

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



Espacio de Trabajo Matemático: una propuesta didáctica sobre
perímetro y área de cuadriláteros para sexto grado de primaria

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las
Matemáticas que presenta:

Camila Diles Gonçalves

Asesora:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Lima, 2023

Declaración jurada de autenticidad

Yo, Jesus Victoria Flores Salazar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis de investigación titulada: “Espacio de Trabajo Matemático: una propuesta didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros para sexto grado de primaria” de la autor (a) Camila Diles Gonçalves, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 18%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 06/03/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y confirmo que cada una de las coincidencias detectadas no constituyen plagio alguno.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: San Miguel, 09 de marzo del 2023.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: <u>Flores Salazar, Jesús Victoria</u>	
DNI: 08342853	Firma 
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X	

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo analizar el trabajo matemático que se promovería en una propuesta didáctica que se plantea para estudiantes de sexto grado de primaria sobre perímetro y área de cuadriláteros (específicamente cuadrados y rectángulos) con el uso de diferentes artefactos. Para el análisis respectivo se tomó en cuenta aspectos teóricos y metodológicos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

La metodología utilizada es de tipo cualitativa, la cual permite analizar la realidad describiendo e interpretando los fenómenos a través de los significados, y para esto se realizó una adaptación del conjunto de fases propuestas por Hernández et al. (2014), donde se toma en cuenta desde el planteamiento del problema hasta las conclusiones y perspectivas futuras. La propuesta didáctica incluye tres tareas, las cuales fueron pensadas y construidas a la luz de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático, con el objetivo de favorecer la utilización de diferentes artefactos para resolverlas.

Con base en las acciones matemáticas esperadas, el análisis de la propuesta didáctica busca evidenciar la activación de las tres génesis: génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva, dando énfasis en la activación de la génesis instrumental. Por otro lado, también se espera la activación de los tres planos verticales, el Semiótico-Instrumental, Semiótico-Discursivo e Instrumental-Discursivo, siendo el Semiótico-Instrumental el plano vertical que aparece con más frecuencia. Asimismo, también se hace referencia a la caracterización de los paradigmas en el dominio de la geometría, entre los cuales, se evidencian los paradigmas de la Geometría natural (GI) y la Geometría axiomática natural (GII), además la GI aparece en las tres tareas de la propuesta didáctica.

Palabras clave: Perímetro y Área; Cuadriláteros; Espacio de Trabajo Matemático, Acciones Matemáticas, Génesis.

Abstract

This research aims to analyze the mathematical work that would be promoted in a didactic proposal proposed for sixth-grade students on the perimeter and area of quadrilaterals (specifically squares and rectangles) using different artifacts. For the respective analysis, theoretical and methodological aspects of the Mathematical Work Space (MWS) theory were considered.

The methodology used is of a qualitative type, which allows analyzing reality by describing and interpreting the phenomena through the meanings, and for this, an adaptation of the set of phases proposed by Hernández et al. (2014), where it is considered from the problem statement to the conclusions and future perspectives. The didactic proposal includes three tasks designed and built-in light of the Mathematical Work Space Theory to favor using different artifacts to solve them.

Based on the expected mathematical actions, the analysis of the didactic proposal seeks to demonstrate the activation of the three geneses: semiotic genesis, instrumental genesis, and discursive genesis, emphasizing the activation of instrumental genesis. On the other hand, the activation of the three vertical planes is also expected: the Semiotic-Instrumental, Semiotic-Discursive, and Instrumental-Discursive, with the Semiotic-Instrumental being the vertical plane that appears most frequently. Likewise, reference is also made to the characterization of the paradigms in the geometry domain, among which the paradigms of Natural Geometry (GI) and Natural Axiomatic Geometry (GII) are evident; in addition, GI appears in the three tasks of the didactic proposal.

Keywords: Perimeter and Area; Quadrilaterals; Mathematical Work Space, Math Actions, Geneses.

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo analisar o trabalho matemático que seria promovido em uma proposta didática para alunos do sexto ano do ensino fundamental sobre perímetro e área de quadriláteros (especificamente quadrados e retângulos) com o uso de diferentes artefatos. Para a respectiva análise, foram levados em consideração aspectos teóricos e metodológicos da teoria do Espaço de Trabalho Matemático (ETM).

A metodologia utilizada é de tipo qualitativo, que permite analisar a realidade descrevendo e interpretando os fenômenos por meio de significados, e para isso uma adaptação do conjunto de fases proposto por Hernández et al. (2014), onde é levado em consideração desde o enunciado do problema até as conclusões e perspectivas futuras. A proposta didática contempla três tarefas, que foram pensadas e construídas à luz da Teoria do Espaço de Trabalho Matemático, com o objetivo de favorecer o uso de diferentes artefatos para resolvê-las.

Com base nas ações matemáticas esperadas, a análise da proposta didática busca demonstrar a ativação das três gêneses: gênese semiótica, gênese instrumental e gênese discursiva, enfatizando a ativação da gênese instrumental. Por outro lado, espera-se também a ativação dos três planos verticais: Semiótico-Instrumental, Semiótico-Discursivo e Instrumental-Discursivo, sendo o Semiótico-Instrumental o plano vertical que mais aparece. Do mesmo modo, também é feita referência à caracterização dos paradigmas no domínio da geometria, entre os quais se destacam os paradigmas da Geometria Natural (GI) e da Geometria Axiomática Natural (GII), além disso o GI aparece nas três tarefas da proposta didática.

Palavras-chave: Perímetro e Área; Quadriláteros; Espaço de Trabalho Matemático, Ações Matemáticas, Gênesis.



Dedicado a mis padres porque siempre me apoyaron en todas mis decisiones y aunque lejos, sé que cada día están vibrando por mi éxito y mis logros. Dedico a mi hermana que es mi mejor amiga, que siempre está presente y es la persona que más cree en mi potencial en este mundo. Dedico a mi mejor compañera Sandra, que pasó noches despierta conmigo solo para hacerme compañía durante mis amanecidas de investigación, que me apoyó en todas las dificultades y que nunca me dejó desistir. A todos, gracias, por ayudarme a ser la mejor versión de mí misma cada día, los amo.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por estar siempre presente desde el primer día que se presentó como mi asesora, por guiarme siempre con dedicación en todos los momentos. Sus consejos, sus observaciones, sus sugerencias, su apoyo, sus correcciones de mi “portuñol” me ayudaron cada día lograr un poco más y concluir esta investigación.

A los miembros del Jurado, las Dra. Verónica Neira Fernández y Dra. Daysi Julissa García Cuéllar por sus valiosos aportes para la mejora de esta investigación.

Al Mg. Jorge Vivas Pachas, por su apoyo y disposición para ayudar y guiar en el proceso de la construcción del análisis de la propuesta didáctica de esta investigación. Por donarme su tiempo para reunirnos, por estar siempre disponible, aunque fuera en las noches y por nunca negarme su ayuda.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM- PUCP) y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático - PUCP (RIITMA) por todo el apoyo brindado para la debida realización de esta tesis.

A cada uno de los profesores que tuve el privilegio de conocer durante estos dos años como estudiante de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de Pontificia Universidad Católica del Perú, por su paciencia, dedicación y por estar siempre abiertos a apoyarme en mi etapa de estudiante.

A todos los amigos que hice durante estos dos años de estudio, principalmente a Jorge, Cinthia y Segundo, que me acogieron, me invitaron a sus grupos, por todos los trabajos en equipos realizados con cada uno, por los apoyos en los grupos de WhatsApp y por todo el aprendizaje compartido.

A mis padres y a mi hermana que siempre demostraron lo orgullosos que son de mí y que siempre están ahí para escucharme, aunque estemos a 5000 kilómetros de distancia.

A mi compañera Sandra Ramírez, por brindarme su apoyo en todos los momentos en el Perú, por esta siempre a mi lado, por no medir esfuerzo para apoyarme y por haber demostrado todo este apoyo en los diferentes imprevistos que surgieron en estos dos años.

ÍNDICE

	Pág.
ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE FIGURAS.....	x
Introducción	12
Capítulo I: Problemática.....	14
1.1 Investigaciones de referencia.....	14
1.2 Justificación.....	27
1.3 Aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático.....	32
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación	37
1.5 Metodología y procedimientos metodológicos	38
Capítulo II: Perímetro y área de cuadriláteros.....	41
2.1 Aspectos matemáticos del perímetro y área de cuadriláteros.....	41
2.2 Aspectos didácticos del perímetro y área de cuadriláteros	45
Capítulo III: Propuesta didáctica	55
3.1 Descripción.....	55
3.2 Estrategia para analizar la secuencia didáctica de la propuesta.....	55
3.3 Secuencia didáctica de la propuesta.....	57
3.4 Análisis	61
Conclusiones	80
Referencias.....	82
Anexos	86

ÍNDICE DE TABLAS

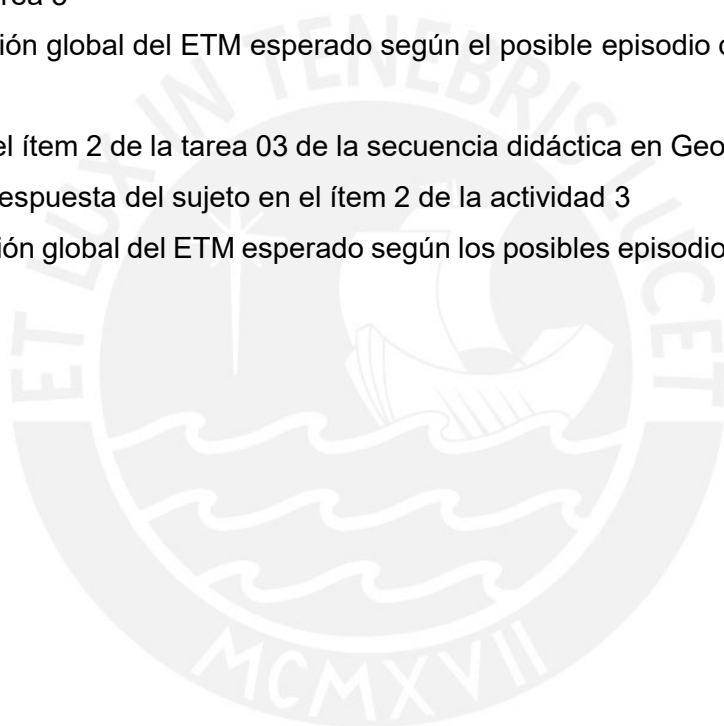
Tabla 1. Descripción de las etapas adentro y afuera del análisis basada en el ETM	56
Tabla 2. Episodios en las tareas presentadas en la propuesta	60
Tabla 3. Resume del análisis basado en el ETM	78



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Competencia en el Currículo Nacional de la Educación Básica	29
Figura 2. Desempeños de sexto grado de primaria	29
Figura 3. Temas evaluados en la prueba PISA	31
Figura 4. Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis	33
Figura 5. Planos verticales en el Espacio de Trabajo Matemático	35
Figura 6. Procedimientos metodológicos de la tesis	38
Figura 7. Representaciones primitivas de la geometría en el Fundamentos de Matemática Elemental	42
Figura 8. Cuadriláteros: Rectángulo y cuadrado	43
Figura 9. Perímetro y área del cuadrado y del rectángulo	44
Figura 10. Captura que indica cómo los estudiantes deben trabajar cada actividad	46
Figura 11. Tarea 01 - Relacionamos el área y el perímetro, Unidad 06	47
Figura 12. Tarea 02 - Relacionamos el área y el perímetro, Unidad 06	49
Figura 13. Tarea 03 - Relacionamos el área y el perímetro, Unidad 06	50
Figura 14. Tarea 04 – Las cometas	52
Figura 15. Actividades de la tarea 04 – actividades de la tarea 04 sobre Las cometas	53
Figura 16. Tarea 1 de la secuencia didáctica	57
Figura 17. Tarea 02, ítem 1 y 2 de la secuencia didáctica	58
Figura 18. Actividad sobre el perímetro y área de cuadrados en Mathigon	59
Figura 19. Applet de la tarea 03 de la secuencia didáctica en GeoGebra	59
Figura 20. Representación de un rectángulo cualquiera para representar el perímetro	61
Figura 21. Representación de un rectángulo cualquiera para representar el área	62
Figura 22. Representación de algunos polígonos cualquiera	62
Figura 23. Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 1 - ítem 1	63
Figura 24. Representación del cuadrado y del rectángulo en que se solicita el área y perímetro del ítem 2	64
Figura 25. Representación del cuadrado y del rectángulo con las longitudes en cada lado	65
Figura 26. Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 1 - ítem 2	66
Figura 27. Representación del dibujo del terreno de 14m x 8m en la malla cuadriculada	67

Figura 28. Representación de la posible construcción de los espacios del plano de la casa que podría realizar un estudiante	68
Figura 29. Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 2 - ítem 1	69
Figura 30. Representación de los cuadriláteros del cuarto1 y de la sala comedor con sus longitudes	70
Figura 31. Descripción global del ETM esperado según el posible episodio de la tarea 2 - ítem 2	72
Figura 32. Representación de la solución de los perímetros y área de los cuadrados presentados en el ítem 1 de la tarea 3	73
Figura 33. Descripción global del ETM esperado según el posible episodio de la tarea 3 - ítem 1	74
Figura 34. Applet del ítem 2 de la tarea 03 de la secuencia didáctica en GeoGebra	74
Figura 35. Posible respuesta del sujeto en el ítem 2 de la actividad 3	75
Figura 36. Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 3 - ítem 2.	77



Introducción

La geometría es un área de la matemática que los estudiantes comienzan a aprender desde la primaria, poco a poco va evolucionando durante los años y aumentando el nivel de dificultad, así como añadiendo nuevos conocimientos para los estudiantes. Conocer y saber diferenciar entre el perímetro y área de un polígono son algunos de los conceptos importantes dentro de la geometría plana. Los primeros polígonos que se estudian en los niveles de primaria son los triángulos y los cuadriláteros, por eso es común que al inicio de este aprendizaje el estudiante pueda llegar a confundir estos términos.

En el Perú, el sexto grado (de 10 a 12 años) es el último grado de la primaria, después, se inicia la etapa secundaria. Los estudiantes que culminan la primaria con un buen nivel de aprendizaje llegarán a la secundaria con mayor confianza y con una mejor base para seguir aprendiendo. Debido a la pandemia muchos colegios en el mundo y en el Perú empezaron a adaptarse a la enseñanza digital, es decir, clases virtuales en plataformas como Zoom y Meet, pizarras digitales como Jamboard y Bitpaper, Classroom para funcionamiento de las clases, entre otros, todo esto para lograr continuar con los estudios de millones de estudiantes en estos últimos dos años, con esto muchos recursos tecnológicos fueron añadidos a este formato de enseñanza, como los mencionados.

Una primera cuestión que generó el interés de esta investigación es asociar la enseñanza del perímetro y área de cuadriláteros con el uso de artefactos tecnológicos para posibilitar a los estudiantes una alternativa para aprender estos conceptos. Pues el contenido de perímetro y área de polígonos son temas en que los estudiantes generalmente presentan dificultades y muchas veces comprenden de manera equivocada, sobre todo al trabajar con perímetro y área de cuadriláteros.

El interés de esta investigación también está relacionado, a mi experiencia como profesora con más de 10 años enseñado en diferentes colegios en Brasil y en Perú, en diferentes grados y niveles educativos. En mi práctica docente pude observar que los estudiantes presentan dificultades cuando trabajan el concepto de perímetro y área, muchas veces incluso, los estudiantes calculan la medida del área cuando se les pide el perímetro y viceversa. Por otro lado, en las investigaciones de referencia se muestra que estas dificultades de comprensión entre el perímetro y el área son recurrentes.

En base a mi experiencia profesional y a las investigaciones que revisé sobre este tema, parte el interés de realizar una investigación en la que se hace una propuesta didáctica para

diferenciar las nociones de perímetro y área de cuadriláteros con estudiantes de sexto grado de primaria, para que logren comprender el concepto de perímetro y área, así como comprender la diferencia que existe entre estos conceptos.

Para la construcción de la propuesta didáctica, esta tesis está organizada en tres capítulos: en el capítulo I, se hace referencia a la problemática del tema a ser analizado en esta tesis, en este caso el perímetro y área de cuadriláteros. En pos de comprender esta problemática, se hace un recuento de las investigaciones de referencia relacionadas al objeto de estudio, a la tecnología y a la teoría. Luego, en la justificación se hace una comparación entre lo obtenido de las investigaciones de referencia y lo que se pretende investigar, adicionalmente se hace un recuento de diversos documentos oficiales como los currículos nacionales de la educación básica en Perú y en Brasil, pruebas internacionales y otros. Se presentan, además, los aspectos teóricos del Espacio de Trabajo matemático, la pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos de esta investigación, así como la metodología y los procedimientos metodológicos.

En el capítulo II, se presentan los aspectos matemáticos y didácticos del objeto de estudio. Con relación a los aspectos matemáticos, se utiliza como referencia el libro de Dolce y Pompeo (2013), donde se puede observar tanto la parte histórica de los objetos matemáticos perímetro y área del cuadrilátero, así como su definición, propiedades y características. Con relación a los aspectos didácticos del objeto de estudio, se hace un análisis a la luz del ETM de un libro de actividades del sexto grado de primaria, correspondiente al año 2019 del Ministerio de Educación del Perú, en la unidad que se trabaja los temas de perímetro y área de cuadriláteros.

Para el capítulo III, se trabaja la propuesta didáctica, la cual está dividida en cuatro partes importantes: la descripción, en la que se describe como son las tareas de la propuesta didáctica; el método para analizar la propuesta didáctica, lo cual indica como la propuesta será analizada una vez que exista las posibles soluciones para las tareas; la secuencia didáctica de la propuesta, la cual se muestra más detalladamente cada una de las tareas con sus propósitos y por último el análisis, para el cual se utiliza el método propuesto por Kuzniak y Nechache (2019) para determinar si los objetivos específicos, así como el objetivo general de la tesis fueron o no alcanzados.

Capítulo I: Problemática

En este primer capítulo se presentan las investigaciones referentes y la justificación que muestra la importancia de este estudio. Además, los aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que lo fundamentan, así también la pregunta de investigación, los objetivos general y específicos y, por último, los aspectos metodológicos.

1.1 Investigaciones de referencia

Para comprender la necesidad de realizar la presente investigación se han considerado investigaciones en Educación Matemática relacionadas al estudio de los cuadriláteros, de las nociones de área y perímetro. Así mismo investigaciones en las que la tecnología se utiliza como herramienta en la construcción de estos conceptos (área y perímetro). Y también se consideran estudios que utilizan como base teórica el Espacio de Trabajo Matemático, asociado a la enseñanza de los objetos geométricos.

Investigaciones relacionadas al estudio de los cuadriláteros

Respecto al estudio de los cuadriláteros, se cuenta con la investigación de Carhuapoma y Huamán (2018) que tuvo como objetivo establecer la influencia del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de estos objetos. Este estudio se llevó a cabo con un grupo de 12 estudiantes de cuarto grado de secundaria (14 - 15 años) de un colegio en Huancavelica, provincia del Perú.

Esta investigación, de tipo cuantitativa y de nivel explicativo, hizo uso del método científico y para ello se tuvo en cuenta la variable independiente (modelo de Van Hiele) para observar la variable dependiente (aprendizaje de los cuadriláteros). Se utilizó el método experimental, con una prueba de entrada antes de la aplicación de la actividad la cual arrojó que los 12 estudiantes se encontraban en el nivel de inicio con respecto al aprendizaje de los cuadriláteros, dado que el modelo de Van Hiele, contiene cuatro niveles (inicio, en proceso, logro previsto y logro destacado). Después de la aplicación de la actividad se realizó la prueba de salida, en la que se constataron los siguientes resultados de acuerdo a los niveles del modelo de Van Hiele establecidos: 1 estudiante en proceso, 5 estudiantes en logro previsto y 6 estudiantes en logro destacado. Una de las conclusiones más relevantes de este estudio fue que la mitad de los estudiantes lograron salir del nivel inicial al logro destacado y el resto lograron pasar al logro previsto y en proceso; lo que demuestra que el uso del modelo de Van Hiele, como fundamento para la elaboración de la secuencia didáctica en el aprendizaje de los cuadriláteros, fue satisfactoria.

Investigaciones relacionadas al estudio de las nociones de área y perímetro

Respecto al estudio de las nociones de área y perímetro se precisa la investigación de Castillo (2018), la cual se basó en una secuencia didáctica con estudiantes de segundo grado de secundaria (12-13 años) en Perú, con el objetivo de implementar la enseñanza de reconfiguración de polígonos para el aprendizaje del área. La investigación es del tipo cualitativa pues está centrada en analizar y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionada con el objeto de estudio (área de polígonos). La docente fue la investigadora y observadora, además, del grupo de 13 estudiantes del segundo grado de secundaria de un colegio en Lima que participaron de la actividad, fueron analizados 2 de ellos. Las actividades vienen también de niveles anteriores, como en tercer grado de primaria (estudiantes de 8 años) donde aprenden el concepto de área, también en cuarto de primaria (estudiantes de 9 años) donde empiezan a usar las fórmulas para encontrar el área de un polígono.

Para la investigación fueron elaboradas dos actividades, la primera usando el Tangram para realizar reconfiguraciones del área de los polígonos comparando las áreas de formas diferentes. En la segunda actividad se utilizó la malla cuadrículada para que los estudiantes apliquen sus conocimientos de reconfiguración además de una prueba diagnóstica para medir los conocimientos previos de estos estudiantes. Dentro de esta investigación cualitativa se consideraron aspectos de Ingeniería Didáctica, realizándose análisis a priori de cada una de las actividades, esperando una respuesta por parte de los estudiantes, y luego un análisis a posteriori con el resultado de las respuestas de los dos estudiantes seleccionados. En esta investigación se concluyó que los estudiantes tienen dificultades al calcular el área y que estas dificultades están asociadas al uso de una fórmula y que muchas de estas dificultades están relacionadas con la didáctica aplicada por el docente ya que no se brindan las oportunidades para la construcción de este concepto (área), lo que causa que sea muy común el olvido de lo aprendido.

