los estados producidos y con ella obtendremos los observables dados por

$$i_\nu^{(\text{exp})} = \text{Tr} \left(|H\rangle\langle H| A_{(\theta, \lambda)} \rho_{(\varphi, \chi)}^{(\text{exp})} A_{(\theta, \lambda)}^\dagger \right), \quad (2.19)$$

donde $\nu = (\theta, \lambda, \varphi, \chi)$, $A_{(\theta, \lambda)} = H(\theta)Q(\lambda)$ y $\rho_{(\varphi, \chi)}^{(\text{exp})} = |\psi'\rangle\langle\psi'|$. En donde ψ' es el segundo qubit, en este caso el de polarización, del estado bipartito $U_{PBD}O(\varphi, \chi)|\psi\rangle$, con $|\psi\rangle$ dado por la Ec. (2.17). Se fija $O(\varphi, \chi) = |x\rangle\langle x| \otimes H(\varphi) + |y\rangle\langle y| \otimes H(\chi)$, y U_{PBD} es la operación que realiza el desplazador de haz polarizado (ver Fig. 2.1).

Además de $\rho^{(\text{exp})}$, usaremos la matriz densidad $\rho_p(t_i) = |\psi_p(t_i)\rangle\langle\psi_p(t_i)|$ que está en función de $t_{i=1, \dots, 8}$, que son los parámetros que se deben ajustar para maximizar el *likelihood* o verosimilitud de que $\rho_p(t_i)$ ciertamente represente lo medido. Para ello se consideran los siguientes observables,

$$i_\nu^{(t)} = \text{Tr} \left(|H\rangle\langle H| A_{(\theta, \lambda)} \rho_p(t_1, \dots, t_8) A_{(\theta, \lambda)}^\dagger \right). \quad (2.20)$$

Siguiendo lo planteado en James *et al.* [4], usamos una distribución de probabilidad Gaussiana para representar la diferencia entre $i_\nu^{(t)}$ y $i_\nu^{(\text{exp})}$

$$P(i_1, \dots, i_{12}) = \frac{1}{N_0} \prod_{\nu=1}^{12} \exp \left\{ \left[-\frac{(i_\nu^{(t)} - i_\nu^{(\text{exp})})^2}{2\sigma_\nu^2} \right] \right\}, \quad (2.21)$$

con desviación estandar $\sigma_\nu = \sqrt{i_\nu^{(t)}}$. En lugar de maximizar P directamente, conviene minimizar

$$\mathcal{L} = \sum_{\nu=1}^{12} \frac{[Tr(|H\rangle\langle H|A_\nu\rho_p(t_1, \dots, t_8)A_\nu^\dagger) - i_\nu^{(\text{exp})}]^2}{2\sigma_\nu^2(t_1, \dots, t_8)}. \quad (2.22)$$

Ahora, para $\rho_p(t_i)$, elegiremos una matriz que cumpla los requisitos para ser un estado físico, como puede ser

$$\rho_p(t_i) = \frac{T^\dagger(t)T(t_i)}{Tr(T^\dagger(t_i)T(t_i))}, \quad (2.23)$$

donde $T(t_i)$ es alguna matriz apropiada. Convenientemente elegida en James *et al.* [4] al ser tridiagonal y fácilmente invertible, esta viene dada por

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 + it_6 & t_2 & 0 & 0 \\ t_{11} + it_{12} & t_7 + it_8 & t_3 & 0 \\ t_{15} + it_{16} & t_{13} + it_{14} & t_9 + it_{10} & t_4 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Notamos que T depende de dieciséis parámetros, mientras que el mínimo requerido para describir un estado general (posiblemente mixto) es quince. Este parámetro adicional es necesario ya que determina una constante desconocida relacionada a la calibración del instrumento como podrían ser, por ejemplo, el flujo de fotones, la intensidad de referencia, la eficiencia del detector, etc. En el caso presente, T corresponde a un estado puro, por lo que necesitamos ocho parámetros t_i . Para que $\rho_p(t_i)$ en la Ec. (2.23) coincida con la matriz densidad del estado puro

ρ_{ij} de la Ec. (2.18), tomaremos

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i(\phi_\alpha - \phi_\delta)}\alpha & e^{-i(\phi_\beta - \phi_\delta)}\beta & e^{-i(\phi_\gamma - \phi_\delta)}\gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Regresando a la Ec. (2.22), se puede minimizar \mathcal{L} aplicando métodos como el algoritmo multidimensional de Powell. Este requiere una estimación inicial para los t_i , lo que se hace usando (2.25), con los parámetros del lado derecho tomados de $\rho^{(\text{exp})}$, que es directamente construida de los observables medidos, $i_\nu^{(\text{exp})}$.

En nuestro caso, y como era de esperar, aplicar el MLE no brinda una mejoría adicional en acercar nuestros estados experimentales a los objetivos. Como ejemplo, vemos abajo las Figs. (2.2) y (2.3). Aún así, como hemos mostrado, nuestro protocolo está abierto a la estimación de máxima verosimilitud si se considera necesario.

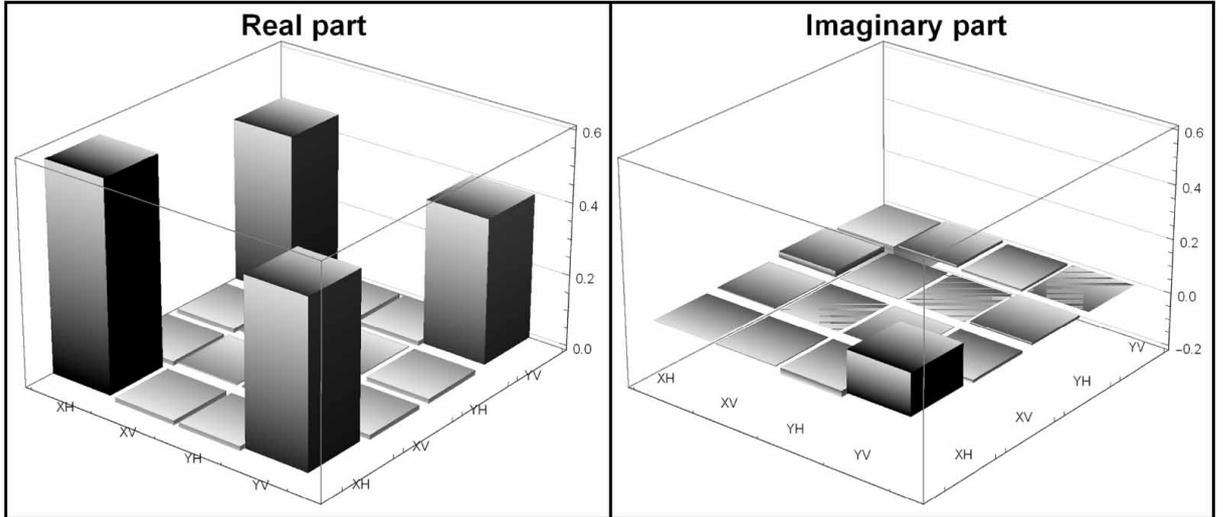


Figura 2.2: Partes real e imaginaria de la matriz densidad estimada con MLE que corresponde al estado objetivo de Bell: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|xh\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|yv\rangle$.

2.4. Propuesta experimental y resultados

Se utilizó un láser HeNe (longitud de onda central medida de 633 nm, potencia de salida de 11,5 mW). Después de que el haz atravesó el arreglo óptico que se muestra en la Fig. (2.1), realizamos las mediciones de intensidad requeridas siguiendo el procedimiento explicado en la Sec. 2.3.2. De esta forma obtuvimos los parámetros que caracterizaron los estados puros de dos qubits que se prepararon. Para obtener los parámetros realizamos ocho repeticiones de cada medida. Antes de cada medición, se tuvo que ajustar una fase relativa, que está asociada a la diferencia de camino óptico, alineando el segundo desplazador de haz. La incertidumbre de cada parámetro se calculó con la expresión $\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_s^2}$, en la cual σ_a es el error de lectura de los ángulos de las placas y σ_s es la desviación estándar de las repetidas mediciones. Evaluamos qué tan bien los estados objetivo y producido coinciden entre sí por medio de la fidelidad $\mathcal{F} = |\langle \phi_{\text{target}} | \phi_{\text{exp}} \rangle|^2$, la cual, como ya vimos en (2.4), debería acercarse a 1.

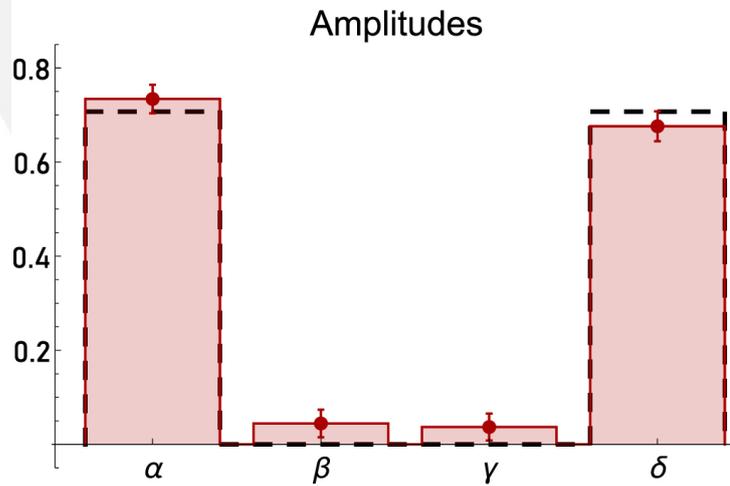


Figura 2.3: Amplitudes para el estado de Bell. Las barras discontinuas y sólidas indican los valores teóricos y experimentales de las amplitudes, respectivamente. Las incertidumbres estimadas de las mediciones se muestran en la parte superior de las barras sólidas.

Nuestro primer estado objetivo fue el estado de Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|xh\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|yv\rangle. \quad (2.26)$$

Todas las fases relativas desaparecen en este caso, por lo que la única fase medible también debería desaparecer. Se obtuvo $\phi_\alpha - \phi_\delta = 0^\circ \pm 7^\circ$, lo que es consistente con el resultado esperado ($\phi_\alpha = \phi_\delta$) según nuestra precisión experimental. Los valores medidos para las amplitudes se ajustaban bien a los teóricos, como se ve en Fig. 2.3. En este caso tuvimos una fidelidad $\mathcal{F} = 0,99 \pm 0,06$. Como segundo caso para ilustrar el protocolo se abordó el estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}e^{i\frac{9\pi}{10}}|xh\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{5}}|xv\rangle + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}|yh\rangle + \frac{1}{2}|yv\rangle, \quad (2.27)$$

en el cual todos los estados base tienen el mismo peso pero diferentes fases relativas. Se eligió una fase negativa y dos positivas para demostrar la capacidad de nuestro método tomográfico. Los gráficos de barras en la Fig. (2.4) muestran las amplitudes y fases medidas. Nuevamente, nuestros resultados experimentales mostraron que el estado preparado se aproximaba mucho al objetivo, con una fidelidad $\mathcal{F} = 0,986 \pm 0,044$.

Como último caso, se preparó un estado en el que los estados base contribuyen con amplitudes variables, lo que implicó una prueba más compleja para nuestro protocolo. Este último estado objetivo fue

$$|\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|xh\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\zeta|xv\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\zeta|yh\rangle. \quad (2.28)$$

Se muestran los resultados experimentales en Fig. 2.5. De nuevo, obtuvimos una buena concordancia entre el estado preparado y el estado objetivo, alcanzando así valores de fidelidad que oscilaron entre $\mathcal{F} = 0,98 \pm 0,08$ a $\mathcal{F} = 0,994 \pm 0,089$. Los casos para $\zeta = 0^\circ$ y $\zeta = 45^\circ$ merecen ser comentados. Cuando $\zeta = 0^\circ$, el estado objetivo se reduce a $|\Gamma\rangle = |x\rangle \otimes (|h\rangle - |v\rangle)/\sqrt{2}$,

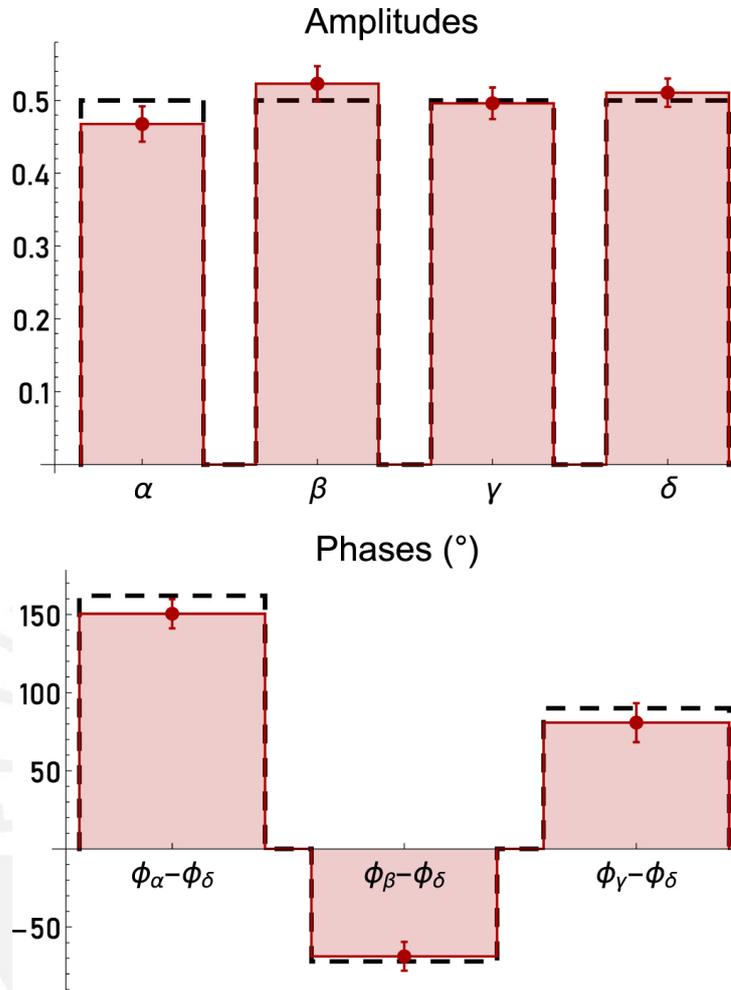


Figura 2.4: Resultados para el estado de dos qubits con fases variables. Las barras discontinuas y sólidas indican los valores teóricos y experimentales, respectivamente. Los resultados de las amplitudes y fases se muestran con sus incertidumbres estimadas en la parte superior de las barras sólidas.

que tiene dos fases indeterminadas: ϕ_γ y ϕ_δ . De manera similar, cuando $\zeta = 45^\circ$ se tiene $|\Gamma\rangle = (|x\rangle + |y\rangle) \otimes |h\rangle / \sqrt{2}$, para el cual ϕ_β y ϕ_δ son indeterminados. Dichas fases, cuando se calculan a partir de datos experimentales, toman valores aleatorios. Aún así, los presentamos en Fig. (2.5) por completitud.

