

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



**ESTUDIO COMPARATIVO DEL COLAPSO DE PERFILES
TUBULARES EN ENSAYOS DE FLEXIÓN DE 3 PUNTOS Y
VIGA EN VOLADIZO**

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Ingeniería
Mecánica que presenta:

Jorge Andrés Yarasca Huanacune

Asesor:

Daniel Lavayen Farfán

Lima, 2023


Informe de Similitud

Yo, **Daniel Lavayen Farfán**, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada “**Estudio comparativo del colapso de perfiles tubulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo**”, del autor **Jorge Andrés Yarasca Huanacune**, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 4%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 22/11/2022.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 17 de enero de 2023

Apellidos y nombres del asesor: <u>Lavayen Farfán, Daniel</u>	
DNI: 72965380	Firma 
ORCID: 0000-0003-2932-0238	

DEDICATORIA

*A mi padre Héctor Marcial Yarasca Salcedo,
mi madre Rosaura Cecilia Huanacune Rosas,
mi hermano Héctor Enrique Yarasca Huanacune,
y mi prometida Romy Grisell Contreras Pérez
por su apoyo y amor incondicional.*



AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiera sido posible sin la contribución de varias personas. En primer lugar, mi más sincero agradecimiento al Dr. Daniel Lavayen por su apoyo y confianza durante el desarrollo de la presente tesis. El diálogo continuo y la discusión sobre sus trabajos de investigación ha sido vital para ir madurando el argumento de la tesis. Así también, quiero agradecer a los docentes y especialistas de la maestría de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú, quienes me ayudaron a ampliar mis conocimientos en nuevos tópicos de investigación.

Me gustaría expresar mi gratitud al Dr. José Mantari y su grupo de investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería, por compartir conmigo sus recursos los cuales fueron fundamentales para la elaboración de esta tesis.

Finalmente, mi más grande reconocimiento a mis padres, mi hermano, y mi prometida Romy, quienes son la inspiración de mi trabajo y perseverancia.

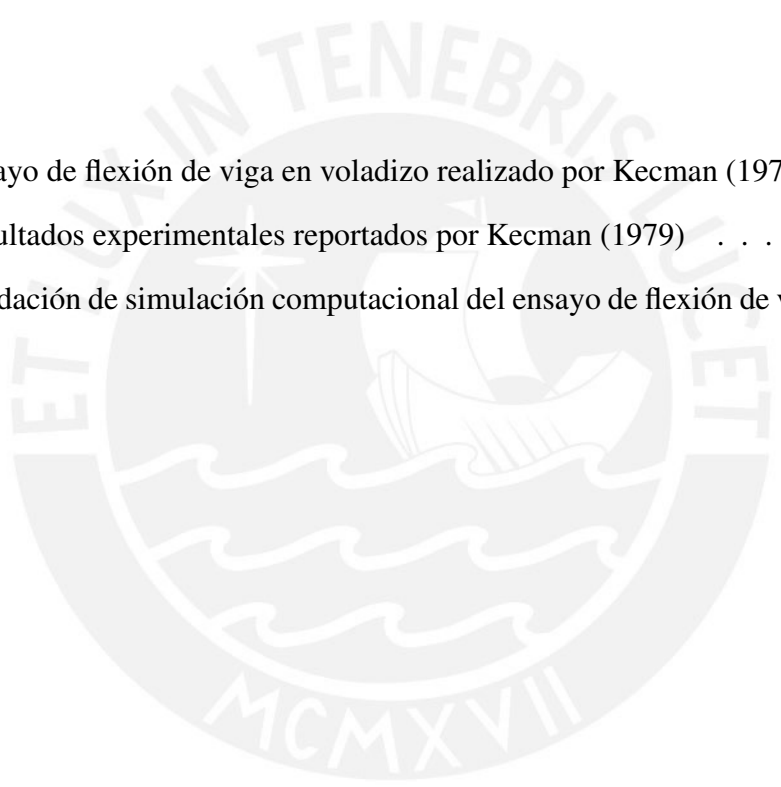
RESUMEN

En la presente tesis se realizó un estudio comparativo del colapso de tubos rectangulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Las curvas características de los tubos rectangulares fueron evaluadas mediante simulación numérica y modelos analíticos reportados en la literatura. Para validar los resultados de las simulaciones numéricas, se comparó las curvas características de bisagra plástica obtenidas computacionalmente con resultados experimentales presentados por Kecman (1979). Posteriormente, los modelos numéricos fueron utilizados para determinar el grado de correlación entre las curvas características con diferentes parámetros geométricos y de material. La tesis está dividida principalmente en tres partes. En la primera parte se presenta el fundamento teórico de las principales teorías de colapso por flexión de tubos rectangulares (Kecman (1979, 1983), Wierzbicki y col. (1994b), y Kim y Reid (2001)). El cálculo del momento máximo y el análisis del mecanismo de colapso fue explicado detalladamente. En la segunda parte se analizó mediante simulación numérica el colapso de tubos rectangulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Para generalizar las conclusiones de este trabajo, se clasificó los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso utilizando el parámetro adimensional σ_{cr}/σ_Y . Después se realizó un estudio comparativo sobre el colapso en los ensayos de flexión. En general, los resultados demostraron que la carga transversal ejercida por el indentador en el ensayo de flexión de 3 puntos provoca que el perfil colapse prematuramente. Por último se comparó las curvas características generadas con modelos analíticos y numéricos para determinar en cuáles casos es recomendable utilizar las teorías de colapso. En la tercera parte se reportan las conclusiones del presente trabajo de investigación.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Índice general	IV
I. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	7
1.3. Objetivos específicos	7
II. Teorías analíticas del colapso por flexión de tubos rectangulares	8
2.1. Generalidades	8
2.2. Teoría de Kecman	13
2.2.1. Momento máximo del colapso	13
2.2.2. Mecanismo de colapso por flexión	22
2.3. Teoría de Wierzbicki	29
2.3.1. Mecanismo de colapso por carga axial	30
2.3.2. Mecanismo de colapso por flexión	34
2.4. Teoría de Kim y Reid	40

III. Simulación numérica del colapso por flexión de tubos rectangulares	44
3.1. Clasificación de los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso	51
3.2. Comparación del ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo	54
3.3. Comparación de CCBP obtenidas mediante simulación numérica y teorías de colapso	66
IV. Conclusiones	74
Referencias	77
Apéndices	83
A. Ensayo de flexión de viga en voladizo realizado por Kecman (1979)	83
B. Resultados experimentales reportados por Kecman (1979)	86
C. Validación de simulación computacional del ensayo de flexión de viga en voladizo	90



Capítulo I

Introducción

1.1. Motivación

La seguridad vehicular es uno de los aspectos de diseño más importantes para la industria automotriz y las instituciones gubernamentales que regulan el transporte público (Garrett, Newton & Steeds, 2000; Glassbrenner, 2012). En los últimos años se han realizado grandes avances en el diseño e implementación de componentes y dispositivos que han contribuido a reducir tanto el número de accidentes vehiculares, como los daños que sufren los pasajeros y peatones. Las diferentes medidas de seguridad vehicular se pueden dividir en seguridad activa o pasiva. La seguridad activa se refiere al conjunto de medidas que contribuyen a evitar un accidente, mientras que la seguridad pasiva se refiere a las medidas que permiten reducir daños durante y después de colisiones.

La resistencia a colisiones es el aspecto de diseño más importante en lo que concierne a la seguridad pasiva de vehículos. Constantemente se realizan pruebas experimentales para asegurar que, ante la eventualidad de alguna colisión, la carrocería del automóvil disipe por deformación plástica la suficiente energía de impacto para disminuir las cargas por desaceleraciones a márgenes razonables. Si bien es necesario que la estructura se deforme plásticamente, esto debe ser de forma controlada ya que se requiere mantener un espacio de supervivencia adecuado para los ocupantes (Bois y col., 2004). En caso no se mantenga el espacio de supervivencia, es muy

probable que los pasajeros sufran lesiones graves o la muerte. Otros aspectos a considerar son el tipo de colisión y el tipo de cargas que actúan sobre la estructura (figura 1.1). Dependiendo de estos últimos, se realizarán diferentes pruebas de resistencia.

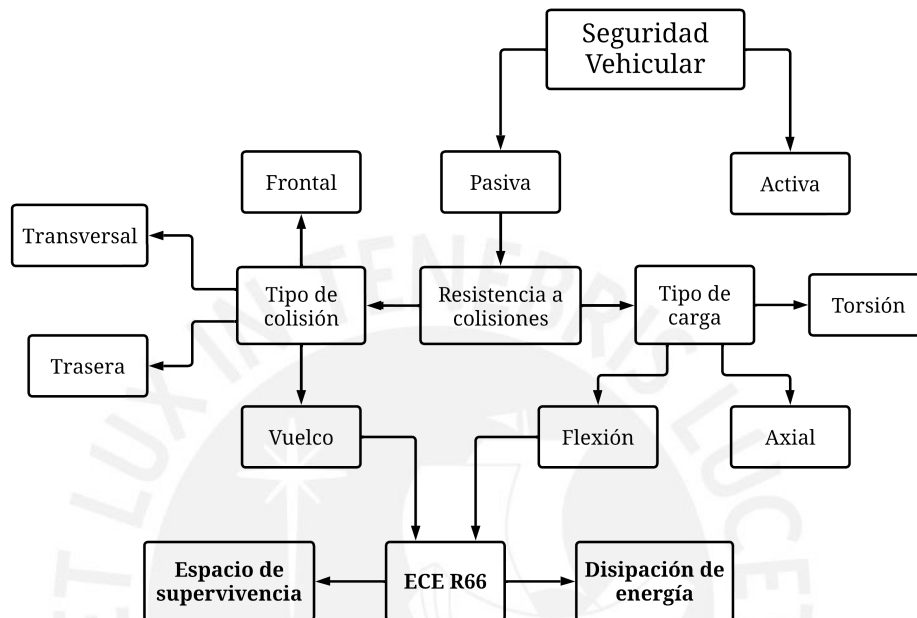


Figura 1.1: Tipos de análisis en seguridad vehicular.

En el caso particular de vehículos comerciales, en específico autobuses, las colisiones por volcadura son escasas pero tienen consecuencias catastróficas (Langvieder, Danner & Hummel, 1985; Matolcsy, 2007). En accidentes de vuelco, el techo y las paredes laterales del autobús que protegen la zona de pasajeros sufren altas deformaciones y pueden llegar a colapsar (figura 1.2). Por este motivo, se han establecido diferentes ensayos y regulaciones para verificar la resistencia de carrocerías de autobuses a colisiones por volcadura (Seyedi y col., 2020). Una de las regulaciones más utilizadas a nivel mundial, es la Regulación 66 de la Comisión Económica de las Naciones Unidas para Europa - ECE R66 (UN/ECE, 2007). Esta regulación plantea un ensayo de vuelco de un vehículo completo como método básico de homologación. El vehículo recibirá la homologación si los componentes de la carrocería que contribuyen a la resistencia y capacidad de disipación de energía (denominados en la ECE R66 como superestructura) son lo suficientemente resistentes como para garantizar que el espacio de supervivencia (llamado



Figura 1.2: Colapso de un autobús por volcadura. Imagen de Karliński y col. (2014).

también espacio residual en la ECE R66) no resulte comprometido en el ensayo de vuelco del vehículo completo. Así también, la regulación propone métodos alternativos de ensayos de homologación equivalentes, siendo uno de estos el cálculo cuasiestático basado en el ensayo de componentes. Este método plantea analizar el vuelco de la superestructura completa del autobús, o una parte representativa, utilizando modelos analíticos o numéricos desarrollados a partir de curvas momento flector vs ángulo de rotación obtenidas en ensayos de flexión (Hashemi, Walton & Kayvantash, 2009; Liang & Le, 2009). La norma ECE R66 denomina a estas curvas que relacionan el momento flector y el ángulo finito de rotación (figura 1.3), curvas características de bisagras plásticas (CCBP). Analizar individualmente los componentes de la superestructura permite: identificar modos de colapso difíciles de observar en un análisis global, simplificar de manera confiable los modelos estructurales, y analizar múltiples alternativas de diseño en menor tiempo (Kecman, 1997). En vista de las ventajas del análisis de componentes, varios investigadores han estudiado el colapso y la resistencia a colisiones de diferentes tipos de perfiles utilizados en la construcción de carrocerías de vehículos comerciales (Baroutaji, Sajjia & Olabi, 2017).

La superestructura de autobuses generalmente consisten de tubos rectangulares debido a su excelente capacidad de disipación de energía, buena relación rigidez/peso, y alta resistencia a impactos. En el caso particular de colisiones por volcadura, los tubos están sometidos principalmente a cargas de flexión (Lu & Yu, 2003). Kecman (1979, 1983) fue el primero en proponer

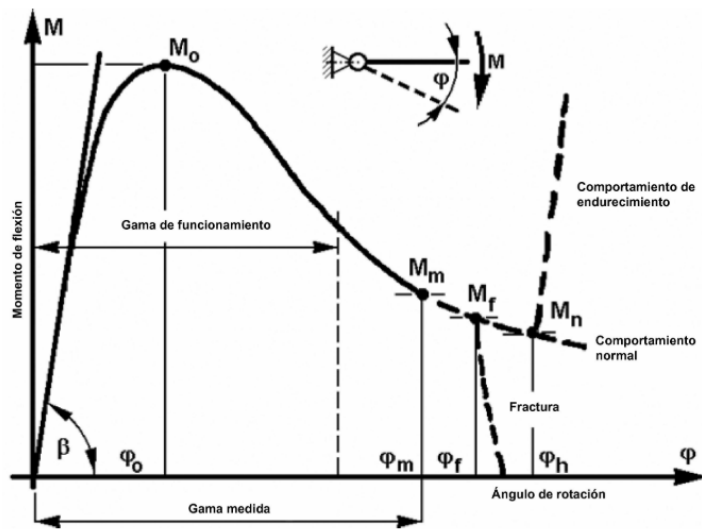


Figura 1.3: Curva característica de una bisagra plástica (UN/ECE, 2007).

un modelo teórico del colapso por flexión de tubos rectangulares. El autor parte de la premisa de que el colapso por flexión se inicia por el pandeo local de la pared cargada a compresión y, utilizando el concepto de “ancho efectivo de sección”, desarrolló expresiones para evaluar la resistencia a flexión del perfil. Además de derivar expresiones para evaluar la resistencia de los tubos rectangulares, Kecman presentó un modelo cinemático para explicar el mecanismo por el cual colapsa el perfil, logrando muy buena correlación con resultados experimentales. Debido a su capacidad de predicción y simplicidad, la teoría de colapso de Kecman ha sido bastante utilizado en el modelado y optimización de carrocerías de autobuses. Wierzbicki y col. (1994b), utilizando el llamado “elemento superplegable” (Abramowicz & Wierzbicki, 1989; Reetars y col., 2001), desarrolló un modelo cinemáticamente admisible del colapso por flexión de tubos cuadrados. A diferencia del modelo de Kecman, este puede obtener una solución cerrada y no requiere parámetros empíricos. Kim y Reid (2001) modificaron la teoría de Kecman para volverla totalmente analítica y cinemáticamente admisible; sin embargo, el costo computacional requerido para evaluar el modelo es demasiado alto para fines prácticos. Lavayen, Boada y Rodríguez (2021) incluyeron la fase elástica y elastoplástica al modelo de Kecman, y propusieron ecuaciones para calibrar los esfuerzos de fluencia y flujo utilizando parámetros dependientes de las dimensiones del tubo rectangular. Este modelo obtuvo mejores resultados que el original en

tubos con espesor de pared media. Si bien las teorías presentadas pueden predecir las CCBP de los tubos rectangulares adecuadamente, estas no muestran el campo de deformaciones ni los efectos locales que ocurren durante el colapso. Para realizar un análisis completo del colapso por flexión de los tubos rectangulares, generalmente se utilizan modelos numéricos o ensayos experimentales.

Las CCBP se pueden obtener experimentalmente mediante ensayos de flexión de 3 puntos, 4 puntos, o viga en voladizo. En el ensayo de flexión de 3 puntos se aplica una carga transversal en la zona central de una probeta apoyada en sus extremos. La carga concentrada produce una deformación por flexión e indentación local, siendo este último importante a medida que aumenta el espesor de pared (Huang & Zhang, 2018, 2019). La deformación por indentación local presente en los ensayos de flexión de 3 puntos altera el mecanismo de colapso de los tubos rectangulares y ocasiona que se pierda correlación con los modos de colapso observados en los ensayos de vuelco de vehículo completo. Aunque se han reportado investigaciones acerca del efecto de la deformación por indentación sobre el colapso de tubos rectangulares, la mayoría de estudios analíticos y numéricos se limitan a investigar casos que no presentan este comportamiento. Más aún, son escasos los estudios que analizan el colapso de tubos rectangulares fabricados de materiales con comportamiento elastoplástico y endurecimiento por deformación plástica, los cuales son actualmente utilizados en la industria automotriz. En el ensayo de flexión de 4 puntos se aplican cargas transversales en 2 zonas equidistantes del centro de la probeta para generar deformaciones por flexión pura. Debido a que en este ensayo no se puede predecir con exactitud la ubicación de las zonas de mayor deformación, es complicado definir en que punto de la probeta colocar los dispositivos de medición (Cimpoeru & Murray, 1993; Kecman, 1979). El ensayo de flexión de viga en voladizo permite resolver los problemas de indentación y localización de deformación máxima que suceden en los ensayos de flexión de 3 y 4 puntos, respectivamente (Kecman, 1979). Este ensayo no solo es utilizado para analizar componentes individuales de la superestructura, sino también juntas y nodos estructurales. A pesar de sus ventajas, no existen normas técnicas ni equipos comerciales disponibles en el mercado para

realizar ensayos de flexión de viga en voladizo. Las bancadas y configuraciones de prueba empleadas son especialmente diseñadas y fabricadas dependiendo del componente o subestructura a ensayar, lo cual eleva considerablemente su costo.

Las CCBP obtenidas experimentalmente caracterizan de forma precisa el colapso de los tubos rectangulares, sin embargo, no es usual realizar múltiples ensayos debido al costo de estos. Generalmente las CCBP experimentales se utilizan como referencias para calibrar modelos numéricos, que luego servirán para realizar experimentos virtuales tales como estudios paramétricos en ensayos de flexión (Huang & Zhang, 2018, 2019; Huang, Zhang & Fu, 2020), y simulaciones de vuelco de vehículos completos (Hashemi, Walton & Kayvantash, 2009; Karliński y col., 2014; Liang & Le, 2009; Zhou y col., 2020). Como se puede observar, los análisis teóricos, numéricos, y experimentales cumplen diferentes funciones en el proceso de diseño de estructuras resistentes a colisiones. Es necesario que los resultados de estos análisis mantengan buena correlación para poder emplearlos en toda su capacidad, especialmente en el diseño de carrocerías con perfiles de dimensiones y materiales poco investigados.

La presente tesis plantea determinar si es posible obtener CCBP equivalentes con el ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo, y definir en cuáles casos es conveniente utilizar las teorías de colapso. El modelamiento analítico fue realizado empleando las teorías de colapso por flexión de Kecman1979, Wierzbicki, y Kim y Reid. Las simulaciones numéricas fueron realizadas utilizando el método de elementos finitos (MEF) considerando no-linealidades geométricas, de material, y por contacto. Para determinar el grado de correlación entre las CCBP obtenidas del ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo, se investigaron tubos rectangulares con diferentes dimensiones de sección, longitud de perfil (en el caso del ensayo flexión de 3 puntos esta longitud se refiere a la separación entre apoyos), y comportamiento plástico del material.

1.2. Objetivos

El objetivo general de esta investigación es realizar un estudio comparativo del colapso de tubos rectangulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo analítica y numéricamente, para determinar en cuáles casos es posible obtener CCBP equivalentes con los ensayos de flexión y cuando es conveniente utilizar las teorías de colapso.

1.3. Objetivos específicos

1. Modelar analíticamente el colapso por flexión de tubos rectangulares con diferentes dimensiones, utilizando los modelos conceptuales de las teorías de Kecman, Wierzbicki y Kim y Reid.
2. Simular numéricamente el colapso de tubos rectangulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo.
3. Clasificar los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso.
4. Comparar las CCBP generadas por simulación numérica del ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo.
5. Comparar las CCBP obtenidas mediante simulación numérica y teorías de colapso.

Capítulo II

Teorías analíticas del colapso por flexión de tubos rectangulares

2.1. Generalidades

La respuesta estructural de una carrocería en un evento de volcadura depende mayormente de la manera en que colapsan por flexión los elementos que lo componen. En vehículos comerciales, estos elementos consisten principalmente de tubos rectangulares (TR), los cuales se caracterizan por resistir altas deformaciones en eventos de colapso prolongados. Por lo tanto, para poder incluir el aspecto de seguridad en el diseño de carrocerías, es necesario analizar detalladamente el modo en que colapsan estos perfiles.

El comportamiento estructural de los TR en ensayos de flexión se puede analizar con las curvas momento flector vs ángulo de rotación ($M - \theta$). Estas se pueden dividir en 3 etapas: la etapa de deformación elástica, la etapa de deformación elasto-plástica, y la etapa de colapso (figura 2.1). En la primera etapa, las deformaciones son muy pequeñas por lo que el perfil se deforma en el rango lineal elástico del material. Esta parte de la curva $M - \theta$ se puede calcular con las teorías clásicas de vigas. La etapa de deformación elástica culmina una vez se alcanza el ángulo y momento correspondiente al límite elástico (θ_{le} y M_{le}).

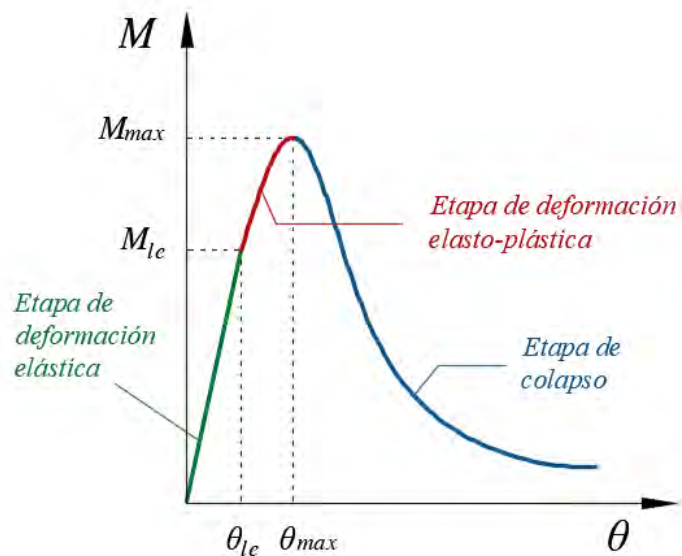


Figura 2.1: Etapas del colapso de los TR en las curvas momento flector vs ángulo de rotación.

La etapa de deformación elasto-plástica comienza en el límite elástico y culmina una vez se alcanza el momento máximo de colapso (M_{max}) y su ángulo de rotación correspondiente (θ_{max}). Para curvaturas pequeñas, el principal factor que genera la relación no-lineal entre el momento flector y el ángulo de rotación es el aplastamiento de la sección del perfil tubular. Según D. Chen y Masuda (2016), la sección de los TR tienden a reducirse verticalmente y extenderse lateralmente, lo cual ocasiona una disminución considerable del momento de inercia de la sección (figura 2.2). Si aumenta la razón entre la reducción del momento de inercia y el incremento de curvatura, la pendiente de $M - \theta$ disminuirá y la no linealidad será cada vez más notoria. En esta etapa también se producen deformaciones plásticas, las cuales según D. Chen y Masuda (2016) ocasionan que la sección se aplaste con menor velocidad una vez se sobrepasa el esfuerzo de fluencia (en este caso, el término velocidad se refiere a la razón entre el grado de aplastamiento y variación de curvatura). A medida que la deformación plástica aumenta, el perfil recupera paulatinamente la velocidad anterior a la fluencia. La diferencia entre el aplastamiento elástico y plástico ocurre debido al acoplamiento entre la deformación plástica en la dirección axial y la deformación por flexión en la dirección circunferencial del TR. Este fenómeno fue verificado por D. Chen y Masuda (2016), quienes observaron en simulaciones numéricas que el esfuerzo axial varía a lo largo del espesor de las paredes del perfil tubular, y esta variación es

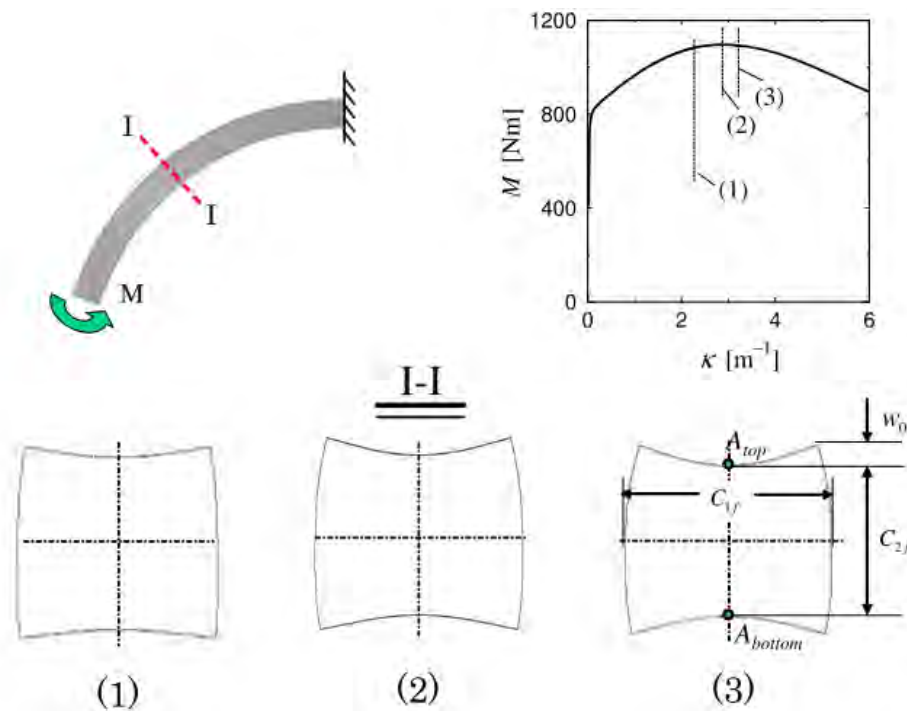


Figura 2.2: Aplastamiento de la sección transversal de un tubo cuadrado bajo cargas de flexión. C_{1f} y C_{2f} son el nuevo ancho y alto del tubo cuadrado, respectivamente. w_0 es la distancia entre las esquinas y el centro de la pared superior. Imagen de D. Chen y Masuda (2016).

causada por la deformación circunferencial. Así también, se determinó que el aplastamiento por flexión elástica depende del parámetro $\kappa_g C_1^2/t$, siendo κ_g la curvatura, C_1 el ancho del TR, y t el espesor de pared. En el caso de flexión plástica, el aplastamiento también es influenciado por el espesor, el esfuerzo de fluencia y el endurecimiento por deformación plástica del material. Sin embargo, el efecto de los parámetros del material sobre el aplastamiento de la sección es muy pequeño (Paulsen & Welo, 2001b).

A medida que la curvatura del TR aumenta, el comportamiento no-lineal de la curva $M - \theta$ es controlado por el pandeo elástico o plástico de las paredes sometidas a cargas de compresión (Corona & Vaze, 1996; Kecman, 1979, 1983; Paulsen & Welo, 2001a, 2001b). La inestabilidad de la sección conlleva un cambio súbito de su forma (Swiatkowski & Stachowicz, 1984) y se produce una redistribución de esfuerzos (Kecman, 1979, 1983). Para los TR con espesor de pared delgada, Kecman (1979) determinó que la etapa de deformación elasto-plástica puede ser ignorada debido a que esta es relativamente pequeña y por consiguiente la energía disipada



Figura 2.3: Comparación del colapso de un tubo cuadrado con: (a) $t/b = 0,04$; (b) $t/b = 0,08$. Imágenes de Lavayen, Boada y Rodríguez (2021).

es mínima. En el caso de los TR con espesor de pared media, la energía disipada puede ser considerable, por lo tanto, esta no se puede despreciar (Lavayen, Boada & Rodríguez, 2021).

En la etapa del colapso se observa un decaimiento abrupto de resistencia en los TR. Este fenómeno ocurre debido a la formación de zonas localizadas de deformación plástica, las cuales muestran un comportamiento cinemático similar al de una bisagra. A estas zonas localizadas se les denomina en la literatura como líneas bisagra (Kecman, 1979). El colapso de los TR se caracteriza por la formación de mecanismos compuestos por líneas bisagra, las cuales asemejan el perfil a una cadena cinemática con juntas de rotación. A estos mecanismos se les conoce en la literatura como bisagras plásticas (Kecman, 1979, 1983). Dado que la deformación del TR se concentra principalmente en las bisagras plásticas, la energía disipada durante el colapso se puede calcular en función del ángulo de rotación hipotético de estas. No todos los TR forman líneas bisagra bien definidas. La figura 2.3 muestra que, a medida que el espesor de pared aumenta, la zona de deformación plástica se amplía y se puede observar cierta continuidad en la deformación.

Aunque la inestabilidad de la sección de los TR aparente ser una propiedad perjudicial, esta es la razón principal por la cual estos perfiles son excelentes disipadores de energía. En la figura 2.4 se muestra las CCBP de TR con espesor de pared gruesa y delgada (curvas A y

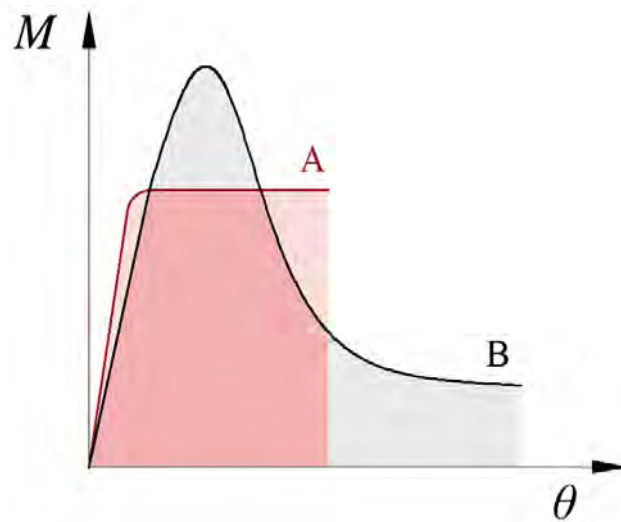


Figura 2.4: Comparación del CCBP de TR con espesor de pared gruesa (curva A) y delgada (curva B).