Además, la autora también indica que es muy común que algunos procedimientos no sean enseñados por el docente, por ejemplo, la reconfiguración; demostrando así que la investigación aplicada a estudiantes de segundo grado de secundaria es relevante para poder aportar al aprendizaje de la geometría.

El marco teórico utilizado, constituido por aspectos de la teoría de Registros de Representaciones Semióticas, facilitó a los estudiantes encontrar la medida de área de polígonos usando la reconfiguración, ya que durante la actividad los estudiantes lograron configurar diferentes polígonos en la malla cuadrículada y en el Tangram, para determinar la medida del

área. Además, la autora indica que la pregunta de investigación fue respondida y el objetivo general fue alcanzado. Se destaca de este estudio la parte experimental en donde se utilizaron el Tangram y la malla cuadrículada para propiciar la reconfiguración. Para esta investigación, la malla cuadrículada constituye un aspecto fundamental para trabajar la noción de área y perímetro, en la enseñanza aprendizaje de la geometría.

Aguiar (2019) realizó una investigación la cual tuvo como objetivo dar cuenta del enfoque que es dado a la longitud y perímetro en los libros de texto didácticos de matemática del primero al noveno grado de la enseñanza fundamental en Brasil (libros para estudiantes de 6 a 14 años) en los que se analiza cómo y cuándo aparece el objeto matemático de longitud como la distancia entre dos puntos que, en una figura geométrica, es presentada como lado de esta y el perímetro como la suma de las longitudes de una figura geométrica. Se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico como referencial teórico, donde la longitud y el perímetro son considerados como magnitudes. Fue realizado un análisis documental, con foco en las preguntas: ¿cómo y cuándo la longitud y el perímetro deben ser enseñados a los estudiantes? ¿de qué forma es conducido en los libros didácticos la enseñanza de este objeto matemático?, con base en las investigaciones de Regine Douady y Marie Jeanne Perrin-Glorian - que analizan y resaltan la necesidad de diferenciar y articular los dominios básicos de la longitud como el dominio geométrico, el de las magnitudes y el de los números.

Para la realización del análisis de los libros de textos se observa algunos puntos: del primero al noveno grado, la longitud está como un tema a ser abordado en todos los años; la longitud y el perímetro siempre aparecen al final del libro en las últimas unidades; en el primer grado (estudiantes de 6 años), él se presenta con concepto de grandezas y medidas, y la medida de la longitud, lo que indica el trabajo numérico de la longitud; en el segundo y tercer grado (estudiantes de 7 y 8 años) el tema aparece en unidades no padronizadas y padronizadas de forma explícita; en el cuarto grado (estudiantes de 9 años) ya no se presenta el tema explícitamente; en el sexto grado (estudiantes de 11 años) la longitud aparece como un subtema de alguna unidad; en el séptimo grado (estudiantes de 12 años) no aparece nada explícitamente sobre longitud y perímetro; en el noveno grado (estudiantes de 14 años) se puede observar la conexión implícita de las razones trigonométricas en la longitud además de la longitud y perímetro de la circunferencia.

Para el análisis de los libros didácticos Aguiar (2019) toma en cuenta lo que se propone que sea enseñado en los documentos curriculares oficiales de Brasil. Considerando que la investigación usa la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como referencial teórico, los

criterios de análisis adoptados son identificar las organizaciones matemáticas y didácticas para el estudio del objeto; y las conexiones entre la longitud y el perímetro con otros objetos matemáticos.

La investigadora identifica los tipos de tareas relacionadas a la longitud, así como sus subtipos, los cuales son analizados uno a uno relacionando la cantidad de veces que aparecen en los libros didácticos analizados. El mismo procedimiento se hace con las tareas relacionadas al concepto de perímetro y los subtipos de tareas, lo que permite llegar a conclusiones relacionadas al análisis; tales como los años en que un determinado tipo de tarea aparece más y las conexiones que hacen. También se hace una caracterización de las organizaciones didácticas en las unidades en que el objeto aparece, siempre en las últimas unidades del libro. Se hace un análisis ecológico, es decir, el aspecto de cuestionar la existencia o inexistencia real de este objeto en la institución donde vive una determinada organización matemática, de la longitud y el perímetro en los libros analizados considerando todos los momentos en que aparece el concepto, sea en las unidades en que se presenta el tema explícitamente y/o implícitamente.

La investigación mostró que todos los libros analizados presentaron unidades con ejercicios relacionados a los conceptos, por ejemplo, la modelización de la praxeología matemática fue presentada en seis tareas y el concepto del perímetro en cuatro tareas. Se verificó la importancia de la relación de longitud y perímetro que presentan situaciones que dan prioridades y fortalecen el aprendizaje de este objeto matemático.

De esta investigación se considera relevante las conexiones de longitud y perímetro que se plantean en las tareas cuando se trabajan con objetos de otros dominios como geometría y números y operaciones, así como conexiones en uso, desplazamientos, distancias, en vida y uso social, en geografía, deportes, entre otros. Estas consideraciones son tomadas en cuenta en el planteamiento de la propuesta didáctica de este estudio.

El trabajo de Ott et al. (2021), el cual presenta y analiza la implementación del aula invertida para la enseñanza de los polígonos y los conceptos de área y perímetro. El aula invertida consiste en realizar en casa lo que se realizaba en la clase tradicional, además implementa una enseñanza con aulas menos expositivas en las que los alumnos logran participar de forma más efectiva, una estrategia comúnmente trabajada en las ciencias humanas, siendo un reto el poder implementarlo en ciencias exactas. De acuerdo con los autores, la geometría es un área importante de la matemática, es por ello por lo que con su investigación buscan trabajar el concepto de polígonos y sus propiedades, haciendo uso del aula invertida.

Esta investigación constituye una intervención pedagógica, utilizando los presupuestos teóricos presentados por Damiani et al. (2013, como se citó en Ott et al., 2021). Fue aplicada en diecinueve estudiantes del octavo grado (estudiantes de 12 a 14 años) de la enseñanza básica de un colegio público en el sur de Brasil y se realizó en el segundo semestre de 2019 en 15 sesiones de 45 minutos. Se usó un grupo de WhatsApp como ambiente informal de aprendizaje, en este grupo se enviaron mensajes con links de videos del profesor en YouTube, donde los estudiantes y sus padres pudieron tomar conocimiento de la metodología de enseñanza y de sus obligaciones como padres y alumnos. Los videos tenían una duración máxima de 10 minutos y estuvieron relacionados al concepto de estudio, afín de lograr el aprendizaje del concepto de los polígonos y sus propiedades.

La implementación de las actividades como parte de la estrategia del Aula invertida se dividieron en cinco secciones; los estudiantes trabajaron con el GeoGebra aplicando conceptos referentes a los polígonos y los usaron para hacer comparaciones geométricas con: la forma de una casa, una nube, etc. También trabajaron el cálculo de las diagonales de un polígono utilizando cartón, tiras de lana y chinchas; construyeron el plano de la planta baja de una casa utilizando lápiz y papel, en donde aplicaron escalas para calcular el área y poder resolver cuanto se necesitaría para realizar la compra de material para la elaboración del piso; o calcular el perímetro para poder saber cuánto material se necesita para la elaboración de los zócalos; además de memes; carteles virtuales, etc.; que son parte de nuestro día a día. De acuerdo con los autores, la realización de esta investigación facilitó la comprensión y el aprendizaje de los polígonos y sus propiedades. Los autores concluyen que la implementación del aula invertida logró ayudar en el aprendizaje de la definición de polígonos y sus propiedades, a través de actividades diferenciadas dentro del software GeoGebra, y actividades prácticas como la construcción de una planta baja de una casa como se mencionó anteriormente.

Investigaciones relacionadas al uso de la tecnología en la enseñanza de los conceptos de área y perímetro

Con relación al uso de la tecnología para la enseñanza de polígonos, se cuenta con el estudio de Hernández (2016), el cual trabajó conceptos del área y volumen con 22 estudiantes de noveno grado (13-17 años) en Colombia. El objetivo de la investigación es implementar una estrategia desde el aprendizaje significativo (modelo Constructivista Teoría del aprendizaje de Ausubel) que se articule con el Origami y la mediación de las tecnologías digitales, relacionadas con el concepto de área y el volumen en el noveno grado relacionado al aprendizaje significativo del reconocimiento de formas y sus respectivas fases, utilizando la manipulación de material

concreto (Origami) y también la mediación con las tecnologías digitales, siendo estas el GeoGebra y el Sweet Home 3D, las cuales ayudaron en el aprendizaje de los conceptos de área y volumen, pues favorecían estrategias que permitían la realización de clases dinámicas en el área de geometría, es decir, clases que utilizan diferentes materiales, clases diferentes de lo tradicional en que solo se utiliza el libro, pizarra y plumón, por ejemplo, para los estudiantes mencionados anteriormente.

Al inicio de la investigación fue aplicada una prueba diagnóstica y con estos resultados fue desarrollada una unidad didáctica con el objetivo de integrar a los conceptos de área y volumen. La tecnología digital fue uno de los puntos de partida utilizados en la investigación a través del uso de GeoGebra y del software Sweet Home 3D. El estudio se dio en nueve etapas, que fueron desde la recopilación de fuentes bibliográficas hasta la publicación de los resultados. En una de estas etapas fue introducida la utilidad de la tecnología para el aprendizaje del concepto de área y volumen. El autor afirma que uso de las herramientas tecnológicas tiene el objetivo de ayudar a que los estudiantes puedan identificar la transición de representaciones bidimensionales y tridimensionales a través de objetos dentro de un contexto real, lo cual fue realizado con el enfoque del estudio de caso que busca indagar sobre las relaciones entre área y volumen. El GeoGebra y el Sweet Home 3D junto al material concreto buscan ilustrar a los estudiantes la apropiación del pensamiento lógico.

Los resultados son presentados para cada uno de los instrumentos en diferentes fases: diagnóstica, de aprendizaje, aplicación de la propuesta educativa, aplicación de la prueba de salida y la apropiación de los conceptos; en donde se observó que los estudiantes utilizaron sus conocimientos previos con los nuevos conocimientos adquiridos usando materiales concretos, logrando que diferencien el área del volumen, la percepción de los objetos individuales en el espacio bidimensional y tridimensional. Como resultado de la investigación, el autor pudo determinar que el modelo de Ausubel permitió que alcanzaran la apropiación de los conceptos de área y volumen mediante los recursos utilizados.

De esta tesis es relevante mencionar la importancia del uso de tecnología digital con el concepto de área y volumen, los cuales son temas pertenecientes al dominio de la geometría además de la utilización de diferentes materiales concretos como la pizarra, por ejemplo. El uso de la tecnología digital es fundamental para esta tesis, porque se trabaja con softwares que ayudaron a comprender el concepto de perímetro y área de cuadriláteros.

Por otro lado, el trabajo de Dahm (2019) presenta un estudio en el que plantea tareas relacionadas con el perímetro y área de figuras geométricas planas, también la utilización de la

mallita cuadriculada y el GeoGebra. El estudio fue aplicado entre el 2017 y 2018 con estudiantes del séptimo grado (12 a 13 años) en Brasil. La parte experimental de la investigación presenta actividades relacionando las figuras geométricas planas y se espera que al final de las actividades el estudiante pueda llegar a las fórmulas para determinar el área de las figuras presentadas. En este estudio se utilizó como referente teórico la teoría de Campos Conceptuales y el Construccinismo. También, se menciona el surgimiento del uso de la computación en la educación y como el computador puede potencializar el conocimiento. Se destaca a los estudiantes como el eje central del aprendizaje, el papel del profesor como articulador de ideas y espacio de conocimiento. La investigadora explica la noción de orden de complejidad para el aprendizaje y como el profesor tiene el papel de crear actividades que vayan subiendo de nivel para que los estudiantes puedan ir adquiriendo el conocimiento. El objetivo de la investigación es entender los argumentos utilizados por los estudiantes en el desarrollo de las actividades de área y perímetro de figuras geométricas planas; qué herramientas utilizaban para este desarrollo; incentivar a los docentes a utilizar el pensamiento matemático para la enseñanza del objeto matemático, en este caso, área y perímetro de figuras geométricas planas.

La autora realizó la primera prueba al grupo de estudiantes, permitiendo que exploren el área y perímetro de figuras geométricas planas a través de la mallita cuadriculada del GeoGebra; con el objetivo de que sean capaces de encontrar fórmulas para calcular el área y perímetro de diferentes figuras. El estudio fue dividido en siete ejercicios creados en el GeoGebra; durante el primer ejercicio, se les permitió a los estudiantes (como primera instancia) utilizar el software para observar algunas figuras geométricas planas como, por ejemplo: el cuadrado y el rectángulo. La segunda actividad fue sobre el estudio de las fórmulas para el área de un cuadrado, de la tercera a la sexta actividad se desarrollaron las fórmulas para el área de diferentes figuras geométricas planas; la séptima actividad fue una aplicación de los conceptos aprendidos. Para el proyecto final antes de las actividades fue hecho un estudio previo de algunos conceptos, estas actividades fueron aplicadas en 2018 con otro grupo también de séptimo grado siguiendo el mismo orden del proyecto inicial pero con algunos cambios en las actividades, la segunda actividad ahora es para el estudio de las fórmulas del cuadrado y del rectángulo, de la tercera a la sexta actividad para el desarrollo de la fórmula del área de otras figuras geométricas; la séptima actividad para la aplicación de los conceptos de perímetros y áreas de figuras geométricas y la octava actividad para la aplicación de los conceptos aprendidos con las fórmulas desarrolladas en las actividades anteriores.

Los resultados mostraron que las actividades motivaron la participación de los

estudiantes, además, se respetaron los procedimientos encontrados por cada alumno y los posibles conflictos debatidos para llegar a una conclusión. La explicación de los estudiantes casi siempre venía acompañada de un diseño, representando la explicación dada por cada uno, al final ellos lograron aprender y tener mayor claridad de los conceptos de perímetro y área.

De esta investigación se destaca la importancia de crear actividades que pueda ir aumentando de nivel, para que los estudiantes puedan ir adquiriendo el conocimiento, lo cual hace referencia a la noción de orden de complejidad para el aprendizaje, empezando de un nivel más bajo y luego ir aumentando este nivel. Este orden de complejidad será considerado en la secuencia didáctica propuesta en esta tesis, iniciando de un nivel más básico de definiciones hasta un nivel más complejo con aplicación de cálculos y justificaciones.

Como es posible observar en las investigaciones de referencia, que hasta el momento se tiene, el objeto matemático área y perímetro de cuadriláteros es relevante, ya que en los trabajos presentados se muestran las dificultades que existen al identificar el área y perímetro de polígonos, en general. Además, en estas investigaciones es posible ver un progreso de los estudiantes que participaron en el estudio y porqué nace el interés de construir una propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de área y perímetro de cuadriláteros direccionada a sujetos en la transición del estudio de primaria para dar inicio a los estudios en la secundaria, es decir, que esta propuesta es pensada para un posible grupo de estudiantes del sexto grado de primaria (alumnos de 10 a 12 años).

El trabajo de Barrios et al. (2018), presenta una secuencia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de área y volumen de poliedros regulares para estudiantes de séptimo grado (13 a 15 años) en Colombia, utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica para este proceso y empleando como fundamentos metodológicos el paradigma hermenéutico, el cual tiene como objetivo aumentar la comprensión al observar otras culturas, grupos, individuos, con base en una perspectiva del presente y del pasado.

Para la creación de la secuencia Barrios et al. (2018), consideraron necesario pasar por diferentes fases, desde la construcción del problema y elaboración del constructo hasta el informe final. Se utilizaron construcciones de poliedros regulares realizados en GeoGebra, para que los estudiantes pudieran observar e interactuar con una representación de diferentes figuras geométricas, ejecutadas en 3D. Los estudiantes pudieron ejecutar movimientos con los deslizadores del programa para identificar el número de caras, altura, área, volumen, entre otros. Como resultado los estudiantes pudieron identificar algunas características, así como los conceptos de área y volumen de los poliedros.

Esta investigación es importante porque presenta al GeoGebra como un artefacto tecnológico que puede ayudar en la interpretación de diversos conceptos de la matemática, como los poliedros así como también en áreas y perímetros de figuras planas. El GeoGebra permite dinamizar el aprendizaje de los conceptos de la matemática, porque facilita a los estudiantes percibir en tiempo real las características geométricas de los objetos matemáticos representados.

También, Jiménez y Jiménez (2017) analizan el comportamiento de estudiantes nativos digitales, es decir alumnos que ya nacieron en una época integrada con la tecnología, donde se muestra el GeoGebra como una opción para la enseñanza de las matemáticas; para la realización del trabajo fueron consultadas diferentes fuentes y documentos.

El problema del aprendizaje de las matemáticas que menciona Jiménez y Jiménez (2017), está en la falta de interés de los estudiantes por aprender, teniendo en cuenta que es una de las asignaturas consideradas más difíciles según esta investigación. Datos de la prueba PISA muestran como estudiantes de México (donde fue realizada esta investigación) están muy por debajo de otros países como Shanghái-China y Singapur. El uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje es beneficioso tanto para el alumno, que desarrolla el pensamiento matemático, como para el docente que desarrolla habilidades para el uso de la tecnología.

Además, según los investigadores, GeoGebra es de fácil acceso tanto para los docentes como para los estudiantes. Por otro lado, los estudiantes de educación básica actual nacieron en una generación tecnológica, lo que permite un manejo más fácil de estas herramientas. También señalan que el uso del GeoGebra proporciona al docente la posibilidad de crear diferentes estrategias para plantear problemas, donde los estudiantes podrán responder a estos problemas explorando las herramientas en el software. Con esto, los autores concluyen que el uso del GeoGebra permite que los estudiantes puedan desarrollar competencias de visualización y manipulación dentro del software para la comprensión de los conceptos matemáticos, facilitando el proceso de aprendizaje, diferente al método tradicional, sin uso de tecnología o herramientas digitales.

Es importante resaltar que esta investigación de Jiménez y Jiménez (2017) considera las ventajas de trabajar en la educación básica actual con el uso de tecnología digital. Este proceso se lleva en consideración para la construcción de la propuesta de esta tesis, considerando que está pensada para sujetos del sexto grado de primaria, los cuales son considerados nativos digitales, según lo mencionado por los autores.

Cuervo (2021), realiza una investigación para comprobar el uso del GeoGebra en la

construcción de polígonos regulares basándose en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau. También, usa el Modelo de Van Hiele que establece cinco niveles que los estudiantes necesitan pasar uno a uno siguiendo un orden, además, esta transición depende más de cómo se enseña que de la edad o madurez. Estas teorías, según la autora, llevan a la comprensión de las propiedades de estos polígonos, utilizando una secuencia didáctica que fue aplicada a estudiantes de entre 12 a 13 años del séptimo grado de una institución educativa en Colombia. Este trabajo tuvo como objetivo general la implementación de situaciones didácticas para generar interacciones a didácticas a través de la utilización del software GeoGebra que lleven a la comprensión de los elementos geométricos en el objeto de estudio, que en este caso fueron los polígonos regulares, en el grupo de estudiantes citados anteriormente. La relación entre la TSD y los niveles del Modelo de Van Hiele aparecen en cada actividad diseñada en la secuencia didáctica.

La metodología propuesta por la autora es cualitativa, hace uso de la ingeniería didáctica en la que se establecen cuatro fases. La primera es el análisis preliminar, esta fase es utilizada para dar respuesta al primer objetivo específico de la investigación a través del análisis epistemológico de los contenidos que son contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y los efectos que tiene y el análisis de las concepciones de los estudiantes.

El diseño de las diferentes situaciones didácticas se construyó pensando en las interacciones con GeoGebra. La segunda fase es la de concepción y el análisis a priori, la cual está relacionada con el segundo objetivo específico de este trabajo, se utilizan las variables micro didácticas en que se permite a partir de la construcción de polígonos regulares la comprensión de sus propiedades. En la fase de experimentación, se implementan los problemas diseñados de acuerdo con la Teoría de Situaciones Didácticas y al modelo de Van Hiele. La aplicación de la secuencia didáctica se realizó de forma presencial, siguiendo los protocolos de COVID establecidos por la institución de enseñanza. En la última fase, el análisis a posteriori, se analizan los datos, las observaciones, las producciones de los estudiantes durante la aplicación de la secuencia didáctica para que puedan ser comparados con el análisis a priori y realizar la validación de las hipótesis que fueron formuladas en esta investigación.

Como refiere Cuervo (2021), es importante tener en cuenta que los resultados obtenidos en la investigación, en la que se utilizó GeoGebra, también dependen del dominio que el docente y el estudiante tengan para manejarlo, así como la metodología empleada por el docente para la utilización de este como herramienta de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático, en este caso, los polígonos regulares. Por otro lado, en el grupo de estudiantes de edades entre 12

a 13 años del séptimo grado que participó del estudio, se demostró la existencia de dificultades en relación con la comprensión de la teoría sobre polígonos regulares, lo que evidenció que los estudiantes carecían de conocimientos previamente adquiridos en años anteriores, los cuales eran necesarios para el estudio realizado. Los estudiantes también demostraron falta de motivación, falta de dominio sobre el tema en las actividades propuestas, dificultades para interpretar y resolver problemas. Además, la autora menciona la falta de estrategias por parte de los docentes para facilitar el aprendizaje a los estudiantes, lo que se convierte en un factor importante a resolver para poder mejorar la enseñanza de polígonos.

En la investigación se diseñaron cinco situaciones didácticas con el objetivo de favorecer la comprensión de las propiedades de los polígonos regulares, a los estudiantes de séptimo grado (11 - 13 años). En las conclusiones de la investigación, se destaca la importancia del uso del GeoGebra y que los estudiantes interactúan con este software para construir figuras geométricas como el triángulo, el cuadrado y el pentágono, también se observó que los estudiantes utilizaron sus conocimientos previos, pudieron intercambiar información y usaron el razonamiento intuitivo para comunicar los resultados. Por otro lado, se concluye que los estudiantes pudieron fortalecer sus conocimientos geométricos debido a que supieron utilizar el modelo de Van Hiele con la teoría de situaciones didácticas.

Se destaca en este estudio la importancia del dominio del docente y del estudiante para el manejo de tecnología digital como el software GeoGebra, lo que fue tomado en cuenta en esta investigación para la construcción de las tareas de la secuencia didáctica.