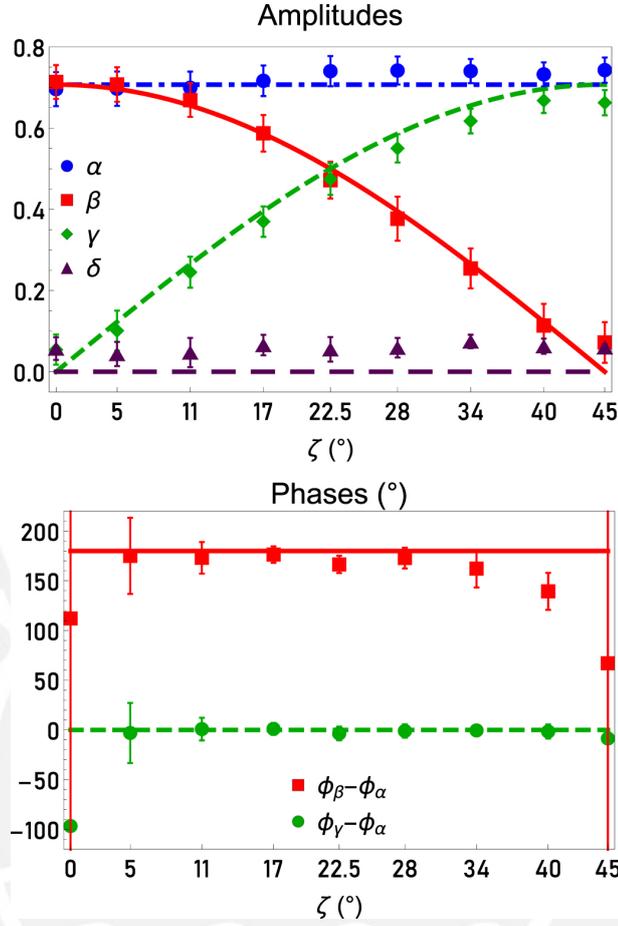


Figura 2.5: Resultados para el estado de dos qubits con amplitudes variables. Las líneas representan los valores teóricos de las amplitudes y fases. Los puntos indican los resultados experimentales con sus respectivas barras de error. Las barras de error de $\phi_\beta - \phi_\alpha$ y $\phi_\gamma - \phi_\alpha$ son infinitas cuando $\zeta = 0^\circ, 45^\circ$.

2.5. Conclusiones

Hemos presentado un procedimiento para la síntesis y caracterización de estados puros de dos qubits, que se realizan experimentalmente como estados de camino-polarización. Salvo ajustes de láminas y procedimientos de registro de datos que podrían automatizarse fácilmente, nuestro protocolo de caracterización requiere realizar un procedimiento similar al de la tomografía estándar de polarización de un solo qubit. Para demostrar la viabilidad de este procedimiento, preparamos y medimos tres tipos de estados: un estado de Bell $|\Phi^+\rangle$, un estado con

fases distintas $|\Psi\rangle$, y un estado $|\Gamma\rangle$ con amplitudes variables. Como se aprecia en los gráficos, los resultados fueron satisfactorios.

Por otro lado, nuestro protocolo produce estados que son, por construcción, puros y normalizados. Por lo tanto, sus matrices densidad son siempre no negativas, hermíticas, y con trazas unitarias. Otros métodos no siempre producen matrices que satisfagan estas propiedades. Esto requiere imponerlos a través de técnicas como la estimación de máxima verosimilitud (MLE) [4]. A diferencia de la propuesta de Gonzales *et al.* [9], el presente método puede ser usado sin conocer el estado objetivo. Además, nuestra propuesta permite preparar fácilmente fases relativas arbitrarias, no requiere dispositivos estabilizadores y tiene todos los instrumentos ópticos necesarios listos y posicionados durante todo el procedimiento, porque la totalidad de las mediciones se realizan con el mismo conjunto de instrumentos. Teniendo información previa suficiente, podríamos determinar un estado puro de dos qubits solo con diez medidas, lo que está en concordancia con Heinosaari *et al.*[5].

Capítulo 3

Comprobación experimental de la dualidad onda-partícula generalizada

3.1. Introducción

En este capítulo abordaremos la dualidad onda-partícula (WPD). Comenzaremos exponiendo la restricción inicial de la WPD que sirve de punto de partida para posteriores relaciones. En estas aparecen cantidades que cuantifican la WPD para un *quanton*, el cual es un objeto que presenta dicha dualidad. Estos cuantificadores son la distinguibilidad (\mathcal{D}) y visibilidad (\mathcal{V}), que están asociadas a las cualidades particular y ondulatoria, respectivamente. Una relación que apareció en esta línea es el teorema de polarización-coherencia (PCT), el cual relaciona el grado de polarización \mathcal{P} con \mathcal{D} y \mathcal{V} [16]. Luego, el PCT fue extendido para el caso donde haya un marcador de camino que ayude a distinguir el *quanton* [17]. En ese planteamiento, sin embargo, el marcador terminó tomando protagonismo de la WPD relegando al *quanton*, lo que iba en concordancia con una restricción previa planteada por Englert [18]. Es por eso, que se propuso un PCT extendido a dos qubits (quanton-marcador) que cuenta con la participación de ambos en las cantidades que se complementan [19]. En este trabajo se expondrá la prueba experimental

de esta versión del PCT que cuenta con la mencionada doble participación. Para ello se realizó una aproximación similar al PCT extendido que se estudia en [17, 20], salvo la utilización de intensidades distintas en cada camino del interferómetro, de tal manera que el estado de camino, quien toma el rol de *quanton*, contribuya a la distinguibilidad sin recurrir necesariamente a un marcador en polarización.

3.2. Cuantificación de la dualidad onda-partícula (WPD)

A partir del tema planteado por Wootters [21], la cuantificación del principio de complementariedad de Bohr, en el marco de un experimento de doble rendija de Young, ha sido derivado en múltiples propuestas [22, 23, 18]. Para revisarla debemos hablar primero de visibilidad (\mathcal{V}) y distinguibilidad (\mathcal{D}). Para ello tendremos en cuenta un esquema interferométrico, que es análogo a uno de doble rendija, como en la Fig. (3.1).

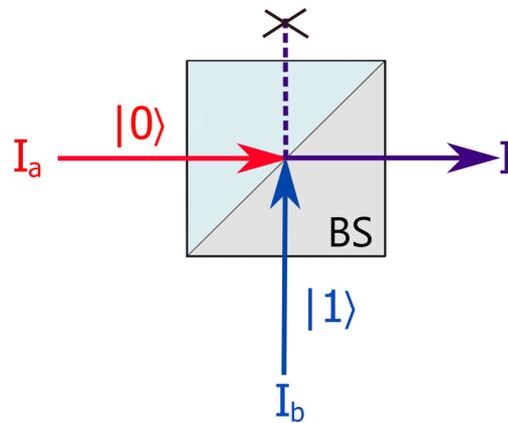


Figura 3.1: Interferencia de las componentes de un qubit de camino utilizando un BS.

Antes del BS tenemos un estado de camino dado por

$$|\psi_i\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (3.1)$$

donde $|i\rangle$ identifica cada camino y a, b sus respectivas amplitudes complejas. Luego de aplicar un BS, como el de la Ec. 1.41, al estado con $U_{BS}|\psi_i\rangle$, calcularemos la intensidad en uno de los caminos de salida. Para ellos usamos el operador $(1 + \sigma_z)/2$ y obtenemos

$$I = \text{Tr}\left[\left(\frac{1 + \sigma_z}{2}\right)U_{BS}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U_{BS}^\dagger\right] \quad (3.2)$$

$$= I_a + I_b + 2|ab^*| \cos(\phi) \quad (3.3)$$

donde $I_a = |a|^2$, $I_b = |b|^2$ son las intensidades de cada camino y $\phi = \phi_a - \phi_b$ es la fase relativa que podría originarse por la diferencia de camino recorrido. Después, ya sea midiendo intensidades (potencia) para luz clásica o coincidencias entre detectores para pares de fotones, podemos tener más certeza del camino seguido por el quanton, ya que uno de los recorridos puede ser más probable. Esta noción es conocida como *which way information* y se cuantifica con \mathcal{D} a través de la medición de intensidades en cada camino según

$$D \equiv \frac{|I_a - I_b|}{I_a + I_b}. \quad (3.4)$$

El valor de \mathcal{D} afectará la visibilidad de las franjas: dos contribuciones igual de intensas ($\mathcal{D} = 0$) nos dan máxima visibilidad mientras que el tener solo un camino activo ($\mathcal{D} = 1$) anula el patrón de interferencia. Estos dos casos son los extremos, por lo que para analizar casos intermedios es necesario cuantificar también la visibilidad. Es intuitivo definirla a partir de la medida de intensidad de la franja más oscura I_{min} y la más intensa I_{max} como

$$V \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2|ab^*|}{I_a + I_b}. \quad (3.5)$$

Si sumamos $V^2 + D^2$ obtenemos

$$D^2 + V^2 = \frac{4I_a I_b}{(I_a + I_b)^2} + \frac{(I_a - I_b)^2}{(I_a + I_b)^2} = 1, \quad (3.6)$$

lo que se debe a que el estado $|\psi_i\rangle$ es puro y se cumple $|ab^*|^2 = |a|^2|b|^2 = I_a I_b$. Sin embargo, si tenemos un estado mixto

$$\rho_i = \begin{bmatrix} |a|^2 & C \\ C^* & |b|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

podemos ver que ahora la intensidad en una de las salidas del BS es dada por $I = I_a + I_b + 2|C| \cos(\arg C)$. Aquí C es un número complejo que se relaciona a la coherencia del estado, pues se cuantifica la coherencia según la 11-norma con $C_{11} = 2|\rho_{12}| = C$ [24]. De la impureza de un estado mixto tenemos la desigualdad

$$\text{Tr } \rho_i^2 = I_a^2 + I_b^2 + 2|C|^2 \leq 1. \quad (3.8)$$

Luego, con $\text{Tr } \rho_i = 1$ y completando cuadrados llegamos a $|C|^2 \leq I_a I_b$. Trabajando esta expresión podemos escribir

$$V^2 = \frac{4|C|^2}{(I_a + I_b)^2} \leq \frac{4I_a^2 I_b^2}{(I_a + I_b)^2} \quad (3.9)$$

Finalmente, sumamos D^2 (Ec. (3.4)) a cada lado de la desigualdad y llegamos a

$$D^2 + V^2 \leq 1. \quad (3.10)$$

De esta manera obtenemos una de las relaciones a las que llega Englert usando un esquema de un qubit. Sin embargo él luego llega a la misma relación realizando un planteamiento que tiene un esquema de dos qubits a manera de *quanton*-marcador [18], el cual abordaremos en la sección del PCT extendido y veremos que también tiene la misma limitación de solo incluir al

marcador en los cuantificadores.

3.3. Teorema de polarización-coherencia (PCT)

Eberly *et al.* [16] establecieron el teorema de polarización-coherencia (PCT) en el contexto de un experimento de doble rendija de Young como en la Fig. (3.2). En este se describió un campo óptico que se propaga desde las rendijas a, b a la pantalla C (dirección z) dado por

$$F(r_{\perp}, z) = u_a(r_{\perp}, z)\Phi_a(q) + u_b(r_{\perp}, z)\Phi_b(q) \quad (3.11)$$

con $u_i(r_{\perp}, z)$ los modos espaciales normalizados y ortogonales en el espacio previo a la pantalla y Φ_i son las amplitudes en función de q , que es una coordenada cualquiera. Si bien el

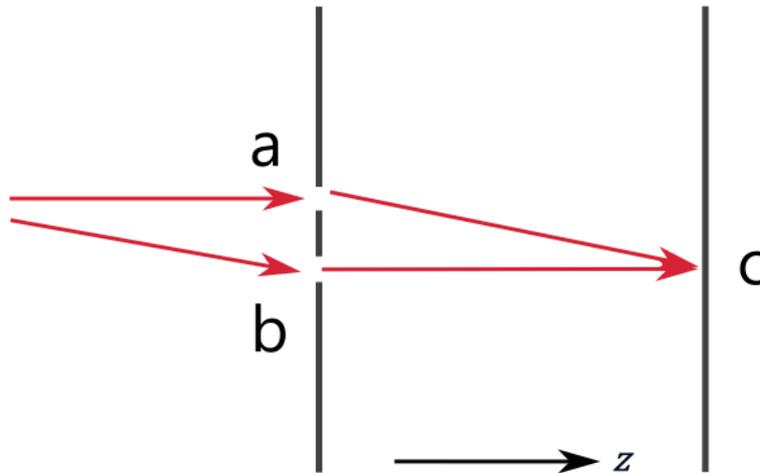


Figura 3.2: Esquema de doble rendija para el PCT

PCT aplicará tanto al caso de luz clásica como cuántica, la definición de las cantidades físicas relacionadas a la cuantificación de la dualidad onda-partícula, como la visibilidad y la distinguibilidad, pueden ser calculadas a partir de la matriz de polarización coherencia asociada a un campo óptico, es decir, a partir de una descripción clásica. Entonces, con las amplitudes de F

calculamos dicha matriz como

$$(\mathcal{W}_F)_{ij} = \langle \Phi_i^* \Phi_j \rangle, \quad (3.12)$$

con $i, j = a, b$. Con esta se establece una relación entre la visibilidad y la distinguibilidad, donde la primera nos da información de la interferencia de este campo en el punto c , y la última cuantifica qué tan distinguible es cada una de las dos señales provenientes de las rendijas a, b . Estas cantidades, calculadas a partir de la matriz \mathcal{W}_F , están dadas por

$$\begin{aligned} V_F &= \frac{2|(\mathcal{W}_F)_{ab}|}{(\mathcal{W}_F)_{aa} + (\mathcal{W}_F)_{bb}}, \\ D_F &= \frac{|(\mathcal{W}_F)_{aa} - (\mathcal{W}_F)_{bb}|}{(\mathcal{W}_F)_{aa} + (\mathcal{W}_F)_{bb}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si calculamos ahora el grado de polarización (coherencia) de este campo, obtenemos

$$P_F = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathcal{W}_F}{(\text{Tr}[\mathcal{W}_F])^2}}, \quad (3.14)$$

que satisface la relación

$$P_F^2 = V_F^2 + D_F^2 \quad (3.15)$$

Adicionalmente notamos que, al ser \mathcal{W}_F una matriz hermítica, es directo hacer el reemplazo $\mathcal{W}_F \rightarrow \rho_Q$. Con ello podemos hacer el mismo análisis para un qubit, como hicimos en la sección anterior para la restricción $V^2 + D^2 \leq 1$. Notaremos entonces que llegamos al mismo resultado con $D = |\rho_{11} - \rho_{22}|$ y $V = 2|\rho_{12}|$, donde se asume $\text{Tr} \rho = 1$.

