PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Análisis del uso de Registros de Representación Semiótica en el cálculo de límites de funciones en el nivel Universitario

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Nancy Rosa Moya Lázaro

Asesor:

Francisco Javier Ugarte Guerra

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, Francisco Javier Ugarte Guerra, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis de investigación tituladaAnálisis del uso de Registros de Representación Semiótica en el cálculo de límitesde funciones en el nivel Universitario, de la autora Nancy Rosa Moya Lázaro, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 21%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 04/06/2021.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima 11/02/2023

Ugarte Guerra, Francisco Javier	
DNI:06779604	Firma
ORCID: 0000-0001-5071-8924	

Dedicatoria

Con infinito cariño, a mi padre, Gustavo Moya Chihuán, que hoy ya no me acompaña.

A quien dedico con mucho cariño y amor de hija esta tesis.

A mi madrecita linda Irene Antonia Lázaro Vásquez de Moya quien me dejo recientemente, 7 de agosto del 2022, quien se preocupó mucho por mí, para ella todo mi amor, le dedico esta Tesis.

Agradecimientos

A Dios por haberme dado fortalezas para seguir adelante en este trabajo de investigación.

A mi papá Gustavo Moya Chihuán por sus enseñanzas, me acompañó desde el inicio en este proyecto y que ahora lo ve concluido desde el cielo.

Agradezco a las Becas PRONABEC por haberme apoyado en la realización de este proyecto.

A mi Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por su apoyo.

Agradezco a mi asesor, Dr. Francisco Ugarte Guerra, por sus sugerencias en el desarrollo de la tesis. Al Jurado, Mg. Cintya Gonzales Hernández y Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por la revisión y sugerencias en la Tesis.

A la directora del Programa, Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, y a cada uno de mis profesores en la formación de los cursos de la Maestría, la Dra. Cecilia Gaita, Dr. Uldarico Malaspina, Mg. Emilio Gonzaga, Mg. Nélida Medina, Dr. Francisco Ugarte, Mg. Carolina Reaño, Mg. Augusta Osorio, la Dra. Verónica Neira y la Dra. Jesús Flores.

A todos mis compañeros de clase durante todo el curso que compartimos clases. A mis compañeros que me hicieron sentir bien en momentos difíciles, Erika Valderrama Soto y a Liseth Chacón por sus sugerencias y ayuda. Al profesor, Ing. José Carlos Chiri, por sus sugerencias en los grupos que conformábamos en clase, a Walter Caicedo, a todos mis compañeros de aula.

A mi madre, Irene Antonia Lázaro de Moya, por su apoyo constante, por su dedicación y enseñanzas, a mis hijos Christian y Giulissa Vilcapoma Moya.

A mi tía, Teresa Lázaro Vásquez por su apoyo espiritual.

A mis familiares, mi tía Luz Moya Chihuán y Aníbal Moya Chihuán, hermanos de mi padre que siempre han estado dándome un apoyo espiritual.

A mis suegros Manuela Sandoval y Edbar Vilcapoma.

Al Lcdo. Máximo Gonzáles por su disposición en tiempo para ayudarme en la diagramación de algunos gráficos y en la disposición de su aula para realizar la encuesta.

A la Mg. Maruja Gavillan, por la entrevista.

A mi esposo, el Mg. Abel Vilcapoma Sandoval, por sus valiosas sugerencias, y ayuda en la parte de diagramación.

Nancy Rosa Moya Lázaro

Resumen

El objetivo de esta tesis es analizar los diferentes Registros de Representación Semiótica, formación, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario.

Para el análisis de la investigación, utilizamos como referente teórico la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), en la que centramos nuestro estudio en los registros de representación algebraico y gráfico para el límite de una función. En el registro algebraico, analizamos límites de funciones con funciones polinomiales, funciones definidas a trozos, funciones racionales y en el registro gráfico con funciones continuas y funciones discontinuas. Todas ellas promueven diferentes actividades cognitivas, como la formación y tratamientos de representaciones del límite de una función en el registro algebraico y gráfico al resolver una tarea de límite de una función. También analizamos, desde la perspectiva de la TRRS, las actividades cognitivas: formación, tratamientos y conversiones que se desarrolla en relación con el límite de funciones en una práctica dirigida de Calculo I, en Estudios Generales área de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM). Los resultados que obtuvimos evidencian que hay un predominio de preguntas en el registro algebraico. Se presentan diferentes tipos de funciones algebraicas que promueven diversos tratamientos en el registro, habiendo ausencia de la visualización del objeto, que es un aspecto del límite de una función que lo muestra el registro gráfico. También podemos observar que hay ausencia de la actividad cognitiva de la conversión. De acuerdo con la TRRS, es necesario conocer más de una representación del objeto matemático, pues ellos se complementan, aumentan la capacidad cognitiva y ayudan a la comprensión del concepto cuando se realiza una tarea de límites de una función. La Investigación es de tipo cualitativo, realizamos un estudio de caso.

Palabras clave: Registro de Representación Semiótica; tratamientos; conversiones; límite de funciones.

Abstract

The aim of this thesis is to analyze the different registers of semiotic representation, formation, treatments, and conversions in the mathematical sphere developed around the limits of functions in a university course.

For the analysis of the research, we have taken as theoretical reference the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR) and centered our study in the registers of algebraic representation and graph to the limit of a function.

In the algebraic register we analyze the limits of functions with polynomial functions, slice functions, rational functions and graph register with continuous functions, discontinuous functions with finite jump, and functions with movable discontinuity. All of them enhance different cognitive activities as the formation and treatments of the limit of function representations in the algebraic register and graph when solving a limit of a function task.

Likewise, we analyze the cognitive activities: formation, treatments and conversions from a TRSR view regarding the limit of functions in a Calculus I guided activity, within the General Studies Area of Basic Science at UNMSM. The results show that there is a prevalence of questions in the algebraic register. Different types of algebraic functions appear to enhance diverse treatments in the register with a lack of the object visualization which is an aspect of the limit of a function indicated by the graph register. Also, we can notice that there is a lack of cognitive activity of the conversion. In accordance with the TRSR, it is necessary to know more than one representation of the mathematical object as they complement each other, increase the cognitive capacity and help the understanding of the concept when the task of limits of a function is performed. The research is qualitative, we conducted a case study.

Key words: Register of semiotic representation; treatments; conversions; limit of functions.

.

Índice

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Un tema de la Educación Matemática que ha despertado el interés en la comunidad matemática son las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión en el desarrollo de sus tareas en relación los conceptos matemáticos, en particular, con el concepto límite de una función en un punto. Las investigaciones evidencian que las dificultades encontradas tienen su origen a que dicho concepto es complejo, abstracto e intangible y, de otro lado, la forma en que enseña el profesor, donde predominan los aspectos algebraicos del límite.

Al respecto, muchos investigadores se preguntan, ¿cuáles son las actividades que contribuyen a que un estudiante adquiera la comprensión del concepto del objeto matemático? Desde diversos enfoques, como la teoría de Registro de Representación Semiótica, basada en las representaciones, la teoría APOE (niveles del conocimiento), la teoría de Situaciones TS, (generar situaciones en el aula), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (organizaciones didácticas) se ha tratado de dar respuesta a esta pregunta.

El objetivo de esta investigación es analizar, desde el marco teórico de la teoría de los Registros de Representación (TRRS), los diferentes Registros de Representación Semiótica, Tratamientos y Conversiones que se movilizan cuando se resuelven tareas sobre el límite de una función.

Nuestra investigación es de tipo cualitativa, cuyo procedimiento metodológico de investigación es de un estudio de caso. El caso es: Análisis del uso de Registros de Representación Semiótica en el cálculo de límites de funciones en el nivel Universitario, donde analizamos y describimos los registros algebraico y gráfico, así como explicamos e interpretamos la actividad matemática (funcionamiento cognitivo) a través de la formación, tratamientos y conversiones que se desarrollan en cada uno de los registros cuando se resuelve una tarea del límite de una función.

Analizamos una práctica calificada haciendo un estudio de los registros que predominan en ella y de la actividad matemática que se desarrolla al realizar una tarea del límite de una función.

En base a lo anterior, la tesis a presentar se organiza en cuatro capítulos.

En el capítulo I, encontraremos las referencias que nos han servido para conocer la problemática.

Radillo y González (2014) diseñan una secuencia didáctica utilizando los elementos de la TRRS, basada en los recursos de visualización, que significa relacionar y establecer conexiones entre las representaciones algebraica, gráfica y numérica. Presentan modelos de preguntas basadas en las formas de representación y señalan que tomar en cuenta la exploración computacional, ayudará a que el alumno, a través de este recurso, conozca las diversas formas de las funciones y el Límite de la función.

Londoño, Narro y Yatzil (2014) expresan que articular una representación semiótica de un registro de representación con otra representación en otro registro de representación significa construir la comprensión el concepto del límite de una función. Sugieren utilizar el registro gráfico para que los alumnos visualicen la definición del límite en este registro. Es decir, sus representaciones, sus tratamientos y la conversión.

La investigación de Hitt (2006) expone las dificultades en la comprensión del concepto límite de una función y propone actividades basadas en el marco teórico de la TRRS. En su trabajo, sugiere tareas de conversión que involucren los registros algebraico, gráfico y numérico.

Por otro lado, Blázquez y Ortega (2001) señalan algunos criterios a tomar en cuenta en la elección de los Registros de Representación Semiótica. Hitt (1998) expresa cómo la habilidad del alumno en cambiar de registro para conseguir la solución de un problema, llamado la visualización matemática, es necesaria en el proceso de aprendizaje.

Vílchez (2018) investiga y describe las articulaciones de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que los estudiantes de Ingeniería desarrollan cuando movilizan la noción de límite de una función. Esto lo hace desde la perspectiva gráfica tratando de adaptar su solución.

Fernández-Plaza, Ruiz Hidalgo y Rico (2015) analizan, interpretan y describen la capacidad que tienen los alumnos en el registro verbal de expresar sus definiciones individuales acerca del concepto de límite de una función y cómo lo aplican para justificar la existencia o no de los límites en el registro gráfico. La metodología de investigación que utilizan es del Pensamiento Matemático Avanzado y el marco teórico es la TRRS. Los autores concluyen que hay definiciones particulares o concepciones de los alumnos que coinciden con las definiciones conocidas del límite de una función. También manifiestan que hay concepciones particulares de los alumnos, como expresar que el límite no existe si la función no está definida en el punto en estudio.

En este capítulo I, también presentaremos la justificación, pregunta y objetivos y metodología de investigación.

En el capítulo II, presentaremos los aspectos considerados de la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS). Se describen los elementos de éste, representación semiótica algebraica, gráfica, registros de representación, actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas en los registros algebraico y gráfico y en la que se formulan varios ejemplos.

Presentaremos el fenómeno de la congruencia y no congruencia de las representaciones semióticas. Daremos un ejemplo de congruencia de la representación del límite dada por Weierstrass y la de Blázquez y Ortega, denominada Aproximación Optima.

En el capítulo III, realizaremos una aplicación de los elementos teóricos de la TRRS del capítulo II. Haremos un estudio analítico y explicativo del registro de representación semiótico algebraico, consideraremos la formación, movilización de tratamientos algebraicos del límite de una función para tres clases de funciones: polinomial, definida a trozos, función racional, en donde cada una de ellas tiene un tratamiento diferente y en la que presentaremos varios ejemplos. Nuestras referencias han sido importantes para la elección de esta clase de funciones.

También haremos un análisis descriptivo y explicativo del registro de representación semiótico gráfico: formación, tratamiento (movilización de representaciones en un mismo registro) y conversiones de representaciones (movilización entre registros). Aquí investigaremos con funciones continuas y discontinuas, ya que los tratamientos son diferentes. Movilizaremos la formación de representaciones y tratamientos, donde los límites laterales son iguales y cuando son diferentes. Consideraremos que cada clase de funciones movilizan diferentes tratamientos.

Presentaremos la actividad cognitiva de la conversión para el límite de funciones lineales y cuadráticas entre los registros algebraico y gráfico. Para ello, nos ha sido de utilidad la investigación de Duval (2012) en cuanto a la conversión de funciones lineales entre los registros gráfico y algebraico, al cual le hemos implementado la representación algebraica y gráfica el límite de una función. También utilizaremos la conversión de funciones cuadráticas entre los registros gráfico y algebraico y para ello ha sido de utilidad el articulo Gómez, Guirete y Morales (2017).

Analizaremos la congruencia y no congruencia de las representaciones en el registro algebraico y gráfico. Formulamos algunos ejemplos.

En el capítulo IV, presentaremos los resultados y conclusiones de la investigación.

En los Anexos, mostraremos algunos documentos que avalan esta investigación.

PRIMERA PARTE: PROBLEMÁTICA Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentaremos las investigaciones que nos han servido de referencia, tales como investigaciones en Educación Matemática que abordan, en primer lugar, las dificultades que enfrentan los alumnos en la enseñanza aprendizaje del límite de una función y, en segundo lugar, alternativas basadas en el diseño de actividades utilizando la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS).

A continuación, presentaremos la justificación, plantearemos la pregunta de investigación, señalaremos los objetivos y detallaremos la Metodología que se utiliza en la investigación.

1.1 Referencias

En esta sección, presentaremos las investigaciones relacionadas con el objeto matemático límite de una función en un punto. Los investigadores presentan las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión del concepto y proponen diseñar actividades, cuestionarios y, en algunos casos, efectuar entrevistas en base al marco teórico de la TRRS, donde, para ayudar a la comprensión del objeto matemático, se toman en cuenta las diversas formas de representaciones del límite de una función, algebraica, grafica, tabular y verbal, pues cada forma comunica cierta característica del concepto. Además, un punto clave que ayuda a la comprensión del objeto matemático es promover la actividad cognitiva de la conversion entre las representaciones.

Los autores expresan que el concepto de límite de una función es un concepto abstracto e intangible, que, para su comprensión, se requiere representarlo.

Las dificultades en torno al concepto del límite de una función, como la alcanzabilidad del límite y el paso de la representación verbal a la representación simbólica libre de contradicciones, demandó algunos siglos en resolverlos por la comunidad matemática de la época, ya que es muy estricta en la definición del concepto, sin ambigüedades, ni contradicciones. Se justifica, hoy en día, que la complejidad del concepto es debida a estas dificultades que existieron en el pasado y debido a la forma de enseñar del profesor en el aula.

La metodología de investigación utilizada en todos los casos es la cualitativa, en donde los autores describen las actividades y diseño del instrumento de evaluación, denominado cuestionario, así como analizan las actividades cognitivas que se realizan, como formación, tratamiento y conversión en el desarrollo de tareas que involucran el límite de una función.

Los investigadores coinciden que en la enseñanza del límite de una función predomina el registro algebraico, que es el más abstracto y menos comprensible. Todos coinciden en que se debe promover el uso de diferentes formas de representaciones, tales como algebraicas, tabulares, gráficas y verbales, y que haya conexión, articulación y visualización matemática entre ellas, lo cual ayudaría a que los alumnos tengan una comprensión integral del concepto. Es así como sugieren utilizar la tecnología para visualizar un mayor número de funciones y sus límites.

El objetivo de la investigación de Radillo y González (2014) tiene como finalidad analizar, desde la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión del límite de una función y diseñan una alternativa o una secuencia didáctica con el apoyo en recursos de la visualización, lo que les permite vincular una representación algebraica con su representación gráfica y numérica.

La investigación se realiza con alumnos entre 18 y 21 años matriculados en el primer curso de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad de Guadalajara, México.

La metodología que utilizan las autoras está basada en una investigación documental. Es decir, la revisión de la malla curricular, silabo y textos sobre la enseñanza del límite de una función mediante sus diversas formas de representación. En el trabajo, diseñan una secuencia didáctica basada en los elementos de la TRRS con actividades para conseguir los objetivos de su trabajo.

En cuanto al diseño de las actividades para el límite de una función, las autoras trabajan con representaciones algebraicas, gráficas y tabulares de funciones polinomiales, definidas a trozos y racionales, que, por sustitución directa en el punto en estudio, son indeterminadas de la forma cero sobre cero, donde estas funciones tienen la característica que todas son funciones iguales excepto en un punto.

Radillo y González (2014) presentan actividades previas para que el alumno reconozca las representaciones algebraicas y gráficas y, al analizar cada representación, comuniquen que el límite no depende de la evaluación de la función en el punto en estudio.

Las autoras proponen en su actividad diferentes formas de representaciones semióticas para el límite (algebraica, gráfica y tabular), ya que afirman que cada forma comunica algunos aspectos (contenido) del concepto de límite. Por ejemplo, las representaciones numéricas (tabular) complementadas con la representación gráfica de una función describen mejor las representaciones de un límite al infinito. En otra pregunta, se pide al alumno que complete una representación tabular y que la interprete como un límite.

Radillo y González (2014) realizan actividades que permite a los alumnos contrastar, relacionar y conectar las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones con la finalidad de mostrarles a los alumnos.

Las autoras hacen una propuesta, expresando que la gran cantidad de alumnos reconocen e identifican los diversos registros de representación del límite de una función, aunque les falta establecer conexiones entre los registros. Las autoras también proponen que debe haber un mayor énfasis en los procesos de traducción (conversión) de una representación tabular y gráfica para evitar interpretaciones incompletas o erróneas por la distorsión en la construcción del significado del límite de una función.

Las autoras sugieren implementar actividades con el uso del computador para que los estudiantes tengan la libertad de explorar las funciones y sus límites.

Enfatizan que los estudiantes deben justificar ampliamente sus respuestas, pero para que suceda eso deben tener un mayor dominio de los diversos registros de representación.

Por su parte, Londoño, Narro y Yatzil (2014) presentan una investigación en la que hacen un diagnóstico acerca de la adquisición del concepto del límite de una función que tienen los alumnos que ya han aprobado un curso de Cálculo en la facultad de Matemáticas de Coahuila en México.

Las autoras expresan que, en Didáctica de las Matemáticas, los signos, símbolos, figuras, entre otros, juegan un rol importante, ya que concede a los docentes tener recursos que les permita explicar los conceptos matemáticos abstractos (por ejemplo, el límite de una función en un punto) y a los alumnos a poder asociarlos, compararlos, entre otros, para aprender el concepto matemático. Desde ese punto de vista, acotan que las representaciones semióticas son recursos para poder aprender el concepto.

Para el análisis de esta investigación, Londoño et al. (2014) eligen el marco teórico de la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), que está basada en las representaciones semióticas del concepto, ya que permite a los alumnos poder manipular los diferentes Registros de Representación Semiótica del límite de una función, como son el verbal, algebraico, gráfico y tabular (numérico); hacer tratamientos internos en cada registro de representación y articular una representación semiótica de un registro de representación con otra representación en otro registro de representación y así construir la comprensión el concepto del límite de una función.

La metodología de investigación que utilizan las autoras es la cualitativa y en la que participaron 26 estudiantes universitarios con edades comprendidas entre 18 y 22 años. Los instrumentos que utilizan para la evaluación son los cuestionarios, donde su estructura analítica está basada en el enfoque teórico. Las preguntas se centraron en: actividades desde el registro de representación verbal, algebraico y gráfico y una actividad problema de aplicación de corte geométrico, que tiene la intencionalidad de integrar los conocimientos adquiridos sobre límites. Es decir, utilizar tratamientos y conversiones.

Los resultados en el registro verbal indican que algunos alumnos expresan algunas ideas, sin respetar la formalidad de lo que es el límite de una función en Matemáticas, por ejemplo, el orden de los enunciados en la definición, mientras que otros alumnos no recuerdan la definición algebraica formal. En el registro algebraico (predominante en el curso), obtienen mejores resultados en el sentido que los alumnos desarrollan tratamientos en este registro, llegando a la respuesta esperada, pero los que se equivocaron fueron debido a procesos algebraicos, por ejemplo, una factorización que olvidaron o no lo conocían.

Los alumnos no construyen el puente de la articulación entre representaciones (conversión) hacia el registro gráfico o numérico, ya que ninguno opta por esa elección. Afirman que, en cuanto a la visualización de los límites a partir de su representación gráfica, tienen dificultad en identificar el límite en este registro**,** salvo cuando las funciones son continuas.

Londoño et al. (2014) dan algunas sugerencias, en las que destacan que utilizar el registro gráfico sería favorable para que los alumnos visualicen la definición del límite en este registro. Es decir, sus representaciones, sus tratamientos y la conversión. También proponen utilizar la tecnología computacional y ver a través de ésta las diferentes formas y comportamientos de funciones que se proponen. Además, sugieren utilizar los distintos registros de representaciones, como es el algebraico, gráfico y tabular.

De igual modo, proponen indagar, en un inicio del curso, si los alumnos expresan, con sus propias palabras, la definición formal cuando se les pregunta qué entienden por el límite de una función y al término del curso explicarles los errores que hubo.

El trabajo de estas autoras ayudará a diseñar actividades, en la que además se sugiere usar la computadora como un recurso de implementación en clase, en la que los alumnos exploren las funciones y sus límites. En ese sentido, la investigación nos ayudará a conocer las dificultades, pero además en la estructura del cuestionario.

Por su parte, la investigación de Hitt (2006) nos expresa que en la construcción del concepto se presentan dificultades de aprendizaje que tienen que ver con la complejidad del concepto en sí y dificultades de aprendizaje relacionadas con la forma como enseña el profesor en el aula, predominando en sus clases el enfoque algebraico del límite. En su trabajo, propone una serie de actividades para promover una mejor aproximación a este concepto.

El autor presenta algunas dificultades que tienen los alumnos, como son las ideas primitivas del límite (ideas que trae el alumno de su vivencia), la idea del límite como una aproximación, (se acerca, pero no es), significado de las diferentes notaciones, conflictos con la idea del concepto de límite como una simple sustitución y conflictos con las lecturas de gráficas con respecto al límite.

También describe conflictos como el que una función discontinua no puede tener límites, significado de los cuantificadores, negación de los cuantificadores cuando se niega la convergencia, la Intuición y procesos de demostración.

Ante estas dificultades, el autor propone actividades cuya intención principal en el diseño de las actividades es que estas propicien un conflicto cognitivo en los estudiantes y permitan una discusión rica que pueda hacer emerger un cambio de pensamiento.

Hitt (2006) concluye que una posibilidad para mejorar la enseñanza del concepto del límite de una función es introducir los procesos algebraicos que predominan en la clase del profesor, pero acompañados de tareas que promuevan conversión entre las representaciones algebraicas, gráficas y tabulares. El autor manifiesta que los alumnos pueden primero obtener, a modo de predicción, el límite haciendo uso de la representación tabular (numérica) o haciendo una lectura correcta al visualizar en la representación gráfica, para luego pasar a la representación algebraica. Es decir, utilizando las representaciones semióticas del límite, sus tratamientos internos y la articulación entre ellos.

Esta investigación nos ayudará a identificar dificultades de aprendizaje del concepto de límite.

De igual manera, el trabajo desarrollado por Blázquez y Ortega (2001) nos es útil en esta investigación para ver los significados de las diversas representaciones y su relación con la comprensión, así como para identificar qué papel ocupa las representaciones en la enseñanza actual.

Los autores analizan la noción de límite que tienen los alumnos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de entre 17 y 18 años en el Sistema Educativo Español (LOGSE).

La metodología de investigación que utilizan es de tipo cualitativa para saber el lugar que ocupa en la enseñanza la representación del límite de una función. Los autores mencionan que una preocupación de los investigadores en Didáctica de las Matemáticas es averiguar cómo se construye el conocimiento en los alumnos y reflexionan que tiene que ver mucho con la representación del concepto. Es por eso, que su investigación se enfoca en el marco de la teoría de Registros de Representación Semiótica.

Al respecto, Castro y Castro (1997) (citado por Blázquez y Ortega, 2001) afirman:

> “Dominar un concepto matemático consiste en reconocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades“.(p. 221).

Por su parte, Romero (2000), (citado por Blázquez y Ortega, 2001) afirma que “La comprensión se realiza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación”.

Blázquez y Ortega (2001) realizan una investigación cualitativa que comprende tres ciclos de investigación- acción, trabajando sobre una secuencia didáctica que aparece en Blazquez (2000) (citado por Blázquez y Ortega, 2001) en la que expresa que se utilizan diferentes registros en la investigación y analizan si la imagen conceptual que tiene el alumno del concepto de límite se contrasta con la informacion que consigue de cada registro.

Los autores manifiestan que una cuestión importante a la hora de considerar los sistemas de representación en la enseñanza es la selección de los sistemas de representación adecuada a cada concepto y a la edad. Esto los lleva a plantearse qué representaciones se elegirán para la enseñanza del concepto de límite de una función.

También indican que existen algunas consideraciones que guían la elección, las cuales son:

- El concepto de límite de funciones parte del concepto de función y por tanto utilizan las representaciones de las funciones y las distintas investigaciones. Sugieren utilizar las representaciones tabulares (numérico), verbal, gráfico y algebraico.
- Expresan que trabajar con el límite, desde las representaciones verbales, choca con significados habituales en el sentido cotidiano que traen los alumnos.
- Tener claro qué aspectos del límite se desea resaltar. Por ejemplo, en la Educación Secundaria, el currículo propone un tratamiento intuitivo de los conceptos, lo que implica que la representación a utilizar debe ser la numérica, puesto a que este registro muestra mejor los aspectos de la aproximación. Debemos considerar que la visión numérica se complementa con la gráfica y recomienda que, en niveles avanzados, se puede completar con la algebraica.
- El marco Curricular es también importante en cuanto a las representaciones que exige para la función. Al pedir un estudio intuitivo del límite de una función y de estudio del comportamiento de la función, es decir, de tendencias, se escogen representaciones gráficas y numéricas.

Concluyen que estudiar la comprensión del límite de una función a nivel universitario, requiere considerar los sistemas, verbal, grafico, numérico y algebraico.

Hitt (1998) nos expresa cómo la visualización en Matemática, que consiste en la habilidad de convertir un problema de un sistema de representación en otro donde se logra el entendimiento, es una ayuda en la resolución de los problemas. Explica cómo las investigaciones acerca del papel que juegan los sistemas de representación en el aprendizaje, evidencian que alumnos de primer año de universidad no logran articular los diferentes registros de representación y que comprender el rol de los diversos sistemas de representación ayudarán a entender a los estudiantes a construir el concepto. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global integradora que Duval (2004) articule representaciones de varios sistemas.

El investigador expresa cómo en la Enseñanza de la Matemática los profesores promueven una enseñanza de corte algorítmico-algebraico y además las evaluaciones para medir el rendimiento de los alumnos son de procesos algebraicos, restándole importancia a la visualización.

Hit (1998) refiere que Zimmermann y Cunningham afirman que la visualización matemática es la habilidad que tiene el alumno para dibujar un diagrama con lápiz y papel o computadora, para representar un objeto matemático o un problema, de tal manera que le ayude a comprender el concepto del objeto o resolver el problema.

El autor manifiesta que investigadores en Educación Matemática reportan que los alumnos se resisten a utilizar la visualización matemática y que prefieren utilizar los métodos algebraicos en las resoluciones de sus problemas. También se detecta algo similar en los alumnos que llevaron el curso de Calculo, donde éste se desarrolla utilizando el sistema de representación gráfico, incluso las pruebas de las demostraciones, pero aun así no tienden a utilizarlo.

Los investigadores se han preguntado por qué sucede esto. Las respuestas saltan a la luz, primero, porque en los profesores predominan más en la enseñanza de la Matemática a utilizar el enfoque algebraico que el visual y, segundo, porque utilizar la representación gráfica trae más exigencias cognitivas que la algebraica.

Hitt (1998) presenta resultados de un test que le hicieron a los alumnos de primer año de universidad en nociones del Cálculo en un marco algebraico, el cual no dio buenos resultados, traduciéndose esto a la necesidad de considerar otro tipo de representación y la articulación de representaciones en apoyo a la resolución de problemas.

Desde la perspectiva del entendimiento y aprendizaje de las Matemáticas, el autor prueba que es necesario tener en cuenta las consideraciones visuales, en donde señala que los alumnos del primer año de universidad no visualizan matemáticamente un objeto matemático o resuelven un problema, no articulan los diversos sistemas de representación semiótica del objeto matemático estudiados en el nivel que le corresponden.

Menciona que la comprensión de los diversos registros de representación ayudará al estudiante a construir el concepto del objeto matemático.

Hitt (1998) explica, a través de un ejemplo, que surge la necesidad de considerar en la resolución de nuestros problemas la visualización matemática. Es decir, otra representación que ayude a comprender el problema. Por ello, presenta un ejemplo en el curso de Cálculo, donde se le plantea a un profesor del curso, en el registro algebraico, una pregunta

> "Sea una función diferenciable tal que $f(-x) = -f(x)$. Entonces, para cualquier valor de a dado
>
> A) $f'(-a) = -f'(-a)$ B) $f'(-a) = f'(a)$ C) $f'(-a) = -f'(a)$ D) Ninguna de las anteriores.
>
> En la que proporciona como respuesta: $f'(-a) = - f'(-a)$ dado que: $f'(-a) = (f(-a))' = (-f'(a))' = -f'(a)$"

Como observamos, el profesor expresa su respuesta en el registro algebraico, como era de esperarse. La pregunta aquí es, si el profesor habrá dado sus respuestas correctas, ¿cómo saberlo?

El registro algebraico no es ayuda porque solo nos presenta una parte del concepto, como propiedades, teoremas y corolarios expresados en representación algebraica. Si convertimos el problema al registro semiótico gráfico, pero con una función particular, muestra que la respuesta del profesor es incorrecta. Es decir, ha construido un contraejemplo en el sistema de representación gráfico, muestra que algunas propiedades no se cumplen y de los errores del profesor. Además, los tiempos que se podría demorar haciendo cálculos para comprobar su veracidad desde el registro algebraico son mayores. A este hecho de haber construido un gráfico para comprender o resolver el problema, se dice que ha visualizado matemáticamente el problema.

Hitt (1998) expresa también que ocurren problemas en la lectura de gráficas por la computadora o calculadora, debido a que puede haber una falsa percepción visual. Para ello, sugiere mayor soltura en el uso del Zoom. También comenta sobre los paquetes matemáticos, que muchas veces se utiliza con una confianza irreflexiva en los resultados que provienen del computador, no cabiendo la posibilidad de que el Software pueda estar dando resultados errados.

El principal objetivo del trabajo de investigacion de Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) es determinar si la conceptualización métrica del límite funcional dada por Weierstrass, que es utilizada en la docencia universitaria o la de Aproximación Optima, surgida de la Didáctica de la Matemática, considerando el aprendizaje y la comprensión de los alumnos, dado por Blázquez y Ortega,(2006) como la más sencilla y apropiada para que los alumnos universitarios inicien su camino de aprendizaje en un curso de Calculo en la universidad.

La investigación se trabaja sobre la formulación del límite como una aproximación óptima que hacen Blázquez y Ortega (2002) y una exploración desarrollada con dos grupos: Una parte, universitarios que estudian en la Facultad de Ingenieria en una Universidad de Argentina y de otra con Licenciados en Matematicas, Económicas, Física, Administración y que poseen una formación amplia en Matemáticas, además estudian el curso de matemáticas para obtener el CAP (Certiticado de Aptitud Profesional, que acredita a un profesional en España, para poder ejercer la docencia en los colegios secundarios o Institutos de Educación Superior (IES)) y de allí que los autores consideran que las respuestas de la investigacion son altamente confiables y válidas.

Para recolectar la informacion, utilizan los cuestionarios y la entrevista.

En el primer grupo, las preguntas de investigación se centran en la intuición de la definición del límite, tendencia de una variable, aproximación de un número, aproximación óptima de una secuencia, definición formal del límite de la métrica y el límite por aproximación óptima. .

Dado a que el grupo de Licenciados tienen una formación matemática, aplican en sus cuestionarios preguntas y a continuación realizan una entrevista para hacer un contraste entre ambas definiciones.

Para hacer el análisis y descripción de la respuestas, utilizan la metodología cualitativa y la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2004).

La propuesta del concepto de límite que hacen Blázquez y Ortega (2006) se basa en las ideas que contiene la definición, como son las ideas de aproximación y la de tendencia de una sucesión. Para ello, consideran el siguiente ejemplo:

Sea la sucesión real: $1;\ 1.1;\ 1,11;\ 1,111;\ 1,1111;\ 1.11111; \dots\dots\dots$

A partir del siguiente razonamiento matemático de cómo se origina el n-ésimo término de la suceción planteada, se tiene:

$$a_1 = 1.1 = 1 + 0.1 = 1 + \frac{1}{10}$$

$$a_2 = 1.11 = 1 + 0.1 + 0.01 = 1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2$$

$$a_3 = 1.111 = 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 = 1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3$$

De forma inductiva, se puede establecer que

$$a_n = 1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^n$$

Notamos que la sucesión:

$(b_n)_{n\geq 1}$: $\frac{1}{10}$; $(\frac{1}{10})^2$; $(\frac{1}{10})^3$ ... Es una sucesión geométrica de razón $r = \frac{1}{10}$, de manera que $a_n = 1 + S_n$ donde:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1(r^n-1)}{r-1} = 8\frac{\frac{1}{10}((\frac{1}{10})^n-1)}{\frac{1}{10}-1} = -\frac{1}{9}((\frac{1}{10})^n - 1)$$

De manera que cuando $n \to \infty$, entonces $a_n = 1 + S_n \to 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

En primer lugar, es una sucesión que se aproxima a $\mathbf{100}$ (lentamente). Es decir, la diferencia de cada término y la aproximación es mayor que cero. Se puede observar que no tiende a $\mathbf{100}$, ya que se observa que los términos de la sucesión no se acercan a 100.

Sin embargo, en segundo término, la misma sucesión que se presenta se aproxima a $\mathbf{\frac{10}{9}}$. Es decir, la diferencia en valor absoluto de los términos de la sucesión y la aproximación es mayor que cero y a medida que toma mas términos en orden ascendente de la sucesión, se puede ver que la diferencia es menor. Con esto, la sucesión tiende a $\mathbf{\frac{10}{9}}$, ya que cada aproximación de la sucesión es mejorada por otro término de la sucesión, en el sentido que el término de la sucesión que mejora está más cerca del límite $\mathbf{\frac{10}{9}}$ que la aproximación.

La diferencia es que, en el primer caso, fijada una aproximación de 100, por ejemplo 2, no se mejora por los términos de la sucesión, en el sentido que no hay un término de la sucesión que esté muy cerca de 2. En cambio, en el segundo caso, fijada una aproximación arbitraria de $\mathbf{\frac{10}{9}}$ (límite de la sucesión), por ejemplo 2 (como en el caso anterior), es posible encontrar varios términos arbitrarios que estén más cerca del límite de la sucesión, que es $\mathbf{\frac{10}{9}}$, que de la aproximación 2.

Esta reflexion que hacen Blázquez y Ortega les permite definir el límite funcional en términos de aproximación óptima, utilizando la palabra “aproximación” y “mejorar la aproximación” como bien mencionan, sin entrar en tanto formalismo, pero sin perder el rigor, primando un lenguaje y razonamiento matemático más cercano al que utilizan los alumnos, ya que utiliza como base de conocimiento lo que es una Progresión Geométrica, la suma de los n-primero terminos de una Progresión Geométrica y el hecho de que la razón geométrica es menor que uno.

Pasemos ahora a enunciar la definición que formulan.

“El límite de la funcion $f(x)$ en $x = a$ es L, si para cualquier aproximacion K de L, $K \neq L$, existe una aproximación H de a , $H \neq a$, tal que las imágenes de todos los puntos que estan mas cerca de a que H, estan mas próximas a L que a K.”(p. 8).

O, en términos de entorno reducido y aproximacion óptima

“El límite de la funcion $f(x)$ en $x = a$ es L, si para cualquier aproximacion K de L, $K \neq L$, existe un entorno reducido de a, tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximos a L que K. (las imágenes mejoran la aproximacion K, del límite L” (p. 8).

Si bien en el análisis Blázquez y Ortega, de acuerdo a la teoria de Duval,(2004) hacen una discriminación de las unidades significantes de cada representación del límite, asociando las unidades significantes de cada representacion que les permite afirmar que como se trata de dos representaciones de la misma definición, entonces deben ser equivalentes.

En este trabajo, probaremos que se produce una congruencia entre las representaciones y, por tanto, se da la conversión de una representacion en otra, lo cual indica que podemos usar cualquiera de las definiciones sin haber perdido nada conceptualmente hablando de la definicion tradicional.

Según Duval (2004), como mencionan Blázquez y Ortega (2006), haber realizado la tarea cognitiva de la conversion entre dos representaciones, a través de una coordinacion y articulacion de las unidades significantes, significa que hay una comprension integral entre ambas definiciones y que no hay dificultades de comprension entre los conceptos.

Blázquez y Ortega (2006) concluyen, de las respuestas y entrevistas realizadas, que la definición del límite por aproximación óptima es mas sencilla y de lenguaje cercano al que movilizan los alumnos, por lo que plantean considerarla en un primer curso de Cálculo en la universidad.

Algunas caracteristicas que facilitan la conceptualizacion de la aproximacion óptima son de facil razonamiento matematico y menos formalismo. Mucho más cercana al razonamiento matematico de los alumnos, ya que no es necesario tener soltura con el lenguaje matematico, más fáciles de explicar graficamente e imaginar la solución.

Por otro lado, la definición de límite que se da en la docencia universitaria es el de Weierstrass, que es mas formal. En ella, se necesita traducir las desigualdades en valor absoluto en terminos de intervalos o entornos en R y luego pasarlos a una interpretacion verbal, cosa que, en un primer curso, los alumnos no tienen esa solvencia en sus razonamientos matematicos, usando el rol del epsilon y delta. Los alumnos opinan que la conceptualizacion de la metrica es más de memoria que se aprende en ese instante y que facilmente se olvida.

El trabajo de investigación de Vilchez (2018) tiene por objetivo identificar y describir las articulaciones de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que los estudiantes de Ingeniería desarrollan cuando movilizan la noción de límite de una función.

