

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



**INTERACCIÓN DE CONOCIMIENTOS TECNOLÓGICOS CON  
EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO DE  
PROFESORES SOBRE CUADRILÁTEROS**

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Enseñanza de  
las Matemáticas que presenta:

*Morella Cristina Théry Romero*

**Asesora:**

*Dra. Jesús Victoria Flores Salazar*

**Lima, 2023**

## Informe de Similitud

Yo, JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis titulada INTERACCIÓN DE CONOCIMIENTOS TECNOLÓGICOS CON EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO DE PROFESORES SOBRE CUADRILÁTEROS, de la autora Morella Cristina Théry Romero, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 15%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 19/04/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 21 de mayo de 2023.

Apellidos y nombres de la asesora: Flores Salazar, Jesús Victoria	
DNI: 08342853	Firma 
ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0002-0036-140X">https://orcid.org/0000-0002-0036-140X</a>	

## Agradecimientos

A mi asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su guía y apoyo constante. Por retarme sabiendo cuándo responder mis preguntas y cuándo hacer preguntas para cuestionar y mejorar el trabajo. Por siempre motivarme a continuar, pensar, reordenar y replantear con la meta de hacer el trabajo mejor.

A mis padres, por el apoyo y ánimo. Por siempre estar pendiente, por apoyarme cuando se complicaban las cosas y darme fuerzas y razones para alcanzar esta meta. Por hacerme quien soy y enseñarme a siempre luchar por ser mejor.

A mis hermanos, por ser ellos. Por hacerme reír, estar presentes en lo posible y escucharme y apoyarme en mis proyectos e ideas. Así como a mis sobrinos, por motivarme a crear.

A mis abuelos, por ser ejemplo de creatividad, innovación e integridad.

A la Red Iberoamericana RIITMA Perú y al grupo de investigadores de la línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), por sus aportes y sugerencias.

A los miembros del jurado, Daysi García-Cuellar y Nelson Peñaloza, por sus sugerencias y comentarios que contribuyeron a mejorar esta investigación.

A mis compañeros y profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, por compartir conocimientos, experiencias y situaciones que me han nutrido y han hecho esto posible.

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, por darme la oportunidad de formar parte de este grupo maravilloso de personas. De estar en sus aulas y aprender, de conocer personas que quieren mejorar la enseñanza de las matemáticas y de formar parte de grupos de investigación y formación.

A los profesores que fueron parte de esta investigación, por aprovechar y participar en la experiencia con la mejor disposición y entusiasmo.

Y a mis amistades, por compartir, apoyar y comprender la importancia de este proyecto. Especialmente, por la paciencia y el ánimo en la fase final.

## Resumen

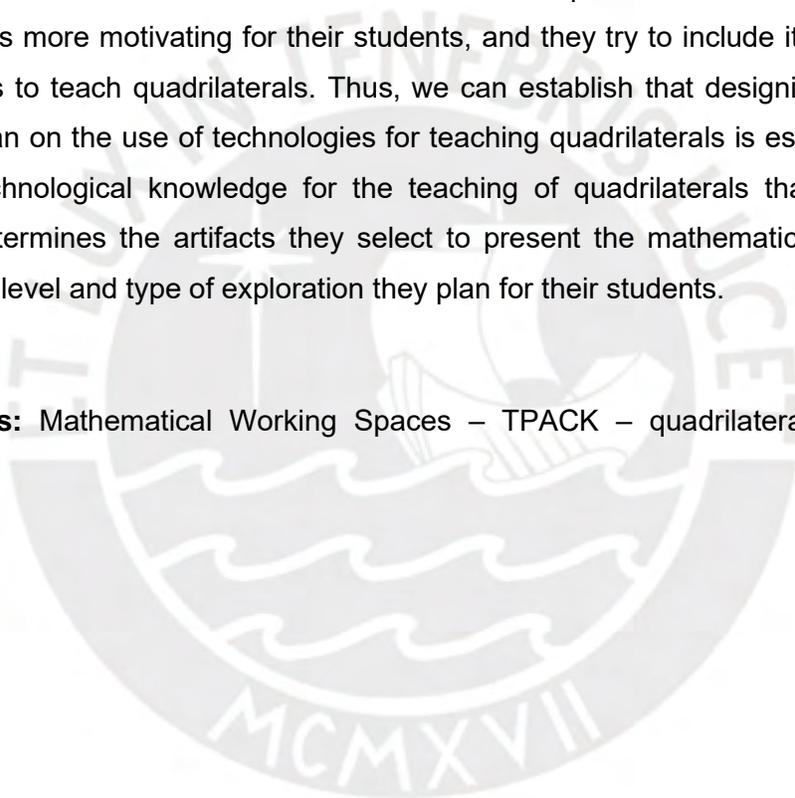
La presente investigación tiene como objetivo analizar la interacción de los conocimientos tecnológicos que poseen los profesores de matemática de secundaria en la planificación de la enseñanza de cuadriláteros. Para ello, se utilizó una metodología cualitativa, el cual permite identificar los conocimientos tecnológicos de profesores de secundaria para enseñar cuadriláteros a través de la utilización de diferentes instrumentos de recolección de datos. Los cuestionarios y tareas se aplicaron como parte de una formación docente sobre herramientas tecnológicas para la enseñanza de cuadriláteros. Durante la investigación, se trabajó con la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el modelo Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido para Matemática (TPACK). Los resultados obtenidos muestran que los profesores perciben el uso de tecnología como un elemento que, para sus estudiantes, es más motivador e intentan incluirlo en su planificación de sesiones de clase para enseñar cuadriláteros. Por ello, podemos establecer que diseñar un plan de formación nutrido y profundo sobre el uso de tecnologías para la enseñanza de cuadriláteros es fundamental en la formación de profesores. Los conocimientos tecnológicos para la enseñanza de cuadriláteros que poseen los profesores, cambian y determinan los artefactos que los profesores seleccionan para presentar el objeto matemático a sus alumnos y el nivel y tipo de exploración que planifican para sus estudiantes.

**Palabras clave:** Espacio de Trabajo Matemático – TPACK – cuadriláteros – enseñanza – planificación

## Abstract

This research seeks to analyze the influence of the technological knowledge possessed by high school mathematics teachers in planning the teaching of quadrilaterals. To do this, a qualitative methodology was used, which allows identifying the technological knowledge of secondary school teachers to teach quadrilaterals using different data collection instruments. The questionnaires and activities were applied as part of a teacher training on technological tools for teaching quadrilaterals. During the investigation, we worked with the Mathematical Workspace (ETM) and Technological Pedagogical Content Knowledge for Mathematics (TPACK) theories. The results obtained show that teachers perceive the use of technology as an element that is more motivating for their students, and they try to include it in their planning of class sessions to teach quadrilaterals. Thus, we can establish that designing a rich and in-depth training plan on the use of technologies for teaching quadrilaterals is essential in teacher training. The technological knowledge for the teaching of quadrilaterals that teachers have changes and determines the artifacts they select to present the mathematical object to their students and the level and type of exploration they plan for their students.

**Keywords:** Mathematical Working Spaces – TPACK – quadrilaterals – teaching – planning



## Índice

<b>Agradecimientos .....</b>	<b>iii</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>v</b>
<b>Índice.....</b>	<b>vi</b>
<b>Índice de Tablas .....</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras .....</b>	<b>viii</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>9</b>
<b>Capítulo I: Problemática.....</b>	<b>11</b>
1.1 Investigaciones de referencia .....	11
1.2 Justificación.....	25
1.3 Aspectos teóricos de la investigación .....	37
1.4 Pregunta y objetivos de la Investigación .....	58
1.5 Aspectos metodológicos de la investigación .....	59
<b>Capítulo II. Los cuadriláteros.....</b>	<b>66</b>
2.1 Algunos aspectos históricos y matemáticos de los cuadriláteros.....	66
2.2 Aspectos didácticos para la enseñanza de cuadriláteros.....	73
<b>Capítulo III. Experimento y Análisis .....</b>	<b>85</b>
3.1 Características del experimento .....	85
3.2 Tareas y resultados .....	91
<b>Conclusiones.....</b>	<b>109</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>113</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>120</b>

## Índice de Tablas

<b>Tabla 1</b>	<i>Desempeños sobre Cuadriláteros en el Currículo Básico Nacional de Perú</i> .....	33
<b>Tabla 2</b>	<i>Componentes del TPACK</i> .....	40
<b>Tabla 3</b>	<i>Descriptores para los temas principales en el Modelo de Desarrollo</i> .....	43
<b>Tabla 4</b>	<i>Procesos generadores de las génesis en ETM</i> .....	48
<b>Tabla 5</b>	<i>Interrelaciones de los conocimientos del TPACK con las génesis del ETM</i> .....	53
<b>Tabla 6</b>	<i>Clasificaciones de cuadriláteros hechas por diferentes matemáticos</i> .....	70
<b>Tabla 7</b>	<i>Libros de texto de Secundaria</i> .....	74
<b>Tabla 8</b>	<i>Técnicas e instrumentos de recolección de datos</i> .....	86
<b>Tabla 9</b>	<i>Preguntas y objetivos del cuestionario inicial</i> .....	87
<b>Tabla 10</b>	<i>Cantidad de preguntas por Componente del Conocimiento del profesor</i> .....	89
<b>Tabla 11</b>	<i>Preguntas y objetivos del cuestionario final</i> .....	89
<b>Tabla 12</b>	<i>Preguntas por niveles de integración de tecnología</i> .....	92
<b>Tabla 13</b>	<i>Tareas de la capacitación “Enseñanza de Cuadriláteros con Tecnología”</i> .....	93
<b>Tabla 14</b>	<i>Tareas del Dispositivo de Formación</i> .....	95
<b>Tabla 15</b>	<i>Geoboard: Área y perímetro de rectángulos</i> .....	98
<b>Tabla 16</b>	<i>Polypad: Área de un trapecio</i> .....	101
<b>Tabla 17</b>	<i>GeoGebra: Construcción esperada de un paralelogramo</i> .....	103
<b>Tabla 18</b>	<i>Resumen de Interacción Observada</i> .....	106
<b>Tabla 19</b>	<i>Preguntas para entrevista semiestructurada</i> .....	107

## Índice de Figuras

Figura 1. <i>Organizador visual de los cuadriláteros del CNEB</i> .....	23
<b>Figura 2.</b> <i>Relación de los cuadriláteros con otros conceptos del CNEB</i> .....	24
<b>Figura 3.</b> <i>Perfil de Egreso de Licenciatura en Matemática</i> .....	30
<b>Figura 4.</b> <i>Continuo de Aprendizaje para formas y espacios</i> .....	32
<b>Figura 5.</b> <i>Pregunta 62 sobre cuadriláteros en prueba de concurso docente MINEDU</i> ...35	
<b>Figura 6.</b> <i>Pregunta 69 sobre cuadriláteros en prueba de concurso docente MINEDU</i> ...36	
<b>Figura 7.</b> <i>Modelo TPACK y sus componentes</i> .....	40
<b>Figura 8.</b> <i>Niveles de pensamiento en la integración de tecnología hacia el TPACK</i> .....	44
<b>Figura 9.</b> <i>Modelo del Espacio de Trabajo Matemático</i> .....	46
<b>Figura 10.</b> <i>Interacción de componente TCK con plano [Ins-Dis]</i> .....	54
<b>Figura 11.</b> <i>Interacción de componente TCK con plano [Sem-Ins]</i> .....	55
<b>Figura 12.</b> <i>Interacción de componente TPK con plano [Sem-Ins]</i> .....	56
<b>Figura 13.</b> <i>Interacción de componente PCK con plano [Sem-Dis]</i> .....	57
<b>Figura 14.</b> <i>Proceso de la investigación</i> .....	60
<b>Figura 15.</b> <i>Organización de Google Classroom</i> .....	64
<b>Figura 16.</b> <i>Matemática 1: Propiedades y clasificación de cuadriláteros</i> .....	75
<b>Figura 17.</b> <i>Matemática 1: Ejemplo de aplicación de propiedades de cuadriláteros</i> .....	76
<b>Figura 18.</b> <i>Matemática 1: Suma de ángulos internos de cuadriláteros</i> .....	76
<b>Figura 19.</b> <i>Matemática 1: Tarea propuesta sobre propiedades de cuadriláteros</i> .....	77
<b>Figura 20.</b> <i>Matemática 1: Tarea propuesta sobre identificación de cuadriláteros</i> .....	78
<b>Figura 21.</b> <i>Matemática 1: Tarea propuesta sobre medida de lados de cuadriláteros</i> .....	78
<b>Figura 22.</b> <i>Matemática 2: Ejemplo resuelto de trapecio isósceles</i> .....	79
<b>Figura 23.</b> <i>Matemática 2: Tarea de aplicación de propiedades de cuadriláteros</i> .....	80
<b>Figura 24.</b> <i>Matemática 3: Propiedades y clasificación de cuadriláteros</i> .....	81
<b>Figura 25.</b> <i>Matemática 3: Ejemplo de construcción de un rombo con regla y compás</i> .82	
<b>Figura 26.</b> <i>Matemática 3: Ejemplos resueltos sobre propiedades de cuadriláteros</i> .....	82
<b>Figura 27.</b> <i>Matemática 2: Problema de relación entre áreas de cuadriláteros</i> .....	83
<b>Figura 28.</b> <i>Actividad de video interactivo con Nearpod</i> .....	95
<b>Figura 29.</b> <i>Historia de Proclus de isoperimetría y área de cuadriláteros</i> .....	96
<b>Figura 30.</b> <i>Historia de Proclus representada en Geoboard</i> .....	97
<b>Figura 31.</b> <i>Construcción de paralelogramo con GeoGebra en línea</i> .....	105

## Introducción

El interés por analizar la interacción de conocimientos tecnológicos con el espacio de trabajo matemático idóneo de profesores sobre cuadriláteros es el resultado de observaciones y experiencias relacionadas con la enseñanza, la investigación y la didáctica. Los profesores de matemática usan sus conocimientos para planificar la enseñanza de objetos matemáticos, en nuestro caso específico, de los cuadriláteros.

Las investigaciones de referencia confirman nuestra motivación y relevancia de realizar esta investigación, especialmente las referentes a la formación de profesores de matemática, la enseñanza de geometría y cuadriláteros y el uso de tecnología para la enseñanza de matemática.

Es así como surge el objetivo general de esta investigación, que consiste en analizar la interacción de los conocimientos tecnológicos de profesores de matemática con su ETM idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros. Para ello, se toma como base teórica el modelo de Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido (TPACK) y la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), ya que permiten la comprensión y análisis de dicha interacción. Metodológicamente, esta es una investigación cualitativa, dado a que permite focalizarse en los procesos y analizar la situación haciendo revisiones teóricas en todo momento.

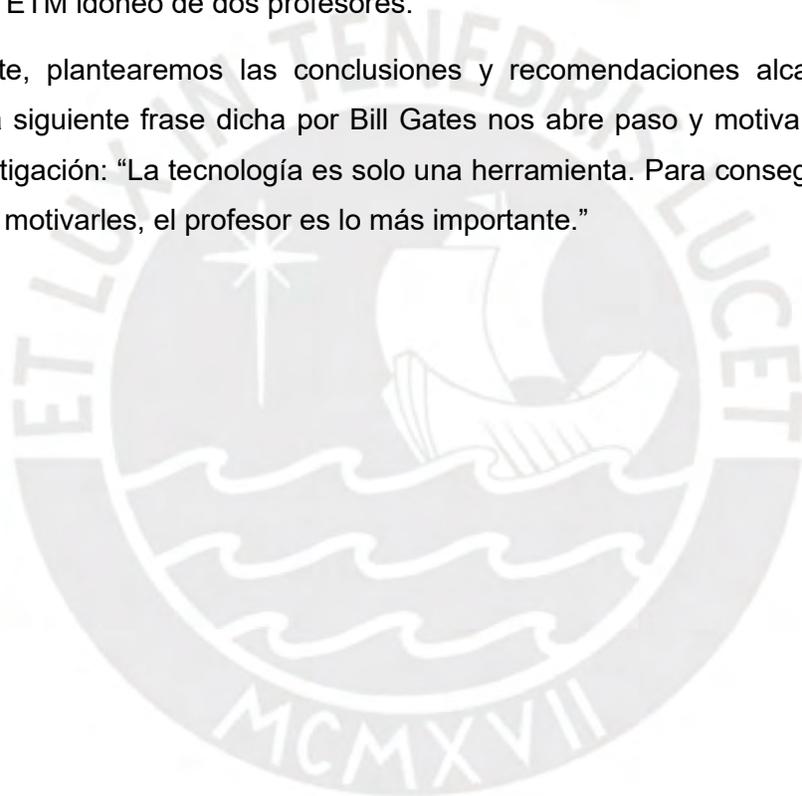
Para lograr nuestro objetivo, la presente investigación consta de tres capítulos. El primer capítulo, consta de la problemática, donde presentaremos las investigaciones de referencia, la justificación y los aspectos teóricos de esta investigación. En ella, veremos estudios que apoyan el uso de tecnología para la enseñanza, específicamente de cuadriláteros y otros que dan a conocer la importancia de la preparación y formación de los docentes en diferentes dimensiones de la enseñanza y el aprendizaje. Tener profesores capacitados es un tema de interés a nivel mundial, tal como se evidencia en los marcos de competencias digitales para docentes creados por Estados Unidos y España. También observaremos la importancia, en el área de matemática, de los cuadriláteros a través de su presencia en programas de diferentes sistemas educativos. También presentaremos en este capítulo la pregunta y objetivos de esta investigación y aspectos metodológicos como la metodología, técnicas e instrumentos de recolección de datos y los sujetos de esta investigación.

El segundo capítulo trata de los cuadriláteros. Haremos una revisión de algunos aspectos históricos y matemáticos de los cuadriláteros donde se comienza con los antiguos egipcios y se hace una revisión epistemológica con el objetivo de presentar el contexto del

objeto matemático de este estudio. También presentaremos aspectos didácticos para la enseñanza de cuadriláteros mediante el análisis de libros de texto de los primeros tres años de secundaria, considerando su estructura y tareas presentadas en base al marco teórico usado en esta investigación.

El tercer capítulo trata del experimento y el análisis de resultados. Presentaremos las características del experimento que se lleva a cabo durante una capacitación para profesores de secundaria sobre el uso de tecnología para la enseñanza de cuadriláteros. Presentaremos, describiremos y analizaremos las tareas realizadas por los sujetos en la capacitación y los resultados obtenidos. Determinaremos el nivel de interrelación entre los conocimientos tecnológicos y el ETM idóneo de dos profesores.

Finalmente, plantearemos las conclusiones y recomendaciones alcanzadas en esta investigación. La siguiente frase dicha por Bill Gates nos abre paso y motiva la reflexión para iniciar esta investigación: “La tecnología es solo una herramienta. Para conseguir que los niños trabajen juntos y motivarles, el profesor es lo más importante.”



## Capítulo I: Problemática

Comprender y estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje, específicamente de la matemática y los cuadriláteros, ha sido motivo de muchas investigaciones. En la presente investigación, veremos que el tema sigue siendo de interés y adquiere nuevas características al incorporar herramientas tecnológicas que han surgido de nuevos descubrimientos y avances.

Esta investigación pretende estudiar específicamente la interacción de los conocimientos tecnológicos de profesores con el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) al planificar o diseñar la enseñanza de cuadriláteros.

En este capítulo describiremos el problema de investigación, comenzando con investigaciones de referencia; la justificación que brinda sentido a esta investigación y la presentación de un modelo y una teoría que utilizaremos para la comprensión de las situaciones estudiadas en esta investigación.

Primero, presentaremos las investigaciones de referencia con respecto a los aspectos fundamentales que nos interesan en esta investigación y luego justificaremos su importancia y relevancia mediante la descripción de características de la sociedad y del sistema educativo actual.

Seguiremos con la presentación breve del modelo de Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido (TPACK) y de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Esta presentación teórica inicial permite una mejor comprensión de este trabajo. El modelo específico que utilizaremos en esta investigación es el TPACK, pero con un foco específico en matemática.

La revisión teórica respalda el planteamiento de una pregunta y objetivos de investigación y lleva a la selección de la metodología de investigación. El modelo y la teoría utilizados brindan las herramientas necesarias para la comprensión y análisis de los resultados de este estudio.

El capítulo termina con la descripción detallada de la metodología cualitativa utilizada, sus partes y elementos.

### 1.1 Investigaciones de referencia

Para facilitar la comprensión y la conexión de ideas entre las investigaciones de referencia relacionadas con esta investigación, se han agrupado en base a tres criterios: i)

tecnología para la enseñanza de matemática, ii) formación y práctica de profesores de Matemática y iii) enseñanza de cuadriláteros.

Comenzamos presentando investigaciones sobre **tecnología para la enseñanza de matemática**, ya que posee especial relevancia en este estudio porque el uso de tecnologías y herramientas digitales es una característica distintiva de la sociedad actual (Padilla y Conde-Carmona, 2020). En la comunidad educativa, se infiere que los trabajos que existirán en el futuro no han sido inventados y que las habilidades para poder afrontarlos requerirán creatividad, capacidad de resolución de problemas, habilidades y manejo de la tecnología con niveles más profundos que el de usuario, razonamiento crítico y analítico, entre otras.

Dentro de este criterio, se consideran investigaciones referentes al uso de la tecnología; su papel en la enseñanza y en el aprendizaje; su inclusión en la enseñanza de la matemática como artefacto o instrumento; así como también aspectos relacionados con la preparación en tecnología digital de los profesores; el uso que éstos le dan para la enseñanza y su percepción.

Dado el interés de esta investigación por la influencia de los conocimientos tecnológicos de los profesores, cobra importancia hacer una diferenciación clara entre dos términos: artefacto e instrumento.

En esta investigación, utilizaremos estos términos siguiendo lo planteado por Kuzniak (2022), que establece que la palabra "artefacto" se usará para referirse a todo lo que haya tenido alguna transformación humana con algún propósito. Puede referirse a objetos materiales o simbólicos.

De esta forma, se hace necesario definir a los artefactos digitales en particular por la función y el condicionamiento que ejercen en el conocimiento matemático. Salazar, Gaona y Richard (2022) definen los artefactos digitales para la enseñanza y aprendizaje de matemática como un conjunto de proposiciones caracterizadas por ser ejecutables por una máquina electrónica que contiene inteligencia histórica y una validez epistemológica relativa.

Los artefactos digitales permiten realizar representaciones gráficas a ser exploradas y promueven la comprensión de nociones particulares. La noción de herramienta se diferencia de artefacto, porque la herramienta posee un uso específico para una actividad productiva. Estos autores también establecen que un artefacto digital puede ser una o varias máquinas matemáticas que completan un trabajo matemático para el aprendizaje humano dentro de un ambiente computacional.

Con respecto a los instrumentos, éstos tienen un significado y valor cognitivo. De acuerdo con estos autores, cuando los sujetos crean esquemas para usar un artefacto durante el trabajo matemático, este artefacto se convierte en un instrumento porque adquiere significado para el sujeto (Kuzniak, 2022).

En este sentido, haciendo referencia a la tecnología digital, Santos-Trigo et al. (2016) mencionan que estos instrumentos convierten a los estudiantes y los profesores en participantes activos del proceso de aprendizaje que se genera dentro del ETM porque brindan una variedad de formas para representar y explorar las tareas y, por ende, para solucionar los problemas matemáticos (p. 830).

Dicha participación depende de la integración de la tecnología diseñada por el profesor, ya que puede ser de diversos tipos y con diferente nivel de profundidad. Como lo describe Cabero Almenara (2017) algunos recursos digitales pueden ser simplemente un apoyo para el docente que lo usa como organizador de sus clases tradicionales o pueden generar cambios profundos en la forma de enseñar, permitiendo la innovación, creación, cooperación, construcción, exploración y aprendizaje activo.

Otro estudio, realizado por Codina y Romero (2016), hace uso de la teoría ETM, sus elementos, paradigmas y modelo para encontrar resultados relevantes, considerando la incorporación de diferentes herramientas tecnológicas. Los autores plantean nuevos elementos de la Teoría ETM mencionando la existencia de tres tipos de ETM: referencial, idóneo y personal. Además, establecen que éstos están en una relación-tensión en la cual la incorporación de la tecnología cambia los roles de los participantes y, por lo tanto, las relaciones y los ETM. También establecen claramente que el ETM idóneo debe adaptarse a los ETM personales de los estudiantes.

La investigación de estos autores busca observar las modificaciones en los roles de los participantes del entorno educativo al incorporar tecnologías diferentes en el escenario del trabajo matemático. En otras palabras, contribuir con la investigación de las relaciones y dinámicas entre los ETM dentro de un entorno tecnológico.

Estos autores plantean, después de hacer referencia a varios investigadores, que los estudiantes construyen significados en los ETM personales que son afectados por el profesor y también por la tecnología utilizada. La interacción que se produce con otros estudiantes, a raíz del uso de la tecnología, genera un nuevo tipo de ETM al que llaman ETM compartido.

Este estudio fue realizado con profesores en ejercicio, es decir, que se encontraban activos laboralmente enseñando Matemática al momento de realizar el estudio, y que, adicionalmente, estaban realizando una maestría que contempla un curso semipresencial con características adecuadas para el análisis que realizaron por la metodología interactiva, colaborativa y que usa un ambiente tecnológico.

Los participantes trabajaron en la resolución de un problema de optimización, en el cual se debe buscar la menor distancia para que una hormiga se desplace entre dos puntos ubicados en las paredes rectangulares de una habitación, mediante el uso de dos applets que guían y favorecen su resolución a través de la interacción con estos y la realización de preguntas. Adicionalmente, en una segunda fase, se trabaja mediante la utilización del foro para compartir y resolver problemas de forma colaborativa.

Codina y Romero (2016) analizaron los resultados obtenidos de los participantes en episodios para ejemplificar lo observado durante la investigación. Para cada episodio presentado, los investigadores analizaron el rol de los estudiantes, el rol de la tecnología en cuanto a la movilización de procesos y planos del ETM generados y si se evidenciaban aspectos de la presencia de un ETM compartido.

Los autores concluyen que el uso de la tecnología permite que los estudiantes interactúen entre ellos fomentando las génesis, principalmente las de descubrimiento-exploración y razonamiento-justificación. Para los autores, el trabajo en parejas y en el foro evidenció la creación de ETM compartidos que contribuyeron a las transiciones entre los planos y a la experimentación y justificación. Por ello, establecen que estas herramientas brindan oportunidades valiosas que implican la modificación y adecuación del rol del profesor. La tecnología puede asumir parte de su rol, más no sustituirlo por completo.

Adicionalmente, mencionan que las modificaciones a los ETM personales e idóneo se producen de forma eficiente con el uso de la tecnología y que cabe continuar investigando las formas y metodologías más adecuadas para aprovechar la tecnología. Observaron además que estas tecnologías se adaptan y ajustan a los ETM personales y compartidos, permitiendo mayores interacciones para la resolución de problemas y la transición entre planos.

En un estudio cuantitativo, descrito por Drijvers et al. (2016), se presentan los resultados obtenidos por el gobierno de China en el 2015 usando el modelo M-TPACK (modelo TPACK específicamente para matemática). En este estudio, se hace uso del término M-TPACK para referirse al modelo TPACK de profesores de Matemática; sin embargo, en la mayoría de

las investigaciones, no se hace esta distinción. Por ello, usaremos dicho término al describir esta investigación y sus resultados, pero luego nos referiremos al modelo como TPACK de profesores de Matemática.

Después de una serie de esfuerzos por fomentar el uso de la tecnología para la educación matemática en China, los investigadores realizan estudio para identificar los factores e impacto del proyecto sobre el rendimiento de los estudiantes. El estudio fue realizado a 65 profesores de Matemática en ejercicio en secundaria y a casi 2500 estudiantes de tres distritos escolares en China. Se usaron datos de dos años para detectar los efectos del uso de la tecnología digital por parte de los profesores, así como el impacto que tiene en el rendimiento matemático de los estudiantes

En el estudio, Drijvers et al. (2016) mencionan que se contrasta el rendimiento en Álgebra y Geometría de los estudiantes en 2012 con el M-TPACK de los profesores, el uso de tecnología digital, el rendimiento de los estudiantes en el año anterior y el tiempo de tutorías personales o clases de recuperación. Realizaron una prueba de rendimiento basada en el estándar del plan de estudios de China a estudiantes de séptimo y octavo grado y se utilizó y desarrolló también una escala M-TPACK para los docentes. El cuestionario de los profesores incluía elementos que medían la información de antecedentes de los profesores como años de servicio docente, qué recurso digital ha utilizado en la docencia en el aula y la frecuencia del uso de recursos digitales.

Los resultados de este estudio mostraron que tener un TPACK desarrollado en los profesores tuvo efectos significativamente positivos en el rendimiento matemático de los estudiantes, tanto en Álgebra como en Geometría. Resalta el hecho de que dicho efecto fue mayor en Geometría que en Álgebra. Esto implica que la capacidad de los profesores para integrar herramientas digitales en la educación matemática es un factor importante que beneficia esa integración.

Padilla y Conde-Carmona (2020) utilizan la propuesta del TPACK y realizan una investigación que explora si los profesores de Matemática están preparados para incorporar en sus clases tecnologías que contribuyan a favorecer las habilidades para las nuevas características y necesidades de los estudiantes. Los autores realizaron una caracterización sobre el uso y formación en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) de profesores de Matemática en Colombia, en la cual encuentran que la percepción general de los profesores sobre el uso de la tecnología para la enseñanza de matemática es positiva, sin embargo, hay una contradicción entre lo que expresan y su práctica docente.

Los autores describen los conocimientos que los profesores deben tener bajo los criterios planteados por el modelo TPACK. En ella, sólo consideran los componentes relacionados con tecnología para realizar su estudio. Dichos componentes relacionan los conocimientos tecnológicos con los de contenido y pedagogía en Conocimientos tecnológicos (TK), Conocimientos Tecnológicos del Contenido (TCK), Conocimiento Pedagógico Tecnológico (TPK).

Los resultados obtenidos en la investigación de Padilla y Conde-Carmona (2020) refieren que existe una desconexión entre el discurso de los profesores y su práctica pedagógica. Los docentes dan valor y refieren los beneficios de las herramientas tecnológicas y, por el contrario, en la práctica continúan siguiendo métodos tradicionales.

Igualmente, Bueno, Lieban y Ballejo (2021) realizan una investigación con profesores de Matemática en un curso de formación continua, siguiendo los niveles de integración de la tecnología como base para el diseño de la secuencia de actividades. En el estudio, utilizan el análisis textual discursivo de las respuestas dadas por los participantes en entrevistas y un cuestionario, en referencia a enfoques instruccionales, manejo del entorno de aprendizaje y formación docente. La investigación revela las preocupaciones de los profesores participantes en brindar a los estudiantes diferentes enfoques de enseñanza utilizando tecnologías, ya que se dieron cuenta que enseñar a nativos digitales requiere innovaciones pedagógicas, así como nuevas formas de concebir y administrar los entornos del aula. Estas percepciones revelan la necesidad de un desarrollo profesional constante, tal como se mencionó varias veces en el estudio.

En este estudio, los investigadores realizan un curso de cuarenta horas en seis semanas con profesores de matemática para desarrollar aplicaciones y juegos lógicos con GeoGebra. Se basan en el modelo TPACK como base teórica y explican aspectos del modelo como:

- los conocimientos que el modelo propone: Conocimientos Tecnológicos (TK), Conocimientos Pedagógicos (PK), Conocimientos del Contenido (CK), Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos (TPK), Conocimientos Tecnológicos del Contenido (TCK), Conocimientos Pedagógicos del Contenido (PCK), Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido (TPACK).

- los niveles de integración de la tecnología a través de los cuales transitan los profesores para lograr el TPACK: Reconocimiento, aceptación, adaptación, exploración y avance.

- los aspectos de la practica de la enseñanza: Currículo y evaluación; aprendizaje; enseñanza; y acceso.

Bueno, Lieban y Ballejo (2021) explican que los participantes pasan por los cinco niveles de integración de la tecnología con las diferentes tareas propuestas en el curso. Los investigadores concluyen que el desarrollo paulatino del TPACK en los profesores favoreció que los participantes se concentren en relacionar la tecnología, pedagogía y contenidos matemáticos. También concluyen que es necesario promover y apoyar una formación docente permanente y que los profesores deben mantenerse en formación constante, es decir, ya no es suficiente con sólo un título universitario de docencia

Por otro lado, la investigación de Kuzniak, Nechache y Salazar (2020) presenta un estudio realizado con profesores en ejercicio en Paris y Lima. Los investigadores unen sus trabajos con el fin de identificar el trabajo matemático realizado por los profesores en formación, dándoles la oportunidad de reconocer y cuestionar sus conocimientos matemáticos. Asimismo, el estudio busca promover el uso de herramientas digitales como recursos que beneficien a los profesores de acuerdo con sus preferencias.

Las primeras investigaciones de estos autores fueron realizadas en Paris y las siguientes en Lima, donde además se incorpora el uso de tecnología para determinar su efecto de acuerdo con los planos verticales del modelo planteado por la teoría ETM.

Estos investigadores hacen una explicación de la teoría ETM, los paradigmas geométricos y los tipos de trabajo matemático propuestos en esta teoría. También exponen los tipos de trabajo matemático llevados a cabo por el grupo de profesores en formación y resaltan que casi ningún profesor en formación menciona la falta de información para resolver correctamente el problema planteado en el estudio.

La metodología utilizada en este estudio involucra también el uso de GeoGebra como apoyo para brindar mejores controles a los profesores en formación y fomentar los estilos de trabajo pertinentes para la resolución satisfactoria de situaciones como la planteada. Los artefactos usados también son adecuados para los paradigmas Geometría I y II de estos profesores y sus futuros estudiantes.

El estudio de Kuzniak et al. (2020) se realiza en tres etapas: La primera, busca que los profesores en formación construyan y exploren usando herramientas digitales que brinden control a los métodos usados. En esta etapa, los autores refieren que observaron diferencias importantes entre los profesores que conocían GeoGebra y los que no tenían experticia con el software. La segunda etapa busca permitir lo anteriormente mencionado con la experimentación con fórmulas. Finalmente, la tercera etapa está diseñada para brindar oportunidades de demostraciones y pruebas usando herramientas del software.

Los autores concluyen que cuando los profesores en formación usan herramientas clásicas y digitales por separado presentan dificultades en su uso; sin embargo, al usarlas de forma coordinada y conjunta, les permite avanzar y lograr resultados superando ciertos obstáculos. Este estudio plantea la posibilidad de realizar otras investigaciones para profundizar y complementar el trabajo realizado por los investigadores en lo concerniente a la certeza del efecto transformador del uso de la tecnología en el trabajo matemático realizado por los profesores y estudiantes.

Incorporar tecnología y preparar a los estudiantes para afrontar situaciones problemáticas mediante su uso se hace, bajo el escenario educativo actual, una necesidad. En consecuencia, los docentes deben estar preparados y dominar su uso para resolver problemas, diseñar y ejecutar experiencias de aprendizaje y potenciar la exploración y trabajo matemático de sus estudiantes (Padilla y Conde-Carmona, 2020; Cateriano-Chavez et al., 2021).

Es también necesario que los docentes tengan los conocimientos del contenido de cuadriláteros y los conocimientos pedagógicos para enseñarlos. Por esto, en la presente investigación, se revisan los antecedentes referidos a la formación de docentes de Matemática y se usan sus resultados como base y punto de partida para esta investigación.

Tomando en cuenta lo anterior, con respecto a la **formación y práctica de profesores de Matemática**, se consideran, en primer lugar, las características de los docentes y de su trabajo matemático, su metodología, percepción de los procesos de enseñanza y aprendizaje y su nivel de formación.

Dentro de este criterio, en el dominio de la Geometría, podemos considerar la investigación de Kuzniak y Nechache (2021), en la cual buscan identificar las diferentes formas en las cuales profesores de primaria en formación realizan el trabajo matemático. Adicionalmente, también busca validar el proceso de análisis de los resultados y la metodología de investigación usada para futuras investigaciones relacionadas.

El análisis de los resultados de la investigación de estos autores producidos por los profesores en formación se hace basado en la teoría ETM y mediante un método que permite su descripción y caracterización tomando en cuenta, por ejemplo, las relaciones e interacciones en cada ETM, considerando el proceso y los resultados, que son dos de los aspectos planteados en esta teoría. De esta forma, se usa también el grado de finalización de acuerdo con las génesis y razonamientos presentes.

En esta descripción, también se determina el paradigma geométrico usado por los estudiantes (profesores en ejercicio). En el estudio de estos autores, son relevantes los paradigmas GI y GII, ya que GIII no se presenta en estudiantes de primaria, ni es necesario para sus profesores.

Los sujetos de esta investigación fueron profesores de Matemática en ejercicio en Francia que, siendo profesores-estudiantes del primer año de maestría, presentaban dificultades en Matemática, especialmente en Geometría. Los autores explican que los estudiantes carecen de habilidad en el uso de teoremas y propiedades a pesar de conocerlas. Se evidencia cierta disparidad en el hecho de que los profesores deben desarrollar trabajos geométricos personales para enseñar a sus estudiantes contenidos que los lleven al paradigma de GI; sin embargo, se les solicita que resuelvan problemas de GII para aprobar las pruebas de certificación.

Para realizar este estudio, Kuzniak y Nechache (2021) presentan un problema sobre estimación del área de un terreno con forma de cuadrilátero y los profesores-estudiantes responden la tarea asignada usando sus conocimientos y lo aprendido en sesiones anteriores. Para la descripción y evaluación, se utilizan tres criterios: cumplimiento de paradigmas geométricos, nivel de finalización y veracidad matemática de las respuestas. Los tres criterios usados por estos investigadores en la tercera etapa para la descripción de los resultados, representa uno de los aportes más valiosos de este estudio según lo expresan los autores.

También identifican y describen cinco formas de trabajo que constituyen el alcance del objetivo de su investigación. Dichas formas de trabajo, que corresponden a los tipos de trabajo geométrico y responden a las características obtenidas con los criterios mencionados previamente, son: Disector, Inspector, Explorador, Constructor y Calculador. Los investigadores sostienen que su clasificación complementa y mejora la elaborada por Duval.

Los resultados son analizados siguiendo etapas. El método descrito en esta investigación comprende una etapa de análisis previo de la tarea y luego tres etapas de análisis de los resultados.

En el análisis previo de la tarea, los autores hacen una descripción de las respuestas esperadas. Las tres etapas para el análisis se desarrollan de la siguiente forma: en primer lugar, un análisis de arriba-abajo donde se determinan los episodios y las actividades planificadas por los estudiantes para la resolución del problema bajo la mirada de su ETM. La segunda etapa es un análisis abajo-arriba que permite describir el camino cognitivo recorrido a través de la observación de las acciones plasmadas y la inferencia de la organización lógica usada. En la tercera etapa, se toma lo obtenido de estos análisis para compararlos con la teoría, los paradigmas y características de forma de describir y caracterizar las respuestas. En esta última etapa, se determina si las respuestas cumplen con los paradigmas geométricos, si el trabajo matemático está completo o en qué nivel está de acuerdo con los planos verticales o génesis que se movilizan y si la respuesta es matemáticamente correcta o no.

