PONTIFICIA UNIVERSIDAD

CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Una generalización del teorema de Briot-Bouquet para campos de vectores en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$

Tesis para obtener el grado académico de
Magíster en Matemáticas que presenta

Carlos Antonio Salazar Ching

Asesor
Hernán Neciosup Puican

Lima, 2021

Declaración jurada de autenticidad

Yo, Hernán Neciosup Puican, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulado Una generalización del teorema de Briot-Bouquet para campos de vectores en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, del autor Carlos Antonio Salazar Ching, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 8%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 20/10/2022.
- He revisado con detalle dicho reporte y confirmo que cada una de las coincidencias detectadas no constituyen plagio alguno.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima 28 de noviembre del 2022.

Apellidos y nombres del asesor: Neciosup Puican, Hernán	
DNI: 40692799	
ORCID: 0000-0002-7591-0346	

Una generalización del teorema de Briot-Bouquet para campos de vectores en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$[1]

Carlos Antonio Salazar Ching

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Roland Rabanal Montoya, PUCP
(Presidente del jurado)

Dr. Hernán Neciosup Puican, PUCP
(Asesor)

Dr. Rudy José Rosas Bazán, PUCP
(Tercer miembro)

Lima, 2021

[1] Versión final con las correcciones del jurado

Resumen

Una generalización del teorema de Briot-Bouquet para campos de vectores en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$

Carlos Antonio Salazar Ching

2021

Asesor: Hernán Neciosup Puican
Título obtenido: Magíster en Matemáticas

Se estudian las variedades que son invariantes por algún campo vectorial analítico en el espacio de gérmenes $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, $n \geq 2$. Específicamente, si la parte lineal de un campo vectorial en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ no es nilpotente y tiene dos paquetes de autovalores R y S, respectivamente, se establece entonces una condición de no-resonancia para garantizar la existencia de variedades que incluyen el punto singular del campo, pero son formalmente lisas. En este contexto, se busca establecer condiciones suficientes que garanticen la convergencia de éstas variedades, esto constituye una generalización del conocido teorema de Briot-Bouquet y es el propósito principal de este trabajo. Cabe señalar que este trabajo está basado en el artículo [CS$^+$14], publicado por F. Sanz y S. A. Carrillo.

Palabras clave: Campos vectoriales holomorfos, variedades invariantes, singularidades simples.

Abstract

Manifolds that are invariant by some analytic vector field in the germ space $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0}), n \geq 2$ are studied. Specifically, if the linear part of a vector field in $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ is not nilpotent and two eigenvalue packages have R and S respectively, a non-resonance condition is established for guarantee the existence of varieties that include the singular point of the field, but they are formally smooth. In this context, it seeks to establish conditions sufficient to guarantee the convergence of these varieties, this constitutes a generalization of the well-known Briot-Bouquet theorem and is the purpose main of this work. It should be noted that this work is based on the article [CS+14], published by F. Sanz and S. A. Carrillo.

Key words and phrases. Holomorphic vector fields, invariant manifolds, simple singularity.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 32M25, 34C45.

A mi madre Juana, esposa Maribel y mis bellas hijas Alexandra y Meghan.

Índice general

Índice de figuras

.

Agradecimiento

Agradezco al profesor Hernán Neciosup Puican, por el gran apoyo en el desarrollo del presente trabajo y al profesor Roland Rabanal por las valiosas observaciones y sugerencias. Esta tesis de maestría surge como parte del proyecto de investigación intitulado “Geometría local y global de singularidades en foliaciones” DGI-2020-1-0057, del cual el profesor es investigador principal.

Agradezco a mi madre, esposa e hijas, que siempre me apoyan y son mi energía.

Finalmente, agradezco a la PUCP, especialmente a los profesores que la conforman pues dan un lugar a la investigación en el Perú.

Introducción

Se sabe que la evolución del sistema formado por el problema de los $n-$cuerpos está gobernado por las leyes de Newton, leyes que se expresan por medio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, y determinan completamente el futuro y la evolución pasada de cada uno de los cuerpos siempre que se fije una condición inicial. Para conocer cómo se comportan los $n-$cuerpos con respecto del tiempo o cualquier otro sistema físico, es necesario entender la ecuación del tipo

$$\dot{z} = (\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_n) = X(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i},$$

donde $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable y $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ es la derivada de z con respecto del tiempo.

Dado $z \in \mathbb{R}^n$, por la teoría básica de las ecuaciones diferenciales ordinarias, es conocido que la ecuación $\dot{z} = X(z)$ tiene una única solución local en torno de z, es decir, una aplicación $t \mapsto \varphi_z(t)$ definida en torno de $t = 0$ tal que $\frac{d}{dt}\varphi_z = X(\varphi(t))$ y $\varphi_z(0) = z$.

Un problema de interés general es conocer cómo evoluciona el sistema $\dot{z} = X(z)$ a lo largo del tiempo una vez fijada una condición inicial, es decir, si la función X es vista como un campo de vectores diferenciales $\mathbb{R}^n$, se requiere saber cómo es la solución $t \mapsto \varphi_z(t)$ del campo vectorial X cuando t varía, empezando desde un punto $z \in \mathbb{R}^n$ (estudio del flujo del campo vectorial).

Cuando el campo vectorial X es polinomial, el sistema $\dot{z} = X(z)$ es más sencillo de analizar. Es posible ver las variables $z_1, ..., z_n$ como números complejos y, así considerar X como un campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C}^n$. Esto sugiere un cambio sobre X, pues si interpretamos el tiempo como una variable compleja, el flujo φ de X alrededor de un punto $z \in \mathbb{C}^n$ viene dado por la aplicación holomorfa $\varphi(t, z) := \varphi_z(t)$, donde $t \mapsto \varphi(t)$ es la solución local de X en torno de z. La aplicación $\varphi_z : \mathbb{D}_z \to \mathbb{C}^n$ se llama solución de X en torno de z y su imagen es llamada trayectoria. Si restringimos X a $\mathbb{R}^n$, podemos recuperar la dinámica real de X.

En este trabajo de maestría consideramos campos vectoriales holomorfos en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Las soluciones del sistema $\dot{z} = X(z)$ induce una foliación por curvas de $\mathbb{C}^n$ cuyas singularidades son los ceros de X.

Considere X un germen de campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en el origen. Cuando $n = 2$, la estructura topológica de X depende estrictamente de la estructura de sus variedades invariantes unidimensionales (separatices) a través del origen. Aquí una separatriz de una foliación holomorfa singular es definida por un germen de curva analítica (esta curva es definida localmente por el conjunto de ceros de una función holomorfa no nula sobre un conjunto conexo), que pasa a través de la singularidad e invariante por la foliación. El problema de la existencia de separatrices es un tema central en la teoría local de foliaciones holomorfas singulares. Si la parte lineal X admite valores propios no todos nulos, el origen es llamado singularidad simple. En $\mathbb{C}^2$, por un punto singular simple, siempre existe al menos una separatriz. La cuestión de la existencia de separatrices complejas para puntos singulares más degenerados fue discutida por primera vez por C. Briot y J. Bouquet en 1856 (ver capítulo 2 página 45 teorema 2.2.1). Sin embargo, la solución completa no fue alcanzada hasta 1982 por C. Camacho y P. Sad [CS82].

Teorema [C. Camacho & P. Sad, 1982]. Cualquier singularidad aislada de un campo vectorial holomorfo admite una separatriz compleja.

Lamentablemente, la existencia de una separatriz no es válida en cualquier dimensión. En [LVGMÁ92] y [LO00], el lector puede encontrar ejemplos de foliaciones de dimensión uno sin separatrices. La presente tesis se enmarca dentro del problema de existencia de una separatriz para foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$ definidas por la ecuación $\dot{z} = X(z)$, $n > 2$, donde X es un campo de vectores holomorfos con una singularidad aislada en el origen. Específicamente, presentamos una generalización del teorema de Briot y Bouquet en dimensión mayor a dos. Queremos destacar que nuestro objetivo no es probar la existencia de separatrices para campos de vectores en $\mathbb{C}^n$, más bien describir el estudio de este siguiendo el trabajo de F. Sanz y S. A. Carrillo [CS$^+$14].

Volviendo al caso $n = 2$, considere el campo vectorial holomorfo $X : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$X = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

con singularidad aislada en el origen de $\mathbb{C}^2$. Diremos que $\mathbf{0} = (0,0)$ es una singularidad simple si la matriz

$$M_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}(\mathbf{0}) & \frac{\partial a}{\partial y}(\mathbf{0}) \\ \frac{\partial b}{\partial x}(\mathbf{0}) & \frac{\partial b}{\partial y}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

tiene autovalores no todos nulos λ, μ tal que si $\lambda \neq 0$, entonces $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$. Observe que si $\mathbf{0}$ es una singularidad simple, entonces para cualquier $q \in \mathbb{N}$ se tiene $\frac{\mu}{\lambda} \neq \frac{1}{q}$, lo que es lo mismo a $q\mu - \lambda \neq 0$ o equivalentemente a

$$|q\mu - \lambda| > 0. \tag{1}$$

Esta condición, es pieza clave para demostrar que el campo X admite separatrices formales en torno del origen:

Teorema. *Sea M una variedad analítica compleja, $\boldsymbol{p} \in M$ y $\boldsymbol{X}$ un germen en $\boldsymbol{p}$ de campo de vectores analítico. Si $\boldsymbol{p}$ es una singularidad simple de $\boldsymbol{X}$, entonces para cada autovalor de la parte lineal $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{X}$ existe una única curva formal invariante por $\boldsymbol{X}$ tal que su espacio tangente en $\boldsymbol{p}$ es el autoespacio del autovalor correspondiente.*

Se dice que los autovalores λ, μ cumplen la condición de resonancia si para todo entero $q \geq 2$, $q\mu - \lambda = 0$. En el caso que $q\mu - \lambda \neq 0$, diremos que los autovalores cumplen la condición de no resonancia. Observamos que si $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad simple, entonces los autovalores λ y μ cumplen la condición de no resonancia. Esta última condición permite probar el siguiente resultado.

Teorema [Briot-Bouquet]. *Sea $\boldsymbol{X}$ un germen de campo de vectores en $\boldsymbol{p} \in M$. Si $\boldsymbol{p}$ es una singularidad simple de $\boldsymbol{X}$, entonces la curva formal invariante por $\boldsymbol{X}$ correspondiente al autovalor no nulo de la parte lineal $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{X}$ es convergente.*

Considerando ahora el caso $n > 2$, sea $\mathbf{X}$ un germen de campo vectorial holomorfo en $(\mathbf{p}, \mathbb{C}^n)$ con singularidad aislada en $\mathbf{p}$; suponga que $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$ es parte lineal de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{p}$, cuya matriz representante, tiene autovalores $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$. En este caso, la condición de no resonancia es dada por:

$$\lambda_j \neq q_1\mu_1 + \cdots + q_r\mu_r, \qquad \mu_i \neq p_1\lambda_1 + \cdots + p_s\lambda_s,$$

donde los q_k, p_l son enteros positivos, con $1 \leq k \leq r$ y $1 \leq l \leq s$, son tales que $q_1 + \cdots + q_r \geq 2$ y $p_1 + \cdots + p_s \geq 2$. Esta condición de no resonancia generalizada garantiza la existencia de variedades formales lisas W_r, W_s en torno de $\mathbf{p}$, invariantes por $\mathbf{X}$ y tangentes a los autoespacios E, F generados por los autovalores $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r\}$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$ respectivamente. Este es uno de los principales resultados de esta memoria.