Investigaciones relacionadas con el Espacio de Trabajo Matemático, asociado al estudio de la geometría

Con relación al Espacio de Trabajo Matemático se presenta el estudio de Cervantes-Barraza et al. (2021), que tuvo como objetivo caracterizar el Espacio de Trabajo Geométrico de profesores de matemática en formación inicial. De acuerdo con los autores la geometría es reconocida como un área importante de las matemáticas, está presente desde los primeros años escolares hasta la vida universitaria. En la etapa de la educación básica, la enseñanza de la geometría aborda dos enfoques: la geometría sintética que se relaciona con el uso de lápiz, papel, regla y compás sin referencias para solucionar problemas geométricos, y la analítica que está relacionada con los objetos matemáticos en los que se necesita una definición, además son representados en un sistema de referencia (el plano cartesiano). En este sentido, los autores usan problemas que involucran la articulación entre la geometría sintética y analítica para lograr

caracterizar el espacio de trabajo geométrico de los profesores de matemática que se encuentran en formación.

En esta investigación de tipo cualitativa, está fundamentada en una estrategia investigativa clínica, puesto que este método permite recolectar y analizar la forma como piensan las personas que participaron de la entrevista, la cual contiene preguntas del objeto de estudio. Participaron cuatro estudiantes del último ciclo de la carrera de formación de docentes en matemática de una universidad de Colombia, los cuales pasaron previamente por tres cursos de geometría (Geometría I, Geometría II y Geometría Analítica), así como dos cursos de tecnologías de la información y comunicación (TIC).

Para la recolección de datos los investigadores implementaron entrevistas semiestructuradas, grabaciones de vídeo y transcripciones, que permitieron analizar las producciones escritas y orales de los estudiantes participantes. Para involucrar a los estudiantes en la construcción del ETG personal, se planteó un problema dentro de la geometría en el contexto de la construcción del lugar geométrico parábola, y así poder analizar la transición entre la geometría sintética y analítica. Para el análisis de los datos se realizó un análisis previo de los posibles resultados en que permitió identificar situaciones que pueden presentarse en la resolución de un problema y hacer un contraste con un análisis posterior para validarlos.

De esta investigación se concluyó que los ETG de los profesores en formación permiten reconocer elementos importantes entre la geometría euclidiana y analítica, los cuales pudieron ser identificados a través de los argumentos expuestos y razonamientos empleados, además de deducciones lógicas por los docentes en formación que sintetizan los espacios de trabajos geométricos personales. Los profesores en formación que no lograron hacer la transición entre los elementos de la geometría tienen dificultades con el desarrollo de problemas que involucran el tratamiento de expresiones algebraicas. Se evidenció que estos tienen dificultades para traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático. Además, se pudo concluir que los espacios de trabajo de los profesores en formación generalmente activan la génesis semiótica que está relacionado al significado que un individuo construye a través de la visualización del objeto y de los signos matemáticos, la cual ayuda de forma visual para comprender procesos y lograr plantear estrategias de construcción. Esta génesis está en el Espacio de Trabajo Geométrico y su activación describe el proceso semiótico relacionado entre el espacio real-local y la visualización. También se menciona que el problema promovió la articulación de los planos epistemológicos y cognitivos de los participantes, en que solo uno de ellos logró transitar de forma efectiva de la geometría euclidiana a la sintética. Este trabajo se relaciona con nuestro

trabajo de investigación por utilizar la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, que es la teoría que utilizaremos en esta tesis, específicamente dentro del dominio de la geometría, así como en este trabajo.

Es importante mencionar el estudio de Henríquez y Kuzniak (2021), donde se realizó un estudio de caso sobre la profundización en el trabajo geométrico para futuros profesores de matemática de una universidad de Chile, en entornos tecnológicos y usando lápiz y papel. Se proponen dos tareas de geometría, una con el uso de lápiz y papel y otra con el uso de GeoGebra. El análisis está basado en el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), visto que este se considera una herramienta que permite un análisis detallado del trabajo matemático de un sujeto al resolver una tarea. El tipo de ETM utilizado en esta investigación es el ETM personal de futuros profesores. Es una investigación del tipo cualitativa, se utiliza un estudio de caso para comprender como se realiza el trabajo geométrico. En la primera tarea participaron 18 estudiantes y en la segunda tarea 13 estudiantes. Para el análisis se selecciona 3 estudiantes de la carrera de futuros profesores de matemática, por razones instrumentales, pues se consideran criterios relacionados al equilibrio, variedad y unicidad de las respuestas.

La primera tarea es con el uso de lápiz y papel, la cual tiene como propósito probar una propiedad de los cuadriláteros en que lleva a desconfiguración de la figura inicial dada. La segunda tarea es presentada en GeoGebra y se utiliza la práctica de arrastre, la cual es una tarea abierta y adaptada de la tarea 1 cuyo propósito es identificar y validar las propiedades de los cuadriláteros. Estas tareas son aplicadas en momentos distintos del curso de didáctica de la matemática, de la formación inicial de los futuros profesores.

El método utilizado por los autores es un análisis del ETM previsto y del ETM personal de los futuros profesores, lo cual es presentado en dos etapas según Kuzniak y Nechache (2019): la etapa adentro, la cual describe las principales acciones matemáticas al revolver una tarea y la etapa afuera, la cual permite obtener, de forma sintética, los episodios de los sujetos basado en el esquema del ETM. Luego de la aplicación de las tareas y la realización del análisis con el método mencionado, es posible observar diferencias entre el ETM previsto y el ETM personal de los futuros profesores de matemática que participaron. Además, el artículo muestra el análisis del trabajo matemático en el paradigma de la geometría, dentro del marco teórico del ETM, lo cual permite profundizar el trabajo matemático de sujetos al resolver una tarea dada.

Este trabajo es muy relevante para la tesis, teniendo en cuenta que se utiliza el mismo marco teórico del ETM, así como el mismo método de análisis para las tareas de la secuencia didáctica propuesta en esta tesis.

Como podemos observar, las investigaciones de referencia presentadas anteriormente evidencian la dificultad que los estudiantes tienen en la comprensión del perímetro y área, llegando a no comprender su diferencia y cómo trabajar este concepto en los problemas que van surgiendo durante la etapa de la educación básica. A continuación, en la justificación vamos a ver cómo estas investigaciones de referencia muestran la importancia de trabajar este objeto matemático de la geometría; además como herramientas tecnológicas pueden ser utilizadas para como apoyo en actividades relacionadas al perímetro y área de cuadriláteros. Por otro lado, también son adicionados documentos oficiales como el currículo nacional del Perú y de Brasil de la educación básica en que contiene el objeto matemático de perímetro y área dentro del dominio de la geometría en diferentes grados. Además, del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y las pruebas PISA en que se puede observar la relevancia de este objeto matemático para este estudio de investigación.

1.2 Justificación

Las investigaciones anteriormente mencionadas de Carhuapoma y Huamán (2018), Castillo (2018), Aguiar (2019), muestran la importancia de la enseñanza de área y perímetro de cuadriláteros. Según Carhuapoma y Huamán (2018), los estudiantes tienen dificultades en relación con el dominio de los conceptos matemáticos básicos como área y perímetro, además comentan la falta de interés y miedo de los alumnos con la matemática, relacionado a la forma como los docentes enseñan en las clases, muchas veces de forma tradicional, utilizándose apenas el libro de texto y algunos ejercicios. Por otro lado, en las escuelas, la medida de área de figuras geométricas es enseñada de forma memorística, por ello la reconfiguración viene con la propuesta de permitir que los estudiantes puedan determinar la medida del área de un polígono sin la necesidad de la utilización de una fórmula, Castillo (2018). También Aguiar (2019) identificó diversas dificultades en la comprensión de magnitudes y medidas, principalmente la confusión generada en la interpretación de área y perímetro, cuando era docente en los años finales de la primaria.

Así mismo, las investigaciones de Hernández (2016), Dahm (2019), Barrios et al. (2018), Jiménez y Jiménez. (2017), muestran la importancia de trabajar con artefactos tecnológicos como GeoGebra. Hernández (2016), considera el uso de GeoGebra y Sweet Home 3D, en su propuesta innovadora e interactiva que estimula la creatividad de los estudiantes, todo ello conectado a los conceptos de área y volumen, teniendo en cuenta que se deben presentar diferentes metodologías para motivar a los estudiantes en el aprendizaje de estos conceptos,

proporcionando una enseñanza relevante para los estudiantes al momento de aprender geometría. Para Dahm (2016) los estudiantes ya están familiarizados con el uso de las tecnologías digitales, además propone utilizar GeoGebra de forma que los estudiantes puedan reflexionar sobre conceptos ya trabajados anteriormente en clase; también relata la posibilidad de favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos a través del uso de GeoGebra, lo cual permite que el estudiante pueda usar los recursos gráficos para identificar de forma más fácil el perímetro, área y volumen de cada figura.

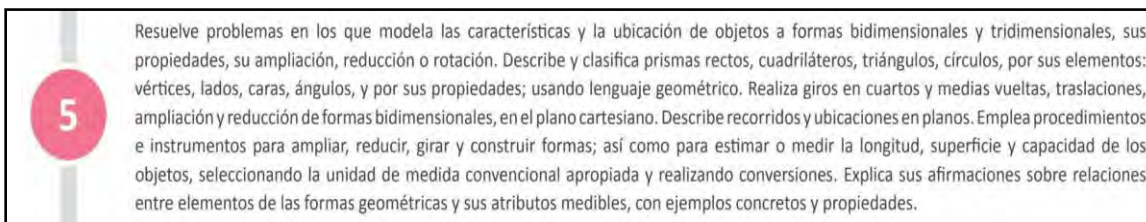
GeoGebra, es más que un artefacto digital, este se convierte en un agente dinamizador que permite a los estudiantes y docentes abordar diferentes conceptos de enseñanza y aprendizaje de forma interactiva, permite observar en tiempo real las características geométricas y sus elementos, lo que no sería posible observar en la enseñanza tradicional como en los logros didácticos de matemática (Barrios et al, 2018). Por otro lado, Jiménez y Jiménez (2017) explicitan la dificultad que los estudiantes tienen en aprender matemáticas, en contrapartida las tecnologías digitales como GeoGebra permiten modelaciones algebraicas y geométricas, posibilitando a los estudiantes pensar de forma matemática y aumentar su nivel de comprensión, además de ser capaces de poder resolver problemas reales.

Por otro lado, en el Perú, el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016), referente a la Resolución Ministerial N.º 281-2016-MINEDU, es responsable de indicar los aprendizajes que se deben garantizar como Estado y sociedad. Este está estructurado con base en cuatro definiciones que son: competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeños. Según el Currículo Nacional (2016) la competencia es la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades para lograr un propósito, actuando de manera pertinente. En el mismo documento se consideran treinta y un competencias, de las cuales cuatro están relacionadas con el área de Matemática. Una de estas competencias es “resuelve problemas de forma, movimiento y localización”, la misma que está relacionada con el aprendizaje de la Geometría. Las capacidades de esta competencia son las siguientes: modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones; comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas; usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio y argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas. De acuerdo a esto, es posible identificar la importancia de esta investigación relacionada con el estudio del área y perímetro de cuadriláteros (cuadrados y rectángulos), ya que así lo precisa el desarrollo de la competencia en el nivel 5 que corresponde al sexto grado de primaria (grado en el cual se centró el interés en esta investigación)

En la figura 1 se puede observar el nivel 5 de la competencia resolviendo problemas de forma, localización y movimiento. Se destaca la presencia de los términos *longitud*, *superficie* y *capacidad*.

Figura 1.

Competencia en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

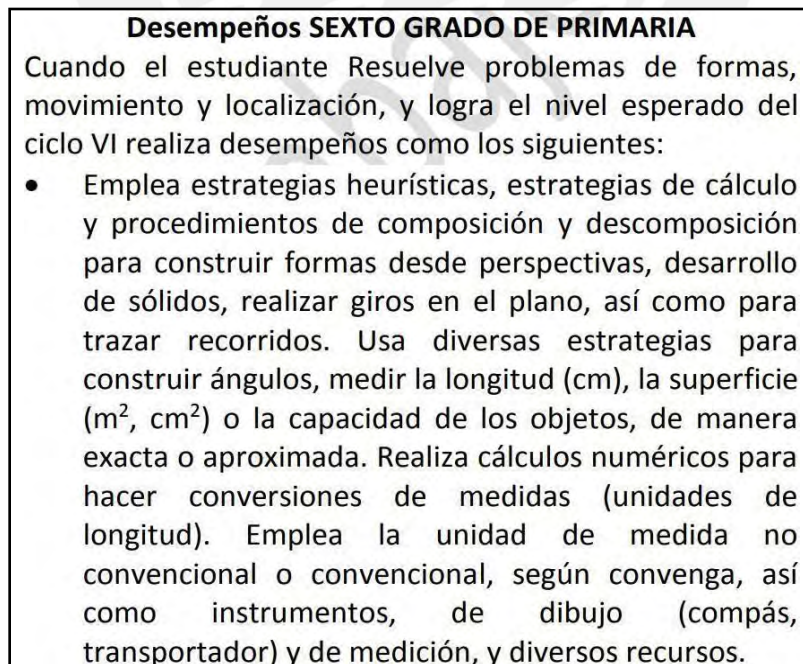


Nota: tomado de MINEDU, 2016, p. 147

Dentro del Programa Curricular del Nivel Primaria (MINEDU) se pueden apreciar los desempeños del sexto grado de primaria enfocados en área y perímetro, con la terminología de longitud y superficie. Estos objetos aparecen vinculados al objeto capacidad o volumen. En la siguiente imagen se aprecia con mayor detalle:

Figura 2.

Desempeños de sexto grado de primaria.



Nota: tomado de MINEDU, 2016, p. 153

Si se toma en cuenta la Base Nacional Común Curricular (BNCC) de Brasil (2018), en la educación fundamental (estudiantes de 6 a 14 años), la geometría envuelve el estudio de un amplio conjunto de conceptos y procedimientos necesarios para el desarrollo de problemas en diferentes áreas del conocimiento, en la unidad que estudia la posición, desplazamiento en el espacio, formas y relaciones de figuras planas y del espacio, lo cual pretende desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes. En el estudio de la geometría del quinto año de la educación fundamental (estudiantes de 10 a 12 años), algunos de los objetos de conocimiento son las figuras geométricas planas, sus características y representaciones. Lo cual demuestra la necesidad de trabajar el objeto matemático área y perímetro de cuadriláteros al ser un tema importante dentro del currículo brasileño en los diferentes años escolares, así como en el currículo del Perú. Cabe resaltar que si se menciona la BNCC de Brasil se consideran aspectos importantes a tomar en cuenta como:

Los recursos didácticos como mallas cuadriculadas, ábacos, juegos, libros, vídeos, calculadoras, plantillas electrónicas y softwares de geometría dinámica tienen un papel esencial para la comprensión y utilización de las nociones matemáticas. (BNCC, 2018, p.278)

Lo anterior indica la necesidad de la utilización de recursos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, y precisamente uno de estos softwares de geometría dinámica es el GeoGebra, el cual será utilizado en esta investigación.

Cabe mencionar también que el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM), que es la mayor organización en educación matemática del mundo, tiene cinco patrones de contenido, uno de ellos es la geometría. Además, tiene los patrones de matemática para todos los grados desde el preescolar hasta el grado 12. Estos patrones describen los componentes para el alto rendimiento escolar, también afirman la importancia de que los docentes estén bien preparados para que puedan evaluar el aprendizaje de los alumnos.

Por otro lado, la prueba PISA es un examen que evalúa el desarrollo de las habilidades y conocimientos de alumnos de 15 años mediante tres exámenes principales: lectura, ciencias y matemáticas. De acuerdo con el Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el desarrollo (OCDE, 2017), el examen de matemáticas toma en cuenta cuatro categorías: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad e incertidumbre y datos. El contenido “medida” forma parte de los temas evaluados cómo se puede apreciar en la siguiente captura, y toma en cuenta los objetos área y perímetro.

Figura 3.

Temas evaluados en la prueba PISA.

- *Medida:* Cuantificación de las características de y entre formas y objetos, como las medidas de los ángulos, la distancia, la longitud, el perímetro, la circunferencia, el área y el volumen.

Nota: tomado de OCDE, 2017, p. 153

Es importante mencionar que, si bien la prueba PISA no se aplica a alumnos de sexto año de primaria, tiene un contenido cuyo estudio se inicia en la primaria.

Por todo lo presentado anteriormente esta investigación es pertinente, razón por la cual la presente investigación centra su interés en analizar el trabajo matemático esperado que los estudiantes pondrían en juego cuando resolverían tareas sobre perímetro y área de cuadriláteros. Se puede decir que, existen una serie de estudios relacionados con el perímetro y área de cuadriláteros centrados en representaciones semióticas, otros sobre el mismo objeto centrados en la mediación de la tecnología digital, pero a diferencia de ellos, estamos interesados en plantear una propuesta didáctica en la cual se analiza qué aspectos semióticos (representaciones), discursivos (justificaciones) e instrumentales (génesis) intervienen cuando estudiantes de sexto grado de primaria (10 - 12 años) resuelven ejercicios de una secuencia didáctica que favorecen la comprensión de las relaciones geométricas entre perímetro y área de cuadriláteros cuando se utilizan diferentes artefactos.

Por esto, la teoría que brinda mejores elementos para el análisis de los aspectos mencionados es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) ya que de acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), el ETM es “un espacio concebido que designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos” (p.6). Además, Henríquez-Rivas, Kuzniak y Masselin (2022) afirman que, al resolver problemas, los estudiantes aplican técnicas y conocimientos de acuerdo con el paradigma en cuestión. Esto permite reconocer la importancia que tienen las tareas en el sentido de promover el trabajo matemático de los estudiantes pues constituyen el medio para la resolución de problemas.

A continuación, se presentan los aspectos teóricos de la investigación.

1.3 Aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático

En esta investigación se detallan los aspectos sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), desarrollado por Kuzniak (2011) en cuyos inicios se utilizó el Espacio de Trabajo Geométrico, desarrollada por Houdement y Kuzniak (1999).

Para Kuzniak y Richard (2014), el trabajo matemático es una actividad racional que está dirigida por un objetivo específico, en que puede ser apoyado a través del uso de instrumentos o artefactos determinados, con una visión epistemológica, que estará centrado en los objetos estudiados por los matemáticos. Por su parte, para Kuzniak et. al (2016) los objetos y resultados que son producidos por el trabajo matemático son distribuidos en dominios, y estos permiten dar cuenta de la diversidad de la actividad matemática, luego se puede decir que el trabajo matemático es una actividad racional, y esta tiene el objetivo de construir y comprender objetos matemáticos cuando se resuelve problemas, de acuerdo con el dominio que este pertenece. Los dominios están determinados de acuerdo con la organización de conocimientos que cumplen criterios para su construcción, con esto, para Montoya y Vivier (citados en Kuzniak et al., 2016) los dominios se diferencian con la relación y la naturaleza que tiene los objetos, a partir de esto se consideran los dominios de aritmética, álgebra, geometría, análisis, probabilidades y estadística, no siendo estos los únicos existentes.

A partir de esto veremos terminología del ETM importante para esta investigación:

- **Trabajo matemático**, que está relacionado con los aspectos cognitivos y epistemológicos, el primero involucra las actividades que un individuo realiza para resolver tareas o problemas, y el segundo se refiere a los conocimientos matemáticos.
- **Paradigmas**, que en este caso son los del dominio de la geometría y que según Houdement y Kuzniak (1999) son tres paradigmas distintos que estructuran el campo de la geometría y que reflejan diferentes estilos que se caracterizan por prácticas y desafíos específicos en la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina.

El ETM es un ambiente organizado, que permite el trabajo del individuo para la resolución de problemas matemáticos de acuerdo con el dominio matemático que corresponda. Para Kuzniak et. al (2016), el individuo puede ser un profesional matemático (profesor) o un estudiante. Los problemas matemáticos que son resueltos por los individuos no son parte del ETM, pero son considerados como su razón de ser, ya que el ETM debe ser el medio para la resolución de los problemas, y esto permite estructurar el ETM a nivel personal e institucional.

Para Kuzniak (2011), cuando un individuo transita por dos planos, el epistemológico (relacionado con los contenidos matemáticos del objeto de estudio) y el cognitivo (relacionado con los procesos mentales que realiza el individuo cuando resuelve problemas matemáticos), el adquiere la comprensión del saber. Por lo tanto, como consecuencia del trabajo matemático, el ETM tiene que establecer el principio de articulación entre el plano epistemológico y cognitivo.

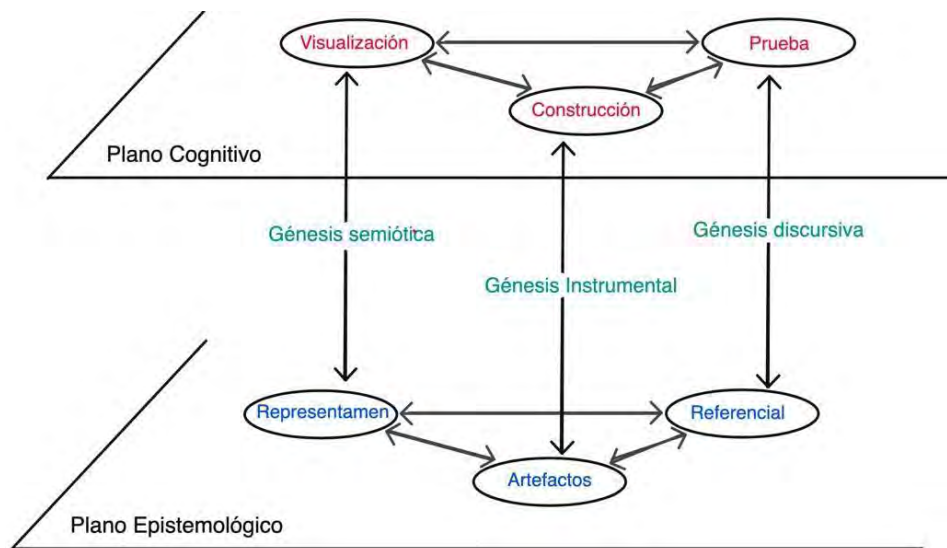
Plano Epistemológico: Este plano está constituido por tres componentes que interactúan entre sí, los cuales son: el representamen, el cual es un conjunto de símbolos semióticos; los artefactos que son el conjunto de herramientas o softwares y el referencial, el cual está constituido por las definiciones, propiedades y referencias. Este plano para Kuzniak et. al, (2016, p.247) “permite estructurar la organización matemática del ETM dándole un sentido que [...] los paradigmas ayudan a definir”.