La investigación de Fernández-Plaza, Ruíz Hidalgo, y Rico (2015) se lleva a cabo con estudiantes de 16 a 17 años, con un total de 36 estudiantes matriculados en la asignatura Matemáticas de la modalidad Ciencia y Tecnología del primer curso de Bachillerato en la provincia de Granada en España

El objetivo de la investigación es verificar la capacidad que tienen los alumnos al argumentar sus respuestas de las tareas encomendadas con respecto al concepto de límite de una función.

Para ello, los autores analizan e interpretan las concepciones que tienen los estudiantes acerca del concepto de límite de una función a partir de su representación gráfica. Aquí se entiende por concepción a la definida por Von Glasersfeld (1987) (citado por Fernández-Plaza, Ruíz Hidalgo, y Rico, 2015), que la define como todos los elementos y los argumentos (gráficos, simbólicos por ejemplo) que tienen los estudiantes para dar respuesta a una tarea y, por otro lado, la concepción externa que es referida a la interpretación que hacen los investigadores de lo que comunican los estudiantes.

En esta investigación, los autores muestran la intencionalidad que proponen en cada una de las tareas, por ejemplo con la intención de establecer un vínculo entre la deducción formal y la intuición trabajan con tareas analíticas/ diagnóstico que involucran propiedades específicas del concepto de límite, ya que tiene el objetivo de incentivar la tarea de sintetizar una definición individual, lo cual impulsa, de parte del alumno, la tendencia a reproducir la definición que dio el profesor o del libro de referencia.

También para explorar la relación concepción/definición de un concepto matemático, se implementan tareas de aplicación de la definición que implicaron utilizar y relacionar diversos sistemas de representación. La investigación se centra en las nociones de definición y concepción. En ella, expresan que una definición en Matemáticas es un conjunto de propiedades lógicamente consistente de un concepto matemático, a partir del cual se deducen otras propiedades de este.

Las descripciones que hace un estudiante de las propiedades o definiciones que sintetizan los autores la denominan “definición individual”, con la finalidad de distinguirlas de las que se dan en los libros de referencias o la propuesta por el profesor.

La noción de concepción considera la de Von Glasersfeld (1985) (citado por Fernández-Plaza, Ruíz Hidalgo y Rico, 2015). El trabajo es de corte descriptivo e interpretativo basado en las encuestas y el análisis de los datos lo hacen de manera cualitativa y cuantitativa.

1.2 Justificación

El concepto de límite de una función es un referente muy importante en Matemáticas por ser un concepto matemático fundamental del Cálculo Diferencial aplicado a las funciones, ya que es la base en la definición de otros objetos matemáticos, como la continuidad, derivada, integral de funciones reales, y que permite resolver problemas de variación de funciones, problemas de optimización, según Blázquez y Ortega (2001).

Las aplicaciones a los problemas geométricos del espacio tridimensional (maximización, minimización, velocidades, recta tangente, volúmenes, entre otros) y a las funciones de varias variables obligan a extender este concepto a $\mathbb{R}^N$.

De acuerdo con el sílabo vigente, se enseña, en la Unidad II, límites en la quinta semana en estudios generales, área de Ciencias Básicas en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

En las últimas décadas, la Comunidad de Educación Matemática ha desarrollado un número considerable de investigaciones mostrando su interés y preocupación en la enseñanza, como lo hicieron Radillo y González (2014), y comprensión, por parte de Londoño, Narro, y Yatzil (2014), Fernández-Plaza, Ruíz Hidalgo, y Rico (2015), Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas (2006), Hitt (1998), Hitt (2006), Pons (2014), del concepto límite de una función en alumnos universitarios.

La teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) la hemos elegido porque permite conocer, analizar, describir y explicar las diversas representaciones del límite de una función, como son el algebraico, gráfico, tabular, y conocer el significado del concepto límite de una función desde distintas perspectivas; así como operar, asociar las representaciones con las reglas de conformidad dentro de un mismo registro. Es decir, hacer tratamientos y en convertir o traducir unas representaciones en otras de diferentes registros.

Además, su utilidad como referente teórico en esta tesis permite analizar, describir, explicar los diferentes Registros de Representación Semiótica, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario.

Las principales referencias consideradas en esta tesis son las investigaciones de Radillo y González (2014); Londoño, Narro, y Yatzil (2014); Blázquez y Ortega, (2001) y Hitt (2006) que evidencian la existencia de dificultades en la enseñanza y comprensión del límite de una función, como son la ausencia de tratamientos internos en los registros gráficos y tabular, la falta de conversión de un registro a otro, lo cual hace que los alumnos tengan dificultades en la comprensión del concepto de límite de una función.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

¿Cuáles son los registros, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario?

Objetivo General

Analizar los diferentes Registros de Representación Semiótica, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario.

Objetivos Específicos

Para lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

- Analizar los Registros de Representación Semiótica (RRS) algebraico y gráfico.
- Caracterizar los RRS, teniendo en cuenta la institución y otras investigaciones.
- Determinar y caracterizar los RRS asociados al límite utilizado en los textos y la institución elegida.
- Analizar las articulaciones y coordinaciones de las representaciones entre los registros seleccionados en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario.

A continuación, describiremos la metodología y los procedimientos a realizarse en esta investigación.

1.4 Metodología de la investigación

La investigación que realizamos es de tipo cualitativo, ya que, según Hernández, Fernández, y Baptista (2010) la investigación cualitativa permite analizar, describir e interpretar situaciones, eventos, interacciones y conductas observadas de los sujetos del estudio.

En esta investigación, se describirá, explicará e interpretará la actividad matemática cuando se resuelven tareas sobre límites, basándonos en algunos aspectos del marco teórico de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004).

En particular, realizaremos un estudio de caso, que se caracteriza por ser analítico, descriptivo, explicativo y contrastan la teoría utilizada con los resultados obtenidos, considerando a Martínez (2006), son los siguientes:

Su carácter descriptivo.

Investigaremos y describiremos aspectos del marco teórico de la TRRS, como son los Registros de Representación Semiótica, para el objeto matemático límite de una función y detallaremos los tratamientos en cada registro, así como las conversiones asociadas.

Por otro lado, describiremos la actividad matemática en el desarrollo de tareas de límite de una función, identificando los registros que utilizan, cuáles son los desarrollos en los tratamientos y conversiones que realizan, si estos corresponden con la teoría.

Realizaremos el contraste entre los resultados obtenidos (análisis a posteriori) y los esperados (análisis a priori).

Su carácter exploratorio.

Por medio de las exploraciones, pretendemos un acercamiento entre la TRRS y los resultados obtenidos (análisis de textos, práctica dirigida, examen parcial).

Como en un estudio de caso, obtenemos la información de diversas fuentes como, documentos, registros de archivos, cuestionarios, entrevistas y análisis de las tareas realizadas por los sujetos.

Es precisamente en esta investigación el caso: análisis del uso de Registros de Representación Semiótica en el cálculo del límite de funciones en el nivel Universitario.

Para el diseño de nuestro estudio de caso, nos basamos en (Martinez, 2006), quien propone cinco componentes, las cuales son:

Las preguntas de investigación

Sirven de referencia o punto de partida para la recolección de la información, pues las preguntas contienen los conceptos y fenómenos que se necesitan obtener información. De acuerdo con la autora, no solo sirven de punto de partida en la recolección de datos, sino que también se utiliza en el análisis posterior. En nuestra investigación, la pregunta de investigación es:

¿Cuáles son los registros, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario?

Las proposiciones teóricas.

Es el marco teórico utilizado para hacer el análisis de la información obtenida, en nuestro caso es la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS).

Hacemos un estudio amplio de los registros de representación algebraico y grafico del objeto matemático límite de una función, caracterizando en cada registro, como es la forma y qué significa una representación algebraica y gráfica, del límite de una función, así como son sus tratamientos en cada registro. En esta parte, hemos analizado casos particulares en cada registro para ver el funcionamiento de la actividad cognitiva del tratamiento. También hemos analizado y descrito la actividad cognitiva de la conversión con varios ejemplos.

Este estudio detallado y descriptivo es de utilidad para hacer el análisis de la actividad matemática en práctica dirigida, examen parcial, textos de la bibliografía, en torno al límite de una función en los diferentes Registros de Representación Semiótica, tratamientos y conversiones que se movilizan cuando resuelven tareas sobre el límite de una función.

Las unidades de análisis.

Son los elementos que conforman el caso: personas, una institución, documentos o algún acontecimiento.

En esta investigación, las unidades de análisis son práctica dirigida, examen parcial, textos de la bibliografía.

La vinculación lógica de los datos a las proposiciones.

Comparación de la información recolectada con los códigos previamente establecidos para determinar las similitudes o diferencias con el marco teórico.

Para cumplir este punto, se realizará un contraste entre el desarrollo esperado en las tareas y los desarrollos observados.

Los criterios para la interpretación de los datos.

Interpretar las relaciones encontradas entre las categorías establecidas con base en el marco teórico y los datos obtenidos e intentar explicar el por qué existe la relación, lo cual nos conducirá a la comprensión del fenómeno estudiado.

En esta tesis, hemos realizado un análisis descriptivo y explicativo de algunos Registros de Representación Semiótica para el límite de una función en un punto, así como de sus actividades cognitivas tratamientos y conversiones. En el caso del registro algebraico, para referirnos a los tratamientos desarrollados en la investigación para funciones polinómicas, utilizamos el Código (TLFP), para tratamientos de funciones definidas por trozos (TLFRAT), entre otros.

En el registro gráfico, para indicar el desarrollo del tratamiento gráfico del límite de una función utilizamos el código (TGAO).

Uno de los criterios será hacer un contraste entre los tratamientos a priori realizados en esta investigación y los tratamientos observados en los textos.

Consideramos algunas de las recomendaciones dadas por Martinez (2006) y que seguiremos para:

- La lectura y relectura de las trascripciones y notas de campo (Respuestas obtenidas).

- La organización de los datos obtenidos a través del uso de códigos. (Para referirnos a los tratamientos y conversiones)
- La constante comparación de los códigos que salen de la información recolectada y categorías que emergen con los subsecuentes datos recolectados y con los conceptos sugeridos por la literatura (Contraste entre las respuestas de los alumnos y el marco teórico)
- La búsqueda de relaciones entre las categorías que emergen de los datos (La relación entre los tratamientos empleados)

En la Tabla 1, se muestran las cinco componentes en el diseño de nuestro estudio de caso en esta investigación.

Tabla 1:

Diseño de Nuestro Estudio de Caso

Etapas	Descripción
ESTUDIO DE CASO	Análisis del uso de Registros de Representación Semiótica en el cálculo de límites de funciones en el nivel Universitario.
LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	¿Cuáles son los registros de representación, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario?
LAS PROPOSICIONES TEÓRICAS	Teoría de los Registros de Representación Semiótica. (TRRS): registros de representación algebraico y gráfico, tratamientos y conversiones para el límite de una función en un punto.
UNIDADES DE ANÁLISIS	Los textos, practica dirigida, examen parcial del área de ciencias básicas de Estudios Generales de la UNMSM.
LA LÓGICA QUE UNE LOS DATOS A LAS PROPOSICIONES	Comparación de los resultados obtenidos en las unidades de análisis con la

CRITERIOS PARA INTERPRETAR LOS DATOS	investigación desarrollada, como es tratamientos y conversiones en el registro algebraico y grafico para el límite de una función.

Fuente: Propia del autor.

Para asegurar la fiabilidad y validez del método, Yin (1989) (citado por Martinez, 2006) propone adicionalmente el instrumento denominado el “protocolo de estudio de caso”**,** que es la guía de los procedimientos que se deben realizar durante la fase de la obtención de la evidencia. En nuestro caso, el cuestionario.

El protocolo de estudios de caso se convierte en un documento en el que se materializa el diseño de la investigación, las reglas específicas y generales que se deben seguir, lo cual contribuye al aumento en la calidad de la investigación.

Elementos del Protocolo de Nuestro Estudio De Caso

Semblanza del estudio de caso.

Consiste en integrar y entrenar a los miembros del equipo de investigación, de tal manera que sea un referente para quien desee conocer el proyecto y debe contener los siguientes elementos: los antecedentes del proyecto, los principales tópicos por investigar, las proposiciones teóricas por confirmar y la literatura relevante.

En esta investigación, el objeto matemático es el límite de una función; el enfoque teórico: la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004); la institución donde llevaríamos acabo la investigación: Ciencias Básicas de Estudios Generales de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM). En los antecedentes, aparecen los artículos relacionados con el tema y el enfoque teórico es explicado en el Capítulo II.

Preguntas del estudio de caso.

Están destinadas a garantizar que se obtenga la información necesaria que se requiere para contrastar con el marco teórico establecido. En nuestro caso, la pregunta es ¿Cuáles son los registros de representación, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario?

Procedimientos que se deben realizar.

Antes de entrar a la fase de la obtención de la información, se deben realizar las tareas siguientes:

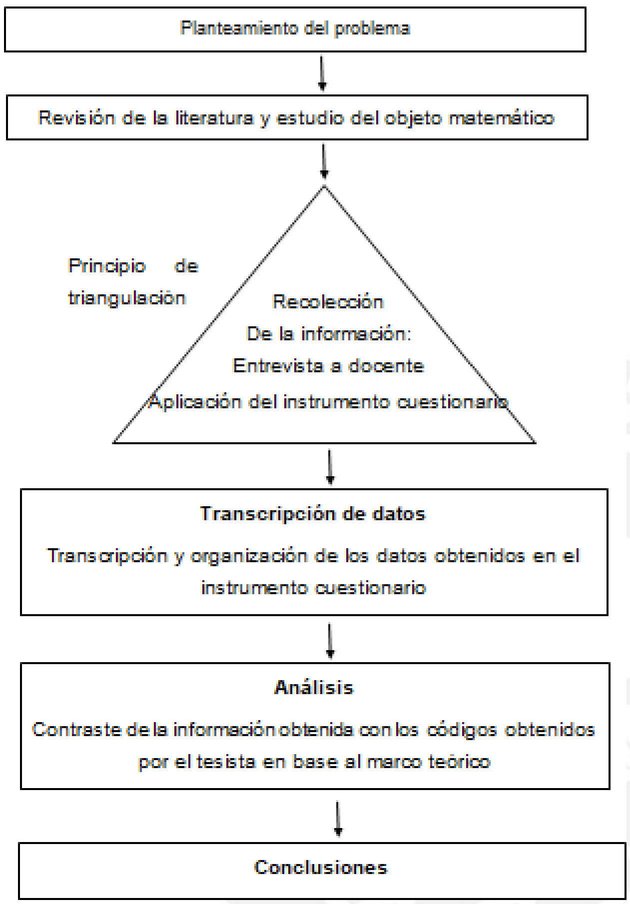
- Definir los mecanismos para obtener acceso a las organizaciones (UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, para poder hacer una revisión de sílabos, prácticas dirigidas, exámenes y textos de la bibliografía.
- Establecer suficientes instrumentos para la recolección de la información. En nuestra investigación son entrevista al profesor que dicta el curso, análisis de textos, práctica dirigida y examen parcial.

Guía para el informe del estudio de caso.

No hay un formato reconocido por unanimidad donde se coloque los resultados del estudio.

Figura 1:

Procedimiento metodológico



Fuente: Tomado de Martínez (2006, p.182)

Cada investigador debe diseñar un esquema básico, que será el reporte del estudio de caso, el cual facilita la obtención de la información importante para el estudio. Adicionalmente, es útil realizar un plan piloto que permita corregir el plan de la obtención de la información como a los procedimientos ser seguidos.

En la Figura 1, visualizamos, en el orden establecido, en qué consiste cada etapa del procedimiento metodológico del estudio de caso para el objeto matemático límite de una función, con el cual pretendemos cumplir los objetivos de esta investigación y responder la pregunta de investigación

A continuación, describiremos y explicaremos cada etapa del procedimiento metodológico de la Figura 1.

Planteamiento Del Problema.

El objetivo de la tesis es: Analizar los diferentes Registros de Representación Semiótica, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario. Para ello, nos planteamos la pregunta ¿Cuáles son los registros, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario?

Para poder resolver nuestro objetivo, tuvimos que leer las investigaciones de nuestras referencias, las cuales nos permiten establecer los Registros de Representación Semiótica algebraico, gráfico y hacer un análisis descriptivo de la actividad matemática (formación, tratamientos y conversiones) que se desarrolla en tareas de límites de una función. Analizar, las articulaciones y coordinaciones entre los registros algebraico y gráfico en las tareas asociadas al límite de una función.

Revisión de literatura y estudio del objeto matemático.

Revisamos y estudiamos el marco teórico como es la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) en relación con los Registros de Representación Semiótica, tratamientos y conversiones para un objeto matemático. Luego, comenzamos a desarrollar la descripción y análisis de los Registros de Representación Semiótica para el objeto matemático límite de una función, así como sus tratamientos y conversiones.

Recolección de la información

Recolectamos prácticas dirigidas, exámenes parciales y dos textos de la bibliografía correspondiente a una sección de estudios generales del área de Ciencias Básicas de la

Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM). También hicimos una entrevista al docente que enseñó la sección.

Transcripción de datos.

Hacemos una transcripción de los datos y se organiza y estructura la información recolectada para una mejor comprensión de la investigación. Podemos aplicar códigos, elegir categorías, entre otros.

Análisis.

Hacemos un contraste entre la información obtenida, como son los registros, tratamientos y conversiones que utilizan en la actividad matemática desarrollada, cuando se realizan tareas del límite de una función en el nivel universitario y los que ha propuesto el investigador en el análisis a priori en esta tesis, para determinar las diferencias y similitudes en base al marco teórico. Hacemos una interpretación de las relaciones encontradas entre los aspectos estudiados en el marco teórico y los datos obtenidos y explicar por qué hay esa relación.

Conclusiones.

Finalmente, presentaremos las conclusiones del caso, que involucran identificar qué registros movilizan, así como qué tratamientos utilizan y si hacen conversiones en la actividad matemática al desarrollar tareas del límite de una función en relación con el objeto matemático límite de una función.

Nuestras conclusiones permitirán el fortalecimiento y desarrollo de los aspectos teóricos desarrollados en esta tesis en los aspectos de los registros de Representación Semiótica algebraico y gráfico para el límite de una función, así como en los tratamientos y conversiones.

SEGUNDA PARTE: MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO II

TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

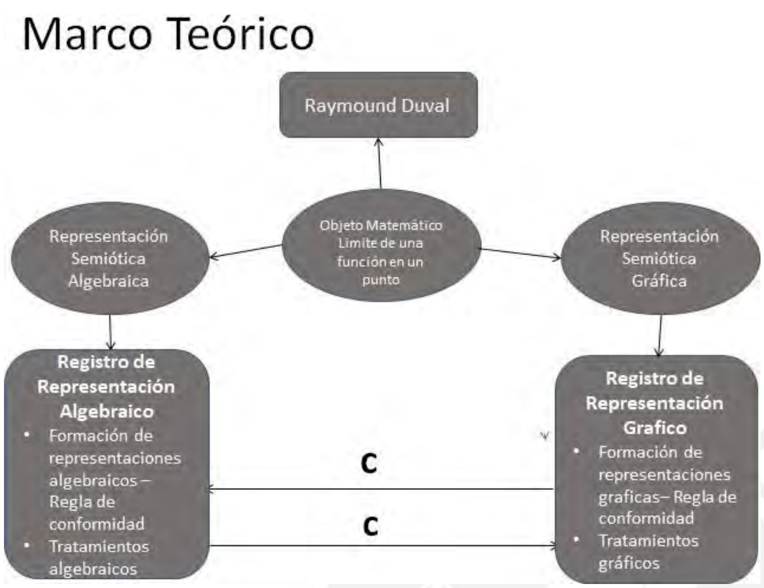
En este capítulo, presentaremos las bases teóricas del trabajo, en el que utilizaremos el marco teórico de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), propuesta por Duval (2004). Dicha teoría, permite analizar y describir el desarrollo del razonamiento matematico en el proceso de comprension de un concepto matematico.

Duval (2004) expresa que para adquirir la comprensión de un concepto matemático es necesario conocer sus diversos Registros de Representación Semiótica, para hacer tratamientos y conversiones.

También trataremos algunos aspectos históricos y epistemológicos del límite de una función y en la que realizaremos un análisis de textos.

Figura 2:

Elementos del marco teórico TRRS



Fuente: Propia del autor.

La Figura 2 expresa nuestro objetivo, analizar cómo son las representaciones algebraica y gráfica del límite de una función y para conseguirlo necesitamos analizar, describir y explicar los registros de representación semiótico algebraico y gráfico, en el cual las representaciones tienen un rol importante en las actividades cognitivas del registro, como la formación, los tratamientos y la conversión.

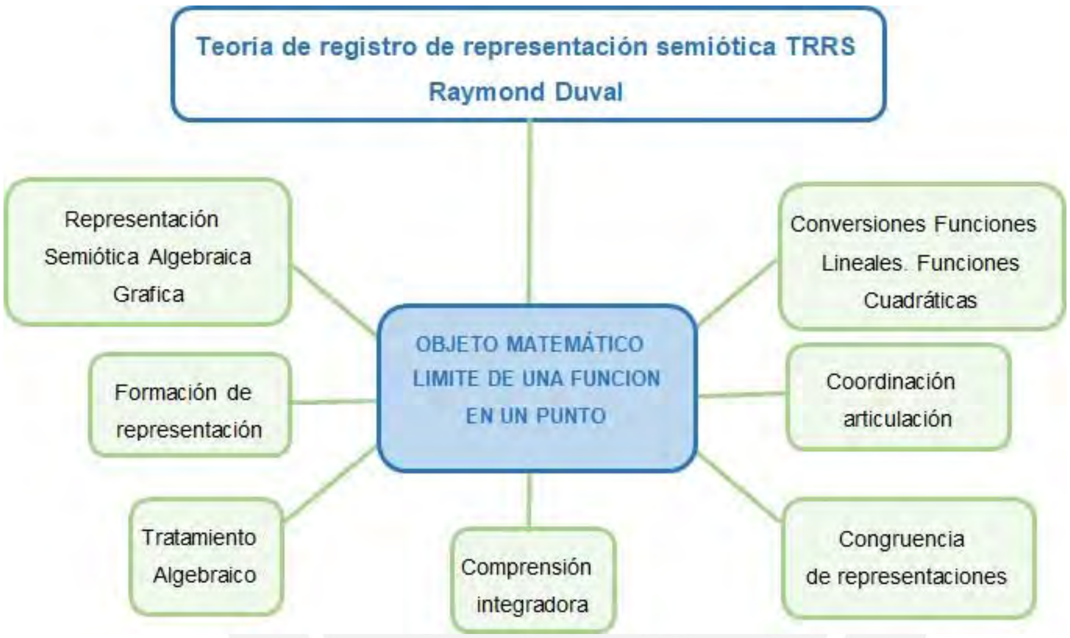
2.1 Elementos de la teoría de los Registros de Representación Semiótica.

A continuación, describiremos los elementos de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) que utilizaremos en nuestro análisis, como las características de una representación semiótica y su rol en la actividad cognitiva, así como las características de un Sistema de Representación, Registro de Representación Semiótica y su relación con la actividad cognitiva.

En la Figura 3, representamos los elementos de los Registros de Representación Semiótica para el límite de una función.

Figura 3:

Elementos de la TRRS



Fuente: Propia del autor.

Representación Semiótica

Una representación semiótica de un objeto matemático queda definida por los signos y los significados que aparecen en su formación. Estas representaciones denominadas como formas, son visibles, observables, accesibles y explícitas al sujeto quien puede observar algunas características en ella, como por ejemplo, una ecuación algebraica de segundo grado, el límite de una función definida a trozos, el grafico de una recta, entre otros. Estas características se llaman valores significantes o denominada contenido de la representación, que le comunica la representación al sujeto.

Duval (2004) expresa que las representaciones semióticas tienen un carácter intencional y es esencial desde el punto de vista cognitivo “pues permite tener en cuenta el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por el sujeto” (p. 33). Es decir, se puede extraer información significativa, lo que hace que quede determinada y definida la representación. Esto es esencial desde el punto de vista cognitivo.

Así, a través de un significado, podemos realizar una aprehensión conceptual (comprensión del concepto) o perceptiva (visualización) del objeto matemático en estudio.

Las representaciones semióticas pertenecen a un sistema semiótico, que es un conjunto de representaciones que queda definido por los signos y reglas de conformidad asociadas al objeto matemático en estudio. En este sistema, se permite las actividades cognitivas, como la producción de más representaciones, el tratamiento de las representaciones y la conversión de la representación de un sistema a otro, actividades importantes desde el punto de vista cognitivo que ayudan a la comprensión del objeto matemático.

Duval (2004) expresa que las representaciones semióticas se pueden asociar entre ellas, de acuerdo con las reglas de conformidad, del sistema semiótico o del registro de representación semiótica o en el contexto de estudio del objeto.

Las representaciones semióticas se diferencian por el tipo de signos que utilizan en su formación y las reglas de conformidad definidas en un sistema de representación semiótica a donde pertenecen y que les permiten asociarse unas con otras.

En el caso particular del objeto matemático límite de una función, tenemos que se clasifican como representación algebraica del límite de una función, las cuales utilizan el signo algebraico (ver Ejemplo 1); las reglas de conformidad se deben a los teoremas, propiedades del límite de una función; la representación gráfica del límite de una función, en la cual se utiliza la gráfica de una función en el sistema de referencia cartesiano y; la Representación tabular, en la cual se utiliza una tabla de doble entrada (ver Figura 6).

Las representaciones semióticas sirven para expresar y comunicar las representaciones mentales utilizando los signos. Las representaciones mentales de un objeto matemático son todas las informaciones e ideas del objeto que se tenga en la memoria y, para comunicarlas al exterior, se necesita hacerlo a través de las representaciones semióticas.

Duval (2004) sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas.

Ejemplo 1. Representación semiótica

Objeto matemático: Límite de la función.

Representación semiótica algebraica: $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x - 1)$

Característica de los signos: función polinómica algebraica. El significante que se transmite al observar la representación $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x - 1)$, es un límite cuando la variable x tiende a 2, de una función polinomial de segundo grado en la variable “x” , con coeficiente principal 1, término lineal con coeficiente 3 y termino constante -1. El significante también puede traducirse como el límite de una función algebraica cuadrática en x. Los signos que se utilizan en el Álgebra son las variables, letras y números.

Para resolver el problema, tenemos que movilizar los tratamientos en el registro algebraico. En esta tesis, trabajaremos con algunas funciones especiales, como por ejemplo, la función polinomial, que tiene como regla de correspondencia:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 x + a_0$, donde x variable real, los coeficientes son números reales y $a_n \neq 0$.

Con el siguiente ejemplo, queremos mostrar que existen representaciones que no son semióticas algebraicas para el límite de una función.

Ejemplo 2. Representación no semiótica algebraica para el límite de una función.

Objeto matemático: Límite de una función polinomial de grado 2, de variable real en un punto.

Registro de Representación Algebraico.

Reglas de conformidad: Límite de una suma, diferencia, producto, constante de funciones de variable real, (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 3.).

El $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3\vec{x} - 1)$ no es una representación semiótica en el registro algebraico con las reglas de conformidad definidas. Las representaciones semióticas quedan bien definidas en un registro si satisfacen las reglas de conformidad del registro.

En este ejemplo, estamos definiendo el objeto matemático, el registro y las reglas de conformidad, que son propiedades para límites de funciones de variable real.

El límite presentado en el ejemplo no es una representación semiótica en el registro de representación algebraico, pues la representación no satisface las reglas de conformidad del registro al contener una variable vectorial $\vec{x}$ y las reglas de conformidad son para funciones de variable real.

Las funciones polinomiales pueden estar definidas en variable real o en variable vectorial, pero no en ambas variables, pues son de estructuras algebraicas diferentes. No está definida la suma de una variable real con una vectorial.

Ejemplo 3. Las representaciones mentales, no son representaciones semióticas, pues las representaciones semióticas son visibles, externas y observables, mientras que las mentales están en la mente, ya que no son visibles.

Ejemplo 4. Si en un aula de clase pregunto a los alumnos ¿qué es una recta? un alumno, en su mente, tendrá la idea gráfica, también puede pensar en una ecuación de la recta, en la pendiente, todo lo que pueda asociar sobre la recta se activa por medio de funciones, pero en su mente, es una representación mental y no semiótico, pues para que sea semiótico tiene que comunicarla al exterior a través de signos, por ejemplo, comunica usando un lápiz y papel $f(x) = 3x + 2$, lo cual sería una representación semiótica algebraica de la recta.

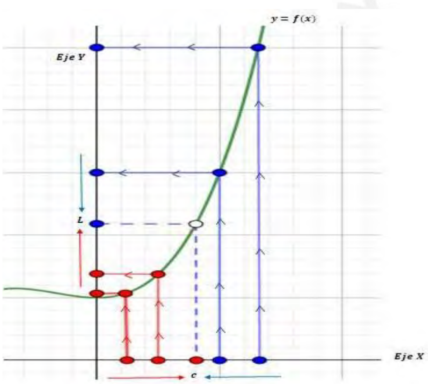
En el registro gráfico, una de sus características es que le permite al alumno visualizar los procesos dinámicos (tendencias en el $Eje\ X$ y tendencias en el $Eje\ Y$; coordinación de tendencias tanto en el $Eje\ X$ como en el $Eje\ Y$) para determinar el límite de una función en el registro gráfico.

Ejemplo 5. Representación semiótica gráfica para el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a $c = 2$.

En la Figura 4, visualizamos un conjunto de tratamientos para obtener la representación gráfica del límite de la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a $c = 2$.

Figura 4:

Representación semiótica gráfica para el límite.

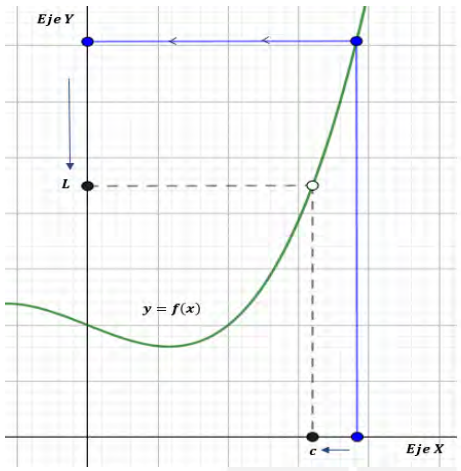


Fuente: Propia del autor.

En la **Figura 5**, mostramos un primer tratamiento, cogiendo una primera aproximación al punto en estudio $\boldsymbol{c = 2}$.

Figura 5:

Un Tratamiento de la Representación Semiótica de f.



Fuente: Propia del autor.

Según Blázquez y Ortega (2001, p. 225 y 226), el registro tabular o numérico es el que mejor muestra el aspecto de aproximación del límite de una función, donde los tratamientos están basado en la definición del límite lateral.

Ejemplo 6. Representación semiótica tabular

Objeto matemático: Límite de una función.

La Figura 6 es una representación tabular para el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a $c = 2$.

Figura 6:

Representación Tabular

x se aproxima a 2 por la izquierda

x se aproxima a 2 por la derecha

x	1.7	1.8	1.9	1.99	1.999	c=2	2.001	2.01	2.1	2.2	2.3
f(x)	2.89	3.24	3.8	3.94	3.996	c=4	4.004	4.040	4.41	4.84	5.29

f(x) se aproxima a 4 por la izquierda

f(x) se aproxima a 4 por la derecha

Fuente: Propia del autor.

El rol de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva

Las representaciones semióticas sirven para expresar y comunicar las representaciones mentales utilizando los signos. Las representaciones mentales de un objeto matemático son todas las informaciones e ideas del objeto que se tenga en la memoria y, para comunicarlas al exterior, se necesita hacerlo a través de las representaciones semióticas. Duval (2004) sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas.

Además, tienen la función de comunicar, pero también las funciones de tratamiento de la información y funciones de objetivación, donde el sujeto es consciente de los significantes que posee la representación, ya que estas funciones son inherentes a un registro de representación semiótica.

Ejemplo 7.

Registro Algebraico.

Objeto matemático: límite de una función.

Representación semiótica: $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 3x - 1)$.

Las producciones de las representaciones semióticas se hacen con la movilización de un registro de representación.

Las representaciones semióticas tienen la propiedad de transformarse (producimos, construimos), ya sea dentro de un mismo registro transformándose internamente en otras representaciones semióticas (tratamiento interno) a partir de la representación inicial. A este hecho, Duval (2004) expresa “una mirada actualizada del objeto” o transformándose en otra representación en otro registro (transformaciones externas o conversiones).

Las representaciones pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” (se hace por medio de la coordinación o puesta en correspondencia de los significantes de cada representación semiótica en registros diferentes) en registros semióticos diferentes, tomando significantes diferentes para el sujeto que las utiliza. Esto se debe a la actividad cognitiva de la conversión entre diferentes registros de representación.

2.2 Sistemas de representaciones semióticas para un objeto matemático.

Un sistema de representación semiótica de un objeto matemático es un conjunto de representaciones caracterizadas por un signo en el cual están definidas unas reglas denominadas reglas de conformidad en el contexto del objeto matemático en estudio, en el que se verifican tres actividades cognitivas:

- La presencia de una representación semiótica identificable como una representación del sistema dado.
- Los tratamientos
- Las conversiones.

Un elemento (representación semiótica) se dirá que está en el dominio del sistema (que pertenece al sistema de representación) si verifica las reglas de conformidad del sistema. Es decir, cuando se pueden asociar los elementos (representaciones semióticas) con las reglas de conformidad establecida para el sistema. Por el contrario, se dirá que no están en el dominio del sistema, si no pueden asociarse con los signos definidos por el sistema (no cumplen las reglas de conformidad del sistema).

Podemos decir que un sistema de representación semiótica queda definido por sus representaciones que la conforman, las cuales cumplen características identificables como el signo (signo considerado) y las reglas de conformidad definidos en el sistema. Estas características lo diferencian de cualquier otro sistema de representación.

Ejemplo.

Objeto matemático: Límite de una función.

Registro algebraico

Representación semiótica: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-1}{x}$

Las reglas de Conformidad son las propiedades que se utilizan para resolver el límite, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-1}{x}$, en este caso, el límite del cociente de funciones; límite de una diferencia de funciones; límite de una constante por una función; límite de la función identidad y; límite de una constante (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 1, Teorema 3, Corolario 1).

Cuando el objeto matemático a estudiar es el límite de una función, es un objeto abstracto y, por tanto, se requiere el uso de estas representaciones que permitan caracterizar al objeto matemático desde diferentes perspectivas y, de acuerdo a la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004), ayuda a comprender el objeto.

Como expresan Blázquez y Ortega (2001), los sistemas de representación se complementan, ya que muestran distintos aspectos del concepto, con mayor o menor claridad, todos ellos son limitados y se necesitan.

Por otro lado, Hitt (1988) ejemplifica la importancia de la articulación entre las representaciones del concepto (correspondencia entre los significantes de las representaciones), ya que ayudan a comprenderlos.

Actividades cognitivas de los sistemas de representación inherentes a toda *representación.*

En el marco de la comprensión de un objeto matemático, tenemos asociado a ello actividades cognitivas que se realizan en un sistema de representación semiótica como son:

Marca o varias marcas

Un sistema de representación semiótica está constituido por una marca o varias marcas, la marca o varias marcas es para referirse a las representaciones identificables y un conjunto de reglas, que permiten identificar la representación en un sistema determinado.

Tratamientos

Consiste en transformar las representaciones iniciales en otras representaciones, teniendo en cuenta las reglas del sistema. Así se pueden producir nuevas representaciones que consisten en ganancias del conocimiento con respecto a las representaciones iniciales. También decimos que "actualizamos la mirada del objeto".

Conversiones.

Transforman las representaciones de un sistema de representación inicial en otro sistema de representación final, de manera que se permita explicitar diferentes significaciones del objeto representado.

Duval (2004) manifiesta que hay sistemas de representación que no verifican las tres actividades cognitivas.

Presentamos algunos ejemplos en donde las reglas de conformidad no están bien definidas de tal forma, que al realizarlas se encuentre un elemento que no está en el sistema. Las reglas de conformidad deben asegurar que, al asociar dos elementos del sistema, este debe pertenecer el sistema.

Ejemplo: La codificación de tránsito.

El conjunto V es nuestro sistema de representación

$V = \{\, Luz\ rojo, Luz\ \acute{a}mbar, Luz\ verde; Verde\ y\ Ambar; Rojo\ y\ Ambar\}$

Donde cada color expresa señales (marca).

Regla=$\{Luz\ roja,\ Luz\ ámbar,\ Luz\ verde,\ ámbar\ y\ verde,\ ámbar\ y\ rojo\}$ señales significativas en el tránsito.

La luz roja, ámbar y verde están en V, verificando la regla de conformidad, pero las representaciones $Verde\ \ y\ \ Ambar,\ Rojo\ \ y\ \ Ambar$, que pertenecen a V, no verifica la regla de conformidad.

Luego, en V falla la primera actividad cognitiva expresada antes, ya que hay una representación en V que no cumplen las reglas de conformidad. Por tanto, V no es una representación semiótica con las reglas de conformidad definidas de esa forma.

Otro ejemplo al respecto en el que la operación que se define en el sistema no es cerrada.

$X = \{0; 1; 2\}$ con las operaciones en $\mathbb{R}$.

$0 + 1 = 1\epsilon X;\ \ 0 + 2 = 2\epsilon\ X;\ \ \ 1 + 2 = 3 \notin X$. X no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Los sistemas de representación semiótica no siempre verifican las tres actividades cognitivas, como los ejemplos anteriores; sin embargo, aquellos que sí cumplen los denominaremos Registros de Representación Semiótica.

A continuación, enunciamos cuales son las condiciones necesarias que debe cumplir un sistema de representación para que sea un registro de representación semiótica para un objeto matemático

2.3 Condiciones para que un sistema de representación se considere un registro de representación semiótica para un objeto matemático.

Los Registros de Representación Semiótica permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación:

1. La presencia de un sistema de representación semiótica identificable, donde sus elementos se denominan representaciones semióticas, con propiedades propias que lo definen (reglas de conformidad).

2. Tratamientos. Consiste en transformar internamente (reformula, reemplaza) las representaciones (iniciales) de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones (finales) que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales o anteriores (respecto a un problema una cuestión o una necesidad).
3. Conversión. La conversión es la transformación de la representación de un objeto dado en un registro en una representación de este mismo objeto en otro registro, en la que se conserva la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial y que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento.