Teorema. *Sea $\boldsymbol{X}$ un germen de campo vectorial holomorfo y X un representante tal que $X(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^n$, $D_{\boldsymbol{0}}X$ es la parte lineal X en el origen, $s = n - r$ y $\mu = (\mu_1, ..., \mu_r) \in \mathbb{C}^r$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s) \in \mathbb{C}^s$ donde $\{\mu_1, ..., \mu_r, \lambda_1, ..., \lambda_s\}$ son los autovalores D_0X (μ_j o los λ_j pueden repetirse según su multiplicidad). Supongamos que, para $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$ y $|\boldsymbol{q}| = q_1 + q_2 + \cdots + q_r$, los autovalores satisfacen la condición de no resonancia*

$$\lambda_j \neq q_1\mu_1 + \cdots + q_r\mu_r, , \ \forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \ \textit{con} \ |\boldsymbol{q}| \geq 2.$$

Entonces existe una única variedad formal no singular $r-$dimensional $\widehat{W}_E$ tangente a autoespacio E en $\mathbf{0}$ e invariante por el campo vectorial X.

Por otro lado, si imponemos la condición $\inf_{\mathbf{q}\in\mathbb{N}^r,|\mathbf{q}|\geq 2}\left\{\frac{|q_1\mu_1+\cdots+q_r\mu_r-\lambda_j|}{q_1+\cdots+q_r}\right\} > 0$ (respectivamente $\inf_{\mathbf{p}\in\mathbb{N}^s,|\mathbf{p}|\geq 2}\left\{\frac{|p_1\mu_1+\cdots+p_s\mu_s-\mu_i|}{p_1+\cdots+p_s}\right\} > 0$), se demuestra que las variedades formales W_r (respectivamente W_s) convergen, obteniendo el resultado principal de esta memoria:

Teorema principal. Sea $\mathbf{X}$ un germen de un campo vectorial en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ y E un subespacio lineal $r-$dimensional de $\mathbb{C}^n$ invariante para la parte lineal D_0X. Sea $\mu = (\mu_1, ..., \mu_r)$ donde $\{\mu_1, ..., \mu_r\}$ son los autovalores de $D_0X|_E$ y $\{\mu_1, ..., \mu_r, \lambda_1, ..., \lambda_{n-r}\}$ los autovalores de D_0X. Si existe $\alpha > 0$ tal que

$$| < \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j| \geq \alpha|\mathbf{q}| \text{ para todo } j = 1, ..., n-r \text{ y } \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \text{ con } |\mathbf{q}| \geq 2.$$

Entonces la variedad invariante formal $\widehat{W}_E$, obtenido en el teorema anterior es convergente.

A continuación describimos el contenido de este trabajo de tesis. En el capítulo 1, introducimos los conceptos y definiciones de carácter general que se utilizarán a lo largo de la tesis. Se exponen los conceptos generales y propiedades de los gérmenes de funciones para el objetivo de la presente memoria. Se expone también los gérmenes de variedades diferenciales invariantes por campo de vectores holomorfos. En el capítulo 2, presentamos los resultados motivadores de esta memoria en el caso 2-dimensional: existencia de variedades invariantes por campo de vectores y el teorema de Briot y Bouquet. El capítulo 3, está dedicado a presentar los resultado principales de esta tesis, el concepto de condición de resonancia, la existencia de variedades invariantes formales en dimensiones mayores a dos y la demostración del teorema principal. Finalmente en el capítulo 4, se expone algunas conclusiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas propiedades básicas del análisis complejo en varias variables, útiles para el desarrollo de este trabajo de tesis. Muchos de estos resultados son enunciados sin demostración, el lector interesado puede revisar las siguientes referencias [Gun90], [Ati20], [GR09], [CCD13] y [CH12]. Cabe señalar que estos resultados fueron presentados y estudiados en el curso de especialización MA776: Introducción a la Dinámica Compleja.

1.1 Funciones analíticas u holomorfas

En esta sección definimos las funciones analíticas complejas u holomorfas en varias variables y algunas de sus propiedades.

Un punto en $\mathbb{C}^n$ es denotado por $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)$ donde $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, con x_j, $y_j \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Un polidisco abierto en $\mathbb{C}^n$ de centro $A = (a_1, ..., a_n)$ y radio $R = (r_1, ..., r_n)$ es un subconjunto de la forma

$$\begin{aligned}\Delta(A; R) &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j \text{ para } 1 \leq j \leq n\} \\ &= \Delta(a_1, r_1) \times \Delta(a_2, r_2) \times \cdots \times \Delta(a_n, r_n),\end{aligned}$$

donde $\Delta(a_j, r_j)$ son discos en $\mathbb{C}$ con centro a_j y radio r_j. La clausura del polidisco $\Delta(A; R)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\overline{\Delta(A; R)} &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| \leq r_j \text{ para } 1 \leq j \leq n\} \\ &= \overline{\Delta(a_1, r_1)} \times \overline{\Delta(a_2, r_2)} \times \cdots \times \overline{\Delta(a_n, r_n)},\end{aligned}$$

donde $\overline{\Delta(a_j, r_j)}$ es la clausura del disco $\Delta(a_j, r_j)$.

Una bola abierta en $\mathbb{C}^n$ de centro $A = (a_1, ..., a_n)$ y radio $r > 0$ es un subconjunto de la forma

$$B(A;r) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j|^2 < r^2 \right\},$$

cuya clausura es

$$\overline{B(A;r)} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j|^2 \leq r^2 \right\}.$$

Los polidiscos y bolas abiertas conforman dos bases para la topología de los subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}^n$ que resultan particularmente útiles para el análisis complejo en varias variables y que usamos a lo largo de este trabajo.

A continuación extendemos el concepto de funciones analíticas para varias variables.

Definición 1.1.1. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$. Una función $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica u holomorfa en D, si para todo $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in D$, existe un abierto $U \subset D$ con $\mathbf{p} \in U$ tal que f admite desarrollo en serie de potencias convergente

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{q_1+\cdots+q_n \geq 0} c_{q_1 \ldots q_n} (z_1 - p_1)^{q_1} \cdots (z_n - p_n)^{q_n}; \quad \forall \mathbf{z} \in U. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) se puede abreviar usando la notación de multi-índices, es decir, para $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ y para $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ denotamos $\mathbf{z}^{\mathbf{q}} = z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}$. Así, la serie de potencias en la ecuación (1.1) se escribe como

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{q}| \geq 0} c_{\mathbf{q}} (\mathbf{z} - \mathbf{p})^{\mathbf{q}}, \tag{1.2}$$

donde $|\mathbf{q}| = q_1 + ... + q_n$.

Cabe recordar que para la series de potencias en una variable compleja es posible determinar un radio y un disco de convergencia, además de las que caracterizan a las funciones analíticas. A continuación veremos que muchas de estas propiedades se extienden a caso de varias variable complejas.

Lema 1.1.2. *Sea* $\sum_{|\boldsymbol{q}| \geq 0} c_{\boldsymbol{q}} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{p})^{\boldsymbol{q}}$ *una serie de potencias. Supongamos que existen* $M > 0$ *y* $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$, *con* $a_j \neq p_j$ *para* $j = 1, ..., n$, *tales que*

$$|c_{\boldsymbol{q}} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{q}}| < M \text{ para todo multi-índice } \boldsymbol{q}.$$

Entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(\boldsymbol{p}, R)$ *para cualquier* $R = (r_1, ..., r_n)$ *con* $r_j < |p_j - a_j|$, $j = 1, ..., n$.

Demostración. Dado $\mathbf{z} \in \overline{D}(\mathbf{p}, R)$, con $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ y $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ tenemos

$$(\mathbf{z} - \mathbf{p})^{\mathbf{q}} = (z_1 - p_1)^{q_1} (z_2 - p_2)^{q_2} \cdots (z_n - p_n)^{q_n}$$

$$(\mathbf{a}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}} = (a_1-p_1)^{q_1}(a_2-p_2)^{q_2}\cdots(a_n-p_n)^{q_n},$$

tal que $|z_i - p_i| < r_i$. Luego podemos escribir

$$|c_{\mathbf{q}}(\mathbf{z}-\mathbf{p})| = \left|c_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}\left[\frac{(\mathbf{z}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}}{(\mathbf{a}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}}\right]\right| = \left|c_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}\frac{\prod_{i=1}^{n}(z_i-p_i)^{q_i}}{\prod_{i=1}^{n}(a_i-p_i)^{q_i}},\right|$$

de la hipótesis

$$|c_{\mathbf{q}}(\mathbf{z}-\mathbf{p})| < M\left|\frac{\prod_{i=1}^{n}(z_i-p_i)^{q_i}}{\prod_{i=1}^{n}(a_i-p_i)^{q_i}}\right| < M\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{r_i^{q_i}}{a_i-p_i^{q_i}}\right|.$$

Considerando $\lambda_i = \frac{r_i}{|a_i-p_i|}$ tal que $0 \leq \lambda_i < 1$, se tiene en la desigualdad anterior

$$|c_q(\mathbf{z}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}| < M\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{q_i}.$$

Tomado la sumatoria en $|\mathbf{q}| > 0$

$$|c_q(\mathbf{z}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}| < M\prod_{i=1}^{n}\sum_{|\mathbf{q}|\geq 0}\lambda_i^{q_i}.$$

Por criterio de comparación, como cada serie $\sum_{q_i\geq 0}\lambda_i^{q_i}$ converge, entonces la serie $\sum\limits_{|\mathbf{q}|\geq 0} c_{\mathbf{q}}(\mathbf{z}-\mathbf{p})^{\mathbf{q}}$. □

La expansión de f en serie de potencias y la convergencia uniforme del lema 1.1.4 permite concluir que si la serie converge en un polidisco entonces f es continua en el polidisco de convergencia.

Definición 1.1.3. Una función $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es holomorfa en cada variable, separadamente, si en cada punto $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \in D$ y $1 \leq j \leq n$, la función de una variable compleja

$$z \in \mathbb{C} \mapsto f(p_1, ..., p_{j-1}, z, p_{j+1}, ..., p_n),$$

es holomorfa en el dominio donde la función esté bien definida.

Una consecuencia directa de la definición 1.1.3, es que si $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa entonces es continua y holomorfa en cada variable separadamente. La recíproca se verifica por el teorema de Osgood.

Lema 1.1.4. ***(Osgood)***. *Toda función $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en cada variable separadamente es holomorfa, en el sentido de la definición 1.1.1.*

Demostración. Ver página 3 en [Gun90].

□

1.1.1 Propiedades básicas de funciones holomorfas

Los resultado anteriores permiten generalizar la fórmula integral de Cauchy, teniendo en cuenta que la integral en cada variable compleja es una integral de linea.