3.4. Primera extensión del PCT

En esta sección mostraremos como la utilización de un grado de libertad interno al quanton, al que le laman marcador, ayudará a diferenciar por cuál rendija (o camino) fue la partícula.

Evidentemente esto también afectará la distinguibilidad. Se puede analizar, de manera análoga a las intensidades de los caminos, que cuando no tenemos información de por cuál rendija (camino) pasó la partícula, tendremos mayor visibilidad de las franjas y, por otro lado, si las marcamos y obtenemos total certeza del camino seguido, se pierden la interferencia. Esto se puede alcanzar incluyendo un qubit adicional que **marque** o distinga los caminos al que llamaremos qubit marcador. En [17] De Zela realizó una extensión para el PCT para el caso donde hay otro qubit involucrado que funciona como marcador de camino (*quanton*) que controla la distinguibilidad. En esencia lo que se propuso fue relacionar la cuantificación de la WPD con el grado de polarización, como en el PCT original, pero retomando el esquema quanton-marcador de Englert [18]. Entonces, para un planteamiento interferométrico como el de la Fig. (3.3) se tiene, luego del primer BS, el estado quanton(Q)-marcador(M)

$$\rho_{QM}^{(i)} = \rho_Q^{(i)} \otimes \rho_M^{(i)} \quad (3.16)$$

con el estado del *quanton* dado por

$$\rho_Q = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|), \quad (3.17)$$

donde el marcador M es el qubit de polarización. Este será distinguido en cada camino al ser marcado por una evolución unitaria U_1 ubicada en el camino $|1\rangle$ y U_2 en $|2\rangle$, el otro brazo dentro del interferómetro. Esto es un operador

$$U_{QM} = U_1 e^{i\phi_c} |1\rangle\langle 1| + U_2 |2\rangle\langle 2|, \quad (3.18)$$

que incluye la fase interferométrica de camino ϕ_c y al actuar sobre $\rho_{QM}^{(i)}$ obtenemos

$$\rho_{QM} = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1|\rho_M^{(1)} + |2\rangle\langle 2|\rho_M^{(2)} + e^{i\phi_c}|1\rangle\langle 2|\tilde{\rho}_M + e^{-i\phi_c}|2\rangle\langle 1|\tilde{\rho}_M^\dagger). \quad (3.19)$$

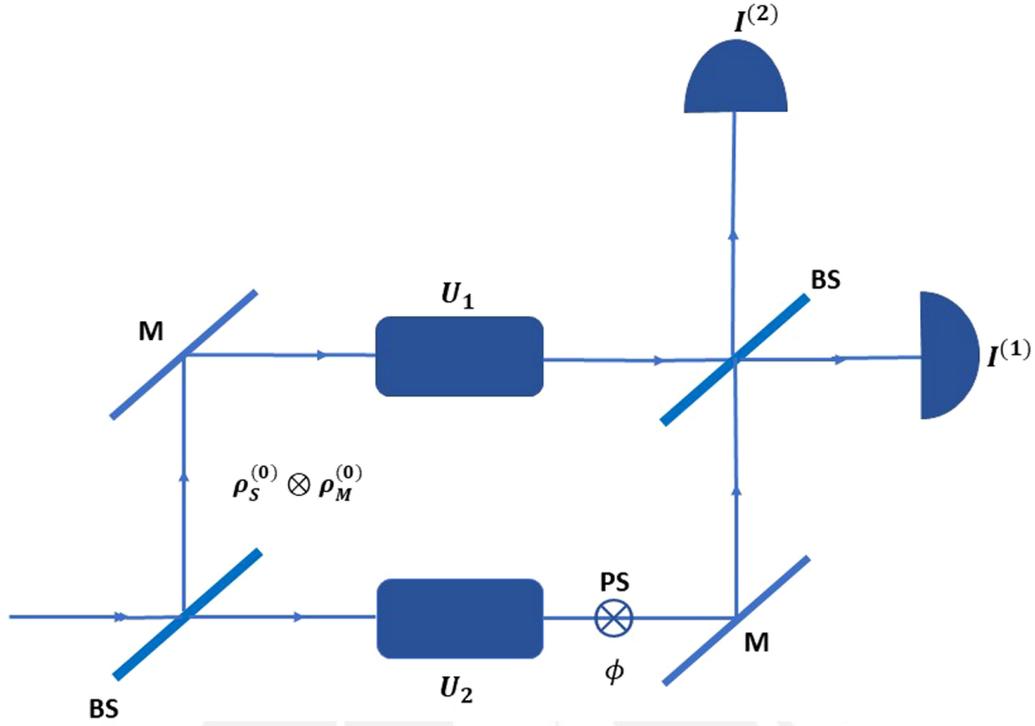


Figura 3.3: Esquema experimental para PCT con qubit marcador

Aquí, $\rho_M^{(k)} = U_k \rho_M U_k^\dagger$, ($k=1,2$), es el qubit marcador en cada camino afectado por su respectivo U_k , y además tenemos $\tilde{\rho}_M = U_1 \rho_M U_2^\dagger$. Después aplicamos el último BS para producir interferencia y así tener en una de las salidas del interferómetro formado la intensidad $I = \langle 1 | (U_{BS} \text{Tr}_M(\rho_{QM}) U_{BS}^\dagger) | 1 \rangle$. Esta nos quedará

$$I = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + 2 \text{Re}\{\text{Tr}[\tilde{\rho}_M] e^{i\phi_c}\}), \quad (3.20)$$

donde $I_k = \langle 1 | \text{Tr}_M(|k\rangle\langle k| \rho_M^{(k)}) | 1 \rangle$ es la intensidad de cada camino, las cuales para nuestro caso con igual amplitud es $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}$. Luego, variando la fase interferométrica ϕ_c en $I = \frac{1}{2}(1 + |\text{Tr}_M \tilde{\rho}_M| \cos(\phi_c + \arg(\text{Tr}_M \tilde{\rho}_M)))$ obtenemos la visibilidad V , que siguiendo [18] será

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \equiv |\text{Tr}_M \tilde{\rho}_M|. \quad (3.21)$$

Además, usando la distancia-traza entre estados de camino $\rho_M^{(k)}$ calculamos la distinguibilidad asociada al marcador:

$$D \equiv \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho_M^{(1)} - \rho_M^{(2)}|, \quad (3.22)$$

donde $\text{Tr} |M| = \sqrt{MM^\dagger}$. Después, teniendo en cuenta que $\text{Tr} |U_1 \rho_M^{(1)} U_1^\dagger - U_2 \rho_M^{(2)} U_2^\dagger| = |\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2|$, es decir, que las transformaciones unitarias son rotaciones del vector de Stokes en la esfera de Poincaré, que ello nos ayuda a representar la distancia entre estados con la distancia euclídeana $|\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2|$ [25] y que esta es invariante ante rotaciones, podemos escribir

$$D = \frac{1}{2} |R_1 \mathbf{S} - R_2 \mathbf{S}| = \frac{1}{2} |\mathbf{S} - R_1^{-1} R_2 \mathbf{S}|. \quad (3.23)$$

Aquí hemos asociado cada operador U_i con una rotación R_i tal que $S_i = R_i \mathbf{S}$. Si luego utilizamos los parámetros de Euler-Rodrigues para describir una rotación de γ al rededor del eje de rotación \hat{n} con los parámetros $e_0 = \cos \frac{\gamma}{2}$ y $e_1 = \sin \frac{\gamma}{2} \hat{n}$, reescribiremos la rotación $(R_1^{-1} R_2) \mathbf{S}$ como:

$$(R_1^{-1} R_2) \mathbf{S} = (e_0^2 - e^2) \mathbf{S} + 2(e \cdot \mathbf{S}) \mathbf{e} + 2e_0 (\mathbf{S} \times \mathbf{e}). \quad (3.24)$$

De esto obtenemos $|\mathbf{S} - (R_1^{-1} R_2) \mathbf{S}| = 2|e^2 \mathbf{S} + (e \cdot \mathbf{S}) \mathbf{e} + e_0 (\mathbf{S} \times \mathbf{e})|$ y nos permite expresar

$$D^2 = e^2 \mathbf{S}^2 - (e \cdot \mathbf{S})^2. \quad (3.25)$$

Por otro lado, para la visibilidad tendremos

$$V = |\text{Tr}_M(U_1 \rho_M U_2^\dagger)| = |\text{Tr}_M(U_2^\dagger U_1 \rho_M)|. \quad (3.26)$$

Aquí, nuevamente vemos a $U_2^\dagger U_1$ como una rotación para $SU(2)$ de manera que $U_2^\dagger U_1 = \cos \frac{\gamma}{2} + i \sin \frac{\gamma}{2} \hat{n} \cdot \sigma$ y con ello escribir

$$V = |\text{Tr}_M[(\cos \frac{\gamma}{2} + i \sin \frac{\gamma}{2} \hat{n} \cdot \sigma)(\mathbb{I} + \mathbf{S} \cdot \sigma)]| = |\cos \frac{\gamma}{2} + i \sin \frac{\gamma}{2} \hat{n} \cdot \mathbf{S}| \quad (3.27)$$

$$= |e_0 + i \mathbf{e} \cdot \mathbf{S}|. \quad (3.28)$$

Finalmente a $V^2 = e_0^2 + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{S})^2$ le sumamos la ec. (3.25)

$$V^2 + D^2 = \cos^2 \theta + P^2 \sin^2 \theta \quad (3.29)$$

donde se fija $|\mathbf{S}| = P$, el grado de polarización. La Ec.(3.29) será la expresión para el PCT extendido en el caso de tener un marcador, el cual, como vemos, se quedará con el rol de *quanton* al estar presente en V y D , las cantidades que cuantifican la dualidad onda-partícula. Este comportamiento va en concordancia con lo expuesto inicialmente por Englert [18], donde también utiliza un estado $\rho_Q \otimes \rho_M$ para luego obtener la restricción inicial $V^2 + D^2 \leq 1$, pero con los cuantificadores calculados solo a partir del marcador ρ_M . Esta situación nos motiva a presentar un esquema donde sí se presente la doble participación en la cuantificación de la WPD.

3.5. Segunda extensión del PCT: WPD generalizada

Si bien el PCT extendido presentó dos qubits, como vemos en las ecs. (3.21) y (3.22), la visibilidad y distinguibilidad están en función del qubit marcador, el cual se vuelve protagonista del PCT extendido, dejando de lado al qubit del *quanton*. Para incluir a dicho qubit en las cantidades que cuantifican la dualidad onda-partícula se debe distinguir uno de los caminos sin recurrir necesariamente al marcador. Para esto se debió tener diferencia de intensidades entre

caminos independientemente de que hayan sido marcados o no. La manera más simple realizar este cambio es al reemplazar el BS 50/50 por uno que proporcione diferentes amplitudes a cada brazo, como podría ser BS1 en la Fig. (3.4).

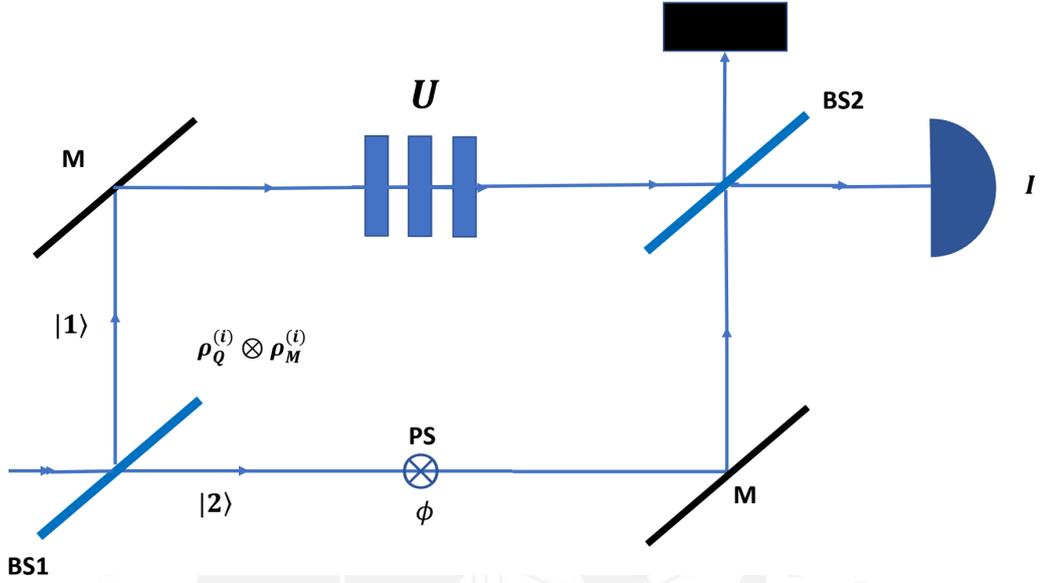


Figura 3.4: Esquema experimental para PCT extendido a dos qubits

Ahora el estado inicial quanton-marcador sería similar a $\rho_{QM}^{(i)} = \rho_S^{(i)} \otimes \rho_M^{(i)}$, con $\rho_S^{(i)} = |\psi_Q^{(i)}\rangle\langle\psi_Q^{(i)}|$, salvo que el estado puro del quanton (camino) tendrá amplitudes diferentes $|\psi_Q^{(i)}\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$. De manera general se escribe el estado marcador como $\rho_M^{(i)} = (\sigma_0 + \mathbf{S}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}) / 2$, donde nuevamente la norma del vector de Stokes $\mathbf{S}^{(i)}$ es el grado de polarización: $\mathcal{P} \equiv |\mathbf{S}^{(i)}| \leq 1$. El estado inicial $\rho_{QM}^{(i)}$, al igual que en la propuesta anterior, se ubica luego del primer BS (ver Fig. (3.4)). Este será sometido luego a la transformación

$$U_{QM} = |1\rangle\langle 1| \otimes U + e^{-i\phi}|2\rangle\langle 2| \otimes \sigma_0,$$

$$U = \exp\{i\gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2\}.$$

Esta es similar a (3.18), pero solo incluye una transformación unitaria U en uno de los brazos para simplificar el esquema. Con ello, tendremos antes del segundo BS, es decir, dentro

del interferómetro, el estado quanton-marcador $\rho_{QM} = U_{QM}\rho_{QM}^{(i)}U_{QM}^\dagger$. Trazando parcialmente obtenemos el estado del *quanton* $\rho_Q = \text{Tr}_M \rho_{QM}$ y el del marcador, que es dado por

$$\rho_M = \text{Tr}_Q \rho_{QM} = |\alpha|^2 \rho_M^U + |\beta|^2 \rho_M^{(i)}, \quad \text{con} \quad \rho_M^U = U \rho_M^{(i)} U^\dagger. \quad (3.30)$$

Se puede ver que ρ_M es la suma del estado de polarización de cada brazo multiplicado por su respectivo peso y con ello definimos la distinguibilidad \mathcal{D} como

$$\mathcal{D} = \text{Tr} \left| |\alpha|^2 \rho_M^U - |\beta|^2 \rho_M^{(i)} \right|, \quad (3.31)$$

donde podemos ver que si $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$, recuperamos la distinguibilidad previa (3.22). La definición de la distinguibilidad \mathcal{D} en (3.31) ahora involucra los estados marcados y las amplitudes relacionadas a la diferencia de intensidades entre caminos.

