

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Una propuesta didáctica para generar la génesis instrumental de la función exponencial mediada por GeoGebra en estudiantes de secundaria

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Noel Esteban Espinoza Albino

Asesora:

Daysi Julissa García Cuéllar

Lima, 2023

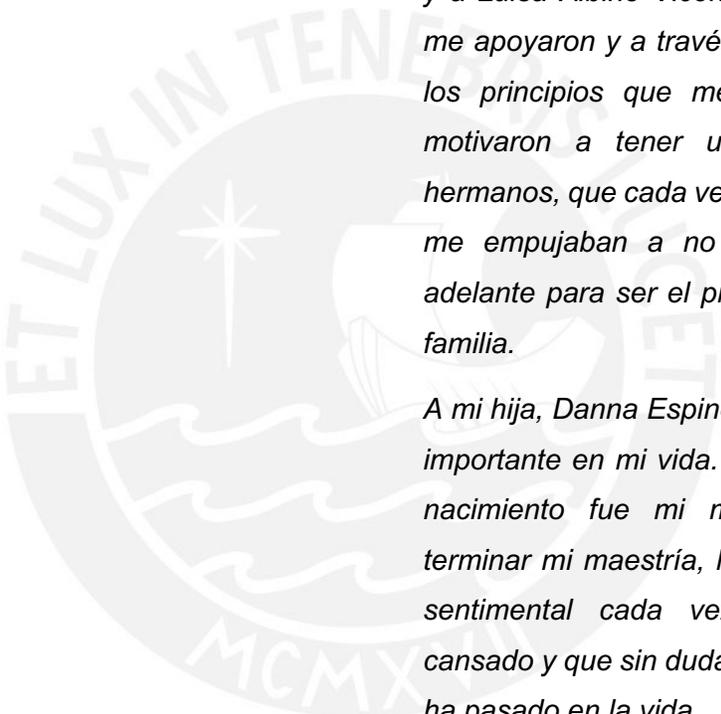
Declaración jurada de autenticidad

Yo, Daysi Julissa García Cuéllar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA GENERAR LA GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL MEDIADA POR GEOGEBRA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA, del autor Noel Esteban Espinoza Albino, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 16%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 22/04/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 23 de abril del 2023

Apellidos y nombres de la asesora: García Cuéllar, Daysi Julissa	
DNI: 41784433	Firma: 
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0243-6353	



A mis padres, Esteban Espinoza Carranza y a Luisa Albino Vicenta, los que siempre me apoyaron y a través de sus consejos y los principios que me enseñaron y me motivaron a tener un objetivo. A mis hermanos, que cada vez que dialogábamos me empujaban a no rendirme y seguir adelante para ser el primer magister de la familia.

A mi hija, Danna Espinoza, la persona más importante en mi vida. Desde el día de su nacimiento fue mi mayor motivo para terminar mi maestría, la que fue mi apoyo sentimental cada vez que me sentía cansado y que sin duda es lo mejor que me ha pasado en la vida.

AGRADECIMIENTOS

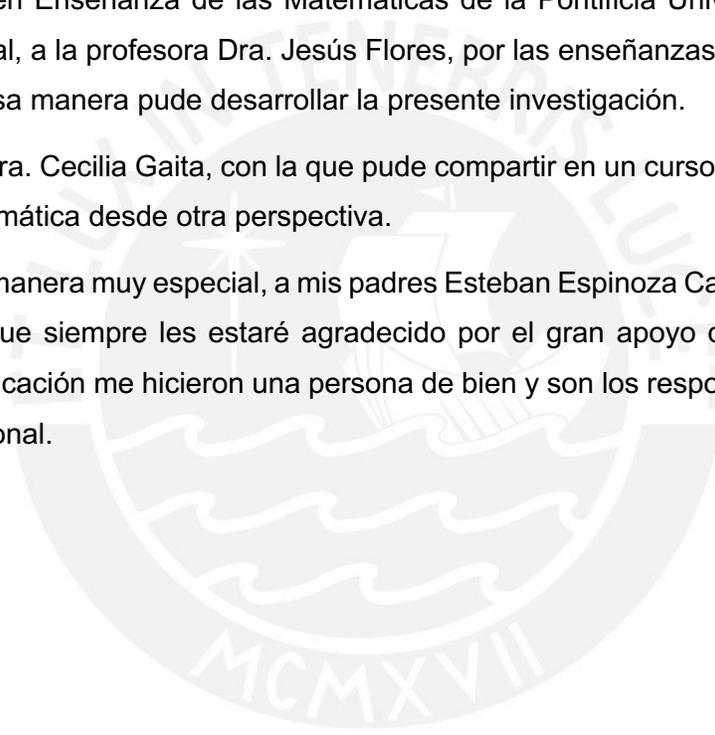
Un agradecimiento especial para mi asesora, la profesora Dra. Daysi García Cuéllar, por la paciencia en cada una de nuestras reuniones de asesoría. Remarco su enseñanza, ya que me hizo valorar más cada investigación estudiada.

Al jurado al profesor Dr. Mihály Martínez, que me ayudó con sus consejos cada vez que se lo pedía e hizo que tomara un gran interés en la interpretación de cada lectura y al profesor Mg. Nelson Peñaloza por las recomendaciones en cada avance presentado.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en especial, a la profesora Dra. Jesús Flores, por las enseñanzas y oportunidades que me brindó, de esa manera pude desarrollar la presente investigación.

A la profesora Dra. Cecilia Gaita, con la que pude compartir en un curso del primer ciclo y me hizo ver la Matemática desde otra perspectiva.

Finalmente, de manera muy especial, a mis padres Esteban Espinoza Carranza y Luisa Albino Vicenta, a los que siempre les estaré agradecido por el gran apoyo que me dieron y que gracias a su educación me hicieron una persona de bien y son los responsables que sea una persona profesional.



RESUMEN

El presente trabajo de investigación surge de una iniciativa de poder contribuir a la Enseñanza de la Matemática, en especial a la enseñanza de la Función Exponencial, nuestro objeto matemático, para estudiantes de secundaria que cursan el cuarto y quinto grado pertenecientes del ciclo VII reconocidas en la Educación Básica Regular (EBR). Según el Programa Curricular del Perú, existe un plan de estudio en el área de Matemáticas, cumpliendo la formación adecuada, tomando en cuenta las competencias y habilidades del Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN).

El objetivo de esta investigación es analizar cómo una propuesta de actividades permite generar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra en estudiantes del VII ciclo de secundaria. En esta investigación, el marco teórico es el enfoque instrumental de Rabardel (1995) y cuya metodología de investigación es cualitativa. Usaremos procesos metodológicos orientados al análisis de secuencias de actividades de la Función Exponencial mediada por GeoGebra.

Consideraremos cuatro fases de procesos metodológicos para la propuesta y tomaremos una actividad introductoria que permita explorar la herramienta tecnológica que ha sido elegida. Seguidamente consideraremos tres actividades para lograr la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra.

Finalmente, planteamos una propuesta didáctica para que el estudiante del ciclo VII del EBR. Después de analizar las actividades, se concluye que una herramienta tecnológica, como el software GeoGebra, facilita la enseñanza de la Función Exponencial.

Palabras clave: Génesis Instrumental; Artefacto; Esquemas de Utilización; GeoGebra.

ABSTRACT

The present research work arises from an initiative to be able to contribute to the Teaching of Mathematics, especially to the teaching of the Exponential Function, our mathematical object, for secondary school students who are in the fourth and fifth grade belonging to cycle VII recognized in Regular Basic Education (EBR). According to the Curriculum Program of Peru, there is a study plan in the area of Mathematics, fulfilling the appropriate training, taking into account the competencies and skills of the National Basic Curriculum Design (DCBN).

The objective of this research is to analyze how a proposal of activities allows to generate the Instrumental Genesis of the Exponential Function mediated by GeoGebra in students of the VII cycle of secondary school. In this research, the theoretical framework is the instrumental approach of Rabardel (1995) and whose research methodology is qualitative. We will use methodological processes oriented to the analysis of sequences of activities of the Exponential Function mediated by GeoGebra.

We will consider four phases of methodological processes for the proposal and we will take an introductory activity that allows us to explore the technological tool that has been chosen. Next we will consider three activities to achieve the Instrumental Genesis of the Exponential Function mediated by GeoGebra.

Finally, we propose a didactic proposal for the student of cycle VII of the EBR. After analyzing the activities, it is concluded that a technological tool, such as the GeoGebra software, facilitates the teaching of the Exponential Function.

Keywords: Instrumental Genesis; Artifact; Utilization Schemes; GeoGebra.

ÍNDICE

RESUMEN 1

INTRODUCCIÓN.....	7
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA	9
1.1 Antecedentes.....	9
1.2 Justificación	20
1.3 Enfoque Instrumental.....	22
1.4 Pregunta y objetivos de investigación	25
1.5 Metodología y procesos metodológicos	26
CAPÍTULO II: ESTUDIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.....	29
2.1 Aspectos históricos relacionados a la Función Exponencial	29
2.2 Aspectos matemáticos de la Función Exponencial	33
2.3 Estudio de la Función Exponencial en el currículo peruano y en los libros didácticos.....	37
CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN.....	47
3.1 Descripción de la propuesta didáctica	47
3.2 Análisis de la propuesta de actividades.....	66
Consideraciones finales	76
REFERENCIAS.....	78
ANEXOS 82	

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	<i>Caracterización de potencias con exponentes racionales.....</i>	30
Tabla 2.	<i>Resultados de una potencia de base 2.</i>	31
Tabla 3.	<i>Nivel de competencia de estudiantes de quinto grado de secundaria.</i>	37
Tabla 4.	<i>Descripción de las actividades.....</i>	47
Tabla 5.	<i>Número de opciones de cada comando del GeoGebra</i>	48
Tabla 6.	<i>Solución de Tarea 3 de la actividad 0</i>	52
Tabla 7.	<i>Solución de la tarea 3 de la actividad 0.....</i>	53
Tabla 8.	<i>Valores asignados para “X” e “Y” para la actividad 0. Pregunta 4.</i>	54
Tabla 9.	<i>Asignación de números para $a > 1$.....</i>	57
Tabla 10.	<i>Reconocimiento de la característica para $a > 1$.....</i>	57
Tabla 11.	<i>Asignación de números para $a < 1$.....</i>	58
Tabla 12.	<i>Reconocimiento de la característica para $0 < a < 1$.</i>	58
Tabla 13.	<i>Números de contagiados por Covid 19 en el Perú según el número de día de iniciar la pandemia.</i>	61
Tabla 14.	<i>Promedio diario de casos de personas confirmados del Covid 19 en el Perú.</i>	63
Tabla 15.	<i>Promedio diario de casos de personas confirmados del Covid 19 en el Perú.</i>	89

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. <i>Desarrollo de los esquemas de utilización</i>	24
Figura 2. <i>Fases de la investigación cualitativa</i>	26
Figura 3. <i>Procesos metodológicos de la investigación cualitativa</i>	27
Figura 4. <i>Gráfico de la Función Exponencial cuando $\alpha > 1$</i>	35
Figura 5. <i>Gráfico de la Función Exponencial creciente y decreciente</i>	35
Figura 6. <i>Definición de la Función Exponencial y sus propiedades</i>	39
Figura 7. <i>Propiedades de la Función Exponencial</i>	39
Figura 8. <i>Definición de la Función Exponencial y logaritmo natural</i>	40
Figura 9. <i>Aproximación del número e</i>	40
Figura 10. <i>Elaboración y analizar la gráfica de la Función Exponencial</i>	41
Figura 11. <i>Solución propuesta para analizar la gráfica una Función Exponencial</i>	41
Figura 12. <i>Representar la gráfica de la Función Exponencial e y la función de logaritmo natural</i>	42
Figura 13. <i>Técnica utilizada para representar la gráfica una Función Exponencial y la función logaritmo natural</i>	42
Figura 14. <i>Definición de la Función Exponencial</i>	43
Figura 15. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial</i>	43
Figura 16. <i>Tarea de tabular y representar gráficamente la Función Exponencial</i>	44
Figura 17. <i>Desarrollo de la tabulación y la representación gráfica de la Función Exponencial</i>	44
Figura 18. <i>Definición de la Función Exponencial y su gráfica en el libro escolar 3</i>	45
Figura 19. <i>Tarea de graficar la Función Exponencial, dominio y rango</i>	46
Figura 20. <i>Obtención de la regla de correspondencia de la Función Exponencial</i>	46
Figura 21. <i>Comandos del software GeoGebra</i>	48

Figura 22. <i>Exploración al software GeoGebra. Pregunta 1b.</i>	49
Figura 23. <i>Propiedades del software GeoGebra</i>	50
Figura 24. <i>Exploración al software GeoGebra. Tarea 2 de la actividad 0.</i>	51
Figura 25. <i>Actividad para explorar el GeoGebra. Tarea 3 de la actividad 0.</i>	51
Figura 26. <i>Exploración al software GeoGebra. Tarea 3 de la actividad 0.</i>	52
Figura 27. <i>Actividad para explorar el GeoGebra. Tarea 3 de la actividad 0.</i>	53
Figura 28. <i>Ubicación de los puntos en el plano del GeoGebra.</i>	53
Figura 29. <i>Uso de la propiedad vista del GeoGebra.</i>	55
Figura 30. <i>Creación de la lista de puntos en el GeoGebra.</i>	55
Figura 31. <i>Representación gráfica de la lista de puntos.</i>	56
Figura 32. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial cuando es creciente.</i>	57
Figura 33. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial cuando es decreciente. ..</i>	58
Figura 34. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial cuando $b < 0$.</i>	59
Figura 35. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial cuando $b = 0$.</i>	59
Figura 36. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial cuando $b > 0$.</i>	60
Figura 37. <i>Crecimiento de personas contagiados por Covid 19 en el Perú.</i>	61
Figura 38. <i>Representación de la lista de puntos colocados en el GeoGebra.</i>	64
Figura 39. <i>Representación gráfica de la Función Exponencial usando el comando <code>AjusteBaseExponencial</code> del GeoGebra.</i>	65

INTRODUCCIÓN

Esta investigación consta de tres capítulos, en donde se menciona el concepto Función Exponencial, considerado en la presente investigación como nuestro objeto matemático.

En el capítulo 1, abordaremos estudios de referencia relacionados con la Función Exponencial; la justificación de la investigación; la elección de la teoría de la génesis instrumental; así como la pregunta y objetivos de la investigación. Por último, mencionaremos la metodología y procesos metodológicos.

En primer término, tomaremos como referencia las investigaciones de Sureda y Otero (2013), que describen el proceso de conceptualización de las funciones exponenciales priorizando la participación del estudiante. También estudiaremos investigación de Makgakga y Sepeng (2013) que permite usar el enfoque de transformación curricular en la enseñanza y aprendizaje de la Función Exponencial en el aula. Tomando en cuenta la educación escolar, consideraremos la investigación de Fonseca (2013) y Brucki (2011), ya que señalan que la Función Exponencial puede ser relacionada con otros temas de Matemática para facilitar su entendimiento con teorías básicas sobre la enseñanza y aprendizaje de esta función.

Analizamos las competencias y capacidades de los últimos grados del Currículo Nacional del Perú. Además, tomamos como antecedente al estudio de García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018) que tiene el objetivo de analizar cómo los estudiantes del primer semestre de la Universidad de Lima logran alcanzar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial. Otro antecedente que consideraremos es la de Dorado y Díaz (2014), que utilizan la Función Exponencial con el fin que los estudiantes solucionen problemas abordando situaciones de la vida cotidiana.

La elección de la Función Exponencial como objeto matemático de nuestra investigación se justifica por el importante papel que tiene en el currículo de Educación Secundaria en el nivel del ciclo VII y por ser base fundamental para los estudiantes en los primeros cursos de diferentes universidades, tanto nacionales como particulares. La literatura de Educación matemática informa sobre la importancia de comprender la Función Exponencial, tanto para su construcción de significados como en su aplicación en diversos contextos.

Esta misma revisión bibliográfica, hace evidente algunas dificultades que demuestran los estudiantes durante la resolución de tareas orientadas al estudio o al desarrollar el concepto de la Función Exponencial.

Asimismo, presentaremos la pregunta y objetivos que guiarán la presente investigación, en la que también explicaremos los aspectos teóricos y metodológicos considerados.

En el Capítulo 2, desarrollaremos los aspectos matemáticos e históricos de las funciones exponenciales y aspectos pedagógicos que se encuentran en textos didácticos que son usados para el nivel escolar. Consideraremos textos escolares del VII ciclo de la Educación Básica Regular (EBR) como Oblea (2016), Santillana (2020) y Ojeda (2020), en la que compararemos las definiciones y propiedades de la Función Exponencial y textos universitarios como Lima (2013) y Maor (2008), en donde analizaremos la representación de la Función Exponencial y la Curva Exponencial.

Y por último el tercer capítulo, abordaremos en la experimentación. Es decir, lo que representa un escenario y los objetos de investigación con los que se pretende trabajar con estudiantes escolares del ciclo VII de la Educación Básica Regular (EBR); la propuesta didáctica que está compuesta por actividades; y el análisis de las acciones matemáticas.

Elaboraremos una propuesta con cuatro actividades, la primera es llamada *actividad cero*, donde se requiere que el estudiante se familiarice con ciertas herramientas de GeoGebra. En la segunda actividad, analizaremos cada una de ellas por medio del enfoque instrumental, obteniéndose la técnica esperada y los esquemas de uso y acción instrumentada y en la tercera y cuarta actividad presentaremos problemas contextualizados relacionados al COVID 19.

Finalmente, presentaremos los hallazgos de la investigación, junto con las consideraciones finales y las perspectivas para futuras investigaciones.

En nuestra investigación, consideraremos el enfoque instrumental de Rabardel (1995), donde nuestra elección de metodología es cualitativa. Los procesos metodológicos orientan el análisis de secuencias de actividades de la Función Exponencial mediada por GeoGebra.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este primer capítulo, presentamos los estudios de referencia sobre nuestro objeto matemático, la Función Exponencial; la justificación de la investigación; los aspectos teóricos fundamentados en el Enfoque Instrumental; nuestra pregunta y los objetivos de investigación y; finalmente, presentamos los aspectos metodológicos.

1.1 Antecedentes

La Función Exponencial es uno de los temas del currículo peruano en la Educación Básica, así como también en algunas carreras de la Educación Universitaria. En el Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN), dado por el Ministerio de Educación del Perú, se sugiere abordar la Función Exponencial en cuarto y quinto grado de secundaria, que pertenecen al ciclo VII de la Educación Básica Regular (EBR) mediante gráficas y representaciones de funciones exponenciales.

A nivel universitario, el estudio realizado por García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018) tiene por objetivo analizar cómo estudiantes de la Universidad de Lima durante el primer semestre logran alcanzar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial. El marco teórico de este artículo es el enfoque instrumental de Rabardel (1995), que analiza los procesos de instrumentalización e instrumentación del objeto de estudio y, y para el marco metodológico utiliza aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), centrando la atención en el análisis a priori y a posteriori.

García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018) realizan la experiencia desde la sala de cómputo de la Universidad de Lima con 11 estudiantes de la carrera de Administración, en el curso de Matemática Básica. En ella, se elaboran dos actividades y se analizan las respuestas de uno de los estudiantes, quien fue uno de los participantes en la parte experimental, porque nunca había conocido la Función Exponencial ni sus propiedades, considerado un artefacto para él.

En la primera actividad se enfoca en la construcción de esquemas de uso y de acción instrumentada, como reconocer la monotonía de la función a partir del valor de la base, la existencia de asíntotas horizontales, entre otros; y, la segunda actividad, se diseña para evidenciar la transformación de artefacto a instrumento en un problema de contexto.

A partir de la ingeniería didáctica utilizada en el análisis, los investigadores afirman que el estudiante del primer semestre si logró la Génesis Instrumental de la Función Exponencial. Se evidencia también como el estudiante construyó significados de los

parámetros de la Función Exponencial en el proceso de instrumentalización, incorporó a su aprendizaje algunas propiedades de la función estudiada. Es decir, desarrolló esquemas de acción instrumentada. Del mismo modo, el estudiante transformó el artefacto Función Exponencial en instrumento al desarrollar un problema de contexto; utilizó como un instrumento la noción de la Función Exponencial para describir la situación planteada, en donde se realizó la Génesis Instrumental de la Función Exponencial.

El uso de tecnologías digitales es recomendado por García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018), en particular el uso del GeoGebra, dado que puede adaptarse en enseñar y aprender diferentes objetos matemáticos. En palabras de los autores “las herramientas del GeoGebra facilitaron la instrumentalización de la Función Exponencial, pues cuando el estudiante movilizaba los deslizadores conjeturaba algunas propiedades y/o características de dicho objeto matemático” (García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2018, p. 259).