B, respectivamente). Considerando que el material de los perfiles es perfectamente plástico, se espera que el momento de colapso del tubo con espesor de pared gruesa sea constante. En el caso del tubo con espesor de pared delgada, se alcanzan momentos mayores debido a las altas deformaciones que ocurren en la bisagra plástica. Así también, el perfil es capaz de sostener una mayor rotación sin fallar de forma crítica. Esto último es consecuencia de la concentración de esfuerzos en las esquinas de la pared pandeada, la cual previene deformaciones excesivas en la pared que trabaja a tracción (Kecman, 1979). Con respecto a la energía disipada por los perfiles (el cual es igual al área debajo del CCBP), se nota claramente que el tubo rectangular con espesor de pared delgada disipa mayor energía.

Las teorías de colapso por flexión de TR analizan solamente la etapa de colapso, la cual inicia una vez se alcanza el momento máximo. Hasta donde es de conocimiento del autor de la presente tesis, la influencia de las otras etapas sobre la magnitud de energía disipada solamente ha sido investigado por Lavayen, Boada y Rodriguez (2021). Para mantener una uniformidad en los resultados, la investigación realizada en la presente tesis se enfocó en la etapa de colapso. Las CCBP presentadas fueron construidas considerando al ángulo de rotación de la bisagra plástica (θ_p) como parámetro de control.

2.2. Teoría de Kecman

Las bases del análisis del colapso por flexión de los perfiles tubulares utilizados en vehículos comerciales fueron establecidas por Kecman (1979, 1983). En sus investigaciones, Kecman estableció que las principales propiedades del colapso a ser evaluadas son el momento máximo del colapso, la variación del momento con respecto a la rotación de la bisagra plástica, y la energía que disipa la bisagra plástica al rotar. Basado en estudios anteriores y observaciones experimentales, él mismo propuso ecuaciones y un mecanismo de colapso para evaluar de manera simple las propiedades mencionadas. El esquema general de los ensayos experimentales realizados por Kecman se presentan en el apéndice A.

2.2.1. Momento máximo del colapso

Según Kecman (1979), se puede alcanzar el momento máximo en una de las siguientes situaciones:

- Se alcanza la fluencia en toda la sección.
- Se alcanza la fluencia en parte de la sección, y ocurre un pandeo elástico o plástico en algún segmento crítico.
- Se alcanza la fluencia en parte de la sección, y ocurre separación de material.

La mayoría de carrocerías de vehículos comerciales están compuestas por TR con espesor de pared delgada, los cuales inician su colapso de la segunda forma. Debido a la esbeltez del perfil, la pared sometida a compresión pierde estabilidad y se pandea localmente antes de alcanzar totalmente la fluencia. El pandeo local puede ser elástico o plástico, dependiendo de que tan estable es la pared sometida a compresión. Kecman (1979, 1983), basado en la investigación de Rhodes y Harvey (1971a, 1971b) sobre el pandeo local por flexión de canales labiados, analizó el colapso de diferentes TR y estableció ecuaciones para evaluar el momento máximo de colapso. Según Rhodes y Harvey (1971a, 1971b), se puede considerar a los TR como canales

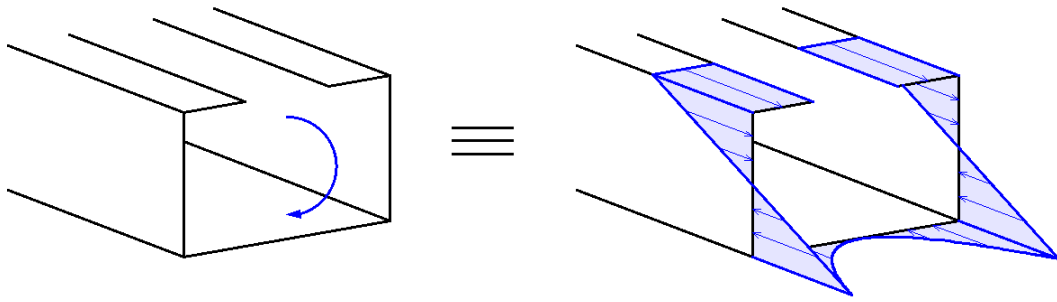


Figura 2.5: Momento aplicado y sistema de esfuerzo estáticamente equivalente. Reproducido de Rhodes y Harvey (1971b).

labiados de sección cerrada (el ancho de cada labio es igual a la mitad del ancho del tubo rectangular). El canal labiado es analizado como un sistema de placas unidas, con los labios en tracción y la pared inferior en compresión. Dado que el análisis se centra en el comportamiento estructural de la pared inferior, no es necesario adicionar condiciones de borde para los extremos libres de los labios. El esfuerzo crítico de la pared a compresión (σ_{cr-a}) es igual a:

$$\sigma_{cr-a} = \frac{K_a \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \quad (2.1)$$

donde t , a , K_a , E y ν , son el espesor de pared, el ancho de la sección del TR, el coeficiente de pandeo, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material, respectivamente. K_a puede ser aproximado como:

$$K_a = 5,23 + 0,16 \left(\frac{a}{b} \right) \quad (2.2)$$

donde b es el alto de la sección del TR. Si σ_{cr-a} es menor al esfuerzo de fluencia (σ_Y) del material, la pared inferior a compresión se pandeará elásticamente produciendo una distribución de esfuerzo no-lineal, con los bordes resistiendo la mayoría de carga (figura 2.5). Para simplificar el análisis de la pared inferior, Kecman utilizó el concepto de ancho efectivo (Chou & Rhodes, 1997; Lind, Ravindra & Power, 1971). Este concepto consiste en reemplazar la distribución de esfuerzo no-lineal a lo largo del ancho de una placa delgada en pandeo, por una distribución de esfuerzo uniforme equivalente en las secciones de máximo esfuerzo. En el caso de los TR, estas secciones definen el ancho efectivo de la pared inferior bajo compresión (a_e).

Kecman (1979, 1983) presentó una fórmula simplificada para calcular a_e :

$$a_e = a \left(0,7 \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} + 0,3 \right) \quad (2.3)$$

donde σ_e es el esfuerzo en las esquinas de la pared a compresión. Adicionalmente, se asumió que el momento máximo se alcanza cuando a_e es totalmente plástico. En ese caso, σ_e es igual a σ_Y en la ecuación 2.3. Naturalmente, si $\sigma_{cr} \geq \sigma_Y$, entonces $a_e = a$. Con respecto al material, se utilizó un acero dulce (elastoplástico perfecto) con igual σ_Y en tensión y compresión.

El momento máximo de colapso depende de la distribución total de esfuerzos en la sección cuando la pared inferior en compresión llega a fluencia. En ese instante, la pared superior en tracción puede o no llegar también a fluencia. Utilizando la condición de carga axial nula, se puede evaluar la relación característica (α_e) entre b y la altura del eje neutro (y):

$$\alpha_e = \frac{b}{y} = \frac{a_e + a + 2b}{a + b} \quad (2.4)$$

Se nota claramente que si $\alpha_e < 2$, el eje neutro estará más cerca de la pared superior en tracción y la fluencia ocurrirá primero en la pared a compresión. Si $\alpha_e = 2$, la pared superior e inferior llegarán a fluencia en simultáneo. El momento máximo cuando $\alpha_e < 2$ es calculado sumando momentos con respecto a la pared superior:

$$M_{max}^{(1)} = \frac{bt \sigma_Y ((3a + 2b) a_e + b(2a + b))}{3(a + b)} \quad (2.5)$$

El superíndice ⁽¹⁾ indica que el cálculo del momento máximo se realizó considerando que la fluencia solo puede ocurrir en los extremos de las paredes verticales. En el caso que $\alpha_e = 2$, el momento plástico es igual a:

$$M_p^{(1)} = \frac{1}{3} bt(3a + b)\sigma_Y \quad (2.6)$$

Cabe resaltar que las ecuaciones de equilibrio anteriores fueron planteadas de acuerdo a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (Euler, 1933), la cual es aplicable a vigas esbeltas. Dawson

y Walker (1972) realizaron un análisis similar al de Rhodes y Harvey (1971a, 1971b) para canales labiados, con la diferencia que en este caso el pandeo de la pared inferior es causado por una imperfección inicial y las paredes verticales pueden alcanzar totalmente la fluencia. Al igual que en el caso anterior, se alcanza la fluencia en la pared inferior a compresión cuando $\sigma_e = \sigma_Y$. Consecuentemente, el esfuerzo promedio de la pared en compresión (σ_{pr}) alcanza su valor máximo cuando:

$$a t \sigma_{pr} = a_e t \sigma_Y \quad (2.7)$$

Las paredes verticales pueden soportar momentos adicionales a medida que la fluencia se expande en estas, alcanzando el momento totalmente plástico de la sección. La relación característica α_e para este caso es:

$$\alpha_e = \frac{4 b \sigma_Y}{-a \sigma_{pr} + a \sigma_Y + 2 b \sigma_Y} \quad (2.8)$$

y el momento máximo es:

$$M_{max}^{(2)} = \frac{t ((a^2 - 4 a b - 4 b^2) \sigma_Y^2 + a^2 \sigma_{pr}^2 - 2 a (a + 2 b) \sigma_{pr} \sigma_Y)}{8 \sigma_Y} \quad (2.9)$$

En este caso, el superíndice ⁽²⁾ indica que el cálculo del momento máximo se realizó considerando una imperfección inicial en la pared inferior. La relación σ_{pr}/σ_Y de la ecuación 2.9 se obtiene analizando a la pared inferior como una placa simplemente apoyada, y la relación entre σ_{pr} , σ_{cr} , y σ_Y con la imperfección inicial es introducido utilizando las ecuaciones presentadas por Coan (1951) y Walker (1969). La amplitud de la imperfección inicial fue ajustado a la cota inferior de los resultados experimentales reportados por Winter (1947) y Chilver (1953), con lo cual, la ecuación 2.9 pudo ser evaluada. Kecman reportó que el momento totalmente plástico (el cual ocurre cuando $a_e = a$ y $\sigma_{pr} = \sigma_Y$) es alcanzado cuando σ_{cr} es al menos 2.5 mayor que σ_Y debido a la presencia de imperfecciones iniciales, y además la diferencia entre $M_{max}^{(1)}$ y $M_{max}^{(2)}$ es mínima. Esto último se debe a que la reducción de rigidez en la sección del perfil tubular en los dos métodos tienen un efecto similar. En el primer método no se permite que las

paredes verticales lleguen totalmente a fluencia, mientras que en el segundo método se asume que la pared inferior se comporta como una placa simplemente apoyada y la imperfección inicial es ajustada a la cota inferior de los resultados experimentales. Por último, Kecman consideró que el momento totalmente plástico es calculado con mayor exactitud utilizando la ecuación:

$$M_p = \sigma_Y t (a(b-t) + 0,5(b-2t)^2) \quad (2.10)$$

En vista de los resultados obtenidos, Kecman (1979) propuso que el momento máximo de colapso sea calculado en función de σ_{cr-a} , de acuerdo a los siguientes puntos:

- Cuando $\sigma_{cr-a} \leq \sigma_Y$, las paredes verticales son totalmente elásticas y $M_{max} = M_{max}^{(1)}$ (primer método). El momento máximo obtenido por Rhodes y Harvey (1971a) fue escogido debido a su simplicidad de cálculo. Se puede notar que si $\sigma_{cr-a} = \sigma_Y$, la pared superior e inferior alcanzan fluencia en simultáneo y $M_{max} = M_p^{(1)}$.
- De acuerdo a las investigaciones de Dawson y Walker (1972), Coan (1951), Walker (1969), Winter (1947) y Chilver (1953), el momento totalmente plástico se alcanza cuando σ_{cr} es al menos 2.5 mayor que σ_Y debido a la presencia de imperfecciones iniciales (segundo método). Debido a que ambos métodos obtuvieron resultados similares, esta hipótesis también fue considerada válida para el primer método.
- Kecman utilizó un factor de 3 en vez de 2.5 debido a que el esfuerzo crítico calculado en el segundo método es menor al verdadero (consecuencia de considerar a la pared inferior a compresión como simplemente apoyada). Este factor fue reducido a 2 en trabajos posteriores (Kecman & Suthurst, 1984).
- Cuando $2\sigma_Y \leq \sigma_{cr-a}$, el calculo clásico del momento totalmente plástico (ecuación 2.10) obtiene los mejores resultados.
- Cuando $\sigma_Y < \sigma_{cr-a} < 2\sigma_Y$, el momento máximo es calculado por interpolación lineal de $M_p^{(1)}$ a M_p . En este intervalo se asume una transición de deformación elástica a plástica en las paredes verticales.

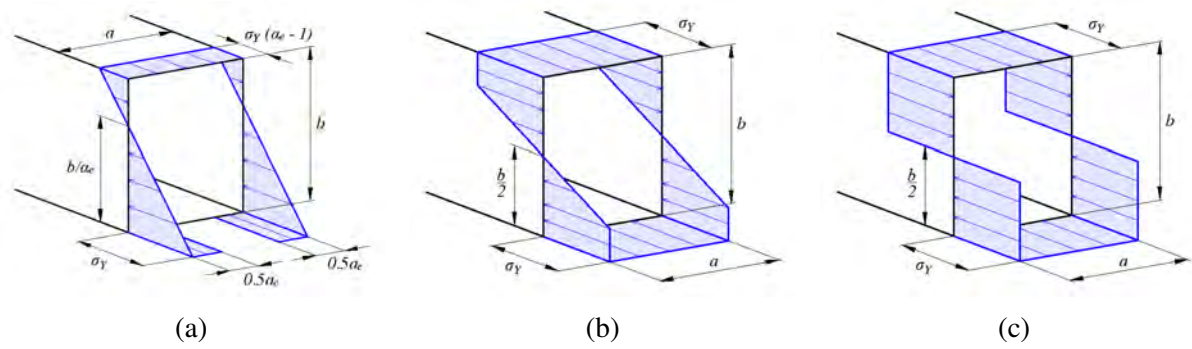


Figura 2.6: Representación esquemática de la distribución del esfuerzo axial en la sección de un TR. (a) Caso 1: $\sigma_{cr-a} \leq \sigma_Y$; (b) Caso 2: $\sigma_Y < \sigma_{cr-a} < 2\sigma_Y$; (c) Caso 3: $2\sigma_Y \leq \sigma_{cr-a}$.

Finalmente, Kecman estableció 3 casos diferentes para el cálculo del momento máximo de colapso por flexión (figura 2.6):

(a) Caso 1 ($\sigma_{cr-a} \leq \sigma_Y$):

$$M_{max} = M_{max}^{(1)} = \frac{bt \sigma_Y ((3a + 2b) a_e + b(2a + b))}{3(a + b)} \quad (2.11)$$

(b) Caso 2 ($\sigma_Y < \sigma_{cr-a} < 2\sigma_Y$):

$$M_{max} = M_p^{(1)} + \left(M_p - M_p^{(1)} \right) \frac{\sigma_{cr-a} - \sigma_Y}{\sigma_Y} \quad (2.12)$$

(c) Caso 3 ($2\sigma_Y \leq \sigma_{cr-a}$):

$$M_{max} = M_p \quad (2.13)$$

donde $M_p^{(1)}$ y M_p son calculados con las ecuaciones 2.6 y 2.10.

Masuda y Chen (2011) investigaron la validez de las ecuaciones del momento máximo de colapso presentadas por Kecman (1979, 1983) para TR con relación b/a altos. Los resultados obtenidos por MEF demostraron la existencia de otro tipo de colapso, el cual está relacionado al pandeo elástico de las paredes verticales. Este fenómeno puede ser analizado considerando a la pared vertical del TR como una placa sometida a cargas de flexión y compresión, tal como

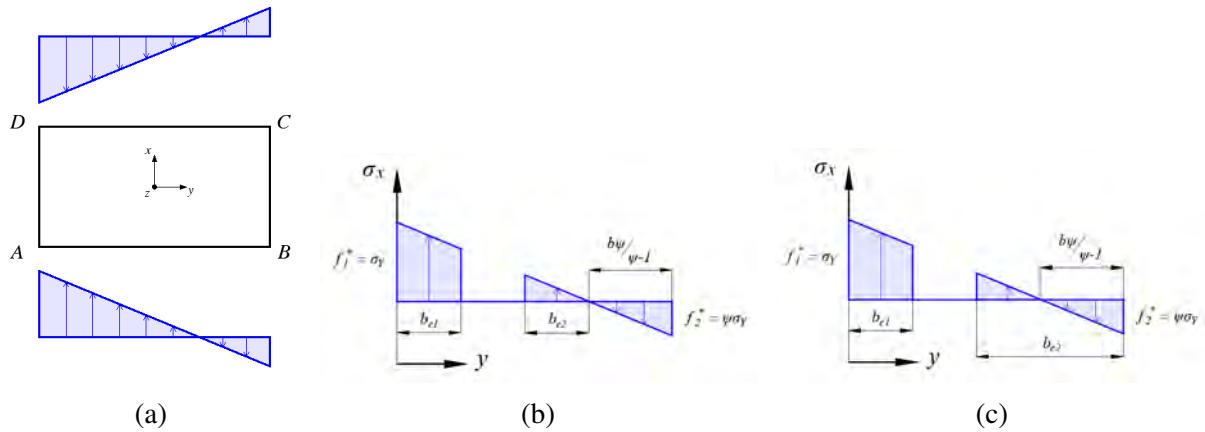


Figura 2.7: Distribución de esfuerzos en placas pandeadas sometidas a flexión y compresión. (a) Modelo de placa analizado; (b) Anchos efectivos según AISI S100 (2016) y AS/NZS 4600 (2005); (c) Anchos efectivos según Rusch y Lindner (2004).

se muestra en la figura 2.7a. En el modelo mostrado se asume que no existe desplazamiento fuera-de-plano (dirección z) en los lados AD y BC . Si el esfuerzo de compresión alcanzado es mayor al esfuerzo crítico de pandeo, la distribución de esfuerzos estará definida por dos anchos efectivos, b_{e1} y b_{e2} (figura 2.7b). Los anchos efectivos se pueden calcular con las siguientes ecuaciones (AISI S100, 2016; AS/NZS 4600, 2005):

$$\begin{aligned}
 b_{e1} &= \frac{b_e}{3 - \psi} \\
 b_{e2} &= \begin{cases} b_e/2 & \text{cuando } \psi \leq -0,236 \\ b_e - b_{e1} & \text{cuando } \psi > -0,236 \end{cases} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

donde f_1^* y f_2^* son los esfuerzos mostrados en la figura 2.7b. El parámetro ψ es igual a:

$$\psi = \frac{f_2^*}{f_1^*} \quad (2.15)$$

y b_e es:

$$b_e = b \sqrt{\frac{\sigma_{cr-b}}{\sigma_Y}} \quad (2.16)$$

El esfuerzo crítico de pandeo de la pared vertical (σ_{cr-b}) es:

$$\sigma_{cr-b} = \frac{K_b \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.17)$$

donde K_b es:

$$K_b = 4 + 2(1 - \psi)^3 + 2(1 - \psi) \quad (2.18)$$

Masuda y Chen (2012) propusieron un método diferente en el cual b_{e1} y b_{e2} (figura 2.7c) son calculados utilizando las ecuaciones presentadas en Rusch y Lindner (2004). En este caso, solo el desplazamiento fuera-de-plano del lado AD es nulo (figura 2.7a), con lo cual:

$$\begin{aligned} b_{e1} &= b_e - b_{e2} \\ \frac{b_{e2}}{b} &= \frac{0,226 \sigma_{cr-b}}{\sigma_Y} \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde b_e es evaluado a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{1 - \psi} \sqrt{\frac{\sigma_{cr-b}}{\sigma_Y}} \quad (2.20)$$

y σ_{cr-b} es calculado con la ecuación 2.17, reemplazando K_b por:

$$K_b = 1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2 \quad (2.21)$$

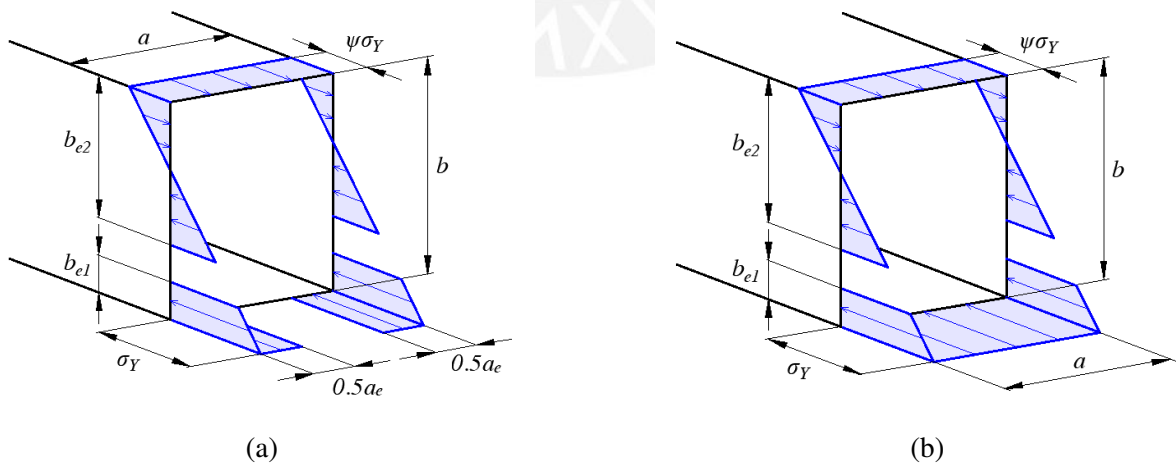


Figura 2.8: Representación esquemática de la distribución del esfuerzo axial considerando el pandeo de las paredes verticales. (a) $\sigma_{cr-a} \leq \sigma_Y$; (b) $\sigma_Y < \sigma_{cr-a}$.

Según D. Chen (2016), el segundo método obtiene mejores resultados en la mayoría de casos. Solamente se observó una clara superioridad del primer método cuando el valor del parámetro t/a era muy pequeño, y además, σ_{cr-b} era mucho menor que σ_Y . Considerando que los TR de este último tipo no son utilizados en carrocerías de vehículos comerciales, se emplearon las ecuaciones 2.19, 2.20 y 2.21 en los análisis posteriores. Como se puede observar en la figura 2.8, aparecen dos nuevos casos de colapso al incluir el pandeo de las paredes verticales a la teoría de Kecman. Por lo tanto, el cálculo del momento máximo de colapso fue modificado de la siguiente manera:

(a) Caso 1 ($\sigma_{cr-a} \leq \sigma_Y$ y $\sigma_{cr-b,1} \leq \sigma_Y$):

$$M_{max} = \frac{t \sigma_Y}{3} \left(3 b a_e + \frac{2(\psi - 1)(b_{e1}^3 + b_{e2}^3)}{b} \right) + \frac{t \sigma_Y}{3} \left(\frac{2 b^2 \psi^3}{(\psi - 1)^2} - (3\psi - 4)b_{e1}^2 - 3 b_{e2}^2 \psi \right) \quad (2.22)$$

donde ψ es determinado a partir de la condición de flexión pura (fuerza resultante en la sección es nula). El esfuerzo crítico $\sigma_{cr-b,1}$ es calculado con las ecuaciones 2.17 y 2.21, y ψ igual a:

$$\psi = \frac{-a_e + b}{a + b} \quad (2.23)$$

(b) Caso 2 ($\sigma_{cr-a} \leq \sigma_Y$ y $\sigma_Y < \sigma_{cr-b,1}$):

$$M_{max} = \frac{b t \sigma_Y ((3a + 2b) a_e + b(2a + b))}{3(a + b)} \quad (2.24)$$

(c) Caso 3 ($\sigma_Y < \sigma_{cr-a}$ y $\sigma_{cr-b,2} \leq \sigma_Y$):

$$M_{max} = \frac{t \sigma_Y}{3} \left(3 b a + \frac{2(\psi - 1)(b_{e1}^3 + b_{e2}^3)}{b} \right) + \frac{t \sigma_Y}{3} \left(\frac{2 b^2 \psi^3}{(\psi - 1)^2} - (3\psi - 4)b_{e1}^2 - 3 b_{e2}^2 \psi \right) \quad (2.25)$$

donde ψ es determinado a partir de la condición de flexión pura. El esfuerzo crítico $\sigma_{cr-b,2}$ es calculado con las ecuaciones 2.17 y 2.21, y $\psi = -1$.

(d) Caso 4 ($\sigma_Y < \sigma_{cr-a}$ y $\sigma_Y < \sigma_{cr-b,2}$ y no ocurre el caso 5):

$$M_{max} = \min (M_{max1}, M_{max2}) \quad (2.26)$$

$$M_{max1} = M_p^{(1)} + \left(M_p - M_p^{(1)} \right) \frac{\sigma_{cr-a} - \sigma_Y}{\sigma_Y} \quad (2.27a)$$

$$M_{max2} = M_p^{(1)} + \left(M_p - M_p^{(1)} \right) \frac{\sigma_{cr-b} - \sigma_Y}{\sigma_Y} \quad (2.27b)$$

donde $M_p^{(1)}$ y M_p son calculados con las ecuaciones 2.6 y 2.10, respectivamente. El esfuerzo crítico σ_{cr-b} es calculado con las ecuaciones 2.17, 2.19, 2.20, y 2.21. ψ es determinado a partir de la condición de flexión pura.

(e) Caso 5 ($2\sigma_Y \leq \sigma_{cr-a}$ y $2\sigma_Y \leq \sigma_{cr-b,2}$):

$$M_{max} = \sigma_Y t \left(a(b-t) + 0,5(b-2t)^2 \right) \quad (2.28)$$

2.2.2. Mecanismo de colapso por flexión

Según Kecman (1979), la etapa de colapso se puede dividir en cuatro fases características. En la fase inicial, se nota la formación de un abultamiento en las paredes laterales de los TR. Esta fase ocurre durante los primeros 5°-10° de rotación de la bisagra plástica, dependiendo de las dimensiones de la sección. La segunda fase inicia cuando aparecen las denominadas “deformaciones por rolado” en las paredes laterales y culmina cuando la pared a compresión choca contra sí mismo, impidiendo la rotación de la bisagra plástica (bloqueo de la bisagra plástica). Esta fase dura los siguientes 20°-30° de rotación de la bisagra plástica. La tercera fase inicia con el bloqueo de la bisagra plástica y culmina con la creación de una bisagra secundaria. Por último, la cuarta fase consiste en el desarrollo de la bisagra secundaria. La tercera y cuarta fase generalmente no son tomadas en cuenta, debido a que las deformaciones alcanzadas en

estas sobrepasan el rango permitido en carrocerías de vehículos comerciales. Así también, la primera fase es mucho menos influyente que la segunda a causa de su corta duración. En vista de esto, Kecman baso su mecanismo de colapso en el comportamiento de la bisagra plástica durante la segunda fase.

El mecanismo de colapso real incluye una compleja combinación de deformación plástica por flexión, deformación en-plano y deformación por rodadura. Este último lleva ese nombre por como el material pareciera deslizarse sin fricción por unos rodillos ficticios. Kecman (1979) observó que la deformación en-plano no afecta mayormente al modo en que colapsan los TR, por lo tanto, consideró que las paredes de los TR son inextensibles e incompresibles. Además, asumió que el perfil solo se deforma a lo largo de las líneas bisagra. Por último, solo se tomó en cuenta la condición de continuidad del material en algunas partes de la sección.

El mecanismo de colapso presentado por Kecman (1979, 1983) se muestra en la figura 2.9. La rotación de la bisagra plástica forma las líneas bisagra KN y LM . Esta misma rotación y el desplazamiento del punto B hacia la pared sometida a tracción, generan las líneas bisagra GH , EF y BC . El punto A se traslada en dirección normal al plano inicial $KLEG$, generando las

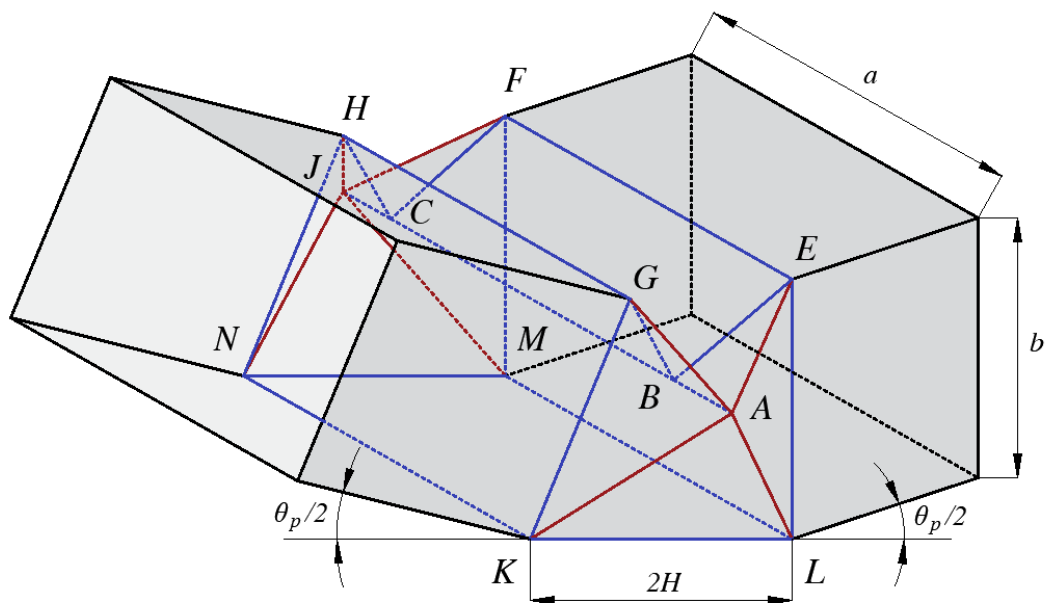


Figura 2.9: Mecanismo de colapso de Kecman. Reproducido de Kecman (1979).

líneas bisagras GB , EB , GA , EA , KA , LA , KG , LE y KL . A las líneas GA , EA , KA y LA se les denomina líneas bisagra viajeras (líneas de color rojo en la figura 2.9), dado que estas se desplazan por rolado a medida que colapsa el perfil. Al resto de líneas bisagra se les llama líneas bisagra estacionarias (líneas de color azul en la figura 2.9), ya que prácticamente mantienen su posición en el perfil durante todo el colapso. El punto J ocasiona el mismo patrón de deformación en la pared vertical opuesta (plano inicial $NMFH$). El modelo teórico planteado resultó en una serie de fórmulas con dos variables desconocidas, la longitud de bisagra plástica ($2H$) y el radio de rodadura (r). Con el fin de obtener una ecuación explícita simple, se consideró que el radio de rodadura no afecta ni al mecanismo de colapso, ni al modo en que disipan energía las líneas bisagra estacionarias. Así también, se asumió que las líneas bisagra AB , BC y CJ se mantienen colineales durante el colapso. Los resultados teóricos obtenidos con estas simplificaciones tuvieron excelente correlación con los resultados experimentales, consecuentemente, el modelo fue considerado realista y aplicable al análisis del colapso por flexión de TR.