En el siguiente capítulo, describiremos los Registros de Representación Semiótica algebraica y gráfica para el límite de una función.

A continuación, presentamos ejemplos que muestran cómo funciona la actividad cognitiva del tratamiento en el registro algebraico, gráfico y tabular. En esta parte, mostramos cómo se movilizan los tratamientos en el Registro Algebraico para resolver una tarea del límite de una función.

Ejemplo 1. Determine el límite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}+3}{2x}$.

Solución:

Observamos que el $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}+3}{2x}$ es una representación algebraica del límite de una división por la forma de representación en que se presenta y los significantes que comunica (los símbolos o signos que utiliza).

Para hallar la solución, hacemos tratamientos a partir de la representación inicial

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}+3}{2x} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2+x+1}+3}{\lim\limits_{x \to 2} (2x)}$ Tratamiento Interno

Esta igualdad o transformación de la representación algebraica del límite (inicial) se debe al límite de una división de funciones (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 3, iv).

Ahora;

$\frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+x+1}+3}{\lim\limits_{x\to 2}(2x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^2+x+1}\,)+\lim\limits_{x\to 2}3}{2\lim\limits_{x\to 2}x}$ Tratamiento interno (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 1**).**

Seguimos con los tratamientos

$\frac{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^2+x+1}\,)+\lim\limits_{x\to 2}(3)}{2\lim\limits_{x\to 2}x} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+1)}+3}{2\,(2)}$ Tratamiento interno

La actualización de la mirada del objeto, como expresa Duval (2004), se debe a propiedades de los límites,

$\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+1)}+3}{2\,(2)} = \frac{\sqrt{7}+3}{4}$. Tratamiento interno.

Igualando la representación inicial con la representación final, obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}+3}{2x} = \frac{\sqrt{7}+3}{4}$$

Observamos que, para encontrar la solución del problema, transformamos la representación algebraica inicial del límite (problema propuesto) en otras representaciones algebraicas para el límite, donde cada transformación nueva se llama un tratamiento.

El funcionamiento de la actividad cognitiva, como son los tratamientos, han sido posible gracias a las reglas de conformidad definidas en el registro algebraico utilizadas para este ejercicio, como son los teoremas y corolarios, que han permitido hacer los tratamientos internos a partir de la representación algebraica inicial y que se hayan generado nuevas representaciones algebraicas para el límite, sin salirse del registro algebraico, hasta obtener la representación algebraica que lleve a la solución.

Ahora, presentamos un ejemplo en el cual describimos los tratamientos en el Registro gráfico para el límite de una función, donde los límites laterales son iguales.

Ejemplo 2. Tratamientos en el registro gráfico.

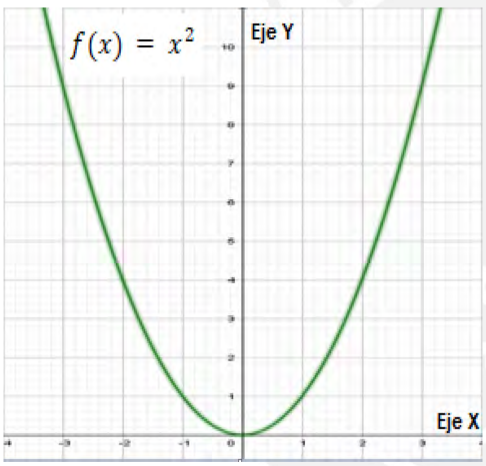
Para obtener una representación semiótica gráfica para límite de la función $f(x) = x^2$, cuando x tiende a $c = 2$, seguimos una construcción (representación).

$i)$ Dada la definición de la función $f(x) = x^2$ en estudio, se procede a hacer su representación semiótica gráfica

En la **Figura 7** realizamos la representación gráfica de la función propuesta, utilizando el sistema de coordenadas cartesianas.

Figura 7:

Una Representación Semiótica Gráfica de la Parábola



Fuente: Propia del autor.

ii) Luego, representamos la convergencia del límite de variable real, expresándolos por medios de signos correspondientes en este medio gráfico, aplicando los criterios de convergencia para funciones de variable real.

En efecto:

La construcción, significado y contenido de la representación semiótica gráfica se debe a la definición de límite lateral.

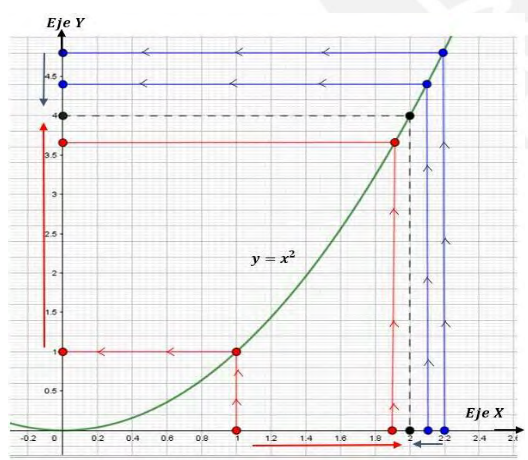
La gráfica de la flecha azul, que va de derecha a izquierda en el $Eje\ X$, es una representación gráfica para expresar o significar que si los valores de "x" tienden (se aproximan) a "c" desde valores mayores que "c" (desde la derecha de la gráfica) y representamos la flecha azul sobre el $Eje\ Y$ para expresar que los valores de "y" en la gráfica, se aproximan al número $L = 4$, que es la representación gráfica del límite por la derecha (ver Figura 8).

Por un argumento similar, se sigue la gráfica de la flecha roja que va de izquierda a derecha en él $Eje\ X$ es una representación gráfica para expresar que, si los valores de "x" tienden (se aproximan) a "c" desde valores menores que "c" (desde la izquierda de la gráfica) y representamos la flecha roja sobre el $Eje\ Y$ para expresar que los valores de "y" en la gráfica se aproximan al número $L = 4$, que es la representación gráfica del límite de la función por la izquierda.

En la Figura 8, observamos varios tratamientos y la representación gráfica para el límite de la función $f(x) = x^2$cuando x tiende al valor 2 en el registro gráfico.

Figura 8:

Representación gráfica del límite de una parábola



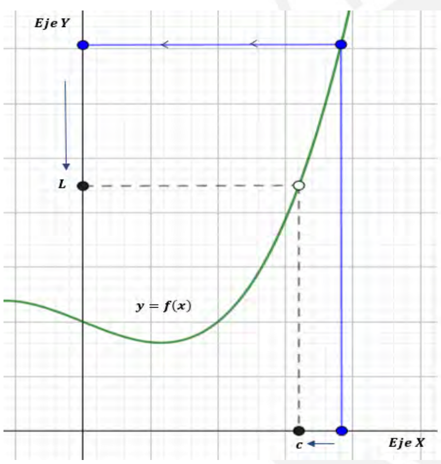
Fuente: Propia del autor.

Del registro gráfico, concluimos que: $\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$ y $\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$, por la regla de conformidad debido al Teorema Límite Bilateral (TLB) Capítulo III, Sección 3.2, tenemos que el límite existe y es $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. Tratamiento.

La Figura 9 es la representación gráfica de un primer tratamiento en la construcción del límite en el registro gráfico**.**

Figura 9:

Límite bilateral en el registro gráfico.



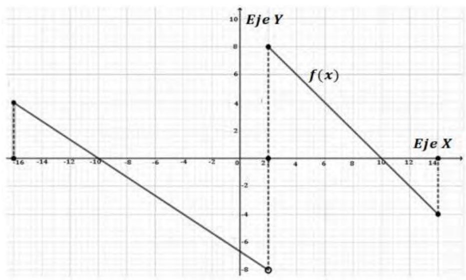
Fuente: Propia del autor.

En el siguiente ejemplo, a partir de la Figura 10, veremos cómo se movilizan los tratamientos en el registro gráfico para el límite de una función discontinua en el punto de estudio.

Ejemplo 3. A partir de la gráfica siguiente que corresponde a la función

Figura 10:

Representación gráfica de una función discontinua



Fuente: Adaptado de Londoño, Narro y Yatzil (2014, p. 95)

Obtener:

i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. Justifique su respuesta.

ii) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$. Justifique su respuesta.

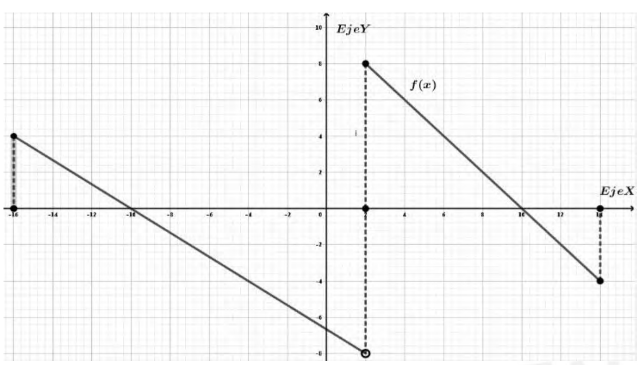
iii) A partir de ello, concluya si existe el $\lim_{x \to 2} f(x)$. Justifique su respuesta.

Solución.

La representación semiótica inicial está en el registro gráfico (ver Figura 11) para la función, de la representación gráfica de f y del tratamiento en el registro gráfico para el límite de una función visto en el (Capítulo III, Sección 3.2), donde podemos concluir que el $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Figura 11:

Función en el registro gráfico



Fuente: Adaptado de Londoño, Narro y Yatzil (2014, p. 95)

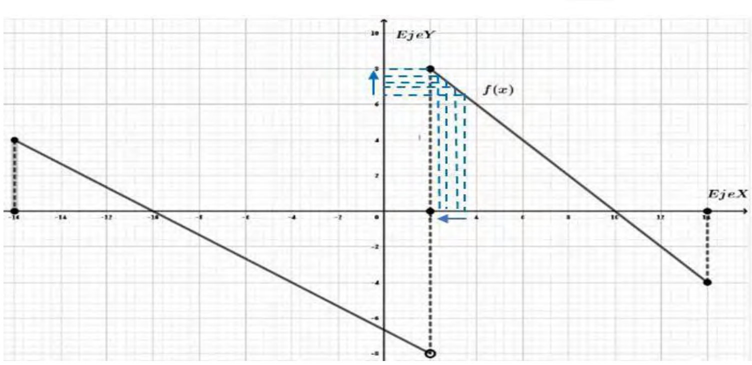
Pasamos a hacer una descripción de este hecho en detalle.

1. Podemos visualizar los tratamientos internos en el registro gráfico para el límite por la derecha de la función propuesta cuando x tiende a 2 y concluir que el límite, en el registro gráfico, es el punto en el $Eje\ Y$ de valor 8.

   En la Figura 12, representamos los tratamientos debido al límite lateral por la derecha en el registro gráfico.

Figura 12:

Límite lateral derecha de una función discontinua



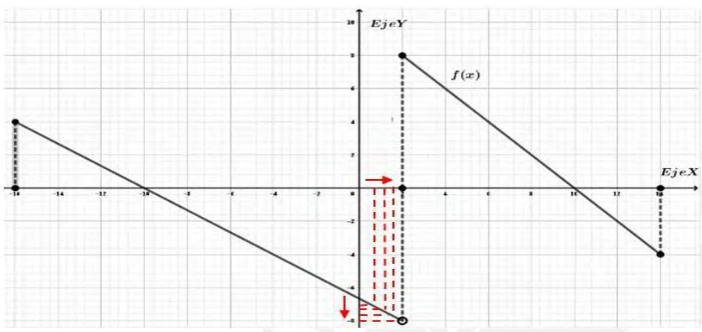
Fuente: Propia del autor.

2. Los tratamientos para el límite de la función, cuando x tiende al valor 2 por la izquierda, es el punto en el Eje Y de valor -8.

En la **Figura 13**, representamos los tratamientos basados en el límite lateral por la izquierda

Figura 13:

Límite lateral izquierda de una función discontinua.



Fuente: Propia del autor.

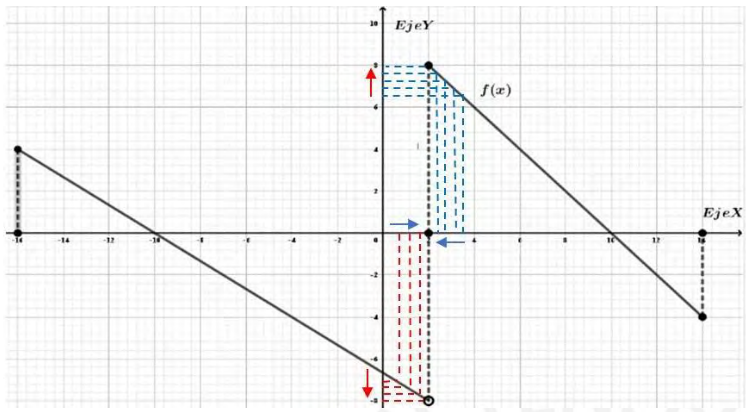
Por tanto, tenemos que: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 8 \neq -8 = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

De acuerdo con las reglas de conformidad, debidos a, (ver Capítulo III, Sección 3,2, Teorema del Límite Bilateral) concluimos que el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

En la Figura 14, representamos los tratamientos centrados en el límite lateral por la derecha e izquierda.

Figura 14:

Límite Bilateral de una función discontinua.



Fuente: Propia del autor.

El límite en el registro gráfico de la función f no existe.

A continuación, presentamos cómo se movilizan los tratamientos en el registro tabular o numérico

Ejemplo 4. Una Representación semiótica tabular para el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a $c = 2$.

En este caso, la representación semiótica tabular es como sigue:

i) Dada la definición de la función $f(x) = x^2$ en estudio, se procede a construir la tabulación correspondiente. Es decir, la tabla de dos filas por un número finito de columnas.

La Figura 15 representa una tabla de doble entrada que se utilizará para hacer la representación tabular del límite de una función.

Figura 15:

Tabla a contener las tabulaciones

x					c				
$f(x)$									

ii) Luego, representamos la convergencia del límite de funciones de variable real expresándolos por medios de la tabulación, aplicando los criterios de convergencia para funciones de variable real (límite lateral).

En efecto:

1. Graficamos una tabla con el centro el número real $c = 2$.

   La **Figura 16** es la representación tabular del límite de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ en $\boldsymbol{c = 2}$ en el registro tabular o numérico.

Figura 16:

La tabla de evaluación de la parábola.

x se aproxima a 2 por la izquierda → | ← *x se aproxima a 2 por la derecha*

x	1.7	1.8	1.9	1.99	1.999	c=2	2.001	2.01	2.1	2.2	2.3
f(x)	2.89	3.24	3.8	3.94	3.996	c=4	4.004	4.040	4.41	4.84	5.29

f(x) se aproxima a 4 por la izquierda → | ← *f(x) se aproxima a 4 por la derecha*

Fuente: Propia del autor.

2. Analizamos el comportamiento de los valores de la función $f\ (x) = x^2$ cerca del número real $c = 2$, en la que usamos dos conjuntos de valores de x. Uno cuando

la variable independiente x se acerque en la recta numérica al número 2 por la derecha, como se ilustra en la tabla, y, el otro cuando, la variable independiente se acerque en la recta numérica a $x = 2$ por la izquierda.

3. Por la definición del límite lateral, concluimos que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Duval (2004) expresa que el objeto representado (la representación) no debe confundirse con el contenido de la representación (el objeto matemático). El contenido de la representación es lo que el registro representa explícitamente y para ello sugiere trabajar con, por lo menos, dos representaciones semióticas.

Duval (2004) nos expresa al respecto que:

> "Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una perdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o por que permanecen como representaciones inertes que no sugieren ningún tratamiento productor" (p, 14).

Ejemplo 5.

Si pedimos a un estudiante universitario en el aula, al terminar el tema de límites, que escriba su respuesta utilizando lápiz y papel a la pregunta

¿Qué significa el límite de la función constante cuando la variable tiende a 2?.

Obtenemos una respuesta, $\lim_{x \to 2} c = c$, en otra respuesta el alumno utiliza el sistema de coordenadas cartesianas y grafica la función constante, una recta horizontal paralela al $Eje\ X$ que corta al $Eje\ Y$ en c, considerando c positivo por ejemplo y pinta en el grafico las imágenes que toma la función, que siempre es la constante c cuando x se aproxima al punto 2, Las respuestas obtenidas son dos representaciones diferentes, una algebraica y otra gráfica de un mismo objeto matemático, límite de la función constante.

Ejemplo 6. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-1}{2x}$. ¿Cuál es la representación y cuál es el contenido?

La representación utilizada es la representación algebraica del límite de una función, por los símbolos que lo definen.

Contenido de la representación: límite de una función racional en x, donde el numerador es un polinomio de grado 2, con término cuadrático, lineal y constante y el denominador es una función lineal en x.

Duval (2004) afirma que, para la adquisición de un objeto matemático. Es decir, la comprensión del objeto matemático, es necesario, por lo menos tener dos Registros de Representación Semiótica. Duval (1998) (citado por Blázquez S. , Ortega, Gatica, y Benegas 2006) declaran que:

> "Para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno solo (mono-registro), no se obtiene la comprensión integral del concepto".

> Blázquez S. , Ortega, Gatica, y Benegas (2006) expresan, que "Esta teoría plantea que la comprensión integral de un concepto se encuentra basada en la coordinación de al menos dos registros de representación".

> Duval (1995) afirma que disponer de varios registros de representación no es suficiente para garantizar la comprensión, ya que se necesita de una segunda condición, la cual consiste en la capacidad que tiene un sujeto para reconocer una representación de un objeto en dos o más registros diferentes. A esta capacidad, se le denomina la coordinación.

Con solo una representación (mono registro), se adquiere parcialmente la comprensión del objeto matemático. Cada registro de representación semiótica para el objeto matemático define características diferentes en la representación semiótica correspondiente del objeto.

Por ejemplo, el registro algebraico muestra un aspecto más formal del límite, estático y abstracto en las definiciones formales, ya que las propiedades, la definición de los límites por la derecha, por la izquierda, los teoremas de existencia del límite. El registro gráfico es menos formal que el algebraico, ya que muestra el aspecto visual del límite, tendencias en el $Eje\ X$, el $Eje\ Y$ y la coordinación de las tendencias en ambos ejes.

Para entender el concepto matemático, según Duval (2004), se requiere complementar las propiedades que facilitan ambos registros.

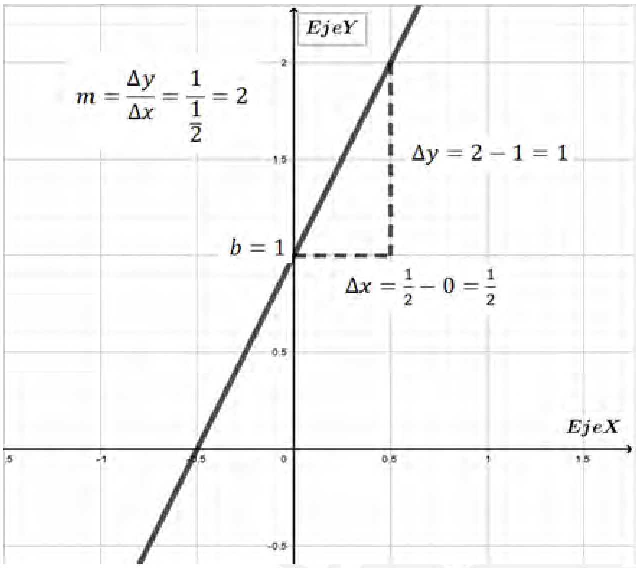
Un ejemplo.

Objeto matemático, función lineal; registro algebraico; representación semiótica: $f(x) = 2x + 1, -3 \leq x \leq 3$, sus propiedades son estáticas y rígidas. Describiremos algunas, la pendiente $m = 2$, el coeficiente principal $a = 2$, termino independiente $c = 1$. $Dom(f) = [-3; 3]$.

Por otro lado, en el registro gráfico, en la Figura 17, se puede ver o visualizar más propiedades, interpretar y hacer lecturas. Ejemplo es una recta creciente, corta al $Eje\ X$ en el punto $(-\frac{1}{2}; 0)$ y un punto de corte de la recta con el $Eje\ Y$ es el punto $(0,1)$, la pendiente indica que, por cada $\frac{1}{2}$ unidad que avance en el $Eje\ X$, avanzaré una unidad en el $Eje\ Y$.

Figura 17:

Visualización de la recta en el Registro gráfico.



Fuente: Propia del autor.

También Duval (2004) manifiesta que cambiar de registro no es fácil, ya que esto es convertir una representación de un registro en una representación en otro registro y viceversa. Obviamente, en algunos casos, sí se podrá hacer de manera rápida la conversión. En este caso, se dice que hay una congruencia de representaciones, como por ejemplo, la conversión de la recta $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, b constante real, entre los registros algebraico y gráfico.

Para realizar un análisis de congruencia, es necesario realizar la discriminación de las unidades significantes. A continuación, presentamos la discriminación de unidades significantes en la Tabla 2, ver Duval (2012).

$$f(x) = mx + b$$

Tabla 2:

Discriminación Entre Variables Visuales y Simbólicas de la Recta

Variables Visuales	Valores	Unidades Simbólicas Significativas
Pendiente de la recta	Es creciente de izquierda a derecha	$m > 0$
	Es decreciente de izquierda a derecha	$m < 0$
La intersección de la recta con el eje Y	La recta intersecta al eje Y positivo	$b > 0$
	La recta intersecta al eje Y en el origen	$b = 0$
	La recta intersecta al eje Y negativo	$b < 0$

Fuente: Tomado de Duval (2012)

Conversión del registro algebraico al registro gráfico.

En la representación algebraica de la recta $y = 2x + 1$, las unidades simbólicas significativas en el registro algebraico son la pendiente $m = 2$ y el intercepto de la recta con el $Eje\ Y$, que es la unidad significativa $b = 1$.

Para hacer el gráfico, consideramos:

Intercepto con el $Eje\ X$: hacemos $y = 0$, entonces $(-\frac{1}{2}; 0)$

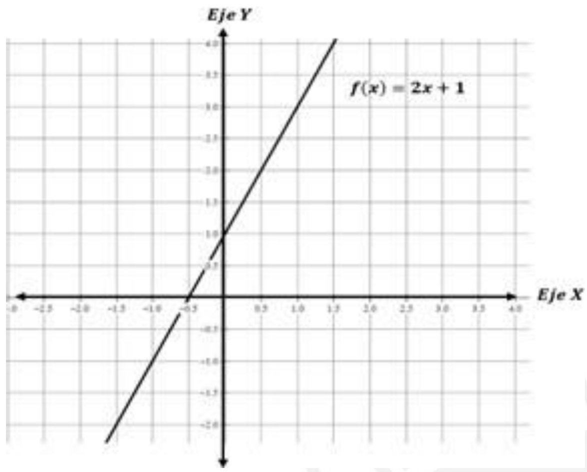
Intercepto con el $Eje\ Y$: hacemos $x = 0$, entonces $(0\ ; 1)$

Graficamos la recta en el sistema de coordenadas cartesianas.

La Figura 18 es la representación de la recta $f(x) = 2x + 1$ en el registro gráfico.

Figura 18:

La pendiente y su interceptos



Fuente: Propia del autor.

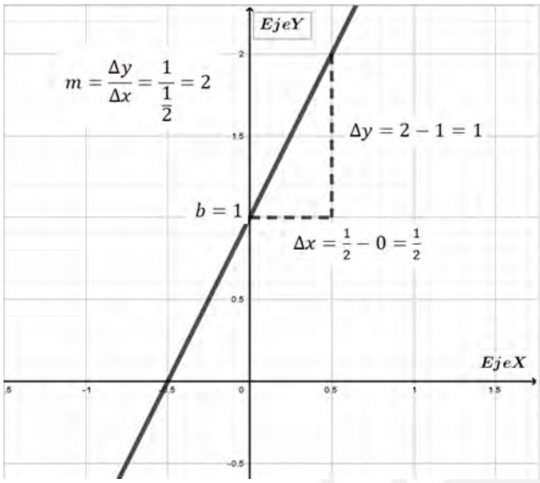
Conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Sea la gráfica, a partir de ella, vamos a buscar que la ecuación de la recta en su forma $y = mx + b$ quede determinada. Para ello, buscamos la pendiente m, la cual está construida en el gráfico y el $(0;\ b)$ punto de la recta luego del grafico $b = 1$. Del gráfico $m = 2$; y $b = 1$, así la recta pedida es $y = 2x + 1$.

En la Figura 19, se representa los elementos de la recta del registro algebraico al registro gráfico.

Figura 19:

Del registro algebraico al Registro gráfico, en una recta.



Fuente: Propia del autor.

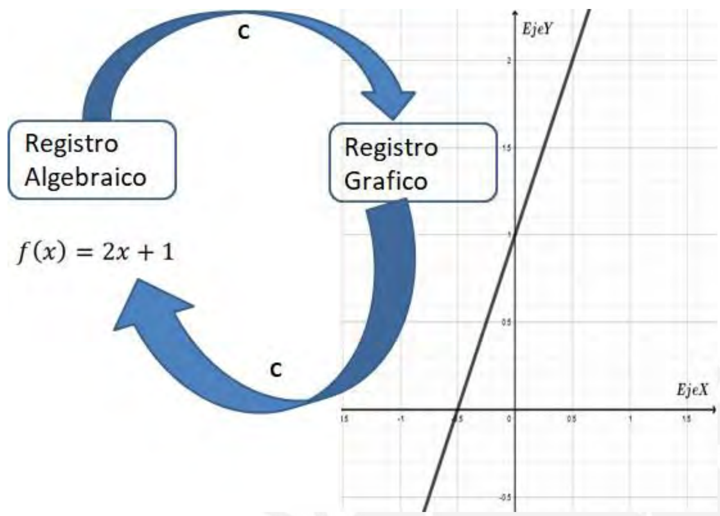
Así, se ha producido la conversión de registros, del algebraico al gráfico y viceversa.

Hemos coordinado las unidades significantes de cada registro, como son la pendiente y el punto de intercepto de la recta con él $Eje\ Y$, al lograr articular estas unidades significantes se ha producido una congruencia de representaciones semióticas y a su vez se ha producido la conversión de registros, del algebraico al gráfico y viceversa.

La Figura 20 muestra la actividad cognitiva de la conversión de una recta del registro algebraico al registro gráfico

Figura 20:

Ejemplo de conversión de una función lineal en registro gráfico y registro algebraico.



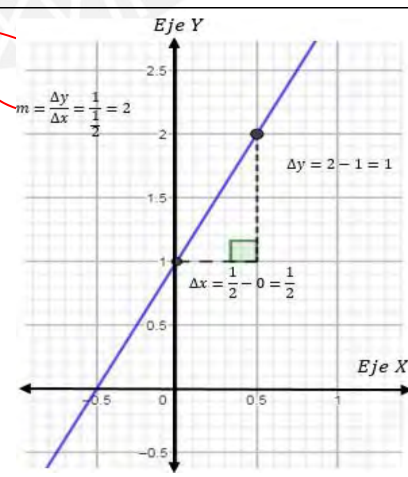
Fuente: Propia del autor.

En cuanto a la congruencia, hacemos el análisis (ver Tabla 3)

Tabla 3:

Registro algebraico Versus Registro gráfico

<table>
<tr><th>Registro Algebraico</th><th>Registro Gráfico</th></tr>
<tr><td>Ecuación Algebraica: $f(x) = 2x + 1$.

es de la forma $f(x) = mx + b$.</td><td>
</td></tr>
</table>

Criterio: Correspondencia de los elementos significantes	Criterio: Correspondencia de los elementos significantes
De la ecuación Algebraica 1. La pendiente: $m = 2$ 2. La ordenada en el origen $= b = 1$.	Del gráfico. 1. La pendiente: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ 2. $(0; b)$ punto en la recta ubicado en el $Eje\ Y$, con $b = 1$.
Univocidad de los elementos significantes. 1. Son únicos 2. Son únicos	Univocidad de los elementos significantes 1. Único 2. Único
Criterio: Organización de los elementos significantes de cada representación. 1. Pendiente m. 2. Intercepto de la ecuación con el $Eje\ Y$	Criterio: Organización de los elementos significantes de cada representación. 1. La pendiente: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ 2. $(0; b)$ punto en la recta ubicado en el $Eje\ Y$, con $b = 1$.

Fuente: Propia del autor.

Ahora, presentamos otro ejemplo al respecto de la congruencia de representaciones semióticas.

Ejemplo.

Si, $f(x) = 10 - x,\ 2 \leq x \leq 14$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 8$, es una representación semiótica algebraica congruente a la representación semiótica gráfica

En efecto:

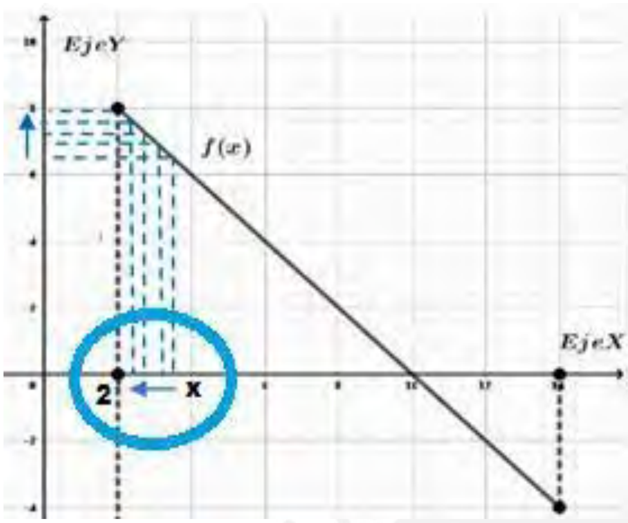
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 8$,

La función lineal $f(x) = 10 - x, 2 \leq x \leq 14$, con $m = -1$ y un punto de la recta en el dominio de la función. Por ejemplo $(2\ , 8)$, permite graficar el segmento en el plano cartesiano

En la Figura 21, observamos un conjunto de tratamientos en el Registro Gráfico del límite lateral por la derecha.

Figura 21:

El límite por la derecha



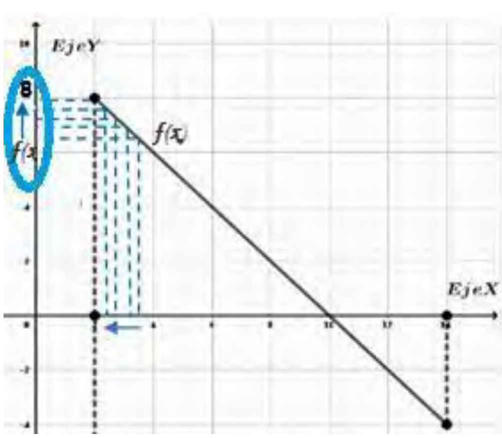
Fuente: Propia del autor.

Al aplicar los tratamientos del límite de una función en este registro, podemos decir que el límite de la función por la derecha es el valor 8.

Si x tiende a 2 por la derecha $x = 2{,}5$, $x = 2{,}1$, $x = 2{,}01$, entonces, en el $\mathrm{Eje\ Y}$; $f(x)$, tiende (se aproxima) a 8, representada por la flecha celeste en el $\mathrm{Eje\ Y}$ (ver Figura 22)

Figura 22:

Conversión del registro algebraico al registro gráfico.



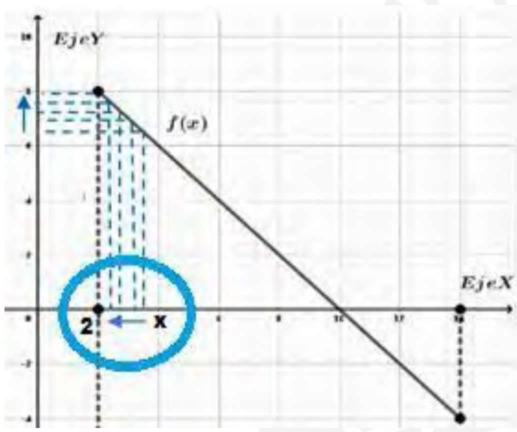
Fuente: Propia del autor.

$f(2{,}5) = 7{,}5$, $f(2{,}1) = 7{,}9$, $f(2{,}01) = 7.99$.

Entonces se ha producido una conversión para el límite de la función, propuesta del registro algebraico al registro gráfico y la conversión inversa del registro gráfico al registro algebraico. La Figura 23 es la representación gráfica del límite de la función en su registro gráfico.

Figura 23:

Representación gráfica del límite de una función



Fuente: Propia del autor.

Podemos traducir la representación gráfica del límite en la representación algebraica como sigue, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 8$, donde falta determinar la ecuación algebraica de la recta.

De acuerdo a las variables visuales que brinda el grafico, como son dos puntos de la recta, podemos hallar la pendiente y la ecuación de la recta en su forma punto y pendiente por todo $f(x) = 10 - x$, luego tenemos: $\lim_{x\to 2^+} 10 - x = 8$.

En el caso que sea posible trasladarnos (movilizarnos) de un registro a otro, se dirá que se ha producido la “congruencia” de representaciones. Hay tres criterios para obtener la congruencia entre las representaciones semióticas, según Duval (2004), las que detallamos más adelante.

En caso de no haber sido posible transformar el registro inicial en otro registro, se dice que "no hay congruencia" entre las representaciones y se produce el fenómeno de "encapsulamiento" en el registro de representación (no se puede convertir o movilizar).

Supongamos dos representaciones de un mismo objeto, pero tomadas en dos registros diferentes, uno inicial (algebraico) y el otro final (grafico), donde cada representación es diferente por los signos que utiliza, así como sus tratamientos en cada registro. El trabajo para construir la congruencia de registros es coordinar y articular cada unidad significante (significado) del primer registro con una unidad significante (significado análogo) del segundo registro, tal como dice Duval (2004), es un trabajo específico del conocimiento.

Duval (2004) expresa que "La importancia de un cambio de registro está en que justamente se pueden efectuar tratamientos totalmente diferentes en un registro distinto a aquél en el que fueron dadas las representaciones iniciales" (p.55).

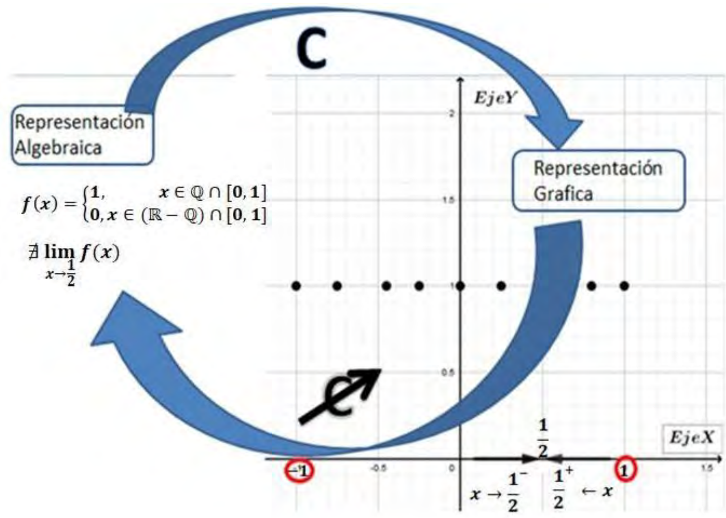
La no congruencia se traduce en que no se ha comprendido el objeto matemático, sino más bien que solo se ha hecho parcialmente. Es decir, que con el tiempo lo olvidaremos. También nos dice que no conocemos bien el objeto en cada registro y, por tanto, no se ha formado la aprehensión conceptual del objeto matemático (comprensión del concepto del objeto matemático).

El siguiente ejemplo nos muestra la conversión de la representación algebraica de una función a la representación gráfica, pero es complicado partir de la representación gráfica y obtener su representación algebraica (ver Figura 24).

En la práctica, se convertirá en la imposibilidad de realizar alguna tarea que requiera la conversión de dos registros. La no congruencia no permite la transferencia del conocimiento.

Figura 24:

Ejemplo de no congruencia.



Fuente: Adaptado de Spivack (2009, p.114)

La coordinación de registros es inherente a la conversión, ya que es la puesta en correspondencia de las unidades significantes (los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro de una representación) del registro de partida con las unidades significantes de otra representación en el registro de llegada.

Duval (2004) expresa que la coordinación entre registros es un trabajo de aprendizaje específico, centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la comparación por la puesta en correspondencia de sus unidades significantes y en sus “traducciones” mutuas.

La conversión entre Registros es una actividad cognitiva primordial menos visible que el tratamiento, que depende de la coordinación. Esto se debe a que cada registro está definido por sus reglas de conformidad, lo cual permite efectuar tratamientos en el registro. En cambio, en la conversión de registros, no hay reglas de conversión, ya que uno tiene que coordinar, articular y conectar las unidades significantes de una representación en un registro con otras unidades significantes correspondientes a otro registro (denominado discriminación de unidades significantes). Esto último se basa en la especificidad que ofrece cada registro.

Las diferencias que hay entre los Registros de Representación Semiótica son:

- La naturaleza de sus significantes.
- Las reglas de conformidad que nos ofrece cada registro.
- El número en que puede efectuarse las asociaciones de las unidades discriminantes en cada registro (dimensión del registro). De acuerdo con Duval (2004), da la posibilidad de buscar dos registros o más con el mismo número de unidades significantes y establecer la congruencia (equivalencia) de registros en la que se pueden observar tratamientos "equivalentes" con costos menores si se efectúa un cambio de registro apropiado. Por ejemplo, si estamos buscando que se efectúen menos número de tratamientos o tratamientos visuales y no abstractos.

En esta investigación, uno de los objetivos específicos es estudiar, analizar, conocer e interpretar el funcionamiento de cada registro de representación semiótica del límite de una función. En el capítulo siguiente, daremos con detalle el análisis de estas tres actividades cognitivas que verifica todo registro de representación semiótica para el límite de una función.

El siguiente esquema nos muestra el proceso de la adquisición del conocimiento de un objeto matemático, el cual nos explica que, por ejemplo, si queremos adquirir el concepto de límite de una función real finito, necesitamos conocer dos registros de representación (como mínimo). Digamos el registro algebraico y el registro gráfico, en el que cada registro tiene sus propios aspectos del concepto o tratamientos. Tratamiento 1 en el registro algebraico y tratamiento 2 en el registro gráfico.