Plano Cognitivo: Este plano, también llamado de nivel está centrado en la persona y en la articulación cognitiva de las componentes del ETM, Kuzniak et al. (2016). Este plano presenta tres procesos que están relacionados con el plano epistemológico presentado en la figura 4, Estos procesos son la *visualización* que está relacionada con interpretación de signos, la *construcción* dependiente de los artefactos utilizados y la *prueba* basada el referencial.

Génesis del ETM: El plano epistemológico y el plano cognitivo se pueden articular de forma operatoria, cuando las génesis que son producidas por consecuencia del trabajo Matemático, de esta forma se articula un proceso del plano cognitivo con un componente del plano epistemológico, estructurando el ETM. Según Kuzniak y Nechache (2021), la unión de los planos es parte del trabajo matemático y pueden caracterizarse como un proceso generador en que se consideran tres génesis: la semiótica que corresponde a la visualización y representamen, la instrumental asociada a la construcción y artefactos, y la tercera es la discursiva que relaciona la prueba y el referencial.

Figura 4.

Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis



Nota: Adaptación de Kuzniak (2015, p. 248)

La génesis semiótica es el proceso que está asociada a los signos y al representamen, está explica la relación dialéctica entre las perspectivas sintácticas y semánticas de los objetos matemáticos en que son organizados a través del sistema de representación semiótica. Luego esta génesis proporciona un sentido a los objetos del ETM que va a establecer un objeto matemático operatorio.

La génesis instrumental, que “hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático” Kuzniak y Richard (2014, p.11). Esta génesis puede ser comprendida como el proceso en que transforma un artefacto en un instrumento, a partir del desarrollo de sus esquemas de uso.

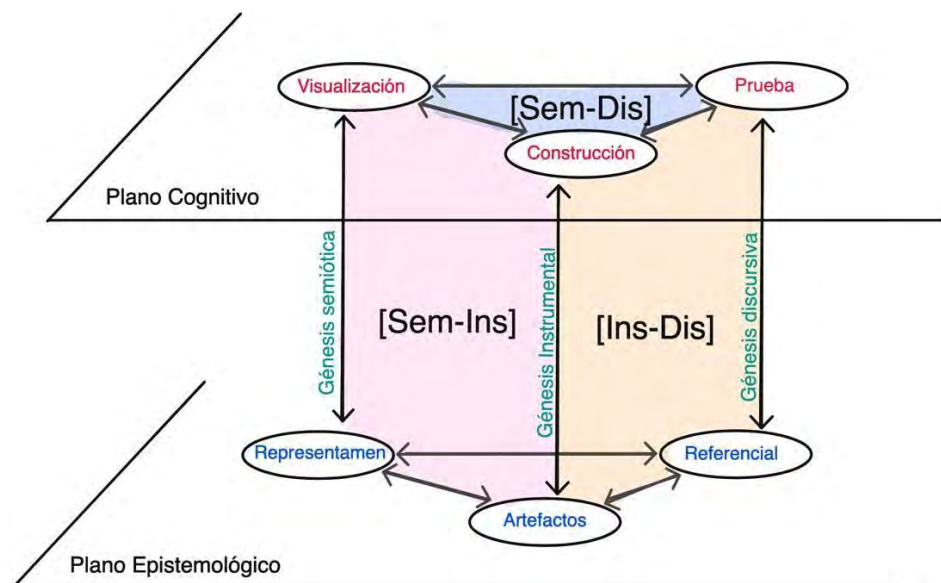
La génesis discursiva de la prueba que utiliza el referencial teórico para la validación que no es icónica, gráfica o instrumentada. Está definida como un proceso lo cual se activa las propiedades que están presentes en el referencial teórico, para que pueda está al servicio del razonamiento matemático.

Planos Verticales: Por la necesidad de analizar de forma precisa la tarea y actividades realizadas por el individuo, y para comprender estas relaciones, se observa los tres planos verticales, para analizar las interacciones entre las génesis. Estos planos son semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis] y semiótico-discursivo [Sem-Dis] Para Kuzniak y Richard (2014) los planos verticales están relacionados con las fases del trabajo matemático, cuando el individuo está realizando una tarea. Por esto, para comprender y analizar

la articulación del conocimiento entre los planos epistemológico y cognitivo, será necesario incorporar los planos verticales de la teoría del ETM.

Figura 5.

Planos verticales en el Espacio de Trabajo Matemático



Nota: Adaptado de Kuzniak (2015, p. 248)

Para Kuzniak et al. (2016) es difícil describir de forma exacta cada uno de los planos mencionados anteriormente, pero es importante tener presente el dominio matemático de estudio, el nivel educativo, el tipo de trabajo, las tareas, entre otros, en caso se quiera describir estos planos.

Tipos de ETM: Se distingue tres tipos de ETM, los cuales vamos a definir a continuación:

- ETM de Referencia es definido de forma implícita, por las personas que diseñan el programa curricular, depende de una organización por lo cual se espera que los profesores puedan usarla para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, las tareas pueden ser mejoradas por personas con conocimientos en el área para después lograr compartirlas con los demás profesores.
- ETM Idóneo es un estado intermedio de transmisión y mediación del saber, en que el profesor tiene expectativas, además de la redefinición de la tarea para avanzar en el trabajo personal de los estudiantes. Con esto, el profesor trata de ajustar la tarea lo más cercano a la realidad de sus

estudiantes, además se definen dos estados del ETM Idóneo, un estado en que corresponde al que el profesor espera, llamado estado potencial; y el estado que muestra el trabajo que fue realizado en aula, llamado estado actual o efectivo.

- ETM Personal del estudiante, está relacionado a cómo un individuo enfrenta un problema, cada individuo se apropia y transforma la tarea en su ETM Personal, además este ETM siempre está cambiando ya que este puede evolucionar de acuerdo con lo que los individuos van realizando. Para Kuzniak y Richard (2014, p.10) “cuando el problema se propone a un alumno, el tratamiento matemático que éste le da lo conduce al ETM Personal de este alumno”. Así en la resolución de una tarea dada, si el individuo aplica sus capacidades cognitivas y sus conocimientos matemáticos, activa su ETM Personal. Además, el ETM Personal está en función del ETM Idóneo, pues este permite que el individuo logre responder la tarea.

Entre tanto, Henríquez-Rivas, Kuzniak y Masselin (2022) afirman que, al resolver problemas, los estudiantes aplican técnicas y conocimientos de acuerdo con el paradigma en cuestión. Esto permite reconocer la importancia que tienen las tareas en el sentido de promover el trabajo matemático de los estudiantes pues constituyen el medio para la resolución de problemas.

En este trabajo de investigación, la noción de tarea está basada en la definición que propone Sierpiska (2004) y adaptada por Nechache (2017):

Una “tarea matemática” se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con suposiciones y preguntas claramente formuladas, que se sabe que los estudiantes pueden resolver de manera oportuna en un espacio de trabajo matemático bien definido.

Asimismo, Gaona (2022) resalta la importancia que adquieren las tareas al sostener que, si bien no son parte del ETM, activan el trabajo matemático. Asimismo, con relación al diseño de tareas, Gaona (2022) afirma que el ETM puede guiar el diseño de las tareas una vez definidos los objetivos, específicamente, quien diseña se puede preguntar si su tarea fomenta alguna o varias génesis o planos verticales.

Paradigmas en el dominio de la Geometría: Para Kuzniak et al. (2016), “un paradigma designará para nosotros el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico” (p. 238). Con esto Houdement y Kuzniak (citado en Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016) introdujeron tres paradigmas dentro del dominio matemático de la geometría:

- Geometría natural (GI) – Está relacionado a la geometría de objetos reales y la confusión con la realidad. Los argumentos son relacionados a la percepción, la deducción y el experimento, para que sean considerados válidos. Existe una gran semejanza entre la realidad y el modelo, además es permitido utilizar diferentes argumentos para llegar a una solución válida; los materiales, artefactos y objetos concretos son utilizados para representar objetos donde se tiene como un conjunto de herramientas lo cual se utiliza para resolver problemas del día a día. Es una geometría técnica y práctica.
- Geometría axiomática natural (GII) – Es la geometría como esquema de la realidad, donde el sistema de axioma puede ser incompleto y las pruebas deberán ser desarrollada dentro de este sistema de axiomas establecido, está relacionada con la geometría euclidiana clásica. Las Geometrías I y II tienen ciertas relaciones con el mundo real.
- Geometría axiomática formal (GIII) – Esta geometría no tiene relación con la realidad, los axiomas son completos y coherentes, es una geometría que trabaja con problemas relacionados a la lógica y presentado formalmente. Esta geometría generalmente no es enseñada en la educación básica, pero sí en la formación superior para profesores de matemáticas y matemática pura.

Además, estos paradigmas no tienen un orden, pues existen formas diferentes de llegar a un resultado, dependiendo de lo que se solicita en un problema y del individuo resolverá el problema.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Para la realización de esta investigación se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático que se promovería en una propuesta didáctica que incluye tareas sobre perímetro y área de cuadriláteros en estudiantes de sexto grado de primaria?

Con el propósito de responder a esta pregunta se plantea el siguiente objetivo general:

Analizar el Espacio Trabajo Matemático que podría promover una propuesta didáctica que incluye tareas sobre perímetro y área de cuadriláteros para estudiantes de sexto grado de primaria.

Para alcanzar el objetivo general se presentan los objetivos específicos:

- Identificar, en la propuesta didáctica, las posibles acciones matemáticas y episodios que se podrían generar cuando se activan las diferentes génesis.
- Describir las posibles activaciones de los planos verticales del ETM en la propuesta

didáctica.

- Caracterizar, en la propuesta didáctica, los paradigmas en el dominio de la geometría que se espera privilegiar.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

Esta investigación es de tipo cualitativo, teniendo en cuenta que esta permite comprender, describir e interpretar los fenómenos a través de los significados y percepciones que son producidas mediante las experiencias de los que participan (Hernández et al.,2010). Además, una investigación de este tipo evidencia relaciones con sentido para el investigador y en general cuando estamos investigando en Educación Matemática, tratamos de entender las relaciones que suceden con los objetos que se estudian, desde una perspectiva teórica que permite comprender la realidad (Javaroni ,1991, como se citó en Santos y Borba, 2011).

Para explicar los procedimientos metodológicos que seguimos en esta investigación utilizaremos como base el conjunto de nueve fases presentados por Hernández et al. (2014), las cuales están compuestas e interrelacionadas por el planteamiento del problema, la inmersión inicial en el campo, el diseño del estudio, la definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, la recolección de datos, el análisis de los datos, la interpretación de los resultados y la elaboración del reporte de resultados. Además, los autores consideran que los procesos pueden ajustarse en cualquier etapa de un estudio de acuerdo con las características de un grupo, en qué local es realizado el estudio, entre otros. A continuación se presenta el procedimiento metodológico a seguir:

Figura 6.

Procedimientos metodológicos de la tesis.



Nota: adaptado de Hernández et al. (2014, p.17)

A continuación se detallan las fases del procedimiento metodológico seguido en esta investigación:

Fase 1: Planteamiento del problema. La primera fase está relacionada con el primer capítulo, donde se inicia el proceso de revisión de las investigaciones de referencia, las cuales están relacionadas al tema de estudio de esta tesis para justificar y sustentar la importancia de este trabajo. También en esta fase se presentan los aspectos teóricos del ETM, la pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos, los aspectos metodológicos y sus respectivos procedimientos, todo esto para delimitar la pertinencia de esta tesis.

Fase 2: Estudio del perímetro y área de cuadriláteros. Esta fase está asociada al capítulo II de esta investigación y está constituida por los aspectos epistemológicos, matemáticos y didácticos del perímetro y área de los cuadriláteros. Para ello, se revisa el libro de actividades del sexto grado de educación primaria para el año 2019 del Ministerio de Educación del Perú, y se analizarán a la luz de las herramientas del ETM que están siendo utilizadas en esta tesis, además se presenta también el estudio histórico epistemológico de la noción de perímetro y área de cuadriláteros.

Fase 3: Secuencia didáctica propuesta. Se relaciona con la primera parte del capítulo III de esta investigación, en el cual se presenta la descripción de la propuesta, así como el método que se va a utilizar para el análisis de la misma. Esta secuencia se elaborará con base en la definición de tareas en el ETM, en las investigaciones de referencia presentadas al inicio del

capítulo I, los documentos oficiales presentados en la justificación, el estudio didáctico y matemático que se presenta en el capítulo II.

Fase 4: Análisis de la secuencia didáctica propuesta. Esta fase está relacionada con la segunda parte del capítulo III de esta tesis, donde se presenta el análisis de las tareas contenidas en la secuencia didáctica propuesta. Para el análisis de la secuencia didáctica se utilizó una adaptación de la metodología de Kuzniak y Nechache (2019) la cual contempla dos etapas denominadas adentro y afuera como fue explicado en la primera parte del capítulo III, dado que este permite profundizar y mejorar la comprensión del trabajo matemático personal, haciendo un análisis minucioso del trabajo matemático previsto. En cada tarea, se presenta la etapa adentro: los episodios del análisis esperado, las acciones que cada episodio contiene de acuerdo con lo que se espera como solución de las tareas, el análisis de la circulación del ETM y en la etapa afuera se proporciona una descripción global del ETM, de forma gráfica, de cada ítem de las tareas. Además, también se caracteriza los paradigmas en el dominio de la geometría que la tarea privilegia.

Fase 5: Conclusiones y perspectivas futuras. En esta última fase se presentan los resultados, las conclusiones generales y perspectivas futuras. Las conclusiones generales, están organizadas de acuerdo con el objetivo general de esta investigación y al marco teórico seleccionado, en este caso el ETM, para esto se analiza cada uno de los objetivos específicos para lograr saber si el objetivo general fue alcanzado de acuerdo con los resultados esperados.

Con relación a las perspectivas futuras, se espera que esta investigación pueda posibilitar que, a partir de esta investigación, surjan nuevos trabajos relacionados, para que futuros investigadores puedan utilizar la propuesta didáctica presentada en esta investigación como base para adaptarse a sus sujetos de estudio, para luego aplicar y buscar comprender los diferentes tipos del ETM, lo cual es un punto de partida para el análisis de los demás tipos del ETM.

En el siguiente capítulo se presentan aspectos epistemológicos, matemáticos y didácticos del objeto de estudio de esta investigación (perímetro y área de cuadriláteros)

Capítulo II: Perímetro y área de cuadriláteros

En este capítulo se mencionan los aspectos epistemológicos, matemáticos y didácticos del objeto de estudio (cuadriláteros). Se analiza cómo fue el desarrollo de los conceptos geométricos a lo largo de la historia. También se precisan algunas definiciones y propiedades involucradas y además se analizan algunas actividades (a la luz de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático) de como este objeto matemático es abordado en algunos libros de texto impartidos por el Ministerio de Educación.

2.1 Aspectos matemáticos del perímetro y área de cuadriláteros

Para comprender los aspectos epistemológicos y matemáticos del perímetro y área de cuadriláteros es importante relacionarlos con la rama de la matemática que trabaja estos conceptos: la geometría. Según Rubiños (2012, p.06), la palabra geometría está conformada de dos palabras griegas: Geo que significa “Tierra” y Metría que significa “Medida”, por lo que nos lleva a la definición de geometría siendo la medida de la tierra la cual tiene sus orígenes en Egipto, debido a la necesidad que había en medir sus tierras cuando el río Nilo se desbordaba.

Además, Rodríguez (2013) habla sobre la importancia de la geometría como formadora del razonamiento lógico y resalta que la geometría está presente en nuestra vida cotidiana, inclusive muchas veces cuando no lo percibimos. De esta manera estamos rodeados de figuras y formas geométricas, estas nos ayudan a construir, a guiarnos, ayudándonos a estimar distancias, etc.

Es importante mencionar los elementos básicos de la geometría, teniendo en cuenta que es a partir de ellos que todas las demás definiciones van a ser concretizadas. Según Dolce y Pompeo (2013) las nociones geométricas son establecidas por medio de definiciones, en cuanto, los elementos básicos de la geometría, también conocidos como las nociones primitivas de la geometría no tiene una definición, pero son considerados como base para las demás definiciones. Se adoptan sin definiciones las nociones de: punto, recta y plano.

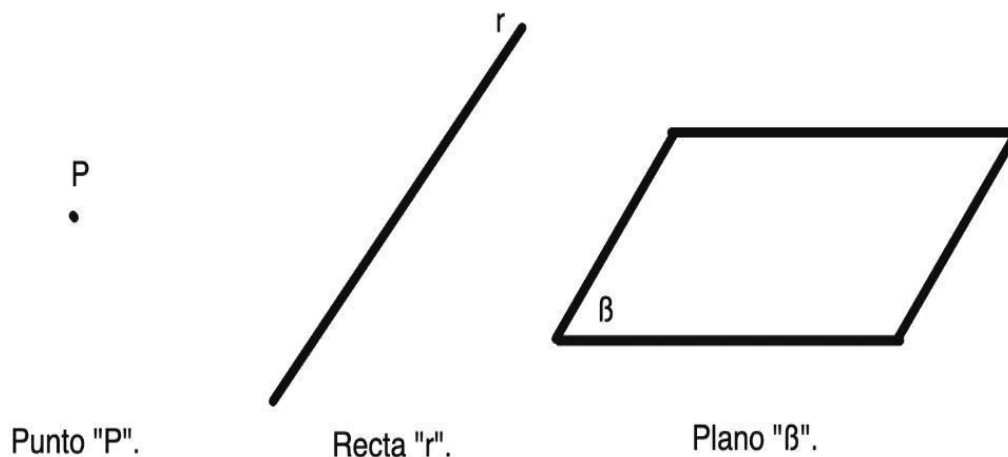
Sus representaciones son:

- Los puntos con letras latinas mayúsculas: A, B, C, etc.
- Las rectas con letras latinas minúsculas: a, b, c, etc.
- Los planos con letras griegas minúsculas: α , β , γ , etc.

En forma gráfica suelen ser representadas de la siguiente manera:

Figura 7.

Representaciones primitivas de la geometría en el *Fundamentos de Matemática Elemental*.



Nota: adaptado de Dolce, O. y Pompeo, J, 2013, p.02

Con estos elementos Dolce, O. y Pompeo, J (2013) inician el estudio de la geometría plana con algunas de estas proposiciones primitivas, que están relacionadas a los elementos básicos de la geometría mencionados anteriormente. Algunos de estos postulados son:

- Postulado de existencia:
 - En una recta, así como fuera de ella, existen infinitos puntos;
 - En un plano existen infinitos puntos.
- Posiciones de dos puntos y de puntos y rectas:
 - Puntos coincidentes, son el mismo punto, pero con nombres diferentes;
 - Dados un punto y una recta, o el punto está en la recta o el punto está fuera de la recta.
- Puntos colineales y no colineales:
 - Dos o más puntos son colineales cuando pertenece a la misma recta;
 - Dos o más puntos no son colineales cuando existe algún punto fuera de la recta.
- Postulado de determinación de la recta y del plano:
 - Dos puntos determinan una única recta que pasa por ellos;
 - Tres puntos no colineales determinan un único plano que pasa por ellos.
- Postulado de inclusión:
 - Una recta está contenida en un plano, cuando tiene dos puntos comunes a este.

- Puntos coplanares, figuras y figuras planas:
 - Los puntos son coplanares cuando pertenecen al mismo plano;
 - Las figuras son cualquier conjunto de puntos;
 - Las figuras planas son figuras que tienen todos sus puntos en un mismo plano.

Teniendo así, la geometría plana como la rama de la geometría que estudia las figuras planas, según Dolce, O. y Pompeo, J (2013). Muy similar a lo que nos afirma Muriera A. (2015) en que la geometría plana estudia las propiedades de las figuras que están en el mismo plano, es decir, que son bidimensionales.

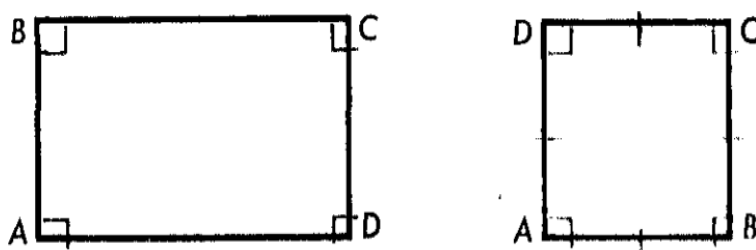
Los polígonos, que están dentro de la geometría plana, están formados por una secuencia finita de segmentos: una región delimitada por dos puntos de una recta. Los segmentos son consecutivos, lo cual encierra una región del plano. Es decir, un polígono es una figura cerrada con dos dimensiones, por una cantidad finita de segmentos consecutivos. Los segmentos son denominados lados de un polígono y las intersecciones entre dos lados son llamados vértices.

Siendo los cuadriláteros un tipo de polígonos y el objeto de estudio de esta investigación, es importante considerar algunas definiciones:

Sean A, B, C y D, cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos AB, BC, CD y DA se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero. Los cuatro segmentos se llaman lados, y los puntos A, B, C y D se llaman vértices, los $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$ se llaman ángulos del cuadrilátero, y pueden indicarse por $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ (Moise y Dows, 1966, p. 245)

Figura 8.

Cuadriláteros: Rectángulo y cuadrado



Nota: Extraído de Moise y Downs (1966)

En la figura 8 se observan los cuadriláteros en los que se ha centrado esta investigación. Al respecto Moise y Downs (1966) señalan que si en un cuadrilátero ambos pares de lados

opuestos son paralelos, se consideran paralelogramos. Así también mencionan que un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos y un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

Para Godino (2003), “Los cuadriláteros son polígonos que tienen cuatro lados, pueden tener distintas formas, pero siempre conformados por cuatro vértices y dos diagonales. Además, los cuadriláteros que tiene paralelos los dos lados opuestos son llamados paralelogramos”.