Otro estudio en el que se hace uso de tecnologías digitales es el de Paveis (2016), donde los estudiantes realizan construcciones gráficas a través de la calculadora y tablas de hojas de cálculo del software GeoGebra. El objetivo principal del trabajo es realizar una propuesta de actividades que ayude a explorar y estudiar las definiciones y aplicaciones de la Función Exponencial con ayuda de GeoGebra, despertando el interés del estudiante en identificar los fenómenos naturales de base a que podrían aumentar o disminuir de forma exponencial, teniendo como representación algebraica las siguientes expresiones $y = a^x$, $y = a^x + c$ e $y = ba^x + c$, que también se pueden relacionar con la curva de la Función Exponencial que es considerada la gráfica de la misma función.

El investigador propone elaborar construcciones gráficas, así como también el uso de tablas en hojas de cálculo del GeoGebra para que se pueda facilitar el cálculo de una o más potencias y en la modelización de la Función Exponencial para identificar algunos puntos pertenecientes a ella.

En esta investigación, las actividades propuestas están dirigidas para estudiantes de primer año de secundaria (13 a 14 años), realizadas con un plan de estudios que pronostica el trabajo de los conceptos generales de las funciones exponenciales. La propuesta didáctica está diseñada para la utilización de lápiz, regla y papel, así como para hacer uso de GeoGebra en el desarrollo de las cinco actividades que tuvieron un tiempo previsto para cinco clases de 50 minutos cada una. En la última actividad, se utilizan dispositivos tecnológicos como los teléfonos celulares y/o tabletas, de manera que los estudiantes puedan desarrollar la actividad en grupos de dos y tres personas en dos clases.

Paveis (2016) considera que GeoGebra es una herramienta tecnológica que ayuda para el estudio de las funciones exponenciales, centrándose no solo del trabajo en el aula, sino también en la ejecución de actividades relacionadas con la vida real.

En la investigación del autor, se espera que el uso del software pueda hacer que el estudiante sea capaz de mejorar sus conocimientos, pues con ello busca despertar el interés en la búsqueda y exploración de programas tecnológicos en factores que sean relevantes en la educación escolar. A medida en que se familiarizaron con el software, los sujetos de estudio adquirieron diversas destrezas de manejo, con los que posiblemente tengan una respuesta positiva y satisfactoria respecto a los contenidos ya tratados y trabajados con el profesor.

Por otro lado, el estudio realizado por Dorado y Díaz (2014) tiene por objetivo utilizar la Función Exponencial como un medio para comprender y contribuir al desarrollo de solucionar problemas de la vida real por parte del estudiante. Los investigadores recalcan que la modelización matemática es importante para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

En la investigación, se consideran dos etapas: la primera es la resolución de problemas, enfocándose en las estrategias que usaban los estudiantes al resolverlos y la segunda etapa es donde los estudiantes utilizan y aplican los conocimientos básicos y generales a situaciones problemáticas.

La Función Exponencial trabajada en esta investigación considera que la base de la Función Exponencial es un parámetro asociado al crecimiento de esta función. El potencial de la Función Exponencial puede ser considerado a la hora de diseñar procesos didácticos con el fin de mejorar la enseñanza de este concepto matemático. Hemos considerado como referencia a la investigación de los autores porque utilizan el GeoGebra para mostrar el potencial de los parámetros de la Función Exponencial.

Según Bosch (2013, como se citó en Dorado y Díaz, 2014), indica que el problema de la educación Matemática tradicional es que se proporcionan instrumentos ya contruidos, sin especificar su origen y se evita con ello que los estudiantes logren obtener ciertos conocimientos matemáticos en el nivel escolar, así como en los otros niveles educativos, ocasionando la pérdida de interés del curso.

Por este motivo, Dorado y Díaz, (2014) diseñan un dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación (REI), inmersa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), donde utilizan a la Función Exponencial como un modelo matemático.

Dorado y Díaz (2014) realizan la experiencia con alumnos del primer año de la carrera de Químico Biólogo Clínico que cursan la materia de Cálculo en la Universidad de Sonora, donde implementan estudios y vías investigación para modelar los problemas de crecimiento bacteriano, problema de interés en dicha carrera.

Las actividades para estudiar bacterias están diseñadas para permitir a los estudiantes desarrollar las construcciones matemáticas. Para ello, propio de la teoría, se utiliza la cuestión de generatriz, que es apto de crear actividades matemáticas con variedad de crecimiento y requieren que el estudiante se comprometa personalmente con la resolución de problemas.

Para que el instructor presente la cuestión generatriz del REI, se generó un medio (*milieu*) adecuado a través de preguntas y respuestas basadas en la información relevante y que relaciona en la descripción del REI, que consiste en la capacidad de realizar conexiones entre diferentes partes. Se puede decir que este recorrido permite que la construcción de la Función Exponencial comience, por así decirlo, con el proceso de que varios estudiantes intentaron responder la cuestión generatriz a través de una actividad matemática con un grado de complejidad creciente, para que así cada estudiante tuviera el compromiso de resolverlo.

Dorado y Díaz (2014) promueven el uso del GeoGebra para enriquecer el desarrollo del REI, destacando que el uso de deslizadores evidencia el efecto de diferentes variaciones de los parámetros del modelo algebraico resultante y clarifica su importancia.

Con relación a la adquisición del concepto de la Función Exponencial, la investigación de Sureda y Otero (2013) tiene por objetivo describir el proceso de conceptualización de las funciones exponenciales, priorizando la participación del estudiante al realizar construcciones matemáticas para desarrollar invariantes explícitas. Estas construcciones se pueden experimentar a través de tareas donde es factible representar de diferente manera los conocimientos adquiridos.

Según Vergnaud (1990, como se citó en Sureda y Otero, 2013, p.133) es importante señalar que “es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver, es como un concepto adquiere sentido para el estudiante”.

Sureda y Otero (2013) basan su estudio tomando aspectos de la teoría de los Campos Conceptuales para identificar características de conceptualizadas de la Función Exponencial, que son relevantes en la educación secundaria de Argentina, posibilitando que los estudiantes expresen un conocimiento explícito en sus resoluciones de problemas a partir de cinco sistemas de representación, los cuales son categorizados por las autoras

de la siguiente manera: Sistema de Representación Numérica (SRN), Sistema de Representación Algebraica de Primer Orden (SRA1), Sistema de Representación Algebraica de Segundo Orden (SRA2), Sistema de Gráficos Analíticos (SRG), y Sistema Verbal Escrita (SRVE).

La parte experimental la realizaron con 115 estudiantes de nivel secundario de edades entre 15 a 16 años, divididos en cuatro grupos, de 10 escenarios, dos de síntesis, tres de ejercicios de aplicación y una de evaluación para explicar la definición y propiedades de Función Exponencial. Debido al proceso de conceptualización, manejan el concepto de tareas de situaciones, por lo que se diseñaron los sistemas de representación señalados en el párrafo anterior.

Sureda y Otero (2013) reconocen que la conceptualización de la Función Exponencial es un proceso de cinco etapas: (I) lineal, cuando el trabajo realizado es totalmente lineal en todas las representaciones; (II) parcialmente lineal, es cuando la respuesta es no lineal o semilineal en tanto solo un sistema de representación; (III) *no lineal*, cuando el resultado de trabajo no es completamente lineal; (IV) *parcialmente exponencial*, lo que significa que resultado exponencial ocurre en al menos un sistema de representación; y (V) *exponencial*, es cuando su resultado es exponencial en todos los sistemas de representación. Estas etapas aparecen en los diferentes sistemas de representación, lo cual evidencia que la Función Exponencial es un concepto matemático complejo y de allí la necesidad de trabajarlo en diferentes representaciones.

Sureda y Otero (2013) concluyen que el proceso de conceptualización de la Función Exponencial es progresivo, ya que los estudiantes transitan los esquemas lineales e inclusive los esquemas exponenciales relacionados a los diversos sistemas de representación. Destacan que el estudiante no conceptualiza directamente a la Función Exponencial, los conceptos de linealidad aparecen y forman parte del desarrollo del estudiante en cada sistema de representación.

Uno de los antecedentes tomados en cuenta en esta investigación es la propuesta de Makgakga y Sepeng (2013) que tiene por objetivo usar un enfoque transformador para la enseñanza y el aprendizaje, incluido un intento de aumentar la comprensión del concepto de funciones exponenciales y logarítmicas a cada aula de Matemática, con la que se busca ayudar a los maestros a emplear pedagogías efectivas en sus clases.

En este estudio se discute sobre las funciones exponenciales y logarítmicas usando un enfoque de transformación, que implica en enseñar y aprender las funciones

mencionadas por medio de las transformaciones, como rotación, traslación y reflexión. Además, se enfoca en la solución de problemas de los objetos matemáticos mencionados.

Makgakga y Sepeng (2013) opinan que las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas son dos temas que se perciben como conectados, por lo que la Función Exponencial tiene relación con otros conceptos matemáticos, uno de ellos es la función logarítmica. Webber (2002, como se citó en Makgakga y Sepeng, 2013) afirma que las funciones exponenciales y logarítmicas son conceptos importantes que juegan un papel fundamental en los cursos de Matemática, incluyendo Cálculo, Ecuaciones diferenciales y Análisis complejo.

Los autores consideran funciones exponenciales expresadas como $f(x) = c \cdot a^x$ ó $y = a^x$, donde el parámetro "a" es una base que es un número positivo que pertenece a los reales y es diferente de 1, y el parámetro c de la función $f(x)$ que es el intercepto de la gráfica de $f(x)$ con el eje "y". Ante esto, Makgakga y Sepeng (2013) diseñan un método de enseñanza constituido por saberes previos, la participación del estudiante y, por último, la evaluación.

Los autores, para disminuir las dificultades que enfrentan los estudiantes en la resolución de problemas que involucran funciones exponenciales, describen cuatro pasos que debería seguir un estudiante para resolver los problemas de forma efectiva y así tener condiciones de representar algebraica o gráficamente a una Función Exponencial: identificar y comprender el problema; desarrollar un plan; ejecutar el plan y evaluar. En forma de resumen, los estudiantes deben identificar o conocer el problema para comprenderlo, a fin de dividirlo en trozos más pequeños para analizarlo y luego reflexionar para obtener una conclusión o resultado.

La investigación cualitativa se realizó con una muestra de 38 grupos experimentales y 40 grupos de estudiantes de grado 12 (entre 20 y 40 años) de dos diferentes escuelas y se presentó una prueba que incluyó ítems de cómo dibujar funciones exponenciales, analizarlas e interpretarlas.

Se aplicaron dos pruebas, una que fue administrada antes del estudio y otra después de la intervención. En la parte experimental, hubo estudiantes con resultados negativos, ya que 25 de 38 estudiantes lograron dibujar las funciones exponenciales y lograron responder preguntas basadas en la interpretación de las funciones exponenciales, teniendo una nota máxima de 52% y la nota más baja de 11%. Estos resultados evidenciaron que los alumnos tenían la dificultad para aprender las funciones

exponenciales, lo que llevó a los investigadores explorar en el enfoque de transformación en la enseñanza y el aprendizaje con este concepto.

El enfoque de transformación implica reforzar la comprensión de un concepto y se utiliza para enseñar y aprender la Función Exponencial, que desempeñó un papel importante en el estudio de Makgakga y Sepeng (2013). El enfoque fue acertado debido a que los estudiantes mejoraron su rendimiento académico cuando se les presentó conceptos como las funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

Los descubrimientos de este estudio sugirieron que los estudiantes en el grupo experimental pudieron analizar e interpretar cualquier Función Exponencial dada para resolver los problemas. Se toma como antecedente esta investigación, ya que obtuvo resultados que revelan que el enfoque de transformación es útil y podría usarse para la enseñanza de cualquier tema que tenga relación con las funciones.

El trabajo de Masetti (2016) tiene como objetivo identificar cómo las funciones exponenciales son tratadas en los textos escolares brasileños de Matemáticas proporcionados por el Programa Nacional de Libros de Texto (PNLD), con la voluntad de analizar conceptos, procedimientos y lenguaje y argumentos matemáticos de estos libros. En el mismo, se utiliza la metodología cualitativa y la técnica de análisis de documentos.

En este estudio, los libros de Matemáticas ofrecen a los profesores situaciones contextualizadas de la vida real, las Matemáticas y otras ciencias, lo que permitió insertar el concepto de Función Exponencial dentro de un contexto real.

En la investigación, se identifica que la Función Exponencial es representada en diferentes formas, como gráfica, algebraica y tabular. En los libros texto donde analizan la Función Exponencial, encuentra una cantidad mínima de resolución de tareas que necesitan ser modeladas para obtener una solución, pero no encuentra ninguna tarea que lleve a los estudiantes deducir las propiedades de Función Exponencial porque el énfasis está en marcha el álgebra.

Masetti (2016) concluye que los libros de texto ofrecen situaciones de diversos contextos (de la vida real, matemáticos y otras ciencias), para que los profesores busquen interdisciplinariedad que provoque el interés de los estudiantes por el estudio de la Función Exponencial; sin embargo, en la mayoría de estas situaciones, en los libros de texto, ya están modeladas, por lo cual los estudiantes apenas sustituyen los valores en la expresión algebraica, lo que produce la pérdida de interés investigativo.

Una de las investigaciones que guarda relación con nuestra propuesta de investigación es la de Fonseca (2013), que tiene como objetivo identificar el significado

previsto de las funciones exponenciales en los libros de texto y analizar entidades primarias, como el lenguaje, proposiciones y argumentos de la Función Exponencial.

La investigación de Fonseca (2013) aborda las funciones exponenciales en libros de textos escolares del duodécimo curso de Matemáticas de Portugal, su objeto matemático es la Función Exponencial, que es el mismo de nuestra investigación, con la diferencia que la Función Exponencial lo consideramos como un artefacto simbólico.

La autora realiza un estudio usando la metodología cualitativa y la técnica de análisis de documentos, donde el instrumento de categorización de datos era una cuadrícula de analizar, cuya descripción se puede dar a través de situaciones matemáticas, conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguajes, literatura y argumentos para la recolección de los datos en un determinado análisis. En cuanto a situaciones matemáticas, se puede contabilizar las tareas sugeridas por los profesores a los estudiantes para que estos demuestren y apliquen su conocimiento de la Función Exponencial, así como también podrán analizar la adecuación didáctica de las funciones exponenciales y logarítmicas.

La autora estudia cómo las funciones exponenciales y logarítmicas están integradas en los libros de textos escolares del duodécimo año de Matemáticas de Portugal, que contienen temas relacionados con el estudio del Álgebra y a las funciones que los estudiantes deben experimentar en diferentes niveles de aprendizaje en situaciones de la educación secundaria que sirvan como base fundamental en algunos cursos de la educación superior.

En cuanto a la adecuación didáctica de funciones exponenciales y logarítmicas en los textos escolares, la autora concluye que existe la adecuación en el tema, ya que se analizaron seis manuales: (i) situaciones, (ii) lenguaje, (iii) conceptos, (iv) proposiciones, (v) procedimientos y (vi) argumentos, debido a que las situaciones se distinguen de los ejemplos resueltos y tareas propuestas para que el alumno las resuelva.

En la investigación, la autora utiliza un lenguaje de forma verbal, gráfica, algebraica, entre otros. Los conceptos se introducen mediante una única definición y es formal o intuitiva, en las proposiciones se verifica si las exposiciones son formales o intuitivas. En los procedimientos, analiza si se utilizan para resolver la situación o uno en cada caso. En los argumentos, analiza si usan una práctica discursiva para convencer a cualquier investigador de la validez de las proposiciones determinadas.

El estudio de Brucki (2011) tiene como objetivo principal analizar los efectos de un modelo matemático en la docencia, el cual consiste en presentar una actividad con relación al modelo algebraico de la Función Exponencial y así favorecer el significado del concepto.

Esta investigación forma parte de los estudios acerca del uso del modelo algebraico que se destaca en la formación del estudiante y de esa manera se establece el contenido matemático.

Para la parte experimental, toma como sujetos de estudio a 14 estudiantes regulares de primer año de media (entre 12 y 13 de edad) en una institución pública de São Paulo y la actividad se desarrolló usando la progresión geométrica para construir el concepto de la Función Exponencial y lograr obtener un aprendizaje significativo.

En las conclusiones de este estudio, Brucki (2011) menciona que el uso del modelo en el aula reforzó las acciones de controlar la complejidad de la metodología de aprendizaje, ya que necesitó reformular las actividades para lograr sus objetivos. La elección de un modelo matemático de una Función Exponencial no es una motivación para los estudiantes, sino para permitir un aprendizaje reflexivo. Para resolver la actividad, la investigadora se propuso aplicar el significado de la mitad de una magnitud física en cada clase con un tiempo aproximado de 50 minutos y sin interrupciones.

En la investigación de Velásquez (2014), se analizan las prácticas matemáticas realizadas en el aprendizaje de funciones exponenciales. Estas prácticas fueron ofrecidas en diversos cursos como el de la introducción al Cálculo dirigido para carreras de Letras y de análisis matemático para estudiantes de Ingeniería.

En este estudio, toma un grupo de cuatro profesores utilizando el análisis didáctico incluido en el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), a los que les aplicó una entrevista y un cuestionario que surgieron del análisis de practicar la Función Exponencial. El objetivo del autor fue identificar las creencias y aproximaciones de las ideas de cuatro profesores respecto al desarrollo para enseñar la Función Exponencial en cursos de matemáticas como el pre – Cálculo.

En el estudio, el autor identificó las percepciones que los maestros tenían de la Función Exponencial. Una de ellas fue que la Función Exponencial es una idea real de crecimiento, así como el reconocimiento de que, para cualquier Función Exponencial, de tener asíntota, esta nunca sería horizontal.

El investigador utiliza la metodología de tipo cualitativa buscando describir y explicar los fenómenos sociales y educativos. La idea del autor, de interpretar sus resultados acerca de las creencias de los profesores que dictaban en diferentes instituciones del Perú, hizo que los educandos aprendan a tabular y representar funciones exponenciales de forma básica.

En el estudio de Vivas (2020) tuvo como objetivo se analizó el Desarrollo Matemático de los estudiantes de Humanidades al desarrollar tareas sobre la Función Exponencial, siendo esto su objetivo principal, y basándose en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), cuya metodología es cualitativa y eligió el análisis del trabajo personal de Kuzniak y Nechache (2016) como su método de investigación. El método utilizado por Vivas (2020) se profundizó en la comprensión del trabajo matemático personal.

Para la parte experimental, Vivas (2020) considera a estudiantes de Humanidades cuyo rango de edad es de 16 y 18 años pertenecientes al primer semestre, y elabora una tarea de dos preguntas, cuya caracterización fue representativa, debido a que permite que los estudiantes tengan la capacidad de elegir herramientas del ETM y así se brinda mucha utilidad para enfrentarse a cualquier problema y en adelante se han usados correctamente como instrumentos y logren solucionar cualquier tarea.

En la investigación de Vivas (2020), se constata la activación de orígenes semióticos, instrumentales y discursivos. Destacamos que de las actividades repetimos con mayor frecuencia el origen semiótico, ya que es una referencia teórica, así como también se constata la activación de planos verticales semiótico-instrumental. Este estudio se considera como referencia destacada en nuestra investigación debido a que utiliza el mismo objeto matemático.

Asimismo, Vivas (2020) concluye que para lograr su propósito se direccionó por dos objetivos diferentes. El primer objetivo fue logrado, ya que a los estudiantes se les proporcionó un trabajo de investigación que les brindó la definición y propiedades de Función Exponencial, junto a diversas características y tareas, contribuyendo al origen de la notación, aprendizaje, herramientas y discurso. Del mismo modo, el segundo objetivo también fue logrado.

El estudio de Arredondo (2020) tiene como objetivo general analizar el Espacio de Trabajo Matemático relevante (ETM) de un docente universitario al brindar enseñanza de la Función Exponencial para estudiantes regulares de humanidades del primer año, en donde utiliza como sustento el ETM propuesto por Kuzniak (2011).

La investigación es de corte cualitativo y utiliza los procedimientos metodológicos que fueron apreciados por el investigador, que también toma, como marco metodológico, aspectos del estudio de caso, el cual le permite alcanzar su objetivo.

En la investigación de Arredondo (2020), se muestran tres capítulos: el primer capítulo se refiere a los materiales de investigación de referencia; en el segundo capítulo, consideró las percepciones matemáticas y esenciales de la Función Exponencial, ya que

es considerado como uno de los conceptos de Matemática que se enseña a estudiantes universitarios; y, en el tercer capítulo, menciona el análisis del ETM y, de manera particular, aquellas enlazadas con la organización del conocimiento y las tareas realizadas por el profesor de Matemática en la universidad para enseñar la Función Exponencial en términos preliminares, y aquellos investigadores que realizan la práctica docente en formación inicial y continuar enseñando al personal de los maestros y continuar con ETM, en las cuales se tiene en cuenta el análisis de las acciones que realiza el maestro en la creación de la enseñanza de las funciones en cursos del primer ciclo universitarios.

La investigación de Advíncula (2010) posee como objetivo presentar una situación didáctica que permitan a los estudiantes de Humanidades construir el concepto de la Función Exponencial. Considerando que uno de los objetivos específicos es realizar un análisis a priori de la situación didáctica proyectada para la enseñanza de la Función Exponencial, el método con lo que la autora utiliza la Ingeniería didáctica y la parte experimental la realiza en el aula de clases con una situación didáctica diseñada al servicio de la enseñanza y aprendizaje de Función Exponencial.