De esta forma, en este estudio, se establece una metodología clara y eficiente para analizar dichos resultados y se encuentran algunos aspectos importantes a considerar para próximas investigaciones como, el efecto o influencia de paradigmas escolares para comprender los resultados de los estudiantes.

En el dominio del Análisis, la investigación de Arredondo (2020) estudia la práctica docente de profesores universitarios de Matemática al enseñar la función exponencial a través del análisis del ETM idóneo. Considera la organización de los conocimientos y tareas que proponen los profesores, la observación de la clase y entrevistas realizadas a profesores universitarios para la realización de un análisis basado en el ETM. Los resultados de esta investigación permitieron identificar las génesis, planos verticales y paradigmas que los profesores logran o buscan activar en los estudiantes.

Vivas (2020) lleva a cabo un estudio en el cual se utiliza el método planteado por Kuzniak y Nechache, antes descrito, para el análisis del trabajo matemático personal de estudiantes al resolver una tarea sobre función exponencial. Destaca que este método permite profundizar la comprensión del ETM personal de los estudiantes que participaron en la investigación. Esta metodología es relevante para nuestra investigación, ya que permite evidenciar la activación de las génesis y los planos verticales.

Hemos hecho referencia a investigaciones sobre la tecnología para la enseñanza de matemática, especialmente de geometría, y la formación de los profesores de matemática, por lo que ahora presentaremos algunas investigaciones con respecto a **la enseñanza de cuadriláteros**, en las cuales se considera el conocimiento de los profesores sobre cuadriláteros como primer aspecto.

También consideraremos la visión y percepción de profesores en ejercicio sobre la planificación y ejecución de sus planes sobre la enseñanza de cuadriláteros y, finalmente, el marco brindado por el Ministerio de Educación del Perú en el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) con respecto a la enseñanza de este objeto matemático, ya que constituye la base y guía de muchos profesores.

Carreño y Climent (2019) realizan una investigación en la cual utilizan el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (en inglés, *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* MTSK) como marco y establecen que los profesores que participaron en su estudio “proponen definiciones descriptivas y particionales, sin cuestionar la necesidad y suficiencia de las propiedades que incluyen” (Carreño y Climent, 2019, p.1).

Las autoras realizan la investigación para trabajar con definiciones de cuadriláteros y determinar las características del conocimiento especializado de dos profesores de secundaria en ejercicio. En ella, plantean una situación en la cual ambos profesores debían responder un cuestionario y, luego, diseñar y ejecutar una sesión de clase sobre cuadriláteros.

Algo importante a resaltar de lo establecido por Carreño y Climent (2019), es que “si el conocimiento del futuro profesor es pobre, su enseñanza será transmisiva, mientras que, si tiene un conocimiento profundo, el enfoque de enseñanza será investigativo.” (p.3). Esto implica que los profesores deben tener un conocimiento profundo de los conceptos u objetos que enseñarán para evitar limitar el conocimiento y experiencias que proponen o diseñan para sus estudiantes.

Las conclusiones del estudio realizado por estas autoras reafirman que el trabajo con definiciones en la formación de profesores es importante para profundizar la comprensión de los objetos geométricos. Dicho trabajo debe fomentar, en el futuro profesor, la visualización y experimentación de situaciones reales de enseñanza donde haya cambios de roles para comprender las mejores prácticas matemáticas y didácticas.

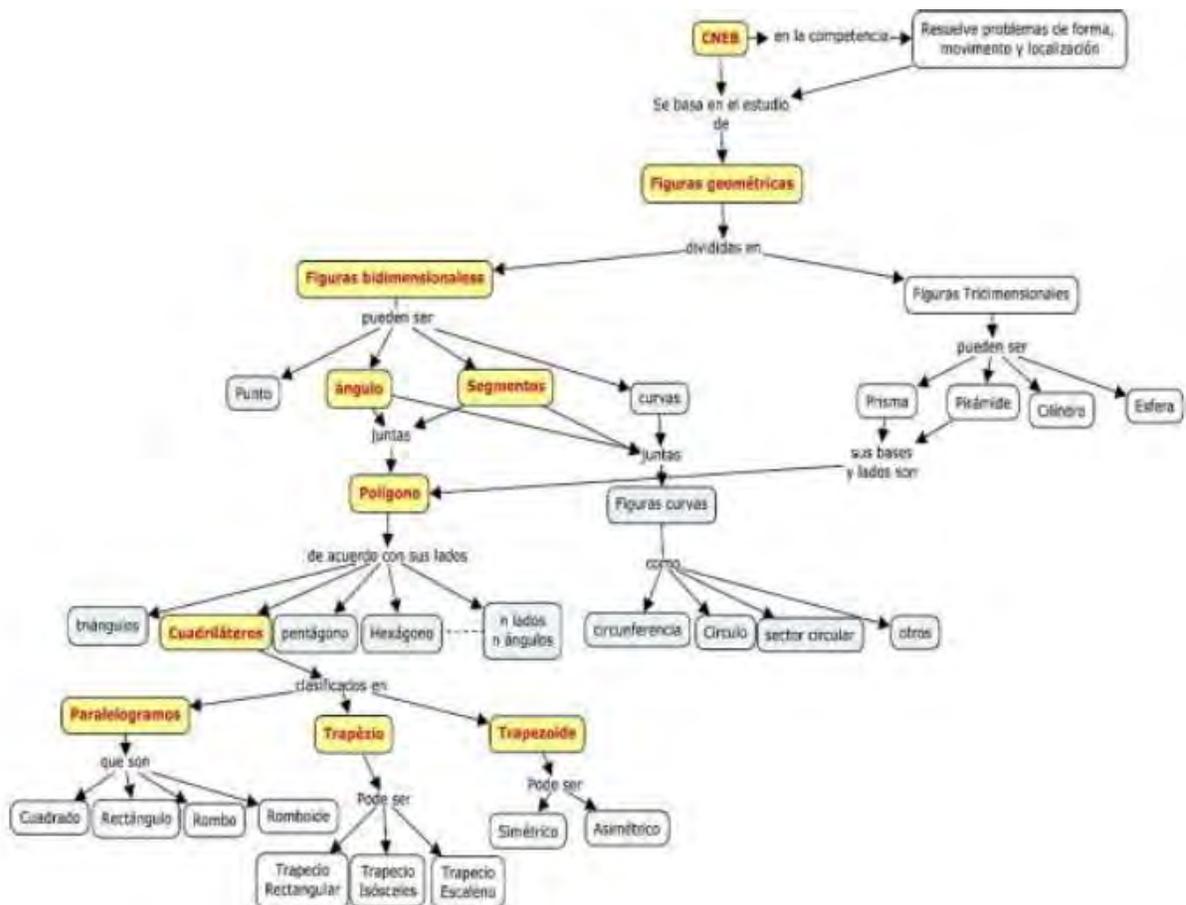
También, estas investigadoras hacen énfasis en que la reflexión matemática y didáctica sobre las características y propiedades de los objetos geométricos profundiza el conocimiento

matemático de las relaciones y propiedades de los objetos matemáticos, en particular de los cuadriláteros. Culminan su estudio mencionando que “el abordaje de la definición como práctica matemática, supone una oportunidad para identificar aspectos conceptuales y didácticos que requieren atención y, en consecuencia, reorientar los planes de estudio de asignaturas específicas o incluso de la estructura formativa.” (Carreño y Climent, 2019, p.29).

También es importante considerar la forma en que el Currículo Nacional de la Educación Básica del Perú (CNEB) propone la enseñanza de cuadriláteros. En este aspecto, encontramos la investigación realizada por García-Cuéllar et al. (2019) en la cual realizan un análisis sobre la relación entre los cuadriláteros y el sistema de Educación Básica Regular peruano en base a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Para ello, realizan una investigación cualitativa bibliográfica donde estudian la transposición didáctica externa entre el saber sabio y el saber a enseñar del CNEB con respecto a los cuadriláteros.

Dentro de su estudio, los autores establecen que los cuadriláteros están presentes en el CNEB desde primer grado de primaria hasta tercer grado de secundaria y elaboran un organizador visual para identificar a los cuadriláteros en el CNEB “a partir de los desempeños de la competencia y de su relación con los libros didácticos que el MINEDU brinda a todas las escuelas nacionales del territorio” (García-Cuéllar et al., 2019, p.467). En este organizador, que se puede observar en la Figura 1, los cuadriláteros se consideran figuras geométricas bidimensionales, específicamente, polígonos de cuatro lados.

Figura 1. Organizador visual de los cuadriláteros del CNEB



Nota: Tomado de García-Cuéllar et al. (2019, p.466)

Adicionalmente, García-Cuéllar et al. (2019) analizan la función que tienen los cuadriláteros con otros conceptos dentro de la red de conceptos geométricos del CNEB. Para ello, elaboran el esquema mostrado en la Figura 2, el cual muestra los aportes que brindan los cuadriláteros para el estudio de otros objetos matemáticos dentro del CNEB y los requeridos para el estudio de los cuadriláteros. Esta relación entre conocimientos es referida por los autores como la cadena trófica en cuanto a la funcionalidad de los objetos matemáticos y puede ser interpretada como el flujo de energía o saberes que requieren los objetos matemáticos.

**Figura 2. Relación de los cuadriláteros con otros conceptos del CNEB**



Nota: Tomado de García-Cuéllar et al. (2019, p.467)

García-Cuéllar et al. (2019) plantean también los tipos de tareas que se encuentran dentro de los libros facilitados por el MINEDU a saber,

T1- Medir ángulos internos, T2- Identificar tipos de cuadriláteros, T3- Medir lados, T4 - Calcular su perímetro, T5 - Calcular la medida de su área, T6 - Trazar las diagonales del cuadrilátero, T7 – Calcular la medida del área de cuadriláteros dada una medida como referencia, T8 – Construir cuadriláteros dada cierta información y T9 - Relacionar la medida del área con el perímetro de un cuadrilátero. (p.469)

Los autores concluyen que la enseñanza de cuadriláteros planteada en el CNEB del Perú es atomizada y rígida, porque son enseñados de forma aislada a otros contenidos y porque los profesores no pueden cambiar los contenidos que enseñan.

Los autores plantean dos propuestas para la enseñanza de los cuadriláteros muy interesantes. La primera, considerando sus tipos de simetría, lo que permitiría realizar tareas de construcción y clasificación de los cuadriláteros y también una integración entre los sectores de polígonos y movimientos en el plano y, la segunda, regresando al origen histórico que motivó a los egipcios a su utilización para el cálculo del área de inundación del río Nilo. En este caso

también crearía un vínculo real y significativo entre los cuadriláteros y el cálculo de áreas, que en el actual CNEB consideran está disgregado.

En esta investigación, se toman ambas propuestas de García-Cuéllar et al. (2019) y la organización de los cuadriláteros que propone el MINEDU para el diseño de las tareas que se propone a los profesores, así como para la selección de los recursos digitales usados en el taller de capacitación sobre herramientas tecnológicas que se dicta a los profesores como parte de esta investigación. Esta elección se realiza para ajustar y coordinar lo presentado a los profesores con el sistema educativo peruano y que posiblemente corresponde a lo que ellos conocen y enseñan a sus estudiantes.

Como se ha podido evidenciar, las investigaciones presentadas en este capítulo brindan un contexto y describen la situación, características y teorías que respaldan el uso de la tecnología para la enseñanza de cuadriláteros. El interés científico para la didáctica de la matemática constituye una motivación para la realización de este estudio.

A continuación, justificaremos la relevancia del presente trabajo y luego explicaremos sus aspectos teóricos y metodológicos fundamentales.

## **1.2 Justificación**

El efecto del uso de la tecnología en la educación ha sido tema de discusión, investigación e interés durante años. Esto se puede evidenciar en las investigaciones y artículos científicos mencionados anteriormente, así como investigaciones de referencia. En la presente investigación se utilizan dos referentes teóricos, la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el modelo de Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido (TPACK) para la enseñanza de matemática. Se usan sus aspectos en común como vínculo y se complementan permitiendo analizar los conocimientos tecnológicos y su influencia en el ETM idóneo de profesores en ejercicio. La Teoría ETM permite plantear elementos que aportan mayor conocimientos y comprensión sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos. Por ello, se considera que analizar la formación docente y el uso de recursos digitales con fines educativos, bajo el enfoque del TPACK y el ETM, podría mejorar y optimizar dicho análisis, brindando un aporte a la didáctica de la matemática.

Es relevante considerar las investigaciones recientes realizadas sobre geometría y uso de tecnología usando el ETM como base para identificar el interés de la comunidad científica y las posibles investigaciones que podrían contribuir al conocimiento del área. En tal sentido, las conclusiones alcanzadas en estos trabajos sirven para apreciar la relevancia e importancia de

realizar el presente estudio y que ayuden a comprender la interacción de los conocimientos sobre tecnología y el uso de artefactos digitales en el ETM idóneo de los profesores para mejorar, modificar, complementar o diseñar experiencias de aprendizaje sobre cuadriláteros.

En una de estas investigaciones, Kuzniak y Rauscher (2011) concluyen que investigaciones como la suya aportan información y análisis importantes para mejorar la formación docente en el área de geometría; donde establecen una metodología clara y eficiente para analizar los resultados de investigaciones que caractericen el trabajo matemático realizado por profesores y encuentran algunos aspectos importantes que se deben continuar investigando como la realización del estudio con profesores de diferentes niveles o la reacción de formadores de éstos ante las reacciones de los profesores con respecto a las respuestas de los estudiantes.

Por su parte, Codina y Romero (2016) concluyen que el uso de la tecnología permite que los profesores-estudiantes interactúen entre ellos fomentando las génesis y la aparición de los ETM compartidos que contribuyeron a las transiciones entre los planos horizontales, cognitivo y epistemológico. También plantean que el uso de la tecnología puede modificar el rol del profesor, pero no sustituirlo por completo. Esto implica nuevas interrogantes y oportunidades de investigación al respecto, por ejemplo, “cómo los docentes pueden apoyarse de forma efectiva en las tecnologías para crear y gestionar ambientes de trabajo colaborativo” (Codina y Romero, 2016, p. 117).

Adicionalmente, Kuzniak et al. (2020) mencionan que cuando los profesores-estudiantes usan herramientas clásicas o digitales por separado presentan dificultades en su uso; sin embargo, al usarlas de forma coordinada y conjunta, les permite avanzar y lograr resultados superando obstáculos relacionados con la resolución de la tarea emblemática, el desconocimiento de las herramientas o el uso de pruebas experimentales o formales. Este estudio plantea la posibilidad de realizar otras investigaciones para profundizar y complementar el trabajo realizado por estos investigadores en lo concerniente a la certeza del efecto transformador del uso de la tecnología en el trabajo matemático realizado por los profesores-estudiantes.

Las investigaciones que se han consultado sobre la enseñanza de cuadriláteros reflejan la presencia de este objeto matemático en los planes de estudio, el interés por conocer la metodología usada por profesores para su enseñanza, el conocimiento que tienen los profesores sobre ellos y las pautas planteadas por el MINEDU para la enseñanza de cuadriláteros. Estos aspectos pueden relacionarse con lo planteado por el M-TPACK en cuanto

a los diferentes conocimientos (tecnológicos, pedagógicos, del contenido y sus interacciones) que intervienen y son necesarios en los profesores al enseñar cuadriláteros. Estas investigaciones nos permiten una comprensión inicial sobre la situación actual con respecto al uso de la tecnología en la enseñanza.

Además de estas investigaciones, existen otros factores que enfatizan y respaldan la importancia y relevancia de los aspectos que se consideran en la presente investigación. En primer lugar, la necesidad de que los docentes incorporen la tecnología en la enseñanza se evidencia en la creación de marcos y descripciones de los perfiles con las capacidades docentes deseadas a nivel internacional y nacional. También, la formación de profesores y las capacidades que deben tener para enseñar matemática son temas de discusión, investigación e inquietud a nivel mundial. A continuación, detallaremos cada uno de estos factores.

Con respecto a las competencias que un docente debe tener, Cateriano et al. (2020) mencionan que, además del TPACK, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2023) ha creado un Marco de Competencia digital que puede ser usado “para evaluar diferentes planos del desarrollo de los docentes.” Este marco plantea cuatro dimensiones: “enseñanza y aprendizaje, administración escolar, desarrollo profesional continuo, armonización de la práctica en el aula con las prioridades institucionales/nacionales según se establecen en las políticas”.

También en Estados Unidos, la Sociedad Internacional de Tecnología en Educación (2007) crea los Estándares ISTE para Docentes y, en España, el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (2017) crea el Marco Común de Competencias Digitales Docentes. En ambas propuestas, se hace una lista de capacidades y competencias digitales que deben tener los docentes para incorporar la tecnología digital de forma efectiva en la enseñanza.

En el caso del Marco Común de Competencias Digitales Docentes, consta de cinco áreas de competencia: Información y alfabetización informacional, comunicación y colaboración, creación de contenidos digitales, seguridad y resolución de problemas. Vale la pena destacar que cada competencia posee tres niveles de desempeño, por ejemplo, en el caso del área de creación de contenido, la competencia 3.2 hace referencia a la integración y reelaboración de contenidos digitales con la competencia “Modificar, perfeccionar y combinar los recursos existentes para crear contenido digital y conocimiento nuevo, original y relevante” (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, 2017, p. 41), en

la cual hay seis niveles de competencia. Cada nivel posee capacidades que lo describen y una rúbrica con indicadores de logro para cada nivel.

Se observa un alto grado de detalle y énfasis en que “las capacidades operacionales son una pequeña proporción del conocimiento necesario” que implica “el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de información y comunicación” (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, 2017, p. 12). Esta es una herramienta de gran valor para evaluar la integración de tecnologías en la enseñanza que cada profesor realiza y construir un plan de formación y mejora con metas claras.

Por otro lado, el MINEDU (2020) elaboró el Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente (DCBN) para profesores de Matemática, donde se plantea que los profesores de secundaria deben alcanzar competencias personales, profesionales y comunitarias. Las competencias digitales las cuales plantean deben ser desarrolladas por los docentes están comprendidas en cinco grupos: “gestión de la información en entornos digitales, gestión de la práctica pedagógica utilizando herramientas y recursos en los entornos digitales, empleo de recursos en los entornos digitales como herramienta de evaluación de los aprendizajes y utilización de entornos y redes digitales” (p. 125-126).

Para ello, proponen aprobar cursos de formación especializada, que permiten alcanzar las competencias docentes. Proponen cursos de conocimientos matemáticos como Trigonometría, Geometría, Análisis, Álgebra, Estadística, Probabilidad, Epistemología de la Matemática; cursos de didáctica y pedagogía como Currículo y Didáctica aplicados a la Matemática, Orientaciones para la tutoría, Gestión Institucional, Teoría de la Educación; y cursos de tecnología como TIC aplicada a la enseñanza de la Matemática.

A continuación, presentaremos algunos ejemplos de universidades e institutos pedagógicos que han tomado en cuenta la importancia de estas competencias, habilidades, conocimientos y actitudes digitales con respecto al uso de tecnologías para la enseñanza. Esto se puede observar al comparar los perfiles de los egresados de licenciatura en Educación Matemática descritos por varias universidades; los perfiles de maestrías para profesores de matemática que reflejan las características que sus estudiantes y el mercado laboral buscan.

Al consultar los planes de estudio de programas de pregrado y posgrado relacionados con enseñanza de matemática de universidades en el Perú, como la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), el Instituto Pedagógico Nacional de Monterrico (IPNM) y la Universidad San Martín de Porres (USMP), se puede ver que estas universidades dan cada vez

más importancia a la formación de profesores sobre el uso de recursos digitales. Esto se produce en respuesta a lo planteado por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (2017) en el Marco Común de Competencias Digitales Docentes, por la Sociedad Internacional de Tecnología en Educación (2007) en los Estándares ISTE para Docentes y por el MINEDU en el DCBN para profesores de Matemática, antes mencionados. Por ello, la capacidad de incorporación de la tecnología, por parte de los egresados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se ofrece como parte del perfil de egreso y en la descripción de las carreras.

En la PUCP, se ofrece la carrera de Educación Primaria y Educación Secundaria en Matemática. En ambas carreras, se incorpora el uso de tecnología dentro del plan de estudios. En la Licenciatura en Educación Secundaria en Matemática, presentan el enfoque curricular de la carrera, estableciendo que su malla curricular “Es interdisciplinaria y se orienta a la práctica, la investigación y el correcto uso de las TIC” (PUCP, 2021). Adicionalmente, se puede observar en su oferta académica que uno de los cursos obligatorios del ciclo 7 es “Recursos TIC para la Enseñanza-aprendizaje en Secundaria”. También se puede ver la importancia que atribuyen a la tecnología en el hecho de que una de las líneas de investigación para trabajos de tesis es “TIC y Educación” (PUCP, 2021).

En la página Web de la Licenciatura en Educación Primaria, establecen que la malla curricular “Es interdisciplinaria y orienta la investigación a partir de la práctica pedagógica, a la vez que desarrolla las competencias informacionales a través del correcto uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación para el aprendizaje” (PUCP, 2021).

También, en la carrera de Educación Primaria se contemplan dos cursos directamente sobre tecnología en el ciclo 5: Tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje, y, en el ciclo 8: Integración de las Ciencias y la Tecnología en Educación. El perfil del egresado planteado por esta institución (ver Anexo 1) incluye que “El futuro docente podrá desarrollar planes curriculares basados en el contexto socioeconómico, cultural y tecnológico, en atención a la diversidad del alumnado. en instituciones formales y no formales, en los cuales se destacan los programas y proyectos educativos” (PUCP, 2021).

En la Escuela de Educación Superior Pedagógica Monterrico, antes conocida como el Instituto Pedagógico Nacional de Monterrico (IPNM), tienen dos cursos de tecnología durante la Licenciatura Matemática llamados Tecnologías de la Información y Comunicación I y II. Adicionalmente, en la información proporcionada en su página Web, se menciona la formación en herramientas tecnológicas en la descripción de la carrera al decir que “Además, se le

prepara en el manejo de las tecnologías de la información, a través del uso de softwares educativos de Matemática y Física, así como la robótica educativa” (Instituto Pedagógico Nacional de Monterrico, 2022).

Además, se puede observar que cambiaron el perfil de sus egresados y, en perfil propuesto para estudiantes que ingresaron en el 2018, se incorporan competencias relacionadas con tecnología (ver anexo 1, unidad de competencia 1.4). La Figura 3 muestra el perfil de egreso actual para el programa de Matemática en el cual se puede ver un componente de gestión de entornos virtuales.

**Figura 3. Perfil de Egreso de Licenciatura en Matemática.**



*Nota:* Tomado de Escuela de Educación Superior Pedagógica Monterrico (2019)

En la Universidad San Martín de Porres, ofrecen la Carrera Profesional de Educación con mención en Matemática e Informática, en la cual se evidencia una diferencia sustancial en la cantidad de cursos directamente sobre tecnología que reciben los profesores en formación. En este programa, los profesores llevan 11 cursos que contemplan recursos educativos digitales, aplicaciones didácticas de la Web y la tecnología, creación de recursos con diferentes herramientas, integración de la tecnología, lenguaje de programación, entre otros (ver Anexo 2). Se puede evidenciar que, para este programa, la tecnología es un eje fundamental.

Adicionalmente, para profesores en ejercicio que no contaron con formación en tecnologías para educación o para los que desean profundizar y mejorar sus prácticas y

conocimientos dada la creciente concientización sobre su importancia, existe una oferta en aumento de diplomados, cursos, maestrías que incorporan y forman a los profesores en el uso de recursos digitales.

Al comparar lo mencionado anteriormente con los perfiles de egresados de otras universidades fuera de Perú, se puede observar que en los perfiles de egresados descritos por diferentes universidades para títulos de licenciatura o maestría en Educación Matemática se pueden encontrar aspectos comunes, entre los cuales destacan el conocimiento y dominio de la matemática, el uso de la tecnología y el dominio de componentes pedagógicos.

Tal es el caso de la Universidad Católica del Maule en Chile que ofrece una carrera de Pedagogía en Matemática y Computación. En su página web, presentan las competencias que desarrollan sus egresados (ver Anexo 4). Una de estas competencias es “Implementar soluciones haciendo uso de los conceptos fundamentales de la computación para resolver problemas matemáticos y/o propios de la profesión en el ámbito educativo” (Universidad Católica del Maule, [UCM], s.f.).

Otra universidad en el ámbito internacional que ofrece formación docente a profesores de Matemática es la Universidad de Harvard en Estados Unidos. Esta ofrece el programa de maestría *Mathematics for Teaching Degree* [Maestría en Matemáticas para la Enseñanza], para el cual buscan que sus egresados construyan conocimientos profundos del contenido matemático, aprendan estrategias interactivas de resolución de problemas para motivar a sus estudiantes y comprendan dónde pueden ocurrir los conceptos erróneos y confusiones en los estudiantes al aprender matemáticas. Dada la importancia que ha venido generando la tecnología en enseñanza de matemática, esta institución ofrece a sus estudiantes la posibilidad de una segunda titulación, siendo una de las tres opciones disponibles un certificado en Diseño del Aprendizaje y Tecnología.

Las ofertas de maestrías antes mencionadas incluyen oportunidades o exigencias en el manejo de recursos digitales y herramientas tecnológicas para la enseñanza. Por ello, es evidente que actualmente existe interés y preocupación por formar profesores que incluyan dichas tecnologías eficientemente dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por otro lado, el objeto matemático seleccionado para esta investigación son los cuadriláteros. Este objeto matemático está presente en los currículos nacionales o programas estatales de diferentes países, así como en las propuestas de programas internacionales como

el Bachillerato Internacional (BI), lo que refleja la importancia de los cuadriláteros y justifica nuestro interés en ellos para esta investigación.

A nivel internacional, la propuesta del BI es una de las más reconocidas y aceptadas actualmente. En el BI, se plantea el desarrollo de un perfil de los estudiantes a través de la indagación. Se observa la presencia de los cuadriláteros en su propuesta a través del continuo de Forma y Espacio, pero no de una forma directa, sino a través de aprendizajes conceptuales de gran importancia y profundidad. BI para primaria plantea los aprendizajes conceptuales observados en la Figura 4.

**Figura 4. Continuo de Aprendizaje para formas y espacios**

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
<p><b>Comprensión conceptual</b> Las figuras pueden describirse y organizarse según sus propiedades. Los objetos de nuestro entorno inmediato tienen una posición en el espacio que puede describirse en función de un punto de referencia.</p>	<p><b>Comprensión conceptual</b> Las figuras se clasifican y nombran según sus propiedades. Algunas figuras están compuestas por partes que se repiten de algún modo. Podemos utilizar un lenguaje específico para describir la posición de un objeto en el espacio.</p>	<p><b>Comprensión conceptual</b> Cambiar la posición de una figura no altera sus propiedades. Las figuras pueden transformarse de diversos modos. Las figuras geométricas y el vocabulario específico sirven para representar y describir objetos y hechos en situaciones de la vida real.</p>	<p><b>Comprensión conceptual</b> Utilizamos las figuras y el espacio con finalidades concretas. Consolidar nuestros conocimientos sobre los conceptos geométricos nos permite entender el mundo e interactuar con él. Los problemas relativos a las figuras y el espacio se pueden resolver mediante instrumentos y métodos geométricos.</p>

*Nota:* Bachillerato Internacional (2009)

En tanto, el Consejo de Jefes Estatales Escolares y la Asociación de Gobernadores Nacionales de los Estados Unidos (2010) propusieron un grupo de estándares o competencias mínimas deseadas en cada nivel educativo. Estas competencias son opcionales para cada estado y son llamadas *Common Core Standards* [Estándares Académicos Fundamentales]. Para el curso de Geometría, en lo referente a cuadriláteros, se observa que los estudiantes trabajan con cuadriláteros desde kínder hasta octavo grado de secundaria.

La plataforma *EngageNY* es un programa de apoyo para los profesores de matemática de Nueva York diseñado para aportar material didáctico que guíe la labor docente. El material puede ser descargado con programación, fichas y ejercicios, pero también viene acompañado de una plataforma interactiva con juegos y actividades online que permite a los estudiantes trabajar independientemente en el aula o practicar en casa de acuerdo con su nivel, avance y necesidades. Esta herramienta se basa en los Estándares Académicos Fundamentales y, por ello, incluye el trabajo con cuadriláteros en los niveles de kínder a octavo grado de secundaria.

El MINEDU (2015), en el CNEB del 2016, hace referencia directa a los cuadriláteros a partir del ciclo V, que corresponde a quinto y sexto grado de primaria. En general, este objeto está presente en la enseñanza de la geometría desde edades tempranas. En los primeros grados de primaria, los estudiantes comienzan identificando características como cantidad y

longitud de lados, estableciendo diferencias y similitudes entre cuadrados y rectángulos. En cuarto y quinto grado de primaria, se comparan lados y ángulos de paralelogramos y el trapecio. También establecen relaciones con otras figuras, por ejemplo, con el triángulo rectángulo. Finalmente, en secundaria, los estudiantes consideran también las diagonales de todos los cuadriláteros y establecen relaciones con otras figuras y entre ellos.

La Tabla 1 muestra los desempeños dentro de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” relacionados con cuadriláteros.

**Tabla 1**

*Desempeños sobre Cuadriláteros en el Currículo Nacional de la Educación Básica de Perú*

Ciclo	Grado	Desempeño
III	2do	Establece relaciones entre las características de los objetos del entorno, las asocia y representa con formas geométricas tridimensionales (cuerpos que ruedan y no ruedan) y bidimensionales (cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo), así como con las medidas de su longitud (largo y ancho).
IV	3ero	Hace afirmaciones sobre algunas relaciones entre elementos de las formas, su composición o descomposición, y las explica con ejemplos concretos o dibujos. Asimismo, explica el proceso seguido. Ejemplo: El estudiante podría decir: “Todos los cuadrados se pueden formar con dos triángulos iguales”.
IV	4to	Hace afirmaciones sobre algunas relaciones entre elementos de las formas y su desarrollo en el plano y explica sus semejanzas y diferencias mediante ejemplos concretos o dibujos con base en su exploración o visualización. También, explica el proceso seguido. Ejemplo: El estudiante podría decir: “Un cubo se puede construir con una plantilla que contenga 6 cuadrados del mismo tamaño”.
V	5to	Establece relaciones entre las características de objetos reales o imaginarios, los asocia y representa con formas bidimensionales (cuadriláteros) y sus elementos, así como con su perímetro y medidas de la superficie; y con formas tridimensionales (prismas rectos), sus elementos y su capacidad.
V	5to	Expresa con dibujos su comprensión sobre los elementos de prismas rectos y cuadriláteros (ángulos, vértices, bases) y propiedades (lados paralelos y perpendiculares) usando lenguaje geométrico.

Ciclo	Grado	Desempeño
V	6to	Establece relaciones entre las características de objetos reales o imaginarios, los asocia y representa con formas bidimensionales (triángulos, cuadriláteros y círculos), sus elementos, perímetros y superficies; y con formas tridimensionales (prismas rectos y cilindros), sus elementos y el volumen
V	6to	Expresa con dibujos su comprensión sobre los elementos y propiedades del prisma, triángulo, cuadrilátero y círculo usando lenguaje geométrico.
VI	1ero	Expresa el significado de elementos y las relaciones entre propiedades de prismas, cuadriláteros, triángulos y círculos, relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas, aun cuando estas cambian de posición y vistas; interpreta y explica el significado de éstas en el contexto del problema, haciendo uso de lenguaje geométrico, dibujos, construcciones con regla y compás, y material concreto.
VI	1ero	Selecciona y emplea estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud, el perímetro, área o volumen de prismas, cuadriláteros y triángulos; así también describir el movimiento, localización o perspectivas (vistas) de los objetos, empleando unidades convencionales y no convencionales.

*Nota:* adaptado de MINEDU (2015)

Según lo descrito por MINEDU (2015) en el Currículo Nacional de la Educación Básica del Perú (CNEB), la descripción del nivel de competencia que un estudiante debe alcanzar implica que “Describe y clasifica prismas rectos, cuadriláteros, triángulos, círculos, por sus elementos: vértices, lados, caras, ángulos, y por sus propiedades; usando lenguaje geométrico” (p.255). Esto significa que los estudiantes deben conocer las características de los cuadriláteros en diferentes niveles.

Adicionalmente, en referencia a los cuadriláteros, el MINEDU establece que el estudiante también “Explica sus afirmaciones sobre relaciones entre elementos de las formas geométricas y sus atributos medibles, con ejemplos concretos y propiedades” (p.255). Establecer estas relaciones y explicarlas, implica un nivel de comprensión mayor por parte de los estudiantes.

Tomando lo anterior, es evidente que los cuadriláteros es un concepto matemático relevante e importante en la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y

localización” porque está presente en el CNEB desde primaria hasta por lo menos segundo de secundaria. Esto implica que el estudio y comprensión de los ETM generados al trabajar cuadriláteros constituye una problemática interesante y con validez para la comunidad científica y educativa.

Otro factor que da relevancia a este estudio es el conocimiento del contenido matemático necesario para los docentes, según el MINEDU. Una evidencia de su necesidad es la presencia del contenido de cuadriláteros en las pruebas de Concurso para el Ascenso de Escala en la Carrera Pública Magisterial llevadas a cabo por el MINEDU (2018), donde se evalúan los conocimientos de gestión, de contenidos matemáticos y pedagógicos de los postulantes. En la prueba del 2018, se realizan 100 preguntas de las cuales 60 son del área de matemática y 2 preguntas hacen referencia específicamente a cuadriláteros.

La pregunta 62 (ver figura 5) se trata de conocimientos pedagógicos y de contenido sobre cuadriláteros y teselaciones. El énfasis de la pregunta está en cómo enseñar las teselaciones de cuadriláteros, por lo cual se puede ver la necesidad de que los docentes conozcan e integren sus conocimientos del contenido matemático con estrategias para enseñarlos usando recursos y seleccionando el más apropiado para la situación descrita.

**Figura 5.** Pregunta 62 sobre cuadriláteros en prueba de concurso docente MINEDU

**62** Un docente ha identificado que sus estudiantes son capaces de realizar teselaciones en un plano con figuras como rectángulos, cuadrados, rombos y romboides. Sin embargo, cuando se les pide que realicen teselaciones con otros cuadriláteros diferentes a los paralelogramos, los estudiantes no logran llevar a cabo lo solicitado.

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para que los estudiantes superen esta dificultad?

- a** Entregar la imagen de una teselación realizada con trapezoides simétricos (cometas) y pedir que reconozcan el tipo de cuadrilátero utilizado.
- b** Entregar piezas de cartulina en forma de trapezios, todas congruentes, y pedir que realicen traslaciones y giros de modo que les permitan realizar la teselación del plano.
- c** Entregar bloques lógicos geométricos (triángulos, cuadrados, rectángulos y hexágonos) del mismo tamaño, y pedir que ellos mismos exploren con cuáles de estos bloques pueden realizar teselaciones en el plano y con cuáles no.

*Nota:* MINEDU (2018)

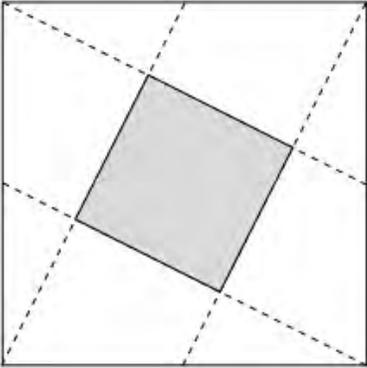
La pregunta 69 (ver Figura 6) es una pregunta sobre el contenido matemático en la cual el profesor debe calcular el área de un cuadrilátero usando la información brindada en lenguaje cotidiano y una imagen. El profesor puede utilizar diferentes estrategias para resolver la tarea; sin embargo, la pregunta le solicita seleccionar una respuesta numérica y no solicita demostraciones de ningún tipo.

**Figura 6.** Pregunta 69 sobre cuadriláteros en prueba de concurso docente MINEDU

69

Un docente solicitó a sus estudiantes traer un papel de forma cuadrada de 30 cm por lado para realizar trabajos con la técnica del origami. Para ello, les pidió que doblaran el papel, de modo que las marcas que resultan unan los vértices del cuadrado con el punto medio de uno de los lados no contiguos. Los estudiantes se dieron cuenta de que al interior del cuadrado grande de papel se había marcado un cuadrado más pequeño.

La siguiente figura representa las marcas que resultaron al doblar el papel y el cuadrado pequeño que se formó.



¿Cuánto es el área del cuadrado formado por los dobleces del papel?

a) 125 cm<sup>2</sup>

b) 180 cm<sup>2</sup>

c) 225 cm<sup>2</sup>

*Nota:* MINEDU (2018)

Lo planteado en el CNEB es también considerado por las editoriales para los libros de texto escolares. Por lo que, en sus índices, podemos evidenciar la presencia del tema de los cuadriláteros a través de primaria y secundaria. Un ejemplo de esto es la colección de libros de la editorial Santillana.

Con la introducción de la matemática moderna en la enseñanza básica y media en la segunda mitad del siglo XX, se descuidó seriamente la enseñanza de la geometría para privilegiar el álgebra y la teoría de conjuntos. Este descuido ha traído graves

consecuencias en la formación matemática de nuestros estudiantes y, por esta razón, se está revaluando seriamente el papel de la geometría en la formación de nuestros niños y jóvenes. Son numerosos los artículos que se encuentran en la red en los cuales se analiza este hecho y se hacen propuestas de qué y cómo enseñar geometría en la enseñanza básica y media (Sánchez, 2012, p. 72).

El Proyecto Educativo Nacional PEN al 2036 (MINEDU, 2020), en la segunda orientación estratégica, señala que se debería adecuar la formación continua de docentes, conjugando tanto la profundización de contenidos disciplinares como la adopción de nuevas técnicas, metodologías y formas de preparar experiencias de aprendizaje relevantes y pertinentes. En este sentido, se requiere que el docente de Matemática movilice conocimientos matemáticos, didácticos y de recursos diversos, incluidos los tecnológicos, para optimizar su enseñanza.

De esta forma, se puede observar la relevancia del uso de la tecnología para la enseñanza de matemática, geometría y cuadriláteros; la formación continua de profesores para desarrollar competencias que respondan a las necesidades educativas actuales; y la enseñanza de cuadriláteros. Por lo tanto, realizar esta investigación que se basa en la teoría ETM y el marco TPACK representa un aporte a la Didáctica de las Matemáticas.

A continuación, presentamos las bases teóricas de esta investigación. Primero, se explica el modelo TPACK y la Teoría ETM. Luego, se hacen explícitas las interacciones entre TPACK y ETM para esta investigación.

### **1.3 Aspectos teóricos de la investigación**

Tomando en cuenta las investigaciones de referencia presentadas, en esta investigación usamos el proceso de análisis de tareas en el ETM propuesto por Kuzniak (2021), las definiciones y relaciones entre cuadriláteros subyacentes en el CNEB que fueron destacadas por García-Cuéllar et al. (2019), los conocimientos que deben tener los profesores y los niveles de integración de la tecnología propuestos en el modelo TPACK para realizar una propuesta y análisis con respecto al ETM idóneo del profesor en la enseñanza de cuadriláteros. Por ello, consideramos relevante realizar una breve explicación del modelo TPACK y resaltar los aspectos que otras investigaciones han desarrollado específicamente para los conocimientos del contenido matemático; y la teoría ETM, que serán usadas en la presente investigación por sus aportes en el área de educación, específicamente en tecnología y

matemática. En tal sentido, comenzaremos con las ideas del modelo general TPACK y luego presentamos específicamente el TPACK para la enseñanza de matemática.