Nuevamente para medir la visibilidad tomaremos medidas luego del segundo BS, lo que nos permite tener la interferencia y observar la intensidad de las franjas. En una de las salidas está será dada por

$$I = \frac{1}{2} [1 + 2 \text{Re} \{ \alpha \beta^* \text{Tr}_M (U \rho_M^{(i)}) e^{-i\phi} \}]. \quad (3.32)$$

A partir de la definición usual de visibilidad (3.5) tenemos

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2|\alpha||\beta| \left| \text{Tr} \left(U \rho_M^{(i)} \right) \right|. \quad (3.33)$$

Luego, de (3.33) obtenemos

$$\mathcal{V}^2 = 4|\alpha|^2|\beta|^2 (e_0^2 + e^2 \mathcal{P}^2 \cos^2 \varphi), \quad (3.34)$$

donde nuevamente hemos utilizado los parámetros de Euler-Rodrigues $e_0 = \cos(\gamma/2)$ y $e =$

$\sin(\gamma/2)\hat{\mathbf{n}}$. Además, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{(i)} = \cos \varphi$, con $\hat{\mathbf{s}}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)}/|\mathbf{S}^{(i)}|$, y $\mathcal{P} = |\mathbf{S}^{(i)}| = |\mathcal{R}\mathbf{S}^{(i)}|$, que también puede ser obtenido por la diferencia de autovalores $\lambda_{\pm} = (1 \pm |\mathbf{S}^{(i)}|)/2$ del estado marcador $\rho_M^{(i)}$.

De (3.31), obtenemos [19]

$$\mathcal{D}^2 = \begin{cases} |\mathbf{S}|^2 & \text{if } (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 \leq |\mathbf{S}|^2, \\ (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 & \text{if } (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 \geq |\mathbf{S}|^2, \end{cases} \quad (3.35)$$

donde se ha fijado

$$\mathbf{S} = |\alpha|^2 (\mathcal{R}\mathbf{S}^{(i)}) - |\beta|^2 \mathbf{S}^{(i)}. \quad (3.36)$$

Después, calculamos $|\mathbf{S}|^2 = \{|\alpha|^4 + |\beta|^4 - 2|\alpha|^2|\beta|^2 [(e_0^2 - \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^2 \cos^2 \varphi)]\} \mathcal{P}^2$, y encontramos

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 = \begin{cases} D_w^2 \mathcal{P}^2 + V_w^2 (e_0^2 + \mathcal{P}^2 \mathbf{e}^2), & \text{si } D_w^2 \leq |\mathbf{S}|^2 \\ 1 + \mathbf{e}^2 V_w^2 (\mathcal{P}^2 \cos^2 \varphi - 1), & \text{si } D_w^2 \geq |\mathbf{S}|^2 \end{cases} \quad (3.37)$$

donde

$$D_w = ||\alpha|^2 - |\beta|^2| \quad \text{y} \quad V_w = 2|\alpha||\beta| \quad (3.38)$$

son la distinguibilidad y visibilidad asociadas al qubit de camino. Finalmente, hemos obtenido, en la Ec. (3.37), la relación para el PCT extendido a dos qubits. En esta vemos que marcador y *quanton* aparentan intercambiar roles al participar ambos de las cantidades que cuantifican la dualidad onda-partícula.

3.6. Propuesta experimental

En [26] se realizaron pruebas experimentales de la relación (3.37) usando luz clásica con un haz de luz polarizado de un láser HeNe (633 nm). Como ya vimos, el estado de dos qubits

se generó tomando la polarización del haz y el camino que este recorre. Por lo tanto el estado tiene la base dada por el producto tensorial $\{|H\rangle, |V\rangle\} \otimes \{|1\rangle, |2\rangle\}$. El arreglo se muestra en la Fig (3.5). La parte (a) contiene la generación del estado puro de camino (*quanton*) $|\psi_Q^{(i)}\rangle$, (b) contiene la generación del estado de marcador mixto $\rho_M^{(i)}$ y la parte (c) representa la zona interferométrica.

Para comenzar, se produjo el estado de camino $|\psi_Q^{(i)}\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ de la siguiente manera. Primero, una HWP fijada en $\delta + \pi/4$ (denotada con $H(\delta + \pi/4)$), transformó la luz polarizada verticalmente proveniente del láser HeNe en la superposición coherente $\cos(2\delta)|H\rangle + \sin(2\delta)|V\rangle$. Por medio de un divisor de haz polarizado de desplazamiento lateral (LDPBS), la luz entrante se separó en un haz con polarización horizontal en el camino $|1\rangle$ y uno vertical en el camino $|2\rangle$. De esta forma, se generó el estado de dos qubits $\cos(2\delta)|H\rangle|1\rangle + \sin(2\delta)|V\rangle|2\rangle$. Luego, cambiando la polarización del haz $|1\rangle$ de horizontal a vertical, obtuvimos el estado de camino objetivo, $|\psi_Q^{(i)}\rangle = \cos(2\delta)|1\rangle + \sin(2\delta)|2\rangle$. Esto se hizo con una HWP fijada en $\pi/4$.

Luego, generamos el estado mixto de polarización $\rho_M^{(i)}$ en cada uno de los dos haces utilizando los elementos que se muestran en la parte (b) de la Fig. (3.5). De esta manera, se generó el estado inicial quanton-marcador $\rho_{QM}^{(i)} = \rho_Q^{(i)} \otimes \rho_M^{(i)}$. Para producir $\rho_M^{(i)}$, enviamos los haces a una HWP fija en $\pi/2 - \theta$, lo que transformó los estados de polarización a $\sin(2\theta)|H\rangle + \cos(2\theta)|V\rangle$. Luego, un divisor de haz polarizado (PBS) separó, para los dos haces incidentes, las componentes de polarización horizontal y vertical de cada uno en un par de haces transmitidos y reflejados. Después, con un BS (ver Fig. (3.5), sec. (b)), las componentes originales de cada ruta se recombinaron de manera incoherente. Como resultado, se obtuvieron dos haces, para caminos $|1\rangle$ y $|2\rangle$ respectivamente, en el estado de polarización mixta $\rho_M^{(i)} = \sin^2(2\theta)|H\rangle\langle H| + \cos^2(2\theta)|V\rangle\langle V|$.

Finalmente, los dos haces se sometieron a un arreglo interferométrico, que se muestra en la Fig. (3.5), sec. (c). En dicha sección, una QWP configurada en $\pi/4 - \varphi/2$ transformó el estado mixto de polarización, de modo que su vector de Stokes formó un ángulo φ con el eje \hat{z} de la esfera de Poincaré. Dos HWP, $H(0)H(-\gamma/4)$, ubicados en el camino $|1\rangle$, implementaron

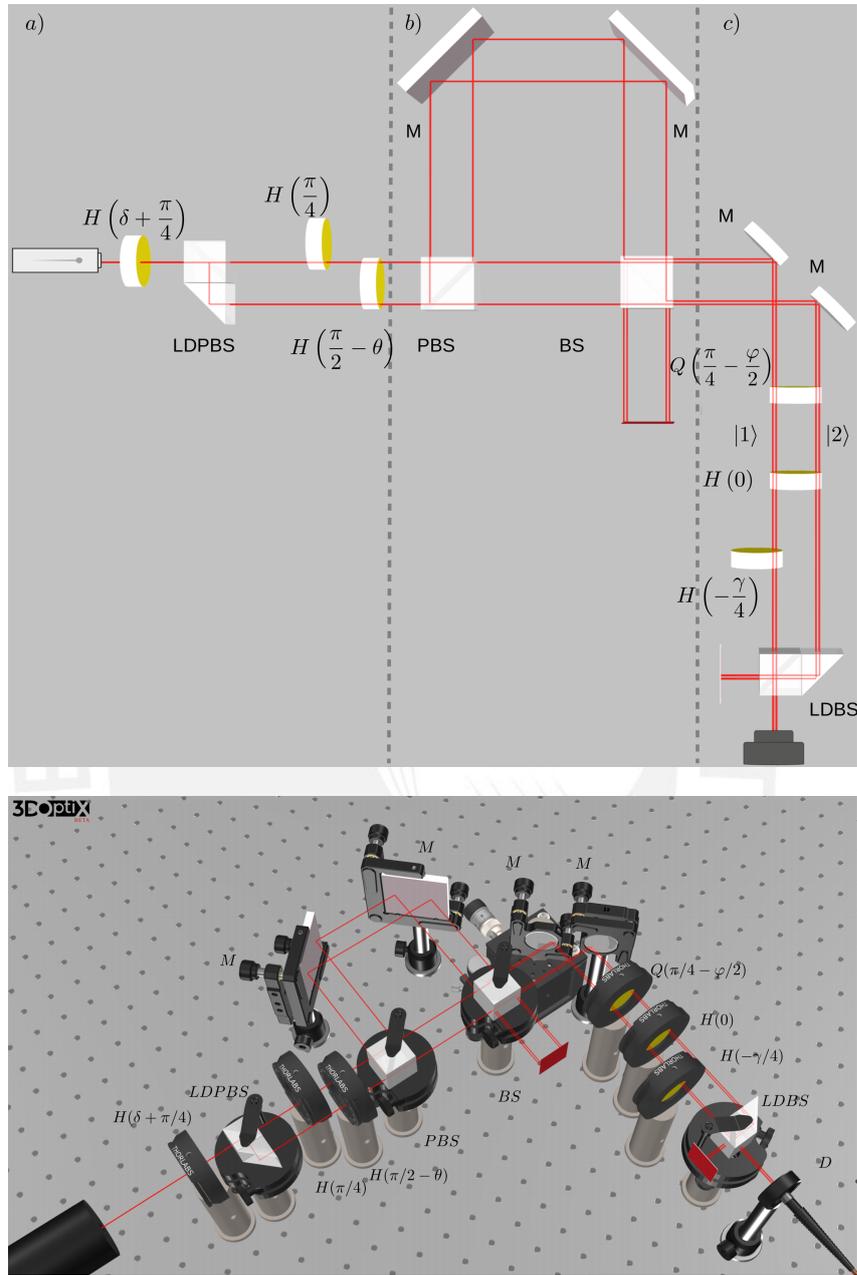


Figura 3.5: Configuración experimental. Parte a): generación del estado de camino $|\psi_Q^{(i)}\rangle$. Parte b): generación del estado mixto de polarización $\rho_M^{(i)}$. Parte c): Arreglo interferométrico. H: placa de media onda. Q: placa de cuarto de onda. LDPBS: divisor de haz polarizado de desplazamiento lateral. PBS: divisor de haz polarizado. BS: divisor de haz 50:50. LDBS: divisor de haz 50:50 de desplazamiento lateral. M: espejo. Las dos figuras se realizaron utilizando el software de simulación 3DOptix.

la transformación unitaria $U = \exp\{-i\gamma\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2\}$, donde $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y)$. Esto corresponde a una rotación de un ángulo γ alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}}$ de la esfera de Poincaré (para la esfera de Bloch, $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$). El HWP fijo en 0 mencionado cumplió un propósito adicional en el otro camino, que fue compensar la fase π relativa que introduce el divisor de haz de desplazamiento lateral (LDBS) entre las componentes horizontal y vertical del haz polarizado que se propagan en $|2\rangle$. El LDBS se utilizó para superponer los haces en estados de polarización mixta y así conseguir interferencia entre ellos. La elección $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ no implica una pérdida esencial de generalidad. Si uno quiere implementar diferentes transformaciones $U = \exp\{-i\gamma\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2\}$, el único cambio necesario es el reemplazo de $H(0)H(-\gamma/4)$ por dos QWP y una HWP [13] en la ruta $|1\rangle$, además de una compensación de fase con $H(0)$ en el camino $|2\rangle$. Como puede verse en la Fig. (3.5), sec. (c), esto podría hacerse fácilmente.

3.7. Resultados

Para probar la relación (3.37) se obtuvieron las cantidades \mathcal{V} , \mathcal{D} , D_w y V_w a partir de la medición de los parámetros que conforman sus respectivas definiciones. Repetimos 5 veces la medida de cada parámetro. Las medidas de intensidad se realizaron con un fotomultiplicador (Thorlabs PM100D). Para medir la visibilidad de las franjas de interferencia \mathcal{V} , se produjeron las intensidades máxima y mínima variando la separación entre los dos espejos que se muestran en la sección (c) en la Fig. (3.5). Esta separación controla la fase relativa ϕ entre los haces que van a interferir en el LDBS (ver Ec. (3.32)). Para obtener \mathcal{D} , utilizamos una QWP, una HWP y un polarizador en la salida del LDBS que se muestra en la Fig. (3.5), sec. (c). Con esos dispositivos realizamos una tomografía de polarización para cada haz, evidentemente turnando sus salidas. A partir de esto, obtuvimos sus respectivos vectores de Stokes y las cantidades α , β , $\mathbf{S}^{(i)}$ y $\mathbf{S}^{(u)} = \mathcal{R}\mathbf{S}^{(i)}$.