Dado la simetría de la bisagra plástica, se puede tomar al ángulo ρ como parámetro de control (figura 2.10a). Este ángulo es definido como:

$$\rho = \frac{\theta_p}{2} \quad (2.29)$$

Tomando al punto K como origen del sistema de coordenadas, la posición del punto B durante el colapso es:

$$x_B = H \quad (2.30a)$$

$$y_B = b \cos \rho - \sqrt{H^2 - (H - b \sin \rho)^2} \quad (2.30b)$$

$$z_B = 0 \quad (2.30c)$$

y la posición del punto A es:

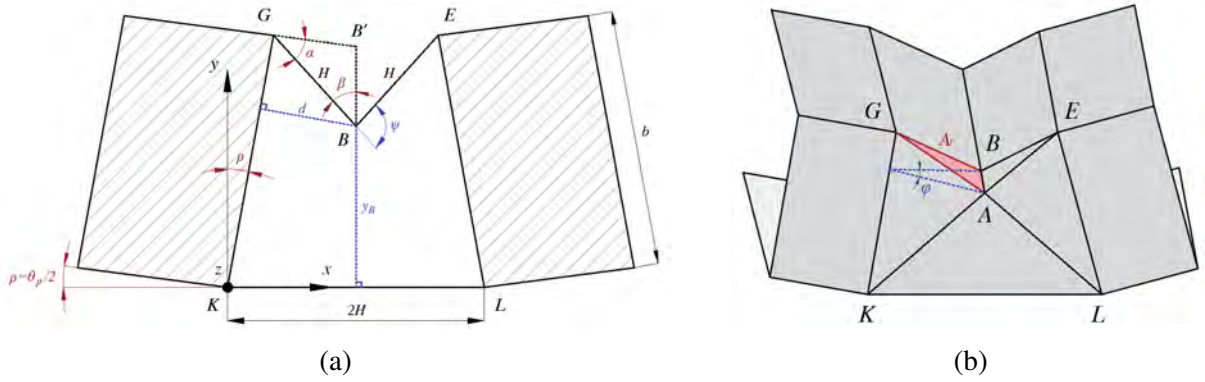


Figura 2.10: Parámetros auxiliares del mecanismo de colapso de Kecman. (a) Sección longitudinal; (b) Parámetros φ y A_r .

$$x_A = x_B \quad (2.31a)$$

$$y_A = y_B \quad (2.31b)$$

$$z_A = \frac{b^2 - y_A^2}{2b} \quad (2.31c)$$

La ecuación 2.31c se obtiene de la condición de inextensibilidad: $b = BA + AD$. Los ángulos auxiliares β , α , ψ y ϕ , y la distancia d (figuras 2.10a y 2.10b), son expresados por las siguientes ecuaciones:

$$\beta = \arcsin \left(\frac{H - b \sin \rho}{H} \right) \quad (2.32)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \rho - \beta \quad (2.33)$$

$$\psi = \pi - 2\beta \quad (2.34)$$

$$d = H \cos \rho - y_B \sin \beta \quad (2.35)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{z_A}{d} \right) \quad (2.36)$$

Kecman (1979) presentó una ecuación para el cálculo de H tomando en cuenta la continuidad de la fibra longitudinal que pasa por el punto A :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{a}{2}, & \text{si } a \leq b \\
H &= \frac{b}{2}, & \text{si } a > b
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

La energía disipada por cada línea bisagra estacionaria (U_{est}) puede ser calculada fácilmente asumiendo que el material tiene un comportamiento plástico rígido-perfecto. En este caso:

$$U_{est} = M_o l_H \gamma \tag{2.38}$$

siendo M_o , l_H y γ el momento totalmente plástico por unidad de longitud, la longitud de la línea bisagra y el ángulo de rotación relativo, respectivamente. El momento M_o es calculado con la siguiente ecuación:

$$M_o = \frac{\sigma_o t^2}{4} \tag{2.39}$$

donde σ_o es el esfuerzo promedio de flujo. Normalmente se asume que σ_o tiene un valor entre σ_Y y el esfuerzo máximo del material (σ_U). En base a pruebas experimentales, Kecman (1979) asumió que σ_o es igual a σ_U para sus cálculos. Empleando la ecuación 2.38, se puede evaluar la energía disipada por las líneas bisagra estacionarias:

$$U_{GH,EF} = 2M_o a \alpha \tag{2.40}$$

$$U_{AB,CJ} = 2M_o z_A \psi \tag{2.41}$$

$$U_{BC} = M_o a \psi \tag{2.42}$$

$$U_{GB,EB,HC,FC} = 2M_o H \pi \tag{2.43}$$

$$U_{KG,LE,NH,MF} = 4M_o b \varphi \tag{2.44}$$

$$U_{KN,LM,KL,NM} = 2M_o \left(a \rho + 2H \arctan \left(\frac{z_A}{y_A} \right) \right) \tag{2.45}$$

Cabe resaltar que en la ecuación 2.43 se utilizó un ángulo de rotación constante $\gamma = \frac{\pi}{2}$ debido a la condición de colinealidad entre AB , BC y CJ . En el caso de las líneas bisagra viajeras, la deformación ocurre en los segmentos de la pared vertical que están en “contacto” con los rodillos imaginarios. El segmento elemental ds cambia su curvatura al entrar en contacto con el rodillo, se flexiona un ángulo γ al “deslizarse”, y luego cambia nuevamente su curvatura al enderezarse cuando se separa del rodillo. El ángulo γ se puede calcular con la ecuación:

$$\gamma = \int_0^{s_r} \frac{ds}{r} \quad (2.46)$$

donde s_r es la longitud del segmento que está en contacto con el rodillo imaginario. Dado que la deformación plástica ocurre dos veces (en los puntos de cambio de curvatura), la energía disipada por cada línea bisagra viajera es igual a:

$$U_{via} = \frac{2M_o}{r} \int_0^{s_r} ds \quad (2.47)$$

Generalmente se puede observar que la longitud s_r varía a lo largo de las líneas bisagra. En estos casos es conveniente expresar a s_r en función de una coordenada local l_r , la cual inicia en un extremo de la línea bisagra: $s_r = s_r(l_r)$. La energía disipada por la línea bisagra viajera, asumiendo que r es constante a lo largo de esta, es igual a:

$$U_{via} = \frac{2M_o}{r} \int_0^{l_H} s_r dl_r = \frac{2M_o}{r} A_r \quad (2.48)$$

donde A_r es el área barrida por la línea bisagra viajera (figura 2.10b). Utilizando la ecuación 2.48 se puede calcular la energía disipada por las líneas GA , EA , HC y FC como:

$$U_{GA,EA,HC,FC} = \frac{4M_o H z_A}{r} \quad (2.49)$$

En los ensayos experimentales se puede observar que el radio de rodadura disminuye durante el colapso del TR. Kecman utilizó la siguiente relación empírica para incluir este comportamiento en la ecuación 2.49:

$$r(\rho) = \left(0,07 - \frac{\rho}{35}\right) H \quad (2.50)$$

En el caso de las líneas KA , LA , NJ y MJ , el radio de rodadura cambia notoriamente a lo largo de las líneas bisagra. Está varía desde el valor obtenido con la ecuación 2.50 en los puntos A y J , hasta casi infinito (superficie plana) en los puntos K , L , N y M . Kecman aproximó el radio de rodadura variable con la función hiperbólica:

$$r(\rho, l_r) = \frac{r(\rho) l_H}{l_r} \quad (2.51)$$

La longitud del segmento s_r se calculó con la siguiente relación lineal:

$$s_r(l_r) = \frac{l_r z_A}{l_H} \quad (2.52)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.51 y 2.52 en la ecuación 2.48, se puede calcular la energía disipada por las líneas bisagra viajeras KA , LA , NJ y MJ :

$$U_{KA,LA,NJ,MJ} = \frac{8M_0 z_A}{3r} \sqrt{H^2 + y_A^2 + z_A^2} \quad (2.53)$$

La energía disipada por la bisagra plástica (U) es obtenida sumando las ecuaciones 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.45, 2.49 y 2.53. U puede ser expresada en términos de θ_p utilizando la ecuación 2.29, hasta el ángulo de bloqueo (θ_J):

$$\theta_J = 2 \arcsin \left(\frac{H - 0,5t}{b} \right) \quad (2.54)$$

El momento que resiste la bisagra plástica durante el colapso es calculado numéricamente con la siguiente ecuación:

$$M(\theta_p) = \frac{U(\theta_p + \Delta\theta_p) - U(\theta_p)}{\Delta\theta_p} \quad (2.55)$$

siendo $\Delta\theta_p$ una rotación finita. La ecuación 2.55 tiende a sobrestimar la resistencia de la bisagra plástica en la primera fase de colapso. Kecman (1979) reportó las siguientes razones por las que sucede esta sobreestimación:

- Las fuerzas membrenales, las cuales reducen el momento totalmente plástico asumido, son mayores en la primera fase del colapso.
- El endurecimiento por bisagra plástica no ocurre inmediatamente una vez inicia el colapso, si no se va produciendo durante el desarrollo de este.
- El radio de rodadura en la fase inicial es mayor al valor teórico asumido.

Con la finalidad de ajustar la CCBP teórica a los resultados experimentales, Kecman (1979, 1983) propuso utilizar una interpolación lineal entre el momento máximo y el momento correspondiente al llamado ángulo de transición (θ_T). Este último es igual al menor valor de θ_i que satisface la ecuación:

$$\frac{M_{max} - M(\theta_i)}{\theta_i} > \frac{M_{max} - M(\theta_{i+1})}{\theta_{i+1}} \quad (2.56)$$

La ecuación del momento correspondiente al rango $[0, \theta_T]$ es:

$$M(\theta_p) = M_{max} - \frac{\theta_p}{\theta_T} (M_{max} - M(\theta_T)) \quad (2.57)$$

Por último, el momento posterior al bloqueo puede ser aproximado con la siguiente ecuación empírica:

$$M(\theta_p) = M(\theta_J) + 1,4 (M_{max} - M(\theta_J)) (\theta_p - \theta_J) \quad (2.58)$$

2.3. Teoría de Wierzbicki

Una de las principales hipótesis del modelo de Kecman (1979) es que las paredes de los tubos rectangulares son inextensibles e incompresibles durante el colapso. Obviamente esta suposición no puede ser cierta, ya que si no existiera deformación en-plano a lo largo de las líneas bisagra ocurriría separación de material. Basado en sus investigaciones sobre el colapso por carga axial de tubos cuadrados (Wierzbicki y col., 1994a) y el concepto del elemento superplegable (Abramowicz & Wierzbicki, 1989), Wierzbicki desarrolló un modelo de colapso por

flexión cinemáticamente admisible el cual considera tanto a las deformaciones en-plano como las de flexión (Wierzbicki y col., 1994b). A diferencia del modelo de Kecman, este no utiliza relaciones empíricas, es decir, su solución es totalmente analítica. Los resultados presentados en Wierzbicki y col. (1994b) demostraron que el modelo de Wierzbicki tiene buena correlación con simulaciones numéricas para ángulos menores a 30° (W. Chen, Wierzbicki & Santosa, 2002).

2.3.1. Mecanismo de colapso por carga axial

El modelo básico de colapso por carga axial para tubos cuadrados propuesto por Wierzbicki (Wierzbicki & Abramowicz, 1983; Wierzbicki y col., 1994a; Wierzbicki, 1983) se presenta en la figura 2.11a. Dado la simetría del problema, solo es necesario modelar un cuarto de la sección del tubo. Al igual que en la figura 2.9, las líneas de color azul y rojo representan las líneas bisagra estacionarias y viajeras, respectivamente. El modelo tiene como parámetro de control al ángulo α , y los parámetros secundarios son los ángulos β y γ , y los desplazamientos δ y s . Las ecuaciones que relacionan α con los parámetros secundarios son las siguientes:

$$\tan \beta = \sqrt{2} \tan \alpha \quad (2.59)$$

$$\tan \gamma = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (2.60)$$

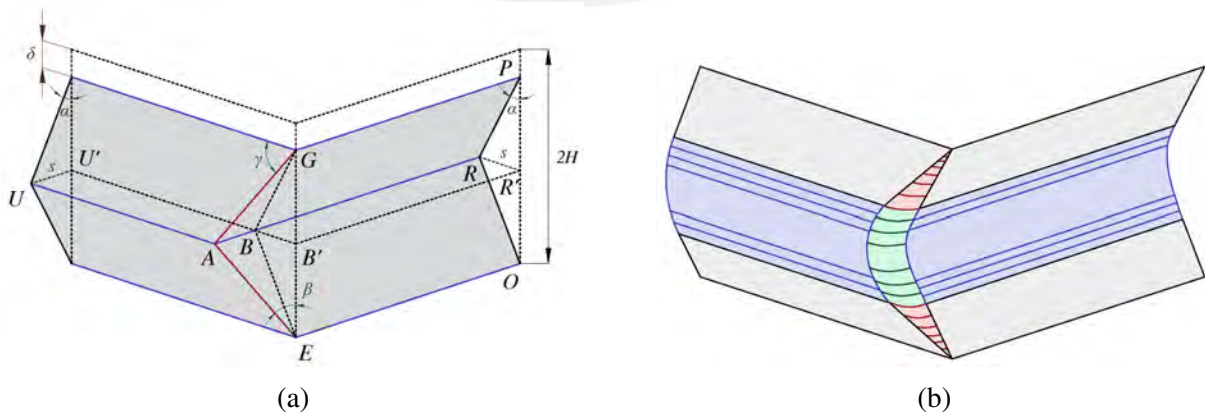


Figura 2.11: Mecanismo de colapso por carga axial de Wierzbicki. (a) Modelo básico; (b) Modelo cinemáticamente admisible.

$$\delta = 2H (1 - \cos \alpha) \quad (2.61)$$

$$s = H \sin \alpha \quad (2.62)$$

Cabe resaltar que las ecuaciones 2.59 y 2.60 utilizan la condición: $B'B = BA$. Las velocidades $\dot{\delta}$ y \dot{s} son:

$$\dot{\delta} = 2H \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (2.63)$$

$$\dot{s} = H \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (2.64)$$

El modelo de colapso por carga axial cinemáticamente admisible de Wierzbicki se muestra en la figura 2.11b. Las líneas bisagra GA y EA se dividen cada una en dos líneas bisagra giratorias, las cuales forman superficies cónicas inextensibles con un radio de rodadura r . Así como en el modelo de Kecman, se considera que el material se flexiona cada vez que cambia su curvatura y este solo se desliza sobre la superficie cónica. Las líneas bisagra AR y UA se dividen cada una en dos líneas bisagra móviles, las cuales forman superficies cilíndricas inextensibles al trasladarse en direcciones opuestas. Por último, la región central delimitada por cuatro arcos circulares forma una superficie toroidal. En este caso se considera que el material solo se desliza sobre el toroide en la dirección meridional, y se extiende en la dirección circunferencial.

El cálculo de la velocidad de disipación de energía en la bisagra plástica se realizó considerando lo siguiente:

- El material es considerado como rígido-perfectamente plástico.
- El sistema es analizado con una descripción Euleriana.
- Las paredes son analizadas con la teoría de placas de Kirchhoff-Love.
- Se utilizó la definición co-rotacional de la condición de fluencia: $F(M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}) = 0$.

- Solamente los componentes $\dot{\lambda}_{\phi\phi}$ y $\dot{\kappa}_{\phi\phi}$ del tensor de velocidad de deformación son diferentes a cero. Consecuentemente, la condición de fluencia es igual a:

$$\left| \frac{M_{\phi\phi}}{M_o} \right| + \left(\frac{N_{\phi\phi}}{N_o} \right)^2 = 1 \quad (2.65)$$

M_o es calculado con la ecuación 2.39, y N_o con:

$$N_o = \sigma_o t \quad (2.66)$$

ϕ es el ángulo circunferencial del toroide.

- Dado que la relación r_l/R_u es pequeña, se considera que t se mantiene constante. r_l y R_u son el radio menor y mayor del toroide, respectivamente.
- Debido a que la relación r_l/R_u es pequeña y r_l es mucho mayor que t , la condición de fluencia es reducido al punto $M = 0$ y $N = N_o$.

La velocidad de disipación de energía en la bisagra plástica es igual a:

$$\dot{U} = \int_S (M_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}) dS + \int_l M_o \dot{\theta} dl \quad (2.67)$$

siendo $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$ y $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$ la velocidad de curvatura y extensión, $\dot{\theta}$ y l la velocidad angular y longitud de las líneas bisagra, $M_{\alpha\beta}$ el momento flector, y $N_{\alpha\beta}$ la fuerza membrenal. La integral de superficie y línea representan la velocidad de disipación de energía en el campo de deformación continua (superficie toroidal) y discontinua (líneas bisagras móviles y giratorias), respectivamente. Aplicando las condiciones presentadas anteriormente, la velocidad de disipación de energía en la superficie toroidal (\dot{U}_{tor}) puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\dot{U}_{tor} = \int_S N_o \dot{\epsilon}_{\phi\phi} dS \quad (2.68)$$

Los términos $\dot{\epsilon}_{\phi\phi}$ y dS son calculados con:

$$\dot{\epsilon}_{\phi\phi} = \frac{H \cos \alpha \sin \theta \dot{\alpha}}{R_u + r_l \cos \theta} \quad (2.69)$$

$$dS = (R_u + r_l \cos \theta) r d\theta d\phi \quad (2.70)$$

siendo θ el ángulo meridional del toroide. θ y ϕ están relacionados por la siguiente ecuación:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} \quad (2.71)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.69, 2.70 y 2.71 en la ecuación 2.68, se obtiene:

$$\dot{U}_{tor} = \frac{16M_o H r}{t} \cos \alpha \dot{\alpha} \int_0^\beta \frac{d\phi}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} \quad (2.72)$$

La velocidad de disipación de energía en las líneas bisagras giratorias (\dot{U}_{rol}) es igual a:

$$\dot{U}_{rol} = 4lM_o \dot{\theta} \quad (2.73)$$

La velocidad angular $\dot{\theta}$ es calculada con la ecuación:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{r} \quad (2.74)$$

siendo \dot{s} la velocidad presentada en la ecuación 2.64. En este caso, la longitud de la línea bisagra es aproximado a:

$$l \approx H \sqrt{1 + (\sin \alpha)^2} \quad (2.75)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.74 y 2.75 en la ecuación 2.73, se obtiene:

$$\dot{U}_{rol} = \frac{4M_o H^2 \cos \alpha \dot{\alpha}}{r} \sqrt{1 + (\sin \alpha)^2} \quad (2.76)$$

Por último, la velocidad de disipación de energía en las líneas bisagra móviles (\dot{U}_{mov}) es calculado con la siguiente ecuación:

$$\dot{U}_{mov} = 4lM_o \dot{\alpha} \quad (2.77)$$

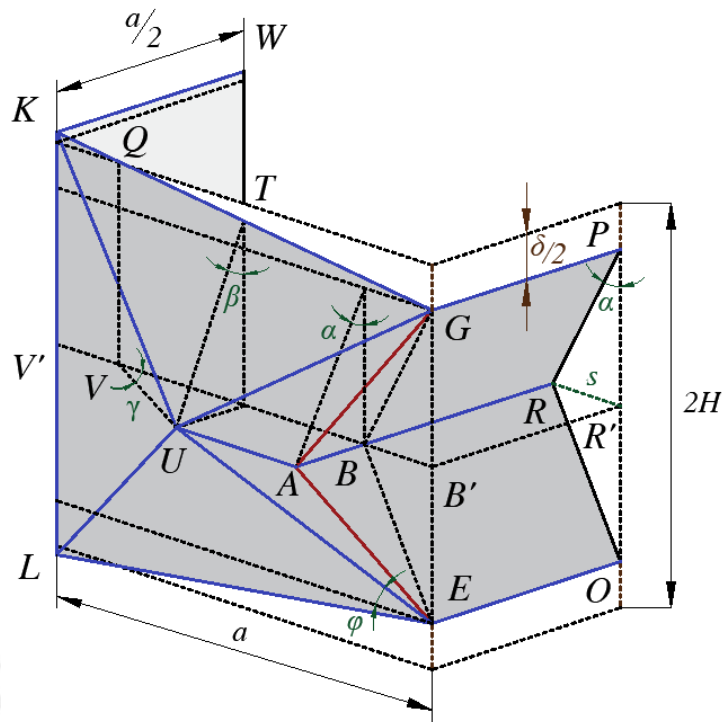


Figura 2.12: Mecanismo de colapso por flexión de Wierzbicki.

2.3.2. Mecanismo de colapso por flexión

El mecanismo de colapso por flexión del modelo de Wierzbicki (Wierzbicki y col., 1994b) se muestra en la figura 2.12. Dado la simetría del problema, solo es necesario modelar la mitad de la sección. Según Wierzbicki, la pared superior a compresión se deforma con el mismo patrón que se observa en el colapso por carga de axial. Las líneas bisagras GA y EA (mostradas de color rojo en la figura 2.12) se dividen cada una en dos líneas bisagras giratorias, formando dos superficies cónicas inextensibles y una superficie toroidal extensible en la dirección circunferencial. Las líneas bisagra UA , AB y BR se dividen cada una en dos líneas bisagra móviles, las cuales forman superficies cilíndricas inextensibles. El resto de líneas bisagra son consideradas como estacionarias. Es importante mencionar que, para fines de cálculo, las líneas bisagra estacionarias y móviles (mostradas de color azul en la figura 2.12) son analizadas de la misma manera.

De forma análoga al modelo anterior, se utilizan como parámetros a los ángulos α , β y γ ,

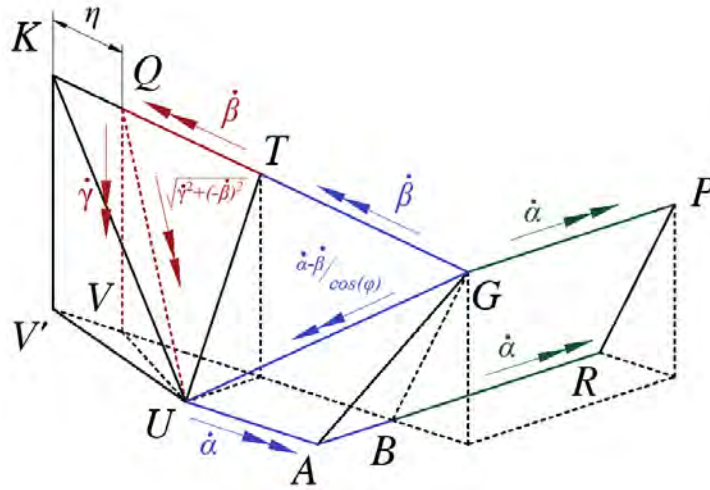


Figura 2.13: Líneas bisagra estacionarias y móviles del modelo de colapso por flexión de Wierzbicki.

siendo α el parámetro de control. El desplazamiento δ y la velocidad $\dot{\delta}$ son evaluadas con las ecuaciones 2.61 y 2.63, respectivamente. Para definir la ecuación que relaciona a los ángulos α y β , primero es necesario determinar la velocidad de T (punto medio del lado KG). Este último puede ser calculado a partir de las velocidades de K y G , utilizando la condición de linealidad de la teoría de placas de Kirchhoff-Love:

$$\dot{u}_T = H \sin \beta \dot{\beta} = H \sin \alpha \dot{\alpha} \frac{a - 2\eta}{2(a - \eta)} \quad (2.78)$$

donde η es la distancia entre la pared a tracción y la superficie neutra que pasa por los puntos Q y V (figura 2.13). Considerando que η es prácticamente nulo, y que los ángulos α y β son pequeños, la ecuación 2.78 puede simplificarse a:

$$\sqrt{2}\beta = \alpha \quad (2.79)$$

El ángulo γ puede relacionarse a β con la siguiente ecuación:

$$\frac{2H \sin \beta}{a - 2\eta} = \tan \gamma \quad (2.80)$$

Si se asume que β y γ son ángulos pequeños, la ecuación 2.80 puede simplificarse a:

$$\frac{2H\beta}{a - 2\eta} = \gamma \quad (2.81)$$

Por último, la longitud de las diagonales GU , EU , LU y KU antes de la deformación son:

$$l_d = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2 \cos \varphi} \quad (2.82)$$

El equilibrio global del mecanismo de colapso es expresado en términos del principio de trabajo virtual:

$$\dot{U}_{ext} = \dot{U}_{int} \quad (2.83)$$

Considerando que la carga externa es ejercida por una fuerza excéntrica P ubicada en el centro de la pared a compresión, el principio de trabajo virtual puede ser expresado como:

$$P\dot{\delta} = \dot{U}_{tor} + \dot{U}_{rol} + \frac{\dot{U}_b}{2} + \dot{U}_{w1} + \dot{U}_{w2} + \dot{U}_{ten} \quad (2.84)$$

siendo \dot{U}_{tor} la velocidad de disipación de energía correspondiente a la superficie toroidal (ecuación 2.72), \dot{U}_{rol} la correspondiente a las líneas bisagra giratorias (ecuación 2.76), \dot{U}_{ten} la correspondiente a la pared inferior sometida a tracción, \dot{U}_{w1} y \dot{U}_{w2} las correspondientes a la mitad superior e inferior de la pared $LKGE$, y $\dot{U}_b/2$ la correspondiente a la pared superior sometida a compresión. La otra mitad de este último término es incluida en \dot{U}_{w1} (Wierzbicki y col., 1994b).

Las líneas bisagra relacionadas a \dot{U}_{w1} , \dot{U}_{w2} y $\dot{U}_b/2$ se muestran de color azul, rojo y verde en la figura 2.13, respectivamente. Para $\dot{U}_b/2$, la velocidad de energía disipada por las líneas bisagra es:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_b}{2} &= 2\dot{U}_{GP} + 2\dot{U}_{BR} \\ &= 2M_o \frac{a}{2} \dot{\alpha} + 2M_o \frac{a}{2} \dot{\alpha} \\ &= 2M_o a \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.85)$$

En el caso de \dot{U}_{w1} , la velocidad de la energía disipada es:

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{w1} &= 2\dot{U}_{UB} + 2\dot{U}_{TG} + 2\dot{U}_{UG} \\
&\approx 2M_o \frac{a}{2} \dot{\alpha} + 2M_o \frac{a}{2} \dot{\beta} + 2M_o l_d \frac{\dot{\alpha} - \dot{\beta}}{\cos \varphi} \\
&\approx \underbrace{2M_o a \dot{\alpha}}_{\dot{U}_{b/2}} + 2M_o a \dot{\alpha} (2 - \sqrt{2}) (H/a)^2
\end{aligned} \tag{2.86}$$

La velocidad de energía disipada en \dot{U}_{w2} es:

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{w2} &= 2\dot{U}_{QT} + 2\dot{U}_{VQ} + 2\dot{U}_{QU} \\
&\approx 2M_o \left(\frac{a}{2} - \eta \right) \dot{\beta} + 2M_o H \dot{\gamma} + 2M_o \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} - \eta \right)^2} \sqrt{\dot{\gamma}^2 + (-\dot{\beta})^2} \\
&\approx 2\sqrt{2} M_o \dot{\alpha} \left(\frac{a}{2} - \eta \right) \left(1 + \left(\frac{H}{a/2 - \eta} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Por último, la velocidad de disipación de energía en \dot{U}_{ten} es:

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{ten} &= \frac{at}{2} \int_0^{2H} \sigma_o \dot{\epsilon} dx \\
&= \frac{at}{2} \left(\frac{4M_o}{t^2} \right) \frac{\dot{\delta} \eta}{a - \eta} \\
&= 4M_o \dot{\alpha} H \sin \alpha \frac{a \eta}{(a - \eta)t}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Reemplazando 2.72, 2.76, 2.85, 2.86, 2.87 y 2.88 en 2.84, y considerando que $\eta \approx 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
P &= 8M_o \frac{r}{t \tan \alpha} \int_0^{\arctan(\sqrt{2} \tan \alpha)} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} + \frac{2M_o H}{r \tan \alpha} \sqrt{1 + (\sin \alpha)^2} \\
&\quad + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{a M_o}{H \sin \alpha} + (2 + \sqrt{2}) \frac{H M_o}{a \sin \alpha}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Cabe resaltar que si $\eta \approx 0$, se cumple que $\dot{U}_{QU} \approx \dot{U}_{KU}$ y $\dot{U}_{QV} \approx \dot{U}_{KV}$. Como se puede observar en la ecuación 2.89, P depende de α , H y r . Wierzbicki redujo el número de variables asumiendo que el colapso es producto de la menor carga media posible, por lo tanto, las variables H y r pueden ser calculadas minimizando la carga media en función de estas (Wierzbicki

& Abramowicz, 1983). Integrando la ecuación 2.84, se obtiene:

$$P_m(2H) = \int \left(\dot{U}_{tor} + \dot{U}_{rol} + \dot{U}_{b/2} + \dot{U}_{w1} + \dot{U}_{w2} + \dot{U}_{ten} \right) dt \quad (2.90)$$

siendo P_m la carga media del colapso. Evaluando las integrales mostradas en la ecuación 2.90, se obtiene:

$$\begin{aligned} U_{tor} &= \int_0^{\pi/2} 16M_o \frac{Hr \cos \alpha}{t} \left(\int_0^{\arctan(\sqrt{2} \tan \alpha)} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} \right) d\alpha \\ &= 16M_o \frac{Hr}{t} (0,5256) \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} U_{rol} &= \int_0^{\pi/2} 4M_o \frac{H^2}{r} \cos \alpha \sqrt{1 + (\sin \alpha)^2} d\alpha \\ &= 4M_o \frac{H^2}{r} (1,1477) \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} U_{w1} &= \int_0^{\pi/2} 2M_o a \left(1 + (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{H}{a} \right)^2 \right) d\alpha \\ &= \pi M_o a + (2 - \sqrt{2}) \pi a M_o \left(\frac{H}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$U_{w2} = \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{2}M_o (a/2 - \eta) \left(1 + \left(\frac{H}{a/2 - \eta} \right)^2 \right) d\alpha \quad (2.94)$$

$$U_{ten} = \int_0^{\pi/2} 4HM_o \sin \alpha \frac{a \eta}{(a - \eta)t} d\alpha \quad (2.95)$$

Reemplazando 2.91, 2.92, 2.93, 2.94 y 2.95 en 2.90, se obtiene:

$$\begin{aligned} P_m &= 4,20504 \frac{M_o r}{t} + 2,29559 \frac{M_o H}{r} + \frac{\pi a M_o}{H} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \pi M_o \frac{H}{a} \\ &+ \frac{\sqrt{2}M_o}{H} \int_0^{\pi/2} (a/2 - \eta) \left(1 + \left(\frac{H}{a/2 - \eta} \right)^2 \right) d\alpha \\ &+ 2M_o \frac{a}{t} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \frac{\eta}{a - \eta} d\alpha \end{aligned} \quad (2.96)$$

Para mantener la continuidad de los esfuerzos entre las secciones correspondientes a U_{w1} y U_{w2} , debe cumplirse la siguiente condición (Wierzbicki y col., 1994b):

$$1 + \left(\frac{H}{a/2 - \eta} \right)^2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} (2 - \sqrt{2}) \left(\frac{H}{a} \right)^2 \quad (2.97)$$

Reemplazando 2.97 en 2.96, y considerando que $\eta \approx 0$, se obtiene:

$$P_m = 4,20504 \frac{rM_o}{t} + 2,29559 \frac{HM_o}{r} + \frac{3\pi aM_o}{2H} + (2 - \sqrt{2}) \pi M_o \frac{H}{a} \quad (2.98)$$

El factor de 4,20504 en la ecuación 2.98 es diferente al presentado por Wierzbicki (originalmente este factor es igual a 4,64). Posiblemente esta diferencia sea consecuencia del uso de un método o software antiguo de cálculo numérico en el trabajo original. Debido a que los factores son cercanos, se optó por utilizar factor de 4,20504. Las variables H y r son calculadas derivando P_m con respecto a estas:

$$\frac{\partial P_m}{\partial H} = \frac{1,8403}{a} - \frac{4,71239a}{H^2} + \frac{2,29559}{r} = 0 \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial P_m}{\partial r} = \frac{-2,29559H}{r^2} + \frac{4,20504}{t} = 0 \quad (2.100)$$

La ecuación 2.99 puede ser simplificada utilizando la condición $a \gg r$:

$$\frac{\partial P_m}{\partial H} \approx -\frac{4,71239a}{H^2} + \frac{2,29559}{r} = 0 \quad (2.101)$$

Resolviendo las ecuaciones 2.101 y 2.100:

$$H = 1,3101 a^{2/3} t^{1/3} \quad (2.102)$$

$$r = 0,848916 a^{1/3} t^{2/3} \quad (2.103)$$

La carga P en función del parámetro de control α es obtenida reemplazando 2.102 y 2.103 en 2.89. M_o es calculado con la ecuación 2.39, considerando que σ_o es igual a $0,92 \sigma_U$ (Wierzbicki & Abramowicz, 1989).