Corolario 1.1.5. ***(Fórmula integral de Cauchy).*** *Sean $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\overline{D(\boldsymbol{p}, R)} \subset D$. Entonces*

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi \boldsymbol{i})^n} \int_{\partial D(\boldsymbol{p},R)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 ... d\xi_n,$$

donde el conjunto $\partial D(\boldsymbol{p}, R)$ es la frontera del disco $\overline{D(\boldsymbol{p}, R)}$. Cabe resaltar que la integral en cada componente es una integral de línea.

Demostración. Ver página 3 en [GR09].

Teorema 1.1.6. ***(Hartogs).*** *Si $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es holomorfa en cada variable separadamente, entonces f es holomorfa.*

Ver página 15 en [Gun90]. □

A continuación se introducen los operadores diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Estos operadores son llamados derivadas holomorfas y antiholomorfas, respectivamente.

Teorema 1.1.7. ***(Criterio de Cauchy-Riemann).*** *Una función f, definida en un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ continua y diferenciable (visto como una función de $2n$ variales reales), es holomorfa en D si y solo si se cumple*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(\boldsymbol{z}) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.3}$$

Demostración. Ver página 4 en[GR09].

□

Sea $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, derivando sucesivamente la fórmula de Cauchy de f, obtenemos:

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}}(\mathbf{z}) = \frac{i_1! \cdots i_n!}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{\partial D(\mathbf{p},R)} \frac{f(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)^{i_1+1} \cdots (\xi_n - z_n)^{i_n+1}} d\xi_1 ... d\xi_n.$$

Usando notación multi-índice, la expresión anterior puede ser escrita como

$$\frac{\partial^{|I|} f}{\partial z^I}(\mathbf{z}) = \frac{I!}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{\partial D(\mathbf{p},R)} \frac{f(\xi)}{(\xi - \mathbf{z})^{I+(1,\dots,1)}} d\xi, \tag{1.4}$$

donde $I! = i_!...i_n!$ y $\xi = (\xi_1, ...\xi_n)$.

Es fácil verificar, ver [Gun90], que en el desarrollo en serie de Taylor de f en $\mathbf{p} \in D$,

$$f(\mathbf{z}) = \sum_I c_I(\mathbf{z} - \mathbf{a})^I,$$

$$c_I = \frac{1}{i_1!...i_n!} \frac{\partial^{i_1+...+i_n} f}{\partial z_1^{i_1}...\partial z_n^{i_n}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{I!} \frac{\partial^{|I|} f}{\partial \mathbf{z}^I}(\mathbf{p}).$$

A continuación presentamos algunos resultados básicos de funciones holomorfas útiles para este trabajo.

Teorema 1.1.8. ***(Teorema de identidad).*** *Si f y g son funciones holomorfas definidas en conjunto abierto y conexo $D \subset \mathbb{C}^n$, y $f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{z})$ para todo $\boldsymbol{z} \in U \subset D$ un subconjunto abierto no vacío, entonces $f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{z})$ para todo $\boldsymbol{z} \in D$.*

Demostración. Ver página 6 en [GR09].

□

Teorema 1.1.9. *(**Teorema del Módulo Máximo**.) Si f es una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo $D \subset \mathbb{C}^n$ y si existe un punto $\boldsymbol{w} \in D$ tal que $|f(\boldsymbol{z})| \leq |f(\boldsymbol{w})|$ para todos los puntos $\boldsymbol{z}$ en alguna vecindad abierta de $\boldsymbol{w}$, entonces $f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{w})$ para todo $\boldsymbol{z} \in D$.*

Demostración. Ver página 7 en [GR09].

□

1.1.2 Función holomorfa regular y el teorema de la función implícita

Sea $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no nula. Fijemos el punto $\mathbf{p} \in D$ y tomamos el desarrollo en serie de potencias de f en $\mathbf{p}$:

$$f(\mathbf{z}) = \sum_I c_I(\mathbf{z} - \mathbf{p})^I.$$

Definimos el orden (o multiplicidad) de f en $\mathbf{p}$, denotado por $\text{ord}_{\mathbf{p}}(f)$ ó por $\text{mult}_{\mathbf{p}}(f)$, como el menor $k \geq 0$ tal que $c_I \neq 0$ e $|I| = k$. Si $f \equiv 0$, $\text{ord}_{\mathbf{p}}(f) = +\infty$.

Definición 1.1.10. Una función holomorfa $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es regular respecto a z_n en $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \in D$ si la función

$$z_n \in \mathbb{C} \mapsto f(p_1, ..., p_{n-1}, z_n),$$

no es idénticamente nula en ninguna vecindad de p_n. En este caso, el orden de f con respecto a z_n, denotado por $\text{ord}_{z_n}(f)$, es el menor $k \geq 0$ tal que $\partial^k f / \partial z_n^k(\mathbf{p}) \neq 0$.

Lema 1.1.11. *Si f es una función holomorfa no constante en una vecindad de $\boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^n$, entonces por un cambio lineal de coordenadas, f es regular con respecto a la variable z_n y además $\operatorname{ord}_{z_n}(f) = \operatorname{ord}_{\boldsymbol{0}}(f)$.*

Demostración. Ver página 13 en [GR09].

□

Teorema 1.1.12. ***(Rouché).*** *Sean f, g funciones holomorfas en una vecindad de $\overline{D(p_n, r_n)} \in \mathbb{C}$ no nulas en $\partial D(p_n, r_n)$. Suponga que*

$$|g(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{z})| < |g(z)| \ \forall \boldsymbol{z} \in \partial D(p_n, r_n).$$

Entonces f y g tienen el mismo número de ceros en $D(p_n, r_n)$, contando multiplicidades.

Demostración. Ver página 125 en [Con78]. □

Teorema 1.1.13. *Sean $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\boldsymbol{p} \in D$ tales que $f(\boldsymbol{p}) = 0$. Supongamos que f es regular de orden ν con respecto a la variable z_n. Entonces existe un polidisco $\overline{D(\boldsymbol{p}, R)} \subset D$, con*

$$D(\boldsymbol{p}, R) = D(\boldsymbol{p}', R') \times D(p_n, r_n) \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C},$$

tal que, para todo $\boldsymbol{z}' \in D(\boldsymbol{p}', R')$ fijo, la función $z_n \mapsto f(z', z_n)$ tiene exactamente ν raíces en $D(p_n, r_n)$, contadas con multiplicidades que no se anula en $\partial D(p_n, r_n)$

Demostración. Ver [GR09]. □

Teorema 1.1.14. ***(Teorema de la función implícita).*** *Sea $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(\boldsymbol{p}) = 0$ y $\partial f / \partial z_n(\boldsymbol{p}) \neq 0$. Entonces existen un polidisco $\overline{D(\boldsymbol{p}, R)} \subset D$ descompuesto en la forma $D(\boldsymbol{p}, R) = D(\boldsymbol{p}', R') \times D(p_n, r_n) \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, y una función holomorfa $G : D(\boldsymbol{p}', R') \to \mathbb{C}$ tales que:*

(i) $G(\boldsymbol{p}') = p_n$;

(ii) $G(\boldsymbol{z}') \in D(\boldsymbol{p}_n, r_n)$ *para todo* $\boldsymbol{z}' \in D(\boldsymbol{p}', R')$;

(iii) $f(\boldsymbol{z}) = 0$ *para* $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}', z_n) \in D(\boldsymbol{p}, R)$ *si y solo si* $z_n = G(\boldsymbol{z}')$.

Demostración. Ver página 15 en [GR09].

□

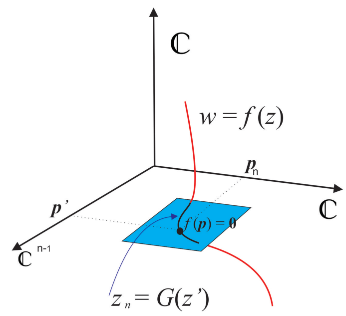

Figura 1.1: Teorema de la función implícita

1.2 Gérmenes de funciones holomorfas

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^n$ y $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto conteniendo a $\mathbf{p}$. En la familia de todas las funciones holomorfas en U definimos una relación de equivalencia de la siguiente manera: diremos que dos funciones son equivalentes si ellas coinciden en una vecindad de $\mathbf{p}$. Explícitamente, para cada par de funciones f y g que son holomorfas en las vecindades abiertas de $\mathbf{p}$, digamos U y V, respectivamente diremos que son equivalentes si existe $W \subset U \cap V$ conteniendo a $\mathbf{p}$ tal que $f|_W = g|_W$.

El espacio cociente bajo esta relación de equivalencia es denotado por $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ y sus elementos son denominados gérmenes de funciones holomorfas en $\mathbf{p}$. La clase de equivalencia en $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ asociada a un par (f, U) es denotado por $\mathbf{f_p}$. El espacio tiene estructura de anillo con las operaciones de suma y multiplicación de gérmenes de funciones. Es más $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ es un anillo conmutativo con unidad y es un dominio integral.

Cuando $\mathbf{p}$ es el origen de coordenadas, usualmente se denota $\mathcal{O}_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{\mathbf{0}}$ al espacio de gérmenes de pares $(f, \mathbb{C}^n)$.

Una propiedad interesante del anillo $\mathcal{O}_n$ es que es isomorfismo al anillo de series de potencias centrada en $\mathbf{0}$, $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$. Para más detalles sobre las propiedades del anillo $\mathcal{O}_{\mathbf{0}}$ ver [Gun90] y [Ati20].

Una unidad en el anillo $\mathcal{O}_n$ es un elemento cuyo inverso multiplicativo también está en $\mathcal{O}_n$, en este sentido las unidades de $\mathcal{O}_n$ son los gérmenes de funciones que son no nulas en el origen. El conjunto de los elementos $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ con $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$, es decir, no son unidades será denotado por $\mathfrak{M}$. Este conjunto es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$, por tanto $\mathcal{O}_n$ es un anillo local.

El conjunto formado por todas las series de potencias formales junto con las operaciones usuales de adición y multiplicación de series es un anillo, que denotaremos por $\mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]]$ ó $\widehat{\mathcal{O}}_n$. Al igual que el anillo $\mathcal{O}_n$, el anillo $\widehat{\mathcal{O}}_n$ es un anillo local, es decir, posee un ideal maximal dado por $\mathfrak{M} = (z_1, ..., z_n)$, ver [Ati20].

Otras de las propiedades de los anillos $\mathcal{O}_n$ y $\widehat{\mathcal{O}}_n$ es que son dominios de factorización única y noetherianos. En particular los elementos de $\mathcal{O}_n$ y $\widehat{\mathcal{O}}_n$ poseen una descomposición en factores irreducibles, y sus respectivos ideales son finitamente generados, ver [Ati20].