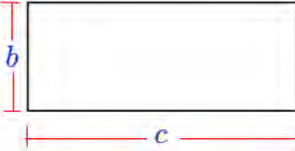
Cabe mencionar que al estudiar los cuadriláteros es inevitable apreciar aquellos objetos matemáticos que sirven como base para poder comprender lo que significa un cuadrilátero: por ejemplo el estudio de rectas, paralelismo, perpendicularidad, ángulos, etc. También es importante señalar que los cuadriláteros permiten estudiar algunas nociones como perímetro y área. Para Jiménez y Robles (2006), la medida del contorno de las figuras geométricas es lo que se tiene por perímetro, en cuanto que la medida de la superficie de cada figura es lo que se tiene por área.

En este estudio se trabajó con dos cuadriláteros: cuadrado y rectángulo. A continuación se presenta el perímetro y área de los dos cuadriláteros trabajados:

Para esto se considera “P” para representar el perímetro y “A” para representar el área.

Figura 9.

Perímetro y área del cuadrado y del rectángulo.

Cuadriláteros	Cuadrado	Rectángulo
		
Perímetro:	$P = a + a + a + a$ $P = 4a$	$P = b + b + c + c$ $P = 2b + 2c$ $P = 2.(b + c)$
Área:	$A = a . a$ $A = a^2$	$A = b . c$

[...] la literatura de investigación han demostrado ampliamente que un gran número de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de estrecha dependencia entre estos dos conceptos sobre el plano relacional, del tipo: Si A y B son dos figuras planas, entonces: si (perímetro de A > perímetro de B) entonces (área de A > área de B); idem con <; idem con = (por lo cual: dos figuras iso-perimétricas son necesariamente equi-extensas). Y viceversa cambiando el orden “perímetro-área” con “área-perímetro”.(Fandiño y D’Amore, 2009, p. 85-86)

Al respecto sobre la relación entre perímetro y área que los estudiantes atribuyen a estos dos conceptos y que suele generar dificultades para comprenderlos Corberán (1996, p. 10) comenta que esta relación está muy arraigada en los alumnos, ya que muchos de éstos piensan en el área y en el perímetro como en dos propiedades de la superficie íntimamente ligadas [...] Este tipo de enseñanza conduce a los alumnos a desarrollar una pobre concepción numérica del área, asociando ésta a una fórmula de cálculo.

A continuación se presentan los aspectos didácticos del perímetro y área de cuadrilátero, en la cual se basa en el análisis de un libro de sexto grado de la educación primaria del Ministerio de Educación del Perú del año de 2019. Se ha considerado la unidad del libro referente al objeto de estudio de esta tesis y se realizó un análisis a la luz del ETM de acuerdo a lo que se espera en la tarea.

2.2 Aspectos didácticos del perímetro y área de cuadriláteros

En esta parte se analizó el libro de actividad (llamado de cuaderno de trabajo) de sexto grado de educación primaria, para el año 2019 del Ministerio de Educación del Perú, en que presenta los aspectos didácticos relacionados al objeto de estudio de este trabajo, analizados a la luz de las herramientas de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático que constituye el referente teórico de esta investigación.

Este libro cuenta con 8 unidades, en donde el último tema de la 6 unidad presenta una actividad relacionada al objeto en estudio. La actividad se titula: “Relacionemos el área y el perímetro”. Al inicio se observa un icono que indica cómo los estudiantes deben trabajarla, y de forma individual se espera que los estudiantes puedan desarrollar su autonomía y puedan aprender a tomar decisiones; en dupla o en equipo, para que puedan construir la resolución con sus compañeros, compartir ideas, aplicar diferentes estrategias, lo que ayuda a reforzar el trabajo colaborativo, como se muestra a continuación:

Figura 10.

Captura que indica cómo los estudiantes deben trabajar cada actividad.



Nota: tomado del cuaderno de actividades del 6to año de primaria para el año de 2019 del MINEDU, p.6

A continuación analizaremos cada una de las tareas presentadas en esta unidad. El análisis se realiza en base al posible espacio de trabajo matemático que se podría generar en cada una de las tareas que como se mencionó anteriormente, están relacionadas al objeto de estudio de esta investigación:

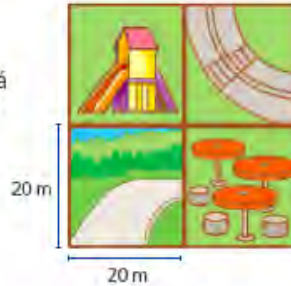
- **Tarea 01:** Esta tarea esta sugerida para ser realizada en pareja y consiste en una situación de contexto en el cual se plantea que las medidas de un determinado lugar (parque) van a ser duplicadas y con esto se pregunta: “¿Cuánto crecerá el área del parque? ¿Y cuánto el perímetro?” Pero, para llevar las parejas de individuos a la solución de esta tarea, es indicado 6 sub-preguntas que van guiando estos individuos. Además, es posible observar una imagen que representa el parque y el posible tamaño que quedaría al duplicar sus lados, induciendo un posible camino para la solución a los individuos.

Figura 11.

Tarea 01 - Relacionamos el área y el perímetro, Unidad 06.

Relacionamos el área y el perímetro

V Con la finalidad de ampliar las áreas verdes, la municipalidad presentó un proyecto a los vecinos para ampliar el parque Micaela Bastidas: se duplicará la medida de sus lados. ¿Cuánto crecerá el área del parque? ¿Y cuánto el perímetro?



a Lean lo que comentaron Juan y Tea, dos vecinos de la zona.



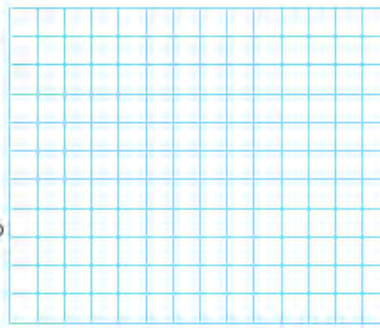
El parque ahora tendrá el doble de área y el doble del perímetro.



No estoy muy segura de ello.

• ¿Están de acuerdo con lo que dice Juan? _____

b Representen en un papelote cuadriculado el parque con sus medidas y luego, en otro papelote, el parque proyectado. Consideren que cada cuadradito representa un cuadrado de 1 metro de lado.



c Comenten cómo ha quedado el plano con las nuevas medidas respecto al plano originales. Dibujen las dos hojas de papel.

d Calculen el área y el perímetro y completen la tabla.

	Parque	Parque proyectado
Perímetro (m)		
Área (m ²)		

e Analicen las relaciones de los resultados de la tabla. Luego, completen.

- Al duplicar el lado del parque, el perímetro _____
- Al duplicar el lado del parque, el área _____
- El área del parque crecerá _____ y su perímetro _____

f Comenten. ¿Juan tenía razón? ¿Por qué?

Con esta actividad se propiciaría la movilización de la noción de perímetro y área y la relación que hay entre ellos, ya que la actividad se favorece la reflexión sobre la relación que estos tienen. Además en esta actividad se propicia la utilización del componente representamen del plano epistemológico cuando se presenta la representación figural del parque, llevando al proceso de visualización del plano cognitivo al interpretar los elementos y características del cuadrilátero, en este caso un cuadrado; esto involucra la activación de la génesis semiótica. Por otro lado en esta tarea se solicita el uso de un papelote cuadriculado, utilizando el componente artefacto del plano epistemológico, para esto es necesario utilizar el proceso de construcción del plano cognitivo, en el cual es posible interpretar las medidas de los cuadraditos en el papelote cuadriculado (como se indica en el ejercicio), teniendo 1 metro de lado por cuadrado; esto lleva a la activación de la génesis instrumental.

Para calcular el área y el perímetro del nuevo parque y comparar con el parque inicial, es necesario conocer las definiciones y propiedades de este objeto matemático, utilizando el componente referencial del plano epistemológico; haciendo uso de estos para encontrar el resultado a través del proceso de prueba del plano cognitivo, lo que proporciona la activación de la génesis discursiva. La activación de estas tres génesis conlleva a la activación de los tres planos verticales, el plano Semiótico-Instrumental, plano Instrumental-Discursivo y el plano Semiótico-Discursivo. Esto significa que esta tarea favorece un Espacio de Trabajo Matemático

Por ser la primera tarea, es importante considerar que su nivel de complejidad es superior a lo que se espera en un individuo del sexto grado de primaria. Esta tarea podría ser un complemento del tema presentado al final de la unidad, como un repaso de lo aprendido; puesto que es una tarea que propicia la activación de todos los planos verticales (como es mencionado en el párrafo anterior). Así, en la propuesta de la secuencia didáctica de esta investigación, se utilizará esta tarea de forma adaptada, siendo pensada para el final de la secuencia y no como primera tarea.

- **Tarea 02:** Esta tarea también se sugiere ser realizada en dupla, y ésta consiste en una situación contextualizada donde se presenta una inmobiliaria que pretende lotizar una zona de lomas naturales reduciendo la medida de sus lados en la tercera parte y para ello se plantea la interrogante: ¿Cómo variará el perímetro y el área de la zona de lomas si se lleva a cabo el proyecto? En esta tarea, también se observa una representación de la zona de lomas naturales y su posible división, esto con el objetivo de que los estudiantes puedan relacionar las dimensiones de la inmobiliaria.

propicia la comparación entre el perímetro y área con diferentes longitudes de un cuadrilátero, proporcionando una mejor comprensión de la diferencia entre área y perímetro. Se utilizará esta tarea en una situación adaptada con el uso de recursos tecnológicos para la propuesta de esta tesis, facilitando así el proceso de observación de las diferencias entre el perímetro y área de cuadrados cuando su lado cambia de longitud.

- Tarea 03:** Esta tarea se realiza en grupo, la tarea consiste en una situación contextualizada en un chef compra un terreno para la construcción de un restaurante, pero el arquitecto propone un nuevo diseño, así se solicita al grupo de individuos responder la siguiente pregunta: “¿Cuáles serán el área y el perímetro de cada zona en el nuevo diseño?”, esta tarea presenta una tabla para adicionar los perímetros y áreas encontrados en cada zona presentada en la imagen de una planta baja que representa el área total del espacio para la construcción del restaurante. Los estudiantes podrían observar la representación del área total y como está dividida las zonas en diferentes colores, además se solicita la construcción de este nuevo diseño, la cual tiene que ser representada en un papelógrafo.

Figura 13.

Tarea 03 - Relacionamos el área y el perímetro, Unidad 06.

3 Un chef compró un terreno rectangular de 120 m × 100 m para construir su restaurante. El arquitecto observó la ubicación de las distintas zonas del restaurante y propuso otro diseño. ¿Cuáles serán el área y el perímetro de cada zona en el nuevo diseño?

Elaboren el nuevo diseño sobre un papelógrafo cuadriculado. Copien y completen la tabla y muestren sus resultados a la clase.

	Jardín	Cocina	Mesas
Perímetro (m)			
Área (m ²)			

128 Matemática 6

Nota: Cuaderno de actividades del 6to año de primaria para el año de 2019 del MINEDU, p.128

Esta tarea solicita el uso del papelógrafo, utilizando el componente artefacto del plano epistemológico, además es necesario el uso del proceso de construcción del plano cognitivo para la interpretación de las medidas totales del terreno rectangular para la creación del nuevo diseño, esto llevará a la activación de la génesis Instrumental. Una vez construido el diseño en el papelógrafo, se presenta el componente referencial para las nociones de perímetro y área de figuras geométricas planas, en este caso el cuadrado y el rectángulo, en el que se hace uso del proceso de prueba del plano cognitivo, en que con base en el referencial se logrará encontrar los valores solicitados; esto llevará a la activación de la génesis discursiva. Estas dos génesis propiciarán la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo para la realización de esta tarea.

Esta tarea 3, propicia el uso de la creatividad y da libertad a los sujetos para la construcción de un resultado, lo cual debe ser seguido por algunos criterios. Se considerará una adaptación de esta actividad aprovechando el uso de los diferentes artefactos y cambiando el contexto presentado en esta tarea, para la construcción de la tarea 2 de este trabajo.

El siguiente capítulo se presentará la propuesta didáctica, lo cual está dividida en cuatro partes. En la primera parte se hace la descripción de la secuencia didáctica propuesta, lo que se espera que esta secuencia propicie, la estructura de la secuencia, como está compuesta, cuantas partes, además de algunos artefactos que se utiliza. En la segunda parte se hace la presentación del método para el análisis de la secuencia didáctica propuesta, en que es una adaptación de la metodología de Kuzniak y Nechache (2019) la cual contempla dos etapas denominadas adentro y afuera, que se detalla en este capítulo. Para la tercera parte, se puede apreciar la secuencia didáctica, las tres tareas que la constituye y una descripción de cada tarea, así como los ítems que estas presentan. Y en la cuarta parte se presenta el análisis de la secuencia didáctica propuesta, donde se hace evidencia la etapa adentro y afuera de cada ítem en las tres tareas, así como el paradigma que privilegia en cada una de las tareas.

A continuación se presenta también una actividad referente al área de cuadriláteros presente en el libro COREFO de matemática de sexto grado de primaria la cual se denominó tarea 04:

La actividad que se presenta se llama *Las cometas* y didácticamente está organizado de acuerdo a las capacidades que plantea el Currículo Nacional de la Educación Básica Peruana.

La actividad se observa en la siguiente figura:

Figura 14.

Tarea 04 – Las cometas

Las cometas

✔ Analiza la situación.



En la clase de Matemática, Daniel y sus compañeros construyeron cometas o papalotes utilizando figuras geométricas. Daniel hace una cometa de cuatro lados con papeles de color. Si Daniel, para la elaboración de su cometa, utilizó palos de carrizo con longitudes de 30 y 50 cm y papeles de color azul y rojo, como se muestra en la figura, ¿cuánto mide el área de la cometa de Daniel?

Nota: COREFO de matemática de sexto grado de primaria, p.80

Esta actividad consiste en una situación contexto en la cual se basa en una situación de la construcción de cometas hechas por estudiantes de un colegio. Y para la introducción al tema la actividad utiliza como referencia a un estudiante llamado Daniel y se comenta un poco de como este estudiante ha construyendo su cometa. A partir de esta situación se plantean interrogantes las cuales están divididas en cuatro partes, las que además guardan relación con las capacidades de la competencia Resuelve problemas de Forma, movimiento y localización: Traduce situaciones, comunica su comprensión sobre situaciones, usa estrategias y procedimientos, y argumenta afirmaciones. En cada una de estas divisiones se plantean preguntas que conllevan a que los estudiantes reflexionen y comprendan sobre los cuadriláteros y sus propiedades. A continuación se analizan las actividades según las divisiones que se realizan:

- **Traduce situaciones:** se plantean 4 preguntas a, b, c y d como muestra la figura abajo; relacionadas a las indicaciones que la tarea proporciona en la introducción, estas preguntas pretenden que los estudiantes relacionen la información (medidas, características de la cometa) con las características y propiedades de los cuadriláteros. Desde la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático cabe resaltar que es necesario el uso de la noción de cuadrilátero como referencial teórico en la pregunta a) y cuando se pregunta que forma tiene la cometa que hizo Daniel en la pregunta b), además es necesario tomar como artefacto las medidas

en centímetros presentadas para representarlas en la pregunta c y toma como representamen la definición de cuadrilátero para poder realizar un proceso de visualización para dibujar la figura en la pregunta d lo cual permitiría la activación de la génesis semiótica.

- **Comunica su comprensión sobre situaciones:** En este segundo punto de la actividad se plantean 3 preguntas a, b y c. Estas preguntas permiten que los comuniquen lo que comprenden sobre la situación planteada y los conceptos matemáticos involucrados (sobre los cuadriláteros y sus propiedades), por ejemplo en la pregunta b al preguntar sobre los conceptos matemáticos que usaría para hacer la cometa. Desde el Espacio de Trabajo Matemático se puede decir que al resolverla es necesario tomar como referencial teórico las definiciones previas conocidas sobre el romboide y realizar un proceso de prueba para justificar la construcción del cometa, lo que propocionaría la activación de la génesis discursiva.
- **Usa estrategias y procedimientos:** Para guiar el estudiante, en este parte se brinda la oportunidad de que el estudiante realice un gráfico de la cometa y pueda ir completando de acuerdo a lo que se solicita, diagonales mayores y menores, así como la fórmula que ayudara a llegar al resultado final. En esta parte de la actividad es necesario el tomar como artefactos el uso de la regla para realizar un proceso de construcción de la grafica y dibujar el cometa en forma de romboide, esto activaría la genegis instrumental, además de tomar como artefacto las operaciones aritmeticas (suma, producto y cociente) y realizar un proceso de construcción para obtener área del rombo, lo cual permitiría la activación de la génesis instrumental nuevamente.
- **Argumenta afirmaciones:** Para este ultimo punto, se espera que los sujetos puedan comprobar que lo construido anteriormente realmente esta correcto y pensar en que otras situaciones se podría utilizar lo realizado en esta actividad, lo que propociona el uso del referencial a través de las afirmaciones con base en las definiciones y referencias sobre los cuadriláteros.

Las actividades son las siguientes:

Figura 15.

Actividades de la tarea 04 – actividades de la tarea 04 sobre Las cometas

Traduce situaciones.

a. ¿De qué trata el problema?

b. ¿Qué forma tiene la cometa que hizo Daniel?

c. ¿Cuáles son las medidas de los carrizos que utilizó Daniel?

d. **Grafica** cómo ubicó los carrizos Daniel.

Comunica su comprensión sobre situaciones.

a. ¿Qué pide el problema?

b. ¿Qué conceptos matemáticos usarías para hacer la cometa romboide?


c. **Explica** cómo construirías la cometa pedida.

Usa estrategias y procedimientos.

Para calcular el área de la cometa de Daniel, **elabora** un gráfico:

D = _____

d = _____



La diagonal mayor se divide en dos partes _____.

La diagonal menor se divide en dos partes _____.

La cometa tiene la forma de un romboide simétrico y presenta dos diagonales.
 D: Diagonal mayor
 d: diagonal menor

Argumenta afirmaciones.

a. ¿Tu solución es correcta? ¿Por qué?

b. ¿Esta fórmula la podrías utilizar en otras situaciones? **Explica.**

c. ¿En qué otras situaciones aplicamos los cuadriláteros?

d. ¿Cómo podrías calcular el perímetro de la cometa?

Nota: COREFO de matemática de sexto grado de primaria, p.80

En el siguiente capítulo se presenta la propuesta didáctica y las tareas que la constituyen

Capítulo III: Propuesta didáctica

Se presenta a continuación una propuesta basada en una secuencia didáctica que consta de tres tareas, las cuales están estructuradas de tal manera que permitan caracterizar el Espacio de Trabajo Matemático esperado, es decir, identificar la activación de las diferentes génesis, y planos verticales del ETM además de caracterizar los paradigmas dentro del dominio de la geometría que la secuencia didáctica propiciaría que sean privilegiados en el trabajo matemático.

3.1 Descripción

La propuesta consta de una secuencia didáctica formada por tres tareas. La primera tarea cuenta con dos ítems, los cuales están relacionados a las definiciones sobre perímetro y área de polígonos. En la segunda tarea se plantean dos ítems, los cuales están basados en un problema de contexto extra-matemático sobre perímetro y área, el cual consiste en el diseño de un terreno con interiores de forma cuadrada y rectangular, para posteriormente calcular el perímetro y área de estos interiores. La tercera tarea de la secuencia didáctica consta de tres ítems y están diseñados para realizarse en el ambiente virtual, el primer ítem se trabaja en el software Mathigon que involucra comparaciones de diferentes perímetros y áreas en cuadrados con diferentes longitudes, mientras que los ítems 02 y 03 demandan trabajar en el software GeoGebra y están basados en un problema de contexto extra-matemático sobre perímetro y área de un terreno cuadrado.

Se espera que al analizar el posible espacio de trabajo matemático que se generaría en las tareas de la secuencia didáctica propuesta se pueda evidenciar la articulación entre los planos epistemológico y cognitivo, con ello la activación de las diferentes génesis: la génesis semiótica la cual proporciona un sentido a los objetos; la génesis instrumental que hace funcional a los artefactos y la génesis discursiva que valida el referencial teórico basado en los conocimientos sobre perímetro y área.

3.2 Estrategia para analizar la secuencia didáctica de la propuesta

Para el análisis de la propuesta se ha considerado la estrategia de análisis que proponen Kuzniak y Nechache (2018) la cual consta de dos etapas: la etapa adentro en la que se describen las principales acciones matemáticas que podrían desarrollarse en las tareas de la propuesta didáctica y la etapa afuera donde se describe de forma global, por medio del esquema del ETM, el Espacio de Trabajo Matemático esperado de acuerdo con los posibles episodios identificados en la etapa adentro.

En esta estrategia de análisis también es necesario tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- **Acciones matemáticas:** la cual es identificada y retirada de la producción escrita u oral del individuo que resuelve la tarea.
- **Episodio:** son acciones matemáticas en que un individuo realiza para lograr solucionar una tarea que le fue asignada.

Además, Montoya et. al (2014), denomina el termino *circulación* para analizar las diferentes entradas al Espacio de Trabajo de Matemático y la articulación de los planos mediante las génesis, evidenciando las componentes en juego. Lo cual podrá ser evidenciado en el análisis de la propuesta didáctica de esta investigación .Es importante mencionar que este análisis se basa en una solución propuesta por la investigadora en la que se considera la producción matemática esperada. Así, para caracterizar el ETM de los episodios de las tareas 1, 2 y 3 de esta investigación, se considera el trabajo matemático esperado, esto permitirá realizar un análisis minucioso tomando como referente la teoría del ETM.

A continuación se presenta en la tabla 1 la descripción de las etapas para analizar el espacio de trabajo matemático que se podría generar al resolver las tareas de la propuesta didáctica de esta investigación:

Tabla 1.

Descripción de las etapas adentro y afuera del análisis basada en el ETM

Etapas del Análisis	Criterios de Análisis
<i>Adentro</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación de los episodios de trabajo: Se presentan los principales episodios identificados en la propuesta didáctica. • Descripción del trabajo: Se describe el trabajo en cada episodio, presentados mediante las acciones matemáticas esperadas en la propuesta. • Análisis de la circulación: Se utiliza la descripción del trabajo para la interpretación en términos de la circulación del ETM.
<i>Afuera</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Descripción global del trabajo con el diagrama el ETM: Se presenta la progresión de la circulación del trabajo matemático mediante el uso de secuencias con el diagrama del ETM y las componentes que son activadas.