Por último, la CCBP correspondiente al modelo de Wierzbicki es calculada utilizando las siguientes relaciones (Wierzbicki y col., 1994b):

$$M(\alpha) = aP(\alpha) \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \theta_p &\approx \frac{\delta}{H} = 2(1 - \cos \alpha) \\ &\approx 4 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ &\approx \alpha^2 \end{aligned} \quad (2.105)$$

2.4. Teoría de Kim y Reid

Kim y Reid (2001) presentaron un modelo de colapso por flexión para tubos rectangulares (figura 2.14a), el cual combina aspectos de los modelos de Kecman y Wierzbicki. Dado la simetría del problema, solo se modela la mitad del perfil. Como se puede observar, el mecanismo de colapso de Kim y Reid es bastante similar al de Kecman. La principal diferencia entre estos es que se reemplazó a las líneas bisagra viajeras GA y EA , por las líneas bisagra giratorias (las cuales forman superficies cónicas) y la superficie toroidal del modelo de Wierzbicki para volverla cinemáticamente admisible. Otra diferencia es que las dimensiones de la sección fueron definidas a partir de los planos medios de las paredes:

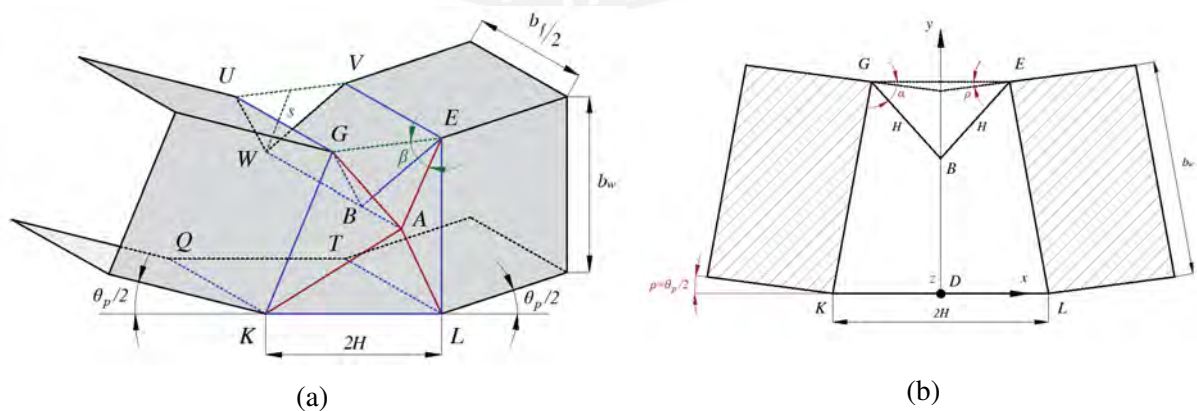


Figura 2.14: Modelo de colapso de Kim y Reid. (a) Mecanismo de colapso. Reproducido de Kim y Reid (2001); (b) Sección longitudinal.

$$b_f = a - t \quad (2.106)$$

$$b_w = b - t \quad (2.107)$$

Al igual que en el modelo de Kecman, el parámetro de control es el ángulo ρ (ecuación 2.29). El parámetro secundario α se muestra en la figura 2.14b. En este caso, α y ρ se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(1 - \frac{b_w}{H} \sin \rho \right) \quad (2.108)$$

Tomando al punto D como origen del sistema de coordenadas, la posición de B durante el colapso es:

$$x_B = 0 \quad (2.109a)$$

$$y_B = b_w \cos \rho - H \sin \alpha \quad (2.109b)$$

$$z_B = 0 \quad (2.109c)$$

y la posición de A es:

$$x_A = 0 \quad (2.110a)$$

$$y_A = y_B \quad (2.110b)$$

$$z_A = \frac{b_w^2 - y_A^2}{2b_w} \quad (2.110c)$$

El desplazamiento horizontal s del punto W y su velocidad \dot{s} son:

$$s = H \sin \alpha + b_w (1 - \cos \rho) \quad (2.111)$$

$$\dot{s} = H \cos \alpha \dot{\alpha} + b_w \sin \rho \dot{\rho} \quad (2.112)$$

La mitad del ángulo de la sección toroidal (β) definido en la figura 2.14a es:

$$\beta = \arccos \left(\frac{H \cos \alpha}{\sqrt{z_A^2 + H^2}} \right) \quad (2.113)$$

Al igual que en los modelos anteriores, se asume que el material tiene un comportamiento rígido perfectamente plástico. La velocidad de disipación de energía en la superficie toroidal es calculada a partir de la ecuación 2.72:

$$\dot{U}_{tor} = 16 \frac{M_0 r}{t} \dot{s} \int_0^\beta \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} \quad (2.114)$$

La velocidad de disipación de energía de las líneas bisagra giratorias (ecuación 2.76) y viajeras (mostradas de color rojo en la figura 2.14a) son:

$$\dot{U}_{GA,EA} = 4M_0 \frac{\dot{s}}{r} \sqrt{z_A^2 + H^2} \quad (2.115)$$

$$\dot{U}_{KA,LA} = \frac{4}{3} \frac{M_0}{r} \frac{d}{dt} \left(z_A \sqrt{H^2 + y_B^2 + z_A^2} \right) \quad (2.116)$$

La velocidad de disipación de energía de las líneas bisagra estacionarias (mostradas de color azul en la figura 2.14a) son:

$$\dot{U}_{EV,GU} = M_0 b_f (\dot{\alpha} - \dot{\rho}) \quad (2.117)$$

$$\dot{U}_{AB} = M_0 b_f \dot{\alpha} \quad (2.118)$$

$$\dot{U}_{BW} = 2M_0 z_A \dot{\alpha} \quad (2.119)$$

$$\dot{U}_{GK,EL} = 2M_0 b_w \frac{d}{dt} \left(\arcsin \left(\frac{z_A}{H} \right) \right) \quad (2.120)$$

$$\dot{U}_{KL} = 2M_0 H \frac{d}{dt} \left(\arctan \left(\frac{z_A}{y_B} \right) \right) \quad (2.121)$$

$$\dot{U}_{KQ,LT} = M_0 b_f \dot{\rho} \quad (2.122)$$

A diferencia de Kecman y Wierzbicki, Kim y Reid consideraron que el valor de σ_o varía desde σ_Y a σ_U de acuerdo a los siguientes casos:

(a) Caso 1 ($\sigma_{cr} < \sigma_Y$):

$$\sigma_o = \sigma_Y \quad (2.123)$$

(b) Caso 2 ($\sigma_Y \leq \sigma_{cr} < 2\sigma_Y$):

$$\sigma_o = 0,5(\sigma_Y + \sigma_U) \quad (2.124)$$

(c) Caso 3 ($2\sigma_Y \leq \sigma_{cr}$):

$$\sigma_o = \sigma_U \quad (2.125)$$

M_o es calculado con la ecuación 2.39. El momento instantáneo de colapso puede calcularse utilizando el principio de trabajo virtual:

$$\dot{U}_{ext} = \sum \dot{U}_{int} = M(H, r, \theta_p) \dot{\theta}_p \quad (2.126)$$

Los valores óptimos de H y r son determinados siguiendo el procedimiento utilizado por Wierzbicki (Wierzbicki & Abramowicz, 1983). En primer lugar, el momento instantáneo obtenido de la ecuación 2.126 es integrado con respecto a ρ para calcular el momento medio de colapso (Kim & Reid, 2001):

$$M_m(H, r) = \frac{1}{\rho_f(H)} \int_0^{\rho_f(H)} M d\rho \quad (2.127)$$

La integración es realizada desde 0 a $\rho_f(H)$, siendo $\rho_f(H)$ el ángulo teórico de bloqueo:

$$\rho_f(H) = \arcsin \left(\frac{H - \frac{b}{t}}{\frac{a}{b_w}} \right) \quad (2.128)$$

Luego, los valores óptimos de H y r se obtienen minimizando M_m con respecto a estos mismos, según la ecuación:

$$\frac{dM_m(H, r)}{dH} = \frac{dM_m(H, r)}{dr} = 0 \quad (2.129)$$

Finalmente, el CCBP del modelo de Kim y Reid es calculado sustituyendo los resultados de la ecuación 2.129 en la ecuación 2.126.

Capítulo III

Simulación numérica del colapso por flexión de tubos rectangulares

En este capítulo se analizó mediante simulación numérica el colapso de tubos rectangulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. En primer lugar, se clasificó los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso. Se establecieron los valores límite del parámetro calificador y se analizaron las características de los diferentes tipos de TR. En segundo lugar, se realizó un estudio comparativo sobre el colapso en los ensayos de flexión. La influencia de los principales parámetros geométricos y de material sobre las curvas características fue investigada. Por último, se compararon las CCBP generadas por teorías analíticas y modelos numéricos.

Las simulaciones fueron realizadas utilizando el software de análisis por elementos finitos ANSYS 2022 R2. Se utilizaron los siguientes modelos y consideraciones:

Ensayo de flexión de viga en voladizo

- El modelo conceptual del ensayo de flexión de viga en voladizo se muestra en la figura 3.1. El ancho y alto de la sección son a y b , el espesor de pared es t , y la longitud del tubo rectangular es L .

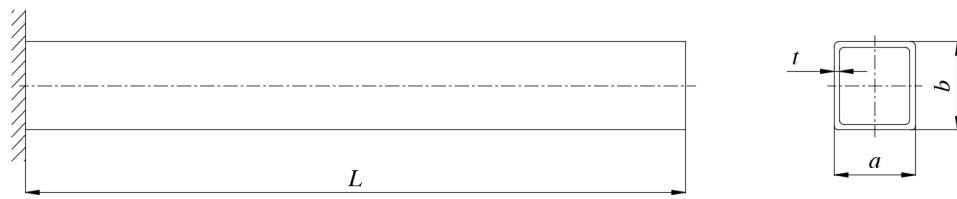


Figura 3.1: Modelo conceptual del ensayo de flexión de viga en voladizo.

- Los parámetros de salida de la simulación computacional del ensayo de flexión de viga en voladizo se muestran en la figura 3.2. La flexión del tubo rectangular es definida ejerciendo un desplazamiento Δz a un nodo piloto unido al centro de la sección del extremo libre (punto A). El movimiento de los nodos en el extremo fijo fue restringido para simular la condición de borde de la viga en voladizo. El ángulo de rotación de la bisagra plástica y el momento flector fueron calculados con las siguientes ecuaciones:

$$\theta_P = \arctan\left(\frac{\Delta z}{L - \Delta x}\right) \quad (3.1)$$

$$M = F_A (L - \Delta x) \quad (3.2)$$

siendo F_A la fuerza resistiva en el nodo piloto y Δx el desplazamiento del nodo piloto en la dirección longitudinal del tubo. El desplazamiento Δx no es impuesto en la simulación, si no es producto de la flexión del tubo. Es importante mencionar que tanto el ángulo de rotación como el momento flector han sido calculados de forma aproximada. Los verdaderos valores deben ser medidos a partir de la mitad de la bisagra plástica (su

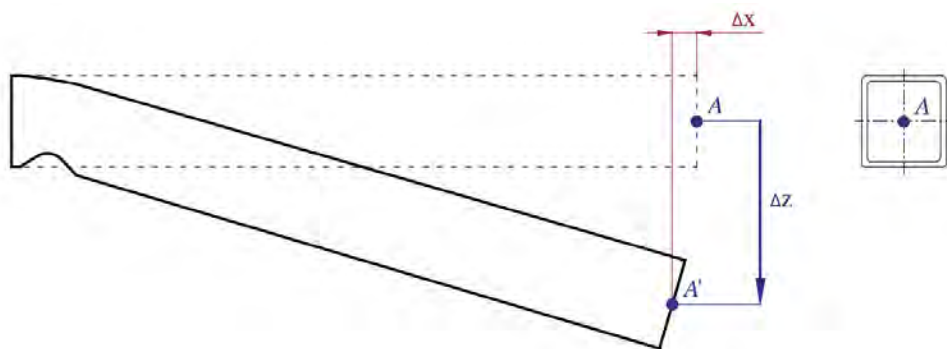


Figura 3.2: Parámetros de salida del ensayo de flexión de viga en voladizo.

ubicación varía dependiendo del tubo rectangular). También, a la deflexión Δz se le debe sustraer la deflexión correspondiente a la deformación elástica. Comparando los resultados de algunos casos representativos se observó que las simplificaciones consideradas prácticamente no influyen sobre las CCBP, y por lo tanto, se emplearon las ecuaciones 3.1 y 3.2 para simplicidad de cálculo.

Ensayo de flexión de 3 puntos

- El modelo conceptual del ensayo de flexión de 3 puntos se muestra en la figura 3.3. El sistema consta de 3 componentes: (1) Un tubo rectangular; (2) Un indentador cilíndrico; (3) Un par de soportes cilíndricos. En este caso la longitud L representa la separación entre los soportes. El radio del indentador (r_i) y los soportes (r_s) son iguales a $8b/30$ y $b/2$, respectivamente. El indentador y el tubo rectangular tienen una separación inicial (d) igual a 5 mm.

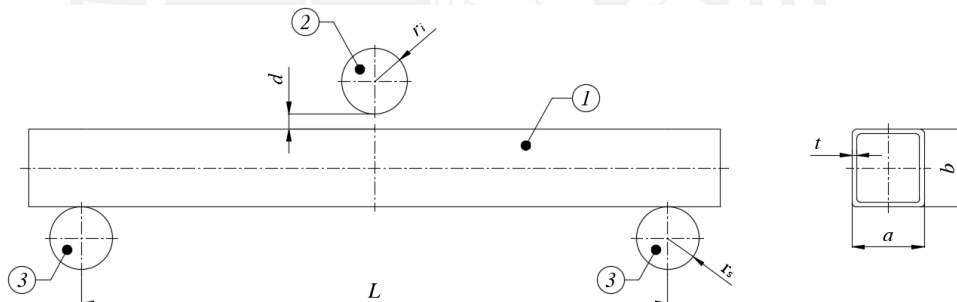


Figura 3.3: Modelo conceptual del ensayo de flexión de 3 puntos. 1: Tubo rectangular; 2: Indentador; 3: Soportes.

- Los parámetros de salida de la simulación computacional del ensayo de flexión de 3 puntos se muestran en la figura 3.4. El movimiento del indentador fue impuesta ejerciendo el desplazamiento Δz a un nodo piloto ubicado en el centro de su sección (punto A). De manera similar, se restringió el movimiento de los soportes utilizando nodos pilotos estáticos unidos a estos. El ángulo de rotación de la bisagra plástica y el momento flector fueron calculados con las siguientes ecuaciones:

$$\theta_P = 2 \arctan \left(\frac{2(\Delta z - d)}{L} \right) \quad (3.3)$$

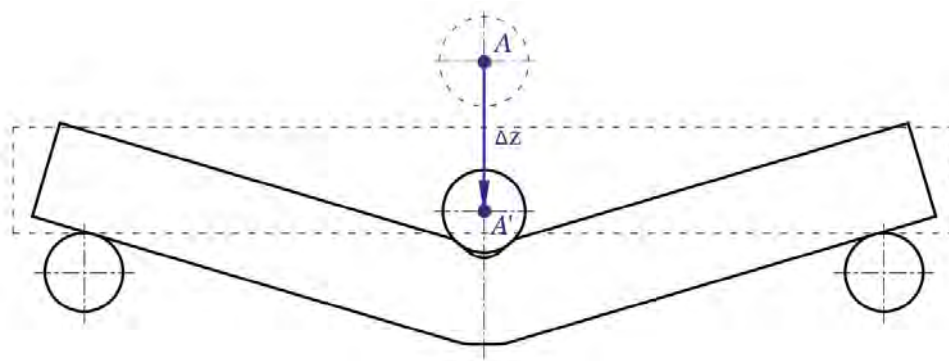


Figura 3.4: Parámetros de salida del ensayo de flexión de 3 puntos.

$$M = \frac{F_A L}{4} \quad (3.4)$$

siendo F_A la fuerza resistiva en el nodo piloto del indentador. En este caso también se utilizaron simplificaciones para el cálculo del CCBP, siendo la más importante considerar que la deflexión del tubo rectangular es igual $\Delta z - d$ (el valor verdadero depende de la deformación de la sección del tubo). Dado que la deflexión es mucho mayor que la deformación de la sección, se consideró que esta simplificación prácticamente no afecta los resultados.

Tubos rectangulares

- Los tubos rectangulares analizados en esta sección fueron presentados en Kecman (1979). En aquella investigación no se especificó la norma de fabricación o el proveedor de los tubos, solo se menciona que todos son laminados en caliente y soldados con costura (algunos fueron fabricados en taller). Los tubos se ensayaron tal como se recibieron, es decir, no se realizó ningún tipo de pre-tratamiento. Los datos disponibles en Kecman (1979) son las dimensiones de la sección (a , b y t), los esfuerzos σ_Y y σ_U , las curvas nominales $\varepsilon_o - \sigma_o$, y las CCBP de cada tubo rectangular.
- Con respecto a las curvas nominales $\varepsilon_o - \sigma_o$, estas fueron obtenidas de ensayos de tracción. Las probetas se cortaron en la dirección longitudinal del tubo, en la zona central de la

Tabla 3.1: Dimensiones y propiedades mecánicas de los casos investigados en Kecman (1979, 1983) y Kim y Reid (2001).

Caso	b (mm)	a (mm)	t (mm)	E (GPa)	ν	σ_Y (MPa)	σ_U (MPa)	t/b	b/a
1	15	45	1.3	200	0.3	277	308	0.087	0.333
2	38.1	50.8	1.26	200	0.3	253	284	0.033	0.75
3	87	104	0.813	200	0.3	161	250	0.009	0.837
4	38.4	38.4	1.6	200	0.3	374	390	0.042	1.0
5	103	100	0.813	200	0.3	161	250	0.008	1.03
6	45.2	29.3	3.25	200	0.3	463	463	0.072	1.543
7	38	19	1.26	200	0.3	290	326	0.033	2.0

sección (lejos de las costuras de soldadura). Las curvas $\varepsilon_o - \sigma_o$ reportadas en Kecman (1979) se muestran en el apéndice B.

- De los 18 casos investigados por Kecman, se seleccionaron 8 casos representativos para el estudio de la presente tesis (estos mismos fueron investigados en Kim y Reid (2001)). Las dimensiones de la sección y las propiedades mecánicas de los perfiles son presentadas en la tabla 3.1.
- Los valores exactos del módulo de elasticidad (E) y coeficiente de poisson (ν) no se presentaron Kecman (1979), por lo tanto, se utilizaron valores generales del acero para todos los casos. Cabe mencionar que no fue posible obtener el módulo de elasticidad de las curvas $\varepsilon_o - \sigma_o$ debido a la calidad de las figuras .
- En los casos 3 y 5 se consideraron redondeos de 4 mm (únicos casos especificados en Kecman (1979)). El resto de casos se modeló con redondeos de 1 mm.

Modelamiento del material

- La deformación elástica del acero fue modelada siguiendo la ley generalizada de Hooke para materiales isotrópicos.
- La deformación plástica del acero fue modelada con el modelo multilíneo de endurecimiento plástico implementado en el software ANSYS. Como datos de entrada se requie-

Tabla 3.2: Datos de endurecimiento plástico obtenidos de Kecman (1979, 1983). Caso 1, 2, 3 y 4.

Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
ε_{pl}	σ_t (MPa)	ε_{pl}	σ_t (MPa)	ε_{pl}	σ_t (MPa)	ε_{pl}	σ_t (MPa)
0	277.38	0	253.32	0	161.12	0	374.69
0.04717	323.4	0.09374	312.4	0.04794	169.05	0.04674	409.5
0.09365	330.27	0.18061	340.8	0.09410	242	0.09333	409.5
0.18061	341.7	0.26051	369.2	0.13832	287.5	0.13976	409.5
0.22141	346.25	0.33448	397.6	0.33472	350	0.33647	409.5

Tabla 3.3: Datos de endurecimiento plástico obtenidos de Kecman (1979, 1983). Caso 5, 6 y 7.

Caso 5		Caso 6		Caso 7	
ε_{pl}	σ_t (MPa)	ε_{pl}	σ_t (MPa)	ε_{pl}	σ_t (MPa)
0	161.12	0	464.07	0	290.42
0.04790	176.4	0.04635	486.15	0.04717	323.4
0.09404	253	0.07000	486.15	0.09351	358.6
0.13832	287.5	0.09476	486.15	0.13788	374.9
0.33472	350	0.33647	486.15	0.26047	378.3

ren valores de esfuerzo verdadero (σ_t) y deformación unitaria plástica (ε_{pl}), las cuales son calculadas a partir de pares ordenados de la curva $\varepsilon_o - \sigma_o$ y las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_t = \sigma_o (1 + \varepsilon_o) \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_t = \ln(1 + \varepsilon_o) \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma_t}{E} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_t - \varepsilon_{el} \quad (3.8)$$

Las propiedades de endurecimiento plástico de los aceros utilizados son reportados en las tablas 3.2 y 3.3.

Modelo computacional

- Los ensayos de flexión fueron simulados con análisis cuasi-estático. Se consideraron no-linealidades geométricas, de material, y por contacto.
- Se utilizaron elementos SOLID185 para modelar el tubo rectangular. El indentador y los soportes fueron simulados con elementos SHELL181. El contacto entre cuerpos fue simulado con elementos CONTA174 y TARGET170.
- El indentador y los soportes fueron modelados como cuerpos rígidos.
- En la dirección axial, los elementos tienen una longitud de 0.5 mm en las zonas donde se produce contacto. En las zonas donde no ocurre contacto, los elementos tienen una longitud de 1 mm. En la dirección del espesor se utilizaron 3 elementos (figura 3.5).
- La validación de los resultados de la simulación computacional del ensayo de viga en voladizo es presentado en el apéndice C. Esta fue realizada por comparación con los resultados experimentales reportados en el apéndice B.

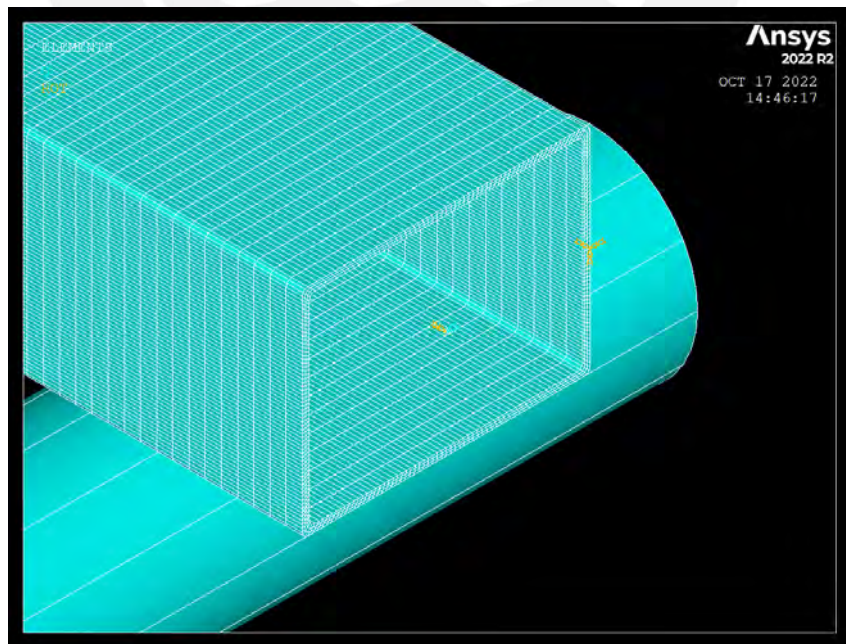


Figura 3.5: Malla del modelo numérico en la dirección del espesor.

3.1. Clasificación de los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso

Para determinar de forma general las diferencias entre las CCBP obtenidas con distintos ensayos de flexión y métodos de cálculo, es necesario primero definir algún criterio para clasificar los TR. Diferentes parámetros calificativos han sido propuestos en la literatura (en su mayoría relaciones geométricas); sin embargo, estos fueron diseñados para estudios específicos. Por ejemplo, Rincón-Dávila, Alcalá y Martín (2022) propusieron al parámetro geométrico $Q = I_x/A$ para determinar en cuáles casos se debe utilizar la teoría de Kecman o MEF. En esta sección se propone utilizar a la relación del esfuerzo crítico y fluencia (σ_{cr}/σ_Y) como parámetro calificativo. A diferencia de las relaciones geométricas, este se puede utilizar en el análisis de TR con diferentes propiedades mecánicas. Los valores de σ_{cr}/σ_Y , y otros parámetros de interés como el factor de forma (Z_p/Z_e) y las relaciones geométricas t/b y b/a , son reportados en la tabla 3.4.

En la figura 3.6 se muestra las CCBP normalizadas de los diferentes casos de estudio (el parámetro adimensional M/M_{max} es utilizado como ordenada para fines comparativos). Las curvas fueron calculadas con simulaciones computacionales del ensayo de viga en voladizo utilizando los modelos presentados en las figuras 3.1 y 3.2, y las ecuaciones 3.1 y 3.2. La longitud

Tabla 3.4: Parámetros elásticos y plásticos de los tubos rectangulares investigados en Kecman (1979, 1983) y Kim y Reid (2001).