Observación 1.2.1. Si $f,\, g \in \mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]] - \{\mathbf{0}\}$ entonces

- $\mathrm{ord}_{\mathbf{0}}(fg) = \mathrm{ord}_{\mathbf{0}}(f) + \mathrm{ord}_{\mathbf{0}}(g)$
- $\mathrm{ord}_{\mathbf{0}}(f+g) = \mathrm{mín}\{\mathrm{ord}_{\mathbf{0}}(f), \mathrm{ord}_{\mathbf{0}}(g)\}$

Considere la descomposición $\mathbf{z} = (\mathbf{z}', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, donde $\mathbf{z}' = (z_1, ..., z_{n-1})$. Denotaremos por $\mathcal{O}_{n-1}$ al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en las variables $(z_1, ..., z_{n-1})$. Si $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_k$ son elementos de $\mathcal{O}_{n-1}$. Tomando representantes de estos gérmenes en una vecindad del origen $\mathbf{0}' \in \mathbb{C}^{n-1}$, tenemos que la expresión

$$a_0 + a_1 z_n + ... + a_k z_n^k,$$

el cual representa una serie de potencias convergente en n variables y por lo tanto pueden ser considerado como un elemento de $\mathcal{O}_n$. El conjunto de todos estos elementos forman un subanillo de $\mathcal{O}_n$ que, en la notación algebraica usual se denotará por $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$; este es el anillo de polinomios sobre $\mathcal{O}_{n-1}$ en la variable z_n. Teniendo así,

$$\mathcal{O}_{n-1} \subset \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subset \mathcal{O}_n.$$

Recordemos que una función f holomorfa en una vecindad abierta del origen se dice que es regular de orden k en z_n en el origen, si $f(0, ..., z_n)$, visto como una función de z_n, tiene un cero de orden k en z_n.

Definición 1.2.2. Diremos que un germen $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ es regular de orden k en z_n si existe un represente en el origen, el cual es regular de orden k en z_n en el origen. La regularidad de $\mathbf{f}$ es independiente de la elección del representante.

Observamos del lema 1.1.11, que un germen $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ es regular en z_n.

Definición 1.2.3. Un polinomio de Weierstrass de grado $k > 0$ en z_n es un elemento $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de la forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = z_n^k + \mathbf{a}_1 z_n^{k-1} + ... + \mathbf{a}_{k-1} z_n + \mathbf{a}_k, \tag{1.5}$$

donde los coeficientes $\mathbf{a}_j \in \mathcal{O}_{n-1}$ no son unidades para $j = 1, ..., k$.

Si h es una función holomorfa en una vecindad abierta del origen y representa un polinomio de Weierstrass en z_n, entonces $h(\mathbf{z})$ tiene la forma

$$h(z_1, ..., z_n) = z_n^k + a_1(z_1, ..., z_{n-1}) z_n^{k-1} + ... + a_k(z_1, ..., z_{n-1}),$$

donde $a_j(0, ..., 0) = 0$; por lo tanto $h(0, ..., 0, z_n) = z_n^k$, y h es regular en z_n de orden k. En un sentido, un polinomio de Weierstrass es la forma genérica de un elemento que es regular en z_n; de hecho esto es un resultado conocido como el teorema de preparación de Weierstrass.

Teorema 1.2.4. ***(Preparación de Weierstrass).*** *Si $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ es regular de orden k en z_n, existe un único polinomio de Weierstrass $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de grado k tal que $\mathbf{f} = \mathbf{uh}$ para alguna unidad $\mathbf{u} \in \mathcal{O}_n$.*

Demostración. Ver página 68 en [GR09].

□

Consideremos $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$. La hipótesis $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$ y $\partial \mathbf{f}/\partial z_n(\mathbf{0}) \neq 0$ nos dice que $\mathbf{f}$ es regular de orden 1 con respecto a z_n. El teorema de preparación de Weierstrass nos permite entonces escribir, en $\mathcal{O}_n$,

$$\mathbf{f} = \mathbf{up}.$$

Donde $\mathbf{u}$ es unidad y $\mathbf{p}$ es un polinomio de Weierstrass de grado 1, es decir, $\mathbf{p} = z_n - \mathbf{g}$, donde $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_{n-1}$ satisface $\mathbf{g}(\mathbf{0}') = 0$. Tomamos en un polidisco $D = D(\mathbf{0}', R') \times D(0, r_n) \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ a f, u y p los respectivos representantes de $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$. Si $\mathbf{z} = (\mathbf{z}', z_n) \in D$, entonces

$$f(\mathbf{z}) = u(\mathbf{z})\,[z_n - g(\mathbf{z}')]$$

donde u nunca se anula en D. Luego $f(\mathbf{z}) = 0$ si y solo si $p(\mathbf{z}', z_n) = z_n - g(\mathbf{z}') = 0$, esto es posible si $z_n = g(\mathbf{z}')$. En consecuencia el teorema de la función implícita resulta ser un corolario del teorema de preparación de Weierstrass.

Teorema 1.2.5. *Sea $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ un polinomio de Weierstrass en z_n de grado k. Entonces cualquier $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ puede ser escrito de manera única en la forma $\mathbf{f} = \mathbf{gh} + \mathbf{r}$, donde $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_n$ y $\mathbf{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ es un polinomio de grado menor a k. Además, si $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ entonces necesariamente $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Demostración. Ver página 70 en [GR09].

□

1.3 Algunas propiedades de series de potencias formales

En esta sección describimos resultados básico sobre series de potencias formales útiles para la prueba del teorema principal de esta tesis.

Definición 1.3.1. Decimos que f es una serie de potencias formal en las variables $z_1, \ldots, z_n$ sobre $\mathbb{C}$ si es de la forma

$$f(\mathbf{z}) = \sum_I C_I (\mathbf{z} - \mathbf{p})^I,$$

donde los $C_I \in \mathbb{C}$ y la serie no necesariamente converge.

1.3.1 El espacio de los polinomios homogéneos de grado k.

Sea $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_r) \in \mathbb{C}^r$ y $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, usaremos la notación de multi-índice, dada en la definición 1.1.1. Un elemento $a \in \mathbb{C}[[z_1, ..., z_r]]$ del anillo de las series de potencias formales en r variables se escribe como

$$a = \sum_{q \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}} a_q \mathbf{x}^q.$$

Si denotamos por

$$a^{(k)} = \sum_{|q|=k} a_q \mathbf{z}^q,$$

las componentes homogéneas de a, de grado k. Podemos escribir

$$a = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{(k)}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por

$$\mathcal{P}_k = \{f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_n] : f \text{ es un polinomio homogéneo de grado } k\}.$$

Observe que $\mathcal{P}_k \subseteq \mathbb{C}[[z_1, ..., z_n]]$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial de dimensión finita,

$$\dim(\mathcal{P}_k) = \begin{pmatrix} r+k+1 \\ r-1 \end{pmatrix},$$

(ver proposición 11.3 [Ati20]), cuya base estándar es

$$B_k = \left\{ M_k \in \mathcal{P}_k : M_k(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{q}} = z_1^{q_1} \cdot z_2^{q_2} \cdots z_n^{q_n}, \sum_{i=1}^{n} q_i = k \right\}.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_k : \mathcal{P}_k &\to \mathbb{R}_0^+ \\ f \to \|f\|_k &= \left\| \sum_{|q|=k} a_{\mathbf{q}} \mathbf{z}^{\mathbf{q}} \right\|_k := \sum_{||q|=k} |a_q|, \end{aligned}$$

define una norma sobre $\mathcal{P}_k$. En efecto, usamos la desigualdad triangular para $u = \sum_{|\mathbf{q}|=k} u_{\mathbf{q}} x^{\mathbf{q}}$, $w = \sum_{|\mathbf{q}|=k} w_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^{\mathbf{q}}$ en $\mathcal{P}_k$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ para obtener

$$\|u + \lambda w\|_k = \sum_{|\mathbf{q}|=k} |u_{\mathbf{q}} + \lambda w_{\mathbf{q}}| \leq \sum_{|\mathbf{q}|=k} |u_{\mathbf{q}}| + \sum_{|\mathbf{q}|=k} |\lambda||w_{\mathbf{q}}| \leq \|u\|_k + |\lambda|\|w\|_k$$

Lema 1.3.2. *Dado $u \in \mathcal{P}_k$, $w \in \mathcal{P}_l$ se tiene la siguiente desigualdad*

$$\|u \cdot w\|_{k+l} \leq \|u\|_k \|w\|_l. \tag{1.6}$$

Demostración.

$$\|u \cdot w\|_{k+l} = \| \sum_{|\mathbf{q}+\mathbf{r}|=k+l} u_{\mathbf{q}} \cdot w_{\mathbf{r}} \mathbf{z}^{\mathbf{q}+\mathbf{r}} \|_{k+l} = \sum_{|\mathbf{q}+\mathbf{r}|=k+l} |u_{\mathbf{q}} \cdot w_{\mathbf{r}}|$$

$$\leq \left(\sum_{|\mathbf{q}|=k} |u_{\mathbf{q}}| \right) \left(\sum_{|\mathbf{r}|=l} |w_{\mathbf{r}}| \right) = \|u\|_k \|w\|_l.$$

□

1.3.2 Mayorante de una serie formal

Basado en serie de potencias en una variable, caracterizamos la convergencia de una serie formal de varias variables en el espacio complejo a partir de un representante en una variable como definimos a continuación.

Definición 1.3.3. Dada una serie formal $a \in \mathbb{C}[[z_1, ..., z_k]]$ definimos el mayorante de a como la serie formal real en el parámetro t dado por

$$\hat{a}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \|a^{(k)}\|_k t^k \in \mathbb{R}[[t]]. \tag{1.7}$$

Mostremos ahora algunas propiedades de los mayorantes de una serie formal.

Observación 1.3.4. Si $a = \sum_{|\mathbf{q}|=k} \mathbf{z}^{\mathbf{q}}$ entonces

$$\|a^{(k)}\|_k = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix},$$

tal que $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ representa el número de combinaciones de m elementos en grupos de n.

Bastará entonces probar que el mayorante de una serie formal converge para saber que tal serie converge, esto se prueba en el siguiente lema.

Lema 1.3.5. *Una serie formal $a \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$ es convergente si y solo si su mayorante $\hat{a}$ es convergente.*

Demostración. De la definición de series de potencias convergentes en varias variables, si $\sum_{|\mathbf{q}|\geq 0} a_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^{\mathbf{q}}$ es convergentes, existen $R > 0$ y $M > 0$ tal que $\|x\| < R$ y

$$|a_q| \leq \frac{M}{R^{|q|}}.$$

De la observación 1.3.4,

$$\|a^{(k)}\|_k = \sum_{|q|=k} |a_q| \leq \sum_{|q|=k} \frac{M}{R^{|q|}} = \begin{pmatrix} r+k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \frac{M}{R^k}.$$

Para abreviar la notación, sea $S_{rk} = \left(\begin{array}{c} r+k-1 \\ r-1 \end{array} \right) = \frac{(r+k-1)(r+k-2)\ldots(r)}{k!}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} (S_{rk})^{1/k} = 1,$$

entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(S_{rk})^{1/k}}{R} t \right)^k = \frac{1}{1-\frac{t}{R}}$$

es convergente para $|t| < R$. Lo que prueba que a y $\tilde{a}$ tienen el mismo radio de convergencia. Recíprocamente, si $\tilde{a}$ es convergente para $|t| < \overline{R}$, $\overline{R} > 0$. Sea $R < \overline{R}$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \|a^{(k)}\|_k R^k$ converge, por tanto el término k converge a cero, es decir

$$\lim_{k \to +\infty} \|a^{(k)}\|_k R^k = 0.$$

Luego existe $M > 0$ tal que $\|a^{(k)}\|_k R^k \leq M$, para todo k.