Nota: Etapas del análisis en el ETM. Kuzniak y Nechache (2019, p. 1556)

El análisis busca identificar cómo interactúan los procesos generadores de trabajo matemático dentro del ETM y evaluar si estos se ajustan en todo o en parte a uno de los

paradigmas, en el dominio de la geometría, si el trabajo matemático es completo o se circunscribe a una génesis o a un plano determinado.

3.3 Secuencia didáctica de la propuesta

Como mencionamos al principio de este capítulo, la propuesta didáctica está formada por una secuencia didáctica de tres tareas. Además, estas tareas que fueron diseñadas a la luz del ETM permitirán alcanzar el objetivo general de la investigación: *Analizar el Espacio Trabajo Matemático que podría promover una propuesta didáctica que incluye tareas sobre perímetro y área de cuadriláteros para estudiantes de sexto grado de primaria.*

A continuación, se presenta cada una de las tareas con sus ítems:

Tarea 1: Tiene como objetivo explorar los conocimientos previos relacionados al concepto de perímetro y área de polígonos, además de identificar, cómo espera que se apliquen estos conceptos en el momento de resolver tareas donde se pide calcular el perímetro y el área de determinadas figuras geométricas, en este caso, los cuadriláteros, específicamente cuadrados y rectángulos.

En el ítem 1 se formula una pregunta relacionada con la definición del perímetro y área de polígonos y además se pide dibujar algunos polígonos conocidos, mientras que en ítem 2 se pide calcular el perímetro y área de un cuadrado y de un rectángulo para verificar si las nociones de perímetro y área que tiene el estudiante son correctas. En la siguiente figura se muestra el enunciado del ítem 1 y 2 de la tarea 1:

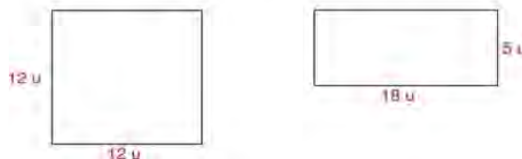
Figura 16.

Tarea 1 de la secuencia didáctica.

01) ¿Qué entiendes por perímetro y área de un polígono? Dibuja algunos polígonos que conoces.



02) Encuentra el perímetro y el área de cada uno de los cuadriláteros abajo:



Tarea 2: En esta tarea se solicita al estudiante que realice el bosquejo del plano de la casa dada determinadas indicaciones, para luego calcular el área y el perímetro de los espacios

interiores (cocina, sala comedor, baño, dormitorios). Esta tarea de contexto extra-matemática, presenta algunas condiciones para la elaboración del bosquejo como las medidas, la forma de los espacios interiores de la casa, aunque existe la libertad de utilizar estas reglas como base para la construcción de algo único y propio que despierta la creatividad.

En el ítem 1 aquí se pide la construcción del terreno teniendo en cuenta algunas reglas como las dimensiones del terreno dado y la cantidad de espacios interiores. Esta tarea busca que los estudiantes puedan ser capaces de asociar el perímetro y área de cuadrados y rectángulos en un contexto real. En el ítem 2 se pide calcular el perímetro y área de los espacios interiores que el estudiante pudo diseñar en el bosquejo de la casa, llevando a una construcción propia. Este ítem tiene como propósito que el estudiante utilice las medidas para calcular el perímetro y área de cada uno de los interiores de la casa.

En la siguiente figura se presenta la tarea 2:


Figura 17.

Tarea 02, ítem 1 y 2 de la secuencia didáctica.

Situación problema: La familia de Sandra heredó un terreno de $14\text{ m} \times 8\text{ m}$. En el terreno se pretende construir una casa, para que Sandra y sus padres puedan vivir en ella. Con base en esta información:

01) En la malla cuadriculada de abajo, bosqueja un plano de la casa que la familia de Sandra pretende construir en el terreno, considerando que los espacios de la casa solo pueden ser cuadrados o rectángulos.

NOTA: El plano de la casa debe tener, una sala-comedor, una cocina, un baño, 2 dormitorios y un patio. Además, los cuadraditos que forman la malla cuadriculada representan 1 metro de

lado en la realidad como muestra la figura a seguir: 



02) Utiliza las medidas creadas para la casa de Sandra en el diseño anterior e indique en la tabla de abajo los resultados encontrados para el área y perímetro de la Sala comedor y de uno de los cuartos de la casa.

NOTA: Indique el cuarto que está utilizando para encontrar el perímetro y el área. Utilice el espacio de la hoja abajo para colocar los cálculos que le llevarán a encontrar estas respuestas.

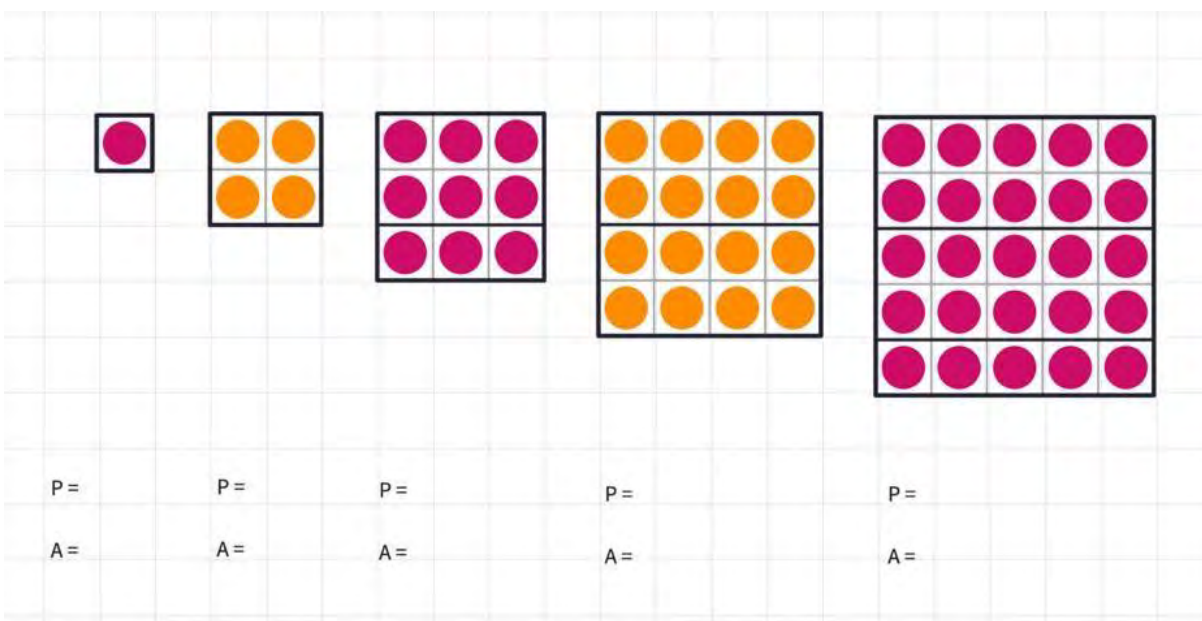
Tarea 3: Es una tarea realizada en el ambiente tecnológico, haciendo uso del Mathigon, un página virtual con una aplicación visual y gratuita en la cual se puede apreciar una actividad

creada de forma visual para la realización del perímetro y área de cuadrados con diferentes longitudes.

En el **ítem 1**, el uso del Mathigon, sirve de base para apreciar el perímetro y área de cuadrados con diferentes longitudes. Tiene el propósito de observar lo que ocurre con el perímetro y el área en los diferentes casos para que se pueda llegar a una conclusión de la diferencia entre el perímetro y el área. Esta tarea se puede apreciar en la siguiente figura:

Figura 18.

Actividad sobre el perímetro y área de cuadrados en Mathigon.

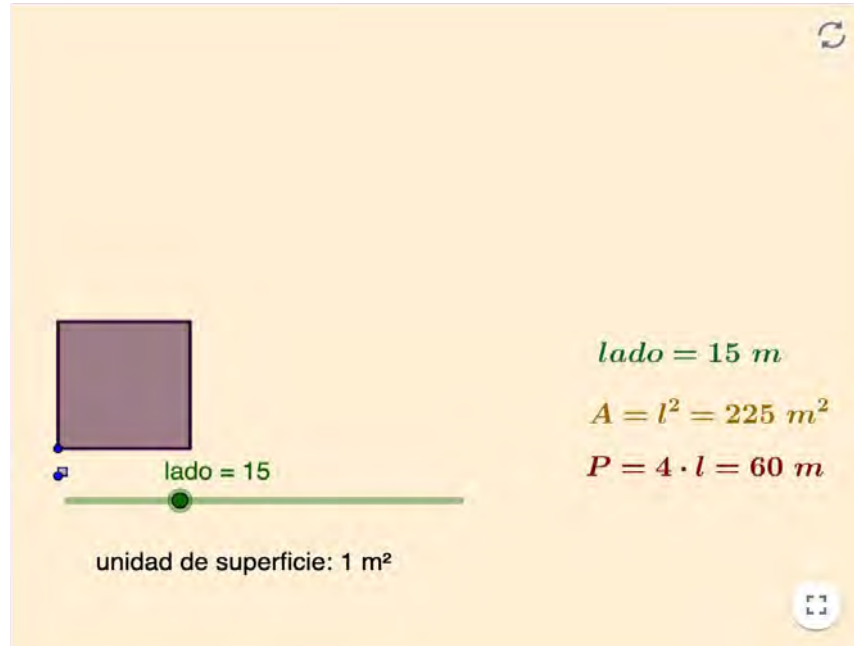


Luego en el **ítem 02**, se presenta la parte de la tarea a ser realizada con el GeoGebra. Esta tarea tiene el propósito conectar las tareas anteriores para una comprensión visual de lo que puede ocurrir al cambiar las longitudes de un cuadrilátero y observar como estos cambios pueden o no relacionarse. Se pide analizar lo que manifiesta el estudiante Juan, del colegio Arco Irís, acerca de que el nuevo colegio tendrá el doble del perímetro y el doble de área en relación al anterior, visto que este tendría ahora el doble de longitud.

A continuación, se presenta una figura retirada de la parte a ser realizada en GeoGebra de la tarea 3:

Figura 19.

Applet de la tarea 03 de la secuencia didáctica en GeoGebra.



Cada una de las tres tareas presentadas anteriormente, se puede apreciar en los anexos de esta investigación (ver p. 83). Al realizar el análisis de acuerdo con lo que se espera como respuesta en cada una de las tareas fueron encontrados 11 posibles episodios (EP) y para cada episodio se identifica la cantidad de acciones matemáticas (AM) esperadas, los cuales se presentan en la tabla 2:

Tabla 2.

Episodios en las tareas presentadas en la propuesta.

Tarea	Ítem	Episodios - EP	Número de AM esperadas
Tarea 1	Ítem 1	EP1 – Noción de perímetro	3
		EP2 – Noción de área	3
		EP3 – Representación de los polígonos	1
	Ítem 2	EP4 – Calculo del perímetro y área del cuadrado	2
		EP5 – Calculo del perímetro y área del rectángulo	3
Tarea 2	Ítem 1	EP6 – Representación del terreno	3
		EP7 – Representación de cada ambiente del terreno	2

Ítem 2	EP8 – Calculo del perímetro y área de la sala comedor y del cuarto elegido	3
Ítem 1	EP9 - Calculo del perímetro y área de los cuadriláteros en el ambiente virtual Mathigon (Polypad)	3
Tarea 3	EP10 - Uso de un aplicativo creado en GeoGebra para la comprensión del enunciado	2
	Ítem 2 y 3 EP11 - Justificación al comparar el lado, el perímetro y el área de dos cuadrados	2

Para comprender cada uno de los episodios identificados se presenta a continuación el análisis de cada uno de acuerdo con la tarea y al ítem que está relacionado, utilizando la estrategia de análisis de Kuzniak y Nechache (2019) presentada anteriormente

3.4 Análisis

Para cada tarea de la secuencia didáctica de la propuesta, se hace un análisis por ítem y en cada ítem se presenta las posibles soluciones, seguidas de la etapa adentro y la etapa afuera. Para la etapa adentro se presentan los posibles soluciones en cada uno de los episodios identificados en cada ítem, luego la descripción del trabajo matemático con la sucesión de las acciones matemáticas esperadas, luego el análisis de la circulación del episodio; y finalmente se presenta la circulación del ETM del ítem con todos los posibles episodios presentados. En la etapa afuera se presenta la descripción global del ETM esperado segundo los posibles episodios. Además, se caracteriza los paradigmas en el dominio de la geometría que la tarea privilegia, de acuerdo con la posible solución esperada de las tareas.

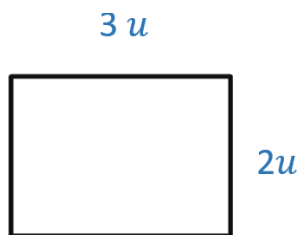
- **Tarea 1 - Ítem 1**

Posibles respuestas: en este ítem al pedir al estudiante que escriba con sus palabras la definición de perímetro y área de un polígono, una posible respuesta puede ser la siguiente:

“El perímetro es lo que rodea la figura y que cada lado se suma para encontrar el valor.”

Figura 20.

Representación de un rectángulo cualquiera para representar el perímetro.



Luego el perímetro de este rectángulo es:

$$3 + 3 + 2 + 2 = 10 u$$

Análogamente para el área:

“Área es la parte inferior de la figura”

Figura 21.

Representación de un rectángulo cualquiera para representar el área.



Luego el área de este triángulo es:

La parte coloreada en el interior del triángulo.

A continuación, se pide al estudiante que represente algunos polígonos que conoce, por lo cual, para esta parte de la tarea, una posible solución sería dibujar algunos polígonos conocidos, como, por ejemplo:

Figura 22.

Representación de algunos polígonos cualquiera.



Etapas adentro: Se identifican 3 posibles episodios los cuales se describen a continuación: El **EP1** involucra la noción de perímetro por lo que se espera una descripción de lo que significa para el estudiante, además de la representación de algún polígono identificando

sus lados y la suma y/o producto de estos lados con un valor numérico que represente el perímetro del polígono.

Análisis de la **circulación en el EP1** se utiliza como referencial teórico la noción de perímetro, además, se activa la génesis semiótica al tomar como representamen dicha noción y realizar un proceso de visualización para representar un polígono, luego se hace uso de la suma y/o producto como componente artefacto, para la realización en el proceso de construcción activando la génesis instrumental, lo que genera la activación del plano vertical [Sem-Ins].

En el **EP2** está asociado a la noción de área de un polígono, en que se describe la definición de área de acuerdo con los conocimientos previos, donde la representación de algún polígono se pueda usar como ejemplo para indicar lo que es el área, la cual se representa mediante la parte coloreada en el interior y se indica con una flecha.

Análisis de la **circulación en el EP2** se propicia el uso del referencial teórico para la noción de área, luego se toma como representamen la definición de polígono y realiza un proceso de visualización para dibujar un polígono, activando la génesis semiótica, además de hacer uso del representamen de la noción de área, pero para realización de un proceso de visualización en que se representa el interior de un polígono a fin de indicar el área, activando una vez más la génesis semiótica.

El **EP3** también inicia con la representación de polígonos, y se espera la representación de diferentes polígonos, como triángulos y cuadriláteros.

Cabe mencionar que en el análisis de la circulación hasta aquí se activaría la génesis semiótica, pues se propicia que se utilice el representamen de la definición de polígonos para realizar un proceso de visualización en la representación de polígonos conocidos. Por lo tanto la circulación del ETM estaría dada de la siguiente manera:

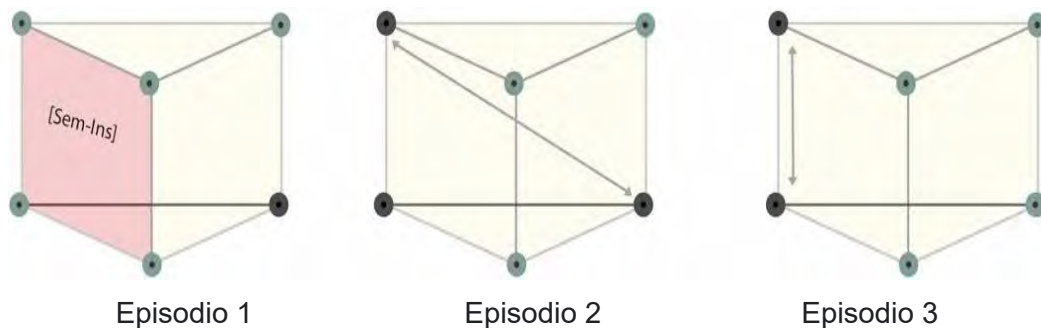
Referencial → [Sem-Ins] → Referencial → Representamen → Visualización

A continuación se describe el trabajo global en la etapa afuera utilizando los elementos de la teoría del ETM en cada uno de los episodios.

Etapa afuera: la descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM (figura 21).

Figura 23.

Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 1 - ítem 1.



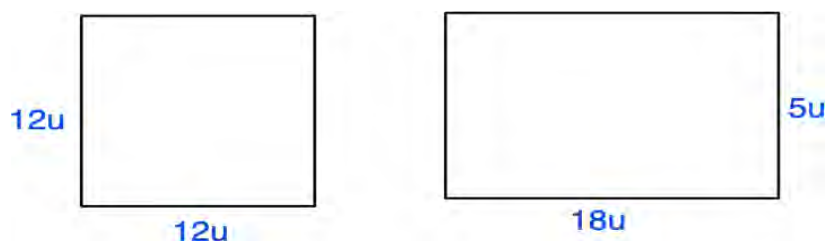
La descripción global del ETM esperado en el ítem 1 de esta tarea, hace una referencia visual a la circulación del ETM presentada en la etapa adentro en que **cada uno de los episodios analizados**. Como para la tarea 1 – ítem 1, se identifican tres posibles episodios, entonces para la etapa afuera se hace un diagrama para representar de forma visual cada uno de estos episodios. Se observa en el episodio 1 la activación del plano [Sem-Ins]. En el episodio 2 se hace presente el referencial teórico, y la activación de la génesis semiótica. Por último, en el episodio 3 se tiene la activación de la génesis semiótica.

- **Tarea 1 - Ítem 2**

Posibles respuestas: Para encontrar la posible respuesta del perímetro y área del cuadrado y del rectángulo dado en el ítem 2, los estudiantes pueden utilizar diferentes caminos para llegar a la solución, ya sea aplicando la fórmula directamente utilizando del referencial teórico de la definición para encontrar los resultados.

Figura 24.

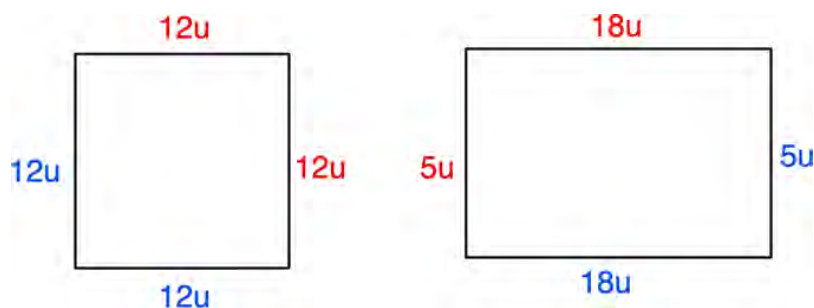
Representación del cuadrado y del rectángulo en que se solicita el área y perímetro del ítem 2.



Al tomar como referencial teórico la definición del cuadrado y del rectángulo para justificar los valores de los lados que no tiene una representación de unidad el sujeto lograría una representación con las longitudes de los cuatro lados como podemos observar a seguir:

Figura 25.

Representación del cuadrado y del rectángulo con las longitudes en cada lado.



Una vez que se obtengan los valores de las longitudes se aplica la definición de perímetro y de área en cada caso, como podemos observar:

Perímetro del cuadrado:

$$12u + 12u + 12u + 12u = 48u$$

Es decir, el cuadrado tiene un perímetro de $48u$

Área del cuadrado:

$$12u \times 12u = 144u^2$$

Es decir, el área del cuadrado es de $144u^2$

Análogamente, tenemos que:

Perímetro del rectángulo:

$$18u + 18u + 5u + 5u = 46u$$

Es decir, el cuadrado tiene un perímetro de $46u$

Área del rectángulo:

$$18u \times 5u = 90u^2$$

Es decir, el área del cuadrado es de $90u^2$

Etapadentro: Se identifican 2 posibles episodios los cuales se describen a continuación: En el **EP4** lo cual se relaciona con el cálculo del perímetro y área del cuadrado, en que se espera que el sujeto observe que todos los lados tienen el mismo valor y que se logre obtener el perímetro mediante operaciones aritméticas utilizando sumas y/o producto, pudiendo ser de forma intuitiva o con la utilización de fórmulas.

Análisis de la **circulación en el EP4** se espera tomar como referencial teórico la definición de cuadrado para la realización de un proceso de prueba para justificar que todos los lados tiene la misma longitud, llevando a la activación de la génesis discursiva. Además, se activa la génesis instrumental, al tomar como artefacto las operaciones aritméticas para realizar un proceso de construcción en que llevara a la obtención del perímetro y área del cuadrado; esto lleva a la activación del plano vertical [Ins-Dis].

En el **EP5**, se relaciona con el cálculo del perímetro y área del rectángulo, lo cual se espera que el sujeto pueda identificar los lados faltantes mediante la justificación de que los lados opuestos de un rectángulo son congruentes, para luego aplicar operaciones aritméticas para encontrar el perímetro y área del rectángulo dado.