Advíncula (2010) concluye que el contexto pedagógico propuesto para la enseñanza de la Función Exponencial, orientado a universitarios, permite identificar los obstáculos, así como dificultades para identificar expresiones analíticas y elaborar representaciones gráficas de funciones exponenciales.

También menciona la existencia de un comportamiento esperado por los estudiantes de Humanidades durante la experimentación en el aula. La aplicación en aula permitió que los siete grupos conformados por un aproximado de 50 personas registren estrategias de los estudiantes para resolver problemas resueltos.

Por su parte, el estudio de De Souza (2010) tiene como objetivo analizar si las actividades presentadas en el cuaderno del profesor contribuyen o no a la comprensión de la Función Exponencial por parte del estudiante y si este es capaz de realizar conversiones bajo la perspectiva de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

De Souza (2010) muestra interés en la realización de esta investigación, ya que surgió de la observación de estudiantes con bajo desempeño en el aprendizaje de funciones y el análisis de evaluaciones realizadas por el gobierno del estado de São Paulo, donde se presentaron resultados bajos en el rendimiento de los estudiantes de Matemáticas.

La investigación tiene un instrumento que está compuesto por una actividad de revisión de potencia y cuatro actividades relacionadas con la introducción de la Función Exponencial, que se encuentran en el cuaderno del docente de Matemáticas del primer

grado de Bachillerato del tercer bimestre del 2008, documento perteneciente al currículo del estado de São Paulo del año 2008.

El estudio de la autora presenta un enfoque cualitativo y utiliza la Ingeniería didáctica como método. En la parte experimental, considera a 14 estudiantes, de 13 y 14 años de edad, pertenecientes al primer grado de secundaria de una escuela pública estatal, ubicada en las afueras de la región noroeste de São Paulo. Con base en los resultados que De Souza (2010) obtuvo, se encuentra con que existían dificultades para realizar conversiones en los registros de representación semiótica (registro de lenguaje natural para registro algebraico, registro de tabla para registro gráfico) y limitaciones en la identificación de variables como relación funcional y término desconocido.

Como conclusión, la autora destaca que debido al reflejo de las dificultades que se iniciaron desde el comienzo del estudio de las funciones, se generó un factor positivo, que fue que algunos pares, en sus construcciones gráficas, se acercaron a la gráfica de la Función Exponencial, demostrando que sí entienden la idea del comportamiento del objeto matemático.

A continuación, se muestra la justificación de la presente investigación.

1.2 Justificación

La literatura sobre Educación Matemática informa ha reportado la gran importancia de comprender la Función Exponencial, que se debería manifestar tanto en los procesos que se siguen en su construcción como en su aplicación en diversos contextos, tal como lo señalan García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018), Dorado y Díaz (2014), Sureda y Otero (2013) y Makgakga y Sepeng (2013).

Asimismo, la noción de Función Exponencial tiene relación con otros conceptos matemáticos de 5to año de secundaria, como por ejemplo la función logarítmica, y se emplea en cursos de diversas carreras a nivel universitario, tales como Estadística sobre el concepto de Distribuciones Exponenciales; en Ingeniería aparece en el curso de Matemática 1; en Química se aplica la Función Exponencial para los elementos radiactivos, entre otros.

Esta misma revisión bibliográfica hace evidente las dificultades de los estudiantes para resolver tareas orientadas al estudio o construcción del concepto de Función Exponencial (García-Cuéllar & Martínez-Miraval, 2018; Sureda & Otero, 2013), lo que se considera esencial en estudios conceptuales y de aplicación, justificando la relevancia de la investigación de los autores.

En la investigación de García y Martínez (2018), la enseñanza de la Función Exponencial se puede realizar utilizando una herramienta tecnológica, un software llamado GeoGebra, herramienta que también fue utilizado por Paveis (2016), justificando el uso del software.

El estudio de la Función Exponencial se justifica por su gran importancia que tiene en los cursos de Educación Secundaria que se enseñan en el nivel esperado del ciclo VII y por ser una base fundamental para los estudiantes en sus primeros cursos de diferentes universidades nacionales y particulares.

En la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), el concepto de Función Exponencial está siendo considerado en los cursos de Matemática, orientado a las carreras como Ingeniería en Estudios Generales de Ciencias (EEGGCC) y también en Estudios Generales de Letras (EEGGLL), como las carreras de Humanidades (Ciencias de la Comunicación, Derecho, Psicología, entre otros). El sílabo de Matemática Básica en EEGLL se estudia la Función Exponencial precedida por funciones Básicas, dentro de ellas se le considera a las funciones lineales y cuadráticas, se desea obtener un mayor entendimiento en las aulas.

En la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), existe una programación curricular para el curso de Matemática Básica, liderado por carreras como Administración, Arquitectura, Arte Contemporáneo, Ciencias de la Salud, Diseño, Economía y Educación, y para cursos de Humanidades como Artes Escénicas, Comunicación Audiovisual y Medios Interactivos, Comunicación e Imagen Empresarial, entre otros, aparece la definición de Función Exponencial y sus propiedades.

El estudio de Velásquez (2014), se señala que en el Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN) del año 2020, la Función Exponencial es desarrollada de manera diferente para los dos grados del ciclo VII de Educación Básica Regular (EBR). Para quinto grado de secundaria, los estudiantes estudian gráficos y modelos exponenciales, mientras para cuarto grado de secundaria se estudia con ecuaciones y funciones exponenciales.

En esta investigación, se evidencia que la Función Exponencial es estudiada en los primeros cursos de pre-Cálculo, así como en cursos de diferentes carreras de diversas Universidades, los profesores universitarios son profesionales en sus cátedras y por eso pueden tomar decisiones respecto al modelo de enseñanza y aprendizaje. Según Velásquez (2014), se puede decir que nuestra investigación es relevante, ya que el objeto matemático elegido es un concepto matemático que se enseña en los últimos grados de la educación secundaria y es uno de los primeros temas que se estudian en los primeros ciclos

de la educación universitaria. De esta manera, creemos que el presente estudio podría ser tomado como un antecedente para futuras investigaciones, en donde se analice las creencias de los maestros en su proceso de aprendizaje de la Función Exponencial.

Según Vivas (2020), es de mucho interés cómo los estudiantes interactúan con la Función Exponencial en la Didáctica de la Educación Matemática. Es por ello que se puede considerar como fundamento para justificar la relevancia de nuestro objeto matemático.

Nuestra investigación busca introducir la forma de enseñar la Función Exponencial de una manera no tradicional, que permita que los estudiantes interactúen con dicho concepto en contextos intramatemáticos y extramatemáticos, que pueden ser apoyados por la tecnología a partir de una propuesta didáctica que busque generar la Génesis Instrumental en estudiantes de cuarto y quinto de secundaria (Ciclo VII del EBR).

1.3 Enfoque Instrumental

El Enfoque Instrumental, que Rabardel (1995) expresó como referencia al estudio de los objetos o sistemas tecnológicos, donde se puede decir que su eje central es el entorno humano, ya que el hombre está presente en el ciclo de vida de los objetos y su interacción les permite funcionar.

El enfoque instrumental afronta la tecnología en la Educación de las Matemáticas de una forma no tradicional e innovadora a través de objetos tecnológicos.

A continuación, mencionaremos algunos términos que, de acuerdo con este enfoque, son requeridos para el desarrollo de nuestra investigación.

Artefacto: Puede entenderse como un objeto fácil de usar diseñado para incorporarse a las actividades previstas. Puede ser material o simbólico.

En nuestro caso, el artefacto puede ser representado por la Función Exponencial. Se puede decir que el artefacto está hecho para actuar sobre un objeto, transformarlo y usarlo para resolver problemas.

El término artefacto que usaremos ahora para designar será "neutral", sin especificar un tipo de relación específica del objeto; sin embargo, le daremos un contenido más preciso que el de "algo que ha sufrido una transformación de origen humano" (Rabardel, 1995, p.49).

El artefacto en nuestro estudio es simbólico, ya que consideramos como artefacto la Función Exponencial, el estudiante a través de sus acciones en el desarrollo de secuencias de actividades, explora los elementos del artefacto, descubriendo las

características del objeto matemático, luego es utilizado como instrumento en esquemas de utilización para realizar tareas.

Instrumento: Es lo que un sujeto fabrica del artefacto. El instrumento está compuesto por una parte artefactual y esquemas de utilización creados por el sujeto durante la interacción con el artefacto.

Técnicas: Es una manera de solucionar una tarea. Según Vargas y Guzmán (2011):

De acuerdo con Chevallard, las técnicas son una manera de llevar a cabo de realizar o de resolver una tarea. Este autor agrega que las técnicas no son necesariamente de tipo algorítmico o cuasi algorítmico y lo serán solo en casos muy excepcionales (p.91).

Técnica instrumentada: Son un conjunto de gestos realizados por el sujeto para hacer una tarea que integra uno o varios artefactos. En este sentido, pueden ser consideradas como una propuesta estable de interacciones entre el sujeto y el artefacto (o artefactos) con un objetivo específico Drijvers, P. et al. (2009).

Valor pragmático: Este valor depende de su potencial productivo. Los estudiantes interactúan con el artefacto y los problemas.

Valor epistémico: Ayuda a comprender los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de tareas de lápiz y papel y en contextos tecnológicos.

Rabardel (1995) señala que, en cuanto al desarrollo de una tarea, se le asocia esquemas de utilización que permiten globalmente que el instrumento sea incluido como componente funcional de dicha actividad.

Esquema: Es una organización invariante de la conducta de un sujeto en un determinado tipo de situación.

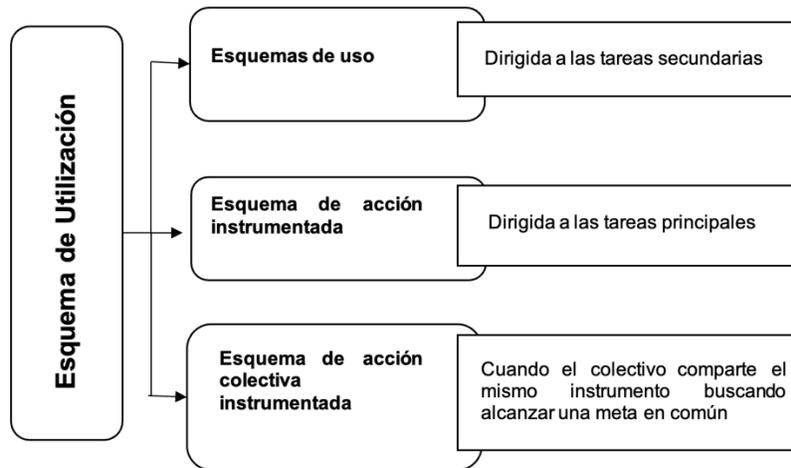
El término de esquema es mencionado en el estudio de Vergnaud (1995):

Llamamos “esquema” a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. En los esquemas, es donde se debe investigar los conocimientos en acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria (p.2).

Esquemas de utilización

Rabardel (2011) define los esquemas de utilización, como un conjunto estructurado de las características generalizables de una acción que permite repetir o aplicarlas la misma acción en un nuevo contexto. En la figura 1, se evidencian los tipos de esquemas de utilización.

Figura 1. *Desarrollo de los esquemas de utilización*



Fuente: Adaptado de Rabardel (2011)

En nuestra investigación, se presentan dos esquemas de utilización: primero exploraremos los **esquemas de uso** y luego los **esquemas de acción instrumentada**. Se tiene en cuenta que los esquemas de uso están relacionados con las tareas secundarias y se le consideran esquemas elementales. Según Rabardel (1995):

Los esquemas de uso relativos a las tareas segundas. Estos pueden situarse en el nivel de esquemas elementales (en el sentido de que no pueden descomponerse en unidades más pequeñas susceptibles de responder a una meta identificable); pero, esto no es necesario: pueden ellos mismos estar constituidos por totalidades que se articulan en un conjunto de esquemas elementales (p. 172).

Por otro lado, los esquemas de acción instrumentada están dirigidas a las tareas principales o primarias. Según Rabardel (1995):

Los esquemas de acción instrumentada que consisten en totalidades, cuyo significado es dado por el acto global, cuyo propósito es efectuar transformaciones en el objeto de la actividad. Estos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel. Lo que los caracteriza es que se relacionan con tareas primarias (p. 92).

La presente investigación, se desarrollará a partir de la teoría del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), donde el proceso de Génesis instrumental es esencial, que consta de dos dimensiones denominadas de instrumentación e instrumentalización.

La instrumentalización tiene una dirección hacia la parte artefactual del instrumento y consta del desarrollo de las propiedades del artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación tiene una dirección hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas.

En nuestro estudio, acerca de la base del Enfoque Instrumental, y será analizada la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra.

1.4 Pregunta y objetivos de investigación

A partir del estudio realizado nos proponemos la pregunta de investigación:

¿Cómo una propuesta didáctica podría generar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra en estudiantes del VII ciclo de secundaria?

Para obtener la respuesta a la pregunta de nuestra investigación, hemos planteado los siguientes objetivos.

Objetivo General

Analizar una propuesta didáctica orientada a que estudiantes del VII ciclo de secundaria pueda generar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra.

Objetivos Específicos

- Diseñar una secuencia de actividades que permita al estudiante generar y movilizar esquemas de utilización mediado por GeoGebra para aproximarse al concepto de la Función Exponencial.
- Identificar los esquemas de utilización que se generarían al desarrollar la secuencia de actividades.
- Analizar si los esquemas de utilización que movilizarían los estudiantes le permitirían lograr la génesis instrumental de la función exponencial.

Luego de formulada la pregunta de investigación, formulada la pregunta y sus objetivos, presentaremos los aspectos metodológicos de la investigación.

1.5 Metodología y procesos metodológicos

Nuestra metodología de investigación es cualitativa. Según Rodríguez, Gil y García (1996), la metodología cualitativa se puede definir como la investigación que produce datos descriptivos.

La evolución de la investigación cualitativa se ha dado como resultado de la síntesis integral de opciones metodológicas de investigación que son denominadas cualitativas, lo que en realidad se busca entender y conocer al hombre. Según Quintana (2006):

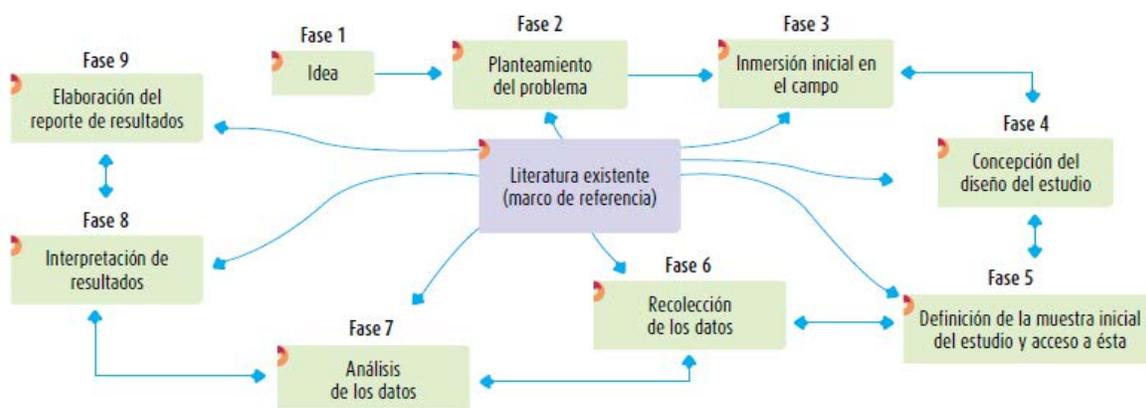
Existen formas de producir conocimiento y tienen elementos en común, aunque también poseen características muy diferentes entre sí. A pesar de ello, se ha mantenido el nombre en cuestión para diferenciarlas, también genéricamente, de las llamadas metodologías de investigación cuantitativas (p.47).

Es importante mencionar que, dentro de las opciones de investigación cualitativas, existen algunos intentos de construir teorías y explicaciones en la dirección de la lógica de tipo inductivo. En la investigación cualitativa, se tienen dos objetivos y dos lógicas diferentes. En palabras de Quintana (2006):

La investigación cualitativa que subraya las acciones de observación, el razonamiento inductivo y el descubrimiento de nuevos conceptos, dentro de una perspectiva holística, y, de otro lado, la investigación cuantitativa, que subraya la teoría científica, el razonamiento deductivo y la contrastación de hipótesis dentro de una perspectiva puntual. (p.48)

El enfoque cualitativo de Hernández, Fernández y Baptista (2014) que se muestra en la Figura 2, nos da insumos para adaptar nuestro proceso metodológico.

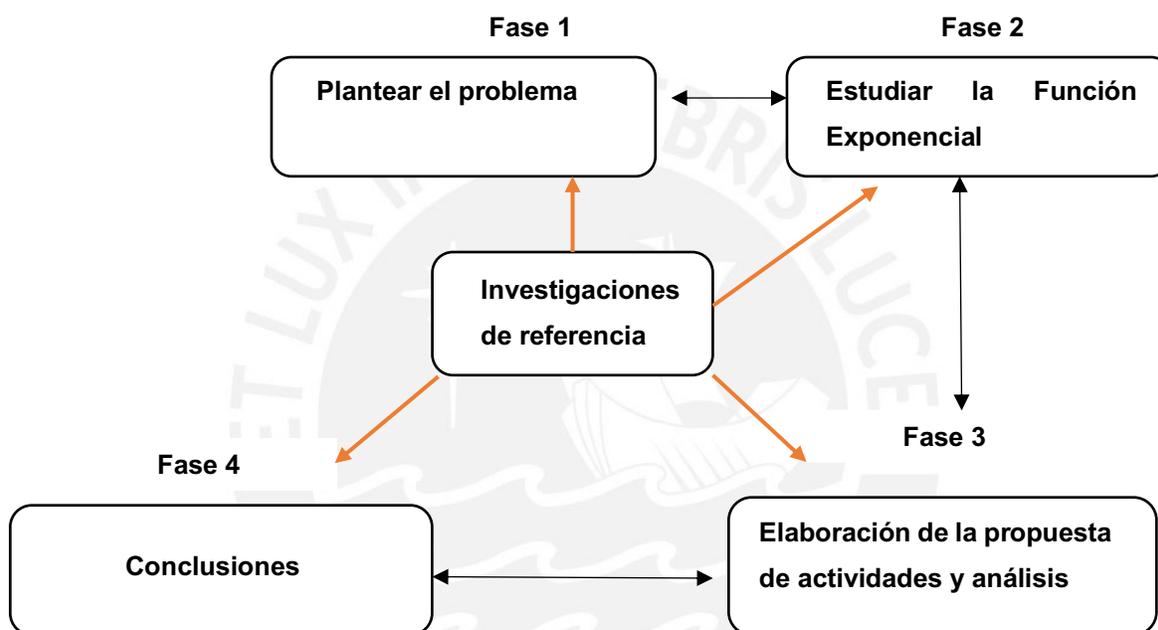
Figura 2. Fases de la investigación cualitativa



Fuente: Proceso cualitativo de Hernández et al. (2014)

Para el desarrollo de nuestra investigación que presenta elementos y características de una investigación cualitativa, utilizaremos el enfoque cualitativo propuesto por Hernández, Fernández y Baptista (2014). Las acciones más comunes que toman los investigadores durante la formulación son el diseño, la ejecución y la finalización de proyectos de investigación cualitativos. Para este trabajo, estarán presentes las siguientes fases que serán tomados como procedimientos metodológicos.

Figura 3. *Procesos metodológicos de la investigación cualitativa*



Fuente: Adaptado del proceso cualitativo de Hernandez et al. (2014)

Como se señala en la Figura 3, se detallarán cada una de las fases que adoptaremos para nuestra investigación.

Fase 1: Plantear el Problema

Se revisará cada investigación de referencia. Para ello, nos centraremos en dos criterios: en las investigaciones realizadas con la definición de la Función Exponencial con sus parámetros, y estudios utilizando el software GeoGebra y sus comandos.

En nuestra investigación, el aspecto teórico es el enfoque instrumental de Rabardel (1995), porque nos permite identificar escenarios de uso de los estudiantes cuando interactúan con el GeoGebra al resolver tareas de Función Exponencial. La metodología, será de corte cualitativo.

Fase 2: Estudiar la Función Exponencial

Estudiaremos la Función Exponencial desde las dimensiones epistemológica y didáctica. En nuestra investigación, desarrollaremos un análisis matemático de la Función Exponencial, estudiaremos el aspecto histórico-epistemológico de nuestro objeto matemático.

A su vez, también estudiaremos como es presentada la Función Exponencial en el Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN) del Perú y en diversos textos escolares de Matemática para el ciclo VII de Educación Básica Regular (EBR) y también en libros universitarios.