Caso	t/b	b/a	Z_e (mm^3)	Z_p (mm^3)	Z_p/Z_e	σ_{cr} (MPa)	σ_Y (MPa)	σ_{cr}/σ_Y
1	0.087	0.333	789	901	1.14	904.47	277	3.27
2	0.033	0.75	2777	3155	1.14	635.58	253	2.51
3	0.009	0.837	9157	10250	1.12	62.87	161	0.39
4	0.042	1.0	2773	3252	1.17	1776	374	4.75
5	0.008	1.03	10983	12485	1.14	67.56	161	0.42
6	0.072	1.543	5104	6428	1.26	12455	463	26.9
7	0.033	2.0	1344	1672	1.24	4432	290	15.28

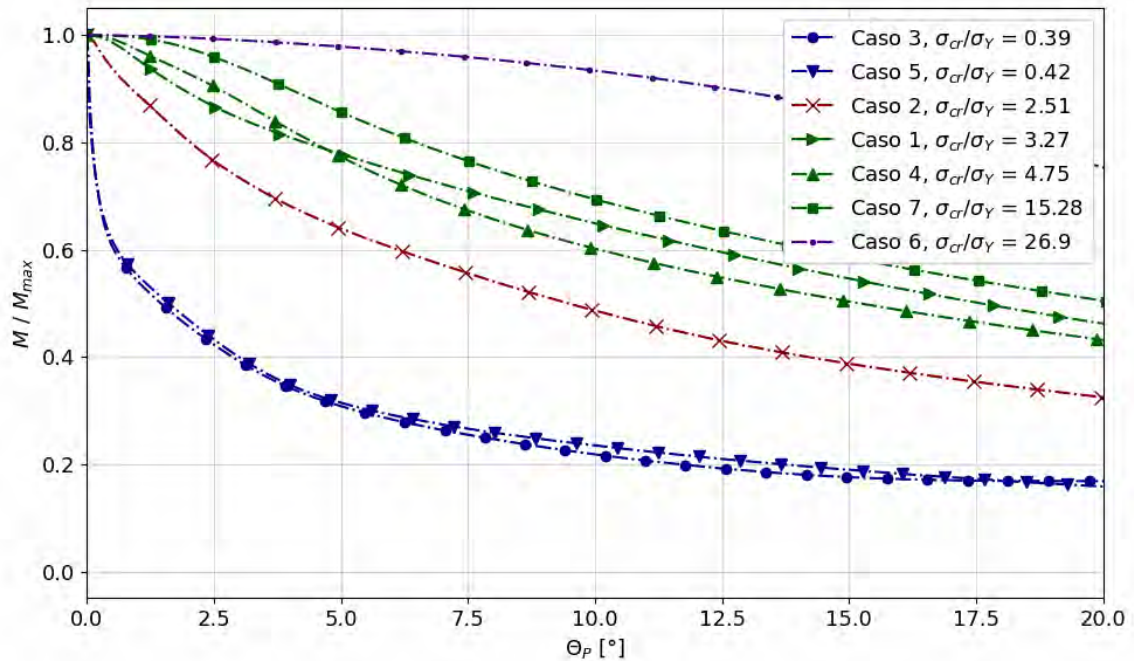


Figura 3.6: Clasificación de las CCBP normalizadas de acuerdo al parámetro σ_{cr}/σ_Y . TR-EMD: Casos 3 y 5 (azul). TR-ED: Caso 2 (rojo). TR-EM: Casos 1, 4 y 7 (verde). TR-EG: Casos 6 y 7 (morado).

del perfil es igual a 15 veces la altura de la sección ($L = 15b$). Analizando las características de las CCBP presentadas en la figura 3.6, se nota claramente que existe una correlación entre las CCBP y el parámetro σ_{cr}/σ_Y . Cuando este último es muy pequeño (casos 3 y 5), el perfil alcanza su resistencia final rápidamente (colapso súbito). Este fenómeno es consecuencia de la formación de las líneas bisagra, las cuales permiten a la bisagra plástica rotar prácticamente sin oposición. Generalmente, los perfiles que colapsan de esta manera son los tubos rectangulares con espesor de pared muy delgada (TR-EMD). Estos se caracterizan por presentar un colapso totalmente dominado por el pandeo local de la sección.

A medida que el valor de σ_{cr}/σ_Y aumenta (casos 1, 2, 4 y 7), el pandeo local influye menos sobre el colapso y la deformación plástica se produce en zonas localizadas con cierta continuidad. En estas zonas existe material deformado plásticamente que aún mantiene alta capacidad de disipación de energía. En las CCBP se puede observar que el colapso se produce de forma

gradual debido a un aumento de rigidez en la bisagra plástica (ver figura 3.6). Los perfiles que colapsan de esta manera son generalmente tubos rectangulares con espesor de pared delgada (TR-ED) o media (TR-EM). Se puede decir que el colapso de estos perfiles es influenciado tanto por el pandeo local de la sección como por la deformación plástica del material.

En la figura 3.6 se puede notar una diferencia importante entre la CCBP del caso 2 y las CCBP de los casos 1, 4 y 7. Aunque el parámetro σ_{cr}/σ_Y de estos últimos varía considerablemente (de 3.27 a 15.28), sus CCBP se mantienen cercanas. Por otro lado, en los casos 1 y 2 se observa un mayor distanciamiento a pesar que la variación de σ_{cr}/σ_Y es pequeña (de 2.51 a 3.27). Esto invita a pensar que existe un σ_{cr}/σ_Y límite entre los valores de los casos 1 y 2, y este puede servir para determinar el cambio de TR-ED a TR-EM. Esto último coincide con lo reportado por Kecman (1979), quien determinó que existe un cambio en las propiedades de colapso cuando σ_{cr}/σ_Y es igual a 3.

Cuando σ_{cr}/σ_Y tiene un valor alto (caso 6), el colapso es producto del aplastamiento de la sección lo cual indica que el perfil se comporta como un tubo rectangular con espesor de pared gruesa (TR-EG). Las CCBP de este tipo de tubos se caracterizan por mostrar una pequeña disminución de resistencia (ver figura 3.6). Otros parámetros como t/b y Z_p/Z_e también tienen correlación con el modo de colapso, sin embargo, esto se cumple solo en ciertos casos (tabla 3.4). El parámetro t/b mantiene correlación cuando el colapso es dominado por el pandeo local, es decir, cuando se trata de TR-EMD (los casos 2 y 7 tienen $t/b = 0.033$ pero colapsan de diferente manera). Con respecto a Z_p/Z_e , este no mantiene correlación con el modo de colapso de los TR-EMD y TR-ED.

De acuerdo a los resultados presentados, se puede concluir lo siguiente:

- El parámetro σ_{cr}/σ_Y puede servir para clasificar los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso. La clasificación se puede realizar con los siguientes valores límites:

1. TR-EMD: $\sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 1$

2. TR-ED: $1 < \sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 3$
3. TR-EM: $3 < \sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 25$
4. TR-EG: $25 < \sigma_{cr}/\sigma_Y$

El límite inferior de los TR-EG es cercano al valor de 30 mencionado por Kecman (1979).

- La influencia del pandeo local sobre el colapso se puede medir con el parámetro σ_{cr}/σ_Y . Cuanto mayor sea el valor de este, menos contribuirá el pandeo en el colapso y la reducción de resistencia será menor.

3.2. Comparación del ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo

En esta sección se analizó las propiedades del colapso de tubos rectangulares en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Las curvas características fueron determinadas mediante simulación numérica utilizando MEF. La nomenclatura empleada para designar a las curvas características es la siguiente. En primer lugar, se denota la longitud del tubo rectangular la cual puede ser igual a 10 veces la altura de la sección ($L = 10b$), 15 veces la altura de la sección ($L = 15b$), o 20 veces la altura de la sección ($L = 20b$). Posteriormente se menciona el tipo de ensayo empleado, el cual puede ser el ensayo de flexión de 3 puntos (EF3P) o el ensayo de flexión de viga en voladizo (EFVV). Por ejemplo, a la curva característica de un tubo rectangular con longitud igual a 15 veces la altura de la sección, analizado con un ensayo de flexión de 3 puntos, se le denomina 15b - EF3P.

Las curvas $M - \theta$ y CCBP de los casos investigados se presentan en las figuras 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, y 3.13. En todos los casos se puede notar claramente diferencias entre las curvas características de los ensayos de flexión, especialmente en las curvas $M - \theta$. Los resultados muestran que los momentos máximos del EFVV siempre son mayores a los del EF3P. La diferencia entre estos se debe principalmente a la fuerza transversal que ejerce el indentador

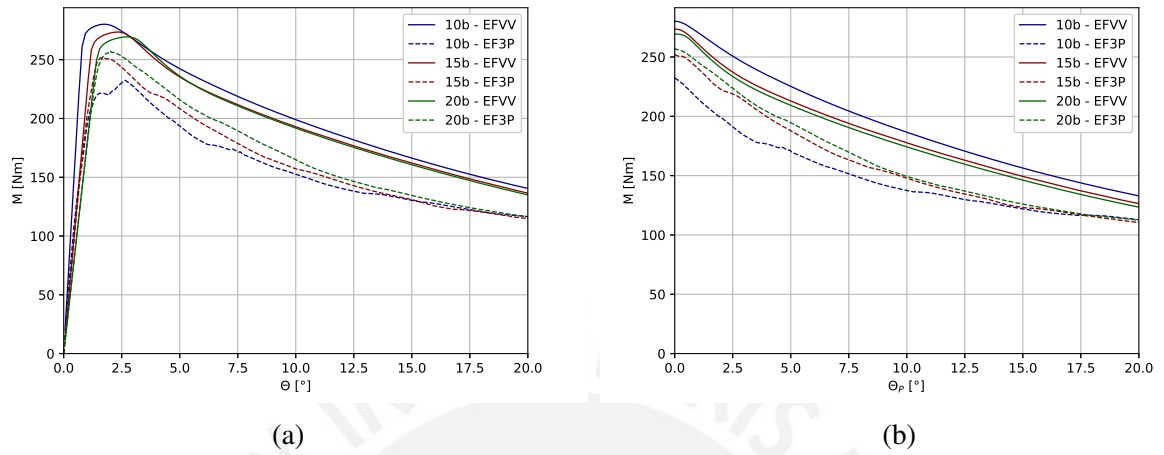


Figura 3.7: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 1 (TR-EM): $15 \text{ mm} \times 45 \text{ mm} \times 1.3 \text{ mm}$. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

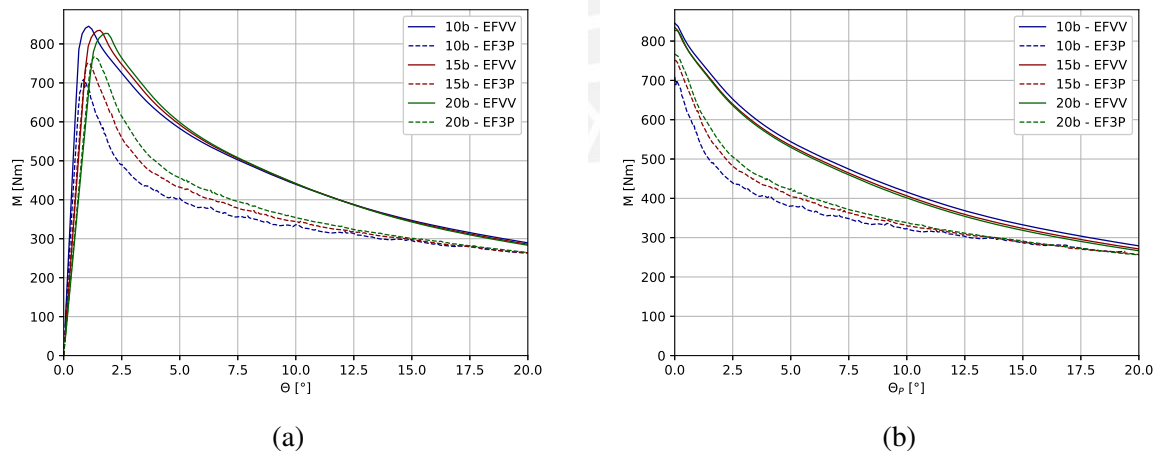


Figura 3.8: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 2 (TR-ED): $38.1 \text{ mm} \times 50.8 \text{ mm} \times 1.26 \text{ mm}$. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

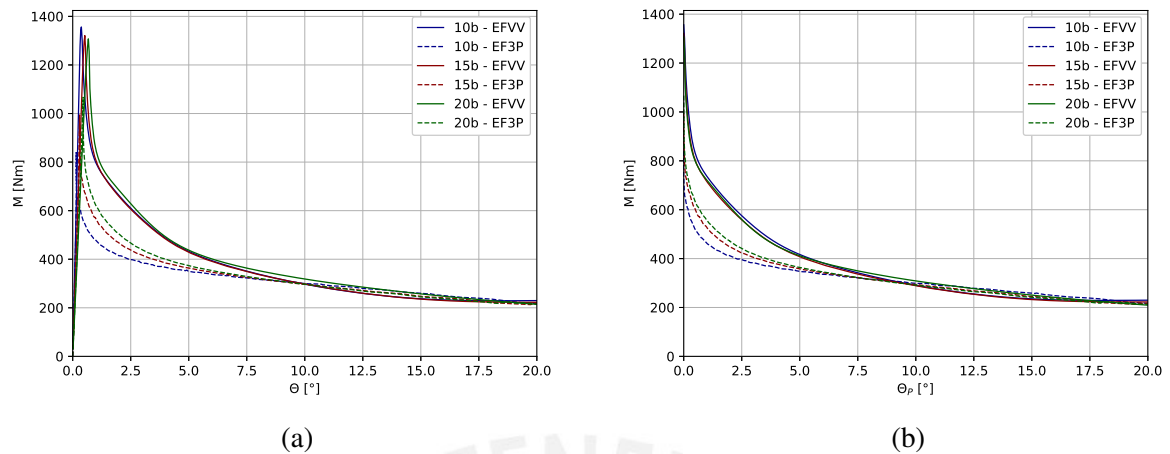


Figura 3.9: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 3 (TR-EMD): 87 mm \times 104 mm \times 0.813 mm. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

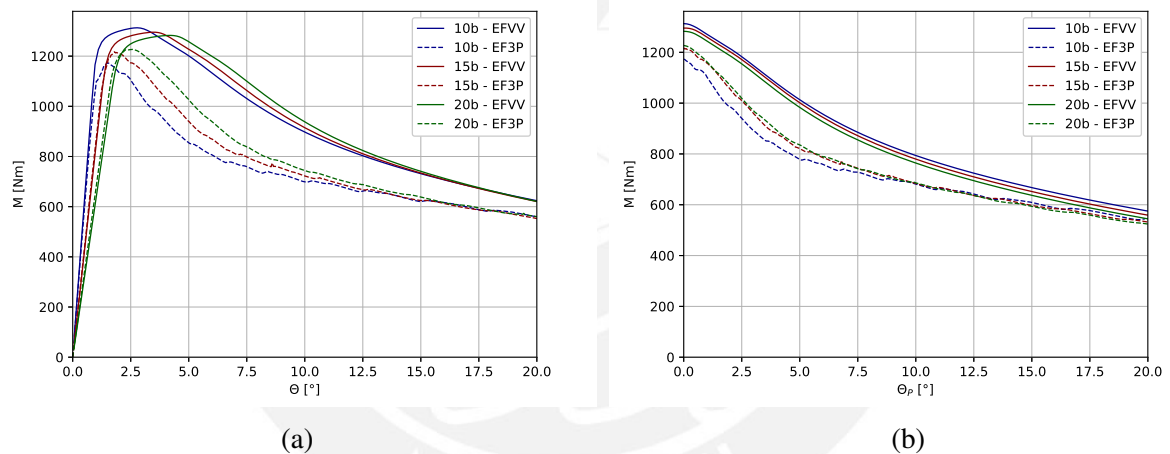


Figura 3.10: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 4 (TR-EM): 38.4 mm \times 38.4 mm \times 1.6 mm. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

sobre la bisagra plástica en el ensayo de flexión de 3 puntos. Considerando que el colapso es generalmente iniciado por el pandeo local de la sección, es natural pensar que las fuerzas transversales ocasionen que el perfil colapse prematuramente, y por lo tanto, se alcancen momentos menores. Este fenómeno también explica que la diferencia entre los momentos máximos sea mayor en tubos rectangulares con espesor de pared muy delgada, ya que este tipo de perfiles son más sensibles a cargas transversales en el pandeo (ver figuras 3.9 y 3.11). Así también, en la etapa de colapso se puede notar que la diferencia entre las curvas de ambos ensayos disminuye

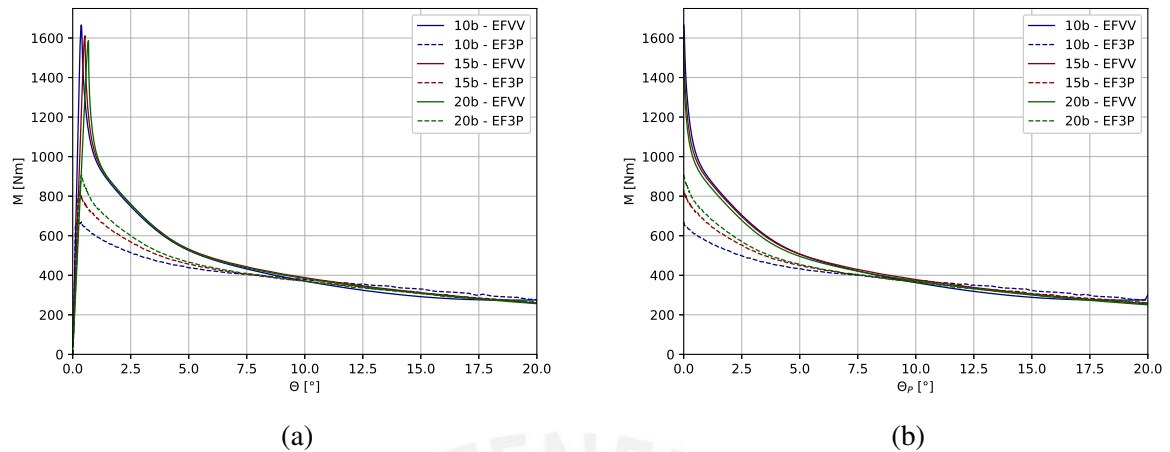


Figura 3.11: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 5 (TR-EMD): 103 mm \times 100 mm \times 0.813 mm. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

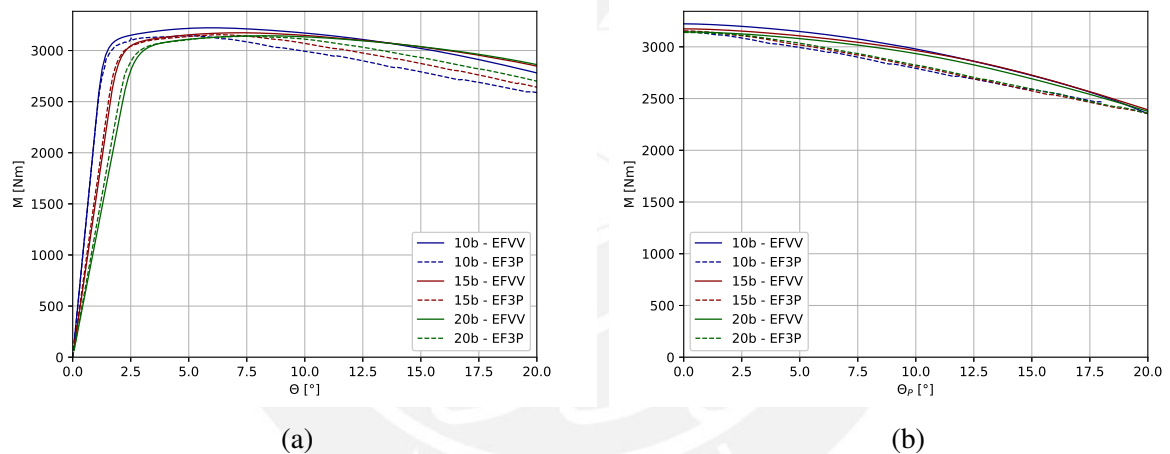


Figura 3.12: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 6 (TR-EG): 45.2 mm \times 29.3 mm \times 3.25 mm. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

y estas convergen a una resistencia final. Qué tan rápido disminuye la diferencia entre las curvas del EF3P y el EFVV depende de si el perfil colapsa de forma súbita o paulatina (ver figuras 3.7, 3.8, y 3.9).

Una diferencia importante entre las curvas características del EF3P y el EFVV es el efecto de la longitud del perfil sobre estas. En el caso del EFVV, el incremento de longitud genera que los momentos alcanzados sean cada vez menores. En cambio para el EF3P, los momentos alcanzados en el colapso aumentan junto con la longitud. Esta observación invita a pensar que

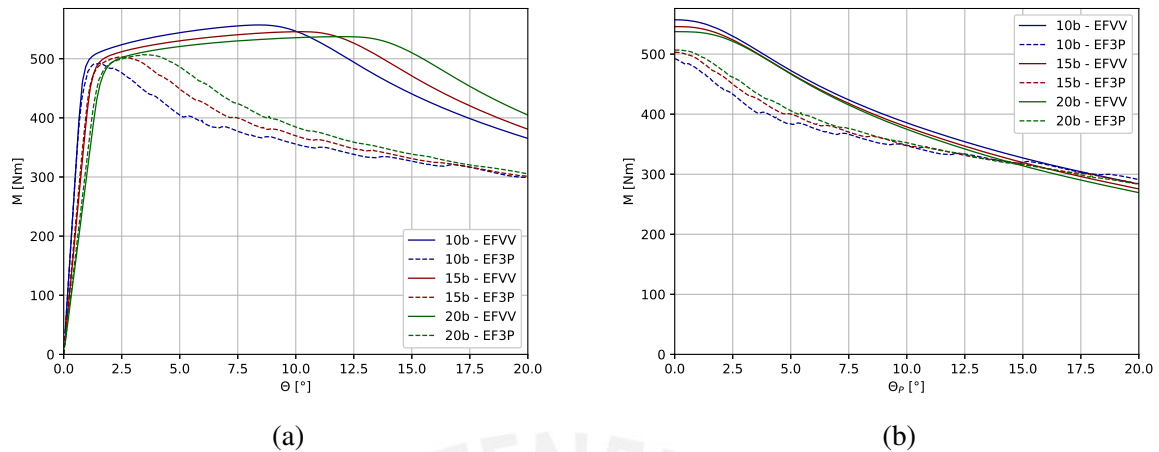
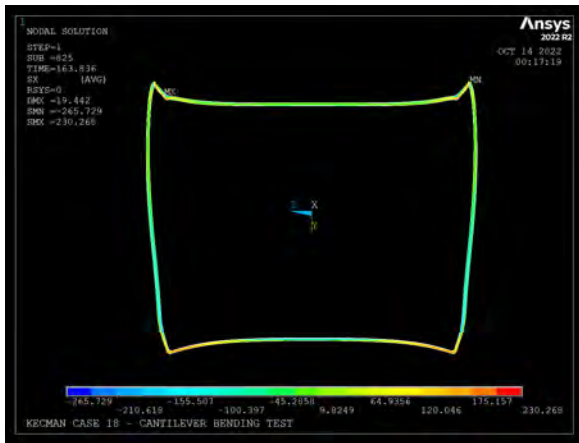


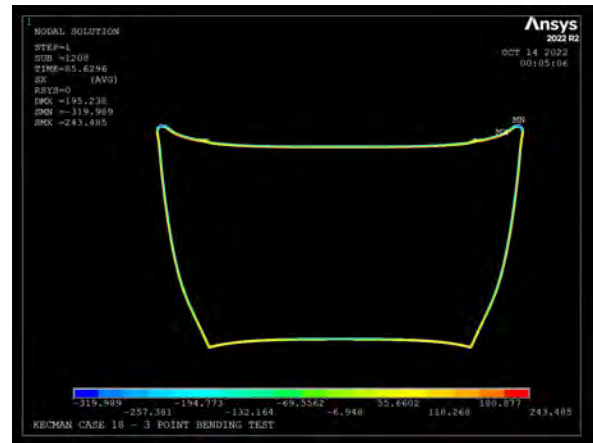
Figura 3.13: Análisis del colapso de TR en ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Caso 7 (TR-EM): 38 mm \times 19 mm \times 1.26 mm. (a) $M - \theta$; (b) CCBP.

las curvas características del EF3P y el EFV se asemejan a un límite inferior y superior, respectivamente; y además, estas convergen a una curva característica “verdadera” a medida que la longitud del perfil aumenta. Los resultados reportados demuestran que la diferencia entre las curvas características del EF3P y EFV dependen principalmente de la relación entre la carga de indentación y flexión. A medida que aumenta la longitud del perfil, predomina la carga de flexión y las curvas características de ambos ensayos se aproximan a la curva ideal de colapso por flexión pura.

En las figuras 3.7, 3.8, 3.10 y 3.13 se puede observar oscilaciones en las curvas características del modelo 10b - EF3P, lo cual quiere decir que se requiere al menos un modelo 15b - EF3P para obtener buenos resultados. En el caso del EFV, todos los modelos son capaces de predecir las curvas características correctamente. Esta diferencia entre los modelos EF3P y EFV se debe principalmente a problemas de convergencia ocasionados por la no-linealidad por contacto presente en las simulaciones EF3P. Por último, comparando las curvas $M - \theta$ y CCBP se puede observar que las curvas características obtenidas del EF3P y EFV son más parecidas en la etapa de colapso, es decir, las diferencias mayormente ocurren en la etapa elasto-plástica. Esto se debe a que la deformación por indentación influye principalmente en la formación de la bisagra plástica y la primera fase del colapso.



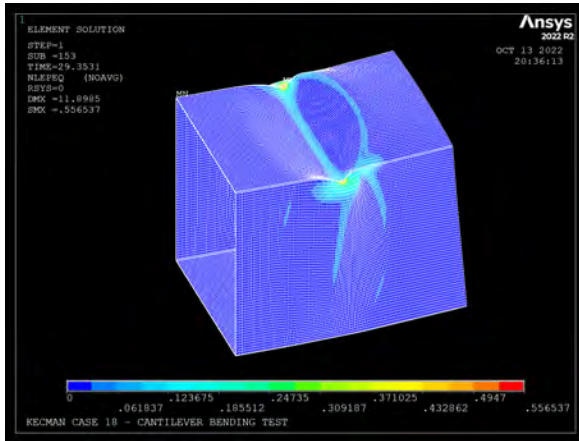
(a)



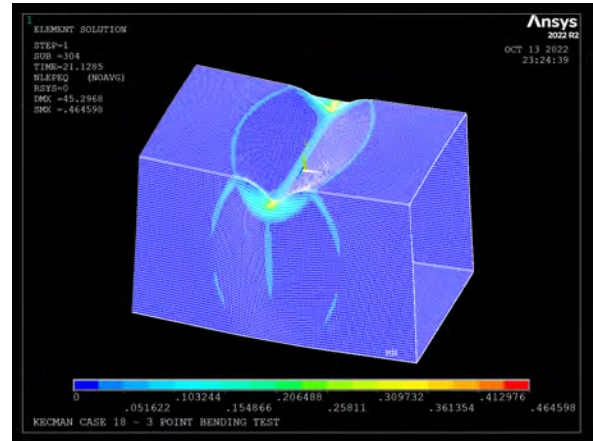
(b)

Figura 3.14: Comparación del esfuerzo en la dirección axial en la sección de las bisagras plásticas, $\theta = 25,4^\circ$. Caso 5 (TR-EMD): 103 mm \times 100 mm \times 0.813 mm. (a) EFVV; (b) EF3P.

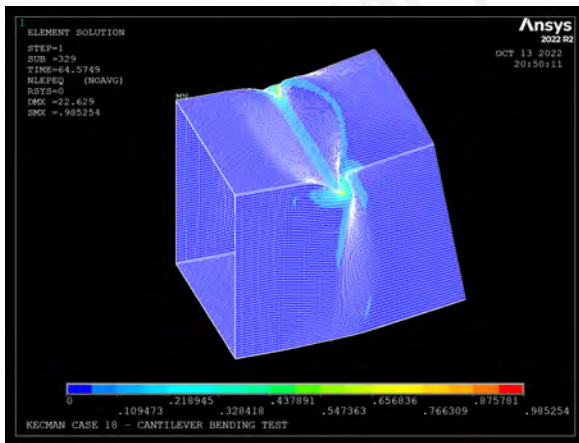
Cada tipo de tubo rectangular produce bisagras plásticas con distintas características en los ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Estas diferencias se pueden observar en los campos de deformación plástica de las simulaciones numéricas. En los TR-EMD, se puede notar que la sección del tubo es aplastado por el indentador del EF3P (figura 3.14), sin embargo, esto no parece influir sobre la resistencia final del perfil (figura 3.11). Con respecto a las bisagras plásticas, se observa deformaciones con patrones similares en ambos ensayos de flexión (figura 3.15). En el caso de los TR-ED y TR-EM, las bisagras plásticas muestran diferentes configuraciones en los ensayos de flexión, especialmente en la primera fase del colapso (figura 3.16). Al inicio del EFVV se puede observar zonas amplias de deformación continua, lo cual indica que se está produciendo un colapso por aplastamiento de la sección. A medida que se desarrolla el colapso y se deforma la sección, la carga crítica de la pared a compresión disminuye lo suficiente como para pandearse. La transición del colapso por aplastamiento al de pandeo se manifiesta con la aparición de las líneas bisagra (ver figuras 3.16a, 3.16c y 3.16e). En el caso del EF3P, el colapso inicia con zonas concentradas de deformación por indentación. Al igual que en el otro ensayo, las líneas bisagra aparecen durante el colapso debido al pandeo local de la sección (ver figuras 3.16b, 3.16d y 3.16f). Con respecto a los TR-EG, estos no presentan pandeo local durante todo el colapso (figura 3.17). La bisagra plástica solamente se deforma por aplastamiento e indentación en los EFVV y EF3P, respectivamente.