□

Sobre el mayorante, las operaciones de suma y producto no define un homomorfismo entre el anillo de series de potencias formales, pero podemos obtener algunas propiedades que permita comparar series a partir de los coeficientes.

Definición 1.3.6. Sean las series de potencias formales en la variable t dadas por $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n t^n$, $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$, diremos que g domina a f y denotamos por

$$f \preceq g,$$

si $|f_n| \leq |g_n|$ para cualquier n, tal que $|.|$ denota la norma usual de números complejos.

La desigualdad (1.6) permite obtener una comparación entre series formales en esta sección.

Lema 1.3.7. *Sean $a, b \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$ entonces*

$$\widehat{a+b} \preceq \widehat{a} + \widehat{b}, \quad \widehat{a \cdot b} \preceq \widehat{a} \cdot \widehat{b}. \tag{1.8}$$

Demostración. La prueba es directa a partir del lema 1.3.5 y la definición 1.3.3. □

Sea la serie $g = \sum_{(\mathbf{q},J) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}} g_{\mathbf{q},J} \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \mathbf{y}^J \in \mathbb{C}[[x_1, ... x_r, y_1, ..., y_s]]$ tal que $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_r)$ y $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_s)$ denotamos

$$|g|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{(\mathbf{q},J) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}} |g_{\mathbf{q},J}| \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \mathbf{y}^J.$$

Presentamos ahora un resultados más general acerca de dominación de series mayorantes obtenidos por composición.

Proposición 1.3.8. *Sean $g \in \mathbb{C}[[x_1, ...x_r, y_1, ..., y_s]]$, $h = (h_1, ..., h_s) \in \mathbb{C}[[x_1, ...x_r]]^s$ tal que $h = (0, ..., 0) = \boldsymbol{0}$ y G la composición*

$$G(x_1, ...x_r) = g(x_1, ..., x_r, h_1, ..., h_s),$$

entonces

$$\widehat{G} \preceq |g|(t, ..., t, \widehat{h}_1, ..., \widehat{h}_s).$$

Demostración. Como $g \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s]]$, entonces

$$g = \sum_{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}} g_{\mathbf{q},J}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}\mathbf{y}^{J}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1, ...y_s)$. Para cada $J = (j_1, ...j_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{s}$ y $i = 1, ..., s$, teniendo en cuenta la notación anterior, cada potencia de $h_i \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$ lo podemos escribir como la suma de sus componentes homogéneas, esto es

$$h_i^{j_i} = \left(\sum_{q^i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}} h_{\mathbf{q}^i}\mathbf{x}^{\mathbf{q}^i}\right)^{j_i} = \sum_{k_i=j_i}^{\infty}(h_i^{j_i})^{(k_i)},$$

donde $(h_i^{j_i})^{(k_i)} = \sum_{|\mathbf{q}^i|=k_i} h_{\mathbf{q}^i}\mathbf{x}^{\mathbf{q}^i}$ entonces tenemos

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}} g_{\mathbf{q},J}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}h_1^{j_1}\cdots h_s^{j_s} = \sum_{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}} g_{\mathbf{q},J} \sum_{k_1\geq j_1,\cdots,k_s\geq j_s} \mathbf{x}^{\mathbf{q}}(h_1^{j_1})^{(k_1)}\cdots(h_s^{j_s})^{(k_s)}.$$

Notamos que cada término de $G(\mathbf{x})$ tiene grado $|\mathbf{q}| + k_1 + \cdots + k_s \geq |\mathbf{q}| + |J|$. Las componentes homogéneas de G de grado m son dados por

$$G^{(m)} = \sum_{\substack{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s} \\ |\mathbf{q}|+|J|\leq m}} \sum_{\substack{k_1\geq j_1,...k_s\geq j_s \\ k_1+\cdots+k_s=m-|\mathbf{q}|}} g_{q,J}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}(h_1^{j_1})^{(k_1)}\cdots(h_s^{j_s})^{(k_s)}.$$

Tomando norma y usando 1.6, tenemos

$$\|G^{(m)}\|_m \leq \sum_{\substack{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s} \\ |\mathbf{q}|+|J|\leq m}} \sum_{\substack{k_1\geq j_1,...k_s\geq j_s \\ k_1+\cdots+k_s=m-|\mathbf{q}|}} |g_{\mathbf{q},J}|\|(h_1^{j_1})^{(k_1)}\|_{k_1}\cdots\|(h_s^{j_s})^{(k_s)}\|_{k_s}. \tag{1.9}$$

Por otro lado, se tiene el mayorante

$$\hat{h}_i = \sum_{k_i=1}^{+\infty}\|h_i^{(k_i)}\|_{k_i}t^{k_i} = \|h_i^{(1)}\|_1 t + \cdots + \|h_i^{(k_i)}\|_{k_i}t^{k_i} + \cdots,$$

ahora tomamos la j_i-ésima potencia del mayorante

$$(\widehat{h}_i)^{j_i} = \left(\sum_{k_i=1}^{+\infty} \|h_i^{(k_i)}\|_{k_i} t^{k_i}\right)^{j_i} = \left(\|h_i^{(1)}\|_1 t + \cdots + \|h_i^{(k_i)}\|_{k_i} t^{k_i} + \cdots\right)^{j_i}.$$

Ordenando según el grado,

$$\hat{h}_i^{j_i} = \sum_{k_i=j}^{+\infty} \left(\sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k_i} \|h_i^{(l_1)}\|_{l_1} \|h_i^{(l_2)}\|_{l_2} \cdots \|h_i^{(l_j)}\|_{l_i} \right) t^k.$$

Por otro lado, si escribimos la j_i-ésima potencia del mayorante $\widehat{h}_i$ como

$$\widehat{h}_i^{j_i} = \sum_{k_i=j_i}^{+\infty} (\widehat{h}_i^{j_i})_{k_i} t^{k_i}.$$

Para lograr el resultado será suficiente comparar los coeficientes de cada serie de potencia, es decir

$$\|(h_i^{j_i})^{(k_i)}\| \leq (\widehat{h}_i^{j_i})_{k_i}. \tag{1.10}$$

En efecto, por simplicidad sea $h = h_i$, $j = j_i$ y escribimos $h = \sum_{k\geq 1} h^{(k)}$, la suma de las componentes homogéneas de orden k de h. Las componentes de grado k de h^j es entonces

$$(h^j)^{(k_i)} = \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k} h^{(l_1)} h^{(l_2)} \cdots h^{(l_j)}.$$

De esta manera se tiene

$$\|(h^j)^{(k)}\|_k \leq \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k} \|h^{(l_1)} h^{(l_2)} \cdots h^{(l_1)}\|_k \leq \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k} \|h^{(l_1)}\|_{l_1} \|h^{(l_2)}\|_{l_2} \cdots \|h^{(l_j)}\|_{l_j}.$$

entonces por definición,

$$|g|(t,...,t,\widehat{h}_1,...\widehat{h}_s) = \sum_{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}} |g_{\mathbf{q},J}| t^{|q|} \left(\sum_{k_1=j_1} (\widehat{h}_1^{j_1})_{k_1} t^{k_1}\right) \cdots \left(\sum_{k_s=j_s} (\widehat{h}_s^{j_s})_{k_s} t^{k_s}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s} \\ |\mathbf{q}|+|J|\leq m}} \sum_{\substack{k_1\geq j_1,...k_s\geq j_s \\ k_1+\cdots+k_s=m-|\mathbf{q}|}} |g_{\mathbf{q},J}| (\widehat{h}_1^{j_1})_{k_1} \cdots (\widehat{h}_s^{j_s})_{k_s} t^{k_s} \right) t^m. \tag{1.11}$$

De manera similar a lo realizado para el mayorante de G tenemos

$$(h_i)^{j_i} = \left(\sum_{k_i=1}^{+\infty} h_i^{(k_i)}\right)^{j_i} = \left(h_i^{(1)} t + \cdots + h_i^{(k_i)} + \cdots\right)^{j_i},$$

se ordena según el grado

$$h_i^{j_i} = \sum_{k_i=j_i}^{+\infty} \left(\sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k_i} h_i^{(l_1)} h_i^{(l_2)} \cdots h_i^{(l_j)} \right) = \sum_{k_i=j_i}^{+\infty} \left(h_i^{j_i}\right)^{(k_i)}$$

Tomando la norma $\|.\|_k$

$$\left\| \left(h_i^{j_i}\right)^{(k_i)} \right\|_{k_i} = \left\| \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k_i} h_i^{(l_1)} h_i^{(l_2)} \cdots h_i^{(l_j)} \right\|_k$$

De la desigualdad triangular y el lema 1.3.2

$$\| \left(h_i^{j_i}\right)^{(k_i)} \|_{k_i} \leq \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k_i} \left\| h_i^{(l_1)} h_i^{(l_2)} \cdots h_i^{(l_j)} \right\|_k \leq \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_j=k_i} \|h_i^{(l_1)}\|_{l_1} \|h_i^{(l_2)}\|_{l_2} \cdots \|h_i^{(l_j)}\|_{l_j}.$$

Esto prueba (1.10) y por tanto se tiene el resultado.

$\square$

Proposición 1.3.9. *Sea $a \in \mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]] = \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$ una serie de potencias formal, entonces para $i = 1, ..., r$*

$$\widehat{\frac{\partial a}{\partial x_i}} \preceq \frac{d\widehat{a}}{dt}.$$

Demostración. Escribiendo $a = \sum_{\mathbf{q}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} a_{\mathbf{q}} x^{\mathbf{q}} = \sum_{k\geq 0} a^{(k)}$ con la misma notación introducida anteriormente. Tenemos que para cualquier $k \geq 1$, $\frac{\partial a^{(k)}}{\partial x_i}$ es la componente homogénea de $\frac{\partial a}{\partial x_i}$ de orden $k-1$. Por lo tanto

$$\widehat{\frac{\partial a}{\partial x_i}} = \sum_{k\geq 1} \left\| \frac{\partial a^{(k)}}{\partial x_i} \right\|_{k-1} t^{k-1}. \tag{1.12}$$

Por otro lado

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = \sum_{\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0},\ |q|=k} q_i a_{\mathbf{q}} x^{\mathbf{q}-e_i},$$

donde e_i es el i-ésimo vector de la base estándar de $\mathbb{R}^r$ y $|q_i a_{\mathbf{q}}| \leq |\mathbf{q}||a_{\mathbf{q}}|$ para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$. Así

$$\left\| \frac{\partial a^{(k)}}{\partial x_i} \right\|_{k-1} \leq k \left\| \frac{\partial a}{\partial x_i} \right\|_k,$$

luego de (1.12) y la definición de series mayorante dado en (1.7) tenemos le relación pedida.

$\square$

1.4 Variedades diferenciales

Así como los espacios topológicos forman el dominio natural de las funciones continuas, las variedades diferenciales son el dominio de las aplicaciones diferenciables. Para comprender mejor la definición en principio lo presentaremos en $\mathbb{R}^n$ luego lo extenderemos a $\mathbb{C}^n$.