Probamos (3.37) considerando tres casos donde hubo una elección correspondiente para los

valores de cada parámetro $(\delta, \theta, \varphi, \gamma)$. En el **primer caso**, variamos γ en el rango $0 < \gamma < 2\pi$, y mantuvimos fijos δ, θ, φ . En este caso, el vector de stokes $\mathcal{S}^{(i)}$, inicialmente en el plano XY paralelo al eje positivo \hat{x} , evolucionó a $\mathcal{S}^{(u)}$ al rotar $\mathcal{S}^{(i)}$ un ángulo γ alrededor del eje \hat{z} . En el **segundo caso**, variamos δ en el rango $0 < \delta < \pi/4$, manteniendo θ, φ, γ constantes y haciendo que $\mathcal{S}^{(i)}$ rote $\pi/2$. En el **tercer caso**, variamos φ en el rango $0 < \varphi < \pi$, manteniendo constante δ, θ, γ . Aquí el vector $\mathcal{S}^{(u)}$ resultó de rotar $\mathcal{S}^{(i)}$ un ángulo $\gamma = \pi$ alrededor del eje \hat{z} . Ambos vectores formaron un ángulo φ con respecto al eje \hat{z} . El plano que contiene estos vectores gira el mismo ángulo sobre el eje \hat{z} . Las figuras (3.6-3.8) muestran nuestros resultados de medición y los vectores de Stokes correspondientes, $\mathcal{S}^{(i)}$ y $\mathcal{S}^{(u)}$, para cada caso. Como podemos ver, existe una buena concordancia entre los resultados teóricos y experimentales.

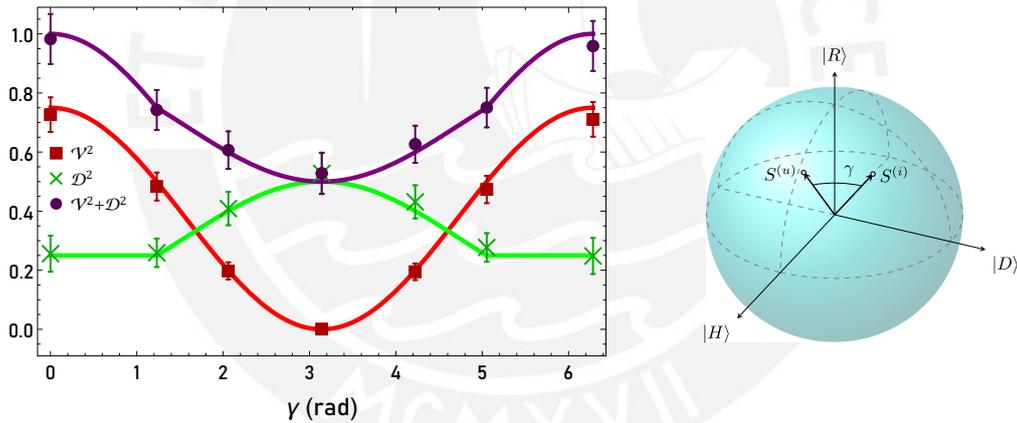


Figura 3.6: Primer caso: $\delta = \pi/3, \theta = \pi/16, \varphi = \pi/2, 0 < \gamma < 2\pi$. Panel izquierdo: Prueba experimental del PCT extendido a dos qubits, el cual se materializa en el comportamiento de $V^2 + D^2$. Panel derecho: Representación geométrica de los vectores de Stokes $\mathcal{S}^{(i)}$ y $\mathcal{S}^{(u)} = \mathcal{R}\mathcal{S}^{(i)}$.

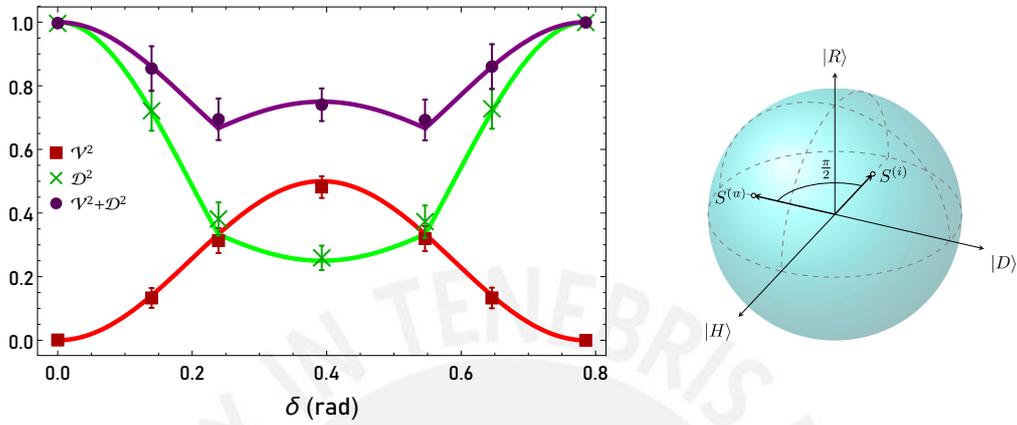


Figura 3.7: Segundo caso: similar al primero, pero con la elección $0 < \delta < \pi/4, \theta = \pi/16, \varphi = \pi/2, \gamma = \pi/2$.

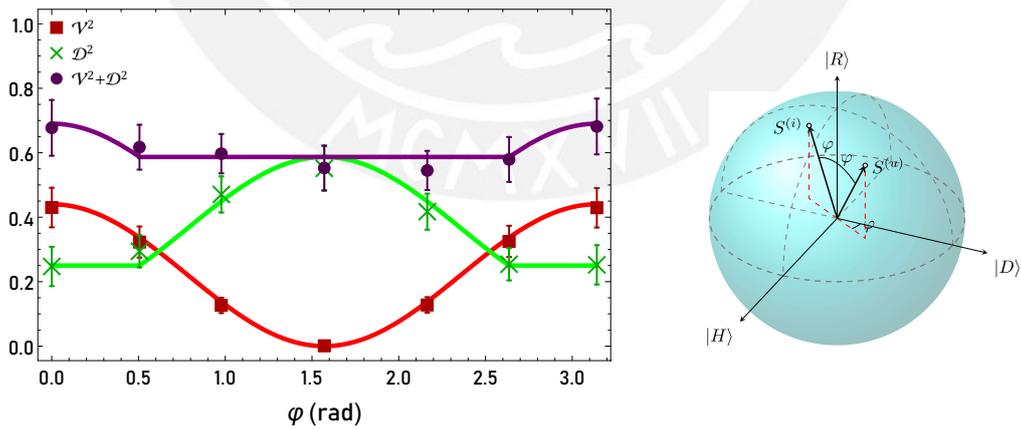


Figura 3.8: Tercer caso: similar al primero, pero con la elección $\delta = \pi/6, \theta = \pi/18, 0 < \varphi < \pi, \gamma = \pi$.

3.8. Conclusiones

Como mencionamos antes, los *quants* son entidades físicas capaces de exhibir dualidad onda-partícula. Esta se cuantificó por medio de la visibilidad (\mathcal{V}) y la distinguibilidad (\mathcal{D}), lo que condujo al establecimiento de varias restricciones que involucran estas cantidades. Una primera y simple restricción: $\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1$, evolucionó gradualmente hacia expresiones más sofisticadas que incluían cantidades medibles adicionales, como concurrencia y polarización. Posteriormente, el uso de un grado de libertad interno al *quanton* como marcador de dirección, permitió formular restricciones generalizadas. Entre estas, hay restricciones en las que \mathcal{D} y \mathcal{V} están relacionadas tanto con el *quanton* como con el marcador, mientras que aparecen visibilidades y distinguibilidades adicionales ligadas solo al *quanton* o solo al marcador. Todo esto revela una conexión bastante intrincada entre varios grados de libertad y coherencias que pertenecen a los objetos físicos que se abordan. Las conexiones reveladas no son ni cuánticas ni clásicas. Son propiedades que se derivan de la estructura lineal del espacio vectorial que comparten algunos fenómenos cuánticos y clásicos. La luz, en sus diversas manifestaciones, clásica y cuántica, se presta como un medio casi ideal para exhibir las conexiones antes mencionadas.

En este trabajo, abordamos restricciones que, a primera vista, parecían difícilmente accesibles para las pruebas experimentales. Sin embargo, la óptica lineal demostró ser una herramienta adecuada para llevar a cabo la tarea. Usando haces de luz clásicos, generamos buenos resultados para probar experimentalmente la extensión del PCT, donde se observa la doble participación *quanton*-marcador en las cantidades que cuantifican la dualidad. Cabe recalcar que con ligeras modificaciones nuestra configuración también serviría para realizar pruebas con fotones individuales. Además, debido a su aplicabilidad tanto a fenómenos cuánticos como clásicos, en los que lo que importa son los grados de libertad involucrados, las restricciones probadas pueden verse como una manifestación de la dualidad onda-partícula generalizada.

Capítulo 4

Dualidad onda-partícula para estados tripartitos

4.1. Introducción

En este capítulo se abordarán y generalizarán dos restricciones de la dualidad onda-partícula (WPD), que fueron revisadas anteriormente para el caso bipartito, de dos qubits, extendiéndolas al caso de un sistema tripartito. La primera generalización se refiere al Teorema de polarización-coherencia visto en el capítulo anterior, y la segunda, a la llamada Relación de Triadidad [27], en la cual participa, además, el entrelazamiento. Para dicho sistema tripartito, se utilizará la medida de concurrencia generalizada propuesta por Rungta et al. [28], la cual permite tener información de entrelazamiento entre subsistemas de manera simple, al requerir solamente la caracterización de uno de ellos. Esto nos lleva a pensar en la idea interesante de obtener información sobre un subsistema de manera indirecta, dando una ventaja evidente en el contexto experimental, donde se verá reducida significativamente la cantidad de medidas necesarias para obtener dicha información sobre la concurrencia. Luego de definir algunos conceptos necesarios, se abordará la aproximación usual al analizar un campo óptico en su aproximación paraxial, donde se definen

sectores asociados a ciertos grados de libertad tras realizar proyecciones sobre los demás grados de los que depende el sistema. Es en esa línea que Qian et al. [29] evidencian las coherencias intrínsecas a los grados de libertad y la llamada coherencia oculta que faltaba describir para tener el trío de coherencias relacionadas a la dependencia temporal, modo espacial y polarización. Con estos formamos sectores donde encontramos las restricciones que relacionan el grado de polarización con la medida de entrelazamiento de los subsistemas involucrados. Es a partir de este resultado que se plantean las dos generalizaciones para sistemas tripartitos. Una que hace uso de los resultados del teorema de polarización coherencia, pero usando la concurrencia generalizada en lugar del grado de polarización. Adicionalmente, podemos hacer también ese remplazo para el caso de un PCT extendido con marcador, lo que nos llevará a una nueva relación de tripartidad para estados tripartitos. Son estas dos relaciones las que trataremos de evidenciar experimentalmente, generando un estado tripartito polarización-polarización-camino, que se verá afectado por un interferómetro en uno de sus subsistemas bipartitos.

4.2. Entrelazamiento cuántico

El entrelazamiento es usualmente visto como una característica del régimen cuántico que evidencia, para dos sistemas, correlaciones mayores de las que podrían generarse en un contexto clásico. Como garantía de estar en un régimen cuántico se suele tener como indicador la violación de las desigualdades de Bell. Violar la desigualdad Bell-CHSH significará descartar una teoría local de variables ocultas [30, 31]. Esto significa que se descarta localidad y realismo, refiriéndose la primera a que las acciones de Alice no están causalmente conectadas con las de Bob, y el segundo a que los valores de los observables existen aún cuando no hayan sido medidos. Si bien podemos tener entrelazamiento clásico, lo que permite superar los límites propuestos por la desigualdad de Bell-CHSH, siempre que se haya definido adecuadamente las correlaciones (no de tipo Bell) [32]), vamos a enfocar nuestro trabajo en la medida de entre-

lazamiento en el marco de la coherencia entre estados y la participación que esta tiene en las relaciones que se quiere demostrar.

4.2.1. Medida de entrelazamiento

Un estado entrelazado de dos qubits es aquel que no puede escribirse en la forma $|\psi_{ab}\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$, es decir, no es separable. En [33] se cuantifica el entrelazamiento para un estado puro bipartito mediante la entropía de alguno de los sistemas involucrados. Después, Hill y Wootters [34],[35] definen el *entanglement of formation* como cuantificador de entrelazamiento, que para un estado bipartito mixto es la minimización sobre el promedio de entropía para cada estado puro que puede componer un estado mixto según $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. La concurrencia aparece como parte de la medida de entrelazamiento dada por E que es una función monótona creciente que va de 0 a 1. Esta es dada por

$$E(C) = \varepsilon\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (4.1)$$

con $\varepsilon(x) = -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x)$ que es la función de la entropía de Shannon y C , la concurrencia. Luego, para definir C se necesitará el operador inversor de spin \hat{S} , que es dado por

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi\rangle^* \quad (4.2)$$

$$\hat{S}(\rho) = \sigma_y \rho^* \sigma_y = \frac{1}{2}(1 - \vec{P} \cdot \vec{\sigma}). \quad (4.3)$$

Con este expresaremos E en función de ρ al definir la concurrencia para un estado mixto de dos qubits como

$$C = \text{máx}(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (4.4)$$

donde λ_i son los autovalores en orden decreciente de la matriz $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$, en la cual se usa el estado mixto invertido para dos qubits $\tilde{\rho} = \hat{S}_2\rho = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$.

Para el caso particular de un estado puro bipartito, la concurrencia vendrá dada por

$$C = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right| = \left| \langle \psi | (\sigma_y \otimes \sigma_y) | \psi \rangle^* \right| \quad (4.5)$$

y el *entanglement of formation*, obtenido de cualquiera de los dos subsistemas, mediante

$$E(\psi_{AB}) = \varepsilon(\rho_A) = \varepsilon(\rho_B), \quad (4.6)$$

donde $\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|)$ es un subsistema calculado luego de trazar parcialmente y lo mismo sucede para B .

4.2.2. Concurrencia Generalizada

Rungta et. al.[28] generalizan el operador inversor de spin para un sistema D-dimensional (4.3) mediante

$$S_D(\rho) = v_D(I - \rho), \quad (4.7)$$

siendo v_D una constante positiva. Con ello proponen una concurrencia generalizada para el estado puro bipartito Ψ_{AB} para un sistema $D_1 \times D_2$ que es dada por

$$C(\Psi_{AB}) = \sqrt{\langle \Psi_{AB} | S_{D_1} \otimes S_{D_2} | \Psi_{AB} \rangle \langle \Psi_{AB} | \Psi_{AB} \rangle}. \quad (4.8)$$

Para el caso particular de un estado puro de dos qubits (ab) la concurrencia viene dada por

$$C_{ab} = \sqrt{2(1 - \text{Tr} \rho_{a,b}^2)}. \quad (4.9)$$

Aquí podemos resaltar que la concurrencia, definida de esta manera, puede ser calculada usando cualquiera de los dos subsistemas en cuestión y se relaciona a la pureza marginal de cada subsistema. Esta característica termina siendo análoga a calcular el *entanglement of formation* de un estado puro bipartito, que también se obtiene de cualquier subsistema como vimos en la Ec. (4.6).