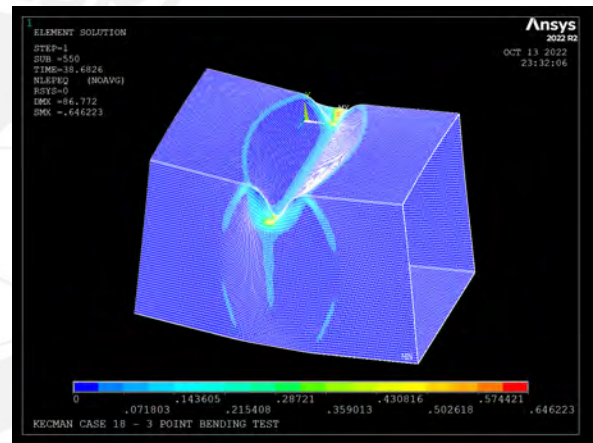
(a)



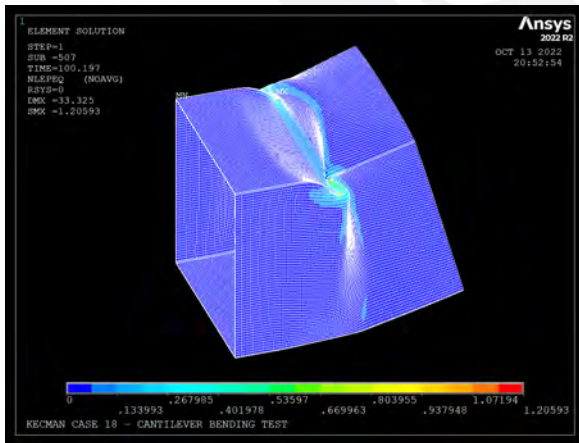
(b)



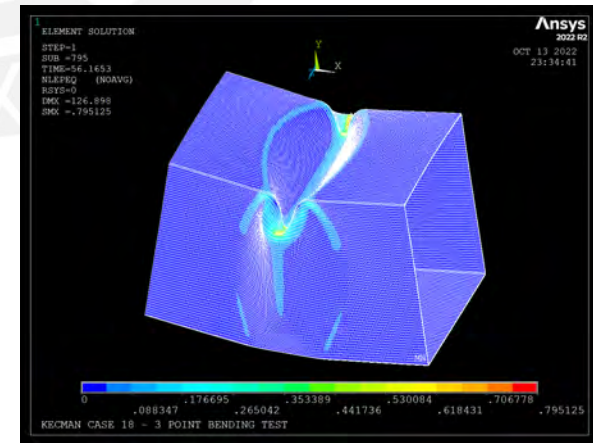
(c)



(d)

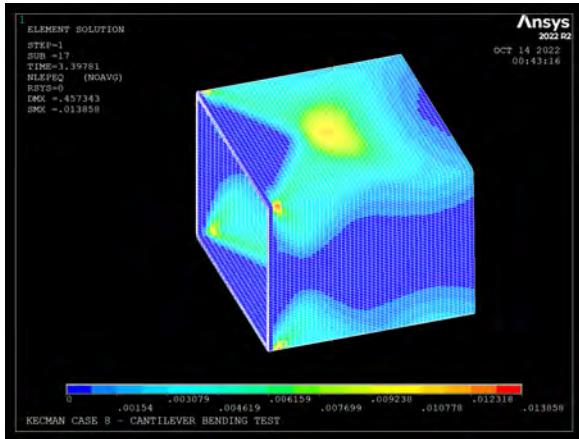


(e)

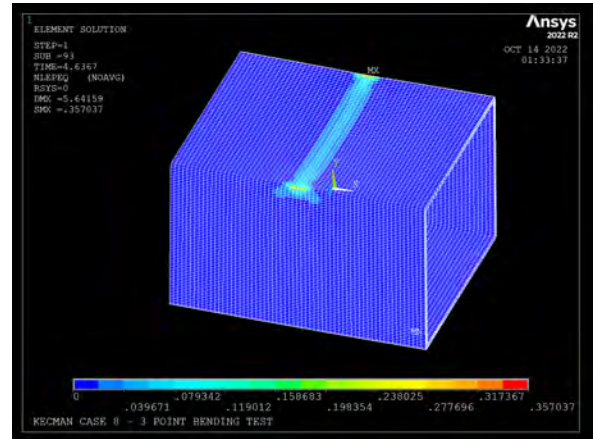


(f)

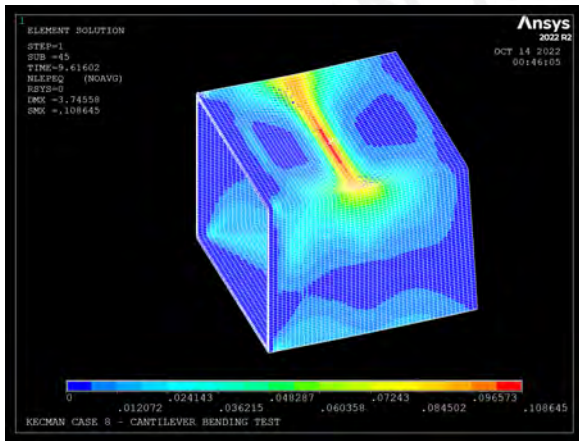
Figura 3.15: Comparación del campo de deformación plástica equivalente en las bisagras plásticas. Caso 5 (TR-EMD): 103 mm × 100 mm × 0.813 mm. (a) EFVV, $\theta = 4^\circ$; (b) EF3P, $\theta = 4^\circ$; (c) EFVV, $\theta = 10^\circ$; (d) EF3P, $\theta = 10^\circ$; (e) EFVV, $\theta = 15,5^\circ$; (f) EF3P, $\theta = 15,5^\circ$.



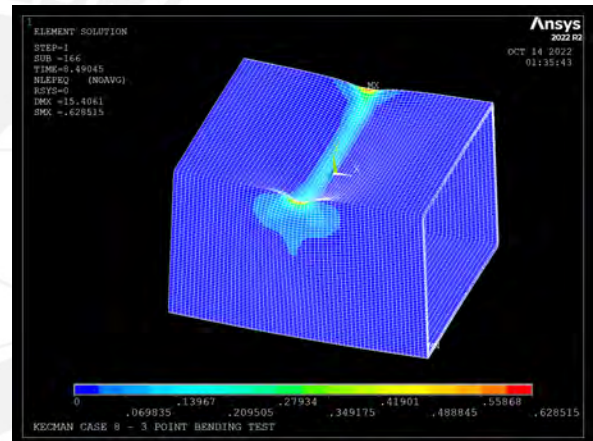
(a)



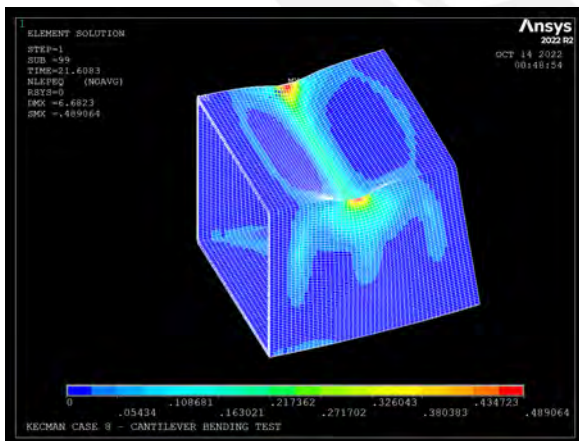
(b)



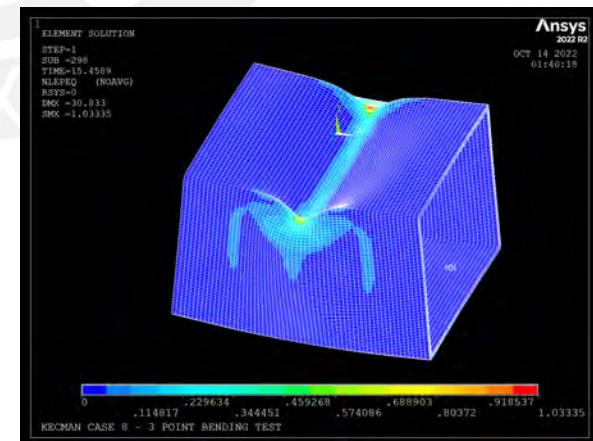
(c)



(d)

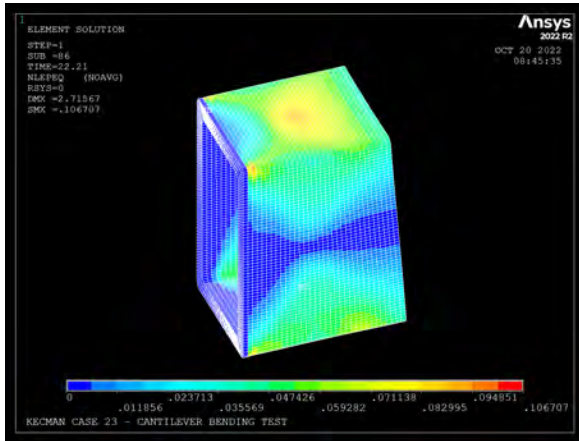


(e)

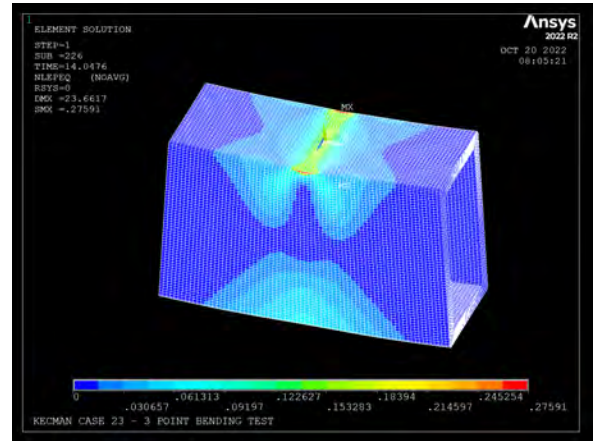


(f)

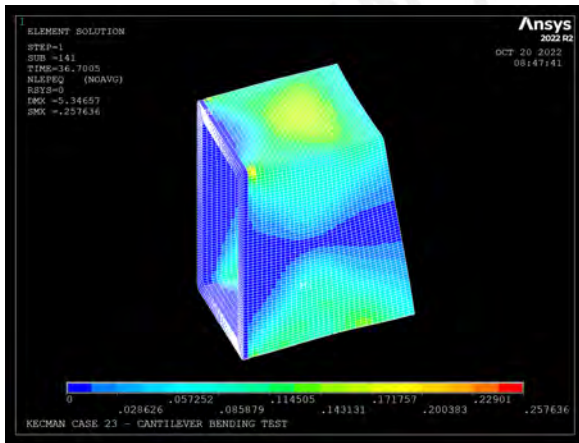
Figura 3.16: Comparación del campo de deformación plástica equivalente en las bisagras plásticas. Caso 2 (TR-ED): 38.1 mm × 50.8 mm × 1.26 mm. (a) EFVV, $\theta = 4^\circ$; (b) EF3P, $\theta = 4^\circ$; (c) EFVV, $\theta = 9^\circ$; (d) EF3P, $\theta = 9^\circ$; (e) EFVV, $\theta = 17^\circ$; (f) EF3P, $\theta = 17^\circ$.



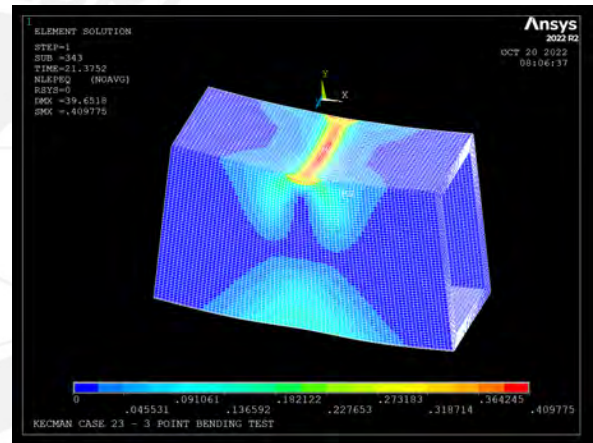
(a)



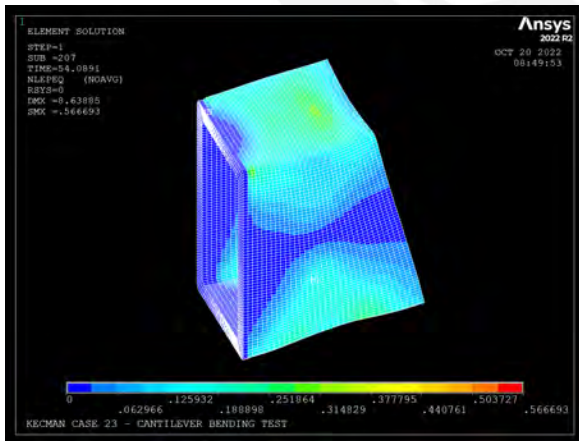
(b)



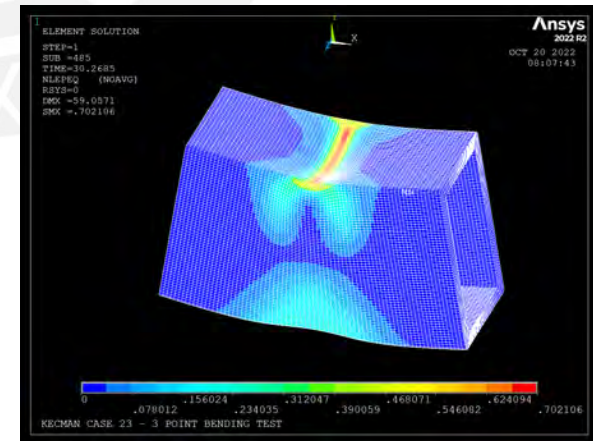
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.17: Comparación del campo de deformación plástica equivalente en las bisagras plásticas. Caso 6 (TR-EG): 45.2 mm × 29.3 mm × 3.25 mm. (a) EFVV, $\theta = 8^\circ$; (b) EF3P, $\theta = 8^\circ$; (c) EFVV, $\theta = 13^\circ$; (d) EF3P, $\theta = 13^\circ$; (e) EFVV, $\theta = 19^\circ$; (f) EF3P, $\theta = 19^\circ$.

Tabla 3.5: Métricas representativas de las CCBP para los ensayos de flexión de 3 puntos y viga en voladizo. Casos investigados en Kecman (1979, 1983) y Kim y Reid (2001).

Caso	Tipo de TR	$M_{maxEFVV}$ (Nm)	$U_{0^\circ-20^\circ EFVV}$ (J)	$M_{maxEF3P}$ (Nm)	$U_{0^\circ-20^\circ EF3P}$ (J)	$\%e_{M_{max}}$	$\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$
1	EM	273	63.68	251	55.31	8	13.13
2	ED	835	154.32	751	127.48	10	17.39
3	EMD	1320	123.47	993	110.95	24.77	10.13
4	EM	1295	291.58	1217	258.11	6	11.47
5	EMD	1611	156.1	829	139.25	48.54	10.78
6	EG	3173	1003.13	3154	972.61	0.59	3
7	EM	545	137	503	126.59	7.7	7.60

Para comparar las CCBP de los ensayos de flexión de forma cuantitativa es necesario utilizar métricas que representen las principales propiedades de colapso. En la tabla 3.5 se presentan el momento máximo y la energía disipada por la bisagra plástica para una rotación de 0° a 20° (este último es igual al área bajo la CCBP en el rango especificado). $M_{maxEFVV}$ y $M_{maxEF3P}$ son el momento máximo del EFVV y EF3P, respectivamente. $U_{0^\circ-20^\circ EFVV}$ y $U_{0^\circ-20^\circ EF3P}$ son la energía disipada por la bisagra plástica para una rotación de 0° a 20° , calculadas a partir de las CCBP del EFVV y EF3P. Adicionalmente, se incluyó el tipo de TR y el error relativo ($\%e$) entre las métricas de ambos ensayos (el EFVV fue considerado como referencia). Los errores relativos fueron calculados de la siguiente manera:

$$\%e_{M_{max}} = 100 \left(\frac{|M_{maxEFVV} - M_{maxEF3P}|}{M_{maxEFVV}} \right) \quad (3.9)$$

$$\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}} = 100 \left(\frac{|U_{0^\circ-20^\circ EFVV} - U_{0^\circ-20^\circ EF3P}|}{U_{0^\circ-20^\circ EFVV}} \right) \quad (3.10)$$

Los TR-EMD presentan un error relativo alrededor del 10 % para la energía disipada, y entre 25 % y 50 % para el momento máximo. Solo en los TR-EMD se cumple que $\%e_{M_{max}}$ es mayor a $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$. Esto se debe a la pequeña influencia del momento máximo sobre la energía disipada durante el colapso (las CCBP convergen en la primera fase). Con respecto al TR-ED, el error del momento máximo disminuye mientras que el de la energía disipada aumenta. El incremento

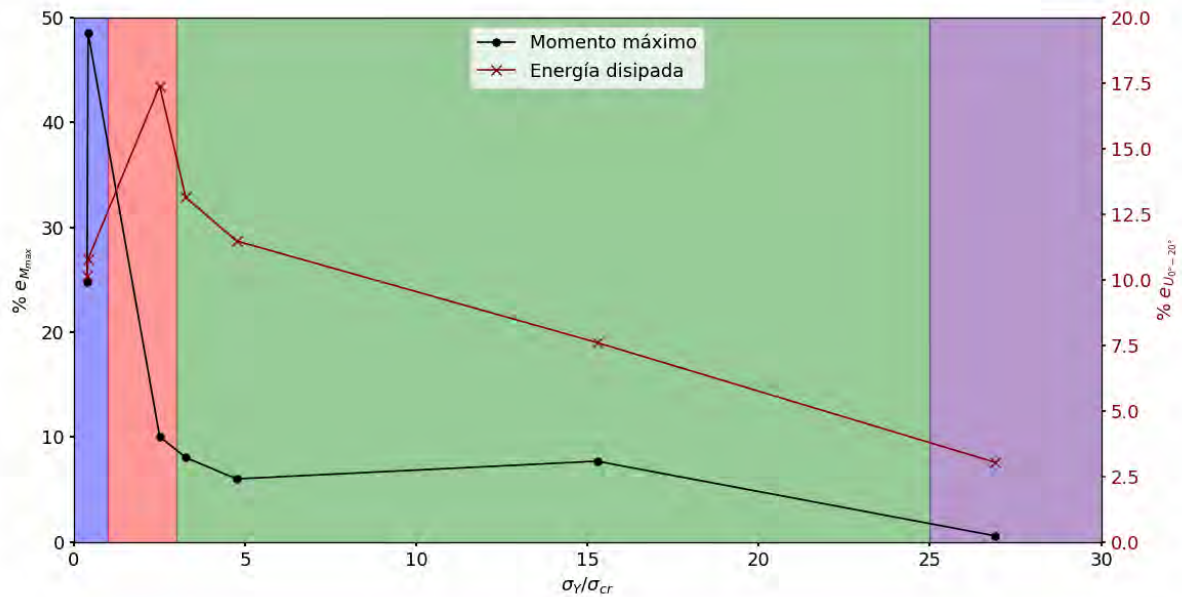


Figura 3.18: Errores relativos ($\%e_{M_{max}}$ y $\%e_{U_{0^{\circ}-20^{\circ}}}$) del ensayo de flexión de 3 puntos con respecto al de viga en voladizo. TR-EMD: Azul. TR-ED: Rojo. TR-EM: Verde. TR-EG: Morado.

de este último se debe a que el colapso de los TR-ED es más gradual, por lo tanto, la magnitud del momento máximo tiene una mayor influencia sobre la energía disipada. En los TR-EM y TR-EG se nota que el error relativo de la energía disipada disminuye a medida que σ_{cr}/σ_Y aumenta (figura 3.18). Este comportamiento no solo se observa en los TR-EM y TR-EG, sino también en los TR-ED. Con respecto al error del momento máximo, no en todos los casos se mantiene esta tendencia.

Los resultados reportados en esta sección sugieren lo siguiente:

- En el ensayo de flexión de 3 puntos, la fuerza transversal ejercida por el indentador provoca que el tubo rectangular colapse anticipadamente. Este fenómeno es el motivo por el cual las curvas características del ensayo de flexión de viga en voladizo son siempre superiores a las del ensayo de flexión de 3 puntos.
- A medida que aumenta la longitud del perfil, la carga de flexión predomina sobre la de indentación y las curvas características del ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo convergen.

- Debido a la presencia de no-linealidad por contacto, las simulaciones computacionales del ensayo de flexión de 3 puntos requieren al menos un modelo 15b - EF3P. En el caso del ensayo de viga en voladizo, todos los modelos obtienen buenos resultados.
- En los TR-EMD se observa campos de deformación plástica similares para ambos ensayos de flexión, siendo la única diferencia entre estas la forma de la sección en la parte final del colapso. Esto último no influye sobre la resistencia final del perfil.
- En los TR-ED y TR-EM se puede notar diferencias entre las bisagras plásticas de los ensayos de flexión, especialmente en la primera fase de colapso. En el EFVV el colapso inicia con zonas de deformación plástica continuas, mientras que en el EF3P se notan zonas concentradas de deformación por indentación. En ambos ensayos se observa la aparición de líneas bisagra durante el colapso, producto del pandeo local de la sección. Cuanto rota la bisagra plástica antes de manifestarse el pandeo, depende del valor de σ_{cr}/σ_Y .
- En los TR-EG, la bisagra plástica se deforma por aplastamiento e indentación en los EFVV y EF3P, respectivamente.
- La equivalencia entre las CCBP de los ensayos de flexión se puede evaluar con las métricas $\%e_{M_{max}}$ (error relativo del momento máximo) y $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ (error relativo a la energía disipada por la bisagra plástica para una rotación de 0° a 20°).
- Con respecto a $\%e_{M_{max}}$, se puede obtener un error alrededor del 10 % para los TR-ED. Los TR-EM presentan un error del 6 % al 8 %. En los TR-EMD el error es superior al 20 %, mientras que en los TR-EG el error es prácticamente nulo. En la mayoría de casos se observa que el error disminuye a medida que σ_Y/σ_{cr} aumenta.
- En el caso del $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$, el error en los TR-EMD y TR-ED son alrededor del 10 % y 17 %, respectivamente. Los TR-EM presentan un error del 8 % al 13 %. El error en los TR-EG es igual a 3 %. Salvo para los TR-EMD, se nota claramente que el error disminuye a medida que σ_Y/σ_{cr} aumenta.

3.3. Comparación de CCBP obtenidas mediante simulación numérica y teorías de colapso

En esta sección se comparó las CCBP construidas mediante simulación numérica y las teorías de colapso de Kecman, Wierzbicki, y Kim y Reid (figuras 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 y 3.25). Para los modelos de Wierzbicki y Kim y Reid, el momento máximo de colapso fue calculado con las fórmulas de la teoría de Kecman (ecuaciones 2.22, 2.24, 2.25, 2.26, y 2.28). En el caso de las simulaciones numéricas, se utilizaron los modelos 15b - EFVV y 15b - EF3P ya que estos presentan mejor rendimiento en términos de exactitud y costo computacional. Cabe resaltar que todas las teorías presentadas consideran que el colapso ocurre por flexión pura, por lo que sus resultados se deberían aproximar a los obtenidos con 15b - EFVV.

Las teorías de Kecman, Wierzbicki, y Kim y Reid tienen diferentes niveles de exactitud dependiendo del tipo de tubo rectangular. El modelo de Kecman es capaz de predecir adecuadamente las CCBP de los TR-ED y TR-EM (figuras 3.19, 3.20, 3.22 y 3.25). En el caso de los TR-EMD, Kecman sobrestima la rigidez de la bisagra plástica durante la primera fase del colapso (figuras 3.21 y 3.23). La causa del error es la relación lineal que se utiliza para corregir la primera fase del CCBP. Si en esta sección la pendiente del CCBP varía considerablemente, el ajuste lineal obtendrá resultados erróneos. Los TR-ED y TR-EM colapsan de forma gradual, lo cual favorece a la linealización de la fase inicial (justamente Kecman propuso la aproximación lineal al observar esta característica). En los TR-EMD el ajuste lineal acaba siendo perjudicial debido a la variación de la pendiente en la primera parte del CCBP. Además, considerando que el colapso de los TR-EMD se desarrolla principalmente en la primera fase, el error generado puede llegar a ser considerable. Con respecto a los TR-EG, la teoría de Kecman no es capaz de predecir el modo de colapso ya que este se basa en el pandeo local de la sección. No obstante, en la figura 3.24 se puede observar que la CCBP construida por la interpolación lineal del momento máximo y el momento correspondiente al ángulo de bloqueo obtiene resultados aceptables.

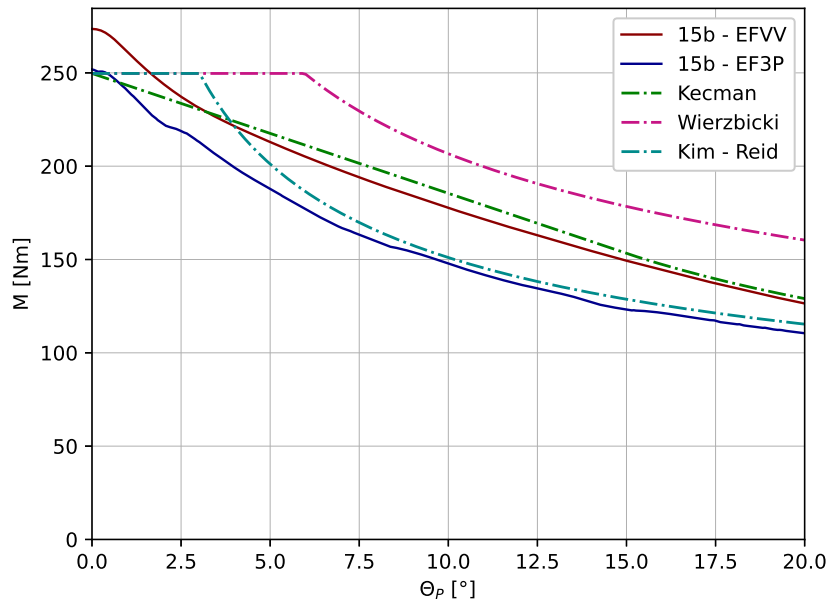


Figura 3.19: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 1 (TR-EM): 15 mm × 45 mm × 1.3 mm.

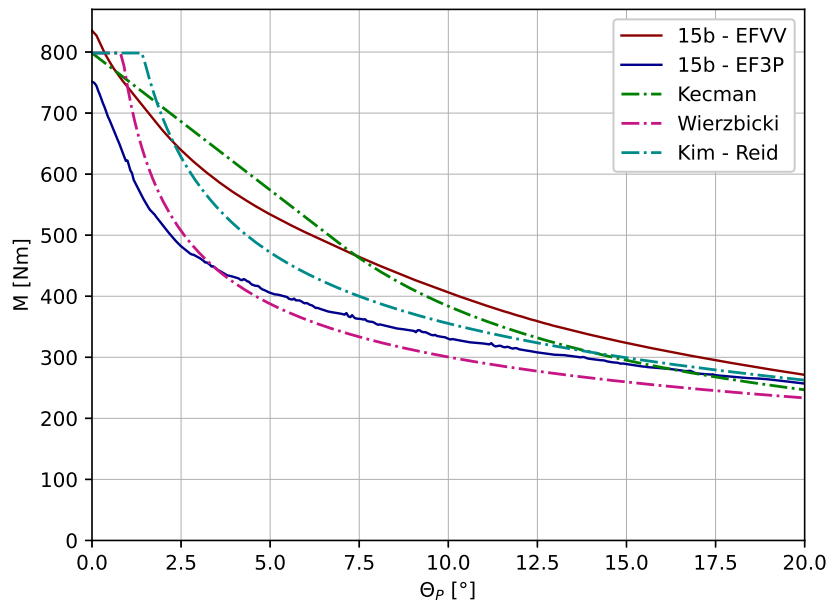


Figura 3.20: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 2 (TR-ED): 38.1 mm × 50.8 mm × 1.26 mm.

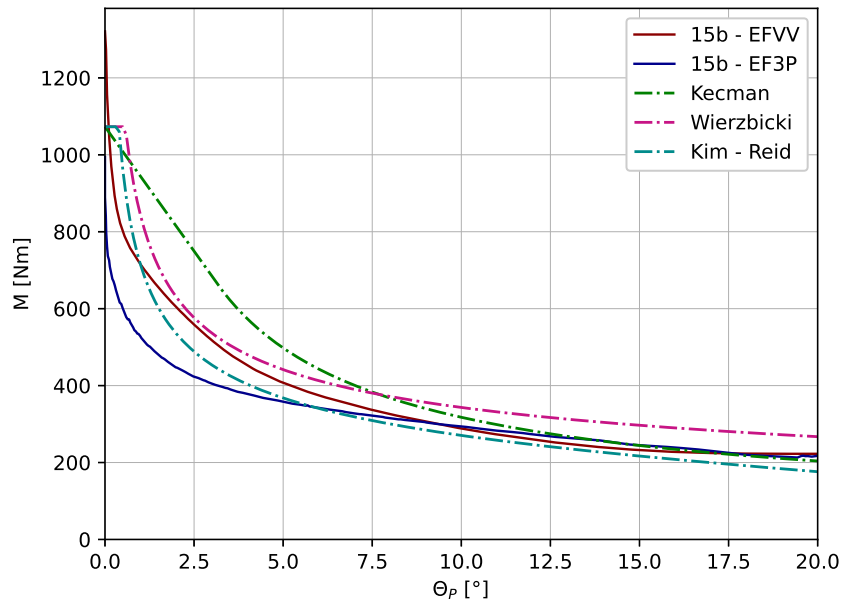


Figura 3.21: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 3 (TR-EMD): 87 mm × 104 mm × 0.813 mm.

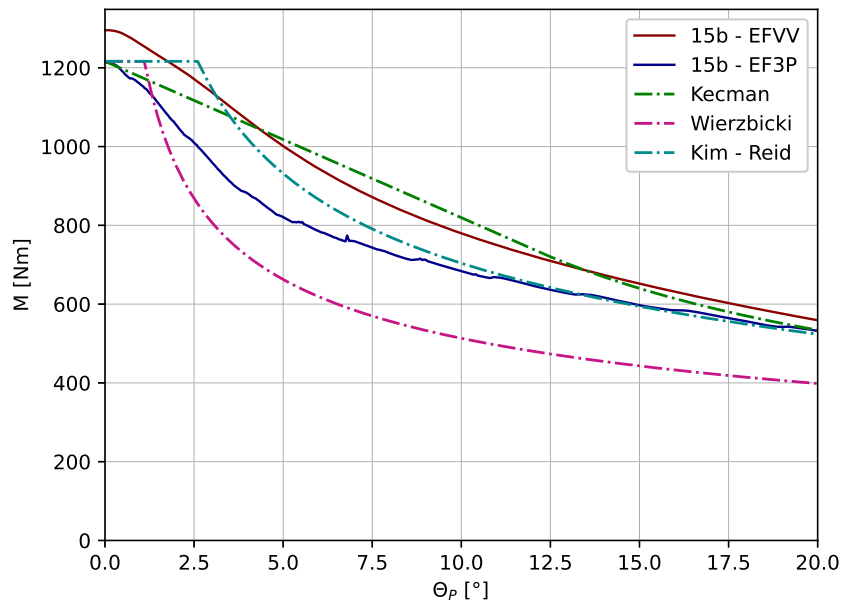


Figura 3.22: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 4 (TR-EM): 38.4 mm × 38.4 mm × 1.6 mm.