Fase 3: Propuesta didáctica de la Génesis Instrumental de Función Exponencial

En esta fase se presenta la propuesta de dos actividades para el estudio de la Función Exponencial mediado por el software GeoGebra dirigido a estudiantes del ciclo VII del nivel escolar. Los estudios de estos se realizarán desde una plataforma virtual.

Fase 4: Conclusiones

A partir del análisis de la propuesta de actividades, para esta fase se presenta las principales conclusiones del estudio y podrán ser elegidas como una propuesta para investigaciones próximas.

CAPÍTULO II: ESTUDIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En el presente capítulo, estudiaremos la definición de la Función Exponencial difundidas entre los temas de Matemáticas que viene desarrollándose desde épocas anteriores y que es utilizada actualmente en los textos escolares de la educación secundaria. Presentaremos las propiedades y teoremas que caracterizan a la Función Exponencial, que son considerados como los aspectos matemáticos de este. Finalmente, estudiaremos la Función Exponencial en currículo nacional y en los libros didácticos de nivel secundario.

2.1 Aspectos históricos relacionados a la Función Exponencial

Presentamos un estudio histórico - epistemológico de la Función Exponencial, mencionando su relación que tiene con otros conceptos matemáticos, como la potenciación de números reales, funciones logarítmicas, entre otros.

Históricamente, la Matemática se desarrolló a partir de contribuciones que se generaron en diversas épocas. Por ello, mencionaremos a los personajes más relevantes en cada periodo, así como destacaremos la explicación del concepto de función para lograr asentar la Función Exponencial.

En las investigaciones Boyer y Merzbach (2012), Paveis (2016) y Vivas (2020), consideran que John Napier (1550 – 1617) es el personaje que más influenció para conocer la historia de la Función Exponencial con la creación de logaritmos en una serie de potencias de un número dado. Napier, alrededor del año 1590, inventó los logaritmos.

El enfoque que Napier les dio a los logaritmos era totalmente diferente como se le ve actualmente en la realidad, ya que se basó en la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas. Para ese entonces, no se tomaba a los logaritmos como función recíproca de las funciones exponenciales.

En el estudio de Foti (2021), la noción de Función Exponencial, en la actualidad, ha sido reconstruida a través de diferentes versiones en la historia y que con el pasar del tiempo han sido fundamentales para la evolución de nuestro objeto matemático. La revisión histórica nos permite señalar los primeros signos de Función Exponencial. Por ello, estudiaremos la definición de potencia, así como también el concepto de la teoría de la proporcionalidad en números racionales de la forma: $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$, reconocidas también como las proporciones geométricas de números enteros.

El estudio de Ribnikov (1991, como se citó en Foti, 2021) menciona que Arquímedes escribió una obra donde muestra una expansión infinita de la serie de números naturales, en la que se construye un sistema de números que permitió contar una cantidad finita. También se encontró la noción de potencias sucesivas de una misma base $a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \dots$ y se puede expresar de la siguiente manera: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

En la investigación de Foti (2021), menciona que en la antigua Grecia tenía un concepto de exponente de un exponente de potencia con características de números racionales. Estos pueden ser magnitudes enteras y magnitudes fraccionarias.

En la época del Renacimiento, no se destacaron grandes aportes; sin embargo, para el desarrollo de las Matemáticas, se diferencian en dos direcciones: la primera es el perfeccionamiento del símbolo algebraico y la segunda sería la formación de la trigonometría como parte de la ciencia de Matemáticas.

Nicole Oresme, profesor de la Universidad de Paris entre los años 1328 y 1382, diversificó el concepto de potencia usando los exponentes racionales y con ello puede trabajar en las operaciones matemáticas de potencia anticipando la idea del logaritmo. Tal como se muestra en la Tabla 1, el mencionado profesor consideró la terminología de potencias con números racionales; sin embargo, no consideró la concepción de potencias de números irracionales, por lo que no hubo una determinada notación para ello.

Tabla 1. *Caracterización de potencias con exponentes racionales*

Base	Exponente	Potencia
125	$\frac{1}{3}$	$125^{\frac{1}{3}}$
100	$\frac{1}{2}$	$100^{\frac{1}{2}}$
64	$\frac{3}{4}$	$64^{\frac{3}{4}}$

Fuente: Elaboración propia.

Entre los años de 1400 y 1500, se destaca la obra del matemático Nicolás Chuquet, cuyo nombre es “Triparty en la sciene des nombres”, donde se mejora la expresión algebraica introduciendo los exponentes negativos y el número cero.

Según Boyer y Merzbach (2012), Chuquet logró evidenciar las propiedades de los exponentes, en lo que menciona:

En conexión con estas leyes de los exponentes, hace observar que, si construimos una tabla de las sucesivas potencias de 2 con exponentes desde 0 a 20, entonces a la suma de los exponentes corresponde el producto de las potencias; excepto por el tamaño de los intervalos entre las diferentes entradas en esta tabla, se puede decir que esto constituye ya una tabla de logaritmos en base dos en miniatura, como había hecho notar ya Arquímedes (p.356)

Es importante mencionar que la evolución de potencia se debe a diferentes investigaciones y podemos afirmar que el progreso del concepto de potencia y la notación de exponentes que se usa en la actualidad está relacionado con los diferentes períodos de la historia y el desarrollo de las Matemáticas para los mismos.

La notación exponencial y su concepto continuaron expandiéndose durante la época del Renacimiento, época cuando la ciencia árabe se presenta mediante su obra más importante “La Arithmetica Integra”, creada por Michael Stifel en 1544, que relaciona la progresión aritmética con la geométrica, así como lo realizó Nicolás Chuquet para las potencias de dos exponentes de 0 a 20.

Según Vargas (2012), en relación con la obra, menciona lo siguiente:

El término exponente fue introducido por Michael Stifel (1487-1567) en 1544 en la Arithmetica Integra, en donde no se limitó a considerar de forma separada una progresión aritmética y otra geométrica, sino que explicó la importantica práctica de una asociación entre ambas (p.48).

La notación de la Función Exponencial no existía en la época del Renacimiento, ya que no se conocía como en los tiempos de ahora; sin embargo, Michael Stifel comparó las operaciones en ambas progresiones, como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. *Resultados de una potencia de base 2.*

Exponente	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Potencia	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Fuente: Elaboración propia.

La primera fila está caracterizada por los “exponentes”, que se representa términos una progresión aritmética. Del mismo modo, en la Tabla 2 está denotada por las potencias que a la vez representan una progresión geométrica. Para iniciar la comparación entre ambas progresiones, en primer lugar, se toma dos términos de la progresión aritmética y se

suma, obteniendo $2 + 4$, siendo el producto de términos de la progresión geométrica que corresponden al 2 y 4, obteniendo $4 \times 16 = 64$. También se toma en cuenta los números negativos y fraccionarios.

Para diferenciar el origen de la Función Exponencial y la función logarítmica, hablaremos de logaritmos y su creación, siendo John Napier (1550 – 1617) su máximo representante como el que inventó los logaritmos.

En el estudio de Boyer y Merzbach (2012), Napier consideró una secuencia arbitraria de potencias numéricas, que fueron tomados en cuenta en la obra “Arithmetica Integra” de Michael Stifel (1487 - 1567) y en las obras de Arquímedes.

En el entorno de los exponentes, Rene Descartes (1596 – 1650) realizó un cambio en su notación algebraica, debido a que utiliza letras del alfabeto, llamado parámetros constantes, en la notación exponencial. En la evolución de los exponentes, John Wallis (1616 – 1703) creó su obra llamada Arithmetica Infinitorum, utilizando exponentes fraccionarios y haciendo referencia de exponentes irracionales. El estudio de Wallis mostró $a^0 = 1$ y se establece $a^{-1} = \frac{1}{a}$, con $a \neq 0$.

Para formalizar el concepto de Función Exponencial, se ha tomado el aporte de cada uno de los matemáticos en mención. Para lograr ello, se considera diversos temas de Matemática, como series matemáticas, las curvas, expresión algebraica de curvas y funciones.

En el siglo de XVIII, con Leonhard Euler se crea el análisis infinitesimal a través de su obra *Intruductiin Analysin Infinitorum*. Es aquí donde la noción de función es considerado importante y fundamental para las funciones con expresión algebraica utilizando exponentes imaginarios y en donde se muestran las funciones logarítmicas y exponenciales tal como se identifican actualmente. El trato de Euler con los logaritmos es de la manera como en la actualidad nos es familiar.

La primera idea de función fue creada por los babilonios, estableciendo tablas sexagesimales primero de cuadrados y luego de cubos y también para raíces cuadradas y raíces cúbicas. En el siglo II, Ptolomeo (90 – 168) usó tablas que implican la función de la cuerda del arco en x ; sin embargo, no menciona la palabra función. Según Santiago (2015, como se citó en Paveis, 2016), Ptolomeo fue el primero en ocuparse de la representación de superficies de curvas en un plano.

A continuación, mencionaremos al aspecto matemático de la Función Exponencial, así como nuestro concepto del objeto matemático y lo estudiaremos como se presenta en

el Currículo Nacional del Perú a través de los libros de Matemática para estudiantes de secundaria.

2.2 Aspectos matemáticos de la Función Exponencial

La Función Exponencial es considerada una de las funciones más frecuentes en los problemas cotidianos, ya que generan la descripción de diferentes fenómenos, en el que también se usan para describir la variación de dos cantidades, en las que el crecimiento de la variable independiente es muy rápido.

Según Paveis (2016), las funciones exponenciales tienen una ley de formación que presenta a la variable "x" como exponente, donde $f(x) = a^x$, justificando así el término de la Función Exponencial. Además, también menciona que en el texto de Lima (2013) se encuentran los conceptos básicos vinculados con la Función Exponencial y así obtener la comprensión de su definición y sus propiedades.

En este sentido, Lima (2013) resulta muy importante en nuestro estudio y que será traducida en nuestra investigación. Para poder reconocer la Función Exponencial para determinados fenómenos, es importante y necesario enfocarnos en la definición, gráficos, caracterización y propiedades de la Función Exponencial.

Definición de la Función Exponencial

En la investigación de Paveis (2016), se toma un número real "a" con las siguientes condiciones de $a > 0$ y $a \neq 1$, el cual se llama Función Exponencial que tiene base a, dado $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, cuya notación está definido por $f(x) = a^x$ o también como $y = a^x$.

Las condiciones dadas donde a debe ser mayor que cero y diferente de 1 tienen sentido:

- si $a < 0$, tendríamos $f(x)$ igual a un número real negativo elevado a^x . En este caso, cuando x toma valores pares, $f(x)$ da resultados positivos; sin embargo, si x toma valores impares, $f(x)$ será menor que cero. Se tiene en cuenta además que, si x asume valores racionales de denominador par, no obtendremos una coincidencia $f(x)$, por lo que no podemos definir una función.
- si $a = 0$, cuando x es menor que cero, no se definirá una función en los reales(\mathbb{R}), ya que una expresión como 0^{-2} , por ejemplo, no es real. En este caso, tendríamos correspondencias $f(x)$ solo para $x > 0$, generando una función constante en cero.

- si $a = 1$, entonces en $f(x) = a^x$ tendríamos $f(x) = 1^x$. Entonces, la única correspondencia para $f(x)$ sería 1, generando una función constante en 1.

En la investigación, De Souza (2010) señala que la Función Exponencial puede representarse con la siguiente expresión: Sea a cualquier número positivo que no sea 1 y su exponente x , donde x pertenece a los números reales, tenemos $y = a^x$. Si x es un número racional m/n , se puede escribir $(\sqrt[n]{a})^m$ o $\sqrt[n]{a^m}$, como por ejemplo $27^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$ o $27^{2/3} = (\sqrt[3]{729})^2 = 3^2 = 9$. Si x es número irracional, el valor de x se aproxima mediante una secuencia de números racionales, donde el límite se aproxima a x . Por ejemplo, $5^{\sqrt{2}}$ con una calculadora científica podemos encontrar los valores aproximados del número $5^{\sqrt{2}} \cong 9,739$ deseados.

Se puede verificar que mientras x aumenta, el valor de y también aumenta. Otro caso que se puede verificar es que si el valor de x disminuye, el valor de y también disminuye hasta un número que se aproxima al número cero, pero sin tomar ese valor. Es aquí donde se presenta al eje de las abscisas (el eje x) considerado como la asíntota. El crecimiento de la Función Exponencial es lucido, pero no constante. Una leyenda sobre la invención del ajedrez describe esta característica (Maor, 2008).

Gráfico de la Función Exponencial

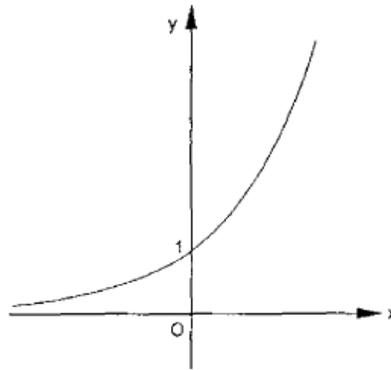
Según Oliveira (2015), para construir la gráfica de la función $f(x) = a^x$ y representarla geoméricamente, se analiza el crecimiento de la función $f(x)$ es acotada superior.

Se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Para $a > 1$, la función $f(x)$ es creciente y para números negativos de x (con $|x|$ suficientemente grande) a^x se puede hacer lo más cercano a cero (lo que significa que el eje x es la asíntota de este gráfico).

Al revisar la Figura 4, se observa el gráfico de la Función Exponencial creciente:

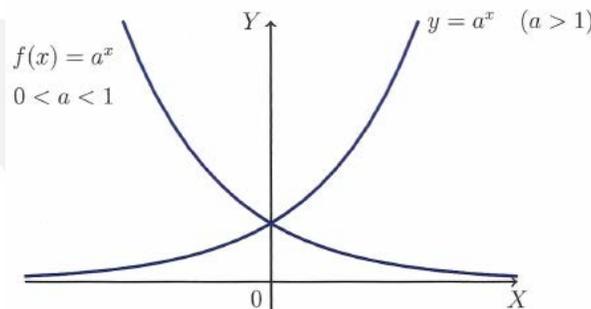
Figura 4. Gráfico de la Función Exponencial cuando $a > 1$



Fuente: Maor (2008), p.133

En concordancia con lo anterior, una representación gráfica precisa de la Función Exponencial se presentaría en dos casos, tal como se exhibe en la Figura 5. El primero es cuando $a > 1$, en el que se observa que el crecimiento de curva $y = a^x$ es muy lento cuando x es un número negativo y acelera su crecimiento cuando x toma valores positivos. En el caso de $0 < a < 1$, la función observada es decreciente.

Figura 5. Gráfico de la Función Exponencial creciente y decreciente



Fuente: Lima (2013), p.183

Caracterización de la Función Exponencial

Según Lima (2013), la Función Exponencial se caracteriza por ser monótona e inyectiva. En otras palabras, crecientes o decrecientes. Sea una función f definida $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, existe equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

1. $f(nx) = f(x)^n$, siendo n un número entero ($n \in \mathbb{Z}$) y para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, donde $a = f(1)$;
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para todo $x; y \in \mathbb{R}$.

Demostración de equivalencia.

Probaremos las implicaciones que demuestren la equivalencia $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$.

Para demostrar que $(1) \rightarrow (2)$, se observa que la hipótesis (1) implica que para todo número racional $p = m/n$, (con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tenemos $f(px) = f(x)^p$.

En efecto, como $np = m$, podemos escribir:

$$f(px)^n = f(np x) = f(mx) = f(x)^m,$$

$$\text{Luego: } f(px) = f(x)^{m/n} = f(x)^p.$$

Así, si ponemos $f(1) = a$, tenemos $f(p) = f(p \cdot 1) = f(1)^p = a^p$, para todo $p \in \mathbb{Q}$.

Para completar la demostración de que $(1) \rightarrow (2)$ suponga, para fijar las ideas, que f es creciente, por lo tanto $1 = f(0) < f(1) = a$. Supongamos, absurdamente, que existe un $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$.

Digamos, por ejemplo, que $f(x) < a^x$. (El caso $f(x) > a^x$ se trataría de manera análoga)

Según el lema: se corrigió el número real positivo en $a \neq 1$, en cada rango de \mathbb{R}^+ existe alguna potencia a^r , con $r \in \mathbb{Q}$.

Por lo tanto, existe un número racional p , tal que $f(x) < a^p < a^x$, es decir, $f(x) < f(p) < a^x$. Dado que f es creciente, teniendo $f(x) < f(p)$, concluimos que $x < p$. Por otro lado, también se tiene que $a^p < a^x$, por lo tanto $p < x$. Esta contradicción completa la prueba de que $(1) \rightarrow (2)$.

Para demostrar que $(2) \rightarrow (3)$ se desarrolla lo siguiente:

$$f(x + y) = a^{x+y}, \text{ por ítem (2)}$$

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \text{ ley de exponentes}$$

$$f(x + y) = a^x a^y = f(x) \cdot f(y), \text{ por ítem (2)}$$

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \text{ para todo } x; y \in \mathbb{R}.$$

A continuación, demostraremos $(3) \rightarrow (1)$,

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-veces}}) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \dots f(x)}_{n\text{-veces}}$$

$$f(nx) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \dots f(x)}_{n\text{-veces}} = f(x)^n$$

$$f(nx) = f(x)^n, n \text{ un número entero } (n \in \mathbb{Z}) \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Con ello, queda demostrado la relación de equivalencia.

2.3 Estudio de la Función Exponencial en el currículo peruano y en los libros didácticos

En el Currículo Nacional de la Educación Básica Regular del 2016, en Matemática, los estudiantes deben alcanzar competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeños durante su educación básica del ciclo VII (el nivel esperado) y el ciclo VIII (el nivel destacado), así como se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3. Nivel de competencia de estudiantes de quinto grado de secundaria.

Estándares de aprendizaje de la competencia Resuelve Problemas de Regularidad, equivalencia y cambio
Nivel/Ciclo
Descripción de los niveles de desarrollo de la competencia
Nivel destacado en el ciclo VIII Resuelve problemas relacionados con el análisis de cambios discontinuos o regularidades entre cantidades (magnitudes), valores o expresiones; transformándolas a expresiones algebraicas que pueden incluir reglas de formación de sucesiones convergentes o divergentes, funciones periódicas de seno y coseno, o ecuaciones exponenciales que se ajusten a un mejor comportamiento. Expresa su comprensión de las propiedades o elementos de las desigualdades lineales, ecuaciones exponenciales y funciones por tramos; usando lenguaje formal y diferentes representaciones; y usarlos para interpretar información científica, económica y matemática. Combina e integra diversos recursos, estrategias o procedimientos matemáticos para interpolar, extrapolar valores o calcular el valor máximo y/o mínimo de sucesiones y sumatorias, así como de funciones trigonométricas y evaluar o definir funciones por tramos; optando por los más pertinentes a la situación. Hace afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre conceptos y procesos algebraicos, de esa manera se predice el comportamiento de las variables; se apoya con argumentos o demostraciones que demuestran su solvencia conceptual.
Nivel esperado al final del ciclo VII Resuelve problemas relacionados con el análisis de cambios continuos o periódicos, o regularidades entre cantidades (magnitudes), valores o expresiones; transformándolas a expresiones algebraicas que pueden incluir una regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y también exponenciales . Evalúa si la expresión algebraica representa el estado del problema. Expresa su comprensión de la ley de formación de sucesiones, series y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, inecuaciones y desigualdades; distinguir la función lineal con la función cuadrática y exponencial y sus parámetros; se utiliza para interpretar enunciados, oraciones, textos o fuentes de información para gráficos. Selecciona, combina y adapta una variedad de recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos relacionados con incógnitas en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y elige el más adecuado, teniendo en cuenta las circunstancias del problema. Realiza declaraciones sobre casos especiales entre declaraciones opuestas o expresiones algebraicas; y predecir el comportamiento de variables e incógnitas; comprueba o refuta declaraciones usando contraejemplos y propiedades matemáticas.

Fuente: Adaptado del Currículo Nacional de la Educación Básica 2016.

Puede observarse que el concepto de Función Exponencial es uno de los temas estudiados del ciclo VII de Educación Básica Regular (EBR).

La Función Exponencial se desarrolla en la competencia de la regularidad, la equivalencia y variación en capacidades que podemos distinguir desde dos habilidades: la primera traduce datos y condiciones en expresiones algebraicas y la segunda informa su comprensión de las relaciones algebraicas. Estas capacidades pueden ser relacionadas con el concepto de la Función Exponencial usando los siguientes desempeños:

- Traduce datos de funciones cuadráticas y exponenciales con coeficientes racionales al establecer y resolver problemas.
- Expresa el significado del crecimiento exponencial y su desplazamiento horizontal y vertical. Hace uso de un gráfico algebraico y diversas representaciones
- Combina y adapta estrategias para resolver sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y exponenciales.

Estos desempeños deben ser trabajados con estudiantes de cuarto y quinto de secundaria, donde el propósito es alcanzar el nivel esperado, según la programación curricular del nivel secundaria de la Educación Básica Regular (EBR).