### **Modelo del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK)**

Para comprender el contexto y motivos que llevaron a la creación de la teoría TPACK, comenzaremos por brindar algunas definiciones y aclaratorias sobre tecnología digital en educación.

Según Drijvers et al. (2016), existe una relación compleja entre tecnología, matemática y educación. Esta complejidad no se debe sólo a la tecnología digital y las amplias posibilidades que trae consigo, sino que ha existido desde que se usan herramientas para la enseñanza de matemática. Existen diferentes tecnologías con diferentes niveles de idoneidad para diferentes propósitos en la enseñanza de matemática. Es, en parte, por esta razón que las elecciones hechas por los docentes, considerando las necesidades de los estudiantes, son tan particulares y diversas. Estas decisiones determinan la enseñanza y el aprendizaje.

Koehler et al. (2015) hacen también una aclaratoria con respecto al término tecnología en educación. Consideran que todo instrumento o recurso usado en el proceso de enseñanza aprendizaje forma parte de la tecnología; sin embargo, al mencionar la tecnología, nos estaremos refiriendo a la tecnología digital. La definen en un sentido amplio como:

(...) la palabra tecnología se aplica tanto para la tecnología analógica como digital, y para designar la nueva y la vieja tecnología. En un sentido práctico, sin embargo, la mayoría de la tecnología bajo consideración en la bibliografía actual es nueva y digital y tiene propiedades inherentes que hacen que su aplicación directa sea dificultosa (Koehler et al., 2015, p. 11).

Drijvers et al. (2016) establecen que algunas de las opciones disponibles, que los profesores deben conocer y entre las cuales deben elegir la mejor para la situación particular de enseñanza en la que se encuentran, comprenden tecnologías generales para la comunicación, documentación y presentación que son esenciales para el intercambio de ideas matemáticas. También existen diversas tecnologías matemáticas como hojas de cálculo, sistema de álgebra computacional (CAS), ambientes de representación dinámica (ARD) y applets. Incluso con esta amplia variedad de herramientas de tecnología digital, se sigue dando gran importancia y valor a las herramientas tradicionales, por lo que estos autores proponen que se debe hacer una combinación coordinada de tecnologías que permita obtener beneficios y oportunidades de visualización en educación matemática.

Según estos autores, el rol del profesor y de los estudiantes cambió gracias a la incorporación de la tecnología. Los profesores que incorporan tecnología en la enseñanza de matemática dan protagonismo a los estudiantes permitiéndoles tener control en el trabajo con tutoriales computarizados. Es así como la tecnología puede contribuir al cambio de la metodología tradicional que persiste en las aulas.

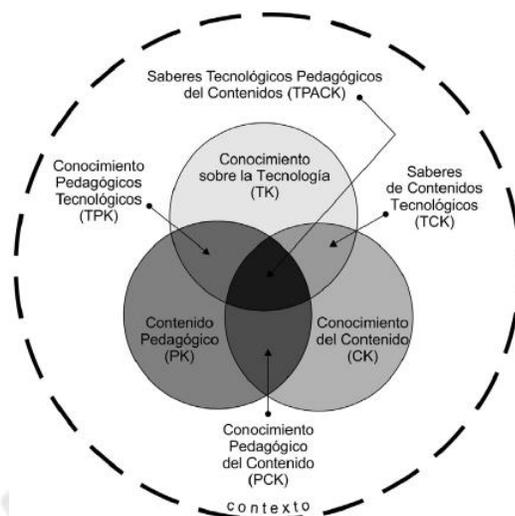
Existe un acuerdo general en las investigaciones de que la habilidad de los profesores para integrar herramientas digitales en la enseñanza de matemática es un factor crucial cuando se trabaja en un salón donde la tecnología está disponible. Un gran cuerpo de investigaciones identifica factores esenciales como el conocimiento matemático, habilidades pedagógicas, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento del currículo y creencias sobre la enseñanza efectivas (Drijvers et al., 2016, p.6).

Los estudios cualitativos, según estos autores, han puesto de relieve la sutileza de utilizar la tecnología digital en educación matemática secundaria inferior y han inspirado el desarrollo y refinamiento de teorías que expliquen las oportunidades y los escollos. Con el continuo crecimiento exponencial de iniciativas para tecnificar las aulas matemáticas, existe una creciente necesidad de desarrollar y perfeccionar teorías adicionales que guían el diseño de tecnologías digitales intensivas experiencias matemáticas para los estudiantes, especialmente para aquellos de secundaria que están en el borde de desarrollar un pensamiento matemático cada vez más sofisticado, y que informar las prácticas diarias del aula.

El modelo TPACK es definido como el cuerpo coherente de conocimientos y habilidades que se requiere para la implementación de recursos digitales en la enseñanza (Koehler y Mishra, 2008). El modelo TPACK fue creado entre 2006 y 2009 por los profesores Matthew Koehler y Punya Mishra, quienes hacen una adaptación y ampliación del modelo Contenidos del Conocimiento Pedagógico (PCK) planteado por Shulman entre 1986 y 1987 para incluir la tecnología en la enseñanza.

Esta teoría plantea que los profesores necesitan tres tipos de conocimientos básicos (tecnológicos, pedagógicos y del contenido) que, al combinarse, generan siete áreas de conocimientos específicos. En la Figura 7, se observan los componentes de conocimientos y las relaciones entre ellos que generan nuevos tipos de conocimientos. Según este modelo, estos conocimientos son necesarios en un profesor para la enseñanza efectiva con tecnología.

**Figura 7. Modelo TPACK y sus componentes.**



*Nota:* Koehler et al. (2015, p.14)

Cada componente de conocimiento hace referencia a diferentes aspectos y tiene características que los distingue. Dentro del proceso educativo puede ser difícil separarlos por la estrecha relación que se establece entre ellos. La Tabla 2 muestra cada componente con una descripción para facilitar su comprensión y diferenciación.

**Tabla 2** Componentes del TPACK

Componente	Descripción
Conocimiento del Contenido (CK)	Ideas, teorías, conceptos, objetos y saberes referentes a la disciplina que el docente enseña. Por ejemplo, los conocimientos que tiene el docente sobre cuadriláteros: clasificación, propiedades, teoremas, relaciones, entre otros.
Conocimiento Pedagógico (PK)	Los saberes del docente sobre cómo enseñar: estrategias, metodologías, proceso de aprendizaje, características de sus estudiantes, evaluación de aprendizajes. Por ejemplo, los conocimientos que tiene el profesor sobre teorías de aprendizaje como el Constructivismo.
Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)	Saberes y decisiones sobre cómo enseñar un contenido. La transformación del saber formal en lo que se enseñará o a los estudiantes. El docente interpreta sus conocimientos de cuadriláteros y consigue la forma de representarlo para sus alumnos. Incluye también los libros de texto y recursos disponibles para la enseñanza y cómo el docente los adapta a las necesidades de su grupo de estudiantes. También contempla el conocimiento de teorías

Componente		Descripción
		específicas para enseñar el contenido como ETM y ETG.
Conocimiento (TK)	Tecnológico	Saberes que tiene el docente sobre el uso de tecnología en su vida diaria personal y profesional. Implica el reconocimiento de cuál tecnología es mejor para conseguir su meta y adaptarse a los cambios tecnológicos.
Conocimiento del Contenido (TCK)	Tecnológico	Saberes sobre cómo la tecnología y los contenidos tienen una relación bidireccional. La tecnología puede influir en la representación de los contenidos y los contenidos determinan el uso que se le da a la tecnología o las modificaciones que se hacen para que la tecnología se ajuste a las características del contenido. Las representaciones de un objeto matemático son limitadas o se hacen posibles de formas nuevas y variadas por la tecnología disponible, conocida y seleccionada por el profesor. (Koehler, Mishra y Cain, 2015, p. 16)
Conocimiento Pedagógico (TPK)	Tecnológico	Saberes que tiene el docente sobre las herramientas tecnológicas con respecto a las opciones pedagógicas que brinda para facilitar estrategias y oportunidades de aprendizaje. También contempla la capacidad de los docentes de hacer uso creativo, innovador y abierto de la tecnología para adaptarla a las necesidades pedagógicas y favorecer el aprendizaje y comprensión por parte de los estudiantes.
Conocimiento Pedagógico del Contenido (TPACK)	Tecnológico	Saberes referidos a la interacción de los tres componentes nucleares. La “comprensión de la representación de conceptos usando habilidades tecnológicas y pedagógicas que usa la tecnología de manera constructiva para enseñar contenidos” que permite que los docentes usen la tecnología para que sus estudiantes construyan conocimientos sobre los conceptos. Por ejemplo, los docentes usan un software para que los estudiantes exploren y establezcan relaciones entre las propiedades de los cuadriláteros con el fin de disminuir las dificultades que los estudiantes presentan.
Contexto		Todos estos componentes están inmersos e influidos por el contexto y las posibilidades o características del entorno educativo donde se lleva a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje: distribución del aula, características de la institución, disponibilidad y acceso a la tecnología, filosofía educativa, relaciones entre agentes educativos, entre otros.

*Nota:* basada en Koehler et al. (2015)

Los autores Koehler et al. (2015) realizan una revisión del modelo TPACK que ellos plantearon en el 2006. Establecen que los docentes deben poner en práctica diferentes conocimientos para la enseñanza. Tres conocimientos conforman los componentes nucleares: tecnológicos, pedagógicos y de contenido. Estos componentes nucleares crean otros componentes generados por su combinación e interacción. Adicionalmente, los autores también hacen referencia a la importancia e influencia del contexto.

Koehler et al. (2015) también realizan una descripción del modelo TPACK haciendo descripciones y aclaratorias de las relaciones y la complejidad que implican para la enseñanza y el aprendizaje.

Los autores concluyen que los docentes pueden usar el modelo TPACK para integrar la tecnología y comprender con mayor detalle los conocimientos que necesitan y los que deben complementar. De esta forma, se puede evaluar el nivel de integración y si la tecnología favorece el aprendizaje. Los autores mencionan que, adicionalmente, el TPACK “ha ofrecido diferentes posibilidades para promover la investigación en la formación inicial y continua de los docentes, y los usos que los docentes les dan a la tecnología.” (Koehler et al., 2015, p. 21)

Arévalo y García (2016) presentan una propuesta que considera los conocimientos específicos necesarios para el profesor de matemática, a partir de estos conocimientos y componentes generales para la enseñanza. Esta forma específica del TPACK en matemática es llamada M-TPACK por algunos investigadores.

Los investigadores que han contribuido al TPACK de profesores de Matemática han desarrollado estándares, criterios e instrumentos para describir y evaluar el TPACK específicamente para matemática. Desde el 2007, el Comité de Tecnología de la Asociación para Educadores de Profesores de Matemática (AMTE, por sus siglas en inglés) se centró en crear un conjunto de estándares docentes para promover la implementación de tecnología en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de matemática.

Estos estándares sobre los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido matemático están enmarcados en cuatro temas que consideran los conocimientos y creencias que, según Niess et al. (2009), los profesores demuestran. Considerando estos estándares, los investigadores categorizan cinco temas que componen la enseñanza de matemática y crean descriptores para analizar los conocimientos de los profesores. La Tabla 3 presenta los temas y descriptores propuestos por Niess et al. (2009).

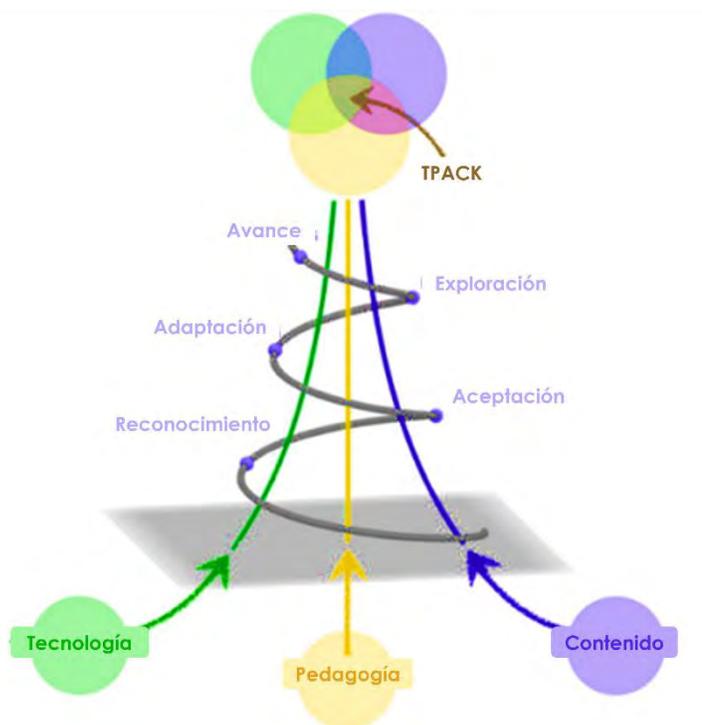
**Tabla 3***Descriptorios para los temas principales en el Modelo de Desarrollo*

<b>Tema</b>	<b>Descriptor</b>
Currículo y Evaluación	<ul style="list-style-type: none"><li>• Plan de estudios y el tratamiento de la materia</li><li>• Evaluación de la comprensión de los estudiantes.</li></ul>
Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"><li>• Centrarse en la materia (es decir, el aprendizaje de los temas matemáticos)</li><li>• Demostración de concepciones de cómo aprenden los estudiantes (es decir, desarrollo de las habilidades de pensamiento de los estudiantes)</li></ul>
Enseñanza	<ul style="list-style-type: none"><li>• Centrarse en la materia (es decir, el aprendizaje de los temas matemáticos)</li><li>• Enfoques de instrucción</li><li>• Entorno del aula</li><li>• Desarrollo profesional</li></ul>
Acceso	<ul style="list-style-type: none"><li>• Uso (se permite o no a los estudiantes usar tecnología)</li><li>• Barreras (cómo los profesores abordan barreras para la integración de la tecnología)</li><li>• Disponibilidad (cómo la tecnología pone a disposición niveles más altos y más matemática para que más estudiantes cada vez más diversos puedan investigar.</li></ul>

*Nota:* Adaptado de Niess et al., 2009, p. 11

Adicionalmente, Niess et al. (2007) proponen cinco niveles que atraviesan los profesores de matemática para integrar una tecnología particular en la enseñanza y aprendizaje de matemática. La Figura 8 muestra los niveles de reconocimiento, aceptación, adaptación, exploración y avance y su relación con el modelo TPACK de profesores de Matemática.

**Figura 8.** Niveles de pensamiento en la integración de tecnología hacia el TPACK.



*Nota:* Adaptado de Bueno et al. (2021, p. 113)

Estos niveles pueden usarse como marco de referencia que lleve a los profesores a un TPACK más desarrollado y efectivo para la enseñanza de matemática. Cada uno de ellos tiene descriptores y acciones concretas que pueden ser observables y evaluables por los profesores.

En esta investigación tomaremos los niveles de integración de la tecnología propuestos por Niess et al. (2009) como base para diseñar las tareas de una capacitación para profesores de secundaria sobre el uso de artefactos digitales para la enseñanza de cuadriláteros. Las tareas desarrollan niveles de integración de la tecnología progresivamente y, adicional a esto, se realizan preguntas después de cada tarea que consideran los criterios planteados por estos autores (ver Anexos 3 y 4).

Para lograr el desarrollo de estos conocimientos en los profesores, es necesario que ellos mismos vivan la experiencia de aprender de esta forma, es por ello, que se plantea un cambio en la formación docente para mejorar sus conocimientos en base al modelo TPACK de profesores de Matemática. De acuerdo con lo planteado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007, p. 119), si los profesores van a aprender cómo crear un ambiente positivo que promueva la resolución colaborativa de problemas, incorpore la tecnología de una

forma significativa, invite a la exploración intelectual y apoye el pensamiento de los estudiantes, ellos mismos deben experimentar el aprendizaje en un ambiente así.

El proceso de enseñanza de la matemática, para los cuales el profesor hace uso de los conocimientos antes explicados por el modelo TPACK, está compuesto de diferentes elementos y relaciones. Nos basaremos en aspectos de la teoría ETM para analizar cómo organiza la enseñanza.

### **Teoría del Espacio de Trabajo Matemático**

Como se mencionó anteriormente, la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) fue creada a partir de la propuesta de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) presentada por Kuzniak hace casi dos décadas.

El trabajo matemático consiste en todas las acciones desarrolladas por un individuo para resolver un problema o situación mediante el uso de matemática en un dominio determinado (Kuzniak et al., 2022). Es posible que sucedan cambios o transiciones entre dominios matemáticos.

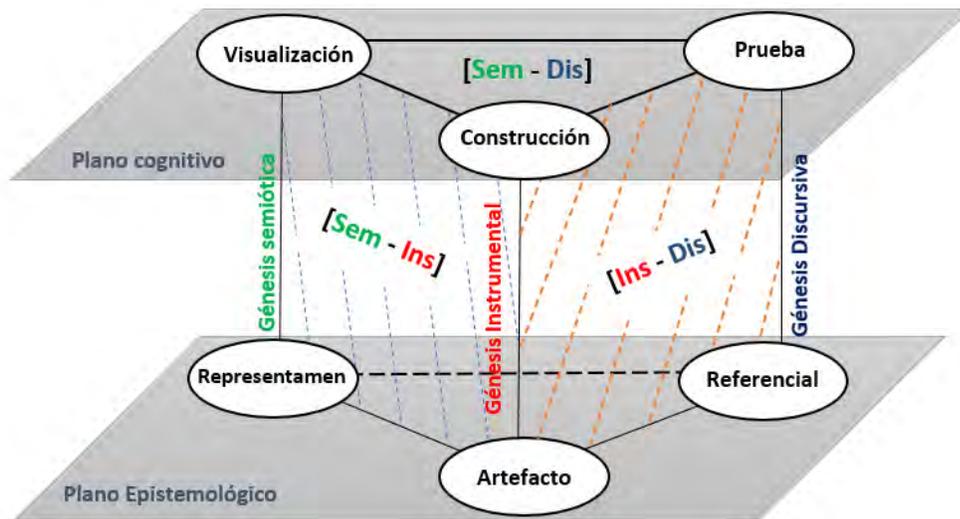
De esta forma, estos autores plantean que el desarrollo del trabajo matemático apropiado de un individuo es un proceso gradual y progresivamente construido en el cual se relacionan las dimensiones o planos epistemológico y cognitivo.

Kuzniak y Nechache (2021) explican que un ETM está comprendido por dos planos: epistemológico y cognitivo. Cada uno de estos planos cuenta con tres componentes o procesos.

El plano epistemológico está comprendido por los componentes: representamen, artefactos y referencial teórico; y el cognitivo por los procesos de visualización, construcción y prueba. Estos componentes están conectados o se relacionan verticalmente por procesos generadores: génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva. Cuando los procesos se relacionan o actúan juntos, se activan planos que dan origen a las dimensiones del ETM: plano Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], plano Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y plano Semiótico-Discursivo [Sem-Dis]. Un ETM está completo cuando en el trabajo matemático (en este caso, geométrico) realizado por el estudiante se movilizan los tres planos verticales que conectan los planos cognitivo y epistemológico.

La Figura 9 muestra un modelo que representa lo descrito en la teoría ETM sobre los procesos, génesis, planos y sus relaciones por estos autores.

**Figura 9. Modelo del Espacio de Trabajo Matemático**



Nota: Adaptado de García-Cuéllar, 2021

Es necesario activar las diferentes génesis en base a la tarea que se quiere resolver en una situación didáctica. Una tarea matemática se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con hipótesis y preguntas claramente formuladas. Por lo tanto, las tareas se asocian generalmente con una declaración dada por el profesor en forma oral o escrita. Una situación didáctica se relaciona con la implementación de una tarea en un aula. Por tanto, se supone que las tareas desencadenan la actividad del alumno en una situación didáctica (Kuzniak et al., 2022).

En otras palabras, se puede entender la situación didáctica como la escenificación planificada o diseñada por el profesor, la tarea como la labor o el problema que el estudiante debe llevar a cabo o resolver en un tiempo determinado y bajo ciertas condiciones; y la actividad como las acciones y operaciones que el estudiante o el profesor realizan o dirigen (Salazar et al., 2022).

Kuzniak (2018) menciona que en el plano cognitivo se encuentra la estructura del ETM cuando es usado por un individuo, mientras que en el plano epistemológico se construye la organización matemática del ETM con los paradigmas del dominio matemático en el que se encuentra el individuo.

Las interacciones entre los polos de ambos planos se conocen como génesis. Las génesis son interacciones entre los componentes del plano epistemológico y los procesos del plano cognitivo. La génesis semiótica vincula el representamen con la visualización; la génesis instrumental vincula el artefacto con la construcción y la génesis discursiva vincula el referencial con la prueba.

Según Kuzniak et al. (2016, 2022), la génesis semiótica se refiere a los signos, símbolos y representaciones que permiten la visualización de los objetos matemáticos para el trabajo matemático dentro del ETM. Implica una relación dialéctica con un proceso circular entre el representamen y la visualización. Explican que, en sentido abajo-arriba se produce la decodificación o interpretación y, en sentido contrario, se evoca la perspectiva opuesta en la cual el signo se produce o especifica. El primer proceso permite al individuo deducir e interpretar un representamen dado y el segundo permite al individuo crear un representamen para representar o exteriorizar sus representaciones mentales. Esta génesis se fundamenta en los registros de representación semióticos.

La génesis instrumental está dada por la interacción entre el sujeto y el artefacto haciéndolos útiles para la construcción en el trabajo matemático. Se pueden tomar dos visiones: El punto de vista de abajo hacia arriba describe las acciones mediante las cuales el usuario se apropia de las diversas técnicas de uso relacionadas con el artefacto. El punto de vista de arriba hacia abajo va desde el logro deseado por el usuario hasta su elección adecuada del artefacto para realizar las acciones requeridas. Entonces, la génesis instrumental cambia la forma en que el usuario hace y piensa y, como consecuencia, transforma también el conocimiento matemático (Salazar et al., 2022).

La génesis discursiva, establece la base para la prueba matemática a través del razonamiento lógico. Esta génesis utiliza las propiedades matemáticas para lograr el razonamiento matemático (Kuzniak et al., 2016).

Cada génesis tiene procesos generadores que permiten y distinguen su activación de acuerdo con dos perspectivas: ascendente y descendente (ver Tabla 4). Dichas perspectivas contribuyen con la descripción de las génesis tomando en cuenta la vinculación entre el plano epistemológico y el cognitivo (Kuzniak, 2022).

**Tabla 4***Procesos generadores de las génesis en ETM*

<b>Genesis</b>	<b>Ascendente</b>	<b>Descendente</b>
Discursiva	Deducción	Inducción
Semiótica	Decodificación e interpretación	Producción o especificación
Instrumental	Apropiación	Selección

La activación combinada de dos génesis moviliza diferentes planos verticales. Dichos planos son llamados de acuerdo con las génesis que se activan. Se dice que un ETM está completo cuando se movilizan los tres planos verticales.

Kuzniak y Nechache (2021) explican que los profesores y estudiantes trabajan dentro de paradigmas y pueden hacer uso combinado de ellos. Cada paradigma representa las creencias, técnicas, acciones, concepciones de un grupo de individuos. En geometría existen tres paradigmas. En el paradigma Geometría I (GI o geometría natural), los estudiantes usan la percepción, experimentación y deducción como métodos válidos para argumentar sus resultados. En este paradigma se admiten pruebas mecánicas y experimentales. En Geometría II (GII o geometría natural axiomática), se busca construir modelos cercanos a la realidad con el uso de propiedades y axiomas que serán usados como pruebas para los argumentos planteados. Ya no son válidas las pruebas basadas en mediciones directas sobre los dibujos. Finalmente, en Geometría III (GIII o geometría axiomática formal), “los objetos también son ideales, el razonamiento hipotético-deductivo es el origen de nuevos conocimientos. La diferencia con GII es que la axiomatización es rigurosa y formal” (Salazar y García-Cuéllar, 2020, p. 66).

Durante las relaciones e interacciones de la enseñanza de geometría, los profesores utilizan diferentes paradigmas geométricos para resolver y diseñar tareas que le servirán para la enseñanza. Es importante que el docente sea consciente de esto, ya que se producen obstáculos cuando las expectativas del profesor, en cuanto a la resolución dentro de un paradigma, no coinciden con las utilizadas por los estudiantes en su trabajo.

### **Tipos de ETM**

La teoría ETM plantea la existencia de diferentes tipos de ETM que interactúan y están en estrecha relación y tensión durante la enseñanza y aprendizaje de matemática (Kuzniak y

Nechache, 2021). La teoría propone tres tipos de ETM: el referencial, el idóneo y el personal. En esta investigación, nos interesa el ETM idóneo, ya que es el que hace referencia a los procesos llevados a cabo por los profesores para el diseño, adaptación e implementación de la enseñanza de la matemática, en nuestro caso, de los cuadriláteros.

El ETM referencial, según lo planteado por Kuzniak et al. (2016), es un espacio paradigmático acordado por una comunidad de individuos sobre la formulación de problemas y la organización de sus soluciones, privilegiando las herramientas o las formas de pensamiento. En su organización se contemplan los aspectos económicos, políticos y sociales, lo cual conlleva a analizar el currículo o el plan de estudio, los tratados escritos por los matemáticos y las investigaciones realizadas por educadores en matemáticas. (Kuzniak et al., 2016 p. 729),

. El ETM idóneo se refiere a la forma en que debe ser enseñado el conocimiento. Incluye las propuestas de libros de texto, recursos didácticos físicos y digitales, y también el ETM del profesor al diseñar y planificar la enseñanza. El ETM idóneo constituye la transformación del ETM referencial a lo que será enseñado; es el vínculo entre el ETM referencial y el ETM personal de los estudiantes.

Para diseñar e implementar las tareas y situaciones didácticas de los ETM idóneos, el profesor debe confiar en los ETM de referencia, propuestos por la institución. La construcción de los ETM idóneos es, en gran parte, responsabilidad del profesor. Entonces, el profesor toma elecciones didácticas al construir el ETM idóneo.

Kuzniak et al. (2022), plantean que cada génesis está ligada a las otras dos, pero también tiene su propia especificidad, lo que permite considerarla de una manera particular. En general, analizar las génesis (separadas o las tres asociadas) es una forma deseable de trabajar en la docencia, ya que permite a los docentes tener una percepción clara de las dificultades de sus alumnos. Este método ayuda a los profesores e investigadores a tomar decisiones relevantes sobre la enseñanza a realizar.

En la teoría ETM, la concepción de tareas implica una expectativa previa sobre el flujo del trabajo matemático. En otras palabras, para una tarea determinada, es importante anticipar las interacciones entre las tres génesis para orientar el trabajo matemático realizado por el individuo que resolverá la tarea. Esta anticipación es hecha por el profesor en el ETM idóneo.

El diseño de tareas o de situaciones didácticas también puede tener como objetivo orientar a los estudiantes hacia la construcción de un trabajo matemático completo, según lo definido por la teoría de ETM. El objetivo de las tareas diseñadas de esta manera es que

diferentes génesis interactúen con el fin de desarrollar un trabajo matemático completo o para promover la transición entre paradigmas en un campo matemático.

La implementación de los ETM idóneos requiere de la interacción entre los estudiantes y el profesor para desarrollar el trabajo matemático. El docente planifica y diseña estas interacciones como parte del ETM idóneo. El análisis de las interacciones que se producen durante la implementación de los ETM idóneos en las clases es necesario para comprender la forma en que se realiza el trabajo matemático.

Cada profesor tiene un ETM personal, que está compuesto por sus conocimientos y experiencias sobre los objetos matemáticos, la enseñanza y el uso de tecnología. Estos conocimientos determinan su trabajo matemático y su ETM idóneo porque, cuando el profesor diseña la enseñanza, construye el ETM idóneo. Aquí se pone en juego el conocimiento del profesor como un elemento clave. El conocimiento matemático que el docente ha adquirido condiciona su ETM personal. Esto se pone de manifiesto cada vez que realiza una elección, toma una decisión o emite una opinión matemática (Kuzniak et al., 2022; Drijvers, 2016; Koehler et al., 2015). Se establece que “estas elecciones y la gestión de las actividades van a depender, en gran parte, del ETM personal del profesor” (Kuzniak y Richard, 2014, p.10).

Las decisiones tomadas por los profesores dependen del ETM referencial y de su propio ETM personal. Kuzniak et al. (2016) establecen que estas elecciones también dependen del nivel de los estudiantes, de sus competencias generales y de sus ETM personales iniciales. También el ETM personal de los estudiantes juega un papel crucial en la interacción y relación de los ETM en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el punto de vista del ETM idóneo del profesor, se puede determinar relaciones e interacciones.

El ETM personal corresponde a cada individuo. Se refiere a la forma en la cual cada individuo resuelve un problema matemático haciendo uso de sus conocimientos y capacidades cognitivas (Kuzniak et al., 2016).

Durante el aprendizaje, el ETM personal del estudiante es modificado para incorporar nuevos conocimientos y capacidades. La interacción y relación entre los tipos de ETM no es simple y está en constante transformación, dependiendo de los actores que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El ETM idóneo constituye un puente entre el ETM personal de los estudiantes y el ETM referencial.

Para esta investigación, se realiza un acercamiento del TPACK y ETM con la finalidad de alcanzar el objetivo de la investigación.

## **TPACK y ETM en esta investigación**

En esta investigación utilizaremos el modelo TPACK de profesores de matemática para identificar los conocimientos tecnológicos de los profesores, diseñar los instrumentos de recolección de datos y diseñar el dispositivo de formación que se implementa con profesores de secundaria.

Adicionalmente, nos basamos en el ETM para analizar cómo los docentes planifican sus clases sobre cuadriláteros con el fin de identificar las génesis y planos verticales que ellos podrían activar, así como caracterizar los paradigmas que privilegian. Por ejemplo, para el estudio del objeto matemático y de los recursos didácticos disponibles, la teoría ETM permite identificar las génesis o planos que se podrían activar en cada tarea y el paradigma que es privilegiado.

Por otro lado, el modelo TPACK de profesores de matemática serviría para identificar los conocimientos que los docentes poseen sobre tecnología y cómo los utilizan al planificar sesiones de clase sobre cuadriláteros.

Comenzaremos por hacer explícitas las interacciones entre TPACK y ETM a nivel teórico y, luego, determinar cómo estas interacciones se evidencian en las producciones de los profesores que participan en un dispositivo de formación o capacitación sobre uso de tecnología para la enseñanza de cuadriláteros. A continuación, describiremos las interacciones entre el TPACK y el ETM a nivel teórico.

Kuzniak (2022) establece que las elecciones hechas por los profesores dependen de sus creencias pedagógicas y de la forma del contrato didáctico que ellos prefieren, pero también de su conocimiento matemático y didáctico en relación con el campo matemático concerniente. Como fue propuesto por Shulman hace 40 años, todos estos puntos son parte de lo que ahora se refiere como el PCK del profesor (Kuzniak, 2022, p.5).

A estos conocimientos, se añaden los conocimientos tecnológicos para completar todos los componentes planteados por el TPACK, es decir, sus conocimientos tecnológicos, pedagógicos, del contenido matemático y sus combinaciones. Así, se destaca la importancia para esta investigación de conocimientos necesarios, identificados en el modelo TPACK, para que el profesor pueda diseñar, organizar y ejecutar sesiones de aprendizaje con tecnología sobre contenidos matemáticos que, en nuestro caso, son los cuadriláteros.

Tomemos un proceso de planificación de un profesor de Matemática de secundaria como ejemplo para estructurar y organizar la descripción de las interacciones que se podrían encontrar.

El profesor comienza la planificación de la enseñanza identificando las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes y las competencias, capacidades y desempeños que corresponden al ciclo y grado de sus estudiantes. Éste decide que, en su próxima sesión, los estudiantes usarán estrategias y procedimientos para determinar el perímetro y área de cuadriláteros. Para ello, cuenta con libros de texto, material elaborado por otros profesores que consigue en Internet, diversos artefactos digitales como aplicaciones, softwares y programas entre los cuales debe seleccionar los que considera apropiados para la enseñanza. El diseño que elabora implica una visualización de lo que espera de sus estudiantes y los paradigmas que privilegiará.

Al tomar estas decisiones, los profesores usan sus conocimientos y creencias, así como la forma de contrato didáctico que prefieren (Kuzniak et al., 2022). Los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido matemático podrían interactuar con las génesis del ETM, ya que los conocimientos previos formarían parte del plano epistemológico y los nuevos conocimientos activados por la génesis estarían interrelacionándose los procesos del plano cognitivo.

De esta forma, se podría establecer una interrelación entre el conocimiento pedagógico y la génesis semiótica; el conocimiento tecnológico con la génesis instrumental; y el conocimiento del contenido matemático con la génesis discursiva y la génesis semiótica. En la Tabla 5 se muestran estas relaciones de forma gráfica y se brinda una descripción y ejemplos de cada una.

**Tabla 5**

*Posible Interacción de conocimientos del modelo TPACK con las génesis del ETM*

Representación de la interacción	Descripción y ejemplo
	<p>Posible interacción entre el conocimiento pedagógico y la génesis semiótica y discursiva</p> <p>El profesor elige las estrategias y recursos para enseñar, es decir, elige la forma de representar los cuadriláteros para enseñarlos.</p> <p>Los conocimientos que los profesores tienen sobre las teorías de enseñanza y el currículo tendrían interacción con la génesis discursiva porque sería el conocimiento que posee sobre el referencial.</p>
	<p>Posible interacción entre el conocimiento tecnológico con la génesis instrumental</p> <p>Los conocimientos que los profesores tienen de artefactos digitales para planificar, organizar la información y las entregas del trabajo de sus estudiantes y compartir información con otros docentes o superiores como Google Drive, Google Classroom, Nearpod, Zoom, Meet, entre otras.</p>
	<p>Posible interacción entre el conocimiento del contenido matemático con la génesis discursiva y con la génesis semiótica</p> <p>Los conocimientos de los profesores sobre cómo representar un objeto matemático, tendría interacción con la génesis semiótica.</p> <p>Los conocimientos que los profesores tienen sobre el objeto matemático (definición, propiedades, teoremas), los cuadriláteros, tendrían interacción con la génesis discursiva porque sería el conocimiento que posee sobre el referencial.</p>

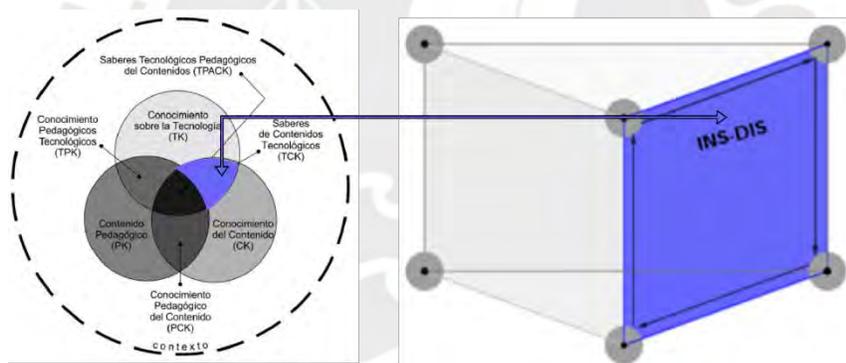
Los conocimientos sobre tecnología que el profesor tiene, podrían interactuar con la génesis instrumental debido a que determinarían las herramientas e instrumentos de su ETM que le permitirían hacer la construcción en el plano cognitivo. Esto lo representamos en la tabla anterior con una flecha roja uniendo ambos modelos.

En esta investigación, nos interesan los conocimientos tecnológicos (TK, TCK, TPK y TPACK) que interactúan con el ETM idóneo del profesor. Por ello, a continuación, se presentan las interrelaciones que podría haber entre los TCK y los TPK con el ETM idóneo del profesor.

Los TCK podrían tener interacción con el plano [Ins-Dis], porque este conocimiento se refiere a conocer artefactos digitales que sean apropiados para un objeto matemático de acuerdo con sus propiedades. En primer lugar, implica saber usar el artefacto, pero también seleccionar el artefacto apropiado como usar circunferencias en Polypad o GeoGebra para trazar rectas paralelas cuando se construye un paralelogramo.

Un ejemplo de esta interacción entre TCK y el plano [Ins-Dis] podría ser cuando un profesor de Matemática utiliza un artefacto tecnológico para resolver un problema sobre cuadriláteros en una prueba o explicación utiliza sus conocimientos tecnológicos del contenido. Es así como podrían interactuar el plano [Ins-Dis] con su TCK. En la Figura 10, se puede ver esta interacción.

**Figura 10. Interacción de componente TCK con plano [Ins-Dis]**

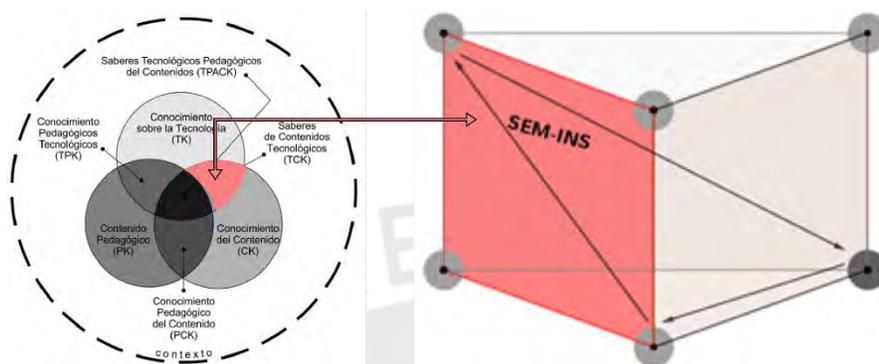


Cuando se utiliza un artefacto digital para mostrar que un cuadrilátero es un cuadrado en base a sus propiedades, el profesor de matemática activaría el plano vertical [Ins-Dis], porque utiliza las herramientas de medición de ángulos y longitud de segmentos del artefacto para verificar si son congruentes y, por lo tanto, determinar que es un cuadrado. Utiliza propiedades de un cuadrado que conoce. En este caso, utilizaría sus TCK sobre cuadriláteros. En esta interacción, los conocimientos del profesor determinan las propiedades y definiciones que incluye en su referencial para construir la prueba mediante el uso de herramientas del artefacto, donde éstas implican también los esquemas que ha formado el profesor.