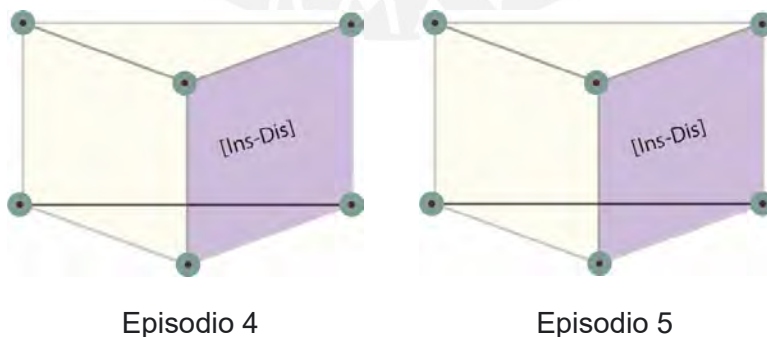
Análisis de la **circulación en el EP5**, se activa la génesis discursiva, una vez que se toma como referencia teórica la definición de rectángulo, realizando un proceso de prueba en que justifica en que lados opuestos tiene misma longitud. También se toma como artefacto las operaciones aritméticas y se realiza un proceso de construcción para encontrar el perímetro y área de este rectángulo, activando la génesis instrumental; que por su vez genera la activación del plano vertical [Ins-Dis].

La circulación del ETM estaría dada de la siguiente manera: *[Ins-Dis] → [Ins-Dis]*

Etapa afuera: la descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM se observa en la siguiente figura:

Figura 26.

Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 1 - ítem 2.



La descripción global del ítem 2 de esta tarea, hace una referencia visual a la circulación del ETM presentada en la etapa adentro en que **cada diagrama representa un episodio**. Como para la tarea 1 – ítem 2, se identifican dos posibles episodios, entonces para la etapa afuera se hace un diagrama para representar de forma visual cada uno de estos episodios. En el primero

diagrama hace referencia al EP4, lo cual se activa el plano [Ins-Dis]. El segundo diagrama está relacionado al EP5 que una vez más se activa el plano [Ins-Dis].

Además, en la tarea 1 el posible trabajo matemático tiene argumentos relacionados a la percepción, la deducción y el experimento para que sean considerados válidos, también es permitido utilizar diferentes argumentos para llegar a una solución válida y se puede observar una geometría técnica y práctica, lo que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

- **Tarea 2 - Ítem 1**

Posibles respuestas: Para construir el terreno rectangular de 14m x 8m en la malla cuadrada se utilizó la referencia dada en la tarea de que los cuadraditos que forman la malla cuadrada representan 1 metro de lado y se utiliza la ayuda de una regla para esta construcción.

Figura 27.

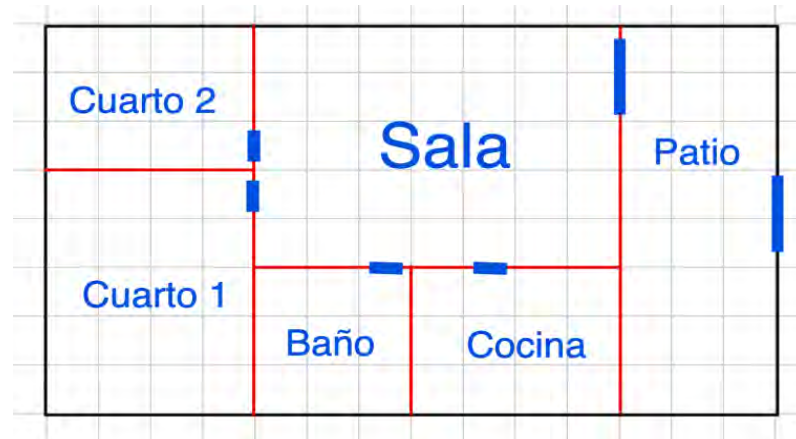
Representación del dibujo del terreno de 14m x 8m en la malla cuadrada.



En seguida se solicita que en el plano de la casa debe tener determinados espacios, pero que estos espacios solo pueden ser cuadrados o rectángulos, aún con la ayuda de la regla una posible construcción se muestra en la figura a seguir.

Figura 28.

Representación de la posible construcción de los espacios del plano de la casa que podría realizar un estudiante



Completando así la construcción solicitada en este ítem 1 de la tarea 2.

Etapa adentro: Se identifican 2 posibles episodios los cuales se describen a continuación: El **EP6** está relacionado con la representación del terreno, es dado una malla cuadrículada que puede ser utilizada como base para la construcción de los lados del terreno dado, es necesario la utilización de lápiz y regla lo cual servirá como base para formar los cuatro lados que componen el terreno, pudiendo elegir en que parte de la malla va a estar localizado además de direccionar si el terreno será representado de forma horizontal o vertical, apoyándose en la dimensión dada de los cuadrados de la malla.

Análisis de la **circulación en el EP6** para la construcción del terreno toma como representarmen la malla cuadrículada para que se pueda realizar un proceso de visualización que va a identificar un rectángulo lo cual representa el terreno y esto lleva a la activación de la génesis semiótica. Además, es necesario que se haga uso de una regla y lápiz, que servirán de artefacto y el estudiante podría realizar un proceso de construcción del diseño que representa el terreno, en este caso un rectángulo, dado que los lados que lo conforma son 14m y 8m, por lo cual se activa la génesis instrumental.

Finalmente se podría dar la activación de la génesis discursiva, una vez que es necesario tomar como referencial teórico la longitud de los lados de cada cuadrado en la malla cuadrículada para realizar un proceso de prueba, lo cual justificaría las dimensiones del terreno. Con la activación de las tres génesis mencionadas, la semiótica, la instrumental y la discursiva, entonces se activarían los tres planos verticales, el plano [Sem-Ins], [Ins-Dis] y el [Sem-Dis].

En el **EP7** se reflexiona en la representación para los ambientes del terreno, en el cual el sujeto necesita hacer uso del terreno construido en el EP6 para utilizar como base lo que llevará a la construcción de cada uno de los seis espacios solicitados en este ítem, para esto la malla cuadriculada también sirve como base para poder dibujar los espacios, así como el terreno, además es necesario el uso de la regla y lápiz para que se pueda hacer las divisiones del terreno en cuadrados y rectángulos que formarán los espacios de la casa a ser construida.

Análisis de la **circulación en el EP7** se toma en cuenta que a cada construcción de los espacios se activara dos génesis: la génesis semiótica, al tener la malla cuadriculada como representamen dentro del terreno y utilizar este para realizar un proceso de visualización para que se pueda identificar los rectángulos y/o cuadrados que represente los ambientes de la casa; y la génesis instrumental, al seguir utilizando la regla y lápiz como artefacto lo cual realiza un proceso de construcción que ayuda a dibujar los ambientes de la casa representados mediante rectángulos y/o cuadrados. La activación de estas dos génesis evidenciaría la activación del plano vertical [Sem-Ins].

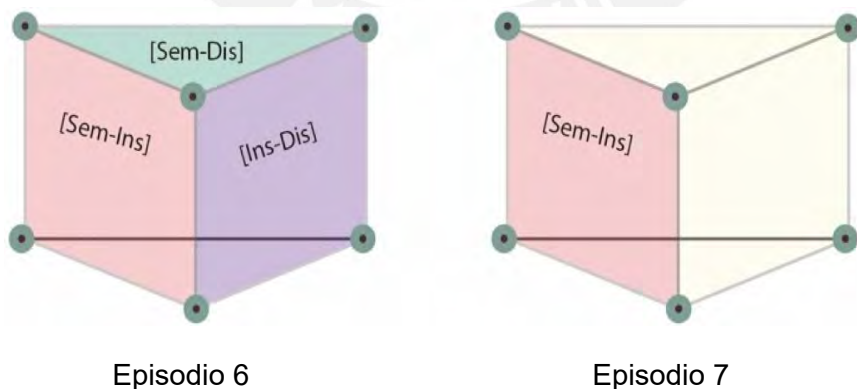
La circulación del ETM estaría dada de la siguiente manera:

[Sem-Ins] → [Ins-Dis] → [Sem-Dis] → [Sem-Ins]

Etapa afuera: la descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM se presenta en la siguiente figura:

Figura 29.

Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 2 - ítem 1.



La descripción global del ítem 1 de esta tarea, hace una referencia visual a la circulación del ETM presentada en la etapa adentro en cada uno de los episodios. Como para la tarea 2 –

ítem 1, se identifican dos posibles episodios, entonces para la etapa afuera se hace un diagrama para representar de forma visual cada uno de estos. En el episodio 6 se puede que se activarían los tres planos verticales, mientras que en el episodio 7 se puede observar que se podría activar el plano vertical [Sem-Ins].

- **Tarea 2 - Ítem 2**

Posibles respuestas: para encontrar el perímetro y el área de la sala y uno de los cuartos del plano de la casa creado en el ítem 1, primero el sujeto necesita elegir el cuarto que usará como referencia para encontrar los resultados. En esta posible solución vamos a suponer la elección del cuarto 1. Una vez que el cuarto fue seleccionado el sujeto necesita utilizar como referencia la solución del ítem 1 para lograr encontrar el perímetro y área del cuarto 1 y de la sala comedor. Para esto, se reproduce con la utilización de lápiz y regla los cuadriláteros que representan el cuarto 1 y la sala, atribuido los valores de las longitudes que representarían en cada uno de los cuadriláteros.

Figura 30.

Representación de los cuadriláteros del cuarto 1 y de la sala comedor con sus longitudes.



Una vez que la representación se realice, se procede en hacer los cálculos para encontrar el perímetro y el área en cada uno de los cuadriláteros:

Perímetro del cuarto 1:

$$4 m + 5 m + 4 m + 4 m = 18 m$$

Es decir, el cuarto 1 tiene un perímetro de 18 m

Área del cuarto 1:

$$5\text{ m} \times 4\text{ m} = 20\text{ m}^2$$

Es decir, el área del cuarto 1 es de 20m^2

Análogamente, tenemos que:

Perímetro de la sala:

$$5\text{ m} + 5\text{ m} + 7\text{ m} + 7\text{ m} = 24\text{ m}$$

Es decir, la sala tiene un perímetro de 24m

Área de la sala:

$$7\text{ m} \times 5\text{ m} = 35\text{m}^2$$

Es decir, el área de la sala es de 35m^2

Etapa adentro: Se identifica 1 posible episodio lo cual se describe a continuación: El **EP8** esta es dado por el cálculo del perímetro y área de la sala comedor y uno de los cuartos que dependerá de la selección del sujeto que desarrollará la actividad. Se utiliza como base la sala y el cuarto elegido de la malla cuadrículada donde fue realizado el ítem anterior, luego se espera que la sala y el cuarto elegido sea replicado en la parte de la resolución de este ítem, a fin de que se apliquen los procedimientos aritméticos para que se pueda identificar el valor del perímetro y del área de cada uno de estos dos espacios.

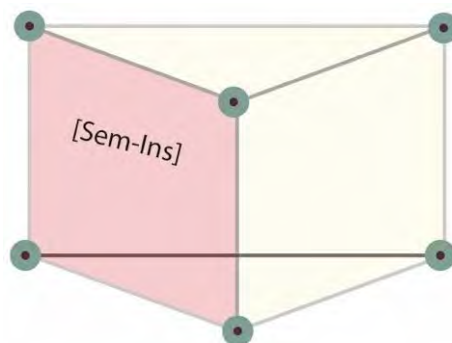
Análisis de la **circulación en el EP8**, se espera que proporcione la activación de la génesis semiótica, al tomar como representamen el cuadrilátero que representa la sala comedor y el cuarto elegido de la malla cuadrículada para la realización de un proceso de visualización que ayudará a reproducir esta figura, luego se produce la activación de la génesis instrumental, al utilizar la regla y el lápiz como artefacto y realiza un proceso de construcción para dibujar el cuadrilátero que representa la sala comedor y el cuarto elegido además, la génesis instrumental también se activaría al tomar como artefacto las operaciones aritméticas de suma y/o producto para realizar un proceso de construcción para la obtención del perímetro y área de la sala comedor y del cuarto elegido. Lo que lleva a la activación del plano vertical [Sem-Ins].

La circulación del ETM estaría dada por : *[Sem-Ins]*

Etapa afuera: la descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM se presenta en la figura siguiente:

Figura 31.

Descripción global del ETM esperado según el posible episodio de la tarea 2 - ítem 2.



Episodio 8

La descripción global del ítem 2 de esta tarea, hace una referencia visual a la circulación del ETM presentada en la etapa adentro en que **cada diagrama representa un episodio**. Como para la tarea 2 – ítem 2, se identifican un posible episodio, entonces para la etapa afuera se hace un diagrama para representar de forma visual este episodio que representa el EP8, lo cual tenemos la activación del plano vertical [Sem-Ins].

En la tarea 2 el posible trabajo matemático haría uso de la idea de objetos reales relacionados a la geometría como la representación del terreno, es decir el estudiante se basaría en la semejanza entre realidad y modelo, con argumentos relacionados a la percepción, la deducción y el experimento para que sean considerados válidos, también es permitido utilizar diferentes argumentos para llegar a una solución válida y se puede observar una geometría técnica y práctica, lo que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**. Además, hace uso de un sistema de axiomas incompleto, las pruebas son desarrolladas dentro del axioma establecido, está relacionada con la geometría euclidiana clásica y como dicho anteriormente tiene relación con el mundo real, por lo cual se tiene la **Geometría axiomática natural (GII)**.

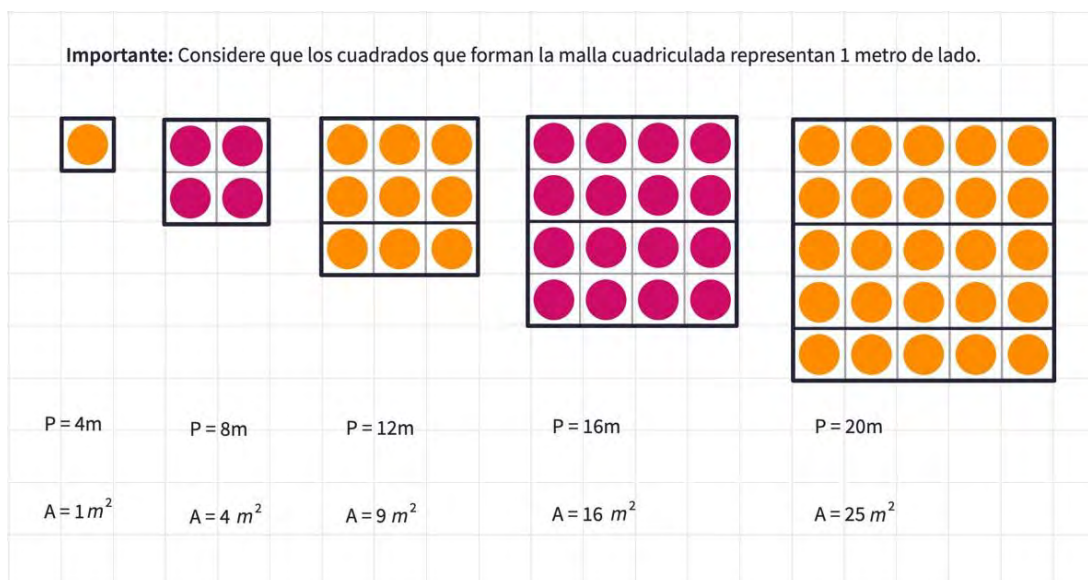
- **Tarea 3 - Ítem 1**

Posibles respuestas: Se presenta una malla cuadrículada con la imagen de cinco cuadrados con longitudes de 1m, 2m, 3m, 4m y 5m respectivamente, lo cual se informa que cada lado del cuadrado de la malla cuadrículada representa 1 metro, una posible solución para encontrar los perímetros y áreas de los cuadrados dados es utilizar el procedimiento realizado en las tareas anteriores, sumando los cuatro lados de los cuadrados para encontrar el perímetro

(P) de cada cuadrado y multiplicando el lado por el lado para encontrar el área (A) de los cuadrados.

Figura 32.

Representación de la solución de los perímetros y área de los cuadrados presentados en el ítem 1 de la tarea 3.



Etapadentro: Se identifica 1 posible episodio lo cual se describe a continuación: El **EP9** esta es dado el cálculo del perímetro y área de los cuadriláteros en que hace uso del ambiente virtual Mathigon, se utiliza la malla cuadrículada presentada en el ambiente virtual para verificar los valores del perímetro y área en cada uno de los cuadrados con diferentes longitudes.

En el análisis de **la circulación en el EP9** se tendría la activación de la génesis instrumental, en que toma como artefacto tecnológico el ambiente virtual Mathigon y realiza un proceso de construcción para obtener el perímetro y el área de los cuadrados dados. Tiene como representamen los cuadrados presentados en la malla cuadrículada y realiza un proceso de visualización de los cuadriláteros dados, activando la génesis semiótica. Además, también toma como referencial teórico la definición de cuadrado y realiza un proceso de prueba para el resultado en cada uno de los perímetros y áreas solicitados activando la génesis discursiva. Al activar las tres génesis, el EP9 llevaría a la activación de los tres planos verticales: [Sem-Ins], [Ins- Dis] y [Sem-Dis].

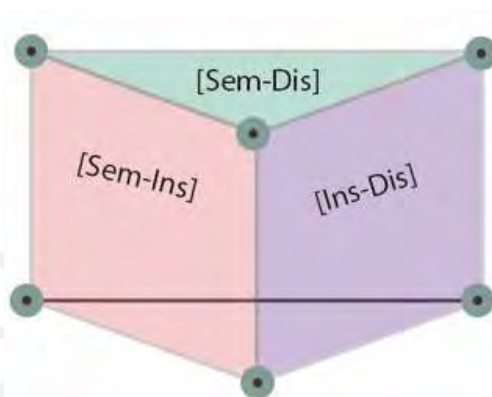
La Circulación del ETM estaría dada por:

[Sem-Ins] → [Ins- Dis] → [Sem-Dis].

Etapa afuera: la descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM estaría dado por la siguiente figura:

Figura 33.

Descripción global del ETM esperado según el posible episodio de la tarea 3 - ítem 1.



Episodio 9

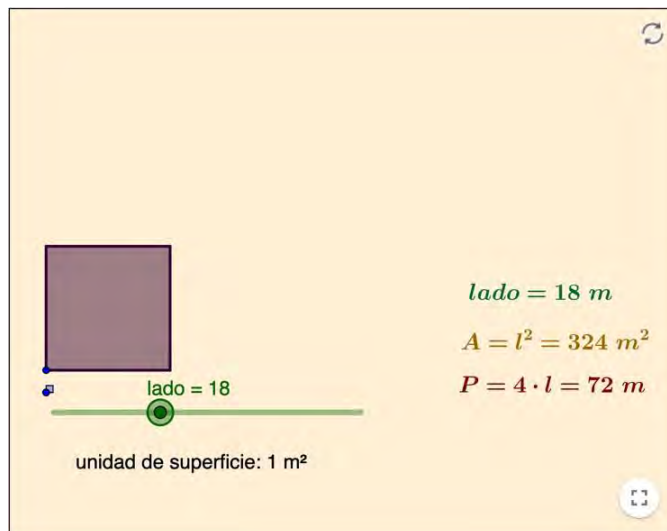
La descripción global del ítem 1 de esta tarea, hace una referencia visual a la circulación del ETM presentada en este **episodio**. En el diagrama se puede observar que el EP9 de este ítem se presenta la activación de los tres planos verticales.

- **Tarea 3 - Ítem 2**

Posibles respuestas: En primer lugar, la forma que es planteada la tarea se solicita informar se la afirmación es correcta o no, el sujeto necesita hacer uso de la imagen dinámica (applet) presentada, ver figura a seguir:

Figura 34.

Applet del ítem 2 de la tarea 03 de la secuencia didáctica en GeoGebra.



El applet tiene una herramienta deslice, en que el sujeto puede mover para alterar la longitud del cuadrado presentado en la imagen, para poder hacer la comparación del perímetro y del área del cuadrado que representa el terreno del colegio. Una vez con estos valores puede el sujeto podrá por ejemplo hacer una pequeña tabla de doble entrada para observar los valores del lado, del perímetro y del área indicados en la actividad, para llegar a una conclusión, luego hacer una cuenta simple, por ejemplo, utilizar el lado inicial como referencia y luego encontrar el doble del lado, del perímetro y del área multiplicando los valores por dos, o sumando los valores de cada uno dos veces, una vez encontrando este valor, podrá hacer el deslice en la imagen y comparar si el perímetro y el área del terreno con el doble de lado tiene o no el doble de perímetro y área. Llegando a la conclusión que el alumno Juan, indicado en la actividad está equivocado al indicar que, al doblar el lado del terreno del colegio, tendría el doble del área y del perímetro, ya que al hacer las comparaciones se da cuenta que el doble del lado, resulta en el doble del perímetro, pero no resulta en el doble del área como había indicado. Una posible respuesta del sujeto sería la que se indica en la figura a seguir.

Figura 35.

Possible respuesta del sujeto en el ítem 2 de la actividad 3.

01)

¿La afirmación del alumno Juan, en qué comenta que el nuevo local del colegio tendrá ahora el doble de área y el doble de perímetro que el colegio actual está correcta?

Marca todas las que correspondan

A Sí

B No ✓ CORRECTO

✓ ¡Bien hecho! Tu respuesta es correcta.

02)

Justifique su respuesta.

As π La afirmación de Juan no es correcta, porque el doble del área del terreno resulta en el doble del perímetro, pero no resulta en el doble del área.

Etapas dentro: Se identifican 2 posibles episodios los cuales se describen a continuación: El **EP10**, se hace uso del software GeoGebra para la comprensión del enunciado de este ítem de la tarea 3, además es dado un cuadrado con la herramienta deslice para que se pueda observar el cuadrado con diferentes lados, junto a los resultados de su perímetro y área acompañado de las fórmulas utilizadas para este resultado, así como de las unidades de medidas que representan.

Análisis de la **circulación en el EP10** se activaría la génesis instrumental, al tomar como artefacto el software GeoGebra favoreciendo el proceso de instrumentalización del ambiente virtual, el deslice permite tomar como representamen para determinar diferentes configuraciones de la figura inicial relacionando la visualización dinámica, lo que lleva a la activación de la génesis semiótica, haciendo que este episodio propicie la activación del plano vertical [Sem-Ins].

El **EP11**, se busca hacer la justificación al comparar el lado, el perímetro y el área de dos cuadrados, siguiendo la relación solicitada, en este caso que dado el lado de 18m, observar su perímetro y área, para después identificar lo que ocurre con el perímetro y el área al doblar la longitud de este cuadrado de lado 18m. Por último, se justifica la afirmación hecha al principio de la actividad de acuerdo con los resultados analizados.