A continuación, analizaremos algunos textos que están dirigidas a estudiantes del ciclo VII de la EBR y así poder analizar el concepto del objeto matemático elegido, la Función Exponencial. Es relevante mencionar que en estos libros didácticos estudiaremos la definición y sus propiedades, la tarea de la Función Exponencial.

Libro Escolar 1:

Santillana (2020). Matemática 5. Lima, Perú. Editorial: Santillana.

Análisis de la definición de la Función Exponencial y sus propiedades

Santillana (2020) manifiesta que la Función Exponencial es de la forma $f(x) = b^x$, siendo esta notación su representación algebraica y, tal como se muestra en la Figura 6, se considera una base (b) que es mayor que 1 y diferente de cero, donde el valor de x es cualquier número real. También es relevante mencionar que la función $f(x)$ tiene como dominio cualquiera de los números reales y su rango de valores son los números reales positivos. Si la base es mayor o menor que 1, la función $f(x)$ crecerá o decrecerá.

Figura 6. Función Exponencial y sus propiedades

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

La condición establecida sobre la base ($a > 0$ y $a \neq 1$) hace posible que el exponente pueda tomar cualquier valor; por lo tanto, el dominio de la función es \mathbb{R} y su rango $\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$.

El que la base sea mayor o menor que 1 va a condicionar que la función sea creciente o decreciente. En los casos de base mayor que 1, cuando mayor sea la base, más rápido será el crecimiento de la función.

Fuente: Santillana (2020), p.320

Por otro lado, el libro presenta las propiedades de la Función Exponencial, y el valor base determina si una función creciente y/o decreciente. De acuerdo con la Figura 7, se observan dos casos: el primero en donde la base sea mayor que 1 y el segundo donde la base se encuentre entre 0 y 1.

Figura 7. Propiedades de la Función Exponencial

TEN EN CUENTA

Función exponencial
 $f(x) = a^x$

- El dominio de $f(x) = a^x$ es \mathbb{R} .
- El rango de $f(x) = a^x$ es el intervalo $]0; +\infty[$.
- El punto $(0; 1)$ pertenece al gráfico de $f(x) = a^x$.
- La función $f(x) = a^x$ pasa por el punto $(1; a)$.
- La función $f(x) = a^x$ es continua.
- La función $f(x) = a^x$ es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$.

Fuente: Santillana (2020), p.320

Del texto de Santillana (2020) se menciona que existen otros conceptos matemáticos que tienen relación con la Función Exponencial, como, por ejemplo, la función logarítmica, ya que son consideradas uno la inversa de la otra.

En el libro didáctico, la relación entre la Función Exponencial y la función logarítmica se observa en dos casos: el primero sería cuando la Función Exponencial tiene al número e llamándose Función Exponencial natural, cuya expresión es: $f(x) = e^x$, el segundo caso se le denomina función logarítmica natural, cuya expresión es: $f(x) = \log_e x = \ln x$.

Así como se presenta en la Figura 8, para el segundo caso, es importante conocer el valor aproximado de $e = 2,7183$.

Figura 8. *Función Exponencial y logaritmo natural.*

Función exponencial natural y función logarítmica natural

La función exponencial natural presenta la forma $f(x) = e^x$ y la función logarítmica natural es $f(x) = \log_e x = \ln x$, donde $e \approx 2,7183$ es la base del sistema de logaritmos naturales. Como $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ son funciones inversas, sus gráficas serán simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Fuente: Santillana (2020), p. 77

En este libro didáctico, hay una sección llamada importante, donde dan relevancia explicar la definición del número Euler "e", que es usada para definir la Función Exponencial con base "e". Según la Figura 9, se indica que es un número irracional, cuyo valor se aproxima a 2.718282 y se utiliza en la Función Exponencial natural.

Figura 9. *Aproximación del número e*

IMPORTANTE

El número e
Este número irracional se obtiene dando valores muy grandes a n en la expresión:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Fuente: Santillana (2020), p. 77

A continuación, analizaremos algunos problemas de la Función Exponencial presentes del libro de Santillana (2020), lo que denominaremos tareas.

Análisis de las tareas de la Función Exponencial y su gráfica.

En Santillana (2020), se presentan problemas de la Función Exponencial relacionadas al cálculo del valor numérico, la tabulación y representaciones gráficas. Tal como se revela en la Figura 10, la función exponencial puede ser creada.

Figura 10. *Elaboración y analizar la gráfica de la Función Exponencial*

EJEMPLO 21

Analiza los gráficos de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (1/2)^x$.

Fuente: Santillana (2020)

La Figura 11 a continuación, presentaremos una solución que brindó el libro de Santillana (2020), donde se analiza el desarrollo de las funciones exponenciales y destaca la tabulación en cada uno de ellos, obteniendo diferentes valores numéricos para representar la Función Exponencial de forma gráfica.

Figura 11. *Solución propuesta para analizar la gráfica de una Función Exponencial*

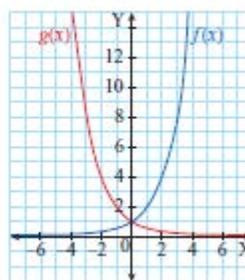
- Elaboramos la tabla de valores de cada una de las funciones y las graficamos:

$a > 1$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(x)$...	1/4	1/2	1	2	4	...

$0 < a < 1$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$g(x)$...	4	2	1	1/2	1/4	...



- Como podemos observar, las representaciones gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son simétricas con respecto al eje Y.
- La curva siempre se mantiene por encima del eje X, porque las funciones exponenciales siempre toman valores positivos.

Fuente: Santillana (2020), p. 320

En el próximo ejemplo, se evidencia la relación de la Función Exponencial con otros conceptos matemáticos, como la función logaritmo, tal como presenta en la Figura 12, teniendo como finalidad representar el gráfico de ambas funciones.

Figura 12. Representación gráfica de las Funciones, Exponencial e^x y la de logaritmo natural.

EJEMPLO 29

Representa gráficamente las funciones $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$.

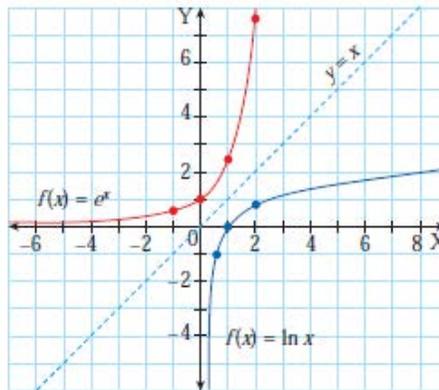
Fuente: Santillana (2020), p. 324

De acuerdo con el ejemplo anterior, se comprueba que tanto la Función Exponencial y logarítmica, son denominas inversa reciprocas. En la Figura 13, se demuestra usando sus representaciones gráficas de cada una de las funciones, las cuales son construidas a través de tabular y obtener los valores numéricos.

Figura 13. Técnica utilizada para representar la gráfica una Función Exponencial y la función logaritmo natural.

- Elaboramos una tabla para algunos valores de x , de modo que las imágenes $f(x)$ permitan esbozar la gráfica. Como hemos visto en los ejemplos 21 y 26, las funciones de la forma $f(x) = a^x$ y $f(x) = \log_a x$ son funciones inversas. De igual manera, las funciones $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ son funciones inversas. Así, una forma de trazar la gráfica de $f(x) = \ln x$ es reflejando la gráfica de $f(x) = e^x$ al otro lado de la recta $y = x$.

x	$f(x) = e^x$
4	54,60
3	20,09
2	7,39
1	2,72
0	1
-1	0,37
-2	0,14
-3	0,05
-4	0,02



Fuente: Santillana (2020), p. 324

A continuación, analizaremos el segundo libro de quinto grado de secundaria de la Editorial Ingenio.

Libro Escolar 2:

Oblea Acosta, J. (2016). *Álgebra 5, secundaria*. Lima, Perú: Editorial Ingenio

Análisis de la definición de la Función Exponencial y sus propiedades

Con similitud del libro didáctico de Santillana (2020), la definición general de la Función Exponencial también es considerada en este texto, de manera que se toma un valor de a , tal que sea mayor de 0 y menor que 1; como muestra la Figura 14, a es llamada base de la Función Exponencial denotado por $f(x) = a^x$.

Figura 14. Representación algebraica de Función Exponencial.

Función exponencial:

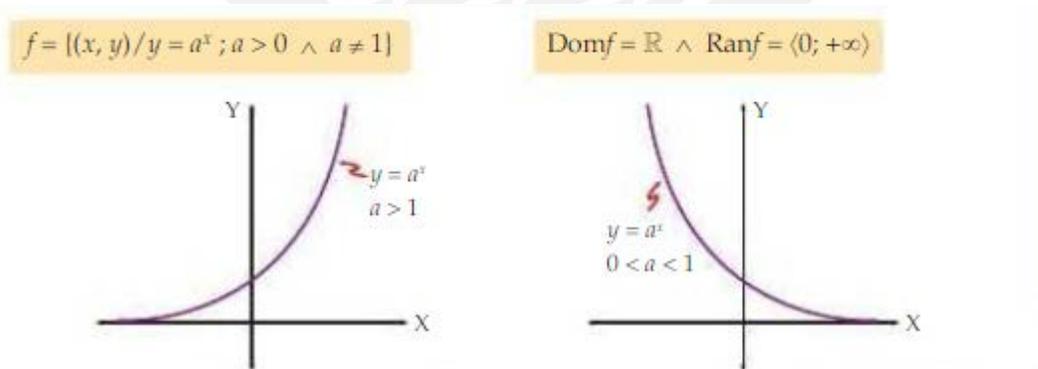
Dado un número real a , tal que $0 < a \neq 1$; se llama función exponencial de base a , la función que asocia a cada x real el número a^x .

$$y = f(x) = a^x$$

Fuente: Oblea (2016), p. 83

Si nos centramos en la base a , es relacionado con el incremento de la Función Exponencial, presentándose dos opciones, cuando $a > 1$ y la segunda cuando $0 < a < 1$. Así como observamos en la Figura 15.

Figura 15. Representación gráfica de Función Exponencial.



Fuente: Oblea (2016), p. 83

Análisis de las tareas de Función Exponencial y su gráfica.

En diversas tareas del libro de Oblea (2016), se realiza el desarrollo de la tabulación y mediante ella se representará gráficamente la Función Exponencial.

Así como se revela la Figura 16, en una de las tareas del texto, se realiza la obtención del valor numérico y el desarrollo de la tabulación y mediante ello se representará gráficamente la Función Exponencial.

A continuación, presentaremos uno de los problemas de la Función Exponencial del libro didáctico considerado tarea.

Figura 16. Tarea de tabular y representar gráficamente la Función Exponencial.

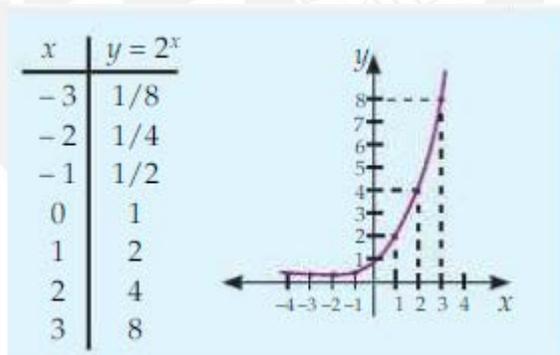
Ejemplo 1:

Graficaremos: $y = f(x) = 2^x$

Fuente: Oblea (2016), p. 83

Con base en lo anterior, una posible solución se muestra en la Figura 17, la cual es una representación gráfica de la Función Exponencial desarrollada mediante un valor numérico y el desarrollo de la tabulación.

Figura 17. Desarrollo de la tabulación y la representación gráfica de la Función Exponencial.



Fuente: Oblea (2016), p. 83

Continuando con el análisis de los libros educativos y didácticos, estudiaremos a Ojeda (2020) de la Editorial Corefo. Este libro es muy relevante de estudiar, ya que es una de las más reconocidas en nuestro país.

Libro Escolar 3:

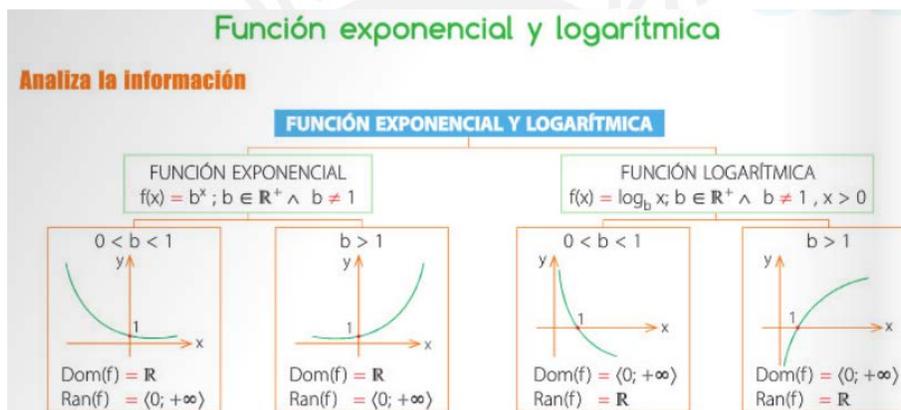
Ojeda Zañartu, E. (2020). *Matemática, secundaria*. Lima, Perú: Editorial Corefo

Análisis de la definición de la Función Exponencial y sus propiedades

Este libro es didáctico donde la definición de la Función Exponencial lo relaciona y describe con su gráfica y a su vez explica las propiedades. A continuación, mencionaremos la definición de la Función Exponencial.

Sea un valor de "b" un número real positivo mayor que 0 y menor que 1; como se observa en la Figura 18, b es considerada base de la Función Exponencial denotado por $f(x) = b^x, b \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$. Del mismo modo, la base b puede ser expresado de dos formas; cuando $b > 1$ y la segunda cuando $0 < b < 1$. Esto es para saber el intervalo de crecimiento de la Función Exponencial.

Figura 18. Definición de la Función Exponencial y su gráfica en el libro escolar 3.



Fuente: Ojeda (2020), p. 60

Como se observa en la figura anterior, la definición es representada gráficamente detallando la relación de la Función Exponencial con la función logarítmica.

Análisis de las propuestas de tareas de la Función Exponencial y de su gráfica.

Tal como se presenta la Figura 19, en una de las tareas del texto, se propone un ejercicio en el que se podría desarrollar temas como tabulación para representar gráficamente la Función Exponencial.

A continuación, presentaremos la primera tarea en la Función Exponencial del texto.

Figura 19. Tarea de graficar la Función Exponencial, dominio y rango.

6. Grafica la función $h(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$; $x \in [-1; 2)$. Luego, determina su intercepto con el eje "y", su dominio y rango.

Fuente: Ojeda (2020), p. 61

Otra propuesta que puede ser presentada como tarea se revela en la Figura 20, el cual es un contexto de situación real y puede ser representada por una expresión algebraica, usando el valor numérico y la tabulación para obtener la Función Exponencial y finalizando con una representación gráfica de la misma.

Figura 20. Obtención de la Función Exponencial.

1. Cierta tipo de bacteria tiene la particularidad de duplicarse cada minuto. Si inicialmente en un cultivo había 2 millones de bacterias, **determina** la regla de correspondencia de la función que representa el número de bacterias que habrá luego de "x" minutos.

Fuente: Ojeda (2020), p. 60

Hemos revisado tres libros didácticos que se usan para la enseñanza matemática del ciclo VII de la Educación Básica Regular (EBR) y se han analizado diferentes puntos de vista; sin embargo, cada autor se asemeja con la definición general de Función Exponencial, ya que cada libro maneja una diferente representación que puede ser algebraica o gráfica.

A continuación, presentaremos la experiencia de nuestra investigación con su respectivo análisis.

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, presentaremos las actividades en la propuesta didáctica describiéndolos y el analizando cada una de las respuestas.

3.1 Descripción de la propuesta didáctica

Consta de cuatro actividades, así como se evidencia en la tabla 4. La Actividad 0 es una actividad de exploración al GeoGebra, así como también se detalla la Actividad 1, que es para reconocer las propiedades de nuestro objeto matemático, y las Actividades 2 y 3, donde se ejecutará la Función Exponencial en un contexto real.

Tabla 4. Descripción de las actividades

Actividades	Actividad 0	Actividad 1	Actividad 2 y 3
Objetivo	Familiarizarse con GeoGebra	Identifiquen los parámetros de $f(x) = k \cdot a^x + b$	Aplicación de la Función Exponencial en el COVID – 19.
Duración estimada	45 min	90 min	120 min

Fuente: Elaboración propia

Seguidamente, detallaremos cada actividad en nuestra propuesta didáctica.

Actividad 0: Conociendo con GeoGebra

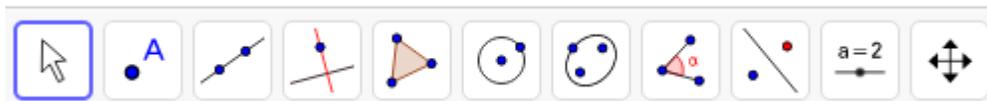
La Actividad 0 no será analizada con el Enfoque Instrumental, debido a que no involucra a nuestro objeto matemático debido a que se proporciona una ficha de actividades que orientan a los estudiantes en conocer a las herramientas del GeoGebra, así como graficar y movilizar cualquier función. En esta actividad, el estudiante puede utilizar el GeoGebra para apropiarse de las propiedades algebraicas y aplicarlos en gráficas de la Función Exponencial.

La Tarea 1 de la Actividad 0 consta de dos ítems (a y b), que son preguntas relacionadas al software GeoGebra, lo que permitiría que el estudiante reconozca cada uno de los comandos del GeoGebra.

Usar el software GeoGebra

- 1) Abra el GeoGebra clásico y explórelo, eligiendo cada una de las herramientas que están en la siguiente barra.

Figura 21. Comandos del software GeoGebra



Fuente: GeoGebra clásico

- a) Seleccione cada herramienta y enumere cuántas opciones se observan en cada una de ellas.

Esperamos que cada estudiante pueda reconocer las diversas herramientas de GeoGebra y sepan ubicarlas en el software. La tabla 5, muestra una síntesis de las herramientas de GeoGebra que pueden explorar los estudiantes.

Tabla 5. Número de opciones de cada comando del GeoGebra

Herramienta	Opciones	Herramienta	Opciones	Herramienta	Opciones
	3 opciones		4 opciones		7 opciones
	8 opciones		9 opciones		7 opciones
	7 opciones		4 opciones		8 opciones
	8 opciones		8 opciones		

Fuente: Elaboración propia

- b) Coloque en la vista gráfica los puntos A y B luego trace una recta de tal forma que pase por ambos puntos. Ubique un tercer punto C y construya las 2 rectas \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BC} . . Asimismo, identifique la pendiente y regla de correspondencia de cada una de las rectas.

Como se exhibe en la Figura 22, se espera que los estudiantes primero se usen dos veces

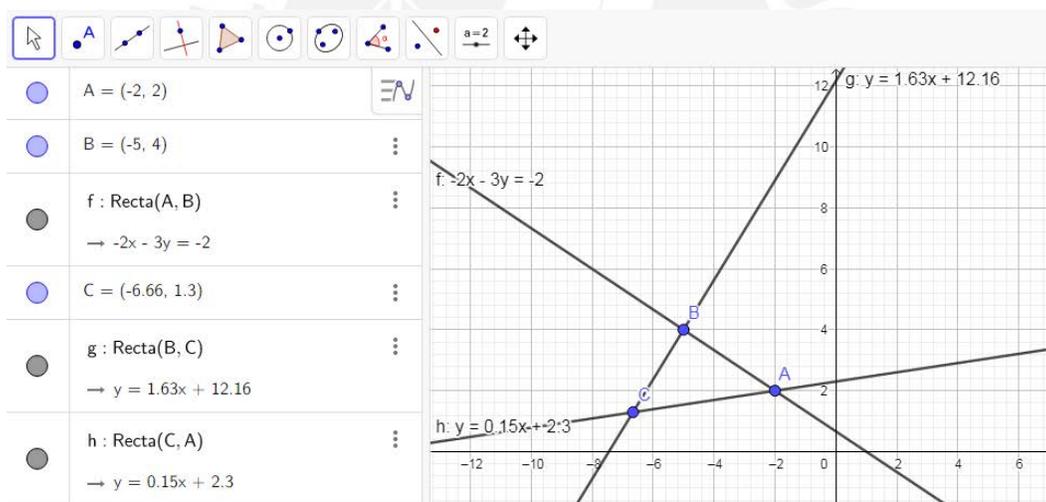
la opción  para elegir dos puntos A y B, luego se elijan un tercer punto C y luego, la

opción  para crear tres rectas. Después clicar el botón izquierdo situando en cada recta y la opción que se elige es la ecuación $y = ax + b$ para hallar la ecuación de cada una de ellas, donde a es la pendiente.

Se tiene en consideración que existen infinitas posibilidades de elegir puntos que pertenecen al plano cartesiano, en la mencionada elección se toma tres puntos cualesquiera (A, B y C), obteniendo tres ecuaciones con pendientes distintas.