Si somos capaces de convertir (movilizar, coordinar) una representación semiótica de un registro gráfico al registro algebraico y viceversa, entonces facilitará el aprendizaje del concepto de límite de una función de variable real, que significaría que tenemos la aprehensión conceptual desde dos perspectivas diferentes para el concepto, ya que nos ofrece procedimientos de interpretación.

Al respecto, Duval (1993) (citado por Blázquez y Ortega, 2001) expresa que la diversificacion de las representaciones del mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto.

Afirma que el uso de las distintas representaciones favorece el aprendizaje y lo hace de dos formas. Por un lado, compensa las limitaciones de unas representaciones con otras y, por otro, permite que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación más apropiada para cada situación.

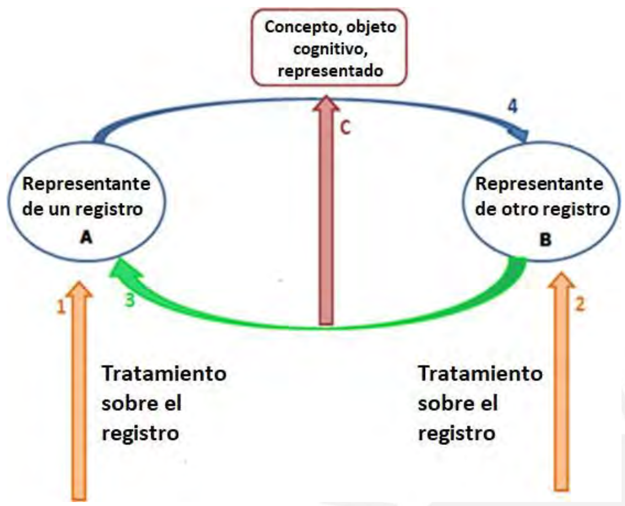
En la Figura 25, consideramos para un objeto matemático el funcionamiento cognitivo de los elementos de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) entre dos Registros de Representación Semiótica.

Consideramos la representación del objeto en el registro A y el registro B. Las flechas 1 y 2 indican la actividad cognitiva del tratamiento en cada registro; la flecha 3 representa la transformación de una representación en el registro B a una representación en el registro A, denominada conversión parcial y; la flecha 4 indica la transformación de una representación del registro A en el registro B, denominada conversión inversa.

Si suceden las dos actividades cognitivas representadas por las flechas 3 y 4, se dice que se ha producido la actividad cognitiva de la conversión, que es representado por la flecha C. Según Duval (2004), la conversión es clave, pues ayuda en adquirir el conocimiento del objeto.

Figura 25:

Esquema para adquirir el conocimiento por la TRRS



Fuente: Tomado de Duval (2004, p.68)

Cada representación semiótica tiene una estructura o forma diferente, pero también un significado propio en cada registro (mirada parcial del objeto matemático). Es por eso que la complementariedad (mirada integradora, articuladora) de significados enriquece la construcción del conocimiento del objeto matemático.

Cada registro es importante por las características que presenta del concepto, por ejemplo, en el registro algebraico, cuando se usa la definición con el uso de las propiedades, muestra del concepto un aspecto formal, abstracto y estático. El sistema numérico o tabular muestra el aspecto de aproximación que sugiere una idea dinámica, local y vinculada con la realidad. El sistema gráfico es más estático que el numérico y menos formal que el algebraico, ya que muestra el aspecto visual y ayuda a coordinar las tendencias de ambas variables.

La comprensión de algún objeto matemático, de un texto o un razonamiento, movilizan las actividades de formación o tratamiento o conversión o las tres actividades cognitivas. También se utilizan algunos términos como “traducción”, “ilustración”, “transposición”, “interpretación” y “codificación” para indicar que son operaciones (funciones) que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro en la actividad cognitiva de la conversión.

A continuación, exponemos criterios de congruencia entre dos representaciones semióticas y un ejemplo. La no congruencia mide el grado de dificultad en la conversión.

Criterios de congruencia entre dos representaciones semióticamente diferentes.

1. Correspondencia “semántica” de los elementos significantes: A cada unidad significante simple de una de las representaciones se le puede asociar una unidad significante simple de la otra representación.

   Entendemos como, unidad significante simple a toda unidad que depende del “léxico” (significante) de un registro.

2. Univocidad semántica terminal**.** A cada unidad significante elemental de la representación de partida le corresponde solo una unidad significante elemental en el registro de representación de llegada.

3. De correspondencia. Organización de las unidades significantes**.** Ordenar respectivamente las unidades significantes de las dos representaciones comparadas conducen a aprehender (adquirir) las unidades en correspondencia semántica, según el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio es posible solo si estas tienen el mismo número de dimensiones.

Diremos que hay congruencia si se verifican los tres criterios. La dificultad en la conversión de los registros depende del grado de no congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada.

No-congruencia y encapsulamiento de los registros de representación

Muy ligados a la actividad cognitiva de la conversión.

Los efectos de la no congruencia en la clase conducen a fracasos en la actividad cognitiva de conversión, a pesar de que los aprendizajes hayan tenido diferentes tratamientos en los diferentes registros.

Dificultades a partir de los Registros de Representación Semiótica del límite de una función.

En esta parte, veremos qué significan las dificultades o incomprensión del concepto matemático o una tarea desde la perspectiva de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS)

De acuerdo con Duval (2004), no hay comprensión en Matemática si se observan los siguientes resultados:

- Si no se distingue el objeto matemático de sus representaciones, no hay comprensión en Matemática.
- La pluralidad de representaciones semióticas para un mismo objeto.
- La falta de coordinación entre los diferentes registros.
- La falta de conversión de un registro a otro.

Ejemplo acerca de congruencia de representaciones semióticas.

Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) contrastan la conceptualización métrica del límite dada por Weierstrass, que se utiliza en la docencia universitaria, con la conceptualización del límite dado por los mencionados autores, denominada “aproximación óptima” para establecer cuál de ellas es más apropiada para el aprendizaje.

La conceptualización del concepto “aproximación óptima” del límite de una función está basada en la “aproximación de un número” y “tendencia de una sucesión” (aproximación optima). Los autores manifiestan que la cantidad de símbolos y formalismos de la simbología utilizada en la representación algebraica, los alumnos no lo entienden, se equivocan en el rol que cumplen las letras $\delta\ y\ \varepsilon$ y no lo recuerdan, con lo que concluyen que no es accesible a los alumnos en un primer curso de Análisis Matemático, donde el límite es un tema fundamental y base para cursos posteriores.

Los autores, preocupados por la comprensión de los alumnos, proponen una representación del concepto del límite de una función en un lenguaje más cercano a los alumnos. Para ello, plantean lo que ellos llaman una representación verbal, centradas en ideas de la definición de Weierstrass. Es decir, de aproximación de dos números (representación algebraica; donde se consideran las distancias en valor absoluto) y límite de una sucesión caracterización algebraica (aproximación optima) que involucran representaciones algebraicas.

La definición que proponen Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) para el límite es:

"El límite de una función f en $x = a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe una aproximación H de a, $H \neq a$, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que a K" (p. 195)

En la Tabla 4, vemos la asociación, conexión y coordinación de unidades significantes del concepto de límite de una función por Weierstrass y aproximación óptima, entre los registros algebraico y verbal.

Según Duval (2004), las representaciones semióticas están compuestas por unidades significantes. Esto es un enunciado, una fórmula o un texto o símbolos que expresan reagrupamientos de fórmulas o palabras**.**

Tabla 4:

Asociación de Unidades Significantes Elementales.

Definición Métrica	Definición por Aproximación Óptima.
Para todo $\varepsilon > 0$	Para toda aproximación $K \neq L$.

Existe un $\delta > 0$	Existe una aproximación $H \neq a$.
Los x tales que $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$	Los x que mejoran la aproximación H de a.
$\lvert \boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{L} \rvert < s$	Las imágenes $\boldsymbol{f(x)}$ mejoran la aproximación $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{L}$

Fuente: Tomado de Blázquez, Ortega, Gatica, Benegas (2006, p.195)

A continuación, haremos la discriminación de unidades significantes a fin de probar la congruencia entre ambas representaciones.

Discriminación de las unidades significantes.

En la definición del límite de Weierstrass:

1. Para todo $\varepsilon > 0$, es una unidad significante en el concepto de Weierstrass.

   El significado geométrico en el concepto es el siguiente: Fijado el número L y además $\varepsilon > 0$ determina una banda horizontal en $\mathbb{R}^2$, que es el producto cartesiano del Intervalo simétrico en el $Eje\ Y$, de centro L y radio ε. Es decir:

   $I_s = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ } con el $Eje\ X$**.**

2. Para toda aproximación K diferente de L. Este enunciado es una unidad significante en el concepto de Blázquez y Ortega (2006).

   A continuación, probaremos que a la unidad significante definida en 1. se le asocia la unidad significante definida en 2.

   Veamos qué significa 2. en el concepto de Blázquez y Ortega (2006). Toda aproximación K de L determina una banda horizontal que contiene al numero L. En efecto, sea K un número fijo, arbitrario y diferente, aproximación de L; cogemos el producto cartesiano: el Intervalo simétrico en el $Eje\ Y$ de centro L y radio $\varepsilon = |K - L|$ (así el número L está contenido en el intervalo), con el $Eje\ X$. Denominamos $\varepsilon = |L - K|$ en su análogo con la definición de Weierstrass.

3. Existe un $\delta > 0$, es una unidad significante para la conceptualización con la definición métrica**.**

Como ya tenemos el número $\varepsilon > 0$ fijo y arbitrario, podemos, a partir de este formar otro número positivo. Por ejemplo: $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ el cual servirá para formar una banda vertical en el plano, que contiene al punto "a".

$(x\varepsilon(a - \delta, a + \delta) \text{ x } Y\ )$

A esta unidad significante, le asociamos la correspondiente en el concepto de Blázquez y Ortega (2006) que es la que se expresa a continuación.

4. Existe una aproximación H diferente de a. Este enunciado representa una unidad significante de Blázquez y Ortega (2006) en el concepto del límite asociada al punto 3. Con la aproximación K de L, dado en el ítem 2, se puede formar una aproximación H de a, con $H \neq a$, como la siguiente: $H = a + \frac{1}{2}|L - K|$.

   Aquí, el $\delta > 0$, en la representación algebraica del límite, se relaciona con el valor de H_1, donde: $H_1 = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}|L - K|$ en la representación óptima del límite.

5. Los x tales que $0 < |x - a| < \delta$. Esta unidad significante, en la conceptualización métrica de Weierstrass, se contrasta con la unidad significante de la conceptualización óptima siguiente: Los x que mejoran la aproximación H de a.

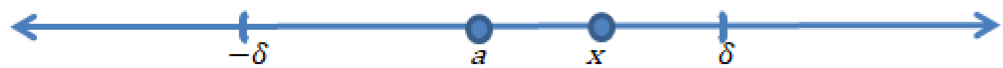
   Para establecer una asociación de unidades significantes, estudiamos qué significan los valores de x , tales que $0 < |x - a| < \delta$. Es decir, los x tal que:

   $-\delta < x - a < \delta, x \neq a$ para algún $\delta > 0$. En términos de "aproximación" de Blázquez (2006), podemos traducir de la desigualdad que δ y x son aproximaciones de a, pero que los x que verifican $|x - a| < \delta, x \neq a,$ mejoran la aproximación δ de a.

En la **Figura 26**, representamos en el Eje real una aproximación del valor a.

Figura 26:

x es una aproximación de a



Fuente: Propia del autor.

Por otro lado, los valores x que mejoran la aproximación H de a, significan los valores x que están más próximos al valor de "a" que la aproximación. (Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas 2006, p. 8). Una representación gráfica se puede ver en la **Figura 27**.

Figura 27:

x mejora la aproximación H, según Blázquez-Ortega.

Fuente: Propia del autor.

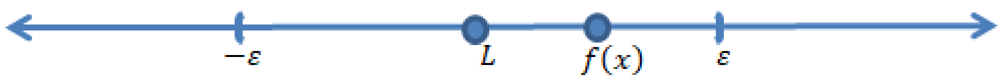
6. En la conceptualización de la métrica, tenemos: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

   En la conceptualización de Blázquez S. , Ortega, Gatica, y Benegas, 2006: Las imágenes $f(x)$ mejoran la aproximación K de L.Analicemos la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa que $f(x)$ pertenece a un intervalo de centro L y radio ε, llamado épsilon-entorno: $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$. En términos de aproximación optima, significa que ε y $f(x)$ son aproximaciones de L, pero los $f(x)$ que verifican $|f(x) - L| < \varepsilon$ son los que mejoran la aproximación ε de L.

En la **Figura 28**, representamos gráficamente en el Eje real una épsilon entorno de $\boldsymbol{f(x)}$.

Figura 28:

$\boldsymbol{f(x)}$ está en una épsilon entorno.



Fuente: Propia del autor.

La unidad significante elemental de Blázquez y Ortega (2006). Las imágenes de f mejoran la aproximación K de L, significa que los valores de $\boldsymbol{f(x)}$ están más próximos del valor “L” que la aproximación K. Podemos ayudarnos de la representación gráfica para articular la representación verbal algebraica y gráfica.

Una representación gráfica se puede ver en la Figura 29.

Figura 29:

$\boldsymbol{f(x)}$ mejor tendencia de L que de K

Fuente: Propia del autor.

El análisis anterior está hecho en el sentido directo e inverso. Es decir, hemos establecido una relación entre cada unidad elemental significativa de la conceptualización métrica del límite de una función y las unidades elementales significativas de la conceptualización dadas por Blázquez y Ortega (2006), denominada “Aproximación Óptima”.

De acuerdo a la Teoría de Duval (2004), se muestra que hay una congruencia de la representación de la conceptualización del límite de una función en un punto del registro

Algebraico, con una representación del concepto en el registro Verbal, ayudada por la representación gráfica, el cual permite asociar una unidad elemental de una representación algebraica de la definición de Weierstrass con una unidad elemental de la representación del concepto aproximación óptima y también de manera inversa del registro Verbal al Registro Algebraico, ya que hemos coordinado (establecido relaciones, articulado unidades significativas del registro de partida en el registro de llegada y viceversa) cada unidad significante de la conceptualización del registro de partida con una unidad de significación del registro de llegada.

De acuerdo con la teoría de Duval (2004), hemos realizado una tarea cognitiva de conversión de una representación algebraica de un objeto matemático a una representación verbal y viceversa, en la cual podemos conservar el contenido parcial o total de los significantes.

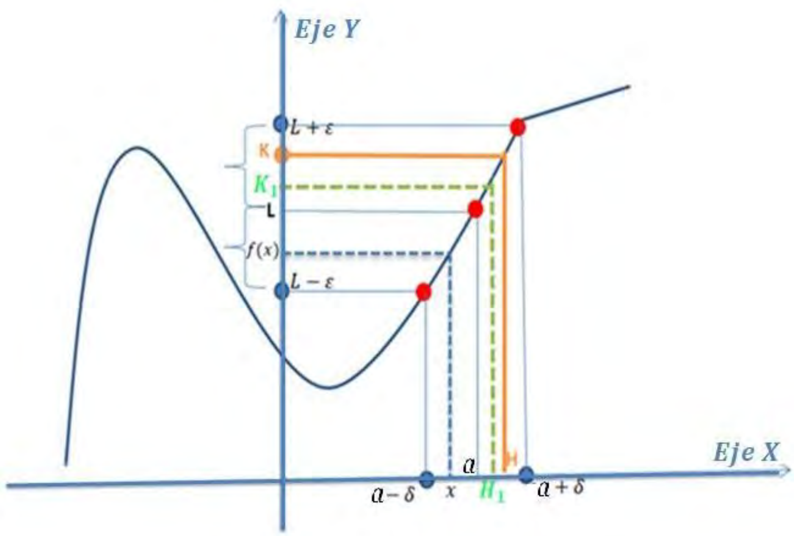
Duval (2004) dice que para que haya una comprensión integradora del concepto en el alumno, debemos realizar la conversión de un registro a otro registro, así como la conversión inversa en los registros que se trabajen. También menciona que de sólo producirse la conversión en un solo sentido, significará la comprensión parcial del concepto y esta se traducirá como incompleta en las tareas, ejercicios y razonamientos, a diferencia de producirse la conversión en los dos sentidos. Es decir, la congruencia de las representaciones se traducirá en la eficiencia del alumno en las tareas y cuestionarios.

La no congruencia de las representaciones se traduce en la dificultad que tienen los alumnos en realizar las tareas académicas y razonamientos donde se les pida realizar una conversión. Recordemos que la congruencia mide el grado de dificultad que se tiene cuando se realiza la actividad cognitiva de la conversión.

A continuación, representamos, en la Figura 30, las unidades significantes que intervienen en los conceptos de Weierstrass y Blázquez y Ortega (2006).

Figura 30:

Comparación límite Weierstrass y A.O de Blázquez y Ortega



Fuente: Propia del autor.

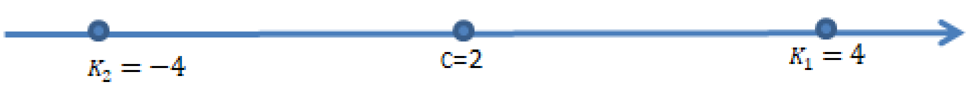
Ejemplo: Sea $c = 2$ una aproximación, puede ser el número $K_1 = 4$, que está a la derecha del número $c = 2$. 0 la aproximación puede ser el número $K_2 = -4$, que está a la izquierda del número $c = 2$.

La distancia entre ellos $|2 - 4| = 2, |-4 - 2| = 6$

Un ejemplo de dos aproximaciones de un número se refleja en la **Figura 31**.

Figura 31:

Aproximaciones del número dos

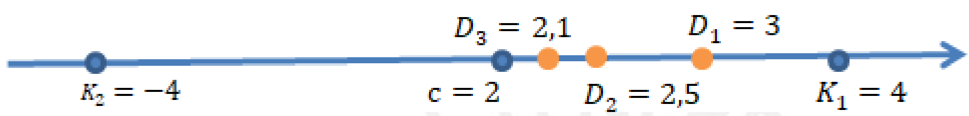


Fuente: Propia del autor.

Los x que mejoran la aproximación $K_1 = 4$ del número $c = 2$, son todos los x que se aproximan (tienden) por la derecha al número $c = 2$. Por ejemplo, $D_1 = 3$;$D_2 = 2{,}5$; $D_3 = 2{,}1$ son aproximaciones del numero $c = 2$, pero que tienden a $c = 2$. La representación gráfica se observa en la Figura 32.

Figura 32:

Optimización de las aproximaciones del número dos



Fuente: Propia del autor.

2.4 Aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos.

En esta sección, describimos el límite de una función desde los aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos

Hitt (1998) expresa que en la construcción de las Matemáticas, hasta una ciencia deductiva libre de contradicciones, tuvieron que pasar 14 siglos y durante ese tiempo estuvieron ausentes las consideraciones visuales en sus argumentos demostrativos, así como las intuiciones, representaciones gráficas.

El autor relata que en ese proceso consideraban que se formaría una Matemática más formal y libre de contradicciones y que no se consideraban las ideas intuitivas, representaciones con figuras, definiciones informales y todo aquello que no estaba claro o que llevara a la contradicción y, sobre todo, la perdida de ese contexto real del cual es su razón de ser.

Szabo (1960) (citado por Hitt, 1998), expresa que Hipócrates de Quío, en su Quadratura Lunularum, tuvo mucho cuidado en la prueba teórica de sus desigualdades, pero que si hubiera usado la representación gráfica hubieran sido evidentes, pero no confiaba en esa evidencia de la simple visualización.

El autor cita a Glaser (1972), quien reporta a Duhamel que utilizaba la siguiente definición: “Se dice límite de una cantidad variable, a una cantidad fija, a la cual (aquella) se aproxima indefinidamente” (p. 24).

En esta parte, manifiesta que la definición es imprecisa y errónea, ya que no se podía mantener por mucho tiempo, pues, por ejemplo, la sucesión es $\{\frac{1}{n}\}$ se aproxima a -1, pero su límite no es -1. El autor afirma así la justificación del refinamiento de las Matemáticas en una ciencia deductiva libre de contradicciones, pero a su vez se pregunta ¿debemos seguir ese camino en términos de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas sin consideraciones visuales?

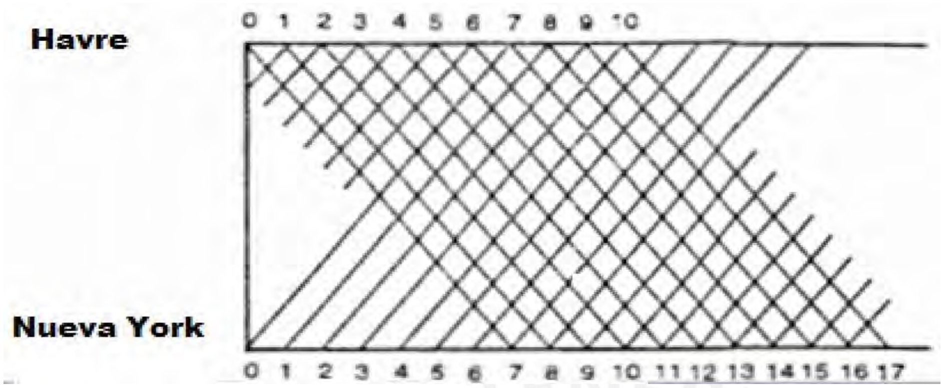
El autor cuenta una anécdota realizada en un congreso en el que se encontraban matemáticos conocidos e ilustres y un presentador lanzó el problema siguiente:

“Yo supongo, dijo él, que cada día, al mediodía, parte un barco de Havre hacia Nueva York y al mismo tiempo un barco de la misma compañía parte de Nueva York hacia Havre. El recorrido se realiza exactamente en siete días, ya sea en un sentido o en otro. ¿Cuántos barcos de la misma compañía que realizan un recorrido de regreso se encontrará el barco que sale hoy a mediodía en su recorrido hacia Nueva York?” (p. 24).

En respuesta, alguno Hitt (1998), dijeron siete, pero ninguno mencionó la respuesta correcta que, con ayuda de la representación de la Figura 33, se nota con claridad la solución.

Figura 33:

Representación Gráfica del problema en un Congreso.



Fuente: Tomado de Hitt (1998, p.25).

Esta anécdota muestra cómo la representación ayuda a poder visualizar el razonamiento utilizado en la solución y así responder correctamente.

El autor se refiere a dos enseñanzas que se obtienen de este ejemplo. Una de ellas es ser paciente con los alumnos que no entienden en una primera intención conceptos y propiedades nuevas y, en segundo lugar, la potencialidad de las representaciones gráficas en algún un razonamiento.

Hay algunas preguntas que salen a la luz del problema propuesto como; la intuición que tiene un participante no es correcta ¿por qué nadie acierta la respuesta? Al leer la pregunta, ¿qué procesos de resolución se nos vienen a la mente para resolverlos? ¿Por qué la consideración de la representación gráfica resuelve el problema?

Con este ejemplo, se genera la preocupación de algunos matemáticos del siglo XIX y comienzos del siglo XX en términos del aprendizaje y su enseñanza de las Matemáticas, en la que consideran que se debe utilizar las representaciones visuales, como las representaciones geométricas en la enseñanza de las Matemáticas. De estas consideraciones visuales que promueven algunos matemáticos, resulta que sucede una corriente matemática denominada "Matemática moderna".

Hitt (1998) cuenta que sobre la época del 1960-1975 se promovió la "Matemática Moderna", con el objetivo de que los alumnos profundicen más formalmente las Matemáticas. La propuesta de los investigadores era presentar a las Matemáticas "en contextos reales".

Una de las maneras de abordar el tema era que para transmitir esto utilizaron una cantidad de representaciones hechas en los libros, lo cual no generaban el conocimiento, sino al contrario, crearon confusión. Es así entre los años 1975 y 1985 como sucede una corriente opuesta a esta denominada "presentaciones cercanas a la realidad".

El autor manifiesta que aproximadamente desde el 1985 se generó una tendencia a equilibrar los desacuerdos que se generaron con la Matemática moderna y es así como desde la perspectiva de la enseñanza en la matemática han intentado:

i) Comprender cada una de las diversas representaciones semióticas y el rol que cumplen de los objetos matemáticos en estudio.
ii) Cuáles son los fenómenos ligados al aprendizaje y a la adquisición de los conocimientos matemáticos.
iii) También se ha dado mayor importancia a la generación de imágenes mentales para el desarrollo de habilidades como la visualización matemática en la comprensión de conceptos o en la resolución de problemas.

Desde la perspectiva del entendimiento y aprendizaje de las Matemáticas, Hitt (1998) prueba que es necesario tener en cuenta las consideraciones visuales. También menciona que la comprensión de los diversos registros de representación ayudará al estudiante a construir el concepto del objeto matemático.

2.5. Análisis de textos.

En esta sección, realizamos un análisis de dos textos de la Bibliografía Básica propuesto en el silabo del curso Cálculo I para la enseñanza del límite de una función, como son Mitacc y Toro (2009) y Venero (2012). En el análisis, tomamos en cuenta dos características que seguimos de Pons (2014), las cuales son:

1. ¿Cómo se define el límite de una función, representaciones gráficas y simbólicas (algebraicas)?
2. Análisis didáctico y cognitivo (objetivos).

Podemos observar en la Figura 34 que ambos autores desarrollan el tema de límites de una función en el capítulo 3. Seguidamente, presentamos la ubicación y contenido en el texto Mitacc y Toro (2009).

Figura 34:

Contenidos Mittac y Toro (2009)

CAPITULO 3: LIMITES

Fuente: Tópicos de Cálculo. Mittac y Toro (2009)

En la Figura 35, la ubicación y contenido en el texto de Venero (2012).

Figura 35:

Contenido Venero (2012)

Fuente: Análisis Matemático 1. Venero (2011, p,251)

Para definir el límite de una función, comienzan el estudio definiendo qué es una vecindad, en la que realizan ejemplos y propiedades, para luego enunciar la definición formal del límite de una función, según Weierstrass, en términos de desigualdades y lo reformulan en términos de desigualdades en valor absoluto.

A continuación, observamos cómo los autores definen el concepto, ya que lo hacen en el registro algebraico, en términos de desigualdades, para luego reformularlas en términos de desigualdades en valor absoluto.

Definición formal en ambos autores.

En Mitacc y Toro (2009), luego de la definición formal, no se desarrolla la interpretación geométrica hasta la sección correspondiente a la definición de límites laterales, pero Venero (2012), luego de la definición formal del límite, desarrolla un análisis de la interpretación geométrica.

A continuación, en la Figura 36, observamos la definición de Mitacc y Toro (2009).

Figura 36:

Definición formal del límite

Definición 2 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto que no necesariamente pertenece a D_f, pero que toda vecindad de a contiene puntos de D_f. Se dice que el **límite de $f(x)$ es L, cuando x tiende hacia a**, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, cuando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in D_f,\ x \neq a \text{ y } a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

En términos del valor absoluto, esta definición tiene la forma

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in D_f,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fuente: Tópicos de Cálculo. Mittac y Toro (2009, p.110)

En el texto de Mittac y Toro (2009), presentan varios ejercicios resueltos con el objetivo de presentar diferentes tratamientos algebraicos para efectuar la demostración. En ella, muestran límites de funciones polinómicas, racionales, formas indeterminadas, entre otras. Para efectuar la demostración, movilizan diferentes tratamientos, en el registro algebraico.

Como podemos observar en la Figura 37, los tratamientos que dependen de la función de turno, basados en desigualdades en valor absoluto, para demostrar que el límite de la función polinomial $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ cuando x tiende a 1, es el valor 6.

Figura 37:

Tratamientos algebraicos en la demostración del límite.

Ejemplo 4. Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, pruebe que $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$.

Solución

Dado $\varepsilon > 0$, se debe probar que si $0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$.

Teniendo en cuenta la observación 1, se debe trabajar con $|f(x) - 6|$, esto es,

$$|f(x) - 6| = |3x^2 + 2x + 1 - 6| = |(x-1)(3x+5)| = |x-1||3x+5| \quad (1)$$

Para $\delta_1 = 1$ buscaremos un número positivo M tal que,

$$0 < |x-1| < 1 \Rightarrow |3x+5| < M$$

En efecto, si $|x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow 0 < 3x < 6 \Rightarrow 5 < 3x + 5 < 11$

$$\Rightarrow |3x+5| < 11 \quad (2)$$

Multiplicando (2) por $|x-1|$, se obtiene $|x-1||3x+5| < 11|x-1|$.

De lo anterior, se deduce que $11|x-1| < \varepsilon$ si $|x-1| < \frac{\varepsilon}{11}$. En resumen,

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 6| = |x-1||3x+5| < 11|x-1| < \varepsilon$$

Por tanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$.

Fuente: Tópicos de Cálculo. Mittac y Toro (2009, p.112)

A continuación, en la Figura 38, la definición formal del límite en el texto de Venero (2012).

Figura 38:

Definición simbólica del límite de una función.

4.2 DEFINICIÓN .- El número L es llamado **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN f EN EL PUNTO** x_0 (que no necesariamente pertenece a Dom f) si

para cada $\varepsilon > 0$ es posible hallar un $\delta > 0$, que depende de x_0 y ε, tal que

$$\boxed{x \in \text{Dom } f \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon}$$

y en tal caso se denota : $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$

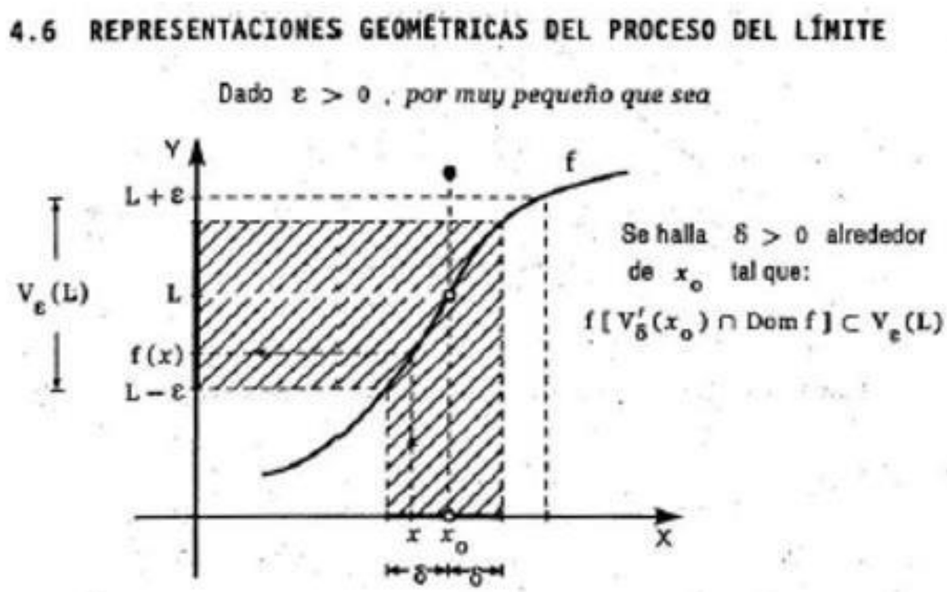
y se lee " L *es el límite de* f(x) *cuando* x *tiende a* x_0 ".

Fuente: Análisis Matemático 1. Venero (2012, p.252)

Seguidamente, en la Figura 39, Venero (2012) enuncia la interpretación geométrica de la definición algebraica y lo expresa en términos de vecindades.

Figura 39:

Representación geométrica del límite en términos de vecindades.



Fuente: Análisis Matemático 1. Venero (2012, p.253)

En la **Figura 40**, tenemos una representación algebraica del límite en término de vecindades.

Figura 40:

Representación algebraica del límite en termino de vecindades.

En términos de vecindades el proceso de límite se puede expresar:

$$\boxed{L = \lim_{x \to x_0} f(x)} \quad \textit{si y sólo si}$$

para toda vecindad $V_\varepsilon(L)$ existe una vecindad $V_\delta(x_0)$ tal que:

$$f\left[\,(V'_\delta(x_0)) \cap \text{Dom}\, f\,\right] \subset V_\varepsilon(L)$$

Fuente: Análisis Matemático 1. Venero (2012, p.253)

En ambos autores, observamos que introducen ejemplos con diversas funciones a fin de abordar cómo se efectúa la demostración en cada caso.

El objetivo de ambos autores es presentar algunos ejemplos, utilizando tratamientos en el registro algebraico, debido a la definición, ya que lo hacen con varios tipos de funciones. Ambos casos presentan algunos ejercicios resueltos usando diversos tratamientos, en la que formulan una cantidad considerable de ejercicios propuestos, indicando la respuesta en el registro algebraico.

Observamos que hay una amplia información del límite de una función en el registro algebraico, pero hay ausencia del concepto en el registro gráfico, así como los tratamientos para obtener la representación gráfica del límite. También hay ausencia de la actividad cognitiva de la conversión entre registros.

Para la comprensión del objeto matemático límite de una función, de acuerdo a la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004), se debe tener como mínimo dos representaciones semióticas en dos registros diferentes del límite de una función, lo cual no observamos en los dos textos y solo se detecta el concepto desde la perspectiva algebraica, además de diversos ejercicios propuestos en este registro.

Para garantizar la comprensión, Duval (2004) expresa que la actividad cognitiva de la conversión es necesaria entre dos registros, y en ambos textos no observamos eso.

Ambos textos desarrollan la definición de límite de una función en el registro algebraico y una variedad de ejercicios, donde se movilizan distintos tratamientos dependiendo del tipo de función.

Análisis de la Práctica Dirigida N°05.

De acuerdo con la TRRS, concluimos que los ejercicios están formulados en el registro algebraico, con una variedad de tipos de funciones que demandan diferentes tratamientos algebraicos. También observamos una ausencia del límite de una función en el registro gráfico, así como actividades relacionadas con la conversión de registros.

Concluimos que la Práctica Dirigida N°05 (Ver Anexo Práctica Dirigida N°05, página 172.), sólo muestra el aspecto formal del límite y, de acuerdo con la TRRS de Duval (2004), para comprender el límite de una función es necesario representarlo en dos registros, así como articular sus representaciones mediante sus significantes en cada registro

TERCERA PARTE: ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DESARROLLADA AL RESOLVER PROBLEMAS SOBRE LIMITE DE FUNCIONES

En este capítulo, presentamos un análisis de los Registros de Representación Semiótica algebraico y gráfico para el límite de una función. Describiremos cómo son las representaciones semióticas para el límite de una función en cada registro y cuáles son sus reglas de conformidad. También describiremos las actividades cognitivas del tratamiento y conversión en cada registro.

De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004), para comprender un concepto matemático se necesitan tener al menos dos representaciones semióticas del objeto matemático, en el que debemos conocer la forma de la representación del objeto y su significado, así como hacer tratamientos en cada registro y hacer la conversión de un registro en el otro y viceversa.

Duval (2004) considera punto clave para la comprensión a la conversión, esto significa coordinar y hacer corresponder significantes de una representación de un registro con una representación de otro registro.

3.1 Registro de representación algebraica para el límite de una función

En esta sección, describimos cuáles son los Registros de Representación Semiótica algebraico para el límite de una función en un punto, teniendo en cuenta el silabo y los textos utilizados

Probaremos que los sistemas de representación semiótica algebraica para el límite de una función son Registros de Representación Semiótica algebraica del límite de una función. Para ello, según Duval (2004), debemos probar tres características (ver Capítulo 2, Sección 2,3)

En referencia a la primera característica, podemos decir que las representaciones semióticas algebraicas para el límite de una función f son producciones de la forma $\lim_{x \to c} f(x)$, (donde f está formada por signos algebraicos y c es un número real), definida utilizando la definición de Weierstrass. Es decir:

Sea f una función definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, que contiene a c, salvo posiblemente en c.

La representación algebraica $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se lee el límite de la función f cuando x tiende a c es el número L por definición, si se verifica (DLW).

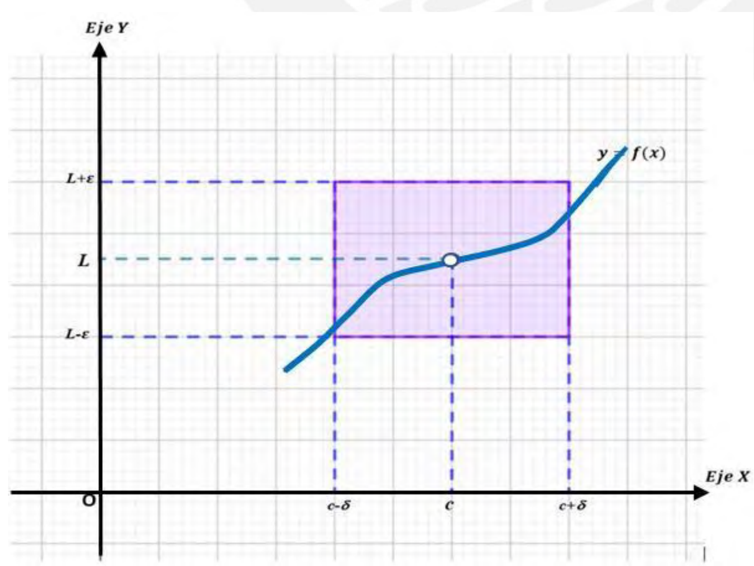
Regla de conformidad: Definición del límite de una función Weierstrass (DLW)

A continuación, la definición algebraica del límite de una función de variable real en un punto $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y solo si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f con $0 < |x - c| < \delta$. Entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. (**DLW**)

El significado geométrico de la definición de Weierstrass se traduce en la Figura 41.

Figura 41:

Interpretación Geométrica del límite de Weierstrass.



Fuente: Propia del autor.

El tipo de funciones f que consideraremos en nuestra investigación son funciones polinomiales, funciones definidas a trozos y funciones racionales como cociente de funciones polinómicas con coeficientes racionales.