Al usar una herramienta tecnológica para representar cuadriláteros se activaría también el plano vertical [Sem-Ins] y se podría interrelacionar con los conocimientos TCK. Al

representar, se usarían CK de cuadriláteros y también se activaría la génesis semiótica mientras que, al usar un artefacto, se necesitarían TK lo que activaría la génesis instrumental (ver Figura 11)

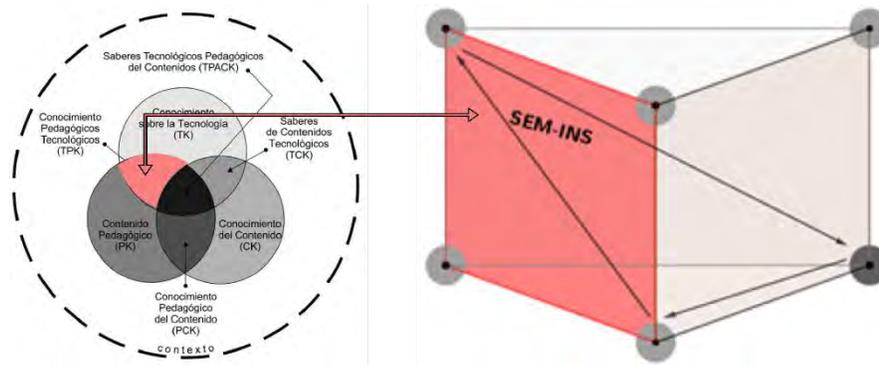
**Figura 11.** *Interacción de componente TCK con plano [Sem-Ins]*



Se puede observar en las dos posibles interacciones anteriores que una interacción no es exclusiva entre conocimientos y génesis o plano. Puede suceder que en situaciones o bajo perspectivas diferentes se encuentren otras interacciones entre componentes del modelo TPACK y la teoría ETM.

Al seleccionar un artefacto digital para enseñar, podría haber interacción de los TPK con el plano [Sem-Ins], debido a que los conocimientos TPK se utilizan cuando un profesor de matemática selecciona diferentes artefactos digitales apropiados para sus estudiantes de acuerdo con sus necesidades y a la mejor forma de representar el objeto matemático para la enseñanza. Estos conocimientos se evidencian en el plano vertical [Sem-Ins], dado a que el profesor selecciona el representamen utilizado para enseñar y activar la visualización (ver Figura 12).

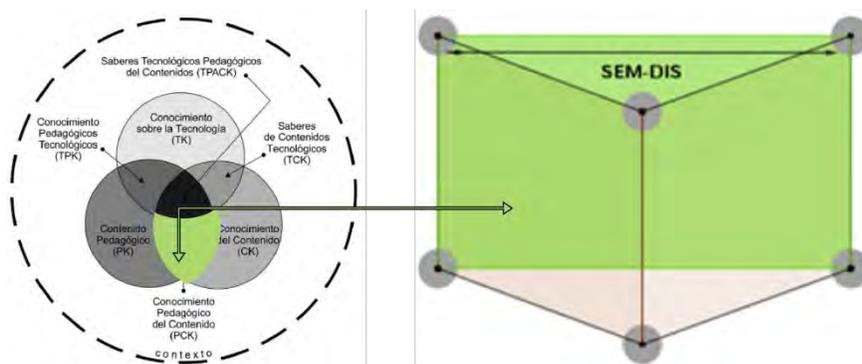
**Figura 12. Interacción de componente TPK con plano [Sem-Ins]**



Por ejemplo, un profesor de tercero de secundaria decide usar GeoGebra para hacer una animación que le permita enseñar la relación entre el área y el perímetro de rectángulos, utiliza las herramientas de GeoGebra para mostrar los valores y que sus estudiantes construyan una tabla y hagan conjeturas. Por otro lado, el profesor de sexto grado de primaria selecciona trabajar con un geoplano digital donde los niños podrán representar varios rectángulos y cuadrados con las ligas y, así, compararlos viéndolos y contando los cuadrados que los conforman. Los profesores conocen y toman en cuenta los artefactos digitales, el nivel de desarrollo de los niños que determina el paradigma que privilegian y las génesis que buscan activar para seleccionar el mejor en cada caso.

Finalmente, a pesar de que no forma parte del interés en esta investigación porque no se refiere a los conocimientos tecnológicos, se podría establecer una interacción entre los PCK y el plano [Sem-Dis] para tener una visión de cómo todos los conocimientos del modelo TPACK podrían interactuar con todos los planos verticales del ETM (ver Figura 13). Cuando un profesor diseña la enseñanza de cuadriláteros determinando cómo representará los cuadriláteros, si utilizará una clasificación inclusiva o qué definiciones y propiedades usará para enseñarlos de acuerdo a las necesidades y características de sus estudiantes o al currículo de su país, haría uso de sus PCK y determinaría la representación de los cuadriláteros y el referencial teórico, es decir, activaría el plano [Sem-Dis].

**Figura 13.** Interacción de componente PCK con plano [Sem-Dis]



Al plantear las interacciones anteriores surgen dos aspectos a considerar: El primero, que se analiza lo concerniente a la tecnología por el foco de la investigación, sin implicar que sean de mayor importancia o que haya una mayor interacción que con los demás conocimientos del modelo TPACK. El segundo, que es complicado separar los conocimientos pedagógicos del profesor, debido a que el contexto en el que se encuentra es la enseñanza. Se podría considerar que los conocimientos pedagógicos podrían tener una interacción subyacente como parte del contexto que nos interesa en esta investigación.

Estas interacciones no se desarrollan por separado, por lo que es complejo en algunas situaciones separarlas en conocimientos del proceso de construcción del ETM idóneo del profesor de Matemática. Se representan y describen una a una por separado para su mayor comprensión, pero no con la intención de simplificarlas ni hacerlas parecer simplistas o triviales.

En el modelo TPACK, se plantea que la tecnología es un medio para aprender, que apoya la visualización y experimentación. Por ello, la tecnología y los recursos tecnológicos se consideran como herramientas tecnológicas ya que son artefactos usados para una actividad productiva, tal y como se plantea en la teoría ETM.

Se puede apreciar cómo el modelo TPACK y la teoría ETM se acercan y complementan en puntos importantes que permiten usarlas con coherencia teórica dentro de la misma investigación. Esto también permite un análisis de las tareas diseñadas para esta investigación tomando en cuenta las interacciones entre los conocimientos propuestos en el modelo TPACK y el ETM idóneo de profesores de matemática.

En esta investigación, también se utilizan el modelo TPACK y la teoría ETM para propósitos separados. En tal sentido, permiten diseñar las tareas y analizar los resultados

mediante el uso de la teoría ETM y diseñar los instrumentos de recolección de datos siguiendo los planteamientos y criterios del modelo TPACK. Esto lo explicaremos con mayor detalle en el capítulo II.

Como hemos visto, los conocimientos de los profesores interactúan con la construcción de su ETM idóneo. Por ello, el profesor debe tener sólidos conocimientos sobre el contenido que enseña, en este caso, sobre cuadriláteros. También debe conocer sobre la forma y estrategias para enseñar cuadriláteros que más se adapta a sus estudiantes. En tal sentido, resulta interesante observar y analizar cómo es dicha interacción.

#### **1.4 Pregunta y objetivos de la Investigación**

Con base en lo expuesto anteriormente, nos planteamos la pregunta para esta investigación, así como los objetivos y metodología para responderla y generar nuevos conocimientos y aportes al conocimiento científico sobre el uso de tecnología para la enseñanza de los cuadriláteros.

##### **Pregunta de Investigación.**

¿Cómo interactúan los conocimientos tecnológicos de profesores de Matemática con su Espacio de Trabajo Matemático idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros?

##### **Objetivo General.**

Analizar la interacción de los conocimientos tecnológicos de profesores de matemática con su Espacio de Trabajo Matemático idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros.

##### **Objetivos Específicos.**

1. Identificar los Conocimientos Tecnológicos, Tecnológicos Pedagógicos, Tecnológicos sobre cuadriláteros y Tecnológicos Pedagógicos sobre cuadriláteros de profesores de matemática.
2. Describir el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de Matemática al planificar la enseñanza de cuadriláteros.
3. Determinar el nivel de interacción entre los conocimientos tecnológicos de profesores de Matemática con su Espacio de Trabajo Matemático idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros

### **1.5 Aspectos metodológicos de la investigación**

Para cumplir con los objetivos propuestos, se realizó una investigación cualitativa la cual pretende comprender la influencia de los conocimientos tecnológicos en los procesos de diseño de la enseñanza llevados a cabo por profesores de Matemática al enseñar cuadriláteros, en la que nos enfocaremos en los procesos observados en la investigación y no sólo en los resultados. Esto se relaciona con lo descrito por Hernández-Sampieri et al. (2014): “El alcance final de los estudios cualitativos muchas veces consiste en comprender un fenómeno complejo. El acento no está en medir las variables del fenómeno, sino en entenderlo” (p. 18).

Estos autores también establecen que las metas de una investigación cualitativa son “Describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 11). Lo cual se evidencia en nuestra investigación, ya que analizaremos y trabajaremos en base a las experiencias y percepciones de los profesores de Matemática, pero también en la evidencia o producto que realizan después de una capacitación sobre artefactos digitales para la enseñanza de cuadriláteros. En esta investigación, se diseñó una formación docente basándonos en el modelo TPACK y la teoría ETM. Dicha formación también permitió la recolección de datos.

El proceso de investigación cualitativa, según lo planteado por estos autores, no es lineal y permite regresar a fases anteriores e incluso realizar revisiones de literatura para efectuar ajustes según las necesidades y características de la investigación y continuar con la investigación. En tal sentido, la fase 1 corresponde a la idea; la fase 2 al planteamiento del problema; la fase 3 a la inmersión inicial en el campo; la fase 4 a la concepción del problema; la fase 5 es la definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta; la fase 6 es la recolección de datos; la fase 7 es el análisis de los datos; la fase 8 es la interpretación de resultados y; la fase 9 que es la elaboración del reporte de resultados. En todas las fases se puede realizar revisión de literatura existente (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2014).

Adaptamos este proceso en nuestra investigación, ya que nos permite revisar y ajustar la investigación en base a lo conseguido, tomando en cuenta las características de los sujetos y del contexto. Esta investigación consta de cuatro fases que se basan en la propuesta de Hernández-Sampieri et al. (2014) para el proceso de una investigación cualitativa. La Figura 14 muestra el proceso seguido en la presente investigación.

**Figura 14. Proceso de la investigación**



La **fase 1** comienza con una idea inicial, que modificamos de acuerdo con lo conseguido en la revisión de la literatura: formación docente sobre el uso de la tecnología para la enseñanza de matemática. Esta idea surgió por una combinación de factores como la experiencia e intereses personales y profesionales propios, la investigación sobre temas de interés y la inquietud ante la necesidad de aportar conocimientos y contribuir con las investigaciones relacionadas que se han elaborado. Por lo que, según lo planteado por Hernández-Sampieri et al. (2014) esta investigación estaría impulsada por la necesidad de cubrir huecos de conocimiento.

Necesidad de cubrir “huecos de conocimiento”: es frecuente que el investigador que se vaya compenetrando con algún campo de conocimiento detecte temas poco estudiados o no investigados en su contexto y decida adentrarse en éstos. Resulta un “disparador” muy común de estudios. (Hernández-Sampieri et al., 2014, p.25)

Se hace una familiarización con el tema de la idea concebida inicialmente. Parte de esta familiarización comenzó durante los cursos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP; sin embargo, adicionalmente se realizaron lecturas sobre: el uso e incorporación de tecnología para la enseñanza de matemática; diversas teorías sobre el aprendizaje y didáctica de la matemática; y diferentes objetos matemáticos, específicamente en el dominio de la geometría.

Luego, se realiza el planteamiento del problema haciendo una revisión de las investigaciones de referencia, la justificación de la presente investigación y la descripción del marco teórico que fundamenta y respalda esta investigación. Finalmente, se plantea la pregunta y objetivos de investigación. Como en una investigación cualitativa, estos objetivos se modificaron y afinaron durante la investigación.

La investigación se realizó en el campo laboral y de formación profesional de la investigadora, por lo cual la inmersión inicial en el campo comprendió la propuesta y motivación de participación a colegas y compañeros profesores de Matemática en una capacitación sobre artefactos digitales para la enseñanza de cuadriláteros.

En la **fase 2**, se realiza el diseño del experimento tomando en cuenta el contexto, los sujetos y las investigaciones hechas. Esta etapa corresponde a las fases de concepción del diseño del estudio y definición de la muestra inicial, según lo planteado por Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista (2014).

Se comienza esta fase con el estudio de los cuadriláteros. Este estudio se presenta en el Capítulo II de esta tesis, donde primeramente se presentan aspectos históricos y matemáticos para comprender este objeto, su historia dentro del conocimiento humano y la clasificación hecha por diferentes matemáticos. Luego, se hace una revisión y descripción de aspectos didácticos sobre los cuadriláteros. Para ello, revisamos los libros de primero, segundo y tercero de secundaria de la editorial Santillana. Se describe la estructura y tareas propuestas en estos textos escolares, específicamente sobre cuadriláteros, a la luz de lo planteado por el ETM.

En el diseño del experimento, se presentan los sujetos de investigación, que son profesores de los tres primeros años de secundaria

Luego, se hace la selección de las técnicas e instrumentos de recolección de datos y diseñamos dichos instrumentos y su implementación. En cuanto a la recolección de datos, usamos técnicas e instrumentos para recolectar datos cualitativos como encuestas, observaciones, videos y entrevistas.

La recolección de los datos está orientada a proveer de un mayor entendimiento de los significados y experiencias de las personas. El investigador es el instrumento de recolección de los datos, se auxilia de diversas técnicas que se desarrollan durante el estudio (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 11).

Esto implica que el investigador puede refinarlos durante la investigación. Esto permitió recoger datos que se analizaron para comprender la influencia del conocimiento tecnológico en el ETM idóneo de los profesores participantes. En el capítulo III se realiza la descripción de los instrumentos y técnicas de recolección de datos que se utilizaron para alcanzar los objetivos de esta investigación.

Se elaboraron dos cuestionarios: uno que se aplicó a los profesores antes de iniciar la experimentación y otro al terminar la formación docente.

Con el cuestionario inicial se busca identificar los conocimientos tecnológicos y el uso de tecnología para la enseñanza de cuadriláteros de los profesores de matemática en ejercicio de primero, segundo y tercero de secundaria. Dicho cuestionario consta de 16 preguntas para conocer los Conocimientos Tecnológicos (TK), Tecnológicos Pedagógicos (TPK), Tecnológicos del Contenido (TCK) y Tecnológicos Pedagógicos del Contenido (TPACK) iniciales que tienen los profesores. También se solicita a los profesores mencionar los recursos didácticos de referencia, como libros y páginas web, que utilizan para planificar sus sesiones de clase.

Tanto el cuestionario inicial como el cuestionario de cierre se elaboran usando investigaciones sobre validación de propuestas de instrumentos para evaluar el TPACK de profesores de matemática, ya que éstas brindan indicadores que permiten determinar los conocimientos tecnológicos pedagógicos y de contenido de los profesores. Las preguntas de los cuestionarios se elaboran haciendo adaptaciones de instrumentos de medición TPACK utilizados y validados en investigaciones anteriores. Adicionalmente, los cuestionarios se enviaron a expertos (profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP con conocimientos y experiencia comprobados en metodología de investigación que asesoran tesis para la obtención de dicha maestría) para ser validados. Se tomaron en cuenta las sugerencias hechas por estos expertos para realizar modificaciones y aplicar los cuestionarios.

Además, los profesores cuentan con un espacio para adjuntar una planificación de una sesión de clase realizada anteriormente por ellos sobre cuadriláteros. Esta planificación es utilizada para identificar las génesis y planos que el profesor pretende activar en su ETM idóneo representado en la planificación, lo cual es parte del segundo objetivo específico de esta investigación. También se observa la presencia y uso de tecnología durante la sesión planificada. Al finalizar la formación, los profesores realizan modificaciones a la planificación de esta sesión de clase usando los recursos y artefactos digitales o no que ellos consideren mejores para sus estudiantes. Dichas sesiones de la formación se grabaron a través del uso de grabación en Zoom para ser analizadas posteriormente.

Posteriormente, se realiza una entrevista personal a los profesores para determinar los motivos de sus decisiones y si los conocimientos tecnológicos interactuaron con su visión de la planificación de la sesión de clases sobre cuadriláteros, es decir, si hubo interacción entre los nuevos conocimientos tecnológicos y su ETM idóneo. “Las entrevistas, como herramientas para recolectar datos cualitativos, se emplean cuando el problema de estudio no se puede observar o es muy difícil hacerlo por ética o complejidad” (Hernández-Sampieri et al, 2014, p. 403).

En esta fase también se realiza la planeación y diseño de las tareas de la capacitación para profesores sobre artefactos digitales para enseñar cuadriláteros y la descripción del proceso de análisis de la información. A continuación, se realiza la descripción de las acciones planificadas en la experimentación y luego se muestra el trabajo hecho para ello.

Luego, se establecen los procedimientos para analizar la información obtenida de los cuestionarios, fichas, entrevistas y observaciones. En primer lugar, se agrupan los instrumentos de recolección de datos por cada participante para verificar qué profesores cumplieron con la entrega de dichos instrumentos. Sólo se analizaron los resultados de los profesores que hayan completado todos los instrumentos de recolección de datos porque cada uno brinda información necesaria para el análisis.

Una vez identificados los profesores que completaron todos los instrumentos, se tomó la información y resultados de los dos profesores que cumplieron con todo para los fines de esta investigación. Dichos profesores son identificados con los seudónimos Andrés y Sofía. Ambos son profesores de secundaria de primer y tercer año, respectivamente, en instituciones privadas.

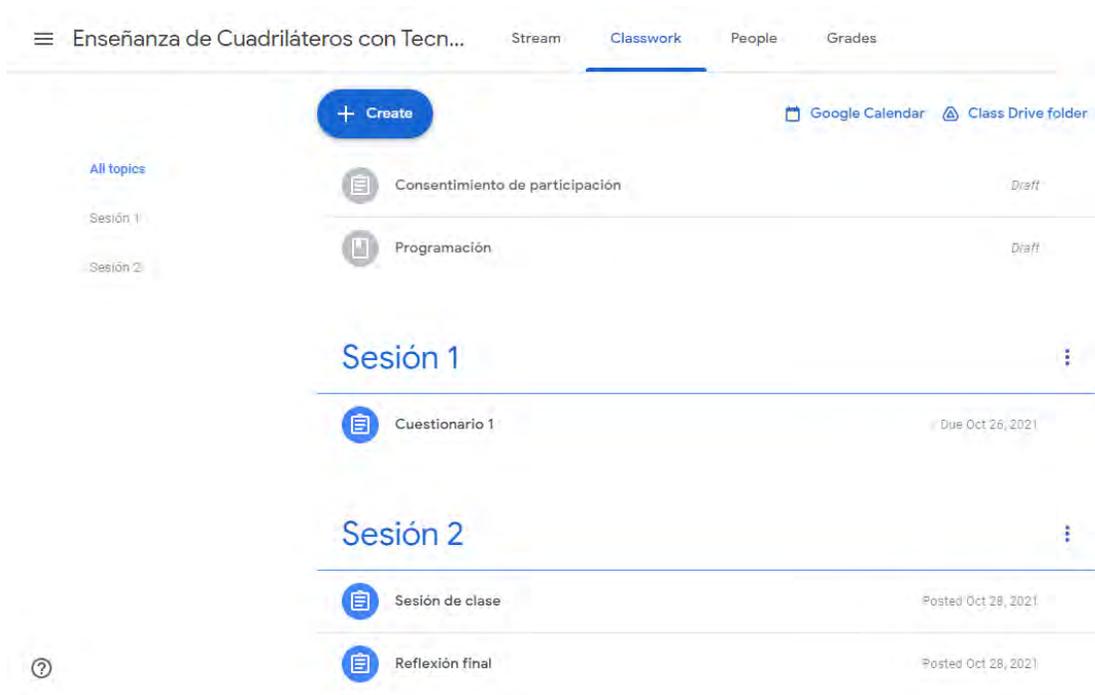
En el caso de las planificaciones presentadas por los docentes, se analizan usando la teoría ETM y el método planteado por Kuzniak et al. (2020) que fue utilizado también por Vivas (2021) para analizar las acciones matemáticas de estudiantes universitarios. En dicho método, las tareas se dividen en episodios.

Los autores plantean que “un episodio es una subtarea que el estudiante realiza para resolver la tarea. Un episodio consiste en las acciones que el estudiante efectúa para completar la subtarea” (Kuzniak et al., 2020, p.104). Por ello, se establecen episodios dentro de las planificaciones de los docentes para identificar las génesis y los planos verticales que los profesores buscan activar con las tareas que proponen para sus estudiantes.

Luego, la **fase 3**, corresponde a la aplicación y análisis que comprende las fases de acceso a la muestra y recolección de datos (Hernández-Sampieri et al., 2014). En esta fase, se

realiza la formación docente a distancia usando videollamadas de Zoom. Este artefacto digital permite interactuar con los participantes a través de videollamadas, compartir presentaciones y hacer anotaciones, entre otras. Los documentos, cuestionarios y enlaces para las tareas del dispositivo de formación se compartieron a través de una clase en Google Classroom (ver Figura 15).

**Figura 15.** Organización de Google Classroom



Otros artefactos digitales usados en esta investigación fueron un geoplano digital, una pizarra de manipulables matemáticos llamada Polypad de Mathigon y GeoGebra clásico en línea.

Las planificaciones entregadas por los profesores en Google Classroom, así como las participaciones hechas durante la formación y las entrevistas semiestructuradas se usaron en esta investigación para para identificar las génesis y planos que el profesor busca activar y el paradigma geométrico que privilegia, es decir, alcanzar el segundo objetivo específico.

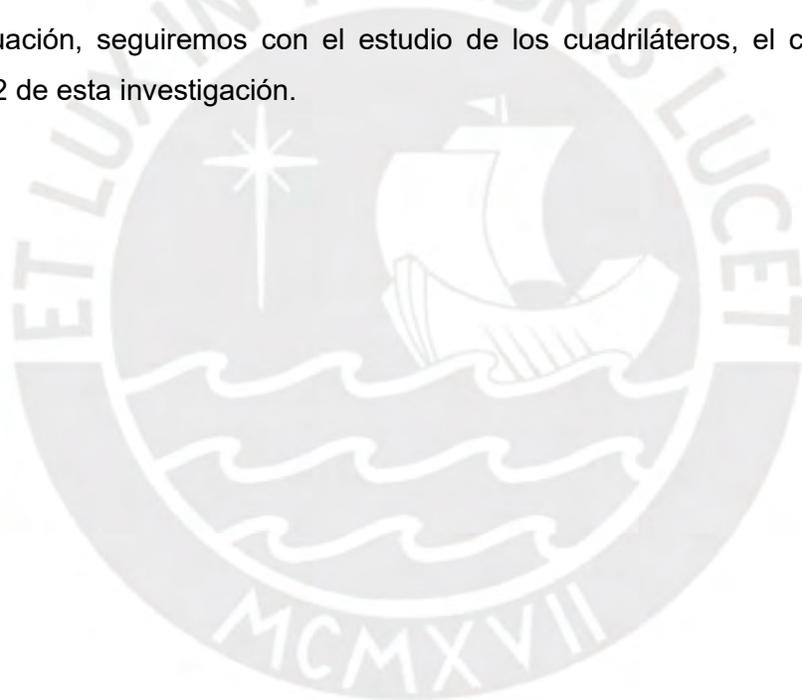
Finalmente, en la **fase 4**, se analizan los datos obtenidos en las encuestas, observaciones y entrevistas en base a criterios de organización y se eligen unidades de análisis en base a elementos y descriptores de las teorías ETM y TPACK. “Conforme se van reuniendo los datos verbales, en texto y/o audiovisuales, se integran en una base de datos, la cual se analiza para determinar significados y describir el fenómeno estudiado desde el punto de vista

de sus actores. Se conjuntan descripciones de participantes con las del investigador” (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 11).

También se interpreta y reporta los resultados, se responde la pregunta de investigación con la descripción de la interacción de los conocimientos tecnológicos con el ETM idóneo del profesor y mediante el establecimiento de conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones. Esta etapa corresponde al análisis de datos, interpretación de resultados y elaboración del reporte de resultados (Hernández-Sampieri et al., 2014).

La fase 4 permite alcanzar el objetivo general de esta investigación. Se describen las tareas propuestas al profesor mencionando las génesis y planos que se busca activar con cada una y se analizan las respuestas de los profesores con base al TPACK y ETM. De esta forma, se responde la pregunta principal y se llega a conclusiones y recomendaciones.

A continuación, seguiremos con el estudio de los cuadriláteros, el cual constituye el inicio de la fase 2 de esta investigación.



## Capítulo II. Los cuadriláteros

En este capítulo, presentaremos una revisión del objeto matemático seleccionado para esta investigación con el objetivo de organizar y seleccionar la información que servirá de base para el diseño de la formación docente. Para ello, comenzaremos con una descripción de la evolución histórica, dentro del campo de la matemática, de los cuadriláteros. También, analizaremos tres libros usados para la enseñanza de cuadriláteros mediante la descripción de aspectos didácticos y su caracterización con respecto al ETM.

### 2.1 Algunos aspectos históricos y matemáticos de los cuadriláteros.

Los cuadriláteros han estado presentes en la historia de la geometría y de la humanidad desde sus inicios. Si consideramos la geometría práctica, los seres humanos han utilizado cuadriláteros desde la época de los antiguos egipcios y los babilonios; sin embargo, desde la perspectiva de la geometría especulativa, los cuadriláteros han estado presentes desde la antigua Grecia (Sánchez, 2012).

Las civilizaciones antiguas usaban la matemática para satisfacer necesidades y resolver problemas prácticos y reales que se les presentaban como sociedad. Las primeras necesidades que dieron origen a la matemática fueron las necesidades de contar y medir. Esto quiere decir que su origen se puede considerar en la aritmética y la geometría. Ortiz (2005) destaca que, alrededor del año 40 000 A.C., el hombre Neandertal comienza “a usar un lenguaje con vestigios de un sistema de números, así como se hicieron algunas construcciones en donde aparecen ciertas relaciones geométricas” (p.3).

La palabra “geometría” significa medida de la tierra por sus raíces griegas “geo” tierra y “metría” medir. Inicialmente la geometría y, en particular los cuadriláteros, fueron usados para satisfacer la necesidad de medir.

Los antiguos egipcios, aproximadamente en el año 3000 A.C., utilizaban geometría práctica usando cuadriláteros, por ejemplo, para medir linderos de terrenos después del desbordamiento anual del río Nilo y en la construcción de pirámides.

Los tensadores de cuerdas egipcios realizaban la repartición de las tierras a través de la medición de terrenos después de las inundaciones del Nilo que hacía desaparecer los límites entre las parcelas. Esto lo hacían a través de la utilización de cuerdas, estacas e instrumentos de medición para construir cuadriláteros a través de triángulos rectángulos con los números sagrados 3, 4 y 5 (Sánchez, 2012).

Una historia contada por Proclus refleja la importancia que le daban los egipcios a conocer sobre geometría y, en particular, sobre el área y perímetro de cuadriláteros. Proclus relata que los participantes en la división de tierras a veces confundían a sus compañeros en la distribución de las tierras a través del uso a su conveniencia de la medida del lado más largo de bordes limítrofes entre terrenos. Habiendo adquirido un terreno con más periferia o distancia con sus vecinos laterales (de forma rectangular), después lo intercambiaban por tierras con menor límite (acercándose a un cuadrado) y así obtenían más terreno que sus vecinos. Además, al hacer esto, ganaban una reputación de tener gran honestidad (Heath, 1981). Esta historia refleja los conocimientos que los egipcios comenzaban a desarrollar sobre el área y perímetro de cuadriláteros como el rectángulo. Además, estas medidas eran usadas también para el cálculo de los impuestos que se debían pagar a los faraones, el cual se hacía en base al perímetro del terreno.

Esta historia muestra que algunos egipcios se aprovechaban de la creencia de que, si un cuadrilátero tiene mayor perímetro, también tendrá mayor superficie. También muestra que en tiempos de Proclus comenzaban a tener nociones de isoperimetría y optimización. La isoperimétrica se refiere a las relaciones entre figuras con igual perímetro. La Real Academia Española (2021) define isoperímetro como “dicho de dos o más figuras: Que, siendo de distinta forma, tienen igual perímetro”. También se observa que identifican que el cuadrado es el cuadrilátero que tiene mayor área entre cuadriláteros isoperimétricos.

Sánchez (2012) menciona que la transición de los conocimientos geométricos prácticos y concretos de los babilonios y egipcios a los geométricos teóricos y abstractos de los griegos fue realizada por Tales de Mileto y los pitagóricos, quienes comenzaron a hacer demostraciones y teoremas. “Los griegos de la época dorada, siglos VI a III a.C., quienes concibieron las matemáticas abstractas y deductivas estuvieron especialmente atraídos por las formas y los movimientos que observaban en los cielos; geometría y astronomía estaban íntimamente relacionadas.” (Sánchez, 2012)

En el año 300 A.C., Euclides escribe un libro llamado *Los Elementos*. Su obra está compuesta por un grupo de 13 libros con postulados, nociones, definiciones y demostraciones de gran claridad y precisión sobre los conocimientos matemáticos de geometría, aritmética y álgebra que se tenían hasta ese momento. Algunos de los conceptos que incluye en sus proposiciones, que son de interés para la presente investigación sobre cuadriláteros, están dentro de las categorías de construcciones geométricas y geometría plana.

Euclides define a los cuadriláteros en su definición 19 donde establece que “Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas” (Euclides, trad. en 1991). Luego, caracteriza algunos cuadriláteros en su definición 22 donde describe los diferentes cuadriláteros en base a la medida de sus ángulos y lados.

De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular; rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámese trapecio las demás figuras cuadriláteras. (Euclides, trad. en 1991).

Se puede observar que Euclides define cada cuadrilátero teniendo en cuenta si todos sus lados tienen igual medida, si los lados opuestos tienen igual medida dos a dos, si tiene ángulos rectos o si tiene ángulos de igual medida dos a dos. Estos cuadriláteros, a diferencia de los trapecoides, son paralelogramos y, a pesar de que no lo menciona en esta definición, los nombra así en los postulados. Esto se puede observar, por ejemplo, en la proposición 34.

En la Proposición I.34, Euclides usa el término “área paralelográmica” en lugar de la palabra “paralelogramo”, ésta última aparece por primera vez en la Proposición I.35. Proclus indicó que la palabra “paralelogramo” fue creada por Euclides. Con la Proposición I.34 se inicia el estudio de áreas de figuras rectangulares. En varios de los enunciados de las proposiciones, se habla de “igualdad de paralelogramos”, o “igualdad de triángulos”, o “un paralelogramo igual a un triángulo”, etc. El concepto de igualdad al que se hace referencia está dado en términos de las áreas de las figuras rectilíneas que se mencionan (Linares, 2007, p.10).

Euclides presenta dos tipos de proposiciones en su obra, unas que constituyen problemas de construcción de un objeto matemático y otras que son teoremas que demuestran propiedades de los objetos (Sánchez, 2012). A continuación, presentaremos proposiciones de Euclides que hacen referencia a cuadriláteros.

I.34 En todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son iguales, y la diagonal divide el área del paralelogramo en dos áreas iguales.

I.35 Los paralelogramos que tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.

I.36 Los paralelogramos que tienen bases iguales y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.

I.41 Si un paralelogramo y un triángulo tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, entonces el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo.

I.42 Construir un paralelogramo de igual área a la de un triángulo dado en un ángulo dado.

I.43 En cualquier paralelogramo los complementos de los paralelogramos alrededor de la diagonal tienen áreas iguales.

I.44 Construir sobre un segmento dado en un ángulo dado un paralelogramo de igual área a la de un triángulo dado. (Euclides, trad. en 1991).

Otros matemáticos que también han contribuido al conocimiento y estudio de la geometría y los cuadriláteros a través de la historia son Ptolomeo, quien demostró el teorema sobre cuadriláteros cíclicos que lleva su nombre; Brahmagupta, quien desarrolló una fórmula para hallar el área de un cuadrilátero convexo; René Descartes con sus aportes a la Geometría analítica mediante el uso de coordenadas y la representación gráfica; Gerolamo Saccheri, quien trabajó con cuadriláteros en geometrías no euclidianas; Carl Friedrich Gauss, quien entre sus aportes contribuyó con la prueba de la línea Newton-Gauss de cuadriláteros completo; John Playfair, quien hizo aportes al conocimiento sobre paralelismo de rectas; Euler, quien con su teorema estableció una relación entre el número de caras, vértices y aristas de polígonos; Janos Bolyai, quien con su Teorema de Bolyai-Gerwien que dice que cualesquiera dos polígonos de la misma área son equidescomponibles, contribuyendo a la obtención de relaciones y fórmulas de áreas; Nikolai Lobachevsky, quien realizó investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas; Lachlan, quien hizo aportes a los conocimientos sobre cuadriláteros completos o tetrastigma; Felix Klein, quien hizo aportes a la Geometría de las transformaciones, entre otros (Grant y Kleiner, 2015; Sánchez, 2012; Salehyan y Días, 2015; Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2013; Venialbo, 2009).

Los avances y aportes de estos matemáticos se desarrollaron durante años. Su contribución fue construyendo el conocimiento y comprensión sobre los cuadriláteros a través de teoremas, postulados y demostraciones.

Otro matemático que contribuyó al estudio de la geometría y los cuadriláteros fue Hilbert, quien propone un sistema axiomático en su libro los Fundamentos de la Geometría publicado en 1899. Al respecto de este sistema formal, Sánchez plantea que,

En la actualidad, se discute si en Elementos se halla, efectivamente, el primer sistema axiomático de la historia, por algunas de las deficiencias encontradas . . . Se dice que el de Euclides es un sistema axiomático material, pues las nociones básicas tienen contenido, mientras que la axiomática de Hilbert es formal, ya que las nociones primitivas o indefinidas en este último autor se presentan como sistemas de entes que se caracterizarán a través de los axiomas y podrían tener más de una interpretación (2012, p.11).

Estos sistemas axiomáticos han permitido estudiar los cuadriláteros, sus definiciones y propiedades. Con estos conocimientos, se han elaborado diferentes clasificaciones de cuadriláteros. En la actualidad, para clasificar y estudiar a los cuadriláteros, se utilizan las características comunes que tienen de acuerdo con las siguientes propiedades: paralelismo de lados, igualdad de lados, igualdad de ángulos, número de ángulos rectos, posición relativa de las diagonales, concavidad y convexidad (Zúñiga, 2013).

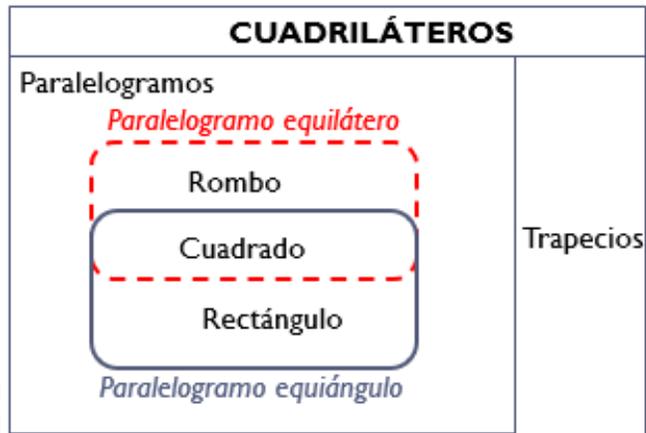
En tal sentido, algunos matemáticos clasifican a los cuadriláteros según sus ángulos y longitud de lados, según el paralelismo de sus lados o según sus diagonales. También existen clasificaciones jerárquicas o por particiones en conjuntos disjuntos. García-Cuéllar (2021) hace un estudio en el cual incluye una descripción de las diferentes formas que se utilizan y han utilizado para clasificar a los cuadriláteros. En la Tabla 6, presentaremos las clasificaciones relevantes para nuestra investigación.

**Tabla 6** Clasificaciones de cuadriláteros hechas por diferentes matemáticos

*Clasificaciones de cuadriláteros hechas por diferentes matemáticos*

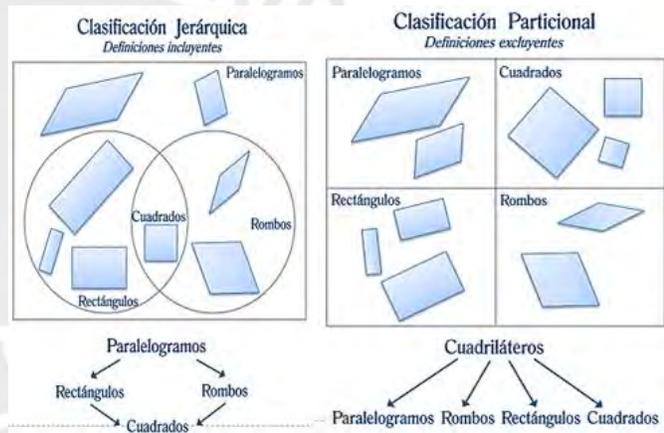
Matemático	Clasificación según	Figura de clasificación
Euclides (2009)	Paralelismo de lados	

Legendre (1898) Paralelismo de lados



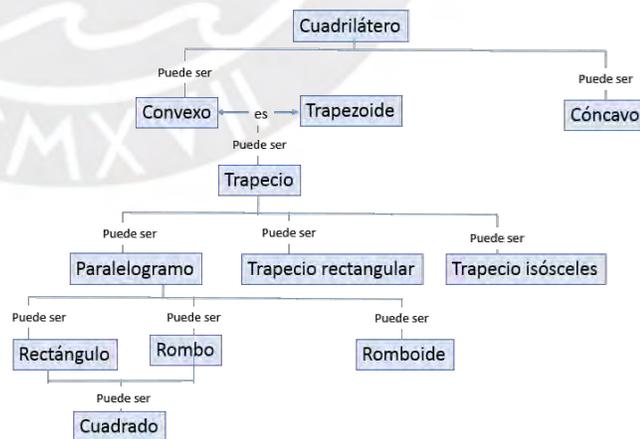
De Villiers (1994)

Paralelismo de lados  
Ángulos rectos  
(clasificación jerárquica)

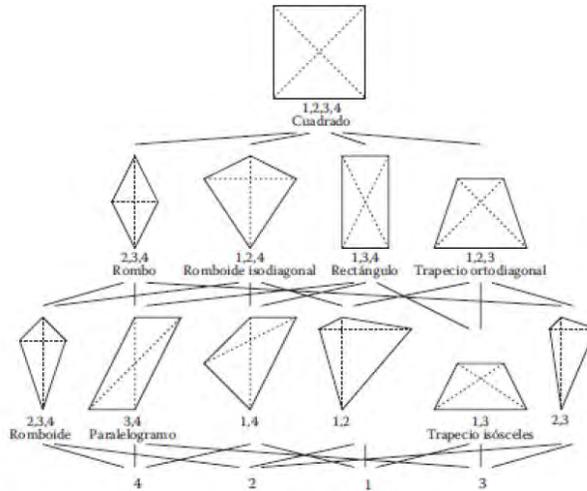


Huerta (1996)

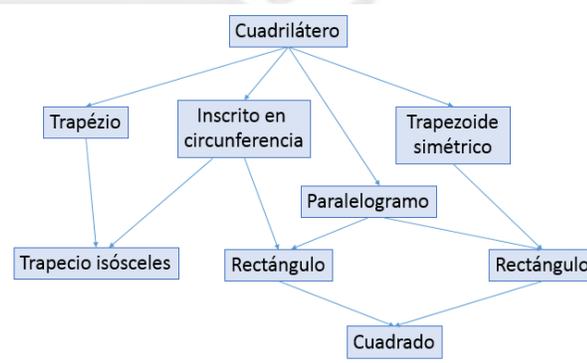
Concavidad



Gascón (2004) Diagonales



Usiskin y Griffin (2008) Jerarquía de De Villiers



Vásquez de Tapia (1993) de Paralelismo de lados (clasificación inclusiva del trapecio)



Nota: Adaptado de García-Cuéllar, 2021, p. 77-90.