Definición 1.4.1. Una carta local o sistemas de coordenadas en el espacio topológico M es un par (U, φ) siendo U un abierto de M y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo de U sobre el abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4.2. Un atlas local $\mathcal{A}$ de dimensión n de clase C^r sobre M es una colección de cartas locales cuyos dominios cubren M y tal que si (U, φ), $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ y $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, entonces la aplicación

$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi\left(U \cap \widetilde{U}\right) \to \widetilde{\varphi}\left(U \cap \widetilde{U}\right)$$

es un difeomorfismo C^r entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. A los difeomorfismos $\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ los llamamos cambio de coordenadas.

A partir de ahora podemos extender la diferenciabilidad a aplicaciones entre espacios topológicos que poseen un atlas de clase C^r, $r \geq 1$ de la siguiente manera: Dado M y N espacios topológicos de dimensión m, n respectivamente, y los atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de clase C^r en M y N respectivamente. Una función $f : M \to N$ es diferenciable de clase C^k, con $k \leq r$, si f es continua y para cada $x \in M$ existen cartas locales $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, con $x \in U$ y $f(x) \in V$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

es de clase C^k.

Siendo el cambio de coordenadas $\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ difeomorfismos de clase C^r, con $r \geq k$, la definición es independiente de las cartas locales elegidas.

Definición 1.4.3. El atlas $\mathcal{A}$ de clase C^r sobre M que contiene todas las cartas locales $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$, donde los cambios de coordenadas, con elementos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$,

$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \widetilde{U}) \to \widetilde{\varphi}(U \cap \widetilde{U})$$

son difeomorfos, es llamado atlas máximo.

Los dominios de las cartas locales de un atlas máximo de M forman una base de la topología de M. Además todo atlas de dimensión m de clase C^r sobre M, está contenido en un único atlas de dimensión m y clase C^r sobre M, llamado estructura diferenciable (ver [War13]).

Definición 1.4.4. Una variedad diferenciable de clase C^r y dimensión m es un espacio topológico de Hausdorff M, con base numerable, junto con una estructura diferenciable de dimensión m y de clase C^r.

Ejemplo 1.4.5. Podemos obtener de manera natural una estructura diferenciable del espacio $\mathbb{R}^n$, como se muestra a continuación. Sea M la familia maximal que cumple la definición 1.4.2, conteniendo $(\mathbb{R}^n, Id)$ donde $Id : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad.

Ejemplo 1.4.6. Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita m. Entonces de forma natural definimos una estructura diferencial de la siguiente manera: sea $\{e_j\}_{1\leq j\leq m}$ una base de V y $\{\varphi_j\}_{1\leq j\leq m}$ una base del espacio dual de V, es decir $\varphi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es tal que

$$\varphi_j(e_k) = \begin{cases} 1; & j = k \\ 0; & j \neq k \end{cases}$$

Luego para $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) \in V$, $\varphi_j(\mathbf{x}) = x_i$. Entonces la familia $\{\varphi_j\}_{1\leq j\leq m}$ son las funciones de un sistema de coordenadas locales (que puede ser visto de forma global) sobre V. Además este sistema de coordenadas es único y el cambio de coordenadas es dado a partir de una matriz constante no singular, este cambio es de clase C^∞ lo que permite establecer una estructura diferencial sobre V independiente de la elección de coordenadas.

Ejemplo 1.4.7. La esfera unitaria S^n definida con la topología inducida de $\mathbb{R}^{n-1}$ posee una estructura de variedad C^r de dimensión n, para todo $r \geq 1$, es decir de clase C^∞.

A partir de este concepto, una aplicación $f : M \to N$ entre espacios topológicos M y N dotados de una estructura diferenciable C^r, es de clase C^k, $k \geq r$, si y solo si para cada $x \in M$ existen cartas locales (U, φ) y (V, ψ) en M y N tales que $x \in U$, $f(U) \subset V$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^k.

Definición 1.4.8. Sean M y N dos variedades diferenciales, una aplicación $f : M \to N$ de clase C^r, $r \geq 1$ es un difeomorfismo cuando posee inversa $f^{-1} : N \to M$ de clase C^r. En este caso decimos que las variedades son difeomorfas y denotamos como $M \simeq N$.

Ejemplo 1.4.9. El espacio $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión $2n$, por lo visto en el ejemplo 1.4.6, $\mathbb{C}^n$ posee de manera natural una estructura de variedad diferenciable real de dimensión $2n$. Si $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$ e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, entonces

$$\{e_1, ..., e_n, \mathrm{i}e_1, ...\mathrm{i}e_n\},$$

es la base real de $\mathbb{C}^n$ y la base dual asociada a esta base determina un sistema de coordenadas de forma global en $\mathbb{C}^n$.

1.4.1 Variedades holomorfas complejas

Recordar que en el espacio complejo, hablar de funciones analíticas complejas es equivalente a hablar de funciones holomorfas. Para definir una estructura diferenciable holomorfa sobre un espacio $2n$ dimensional, se requiere que las coordenadas locales tengan rango en $\mathbb{C}^n$ y además holomorfas.

Definición 1.4.10. Diremos que M es una variedad holomorfa compleja (o simplemente variedad compleja) de dimensión m, si está unido a un atlas holomorfo $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, cuyo cambio de coordenadas son biholomorfismos.

Ejemplo 1.4.11. (Espacio proyectivo). Sea $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, para $n \geq 1$, el conjunto de rectas en $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen, este conjunto lo podemos definir formalmente de la siguiente manera: Sean $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2$ si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\mathbf{z}_1 = \lambda \mathbf{z}_2$. Esta relación es de equivalencia y denotamos a la clase que contiene a $\mathbf{z}_1$ como $[\mathbf{z}_1]$. El conjunto de las clases de equivalencia es el espacio proyectivo complejo $n-$dimensional denotado por $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Es decir $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) / \sim$.

Para el caso $n = 1$, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es difeomorfo a la esfera bidimensional. El espacio $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ tiene estructura de variedad compleja de dimensión n.

Ejemplo 1.4.12. (Superficie de Riemann) Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que

$$\mathrm{grad}_{\mathbb{C}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) \neq (0,0).$$

El conjunto de puntos que resuelven la ecuación

$$f(z_1, z_2) = 0,$$

es llamado superficie de Riemann. Dicha superficie es una variedad compleja unidimensional. Por ejemplo el plano complejo $\mathbb{C}$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

En $\mathbb{C}^n$ toda variedad compleja es orientable, (ver tomo 2, página 28 en [DFN00]) es decir, podemos cubrir la variedad M con una familia de sistema coordenados tal que para cada punto $\mathbf{p} \in M$ el cambio de coordenadas es biholomorfo. Además toda superficie real se convierte en superficie de Riemann si y solo si es orientable. Por ejemplo la esfera y el toro admiten estructura compleja y son orientables, por tanto se pueden identificar como superficies de Riemann; sin embargo la Banda de Möbius, la Botella de Klein y el plano proyectivo real $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ no, pues son superficies no orientables.

Definición 1.4.13. Sea $f : M \to N$ una aplicación entre las variedades complejas M y N de dimensión m y n respectivamente. Se dice que f es un holomorfismo (o morfismo) si para todo par de cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) de M y N respectivamente, la aplicación

$$\varphi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^m \to \varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{C}^n$$

es un holomorfismo.

La biyección (isomormfismo) de variedades complejas $f : M \to N$, es un biholomorfismo si f y f^{-1} son holomorfas.

Notar que sobre un mismo espacio topológico M puede haber dos estructuras de variedades complejas M' y M'' para las cuales la aplicación identidad

$$\mathrm{id} : M' \to M''$$

es un biholomorfismo.

El producto $M \times N$ de dos variedades complejas M y N heredan de forma natural, estructura de variedad analítica compleja con la propiedad de que las proyecciones $M \times N \to M$ y $M \times N \to N$ son holomorfas.

1.4.2 Derivación y el espacio tangente

A continuación damos el concepto de derivada de una aplicación entre dos variedades complejas así como el espacio tangente, teniendo en cuenta la interpretación geométrica dada en espacios euclidianos. Sea M una variedad compleja, consideremos la curva $\alpha : \mathbb{D}_R \to M$ tal que $\alpha(0) = p \in M$. La aplicación α es llamada suave o regular alrededor de p si $\alpha'(0) \neq 0$, es decir, dada una carta (U, φ) centrada en p, se cumple $(\varphi \circ \alpha)'(0) \neq 0$. Dos curvas α_1 y α_2 se denominan tangente en el origen si $\alpha_1'(0) = \alpha_2'(0)$, es decir, $(\varphi \circ \alpha_1)'(0) = (\varphi \circ \alpha_2)'(0)$. Sean α_1 y α_2 dos curvas regulares, decimos que $\alpha_1 \sim \alpha_2$ si y solo si son tangentes en el origen. Esta relación resulta ser una relación de equivalencia y el espacio cociente del conjunto de todos los gérmenes de curvas en p define el espacio tangente T_pM.

A partir de esta sección consideremos a M y N variedades complejas de dimensión m y n respectivamente.

Sobre el espacio $\mathcal{O}_{M,p}$, de gérmenes de funciones $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfas en $p \in M$, la aplicación $D : \mathcal{O}_{M,p} \to \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades

- $D(f + g) = D(f) + D(g)$,
- $D(f.g) = g(p)D(f) + f(p)D(g)$,

es llamada derivación sobre $\mathcal{O}_{M,p}$.

Definición 1.4.14. Una aplicación, $f : M \to N$ es llamada una inmersión si para todo $p \in M$, $Df(p) : T_pM \to T_qN$, con $q = f(p)$, es inyectiva. Diremos que f es una sumersión si para todo $p \in M$, $Df(p)$ es sobreyectiva.

Teorema 1.4.15. ***(Forma local de las inmersiones)*** *Sean M y N dos variedades complejas de dimensión m y n respectivamente ($n > m$), $f : M \to N$ una aplicación holomorfa. Supongamos que $Df(p) : T_pM \to T_qN$, con $f(p) = q$ es inyectiva. Entonces existen cartas locales $\varphi : U \to \mathbb{C}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{C}^n$, con $q \in V$, una descomposición $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$ tales que $f(U) \subset V$ y la expresión de f localmente en (U, φ) y (V, ψ) es dada por $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = (z, \mathbf{0})$, si $z \in \varphi(U)$. Es decir, f es localmente equivalente a la inmersión lineal $z \mapsto (z, \mathbf{0})$.*

Demostración. Sean las cartas locales (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) de p y $f(p)$ en M y N respectivamente, done $\varphi_1(U_1) \subset \mathbb{C}^m$ y $\psi_1(V_1) \subset \mathbb{C}^n$. Como $df(p)$ es inyectiva considerando $\varphi_1(p) = \mathbf{0}$, $\psi_1(f(p)) = \mathbf{0}$, entonces $d(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1)(\mathbf{0})$ es inyectiva.

Sea $h = \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi_1(U_1) \to \psi_1(V_1)$ y $E = dh(\mathbf{0})(\mathbb{C}^m)$ un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$, entonces podemos descomponer $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$. Por completación de base podemos escribir $\mathbb{C}^n = E \oplus F$ donde F es un subespacio vectorial en $\mathbb{C}^n$ de dimensión $n - m$ con base $\{v_1, \ldots, v_{n-m}\}$.