Ejemplos.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Objeto matemático: límite de una función definida a trozos .} \\ \text{Representación semiótica algebraica: } \lim\limits_{x\to 2} f(x), \text{ con } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 4, & x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Ahora, pasamos a definir un Sistema de Representación Semiótico Algebraico para el límite de una función.

Un sistema de representación semiótico algebraico para el límite de una función está constituido por representaciones algebraicas para el objeto matemático límite de una función, así como un conjunto de reglas u operaciones. A estas reglas se les llama reglas de conformidad (la definición del límite de una función, operaciones algebraicas con los límites, definición de los límites laterales, entre otras), además de los recursos en el Álgebra (la factorización, el teorema del algoritmo de la división, teorema del factor, entre otras), podemos decir que las reglas de conformidad definen el registro.

Las reglas de conformidad se utilizan para efectuar la función de tratamiento en las representaciones. Es decir, nos permiten asociar representaciones dentro del registro y garantizan que las representaciones permanezcan en el registro. Las reglas de conformidad dependen del Registro.

A continuación, enunciamos las reglas de conformidad para el objeto matemático límite de una función, obtenidas luego de enunciar la definición del límite (DLW).

La definición del límite (DLW) es una regla de conformidad.

Reglas de conformidad para el límite en el registro algebraico.

Teorema 1

Si c es un número real y n un entero positivo:

i) Si $f(x) = c$, para todo $x\epsilon\mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

ii) Si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x\to x_0} x = x_0$

iii) Si $f(x) = x^n$, entonces $\lim_{x\to x_0} x^n = {x_0}^n$

iv) Si $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} (\sqrt{x}) = \sqrt{x_0}$.

Tomado del trabajo realizado por Larson y Edwards (2011) sobre propiedades de límites.

Lema 1. Si $|a| \leq \epsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Teorema 2. (Unicidad del Límite de una función)

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$, con L_1, L_2 números reales, entonces $L_1 = L_2$.

Teorema 3. (Álgebra del Límite de funciones)

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, donde $A,\ B\epsilon\mathbb{R}$.

Entonces

I. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A + B$.

II. $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A - B$.

III. $\lim_{x\to x_0} (f(x).g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x).\ \lim_{x\to x_0} g(x) = A.B$

IV. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$ siempre que $B \neq 0$.

Tomado del trabajo realizado por Larson y Edwards (2011) sobre propiedades del Álgebra de límites.

Cada ítem del Teorema 3 está expresado en representación algebraica para el límite de una función. Es importante especificarlo, pues las reglas de conformidad deben pertenecer al registro algebraico.

Corolario 1. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$, con $A \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to x_0} [c\, g(x)] = c. \lim_{x\to x_0} g(x) = c. A$.

A continuación, presentamos un ejemplo que muestra cómo se movilizan los tratamientos en base a las distintas reglas de conformidad.

Ejemplo1: Halle $\lim_{x\to 2} (4x^2 + 5)$

Solución.

Partimos de la representación inicial,

$\lim_{x\to 2} (4x^2 + 5) = \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 5$ Tratamiento

La igualdad se debe a la regla de conformidad: Teorema 3, parte i).

$\lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 5 = 4. (\lim_{x\to 2} x^2) + 5$ Tratamiento

La primera igualdad se debe a la regla de conformidad: Corolario 1, Teorema 1, i)

$4. (\lim_{x\to 2} x^2) + 5 = 4 (\lim_{x\to 2} 2^2) + 5 = 25.$ Tratamiento

La igualdad anterior se debe a la regla de conformidad: Teorema 1, iii), Sección 3.1.

Por tanto, $\lim_{x\to 2} (4x^2 + 5) = 25$

El siguiente teorema permite determinar el límite de una función racional en un valor $x = c$ en el cual, si aplicamos el Teorema 3 iv, se obtiene la indeterminada cero sobre cero.

Regla de conformidad: Teorema 4. Si $f(x) = g(x)$, en un intervalo abierto que contiene a $\boldsymbol{c}$ pero con $x \neq c$. Si $\lim_{x\to c} g(x)$ existe, entonces el $\lim_{x\to c} f(x)$ también existe y se cumple

$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$. Ver Larson y Edwards (2011)

A continuación, una regla de conformidad útil para resolver problemas que, en su presentación, tiene una forma de representación del límite de una función (estructura de la función), en la que se requiere un tratamiento en base al comportamiento de la función por la derecha e izquierda del punto en estudio. Un ejemplo de aplicación de la regla de conformidad se puede observar en límites de funciones definidas a trozos.

Reglas de conformidad para el límite de una función.

Límites Laterales

Definición 1**.** (Límite lateral por la derecha). Sea f una función real tal que:

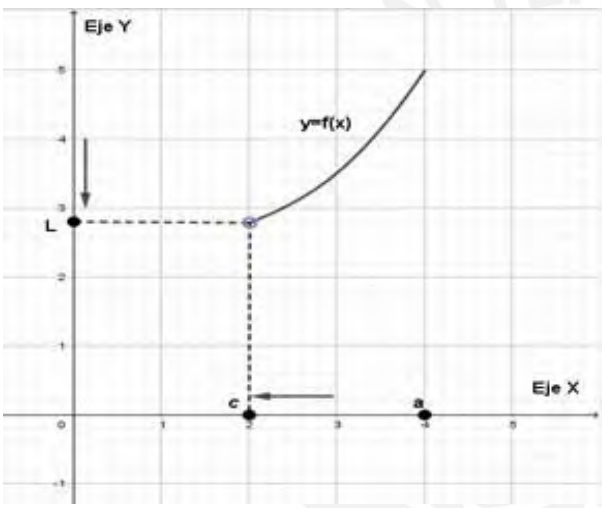
$(c; a) \subseteq Dom\,(f)$ y L un número real. Luego:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L,\ x\ > c.$

En la Figura 42, se ve el significado de que los valores de $f(x)$ se aproximan al número L, cuando los valores de x se acercan por la derecha al número c.

Figura 42:

Definición del límite lateral por la derecha de una función real



Fuente: Propia del autor.

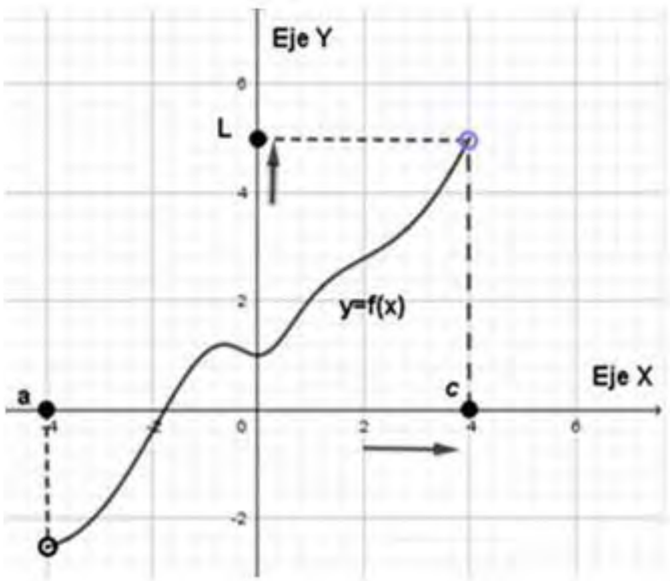
Si los valores de x tienden (aproximan) a c, desde valores mayores que c, (desde la derecha de la gráfica), se tiene que los valores de y en la gráfica se aproximan al número L. Entonces, se dice que el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a c por la derecha, es igual al número L, y lo denotamos $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Definición 2**.** (Límite lateral por la izquierda). Sea f una función real tal que $(d, c) \subseteq Dom(\,f)$ y L un número real. Luego:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L, \; x < c$. Significa que los valores $f(x)$ se aproximan al número L, cuando los valores de x se acercan por la izquierda al número c. Observamos la representación gráfica en la Figura 43.

Figura 43:

Definición del límite lateral por la izquierda.



Fuente: Propia del autor.

Si los valores de x tienden (se aproximan) a c, desde valores menores que c (desde la izquierda de la gráfica), se tiene que los valores de y en la gráfica se aproximan al número L .

Entonces se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es igual al número L y los denotamos $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

La siguiente regla de conformidad garantiza la existencia y unicidad del límite (bilateral) de una función en el registro algebraico, a través de los límites laterales por la derecha e izquierda de la función.

Teorema de Límites Bilaterales (TLB)

Sea f una función real e I un intervalo abierto que contiene el número c. Si f está definida en I, excepto quizá en c, entonces el límite de f en c existe (es un número real) si y solo si los límites laterales de f en c existen y son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x).$$

Si los límites laterales no coinciden, se dice que no existe el límite.

Ahora, enunciamos algunos recursos del Álgebra que son necesarios en esta tesis como, por ejemplo, el teorema del algoritmo de la división, el teorema del factor y la factorización, que permiten realizar los procesos algebraicos en la actividad cognitiva del tratamiento de una representación algebraica del límite de una función, específicamente cuando abordemos el límite de una función racional en un punto tal que al evaluar la función en el punto obtenemos una forma indeterminada.

Teorema. El algoritmo de la división. (TAD)

Sea $D(x)$ polinomio dividendo, $d(x)$ polinomio divisor no nulo, con grado($D(x)$) ≥ grado($d(x)$), entonces existe un polinomio cociente $q(x)$ y polinomio resto $r(x)$ tal que: $D(x) = d(x)\, q(x) + r(x)$, donde $r(x)$ es nulo o grado($r(x)$) < grado($d(x)$)

grado($q(x)$) = grado($D(x)$) – grado($d(x)$).

Tomado del trabajo realizado por Curotto (1982)

Teorema del factor (TF). Si r es una solución de $p(x)$, con $p \epsilon \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, entonces $p(x) = (x - r)g(x)$. Tomado del trabajo realizado por Curotto (1982)

Resolver un problema desde la perspectiva de la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004) significa movilizar la formación de representaciones y sus tratamientos internos y conversiones en el registro elegido para lograr una ayuda en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

A continuación, describiremos qué significan los tratamientos internos para el objeto matemático límite de una función en el Registro Algebraico.

3.2 Tratamientos internos para el objeto matemático límite de una función en el registro algebraico.

Tratamientos del límite de una función (TLF) en un punto, según la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) en el Registro Algebraico.

Un tratamiento interno del límite de una función en el Registro Algebraico, según la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004) significa que, dado el límite de una función en la representación algebraica (representación inicial) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ por los significantes que expresan los signos que definen la representación de f o el contenido de f, por ejemplo $f(x) = x^2 + x + 4$, los signos de esta representación transmiten que es el límite de un polinomio de grado 2, en la que transformamos (reemplazamos) en nuevas representaciones algebraicas, utilizando las reglas de conformidad del registro algebraico para el límite de funciones, como por ejemplo, las propiedades del Álgebra de límites de una función, detalladas en la Sección 3.2, de modo que se obtengan nuevas representaciones algebraicas en el mismo registro, que constituyen una ganancia de conocimiento en comparación con la representación inicial o anterior hasta conseguir la solución del problema.

A continuación, veremos cuáles son los tratamientos para el objeto matemático límite de una función cuando f es una función polinomial y una función definida a trozos y cuando f es una función racional.

Tratamiento del límite de una función polinomial (TLFP) en registro algebraico

De acuerdo con la TRRS de Duval (2004), las representaciones semióticas tienen las características de ser visibles y observables que comunican significantes. En este caso, el significante se expresa por la representación $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 x + a_0$, x

variable real, $a_n \neq 0,$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, hace que se reconozca que se trata de una función polinomial de grado "n" en la variable "x" en el registro Algebraico.

Por ejemplo: $\lim_{x\to 1} (x^3 + 2x + 3)$, aquí $f(x) = x^3 + 2x + 3$ es una función polinomial en x de grado 3, f es una representación algebraica, pues está formado por los signos del Álgebra, como son variables y constantes ligados por operaciones como es la suma.

Ahora, describimos la actividad cognitiva que se realiza en este tipo de funciones, como son los tratamientos internos en el Registro Algebraico.

El Tratamiento del límite de una función polinomial (TLFP) significa que la representación inicial $\lim_{x\to x_0} f(x)$, donde $f(x)$ es una función polinomial (significante) se transforma por las reglas de conformidad del registro algebraico para el límite de funciones, en otras representaciones algebraicas en el mismo registro. Al ser una función polinomial, es una combinación por términos formados por: monomios x^n ; constantes por monomios cx^n y de constante e, en el que utilizamos la regla de conformidad, (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 3, i).) límite de una suma de funciones esto es un tratamiento.

$$\lim_{x\to x_0} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \dots \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to x_0} a_n x^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \lim_{x\to x_0} a_0$$

Como: $\lim_{x\to x_0} a_n x^n = a_n \lim_{x\to x_0} (x^n) = a_n(x_0)^n$, debidos a las reglas de conformidad

(Ver Capítulo III, Sección 3,1, Corolario 1.) y la igualdad de la derecha, debido a la regla (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 1,iii).) por todo se han producido nuevos tratamientos, obteniéndose nuevas producciones o representaciones en el registro

$$\lim_{x\to x_0} a_n x^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \lim_{x\to x_0} a_0 = a_n\,(x_0)^n + a_{n-1}\,(x_0)^{n-1} + \cdots + a_0$$

Concluimos que, si f es una funcion polinomial,

$$\lim_{x\to x_0} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \dots \dots + a_1 x + a_0) = a_n\,(x_0)^n + a_{n-1}\,(x_0)^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (*)$$

Las reglas de conformidad utilizadas: Teorema 1,i), Teorema 3, iii), Corolario 1, Sección 3.1.

También podemos decir de (*) que el límite de una función polinomial, cuando x tiende a x_0 , se obtiene por evaluación o sustitución directa de la función polinomial en el punto x_0.

Denotamos por (EVP) si el límite de una función polinomial ha sido obtenido por evaluación directa, el cual es un tratamiento, pues ha habido una transformación de la representación inicial dentro del registro a una representación final.

Ejemplo 1. $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + c$; polinomio de grado 3 en la variable x, donde a_0,a_1, a_2, c con $a_0 \neq 0$ son los coeficientes arbitrarios, pero fijos en $\mathbb{Q}[x]$.

Determine $\lim\limits_{x \to x_0} (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + c)$.

Solución.

De acuerdo con la TRRS de Duval (2004), la función cognitiva del tratamiento algebraico en el registro algebraico del límite de una función, para resolver una tarea, consiste en a partir de la representación inicial $\lim\limits_{x \to x_0} (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + c)$, podemos producir representaciones nuevas (actualizando la mirada del objeto) debido a los significantes que nos transmiten la representación y la Regla de conformidad considerados en el registro.

Partimos de la representación inicial:

$$\lim_{x \to x_0} (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + c) = \lim_{x \to x_0} (a_0x^3) + \lim_{x \to x_0} (a_1x^2) + \lim_{x \to x_0} (a_2x) + \lim_{x \to x_0} c.$$

(Tratamiento).

Aquí, la representación inicial se transforma en la suma de cuatro representaciones nuevas para el límite de una función, debido a la regla de conformidad límite de una suma de funciones, (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 3.)

Ahora, los tres primeros sumandos a la derecha de la igualdad son límites de la forma $\lim\limits_{x \to x_0} a_nx^n$, con $n = 1,2,3$, que son reemplazadas por representaciones nuevas en el mismo registro, límite de una constante por una función, (ver Capítulo III, Sección 3,1, Corolario 1.)

y el cuarto sumando debido a la regla límite de una constante es la misma constante, (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 1 i).) por todo se han producido nuevos tratamientos,

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^3)+\lim_{x\to x_0}(a_1x^2)+\lim_{x\to x_0}(a_2x)+\lim_{x\to x_0}c=a_0\lim_{x\to x_0}(x^3)+a_1\lim_{x\to x_0}(x^2)+a_2\lim_{x\to x_0}(x)+\mathrm{c}.$$

(Tratamiento).

A continuación, una nueva transformación interna (tratamiento) debido a las reglas de conformidad: (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 1, parte iii).), el cual dice que: $\lim_{x\to x_0} x^n = (x_0)^n$, y produciéndose una nueva representación que reemplaza a la anterior. Es decir, se han producido nuevos tratamientos,

$$a_0\lim_{x\to x_0}(x^3)+a_1\lim_{x\to x_0}(x^2)+a_2\lim_{x\to x_0}(x)+\mathrm{c}=a_0(x_0)^3+a_1(x_0)^2+a_2x_0+\mathrm{c}$$

Cogiendo la primera representación inicial e igualando a la última representación obtenemos la respuesta.

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+c)=a_0(x_0)^3+a_1(x_0)^2+a_2x_0+\mathrm{c}.$$

Hemos utilizado las reglas de conformidad: (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema1, i), iii), Teorema 3,i) y ii)**,** Corolario 1.)

Ejemplo 2. Determine el siguiente límite $\lim_{x\to 1}(x^3+2x+3)$. Justifique su respuesta.

Solución.

Hacemos tratamientos basados en las propiedades algebraicas del límite, entonces, por las reglas de conformidad (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 3, i), Teorema 1 y Corolario1.)

Concluimos, $\lim_{x\to 1}(x^3+2x+3)=6$.

En el Ejemplo 2, podemos resolverlo utilizando otro tratamiento, como es por evaluación directa, (ver Capítulo III, Sección 3,2, (EVP).) Es decir,

$\lim_{x\to 1}(x^3+2x+3)=(1)^3+2(1)+3=6$. Tratamiento

Ejemplo 3. Representación Algebraica

En la Figura 44, realizamos la actividad cognitiva de la formación y tratamiento de representaciones algebraicas.

Figura 44:

Esquema de una representación algebraica para el límite.

Fuente: Propia del autor.

Duval (2004) expresa que: *"El costo del tratamiento aumenta con el número de operaciones combinadas que se realiza y la reiteración de cada operación combinada". (*p. 39).

> *"La importancia de un cambio de forma de la representación por razones de economía de tratamiento".*(p. 28).

El autor expresa que tenemos la posibilidad de resolver las tareas con menos tratamientos. Para ello, tenemos que hacer un cambio de registro (cambio de forma de la representación).

También el autor expresa que podemos actualizar la mirada del objeto. Es decir, transformar una representación en otra y esta actividad cognitiva llamada tratamiento la podemos hacer porque cada registro tiene definida sus propiedades y reglas de funcionamiento (reglas de conformidad), que le permiten asociar (transformar) una representación en otra, sin salirse del registro. Por tanto, para realizar la actividad cognitiva del tratamiento, es necesario efectuarlo en un registro de representación semiótica, ya que nos da la garantía que seguimos produciendo representaciones y no salirnos del registro. Además, los tratamientos dependen del registro de representación, ya que no son independientes del registro (cada registro tiene definido sus reglas de conformidad).

TLF en registro algebraico de una función definida a trozos (TLFRAT)

Sea la función f definida a trozos, con regla de correspondencia,

$f(x) = \{\begin{matrix} f_1(x), \ x < x_0 \\ f_2(x), \ x \geq x_0 \end{matrix}$ Con $x_0 \in \mathbb{R}$, consideramos f_1, f_2 funciones en $\mathbb{Q}[X]$.

Observamos que f es una representación algebraica para el límite de una función, ya que, por definición f_1, f_2, al ser polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, son representaciones algebraicas.

Determine: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Justifique su respuesta.

El límite propuesto es el de una función clasificada en el Álgebra, como función definida a trozos con dominio todos los números reales. Los tratamientos para resolver esta pregunta están centrados en el comportamiento de la función a trozos para valores de $x < x_0$. Esto es debido a las reglas de conformidad: definición del límite lateral por la izquierda, (ver Capítulo III, Sección 3.1.) y las reglas de conformidad para el límite de funciones.

Los tratamientos movilizan la regla de correspondencia de la función f definida a trozos y la tendencia al valor x_0 por la izquierda en el $Eje \ X$, transformándose la representación inicial en otra representación, de acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004) actualizando la mirada del objeto matemático en

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x)$ Tratamientos

La primera igualdad (de izquierda a derecha) se debe a la regla de conformidad, definición del límite lateral de una función por la izquierda, (ver Capítulo III, Sección 3.1.) (Tratamiento)

La segunda igualdad se refiere al comportamiento de la función a trozos cuando $x < x_0$. (Tratamiento)

Ahora, movilizamos los tratamientos de $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$, como f_1 es una función polinomial de segundo o tercer grado, podemos efectuar los tratamientos ya realizados para límite de funciones polinomiales (ver Capítulo III, Sección 3.1, Tratamiento del límite de una función polinomial.)

De manera análoga, se consideran los tratamientos para los límites laterales por la derecha representados por $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

A continuación,

Ejemplo 1.

Sea $f(x) = \begin{cases} x-1; x \leq 0 \\ -4; \quad x > 0 \end{cases}$. Determine: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Justifique su respuesta.

El límite propuesto es el de una función clasificada en el Álgebra como función definida a trozos, con dominio de todos los números reales.

Los tratamientos para resolver esta pregunta están centrados en el comportamiento de función definida a trozos cuando $x \to 0^-$ y las reglas de conformidad para el límite de una función, en este caso: El teorema del límite bilateral (TLB), (ver Capítulo III, Sección 3.1) y las propiedades algebraicas del límite (ver Capítulo III, Sección 3,1, Teorema 1.)

Pasamos a describir los tratamientos.

Como $x \to 0^-$, entonces $x < 0$, por la regla de correspondencia para la función f cuando $x < 0$ y la definición de límite lateral por la izquierda, tenemos la transformación de la representación inicial en otra transformación como es,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x \to 0} f_1(x)$$

Un segundo tratamiento reemplazando la regla de correspondencia de $f_1(x)$

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} (x-1)$$

Para transformar la representación algebraica $\lim_{x \to 0} (x-1)$, movilizamos los siguientes tratamientos que se deben a las propiedades elementales de límite de una función, como son límite de una diferencia de funciones y límite de la función identidad, que es la evaluación de la función identidad en el punto en estudio, y límite de una constante, que es la misma constante, (ver Capítulo III, Sección 3,1,Teorema 1,Teorema 3.)

$\lim_{x \to 0} (x-1) = \lim_{x \to 0} x - \lim_{x \to 0} 1 = 0 - 1 = -1$

Luego, obtenemos la representación final. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$

TLF en registro algebraico de una función racional (TLFRAR)

Trabajaremos el caso: $\lim_{x \to x_0} \frac{D(x)}{d(x)}$, forma indeterminada; $D(x_0) = d(x_0) = 0.$

Donde $D(x) = x^2 + bx + c$, $\mathrm{d}(x) = x - x_0$; $D(x), d(x) \in K[X]$, con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{Q}$

Como grado$(D(x)) >$ grado$(d(x))$ por el Teorema del algoritmo de la división (TAD) (ver Capítulo III, Sección 3,1.) para polinomios, y $D(x), d(x) \in K[X]$, con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{Q}$ existe un polinomio cociente $q(x) = \frac{D(x)}{d(x)} \in \mathbb{Q}[X]$ (o $\mathbb{R}[X]$) y un polinomio resto $r(x)$ tal que:

$D(x) = d(x)q(x) + r(x)$, donde grado $(q(x)) = 1$, y el grado $(r(x)) = 0$.

Como al evaluar el límite en el polinomio cociente se tiene la forma indeterminada cero sobre cero, esto se traduce en que no podemos aplicar el teorema límite de un cociente, (ver Capítulo III, Sección 3.1, Teorema 3,$iv.$) ya que el límite del denominador es cero.

Por hipótesis $\mathrm{D}(x_0) = x_0{}^2 + bx_0 + c = 0$, la representación expresa que x_0 es una raíz o cero del polinomio $D(x)$ y por el teorema del factor (TF) (ver Capítulo III, Sección 3.1.) (recurso del Álgebra), tenemos la siguiente representación algebraica:

$x^2 + bx + c = D(x_0) = (x - x_0)g(x)$, donde $g(x) = x + e$ es un polinomio mónico de grado 1 para algún $e \in \mathbb{R}$

Reemplazando en la representación inicial, debido al teorema del factor, conseguimos un tratamiento

$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2+bx+c}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+e)}{(x-x_0)}$ Tratamiento

De otro lado, por la cancelación: $\frac{(x-x0)(x+e)}{(x-x_0)} = x + e, x \neq x_0$ y considerando el Teorema 4, la representación para el límite se transforma en una nueva representación

$\lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)g(x)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} (x+e)$; Podemos hacer un nuevo tratamiento,

$\lim_{x \to x_0} (x+e) = x_0 + e$ Tratamiento, debido al límite de un polinomio, (ver Capítulo III, Sección 3,2, (EVP).)

Así de las igualdades, la representación inicial es igual a la representación final, obtenemos la respuesta. $\lim_{x \to x_0} \frac{x^2+bx+c}{x-x_0} = g(x_0)$.

Ejemplo 1. Determine el siguiente límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

Vemos, que al evaluar el límite, no podemos aplicar la regla de conformidad, correspondiente al teorema del límite de un cociente, (ver Capítulo III, Sección 3.1,_Teorema 3, iv).) ya que el límite del denominador es cero.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{\lim_{\boldsymbol{x \to 2}}(x^2 - 5x + 6)}{\lim_{\boldsymbol{x \to 2}} (x-2)}$$

Como: $\lim_{\boldsymbol{x \to 2}}(x^2 - 5x + 6) = 0$ y $\lim_{\boldsymbol{x \to 2}} (x-2) = 0$, buscamos otro tratamiento dentro del Registro Algebraico. Para ello, utilizamos el recurso en el Álgebra, de la factorización, debido a que la función presentada es racional y a la cancelación, el cual nos da otra representación algebraica para la función racional. Tomado del trabajo realizado por Larson y Edwards (2012).

$\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{(\mathbf{x-2})(\mathbf{x-3})}{\mathbf{x-2}} = x - 3$, para $x \neq 3$,

Por la regla de conformidad, (ver Capítulo III, Sección 3.1, Teorema 4.) reemplazando en la representación inicial, actualizamos la mirada del objeto

$\lim_{\boldsymbol{x \to 2}} \frac{(\mathbf{x-2})(\mathbf{x-3})}{(\mathbf{x-2})} = \lim_{\boldsymbol{x \to 2}} (x-3)$. Tratamiento interno.

Utilizando la regla de conformidad, límite de una función polinomial por evaluación, (EVP) (ver Capítulo III, Sección 3.1.)

$\lim\limits_{x \to 2} (x-3) = 2-3 = -1$ Tratamiento Interno función polinomial.

Considerando la representación inicial igual a la representación final, obtenemos,

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = -1.$ Tratamiento interno.

Hemos considerado tratamientos para el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, donde $f(x)$ es una función racional particular.

El siguiente límite es de una función definida a trozos en la que su regla de correspondencia, que está conformada por dos funciones, una de ellas es una función racional y una función constante.

Ejemplo 2. Halle el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5 & , x = 1 \end{cases}$. Justifique su respuesta.

El ejercicio es presentado en la representación algebraica, ya que es una función definida a trozos con dos reglas de correspondencia: una función racional, división de dos polinomios $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ para $x \neq 1$ y una función constante de valor $f(x) = 5$ para $x = 1$, expresado con los símbolos del registro algebraico. Vemos que, al evaluar el límite, no podemos aplicar el teorema límite de un cociente, (ver Capítulo III, Sección 3.1, Teorema 3, iv).) ya que el límite del denominador es cero.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x \to 1}(x-1)}$, que nos da un tipo de indeterminación de 0 sobre 0.

Buscamos otro tratamiento dentro del Registro Algebraico, en el que utilizamos el recurso en el Álgebra, de la factorización, debido a que la función presentada es racional, y a la cancelación, el cual nos da otra representación algebraica para la función racional

$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, para $x \neq 1$,

Por la regla de conformidad expresada en (ver Capítulo III, Sección 3.1, Teorema 4.)

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1)$, Tratamiento interno.

Luego, considerando la regla de conformidad: el límite de un polinomio por evaluación (EVP), (ver Capítulo III, Sección 3,1.)

$\lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$ Tratamiento Interno

Considerando la representación inicial igual a la representación final, obtenemos

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$ Tratamiento interno.

Tratamiento algebraico respuesta.

En esta Sección, hemos considerado varios casos para los tratamientos de el $\lim_{x \to c} f(x)$

Casos:

1. Cuando, $f(x)$ es una función polinomial de grado $1, 2, 3, n$.
2. Cuando, $f(x)$ es una función definida a trozos, donde en su regla de correspondencia está formada por funciones polinomiales.
3. Si $f(x) = \frac{D(x)}{d(x)}$ función racional, $\frac{D(x0)}{d(x_0)}$, con un el tipo de indeterminación con $D(x_0) = 0 = d(x_0)$.

Para Duval (2004) es necesario al menos dos registros para considerar la actividad cognitiva de la conversión. Es por eso que, al terminar de desarrollar la siguiente sección correspondiente al registro grafico para límites de una función, recién analizamos esta actividad cognitiva.

3.3 Conversiones.

Dada una representación algebraica del límite de una función, podríamos transformarla en otra representación semiótica, pero en otro registro, como por ejemplo en el registro gráfico. En esta tesis, trabajaremos con funciones de tipos lineales y cuadráticos.

Al final de la Sección 3.2, veremos una conversión del registro gráfico al registro algebraico y viceversa.

En esta próxima sección, presentamos el concepto del objeto matemático límite de una función desde el registro gráfico.

3.4 Registro de representación gráfica para el límite de una función

En esta sección, analizamos las características que justifican que el sistema de representación gráfica del límite de funciones es un Registro de Representación Semiótico. Comenzamos recordando qué es una representación semiótica gráfica.

Representación semiótica gráfica de un objeto matemático (RSG).

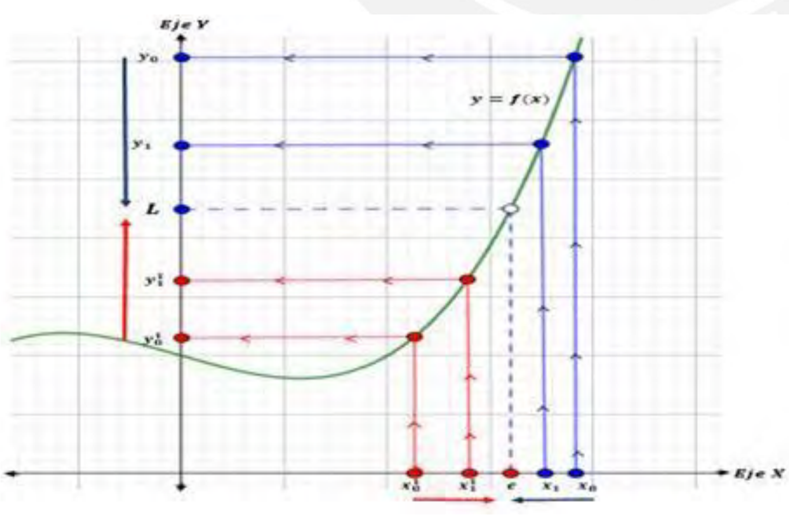
Es una descripción gráfica del objeto matemático en el sistema de coordenadas cartesianas, en la que su estructura está constituida por signos gráficos que comunican visualmente el concepto del objeto.

Representación semiótica gráfica para el límite de funciones.

Una representación semiótica gráfica (RSG), en el plano cartesiano para el límite de una función f cuando x tiende a c, es el punto L en el $Eje\ Y,$ construida en base a la definición del límite lateral, representada gráficamente en la Figura 45.

Figura 45:

Representación semiótica gráfica del límite de una función



Fuente: Propia del autor.

Ahora describimos la representación de la Figura 45. En el caso del límite lateral por la derecha, elegimos un punto x_0 en el $Eje\ X$ de las abscisas que se encuentre a cierta distancia del punto c, hacia el cual "va a tender " o acercarse. A continuación, levantamos una perpendicular sobre el $Eje\ X$, que resulta ser una paralela al $Eje\ Y$, hasta cortar la gráfica dada de $y = f(x)$ en el punto (x_0 , y_0). Luego, para hallar el punto de la ordenada real correspondiente en el $Eje\ Y$, proyectamos el punto hallado en la gráfica (x_0 , y_0) sobre él $Eje\ Y$. Es decir, se forma una línea recta perpendicular al $Eje\ Y$, determinando un punto de intersección sobre el $Eje\ Y$, que es el punto y_0 .

A continuación, a fin de realizar tratamientos con nuestras operaciones internas (debido a la definición del límite lateral por la derecha), nos desplazamos a partir de $\boldsymbol{x_0}$ en el $Eje\ X$ a través de un pequeño "paso" encontrando un punto x_1, para el cual, de forma análoga, realizamos el mismo procedimiento con la finalidad de obtener su correspondiente y_1, obteniendo un segundo registro (x_1 , y_1).

De esta manera, seguimos realizando este proceso de operaciones internas un número finito de veces, de manera que, según el "paso" elegido y que puede ser fijo o variable en el $Eje\ X$, nos permita estar cerca "tanto como se quiera" del punto hacia dónde va a "tender "la variable independiente "x". Esto generará también el correspondiente número de variables dependientes de dichas abscisas. Obteniendo entonces: (x_0 , y_0), (x_1 , y_1),... (x_n , y_n). Registros gráficos.

De esta forma, sobre el $Eje\ X$, hemos generado un número finito de abscisas x_i, bajo un criterio que nos permite que nos acerquemos hacia el punto donde tiende (por la derecha) la variable x, lo cual ha determinado el comportamiento de la tendencia de las y_i en el $Eje\ Y$ a un determinado valor L, el cual es la representación gráfica del límite de la función f por la derecha, que nos permite concluir que el correspondiente límite lateral por la derecha es L.

Un procedimiento análogo se realiza para el límite de la función f por la izquierda en el punto c.

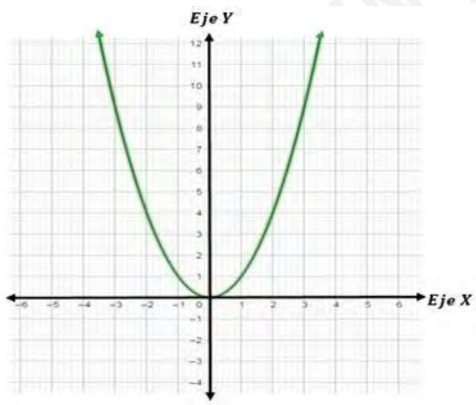
A continuación, presentamos un ejemplo de una representación semiótica gráfica para el límite de una función.

Ejemplo 1. En el siguiente gráfico, ¿se cumple que $\lim_{x \to 2^+} x^2 = \lim_{x \to 2^-} x^2$?

A partir de la Figura 46, construimos la representación gráfica del límite.

Figura 46:

Representación semiótica gráfica de la parábola



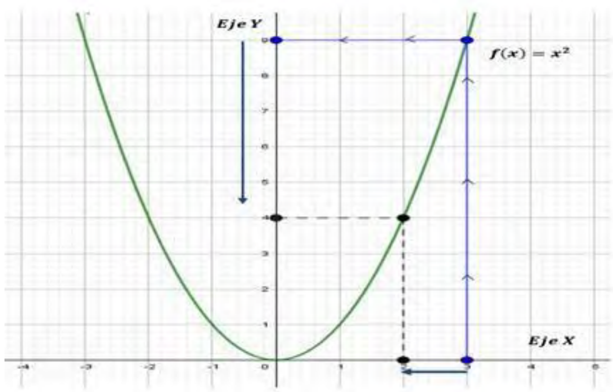
Fuente: Propia del autor.

1. En el caso del límite lateral por la derecha, elegimos un punto en el $Eje\ X$ de las abscisas que se encuentre a cierta distancia del punto hacia el cual "va a tender"; digamos $x = 3$. A continuación, levantamos una perpendicular sobre el $Eje\ X$, que resulta ser una paralela al $Eje\ Y$, hasta cortar a la gráfica dada de $f(x) = x^2$ y luego, para hallar el punto de la ordenada real correspondiente en el $Eje\ Y$, proyectamos el punto hallado en la gráfica sobre el $Eje\ Y$. Es decir, se forma una línea recta perpendicular al $Eje\ Y$, determinando un punto de intersección sobre el $Eje\ Y$. De esta forma, hemos determinado una primera representación gráfica $(3\,;9)$.

La Figura 47 es la representación gráfica del primer tratamiento a partir de la Figura 46.

Figura 47:

Primer tratamiento gráfico del límite de la parábola



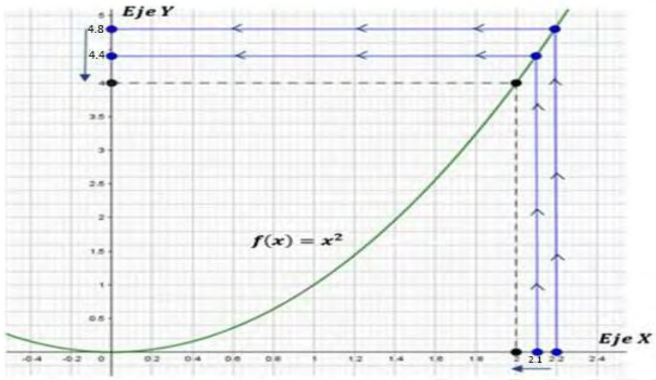
Fuente: Propia del autor.

2. A continuación, a fin de realizar nuestras operaciones internas, nos desplazamos a partir de 3 en el $Eje\ X$ a través de un pequeño "paso" 0,8 un punto $2{,}2$, para el cual de forma análoga realizamos el mismo procedimiento, a fin de obtener su correspondiente y_1, obteniendo un segundo registro ($2{,}2\ ;\ 4{,}84$).

   En la Figura 48, observamos dos tratamientos debidos al límite lateral por la derecha.

Figura 48:

Representación semiótica gráfica del límite lateral de la parábola por la derecha.



Fuente: Propia del autor.