Las diferencias entre las clasificaciones anteriores se deben a que, en cada caso, se toman definiciones diferentes de los cuadriláteros. La definición depende de los criterios adoptados y de si se considera de forma inclusiva o exclusiva a los trapecios. En tal sentido,

García-Cuéllar (2021) plantea que “una clasificación depende inicialmente de la definición asumida de polígono (tener superficie o no) y del criterio adoptado para definir un cuadrilátero, además de si la definición de trapecio es inclusiva o no” (p. 91). Por ello, estas definiciones deben hacerse de forma consciente y razonada de forma que guarde relación y coherencia en el estudio de los cuadriláteros.

El recorrido histórico anterior, que no pretende ser exhaustivo, nos brinda bases y conocimientos para analizar el estudio de los cuadriláteros y tener un marco que justifique su utilidad y su enseñanza en la educación primaria y secundaria. En general, los profesores de matemática desconocen la historia de la geometría y no la aprovechan para contextualizar la enseñanza y motivar a sus estudiantes. En tal sentido, Sánchez plantea que:

En Elementos, hay componentes didácticos para la geometría, el álgebra y la teoría de números; además, durante muchos siglos fue el gran paradigma para aprender a razonar correctamente. Un recorrido por esta obra, sus antecedentes, su contenido, su estructura, y el impacto causado ya sea por sus fortalezas o sus limitaciones, es un recorrido por la historia de la geometría y, como tal, un recurso didáctico valioso para ser tenido en cuenta en la enseñanza de las matemáticas (2012, p.72).

Estas ideas planteadas sobre Elementos de Euclides pueden ser trasladadas a la historia de los cuadriláteros. Conocer la evolución del conocimiento sobre este objeto matemático es un recurso didáctico que los profesores deben tener para tomar decisiones pedagógicas que mejoren la enseñanza de los cuadriláteros. Esta reflexión nos lleva a presentar, a continuación, aspectos didácticos que se encuentran en libros de textos usados para la enseñanza de cuadriláteros.

## **2.2 Aspectos didácticos para la enseñanza de cuadriláteros**

Se puede establecer que, tomando en cuenta lo histórico y lo didáctico con respecto a los paradigmas del ETM, las demostraciones elaboradas por los pitagóricos pueden ser válidas para niveles iniciales de razonamiento geométrico como en los paradigmas GI y GII; sin embargo, para niveles más altos, como el paradigma GIII, se pueden utilizar demostraciones más formales como las encontradas en la obra *Los Elementos* de Euclides (Sánchez, 2012)

Los cuadriláteros son trabajados en primaria y secundaria con el apoyo de libros de texto. A continuación, realizaremos un estudio de algunos libros de texto y cómo presentan las definiciones, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas a los estudiantes. La Tabla 7

muestra los libros de la editorial Santillana que tomaremos en cuenta en nuestra investigación por ser uno de los más conocidos y utilizados en el sistema educativo peruano.

**Tabla 7**

*Libros de texto de Secundaria*

	<b>Título Grado escolaridad</b>	<b>Ubicación del tema de cuadriláteros en el libro</b>
LS1	Matemática 1 1° secundaria	Unidad 12. Figuras Geométricas Sesión 2. Cuadriláteros (p. 386-389) Sesión 3 Área y perímetros de triángulos y cuadriláteros (p. 390-392)
LS2	Matemática 2 2° secundaria	Unidad 11. Geometría plana Sesión 3. Polígonos Parte 3.3. Cuadriláteros (p. 359-361) Sesión 4 Área de un polígono regular (p. 362-364)
LS3	Matemática 3 3° secundaria	Unidad 10. Figuras Planas Sesión 2. Polígonos Parte 2.3. Cuadriláteros (p. 336-339) Sesión 4 Área de figuras planas (p. 344-353)

En el caso de los libros de la Editorial Santillana, poseen una estructura general similar para presentar el tema. Comienzan con una breve definición de cuadriláteros, luego se presenta una tabla con la clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades, se presentan ejemplos resueltos de ejercicios y, finalmente, se proponen ejercicios para ser resueltos por los estudiantes. Se utiliza una metodología deductiva para presentar los objetos y conceptos matemáticos.

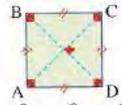
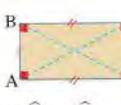
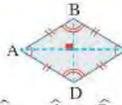
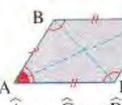
En el libro de texto Matemática 1 (LS1), se comienza el capítulo dando una definición de cuadriláteros: “Un cuadrilátero es una porción del plano limitado por cuatro segmentos. Todo cuadrilátero tiene cuatro lados y cuatro ángulos” (Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas, 2017, p. 386).

Luego, se presenta la clasificación de cuadriláteros. Se propone una clasificación de los cuadriláteros que contempla paralelogramos, trapecios y trapezoides, más no se menciona a los cuadriláteros cóncavos y convexos. También, se presentan las propiedades de los

cuadriláteros de forma simbólica y utilizando imágenes para representarlas, tal como se observa en la Figura 16. Se presentan con símbolos y lenguaje matemático las relaciones y propiedades referentes a los ángulos rectos, longitud de lados homólogos, paralelismo de lados, diagonales y perpendicularidad de ellas.

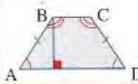
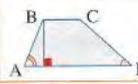
**Figura 16. Matemática 1: Propiedades y clasificación de cuadriláteros.**

### Paralelogramos

Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
 $m\hat{A} = m\hat{B} = m\hat{C} = m\hat{D} = 90^\circ$ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$	 $m\hat{A} = m\hat{B} = m\hat{C} = m\hat{D} = 90^\circ$ $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	 $m\hat{A} = m\hat{C}$ y $m\hat{B} = m\hat{D}$ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$	 $m\hat{A} = m\hat{C}$ y $m\hat{B} = m\hat{D}$ $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Los **paralelogramos** son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos y congruentes.

### Trapezios

Trapezio isósceles	Trapezio rectángulo	Trapezio escaleno
 $m\hat{A} = m\hat{D}$ y $m\hat{B} = m\hat{C}$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	 $m\hat{A} = m\hat{B} = 90^\circ$ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	 $m\hat{A} \neq m\hat{D}$ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Los **trapezios** son cuadriláteros que tienen dos lados opuestos paralelos.

### Trapezoides



Los **trapezoides** son cuadriláteros que no tienen lados paralelos.

Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas (2017, p. 386)

La presentación de cuadriláteros hecha en libro de texto Matemática 1 (LS1) buscaría activar las génesis semiótica y discursiva, activando así el plano vertical [Sem-Dis]. En términos del ETM, se activa la génesis semiótica y discursiva de una forma pasiva, ya que no se requiere que los estudiantes seleccionen ni produzcan en esta sección.

El libro LS1 presenta un texto donde se establece que se estudian las propiedades de los cuadriláteros para solucionar “problemas de contexto real” (Mejía et al., 2017, p. 386); sin embargo, los ejemplos y tareas propuestas en el libro son intramatemáticos.

Luego, se plantea un ejemplo resuelto en el cual se utilizan las propiedades de los cuadriláteros como herramientas para su resolución estableciendo que constituye la aplicación de la definición de paralelogramos, tal como se observa en la Figura 17. Esto podría activar las

génesis instrumental y semiótica, activando así el plano vertical [Sem-Ins] Se pasa de forma inmediata a la algebraización y resolución de problemas con el uso de ecuaciones.

**Figura 17. Matemática 1: Ejemplo de aplicación de propiedades de cuadriláteros.**

**Ejemplo 14** Aplico la definición de paralelogramos

**Dado el romboide ABCD, halla la longitud del lado BC.**

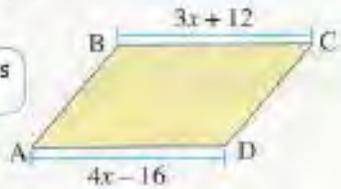
- En el romboide ABCD, calculamos  $x$ :
 
$$4x - 16 = 3x + 12$$

En un romboide, las medidas de los lados opuestos son congruentes:  $BC = AD$ .

$$4x - 3x = 12 + 16 \rightarrow x = 28$$
- Calculamos BC:
 
$$BC = 3x - 12 \rightarrow BC = 3(28) + 12 = 96$$

Reemplazamos para  $x = 28$ .

El lado BC mide 96 u.



Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas (2017, p.386)

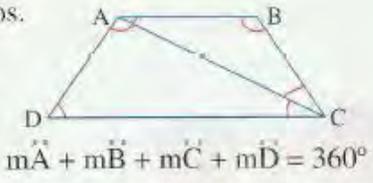
La Figura 18 muestra la explicación que hace este libro de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero. Se explica, con apoyo en una representación gráfica, el proceso de dividir el cuadrilátero en dos triángulos y se usa como herramienta la propiedad que expresa que la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ .

**Figura 18. Matemática 1: Suma de ángulos internos de cuadriláteros.**

## 2.2. Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero

Observa cómo obtenemos la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

- Descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.
- Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , entonces la suma de los ángulos interiores de dos triángulos que forman el cuadrilátero es:  $2(180^\circ) = 360^\circ$ .



$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} + m\hat{D} = 360^\circ$

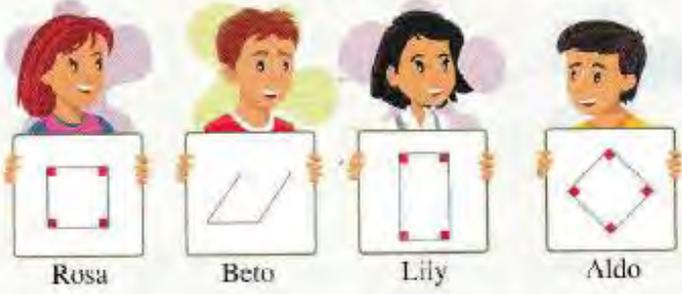
La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ .

Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas (2017, p. 387)

Los ejercicios propuestos en este recurso didáctico (ver Figura 19), se presentan después de introducir otras propiedades, por lo que, si se sigue el orden del libro, los estudiantes tendrán toda la teoría primero, incluyendo las propiedades antes mencionadas y la suma de ángulos internos. En los primeros ejercicios, se pide identificar y establecer relaciones entre los tipos de cuadriláteros. Se presentan los cuadriláteros con representaciones gráficas y simbología para los ángulos rectos.

**Figura 19.** *Matemática 1: Tarea propuesta sobre propiedades de cuadriláteros.*

**23** Rosa, Beto, Lily y Aldo dicen que han dibujado un rectángulo con cuatro lados de la misma medida. ¿Quién hizo lo correcto? Explica.



Rosa      Beto      Lily      Aldo

**Determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.**

- 24** Los cuadrados son rectángulos
- 25** Los rectángulos son cuadrados.
- 26** Los rombos son cuadrados.
- 27** Los cuadrados son rombos.
- 28** Los trapecios rectángulos tienen un par de ángulos rectos.

Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas (2017, p.388)

El ejercicio 29 busca que identifiquen los tipos de cuadriláteros en una imagen dada. Este ejercicio promueve la visualización y fragmentación de la imagen, por ello, hubiese sido interesante solicitar que busquen tantos cuadriláteros como les sea posible (ver Figura 20). En términos del ETM, este ejercicio activa la génesis semiótica y discursiva, ya que el estudiante debe trabajar e identificar las representaciones y las propiedades de los cuadriláteros

solicitados. Al nombrarlo, deben utilizar las letras de los vértices para representar los cuadriláteros de otra forma diferente a la que se encuentra en la imagen.

**Figura 20.** Matemática 1: Tarea propuesta sobre identificación de cuadriláteros.

**Observa la siguiente figura:**

**29** Nombra un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide y un trapecio.

Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas (2017, p.388)

Los demás ejercicios de esta sección se resuelven utilizando las propiedades de los cuadriláteros para formar ecuaciones y, luego, resolverlas algebraicamente, tal como se observa en la Figura 21. En uno de ellos y en un desafío que se plantea, es necesario usar el Teorema de Pitágoras como herramienta para resolverlos.

**Figura 21.** Matemática 1: Tarea propuesta sobre medida de lados de cuadriláteros.

**37** ABCD es un trapecio rectángulo. Calcula el valor de  $x$ .

A) 24 cm  
B) 25 cm  
C) 26 cm  
D) 27 cm

**38** Calcula el valor de  $x$ .

A) 11 cm  
B) 12 cm  
C) 13 cm  
D) 14 cm

Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino y Vargas (2017, p. 388)

En el libro de segundo de secundaria (LS2), se utiliza la misma definición y clasificación de los cuadriláteros que en el LS1. Se presenta una tabla muy parecida a la presentada en el libro de primero de secundaria. De igual forma, el primer ejemplo planteado en LS1 y LS2 requieren del mismo procedimiento de resolución. Por ser un romboide cuyos lados paralelos son congruentes, se igualan las expresiones algebraicas dadas para cada lado y se resuelve la ecuación planteada algebraicamente.

El segundo ejemplo resuelto, el cual se muestra en la Figura 22, presenta la solución del ejercicio y una comprobación en la parte derecha. Se observa el uso de esta comprobación para verificar el procedimiento algebraico realizado. El análisis geométrico se limita a utilizar la propiedad de los trapecios isósceles para igualar los ángulos adyacentes a una de las bases. La comprobación se hace de forma automática, sin justificar las elecciones tomadas para hacerla.

**Figura 22. Matemática 2: Ejemplo resuelto de trapecio isósceles.**

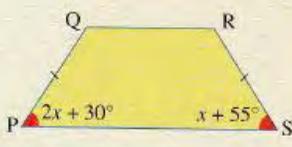
**Ejemplo 25** Aplico propiedades de los trapecios

Calcula  $x$  si PQRS es un trapecio isósceles.

- En un trapecio isósceles, los ángulos adyacentes a cada base tienen la misma medida.

$2x + 30^\circ = x + 55^\circ \rightarrow x = 25^\circ$

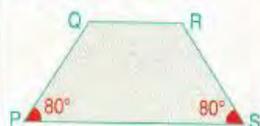
La medida de  $x$  es  $25^\circ$ .



**Comprobación**

$2x + 30^\circ = 2(25^\circ) + 30^\circ = 80^\circ$

$x + 55^\circ = 25^\circ + 55^\circ = 80^\circ$



Nota: Mejía, Valverde, Huaila y Paulino (2017, p. 359)

Las actividades planteadas, bajo el título “Razonamiento y demostración”, piden a los estudiantes aplicar las propiedades de los cuadriláteros para conseguir valores solicitados de igual forma que en el ejemplo dado en el capítulo (ver Figura 23). Se observa que los estudiantes son observadores pasivos y luego deben aplicar técnicas para resolver ejercicios de lo observado en el ejemplo dado por el libro.

Figura 23. Matemática 2: Tarea de aplicación de propiedades de cuadriláteros.

**Razonamiento y demostración**

**Aplica propiedades de los cuadriláteros y calcula el valor de  $x$ .**

**79**

**80**

**81**

**82**

**83**

**84**

**85**

**86**

Nota: Mejía, Valverde, Huaila y Paulino (2017, p. 359)

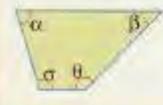
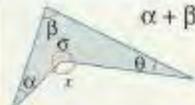
En el libro de tercer año de secundaria (LS3), aparentemente se continúa con la misma estructura general; sin embargo, como se puede observar en la Figura 24, hay diferencias importantes en varios aspectos como la presentación de una nueva definición de cuadriláteros y la utilización del lenguaje y símbolos matemáticos. En este libro, se utiliza menos lenguaje simbólico matemático y más lenguaje cotidiano descriptivo e imágenes con información y algunos símbolos. Adicionalmente, se agrega la clasificación de los cuadriláteros convexos y cóncavos, que no se habían presentado ni en LS1 ni en LS2. Al comparar esta tabla con la

presentada en el LS1, ésta presenta menor dificultad por la simbología y el lenguaje utilizado. Esta presentación podría ser más adecuada para primero de secundaria.

**Figura 24. Matemática 3: Propiedades y clasificación de cuadriláteros.**

### 2.3. Cuadriláteros. Clasificación

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados. Pueden ser cóncavos o convexos.

Cuadrilátero convexo	Cuadrilátero cóncavo
 $\alpha + \beta + \theta + \sigma = 360^\circ$	 $\alpha + \beta + \theta + \sigma = 360^\circ$ $x = \alpha + \beta + \theta$

Los cuadriláteros convexos se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

#### Trapecios: Tienen un par de lados paralelos

 <p><b>Isósceles.</b> Sus lados no paralelos son congruentes.</p>	 <p><b>Rectángulo.</b> Tiene dos ángulos rectos.</p>	 <p><b>Escaleno.</b> No es isósceles ni rectángulo.</p>
--	---	--

#### Paralelogramos: Sus lados opuestos son paralelos y congruentes

 <p><b>Cuadrado.</b> Lados congruentes y ángulos rectos. Diagonales perpendiculares.</p>	 <p><b>Rectángulo.</b> Lados opuestos congruentes y ángulos de <math>90^\circ</math>. Diagonales congruentes.</p>	 <p><b>Rombo.</b> Lados congruentes y ángulos no rectos. Diagonales perpendiculares.</p>	 <p><b>Romboide.</b> Lados opuestos congruentes. Diagonales de distinta medida.</p>
---	--	--	--

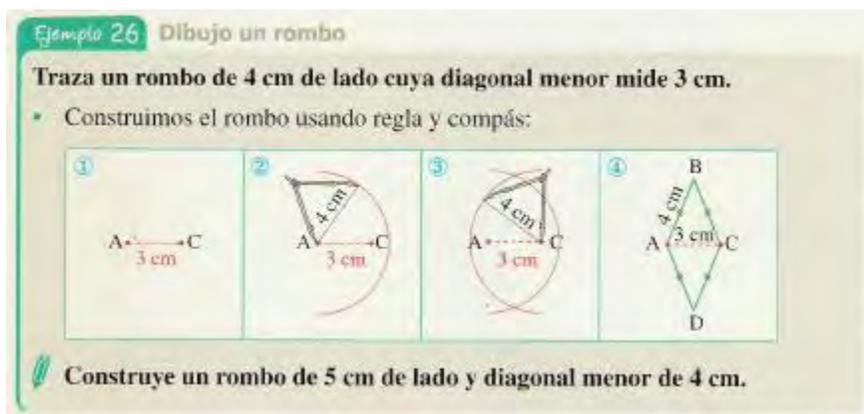
#### Trapezoides: No tienen pares de lados paralelos

		
---	---	---

Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino, Torres y Vargas (2017, p. 336)

De igual forma, se observa otra diferencia en el ejemplo presentado en este libro, que hace referencia a la construcción de un cuadrilátero con regla y compás. Luego, como se puede apreciar en la Figura 25, se le solicita al estudiante que haga una construcción a partir de los datos brindados.

Figura 25. Matemática 3: Ejemplo de construcción de un rombo con regla y compás.

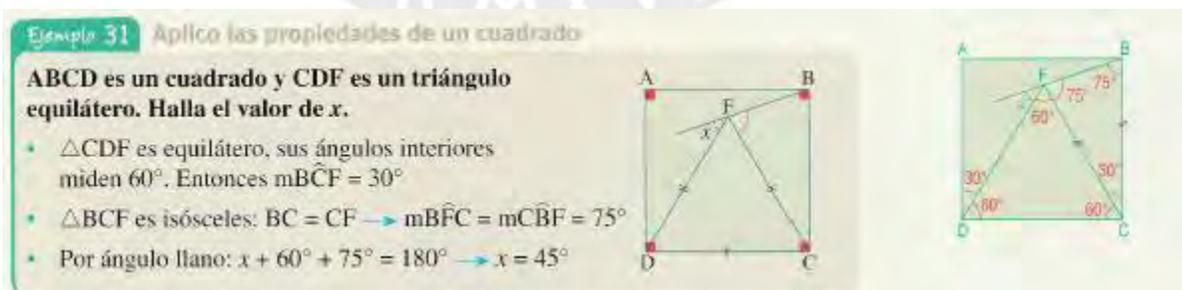


Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino, Torres y Vargas (2017, p. 336)

Luego, se presentan seis ejemplos de problemas resueltos donde nuevamente el estudiante es un observador y, como en los libros anteriores, eventualmente aparecen en el margen derecho algunos personajes con preguntas de reflexión sobre las propiedades de los cuadriláteros. El primer ejemplo tiene tres casos, en los que se identifica el cuadrilátero y se aplica una propiedad del mismo para plantear y resolver ecuaciones algebraicas y, de esta forma, conseguir el valor de  $x$ , que representa un ángulo del cuadrilátero.

En los siguientes ejemplos, se combinan propiedades de triángulos y cuadriláteros para establecer relaciones entre ángulos y lados. Estas relaciones permiten construir ecuaciones y resolver lo que solicita el enunciado. En la Figura 26 se observan dos ejemplos que ilustran el tipo de situaciones planteadas por los autores del libro.

Figura 26. Matemática 3: Ejemplos resueltos sobre propiedades de cuadriláteros.



Nota: Mejía, Valverde, Huaila, Paulino, Torres y Vargas (2017, p. 338)

En términos del ETM, este ejemplo requiere que el estudiante use propiedades de los ángulos de triángulos equiláteros como un artefacto para resolver la tarea planteada. Por ello,

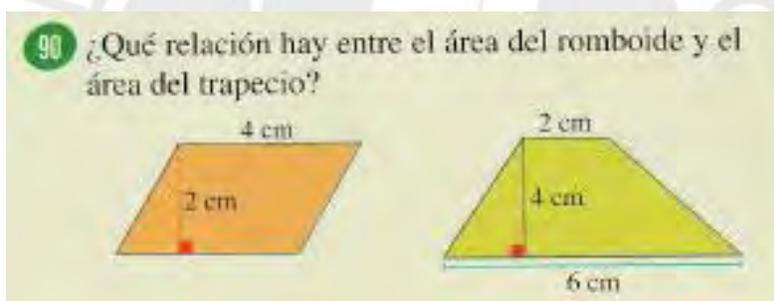
se activa la génesis instrumental y la semiótica para interpretar la representación. En tal sentido, se activa el plano [Sem-Ins].

A pesar de que los textos expresan que la razón de aprender estos conceptos es la resolución de problemas de la vida diaria, en ninguno de estos tres libros se presentan problemas reales o contextualizados para introducir la importancia y relevancia del estudio de cuadriláteros. Se proponen algunas tareas con situaciones que pretenden ser contextualizadas, más suelen ser forzadas para los contextos en los que se utilizan estos libros.

Luego de presentar las definiciones y propiedades de los cuadriláteros de esta forma, los tres libros pasan al tema de áreas, donde en los tres se incluye el área de cuadriláteros.

El ejercicio 90 de LS2 presenta una situación donde los estudiantes deben comparar dos figuras y establecer la relación entre sus áreas. Este ejercicio representa un problema donde los estudiantes deben poner en práctica lo aprendido sobre las propiedades de los cuadriláteros y hacer una fragmentación de los cuadriláteros (ver Figura 27).

**Figura 27.** *Matemática 2: Problema de relación entre áreas de cuadriláteros.*



Nota: Mejía, Valverde, Huaila y Paulino (2017, p. 359)

Se puede observar, en el contenido y organización de los libros de Santillana, que se privilegia resolver los problemas planteados algebraicamente para conseguir una solución que generalmente es un valor numérico. Los estudiantes deben identificar las propiedades de los cuadriláteros como medio para establecer relaciones que permitan construir expresiones algebraicas. En términos del ETM, se encuentran actividades que buscan activar principalmente las génesis semiótica y discursiva. La exploración y manipulación son procesos que no se ven o están escasamente evidenciados en la propuesta de estos libros de texto. Tampoco se observa alguna justificación, contextualización o información histórica sobre los cuadriláteros.

Tomando en cuenta las características de estos libros, la presente investigación plantea una propuesta, tomaremos en cuenta lo planteado en las investigaciones de referencia; la teoría ETM y el marco TPACK; y la relevancia social, científica, educativa e histórica sobre los conocimientos de profesores de matemática para el diseño y planificación de la enseñanza de cuadriláteros con el uso de tecnología digital.

En el siguiente capítulo describiremos los artefactos digitales presentados en la capacitación a través de tareas propuestas como ejemplo para los profesores. En paralelo, presentaremos los resultados y haremos el análisis de los conocimientos tecnológicos de los profesores y su ETM idóneo para facilitar la lectura y comprensión de la investigación realizada. A continuación, presentaremos el experimento y los resultados obtenidos de su aplicación.



### Capítulo III. Experimento y Análisis

La parte experimental de esta investigación comprende la aplicación de una formación docente sobre artefactos digitales para la enseñanza de cuadriláteros en el cual participan profesores de Matemática de secundaria. Durante la formación se utilizaron diferentes instrumentos de recolección de datos. A continuación, se presenta la experimentación y los resultados obtenidos con los profesores que participaron en la formación.

#### 3.1 Características del experimento

En la investigación, participaron sujetos con diferentes roles. En tal sentido, tenemos el rol del profesor en formación continua y el rol del formador-investigador.

- **Profesor en formación continua:** profesores en ejercicio que dictan el curso de Matemática en primero, segundo o tercero de secundaria en instituciones privadas peruanas. Son los participantes en el dispositivo de formación o capacitación sobre enseñanza de cuadriláteros con herramientas digitales como un geoplano digital, Nearpod, Polypad de Mathigon, GeoGebra y Google Classroom.

Los sujetos seleccionados para esta investigación fueron profesores de Matemática que dictaban los tres primeros años de secundaria en instituciones privadas de Lima, Perú. Dichos profesores fueron convocados a través de redes sociales y medios digitales.

El grupo estuvo conformado por tres profesores de colegios privados, de los cuales se seleccionaron dos tomando como criterios para dicha selección el cumplimiento de todas las tareas y la entrega de todos los instrumentos. Estos criterios responden a la necesidad de contar con la información completa para analizarla.

Todas las actividades, contacto, entrevistas y capacitaciones se realizaron bajo la modalidad a distancia utilizando diferentes artefactos digitales, como por ejemplo, Zoom para realizar videollamadas y Google Classroom para compartir y organizar el aprendizaje.

Para proteger la identidad de estos profesores, se asignó un pseudónimo a cada uno de ellos. En adelante, nos referiremos a ellos como profesores Andrés y Sofía.

- **Formador-Investigador:** en este estudio el investigador es también el formador. Como formador, tiene la responsabilidad de dirigir la capacitación y brindar las pautas para el desarrollo de las tareas y actividades de formación en tecnología. Como investigador, debe

diseñar la investigación, instrumentos, recursos y actividades de la capacitación. También analiza los resultados obtenidos.

La capacitación se realizó de forma virtual a través de videoconferencias de Zoom y se realizó el intercambio de documentos, tareas y enlaces a través de Google Classroom. La Tabla 8 muestra las técnicas, los instrumentos, los medios y las actividades para la recolección de datos. Estos instrumentos fueron principalmente utilizados para cumplir el primer y segundo objetivo específico de esta investigación, es decir, para tener la información necesaria que permita identificar los conocimientos tecnológicos que poseen los profesores y las génesis y planos que privilegian estos profesores al enseñar cuadriláteros.

**Tabla 8**

*Técnicas e instrumentos de recolección de datos*

<b>Técnica</b>	<b>Instrumento</b>	<b>Medio</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Aplicación</b>
Encuesta	Cuestionario	Google Forms	Identificar los conocimientos tecnológicos y tecnológicos del contenido de los profesores	Antes de la capacitación
Revisión documental	Matriz de registro	Planificación de sesión	Determinar en el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor en ejercicio las génesis y los planos que busca activar al enseñar cuadriláteros.	Antes de la capacitación
Revisión documental	Matriz de registro	Planificación de sesión	Determinar en el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor en ejercicio las génesis y los planos que busca activar al enseñar cuadriláteros.	Después de la capacitación
Encuesta	Cuestionario	Google Forms	Identificar los conocimientos tecnológicos pedagógicos del contenido de los profesores	Después de la capacitación
Entrevista	Guía de entrevista semiestructurada	Videollamada por Zoom grabada	Aclarar o profundizar aspectos sobre las razones de las elecciones y decisiones tomadas por el profesor	Después de la capacitación

Nota: basado en Useche et al. (2019)

Al comenzar la formación, se presentó una encuesta para conocer los conocimientos tecnológicos, la percepción y actitud de los profesores con respecto a la tecnología en la enseñanza de matemática y la interrelación con su práctica docente.

A continuación, presentaremos las preguntas del cuestionario inicial y su objetivo para esta investigación (ver Tabla 9). Los profesores eligen la opción que mejor los describe según el grado de acuerdo con la frase que se presenta (ver Anexo 6).

**Tabla 9**

*Preguntas y objetivos del cuestionario inicial*

No.	Pregunta	Criterio/ Indicador	Objetivo
CI1	Sé resolver mis problemas técnicos.	Elegir tecnologías apropiadas de acuerdo con la situación.	Identificar Conocimientos Tecnológicos del profesor TK
CI2	Asimilo conocimientos tecnológicos fácilmente.		
CI3	Me mantengo al día de las nuevas tecnologías importantes.	Utilizar nuevas tecnologías en desarrollo.	
CI4	Conozco muchas tecnologías diferentes.		
CI5	Sé seleccionar tecnologías adecuadas para diferentes metodologías de enseñanza para una lección.	Planificar cómo usar una tecnología con fines educativos.	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del profesor TPK
CI6	Sé seleccionar tecnologías que mejoran el aprendizaje de los estudiantes en una lección.	Proporcionar a los estudiantes entornos que contribuyan a sus conocimientos y habilidades.	
CI7	Puedo predecir cómo la tecnología afecta el proceso de aprendizaje de mis estudiantes.	Predecir cómo la tecnología puede afectar el proceso de aprendizaje-instrucción	
CI8	Adopto un pensamiento crítico sobre la forma de utilizar la tecnología en el aula.	Utilizar varios métodos y enfoques durante la instrucción en línea.	
CI9	Puedo adaptar el uso de las tecnologías sobre las cuales estoy aprendiendo a diferentes actividades docentes	Promover el aprendizaje en línea entre los estudiantes	
CI10	Puedo usar diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas sobre cuadriláteros.	Usar software para resolver problemas sobre cuadriláteros.	Identificar Conocimientos Tecnológicos del Contenido TCK

No.	Pregunta	Criterio/ Indicador	Objetivo
CI11	Conozco tecnologías que puedo usar para comprender y elaborar material con contenidos sobre cuadriláteros.	Utilizar o realizar presentaciones, multimedia, animaciones, dibujos y gráficos sobre cuadriláteros.	del profesor
CI12	Sé seleccionar tecnologías para usar en el aula que mejoran los contenidos sobre cuadriláteros que imparto, la forma de impartirlos y lo que aprenden los estudiantes.	Tener en cuenta los contenidos de cuadriláteros, las estrategias de aprendizaje-enseñanza y las nuevas tecnologías relevantes durante la planificación de las lecciones.	Identificar TPACK Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor
CI13	Puedo impartir lecciones que combinan adecuadamente cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza.	Utilizar la tecnología para reforzar las habilidades, la comprensión y las predicciones de los estudiantes sobre cuadriláteros.  Integrar la tecnología con las clases sobre cuadriláteros de manera adecuada y efectiva para hacerlas más fáciles y comprensibles.	
CI14	Sé usar e incluir, en mis materiales docentes para el aula, estrategias que combinan contenidos sobre cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza sobre los cuales he aprendido.	Utilizar la tecnología para proporcionar ejemplos efectivos en paralelo con el libro de texto sobre cuadriláteros.	
CI15	Puedo guiar y ayudar a otros profesores a coordinar el uso de contenidos sobre cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza en mi centro educativo.	Satisfacer los requisitos de los estudiantes durante la instrucción en línea sobre cuadriláteros	
CI16	He reflexionado sobre la forma en que la tecnología puede influir en la metodología de enseñanza que empleo en el aula para enseñar cuadriláteros.	Explicar las ventajas de utilizar la tecnología en la enseñanza de cuadriláteros.	

Nota: basado en Useche et al. (2019)

El cuestionario contempla preguntas para identificar conocimientos relacionados únicamente con tecnología. La Tabla 10 muestra la cantidad de preguntas correspondiente a cada conocimiento.

**Tabla 10**

*Cantidad de preguntas por Componente del Conocimiento del profesor*

<b>Componente del conocimiento del profesor</b>	<b>Cantidad de preguntas</b>
Tecnológico	4
Tecnológicos Pedagógicos	5
Tecnológicos del Contenido	2
Tecnológicos Pedagógicos del Contenido	5

El cuestionario final busca identificar los conocimientos tecnológicos pedagógicas del contenido que han adquirido los profesores, si los usarán al planificar nuevas sesiones de clases sobre cuadriláteros y cómo piensan que lo harán.

Estos instrumentos brindan datos para identificar los nuevos conocimientos tecnológicos y las génesis y planos que busca favorecer el profesor después de haber recibido la capacitación. La Tabla 11 muestra las preguntas del cuestionario final y los objetivos de cada una para esta investigación.

**Tabla 11**

*Preguntas y objetivos del cuestionario final*

<b>No.</b>	<b>Pregunta</b>	<b>Objetivo</b>
CF1	Complete el siguiente cuadro sobre los artefactos digitales presentados en este taller (ver Anexo 7). a. ¿Usaré este artefacto digital para enseñar cuadriláteros' (SÍ o NO) b. En caso de afirmativo, ¿Cómo planeo usarlo? ¿Qué desempeño u objetivo? c. Beneficio o desventaja con respecto a opciones sin tecnología	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor
CF2	Me interesa continuar aprendiendo sobre estos y otros artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor
CF3	Ahora tengo más conocimientos útiles sobre artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor
CF4	Usaré los artefactos digitales vistos en este taller en mis sesiones sobre cuadriláteros.	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor
CF5	Conocer más sobre tecnología me permite integrar tecnología, estrategias de enseñanza y conocimientos	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos

	sobre cuadriláteros en la planificación de la enseñanza	del Contenido del profesor
CF6	Mis conocimientos sobre tecnología afectan la forma en la que planifico las sesiones de clases sobre cuadriláteros	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor
CF7	Mis conocimientos sobre tecnología afectan el aprendizaje sobre cuadriláteros de mis estudiantes	Identificar Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor

Las preguntas de este cuestionario buscan que los profesores reflexionen y describan cómo incluir tecnología para la enseñanza de cuadriláteros en su práctica docente. Todas pertenecen al componente de Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos de Contenido.

Como cierre de la formación, los profesores modificaron su planificación de una sesión para enseñar cuadriláteros que compartieron antes de la capacitación recibida. Dicha planificación se recoge en Google Classroom y se utilizó en la fase de análisis de resultados para determinar las génesis y planos que el profesor busca activar mediante el uso de tecnología.

También fue necesario realizar una entrevista personal semiestructurada con los profesores para aclarar aspectos sobre sus intenciones, percepciones y cambios de puntos de vista observados en sus respuestas o planificaciones con respecto al uso de la tecnología para la enseñanza de cuadriláteros.

Para identificar la interacción de los conocimientos tecnológicos con el ETM idóneo, se establecieron tres categorías: baja, media y alta.

Se considera que hay **Interacción baja** cuando, a pesar de que los profesores manifiestan tener conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido (TK, TPK, TCK, TPACK), no se incluyen artefactos digitales ni se realizan cambios para incluirlos en el ETM idóneo para la enseñanza de cuadriláteros.

Consideramos que hay **Interacción media** cuando los profesores utilizan los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido (TK, TPK, TCK, TPACK) para incluir artefactos digitales o realizar modificaciones en el ETM idóneo en la enseñanza de cuadriláteros. Los artefactos digitales se incluyen por momentos para actividades de provocación o cierre, pero no para que los estudiantes aprendan nuevos conceptos.

Consideramos que hay **Interacción alta** cuando los profesores utilizan los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido (TK, TPK, TCK, TPACK) para modificar su ETM idóneo y generar circulación en el ETM para la enseñanza de cuadriláteros.

### **3.2 Tareas y resultados**

El propósito de la capacitación es que los participantes adquieran conocimientos tecnológicos relacionados con el contenido de cuadriláteros. El diseño incluyó la enseñanza de los componentes en TPK, TCK y TPACK con diferentes tareas.

Las tareas seleccionadas son ejemplos, para los profesores que participan en la formación, de tareas que buscan activar las génesis y planos verticales para potencialmente generar un trabajo matemático completo en sus estudiantes, según lo definido por Kuzniak et al. (2016), porque se articulan las génesis y planos verticales creando una relación entre los planos epistemológico y cognitivo.

Estas tareas que se proponen a los profesores están basadas en el estudio de los cuadriláteros, sus propiedades, identificación y clasificación; el origen, la utilidad inicial y la actual de los cuadriláteros a través de animaciones y juegos con diferentes artefactos digitales. Al finalizar cada tarea, se realizó un análisis del nivel de integración de la tecnología utilizado y cómo se podría llevar a niveles superiores a través de preguntas de reflexión.

La formación sobre artefactos digitales para la enseñanza de cuadriláteros constó de dos sesiones de dos horas cada una con cuatro tareas. Las tareas y estrategias se centran en el desarrollo de habilidades tecnológicas del contenido, es decir, conocimientos y habilidades sobre tecnología para la enseñanza de cuadriláteros.

Cada tarea permite reflexionar, a través de preguntas, sobre los niveles de integración de tecnología planteados por el TPACK: Reconocimiento, Aceptación, Adaptación, Exploración y Avance. Las preguntas guían al profesor para adquirir conocimientos tecnológicos pedagógicos del contenido e integrar la tecnología en la enseñanza (ver Tabla 12). Las tareas están diseñadas para guiar progresivamente a los profesores a través de los niveles de integración de tecnología desde el Reconocimiento hasta la Exploración. La combinación de las preguntas de cada tarea y el avance progresivo entre tareas generan el espiral de integración de la tecnología propuesto por Bueno et al. (2021).