Definamos la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} &\to E \oplus F \\ (z_1; z_2) &\mapsto g(z, w) := h(z) + \sum_{i=1}^{n-m} w_i v_i, \end{aligned}.$$

Siendo h un holomorfismo, con $dh(\mathbf{0})$ inyectivo, entonces

$$dg(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} dh(\mathbf{0}) & * \\ \mathbf{0} & A_{n-m} \end{bmatrix},$$

donde A_{n-m} es una matriz formada por los vectores columna $\{v_1, \ldots, v_{n-m}\}$, es un isomorfismo en $\mathbb{C}^n$. Del teorema de la aplicación inversa (ver página 27 en [KK11]) existe una vencindad $U_2 \times W_2 \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$ de $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $V_2 \subset \mathbb{C}^n$ de $g(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tal que $g|_{U_2 \times W_2} : U_2 \times W_2 \to V_2$ es un biholomorfismo. Como $g(x, \mathbf{0}) = h(z)$ para todo $z \in U_2$ entonces $g^{-1}(h(z)) = (z, \mathbf{0})$. Hacemos $\psi = g^{-1} \circ \psi_1$, $V = \psi^{-1}(V_2)$ y $\varphi = \varphi_1|_{U_2 \times W_2}$, $U = \varphi^{-1}(U_2 \times W_2)$, entonces para todo $z \in \varphi(U)$ $(\psi \circ f \varphi^{-1})(z) = (z, \mathbf{0})$. $\square$

Teorema 1.4.16. ***(Forma local de las sumersiones)*** *Sean M y N dos variedades complejas de dimensión m y n respectivamente, con $m > n$, y $f : M \to N$ una aplicación holomorfa. Supongamos que $Df(p) : T_pM \to T_qN$, con $f(p) = q$ es sobreyectiva. Entonces existen cartas locales $\varphi : U \to \mathbb{C}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{C}^n$, con $q \in V$, una descomposición $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ tales que $f(u) \subset V$, y la expresión de f localmente en (U, φ) y (V, ψ) es dado por $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z, w) = z$. Es decir f es localmente equivalente a la proyección $(z, w) \mapsto z$.*

Demostración. Sean (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) dos cartas locales de p y $f(p)$ respectivamente. Podemos descomponer $\varphi_1(U_1) = W_1 \times W_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ además suponga que

$\varphi_1(p) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ y $\psi_1(f(p)) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$. Puesto que $df(p)$ es sobreyectiva, entonces para

$$\beta = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi_1(U_1) \to \psi(V_1)$$

$d\beta(\mathbf{0},\mathbf{0})$ también lo es. Definamos la función

$$\begin{aligned} g : W_1 \times W_2 &\to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} \\ (z_1; z_2) &\mapsto g(z_1, z_2) := (\psi_1(f(z_1, z_2)), z_2), \end{aligned}$$

tenemos que

$$dg(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} d\psi_1(f(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)) & * \\ \mathbf{0} & I_{m-n} \end{bmatrix}$$

es un isomorfismo en $\mathbb{C}^m$. Del teorema de la función inversa (ver página 27 en [KK11]), existe una vecindad $W_{11} \times W_{22}$ de $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ tal que

$$h := g^{-1} : W_{11} \times W_{22} \to Z,$$

con $Z = g^{-1}(W_{11} \times W_{22})$, es un biholomorfimo. Como g mantiene fija la segunda componente, h también lo mantiene. Luego dado $(z, w) \in W_{11} \times W_{22}$, podemos escribir $h(z, w) = (h_1(z, w), w)$. Además se tiene

$$(z, w) = (g \circ h)(z, w) = g(h(z, w)) = g(h_1(z, w), y) = (\beta(h_1(z, w), w), w) = (\beta(h(z, w), w)),$$

entonces $(\beta \circ h)(z, w) = z$. Definimos: el biholomorfimo $\varphi = h^{-1} \circ \varphi_1$, los abiertos $U = (\varphi_1^{-1} \circ h)(W_{11} \times W_{22})$, $V = \psi_1^{-1}(f(U))$ y $\psi = \psi_1|_V$. Por lo tanto

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z, w) = z, \text{ para todo } (z, w) \in U.$$

□

A continuación presentamos el concepto de subvariedad y resultados que permite encontrar dichas subvariedades a partir de aplicaciones diferenciales y bajo cierta condiciones.

Definición 1.4.17. Un subconjunto $N \subset M$ en una variedad compleja M es una subvariedad de dimensión n de M, si para todo $p \in N$ existe una carta local, (U, φ) y polidiscos V, W conteniendo a $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ y $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m-n}$ respectivamente tal que $\varphi(U) = V \times W$ y $\varphi(N \cap U) = V \times \{\mathbf{0}\}$. En esta situación decimos que la codimensión de N es $m - n$.

Teorema 1.4.18. *Sea la aplicación $f : M \to N$ entre las variedades complejas M y N tal que $Df(p) : T_pM \to T_qN$ es inyectiva, con $q = f(p)$. Entonces existe una vecindad $U \subset M$ conteniendo p tal que $f(U) \subset N$ es una subvariedad de dimensión m.*

Demostración. Podemos determinar coordenadas locales (U, φ) en M y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ en N tal que $p \in U$ y $q = f(p) \in \tilde{U}$. Siendo $Df(p)$ inyectiva, del teorema 1.4.15 $f(U) \subset \tilde{U}$ y

$\tilde{\varphi}(\varphi) = V \times W$, además podemos tomar $V \subset \mathbb{C}^n$ y $W \subset \mathbb{C}^m$ polidiscos conteniendo el origen de los espacios correspondientes tal que

$$\left(\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(z, \mathbf{0}) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m},$$

para todo $z \in \varphi(U)$ y

$$\tilde{\varphi}(f(U)) = V \cap \{\mathbf{0}\}.$$

Esto prueba que $f(U)$ es una subvariedad de N de dimensión m.

$\square$

Sea la aplicación $f : M \to N$ entre las variedades complejas M y N. Si $p \in M$ es tal que $Df(p) : T_pM \to T_qN$, con $q = f(p)$, es sobreyectiva diremos que p es un punto regular de f.

Cuando $q \in N$ es tal que $f^{-1}(q) = \emptyset$ o $f^{-1}(q)$ es constituido solo por puntos regulares, diremos que q es un valor regular de f. Un punto $q \in N$ que no es un valor regular de f será llamado un valor crítico de f.

Teorema 1.4.19. *Sea $f : M \to N$ es una aplicación holomorfa entre variedades complejas. Si $q \in N$ es un valor regular de f y $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad holomorfa de M de codimensión n.*

Demostración. Si q es un valor regular de f, entonces dado $p \in f^{-1}(q)$, $df(p)$ es sobreyectiva. Del teorema 1.4.16 existen dos cartas locales (φ, U), (ψ, V) y una descomposición $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ tal que

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} &\to \varphi(V) \subset \mathbb{C}^n \\ (z, w) &\mapsto z. \end{aligned}.$$

Si hacemos $h := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, vemos que $h|_{V \times \{\mathbf{0}\}}$ define un isomorfismo de $V \times \{\mathbf{0}\}$ en V. Sea $N = f^{-1}(q)$ y $\overline{U} = f^{-1}(\psi^{-1}(V))$, entonces $\varphi(N \cap \overline{U}) = g(V) = V \times \mathbf{0}$, lo que prueba el resultado. $\square$

1.5 Campos vectoriales

Definición 1.5.1. Sea M una variedad compleja de dimensión m. El conjunto TM dado por la unión de los espacios tangentes $T_{\mathbf{p}}M$, $\mathbf{p} \in M$, es decir

$$TM = \bigcup_{i \in M} T_{\mathbf{p}}M,$$

es llamado fibrado tangente de M.

A este espacio se puede asignar una estructura de variedad compleja de dimensión $2m$ de la siguiente forma. Si (U, φ) es una carta local en M, entonces $(TU, D\varphi)$ es una carta de TM, donde para todo $v \in T_{\mathbf{p}}M$

$$\begin{array}{rrl} D\varphi: & TU \to & U \times \mathbb{C}^m \\ & v \mapsto & D\varphi(v) = \quad (\varphi(\mathbf{p}), D_{\mathbf{p}}\varphi(v)). \end{array}$$

La aplicación $\pi : TM \to M$ tal que para cada vector tangente $v \in T_{\mathbf{p}}M$, $\pi(v) = \mathbf{p}$ es un morfismo llamado proyección natural.

Definición 1.5.2. Un campo vectorial holomorfo X sobre M es un morfismo holomorfo

$$X : M \to TM,$$

tal que $\pi \circ X = id_M$, donde id_M es la aplicación identidad en M.

Observamos que si $\mathbf{p} \in M$, entonces para $v \in T_{\mathbf{p}}M$, $X(\mathbf{p}) = X|_{\mathbf{p}} = v$. Denotaremos por $\mathcal{O}_M$ al anillo de gérmenes de funciones $f : M \to \mathbb{C}$ analíticas definidas en una variedad analítica compleja M y por $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$ el anillo de funciones analíticas en $\mathbf{p}$. Además sobre una carta local (U, φ) en $\mathbf{p} \in M$ y $f \in \mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$, tenemos la derivación $\frac{\partial}{\partial z_i}|_{\mathbf{p}}$ dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial z_i}\right|_{\mathbf{p}} (f) = \frac{\partial}{\partial z_i}(f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{q}),$$

tal que $\varphi(\mathbf{p}) = (z_1(\mathbf{p}), ..., z_m(\mathbf{p})) = \mathbf{q}$. El conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}(\mathbf{p}), ..., \frac{\partial}{\partial z_m}(\mathbf{p}) \right\},$$

es una base del espacio de derivaciones sobre $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$, (ver página 24 en[CCD13]) pero también es una base del espacio tangente $T_{\mathbf{p}}M$, de esta manera podemos identificar $T_{\mathbf{p}}M$ como $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$. Además el conjunto de campo de vectores sobre M es un $\mathbb{C}$ espacio vectorial de dimensión finita.

Ejemplo 1.5.3. En el ejemplo 1.4.11 vimos que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, es una variedad compleja. Las cartas locales son dador por (U_0, φ_0) y (U_1, φ_1), donde

$$U_0 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} : z_0 \neq 0\}, \; U_1 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} : z_1 \neq 0\}$$

$$\begin{array}{rlrl} \varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C} & & \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C} & \\ (1, z) \mapsto z & & (z, 1) \mapsto z. & \end{array}$$

Además en U_0 podemos identificar (z_0, z_1) con $(1, \frac{z_1}{z_0})$ y en U_1 (z_0, z_1) con $(\frac{z_0}{z_1}, 1)$.