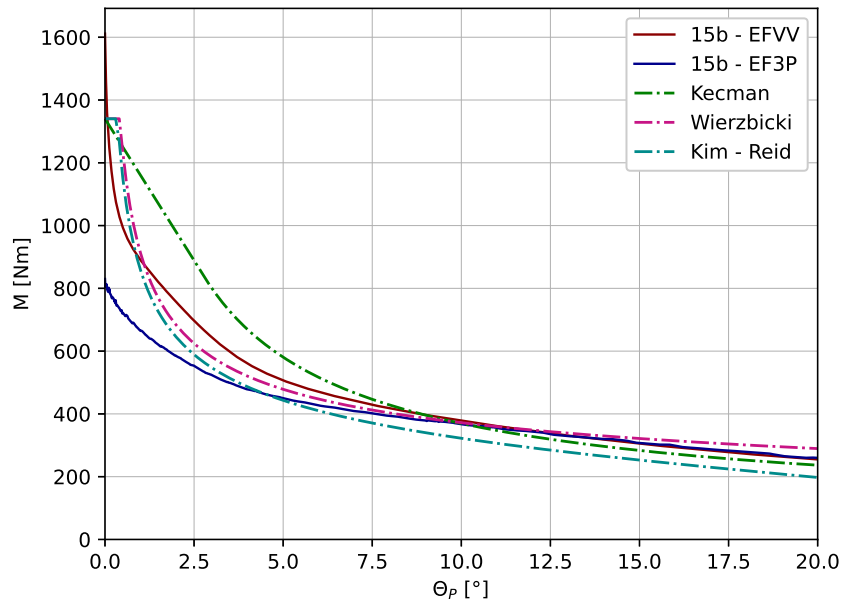


Figura 3.23: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 5 (TR-EMD): 103 mm × 100 mm × 0.813 mm.

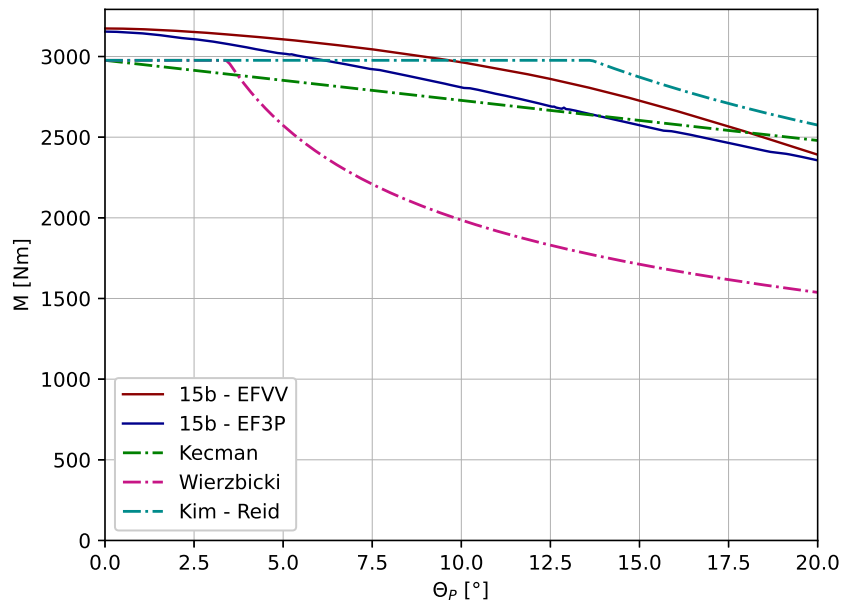


Figura 3.24: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 6 (TR-EG): 45.2 mm × 29.3 mm × 3.25 mm.

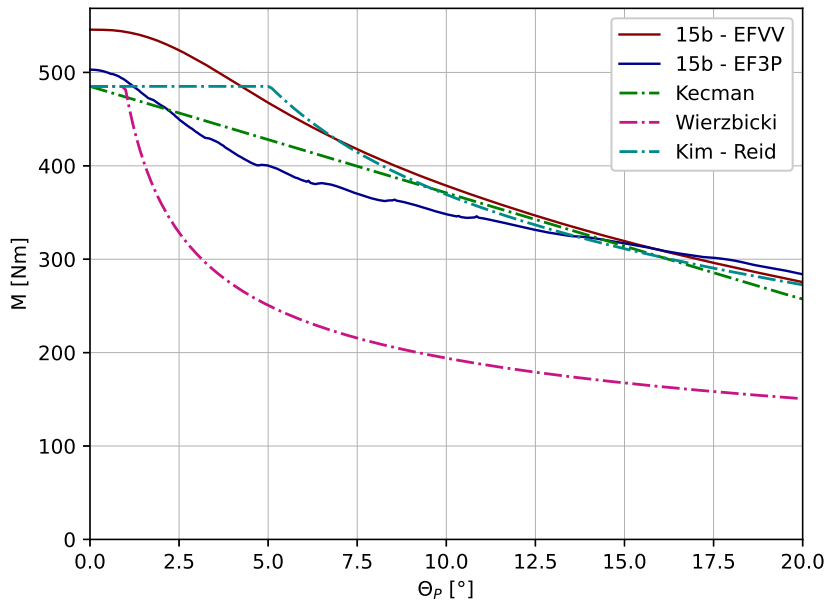


Figura 3.25: Comparación de CCBP construidos mediante MEF y teorías analíticas. Caso 7 (TR-EM): 38 mm × 19 mm × 1.26 mm.

El modelo de Wierzbicki fue desarrollado bajo dos importantes condiciones, el tubo debe ser de sección cuadrada y este debe deformarse de forma similar al colapso por carga axial. Con respecto a la primera condición, los tubos rectangulares se pueden aproximar a uno cuadrado con la siguiente ecuación (Wierzbicki y col., 1994a):

$$c = a + b \tag{3.11}$$

siendo a y b las longitudes de los lados del tubo rectangular, y c la longitud del lado del tubo cuadrado equivalente. La segunda condición se cumple cuando el perfil colapsa por pandeo local, es decir, cuando se trata de un TR-EMD. Esto se nota claramente en las figuras 3.21 y 3.23, donde se observa que existe correlación entre Wierzbicki y los modelos numéricos. Aunque la cuadratura de la sección también influye sobre la exactitud de los resultados, el factor más importante es el modo de colapso. Esto se puede observar en la figura 3.22, donde el CCBP no presenta ninguna correlación con los modelos numéricos a pesar de tratarse de un tubo cuadrado.

La configuración de la bisagra plástica y el mecanismo de colapso del modelo de Kim y Reid es bastante similar al de Kecman. La principal diferencia entre estos es el comportamiento de las líneas bisagra GA y EA . En el modelo de Kim y Reid se considera que GA y EA se dividen en líneas giratorias y forman un par de superficies cónicas y una toroidal de deformación continua. La inclusión de zonas de deformación continua en las bisagras plásticas tiene diferentes efectos para los distintos tipos de perfiles investigados. En los TR-EMD (figuras 3.21 y 3.23), el modelo de Kim y Reid obtiene mejores resultados que Kecman. En específico, la mejora se observa en la primera etapa de colapso. En los TR-ED y TR-EM, los resultados del modelo de Kim y Reid se acercan más a los del 15b-EF3P (figuras 3.19, 3.20, 3.22 y 3.25). En los TR-EG, Kim y Reid obtiene mejores resultados que Kecman, específicamente, en la segunda fase del colapso. También, este es el único caso en que el modelo de Kim y Reid predice CCBP con momentos de mayor magnitud que los de Kecman (ve figura 3.24). Todas estas observaciones indican que el modelo de Kim y Reid es capaz de modelar las zonas de deformación continua que ocurren en los TR-EG hasta cierto punto. A medida que la deformación se concentra en líneas bisagra, Kim y Reid subestima la energía disipada en GA y EA .

En la tabla 3.6 se presenta las métricas $\%e_{M_{max}}$ y $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ de las teorías de colapso. Nuevamente, el modelo 15b - EFVV fue utilizado como referencia. El error relativo del momento máximo del modelo de Kecman es $\%e^k_{M_{max}}$. Las métricas $\%e^k_{U_{0^\circ-20^\circ}}$, $\%e^w_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ y $\%e^{kr}_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ son los errores relativos de energía disipada correspondiente a los modelos de Kecman, Wierzbicki, y Kim y Reid. Los valores reportados en la tabla 3.6 fueron calculados con las siguientes ecuaciones:

$$\%e^k_{M_{max}} = 100 \left(\frac{|M_{maxEFVV} - M^k_{max}|}{M_{maxEFVV}} \right) \quad (3.12)$$

$$\%e^k_{U_{0^\circ-20^\circ}} = 100 \left(\frac{|U_{0^\circ-20^\circ EFVV} - U^k_{0^\circ-20^\circ}|}{U_{0^\circ-20^\circ EFVV}} \right) \quad (3.13)$$

$$\%e^w_{U_{0^\circ-20^\circ}} = 100 \left(\frac{|U_{0^\circ-20^\circ EFVV} - U^w_{0^\circ-20^\circ}|}{U_{0^\circ-20^\circ EFVV}} \right) \quad (3.14)$$

Tabla 3.6: Comparación de métricas representativas de las CCBP para los modelos de Kecman, Wierzbicki, y Kim y Reid. Casos investigados en Kecman (1979, 1983) y Kim y Reid (2001).

Caso	σ_{cr}/σ_Y	Tipo de TR	$\%e^k_{M_{max}}$	$\%e^k_{U_{0^\circ-20^\circ}}$	$\%e^w_{U_{0^\circ-20^\circ}}$	$\%e^{kr}_{U_{0^\circ-20^\circ}}$
1	3.27	EM	8.79	1.3	14.22	8.68
2	2.51	ED	4.43	1.14	20.37	6.97
3	0.39	EMD	18.78	15.95	15	7.21
4	4.75	EM	6.10	0.63	28.82	6.71
5	0.42	EMD	16.82	8.33	0.38	12.42
6	26.9	EG	6.2	5.93	25.76	0.26
7	15.28	EM	11	6.15	42.37	3.07

$$\%e^{kr}_{U_{0^\circ-20^\circ}} = 100 \left(\frac{|U_{0^\circ-20^\circ}^{EFVV} - U^{kr}_{0^\circ-20^\circ}|}{U_{0^\circ-20^\circ}^{EFVV}} \right) \quad (3.15)$$

siendo M^k_{max} el momento máximo del modelo de Kecman. $U^k_{0^\circ-20^\circ}$, $U^w_{0^\circ-20^\circ}$, y $U^{kr}_{0^\circ-20^\circ}$, son la energía disipada correspondiente a los modelos de Kecman, Wierzbicki, y Kim y Reid.

En el caso de $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$, el modelo de Kecman es la mejor teoría cuando el parámetro σ_{cr}/σ_Y se encuentra, aproximadamente, en el rango de 1 a 12 (este rango corresponde a TR-ED y TR-EM con σ_{cr}/σ_Y menores). Cuando σ_{cr}/σ_Y supera este rango, el error del modelo de Kim y Reid es mucho menor al de Kecman. En los TR-EMD, el modelo de Wierzbicki obtiene mejores resultados que Kecman; no obstante, el error alcanzado puede variar de 0.3 a 15. Con respecto a la métrica $\%e^k_{M_{max}}$, solo el TR-E obtiene un error menor al 5%.

En base a los resultados mostrados, se puede concluir lo siguiente:

- En lo que respecta al calculo de momento máximo, el modelo de Kecman obtiene resultados aceptables para los TR-ED, TR-EM y TR-EG. No obstante, el error obtenido es demasiado alto como para reemplazar a los modelos numéricos.
- Para los TR-EMD, el modelo de Wierzbicki presenta los mejores resultados entre las teorías de colapso. Sin embargo, este se debe usar con precaución debido a los altos valores de $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ alcanzados.

- El modelo de Kecman presenta los mejores resultados en el caso de los TR-ED y TR-EM. Para TR-EMD, el ajuste lineal empleado en la primera fase no modela correctamente el colapso. En el caso de TR-EG, se obtienen resultados aceptables aproximando las CCBP mediante interpolación lineal del momento máximo y el momento correspondiente al ángulo de bloqueo. En lo que respecta al cálculo de energía disipada, el modelo de Kecman puede reemplazar a los modelos numéricos cuando σ_{cr}/σ_Y se encuentra, aproximadamente, en el rango de 1 a 12 (este último se obtuvo por interpolación lineal).
- El modelo de Kim y Reid es capaz de modelar con cierta exactitud la deformación plástica presente en el colapso de TR-EG. Para σ_{cr}/σ_Y mayores a 12, el modelo de Kim y Reid puede reemplazar los modelos numéricos.



Capítulo IV

Conclusiones

En la presente tesis se comparó por primera vez las curvas características de bisagra plástica obtenidas del ensayo de flexión de 3 puntos y viga en voladizo, para determinar en que casos se pueden obtener curvas características equivalentes. Las curvas características fueron calculadas utilizando simulaciones computacionales con el software de análisis por elementos finitos ANSYS 2022 R2. Los resultados demostraron que la diferencia entre las curvas características depende principalmente del parámetro adimensional σ_{cr}/σ_Y . Así también, se comparó las curvas características generadas con modelos analíticos y numéricos para determinar en cuáles casos conviene utilizar las teorías de colapso. En ambos análisis se utilizaron métricas para poder establecer criterios de evaluación cuantitativos. Las conclusiones presentadas en esta tesis permitirán a los diseñadores de carrocerías escoger de manera confiable el mejor método para generar curvas características de bisagra plástica.

En conclusión, los resultados mostrados en la presente investigación permite afirmar que:

1. Es posible clasificar a los tubos rectangulares de acuerdo a su modo de colapso con el parámetro adimensional σ_{cr}/σ_Y . Las siguientes categorías y valores límite fueron establecidos:

a) TR-EMD: $\sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 1$

b) TR-ED: $1 < \sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 3$

c) TR-EM: $3 < \sigma_{cr}/\sigma_Y \leq 25$

d) TR-EG: $25 < \sigma_{cr}/\sigma_Y$

2. En los TR-EMD se observan bisagras plásticas con líneas bisagra bien definidas desde el inicio del colapso. Esta disposición permite a la bisagra plástica rotar prácticamente sin oposición, lo cual se manifiesta en el CCBP como un colapso súbito. Ambos ensayos de flexión obtienen resultados muy parecidos.
3. En los TR-ED el colapso se produce de manera más gradual producto del aumento de rigidez en la bisagra plástica. Esto último ocurre debido a la presencia de material con alta capacidad de disipación de energía en la primera fase del colapso. Con respecto a los ensayos de flexión, se pueden identificar diferentes tipos de deformación al inicio del colapso. En el ensayo de viga en voladizo se producen zonas de deformación plástica continuas, mientras que en el ensayo de 3 puntos se generan zonas concentradas de deformación por indentación. En ambos casos se observa la aparición de líneas bisagra durante el colapso producto del pandeo local de la sección.
4. Comparado con los TR-ED, los TR-EM presentan zonas de deformación plástica más extensas en las bisagras plásticas. Además estas se manifiestan durante una mayor parte del colapso, lo cual conlleva que aumente la rigidez de la bisagra plástica en las CCBP.
5. El colapso de los TR-EG se produce por el aplastamiento de la sección. Este puede ocurrir debido a deformación por flexión en el ensayo de viga en voladizo, o deformación por indentación en el ensayo de 3 puntos. Comparado con los otros perfiles, la resistencia de los TR-EG disminuye muy poco durante el colapso.
6. En general, la diferencia entre las CCBP de los ensayos de flexión es causada por la carga transversal que ejerce el indentador sobre la bisagra plástica en el ensayo de flexión de 3 puntos. Esta carga provoca que se alcancen momentos máximos de menor magnitud debido al colapso prematuro del perfil.

7. Las CCBP siempre convergen a una misma resistencia sin importar el tipo de ensayo de flexión empleado. Esto quiere decir que la resistencia final no depende de la forma en que ocurre el colapso, si no es una propiedad del perfil.
8. La equivalencia entre las CCBP de los ensayos de flexión se puede evaluar con las métricas $\%e_{M_{max}}$ y $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$. Para $\%e_{M_{max}} \leq 10\%$ y $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}} \leq 15\%$, los TR-EM y TR-EG obtienen CCBP equivalentes con el ensayo de flexión de 3 puntos. En general, a medida que aumenta el valor de σ_{cr}/σ_Y la correlación entre las CCBP mejora.
9. En el caso del TR-ED, se puede mejorar los valores de $\%e_{M_{max}}$ y $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ aumentando la longitud del perfil. Para los TR-EMD no se pueden obtener CCBP equivalentes debido a que el $\%e_{M_{max}}$ es muy alto.
10. Para $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}} \leq 5\%$, el modelo de Kecman puede reemplazar a los modelos numéricos cuando σ_{cr}/σ_Y se encuentra, aproximadamente, en el rango de 1 a 12 (TR-ED y TR-EM menores). Si se considera aceptable $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}} \leq 7\%$, se puede utilizar el modelo de Kecman para todos lo TR-ED, TR-EM y TR-EG.
11. Para los TR-EMD, el modelo de Wierzbicki es una buena alternativa a los modelos numéricos. Si bien se puede alcanzar valores de $\%e_{U_{0^\circ-20^\circ}}$ hasta del 15 % con Wierzbicki, el costo computacional de cada simulación es demasiado alto como para realizar estudios con múltiples análisis.
12. Para σ_{cr}/σ_Y mayores a 12, el modelo de Kim y Reid obtiene mejores resultados que el modelo de Kecman. Sin embargo, se prefiere utilizar este último debido a su facilidad de cálculo.
13. En general, la teoría de Kecman no es capaz de predecir el momento máximo con $\%e_{M_{max}} \leq 5\%$. Una posible solución es simular la deformación del perfil con modelos numéricos hasta alcanzar el momento máximo, para luego continuar con los modelos analíticos recomendados en la etapa de colapso.

Referencias

- Abramowicz, W., & Wierzbicki, T. (1989). Axial crushing of multicorner sheet metal columns. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 56(1), 113-120. <https://doi.org/10.1115/1.3176030>
- AISI S100. (2016). North American specification for the design of cold-formed steel structural members.
- AS/NZS 4600. (2005). Cold-Formed Steel Structures.
- Baroutaji, A., Sajjia, M., & Olabi, A. G. (2017). On the crashworthiness performance of thin-walled energy absorbers: Recent advances and future developments. *Thin-Walled Structures*, 118, 137-163. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.05.018>
- Bois, P. D., Chou, C. C., Fileta, B. B., King, A. I., & Mahmood, H. F. (2004). *Vehicle crashworthiness and occupant protection*. <https://doi.org/10.1121/1.2783205>
- Chen, D. (2016). *Crush Mechanics of Thin-Walled Tubes*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b19257>
- Chen, D., & Masuda, K. (2016). Rectangular hollow section in bending: Part I – Cross-sectional flattening deformation. *Thin-Walled Structures*, 106, 495-507. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.12.019>
- Chen, W., Wierzbicki, T., & Santosa, S. (2002). Bending collapse of thin-walled beams with ultralight filler: Numerical simulation and weight optimization. *Acta Mechanica*, 153(3-4), 183-206. <https://doi.org/10.1007/BF01177451>
- Chilver, A. H. (1953). The stability and strength of thin-walled steel struts. *The engineer*, 196(5089), 180-183.

- Chou, S., & Rhodes, J. (1997). Review and compilation of experimental results on thin-walled structures. *Computers & Structures*, 65(1), 47-67. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(96\)00337-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00337-9)
- Cimpoeru, S., & Murray, N. (1993). The large-deflection pure bending properties of a square thin-walled tube. *International Journal of Mechanical Sciences*, 35(3-4), 247-256. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(93\)90079-A](https://doi.org/10.1016/0020-7403(93)90079-A)
- Coan, J. M. (1951). Large-Deflection Theory for Plates With Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression. *Journal of Applied Mechanics*, 18(2), 143-151. <https://doi.org/10.1115/1.4010268>
- Corona, E., & Vaze, S. P. (1996). Buckling of elastic—plastic square tubes under bending. *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(7), 753-775. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00081-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00081-X)
- Dawson, R. G., & Walker, A. C. (1972). A proposed method for the design of thin-walled beams which buckle locally. *The Structural Engineer*, 50(2), 95-105.
- Euler, L. (1933). De curvis elasticis, Lausanne and Geneva: Bousquet, 1744. *English Trans.: WA Oldfather, CA Elvis, DM Brown, Leonhard Euler's elastic curves, Isis*, 20, 72-160.
- Garrett, T., Newton, K., & Steeds, W. (2000). Vehicle safety. En *Motor Vehicle* (pp. 924-955). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-075064449-5/50037-7>
- Glassbrenner, D. (2012). *An Analysis of Recent Improvements to Vehicle Safety* (inf. téc.). National Highway Traffic Safety Administration.
- Hashemi, S. R., Walton, A. C., & Kayvantash, K. (2009). Strength of Super-Structure UN-ECE R66 Rollover Approval of Coaches based on Thin-Walled Framework Structures. *International Journal of Vehicle Structures and Systems*, 1(4), 78-84. <https://doi.org/10.4273/ijvss.1.4.04>
- Huang, Z., & Zhang, X. (2018). Three-point bending collapse of thin-walled rectangular beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 144, 461-479. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.06.001>

- Huang, Z., & Zhang, X. (2019). Three-point bending of thin-walled rectangular section tubes with indentation mode. *Thin-Walled Structures*, 137(November 2018), 231-250. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.01.015>
- Huang, Z., Zhang, X., & Fu, X. (2020). On the bending force response of thin-walled beams under transverse loading. *Thin-Walled Structures*, 154, 106807. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106807>
- Karliński, J., Ptak, M., Działak, P., & Rusiński, E. (2014). Strength analysis of bus superstructure according to Regulation No. 66 of UN/ECE. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 14(3), 342-353. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2013.12.001>
- Kecman, D. (1997). An engineering approach to crashworthiness of thin-walled beams and joints in vehicle structures. *Thin-Walled Structures*, 28(3-4), 309-320. [https://doi.org/10.1016/s0263-8231\(97\)00049-9](https://doi.org/10.1016/s0263-8231(97)00049-9)
- Kecman, D., & Suthurst, G. D. Theoretical determination of the maximum bending strength in the car body components. En: *International Conference on Vehicle Structures held at Cranfield Institute of Technology*. 1984, 53-61.
- Kecman, D. (1979). *Bending collapse of rectangular section tubes in relation to the bus roll over problem* (Ph. D. Thesis). Cranfield Institute of Technology.
- Kecman, D. (1983). Bending collapse of rectangular and square section tubes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 25(9-10), 623-636. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(83\)90072-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(83)90072-3)
- Kim, T., & Reid, S. (2001). Bending collapse of thin-walled rectangular section columns. *Computers & Structures*, 79(20-21), 1897-1911. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00089-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00089-X)
- Langvieder, K., Danner, M., & Hummel, T. (1985). Collision Types and Characteristics of Bus Accidents-Their Consequences for the Bus Passengers and the Accident Opponent.
- Lavayen, D., Boada, M. J. L., & Rodriguez, J. A. (2021). Bending collapse analysis for thin and medium-thin-walled square and rectangular hollow shapes. *Preprint to Thin Walled Structures*, 165(May), 107934. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107934>

- Liang, C. C., & Le, G. N. (2009). Bus rollover crashworthiness under European standard: An optimal analysis of superstructure strength using successive response surface method. *International Journal of Crashworthiness*, 14(6), 623-639. <https://doi.org/10.1080/13588260902920670>
- Lind, N. C., Ravindra, M. K., & Power, J. (1971). A Review of the Effective Width Formula. *International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*.
- Lu, G., & Yu, T. (2003). *Energy Absorption of Structures and Materials*. <https://doi.org/10.1201/9780203484128>
- Masuda, K., & Chen, D.-H. (2011). Prediction of Maximum Moment of Rectangular Tubes Subjected to Pure Bending. *Journal of Environment and Engineering*, 6(3), 554-566. <https://doi.org/10.1299/jee.6.554>
- Masuda, K., & Chen, D.-H. (2012). Maximum Moment of Rectangular Tubes Subjected to Pure Bending. *TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS Series A*, 78(793), 1340-1347. <https://doi.org/10.1299/kikaia.78.1340>
- Matolcsy, M. The severity of bus rollover accidents. En: *Crashworthiness of Transportation Systems*. 2007, 10.
- Paulsen, F., & Welo, T. (2001a). Cross-sectional deformations of rectangular hollow sections in bending: Part I — experiments. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(1), 109-129. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00106-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00106-X)
- Paulsen, F., & Welo, T. (2001b). Cross-sectional deformations of rectangular hollow sections in bending: Part II — analytical models. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(1), 131-152. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00107-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00107-1)
- Reetars, T., Kaliszky -Budapest, S., Sayir -Zurich, M., & Schneider -Wien, W. (2001). *Crashworthiness* (J. A. C. Ambrosio, Ed.). Springer Vienna. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2572-4>
- Rhodes, J., & Harvey, J. M. (1971a). Design of Thin Walled Beam. *Inst Mech Engineers Proc*, 159-67.

- Rhodes, J., & Harvey, J. M. (1971b). The Local Buckling and Post Local Buckling Behaviour of Thin-Walled Beams. *Aeronautical Quarterly*, 22(4), 363-388. <https://doi.org/10.1017/S0001925900005904>
- Rincón-Dávila, D., Alcalá, E., & Martín, Á. (2022). Theoretical–experimental study of the bending behavior of thin-walled rectangular tubes. *Thin-Walled Structures*, 173(January), 109009. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109009>
- Rusch, A., & Lindner, J. (2004). Application of level 1 interaction formulae to class 4 sections. *Thin-Walled Structures*, 42(2), 279-293. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(03\)00060-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(03)00060-0)
- Seyedi, M., Jung, S., Wekezer, J., Kerrigan, J. R., & Gepner, B. (2020). Rollover crashworthiness analyses – an overview and state of the art. *International Journal of Crashworthiness*, 25(3), 328-350. <https://doi.org/10.1080/13588265.2019.1593290>
- Swiatkowski, K., & Stachowicz, F. (1984). Analysis of the cross-sectional deformation of box profiles subjected to bending. *Journal of Mechanical Working Technology*, 10(1), 103-116. [https://doi.org/10.1016/0378-3804\(84\)90082-2](https://doi.org/10.1016/0378-3804(84)90082-2)
- UN/ECE. (2007). Prescripciones técnicas uniformes relativas a la homologación de vehículos de grandes dimensiones para el transporte de pasajeros por lo que respecta a la resistencia de su superestructura.
- Walker, A. C. (1969). The Post-Buckling Behaviour of Simply-Supported Square Plates. *Aeronautical Quarterly*, 20(3), 203-222. <https://doi.org/10.1017/S0001925900005035>
- Wierzbicki, T., & Abramowicz, W. (1983). On the Crushing Mechanics of Thin-Walled Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4a), 727-734. <https://doi.org/10.1115/1.3167137>
- Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W., & Gholami, T. (1994a). Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading—I. Compression. *Computers & Structures*, 51(6), 611-623. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(05\)80001-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(05)80001-X)
- Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W., Gholami, T., & Huang, J. (1994b). Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading-II. Bending. *Computers & Structures*, 51(6), 625-641. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(05\)80002-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(05)80002-1)

- Wierzbicki, T. (1983). Crushing analysis of metal honeycombs. *International Journal of Impact Engineering*, 1(2), 157-174. [https://doi.org/10.1016/0734-743X\(83\)90004-0](https://doi.org/10.1016/0734-743X(83)90004-0)
- Wierzbicki, T., & Abramowicz, W. (1989). The mechanics of deep plastic collapse of thin-walled structures. En *Structural failure* (pp. 281-329). Wiley.
- Winter, G. (1947). Strength of Thin Steel Compression Flanges. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 112(1), 527-554. <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0006092>
- Zhou, W., Kuznecov, A., Wu, C. Q., & Telichev, I. (2020). A comparative numerical study of motorcoach rollover resistance under ECE R66 and proposed NHTSA regulation conditions. *International Journal of Crashworthiness*, 25(2), 131-146. <https://doi.org/10.1080/13588265.2018.1544476>



Apéndices

A. Ensayo de flexión de viga en voladizo realizado por Kecman (1979)

El esquema general de la máquina diseñada por Kecman para realizar el ensayo de viga en voladizo se muestra en la figura A.1. El sistema consiste de un tubo rectangular en voladizo (HA) el cual es fijado a una base de concreto en H , y es sometido a una carga transversal por un cable ($ADCG$) en A . El cable pasa por una polea fija (C) y se conecta a un espárrago largo (G), el cual está atornillado a un soporte (S) fijado a la bancada. La rotación del espárrago con respecto al soporte es impedido por una leva del soporte S que se desliza en una ranura longitudinal del espárrago G . El cable es recogido girando un disco roscado (E) unido al soporte S . La fuerza de tensión en el cable es medido por un dinamómetro (D).

Al inicio del ensayo, el tubo HA_o se encuentra en una posición horizontal y el cable A_oDC se encuentra en una posición vertical. La distancia k entre los puntos A y B es medido por un potenciómetro AB , del cual su extremo B es fijado en el punto (L, d) para que A_oB sea vertical. Asumiendo que el punto A rota con respecto al punto H a lo largo de la trayectoria circular A_oA , se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x_A^2 + y_A^2 = L^2 \quad (\text{A.1})$$

También, la distancia medida k se puede igualar a:

$$k^2 = (L - x_A)^2 + (d - y_A)^2 \quad (\text{A.2})$$

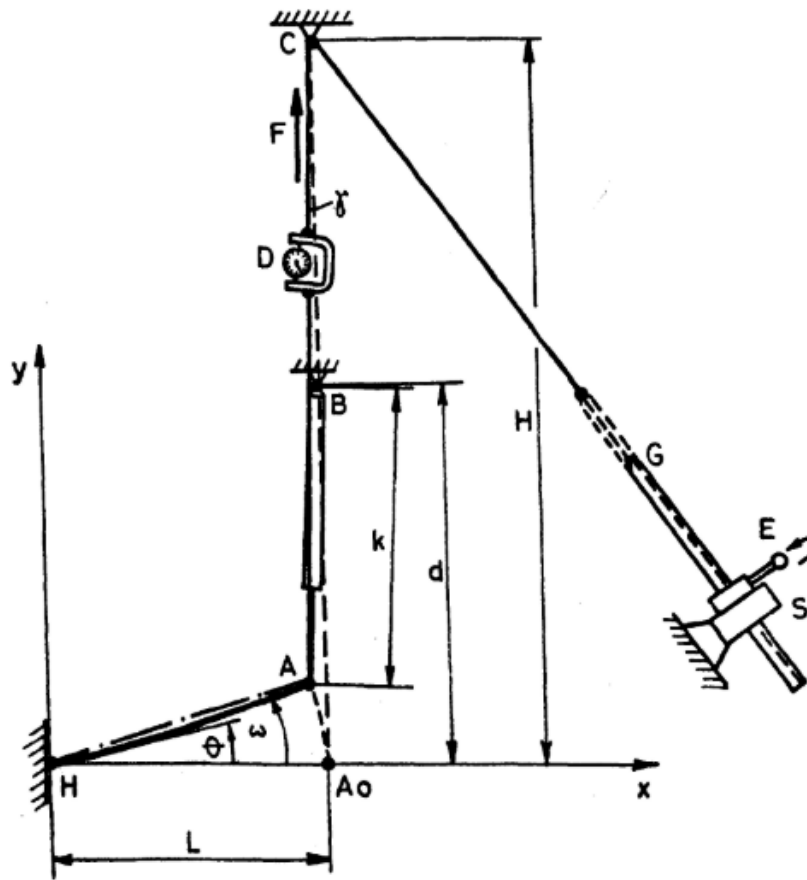


Figura A.1: Esquema general de la maquina para realizar el ensayo de viga en voladizo diseñada por Kecman. Imagen de Kecman (1979).