**Tabla 12***Preguntas por niveles de integración de tecnología*

<b>Nivel de Integración</b>	<b>Pregunta</b>	<b>Respuesta esperada</b>
Reconocimiento	¿Qué recurso se puede usar para resolver esta tarea?	Se espera que los profesores identifiquen recursos físicos para la enseñanza y reconozcan que algún recurso tecnológico puede usarse para enseñar.
Aceptación	¿Se puede usar un recurso tecnológico para resolver esta tarea?	Se espera que los profesores acepten las ventajas de usar un Geoplano digital para resolver la tarea.
Adaptación	¿Cómo puede usar un profesor este recurso tecnológico para enseñar?	Los profesores describen cómo demostrarían la resolución de la tarea a sus estudiantes modelando y mostrando el procedimiento.
Exploración	¿Cómo pueden usar los estudiantes este recurso tecnológico para resolver la tarea?	Los profesores expresan que los estudiantes pueden usar el artefacto digital para explorar y resolver la tarea por ellos mismos. Esta exploración generaría la activación de planos verticales.
Avance	¿Cómo pueden usar los estudiantes este recurso tecnológico para aprender?	Los profesores proponen estrategias para que los estudiantes evalúen su trabajo, reflexionen y aprendan sobre cuadriláteros usando artefactos digitales.

Nota: Adaptado de Bueno et al. (2021)

Al finalizar cada tarea, se hace referencia a las competencias matemáticas que los artefactos digitales pueden favorecer y se pide a los docentes que reflexionen sobre cómo podría beneficiar o perjudicar su uso en su aula de clase. La Tabla 13 muestra la secuencia de tareas y estrategias planificadas y su objetivo para esta investigación en función del conocimiento que desarrolla el profesor.

**Tabla 13**

*Tareas de la capacitación “Enseñanza de Cuadriláteros con Tecnología”*

Tareas y Estrategias	Materiales, artefactos digitales y recursos	Sesión y Tiempo planificado
Bienvenida. Se presenta el plan de trabajo y los artefactos digitales seleccionados para enseñar cuadriláteros: Google Classroom, geoplano digital Geoboard, pizarra de manipulables Polypad de Mathigon, Nearpod, GeoGebra Classroom, GeoGebra Clásico en línea		Sesión 1 10 min.
Cuestionario inicial. Los participantes completan un cuestionario sobre sus conocimientos.	Google Forms	Sesión 1 15 min.
<p><b>Tarea 1.</b> Se cuenta la historia de cómo los tensores de cuerdas egipcios y cómo medían los linderos cada vez que el Nilo se desbordaba y luego bajaba su nivel. Se muestra un video con información de los tensores de cuerdas egipcios.</p> <p>Se cuenta la historia contada por Proclus sobre los terratenientes que cambiaban las medidas de los lados de sus terrenos para tener más área con igual o menos perímetro. Se pregunta: ¿Los estudiantes entenderían la historia sin usar algún recurso para experimentar o visualizar?</p> <p>Se presenta un geoplano virtual para que los participantes representen la situación de Proclus.</p>	Video Geoboard	Sesión 1 15 min.
Se muestra la pizarra virtual de manipulativos Polypad. Se representa la situación de áreas y perímetros de Proclus. Se muestran las funciones de la pizarra y se pregunta: ¿Para qué podría servir esta herramienta en la enseñanza de cuadriláteros?	Polypad	Sesión 1 10 min.
<p>Se pregunta: ¿Cómo podemos verificar si nuestros estudiantes están entendiendo los videos o presentaciones que les compartimos durante las sesiones de clase?</p> <p>Se presenta la herramienta Nearpod: Inicio de sesión, hacer un video interactivo con preguntas, agregar simuladores PHET para área de cuadriláteros, buscar recursos en la librería, usar tableros colaborativos para interactuar.</p>	Nearpod	Sesión 1 30 min.
<b>Tarea 2.</b> Expresar el área de un trapecio isósceles a partir de un rectángulo. Los participantes usan herramientas de corte, rotación y arrastre para reconfigurar figuras y expresar el área de figuras a partir de otras.	Polypad	Sesión 1 30 min.
Los participantes escriben en el tablero colaborativo de Nearpod su opinión y reflexión individual sobre posibilidades de exploración de cuadriláteros con estudiantes en clases.	Tablero colaborativo de Nearpod	Sesión 1 10 min.
<p><b>Tarea 3.</b> Se muestra una lección de GeoGebra Classroom sobre cuadriláteros con actividades para identificar cuadriláteros según sus propiedades. Los participantes manipulan los puntos de los vértices de un</p>	Actividad de GeoGebra en lección de GeoGebra	Sesión 2 15 min.

Tareas y Estrategias	Materiales, artefactos digitales y recursos	Sesión y Tiempo planificado
cuadrilátero para identificar diferentes cuadriláteros. Se muestran tarjetas con características de cuadriláteros para que los participantes formen el/los cuadriláteros que cumplen con las condiciones de la tarjeta. Se muestra la vista del profesor de GeoGebra Classroom.	Classroom	
<b>Tarea 4.</b> Introducción a GeoGebra en línea con ejemplos de construcción de cuadriláteros. Construcción de cuadriláteros con GeoGebra en línea. Construir un paralelogramo Construir un rombo Construir un trapecio isósceles Creación de una actividad y una lección en GeoGebra Classroom	-GeoGebra en línea -GeoGebra Classroom	Sesión 2 30 min.
Preguntas y reflexión de profesores sobre aspectos pedagógicos y técnicos del uso de tecnología		Sesión 2 15 min.
Modificación de sesión de clases. Tomar la sesión planificada inicialmente y modificarla o mantenerla igual de acuerdo con su percepción	Google Classroom	Sesión 2 15 min.
Cuestionario final	Google Classroom	Sesión 2 10 min.

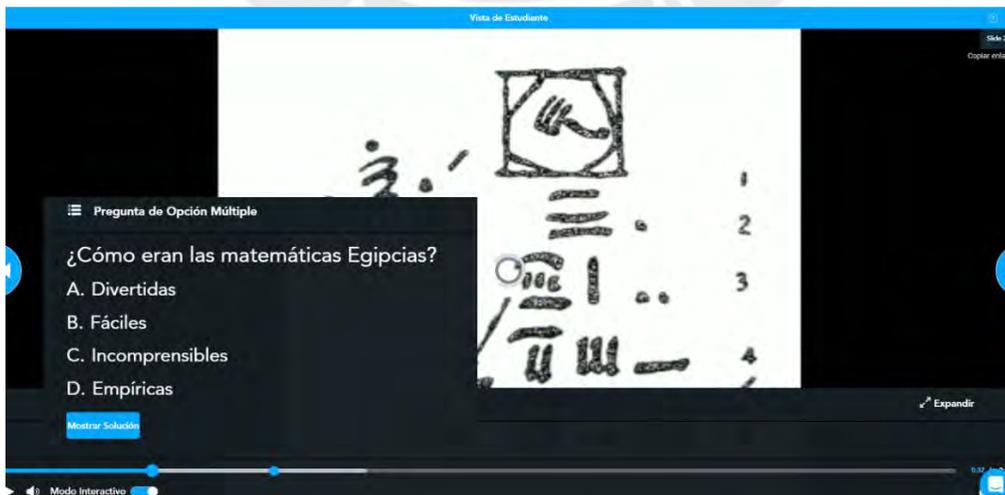
Las tareas de este dispositivo de formación buscan desarrollar conocimientos tecnológicos y dar seguridad a los profesores para su uso en sus sesiones de clase, es decir, que muestren un mayor TPACK de profesores de Matemática que les permita integrar tecnología en su ETM idóneo representado, en este caso, en las planificaciones de las sesiones de clase sobre cuadriláteros. De igual forma, el considerar el uso de tecnología con artefactos digitales como GeoGebra, implica que los profesores reconocen el beneficio de la exploración y la visualización, ya que posteriormente permiten la demostración y generación de pruebas a través de teoremas. En otras palabras, éste favorece que el profesor planifique sesiones que busquen la activación de los tres planos verticales que llevan a un ETM completo.

Las tareas propuestas buscan modelar cómo el profesor puede enseñar cuadriláteros haciendo uso de la historia y de artefactos digitales que permiten visualizar y manipular representaciones de los cuadriláteros, es decir, que promueven la activación de las génesis semiótica, discursiva e instrumental y los planos [Sem-Dis] y [Sem-Ins]. La Tabla 14 muestra la finalidad de cada tarea de la formación docente.

**Tabla 14***Tareas de la Formación de Profesores*

	<b>Tarea</b>		<b>Finalidad</b>
T1	Tensores de Cuerdas	de	Representar gráficamente la relación entre el área y perímetro de cuadriláteros con ángulos de $90^\circ$
T2	Área de trapecio	un	Representar gráficamente un trapecio para encontrar la expresión algebraica de su área.
T3	Propiedades de cuadriláteros	de	Representar cuadriláteros gráficamente a partir de sus definiciones y propiedades.
T4	Construcción con propiedades		Construir las representaciones gráficas de cuadriláteros a partir de sus definiciones y propiedades.

Se presentó el artefacto digital Nearpod, el cual brinda un entorno de participación activa y que dentro de sus funciones permite incrustar preguntas en videos, trabajar y explorar con simuladores de área de cuadriláteros y resolver ejercicios con retroalimentación instantánea por parte del profesor (ver Figura 28). Se presenta un video en el cual se agregan preguntas para que los estudiantes respondan y reflexionen durante el video. La tarea puede variar dependiendo del tipo de preguntas que seleccionen los profesores. En el caso de lo propuesto durante la tarea, se utiliza un nivel de integración de la tecnología de reconocimiento para iniciar a los profesores en la aceptación de la tecnología para la enseñanza de cuadriláteros. Las preguntas activan la génesis semiótica y discursiva.

**Figura 28. Actividad de video interactivo con Nearpod**

Los siguientes artefactos digitales presentados brindan a los profesores experiencias de construcción y exploración como las que tendrían sus estudiantes con el uso de un geoplano digital y una pizarra de manipulables llamada Polypad de Mathigon. Adicionalmente, se realizan reflexiones pedagógicas que lleven al profesor a pensar cómo aplicar estos conocimientos tecnológicos y el nivel de integración de tecnología que podrían adoptar para la enseñanza de cuadriláteros.

Usando la historia de Proclus presentada anteriormente en el capítulo II sobre los cuadriláteros, se hacen preguntas que buscan que los profesores reflexionen sobre su nivel de integración de tecnología para enseñar cuadriláteros. Se presentó la **primera tarea** contando la historia con imágenes y textos (ver Figura 29).

**Figura 29. Historia de Proclus de isoperimetría y área de cuadriláteros**

En el antiguo Egipto, muchas personas dependían de la agricultura. Las tierras más fértiles y deseadas se encontraban a orillas del río Nilo. Este río se desbordaba todos los años borrando los linderos entre las parcelas de los terratenientes. Los antiguos egipcios desarrollaron la geometría para resolver problemas reales como este.



Los tensores de cuerdas eran los encargados de marcar las tierras después del desbordamiento anual a través de la utilización de cuerdas, estacas e instrumentos de medición para construir cuadriláteros a través de triángulos rectángulos con los números sagrados 3, 4 y 5. Los impuestos que se pagaban al faraón por dichas tierras se calculaban en base al perímetro del cada terreno.



Proclus relata que los participantes en la división de tierras a veces confundían a sus compañeros en la distribución de las tierras a través del uso a su conveniencia de la medida del lado más largo de bordes limítrofes entre terrenos.

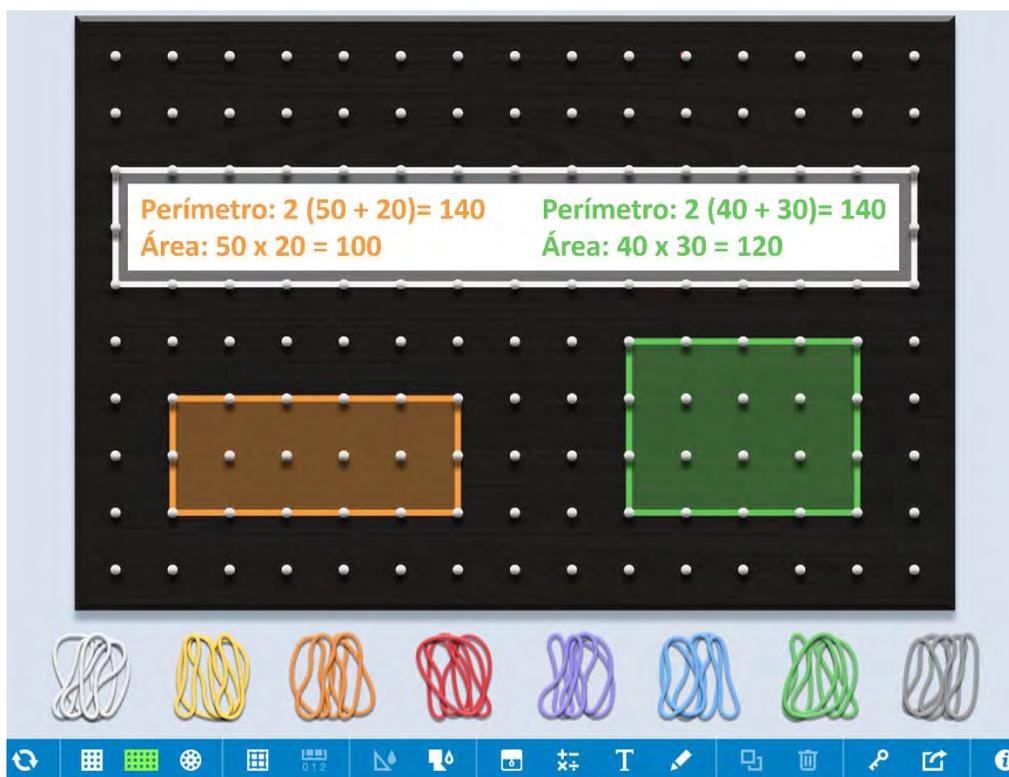
Habiendo adquirido un terreno con más periferia o distancia con sus vecinos laterales (de forma rectangular), después lo intercambiaban por tierras con menor límite (acercándose a un cuadrado) y así obtenían más terreno que sus vecinos.

Además, al hacer esto, ganaban una reputación de tener gran honestidad.

Se propone a los profesores que construyan, con el geoplano digital, dos cuadriláteros con ángulos rectos que representen los terrenos que los tensores de cuerdas delimitarían en

esta situación. Esta historia permite trabajar la relación entre área y perímetro de rectángulos y cuadrados al determinar las razones por las cuales algunos terratenientes cambiaban las medidas de los lados de sus terrenos manteniendo el mismo perímetro, pero aumentando su área. Se espera que los profesores ejemplifiquen y expliquen por qué los terratenientes cambiaban las medidas de los lados de sus terrenos. La Figura 30 muestra una posible respuesta esperada de los profesores.

**Figura 30.** Historia de Proclus representada en Geoboard



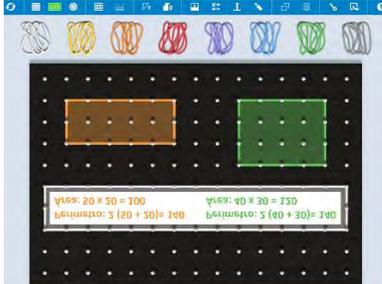
El rectángulo anaranjado de la figura anterior representa el terreno original antes de la subida del Nilo de uno de los terratenientes de la historia de Proclus. El cuadrilátero verde es el cuadrilátero que el terrateniente consigue después de la subida del Nilo, al cambiar las medidas de los lados de su terreno y pedir a los tensores de cuerdas un terreno con el mismo perímetro del suyo original.

Esta tarea promueve la activación de la génesis semiótica cuando los participantes representan gráficamente los terrenos como cuadrados o rectángulos. También se espera la

activación de la génesis instrumental con el uso del geoplano como artefacto para representar los cuadriláteros. La activación de estas dos génesis genera la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Por otro lado, se espera la activación de la génesis discursiva al explicar la razón del engaño de los terratenientes usando el referencial de áreas y perímetros de los profesores (ver Tabla 15).

**Tabla 15**

*Geoboard: Área y perímetro de rectángulos*

Tarea	Descripción	Génesis y Planos que busca activar
	Representar los cuadriláteros descritos en la tarea como una representación figural.	Génesis semiótica
	Construcción de cuadriláteros con el geoplano digital según las medidas de los lados dadas.	Génesis instrumental
	Identificar el área y perímetro de los cuadriláteros. Explicación de la relación entre área y perímetro usando propiedades de cuadriláteros.	Génesis discursiva
	Construcción de cuadriláteros con el geoplano digital según las medidas de los lados dadas	Plano [Sem-Ins]
	Usar las propiedades de los cuadriláteros descritos para explicar su representación.	Plano [Sem-Dis]
	Usar el geoplano para calcular áreas y perímetros buscando una relación entre ellos.	Plano [Ins-Dis]

Los profesores participantes Andrés y Sofía escucharon la historia y comentaron al respecto. La profesora Sofía comentó: “Esta historia se puede usar de introducción con los estudiantes y que aprendan de la historia”. Al realizar esta tarea el profesor Andrés comentó: “No conocía esta herramienta en forma digital. Pensaba que era más para pequeños... en concreto.” Este comentario muestra la percepción del profesor sobre el uso del geoplano físico como algo para estudiantes de primaria, mas no tanto para secundaria; sin embargo, al ser un artefacto digital, es percibido como útil y aceptable también para estudiantes de secundaria. De hecho, este profesor incluye este artefacto digital en la modificación que hace a su planificación.

El uso del artefacto digital en esta tarea corresponde principalmente a las etapas de Reconocimiento y Aceptación porque se transforma una tarea que se realiza con recursos físicos al medio digital, sin que represente un cambio en la metodología o el uso, pero con ventajas en la actitud de los participantes y cierta simplificación del uso del recurso.

Al comparar las planificaciones iniciales con las planificaciones modificadas después del taller (ver Anexo 5), se evidencia que el profesor Andrés incluye la utilización del geoplano digital en el inicio de su clase sobre cuadriláteros. Ambos profesores manifestaron que usarían este artefacto digital para enseñar cuadriláteros por ser “más atractivo y lúdico”, tal como lo expresó la profesora Sofía en el cuestionario final (ver Anexo 7), para graficar e identificar cuadriláteros y sus propiedades. Sin embargo, la profesora Sofía no lo incluye al modificar su planificación.

En referencia al geoplano digital, se evidencia una interrelación alta entre los conocimientos y el ETM idóneo del profesor Andrés, ya que realiza una modificación en su planificación incluyendo el artefacto en una tarea de exploración de las propiedades de los cuadriláteros y también en otra introductoria dentro de su planificación. En el caso de la profesora Sofía, se demuestra baja interacción entre los conocimientos tecnológicos y el ETM idóneo, ya que manifiesta su interés y posible uso del artefacto digital para la enseñanza, pero no lo demuestra al planificar la enseñanza de cuadriláteros.

El siguiente artefacto digital presentado a los profesores para la **segunda tarea** fue la pizarra de manipulables Polypad de Mathigon. Para ello, se propuso una tarea a los profesores sobre el área de un trapecio isósceles (con lados no paralelos congruentes) en la cual, a través del recorte, arrastre y giro de figuras, se construye la expresión algebraica para encontrar el

área del trapecio. Esta tarea llevó a los profesores a los niveles de adaptación y exploración mediante preguntas que los hicieron reflexionar.

En la segunda tarea se pregunta a los profesores: “¿Cómo se puede encontrar una expresión algebraica que permita hallar el área de un trapecio?”. Se espera que los profesores, haciendo el papel de sus estudiantes, reconozcan el trapecio de acuerdo con sus propiedades y utilicen las herramientas del artefacto digital para pegarlo en la pizarra. Luego, mediante la descomposición y composición de figuras, hagan cortes al trapecio y roten y arrastren el triángulo generado para formar un rectángulo. A partir de ello, usando la fórmula del área de un rectángulo de su referencial, se espera que construyan, con apoyo de la visualización, la expresión algebraica del área del trapecio.

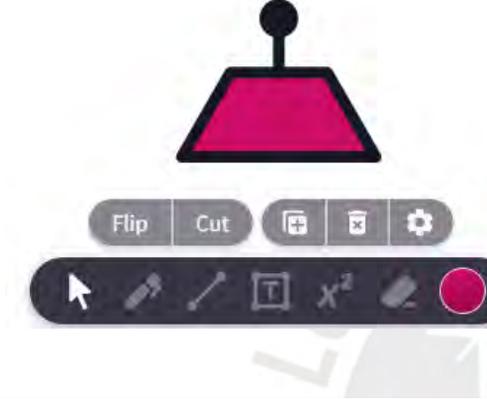
En términos del ETM, se activa la génesis semiótica al identificar y representar el trapecio isósceles, haciendo uso de sus propiedades. Luego, al manipular la figura con las funciones de corte, arrastre, giro y rotación, se activa la génesis instrumental mediante el uso de las herramientas del artefacto digital. También se activa la génesis instrumental al usar la fórmula del área de un rectángulo como un artefacto simbólico.

Finalmente, al construir la expresión algebraica del área del trapecio y explicar su origen, se espera la activación de la génesis discursiva. En este sentido, se espera la activación de los planos verticales [Ins-Dis], [Sem-Dis] y [Sem-Ins]. Al hacer el proceso de construcción de la fórmula para el área del trapecio isósceles con las propiedades de trapecios y rectángulos y la visualización del trapecio en la pizarra, se espera que se privilegie el paradigma GII al establecer pruebas usando las propiedades de ambos cuadriláteros.

El proceso de resolución de esta tarea conlleva un proceso que se puede realizar con las herramientas disponibles en este artefacto digital presentado a los profesores (ver Tabla 16). Se presenta la tarea para que los profesores la realicen y resuelvan poniéndose en el lugar de sus estudiantes.

**Tabla 16**

*Polypad: Área de un trapecio isósceles*

Tarea	Descripción	Génesis y Planos que busca activar
	<p>Identificar y seleccionar el trapecio isósceles entre los polígonos presentes en Polypad.</p>	<p>La génesis semiótica al identificar la representación de un trapecio isósceles.</p>
	<p>Polypad permite cortar, voltear horizontalmente, girar y arrastrar cualquier polígono. También se puede cambiar el color de las figuras. Polypad no permite modificar el tamaño (longitud de sus lados) de los polígonos, lo cual evita errores al manipular las figuras.</p>	<p>Génesis instrumental mediante el uso de un artefacto digital que es usado con un propósito y conocimientos sobre cuadriláteros. Con el uso del artefacto y, luego, la selección de herramientas es posible evidenciar apropiación y selección.</p>
	<p>Cortar el trapecio isósceles para obtener un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo.</p>	<p>Génesis instrumental</p>
	<p>Seleccionar el triángulo y hacer predicciones sobre la posibilidad de formar un rectángulo reordenando las figuras.</p>	<p>Génesis instrumental y génesis discursiva. Plano [Ins-Dis]. Génesis semiótica al representar los cuadriláteros y visualizar un rectángulo.</p>

Tarea	Descripción	Génesis y Planos que busca activar
	<p>Voltear horizontalmente el triángulo cortado del trapecio (reflexión).</p>	<p>Génesis instrumental al usar las herramientas del artefacto digital para realizar las acciones que permiten recomponer el trapecio como un rectángulo.</p>
	<p>Rotar el triángulo cortado (rotación). Se podría identificar un paralelogramo si se traslada el triángulo.</p>	<p>Génesis instrumental y génesis semiótica. Plano [Sem-Ins].</p>
	<p>Arrastrar el triángulo hacia el otro lado del trapecio para formar un rectángulo (traslación).  Determinar la expresión algebraica para el cálculo del área del trapecio a partir de los lados del rectángulo formado.</p>	<p>Génesis instrumental y génesis semiótica. Plano [Sem-Ins].  Génesis instrumental y génesis discursiva. Plano [Ins-Dis].  Génesis discursiva y génesis semiótica. Plano [Sem-Dis].</p>

Después de terminar la tarea, se pregunta a los profesores cómo apoyaría este artefacto digital en la enseñanza de cuadriláteros para que sus estudiantes comprendan cómo calcular el área de otros cuadriláteros como el paralelogramo.

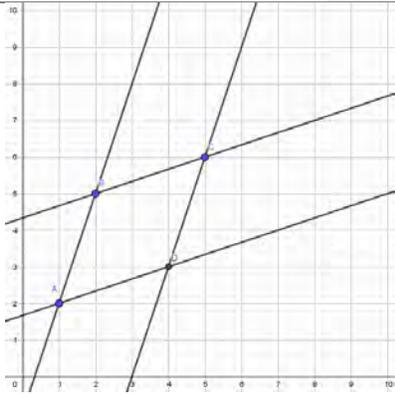
Ambos profesores expresaron que usarían este artefacto digital para la enseñanza de cuadriláteros en el cuestionario final; sin embargo, ninguno de ellos lo incluyó al modificar sus planificaciones. En tal sentido, en el caso de este artefacto digital, se observa una baja interacción entre los nuevos conocimientos tecnológicos y el ETM idóneo de los profesores. La profesora Sofía expresa que podría usar el artefacto digital para que sus estudiantes identifiquen los tipos de cuadriláteros, pero no incluye una tarea de este tipo en su plan de sesión.

En la segunda sesión de la capacitación, se completaron las tareas tres y cuatro. Los profesores participaron identificando cuadriláteros según sus propiedades con lecciones de GeoGebra para la **tercera tarea**. Esta tarea no se analiza en la presente investigación por la extensión y tiempo requeridos para ello.

Luego, se modeló la construcción de cuadriláteros a partir de la definición y propiedades de cuadriláteros en GeoGebra en línea. Los profesores vivieron la experiencia de resolver la **cuarta tarea** como lo harían sus estudiantes en el caso de la construcción de los cuadriláteros. Igualmente, se discutió, a través de preguntas, el nivel de integración de la tecnología y la utilidad de los artefactos digitales para la enseñanza de cuadriláteros. Se mostró a los profesores cómo construir una tarea de este tipo en GeoGebra y se preguntó si la aplicarían con sus estudiantes, por qué y cómo lo harían.

La Tabla 17 describe el proceso esperado, las génesis y planos que se buscaría que los estudiantes activen en cada paso. Se puede observar que, al representar los cuadriláteros gráficamente, a partir del lenguaje verbal de sus propiedades, se activa la génesis semiótica al usar las propiedades de los paralelogramos para construir el paralelogramo e identificar los vértices se activa la génesis discursiva y, al usar GeoGebra para construir y verificar la solución dada, se activa la génesis instrumental. Esto permite la activación de los tres planos verticales.

**Tabla 17** *GeoGebra: Construcción esperada de un paralelogramo*

Tareas	Descripción	Génesis y Planos
	<p>Para trazar dos pares de rectas paralelas, primero, usar la herramienta “Punto” para trazar tres puntos cualesquiera. Luego, usar la herramienta “Recta” para trazar dos rectas de modo que cada una pase por dos de los puntos anteriores. Trazar dos rectas paralelas a las anteriores con la herramienta “Paralela”. Seleccionar una recta y el punto que no pertenece a ella. Usar la herramienta “Intersección” para marcar el</p>	<p>Se busca activar la génesis instrumental y discursiva (plano [Ins-Dis]) al usar propiedades de paralelismo de lados y congruencia de lados mediante el uso de funciones de GeoGebra para construir un paralelogramo.</p>

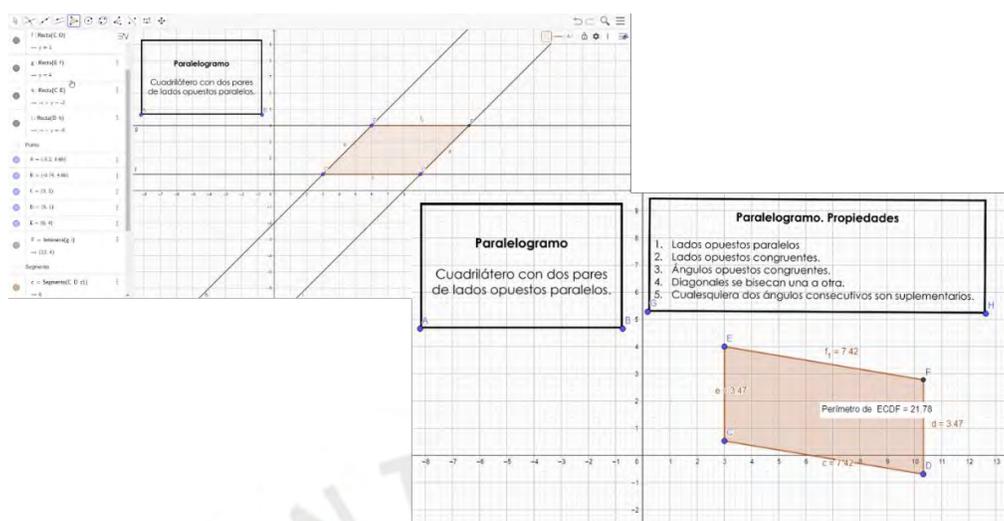
Tareas	Descripción	Génesis y Planos
	<p>punto de intersección entre las dos últimas rectas construidas.</p> <p>Usar la herramienta “Polígono” para construir el paralelogramo. Identificar los puntos de intersección de las rectas como los vértices del paralelogramo.</p>	<p>Al reconocer los puntos de intersección entre las rectas paralelas como los vértices del paralelogramo y usar la herramienta “Polígono” para trazarlo, se activa el plano [Sem-Dis] y [Sem-Ins] respectivamente.</p>
	<p>Mover y arrastrar los puntos</p> <p>Identificar y explicar las propiedades de los paralelogramos y por qué el método de construcción es adecuado o no.</p>	<p>Se busca activar el plano [Sem-Ins] porque se presentan diferentes representaciones de paralelogramos.</p> <p>Al identificar que las propiedades se mantienen debido al método de construcción utilizado, se activa la génesis discursiva y semiótica. Se activa el plano [Sem-Dis]</p>

Al construir los cuadriláteros se activan los planos [Ins-Dis], [Sem-Dis] y [Sem-Ins] por lo que se vinculan los planos cognitivo y epistemológico completando el ETM con esta tarea propuesta.

Se construyó un paralelogramo y un trapecio con GeoGebra haciendo uso de las propiedades de cada uno. Durante la construcción, se hicieron preguntas y los profesores participaron haciendo conjeturas sobre los pasos para la construcción del paralelogramo y justificaron su propuesta con las propiedades del cuadrilátero. Esto favorece la activación de la génesis discursiva y la génesis instrumental al identificar la herramienta del artefacto digital que se debe utilizar. En este sentido, se favorece la activación del plano [Ins-Dis].

La Figura 31 muestra el trabajo hecho por los profesores Andrés y Sofía para la construcción del paralelogramo con GeoGebra durante la capacitación.

**Figura 31. Construcción de paralelogramo con GeoGebra en línea**



La profesora Sofía propuso construir un trapecio después del paralelogramo por ser un caso “más diferente que el rombo, rectángulo o cuadrado”. Los profesores exploraron las herramientas disponibles en el artefacto digital para construir el trapecio e hicieron propuestas que fueron seguidas.

Al ejecutar sus propuestas, se dieron cuenta que algunas no siempre cumplían con las propiedades al arrastrar los puntos de los vértices y buscaron otros métodos. Finalmente, construyeron un rombo individualmente haciendo uso de rectas paralelas y circunferencias y compartieron sus construcciones.

En la cuarta tarea, también se realizaron preguntas sobre los niveles de integración de la tecnología para promover que los profesores avancen en el espiral de integración alcanzando un mayor nivel. En este caso, se pudo ver que ambos profesores incluyeron este artefacto digital en un nivel de exploración, ya que lo incluyen para aprender sobre cuadriláteros y practicar lo aprendido.

En la participación de ambos profesores, se mostró una alta interacción entre los conocimientos tecnológicos y sus ETM idóneos en el caso del artefacto digital GeoGebra para la construcción de cuadriláteros. Esto se evidencia porque ambos manifestaron nuevos conocimientos adquiridos durante la capacitación sobre el artefacto digital y lo incluyeron en la nueva planificación modificada en situaciones de aprendizaje y exploración de nuevos conceptos.

A continuación, la Tabla 18 muestra un resumen de los niveles de interacción observados en cada tarea analizada. Se presenta el nivel de interacción mostrado por ambos profesores, Sofía (S) y Andrés (A).

**Tabla 18**

*Resumen de Interacción Observada*

	Tarea	Artefacto digital	Nivel de Interacción		
			Alto	Medio	Bajo
T1	Tensores de Cuerdas	de Geoplano Digital	A		S
T2	Área de trapecio	de un Polypad			A / S
T4	Construcción con propiedades	GeoGebra	A / S		

El profesor Andrés incluye herramientas tecnológicas presentadas en la capacitación en su nueva planificación de clases sobre cuadriláteros. En el caso de la profesora Sofía, se evidenció que sólo incluyó el uso de un artefacto digital dentro de la modificación que hizo a su planificación. Manifestó de forma positiva lo que GeoGebra le permitiría enseñar y demostrar a sus estudiantes para enseñarles las propiedades, relaciones, teoremas y postulados sobre cuadriláteros.

En líneas generales, se observa que el profesor Andrés incluye el uso de alguno de los artefactos digitales en cada uno de los momentos de su planificación de clase al hacer las modificaciones, mientras que la profesora Sofía sólo incluye GeoGebra en el momento del desarrollo de su planificación.

En el cuestionario final, ambos profesores manifestaron que usarían los artefactos digitales GeoGebra Classic, Nearpod, geoplano digital y Polypad para la enseñanza de cuadriláteros (ver Anexo 7). Las razones por las que cada profesor las usaría y la forma de incluirlas en sus clases fueron diferentes. El profesor Andrés demuestra intenciones de incluir los artefactos digitales en diferentes momentos de la sesión y permitiendo a sus estudiantes explorar y aprender con ellos. La profesora Sofía expresa mayor inclinación a usar los artefactos digitales como práctica o refuerzo de lo aprendido.

Adicionalmente, se realiza una entrevista telefónica semiestructurada al profesor Andrés para determinar sus intenciones y percepción sobre el uso de la tecnología y aclarar aspectos como perspectivas sobre el uso de tecnología, cambios de conocimientos y seguridad con respecto a la incorporación de tecnología.

El diseño de la entrevista se realiza usando como instrumento una guía de entrevista semiestructurada. Los datos obtenidos de las entrevistas semiestructuradas se incorporan en las características o criterios establecidos para los cuestionarios y las planificaciones. En la tabla 19, presentamos las preguntas y su objetivo para esta investigación.

**Tabla 19**

*Preguntas para entrevista semiestructurada*

<b>No.</b>	<b>Pregunta</b>	<b>Objetivo</b>
E1	De las siguientes formas de integrar los contenidos de cuadriláteros, las estrategias de aprendizaje-enseñanza y las nuevas tecnologías durante la planificación de las lecciones, ¿cuál recomendaría o utilizaría para enseñar cuadriláteros?	Analizar los Conocimientos Tecnológicos Pedagógicos del Contenido del profesor.
E2	¿Por qué seleccionó agregar en su planificación para la sesión de cuadriláteros la herramienta GeoGebra en el desarrollo de la sesión? ¿Qué beneficio tendría frente a una herramienta no digital?	Analizar los Conocimientos Tecnológicos del profesor y su Espacio de Trabajo Matemático idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros.
E3	¿Puede utilizar la tecnología para reforzar las habilidades de los estudiantes sobre cuadriláteros? ¿Cómo?	
E4	¿Puede utilizar la tecnología para reforzar la comprensión de los estudiantes sobre cuadriláteros? ¿Cómo?	
E5	¿Puede utilizar la tecnología para reforzar predicciones de los estudiantes sobre cuadriláteros? ¿Cómo?	
E6	¿Puede utilizar la tecnología para proporcionar ejemplos efectivos en paralelo con el libro de texto sobre cuadriláteros? ¿Cómo?	

La entrevista se realizó a través de WhatsApp y se grabaron las respuestas brindadas por el profesor Andrés.

El profesor Andrés manifestó que los artefactos digitales presentados permitirían a sus estudiantes explorar y practicar para comprender mejor y poder justificar y demostrar las relaciones con las propiedades de los cuadriláteros. En la entrevista expresó

*“Anoté varias cosas ahí que mencionaste como las herramientas que estás utilizando, ... algunos como el geoplano virtual ... eso no lo había visto antes, así que lo he anotado. El*

*Nearpod, me parece que mencionaste también muy interesante y sí me parece muy, muy interesante. El Geoboard también es el que utilizaste. Yo tengo una cuenta de GeoGebra también con algunos recursos que subí.*

*Pero también esas modificaciones que utilizaste al momento de asignarles algunas preguntas, mientras que de repente ibas variando algunas cosas. Eso cambiaba no de título es muy interesante ver esa parte y muy bien....como que ya tú vas modificando y el programa ya te va diciendo que sí o que no. Es muy interesante.” (Profesor Andrés)*

Esto evidencia que el profesor Andrés busca que sus alumnos hagan una transición entre el paradigma GI y el paradigma GII usando los artefactos digitales. Esto también puede reflejar su intención de motivar la activación del plano [Ins-Dis] y [Sem-Dis] y de usar sus conocimientos para integrar la tecnología al enseñar cuadriláteros.



## Conclusiones

A continuación, presentamos las conclusiones generales de esta investigación con respecto a la pregunta y objetivos; aportes, limitantes y dificultades encontradas en esta investigación; y algunas perspectivas para futuras investigaciones.

Para el desarrollo de esta investigación, nos planteamos responder la pregunta: ¿Cómo interactúan los conocimientos tecnológicos de profesores de Matemática con su ETM idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros? Para ello, se estableció como objetivo general “Analizar la interacción de los conocimientos tecnológicos de profesores de matemática con su ETM idóneo al planificar la enseñanza de cuadriláteros”.

Para ello, se establecieron y describieron interacciones entre el modelo TPACK y la teoría ETM las cuales constituyen uno de los aportes de esta investigación y el inicio de vincular ambas propuestas que puede llevar a nuevas investigaciones y artículos científicos.

Se elaboró también una descripción de tres niveles de interacción entre los conocimientos tecnológicos (TK), tecnológicos pedagógicos (TPK) y tecnológicos del contenido (TCK) y el ETM idóneo de profesores de Matemática. En este aspecto, se pudo observar que los profesores Sofía y Andrés mostraron que sus conocimientos tecnológicos y su ETM idóneo tienen mayormente una interacción alta o media con respecto a los artefactos digitales que les fueron presentados. En todos los casos manifestaron su intención de usar los dispositivos y sus conocimientos sobre el uso que podrían darles. Una conjetura es que sería posible que los profesores hagan más modificaciones o usen los artefactos digitales en sesiones posteriores. Por ello podría ser interesante hacer un seguimiento posterior sobre cómo han usado los conocimientos tecnológicos para planificar la enseñanza de cuadriláteros.

Con respecto a los objetivos específicos de esta investigación, el primero consistió en “Identificar los Conocimientos Tecnológicos, Tecnológicos Pedagógicos, Tecnológicos sobre cuadriláteros y Tecnológicos Pedagógicos sobre cuadriláteros de profesores de Matemática”. Se pudo identificar que los profesores, inicialmente, estaban de acuerdo en poder usar la tecnología para la enseñanza; sin embargo, manifestaron la necesidad de mantenerse actualizados con respecto a variedad de artefactos digitales y su utilización para la creación de recursos y materiales para la enseñanza de cuadriláteros.

Ambos profesores expresaron que los artefactos digitales que fueron presentados les serían de utilidad. La profesora Sofía hizo la aclaratoria de que el usar tecnología no debe

sustituir por completo a los artefactos físicos, ya que hay competencias que deben ser aprendidas con ellos.