Así como se revela en la Figura 22, una de las soluciones a considerar, es afirmar que -2 es la pendiente de la recta \overline{AB} , y que 1.63 y 0.15 son las pendientes de \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente.

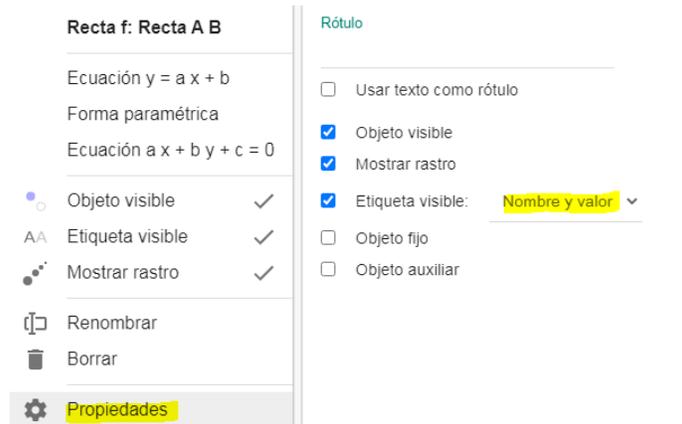
Figura 22. Exploración al software GeoGebra.



Fuente: Elaboración propia

Para que se observe en el GeoGebra que cada recta esté junto a su regla de correspondencia, se da clic en “propiedades” y se elige la opción de “nombre y valor” (Ver Figura 23).

Figura 23. *Propiedades del software GeoGebra*



Fuente: GeoGebra clásico

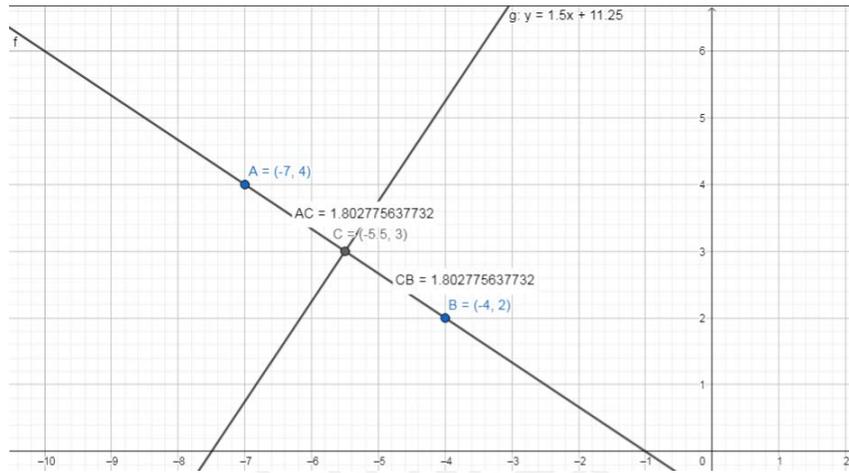
La Tarea 2 de la Actividad 0 consta en reconocer el uso de la opción punto y la opción recta en el GeoGebra, lo que permitirá al estudiante identificar y determinar cualquier función.

- 2) Sean A y B dos puntos cualesquiera, trace una recta que interseque en el punto medio del segmento creado por ambos puntos y forme un ángulo de 90° con ella. Luego, determine la ecuación analítica de la recta y calcule la distancia que existe con el punto de A y también con el punto B.

Las acciones esperadas de los estudiantes son las siguientes:

Se representa dos puntos cualquiera usando el comando punto, luego se escoge el comando punto medio  de $A = (-7,4)$ y $B = (-4,2)$ para así obtener el punto $C = (-5.5,3)$. Después, se da clic en la opción mediatriz  y obtendremos la recta perpendicular a la recta AB y que pase por el punto C, obteniendo así la ecuación de la recta $y = 1.5x + 11.25$. Tal como se evidencia en la Figura 24, se visualiza que la recta perpendicular de \overline{AB} es similar con la recta mediatriz del segmento de \overline{AB} .

Figura 24. Exploración al software GeoGebra. Tarea 2 de la Actividad 0.



Fuente: Elaboración propia

En la Tarea 3 de la Actividad 0, se tienen dos ítems (a y b) en la que se brindará una regla de correspondencia para colocar en el GeoGebra, lo que permitiría al estudiante reconocer e interpretar la gráfica de la curva en cada ítem.

- 3) Utilizando el cuadro de tabulación de GeoGebra, se puede ajustar la interpretación gráfica de una función cuya expresión algebraica es: $f(x) = a^x + b$. Teniendo en cuenta que para los valores que puede tomar a se consideran 2 casos.

Figura 25. Actividad para explorar el GeoGebra. Tarea 3a de la Actividad 0

Considerar $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$. Tomar $x \in [-2, -1.0, 1]$ y coloque sus coordenadas en el GeoGebra.

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Fuente: Elaboración propia

Como la función es: $f(x) = \frac{1^x}{2} + 1$, hallemos los 5 valores de y para cada x :

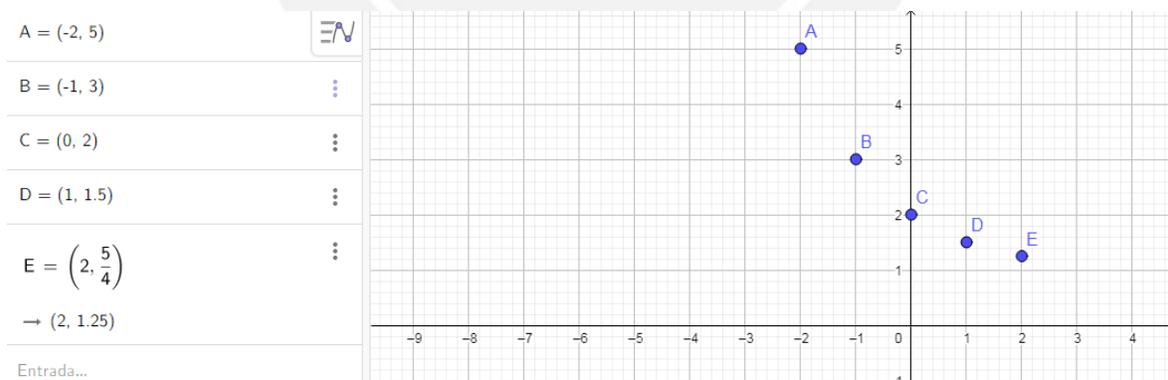
Tabla 6. Solución de Tarea 3a de la actividad 0

x	$f(x) = \frac{1^x}{2} + 1$
-2	5
-1	3
0	2
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{5}{4}$

Fuente: Elaboración propia

Después de obtener las coordenadas, se colocan en el GeoGebra y, como se presenta en el gráfico de esta función, están decreciendo los valores de “ y ” a medida que “ x ” aumenta.

Figura 26. Exploración al software GeoGebra. Tarea 3a de la Actividad 0.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 27. Actividad para explorar el GeoGebra. Tarea 3b de la Actividad 0

Se considera $a = 2$ y $b = 1$. Complete la tabla y represente gráficamente la curva que pasa por los cinco puntos de ítem a. Colocarlos en el GeoGebra.

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Fuente: Elaboración propia.

Como la función es: $f(x) = 2^x + 1$, tal como se observa en la Tabla 7, se completa las imágenes de los cinco puntos:

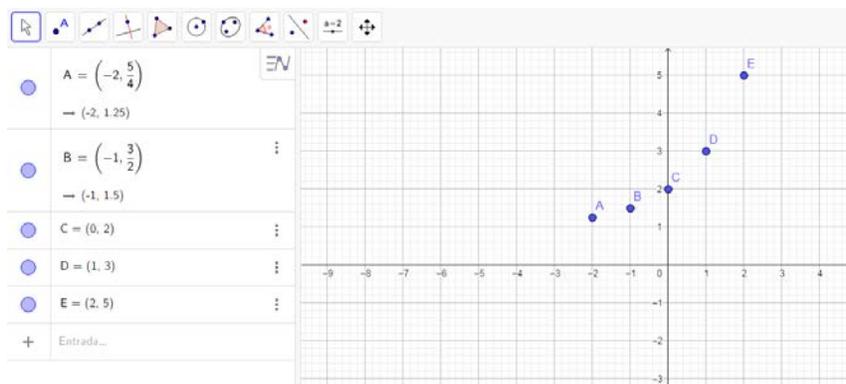
Tabla 7. Solución de la Tarea 3b de la Actividad 0.

x	$f(x) = 2^x + 1$
-2	$\frac{5}{4}$
-1	$\frac{3}{2}$
0	2
1	3
2	5

Fuente: Elaboración propia.

Luego de obtener las coordenadas y colocarlos en el GeoGebra, se observa que al unir los cinco puntos de coordenadas se asemeja a una curva que crece cuando aumentan los valores de x .

Figura 28. Los puntos ubicados en el plano del GeoGebra.



Fuente: Elaboración Propia.

En la Tarea 4 de la Actividad 0, se brinda un cuadro junto a unos pasos para colocarlo en el GeoGebra. Esto posibilitará al estudiante reconocer la representación gráfica de la curva con los comandos del GeoGebra.

4) Según la siguiente tabla:

Tabla 8. Valores asignados para “X” e “Y” para la Actividad 0. Pregunta 4.

X	0	1	2	3	4
Y	5	7	9	11	13

Fuente: Elaboración Propia.

Seguir los pasos siguientes en forma ordenada:

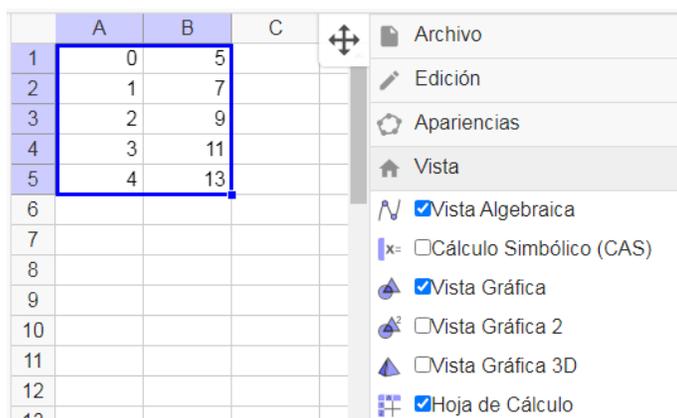
- Paso 1: Presionar 
- Paso 2: Dar clic en vista.
- Paso 3: Dar clic en hoja de cálculo.
- Paso 4: Colocar los valores del cuadro en la primera y segunda columna respectivamente.
- Paso 5: Sombrear ambas columnas, dar clic izquierdo y elegir la opción crear y después dar clic en lista de puntos.
- Paso 6: Usar el comando `AjusteLineal[<Lista de puntos>]` para la lista de puntos que se realizó y así obtener la función que corresponde al cuadro.

¿Cuál es la regla de correspondencia de la función? Detallar cada paso brindado especificando las opciones y comandos que utiliza.

Técnica esperada:

Dar clic primero en  y luego dar clic en la opción “vista”, después cliquear en la hoja de cálculo para ordenar los valores del cuadro.

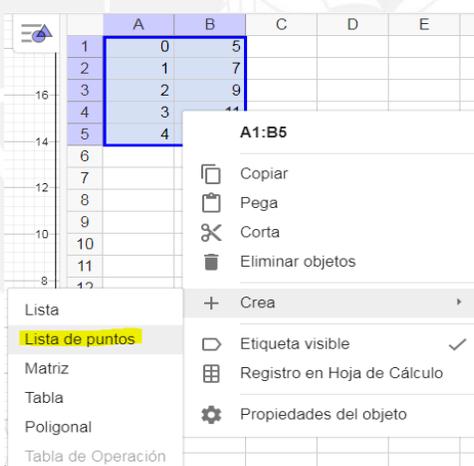
Figura 29. *Uso de la propiedad vista del GeoGebra.*



Fuente: Elaboración propia.

Después de ello, sombrear el cuadro azul que se muestra en figura anterior y dar clic izquierdo en “crear” y elegir “Lista de puntos”.

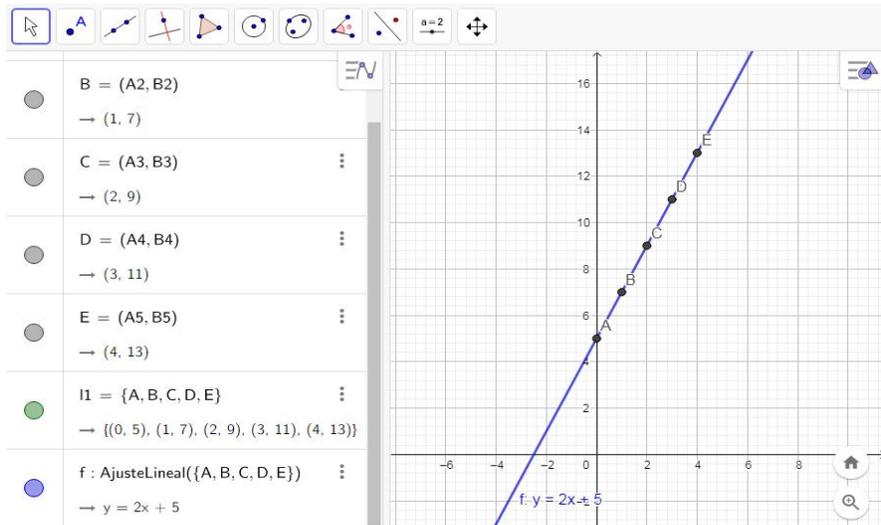
Figura 30. *Creación de la lista de puntos en el GeoGebra.*



Fuente: Elaboración propia.

Como se evidencia en la siguiente figura, después de crear la “Lista de puntos”, se brindaría una representación gráfica en el GeoGebra. Se usará también el comando `AjusteLineal[<Lista de puntos>]`.

Figura 31. Representación gráfica de la lista de puntos.



Fuente: Elaboración Propia.

Actividad 1: Identificar los parámetros de la Función Exponencial

En la Actividad 1, que se presenta el siguiente enlace de GeoGebra: <https://www.GeoGebra.org/m/pfnvd6f4> (ver Anexo 1), donde se observa un Applet en la que se brinda también una serie de preguntas relacionadas a la Función Exponencial para que descubran sus propiedades a través de la manipulación de los deslizadores y relacionarlos con parámetros a , b y k .

Lo que se busca en esta actividad es el surgimiento de propiedades y características de Función Exponencial y también su representación gráfica (esquemas de utilización). Es importante mencionar que la Actividad 1 se constituye en el descubrimiento de las características del artefacto función exponencial (instrumentalización).

En la Tarea, se brinda un Applet de GeoGebra y está compuesto por tres ítems que, a partir de una regla de correspondencia, permitiría que el estudiante reconozca el comportamiento de la curva cuando crece o decrece, es decir, que instrumentalice las características y propiedades de la Función Exponencial.

Estudiaremos la Función Exponencial de la forma: $f(x) = a^x + b$. Para ello, visitar el enlace mostrado <https://www.GeoGebra.org/m/pfnvd6f4>

Se pedirá desarrollar cada uno de los ítems de la Actividad 1, que se iniciará con el siguiente ítem:

a) Complete la siguiente tabla y describa el comportamiento que tiene la gráfica de f cuando $a > 1$.

Tabla 9. Asignación de números para $a > 1$.

a	1.5	1.7	2	2.5	2.9
Tipo de crecimiento					

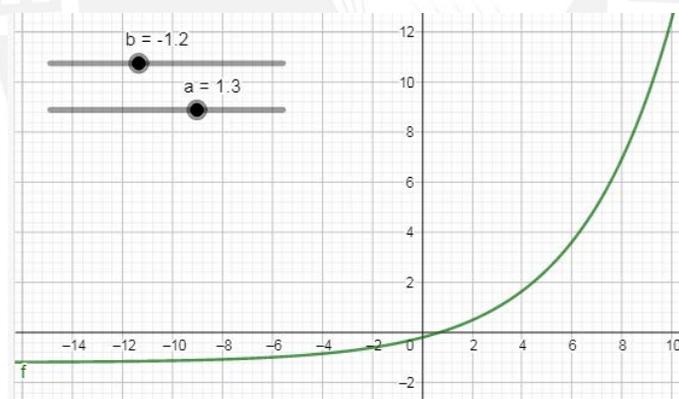
Fuente: Elaboración Propia.

Técnica instrumentada esperada.

Al abrir el enlace, se muestra una Applet GeoGebra, donde los valores de a y b tienen un intervalo de $[-5,5]$.

Para a un número positivo mayor que 1, se visualiza en la Figura 32 una gráfica que es creciente.

Figura 32. Representación gráfica de la Función Exponencial cuando es creciente.



Fuente: Elaboración Propia.

Asimismo, los estudiantes deberán completar la Tabla 9, así como se evidencia en la Tabla 10.

Tabla 10. Reconocimiento de la característica para $a > 1$.

a	1.5	1.7	2	2.5	2.9
Tipo de crecimiento	Creciente	Creciente	Creciente	Creciente	Creciente

Fuente: Elaboración Propia.

Un esquema de acción instrumentada que podría surgir de esta actividad es “la función es creciente cuando $a > 1$ ”.

b) Complete la tabla 11 y describa el comportamiento que tiene la gráfica de la función f cuando $0 < a < 1$.

Tabla 11. Asignación de números para $a < 1$.

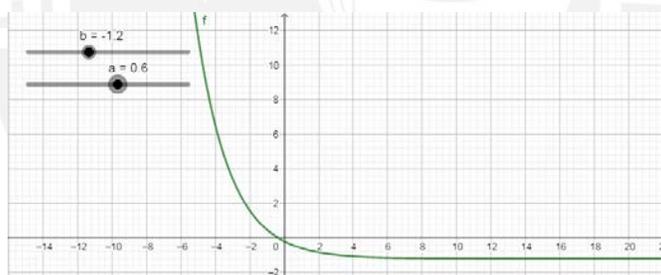
a	0.5	0.6	0.7	0.75	0.9
Tipo de crecimiento					

Fuente: Elaboración Propia.

Técnica instrumentada esperada.

Cuando $0 < a < 1$, una evidencia clara es la Figura 33 porque muestra la gráfica donde se comprueba que la función es decreciente independientemente del valor de b .

Figura 33. Representación gráfica de la Función Exponencial cuando es decreciente.



Fuente: Elaboración Propia.

Así como se observa en el gráfico, se puede usar para completar la Tabla 11, tal como se manifiesta en la Tabla 12:

Tabla 12. Reconocimiento de la característica para $0 < a < 1$.

a	0.5	0.6	0.7	0.75	0.9
Tipo de crecimiento	decreciente	decreciente	decreciente	decreciente	decreciente

Fuente: Elaboración Propia.

Un esquema de acción instrumentada que podría surgir de esta actividad es “la función es decreciente cuando $0 < a < 1$ ”.

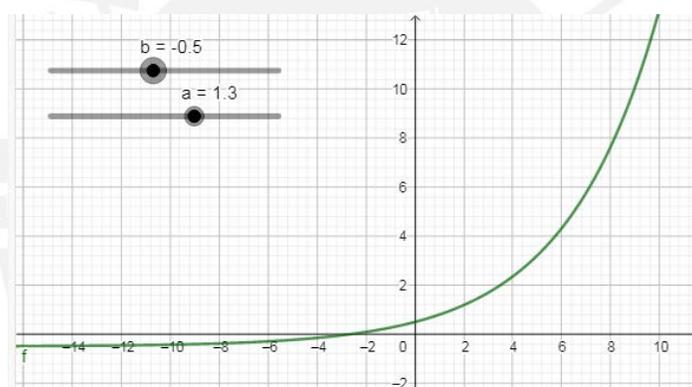
c) Fijar el deslizador $a = 1.3$ y moviliza el deslizador b . ¿Qué comportamiento toma la gráfica de la función f para los siguientes valores de b ?

- $b < 0$:
- $b = 0$:
- $b > 0$:

Técnica instrumentada esperada

Para el caso cuando $b < 0$, la curva se desplaza hacia abajo mientras más grande sea el número que acompañe al signo “-”.

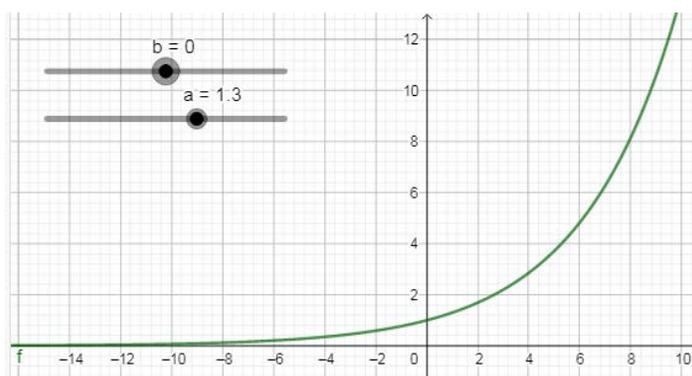
Figura 34. Representación gráfica de la Función Exponencial cuando $b < 0$.



Fuente: Elaboración Propia.