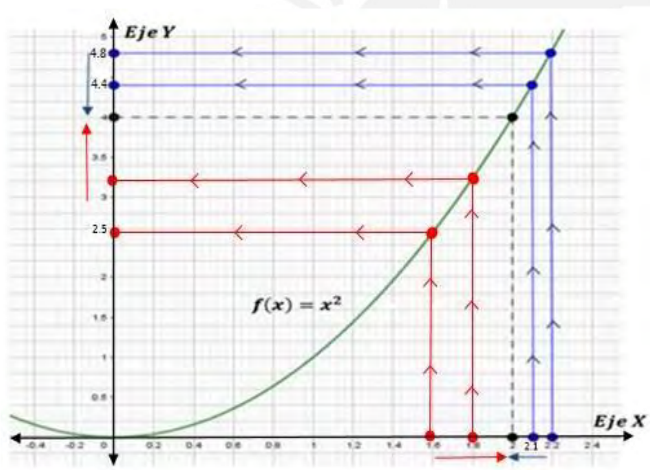
3. De esta manera, seguimos realizando este proceso de tratamientos internos un numero finito de veces, de manera que, según el "paso" elegido y qué puede ser fijo o variable en él $Eje\ X$, nos permita estar cerca "tanto como se quiera" del punto hacia dónde va a "tender" la variable independiente "x". Esto generará también el correspondiente número de variables dependientes de dichas abscisas. Con $x = 2{,}1$ tenemos $y = 4{,}41$, vemos que las y están tendiendo al valor 4 en el $Eje\ Y$, entonces concluimos que la representación gráfica del límite de f(x) = x^2, cuando x tiende a 2 por la derecha es el punto 4 en el $Eje\ Y$.
4. En la Figura 49, las representaciones semióticas gráficas color celestes de derecha a izquierda se han ido transformando (tratamiento) debido a la regla de conformidad que hemos aplicado de acuerdo con la definición del límite lateral por la derecha, (ver Capítulo III, Sección 3.1, Definición 1.) y en el que se concluye que la representación gráfica del límite lateral por la derecha de la función $f(x) = x^2$ es el valor 4 localizado en el $EjeY$.
5. Las representaciones semióticas de la Figura 36 de izquierda a derecha, de color rojo, se han ido transformando (tratamientos) debido a la regla de conformidad que hemos

aplicado, la definición del límite lateral por la izquierda, (ver Capítulo III, Sección 3.1, Definición 2.) y se concluye que la representación gráfica del límite lateral por la izquierda de la función $f(x) = x^2$ es el valor 4 localizado en el $Eje\ Y$.

6. Como la representación gráfica del límite de la función por la derecha y la representación gráfica del límite de la función por la izquierda coinciden, decimos que, debido a la regla de conformidad: Teorema del límite bilateral, el límite existe y su representación en el registro grafico es el valor 4 en el $Eje\ \ Y$; (ver Capítulo III, Sección 3,1.) El límite existe y su representación gráfica es el punto 4 en el $Eje\ Y$.

Figura 49:

Representación semiótica gráfica del límite bilateral de la parábola.



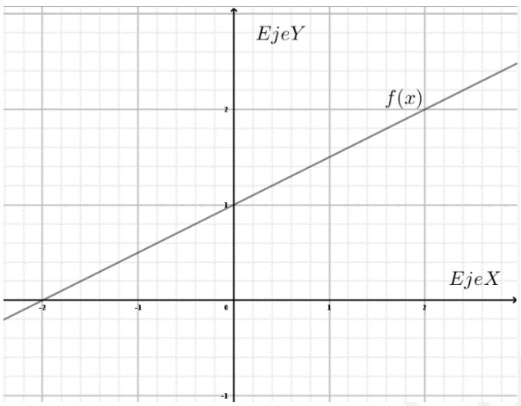
Fuente: Propia del autor.

Ahora, presentamos un ejemplo donde no se tiene una representación semiótica gráfica para el límite de una función (ver Figura 50).

Ejemplo. A partir de la representación gráfica de la siguiente función,

Figura 50:

Representación semiótica gráfica de una función lineal f.



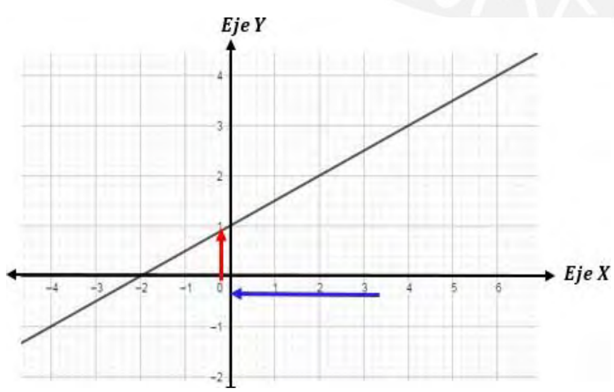
Fuente: Propia del autor.

Obtener: $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Justifique.

La siguiente representación gráfica (ver Figura 51) no es una representación (RNSG) para el límite propuesto.

Figura 51:

Una representación que no es Representación semiótica gráfica algebraica del límite.



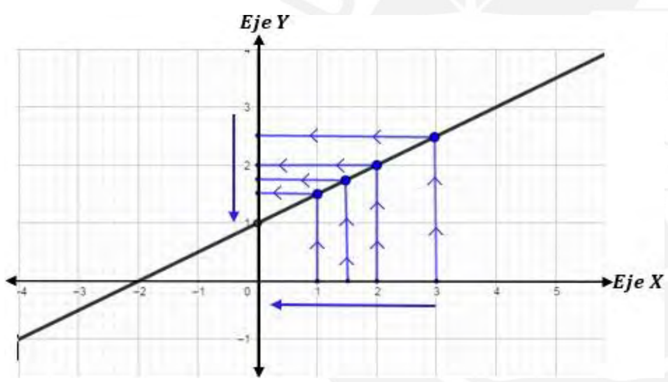
Fuente: Propia del autor.

Del gráfico, visualizamos que si la variable x se aproxima al valor 0 por la derecha, esto está representado por la flecha celeste, entonces los valores de y tienden a 1 (color rojo) de manera ascendente, desde el valor 0 hasta el valor 1 en el $Eje\ Y$. Podemos observar que no están bien efectuados los tratamientos.

La representación semiótica gráfica (RSG) del límite propuesto está representada en la Figura 52.

Figura 52:

Representación semiótica gráfica para el límite de una función lineal.



Fuente: Propia del autor.

De acuerdo con la construcción de la representación gráfica del límite de una función, si elegimos valores que tienden a 0 por la derecha, entonces los valores de y en el $Eje\ Y$ tienden al valor 1 de manera descendente. Los tratamientos en el registro gráfico los visualizamos en la Figura 52.

Sistema de representación semiótico gráfico para el límite de funciones. (SRGL)

El sistema de representación semiótico gráfico, para el límite de una función (SRGL), está compuesto por las representaciones gráficas para el límite de una función (definidas líneas arriba) con las operaciones o reglas de conformidad debidas a la definición del límite, operaciones con las gráficas de funciones (suma, resta, multiplicación), entre otras.

Una operación interna, debido a la definición del límite de funciones (utilizando la definición de límite lateral), funciona así: dado una representación gráfica del límite de una función (representación gráfica inicial), considerando la definición del límite lateral de funciones (operación), transforma la representación gráfica (inicial) en otra representación (final) para el límite de una función. Así se van generando nuevas representaciones.

Un conjunto como éste, con las reglas de conformidad asociadas a él, se le llama sistema de representación semiótica gráfica para el límite de una función.

Tratamientos Internos gráficos en el límite de una función (TGAO)

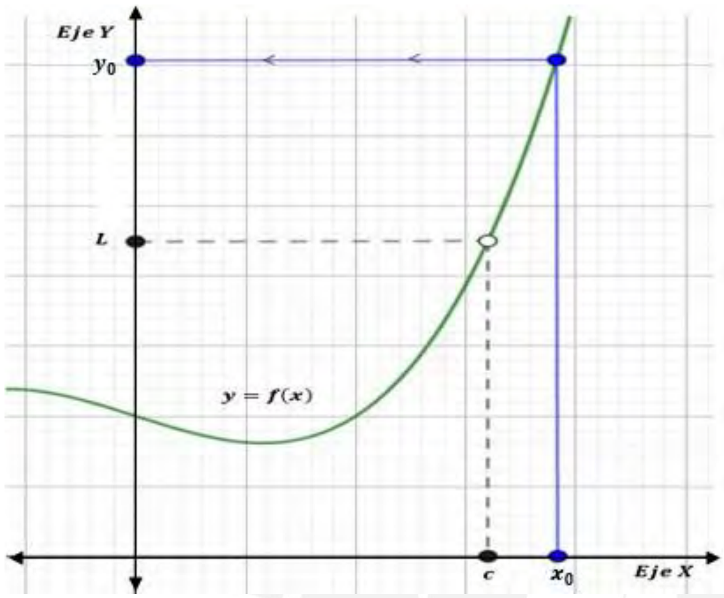
Para Duval (2004), los tratamientos internos consisten en transformar una representación gráfica (inicial) en otra representación gráfica en el mismo sistema.

1. Una primera representación semiótica gráfica inicial en el límite de una función.

   En el caso del límite lateral por la derecha, elegimos un punto x_0 en el $Eje\ X$ de las abscisas que se encuentre a cierta distancia del punto hacia el cual "va a tender". A continuación, levantamos una perpendicular sobre el $Eje\ X$, que resulta ser una paralela al $Eje\ Y$ hasta cortar a la gráfica dada de $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0). Luego, para hallar el punto de la ordenada real correspondiente en el $Eje\ Y$, proyectamos el punto hallado en la gráfica (x_0, y_0) sobre el $Eje\ Y$. Es decir, se forma una línea recta perpendicular al $Eje\ Y$, determinando un punto de intersección sobre el $Eje\ Y$, que es el punto y_0. En la Figura 53, observamos en el registro gráfico lo descrito.

Figura 53:

Una representación inicial de tratamiento gráfico.



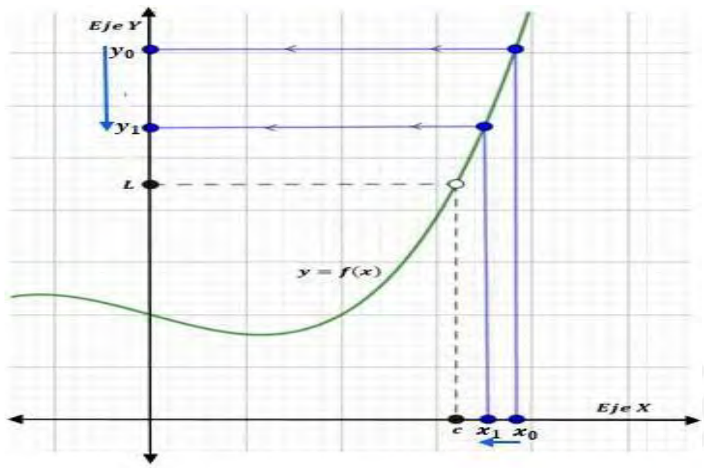
Fuente: Propia del autor.

2. Efectuamos un tratamiento interno en la primera representación, aplicando la definición del límite lateral por la derecha. Esto hace que la representacion inicial se transforme en una segunda representacion semiotica para el límite de una funcion, tal como se ve en la Figura 53.

A partir de x_0 , nos desplazamos en el $Eje\ \ X$ a través de un pequeño "paso", encontrando un punto x_1 para el cual, de forma análoga, realizamos el mismo procedimiento a fin de obtener su correspondiente y_1. En la Figura 54, observamos dos tratamientos en el registro gráfico.

Figura 54:

Segundo tratamiento interno en el Registro Gráfico



Fuente: Propia del autor.

3. De esta manera, seguimos este proceso de operaciones internas un numero finito de veces, de manera que, según el "paso" elegido y que puede ser fijo o variable en el $Eje\ X$, nos permita estar cerca "tanto como se quiera" del punto hacia dónde va a "tender" la variable independiente "x". Esto generará también el correspondiente número de variables dependientes de dichas abscisas. $y_0,\ y_1, \dots\ y_n$.

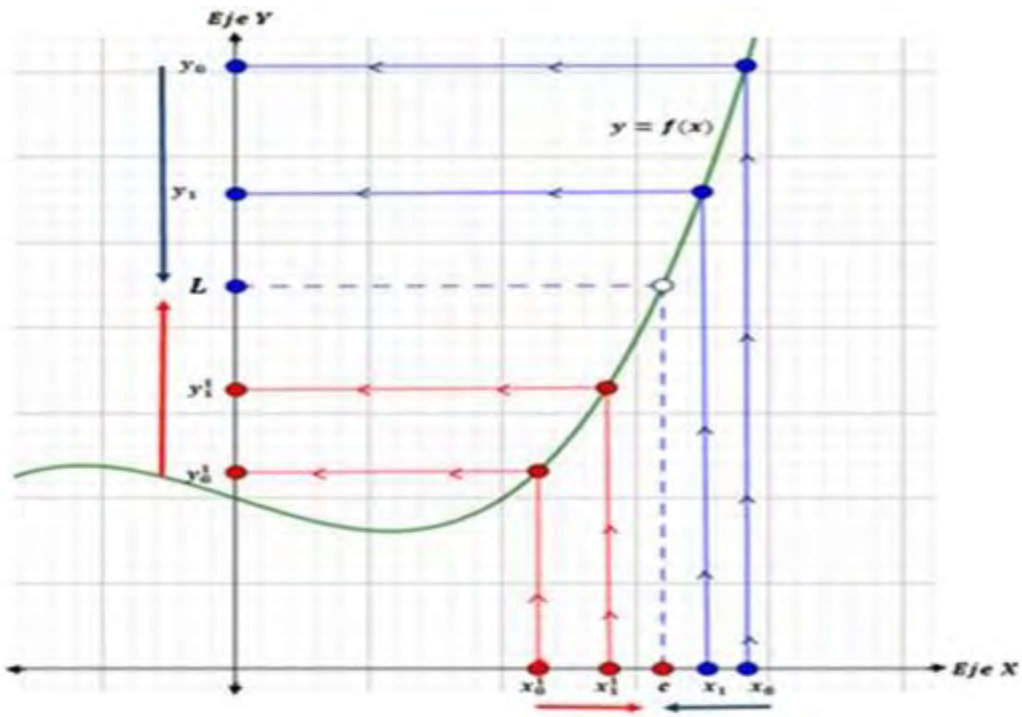
De esta forma, sobre el $Eje\ X$, hemos generado un número finito de abscisas x_i, bajo un criterio que nos permite acercarnos hacia el punto donde tiende (por la derecha) la variable x; el cual ha determinado el comportamiento de la tendencia de las y_i en el $Eje\ Y$ a un determinado valor L, el cual es la representación gráfica del límite de la función f por la derecha, lo que nos permite concluir que el correspondiente límite lateral por la derecha es L.

Un razonamiento análogo se hace para los tratamientos del límite lateral por la izquierda.

En la Figura 55, mostramos, con las representaciones gráficas color celeste, los tratamientos internos a la derecha del punto c y, con las representaciones gráficas color rojo, los tratamientos a izquierda del punto c de la función $y = f(x)$

Figura 55:

Límite bilateral en Representación semiótica gráfica



Fuente: Propia del autor.

En el gráfico, la tendencia de las abscisas x_i, en el $Eje\ \ X$, determina la tendencia de las correspondientes ordenadas y_i en el $Eje\ Y$.

De la operación interna (definición de límite lateral por la derecha, análogamente por la izquierda) y las representaciones gráficas del límite de la función f (generadas) cuando x tiende a c, concluimos que una representación gráfica para el límite de la función f cuando x tiende a c es el punto L en el $Eje\ Y$.

TGAO significa los tratamientos en el registro gráfico que se sigue para construir la representación gráfica del límite de una función f.

El tratamiento que acabamos de describir es válido para cualquier función f que satisfaga las condiciones de existencia del límite lateral por la derecha (izquierda).

Veremos en el siguiente ejemplo los tratamientos cuando la representación gráfica es una función lineal.

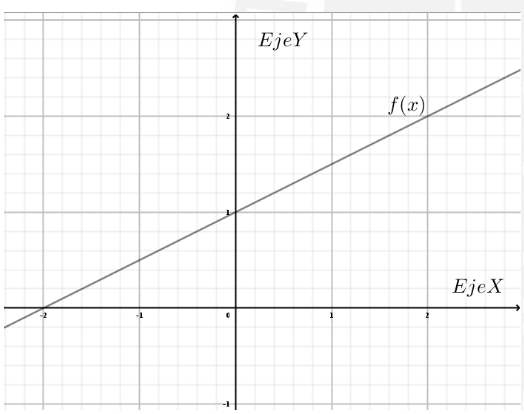
3.2 Tratamientos Internos en el Registro Gráfico de una función lineal continúa

Ejemplo.

A partir de la representación gráfica, de la función siguiente, Figura 56, que corresponde a la función f que aparece a continuación,

Figura 56:

Tratamientos de una función lineal continúa.



Fuente: Propia del autor.

Obtener:

i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Justifique

ii) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Justifique

iii) $\lim_{+x \to 0} f(x)$. Justifique

Tratamientos en el Registro Gráfico.

La pregunta presenta una representación gráfica de la función, donde se harán los tratamientos gráficos y se pide dar como respuesta en el registro algebraico. Para resolver la pregunta, se requiere visualizar la definición del límite lateral por la derecha en el registro gráfico.

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$ en $\mathbb{R}^2$, en el sistema de coordenadas cartesianas, utilizamos la definición del límite lateral por la derecha a una función. Para ello, analizaremos el comportamiento de los valores de la función $y = f(x)$ cuando la variable x tiende al valor 0 por la derecha.

La expresión x tiende al valor 0 por la derecha en el Eje X significa que: de acuerdo con algún criterio, debemos localizar un conjunto de valores de x en el $Eje\ X$ que se aproximan por la derecha al valor de 0 (mayores que 0).

- En el $Eje\ X$, elegimos los puntos: $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0{,}5,\ x_4 = 0{,}3,\ x_5 = 0{,}1$ que se aproximan al valor 0 por la derecha, el cual representamos con la flecha azul en el $Eje\ X$.
- Visualizamos en la gráfica sus correspondientes imágenes en el $Eje\ Y$. Para ello, por ejemplo, en $x_1 = 1{,}5$ levantamos una perpendicular desde $x_1 = 1{,}5$ del $Eje\ X$ hasta llegar a la gráfica de la función, en el que ubicamos su par ordenado correspondiente en la gráfica $(1{,}5;\ f(1{,}5) = y_1)$. Acá proyectamos este par ordenado al $Eje\ Y$, consiguiendo el valor y_1. Hacemos este proceso para cada uno de los valores de x, consiguiendo los correspondientes valores en el $Eje\ Y$.

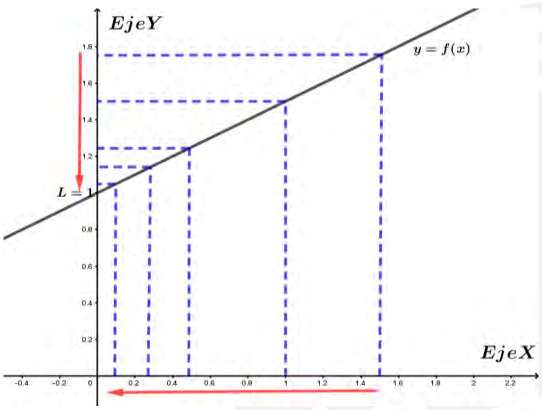
$$f(1{,}5) = y_1;\ f(1) = y_2, f(0{,}5) = y_3, f(0{,}3) = y_4\ , f(0{,}1) = y_5$$

- Luego, observamos en la gráfica de la función f que, a medida que nos aproximamos al valor 0 en el $EjeX$, los valores correspondientes de sus imágenes $y_1, y_2\ , y_3\ , y_4\ , y_5$ en el $Eje\ Y$ se aproximan al valor 1. Esto lo representamos con la flecha roja en el $Eje\ Y$. Ese valor 1, en el $Eje\ Y$, es la representación en el registro gráfico del límite de la función f cuando x tiende a cero por la derecha (ver Figura 57).

- Esto nos permite decir que, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, en el registro algebraico.
- En resumen: De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004), visualizamos que se movilizan representaciones gráficas y tratamientos internos para conseguir la respuesta (Ver Figura 57)

Figura 57:

Tratamientos límite lateral derecho de una función lineal.



Fuente: Propia del autor.

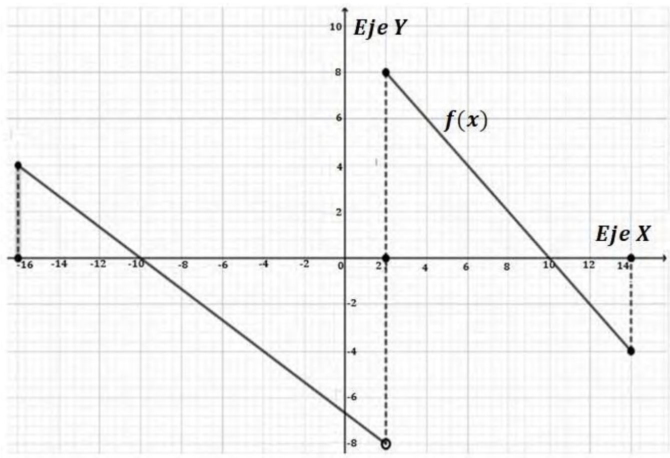
Tratamientos Internos en el Registro Gráfico de una función definida a trozos.

Ejemplo 1.

A partir de la gráfica siguiente que corresponde a la función (ver Figura 58)

Figura 58:

Tratamientos internos función discontinua.



Fuente: *Fuente*: Adaptado de Londoño, Narro y Yatzil (2014, p. 95)

Obtener:

i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ Justifique su respuesta.

ii) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ Justifique su respuesta.

iii) A partir de ello, concluya si existe el $\lim_{x \to 2} f(x)$. Justifique su respuesta.

Solución

Tratamientos en el Registro Gráfico.

La pregunta presenta una representación gráfica de la función, donde se harán los tratamientos gráficos y se pide dar como respuesta en el registro algebraico. Para resolver la pregunta, se requiere visualizar la definición del límite lateral por la derecha en el Registro Gráfico.

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, en $\mathbb{R}^2$, en el sistema de coordenadas cartesianas utilizamos la definición del límite lateral por la derecha a una función. Para ello, analizaremos el comportamiento de los valores de la función $y = f(x)$ cuando la variable x tiende al valor 2 por la derecha.

La expresión x tiende al valor 2 por la derecha en el $Eje\ X$ significa que, de acuerdo con algún criterio, debemos localizar un conjunto de valores de x en el $Eje\ X$ que se aproximan por la derecha al valor de 2 (mayores que 2).

- En el $Eje\ X$, elegimos los puntos: $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 2.1;\ x_3 = 2.01$ que se aproximan al valor 2 por la derecha.
- Ahora visualizamos en la gráfica sus correspondientes imágenes en el $Eje\ Y$. Para ello, por ejemplo, en $x_1 = 2{,}5$ levantamos una perpendicular desde $x_1 = 2{,}5$ del $Eje\ X$ hasta llegar a la gráfica de la función en el que ubicamos su par ordenado correspondiente en la gráfica $(2{,}5;\ f(2{,}5) = y_1)$, proyectamos este par ordenado al $Eje\ Y$, consiguiendo el valor y_1. Hacemos este proceso para cada uno de los valores de $x,$ consiguiendo los correspondientes valores en el $Eje\ Y$.

$$f(2{,}5) = y_1;\ f(2{,}1) = y_2, f(2{,}01) = y_3$$

- Luego, observamos en la Gráfica de la función f que, a medida que nos aproximamos al valor 2 en el $EjeX$ a la derecha, los valores correspondientes de sus imágenes $y_1, y_2\ , y_3$ en el $Eje\ Y$ se aproximan al valor 8, El punto 8, en el $Eje\ Y$, es la representación en el registro gráfico del límite de la función f cuando x tiende a 2 por la derecha.
- Esto nos permite decir que $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 8$ en el registro algebraico.
- En resumen: de acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004), visualizamos que se movilizan representaciones gráficas y tratamientos internos para conseguir la respuesta.

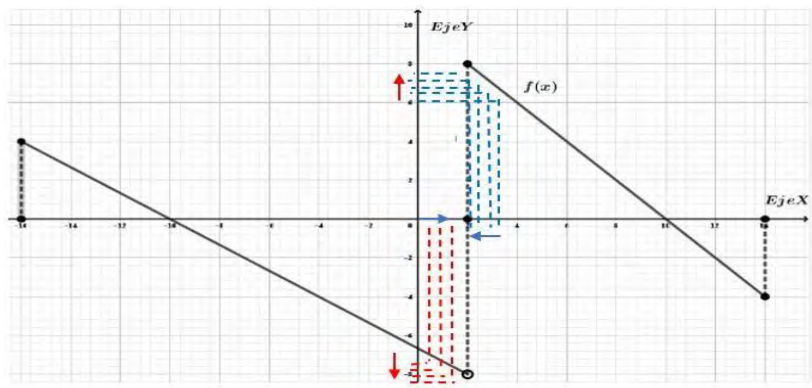
En el ítem ii), de acuerdo con los tratamientos internos por la izquierda por (ver Capítulo III, Sección 3,4, TGAO.), seguimos de manera análoga que:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -8.$

En iii), de acuerdo con el teorema de existencia del límite, mediante los límites laterales en (ver Capítulo III, Sección 3,2, TLB.), como los límites laterales son diferentes, lo podemos observar en el ítem i) y ii), con el que concluimos que el límite no existe (ver Figura 59)

Figura 59:

Tratamientos Límite bilateral en una función a trozos en el Registro gráfico

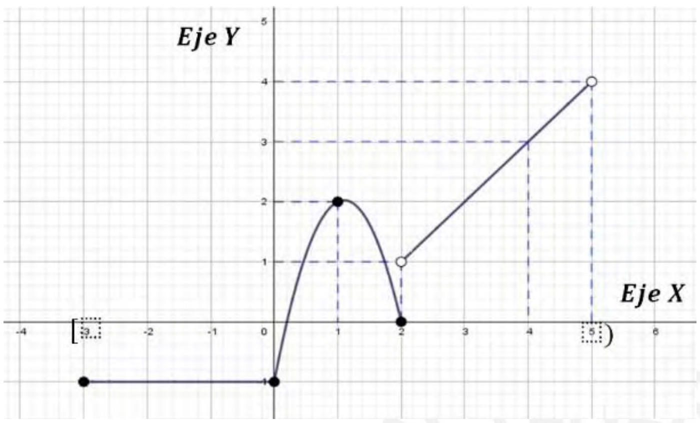


Fuente: Propia del autor.

Ejemplo 2. A partir de la representación gráfica de la función (ver Figura 60)

Figura 60:

Función seccionalmente continúa definida en el Registro gráfico.



Fuente: Propia del autor.

Obtener:

i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Justifique.

ii) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. Justifique.

iii) $\lim_{x \to 5^-} f(x)$. Justifique

Solución:

De los tratamientos efectuados en la Figura 61, podemos decir

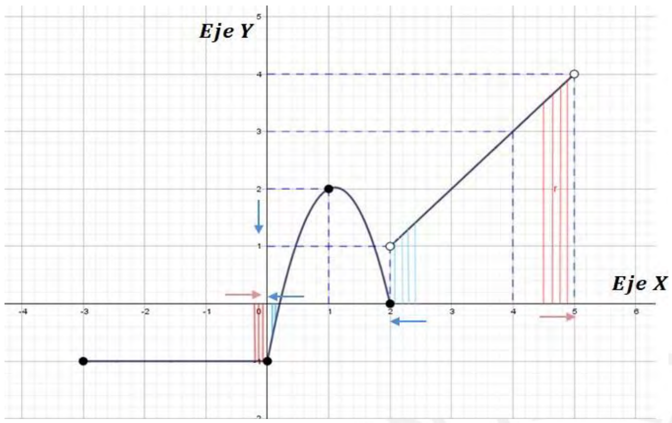
i) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$

ii) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

iii) $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 4$

Figura 61:

Representación semiótica gráfica para el límite de una función definida a trozos.

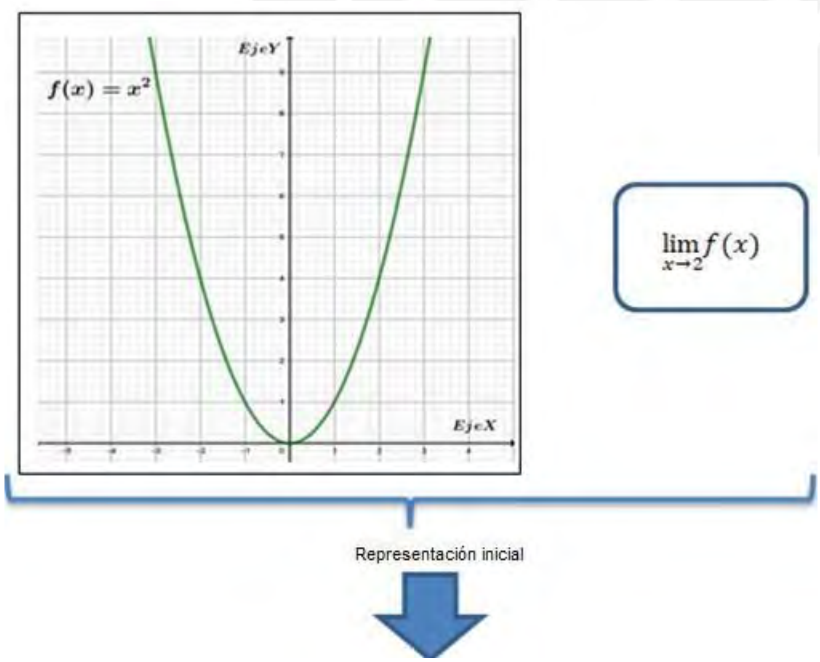


Fuente: Propia del autor.

El esquema de los tratamientos internos en el caso del límite de una función tipo parábola (ver Figura 62)

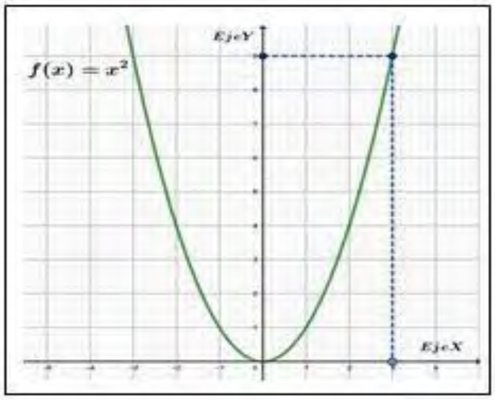
Figura 62:

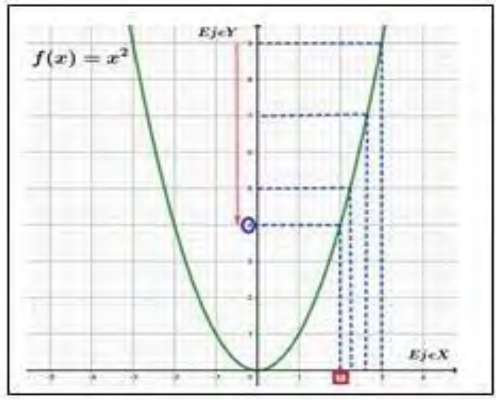
Representación Gráfica

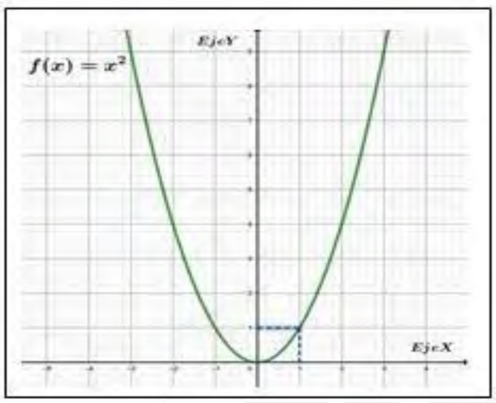


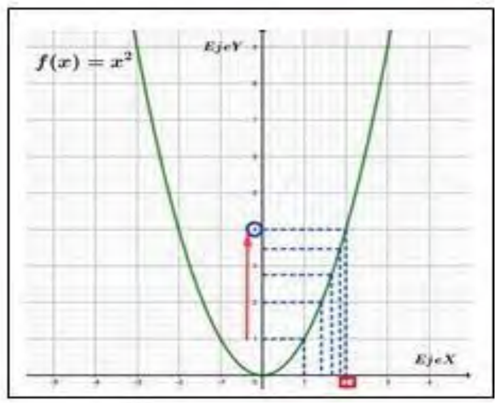
Fuente: Propia del autor.

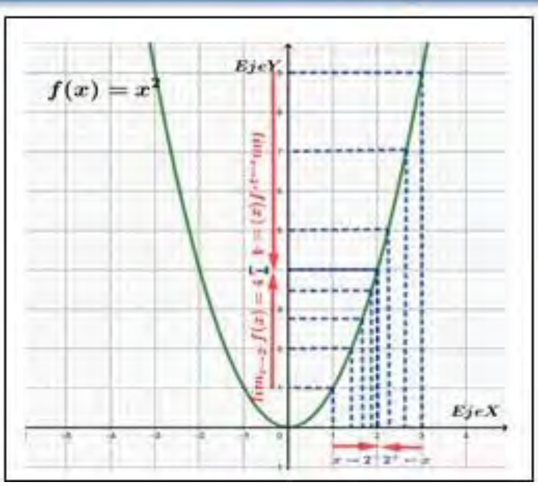
Tratamientos internos:











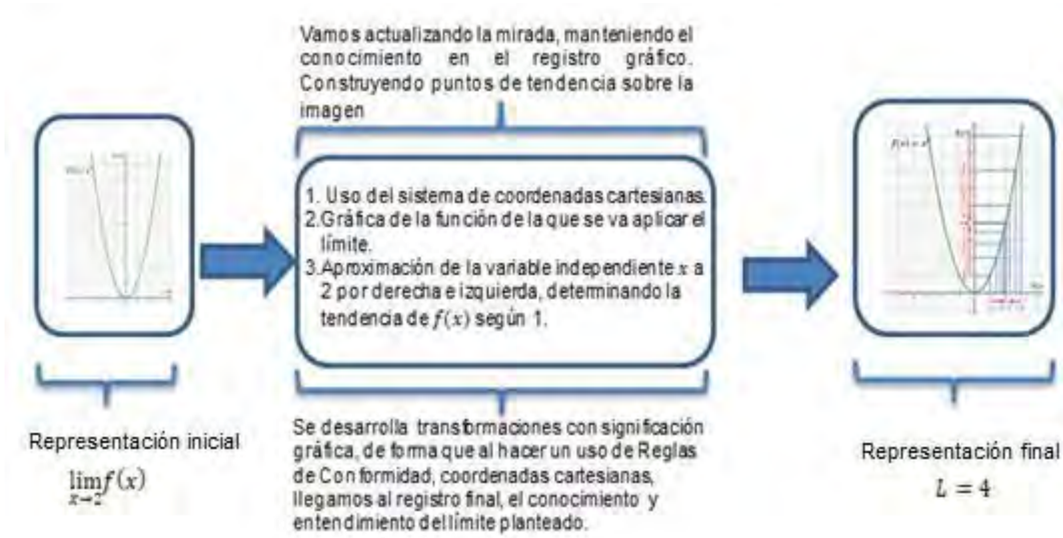
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Traducción del registro gráfico en el registro algebraico

Esquema resumén del proceso de los tratamientos internos desde el Registro gráfico sobre el objeto límite desde una representacion inicial haca una representacion final (ver Figura 63)

Figura 63:

Tratamientos en el Registro gráfico



Fuente: Propia del autor.

A continuación, presentamos las posibles distintas conversiones entre los registros algebraico y gráfico. Luego de la revisión de los textos y evaluaciones, hemos visto la ausencia de las conversiones, las cuales mostraremos entre funciones lineales y cuadráticas.

Conversiones en el límite de una función.

La conversión es la transformación de la representación del límite de una función dado en un registro inicial en una representación de este límite, pero en otro registro final en la que se conserva la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial y que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento, mientras que en el tratamiento movilizamos las reglas de conformidad del registro en el contexto del objeto matemático en estudio. En la conversión, movilizamos la coordinación, la articulación y la congruencia de las unidades significantes en cada registro.

- Trabajamos con rectas y parábolas.
- Dada una representación gráfica de la recta, podemos encontrar su representación algebraica con dos puntos o con un punto y su pendiente en el registro gráfico.
- Dado la representación gráfica de la parábola en el plano cartesiano, podemos hallar, con al menos tres puntos de la gráfica, su representación algebraica. También podemos utilizar metodologías para reconstruir parábolas y rectas a partir del registro gráfico.

Duval (2004) expresa que sería ingenuo pensar que, si el alumno realiza uno o dos tareas de conversión, eso es suficiente para que haya adquirido el concepto. En el caso del objeto matemático límite de una función, se presentan diversos casos de ejercicios, como límites de funciones a trozos; límites de funciones irracionales indeterminadas, el cual se utiliza para su resolución el conjugado; o límites de la forma indeterminada “0 sobre 0”, donde utilizamos la factorización; o límite de la función máximo entero, entre otros. Todas demandan el conocimiento de los diferentes tratamientos y conversiones de tal forma que tenemos que enfocarnos con qué tipo de ejercicios se trabaja y, a partir de ello, realizar la conversión para decir que hay una comprensión especifica en una cierta clase de ejercicios.

Conversión de la función cuadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, entre los registros algebraico y gráfico.

Comenzamos analizando la conversión entre los registros algebraico y gráfico para una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c coeficientes reales, a diferente de cero.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una ecuación cuadrática en la variable x

Describimos qué representan sus coeficientes o unidades significantes de la ecuación cuadrática en el registro algebraico y las variables de visualización en el Registro gráfico.

- c es la ordenada en el origen del punto de intersección de la cuadrática con el $Eje\ Y$.
- El vértice de la cuadrática es $V = (x_0, y_0)$, donde $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = f(x_0)$.
- Si $a > 0$ la cuadrática se abre hacia arriba y si $a < 0$ la cuadrática se abre hacia abajo.

A continuación, en la Tabla 5, presentamos la discriminación de unidades significantes en cada registro.