La realización de la entrevista semiestructurada permitió conocer los propósitos de los profesores para la enseñanza de cuadriláteros que provocaron la selección de los artefactos digitales y el cambio en su ETM idóneo ya que permitió obtener detalles sobre la forma en la que los profesores construyeron su ETM idóneo después de la formación. Ambos profesores mostraron un cambio en diferentes grados en la forma de planificar las sesiones de clases incluyendo mayor participación y exploración por parte de los estudiantes. Determinar si estos cambios efectivamente generan la activación de los planos verticales y un ETM completo en los estudiantes podría ser el objeto de estudio de otras investigaciones.

Al realizar la formación docente, se verifica y valida que las actividades propuestas cumplen con los propósitos y objetivos de esta investigación, a excepción de la actividad final de modificación de una planificación. Las características de los sujetos y el hecho de ser la última actividad planteada, hace que la información brindada no tenga los detalles necesarios para el análisis completo en términos del ETM para esta investigación. Por ello, se realiza una entrevista semiestructurada para recolectar más información sobre el ETM idóneo del profesor.

El segundo objetivo específico era “Describir el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de matemática al planificar la enseñanza de cuadriláteros”. Este objetivo fue alcanzado porque se describieron las modificaciones y cambios hechos por los profesores en su ETM idóneo con respecto a las interacciones vistas con los conocimientos tecnológicos, así como los planos y génesis que se activarían al usar dichos artefactos digitales. Los cambios muestran que esta interacción, con mayores conocimientos, sería beneficiosa para la planificación de la enseñanza de cuadriláteros con tareas que consigan un ETM completo usando tecnología.

En general, los profesores modifican sus planificaciones y la construcción de su ETM idóneo para usar tecnología en mayor grado al tener mayor conocimiento tecnológico. Esto podría indicar que hay interacción entre los conocimientos tecnológicos y el ETM idóneo de estos profesores de Matemática. El nivel de interacción varió entre ambos profesores. Esto puede indicar que podrían existir también otros factores que podrían participar e influir, por ejemplo, sus creencias metodológicas, la creatividad para modificar y adaptar tareas a las necesidades de sus estudiantes, entre otras.

Por ejemplo, cuando el profesor Andrés incluye herramientas tecnológicas en su nueva planificación de clases sobre cuadriláteros nos lleva a pensar que el conocimiento que adquirió durante la formación lo llevó a reflexionar sobre sus experiencias anteriores al dictar dicha clase y hacer cambios que considera beneficiarían la enseñanza de los cuadriláteros mediante el uso de artefactos digitales.

Es recomendable ofrecer más oportunidades de formación y mayor tiempo para ellas debido a que los profesores manifestaron que usarían los artefactos digitales presentados para enseñar cuadriláteros porque son motivadores para los estudiantes, ya que les permiten visualizar o por ser lúdicos; sin embargo, no hacen mención sobre ventajas para que los estudiantes tengan mejor comprensión, mayor aprendizaje o experiencias que no serían posibles sin artefactos digitales.

Los profesores expresan el nivel de integración de la tecnología en el que se encuentran y el cambio que tuvieron con los conocimientos recibidos en la formación cuando, por ejemplo, el profesor Andrés menciona que los artefactos representan un beneficio para ellos como profesores porque facilitan su trabajo. La profesora Sofía se muestra más cautelosa resaltando que los artefactos digitales no pueden sustituir del todo a los métodos tradicionales de trazado y medición.

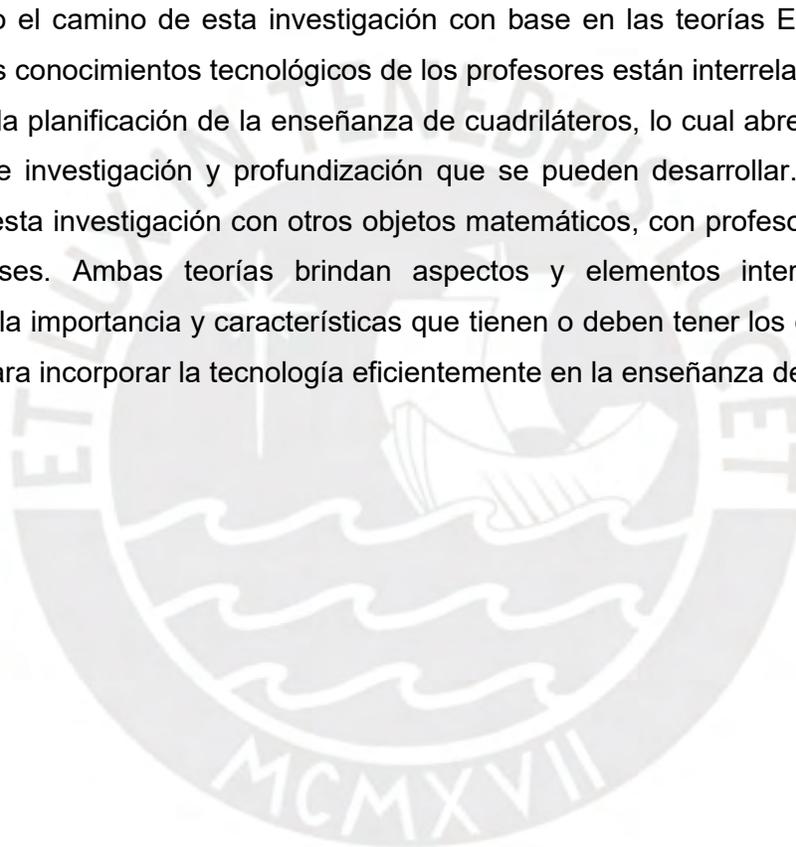
La postura de los profesores ante el uso de tecnología para enseñar cuadriláteros es positiva; sin embargo, ambos profesores participaron voluntariamente en la formación, lo que puede implicar una disposición positiva e interés por la tecnología previa a lo desarrollado en la formación. Se recomienda llevar a cabo esta investigación con sujetos de un grupo variado de profesores, como parte de un curso de formación de profesores o en una institución educativa como parte de la formación docente que todos los profesores de matemática de la institución reciben. De esta forma, se podrá analizar la interacción en el caso de profesores con diferente nivel de aceptación y manejo de tecnología.

Los aportes principales de esta investigación se pueden tomar como punto de partida para nuevas investigaciones. En primer lugar, las interacciones entre el modelo TPACK y la Teoría ETM, es decir, entre los conocimientos y las génesis y planos. En segundo lugar, el uso de los niveles de integración de la tecnología y sus criterios propuestos en el TPACK para diseñar tareas progresivas en la formación docente analizando el trabajo matemático que se realiza, las activaciones que se producen y los paradigmas que se privilegian. En tercer lugar, el inicio de un método que permite observar, describir y operacionalizar el proceso que sucede en el ETM idóneo de los profesores de Matemática. Esto podría contribuir con la comprensión

para mejorar la formación docente Esta primera investigación sienta las bases para ser adaptado y optimizado.

A partir de esta investigación, se generan nuevas preguntas y posibles investigaciones que se pueden realizar. Por ello se recomienda continuar investigando sobre la influencia del conocimiento de los profesores de cada una de las herramientas por separado, si existe variación por el nivel de enseñanza o tipo de institución. También se pueden realizar estudios que contemplen, además del ETM idóneo potencial de los profesores, el ETM idóneo efectivo y ETM de los estudiantes, lo que permitiría un análisis más profundo en términos del ETM.

Siguiendo el camino de esta investigación con base en las teorías ETM y TPACK, se evidencia que los conocimientos tecnológicos de los profesores están interrelacionados con sus decisiones para la planificación de la enseñanza de cuadriláteros, lo cual abre una variedad de oportunidades de investigación y profundización que se pueden desarrollar. Por ejemplo, es posible replicar esta investigación con otros objetos matemáticos, con profesores en formación o de otros países. Ambas teorías brindan aspectos y elementos interesantes para la comprensión de la importancia y características que tienen o deben tener los conocimientos de los profesores para incorporar la tecnología eficientemente en la enseñanza de cuadriláteros.



## Referencias

- Arévalo, M. y García, M. (2016). El TPACK como enfoque para el desarrollo de la investigación en didáctica de la matemática a nivel universitario. *Encuentro internacional en educación matemática*. <http://funes.uniandes.edu.co/14135/1/Arevalo2016El.pdf>
- Arredondo, R. (2020). *Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial*. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/17661>
- Bachillerato Internacional (2009). *Secuenciación de contenidos de Matemáticas* <https://www.ibo.org/es/>
- Bueno, R., Lieban, D. y Ballejo, C. (2021). Mathematics Teachers' TPACK Development Based on an Online Course with Geogebra. *Open Education Studies*. (pp.110-119) <https://doi.org/10.1515/edu-2020-0143>
- Cabero Almenara, J. (2017). *La formación en la era digital: ambientes enriquecidos por la tecnología*. *Gestión de la Innovación en Educación Superior*, II (2), 41-64. <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/67192/La%20formaci%c3%b3n%20en%20la%20era%20digital.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Carreño, E. y Climent, N. (2019). *Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros*. *PNA* 14(1), 23-53.
- Cateriano-Chavez, T., Rodríguez-Rios, M., Patiño-Abrego, E., Araujo-Castillo, R. y Villalba-Condori, K. (2021). Competencias digitales, metodología y evaluación en formadores de docentes. *Campus Virtuales*. 10(1), 153-162. <http://uajournals.com/ojs/index.php/campusvirtuales/article/view/673/437>
- Codina, A. y Romero, I. (2016). Entornos Tecnológicos y su Influencia en los Espacios de Trabajo Matemático. *Revista Bolema*, 30 (54), 96-119. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a05>
- Consejo de Jefes Estatales Escolares y la Asociación de Gobernadores Nacionales de los Estados Unidos. (2010). *Common Core State Standards Initiative*. <https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/ADA-Compliant-Math-Standards.pdf>

- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, K., Cao, Y., Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. Springer Open. <https://www.springer.com/gp/book/9783319336657>
- Escuela de Educación Superior Pedagógica Monterrico. (2019). *Licenciatura en Educación Matemática*. <https://monterrico.edu.pe/matematica/>
- Euclides (1991). *Elementos*. Trad. Puertas, C.). Editorial Gredos. (Trabajo original publicado 300a.C.)
- García-Cuéllar, D. (2021). *Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros* [Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo]
- García-Cuéllar, D., Almouloud, S. y Salazar, J. (2019). Los cuadriláteros como saber a enseñar en el currículo peruano. *Revista Paranaense de Educacao Matemática*. <https://doi.org/10.33871/22385800.2019.8.17.449-474>
- Grant, H. y Kleiner, I. (2015). *Turning Points in the History of Mathematics*. Editorial Birkhäuser. DOI 10.1007/978-1-4939-3264-1. <https://dokumen.pub/turning-points-in-the-history-of-mathematics-1st-ed-1493932632-978-1-4939-3263-4-978-1-4939-3264-1.html>
- Harvard Extension School. Mathematics for Teaching Degree Program. <https://www.extension.harvard.edu/academics/graduate-degrees/mathematics-teaching-degree>
- Heath, T. (1981). *A History of Math*. Dover Publications. Volumen II. <https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/heathvoli.pdf>
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial Mc Graw Hill Education. <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. (2017). Marco común de competencia digital docente. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. [https://aprende.intef.es/sites/default/files/2018-05/2017\\_1020\\_Marco-Com%C3%BAn-de-Competencia-Digital-Docente.pdf](https://aprende.intef.es/sites/default/files/2018-05/2017_1020_Marco-Com%C3%BAn-de-Competencia-Digital-Docente.pdf)
- Instituto Pedagógico Nacional Monterrico. (2022). *Licenciatura en Educación Matemática*. <https://monterrico.edu.pe/matematica/>

- Koehler, M. & Mishra, P. (2008). Introducing TPCK en AACTE (Ed). *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators*. (pp.3-30). [https://punyamishra.com/wp-content/uploads/2008/05/koehler\\_mishra\\_08.pdf](https://punyamishra.com/wp-content/uploads/2008/05/koehler_mishra_08.pdf)
- Koehler, M., Mishra, P. y Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos?. *Virtualidad, Educación y Ciencia*. (10) 9-23. <https://www.punyamishra.com/wp-content/uploads/2016/08/11552-30402-1-SM.pdf>
- Kuzniak, A. (2018). *La teoría de los Espacios de Trabajo Matemáticos: Desarrollo y perspectivas*. Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático ETM6. [https://www.researchgate.net/publication/342903109\\_El\\_rol\\_de\\_las\\_tareas\\_y\\_diferentes\\_heuristicas\\_de\\_solucion\\_una\\_discusion\\_entre\\_modelizacion\\_y\\_ETM](https://www.researchgate.net/publication/342903109_El_rol_de_las_tareas_y_diferentes_heuristicas_de_solucion_una_discusion_entre_modelizacion_y_ETM)
- Kuzniak, A., (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces-Theoretical Characteristics. En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context* (pp.3-31). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A., Henríquez-Rivas, C. y Masselin, B. (2022). The Idoine or Suitable MWS as an Essential Transition Stage between Personal and Reference Mathematical Work. En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context*. (pp.121-146). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>.
- Kuzniak, A., Montoya, E. y Richard, P. (Ed.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A., Montoya, E. y Vivier, L. (2016). *El espacio de trabajo matemático y sus génesis*. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. En Centro De Investigación y Formación en Educación Matemática (Ed.) 11(15), pp. 235-249. <http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompleto/Cuaderno15.pdf>
- Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*. 106, 271–289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kuzniak, A., Nechache, A. y Salazar, J. (16-18 de septiembre de 2020). *Student Teachers' Geometric Work and Flexible Use of Digital Tools*. Mathematics Education in the Digital Age (MEDA), Linz, Austria
- Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. (2016). *Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom*. ZDM: the international journal on

mathematics

education.

[https://www.researchgate.net/publication/297654633\\_Understanding\\_the\\_development\\_of\\_mathematical\\_work\\_in\\_the\\_context\\_of\\_the\\_classroom](https://www.researchgate.net/publication/297654633_Understanding_the_development_of_mathematical_work_in_the_context_of_the_classroom)

Kuzniak, A. y Rauscher J. (2011) *How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?* *Educational Studies in Mathematics* 77 (pp. 129–147). <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9304-7>

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). *Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction*. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721–737. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>

Linares, M. (2007). *Geometría Interactiva. Facultad de Ciencias y Áreas afine (DGTIC)*. Universidad Nacional Autónoma de México. [http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro\\_m.html](http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro_m.html)

Mejía, C., Valverde, C, Huaila, S., Paulino, E. y Vargas, M. (2017). *Matemática 1. Hipervínculos*. Santillana.

Mejía, C., Valverde, C, Huaila, S. y Paulino, E. (2017). *Matemática 2. Hipervínculos*. Santillana.

Mejía, C., Valverde, C, Huaila, S., Paulino, E., Torres, J. y Vargas, M. (2017). *Matemática 3. Hipervínculos*. Santillana.

Ministerio de Educación del Perú. (2020). *Diseño Curricular Básico Nacional para la Carrera Profesional de Profesor de Educación Secundaria en la Especialidad de Matemática*. <http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/dcbn2019-matematica/>

Ministerio de Educación del Perú. (2015). *Currículo Nacional de la Educación Básica Primaria*. Lima. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-primaria.pdf>

Ministerio de Educación del Perú. (2015). *Currículo Nacional de la Educación Básica Secundaria*. Lima. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>

Ministerio de Educación del Perú. (2018). *Concurso para el Ascenso de Escala en la Carrera Pública Magisterial. Educación Básica Regular Nivel Secundaria: Matemática*.

<https://evaluaciondocente.perueduca.pe/acceso2018/accesoinstrumentos/pdfs/ACCESO/C23-EBRS-52-%20VERSION%202/C23-EBRS-52-MATEMATICA-%20VERSION%202.pdf>

Ministerio de Educación del Perú. (2018). *Evaluación Docente – Perú Educa*.  
<https://mundogenial.com/2018/03/04/evaluacion-docente-peru-educa-2018/>

Ministerio de Educación del Perú. (2018) *Temarios para la Evaluación Docente*.  
<https://evaluaciondocente.perueduca.pe/nombramiento2021/temarios/>

Ministerio de Educación del Perú. (2020). *Proyecto Educativo Nacional PEN al 2036*.  
[https://siteal.iiep.unesco.org/sites/default/files/sit\\_accion\\_files/peru\\_-\\_proyecto-educativo-nacional-al-2036.pdf](https://siteal.iiep.unesco.org/sites/default/files/sit_accion_files/peru_-_proyecto-educativo-nacional-al-2036.pdf)

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2013). *Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas*.  
[https://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2020/06/Geometri%CC%81a\\_Rene%CC%81-Descartes.pdf](https://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2020/06/Geometri%CC%81a_Rene%CC%81-Descartes.pdf)

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Principles and Standards for School Mathematics*. [https://www.nctm.org/store/Products/NCTM-Principles-and-Standards-for-School-Mathematics,-Full-Edition-\(PDF\)/](https://www.nctm.org/store/Products/NCTM-Principles-and-Standards-for-School-Mathematics,-Full-Edition-(PDF)/)

Niess, M., Ronau, R. N., Shafer, K. G., Driskell, S. O., Harper S. R., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. A., & Kersaint, G. (2009). *Mathematics teacher TPACK standards and development model*. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 4-24.

Niess, M., Sandri, P., & Lee, K. (2007). *Dynamic Spreadsheets as Learning Technology Tools: Developing Teachers' Technology Pedagogical Content Knowledge (TPCK)*. pp. 231-254.  
[https://www.researchgate.net/publication/251185578\\_Developing\\_Teachers'\\_Technological\\_Pedagogical\\_Content\\_Knowledge\\_TPCK\\_with\\_Spreadsheets#fullTextFileContent](https://www.researchgate.net/publication/251185578_Developing_Teachers'_Technological_Pedagogical_Content_Knowledge_TPCK_with_Spreadsheets#fullTextFileContent)

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (14 Marzo 2023). *Marco de competencias para docentes en materia de TIC de la UNESCO*  
<https://www.unesco.org/en/digital-competencies-skills/ict-cft>

Ortiz, A., (2005). *Historia de la Matemática*. Pontificia Universidad Católica del Perú.  
<http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf>

- Padilla, I. y Conde-Carmona, R. (2020). *Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas: un análisis cualitativo*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (60), 116-136. <https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n60a7>
- Pontificia Universidad Católica del Perú. (2021). *Carrera de Educación Primaria*. <https://facultad-educacion.pucp.edu.pe/carreras/educacion-primaria/>
- Pontificia Universidad Católica del Perú. (2021) *Carrera de Educación Secundaria*. <https://facultad-educacion.pucp.edu.pe/carreras/educacion-secundaria/>
- Real Academia Española. (2021). Isoperímetro. En Diccionario de la lengua española. Recuperado el 30 de noviembre de 2022, de <https://dle.rae.es/isoper%C3%ADmetro>
- Salazar, J.V.F., Gaona, J. y Richard, P. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context*. (pp.165-210). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8)
- Salazar J.V.F. y García-Cuellar, D. (2020). *Paradigmas geométricos en el trabajo matemático de docentes en formación continua*. Plurais. [https://www.researchgate.net/publication/343775610\\_PARADIGMAS\\_GEOMETRICOS\\_EN\\_EL\\_TRABAJO\\_MATEMATICO\\_DE\\_DOCENTES\\_EN\\_FORMACION\\_CONTINUA](https://www.researchgate.net/publication/343775610_PARADIGMAS_GEOMETRICOS_EN_EL_TRABAJO_MATEMATICO_DE_DOCENTES_EN_FORMACION_CONTINUA)
- Salehyan, P. y Días, R. (2015). *Congruência por Corte e Terceiro Problema de Hilbert*. Ciência e Natura. <https://doi.org/10.5902/2179460X14375>
- Sánchez, C. (2012). *La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides*. Tecné, Episteme y Didaxis: TED. N.º 32 \*Segundo semestre de 2012\* pp. 71-92 ISSN 0121-3814. <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a06.pdf>
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). *Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework*. ZDM Mathematics Education. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0757-0>
- Sociedad Internacional de Tecnología en Educación (2007). Estándares ISTE para docentes. <https://www.iste.org/es/standards/for-educators>
- Universidad Católica de Maule. Perfil de Egreso de Pedagogía en Matemática y Computación. <https://portal.ucm.cl/carreras/pedagogia-matematica-computacion/perfil-egreso-pedagogia-matematica->



# Anexos

## ANEXO 1

### Perfiles de Egreso de Universidades

#### Perfil del Egresado de la carrera Educación Primaria de la PUCP

The screenshot displays the website of the Faculty of Education at the University of Cusco (PUCP). The navigation menu includes 'Carreras', 'Alumnos', 'Egresados', 'Formación continua', 'Publicaciones', 'Investigaciones y tesis', and 'Noticias y eventos'. The 'Carreras' section is active, showing a list of programs: 'Carrera de educación inicial', 'Carrera de educación primaria', and 'Carrera de educación secundaria'. The 'Carrera de educación primaria' is selected, and its sub-menu is expanded to show 'Presentación', 'Plan de estudios', 'Sumillas', 'Perfil del egresado', and 'Admisión'. The 'Perfil del egresado' page is displayed, featuring the title 'Perfil del egresado' and a description: 'Durante su tiempo de formación, los egresados de la carrera de Educación Primaria de la PUCP desarrollan un perfil enfocado en:'. Below this, three main areas are detailed: 'DESARROLLO PERSONAL Y PROFESIONAL', 'INVESTIGACIÓN Y PRÁCTICA', and 'GESTIÓN DE ORGANIZACIONES EDUCATIVAS Y LIDERAZGO'. Each area contains specific bullet points describing the graduate's skills and competencies. A fourth area, 'PROCESOS DE DESARROLLO Y APRENDIZAJE', is also visible at the bottom of the page.

**Perfil del egresado**

Durante su tiempo de formación, los egresados de la carrera de **Educación Primaria de la PUCP** desarrollan un perfil enfocado en:

**DESARROLLO PERSONAL Y PROFESIONAL**

- La mejora constante en la profundización de conocimientos motiva al docente en formación inicial, a potenciar sus capacidades para beneficio personal y profesional, garantizando así el desarrollo de los alumnos.
- El manejo de los conocimientos científicos, cognitivos, pedagógicos y socioemocionales permiten tener un panorama de la realidad peruana, latinoamericana y mundial, que lo faculta como propulsor de proyectos de desarrollo.

**INVESTIGACIÓN Y PRÁCTICA**

- La perspectiva reflexiva, crítica e investigadora del egresado PUCP le permite diseñar, desarrollar y validar propuestas de mejora dentro y fuera de las aulas, así como implementar proyectos educativos dirigidos a fortalecer procesos de aprendizaje de sus alumnos.

**GESTIÓN DE ORGANIZACIONES EDUCATIVAS Y LIDERAZGO**

- El docente egresado de la PUCP estará formado para ejercer un rol de liderazgo y trabajo en comunidades de aprendizaje en instituciones formales y no formales, en los cuales se destacan los programas y proyectos educativos.

**PROCESOS DE DESARROLLO Y APRENDIZAJE**

- El futuro docente podrá desarrollar planes curriculares basados en el contexto socioeconómico, cultural y tecnológico, en atención a la diversidad del alumnado, en instituciones formales y no formales, en los cuales se destacan los programas y proyectos educativos.

Perfil del Egresado de la carrera Educación del Instituto Pedagógico Nacional de  
Monterrico

Dimensión	Competencias globales/Unidades de competencia/Criterios de desempeño	
<b>Personal – vocacional</b>	<b>Competencia global 1:</b> Gestiona su autoconocimiento y autovaloración integral, construyendo un proyecto de vida que le permite consolidar su identidad profesional que responda a las necesidades del entorno priorizando su formación y actualización permanente en interacción con el contexto socio cultural, científico y tecnológico, a la luz del carisma del Sagrado Corazón.	
	Unidad de competencia	Criterios de desempeño
	1.1 Asume una conducta reflexiva sobre su quehacer personal y formativo, reafirmando su vocación e identidad docente.	1.1.1 Demuestra autoconocimiento y aprecio de sí mismo fortaleciendo su identidad y vocación docente. 1.1.2 Asume su propia experiencia y el error como fuentes de aprendizaje que le permiten desarrollarse de manera integral en el marco de una mejora continua.
	1.2 Desarrolla su proyecto de vida fortaleciendo su autovaloración y dando respuestas pertinentes a las exigencias de su entorno.	1.2.1 Demuestra iniciativa y espíritu emprendedor para el desarrollo de su proyecto de vida. 1.2.2 Fortalece su compromiso transformador de la realidad, priorizando la atención a los más vulnerables, desde la espiritualidad del Sagrado Corazón. 1.2.3 Se actualiza permanentemente asumiendo el aprendizaje como proceso de autoformación.
	1.3 Desarrolla procesos de regulación emocional teniendo en cuenta prácticas saludables y el carisma institucional para mejorar su calidad de vida.	1.3.1 Maneja sus emociones en diferentes situaciones atendiendo su equilibrio personal y bienestar. 1.3.2 Preserva y enriquece su salud espiritual, mental, física y social para mejorar su calidad de vida 1.3.3 Demuestra capacidad de escucha activa y respeto para generar relaciones interpersonales saludables y ser modelo inspirador de sus futuros estudiantes.
	1.4 Desarrolla procesos de cognición sobre teorías y contenidos generales de ciencia, tecnología, arte y cultura, para alcanzar sus metas de desarrollo personal y formación a lo largo de la vida.	1.4.1 Demuestra su competencia comunicativa en la producción y comprensión de textos propiciando el diálogo igualitario. 1.4.2 Aplica el pensamiento lógico, crítico y creativo en la resolución de problemas. 1.4.3 Demuestra sensibilidad estética y valora la diversidad cultural. 1.4.4 Aprecia y valora las manifestaciones del arte universal en su intencionalidad expresiva en sus diversos lenguajes y medios artísticos. 1.4.5 Argumenta sus conocimientos a partir de diferentes fuentes de información. 1.4.6 Demuestra conocimiento básico de una segunda lengua y de las tecnologías de información y comunicación para desenvolverse proactivamente en distintos contextos.

## Perfil del Egresado de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad Católica del Maule en Chile



### Competencias

1. Evaluar los diferentes tipos de pensamiento y razonamiento matemático para su incorporación en diversos contextos del ámbito educativo.
2. Evaluar problemas de las distintas áreas del saber utilizando conocimientos matemáticos para su incorporación en contextos educativos.
3. Evaluar diferentes teorías y modelos de la didáctica de la matemática utilizando procesos investigativos para la toma de decisiones en el quehacer profesional.
4. Gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje utilizando las teorías de la didáctica de la matemática en el quehacer profesional.
5. Implementar soluciones haciendo uso de los conceptos fundamentales de la computación para resolver problemas matemáticos y/o propios de la profesión en el ámbito educativo.
6. Aplicar estrategias de carácter comprensivo-reflexivo en el quehacer pedagógico que impacten positivamente los procesos educativos, en coherencia con los principios fundantes de la ciencia de la educación.
7. Desarrollar programas y proyectos educativos en los diversos ámbitos de la ciencia de la educación, que impacten en la formación de la persona de manera inclusiva en diversos contextos socioculturales.
8. Demostrar coherencia ética entre sus postulados valóricos y sus acciones, respetando los derechos humanos y participando activamente en las organizaciones comunitarias, haciendo primar la responsabilidad social desde una perspectiva cristiana.
9. Desarrollar la identidad regional, generando instancias de integración recíproca entre la Universidad y la comunidad.
10. Realizar investigaciones que contribuyan al desarrollo del conocimiento científico y aplicado, en el contexto propio de su proceso formativo.
11. Comunicar ideas, tanto en la lengua materna como en el idioma inglés, haciendo uso de las tecnologías de la información para desenvolverse



## ANEXO 2

### Asignaturas de la carrera Educación Matemática de la USMP

USMP		CARRERAS PROFESIONALES		ADMISIONES		MODELO EDUCATIVO	
El orden de las asignaturas está según la progresión académica de la Universidad.							
Asignatura	Créditos	Asignatura	Créditos	Asignatura	Créditos	Asignatura	Créditos
• Administración y Legislación Educativa	4 créditos	• Idioma Extranjero I	4 créditos	• Álgebra II	4 créditos		
• Currículo	4 créditos	• Idioma Extranjero II	4 créditos	• Geometría	4 créditos		
• Cultura General I	4 créditos	• Matemática I	4 créditos	• Ecuaciones Diferenciales	4 créditos		
• Introducción a la Administración	4 créditos	• Proyectos de Investigación como Herramienta de Aprendizaje I	4 créditos	• Didáctica de la Matemática y Práctica	3 créditos		
• Taller de Inducción a la Profesión	2 créditos	• Matemática II	4 créditos	• Creación en Flash y Edición de Videos Digitales	4 créditos		
• Actividades I	1 crédito	• Introducción a la Economía	4 créditos	• Creación de Materiales Multimedia y Actividades Interactivas	4 créditos		
• Realidad Nacional	4 créditos	• Inglés I	1 crédito	• Integración de las Tecnologías en el Diseño Pedagógico	4 créditos		
• Tecnología de la Información y Comunicación (TIC) en Educación	4 créditos	• Pedagogía General	4 créditos	• Diseño de Páginas Web y Portales Educativos	4 créditos		
• Emprendimiento	2 créditos	• Evaluación Educativa	4 créditos	• Lenguaje de Programación I	4 créditos		
• Corrientes y Metodologías Pedagógicas Contemporáneas	4 créditos	• Filosofía y Ética	3 créditos	• Lenguaje de Programación II	4 créditos		
• Recursos Educativos Digitales de Alto Impacto	4 créditos	• Inglés II	1 crédito	• Didáctica de la Información Educativa y Práctica	3 créditos		
• Psicología General	4 créditos	• Didáctica General	4 créditos	• Seminario de Tesis I	4 créditos		
• Psicología del Aprendizaje	4 créditos	• Introducción al Álgebra I	3 créditos	• Seminario de Tesis II	4 créditos		
• Taller de Expresión Oral	4 créditos	• Cálculo I	4 créditos	• Electivo: Educación Inclusiva	4 créditos		
• Taller de Expresión Escrita	3 créditos	• Álgebra I	4 créditos	• Electivo: Andragogía	4 créditos		
• Actividades II	1 crédito	• Cálculo II	4 créditos	• Electivo: Cultura General II	4 créditos		
• Métodos de Estudios	3 créditos	• Planificación y Gestión Educativa	4 créditos	• Electivo: Historia de la Educación	4 créditos		
• Metodología de la Investigación	4 créditos	• Evaluación en Entornos de Aprendizaje Virtual	4 créditos				
		• Aplicaciones Didácticas de la Web	4 créditos				

## ANEXO 3

### **Propuesta de Estándares e indicadores del TPACK para profesores de matemática**

Traducido de: Nies et al. (2009)

#### I. Diseño y desarrollo de entornos y experiencias de aprendizaje en la era digital

Los profesores diseñan y desarrollan entornos y experiencias de aprendizaje auténticos incorporando herramientas y recursos apropiados de la era digital para maximizar el aprendizaje matemático en contexto.

Los maestros ...

##### 1. identifican, localizan y evalúan

- entornos, tareas y experiencias matemáticas en el plan de estudios para integrar herramientas de tecnología digital para apoyar a los estudiantes individuales y aprendizaje matemático colaborativo y creatividad;
- herramientas y recursos tecnológicos apropiados para estos entornos, tareas y experiencias.

2. Diseñan oportunidades apropiadas de aprendizaje matemático que incorporen tareas matemáticas, basadas en la investigación actual y que se apliquen de manera apropiada tecnologías para apoyar las diversas necesidades de todos los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas (considerando diversos estilos de aprendizaje, estrategias de trabajo y habilidades utilizando herramientas y recursos).

3. planificar estrategias para facilitar el acceso equitativo a los recursos tecnológicos para todos los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

#### II. Enseñanza, aprendizaje y currículo matemático

Los maestros implementan planes curriculares que incluyen métodos y estrategias para aplicar tecnologías apropiadas para maximizar el aprendizaje y la creatividad de los estudiantes en matemáticas.

Los maestros ...

1. incorporan el conocimiento de la comprensión, el pensamiento y el aprendizaje de todos los estudiantes de matemáticas con tecnología.

2. facilitan experiencias matemáticas mejoradas por la tecnología que fomenten la creatividad y animan a todos los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior mientras promueven discurso tanto entre estudiantes como entre docentes y estudiantes.

3. utilizan la tecnología para respaldar las estrategias centradas en el alumno que abordan las diversas necesidades de todos los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, ya que estas estrategias ayudan a los estudiantes a ser responsables de y a reflexionar sobre su propio aprendizaje.

4. defienden, modelan y enseñan el uso seguro, legal y ético de la información digital y uso de la tecnología por parte de todos los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

### III. Valoración y evaluación

Los maestros aplican la tecnología para facilitar una variedad de estrategias efectivas de evaluación.

Los maestros ...

1. aplicar tecnologías apropiadas para evaluar el aprendizaje de matemáticas de todos los estudiantes, reflexionar sobre los resultados de la evaluación y comunicar esos resultados utilizando una variedad de herramientas y técnicas.

2. Evaluar el uso apropiado y ético de los recursos tecnológicos por parte de los estudiantes en el aprendizaje y comunicar las matemáticas.

3. utilizar la evaluación formativa del aprendizaje de los estudiantes mejorado por la tecnología para evaluar aprendizaje de matemáticas de los estudiantes y para ajustar las estrategias de instrucción.

4. alinear las expectativas de tecnología para las tareas y prácticas de evaluación con las de actividades y expectativas de matemáticas en el aula.

### IV. Productividad y práctica profesional

Los profesores utilizan la tecnología para mejorar su productividad y práctica profesional.

Los maestros ...

1. evaluar y reflexionar sobre el uso eficaz de tecnologías existentes y emergentes para mejorar el aprendizaje matemático de todos los estudiantes.

2. exhibir liderazgo demostrando una visión basada en la investigación de la integración tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

3. Demostrar y promover el uso seguro, legal y ético de la tecnología para el aprendizaje y explorar las matemáticas con estudiantes, padres y colegas.

4. utilizan la tecnología para comunicarse y colaborar con los padres, colegas y la comunidad con el fin de nutrir el aprendizaje matemático de los estudiantes.

5. participar e interactuar regularmente en actividades profesionales en curso, tomando aprovechar los recursos de comunicación nuevos y emergentes de la era digital, para mejorar su conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido para promover al estudiante creatividad y aprendizaje en matemáticas.



ANEXO 4

**Modelo de Niveles de Desarrollo del M-TPACK para profesores de matemática**

Adaptado y traducido de: Nies et al. (2009)

CURRÍCULO Y EVALUACIÓN

Nivel	Descriptor del plan de estudios	Descriptor de evaluación
<b>Reconocer</b>	<p>Reconoce que las ideas matemáticas que se muestran con las tecnologías pueden ser útiles para dar sentido a los temas tratados en el plan de estudios.</p> <p>Ej: Crea gráficos de múltiples funciones lineales usando calculadoras gráficas para proporcionar una representación visual de diferentes pendientes. Considera estas imágenes como dar sentido a la idea de pendiente, pero no está seguro de cómo esto podría ayudar a los estudiantes a aprender el concepto básico.</p>	<p>Se resiste a la idea del uso de la tecnología en la evaluación indicando que la tecnología interfiere con la determinación de la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes.</p> <p>Ej: No permite el uso de calculadoras al evaluar la comprensión de los estudiantes para resolver ecuaciones lineales.</p>
<b>Aceptar</b>	<p>Expresa deseo, pero demuestra dificultad para identificar temas en su propio plan de estudios para incluir la tecnología como herramienta de aprendizaje.</p> <p>Ej: Asiste y participa en el taller del sistema de geometría dinámica de matemáticas para identificar ideas curriculares para incorporar las tecnologías como Herramientas de aprendizaje. Imita la incorporación de una idea de sistema de geometría dinámica del taller para mostrar y facilitar la suma de los ángulos de un triángulo que tras múltiples cambios del triángulo sugiere que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180 grados.</p>	<p>Reconoce que podría ser apropiado permitir el uso de tecnología como parte de la evaluación, pero tiene una visión limitada de su uso (es decir, el uso de tecnología en un sección de un examen).</p> <p>Ej: Asiste y participa en un desarrollo profesional de evaluación de matemáticas para considerar ideas para evaluar la comprensión de los estudiantes de resolver sistemas de funciones lineales utilizando la calculadora como herramienta. Imita la idea de evaluación para explicar el uso de la calculadora para resolver sistemas de funciones lineales utilizando la función de seguimiento para</p>

		identificar la intersección. A menudo vuelve a probar las preguntas de tecnología con preguntas de papel y lápiz para asegurarse que el concepto se aprendió de la manera "correcta".
<b>Adaptar</b>	<p>Entiende algunos beneficios de incorporar tecnologías apropiadas como herramientas para enseñar y aprender el currículo de matemáticas.</p> <p>Ej: Se enfoca en temas clave que los estudiantes investigan con tecnología. Desarrolla lecciones para demostrar conceptos matemáticos con tecnología y actividades para que los estudiantes usen la tecnología para verificar o reforzar esos conceptos. Una vez que los estudiantes han aprendido a crear gráficas de funciones lineales específicas, los estudiantes tienen el desafío de usar la hoja de cálculo para verificar la representación gráfica de los pares ordenados.</p>	<p>Entiende que, si se permite la tecnología durante las evaluaciones, se deben plantear diferentes preguntas / elementos (es decir, conceptual vs. entendimientos).</p> <p>Ej: permite el uso de la calculadora en una evaluación, pero diseña la evaluación para centrarse en recopilar la comprensión conceptual de los estudiantes de los sistemas de resolución de funciones lineales además de su comprensión procedimental.</p>
<b>Explorar</b>	<p>Investiga el uso de temas en el propio currículo para incluir la tecnología como herramienta de aprendizaje; busca ideas y estrategias para implementar tecnología en un papel más integral para el desarrollo de las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo.</p> <p>Ej: Adapta su propia lección de matemáticas anterior para incluir tecnología.</p> <p>Ej: Desarrolla sus propias ideas sobre el uso de la tecnología para mejorar el plan de estudios actual; así, comienza a alterar actividades preexistentes o crear nuevas actividades para plan de estudios actual.</p>	<p>Investiga activamente el uso de diferentes tipos de elementos y preguntas de evaluación basados en tecnología (por ejemplo, tecnología activa, inactiva, neutral o pasiva).</p> <p>Ej: Diseña evaluaciones en las que se espera que los estudiantes demuestren su comprensión de las ideas matemáticas utilizando una tecnología apropiada que se extiende más allá de las preguntas tipo lápiz y papel.</p>
<b>Avanzar</b>	Entiende que la innovación	Reflexiona y adapta las

	<p>sostenida en la modificación del propio currículo para incorporar de manera eficiente y efectiva la tecnología como herramienta de enseñanza y aprendizaje es esencial.</p> <p>Ej: Desarrolla formas innovadoras de usar la tecnología para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes, como el uso de mosaicos de álgebra virtual para ampliar ideas de manipuladores de mano para enfocarse en variables en expresiones algebraicas.</p> <p>Ej: modifica y avanza el plan de estudios para aprovechar la tecnología como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje, como el uso de CAS para explorar más complejas expresiones algebraicas.</p>	<p>prácticas de evaluación que examinan la comprensión conceptual de los estudiantes de la materia en formas que exigen un uso completo de tecnología.</p> <p>Ej: Desarrolla evaluaciones innovadoras para capturar la comprensión de los estudiantes de las matemáticas integradas en la tecnología en particular.</p>
--	---	---

### APRENDIZAJE

<b>Nivel</b>	<b>Descriptor de Aprendizaje matemático</b>	<b>Descriptor de concepción del pensamiento del estudiante</b>
<b>Reconocer</b>	<p>Considera que las matemáticas se aprenden de maneras específicas y que la tecnología a menudo se interpone en el camino del aprendizaje.</p> <p>Ej: exploración matemática con tecnología rara vez vista.</p>	<p>Más apto para aceptar la tecnología como una herramienta de enseñanza en lugar de una herramienta de aprendizaje.</p> <p>Ej: La tecnología se usa solo fuera de las actividades normales del salón de clases, como revisar la tarea, calcular números grandes, etc.</p>
<b>Aceptar</b>	<p>Le preocupa que la atención de los estudiantes se desvíe del aprendizaje de las matemáticas apropiadas hacia la tecnología en las actividades.</p> <p>Ej: Limita el uso de tecnología por parte de los estudiantes, particularmente durante la introducción y desarrollo de</p>	<p>Le preocupa que los estudiantes no desarrollen habilidades apropiadas de pensamiento matemático cuando la tecnología se utiliza como herramienta de verificación para explorar la matemática.</p> <p>Ej: Las actividades que usan</p>

	temas clave.	tecnología casi siempre se rehacen sin tecnología para asegurarse de que los estudiantes realmente aprendan el concepto en particular.
<b>Adaptar</b>	Comienza a explorar, experimentar y practicar la integración de tecnologías como herramientas de aprendizaje de las matemáticas. Ej: Los estudiantes exploran algunos temas de matemáticas usando tecnología.	Comienza a desarrollar habilidades apropiadas de pensamiento matemático cuando la tecnología se usa como herramienta para el aprendizaje. Ej: Aunque los estudiantes usan la tecnología para la mayoría de los temas, la evaluación del pensamiento de los estudiantes sigue siendo en su mayoría libre de tecnología.
<b>Explorar</b>	Utiliza tecnologías como herramientas para facilitar el aprendizaje de temas específicos en el plan de estudios de matemáticas. Ej: Los estudiantes exploran numerosos temas usando tecnología, que a veces van más allá del tema en cuestión.	Planea, implementa y reflexiona sobre la enseñanza y el aprendizaje con la preocupación de guiar a los estudiantes en la comprensión. Ej: Las actividades de tecnología se implementan y evalúan con respecto al aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes y las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. Ej: Gestiona actividades mejoradas por la tecnología para dirigir la participación y la autodirección de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.
<b>Avanzar</b>	Planea, implementa y reflexiona sobre la enseñanza y el aprendizaje con preocupación y convicción personal para que el estudiante piense y comprenda matemática se mejorarán mediante la integración de las diversas tecnologías. Ej: Los estudiantes exploran temas matemáticos, integrando varias tecnologías en un intento por comprender mejor los conceptos matemáticos.	La integración de la tecnología es integral (más que adicional) al desarrollo de las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo. Ej: Involucra a los estudiantes en actividades de pensamiento de alto nivel (como actividades basadas en proyectos, resolución de problemas y toma de decisiones) para el aprendizaje. matemáticas utilizando la tecnología como herramienta de aprendizaje.