Análisis de la **circulación en el EP11** se toma como representamen la relación de los diferentes cuadrados con lados de longitud diferentes llevando a realizar un proceso de visualización, activando así la génesis semiótica, además lleva al sujeto a tomar como referencia la definición del doble y comparar los lados, perímetros y áreas de los cuadrados para lograr realizar un proceso de prueba a fin de justificar el equívoco del estudiante Juan con su afirmación, proporcionando la activación de la génesis discursiva. La activación de estas génesis lleva a la activación del plano vertical [Sem-Dis].

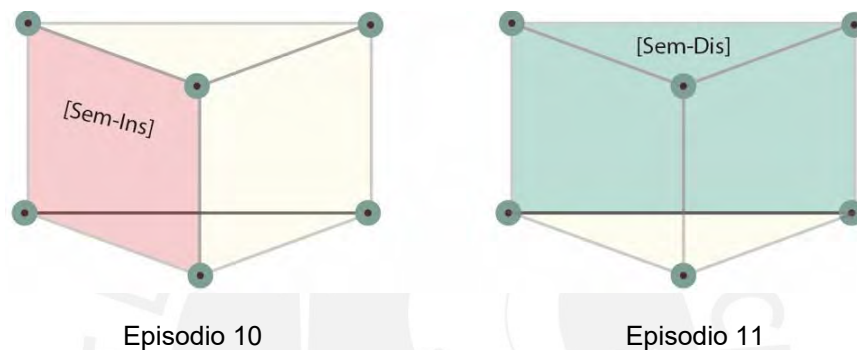
La circulación del ETM estaría dada por:

[Sem-Ins] → [Sem-Dis].

Etapa afuera: la descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM se observa a continuación:

Figura 36.

Descripción global del ETM esperado según los posibles episodios de la tarea 3 - ítem 2.



La descripción global del ítem 2 de esta tarea, hace una referencia visual a la circulación del ETM presentada en la etapa adentro en que **cada diagrama representa un episodio**. Como para la tarea 3 – ítem 2, se identifican dos posibles episodios, entonces para la etapa afuera se hace un diagrama para representar de forma visual cada uno de estos episodios. En el primero diagrama hace referencia al EP10, en que se puede observar la activación del plano [Sem-Ins], en cuanto que el segundo diagrama que hace referencia al EP11, donde se puede observar la activación del plano vertical [Sem-Dis].

En la tarea 3, también se hace relación de la geometría con objetos reales y la confusión con la realidad. Los argumentos son relacionados a la percepción y a la experimentación para que sean considerados válidos, existe una semejanza entre la realidad y el modelo, se utiliza materiales, artefactos para la resolución de problemas, lo cual caracteriza la **Geometría natural (GI)**, además de la **Geometría axiomática natural (GII)**, visto que el sistema de axioma puede ser incompleto y las pruebas deberán ser desarrollada dentro del sistema de axiomas establecido y está relacionada con la geometría euclidiana clásica.


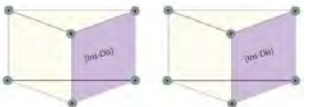
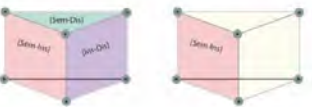



Como fue posible observar, en cada episodio se logró observar las génesis y los planos verticales que fueron activados, de acuerdo con lo que se espera como resolución de las tareas propuestas en la secuencia didáctica. Es importante tener en cuenta que estas activaciones

esperadas pueden cambiar de acuerdo con como un individuo resuelva las tareas, pudiendo tener más o menos episodios identificados, en este caso, como propuesta se buscó considerar las posibles resoluciones esperada en cada tarea para que el análisis fuera realizado. Además, también se puede observar los paradigmas que se caracterizan dentro del dominio matemático de la geometría en cada una de las tarareas presentadas según las resoluciones esperadas en cada una de ellas.

A continuación, en la tabla 3 se muestra el resume los análisis basados en el ETM de las tareas 1, 2 y 3, con sus respectivos Ítems, donde se hace evidencia a los paradigmas dentro del dominio de la geometría, a los episodios descritos anteriormente y una síntesis del análisis global en el ETM.

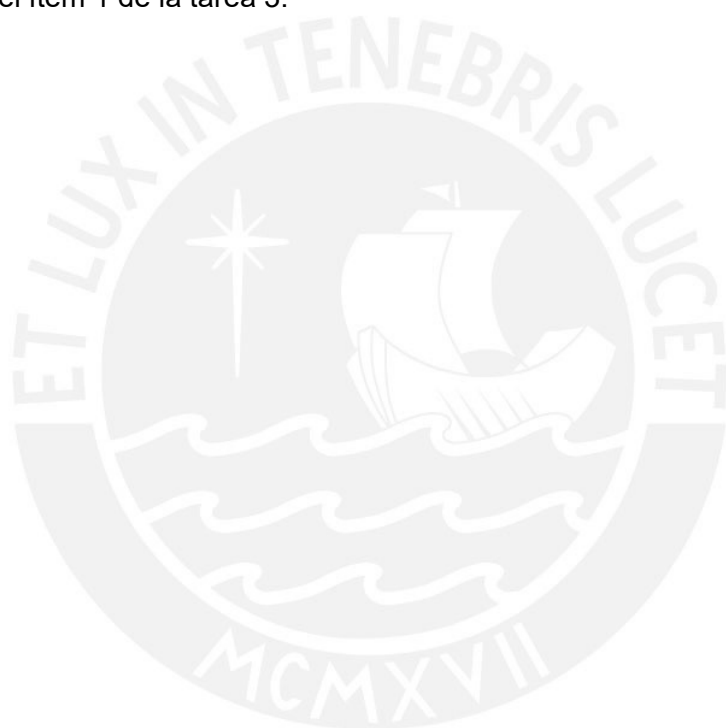
Tabla 3.

Resume del análisis basado en el ETM.

Tarea	Paradigma	Ítem	Episodios - EP	Síntesis del análisis global del ETM
Tarea 1	GI	Ítem 1	EP1 – Noción de perímetro EP2 – Noción de área EP3 – Dibujo de los polígonos	
		Ítem 2	EP4 – Calculo del perímetro y área del cuadrado EP5 – Calculo del perímetro y área del rectángulo	
Tarea 2	GI y GII	Ítem 1	EP6 – Representación del terreno EP7 – Representación de cada ambiente del terreno	
		Ítem 2	EP8 – Calculo del perímetro y área de la sala comedor y del cuarto elegido	
Tarea 3	GI y GII	Ítem 1	EP9 - Calculo del perímetro y área de los cuadriláteros en el ambiente virtual Mathigon	
		Ítem 2	EP10 - Uso del software GeoGebra para la comprensión del enunciado EP11 - Justificación al comparar el lado, el perímetro y el área de dos cuadrados	

Fuente: Adaptado de Henríquez C. y Kuzniak A. (2022, p. 1566)

Como se puede observar en la tabla anterior, con el resume del análisis basado en el ETM, es posible identificar de forma clara los paradigmas que se presenta en la secuencia didáctica, siendo el paradigma de la Geometría Natural (GI), presente en las tres tareas presentadas y la Geometría Axiomática Natural (GII), presente en la tarea 2 y la tarea 3. Además, se puede identificar de forma más visual la síntesis del análisis global del ETM, observando en que tarea y en que ítem de cada tarea se activa una génesis y/o un plano vertical. Se puede observar que el plano vertical [Sem-Ins] es lo que más aparece en las diferentes tareas, así como el plano vertical [Sem-Dis] es lo que aparece en menor cantidad. Por otro lado, también se puede observar que en dos momentos los tres planos verticales se activaran, uno en el ítem 1 de la tarea dos y otro en el ítem 1 de la tarea 3.



Conclusiones

En esta sección se presentan las conclusiones de acuerdo al objetivo general de la investigación. También se detallan algunas perspectivas futuras relacionadas.

De acuerdo al objetivo general de analizar como en la propuesta didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros se promueve el Espacio de Trabajo Matemático para sexto grado de primaria, se toma en consideración cada uno de los objetivos específicos planteados para esta tesis. Los objetivos planteados para esta investigación fueron tres y en base a ellos se concluyó lo siguiente:

Con respecto al primer objetivo específico de identificar en la propuesta didáctica, las posibles acciones matemáticas y episodios que se podrían generar cuando se activan las diferentes génesis, se encontró que al analizar las posibles soluciones de las tres tareas de la propuesta planteada se lograrían activar en diferentes momentos las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Cabe mencionar que la génesis instrumental se activaría con mayor frecuencia ya que su activación se favorece por la riqueza de herramientas que se plantean a trabajar con la malla cuadricular, los recursos de Mathigon y las herramientas que aporta GeoGebra.

Con respecto al segundo objetivo de describir la posible activación de los planos verticales del ETM en la propuesta didáctica, esto se logró realizar pues al tener las activaciones esperadas de las génesis en el análisis de las posibles soluciones, se obtuvo información acerca de la activación de los diferentes planos verticales, siendo el plano vertical [Sem-Ins] el que lograría ser activado con mayor frecuencia ya que la propuesta favorece la visualización por las representaciones y el uso de las herramientas del software.

Con respecto al tercer objetivo de caracterizar en la propuesta didáctica los paradigmas en el dominio de la geometría que se espera privilegiar, se concluye que el trabajo matemático de los sujetos es de la Geometría natural (GI) y la Geometría axiomática natural (GII), los cuales están dentro del dominio de la geometría, además el GI aparece en las tres tareas presentadas, mientras que el GII aparece en la tarea 2 y 3.

Finalmente se logró el alcance de los tres objetivos propuestos en este trabajo de investigación, lo que por consecuencia implica que la pregunta de investigación *¿Cómo una propuesta didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros podría promover el ETM de*

estudiantes de sexto grado de primaria?, fue respondida.

Cabe resaltar que la propuesta que se plantea en esta investigación abre una discusión sobre la importancia del diseño de las tareas en la realización del trabajo matemático, permitiendo al docente de alguna manera encaminar la activación de las génesis, tomando en cuenta aspectos epistemológicos y cognitivos; como resalta Gaona (2022), si bien las tareas no forman parte del Trabajo Matemático, pero lo impulsan. También los recursos tecnológicos como el Mathigon y el GeoGebra fueron parte esencial para complementar la construcción de la propuesta didáctica, ya que pueden predisponer al estudiante para la realización de las tareas, desde la utilización de artefactos como lápiz, papel y regla, y los artefactos digitales como el deslizador en GeoGebra.

Con respecto al aporte de este trabajo a futuras investigaciones:

Queda abierta la posibilidad de aplicar la propuesta didáctica que se plantea para analizar el trabajo matemático de los estudiantes y poder comparar con el análisis realizado. También analizar el trabajo matemático del profesor para conocer en qué medida la experiencia matemática que adquirió en su etapa de estudiante condiciona su trabajo matemático en el proceso de enseñanza de perímetro y área. Del mismo modo, el análisis realizado en este estudio permitiría conocer el posible trabajo de un estudiante al resolver una tarea sobre perímetro y área de cuadrados y rectángulos para poder organizar las tareas y comprometer al estudiante en la realización de su trabajo matemático. Finalmente, también sería importante analizar el Espacio de Trabajo Matemático de referencia de una comunidad de individuos para conocer como un paradigma se establece de tal manera que englobe desde los conceptos, temáticas y herramientas hasta la forma de pensar en relación a los conceptos de perímetro y área. En este sentido se espera que futuros investigadores puedan utilizar esta propuesta como referencia para analizar los Espacios de Trabajo Matemático, ya sea personal, idóneo o de referencia. Cabe destacar que se abre un abanico de posibilidades para continuar investigando sobre el trabajo matemático de los estudiantes en el campo de la geometría tomando en cuenta el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático. Por ejemplo se podría estudiar el trabajo matemático que se activaría en las actividades que se proponen en los libros de texto que trabajan los estudiantes, o el trabajo matemático de referencia que se presenta.

Referencias

- Aguiar, V. (2019). *Longitud y perímetro en libros de texto de matemáticas de la educación primaria: un análisis bajo la teoría antropológica de la teoría didáctica* [Tesis de maestría, Universidad Federal de Pernambuco]. <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39779>
- Barrios A., Romero J. y Vergara G. (2018). GeoGebra como herramienta dinamizadora del proceso de enseñanza-aprendizaje de área y volumen de poliedros regulares en séptimo grado. *Revista Del Programa De Matemáticas*, 5(2),95-107. <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/view/2137/2481>
- Castillo, M. (2018). *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes del segundo grado de educación secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12068>
- Carhuapoma, L. y Huamán, A. (2018). *Modelo de Van Hiele en el aprendizaje de cuadriláteros, en estudiantes del cuarto grado de “José Carlos Mariátegui” Pampachacra-Huancavelica* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Huancavelica].
- Cervantes-Bazarrá, J., Berrío- Valbuena, J., Contreras- Vásquez, M. y Martínez- Fontalvo, V. (2021). Espacios de trabajo geométrico personal de profesores de matemáticas en formación. *Educación y Humanismo*, 23(40), 1-17. <https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4083>
- Corberán, R. (1996). El área. Recursos didácticos para su enseñanza en primaria. En O. Figueras (Ed.), *Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 1, 1-87.
- Cuervo, D. (2021). *El software GeoGebra como medio para la comprensión de los polígonos regulares*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/8515/1/Software_Geogebra_com_prension_poligonos.pdf
- Dahm, F. (2019). *Área y perímetro de figuras geométricas planas: percepciones y creaciones a través de malla checkered y el software GeoGebra* [Tesis de maestría, Universidad Federal Do Rio Grande Do Sul].
- Dolce, O. y Pompeo, J (2013). *Geometría Plana. Fundamentos de la Matemática Elemental*. São Paulo: 9. Ed. [Saraiva S. A. Livreiros Editores].

- Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá, Colombia: Magisterio. <https://bibliotecadigital.magisterio.co/libro/rea-y-metro-aspectos-conceptuales-y-did-cticos>
- Gaona, J. (2022). Diseño de tareas en un sistema de evaluación en línea, una mirada desde la teoría de Espacios de Trabajo Matemático. *PadiUAQ*, 5(10), 2-18. <https://www.researchgate.net/publication/361843551> Diseno de tareas en un sistema de evaluacion en linea una mirada desde la teoria de espacios de trabajo matematico
- Moise, E y Downs, F. (1966). Geometría Moderna. Massachusetts, EE.UU: Editorial Addison Wesley. <https://colmaths.files.wordpress.com/2013/01/geometria-moderna-moise.pdf>
- Henríquez C. y Kuzniak A. (2021). Estrategia Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema: Boletim de Educ Matemática*, 35 (71), 1550-1572. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>
- Hernández, E. (2016). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales*. [Tesis de maestría, Universidad de Medellín].
- Hernández, R., Fernández, C, y Baptista, P. (2006). Metodología de investigación. México D.F., México: MacGraw Hill. Recuperado de http://files.especializantig.webnode.com/200000775-097910b6c0/sampieri-et-al-metodologia-de-lainvestigacion-4ta-edicion-sampieri-2006_ocr.pdf
- Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad* 4 (7), 1-17.
- Janampa Guevara, V. R. (5 de febrero de 2018). Prezi. Obtenido de <https://prezi.com/nrv0wxrb6jde/guy-brousseau-y-su-teoria-de-las-situaciones-didacticas/>
- Kuzniak A., Montoya E. y Vivier L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 235- 249. <http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno15.pdf>
- Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106 (1), 271-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>

- Kuzniak, A. y Richard, P. (2010). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4-I), 191-210. doi:10.12802/relieve.13. 1741a
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16(1),9-24. Recuperado de <https://halshs.archivesouvertes.fr/halshs-01060043/document>
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4), 5-15. Recuperado de <https://www.redalyc.org/jatsRepo/335/33553644001/33553644001.pdf>
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 20(1),165-193. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf>
- Ministerio de Educación de Brasil (2018). Base Nacional Común Curricular. Brasília, Brasil.
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima, Perú.
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). Programa Curricular de la Educación Básica. Lima, Perú.
- Montoya-Delgadillo, E., Mena- Lorca, A. Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-1), 181-197. <http://dx.doi.org/10.12802/>
- Murrieta, A. (2015). Prezi. Obtenido de La Importancia y Clasificación de la Geometría: <https://prezi.com/ijck7xohfw19/la-importancia-y-clasificacion-de-la-geometria/>
- National Council of Teachers of Mathematics. (27 de abril de 2022). <https://www.nctm.org/>
- Organization for Economic Cooperation and Development (2020). Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo. PISA, OECD Publishing. <https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20Framework%20PRELIMINARY%20version%20SPANISH.pdf>
- Ott. C., Carrazoni, C., Godinho, R. y Folmer, V. (2021). Uso da sala de aula invertida para ensinar polígonos. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(1), 1-18. DOI: 10.26843/rencima.v12n1a03

Rodríguez G. (2013). Importancia de la Geometría. Obtenido de Importancia de la Geometría en mi vida. Recuperado de <http://geometriapatty.blogspot.pe/2013/05/importancia-de-la-geometria-en-mi-vida.html>

Rubiños. (2012). Geometría 2012. Lima: Ediciones Rubiños.

Veiga, A. y Miyagui, M. (2019). Matemática 6. Cuaderno de trabajo para sexto grado de Educación Primaria. Lima, Perú. Ministerio de Educación. <https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6848>



Anexos

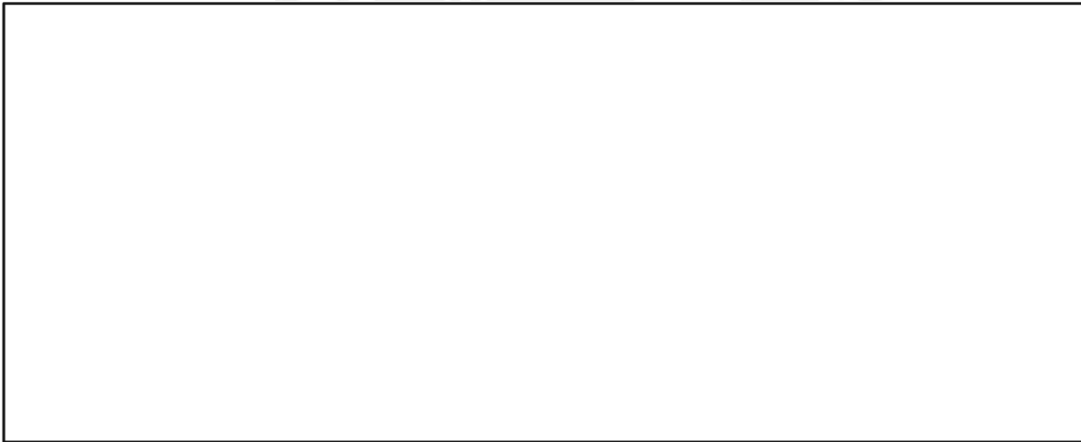
Anexo A - Tarea 1 - Explorando el Perímetro y Área

Nombre y apellido: _____

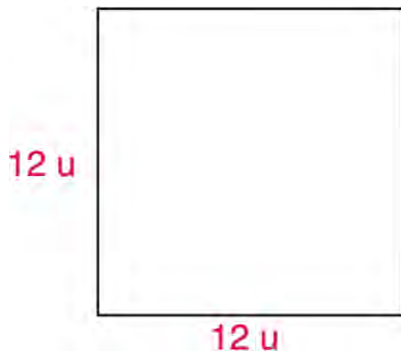
Grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Importante: Responde cada una de las siguientes preguntas colocando todos los procedimientos utilizados en cada una de ellas y utiliza sus conocimientos sobre el tema para responder cada actividad abajo.

01) ¿Qué entiendes por perímetro y área de un polígono? Dibuja algunos polígonos que conoces.



02) Encuentra el perímetro y el área de cada uno de los cuadriláteros abajo:



Anexo B - Tarea 2 - Contextualizando el Perímetro y Área

Nombre y apellido: _____

Grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Importante: Responde cada una de las siguientes preguntas colocando todos los procedimientos utilizados en cada una de ellas y utiliza sus conocimientos sobre el tema para responder cada actividad abajo.

Situación problema: La familia de Sandra heredó un terreno de 14m x 8m. En el terreno se pretende construir una casa, para que Sandra y sus padres puedan vivir en ella. Con base en esta información:

01) En la malla cuadriculada de abajo, bosqueja un plano de la casa que la familia de Sandra pretende construir en el terreno, considerando que los espacios de la casa solo pueden ser cuadrados o rectángulos.

NOTA: El plano de la casa debe tener, una sala-comedor, una cocina, un baño, 2 dormitorios y un patio. Además, los cuadraditos que forman la malla cuadriculada representan 1 metro de lado

en la realidad como muestra la figura a seguir:



02) Utiliza las medidas creadas para la casa de Sandra en el diseño anterior e indique en la tabla de abajo los resultados encontrados para el área y perímetro de la Sala comedor y de uno de los cuartos de la casa.

NOTA: Indique el cuarto que está utilizando para encontrar el perímetro y el área. Utilice el espacio de la hoja abajo para colocar los cálculos que le llevará a encontrar estas respuestas.

	Sala comedor	cuarto
Perímetro (m)		
Área (m ²)		



Anexo C - Tarea 3 - Perímetro y Área en el GeoGebra

Nombre y apellido: _____

Grupo: _____ Fecha: _____ / _____ / _____

Para la realización de esta actividad, es necesario seguir las siguientes indicaciones:

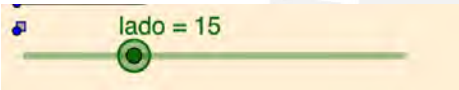
1 - Esta atento al link presentado y responder las preguntas de acuerdo a la solicitud del docente
Enlace: <https://es.mathigon.org/polypad/SdBeF4Zvv1gqhA>

2 - Hacer click en el link al lado: <https://www.geogebra.org/m/v7keqbdd>

3 - Leer con atención la situación problema indicada en este link

4 - Aguardar las indicaciones de la docente para la resolución

5 - Hacer uso de la herramienta deslice que es la indicada en la figura abajo:



Esto permitirá que la figura tenga diferentes lados y que el perímetro y área vaya cambiando de acuerdo al lado indicado en esta parte.

6 - Responder las preguntas solicitadas en la parte inferior de la página como se indica.

7 - Cualquier duda consultar a la docente inmediatamente.