De las ecuaciones A.1 y A.2 se pueden despejar las coordenadas del punto A, y el ángulo total de deformación (ω) se puede igualar a:

$$\omega = \arctan \left(\frac{y_A}{x_A} \right) \quad (\text{A.3})$$

El ángulo de rotación de la bisagra plástica (θ) es calculado substrayendo el ángulo de deformación elástica. Las ecuaciones y consideraciones utilizadas para calcular este último se pueden ver en Kecman (1979).

El ángulo γ se puede calcular a partir de las coordenadas del punto C ($x_C = L, y_C = H$), con la siguiente ecuación:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{L - x_A}{H - y_A} \right) \quad (\text{A.4})$$

Con lo cual el momento en la bisagra plástica es calculado con la siguiente ecuación:

$$M = F (x_A \cos \gamma - y_A \sin \gamma) \quad (\text{A.5})$$

donde F es la fuerza medida por el dinamómetro. Para mantener al cable AC prácticamente vertical, se utilizaron las dimensiones $L = 700$ mm y $H = 2250$ mm. La máquina fabricada por Kecman se muestra en la figura A.2.



Figura A.2: Máquina completa fabricada por Kecman para realizar el ensayo de flexión de viga en voladizo. Imagen de Kecman (1979).

B. Resultados experimentales reportados por Kecman (1979)

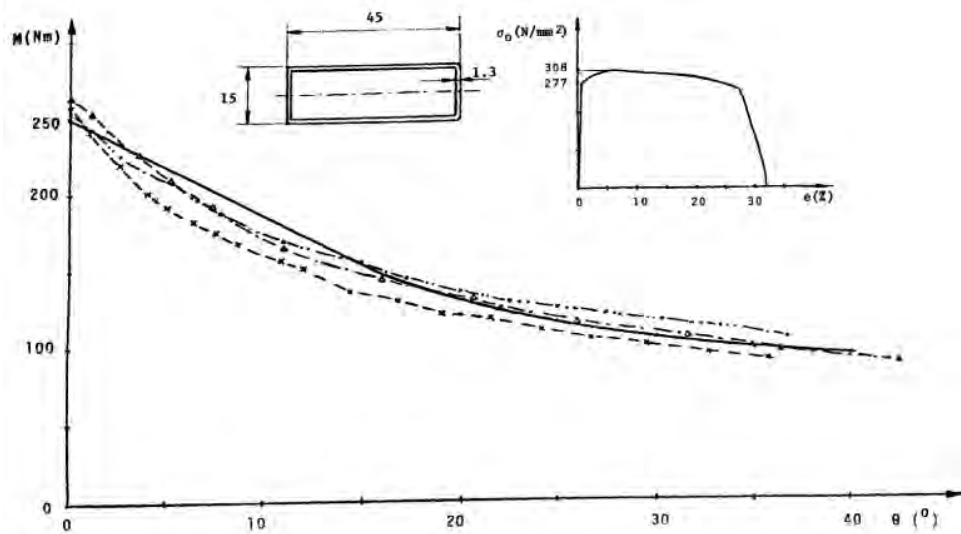


Figura B.1: Caso 1, 15 mm \times 45 mm \times 1.3 mm. CCBP, curva $\epsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

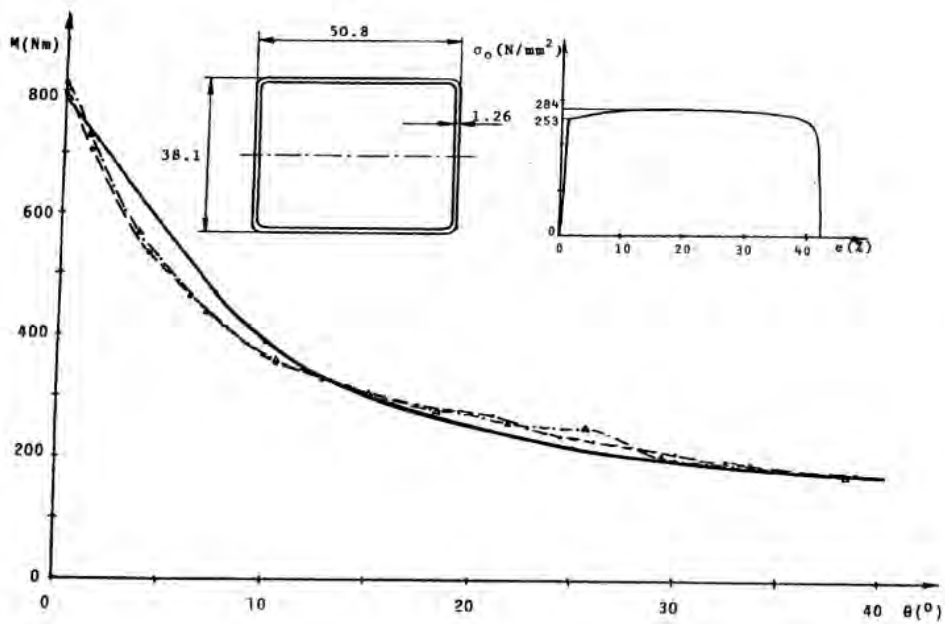


Figura B.2: Caso 2, 38.1 mm \times 50.8 mm \times 1.26 mm. CCBP, curva $\epsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

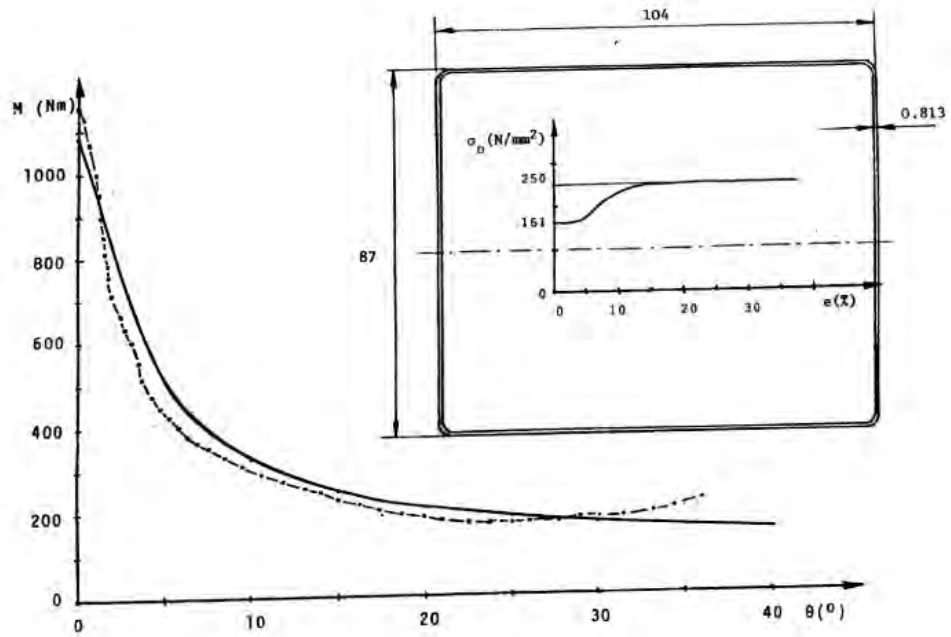


Figura B.3: Caso 3, 87 mm \times 104 mm \times 0.813 mm. CCBP, curva $\epsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

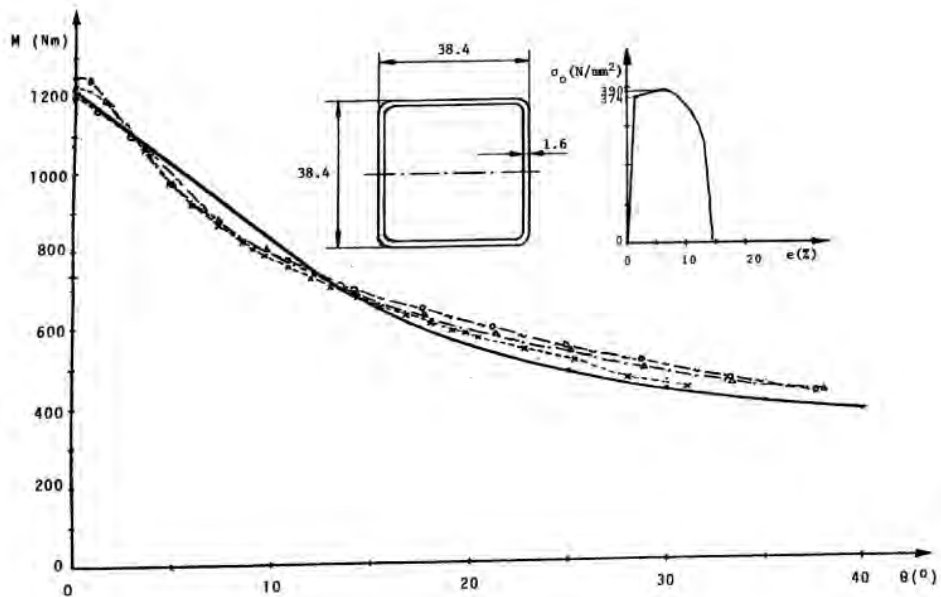


Figura B.4: Caso 4, 38.4 mm \times 38.4 mm \times 1.6 mm. CCBP, curva $\epsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

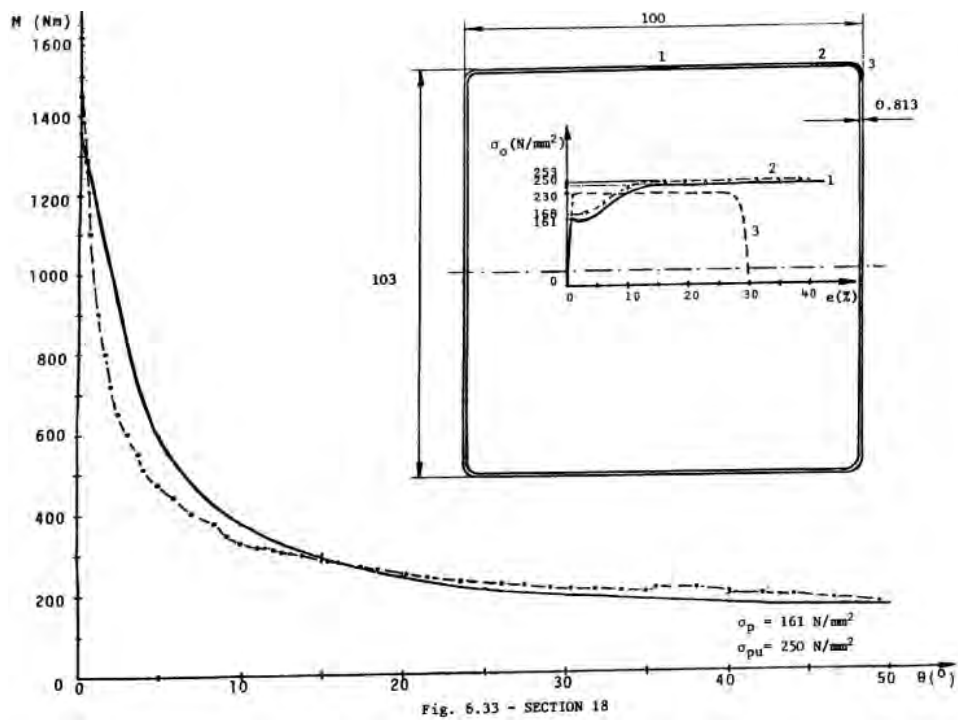


Figura B.5: Caso 5, 103 mm × 100 mm × 0.813 mm. CCBP, curva $\varepsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

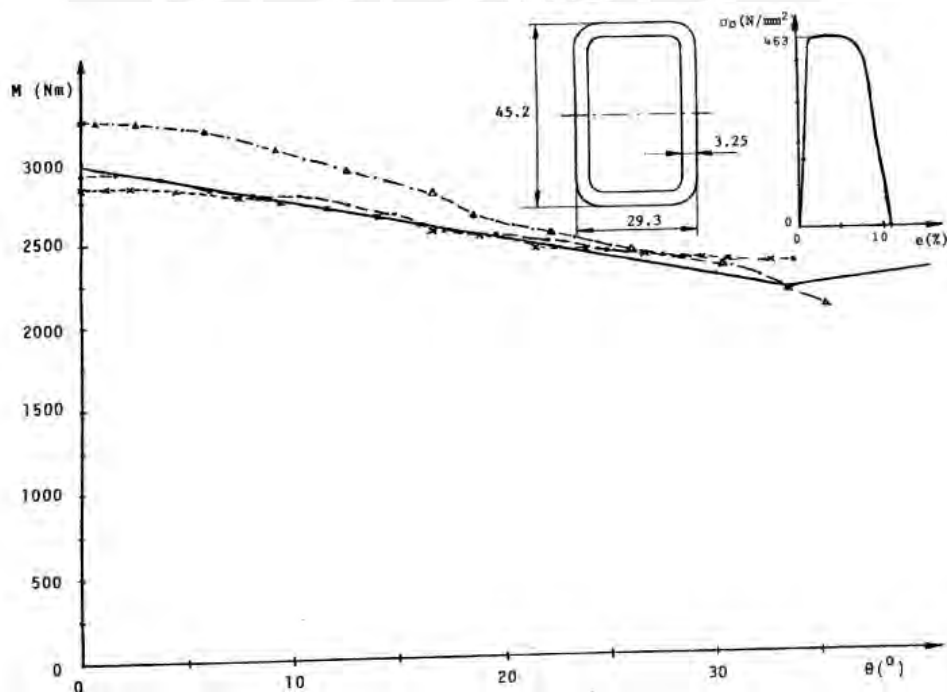


Figura B.6: Caso 6, 45.2 mm × 29.3 mm × 3.25 mm. CCBP, curva $\varepsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

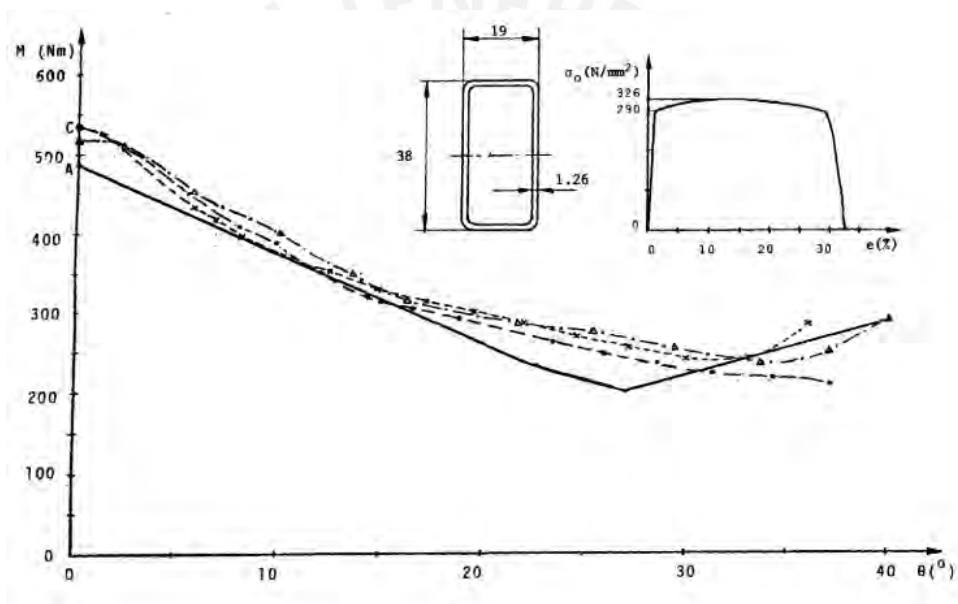


Figura B.7: Caso 7, 38 mm \times 19 mm \times 1.26 mm. CCBP, curva $\epsilon_o - \sigma_o$, y dimensiones de la sección del tubo rectangular. Imagen de Kecman (1979).

C. Validación de simulación computacional del ensayo de flexión de viga en voladizo

Las curvas características de bisagra plástica obtenidas de simulaciones computacionales del ensayo de flexión de viga en voladizo se compararon con los resultados experimentales reportados en el apéndice B. Las curvas fueron calculadas con simulaciones computacionales del ensayo de viga en voladizo utilizando los modelos presentados en las figuras 3.1 y 3.2, y las ecuaciones 3.1 y 3.2. La longitud del perfil es igual a 15 veces la altura de la sección ($L = 15b$).

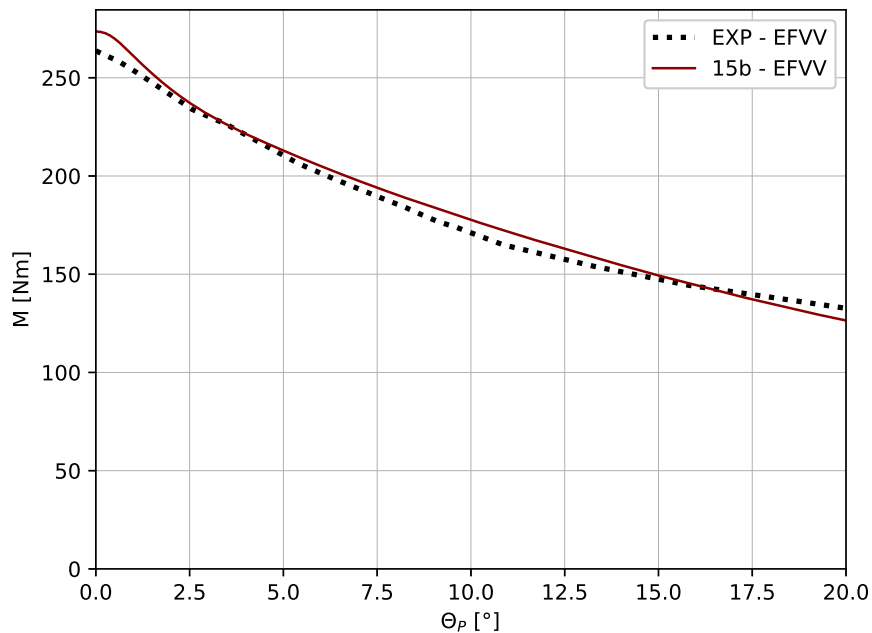


Figura C.1: Caso 1, 15 mm \times 45 mm \times 1.3 mm.

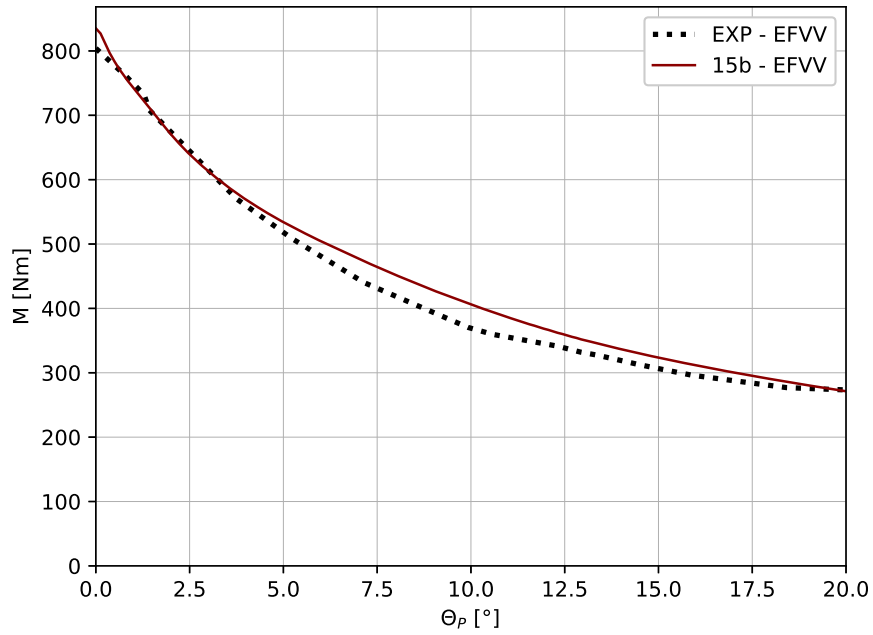


Figura C.2: Caso 2, 38.1 mm × 50.8 mm × 1.26 mm.

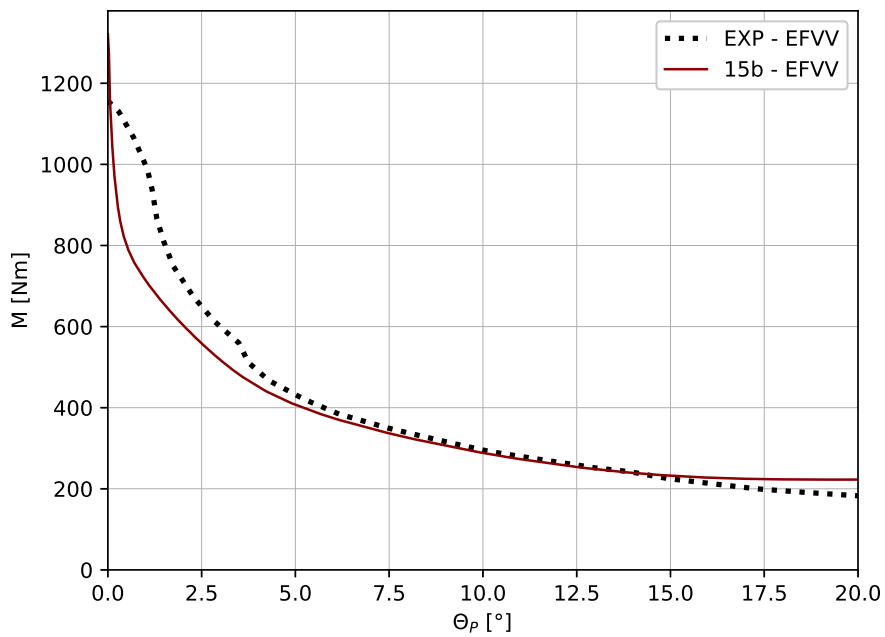


Figura C.3: Caso 3, 87 mm × 104 mm × 0.813 mm.

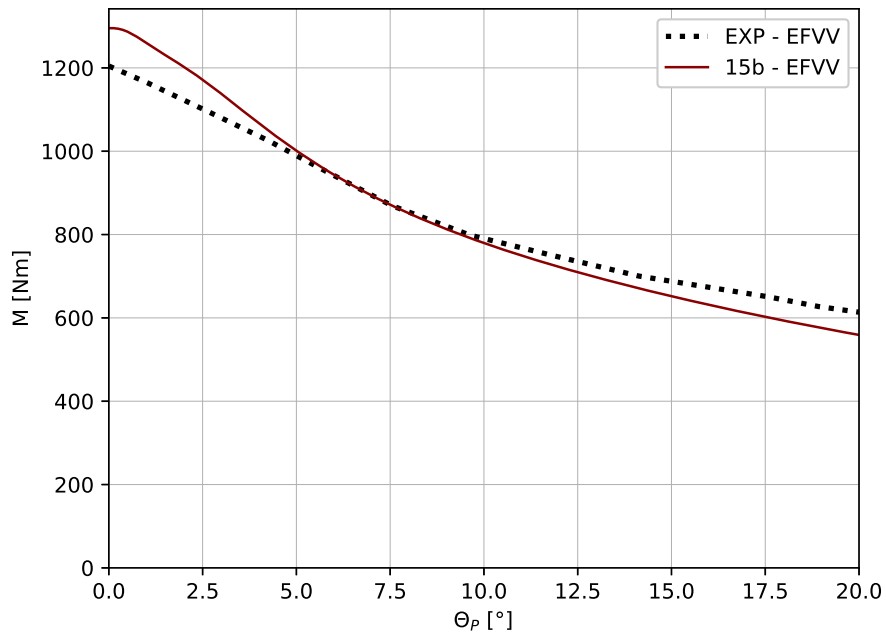


Figura C.4: Caso 4, 38.4 mm × 38.4 mm × 1.6 mm.

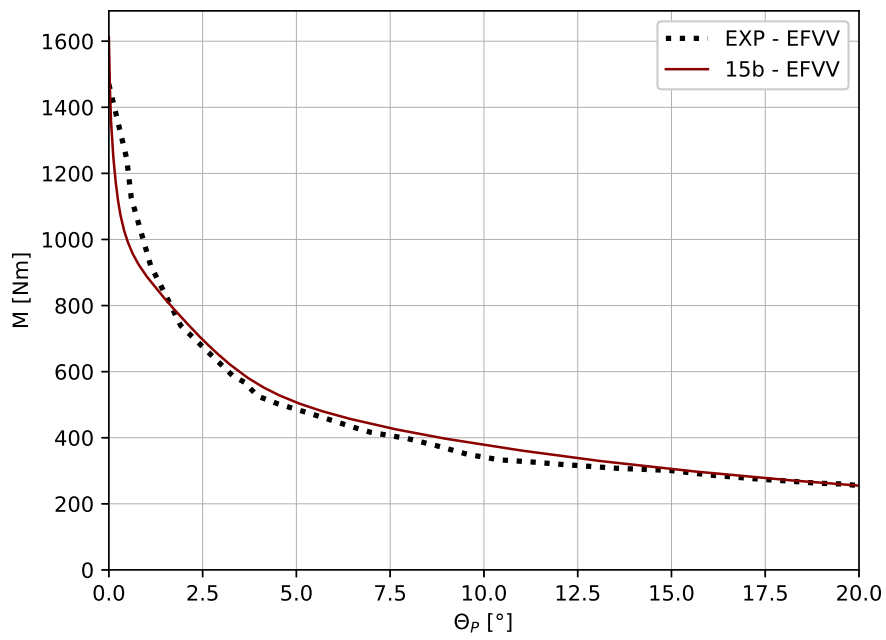


Figura C.5: Caso 5, 103 mm × 100 mm × 0.813 mm.

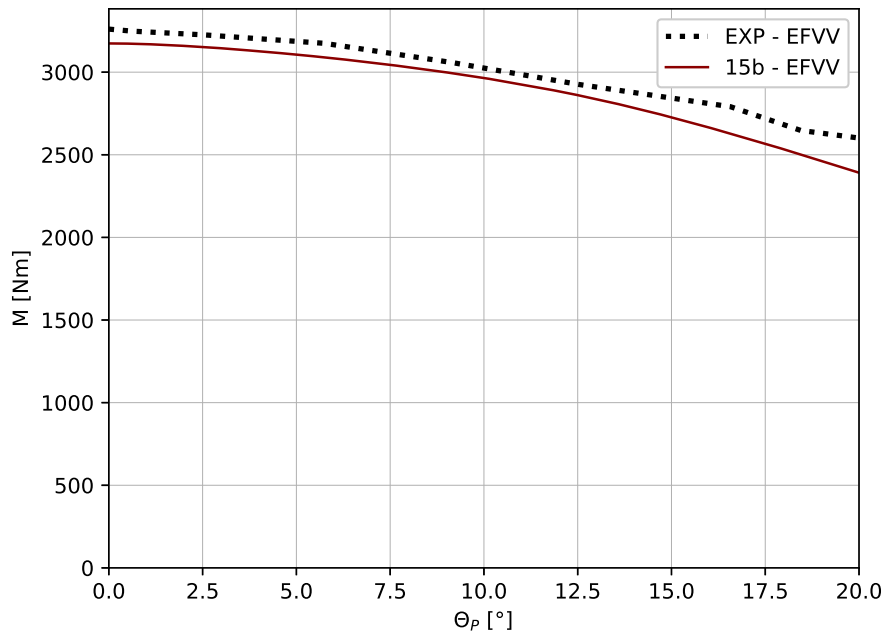


Figura C.6: Caso 6, 45.2 mm × 29.3 mm × 3.25 mm.

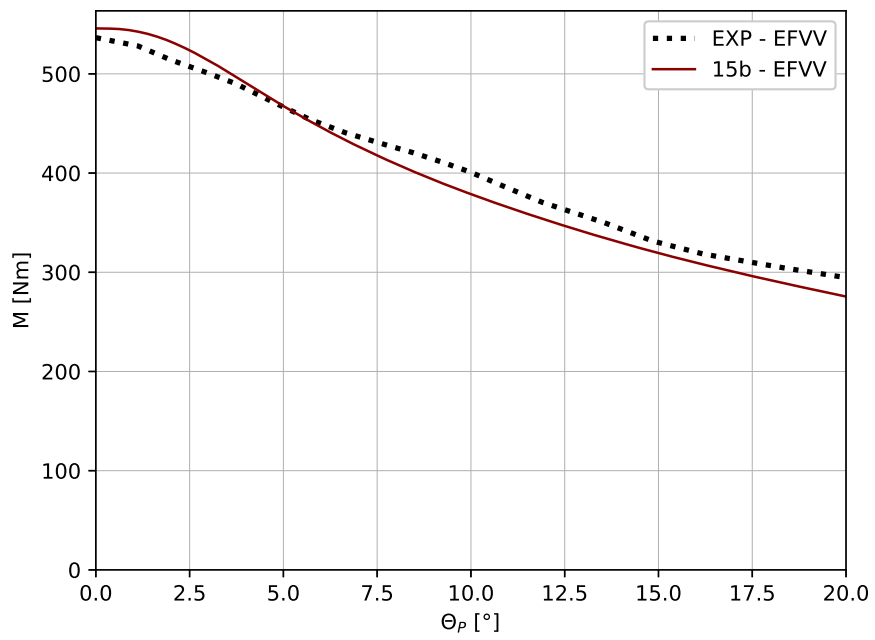


Figura C.7: Caso 7, 38 mm × 19 mm × 1.26 mm.