		Ej: La tecnología se utiliza para desarrollar niveles avanzados de comprensión de conceptos matemáticos.
--	--	--

### ENSEÑANZA

Nivel	Descriptor de Aprendizaje matemático	Descriptor Instruccional	Descriptor Ambiental	Descriptor de Desarrollo Profesional
<b>Reconocer</b>	Preocupado porque la necesidad de enseñar sobre la tecnología le quitará tiempo a la enseñanza de las matemáticas. Ej: Los estudiantes usan la tecnología por su cuenta y hay poca o ninguna instrucción con tecnología.	No usa la tecnología para desarrollar conceptos matemáticos. Ej: La tecnología, si se usa en clase, se usa para actividades serviles o memorísticas.	Utiliza tecnología para reforzar conceptos enseñados sin tecnología. Ej: Se enfoca en funciones lineales donde los estudiantes practican la creación de gráficos a mano para explorar diferentes funciones. Después de que los estudiantes hayan demostrado competencia con funciones lineales, resumir el conocimiento, con un ejemplo de hoja de cálculo o un ejemplo de calculadora gráfica.	Considera asistir al desarrollo profesional local para aprender más sobre tecnologías. Ej: asiste a talleres locales que se enfocan en adquirir habilidades con la tecnología; contexto de las actividades de aprendizaje es la matemática.
<b>Aceptar</b>	Utiliza actividades de tecnología al final de las	Simplemente imita las ideas curriculares de	Gestiona y orquesta estrictamente	Reconoce la necesidad de participar en

	<p>unidades, para "días libres" o para actividades periféricas a la instrucción en el aula.</p> <p>Ej: Las actividades mejoradas por la tecnología no se utilizan para temas que requieren habilidades tecnológicas más avanzadas.</p>	<p>matemáticas de desarrollo profesional más simples para incorporar las tecnologías.</p> <p>Ej: introduce el teorema de Pitágoras algorítmicamente; el uso de geometría dinámica por parte del maestro para verificar el Teorema de Pitágoras; los estudiantes encuentran soluciones para ejemplificar problemas usando papel y lápiz.</p>	<p>la instrucción utilizando tecnología.</p> <p>Ej: La tecnología está dirigida, en un proceso estrictamente secuenciado, paso a paso. Uso de tecnología no exploratorio basado en habilidades.</p>	<p>desarrollo profesional relacionado con tecnología.</p> <p>Ej: Busca desarrollo profesional relacionado con la tecnología, talleres que están dirigidos a desarrollar la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.</p>
<b>Adaptar</b>	<p>Utiliza tecnología para mejorar o reforzar las ideas matemáticas que los estudiantes han aprendido previamente.</p> <p>Ej: Los estudiantes usan la tecnología para reforzar conceptos enseñados por el maestro.</p>	<p>Limita las actividades de desarrollo profesional más simples con las tecnologías, pero intenta adaptar las lecciones para sus clases de matemáticas.</p> <p>Ej: Se incorporan lecciones basadas en tecnología que se adaptan a las necesidades de los estudiantes.</p>	<p>Las estrategias de instrucción con tecnologías son principalmente deductivas, dirigidas por el maestro para mantener el control de cómo progresa la actividad.</p> <p>Ej: comienza a adaptar enfoques de instrucción que les permitan a los estudiantes la oportunidad de explorar con tecnología como parte de</p>	<p>Continúa aprendiendo y explorando ideas para enseñar y aprender matemáticas usando solo un tipo de tecnología (como hojas de cálculo).</p> <p>Ej: Comparte ideas de desarrollo profesional con otros profesores de matemáticas.</p>

			las lecciones.	
<b>Explorar</b>	Involucra a los estudiantes en actividades de pensamiento de alto nivel (como actividades basadas en proyectos y resolución de problemas y toma de decisiones) para aprender matemáticas utilizando la tecnología como herramienta de aprendizaje. Ej: Los maestros comparten lecciones, ideas y éxitos basados en tecnología y probados en el aula con sus compañeros.	Involucra a los estudiantes en exploraciones de matemáticas con tecnología donde el maestro tiene el papel de guía en lugar de director de la exploración. Ej: Los estudiantes usan la tecnología para explorar nuevos conceptos ya que el maestro sirve principalmente como guía.	Explora varias estrategias de instrucción (incluidas estrategias deductivas e inductivas) con tecnologías para involucrar a los estudiantes en el pensamiento sobre la matemáticas. Ej: El maestro incorpora una variedad de tecnologías para numerosos temas.	Busca y trabaja con otras personas que se dedican a incorporar tecnología en matemáticas. Ej: Organiza a maestros de matemáticas y niveles de grado similares en la investigación del plan de estudios de matemáticas para integrar tecnologías apropiadas.
<b>Avanzar</b>	Aceptación activa y constante de las tecnologías como herramientas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas de manera que traduzcan con precisión los conceptos matemáticos y procesos en formas comprensibles para los estudiantes. Ej: El maestro es visto como un recurso como ideas novedosas para ayudar a los estudiantes a	Se adapta a una variedad de estrategias de instrucción (incluidas estrategias deductivas e inductivas) con tecnologías para involucrar a los estudiantes en el pensamiento sobre las matemáticas. Ej: El maestro ayuda a los estudiantes a moverse con fluidez de una herramienta a otra mientras demuestra un enfoque y una alegría de	Gestiona actividades mejoradas por la tecnología de manera que mantenga el compromiso y la autodirección de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Ej: El docente forma y reforma grupos de aprendizaje donde se valora y se fomenta el	Busca desarrollo profesional continuo para seguir aprendiendo a incorporar tecnologías emergentes. Continúa aprendiendo y explorando ideas para la enseñanza y el aprendizaje de matemática con múltiples tecnologías para mejorar el acceso a las

	aprender matemáticas con tecnología.	comprender profundamente temas matemáticos.	aprendizaje individual y grupal.	matemáticas. Ej: Involucra a los maestros en el distrito en la evaluación y revisión del plan de estudios de matemáticas para integrar de manera más fluida la tecnología en todos los grados, ajustando el plan de estudios para un plan de estudios de matemática del siglo XXI con tecnologías apropiadas.
--	--------------------------------------	---	----------------------------------	---

ACCESO

Nivel	Descriptor de uso	Descriptor de barrera	Descriptor de disponibilidad
<b>Reconocer</b>	Permite a los estudiantes usar la tecnología "solo" después de dominar ciertos conceptos. Ej: La exploración matemática con herramientas tecnológicas se ve desafiada por creencias sobre cómo los estudiantes necesitan aprender matemáticas.	Se resiste a considerar los cambios en el contenido enseñado, aunque se vuelve accesible a más estudiantes a través de la tecnología. Ej: El acceso de los estudiantes a la tecnología está limitado a "después" de que hayan aprendido los conceptos dados usando procedimientos de lápiz y papel y solo para actividades de	Observa que es más probable que los problemas auténticos involucren "números poco amigables" y que se resuelvan más fácilmente si los estudiantes tuvieran calculadoras. Ej: Asigna algunos problemas de matemáticas usando datos de

		memorización.	la escuela y la comunidad, pero los guarda para un trabajo de "crédito adicional" si los estudiantes tienen calculadoras.
<b>Aceptar</b>	Los estudiantes usan la tecnología de manera limitada durante los períodos regulares de instrucción. Ej: Las actividades de los estudiantes con tecnología se limitan a situaciones breves y estrictamente controladas.	Preocupaciones por cuestiones de acceso y gestión con respecto a la incorporación de tecnología en el aula. Ej: los estudiantes solo pueden usar la tecnología en situaciones aisladas o situaciones de aprendizaje no importantes.	Las calculadoras permiten que los estudiantes exploren un mayor número de ejemplos. Ej: el estudiante usa calculadoras para investigar patrones y funciones.
<b>Adaptar</b>	Permite a los estudiantes usar la tecnología en unidades diseñadas específicamente. Ej: El acceso y el uso de la tecnología está disponible para la exploración de nuevos temas, generalmente con la demostración del maestro.	Utiliza la tecnología como herramienta para mejorar las lecciones de matemáticas con el fin de proporcionar a los estudiantes una nueva forma de abordar las matemáticas. Ej: Los conceptos aprendidos con tecnología no se evalúan con tecnología.	Los conceptos se enseñan de manera diferente ya que la tecnología brinda acceso a conexiones que antes estaban fuera de su alcance. Ej: los estudiantes usan software de geometría dinámica para investigar y hacer conexiones entre funciones de trigonometría.
<b>Explorar</b>	Permite a los estudiantes usar la tecnología para explorar temas matemáticos específicos. Ej: El acceso y el uso de la tecnología está disponible y se alienta para la exploración matemática durante la mayoría de las horas	Reconoce los desafíos para enseñar matemáticas con tecnologías, pero explora estrategias e ideas para minimizar el impacto de esos desafíos. Ej: la tecnología se usa ampliamente en las evaluaciones. Busca formas de obtener	Mediante el uso de la tecnología, se exploran, aplican y evalúan temas clave incorporando múltiples representaciones de los conceptos y sus conexiones. Ej: Las ecuaciones

	de clase.	tecnología para uso en el aula y comienza a crear métodos para gestión de la tecnología.	simultáneas se desarrollan a partir de una situación auténtica, se resuelven e interpretan utilizando gráficos, tablas, símbolos y datos.
<b>Avanzar</b>	Permitir que los estudiantes usen la tecnología en todos los aspectos de la clase de matemáticas. Ej: La tecnología se considera una oportunidad para desafiar las nociones de lo que los estudiantes de matemáticas pueden dominar.	Reconoce los desafíos en la enseñanza con tecnología y resuelve los desafíos a través de una planificación y preparación extendidas para maximizar el uso de recursos y herramientas disponibles. Ej: La tecnología se utiliza para expandir los conceptos matemáticos a los que pueden acceder los estudiantes.	A los estudiantes se les enseña y se les permite explorar temas matemáticos más complejos o conexiones matemáticas como parte de su experiencia de aprendizaje normal. Ej: Al utilizar Internet para encontrar problemas matemáticos interesantes, los estudiantes investigan el papel que pueden desempeñar las tecnologías en la búsqueda de soluciones a los problemas.

ANEXO 5

Planificaciones iniciales y modificadas de los profesores Andrés y Sofía.

Profesora Sofía. Planificación Inicial

**SESIÓN DE APRENDIZAJE Nº 15**

**I. DATOS INFORMATIVOS:**

INSTITUCIÓN EDUCATIVA: [REDACTED]  
 GRADO: 4° "A"  
 DOCENTE: [REDACTED]  
 FECHA: 19-06-2014  
 AREA: Matemáticas

**II. SECUENCIA DIDÁCTICA**

COMPETENCIA	CAPACIDAD	CONOCIMIENTO	INDICADORES
Geometría y medición	Mide, identifica y clasifica ángulos	- Cuadriláteros - Clasificación	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Reconoce los cuadriláteros y los clasifica.</li> <li>➤ Construye diferentes cuadriláteros utilizando diferentes instrumentos de medida</li> </ul>

PROCESO	ESTRATEGIAS	RECURSO
I N I C I O	Actividades permanentes: - Saludo - Fecha - Registro de asistencia - Reflexión sobre las normas de convivencia del aula. - Se dialoga sobre el valor de la honestidad. Observan la imagen de una casita    ¿Que observas en la imagen? ¿Que forma tiene el techo de la casa? ¿Que formas tienen las ventanas? ¿Que figuras geométricas se han utilizado para formar la figura? ¿Cuántos lados tienen cada una de las figuras? ¿Que clase de cuadriláteros conoces?	Papelógrafo   Láminas Didácticas

<p>P R O C E S O</p>	<p>Se recogen saberes previos mediante la técnica de lluvia de ideas para construir un concepto de cuadrilátero, concluyen que el cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Se consolidan los saberes</p> <p style="text-align: center;"><b>EL CUADRILÁTERO</b></p> <p>Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de sus ángulos es de <math>360^\circ</math></p> <p><b>Clasificación. -</b> Los cuadriláteros se clasifican según el paralelismo de sus lados:</p> <p><b>Los paralelogramos</b> Son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos. Además, en todos los paralelogramos se verifican las propiedades: - los lados opuestos tienen la misma longitud - los ángulos opuestos son iguales - las diagonales se cortan en un punto medio</p> <p><b>Los trapecios</b> Son cuadriláteros que tienen solo dos lados opuestos paralelos. <b>Los trapezoides</b> Son cuadriláteros cuyos lados no son paralelos.</p> <p><b>Actividades de Consolidación</b> - Copian en sus cuadernos - Construyen diferentes cuadriláteros utilizando instrumentos de medida y luego los clasifican. - Descubren experimentalmente que la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es <math>360^\circ</math></p>	
<p>S A L I D A</p>	<p style="text-align: center;"><b>METACOGNICIÓN</b></p> <p>¿Qué aprendimos? ¿Cómo nos sentimos? ¿Qué cambios debe tener? ¿Cómo lo aprendimos?</p>	
<p><b>EVALUACIÓN</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Participación de los niños y niñas a la larga del desarrollo de la sesión.</li> <li>- Desarrollo de la ficha de aplicación.</li> </ul>		

### SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 15

**I. DATOS INFORMATIVOS:**

INSTITUCIÓN EDUCATIVA : ██████████  
 GRADO : 4° "A"  
 DOCENTE : ██████████  
 FECHA : 19-06- 2014  
 AREA : Matemáticas

**II. SECUENCIA DIDÁCTICA**

COMPETENCIA	CAPACIDAD	CONOCIMIENTO	INDICADORES
Geometría y medición	Mide, identifica y clasifica ángulos	- Cuadriláteros - Clasificación	➤ Reconoce los cuadriláteros y los clasifica. ➤ Construye diferentes cuadriláteros utilizando diferentes instrumentos de medida

PROCESO	ESTRATEGIAS	RECURSO
<p><b>I</b> - Actividades permanentes</p> <p><b>N</b> - Saludo</p> <p><b>I</b> - Fecha</p> <p><b>C</b> - Registro de asistencia</p> <p><b>I</b> - Reflexión sobre los normas de convivencias del aula.</p> <p><b>O</b> - Se dialoga sobre el valor de la honestidad.</p> <p><b>O</b> Observan la imagen de una casita</p>	 <p>¿Qué observas en la imagen?                  Que forma tiene el techo de la casa                  Que formas tienen las ventanas                  ¿Qué figuras geométricas se han utilizado para formar la figura?                  ¿Cuántos lados tienen cada una de las figuras?                  ¿Qué clase de cuadriláteros conoces?</p>	<p>Papelógrafo</p> <p>Láminas Didácticas</p>

<p>P R O C E S O</p>	<p>Se recogen saberes previos mediante la técnica de lluvia de ideas para construir un concepto de cuadrilátero, concluyen que el cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Se consolidan los saberes</p> <p style="text-align: center;"><b>EL CUADRILATERO</b></p> <p>Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de sus ángulos es de <math>360^\circ</math></p> <p><b>Clasificación. -</b> Los cuadriláteros se clasifican según el paralelismo de sus lados:</p> <p><b>Los paralelogramos</b> Son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos. Además, en todos los paralelogramos se verifican las propiedades: -los lados opuestos tienen la misma longitud -los ángulos opuestos son iguales - las diagonales se cortan en un punto medio</p> <p><b>Los trapecios</b> Son cuadriláteros que tienen solo dos lados opuestos paralelos.</p> <p><b>Los trapezoides</b> Son cuadriláteros cuyos lados no son paralelos.</p> <p><b>Actividades de Consolidación</b> -Copian en sus cuadernos -Construyen diferentes cuadriláteros utilizando instrumentos de medida y luego los clasifican - Descubren experimentalmente que la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero es <math>360^\circ</math></p> <p>- Desarrollan diferentes actividades asenadas en Geogebra donde construyen los diferentes tipos de cuadriláteros y verifican las propiedades de cada uno (longitud de lados, ángulos, lados paralelos)</p>	
<p>S A L I D A</p>	<p style="text-align: center;"><b>METACOGNICION</b></p> <p>¿Qué aprendimos? ¿Cómo nos sentimos? ¿Qué cambios debo tener? ¿Cómo lo aprendimos?</p>	
<p><b>EVALUACION</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Participación de los niños y niñas a la larga del desarrollo de la sesión.</li> <li>- Desarrollo de la ficha de aplicación.</li> </ul>		



Profesor Andrés. Planificación Inicial

"Educar en Libertad, con Misericordia y Ternura"

SESIÓN DE APRENDIZAJE N.º 23

ÁREA	Matemática	FECHA	DEL 10/08/20 al 14/08/20
GRADO	1º Libertad - Verdad	CICLO	VI
DOCENTE			
ENFOQUE TRANSVERSAL MINEDU	ENFOQUE BUSQUEDA DE LA EXCELENCIA	ENFOQUE TRANSVERSAL MERCEDARIO	CREATIVIDAD, TRABAJO Y PRODUCCION
DISEÑO HOLÍSTICO DE EDUCACIÓN INTEGRAL LIBERADORA			
VALOR MERCEDARIO	ACTITUD N.º 1	ACTITUD N.º 2	
Responsabilidad	• Se esfuerza por cumplir y presentar sus trabajos y tareas a tiempo.	• Asiste e ingresa puntualmente a clase.	

I. MATRIZ DE CONTEXTUALIZACIÓN:

PROPÓSITO DIDÁCTICO			EVALUACIÓN			
COMPETENCIA DEL ÁREA	CAPACIDAD	HABILIDADES	DESEMPEÑO	DESEMPEÑO PRECISADO	TÉCNICA	INSTRUMENTO
Resuelve problemas de forma movimiento y localización	• Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas	Analiza Desarrolla Escucha Observa Relaciona Utiliza	• Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asocia estas características y las representa con formas bidimensionales compuestas y tridimensionales. Establece, también, relaciones de semejanza entre triángulos o figuras planas, y entre las propiedades del volumen, área y perímetro.	Analiza las propiedades de los cuadriláteros Aplica criterios para resolver situaciones planteadas con cuadriláteros	Observación y análisis	Separata de actividades
SE DESENVUELVE EN ENTORNOS VIRTUALES GENERADOS POR LAS TIC	- Gestiona información del entorno virtual. - Interactúa en entornos virtuales.	Analiza Desarrolla	Navega en diversos entornos virtuales recomendados adaptando funcionalidades básicas de acuerdo con sus necesidades de manera pertinente y responsable.	Aplica conocimientos matemáticos sobre los cuadriláteros y sus propiedades a través de la resolución de ejercicios propuestos en su material en Word.	Observación, explicación y análisis	Material y texto escolar

"Educar en Libertad, con Misericordia y Ternura"

II. SECUENCIA DIDÁCTICA:

	SECUENCIA DE LA ESTRATEGIA	RECURSOS	T
INICIO	Se dará la bienvenida a los estudiantes, a continuación se procede a tomar la asistencia, seguidamente se da una breve introducción al tema. <b>Propósito y organización:</b> Indicarle el propósito de la clase, que van a lograr Aplica las propiedades de los cuadriláteros a través de los ejercicios propuestos en su material de trabajo. <b>Saberes previos: Preguntas y lluvias de ideas</b> ¿Qué es un cuadrilátero? ¿Qué propiedades se cumplen en un cuadrilátero? ¿Cómo podemos resolver los casos presentados? ¿Qué estrategia utilizarías para resolver los casos presentados? ¿Cuáles son las reglas que se deben cumplir en estas figuras? <b>Conflicto cognitivo: preguntas:</b> ¿Podrías proponer algunos ejemplos de la operación en cuestión? ¿Cómo resolverías la siguiente situación mostrada? Se te presenta el material que se trabajará esa semana.		5'
PROCESO	<b>Gestión y acompañamiento: Desarrollo de la clase, desarrollo de ficha y acompañamiento</b> <b>Identifica</b> las propiedades de los cuadriláteros a través de la observación y escucha atenta al material de trabajo. <b>Relacionan</b> las propiedades de los cuadriláteros de forma adecuada a los casos mostrados. <b>Aplican</b> criterios de solución a los diferentes ejercicios propuestos de su material y texto escolar a partir de sus datos La sesión se llevará a cabo en la plataforma meet en un periodo de 45 minutos complementando la hora con consultas por mensajería de sweb o correo electrónico institucional. En esta sesión se dará la explicación a través de la pizarra virtual en la que se desarrollará la sesión y en la que los estudiantes podrán hacer uso también. Durante la sesión se hará un recibo de saberes previos se detallará los conceptos y se pondrán ejemplos prácticos así también se proyectará la separata virtualmente observando un determinado ejercicio que se desarrollará junto a todos los estudiantes. Asimismo se contabilizará su participación en el sistema de puntuación clasadojo, aquel que será también proyectado para los estudiantes. Al finalizar la semana se tomará una evaluación virtual de kahoot en donde cada estudiante marcará las alternativas que consideren adecuado a partir de las clases recibidas en la semana.	Separatas Cuaderno de apuntes	25'
SALIDA	<b>Evaluación:</b> El profesor realizará una retroalimentación y observaciones a los trabajos recibidos de manera inmediata así como la aplicación de una lista de cotejo de acuerdo a los envíos realizados por los estudiantes.		10'

Profesor Andrés. Planificación Modificada

"Educar en Libertad, con Misericordia y Ternura"

SESIÓN DE APRENDIZAJE N.º 23

ÁREA	Matemática	FECHA	DEL 10/08/20 al 14/08/20
GRADO	1º Libertad - Verdad	CICLO	VI
DOCENTE			
ENFOQUE TRANSVERSAL MINEDU	ENFOQUE BUSQUEDA DE LA EXCELENCIA	ENFOQUE TRANSVERSAL MERCEDARIO	CREATIVIDAD, TRABAJO Y PRODUCCIÓN
DISEÑO HOLÍSTICO DE EDUCACIÓN INTEGRAL LIBERADORA			
VALOR MERCEDARIO	ACTITUD N.º 1	ACTITUD N.º 2	
Responsabilidad	• Se esfuerza por cumplir y presentar sus trabajos y tareas a tiempo.	• Asiste e ingresa puntualmente a clase.	

I. MATRIZ DE CONTEXTUALIZACIÓN:

PROPOSITO DIDACTICO			EVALUACION			
COMPETENCIA DEL AREA	CAPACIDAD	HABILIDADES	DESEMPEÑO	DESEMPEÑO PRECISADO	TÉCNICA	INSTRUMENTO
Resuelve problemas de forma movimiento y localización	• Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas	Analiza Desarrolla Escucha Observa Relaciona Utiliza	• Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asocia estas características y las representa con formas bidimensionales compuestas y tridimensionales. Establece, también, relaciones de semejanza entre triángulos o figuras planas, y entre las propiedades del volumen, área y perímetro.	Analiza las propiedades de los cuadriláteros Aplica criterios para resolver situaciones planteadas con cuadriláteros	Observación y análisis	Separata de actividades
COMPETENCIA TRANSVERSAL	CAPACIDAD	HABILIDADES	DESEMPEÑO	DESEMPEÑO PRECISADO	TÉCNICA	INSTRUMENTO
SE DESENVUELVE EN ENTORNOS VIRTUALES GENERADOS POR LAS TIC	- Gestiona información del entorno virtual. - Interactúa en entornos virtuales.	Analiza Desarrolla	Navega en diversos entornos virtuales recomendados adaptando funcionalidades básicas de acuerdo con sus necesidades de manera pertinente y responsable.	Aplica conocimientos matemáticos sobre los cuadriláteros y sus propiedades a través de la resolución de ejercicios propuestos en su material en Word.	Observación, explicación y análisis	Material y texto escolar

"Educar en Libertad, con Misericordia y Ternura"

II. SECUENCIA DIDÁCTICA:

	SECUENCIA DE LA ESTRATEGIA	RECURSOS	T
INICIO	<p>Se dará la bienvenida a los estudiantes, a continuación se procede a tomar la asistencia, seguidamente se da una breve introducción al tema.</p> <p><b>Propósito y organización:</b> Indicarle el propósito de la clase, qué van a lograr</p> <p>Aplica las propiedades de los cuadriláteros a través de los ejercicios propuestos en su material de trabajo.</p> <p><b>Saberes previos: Preguntas y lluvias de Ideas</b></p> <p>¿Qué es un cuadrilátero? ¿Qué propiedades se cumplen en un cuadrilátero? ¿Cómo podemos resolver los casos presentados? ¿Qué estrategia utilizarías para resolver los casos presentados? ¿Cuáles son las reglas que se deben cumplir en estas figuras?</p> <p><b>Conflicto cognitivo: preguntas:</b> ¿Podrías proponer algunos ejemplos de la operación en cuestión?</p> <p>¿Cómo resolverías la siguiente situación mostrada? Se le presenta el material que se trabajara esa semana, utiliza el geoplano para construir nuevas figuras que cumplan la condición de ser cuadriláteros.</p>		5'
PROCESO	<p><b>Gestión y acompañamiento: Desarrollo de la clase, desarrollo de ficha y acompañamiento</b></p> <p>Identifica las propiedades de los cuadriláteros a través de la observación y escucha atenta al material de trabajo.</p> <p>Relacionan las propiedades de los cuadriláteros de forma adecuada a los casos mostrados y de los que construye a través del geoplano.</p> <p>Aplican criterios de solución a los diferentes ejercicios propuestos de su material y texto escolar a partir de sus datos y de los propuestos en GeoGebra.</p> <p>La sesión se llevará a cabo en la plataforma meet en un periodo de 45 minutos complementando la hora con consultas por mensajería de slideo o correo electrónico institucional.</p> <p>En esta sesión se dará la explicación a través de la pizarra virtual en la que se desarrollara la sesión y en la que los estudiantes podrán hacer uso también.</p> <p>Durante la sesión se hará un recuento de saberes previos se detallará los conceptos y se pondrán ejemplos prácticos así también se proyectará la separata virtualmente observando un determinado ejercicio que se desarrollará junto a todos los estudiantes, con uso de la tecnología.</p> <p>Asimismo se contabilizará su participación en el sistema de puntuación clasadojo, aquel que será también proyectado para los estudiantes.</p> <p>Al finalizar la semana se tomará una evaluación virtual de kahoot en donde cada estudiante marcará las alternativas que consideren adecuado a partir de las clases recibidas en la semana, utilizando la tecnología de GeoGebra.</p>	Separatas Cuaderno de apuntes	25'
SALIDA	<p><b>Evaluación:</b></p> <p>El profesor realizará una retroalimentación y observaciones a los trabajos recibidos de manera inmediata así como la aplicación de una lista de cotejo de acuerdo a los envíos realizados por los estudiantes.</p>		10'

## ANEXO 6

Cuestionario Inicial de los profesores Andrés y Sofía

		Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	Sé resolver mis problemas técnicos.				X	
2	Asimilo conocimientos tecnológicos fácilmente.				X	
3	Me mantengo al día de las nuevas tecnologías importantes.			X		
4	Conozco muchas tecnologías diferentes.			X		
5	Sé seleccionar tecnologías adecuadas para diferentes metodologías de enseñanza para una lección.				X	
6	Sé seleccionar tecnologías que mejoran el aprendizaje de los estudiantes en una lección.				X	
7	Puedo predecir cómo la tecnología afecta el proceso de aprendizaje de mis estudiantes.				X	
8	Adopto un pensamiento crítico sobre la forma de utilizar la tecnología en el aula.				X	
9	Puedo adaptar el uso de las tecnologías sobre las cuales estoy aprendiendo a diferentes actividades docentes				X	

10	Puedo usar diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas sobre cuadriláteros.				X	
11	Conozco tecnologías que puedo usar para comprender y elaborar material con contenidos sobre cuadriláteros.				X	
12	Sé seleccionar tecnologías para usar en el aula que mejoran los contenidos sobre cuadriláteros que imparto, la forma de impartirlos y lo que aprenden los estudiantes.				X	
13	Puedo impartir lecciones que combinan adecuadamente cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza.				X	
14	Sé usar e incluir, en mis materiales docentes para el aula, estrategias que combinan contenidos sobre cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza sobre los cuales he aprendido.				X	
15	Puedo guiar y ayudar a otros profesores a coordinar el uso de contenidos sobre cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza en mi centro educativo.				X	
16	He reflexionado sobre la forma en que la tecnología puede influir en la metodología de enseñanza que empleo en el aula para enseñar cuadriláteros.				X	

Explique cómo selecciona las tecnologías y metodologías de enseñanza que utiliza para enseñar cuadriláteros. Dé ejemplos de qué tecnologías y metodologías ha usado. \_\_\_\_\_ / 0

Utilice el software GeoGebra, algunas plataformas como Kahoot entre otros, los cuales a través de una sesión de clase puede organizar y llevar a cabo el fin que buscaba.

		Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	Sé resolver mis problemas técnicos.			X		
2	Asimilo conocimientos tecnológicos fácilmente.					X
3	Me mantengo al día de las nuevas tecnologías importantes.				X	
4	Conozco muchas tecnologías diferentes.				X	
5	Sé seleccionar tecnologías adecuadas para diferentes metodologías de enseñanza para una lección.				X	
6	Sé seleccionar tecnologías que mejoran el aprendizaje de los estudiantes en una lección.				X	
7	Puedo predecir cómo la tecnología afecta el proceso de aprendizaje de mis estudiantes.			X		
8	Adopto un pensamiento crítico sobre la forma de utilizar la tecnología en el aula.				X	
9	Puedo adaptar el uso de las tecnologías sobre las cuales estoy aprendiendo a diferentes actividades docentes				X	
10	Puedo usar diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas sobre cuadriláteros.			X		

11	Conozco tecnologías que puedo usar para comprender y elaborar material con contenidos sobre cuadriláteros.		X			
12	Sé seleccionar tecnologías para usar en el aula que mejoran los contenidos sobre cuadriláteros que imparto, la forma de impartirlos y lo que aprenden los estudiantes.			X		
13	Puedo impartir lecciones que combinan adecuadamente cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza.			X		
14	Sé usar e incluir, en mis materiales docentes para el aula, estrategias que combinan contenidos sobre cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza sobre los cuales he aprendido.			X		
15	Puedo guiar y ayudar a otros profesores a coordinar el uso de contenidos sobre cuadriláteros, tecnologías y metodologías de enseñanza en mi centro educativo.				X	
16	He reflexionado sobre la forma en que la tecnología puede influir en la metodología de enseñanza que empleo en el aula para enseñar cuadriláteros.				X	

Explique cómo selecciona las tecnologías y metodologías de enseñanza que utiliza para enseñar cuadriláteros. Dé ejemplos de qué tecnologías y metodologías ha usado. \_\_\_\_\_ / 0

Me ayudo en el material brindado por las editoriales como plataformas



## ANEXO 7

### Cuestionario Final de los profesores Andrés y Sofía

## REFLEXIÓN FINAL

A. Complete el siguiente cuadro sobre los artefactos digitales presentados en este taller

Artefacto Digital	La usaré para enseñar cuadriláteros SI o NO	Beneficio o desventaja con respecto a opciones sin tecnología	En caso de afirmativo, ¿Cómo planeo usarlo? ¿Qué desempeño u objetivo?
Geoplano digital	SI	En ambos casos la experiencia es diferente sin embargo la tecnología es motivante durante el aprendizaje.	Al momento de construir figuras diferentes en relacion a los tipos de cuadrilateros
Manipulativos Virtuales - Polypad	SI	Si es interesante utilizar formas diferentes de manejar los conceptos virtualizandolos	Al omento de realizar modificaciones a las figuras que se muestran
Nearpod	SI	Un buena plataforma de aprendizaje ludico	Al momento de interactuar y recordar propiedades de las figuras a modo de asimilación
GeoGebra Classroom	SI	Un buen software dinamico para mostrar variacioens de los objetos matematicos	Durante la profundizacion de algun concepto de cuadrilateros y la visualizacion de sus propiedades.
GeoGebra classic en línea			
Liveworksheets			

B. Marque con una "X" según su grado de acuerdo.

1: Totalmente en desacuerdo    2: En desacuerdo    3: Neutro    4: De acuerdo    5: Totalmente de acuerdo

	1	2	3	4	5
Me interesa continuar aprendiendo sobre estos y otros artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.					X
Ahora tengo más conocimientos útiles sobre artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.				X	
Implementaré los artefactos digitales vistos en este taller en mis sesiones sobre cuadriláteros.				X	
Conocer más sobre tecnología me permite integrar tecnología, estrategias de enseñanza y conocimientos sobre cuadriláteros en la planificación de la enseñanza				X	
Mis conocimientos sobre tecnología afectan la forma en la que planifico las sesiones de clases sobre cuadriláteros				X	
Mis conocimientos sobre tecnología afectan el aprendizaje de mis estudiantes sobre cuadriláteros				X	

C. Comentario o reflexión sobre mis conocimientos sobre tecnología.

¿Cómo afectan mis conocimientos sobre tecnología en la forma en la que enseño cuadriláteros?

Es muy interesante el uso de la tecnología ya que es determinante la forma en como se utiliza ya que puede ser un beneficio si se apoya en la planificación previamente pensada, o puede que no sea de un apoyo notable, en caso no pueda utilizar correctamente el estudiante este recurso, es por eso necesario la incorporación progresiva en su uso para que así los estudiantes posean cierto dominio que les permita y facilite la aplicación que quieren trabajar. Actualmente es necesario el uso de la tecnología por el contexto en que nos enmarcamos y el interés de los maestros tiene que visualizar a ese punto.

## REFLEXIÓN FINAL

A. Complete el siguiente cuadro sobre los artefactos digitales presentados en este taller

Artefacto Digital	La usaré para enseñar cuadriláteros SÍ o NO	Beneficio o desventaja con respecto a opciones sin tecnología	En caso de afirmativo, ¿Cómo planeo usarlo? ¿Qué desempeño u objetivo?
Geoplano digital	si	Es más atractivo y lúdico	Grafican cuadriláteros y los clasifican
Manipulativos Virtuales - Polypad	si	Es más atractivo y lúdico	Identifican los diferentes tipos de cuadriláteros
Nearpod	si	Es más atractivo y lúdico	Identifican los diferentes tipos de cuadriláteros
GeoGebra Classroom	no	GeoGebra classic tiene más opciones	
GeoGebra classic en línea	si	Es más atractivo y lúdico	Construyen cuadriláteros y verifican sus propiedades
Liveworksheets	no	GeoGebra classic tiene más opciones	



B. Marque con una "X" según su grado de acuerdo.

1: Totalmente en desacuerdo    2: En desacuerdo    3: Neutro    4: De acuerdo    5: Totalmente de acuerdo

	1	2	3	4	5
Me interesa continuar aprendiendo sobre estos y otros artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.	x				
Ahora tengo más conocimientos útiles sobre artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.	x				
Implementaré los artefactos digitales vistos en este taller en mis sesiones sobre cuadriláteros.	x				
Conocer más sobre tecnología me permite integrar tecnología, estrategias de enseñanza y conocimientos sobre cuadriláteros en la planificación de la enseñanza	x				
Mis conocimientos sobre tecnología afectan la forma en la que planifico las sesiones de clases sobre cuadriláteros				x	
Mis conocimientos sobre tecnología afectan el aprendizaje de mis estudiantes sobre cuadriláteros				x	

C. Comentario o reflexión sobre mis conocimientos sobre tecnología.

¿Cómo afectan mis conocimientos sobre tecnología en la forma en la que enseño cuadriláteros?

El uso de tecnología ayuda bastante en el logro de los desempeños buscados en nuestros estudiantes al ser una herramienta muy atrayente y a la vez simplifica mucho el trabajo.

Pero eso no quita que se deje de lado habilidades que también debemos desarrollar en nuestros alumnos como son el trazado de figuras y el uso de instrumentos de medición.