Las unidades significantes son los valores que puede tomar los diferentes parámetros o variables en un registro. En nuestro caso, serán las constantes a, b, c.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Tabla 5:

Discriminación de Unidades Significantes en la Parábola en Registro gráfico y Registro algebraico

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS SIGNIFICATIVAS
CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA	CONCAVA HACIA ARRIBA	*a>0*
	CONCAVA HACIA ABAJO	*a<0*
LA INTERSECCIÓN DE LA PARÁBOLA CON EL EJE Y	EN LA PARTE SUPERIOR DEL EJE X o PARTE POSITIVA DEL EJE Y	*c>0*
	EN EL ORIGEN	*c=0*
	EN LA PARTE INFERIOR DEL EJE X o PARTE NEGETIVA DEL EJE Y	*c<0*
POSICIÓN DEL VERTICE RESPECTO DEL EJE Y.	A LA DERECHA DEL EJE Y	$V = (\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$ $(b < 0 \wedge a > 0) \vee (b > 0 \wedge a < 0) \leftrightarrow ab < 0$
	EN EL EJE Y	$b = 0$

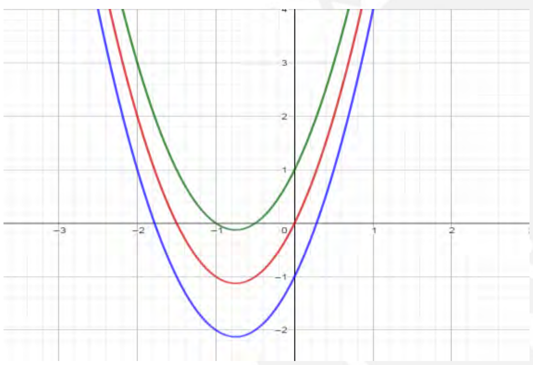
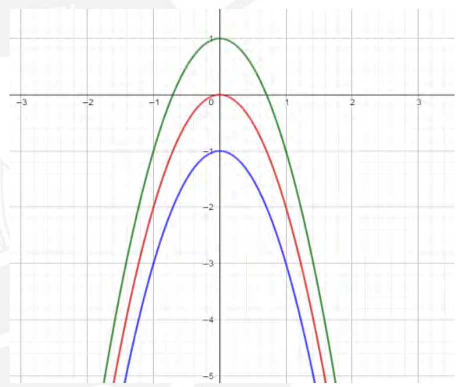
	A LA IZQUIERDA DEL EJE Y	$(b > 0 \wedge a > 0) \vee (b < 0 \wedge a < 0) \leftrightarrow ab < 0$

Fuente: Tomado de Gómez-Blancarte, Guirette y Morales-Colorado (2017, p.209)

Los ejemplos los veremos reflejados en la Tabla 6 para algunos coeficientes específicos de la función parábola.

Tabla 6:

Algunos Ejemplos de Conversión de la Parábola en los Registro algebraico y Registro gráfico

$a > 0, b > 0$ $c > 0, c = 0, c < 0$	$a < 0, b = 0$ $c > 0, c = 0, c < 0$
	
$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ $g(x) = 2x^2 + 3x$ $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$	$f(x) = -2x^2 + 1$ $g(x) = -2x^2$ $h(x) = -2x^2 - 1$

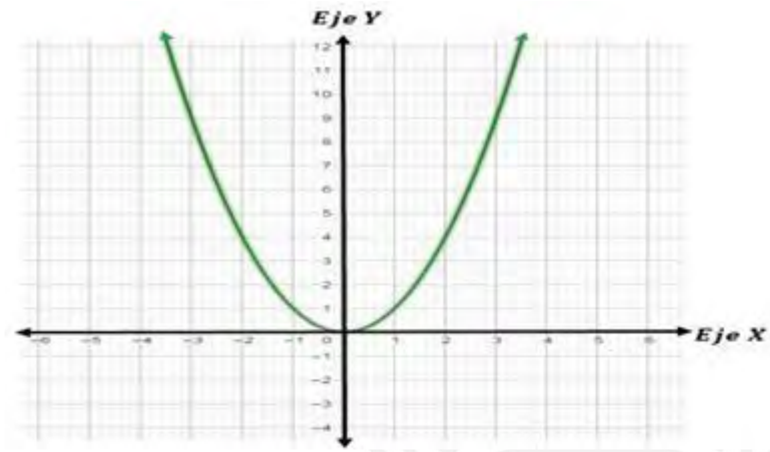
Fuente: Adaptado de Gómez-Blancarte, Guirette y Morales-Colorado (2017, p.210)

Ejemplo 1

Con la información de la gráfica de la siguiente función (ver Figura 64). Determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Figura 64:

Registro de representación gráfico de la parábola.



Fuente: Propia del autor.

Solución

La intencionalidad de la pregunta es que para resolverla se movilicen elementos del registro gráfico, para determinar el límite propuesto, (ver Capítulo III, TGAO)

Sin embargo, con esta pregunta también esperamos que se haya promovido una conversión del registro grafico al registro algebraico. En esta dirección, presentamos la discriminación de las unidades significantes (ver Tabla 7)

$$f(x) = x^2$$

Tabla 7:

Discriminación de Unidades Significantes en un ejemplo. Registro gráfico-Registro algebraico

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS SIGNIFICATIVAS
CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA	*a=1*

LA INTERSECCIÓN DE LA PARÁBOLA CON EL EJE Y	EN EL ORIGEN	*c=0*
POSICIÓN DEL VERTICAL RESPECTO	A LA DERECHA DEL EJE Y EN EL EJE Y A LA DERECHA DEL EJE Y	$\boldsymbol{V = (\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))}$ $\boldsymbol{b = 0}$ $\boldsymbol{V = (0; 0)}$

Fuente: Propia del autor.

A continuación, haremos un análisis de lo expresado en el cuadro anterior.

- Conversión del registro gráfico al registro algebraico.

La gráfica presentada es una parábola en el $Plano\ XY$, la ecuación algebraica que representa la parábola en el registro algebraico es una ecuación de segundo grado de la forma $f(x) = a\,x^2 + bx + c$. Para determinarla, hallaremos los valores de $a;\ b$ y c, utilizando los elementos y alguna propiedad de la gráfica de la parábola.

En la lectura de la gráfica de la parábola (identificación de coordenadas de puntos particulares), podemos ver que su vértice es el origen, $V = (0;\ 0)$. Al pasar la gráfica por el vértice $(0; 0)$, hacemos en la ecuación de $f(x)$, $x = 0\ e\ y = 0$, obteniendo $c = 0$.

Para hallar el valor "a" desplazamos una unidad del vértice de la gráfica de la parábola a la derecha, generando un punto x_1 en el $Eje\ X$. Desde allí, trazamos la perpendicular al $Eje\ X$ hasta cortar a la gráfica de la función. Esa distancia dirigida que se genera desde x_1 hasta el $f(x_1)$ es el valor de "a". En nuestro caso, al ver la gráfica, vemos que el $x_1 = 1$, $a = 1$**.**

El valor "b" se halla de la forma siguiente: el vértice definido por la ecuación de la parábola está dado por $V = (-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$, pero de la gráfica, el vértice de la parábola es el $(0; 0)$, con lo cual, $-\frac{b}{2a} = 0$, lo que implica que $b = 0$**.**

En resumen: $f(x) = x^2$ es la representación algebraica de la parábola de la gráfica.

Para obtener la representación algebraica de la ecuación de la parábola propuesta, hemos realizado las coordinaciones entre el registro gráfico y algebraico. Para Duval (2004), es necesario para favorecer la coordinación entre Registros, ya que es un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus “traducciones” mutuas.

La conversión entre Registros es una actividad cognitiva primordial menos visible que el tratamiento, que depende de la coordinación.

Ahora, calculemos $\lim_{x\to 2} x^2$ en el registro Algebraico

Por la propiedad del límite de un producto $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x \,.\lim_{x\to 2} x =$

Como límite de la identidad es la evaluación de la variable x en el punto 2.

= 2. 2 = 4 (producto en $\mathbb{R}$).

Concluimos que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ desde el Registro Algebraico del límite de una función.

En este ejercicio, vemos cómo hallamos el $\lim_{x\to 2} x^2$ en el Registro algebraico, presentada la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el Registro gráfico.

Observación.

Podemos hacer otro tratamiento en el Registro Gráfico para determinar la ecuación que representa a la parábola en el registro Algebraico.

La función algebraica que representa la parábola de la gráfica es $f(x) = ax^2 + bx + c$, si podemos localizar en la gráfica al menos tres puntos de paso (dado el gráfico cuadriculado, donde se pueda percibir tres puntos de paso), conoceremos los valores de $a,\ b$ y c al resolver el sistema que se forma.

Duval (2012) nos expresa que la conversión es fundamental en la comprensión de un objeto matemático y para alcanzarla se realiza previamente la coordinación entre las representaciones.

Duval (2012) afirma que en el caso de las ecuaciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, los alumnos no logran reconocer el significado de la constante b en el registro gráfico. Es decir, para $b \neq 0,\ b = 0$, este determina si el eje de la parábola coincide o no con el $Eje\ Y$. El autor afirma que esas dificultades se deben a que no se ha realizado una discriminación de las variables visuales y simbólicas que se deben hacer mediante un reconocimiento cualitativo, colocándolas. en correspondencia, sin cálculos numéricos.

El autor se refiere al tratamiento de las cuadráticas, desde la perspectiva gráfica, como una interpretación global para referirse a que el alumno debe lograr reconocer qué significan las constantes $a,\ b,\ c$ y sus propiedades en el registro algebraico como en el registro gráfico, para así lograr la coordinación en ambos registros.

Expresa que hay varias formas de coordinar la ecuación de la parábola con su representación gráfica, como por ejemplo con cálculos numéricos, calculando su vértice, sus puntos interceptas con los ejes, pero que la interpretación global significa que el alumno, al ver la ecuación y los coeficientes, debe saber qué rol cumple cada coeficiente en el registro gráfico, de tal manera que pueda graficarlo, sin necesidad de hacer grandes cálculos.

Conversión de la recta entre los registros algebraico y gráfico.

Presentamos la discriminación de unidades significantes de la recta, en el registro algebraico y en el gráfico (ver Tabla 8)

$$f(x) = mx + b$$

Tabla 8:

Discriminación de Unidades Significantes en la recta, Registro gráfico y Registro algebraico

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS SIGNIFICATIVAS
PENDIENTE DE LA RECTA	ES CRECIENTE DE IZQUIERDA A DERECHA	$m>0$

	ES DECRECIENTE DE IZQUIERDA A DERECHA	*m<0*
LA INTERSECCIÓN DE LA RECTA CON EL EJE Y.	LA RECTA INTERSECTA AL EJE Y POSITIVO	*b>0*
	LA RECTA INTERSECTA AL EJE Y EN EL ORIGEN	*b=0*
	LA RECTA INTERSECTA AL EJE Y NEGATIVO	*b<0*

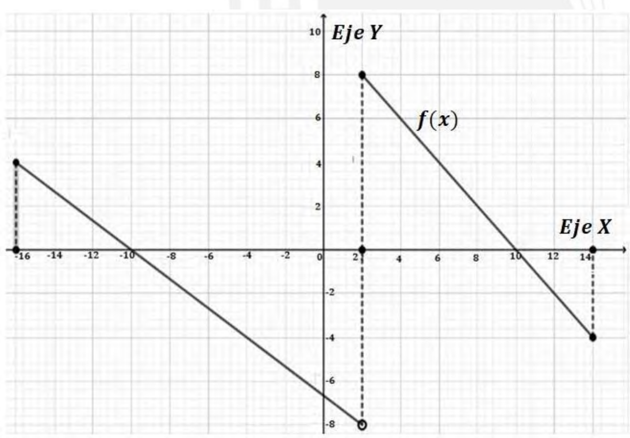
Fuente: Tomado de Duval (2012).

Al respecto, para más información acerca de la discriminación de la recta en los registros gráfico y algebraico, Duval (2012).

Un ejemplo del caso anterior podemos verlo en la Figura 65.

Figura 65:

Ejemplo 2 de conversión.



Fuente: Adaptado de Londoño, Narro y Yatzil (2014, p. 95)

Obtener:

i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ Justifique su respuesta.

ii) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ Justifique su respuesta.

iii) A partir de ello, concluya si existe el $\lim_{x \to 2} f(x)$. Justifique su respuesta.

La intencionalidad de la pregunta es que se desarrolle la solución utilizando el registro gráfico; sin embargo, podemos esperar soluciones en la que se utilice la conversión del registro gráfico al registro algebraico. Para los desarrollos en el registro gráfico, (ver Capítulo III, Sección 3,2, TGAO.)

El gráfico nos expresa que para que quede determinada la representación algebraica del límite de la función f, nos falta conocer la representación algebraica de f, a partir de su representación gráfica. Duval (2012) menciona que, para convertir una recta en su representación algebraica debemos tener en cuenta, la pendiente, los intercepto con los ejes y las simetrías, ver (Tabla 8).

Los puntos de paso de f cuando $x \in [2,14]$.

(10,0), (2,8) que definen la recta $f(x) = -x + 10$, $x \in [2,14]$. Entonces la representación algebraica del límite

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x + 10)$ Utilizando las propiedades (ver Capitulo III, Sección 3,2) en el registro algebraico se tiene:

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 8.$

Por la izquierda:

Los puntos de paso de f cuando $x \in [-16,2)$ son: $(2,-8)$ y $(-16,4)$, luego:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{20}{3};\ x \in [-16,2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}\right) = -8.$$

Como los límites son diferentes, podemos concluir que no existe el límite ver el Teorema (TLB).

La siguiente pregunta promueve utilizar los procesos algebraicos en su desarrollo; sin embargo, también se espera soluciones que, en su desarrollo, utilicen la conversión de la representación algebraica a una representación gráfica.

Ejemplo 3 de conversión.

Halle el $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Solución:

Seguimos los siguientes pasos:

1) Hacemos la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1$.

   Para ello construimos la representación semiótica tabular de la función f (ver Figura 66) de la manera siguiente: consideramos algunos valores de la variable x que pertenecen al dominio de la función f, los cuales los evaluamos respectivamente en la función f , consiguiendo los valores que toma la variable dependiente $y_i = f(x_i)$. Así se van generando $(x_i; f(x_i))$ en la Representación Tabular.

Figura 66:

Representación semiótica tabular para la función f.

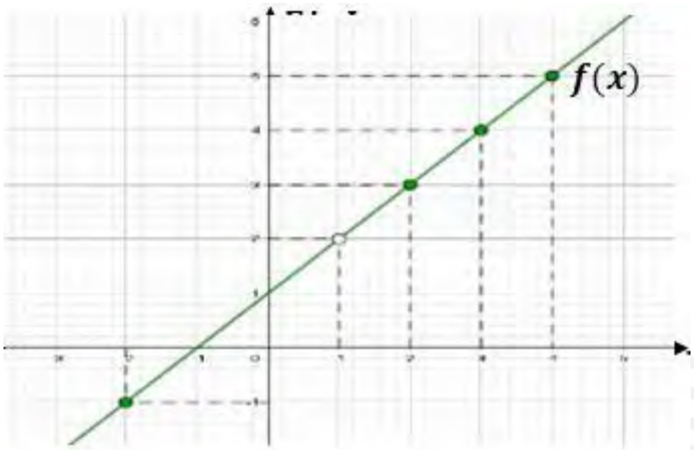
x	-2	-1	0	1	2	3		4
$f(x)$	-1	0	1	No definido	3	4		5

Fuente: Propia del autor.

2) Representamos en el plano cartesiano algunos valores $(x_i;\ y_i = f(x_i))$ de la tabla. Allí, estamos haciendo un tratamiento externo de cómo es la conversión, que consiste en transformar la representación semiótica Tabular para la función f en una representación semiótica gráfica para la función f , consiguiendo el gráfico de f en el plano cartesiano.

Figura 67:

Representación semiótica gráfica de la función racional en el Registro gráfico.



Fuente: Propia del autor.

3) Para hacer Tratamientos internos para determinar el límite de la función en el Registro Grafico, seguimos los siguientes pasos:

Si la variable x se aproxima a 1 por la derecha, comenzamos con $x = 2$, hallamos la representación gráfica del límite para este punto generando el punto $y = 3$. Consideramos algunos puntos más en el $Eje\ X$, obteniendo algunos puntos en el $Eje\ Y$.

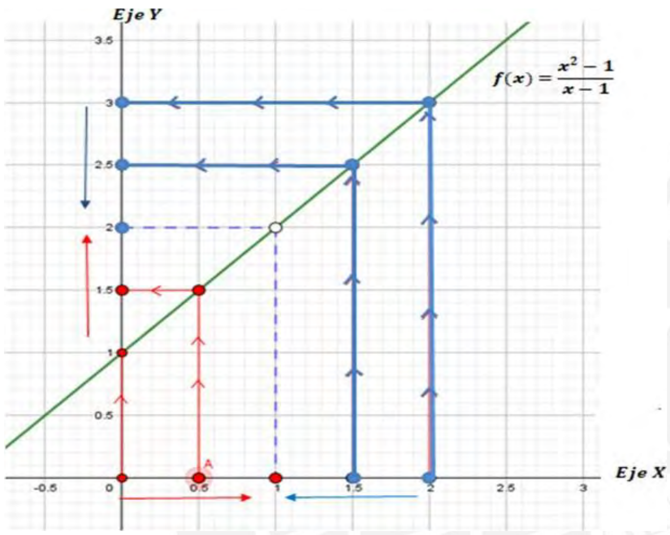
Vemos en la gráfica (ver Figura 67) que los valores de la función $f(x)$ tienden al valor 2. Concluimos que la representación gráfica del límite lateral por la derecha es el punto en el $Eje\ Y$ de valor 2, representado algebraicamente por $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$,

Ahora, si la variable x se aproxima a 1 por la izquierda, desde la recta numérica vemos en la gráfica que los valores a los que se aproxima la función $f(x)$ es 2. Luego, concluimos que la representación gráfica del límite lateral por la izquierda de una función es un punto en el $EjeY$ de valor 2 o representado en el registro algebraico como, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

De las reglas de conformidad debido al límite bilateral, concluimos en el registro gráfico que el límite existe, es único y está representado por el valor 2 en el $Eje\ Y$ y en el registro algebraico lo representamos por $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. (Ver Figura 68)

Figura 68:

Tratamientos para el límite de una función racional en el Registro gráfico.



Fuente: Propia del autor.

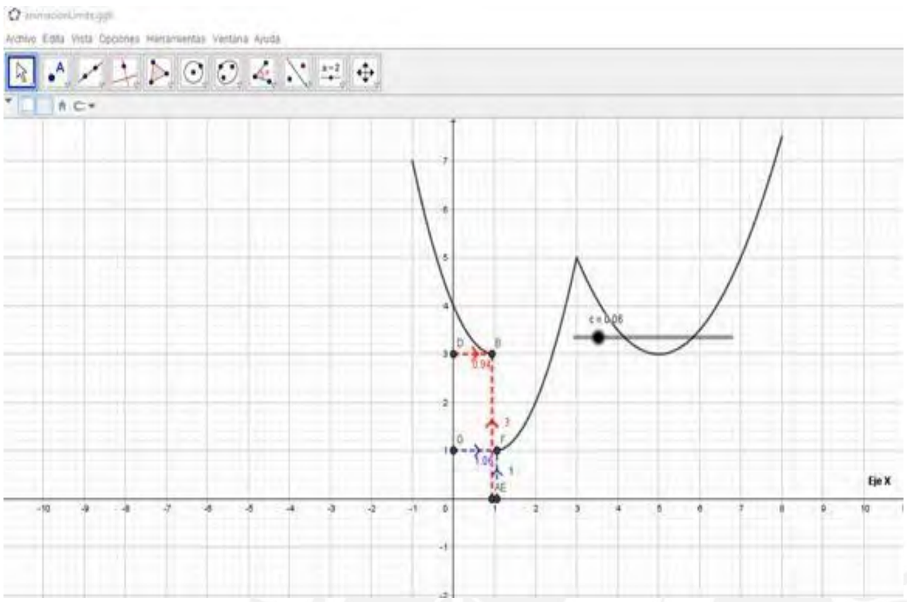
3.5 Registros de Representación Semiótica gráfico computacional del límite de una función, utilizando el software libre, GeoGebra

Las representaciones computacionales son aquellas que no requieren la mirada del objeto matemático y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otro, (Duval, 2004 p.37). Una serie de algoritmos que resuelve la máquina, a través del software GeoGebra, que permiten resolver el problema.

Podemos dar una representación gráfica animada en la siguiente figura (ver Figura 69)

Figura 69:

Representación semiótica gráfica computacional de una función seccionalmente continúa.



Fuente: Propia del autor.

CUARTA PARTE: RESULTADOS CONCLUSIONES

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En relación con el objetivo general de la investigación: *Analizar los diferentes Registros de Representación Semiótica, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario,* en el marco de la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004), establecimos los registros algebraicos y gráfico para el límite de una función.

En el registro algebraico con funciones polinomiales, funciones definidas a trozos, funciones racionales como cociente de polinomios con coeficientes racionales, describimos las representaciones algebraicas de cada tipo de función que son identificables en el registro. También analizamos los significantes que transmite cada representación que se va formando, para poder definir un conjunto de propiedades necesarias en cada caso, denominadas reglas de conformidad, que permiten movilizar diferentes tratamientos en la actividad matemática que se desarrolla al realizar un problema en torno al límite de una función. Describimos los diferentes tratamientos que se movilizan y que dependen de las reglas de conformidad, definidas en el registro.

Del análisis hemos llegado a establecer, en el caso de las funciones polinomiales, que las reglas de conformidad se deben a las propiedades algebraicas del límite de una función, para las funciones definidas a trozos, los significantes que transmitan la representación es el comportamiento de la función alrededor del punto en estudio, las reglas de conformidad por la definición del límite lateral por la derecha, límite lateral por la izquierda, límite bilateral, las cuales permiten diferentes tratamientos.

En el análisis de las funciones racionales con límite 0 sobre 0, un primer tratamiento que aplicamos es la regla de conformidad, debido al límite de una función racional, que es la evaluación del polinomio numerador y denominador en el punto en estudio en el que obtenemos la forma indeterminada 0 sobre 0. Buscamos nuevos tratamientos en el registro algebraico que permitan resolver este tipo de tareas, en el que también analizamos los significantes de la representación racional propuesta y requerimos levantar la forma indeterminada 0 sobre 0. Para ello, requerimos, como una posible solución, recursos del Álgebra, como la factorización y cancelación, para expresar la representación inicial en una función polinomial equivalente, así como la regla de conformidad, debido al límite de funciones para relacionar esta equivalencia con el límite.

Del análisis definimos las reglas de conformidad, la factorización, el teorema del factor y la cancelación, si dos funciones son iguales, excepto en un punto, entonces sus límites son iguales, excepto posiblemente en ese punto. Las reglas de conformidad permiten definir el registro para este tipo de funciones y movilizar representaciones debidos a los tratamientos.

Por lo expuesto, logramos establecer el registro algebraico para ciertos tipos de funciones y describir el funcionamiento cognitivo en términos de la formación, tratamientos y conversiones de representaciones en el registro, así como permite conocer el aspecto formal y abstracto del concepto.

En el registro gráfico, hemos considerado funciones continuas y discontinuas, apoyados en el sistema de coordenadas cartesianas y sus elementos, como la proyección, los ejes, trazos perpendiculares, los puntos, entre otros. Construimos una representación gráfica para el límite de una función en términos de la coordinación de tendencias de las variables dinámicas x e y en los $Ejes\ \ X$, $Eje\ \ Y$ respectivamente, basados en el límite lateral, consiguiendo definir la representación gráfica del límite en el registro gráfico.

Con el análisis, descripción y explicación, definimos el registro grafico para cierto tipo de funciones continuas y discontinuas, permitiéndonos conocer la actividad cognitiva que se realiza dentro del registro y que permite conocer el aspecto gráfico del concepto límite de una función.

- Por todo lo anterior, logramos cumplir con el objetivo específico “Analizar los Registros de Representación Semiótica algebraico y gráfico”

El objetivo específico:

- Caracterizar los Registros de Representación Semiótica, teniendo en cuenta la institución y otras investigaciones.

En el análisis de los registros algebraico y gráfico, algunas de nuestras funciones han sido tomadas de nuestras referencias y prácticas del material bibliográfico del curso Cálculo I de Estudios Generales del área de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

- Con respecto al objetivo específico “Determinar y caracterizar los Registros de Representación Semiótica asociados al límite utilizado en los textos y la institución elegida”

El estudio descriptivo y explicativo de los registros algebraico y gráfico ha permitido, desde la perspectiva de la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), un análisis de dos textos universitarios, Práctica Dirigida N°05 (ver Anexo)

En el análisis, tomamos en cuenta dos características que seguimos de Pons (2014), las cuales son:

1. ¿Cómo se define el límite de una función, representaciones gráficas y simbólicas (algebraicas)?
2. Análisis didáctico y cognitivo (objetivos).

Los resultados del análisis son: ambos textos desarrollan la definición de límite de una función en el registro algebraico o definición de Weierstrass. En el análisis, vemos algunos ejercicios en el registro algebraico, donde se utilizan diversos tratamientos debido a la definición métrica del límite. También observamos una variedad de ejercicios propuestos en el registro algebraico con diferentes tipos de funciones, donde se movilizan distintos tratamientos dependiendo del tipo de función.

Podemos concluir que hay ausencia del concepto del límite de una función desde el registro gráfico, así como la actividad cognitiva de la conversión entre registros.

En el análisis de la Práctica Dirigida N°05, tema: Límite de funciones. Propiedades básicas. Límites Laterales y aplicación, desde la perspectiva de la TRRS, identificamos: ejercicios en el registro algebraico donde se pide demostrar el límite de una función cuadrática, en la que los tratamientos son debidos a la definición de Weierstrass, ejercicios donde se requiere calcular el límite de una función para diferentes tipos de funciones algebraicas, que demandan diferentes tratamientos algebraicos donde se utilizan los recursos del Álgebra, como la factorización, racionalización, completación de cubos, completación de cuadrados, entre otros, ejercicios donde se presenta una función a trozos y se pide calcular los límites laterales. También observamos un ejercicio de aplicación, en la que se describe una situación en el registro verbal y se muestra una representación gráfica asociada de la que se pide determinar los límites laterales.

De acuerdo con la TRRS, observamos ausencia de una variedad de ejercicios en el registro gráfico con funciones continuas y discontinuas que demanden diferentes tratamientos debidos a la lateralidad del límite.

De acuerdo con el marco teórico de la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), podemos concluir que en los textos y Práctica Dirigida N°05 predomina el concepto de límite de una función en el registro algebraico con una batería de ejercicios propuestos en este registro. Observamos la ausencia de la perspectiva gráfica o visualización del concepto, que permite la complementariedad del concepto.

La perspectiva algebraica del límite nos muestra movilizar tratamientos debido a la definición, propiedades y teoremas, donde la parte operacional del límite, con sus diferentes tratamientos, es lo más importante para la obtención de la respuesta; sin embargo, considerar el registro grafico significa visualizar la definición dinámica del límite basada en la coordinación de tendencias en las variables x e y en el sistema de coordenadas.

Para garantizar la comprensión de un objeto matemático, Duval (2004) expresa que la actividad cognitiva de la conversión es necesaria entre dos Registros de Representación Semiótica. En ambos textos y en la Práctica Dirigida N° (Spivak, 2009)05, no observamos eso. Con respecto al objetivo específico

- Analizar las articulaciones y coordinaciones de las representaciones entre los registros seleccionados en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario.

Hemos realizado la actividad cognitiva de la conversión del registro algebraico al registro gráfico y viceversa para rectas y parábolas. La conversión es una actividad que se desarrolla a través de la asociación de las unidades significantes de la representación en cada registro, que permite coordinar y articular un significante de la representación del límite en un registro con un significante de la representación en otro registro.

Por todo esto, hemos logrado cumplir todos nuestros objetivos específicos y, como consecuencia, cumplir con el objetivo general y así responder a la pregunta de investigación *¿Cuáles son los registros, tratamientos y conversiones en la actividad matemática que se desarrolla en torno a los límites de funciones en un curso universitario?*

La metodología de investigación ha sido importante, ya que permitió organizar en cinco etapas el proceso de la investigación. En nuestro caso, para resolver: *Análisis del uso de Registros de Representación Semiótica en el cálculo de límites de funciones en el nivel universitario*, así como validar los resultados obtenidos a través del contraste de los resultados de la investigación con los resultados observables.

RECOMENDACIONES

Para una mejor comprensión en la actividad matemática en torno al límite de una función en el nivel Universitario de acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica recomendamos:

Considerar por lo menos dos Registros de Representación Semiótica, el registro algebraico y el registro gráfico para la clase de funciones desarrolladas en esta tesis.

Recomendamos incluir tareas matemáticas en torno al límite de una función, en la que se consideren actividades cognitivas de tratamiento y conversion entre los Registros de Representación Semiótica Algebraico y Gráfico.

Ampliar las fuentes bibliográficas, en la que se desarrolle el límite de una función, en el registro gráfico.

Como una investigación a continuar, hacer un análisis con una clase más amplia de funciones, en los Registros de Representación Semiótica Algebraico y Gráfico, considerando diversos tratamientos y conversiones.

Analizar, caracterizar el registro de Representación Semiótica Tabular o Numérico para el límite de una función, así como describir los diferentes tratamientos y conversiones que se movilizan y que dependen de las reglas de conformidad definidas en el registro.

Referencias bibliográficas

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización del límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la Universidad. *Relime*, 189-209.

Curotto, F. (1982). Complemento de Matematicas. En F. Curotto, *Complemento de Matemáticas* (págs. 103-104). Lima: UNMSM.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (10 de Mayo de 2012). *Gráficos e equações: a articulação de dois registros Graphiques et équations: L'articulation de deux registres .* Obtenido de periodicos.ufsc.br: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794

Fernández-Plaza, J., Ruíz Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de limite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias.*, 211-229.

Gómez, A., Guirete, R., & Morales, F. (2017). Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del software GeoGebra. *Educación Matemática*, 189-224.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (4 ed.). México DF, México: McGraw-Hill Interamericana.

Hitt, F. (1998). Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática.*, 23-45.

Hitt, F. (2006). Dificultades de aprendizaje del límite y actividades de enseñanza. *Reflexiones sobre el Aprendizaje del Calculo y su Enseñanza.*

Hitt, F. (2006). Dificultades de aprendizaje del límite y actividades de enseñanza . *Reflexiones sobre el Aprendizaje del Calculo y su Enseñanza.*

Larson, R., & Edwards, B. (2011). Calculo analítico de limites . En R. Larson, & B. Edwards, *Cálculo* (págs. 59-61). Mexico: Mc Graw Hill.

Londoño, N., Narro, P., & Yatzil, A. (2014). Indagando sobre el limite de funciones desde diferentes registros de representación. *El Cálculo y su Enseñanza*, 91-106.

Martinez. (2006). El metodo de estudio de caso; estrategia metodologica de la investigacion cientifica. *Pensamiento & Gestion.*(20), 165-193.

Mitacc, M., & Toro, L. (2009). *Tópicos de Cálculo. Volumen 1.* Lima: Thales S.R.L.

Pons, J. (Noviembre de 2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. *Tesis Doctoral*. Alicante, Alicante, España: El Taller Digital.

Radillo, M., & González, L. (2014). Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura. (L. Patricia, Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 853-861.

Spivak, M. (2009). *Calculus.* España: Reverté, S.A.

Venero, A. (2012). *Análisis Matemático 1.* Lima: Genar.

Vilchez, L. (1 de Mayo de 2018). *Articulación de las Aprehensiones en la nocion de limite en un punto de una funcion real de variable real en estudiantes de ingeniería (Tesis de Maestría).* Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12404/12075

Anexos

Silabo de Cálculo I

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
UNIVERSIDAD DEL PERÚ. DECANA DE AMÉRICA
ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES

ÁREA DE CIENCIAS BÁSICAS

SÍLABO

I. INFORMACIÓN GENERAL

.1 Nombre de la asignatura	: **CÁLCULO I**
.2 Código de asignatura	: CBO104
.3 Horas semanales totales	: 05
.4 Modalidad	: Virtual
.5 Semestre de estudio	: 2020-I
.6 Créditos	: 4
.8 Docentes responsables	: Elvia Pérez Barturen (Coordinadora) eperezb@unmsms.edu.pe Maruja Yolanda Gavilán Gonzales mgavilang@unmsm.edu.pe Miguel Ángel Cano Lengua mcanol@unmsm.edu.pe Jorge Luis Rojas Orbegoso jrojasor@unmsm.edu.pe

II. SUMILLA

El curso incluye conocimientos sobre Relaciones binarias, Funciones reales de variable real, Límites, Continuidad y Derivadas de Funciones reales, Aplicaciones (máximos y mínimos) y diferenciales aplicados a la solución de problemas que involucren seres vivos.

III. LOGROS O RESULTADOS DE APRENDIZAJE (Competencias de asignatura)

3.1 Componentes

3.1.1 Competencias

- Utiliza contenidos conceptuales y procedimentales, que se manifiestan en signos y símbolos del pensamiento crítico - reflexivo para obtener diversos modelos matemáticos del mundo real de forma lógica y creativa.
- Soluciona problemas y genera aprendizajes a través de múltiples estrategias y alternativas que lo lleven al éxito y logro de metas propuestas.
- Utiliza herramientas y medios digitales en la comunicación sincrónica y asincrónica, para intervenir en forma responsable, segura y ética en entornos digitales corporativos o propios que fortalezca el desarrollo de su formación profesional.

3.1.2 Actitudes y valores

- Valora la importancia del aprendizaje autónomo para permanecer vigente y actualizado en su profesión.
- Asume responsabilidades por su formación profesional y la realización de trabajos.
- Evalúa sus decisiones y acciones desde un contexto moral y ético.
- Comunica de manera clara y convincente en forma oral, escrita y gráfica según los diferentes tipos de interlocutores y audiencias.
- Cumple las normas de N etiqueta en la comunicación en redes.
- Valora la importancia del trabajo en equipo, se integra y participa en forma efectiva en equipos multidisciplinarios de trabajo.

IV. PERFILES DEL EGRESADO

4.1 Perfil del egresado de la universidad

- Aplica conocimientos a la práctica para resolver problemas con compromiso ético.
- Capacidad de análisis y síntesis en la toma de decisiones con responsabilidad, sentido crítico y autocrítico.
- Trabaja en equipo con una perspectiva transdisciplinar para comprender y transformar la realidad compleja.
- Genera nuevos conocimientos que aportan al desarrollo de la sociedad mediante la investigación, con sentido ético.
- Gestiona la información y la difusión de conocimientos con adecuada comunicación oral y escrita de la propia profesión, ejerciendo el derecho de libertad de pensamiento con responsabilidad.
- Desempeña su profesión con liderazgo, adecuándose a los cambios y a las nuevas tendencias, comprometido con la paz, medio ambiente, equidad de género, defensa de los derechos humanos y valores democráticos.

4.2 Perfil del egresado de la Escuela de Estudios Generales

El egresado de la Escuela de Estudios Generales del Área de Ciencias Básicas es protagonista de su desarrollo académico integral, posee valores, desarrollo ético y compromiso social, es solidario y respeta el medio ambiente. Posee capacidad de análisis y pensamiento crítico, tiene habilidad para la comunicación oral y escrita en español, muestra interés tanto en el desarrollo nacional, así como en las herramientas tecnológicas contemporáneas y tiene una sólida formación en ciencias básicas y sociales.

V. COMPETENCIAS TRANSVERSALES

- **Investigación**

Capacidad de investigación básica, pensamiento crítico y creativo: Hábito de la mente caracterizado por la exploración intensiva de asuntos de interés, ideas, objetos y eventos, antes de aceptar o formular una opinión o conclusión y como consecuencia, la capacidad de plantear una acción de estudio de esta en un nivel básico. Habilidad para combinar o sintetizar ideas existentes, imágenes u otro pensamiento original y la experiencia de pensar, reaccionar y trabajar en un modo imaginativo, caracterizado por un alto nivel de motivación, pensamiento divergente y asunción de riesgos

- **Responsabilidad social**

Razonamiento ético: Capacidad de razonar acerca de qué es apropiado y qué es equivocado en la conducta humana. Requiere de los estudiantes ser capaces de evaluar sus propios valores éticos y el contexto social de los problemas, reconocer los dilemas éticos en una variedad de circunstancias. Los estudiantes adquieren su propia identidad ética la que debe evolucionar con ellos en su vida universitaria y profesional.

- **Liderazgo**

Estudiar y trabajar para hacer una diferencia en la vida cívica de nuestras comunidades y desarrollar la combinación de conocimiento, habilidades, valores y motivación para crear esa diferencia. Esto quiere decir lograr un desarrollo individual creciente a través de promover la calidad de vida de la comunidad a la que pertenezca, en un inicio podrá ser su vecindario, luego de las organizaciones a donde se incorpore, sin perder de vista las necesidades a nivel del país o a nivel global.

VI. PROGRAMACIÓN DE CONTENIDOS

PROGRAMACIÓN DE CONTENIDOS

Competencia: Utiliza contenidos conceptuales y procedimentales para proponer modelos matemáticos de la realidad de manera creativa y lógica				
Número de semana en el semestre	**Criterios/Capacidades**	**Temas/Contenidos**	**Herramientas y/o recursos tecnológicos.**	**Actividades y/o estrategias.**
1	Determina el dominio y rango de una relación binaria. Soluciona diferentes ejercicios sobre relaciones. Propone un modelo matemático (caso) de la realidad de manera creativa y lógica.	Relaciones binarias. Dominio y rango. Gráficas de relaciones. Relación inversa.	1. Vídeo de bienvenida 2. Sílabo 3. Presentación de la asignatura. Presentación de caso sobre relaciones 4. Agenda de la semana 1 **Video:** Gráfico de relaciones y funciones con Geogebra **https://youtu.be/VEX7nC1FnLA** 5. Herramienta Meet 6. Plataforma Classroom (Tareas)	• Revisión documental • Prueba de entrada •Videoconferencia •Tarea Grupal.