4.3. Grado de polarización y concurrencia

4.3.1. Restricción de P y C

Relación entre C y P en estados puros

En el planteamiento de Qian et al. [29] se utiliza la aproximación paraxial para escribir un campo como

$$\mathbf{E}(r_{\perp}, t) = E_0 \sum_{k,m} \sum_{i=1,2} d_{ikm} \hat{s}_i F_k(t) G_m(r_{\perp}), \quad (4.10)$$

donde se evidencian la polarización, el modo espacial y la dependencia temporal, los cuales son tres grados de libertad propios de este campo. Luego, haciendo una proyección en alguno de estos grados de libertad, por ejemplo el modo espacial, tenemos

$$\mathbf{E}_{st}^{(m)}(t) = \int d^2 r_{\perp} G_m^*(r_{\perp}) \mathbf{E}(r_{\perp}, t) = E_0 \sum_k \sum_{i=1,2} d_{ikm} \hat{s}_i F_k(t) \quad (4.11)$$

y nos quedamos con dos grados de libertad restantes que denominamos como **sector**, en este caso el *st*. Después, podemos escribir como un estado al campo del sector *st* como $|\mathbf{E}\rangle_{st} = \sum_{i,k} c_{ik} |s_i\rangle \otimes |F_k\rangle$, con el cual podemos calcular la concurrencia $C_{st} = \langle E | \tilde{E} \rangle_{st}$. Luego construimos la matriz de polarización coherencia, como $\mathcal{W}_s = \text{Tr}_t(|E_{st}\rangle\langle E_{st}|) / E_0^2$, donde se ha trazado parcialmente *t*, que es el equivalente clásico a una matriz densidad [36]. A partir de los autovalores de esta matriz \mathcal{W}_s obtenemos el grado de polarización y nos percatamos finalmente

que la concurrencia puede ser también expresada en función de estos autovalores según

$$\begin{aligned} P_{st} &= |\lambda_1 - \lambda_2| \\ C_{st} &= \langle E | \tilde{E} \rangle_{st} = 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Luego, se evidencia la restricción

$$C_{st}^2 + P_{st}^2 = 1 \quad (4.13)$$

y de la misma forma para los otros sectores se tiene $C_{sr}^2 + P_{sr}^2 = 1$ y $C_{tr}^2 + P_{tr}^2 = 1$.

Es importante resaltar que en estos resultados se está relacionando la concurrencia, que es una cantidad generalmente asociada a un sistema cuántico, con el grado de polarización, que viene de un tratamiento clásico del campo óptico. Ambas partes cuantifican la coherencia, que es entendida en el caso de la polarización como la alineación hacia alguna dirección dada, y para el entrelazamiento, como un *alineamiento* mutuo entre subsistemas.

4.3.2. Extensión al caso de estados tripartitos puros

Si consideramos ahora, en notación de Dirac, el caso de un estado tripartito puro en general como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,k,m} d_{ikm} |a_i\rangle \otimes |b_k\rangle \otimes |c_m\rangle \quad (4.14)$$

A partir del operador densidad $\rho_{abc} = |\psi\rangle\langle\psi|$ calculamos las matrices de los qubits individuales ρ_i , definiendo los diferentes sectores al trazar parcialmente sobre algunos de los qubits $\rho_{i(jk)}$

$$\rho_a = \text{Tr}_{bc}[\rho_{abc}] \quad \rho_{a(bc)} = \text{Tr}_a[\rho_{abc}] \quad (4.15)$$

$$\rho_b = \text{Tr}_{ac}[\rho_{abc}] \quad \rho_{b(ac)} = \text{Tr}_b[\rho_{abc}] \quad (4.16)$$

$$\rho_c = \text{Tr}_{ab}[\rho_{abc}] \quad \rho_{c(ab)} = \text{Tr}_c[\rho_{abc}]. \quad (4.17)$$

La notación $i(jk)$ refiere al sector jk que fue obtenido al trazar el qubit i .

Después podemos calcular, para cada qubit, el grado de polarización y la concurrencia, la cual cuantifica el entrelazamiento de dicho qubit con el subsistema restante. Así tendríamos, por ejemplo, para el qubit c ,

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c = \sqrt{1 - 4 \det \rho_c} \\ C_{c(ab)} = \sqrt{2(1 - \text{Tr} \rho_{c(ab)}^2)} \end{array} \right. \implies \boxed{C_{c(ab)}^2 + P_c^2 = 1} \quad (4.18)$$

lo que nos da una restricción para C y P análoga a la expresión (4.13) pero ahora para un sistema puro tripartito [37], donde la concurrencia, ahora generalizada, puede ser calculada con cualquiera de los subsistemas participantes. Adicionalmente, para los otros sectores se cumple

$$C_{b(ac)}^2 + P_b^2 = 1, C_{a(bc)}^2 + P_a^2 = 1. \quad (4.19)$$

Estas restricciones han sido exploradas en [37], donde se comprueban las relaciones entre C y P para un estado puro tripartito compuesto por un par de fotones individuales entrelazados en polarización y un qubit de camino.

Extensión del PCT para estados tripartitos

Podemos ahora utilizar el teorema PCT descrito en el Cap. (3) para los qubits individuales ρ_i . Para cada estado $i = a, b, c$ podemos calcular $P = \sqrt{1 - 4 \det \rho / (\rho_{11} + \rho_{22})^2}$, $V = 2|\rho_{12}| / (\rho_{11} + \rho_{22})$, $D = (\rho_{11} - \rho_{22}) / (\rho_{11} + \rho_{22})$ y obtener $V^2 + D^2 = P^2$. Ahora, para el caso de un qubit que forma parte de un sistema tripartito, vamos a tener presente la restricción de las ecuaciones (4.18, 4.19) y con $P^2 = 1 - C^2$ podemos escribir para los tres

subsistemas [38]

$$\boxed{V_c^2 + D_c^2 = 2 \operatorname{Tr} \rho_{ab}^2 - 1}, \quad (4.20)$$

$$\boxed{V_b^2 + D_b^2 = 2 \operatorname{Tr} \rho_{ac}^2 - 1}, \quad (4.21)$$

$$\boxed{V_a^2 + D_a^2 = 2 \operatorname{Tr} \rho_{bc}^2 - 1}. \quad (4.22)$$

4.4. Relación de Trialidad

Si bien la restricción propuesta por Wootters y Zurek [21] da cuenta de la dualidad onda-partícula, existen dos inconvenientes. Estos derivan de la intención de Bohr de tener un concepto de WPD que posea completitud y exclusividad. La incompletitud se evidencia, por ejemplo, al tener V y D nulos, en cuyo caso podríamos pensar que dicho resultado corresponde a no tener señal alguna; sin embargo, con señales presentes también se pueden anular V y D . Por lo tanto la teoría no estaría correspondiendo siempre a la realidad y por ello se le atribuye la falta de completitud. El segundo inconveniente describe la posibilidad de no siempre aumentar una cantidad a costa de disminuir la otra, es decir, la ausencia de mutua exclusividad. Como vemos incluso en el PCT, podemos variar P para disminuir D sin cambiar V . Estos dos descuidos, como son llamados en [27], se resuelven teniendo en cuenta la restricción entre polarización y concurrencia $P = 1 - C^2$ y el PCT. Con lo cual se obtiene la relación de trialidad:

$$V^2 + D^2 + C^2 = 1. \quad (4.23)$$

En esta notamos que al incluir la medida de entrelazamiento ganamos control sobre la WPD y se obtiene completitud y exclusividad.

Con ello en mente, se puede llegar a una expresión similar utilizando el resultado del PCT extendido con un marcador, pero que ahora forma parte de un sistema tripartito. Por ejemplo,

si tenemos un estado puro bipartito ρ_{ab} al que se le acopla un estado de camino c que será sometido junto con b a un esquema interferométrico igual al del PCT extendido a dos qubits, podremos reescribir la relación para el PCT extendido. Lo que tendremos según el PCT es $V_b^2 + D_b^2 = \cos^2 \theta + P^2 \sin^2 \theta$, donde el grado de polarización en cuestión refiere al marcador b , que inicialmente es $\rho_b^{(i)} = \text{Tr}_{ac} \rho_{abc}$ y cambia según $\rho_b^{(U)} = U_\theta \rho_b^{(i)} U_\theta^\dagger$. Debido a que su evolución es unitaria, llegamos a que $P = P_i = P_U$, con

$$P_i = \sqrt{1 - 4 \det \left\{ \rho_b^{(i)} \right\}} \quad (4.24)$$

$$P_U = \sqrt{1 - 4 \det \left\{ \rho_b^{(U)} \right\}} \quad (4.25)$$

Luego, debido a que el estado inicial ρ_{ab} es puro bipartito sabemos que $P_i \equiv P_b = P_a$ y considerando, además, la restricción $C_{a(bc)}^2 + P_a^2 = 1$ podremos escribir [38]

$$\boxed{V_b^2 + D_b^2 + \sin^2 \theta C_{a(bc)}^2 = 1}. \quad (4.26)$$

Este resultado generaliza la relación de trialidad $V^2 + D^2 + C^2 = 1$ válida para el caso puro bipartito, ampliándola a sistemas puros tripartitos. Es evidente que obtenemos la Ec. (4.23) fijando $\theta = \pi/2$ y haciendo el cambio en la concurrencia para dejar C_b . Como veremos luego en la parte experimental, vamos a aprovechar la relación de concurrencia generalizada con el qubit de polarización (a) dada por

$$C_{a(bc)} = \sqrt{2(1 - \text{Tr} \rho_{a(bc)}^2)} = \sqrt{2(1 - \text{Tr} \rho_a^2)}. \quad (4.27)$$

de tal manera que accederemos a la concurrencia entre a y bc solo midiendo el estado ρ_a .

4.5. Propuestas experimentales

En los dos experimentos siguientes, se generaron fotones entrelazados en polarización con una longitud de onda de 800 nm por SPDC con un par de cristales de beta borato de bario (BBO), que se fijaron cara a cara y teniendo sus ejes ópticos orientados perpendicularmente entre sí. El bombeo de los BBO fue realizado con un láser cw de 400 nm de longitud de onda (0,7 nm de ancho de línea, 37,5 mW), para así producir pares de fotones en un proceso de tipo I, es decir, los dos fotones, a y b, tenían la misma polarización, ortogonal a la del bombeo. Según [39], la polarización de la bomba se ajustó con una placa de media onda (HWP) y con una placa de cuarto de onda inclinada (QWP) para producir, por SPDC, el estado inicial de dos fotones.

4.5.1. Experimento I: Relación de triadidad extendida

La relación $V_b^2 + D_b^2 + \sin^2 \theta C_{a(bc)}^2 = 1$ (ec. 4.26) fue sometida a una prueba experimental mediante un arreglo óptico como el que se muestra en la Figura 4.2. Con este se buscó medir visibilidad, distinguibilidad y la concurrencia entre dos de los subsistemas del estado. Con esa finalidad se generó, primero, un estado tripartito utilizando un par de fotones individuales entrelazados en polarización y un qubit de camino. Luego, se construyó un interferómetro para el subsistema compuesto por la polarización de un fotón con su respectivo camino. Son estos dos qubits los que conformaron el par marcador(b)-quanton(c) como en el PCT extendido. Haciendo cambios en el marcador(b), que participa en V_b y D_b , se reconstruyeron tomográficamente distintos estados ρ_a , los que a su vez reflejaron los cambios en la concurrencia entre subsistemas $C_{a(bc)}$. Nótese que el marcador intercambiará el rol de *quanton* con el camino, como ya se ha discutido para el PCT extendido.

Generación y evolución del estado tripartito

Se produjo un estado inicial entrelazado de dos qubits en polarización

$$|\psi_{ab}\rangle^{(i)} = a_1|H_a\rangle|H_b\rangle + e^{i\phi_1}a_2|V_a\rangle|V_b\rangle \quad (4.28)$$

Haciendo la fase relativa $\phi = 0$ y utilizando $a_1 = \cos \alpha$, $a_2 = \sin \alpha$ como amplitudes, medimos un estado como en la Fig. (4.1). Luego, se consideró además un qubit de camino para tener el estado tripartito inicial

$$|\psi_{abc}\rangle^{(i)} = \cos \alpha|H_a\rangle|H_b\rangle|0_c\rangle + \sin \alpha|V_a\rangle|V_b\rangle|0_c\rangle. \quad (4.29)$$

Después, se aplicó un Mach-Zehnder solo al par (bc) con el operador total U_T dado por

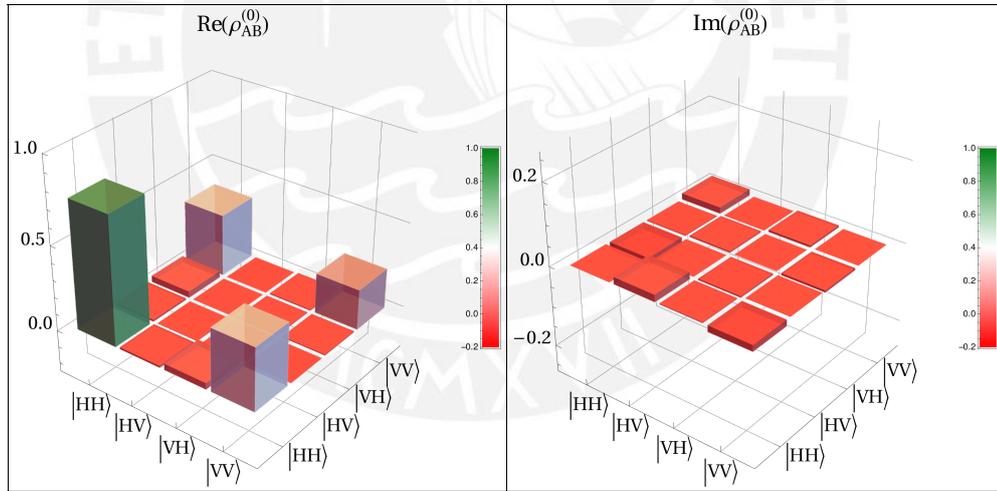


Figura 4.1: Partes real e imaginaria del estado inicial bipartito $|\psi_{ab}\rangle$ con $\alpha = \pi/6$. Se obtuvo una fidelidad y pureza $\mathcal{F} = 0,97$, $\mathcal{P} = 0,90$, respectivamente

$$U_T^{(abc)} = \sigma_0^{(a)} \otimes U_{MZ}^{(bc)}. \quad (4.30)$$

Aquí el operador U_{MZ} refiere a la acción del interferómetro, el cual incluye una evolución en uno de sus brazos descrita por $U_\theta = |0\rangle\langle 0| + U_2(\theta)|1\rangle\langle 1|$, donde se aplica una rotación $U_2 = \exp\{i\sigma_2\}$ en el camino $|1\rangle$. Uno de los brazos experimentalmente necesitó dos HWP en 0 para compensar la absorción entre caminos. El operador U_{MZ} está dado, entonces, por

$$U_{MZ}^{(bc)} = U_{BS} \cdot U_\theta \cdot U_{BS}. \quad (4.31)$$

De esta manera, se obtuvo el estado final

$$\begin{aligned} |\psi_{abc}\rangle^{(f)} &= U_T^{(abc)} \cdot |\psi_{abc}\rangle^{(i)} \\ \rho_{abc}^{(f)} &= U_T^{(abc)} \cdot \rho_{abc}^{(i)} \cdot (U_T^{(abc)})^\dagger. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Medición de la concurrencia generalizada