Ahora, fijamos $b = 0$ y se observa que tiene como asíntota horizontal al eje “x”.

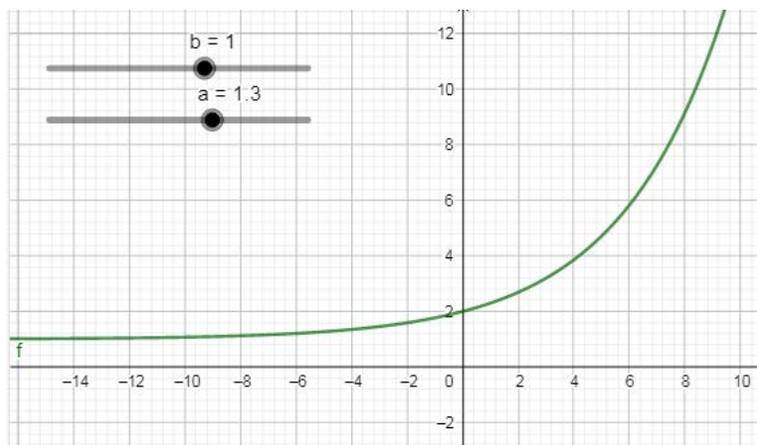
Figura 35. Representación gráfica de la Función Exponencial cuando $b = 0$.



Fuente: Elaboración Propia.

Asimismo, cuando $b > 0$, la curva se desplaza hacia arriba y cuando $b < 0$, la curva se desplaza hacia abajo.

Figura 36. Representación gráfica de la Función Exponencial cuando $b > 0$.



Fuente: Elaboración Propia.

Un esquema de acción instrumentada que podría surgir de esta actividad es “el desplazamiento vertical respecto de b ”.

La Actividad 2 tiene como objetivo que sea utilizado los esquemas de utilización por estudiantes para solucionar una situación de contexto real (COVID 19) y puedan relacionarlo con el concepto de Función Exponencial.

En la presente actividad se dará un proceso de instrumentalización de la Función Exponencial en una situación real mediado por el software GeoGebra. A continuación, presentaremos dos actividades de Función Exponencial en un contexto de la pandemia COVID 19.

En la Actividad 2 se presenta la Tarea 1 que está compuesto por cuatro ítems que, a partir de datos con relación al COVID 19, permitirá al estudiante deducir una correspondencia algebraica y la obtención del número de contagios en un determinado día.

ACTIVIDAD 2

Tarea 1: Alcance por día de personas contagiados por el COVID 19 en el Perú.

Desde el 6 de marzo del 2020, día que se confirmó la llegada del COVID 19 en el Perú. Asimismo, durante la primera semana se dio a conocer el número de personas que un infectado con el COVID 19 puede contagiar. Considerando el primer día, el 6 de marzo,

así como se muestra en la figura, en el segundo día se confirmaron 3 nuevos contagiados con el COVID 19, en el tercer día se dio 9 nuevos casos de contagio y en el cuarto se confirmaron otros 27 casos de contagio.

Figura 37. Crecimiento de personas contagiados por COVID 19 en el Perú



Fuente: Adaptado del MINSA.

- a) Utilice un cuadro de tabulación donde se visualice un orden de los primeros días de pandemia y los nuevos casos de contagiados de COVID 19. Determine la función que modela el número de contagios por el Covid 19.

Tabla 13. Números de casos de contagio por el Covid 19 en el Perú, según el determinado día de inicio de pandemia.

(número de días)	(número de nuevos casos de contagio)
1	1
2	3
3	9
4	27
...	...

Fuente: Elaboración Propia.

Técnica instrumentada esperada.

Se hallará la regla de correspondencia debido a los datos brindados y el procedimiento sería lo siguiente:

- Para $x = 1 \rightarrow f(x) = 1 = 3^0 = 3^{1-1}$
- Para $x = 2 \rightarrow f(x) = 3 = 3^1 = 3^{2-1}$
- Para $x = 3 \rightarrow f(x) = 9 = 3^2 = 3^{3-1}$

De ello, se deducirá y obtendremos que la función sería: $f(x) = 3^{x-1}$

- b) ¿Se podrá conocer el día que el Perú supere los 300 casos de contagio por Covid19?

Técnica instrumentada esperada.

El estudiante debe considerar que desde el primer de la llegada del COVID 19 en el Perú se tiene las siguientes informaciones:

Primer día: 1

Segundo día: 3

Tercer día: 9

Cuarto día: 27

Quinto día: 81

Sexto día: 243 nuevos casos de contagio.

Teniendo un total de casos de 364 desde el primer día, la respuesta sería que, a partir del séptimo día, superaría los 300 casos de contagiados por COVID 19.

- c) ¿Cuántos días habrá pasado desde el inicio de pandemia cuando se haya llegado a 59040 nuevos casos de contagio?

Técnica instrumentada esperada.

$$3^{x-1} = 59040$$

$$3^{x-1} = 3^{10}$$

$$x - 1 = 10$$

$$x = 11$$

Por tanto, se confirma que es a 11 días de la llegada del COVID 19, según la función obtenida, se llegaría a 59040 nuevos casos de contagios por el COVID 19 en el Perú.

- d) ¿Puede obtener la regla de correspondencia del ajuste de la curva? ¿Es posible que usando esta función se puede inducir los números de nuevos contagiados del COVID 19 durante los 7 primeros días?

Técnica instrumentada esperada.

$$x = 7: f(7) = 3^{7-1} = 3^6 = 729$$

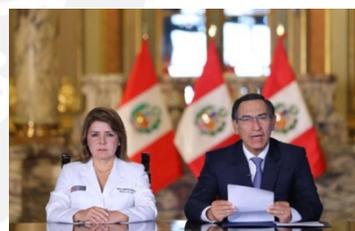
Sí, es posible deducir que 729 de nuevos casos contagiados de COVID 19 se daría en los primeros 7 días de la pandemia desde que llegó al Perú.

En la Actividad 2 se encuentra la Tarea 2 que está dividido en tres ítems que, a partir de datos confirmados de contagios con el COVID 19, el estudiante tendrá que utilizar el AjusteBaseExp(<Lista de puntos>), que es uno de los comandos del GeoGebra para obtener la regla de correspondencia según el número de semanas con la cantidad de contagiados del COVID 19 en el Perú.

ACTIVIDAD 3

Tarea: Número de casos de personas confirmados del COVID 19 en el Perú

El día 6 de marzo del 2020 se confirmó la llegada Covid19 en el Perú dándose el primer caso el día mencionado. Esa información fue brindada por el entonces presidente Martin Vizcarra. Desde la primera semana de esta pandemia, aumentaba el número de casos confirmados del COVID 19. En la siguiente tabla, se muestra el promedio de casos por día de personas con COVID 19 en las primeras 10 primeras



Fuente: <https://urlshortner.org/BmvCR>

semanas desde su inicio. Siendo el eje “x” los números de semanas y el eje “y” el promedio de casos del COVID 19 por día.

Tabla 14. Promedio diario de casos de personas confirmados del COVID 19 en el Perú.

X (número de semana)	Y (promedio de casos por día)
Semana 1	4
Semana 2	33

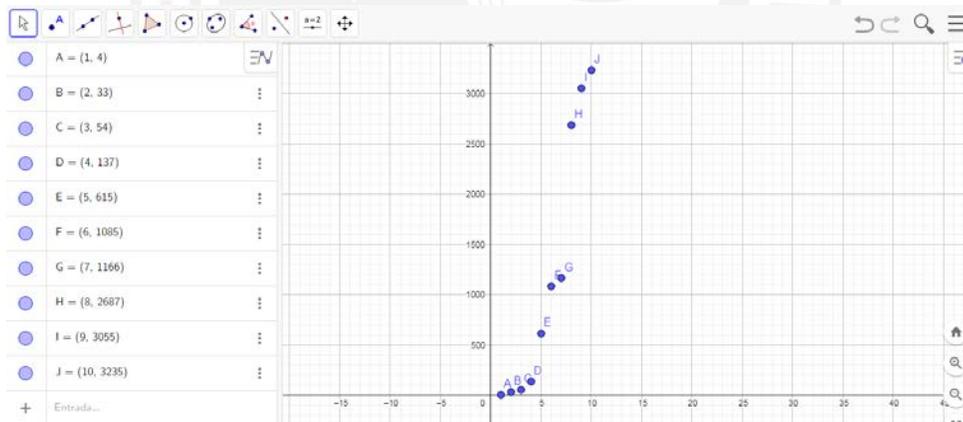
Semana 3	54
Semana 4	137
Semana 5	615
Semana 6	1085
Semana 7	1166
Semana 8	2687
Semana 9	3055
Semana 10	3235

Fuente: Ministerio de Salud del Perú.

a) Ubique y coloque los valores de la tabla en el GeoGebra.

Técnica instrumentada esperada.

Figura 38. Representación de la lista de puntos colocados en el GeoGebra.



Fuente: Elaboración Propia.

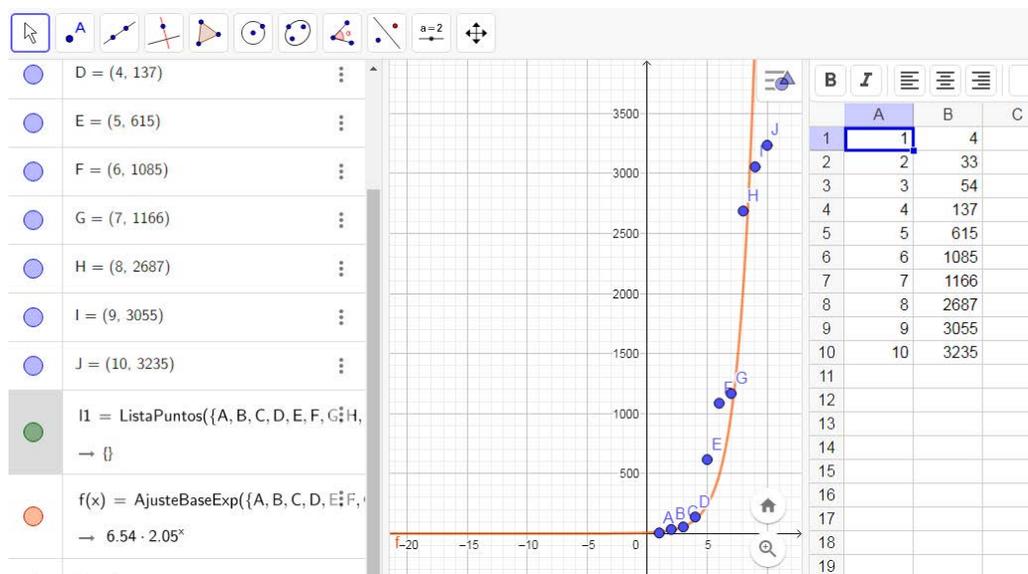
Como se observa en la Figura 37, se colocan las coordenadas teniendo en cuenta la amplitud del eje “x” para una representación gráfica.

b) Describa la gráfica que se ajuste a la lista de puntos. (considere curva exponencial)

Técnica instrumentada esperada.

Se busca que se realice la construcción de la lista de puntos y la representación gráfica usando en comando `AjusteBaseExponencial(<Lista de puntos>)`.

Figura 39. Representación gráfica de la Función Exponencial usando el comando `AjusteBaseExponencial` del GeoGebra.



Fuente: Elaboración Propia.

Así también se puede deducir la cantidad de personas contagiados con el Covid 19 durante la primera semana de abril. Para ello, se debe obtener la función de la curva.

- c) Utilizar la función que se obtuvo usando el `AjusteBaseExponencial[A,B,C,D,E,G,H,I,J]` para predecir el número de contagios por día en la semana 11.

Técnica instrumentada esperada.

Para ello, el estudiante deberá considerar para $t = 11$: $f(11) = 6.54 \times 2.05^{11}$, según la tabla durante la semana 11 de contagios en el Perú, ya que la expectativa era llegar al pico máximo de esta pandemia; sin embargo, se dio una reducción de contagios y de la cantidad de fallecidos y se puede concluir que lo peor ya quedó atrás. Finalmente, la información del 21 de mayo del 2020 (semana 11), debilitó estas expectativas.

Como se ve en el gráfico, los nuevos casos de Covid-19 en Perú aumentan diariamente, mostrando una significativa disminución de los niveles de contagio en

comparación con las semanas anteriores, ya que en ese tiempo el confinamiento social no era obligatorio.

3.2 Análisis de la propuesta de actividades

Iniciaremos analizando las actividades. Para ello, examinaremos los ítems de cada tarea, acompañado de las técnicas que se espera que los estudiantes de VII ciclo de Educación Básica Regular (EBR) puedan realizar.

A continuación, analizaremos la Actividad 1 e identificaremos esquemas de uso y de acción instrumentada.

Los estudiantes del ciclo VII del EBR de por sí ya están familiarizado con las funciones, pero no con las funciones exponenciales, convirtiéndose en un concepto nuevo y complejo. Del mismo modo, los estudiantes no reconocen al GeoGebra como una herramienta que ha utilizado en su educación escolar, por lo que se desarrollará la denominada Actividad 0, que le permita explorar el software GeoGebra.

A continuación, presentaremos el análisis por pregunta de cada actividad, en donde se identificarán: i) la técnica esperada, que es el conjunto de acciones con GeoGebra que el estudiante moviliza para representar a la Función Exponencial; ii) el valor pragmático, referido a las herramientas y comandos de GeoGebra que el estudiante le da significado; iii) el valor epistémico, relacionado a las propiedades y conceptos vinculados con la Función Exponencial que el estudiante hace visible; y iv) esquemas de utilización, y como elección podemos tomar los esquemas de uso, asociados a las tareas segundas que son preguntas que guían al estudiante o esquemas de acción instrumentada, relacionada con la primera tareas centrada en cumplir con el objetivo de la actividad.

Sabemos que la Génesis Instrumental ocurre cuando los estudiantes transforman el artefacto en instrumento al generar esquemas de utilización sobre él. En esta propuesta didáctica, se espera que el estudiante, en la Actividad 1, genere esquemas de uso de las propiedades de las funciones exponenciales asociadas al comportamiento gráfico al manipular ciertos parámetros de su regla de correspondencia. Estos esquemas se ponen en juego en la actividad 2 y permiten generar nuevos esquemas asociados con la construcción de la regla de correspondencia y posterior manejo de ella para predecir valores.

Finalmente, para la actividad 3, el estudiante utilizará todos sus conocimientos adquiridos y generará esquemas de acción instrumentada que validan que la Función Exponencial ya es un instrumento para un tipo específico de problemas.

Análisis de la Actividad 1

Para la Actividad 1, el estudiante tendrá que utilizar el GeoGebra a través de un Applet. En consecuencia, la técnica instrumentada sería la siguiente:

Actividad 1A

Según su valor pragmático, sería la configuración del software GeoGebra al manipular los deslizadores para reconocer el comportamiento de la gráfica que se le brindará al estudiante. El valor epistémico sería que el estudiante reconozca la característica de la representación gráfica de una Función Exponencial cuando $a > 1$.

En el ítem a, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la definición de función, función creciente y función decreciente.

Luego, para los diferentes esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando $a > 1$ y caracterizar a la Función Exponencial como una función creciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- Ingresar al Applet de GeoGebra
- Manipular los deslizadores

Valor epistémico:

- Reconocer el comportamiento del gráfico de la función cuando $a > 1$.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Función, función creciente y función decreciente

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Cuando $a > 1$, se considera que la Función Exponencial es creciente.

Actividad 1B

Según su valor pragmático, sería la configuración del software GeoGebra al manipular los deslizadores para reconocer el comportamiento de la gráfica que se le brindará al estudiante. El valor epistémico sería que el estudiante reconozca la característica de la representación gráfica de la Función Exponencial cuando $0 < a < 1$.

En el ítem b, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, ya que estas serían la definición de función, función creciente y función decreciente.

Luego, para los diferentes esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando $0 < a < 1$ y caracterizar a la Función Exponencial como una función decreciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- Ingresar al Applet de GeoGebra
- Manipular los deslizadores

Valor epistémico:

- Reconocer el comportamiento del gráfico de la función cuando $0 < a < 1$.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Función, función creciente y función decreciente

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Cuando $0 < a < 1$, la Función Exponencial es decreciente.

Actividad 1C

Según su valor pragmático, sería la configuración del software GeoGebra al manipular los deslizadores para reconocer el comportamiento de la gráfica que se le brindará al estudiante. El valor epistémico sería que el estudiante reconozca la característica de la representación gráfica de una Función Exponencial cuando $a = 1.3$.

En el ítem c, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la definición de función, función creciente y función decreciente.

Luego, para los diferentes esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando $a = 1.3$ e identificar a la Función Exponencial como una función creciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- Mover el deslizador en $a = 1.3$

- Mover el deslizador en b .
- Usar el zoom para identificar el comportamiento del deslizador b .

Valor epistémico:

- Reconocer al parámetro b como asíntota.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Función, recta, horizontal.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Reconocer b como una asíntota de la función.

La Función Exponencial se desplaza b unidades hacia arriba cuando $b > 0$ y b unidades hacia abajo cuando $b < 0$.

De esta manera, el estudiante identificará los esquemas de uso que se deben reconocer en cada uno de los ítems de la actividad 1.

A continuación, analizaremos la Actividad 2, reconociendo los posibles esquemas de uso y las posibles técnicas a usar.

Análisis de la Actividad 2

Para la Actividad 2, el estudiante tendrá que utilizar el concepto, propiedades y características esenciales de la Función Exponencial. En consecuencia, técnica instrumentada sería lo siguiente:

En la Actividad 2, se le presenta al estudiante un estudio del número de contagiados de COVID 19 que pueden alcanzar diariamente, por lo que deberá reconocer que la Función Exponencial se relaciona con el crecimiento diario de los casos de contagios durante los primeros días de la pandemia.

Actividad 2a

En el ítem a, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la definición de función y de Función Exponencial.

Luego, para diversos esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando se considera mayor que 1 la base exponencial y caracterizar a la Función Exponencial como una función creciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- No se ingresa al GeoGebra.

Valor epistémico:

- Utilizar los datos del cuadro y deducir la expresión algebraica de la función.
- Hallar e interpretar la función $(x, f(x))$.
- Identificar la regla de correspondencia de la función como una Función Exponencial
- Identificar en la representación gráfica el valor de $f(x)$ cuando $x = k$, siendo k un número entero positivo.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Par ordenado, regla de correspondencia o expresión algebraica de cualquier función, ajuste de la curva exponencial.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Podría ser el valor de la función que representa el número de personas contagiadas de COVID 19 al analizar los primeros días desde que empezó la pandemia en el Perú.

Actividad 2b

En el ítem b, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la tabulación, la definición de función y Función Exponencial.

Para varios esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando la base sea un escalar no menor que 1 y caracterizar a la Función Exponencial como una función creciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- No se ingresa al GeoGebra.

Valor epistémico:

- Utilizar los datos del cuadro y deducir la cantidad aproximada de contagiados.
- Hallar y relacionar los pares ordenados cuyas formas son $(x, f(x))$, teniendo en cuenta $y = f(x)$
- Identificar la regla de correspondencia de la función y relacionarla con la Función Exponencial
- Identificar en la representación gráfica el valor de $f(x)$ cuando $y = f(x)$.

Análisis

- **Esquemas de uso:**
Tabulación, expresión algebraica de una función, aproximación del valor de “ x ”.
- **Esquemas de acción instrumentada:**
Podría ser el valor de la abscisa cuando el número de nuevos contagios por el COVID 19 en el Perú supere los 300 contagiados.

Actividad 2c

En el ítem c, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la tabulación, la definición de función y también el de Función Exponencial.

Para diversos esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando la base es mayor que 1 y caracterizar a la curva exponencial como una curva creciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- No se ingresa al GeoGebra.

Valor epistémico:

- Utilizar la regla de correspondencia y deducir el día de 59049 de nuevos contagios.
- Hallar y relacionar el par ordenado $(x, f(x))$, teniendo en cuenta $59049 = f(x)$
- Identificar en la representación gráfica el valor de $f(x)$ cuando $y = f(x)$.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Expresión algebraica de la Función Exponencial, aproximación del valor de “ x ”.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Al analizar los primeros días desde el comienzo de la pandemia en Perú, se puede utilizar una función que represente la cantidad de días con personas contagiadas con COVID 19.

Actividad 2d

En el ítem d, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la tabulación, el concepto de curva y curva exponencial.

Para los diferentes esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando la base es mayor que 1 y caracterizar a la curva exponencial como una curva creciente.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- No se ingresa al GeoGebra.

Valor epistémico:

- Utilizar los datos del cuadro y deducir la cantidad aproximada de contagiados.
- Hallar y relacionar el par ordenado de la forma $(7, f(7))$, teniendo en cuenta $y = f(x)$.
- Identificar la regla de correspondencia de la función y expresarla como la Función Exponencial para luego relacionarla con la curva exponencial.
- Identificar en la representación gráfica el valor de $f(7)$.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Tabulación, expresión algebraica una función, aproximación del valor de “ x ”.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Podría ser el valor de la función que representa el número de los primeros siete días de pandemia e inducir los números de casos de contagio del COVID 19 en el Perú.