2	Determina el dominio y rango de una función especial. Representa gráficamente una función especial. Soluciona operaciones con funciones. Propone un modelo matemático (caso) de la realidad utilizando funciones.	Funciones. Dominio y rango. Funciones especiales y sus gráficos. Operaciones con funciones	1. Agenda de la semana 2 2. Presentación del modelo de Funciones **Video:** Quadratic functions and parabolas in the real world https://youtu.be/He42k1xRpbQ **Lecturas:** Bibliografía Especializada 3. Herramienta Meet 4. Geogebra o Excel 5. Classroom 6. Rúbrica	• Revisión documental • Tarea grupal • Videoconferencia • Retroalimentación
3	Identifica los tipos de funciones. Interpreta gráficamente los tipos de funciones. Propone un modelo matemático de funciones crecientes o decrecientes.	Composición de funciones Funciones biyectivas, pares, impares. periódicas, crecientes y decrecientes	1. Agenda de la semana 3 2. Presentación del modelo sobre Funciones crecientes y decrecientes **Video:** Funciones biyectivas. https://youtu.be/umCwOdjpJu0 3. Herramienta Meet 4. Geogebra o Excel 5. Classroom	• Revisión documental • Tarea Grupal • Videoconferencia • Retroalimentación • Foro de discusión.

4	Reconoce una función Inversa. Determina el dominio y rango de una función exponencial. Determina el dominio y rango de una función logarítmica.	Función inversa. Función exponencial. Función logarítmica.	1. Agenda de la semana 3 2. Material de clase: Presentación de caso respecto a funciones exponenciales. **Video: Función exponencial** https://youtu.be/NonKn-kLVPc 3. Herramienta Meet 4. Evaluación: Classroom	• Revisión documental •Videoconferencia •Formulación de preguntas •Tarea grupal
Competencia: Aplica la inteligencia lógica matemática para construir modelos del mundo real promoviendo espacios de aprendizaje personal y colectivo.				
Número de semanas en el semestre	**Criterio/Capacidades**	**Temas/Contenidos**	**Herramientas y/o recursos tecnológicos**	**Actividades y/o estrategias**
5	Construye un caso de la vida real sobre límites o límites laterales.	Límites: definición, propiedades y operaciones. Límites laterales.	1. Agenda de la sesión 2. Material de clase: **Lecturas**: Bibliografía Especializada 2. Herramienta Meet 3. Plataforma Classroom	• Revisión documental • Videoconferencia • Foro • Tarea individual

6	Resuelve diferentes ejercicios con respecto a límites al infinito y límites infinitos.	Límites al infinito. Límites infinitos. Asíntotas	1. Agenda de la sesión 2. Material de clase: **Video**: Los límites del Universo https://youtu.be/TWlkzFNY-Nw 3. Herramienta Meet 4. Preguntas (Meet)	• Revisión documental •Videoconferencia •Formulación de preguntas • Tarea Grupal
7	Construye y analiza un caso de límites trigonométricos.	Límites trigonométricos. Límite de la función exponencial.	1. Agenda de la sesión 7 2. Material de clase: **Caso Sobre Límites Trigonométricos** Lecturas: https://www.slideshare.net/MauroFernandoDiazMartin/funciones-trascendentales?qid=cad43fed-a594-472c-921c-a3fbc83cd08c&v=&b=&from_search=42 3. Herramienta Meet 4. Formulario (Classroom) 5. Rúbrica	• Revisión documental • Trabajo grupal •Videoconferencia •Cuestionario
8	Resuelve ejercicios de límites de funciones exponencial y logarítmica	Límite de la función logarítmica. **EXAMEN PARCIAL**	1.Repaso para el examen parcial 2.Herramienta Meet 3.Plataforma Classroom 4.Instrumento de evaluación (Rúbrica)	• Revisión documental •Videoconferencia • Evaluación.

Competencia: Propone diferentes casos de fenómenos reales aplicando la continuidad y derivada de funciones.				
Número de semanas en el semestre	**Criterio/Capacidades**	**Temas/Contenidos**	**Herramientas y/o recursos tecnológicos**	**Actividades y/o estrategias**
9	Interpreta gráficamente la continuidad y discontinuidad de una función. Propone un caso de un fenómeno real aplicando la continuidad.	Continuidad de una función. Discontinuidad removible y esencial.	1. Agenda de la semana 9 2. Material de clase: Lectura: Bibliografía Especializada 3.Herramienta Meet 4. Plataforma Classroom	• Revisión documental •Trabajo grupal •Videoconferencia • Retroalimentación
10	Interpreta los diversos teoremas sobre funciones continuas. Aplica los teoremas de funciones continuas a diversos ejercicios	Teoremas sobre funciones continuas. Continuidad de una función en un intervalo cerrado	1. Agenda de la semana 10 2. Material de clase **Video:** Continuidad de una función en un intervalo cerrado. https://youtu.be/NQBMvyeJr6U 3. Herramienta Meet 4. Plataforma Classroom	• Revisión documental •Tarea individual •Videoconferencia

11	Interpreta geométricamente la derivada de una función. Propone un caso aplicando la diferenciabilidad de una función. Opera reglas de derivación. Aplica las reglas de derivación para hallar las derivadas de funciones trigonométricas.	La derivada de una función. Interpretación geométrica. Diferenciabilidad y continuidad. Derivadas laterales. Reglas de derivación. Derivada de las funciones trigonométricas.	1. Agenda de la semana 11 2. Material de clase **Lectura**: Bibliografía Especializada. 3. Herramienta Meet 4. Plataforma Classroom 5. Preguntas	• Revisión documental •Tarea individual •Videoconferencia •Foro
12	Utiliza las reglas de derivación para la derivada de composición de funciones. Calcula la derivada de orden superior. Diferencia la derivación implícita de la	Derivada de la composición de funciones. Derivadas de orden superior. Derivación implícita. Derivadas exponencial y logarítmica.	1. Agenda de la semana 12 2. Material de clase: **Lectura**: Bibliografía Especializada 3. Herramienta Meet 4. Preguntas (Classroom)	•Revisión documental •Trabajo grupal •Videoconferencia •Cuestionario automatizado

	derivación exponencial y logarítmica.			
Competencia: Aplica las derivadas a problemas de especialidad con análisis lógico generando aprendizaje personal y colectivo.				
Número de semanas en el semestre.	**Criterio/Capacidades**	**Temas/Contenidos**	**Herramientas y/o recursos tecnológicos**	**Actividades y/o estrategias**
13	Interpreta los valores máximos y mínimos de una función. Interpreta el Teorema del valor medio. Utiliza los criterios de la primera y segunda derivada para valores extremos relativos y absolutos.	Valores extremos de una función: máximos y mínimos relativos de una función. Puntos críticos. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Criterio de la primera y segunda derivada para valores extremos relativos y absolutos	1. Agenda de la semana 13 2. Material de clase: **Caso sobre máximos y mínimos de una función.** **Lectura:** Bibliografía Especializada 3. Herramienta Meet. 4. Plataforma Classroom.	•Revisión documental •Tarea Grupal •Videoconferencia •Preguntas en clase.

14	Esboza la función y determina la concavidad y puntos de inflexión. Utiliza la regla L'Hospital para evaluar límites indeterminados	Concavidad y puntos de inflexión de la gráfica de una función. Regla de L'Hospital.	1. Agenda de la semana 14 2. Material de clase: **Video:** Tutorial de Geogebra. máximo y mínimos relativos. Punto de inflexión https://youtu.be/nYxlUtcuJOs 3. Herramienta Meet 4. Plataforma Classroom	•Revisión documental •Tarea Grupal •Videoconferencia • Foro
15	Analiza y diferencia razón de cambio de diferenciales.	Razón de cambio. Diferenciales.	1. Agenda de la semana 15 2. Material de clase: **Lecturas**: Aplicaciones de la derivada https://balderciencias.weebly.com/uploads/2/2/1/5/22155040/u-7_calculo_de_derivadas._aplicaciones.pdf 3. Herramienta Meet 4. Cuestionario (Classroom)	•Revisión documental •Tarea individual •Videoconferencia •Preguntas
16	Aplica la derivada a diferentes problemas de su especialidad.	Aplicaciones a la física: velocidad y aceleración **EXAMEN FINAL**	1. Repaso para el examen final 2. Herramienta Meet 3. Plataforma Classroom 4. Instrumento de evaluación (rúbrica)	• Revisión documental •Videoconferencia • Evaluación.

VII. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

a. **El Método Sincrónico** es aquel en el que el emisor y el receptor del mensaje en el proceso de comunicación opera en el mismo marco temporal, es decir, para que se pueda transmitir dicho mensaje es necesario que las dos personas estén presentes en el mismo momento. Son: Videoconferencias con pizarra, audio o imágenes, Internet, Chat, chat de voz, audio y asociación en grupos virtuales.

b. **El Método Asincrónico,** transmite mensajes sin necesidad de coincidir entre el emisor y receptor en la interacción instantánea; son Email, foros de discusión, dominios web, textos, gráficos animados, audio, presentaciones interactivas, video, etc.

c. **El Método B-Learnig** (Combinado asincrónico y sincrónico), donde la enseñanza y aprendizaje de la educación virtual se hace más efectiva.

d. **Aprendizaje Basado en Problemas** (ABP) es una metodología centrada en el aprendizaje, en la investigación y reflexión que siguen los estudiantes para llegar a una solución ante un problema planteado por el profesor.

e. **Aprendizaje Basado en Proyectos (AOP)** El aprendizaje basado en proyectos es una metodología que se desarrolla de manera colaborativa que enfrenta a los estudiantes a situaciones que los lleven a plantear propuestas ante determinada problemática.

f. **Portafolio de Evidencias** es una colección de documentos trabajados en el aula, con ciertas características que tienen como propósito evaluar el nivel de aprendizaje que se ha adquirido, es decir, sus logros, esfuerzos y transformaciones a lo largo de un curso.

g. Taller Trabajo Colaborativo en grupos, interesados en aprender, mediante ejercicios prácticos sobre los temas tratados**.**

VIII. EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES Y CRITERIOS

La evaluación formativa en un enfoque por competencias se concibe como un proceso permanente, global, planificado que permite la retroalimentación y toma de decisiones para la mejora de los procesos de aprendizaje.

UNIDAD	CRITERIOS	DESEMPEÑO	PRODUCTO	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	PESO
UNIDAD I: Relaciones y funciones	Revisa el sílabo con anticipación. Comprende y diferencia relación de función.	Fundamenta y Resuelve los ejercicios sobre relaciones y funciones de manera correcta.	Presentación de prácticas dirigidas.	Rúbrica	20%
	Expresa ideas y procesos matemáticos de manera comprensible empleando el lenguaje verbal (oral y escrito).	Participa activamente en el desarrollo de la clase sustentando su respuesta analíticamente.	Presentación de Prácticas dirigidas.	Rúbrica	20%
	Realiza conclusiones acerca de las relaciones y funciones empleando el razonamiento lógico y analítico.	Fundamenta y sustenta su respuesta correctamente respetando las opiniones de sus compañeros.	Respuestas a **foro.**	Rúbrica	20%
	Modela a través de funciones casos de la realidad.	Fundamenta y construye casos de la realidad utilizando las funciones.	Herramientas digitales o manuales para fortalecer su trabajo. Presentación de **portafolio** virtual.	Rúbrica	40%
TOTAL					100%
UNIDAD II: Límites de funciones	Comprende la importancia del análisis lógico en la construcción de aprendizajes significativos.	Construye sus propios aprendizajes a través de la sustentación del trabajo asignado.	Respuestas a **foro grupal**.	Rúbrica	20%
	Verifica conclusiones y realiza inferencias empleando distintas formas de razonamiento.	Representa e interpreta correctamente el límite lateral de una función.	Respuestas a prácticas dirigidas y participación en clase.	Rúbrica	20%

	Conoce las propiedades de los límites de funciones.	Diferencia y aplica las propiedades de límites de manera correcta	Respuestas a las prácticas dirigidas y participación en clase.	Rúbrica.	20%
	Modela a través de los límites casos de su entorno.	Fundamenta y construye casos de la realidad utilizando el concepto de límites	Presentación del modelo y uso de herramientas digitales o manuales.	Rúbrica.	20%
TOTAL					100%
UNIDAD III: Continuidad y derivadas	Argumenta la relación existente entre diferenciabilidad y continuidad.	Sustenta su trabajo grupal mostrando los procesos de diferenciabilidad o continuidad.	Presentación y desarrollo de prácticas dirigidas.	Rúbrica	20%
	Modela casos de contexto real y analiza la continuidad o derivada.	Fundamenta y construye casos del contexto real utilizando el Excel o el Geogebra de manera correcta.	Presentación de **portafolio** virtual con el modelo con el uso de herramientas digitales o manuales.	Rúbrica.	40%
	Conoce los conceptos de continuidad y derivada de una función.	Sustenta de manera analítica y lógica respetando las opiniones de sus compañeros.	Presentación de foro.	Rúbrica.	20%
	Calcula y aplica las propiedades para las derivadas de funciones reales.	Desarrolla correctamente la lista de ejercicios utilizando las reglas de derivación.	Presentación y desarrollo de prácticas dirigidas.	Rúbrica	20%
TOTAL					100%
UNIDAD IV: Aplicaciones de las derivadas	Calcula extremos relativos para una función cualquiera aplicando los criterios de la primera y segunda derivada.	Utiliza el criterio adecuado para el cálculo de extremos relativos.	Presentación y desarrollo de prácticas dirigidas.	Rúbrica	20%
	Utiliza el Teorema del valor medio para comprobar si una función es constante o no en un intervalo.	Sustenta su respuesta utilizando de manera adecuada el	Respuestas a foro.	Rúbrica.	20%

		Teorema del valor medio.			
	Aplica los criterios de La Derivada para Optimizar modelos Relacionados a su especialidad.	Formula y sustenta los problemas relacionados a su especialidad.	Presentación de **portafolio** virtual con el Uso de herramientas Digitales o manuales.	Rúbrica	40%
	Calcula extremos Absolutos De una Función continúa Definida sobre un intervalo cerrado	Calcula extremos absolutos de funciones continuas en los ejercicios dados de manera correcta.	Presentación y Desarrollo de Prácticas dirigidas.	Rúbrica Debate	20%
TOTAL					100%

FÓRMULA DE EVALUACIÓN

Ev.C1= Nota de evaluación continua 1 (30 %)

Ev.C2= Nota de evaluación continua 2 (30 %)

E.P= Nota de examen parcial (20 %)

E.F= Nota de examen final (20%)

PROMEDIO FINAL = (Ev.C1 x 0.30) + (E.P. x 0.20) + (Ev.C2 x 0.30) + (E.F. x 0.20)

Los resultados son reportados al Sistema Único de Matricula de la UNMSM, en 2 momentos: primer momento en la semana 10 del semestre, segundo momento al finalizar el semestre, no hay examen sustitutorio. El sistema de calificación es vigesimal.

IX. BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA

1. Mitacc M. & Toro Luis. (2013). Tópicos de Cálculo Vol. I. Lima, Perú: Editorial Thales.
2. Venero, Armando. (2012). Análisis Matemático Vol. I. Lima, Perú: Ediciones Gemar.
3. Leithold, Louis. (1991). El Cálculo con Geometría Analítica. México: Editorial Harla.

4. Soler, F., Núñez, R., & Aranda, M. (2008) Cálculo con Aplicaciones. Bogotá: Editorial Pearson.

5. Stewart, James. (2012). Cálculo Trascendentes Tempranas. México: Editorial Cengage Learning.

6. Carrillo, Felix. (2006). Matemáticas I. Lima, Perú: Editorial Textos UNI.

7. Demidovich. (2002). 5000 Problemas de Análisis Matemático. España: Editorial Paraninfo.

8. Pérez Barturén, Elvia. (2018). Matemática I Modelamiento en el mundo real. España. Editorial Académica Española.

COMPLEMENTARIA

1. Muñoz Rivera, Jaime. (2004). Cálculo Diferencial e Integral. Río de Janeiro. Editorial Textos de Graduación.

2. La Salle, Hasser & Sullivan. (2015) Análisis Matemático Vol. I. México. Editorial Reverté.

3. Apóstol, Tom. (2001). Calculus Vol. 1. México. Editorial Reverté.

4. Spivak, Michael. (2012). Calculus. Barcelona. Editorial Reverté.

5. Azenha, A & Jerónimo, M. (1995). Cálculo Diferencial e Integral. Portugal. Editorial McGraw-Hill.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

Páginas que tiene material de información adicional.

1. https://miguelangelcanol.jimdofree.com/analisis-matematico-i/
2. https://optimizandoelconocimiento.jimdofree.com/matem%C3%A1tica-i/

Prácticas de estudios generales de Ciencias Básicas de la UNMSM

Practica 5

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(*Universidad del Perú, Decana de América*)

Escuela de Estudios Generales de Ciencias Básicas

Práctica Dirigida N° 05

Docente : Maruja Yolanda Gavilán Gonzales

Asignatura : Cálculo I **Semestre 2020-I**

Tema : Limites de una función en un punto. Propiedades básicas. Limites laterales. Aplicación.

1. Demuestre los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to 1}(X^2+X+1)=3$

b. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x}{x-5}=-\frac{3}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=-3$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-1}{x-2}=\frac{1}{2}$

2. Demuestre las siguientes propiedades.

a. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)-L=0$

b. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)|=|L|$

3. Dé un ejemplo de modo que

a. Exista $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ pero no que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

b. Exista $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ pero no existan ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

c. Exista $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ pero que no exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

5. Sea $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $(a, b, c\ \ y\ \ d\ son\ constantes)$ tal que

$$|ax^3+bx^2+cx+d|\le f(x)$$

Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, halle el valor de $a, b, c\ \ y\ \ d$.

Página 1 de 3

6. Sea $f(x)$ una función tal que $\frac{x^{3/2}-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x^3-1}{x^2-1}$, halle $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

7. Calcule los siguientes límites

a. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

e. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$; $a > 0$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^4+x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+5x}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

j. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-1}\right)$

k. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{19+x^3}-\sqrt{x^2+5}}{x-2}$

l. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

ll. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{5x+11}}{x^2-1}$

n. $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{x}-2}{x-8}}$

8. Sean m, n enteros positivos arbitrarios. Pruebe que

a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \frac{n(n+1)}{2}$ b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{m}{n}$

9. Calcule si existe los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{12}{8-x^3} - \frac{1}{2-x}\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{7}{3x-6} - \frac{7}{2x^2-5x+2}\right)$

10. Si $A = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{1-x^3}\right)$ y $B = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{1-x^2}$. Determine $\frac{A+B}{A-B}$

11. Sea la función $f(x) = \frac{x^3-4x^2+5x-2}{ax^2+bx+c}$ se tiene que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe y es diferente de cero y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$. Halle a, b y c.

12. Si $\lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x+2)}{\sqrt{-2x}-2} = 8$ y $\lim\limits_{x\to -2} \frac{g(x+2)}{x^2-4} = 3$, halle $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)}{g(h)}$

13. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x, si : x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + 5 ; si\, x > 1 \end{cases}$

14. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ estudie la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

15. Calcule los límites si existen

16. $\lim\limits_{x\to 1} [\![2x]\!](x-1)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x[\![1/x]\!]$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3}\left[\!\!\left[\frac{2}{x}\right]\!\!\right]$ (Sugerencias: pruebe que x-1< $[\![x]\!]$ ≤ x)

17. En los siguientes ejercicios halle el límite indicado si existe, en caso contrario justifique su respuesta:

a) $g(x)=\begin{cases} 2x^2+3x, & x<1 \\ \sqrt{x-1}+5, & x>1 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ c) $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ 7-2x, & x>1 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}, & x\geq 3 \\ \dfrac{3x^2-14x+15}{x-3}, & x<3 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

18. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax-6}{x-2}, & x>2 \\ x^2+b, & x<2 \end{cases}$

¿Qué valores de a y b posibilitan existencia $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

19. Sean f y g funciones cuyas reglas de correspondencia son:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2}, & x<-2 \\ ax^2-2bx+1, & -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x^2-13x+22}{x-2}, & x>2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+3x^2-9x-279}{x+2}, & x<-3 \\ ax^2-2bx+1, & -3\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-22x+57}{x-3} & x\geq 3 \end{cases}$$

Halle a y b para que los límites de f en $x=2, x=-2$ y de g en $x=-3$ y $x=3$ existan.

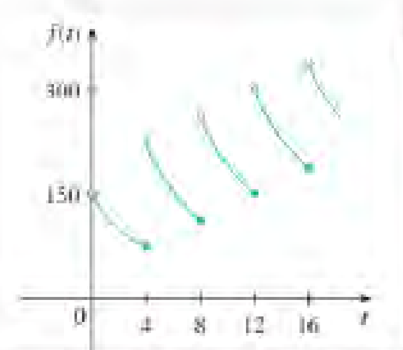
20. Sean $f(x)=\dfrac{4|x^2+3x+2|}{(x^2-1)(x^2+1)}$ $g(x)=\dfrac{3(x^2-2x-3)Sgn(1-x^2)}{x^3-4x^2-7x-10}$, halle si existen:

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$. c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)g(x)$

21. Halle $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3x+1-[\![2x-1]\!]}$, si existe.

22. Si $f(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$, halle $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

23. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre $\lim\limits_{x\to 12^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 12^+} f(x)$. Explique el resultado de estos límites laterales



Practica 6

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, Decana de América)
Escuela de Estudios Generales de Ciencias Básicas

Practica N° 06

Docente : Maruja Yolanda Gavilán Gonzales
Asignatura : Cálculo I **Semestre 2020-I**
Tema : Límites al infinito, límites infinitos. Asíntotas. Límites exponenciales

I – Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x}{5 - x^3}$

2. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{t^2}{16 - t^2}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{(x-5)(9-x)}$

4. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{t + |3t|}{t - 5}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - x^2}{\sqrt{3}\,x^3 - 5x^2}$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x^2 - 8x + 150}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3\sqrt{x^3} + 4x}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 4}}$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 3}{(x-1)(x+1)}}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-3)^4 (3x+1)^2}{(2x^2 - 5)^3}$

10. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + n + 1}{\sqrt{n^3 + 2n + 1}}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4 - 3} + \sqrt{x^2 + 5x + 6}}{3x + 8 - \sqrt{8x^2 + 9x + 8}}$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x + \sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{3x + 14}$

13. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x - \sqrt{9x^2 + 7x + 8}}{3x + \sqrt{x^2 + 9x + 8}}$

14. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + \sqrt{x^2 - 6x + 8}}{4x - \sqrt[3]{27x^3 + 16x^2 + 4x + 1}}$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{3x^2 + 1}{3x - 2} \right)$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right)$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5} \right)$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{2x}} - \sqrt{x - \sqrt{2x}} \right)$

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt[3]{x^2 - x^3 + 1} \right)$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)$

22. $\lim\limits_{\theta \to \infty} \dfrac{\theta}{\theta^2 + 1} \left(2\theta + \cos^3 \theta \right)$

II – Demuestre

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x}{4x^2 - 1} = \dfrac{1}{4}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 6x^2 + 1} - x\right) = 2$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4 - x}{x^2 + x - 1} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{400}{x^2 + 1} = 0$

III – Calcule los siguientes límites laterales:

1. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^3}{x - 3}$

2. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2}{x^2 - 8x + 15}$

3. $\lim\limits_{t \to -3^+} \dfrac{t^2 + 9}{t + 3}$

4. $\lim\limits_{t \to 3^-} \dfrac{t^2}{t^2 - t - 6}$

5. $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{5}^+} \dfrac{x^2}{5 - x^3}$

6. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 - 6x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{4 + x^2}}{x}$

8. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x - 2}}$

IV - Grafique las siguientes funciones, calculando y trazando todas sus asíntotas:

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$

2. $f(x) = \dfrac{3}{(x + 1)^2}$

3. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x^2 - 1}$

4. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 16}$

5. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$

6. $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

7. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 - 6x}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 5x}$

9. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 1}{x^2 - 2x}$

10. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12x + 12}{2x - 2}$

11. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 25}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$

13. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 3)^2}$

15. $f(x)=\dfrac{3x^5-2x}{x^4-13x^2+36}$

16. $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x}{x-10}}$

17. $f(x)=x-5+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

18. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}+x-6$

19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & , \quad x\geq -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & , \quad x<-1 \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 7x-4+\dfrac{7x^2}{\sqrt{x^2+5}} & , \quad |x|\geq 6 \\ \dfrac{x^3}{36-x^2} & , \quad |x|<6 \end{cases}$

V- Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x(7^{1/x}-1)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{2x}-1}{x(2^x+1)}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+10}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{4x}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x/2}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x-4}\right)^{3x}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3x}{x^2-1}\right)^{-2x}$

VI- En un distrito de la capital se ha determinado que dentro de t meses la población infantil afectada por la anemia será

$$p(t)=\frac{60+21\sqrt{16t+9}}{33+8\sqrt{t+1}} \text{ miles de niños.}$$

Grafique $p(t)$ e Interprete la asíntota.

VII- La temperatura de un medio es 25°C y la función $T(t)=25+125e^{-0.15t}$ da la temperatura de una sustancia (de mayor temperatura que el medio) t minutos después de ser colocada en dicho medio.

a) ¿Cuánto varió la temperatura de la sustancia durante el tercer minuto después de ser colocada en el medio?

b) Grafique $T(t)$ e Interprete la asíntota.

Práctica 7

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(*Universidad del Perú, Decana de América*)
Escuela de Estudios Generales de Ciencias Básicas

Práctica Dirigida N° 07

Docente : Maruja Yolanda Gavilán Gonzales

Asignatura : Cálculo I **Semestre 2020-I**

Tema : Funciones trigonométricas. Límites trigonométricos

I.- Halle el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2arctg(\sqrt{1-x^2})$ b) $f(x) = arcsen(\sqrt{1-x}) + arcsen(\sqrt{x})$

c) $f(x) = arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ d) $f(x) = sen(\frac{1}{x})$

II.- Grafique las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{1}{2} + cos3\,x$ b) $f(x) = 2 - sen\frac{x}{2}$ c) $f(x) = -2 + 4cos5\,x$

c) $f(x) = 1 - cos\,x$ d) $f(x) = 3 + 3senx$ e) $f(x) = -3\,cos4\,x$

III.- Grafique la siguiente función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}[\![x]\!]\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad x \in [-2\,,\,2]$

IV.- Dado las siguientes funciones f y g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \in (-2,-1) \\ [\![4+cos\,x]\!] & x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2-5 & x < 0 \\ senx - 5 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Halle $f+g$, y esboce su gráfica

V.- Si $a > 0$ muestre que $\arccos\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) = \begin{cases} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) & x \in [0,a] \\ -arcsen\left(\frac{x}{a}\right) & x \in [-a,0] \end{cases}$

VI.-Demuestre las siguientes identidades

a) $sen(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ b) $\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ c) $tg(arcsenx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

VII. Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-sen\frac{x}{2}}{\pi-x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{cosx}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x \to 1}(1-x)tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

4. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \frac{sen(x-\pi/6)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-cosx}$

5. $\lim\limits_{x \to a} \frac{senx-sena}{x-a}$

6. $\lim\limits_{x \to a} \frac{cosx-cosa}{x-a}$

7. $\lim\limits_{x \to 0}(cosx+senx)^{1/x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2senx-sen2x}{xcosx}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{cosx}-\sqrt[3]{cosx}}{sen^2x}$

10. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{senx-cosx}{\pi-4x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-2cosx+cos2x}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{cos(x/2)-senx}{x-\pi}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{cosx}-cosx}{x^2}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx.\sqrt{cos2x}\sqrt[3]{cos3x}}{x^2}$

15. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \frac{tg^3x-3tgx}{cos(x+\pi/6)}$

16. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1+tanx}{1-tanx}\right)^{cscx}$

17. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1+tanx}{1+senx}\right)^{cscx}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+xsenx}-1}{e^{x^2}-1}$

VIII. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 0} xCos(\frac{1}{x^2})$ b) $\lim\limits_{x \to 0} e^{xCos(\frac{1}{x^2})}$ c) $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)\sqrt{x}Sen(\frac{1}{x^3-1})$

IX. Sean $f(x) = Sen\left(\frac{1}{x-a}\right)+(\frac{1}{x-a})^2$ y $g(x) = (\frac{1}{x-a})^2$

¿Qué puede afirmar de $\lim\limits_{x \to a}(f(x)-g(x))$?

X. Pruebe que:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} arccosx = \frac{\pi}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsenx}{x} = 1$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctanx}{x} = 1$

XI. Halle los siguientes límites si existen

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsen(\sqrt{cosx}-1)}{\sqrt{arcsenx^2+1}-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x-arcsenx}{2x+arctanx}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctan2x}{sen3x}$

Práctica calificada

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, Decana de América)

Escuela de Estudios Generales de Ciencias Básicas

PRÁCTICA CALIFICADA N° 02

Asignatura: Cálculo I **Semestre 2020-I**

Profesora: Maruja Yolanda Gavilán Gonzales *28 de agosto de 2020*

Resuelva en forma detallada y adjunte la foto de la solución de cada una de las siguientes preguntas. Use lapicero negro o azul. Usted tiene 90 minutos de plazo.

1. Determine el tipo de discontinuidad que presenta la siguiente función. Si la discontinuidad es removible, redefina la función dada para que resulte continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{cosx} - \sqrt[3]{cosx}}{sen^2 x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$ **(5 puntos)**

2. Sean las funciones $f(x) = cosx$, $g(x) = x$, $definidas\ en\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pruebe analíticamente que las funciones $f\ y\ g$ se cortan en algún punto. **(3 puntos)**

3. Halle los valores de $a\ y\ b$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2b}{x^3}\ ;\ x \geq 1 \\ ax^2 + \dfrac{2}{11}x + 2b + 1\ ;\ x < 1 \end{cases}$$

Sea diferenciable en $x = 1$. **(5 puntos)**

4. Halle una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + c$ cuya gráfica tenga una recta tangente de pendiente 12 en el punto abscisa $x = 1$ y otra tangente horizontal en el punto $(-1{,}8)$. **(4 puntos)**

5. El avance de la tecnología da como resultado la producción de calculadoras cada vez más compactas; actualmente el precio de las calculadoras en el mercado está disminuyendo. Suponga que x meses después del día de hoy, el precio de cierto modelo será de $P(x) = 120 + \frac{50}{x+1}$ soles.
   a) ¿Cuánto disminuirá el precio durante el cuarto mes? **(1 punto)**
   b) ¿Qué le sucede al precio "a largo plazo" (a medida que x se hace muy grande)? Haga un gráfico e interprete el resultado. **(2 punto)**

Página 1 de 1

Parcial 2020-I

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, Decana de América)

Escuela de Estudios Generales de Ciencias Básicas

EXAMEN PARCIAL

Asignatura: Cálculo I **Semestre 2020-I**

Profesora: Maruja Yolanda Gavilán Gonzales

Fecha de Aplicación: 04 de agosto del 2020.

Resuelva en forma detallada y adjunte la solución de cada una de las siguientes preguntas. Usted tiene dos horas de plazo.

1. Halle el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados. En cualquier caso, justifique su respuesta.

   i) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función definida en todos los números reales, entonces la función dada por
   $$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$
   es impar **(1 punto).**

   ii) La función $f(x)=\sin(2x)$ tiene inversa en $\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$. **(2 puntos).**

2. Use la definición de límite y demuestre que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{3x-2}=1.$ **(3 puntos).**

3. Calcule los siguientes límites, si existen.

   i) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^5-3x^4+2x^2-x-1)\,sen^3\left(\frac{3}{x-1}\right)$ **(3 puntos).**

   ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{(x-x^2)^2},\quad a\neq 0\ \ y\ \ b\neq 0$ **(2 puntos).**

   iii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{[\![2x+3]\!]-3}{sgn(x-1)}$ **(2 puntos).**

4. Considere la siguiente función
   $$f(x)=1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}},\qquad x\geq 0.$$

   i) Halle todas sus asíntotas. **(4 puntos).**

   ii) Realice la gráfica de la función. **(1 punto).**

5. Los registros de salud pública indican que t semanas después de un brote de cierta forma de influenza, aproximadamente $Q(t)=\frac{20}{1+19e^{-1.2t}}$ miles de personas se habían contagiado con la enfermedad.

   i) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad cuando esta comenzó? ¿Cuántas la tenían dos semanas después? **(1 punto).**

   ii) ¿Cuántas personas contraen la enfermedad, cuando el número de semanas crece indefinidamente? Interprete su resultado. **(1 punto).**

Entrevista

Como parte de la investigación, se desarrolló una entrevista con una profesora de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) vía telefónica, dada las circunstancias en la que estamos viviendo, como es la pandemia del covid19.

Profesora: Maruja Gavilán.

Curso que enseña: Calculo I, Sección 3 de la UNMSM.

Área: Estudios generales de Ciencias Básicas.

Entrevista efectuada los días Martes 6 de Octubre y 8 de Noviembre del 2020.

Hora: 10:00 am

Cuestionario propuesto:

1. Buenos días, profesora Maruja. Como parte del equipo docente en el área de Estudios Generales de Ciencias Básicas, podría indicarnos ¿qué aspectos del concepto límite de una función considera en su proceso de enseñanza, en relación al concepto matemático del límite de una función real de variable real?

   Ella nos afirmó que: utilizamos la definición con épsilon y delta predominan los ejercicios algebraicos, como cálculo de límites de funciones racionales, que al evaluar en el punto de estudio, da la forma indeterminada cero sobre cero. Límites de funciones irracionales en la que deben aplicar el conjugado para levantar la indeterminación. Límites de funciones trigonométricas.

   También la profesora nos expresó que, al iniciar el tema de Límites de una función, motiva a sus alumnos el tema con aproximaciones, donde evalúa la función en un número considerable de puntos para ver a dónde tienden las imágenes, utilizando la aproximación numérica. Es decir, el Registro Tabular, para luego introducir la definición formal del límite de una función debido a Weierstrass y luego resuelven ejercicios de la guía que son elaboradas para este fin, tomando en cuenta algunos ejercicios que hacen que se utilice la racionalización o el conjugado.

La profesora nos expresó que en Límites laterales lo realizan siguiendo ejercicios algebraicos y gráficos.

Además, nos comentó que, en las Prácticas Calificadas, Examen Parcial (ver Anexo) se evalúan ejercicios algebraicos donde predominan los procesos algebraicos, como, por ejemplo: levantar la indeterminación en un límite de una función racional indeterminado en el punto en estudio, pero que en los exámenes toman en cuenta las demostraciones (Ver en el Anexo, el Examen Parcial).

También nos expresó que los textos que se utilizan como referencia es el libro de Calculo I por Mitacc y Toro, en el cual predomina el Registro Algebraico (en estudio). También la profesora nos expresó que, al iniciar el tema de Límites de una función, motiva a sus alumnos el tema con aproximaciones, donde evalúa la función en un número considerable de puntos para ver a dónde tienden las imágenes, utilizando la aproximación numérica. Es decir, el Registro Tabular; para luego introducir la definición formal del límite de una función debido a Weierstrass y luego resuelven ejercicios de la guía que son elaboradas para este fin, tomando en cuenta algunos ejercicios que hacen que se utilice la racionalización o el conjugado.

2. ¿En qué porcentaje cumple con el Silabo elaborado para el alumnado del Curso Cálculo I, sobre el tema de límites?

   Con el 100% del silabo

3. Estadísticamente, ¿qué porcentaje de aprobados suele tener en el tema de límites? y ¿cómo se ve su aprendizaje con relación a los demás temas?,

   De 33 alumnos matriculados, quedaron 22 alumnos de ellos 4 alumnos desaprobaron

4. ¿Qué tipos de ejercicios utiliza en su proceso de enseñanza – aprendizaje en relación a la pregunta anterior?

La profesora, nos afirmó que pone énfasis en los ejercicios algebraicos, pero que en límites laterales lo realizan siguiendo ejercicios, tanto del tipo algebraico como gráfico.

5. ¿Cómo son las preguntas en las evaluaciones y en los exámenes?

   En este sentido, nos comentó que, en las Prácticas Calificadas, Examen Parcial (ver Anexo) se evalúan ejercicios algebraicos, donde predominan los procesos algebraicos. Por ejemplo: levantar la indeterminación en un límite de una función racional indeterminado en el punto en estudio, pero que en los exámenes toman en cuenta las demostraciones (Ver en el Anexo, el Examen Parcial).

6. ¿Cuáles son los textos de consulta y los de ejercicios que utilizan los alumnos en el curso?

   En relación a esta pregunta, nos expresó que los textos que se utilizan como referencia, para su labor docente, está conformado entre otros por el libro de Calculo I de los profesores Mitacc y Toro, en el cual predomina el Registro Algebraico y también utilizan el de Steward para las aplicaciones.

7. ¿Cómo desarrolla el contenido del curso?

   La profesora Maruja nos expresó que, al iniciar el tema de Límites de una función, motiva a sus alumnos el tema con el uso de las aproximaciones, donde evalúan la función en un número considerable de puntos para ver a dónde tienden las imágenes utilizando la aproximación numérica. Es decir, el Registro Tabular; para luego introducir la definición formal del límite de una función debido a Weierstrass y luego resuelven ejercicios de la guía que son elaboradas para este fin, tomando en cuenta algunos ejercicios que hacen que se utilice la racionalización o el conjugado.

8. ¿Hay asesorías?

   Para los alumnos que tienen dos repitencias.

9. ¿Qué modificaciones le haría al curso?

El incremento de horas. La hora pedagógica es de 45 minutos. Tenemos cinco horas a la semana distribuidas en tres horas de teoría y dos de práctica, que resultan insuficientes. El curso, en las áreas de ingenierías, consta de seis horas.

10. ¿Hace un diseño didáctico para el dictado de clases?

No. En las clases de práctica, los alumnos salen a la pizarra virtual y comienzan a resolver un ejercicio asignado y, si hay dificultades, les aclaro la dificultad.

11. ¿Qué criterios utilizan para elegir las preguntas en la evaluación?

En las prácticas calificadas, esperamos que se enfrenten, por ejemplo, a límite de funciones irracionales donde apliquen propiedades algebraicas, tales como diferencia de cubos, factorización, límites de funciones racionales y límites trigonométricos.

En el Examen Parcial, evaluamos una demostración sencilla de la definición del límite de una función racional

12. ¿Considera en sus ejercicios de clase ejercicios del tipo: si $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$? ¿Se puede determinar qué forma tiene $f(x)$?.

No, profesora.