El objetivo fue medir la concurrencia generalizada $C_{a(bc)}$, es decir el entrelazamiento entre el qubit a y el subsistema (bc) . Esto se realizó a través de la caracterización de ρ_a . Cabe resaltar que para cada sector $i(jk)$ se puede calcular $C_{i(jk)}$ y los $P_{(i)}$, ($i, j, k = a, b, c$) como en (4.18) para obtener

$$\begin{aligned} C_{a(bc)} &= \sqrt{2(1 - \text{Tr } \rho_{a(bc)}^2)} = |\sin \theta| \\ C_{b(ac)} &= \sqrt{2(1 - \text{Tr } \rho_{b(ac)}^2)} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta \cos^2 2\alpha} \\ C_{c(ab)} &= \sqrt{2(1 - \text{Tr } \rho_{c(ab)}^2)} = |\sin 2\alpha| \\ P_a &= \sqrt{1 - 4 \det \rho_a} = |\cos 2\alpha| \\ P_b &= \sqrt{1 - 4 \det \rho_b} = |\cos 2\alpha| |\cos \theta| \\ P_c &= \sqrt{1 - 4 \det \rho_c} = |\cos \theta|. \end{aligned} \quad (4.33)$$

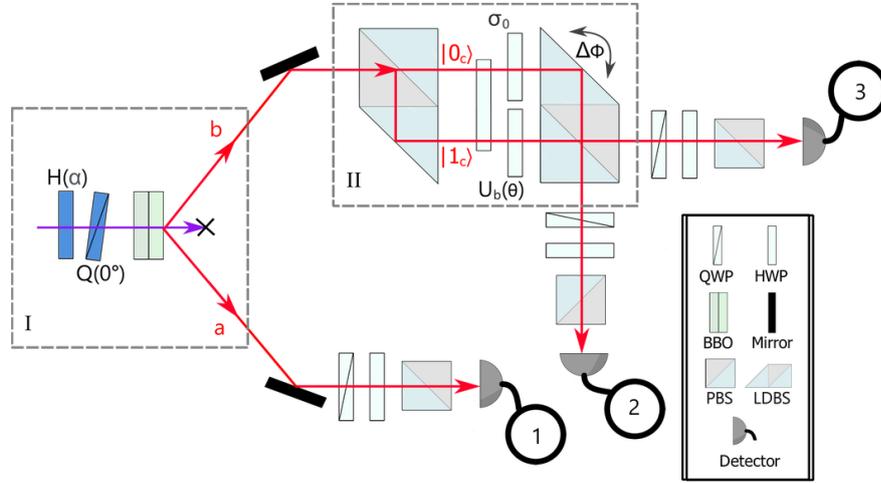


Figura 4.2: Configuración experimental para el qubit de polarización como *qanton*. Parte I: generación de fotones entrelazados en polarización mediante conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC). Parte II: interferómetro de tipo Mach-Zehnder. Parte no delimitada: Medición y dispositivos de detección. Se registran coincidencias entre cualquier par de los detectores etiquetados. HWP: placa de media onda. QWP: placa de cuarto de onda. BBO: cristales de beta borato de bario emparejados. LDBS: divisor de haz de desplazamiento lateral 50-50. PBS: divisor de haz polarizado. $\Delta\Phi$ indica el cambio de la fase relativa entre ambos caminos, que es controlada por la inclinación del último LDBS.

Vemos que se cumple $C_{i(jk)}^2 + P_i^2 = 1$. Sin embargo, comprobar esta restricción no fue el objetivo del experimento precisamente. Si bien se mide la concurrencia $C_{a(bc)} = \sqrt{2(1 - \text{Tr } \rho_a)}$, esto se logró a través del estado ρ_a y no de $\rho_{a(bc)}$. Justificamos esta decisión, por un lado, porque ρ_{bc} se caracteriza mediante tomografía de dos qubits, lo que implicaría mayor dificultad experimental para acceder al valor de la concurrencia, y por otro, ya que incluir a ρ_a evidencia relaciones entre los sectores. En el experimento, ρ_a se midió mediante tomografía de un qubit midiendo las coincidencias con ρ_b , habiendo trazado el qubit de camino. Para esto se suman las coincidencias de cada salida del interferómetro con el qubit (a), es decir se registraron coincidencias entre los detectores 1-2 y 1-3 según la figura 4.2, las que fueron sumadas. Solo se usó un dispositivo de tomografía QH-PBS en el detector 1 para hacer tomografía estándar.

Medición de V y D en PCT extendido

Después, consideramos un contexto experimental de PCT extendido como en la Fig. 3.3 fue necesario medir V_b y D_b , que son la visibilidad y distinguibilidad del marcador (polarización) luego de que evolucione mediante U_θ . Si nos enfocamos en lo que sucede en el sistema marcador $\rho_b^{(i)} = \text{Tr}_{ac} \rho_{abc}^{(i)}$ luego de aplicarle $U_T^{(abc)}$ al estado inicial $|\psi_{abc}\rangle^{(i)}$, vemos que

$$\begin{aligned}\rho_b^{(U)} &= U_\theta \cdot \rho_b^{(i)} \cdot U_\theta^\dagger \\ U_\theta &= U_H\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \cdot U_H(0)\end{aligned}\quad (4.34)$$

y podemos calcular para el marcador (b) la visibilidad y la distinguibilidad

$$\begin{aligned}D_b &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left| \rho_b^{(U)} - \rho_b^{(i)} \right| = |\cos 2\alpha| |\sin \theta| \\ V_b &= \left| \text{Tr} \left(U_\theta \cdot \rho_b^{(i)} \right) \right| = |\cos \theta|.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Experimentalmente, V_b fue medida haciendo interferencia entre los brazos del interferómetro con el BS y registrando los máximos y mínimos en coincidencias de los fotones (ab), es decir de los detectores 1-3, habiendo retirado QH-PBS de los mismos. Por otro lado, D_b requirió una tomografía de un qubit que caracterizó la polarización en cada brazo del interferómetro, registrando coincidencias con (a), para hallar $\rho_b^{(U)}$ y $\rho_b^{(i)}$. Esto se logró retirando el QH-PBS de detector 1, registrando coincidencias entre 1-3 tras bloquear el brazo que no se quería medir y luego haciendo las correspondientes mediciones tomográficas en el detector 3. Cabe resaltar que el valor experimental de θ se obtuvo del vector de Stokes medido del brazo que tiene la evolución $U_2(\theta)$.

Resultados

Se realizaron dos gráficos, el primero (ver Figura 4.3, lado izquierdo) tiene como parámetro fijo a $\alpha = \pi/6$ que controla amplitudes del estado entrelazado inicial (sistema ab) y se miden

las variables para distintos valores de θ en la rotación $U_2(\theta)$. Después, se realiza un segundo gráfico para distintos valores de α dejando un valor fijo para θ (Figura 4.3, lado derecho).

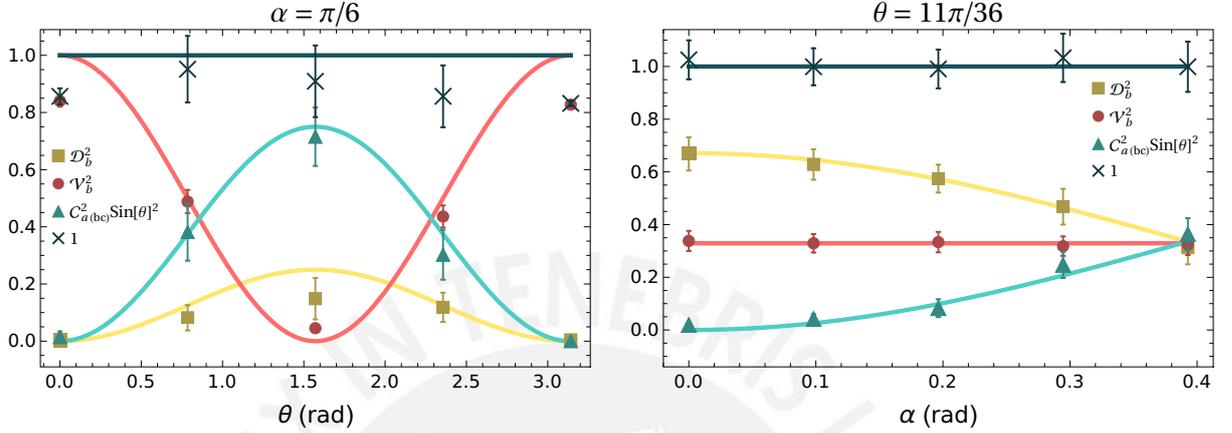


Figura 4.3: Pruebas experimentales de la relación de trialidad para estados tripartitos (Ec. 4.26). Parte izquierda: Se mantiene α fijo mientras θ varía. Parte derecha: θ fijo mientras α varía.

4.5.2. Experimento II: PCT para estado tripartito

Para este experimento testaremos la relación (4.20), en la cual tenemos al qubit de camino como *quanton* que es parte de un sistema de tres qubits. Consideramos nuevamente el estado tripartito inicial $|\psi_{abc}\rangle^{(i)}$, pero modificamos el Mach-Zehnder del sector (bc) según la Fig. (4.4) para que haya diferentes intensidades en cada camino y D_c sea diferente de cero. Para esto utilizamos un PBS en vez del BS inicial del interferómetro y añadimos una HWP(δ) antes del PBS inicial para controlar la polarización de unos de los fotones y afectar el balance de los caminos del interferómetro sin la necesidad de cambiar las amplitudes del estado entrelazado inicial. Además, para deshacernos del marcador, cambiamos la rotación U_2 por solo el operador que hace un *flip* en el estado, es decir, cambiamos la polarización $|H\rangle$ a $|V\rangle$ con una $U_H(\pi/4)$

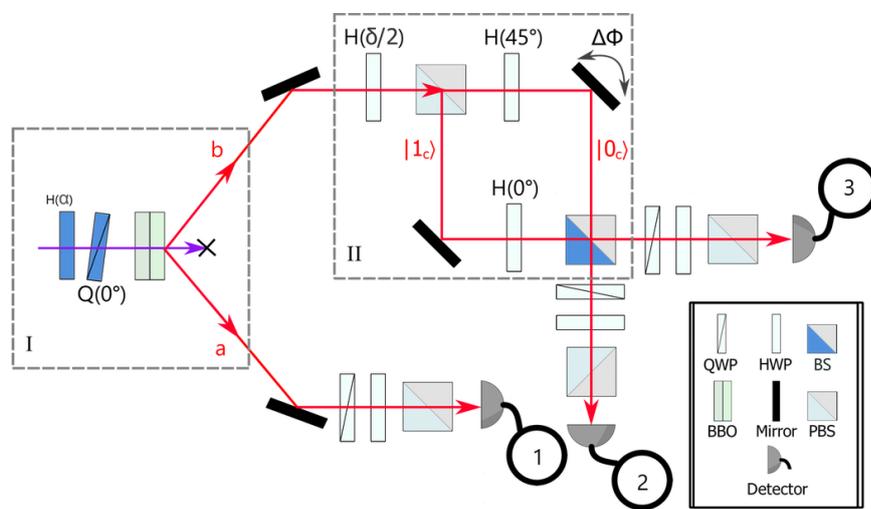


Figura 4.4: Configuración experimental para el qubit de camino como *quanton*. Parte I: generación de fotones de polarización entrelazada por conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC). Parte II: interferómetro tipo Mach-Zehnder. Parte no delimitada: Medición y dispositivos de detección. Coincidencias se registran entre dos detectores cualesquiera. HWP: placa de media onda. QWP: placa de cuarto de onda. BBO: cristales de beta borato de bario emparejados. PBS: divisor de haz polarizado. BS: 50-50 divisor de haz. $\Delta\Phi$: fase relativa entre caminos, que se controla inclinando el espejo.

que nos dejó con la misma polarización en cada camino. Con todo ello tenemos la evolución

$$\begin{aligned} U_{\delta}^{(bc)} &= (H(\pi/4) \otimes |0\rangle\langle 0| + H(0) \otimes |1\rangle\langle 1|) \cdot U_{PBS} \cdot (H(\delta/2) \otimes \sigma_0^{(c)}) \\ U_{\delta}^{(abc)} &= \sigma_0^{(a)} \otimes U_{\delta}^{(bc)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

y el estado tripartito final

$$\rho_{abc}^{(\delta)} = U_{\delta}^{(abc)} \cdot \rho_{abc}^{(i)} \cdot (U_{\delta}^{(abc)})^\dagger. \quad (4.37)$$

Visibilidad, distinguibilidad y grado de polarización para el qubit de camino (qubit c)

Teóricamente, con $\rho_c^{(\delta)} = \text{Tr}_{ab} \rho_{abc}^{(\delta)}$ se calcularía V_c^2 y D_c^2 según

$$V_c = \frac{2|\rho_{12}|}{\rho_{11} + \rho_{22}}, D_c = \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\rho_{11} + \rho_{22}}; \quad (4.38)$$

sin embargo, al igual que el experimento anterior, V_c fue medido registrando coincidencias máximas y mínimas a la salida del interferómetro entre el detector 1 y 3 sin proyecciones QH-PBS según la Fig. 4.4. Por otro lado, para encontrar D_c solo se necesitó medir la diferencia de coincidencias entre brazos sin caracterizar los estados de polarización, ya que prescindimos evidentemente de un marcador. Entonces obtenemos D_c de la diferencia normalizada de las coincidencias de 1-2 con las de 1-3 habiéndoles retirado sus QH-PBS's a ambos. Luego, con el estado del sector (ab) $\rho_{c(ab)}^{(\delta)} = \text{Tr}_c \rho_{abc}^{(\delta)}$ hallamos P_c^2 , pero no a partir del grado de polarización de ρ_c , sino de $\rho_{c(ab)}$ según

$$P_c^2 = 2 \text{Tr} \rho_{c(ab)}^2 - 1. \quad (4.39)$$

Aquí se buscó acceder a esta cantidad a través de (ab), que es la otra parte del subsistema c(ab). Esto se decide para no quedarnos en el caso trivial de un qubit y demostrar las relaciones entre subsistemas del estado tripartito. Para medir ρ_{ab} procedemos de manera similar a cuando medimos $C_{a(bc)}$ (sumando coincidencias 1-3 con 1-2) en el experimento anterior, salvo que

esta vez si hacemos las medidas proyectivas correspondientes al método de James [4] para reconstruir el estado de dos fotones en polarización.