Análisis de la Actividad 3

Para la Actividad 3, el estudiante tendrá que utilizar la definición de Función Exponencial, así como sus características y propiedades de la misma. En consecuencia, técnica instrumentada sería lo siguiente:

En la Actividad 3 se le presenta al estudiante un número de casos de personas confirmados de COVID 19 en Perú, donde cada estudiante deberá reconocer que la Función Exponencial se relaciona con el promedio de casos de personas confirmados de COVID 19 en el Perú por día.

Actividad 3a

En el ítem a, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, que serían la ubicación de los puntos de coordenadas.

Luego, para los diferentes esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando se coloquen los puntos en el GeoGebra y observar a la Función Exponencial al unir los puntos.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- Ingresar al software de GeoGebra.
- Manipular los comandos del GeoGebra.
- Usar los comandos vista, hojas de cálculo y lista de puntos.

Valor epistémico:

- Utilizar los datos del cuadro y observar la ubicación de puntos.
- Interpretar el par ordenado $(x, f(x))$.
- Identificar la Función Exponencial al unir los pares ordenados $(x, f(x))$ expresados por puntos en R^2 .

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Par ordenado, representación gráfica de cualquier función, ajuste de curva exponencial.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Podría ser el valor de la función que representa el promedio diario de casos de personas confirmadas del COVID 19 al analizar las primeras semanas desde el inicio de la pandemia en el Perú.

Actividad 3b

En el ítem b, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la tabulación, la definición de función, funciones y también de Función Exponencial.

Para distintos esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando use uno de los comandos del GeoGebra `AjusteBaseExponencial[]` para ajustar la Función Exponencial y caracterizar por su monotonía para llamarla función creciente.

Técnica esperada:

- Hallar la gráfica de la Función Exponencial al utilizar comandos del GeoGebra.
- Identificar la expresión algebraica de la función y expresarla con la Función Exponencial

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Tabulación, expresión algebraica de una función, ajuste de cualquier curva exponencial.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Podría ser el valor el ajuste exponencial que representa al promedio diario de casos por día confirmados del Covid 19 en el Perú durante las primeras semanas de la pandemia.

Actividad 3c

En el ítem c, el estudiante debería usar diversos esquemas de uso, siendo estas las tareas secundarias, las cuales serían la tabulación, la definición de funciones, para ser más preciso la de función, y también de Función Exponencial.

Para diversos esquemas de acción instrumentada, lo tomaría en cuenta cuando se use uno de los comandos del GeoGebra `AjusteBaseExponencial[]` para obtener la Función Exponencial y aproximar el promedio de contagiados por día del Covid 19.

Técnica esperada:

Valor pragmático:

- Ingresar al software de GeoGebra.
- Manipular los comandos del GeoGebra.
- Usar el comando `AjusteBaseExponencial[]`

Valor epistémico:

- Utilizar la regla de correspondencia y hallar el promedio diario por día en la semana 11.
- Hallar y relacionar el par ordenado $(x, f(x))$, teniendo en cuenta que $x = 11$.
- Identificar en la representación gráfica el valor de $f(x)$ cuando $y = f(11)$.

Análisis

- **Esquemas de uso:**

Expresión algebraica de Función Exponencial, aproximación del valor de “y”, considerando $y = f(x)$.

- **Esquemas de acción instrumentada:**

Esta puede ser una función del primer día desde el inicio de la pandemia en Perú, utilizando la cantidad de días para reflejar la cantidad de personas infectadas con COVID 19.

Consideraciones finales

A continuación, presentamos las consideraciones finales, conclusiones y perspectivas para futuras investigaciones con relación a la génesis de la Función Exponencial, que son parte de la enseñanza de estudiantes de cuarto y quinto de secundaria (Ciclo VII de Educación Básica Regular - EBR).

Debido a la situación que hemos creado por la llegada del COVID-19, las propuestas didácticas de este estudio aportarán un nuevo enfoque a la enseñanza de las funciones exponenciales a los alumnos del ciclo VII del EBR, debido a la coyuntura que padecemos por la llegada del COVID-19, ya que la pandemia evidenció las dificultades que se tendrían en los tres niveles de la educación del Perú y que, a raíz de ello, se requieren nuevas estrategias de enseñanza a través de la modalidad virtual.

El primer objetivo específico se enunció como: "Diseñar una secuencia de actividades que permita al estudiante generar y movilizar esquemas de utilización mediado por GeoGebra para aproximarse al concepto de la Función Exponencial", observamos que el diseño de preguntas de cada actividad, a partir de las respuestas esperadas que podrían tener los estudiantes, es factible que se generen y movilicen diferentes esquemas de utilización, como por ejemplo, función creciente, función decreciente, asíntota, desplazamiento vertical, entre otros, que generan la génesis instrumental de Función Exponencial y de su gráfica (valor epistémico) y manipulación de herramientas de GeoGebra (valor pragmático). Estos son evidencias de que el primer objetivo específico se ha cumplido.

Por otro lado, con relación al segundo objetivo que se enunció como: "Identificar los esquemas de utilización generados en la secuencia de actividades", se han identificado esquemas de uso, en cada actividad propuesta. La presentación de la primera actividad, los estudiantes movilizan el esquema de uso de cómo se caracteriza a la Función Exponencial como una función creciente, mientras que, en la segunda actividad, estos movilizan el esquema de uso cuando la representación gráfica se ajuste a una curva exponencial.

Del mismo modo, se espera la generación de esquemas de acción instrumentada cuando el estudiante analice la regla de correspondencia o expresión algebraica de la función e induce el número de contagiados por COVID 19. Estas serían evidencias de que sí es posible identificar diversos esquemas a partir de la secuencia planteada, lo que permitiría indicar que se cumplió con el objetivo específico de segundo orden.

Finalmente, el tercer y último objetivo específico que se planteó es: "Analizar si los esquemas de utilización que movilizaría un estudiante le permite lograr la génesis instrumental", en la actividad 3 cuando utiliza a la Función Exponencial para solucionar un problema específico, movilizando sus esquemas de uso y de acción instrumentada, lo que genera que use la Función Exponencial como un instrumento para resolver este tipo de problemas de contexto real, podría dar indicios que pudo lograr la Génesis Instrumental.

El cumplimiento de estos objetivos específicos permite afirmar que la propuesta didáctica es apta para lograr el objetivo general del estudio, que es "Analizar una propuesta didáctica orientada a que estudiantes del VII ciclo de secundaria pueda generar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra", y se responda con claridad ante la pregunta planteada de investigación: "¿Cómo una propuesta didáctica podría generar la Génesis Instrumental de la Función Exponencial mediada por GeoGebra en estudiantes del VII ciclo de secundaria?"

Nuestra investigación se puede utilizar como referencia porque la educación matemática actual, tanto en el país como en el extranjero, puede seguir estudiando el aprendizaje a distancia. La pandemia del COVID-19 nos ha hecho darnos cuenta de que la capacitación se puede dar a través de plataformas virtuales y puede ser un recurso para capacitar otro tipo de funciones, pero para desarrollar otro tipo de tareas también es importante la relevancia de los artefactos.

En futuras investigaciones, las secuencias se pueden desarrollar no solo para el aprendizaje a distancia, sino también para enseñar funciones exponenciales u otro tipo de funciones, como las funciones logarítmicas. En este sentido, trabajos futuros podrían considerar desarrollar secuencias de formación en modalidad a distancia utilizando el Enfoque Instrumental u otras teorías, o centrándose en el papel pedagógico de la Orquestación Instrumental.

REFERENCIAS

- Advíncula, E. (2010). *Una situación didáctica para la enseñanza de la Función Exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de Humanidades* [Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio digital de tesis y trabajos de investigación PUCP. <https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/144721>.
- Arredondo, R. (2020). *Espacio del trabajo idóneo del profesor universitario al enseñar la Función Exponencial* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio digital de tesis y trabajos de investigación PUCP. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/17661>.
- Boyer, C. y Merzbach, U. (2012). *História da Matemática*. Brasil: Editorial Blucher.
- Brucki, C. (2011). *O uso de Modelagem no ensino de função exponencial*. Pontificia Universidade Católica De São Paulo PUC-SP. Tese de maestrado. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10900>.
- Chumpitaz, L. (2013). *La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos, mediado por el software GeoGebra con estudiantes de Ingeniería*. Tesis de Maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Repositorio digital de tesis y trabajos de investigación PUCP. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/8727>.
- Cuevas, C. y Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza*, 7(7), 108-119.
- De Souza, C. (2010). *A função exponencial no caderno do professor de 2008 da secretaria do estado de são paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do ensino médio* [Tese de Mestrado, Pontificia Universidade Católica de São Paulo]. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11456>.
- Dorado, D. y Diaz J. (2013-2014). Uso de La Función Exponencial para Modelar Crecimiento Microbiano. *El Cálculo y su Enseñanza*, 5(5), 75-90.
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, MA., Ainley, J., Andresen, M., Chan, YC., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., Meagher, M. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange

- (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89–132). Springer, Boston, MA.
- Fonseca, C. (2013). *as funções exponenciais e logarítmica nos livros didáticos escolares do 12 ano*. dissertação de mestrado. universidade de Aveiro. Departamento de Educação. Portugal.
- Foti, S. (2021). *Las funciones exponenciales: Un análisis de la distancia epistemológica* [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis Instrumental del artefacto simbólico Función Exponencial. *Transformación*, 14 (2), 252-261.
- Hernández Bautista, H. (2013). *Álgebra 5, secundaria*. Lima, Perú: Proyecto Ingenio.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación. <https://cutt.ly/GgFrddN>
- Lages, E. (2013). *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.
- Makgaka, S. y Sepeng, P. (2013). Teaching and Learning the Mathematical Exponential and Logarithmic Functions: A Transformation Approach. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 4(13), 177-185.
- Masetti, C. (2016). *Análise de livros didáticos de matemática: função exponencial*. [Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/19027>.
- Maor, E. (2008). *A história de um número*. São Paulo, Brasil: Editorial Recorp Rio de Janeiro
- Mejía, E. (2003). El proyecto de la investigación científica. *Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos*, 7(11), 5-29.
- Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima, Perú. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>.
- Oblea Acosta, J. (2016). *Álgebra 5, secundaria*. Lima, Perú: Editorial Ingenio

- Oliveira, R. (2015). *Um Estudo sobre a Função Exponencial* [Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista]. Matemática em Rede Nacional - IBILCE <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/132123>.
- Ojeda Zañartu, E. (2020). *Matemática secundaria*. Lima, Perú: Editorial Corefo.
- Paveis, J. (2016). *O GeoGebra No Ensino Das Funções Exponenciais*. Tese de mestrado. Fluminense: Universidade Estadual Do Norte Fluminense.
- Quintana, A. (2006). Metodología de Investigación Científica Cualitativa. En W. Montgomery (Eds.), *Psicología: Tópicos de actualidad* (pp. 47-84). UNMSM.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies: Aproche cognitive des instrumentns contemporains. *Armand Colin*, Paris.
- Rabardel, P. (2002). People and Technology: A cognitive approach to contemporary instruments. (H. Wood, Trad.). *Université de Paris*, Paris.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y la tecnología. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad de Industrial de Santander.
- Ribnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú, Rusia. Editorial: Mir Moscú.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996): *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Granada: Editorial Aljibe.
- Santillana (2020). *Matemática 5*. Lima, Perú. Editorial: Santillana.
- Sureda, P. y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la Función Exponencial. *Educación Matemática*, 25(2), 89-118.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.
- Vargas, V. (2012). La entrevista en la investigación cualitativa. *Calidad en la educación superior*, 3(1), 119-139.
- Vargas, V. y Guzmán J. (2011). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las ciencias*, 30(3), 89-107.
- Velásquez, F. (2014). *Creencias y una aproximación de la concepción de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Función Exponencial en cursos*

de *pre-Cálculo* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio digital de tesis y trabajos de investigación PUCP. <http://www.tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5498>.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2), 133-170.

Vivas, J. (2020). *Trabajo matemático de estudiantes de Humanidades en tareas sobre Función Exponencial* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio digital de tesis y trabajos de investigación PUCP. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/18104>.

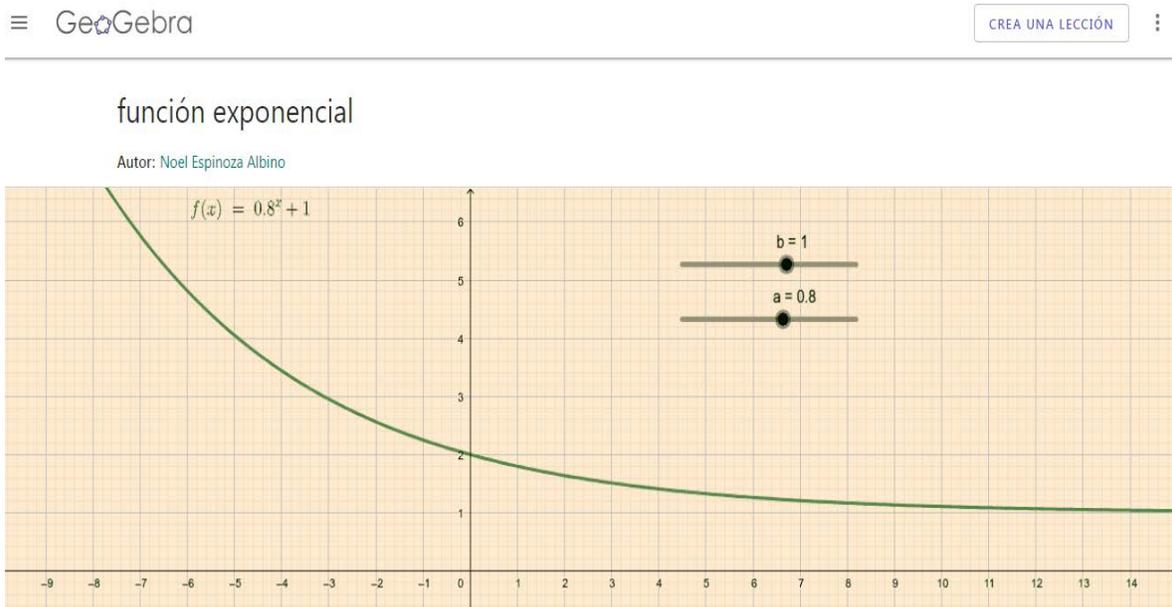


ANEXOS

ANEXO 1

Aplicativo del GeoGebra para desarrollar con la actividad 1.

En la siguiente figura, presentamos el Applet de GeoGebra, representado por el siguiente link <https://www.GeoGebra.org/m/pfnvd6f4>, que sirve para desarrollar la actividad 1. Asimismo, es guardado en el Classroom GeoGebra.

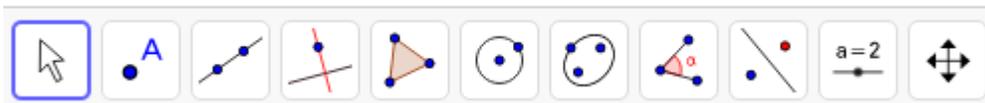


ANEXO 2

Actividad 0: Conociendo con GeoGebra

Usar el software GeoGebra Classroom

- 1) Abra el GeoGebra clásico y explore los comandos del GeoGebra, eligiendo cada una de las herramientas que están en la siguiente barra.



- a) Seleccione cada herramienta y enumere cuántas opciones se observan en cada una de ellas.

Herramienta	Opciones	Herramienta	Opciones	Herramienta	Opciones
					
					
					
					

- b) Coloque 2 puntos A y B en el plano y grafique la recta que pasa por ellos. Ubique un tercer punto C y construya las 2 rectas AC y BC. Asimismo, identifique la pendiente y regla de correspondencia de cada una de las rectas.
- 2) Sean A y B dos puntos cualesquiera, trace una recta que intersecte en la mitad al segmento AB y forme un ángulo de 90° con ella. Luego, determine su regla de correspondencia y calcule la distancia de esta con los puntos de A y B.
- 3) Utilizando el cuadro de tabulación de GeoGebra, se puede ajustar la representación gráfica de una función de la forma: $f(x) = a^x + b$. Teniendo en cuenta que para los valores que puede tomar a se consideran 2 casos.

- a) Considerar $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$. Tomar $x \in [-2, -1, 0, 1]$ y coloque sus coordenadas en el GeoGebra.

X	f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	

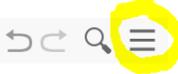
- b) Se considera $a = 2$ y $b = 1$. Complete la tabla y represente gráficamente la curva que pasa por los cinco puntos. Colocarlos en el GeoGebra.

x	$f(x) = 2^x + 1,$
-2	
-1	
0	
1	
2	

- 4) Según la tabla:

X	0	1	2	3	4
Y	5	7	9	11	13

Seguir los pasos siguientes en forma ordenada:

- Paso 1: Presionar 
- Paso 2: Dar clic en vista.
- Paso 3: Dar clic en hoja de cálculo.

- Paso 4: Colocar los valores del cuadro en la primera y segunda columna respectivamente.
- Paso 5: Sombrear ambas columnas, dar clic izquierdo y elegir la opción crear y después dar clic en lista de puntos.
- Paso 6: Usar el comando `AjusteLineal[]` para la lista de puntos que se realizó y así obtener la función que corresponde al cuadro.

¿Cuál es la regla de correspondencia de la función? Detallar cada uno de los pasos brindados especificando las opciones y comandos que utiliza.



ANEXO 3

Actividad 1: identificar los parámetros de la Función Exponencial

Estudiamos la Función Exponencial de la forma: $f(x) = a^x + b$. Para ello, dar clic al enlace <https://www.GeoGebra.org/m/pfnvd6f4>

- a) Complete la siguiente tabla y describa el comportamiento que tiene la gráfica de f cuando $a > 1$.

a	1.5	1.7	2	2.5	2.9
Tipo de crecimiento					

- b) Complete la siguiente tabla y describa el comportamiento que tiene la gráfica de la función f cuando $0 < a < 1$.

a	0.5	0.6	0.7	0.75	0.9
Tipo de crecimiento					

- c) Fijar el deslizador $a = 1.3$ y moviliza el deslizador b . ¿Qué sucede con la gráfica de la función f cuando b toma los siguientes valores?

- $b < 0$:
- $b = 0$:
- $b > 0$:

ANEXO 4

ACTIVIDAD 2

Alcance por día de personas contagiados por el COVID 19 en el Perú.

Desde el 6 de marzo del 2020, se confirmó el primer caso de COVID 19 en el Perú. Asimismo, durante la primera semana se dio a conocer el número de personas que un infectado con el COVID 19 puede contagiar. Considerando el primer día, el 6 de marzo, así como se muestra en la figura, en el segundo día se confirmaron 3 nuevos contagiados con el COVID 19, en el tercer día se dio 9 nuevos casos de contagio y en el cuarto se confirmaron 27 nuevos casos de contagio.



- a) Utilice un cuadro de tabulación donde se visualice un orden de los primeros días de pandemia y los nuevos casos de contagiados de COVID 19. Determine la función que modela el número de contagiados del COVID 19.

(número de días)	(número de nuevos casos de contagio)
1	1
2	3
3	9
4	27
...	...

- b) ¿Se podrá conocer el día que el Perú supere los 300 casos de contagio por COVID19?

- c) ¿Cuántos días habrán pasado desde el inicio de pandemia cuando se haya llegado a 59040 nuevos casos de contagio?
- d) ¿Puede obtener la regla de correspondencia del ajuste de la curva? ¿Es posible que usando esta función se puede inducir los números de nuevos contagiados del COVID 19 durante los 7 primeros días?



ACTIVIDAD 3

Número de casos de personas confirmados del COVID 19 en el Perú

El día 6 de marzo del 2020 se confirmó la llegada Covid19 en el Perú dándose el primer caso el día mencionado. Esa información fue brindada por el entonces presidente Martin Vizcarra. Desde la primera semana de esta pandemia, aumentaba el número de casos confirmados del COVID 19. En la siguiente tabla, se muestra el promedio de casos por día de personas con COVID 19 en las primeras 10 primeras semanas desde su inicio. Siendo el eje “x” los números de semanas y el eje “y” el promedio de casos del COVID 19 por día.



Fuente:
<https://urlshortner.org/BmvCR>

Tabla 15. Promedio diario de casos de personas confirmados del COVID 19 en el Perú.

X (número de semana)	Y (promedio de casos por día)
Semana 1	4
Semana 2	33
Semana 3	54
Semana 4	137
Semana 5	615
Semana 6	1085
Semana 7	1166
Semana 8	2687
Semana 9	3055
Semana 10	3235

Fuente: Ministerio de Salud del Perú.

- Ubique y coloque los valores de la tabla en el GeoGebra.
- Describa la gráfica que se ajuste a la lista de puntos. (considere curva exponencial)
- Utilizar la función que se obtuvo usando el AjusteBaseExponencial[A,B,C,D,E,G,H,I,J] para predecir el número de contagios por día en la semana 11.