Entonces, para el estado $|\psi_{ab}\rangle$ tenemos:

$$\begin{aligned} V_c^2 &= \cos^2(2\alpha) \sin^2(2\delta) \\ D_c^2 &= \cos^2(2\alpha) \cos^2(2\delta) \\ P_c^2 &= \cos^2(2\alpha) \end{aligned} \tag{4.40}$$

y vemos que satisface la Ec.(4.20): $V_c^2 + D_c^2 = P_c^2 = 2 \text{Tr} \rho_{c(ab)}^2 - 1$. Finalmente, para evidenciar esta relación realizamos un gráfico para un valor elegido de $\delta = \pi/10$ y variando α , la cual controla las amplitudes del estado inicial ver la Ec. (4.29). Se muestra también en la Tabla 4.1 los valores experimentales de ambos lados de la relación en cuestión.

α ($^\circ$)	$\mathcal{V}_c^2 + \mathcal{D}_c^2$	$2 \text{Tr} \left(\rho_{c(ab)}^{(f)} \right)^2 - 1$
-45	0.02 ± 0.01	0.00 ± 0.04
-22.5	0.52 ± 0.09	0.44 ± 0.08
0	0.93 ± 0.10	0.98 ± 0.06
22.5	0.51 ± 0.08	0.60 ± 0.10
45	0.01 ± 0.01	0.04 ± 0.04

Tabla 4.1: Prueba experimental de la restricción dada por la Ec. (4.20). Se comparan valores experimentales de ambos lados de la ecuación para diferentes valores de α (ver Ec. 4.40).

4.6. Conclusiones

Se han mostrado varias restricciones que gobiernan la dualidad onda-partícula (WPD), las cuales se derivaron al abordar estados tripartitos de tres qubits. Dos de estos qubits corresponden al grado de libertad (DOF) de polarización de un par de fotones entrelazados y el tercero, al

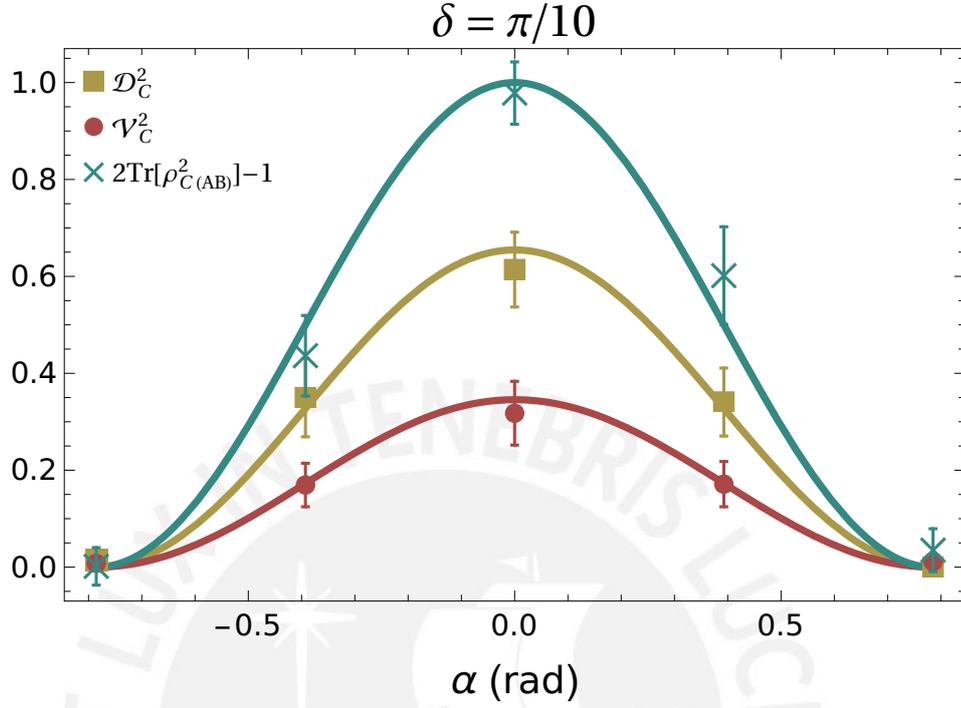


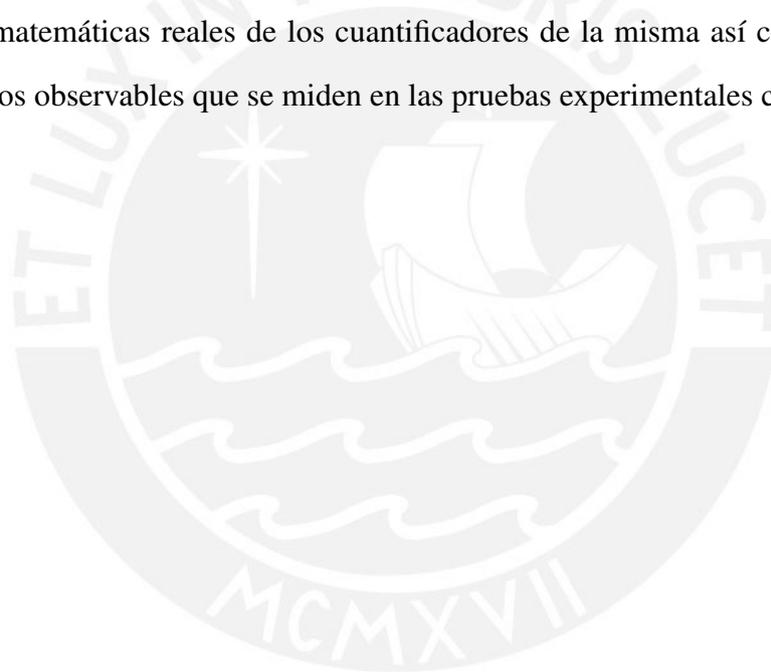
Figura 4.5: PCT tripartito para el qubit de camino (c). Prueba experimental de la restricción dada por la Ec. (4.20). El parámetro δ se mantiene fijo mientras α varía como se muestra.

DOF del camino que recorre uno de ellos. Anteriormente mencionamos que la visibilidad y la distinguibilidad son características comúnmente utilizadas para cuantificar el comportamiento ondulatorio y particular, respectivamente, del objeto físico que exhibe dicha dualidad, al que llamamos *quanton*. Al inicio del capítulo se revisó que la idea de utilizar un DOF como marcador del camino que toma el *quanton* (*which way marker*) ha llevado en el pasado al establecimiento de algunas restricciones para estos cuantificadores. Recientemente, al considerar subsistemas de uno y dos qubits de estados puros tripartitos, se encontraron nuevas restricciones para los cuantificadores de la WPD que participan del Teorema de polarización-coherencia (PCT).

Hemos sometido entonces a pruebas experimentales las relaciones que se derivan de este teorema al quedar extendido al caso puro tripartito. En el Experimento I tuvimos resultados satisfactorios en la llamada Relación de Trialidad, la cual tiene como *quanton* al marcador de

polarización. Luego, en el Experimento II se comprobó la relación del PCT donde tenemos un *quanton* de qubit de camino. En ambos experimentos los *quanton* forman parte de un sistema puro tripartito del cual nos beneficiamos al obtener, del subsistema bipartito restante, medidas que también participan de las restricciones.

Nuestro enfoque muestra que los roles de *quanton* y marcador son intercambiables, lo que significa que un qubit dado puede desempeñar cualquiera de estos papeles, dependiendo del contexto experimental. Creemos que nuestros resultados contribuyen a obtener una visión adicional del significado de la dualidad onda partícula. Este significado debe extraerse tanto de las definiciones matemáticas reales de los cuantificadores de la misma así como de la definición operativa de los observables que se miden en las pruebas experimentales correspondientes.



Referencias bibliográficas

- [1] E. Wolf, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. New York; Cambridge University Press., 2007.
- [2] J. H. Eberly, X.-F. Qian, A. A. Qasimi, H. Ali, M. A. Alonso, R. Gutiérrez-Cuevas, B. J. Little, J. C. Howell, T. Malhotra, and A. N. Vamivakas, “Quantum and classical optics—emerging links,” *Physica Scripta*, vol. 91, p. 063003, may 2016.
- [3] A. Jamiołkowski, “Minimal number of operators for observability of n -level quantum systems,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 22, pp. 369–376, Apr 1983.
- [4] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and A. G. White, “Measurement of qubits,” *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 052312, Oct 2001.
- [5] T. Heinosaari, L. Mazzarella, and M. M. Wolf, “Quantum tomography under prior information,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 318, pp. 355–374, Mar 2013.
- [6] X. Ma, T. Jackson, H. Zhou, J. Chen, D. Lu, M. D. Mazurek, K. A. G. Fisher, X. Peng, D. Kribs, K. J. Resch, Z. Ji, B. Zeng, and R. Laflamme, “Pure-state tomography with the expectation value of pauli operators,” *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 032140, Mar 2016.
- [7] S. Pallister, N. Linden, and A. Montanaro, “Optimal verification of entangled states with local measurements,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 170502, Apr 2018.

- [8] K. Wang and M. Hayashi, “Optimal verification of two-qubit pure states,” *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 032315, Sep 2019.
- [9] J. Gonzales, P. Sánchez, F. Auccapuella, B. Miller, M. V. Andrés, and F. D. Zela, “Unrestricted generation of pure two-qubit states and entanglement diagnosis by single-qubit tomography,” *Opt. Lett.*, vol. 44, pp. 3310–3313, Jul 2019.
- [10] D. R. A. R. Paredes, C. Montenegro, J. P. Marrou, Y. Yugra, M. Uria, E. Massoni, and F. D. Zela, “Synthesis and characterization of pure, two-qubit states encoded in path and polarization,” *Journal of Optics*, vol. 23, p. 085201, aug 2021.
- [11] E. Hecht, *Optics*. Addison-Wesley, 4th ed., 1998.
- [12] R. Jozsa, “Fidelity for mixed quantum states,” *Journal of Modern Optics*, vol. 41, no. 12, pp. 2315–2323, 1994.
- [13] R. Simon and N. Mukunda, “Minimal three-component $su(2)$ gadget for polarization optics,” *Physics Letters A*, vol. 143, no. 4, pp. 165–169, 1990.
- [14] F. De Zela, “Two-component gadget for transforming any two nonorthogonal polarization states into one another,” *Physics Letters A*, vol. 376, no. 19, pp. 1664–1668, 2012.
- [15] S. G. Reddy, S. Prabhakar, P. Chithrabhanu, R. P. Singh, and R. Simon, “Polarization state transformation using two quarter wave plates: application to mueller polarimetry,” *Appl Opt*, vol. 55, pp. B14–9, Apr. 2016.
- [16] J. H. Eberly, X.-F. Qian, and A. N. Vamivakas, “Polarization coherence theorem,” *Optica*, vol. 4, pp. 1113–1114, Sep 2017.
- [17] F. D. Zela, “Hidden coherences and two-state systems,” *Optica*, vol. 5, pp. 243–250, Mar 2018.

- [18] B.-G. Englert, “Fringe visibility and which-way information: An inequality,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 2154–2157, Sep 1996.
- [19] F. De Zela, “Generalizing wave-particle duality: Two-qubit extension of the polarization coherence theorem,” *Quantum Reports*, vol. 2, p. 501–513, Oct 2020.
- [20] P. Sánchez, J. Gonzales, V. Avalos, F. Auccapuella, E. Suarez, and F. D. Zela, “Experimental display of the extended polarization coherence theorem,” *Opt. Lett.*, vol. 44, pp. 1052–1055, Feb 2019.
- [21] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of bohr’s principle,” *Phys. Rev. D*, vol. 19, pp. 473–484, Jan 1979.
- [22] R. J. GLAUBER, “Amplifiers, attenuators, and schrödinger’s cata,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 480, no. 1, pp. 336–372, 1986.
- [23] D. M. Greenberger and A. Yasin, “Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer,” *Physics Letters A*, vol. 128, no. 8, pp. 391–394, 1988.
- [24] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, “Quantifying coherence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 140401, Sep 2014.
- [25] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [26] M. Jara, J. P. Marrou, M. Uria, C. M. L. Torre, and F. D. Zela, “Experimental display of generalized wave-particle duality,” *Opt. Express*, vol. 30, pp. 34740–34749, Sep 2022.
- [27] X.-F. Qian, A. N. Vamivakas, and J. H. Eberly, “Entanglement limits duality and vice versa,” *Optica*, vol. 5, pp. 942–947, Aug 2018.

- [28] P. Rungta, V. Bužek, C. M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, “Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions,” *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 042315, Sep 2001.
- [29] X.-F. Qian, T. Malhotra, A. N. Vamivakas, and J. H. Eberly, “Coherence constraints and the last hidden optical coherence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 153901, Oct 2016.
- [30] J. S. Bell, “On the einstein podolsky rosen paradox,” *Physics Physique Fizika*, vol. 1, pp. 195–200, Nov 1964.
- [31] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, pp. 880–884, Oct 1969.
- [32] F. De Zela, “Beyond bell’s theorem: realism and locality without bell-type correlations,” *Scientific Reports*, vol. 7, p. 14570, Nov 2017.
- [33] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, “Concentrating partial entanglement by local operations,” *Phys. Rev. A*, vol. 53, pp. 2046–2052, Apr 1996.
- [34] S. A. Hill and W. K. Wootters, “Entanglement of a pair of quantum bits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 5022–5025, Jun 1997.
- [35] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2245–2248, Mar 1998.
- [36] X.-F. Qian, S. A. Wadood, A. N. Vamivakas, and J. H. Eberly, “Quantification and observation of genuine three-party coherence: A solution based on classical optics,” *Phys. Rev. A*, vol. 102, p. 062424, Dec 2020.
- [37] C. R. M. M. L. Torre, Y. Yugra, and F. D. Zela, “Relationship between entanglement and polarization in tripartite states,” *Journal of Optics*, vol. 24, p. 105202, sep 2022.

- [38] J. P. Marrou, C. M. L. Torre, M. Jara, and F. D. Zela, “Wave-particle duality in tripartite systems,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 40, pp. C22–C29, Apr 2023.
- [39] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum, and P. H. Eberhard, “Ultrabright source of polarization-entangled photons,” *Phys. Rev. A*, vol. 60, pp. R773–R776, Aug 1999.