Si $(z_0, z_1) \in U_0 \cap U_1$ entonces $z_0, z_1 \neq 0$ y

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \varphi_1(U_0 \cap U_1) \;,$$

$$\left(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}\right)\left(\frac{z_1}{z_0}\right) = \varphi_1(1, \frac{z_1}{z_0}) = \varphi_1(z_0, z_1) = \varphi_1(\frac{z_0}{z_1}, 1) = \frac{z_0}{z_1}.$$

De forma análoga $\left(\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}\right)\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \frac{z_1}{z_0}$, por tanto el intercambio de coordenadas es dado por la aplicación

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

De la definición 1.5.1

$$T\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = TU_0 \cup TU_1,$$

teniendo a $\left\{\frac{\partial}{\partial z}\right\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial w}\right\}$ las bases de TU_0 y TU_1 respectivamente tal que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\partial}{\partial w} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial}{\partial w}.$$

Así $TU_0 \approx U_0 \times \mathbb{C}$ y $TU_1 \approx U_1 \times \mathbb{C}$, y por tanto

$$T\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}.$$

Definición 1.5.4. Sea X un campo vectorial holomorfo sobre una variedad compleja M, diremos que $\mathbf{p} \in M$ es punto regular de X si $X(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, caso contrario diremos que $\mathbf{p}$ es un punto singular.

Sobre un punto regular $\mathbf{p} \in M$ del campo vectorial X, podemos identificar localmente al campo X como un campo constante, como se expone a continuación.

Definición 1.5.5. Sean M, N dos variedades complejas y X, Y dos campos de vectores sobre M y N respectivamente. Diremos que X y Y son conjugados si existe un biholomorfimo $\Phi : M \to N$ tal que

$$D\Phi \circ X = Y \circ \Phi.$$

Sean $\mathbf{p} \in M$ y $\mathbf{q} \in N$, diremos que X y Y son localmente conjugados en $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ si existe dos abiertos $U \subset M$ y $V \subset N$ con $\mathbf{p} \in U$, $\mathbf{q} \in V$ y un biholomorfismo $\Phi : U \to V$ tal que $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$,

$$D\Phi \circ (X|_U) = Y|_V \circ \Phi.$$

Sobre el espacio afín $\mathbb{C}^n$ diremos que un campo vectorial X es constante si es dado por

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ son constantes.

Teorema 1.5.6. (Teorema de rectificación). *Sea M una variedad compleja, X un campo de vectores sobre M y $\mathbf{p} \in M$ un punto regular, entonces X es un campo localmente conjugado en $\mathbf{p}$ a un campo constante.*

Demostración. Ver página 37 en [CCD13]. □

1.6 Gérmenes de variedades

Los ceros de una función de varias variables complejas forman un conjunto que cumplen un rol importante en el estudio de las funciones holomorfas. Subvariedades analíticas u holomorfas son definidos localmente como el conjunto de los ceros de ciertas funciones. En esta sección consideramos los conjuntos definidos (localmente) por un sistema de ecuaciones analíticas llamados conjuntos analíticos. Los resultados aquí presentados son tomados de [Gun90], [GR09], [CCD13].

De lo definido en 1.4.17, para $U \subset \mathbb{C}^n$, un dominio $V \subset U$ es una subvariedad analítica si para cada $\mathbf{p} \in V$ existe una vecindad $U_{\mathbf{p}}$ de $\mathbf{p}$ y funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_k$ en $U_{\mathbf{p}}$ tal que

$$V \cap U_{\mathbf{p}} = \{z \in U : f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_k(\mathbf{z}) = 0\}.$$

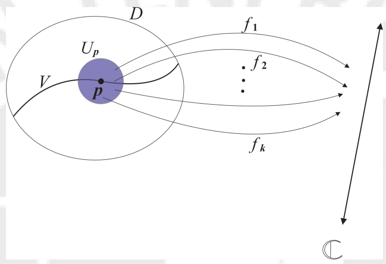

Figura 1.2: Subvariedad analítica

Denotaremos a este conjunto como

$$V(f_1, ..., f_k) = \{\mathbf{z} \in U_{\mathbf{p}} : f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_k(\mathbf{z}) = 0\}.$$

Ejemplo 1.6.1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo V son subvariedades analíticas triviales del conjunto U pues $\emptyset$ es el conjunto de ceros de la función constante $f = k$ y D es el conjunto de ceros de función cero.

Ejemplo 1.6.2. El conjunto $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2^2 - z_1^3 = 0\}$ define una subvariedad analítica.

Teorema 1.6.3. *Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ la colección de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Entonces $V(\mathcal{F}) = \{\boldsymbol{z} \in U : f_\alpha(\boldsymbol{z}) = 0$ para todo $f_\alpha \in \mathcal{F}\}$, es una subvariedad analítica de U.*

Demostración. Ver página 86 en [GR09].

□

Definición 1.6.4. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ conteniendo el origen de $\mathbb{C}^n$. Diremos que A y B son equivalentes en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ si existe U una vecindad de $\mathbf{0}$, tal que $A \cap U = B \cap U$. Esta relación es de equivalencia y las clases de equivalencia son llamados germen de un conjunto. Denotaremos a la clase de equivalencia de un conjunto A como $\mathbf{A}$.

Sea $f \in \mathcal{O}_n$ un germen de función analítica en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ y $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{C}, f(0))$ un representante de $\mathbf{f}$ con dominio U. Denotaremos por $\mathbf{V}(\mathbf{f})$ al germen conjunto $\{\mathbf{z} \in U : f(\mathbf{z}) = 0\}$. Definamos ahora cómo un germen $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ se anula sobre un germen de un conjunto.

Definición 1.6.5. Si $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n$ y $\mathbf{V}$ el germen de un conjunto. Diremos que $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{V}$ si $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}(\mathbf{f})$.

Definición 1.6.6. Sea $\mathbf{V}$ el germen de un conjunto, diremos que $\mathbf{V}$ es el germen de una variedad analítica, si existen gérmenes de funciones $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k \in \mathcal{O}_n$ tal que

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{f}_1) \cap \dots \cap \mathbf{V}(\mathbf{f}_k).$$

El conjunto $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{f}_1) \cap \dots \cap \mathbf{V}(\mathbf{f}_k)$ muchas veces es escrito como $\mathbf{V}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ o bien por $\{\mathbf{f}_1 = 0, \mathbf{f}_2 = 0, \dots, \mathbf{f}_k = 0\}$.

Observación 1.6.7. Si f_1 y f_2 son representantes del germen $\mathbf{f}$ los dominio U_1 y U_2 respectivamente, entonces los conjuntos $\{\mathbf{z} \in U_1 : f_1(\mathbf{z}) = 0\}$ y $\{\mathbf{z} \in U_2 : f_2(\mathbf{z}) = 0\}$ son equivalentes, además la unión e intersección de dos gérmenes de conjuntos son también gérmenes de conjuntos.

Sea $\mathbf{f}$ un elemento en $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_n$ y f su respectivo representante, la ecuación $f = 0$ define un subconjunto de un abierto de $\mathbb{C}^n$. Este conjunto que son los ceros de la función holomorfa f es llamado hipersuperficie analítica (y define una subvariedad analítica). Si cambiamos de representante de $\mathbf{f}$, obtenemos otro conjunto, pero ambos tienen el mismo germen en el origen. Diremos que $V(\mathbf{f})$ es un germen de hiperficies analíticas. Si escribimos $f = f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_k^{n_k}$, obtenemos una descomposición de $f = 0$ como unión de gérmenes de hiperficies irreducibles $f_j = 0$. Podemos definir a partir de ello un ideal de gérmenes en el origen.

Definición 1.6.8. Sea $\mathbf{V}$ el germen de una variedad analítica en $\mathbf{0}$, diremos que el conjunto denotado por $\mathcal{I}(\mathbf{V})$ es un ideal de $\mathbf{V}$ si $\mathcal{I}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n : \mathbf{f} \text{ se anula en } \mathbf{V}\}$

Proposición 1.6.9. *Con las notaciones de la definición 1.6.8, el conjunto $\mathcal{I}(\mathbf{V})$ es un ideal del anillo $\mathcal{O}_n$. Además dado $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_n$ entonces $\bigcap_{\mathbf{f} \in \mathcal{A}} \mathbf{V}(\mathbf{f})$ es un germen de variedad analítica.*

Demostración. Ver página 87 en[GR09]. □

En la proposición 1.8.4 mencionamos propiedades importantes de estos ideales. El par $(\mathbf{V}, \mathbf{0})$ denota al germen de un conjunto analítico (variedad analítica) en el origen de $\mathbb{C}^n$. El espacio máximo que lo contiene, como un germen, se denota por $(\mathbb{C}^n, 0)$ y podemos escribir como

$$(\mathbf{V}, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}).$$

Diremos que $(\mathbf{V}, \mathbf{0})$ es regular si $V = V(f_1, f_2, ..., f_k)$ y si la matriz jacobiana

$$J(f_1, f_2, \ldots, f_k)(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(0) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial z_n}(0) \end{bmatrix}$$

es de rango k. Dicho de otro modo

$$(\mathbf{V}, \mathbf{0}) = (\varphi = \mathbf{0}),$$

donde φ es la sumersión $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ dada por $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$. Luego notamos que si φ es un cambio de coordenadas locales podemos suponer que $f_1 = z_1$, $f_2 = z_2, \ldots, f_k = z_k$, luego

$$V = (z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0).$$

Además, se tiene que la dimensión de $(V, 0)$ es $n - k$.

Definición 1.6.10. Diremos que una subvariedad analítica $V \subset \mathbb{C}^n$ es suave o lisa si para cada punto $\mathbf{p} \in V$, $V = V(f_1, ..., f_k)$ (dada como en la definición 1.4.17) y la matriz jacobiana

$$J(f_1, f_2, \ldots, f_k)(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial z_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

es de rango k.

Un teorema importante en geometría analítica es el teorema de los ceros de Hilbert-Ruckert, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 1.6.11. *Si I es un ideal de $\mathcal{O}_n$ y $\mathbf{V} = \mathbf{V}(I)$, entonces el ideal de funciones que se anulan sobre $\mathbf{V}$, $\mathcal{I}(I)$, es igual a la raíz de I, denotado $\sqrt{I}$, es decir*

$$\mathcal{I}(\mathbf{V}(I)) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n : \mathbf{f}|_{\mathbf{V}} = 0\} = \sqrt{I} := \left\{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_n : \mathbf{f}^k \in I, \text{ para algún entero positivo } k\right\}.$$

Demostración. Ver página 88 en [GR09] □

Diremos que $(\mathbf{V}, \mathbf{0})$ es irreductible si $\sqrt{I}$ es primo; en general, si $\sqrt{I} = i_1 \cap i_2 \cap ... \cap i_k$ es la descomposición primaria de $\sqrt{I}$ (ver [Ati20]), la descomposición de $\mathbf{V}$ en componentes irreducibles es dada por

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(i_1) \cup \mathbf{V}(i_2) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(i_k).$$

En el caso de un germen de hiperficies $\mathbf{V}(\mathbf{f})$ donde $\mathbf{f}$ se descompone en sus componentes irreducibles $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1^{n_1}\mathbf{f}_2^{n_2}\dots\mathbf{f}_k^{n_k}$, se tiene

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \mathbf{V}(\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2\dots\mathbf{f}_k) = V(\mathbf{f}_1) \cup \mathbf{V}(\mathbf{f}_2) \cup \dots \cup \mathbf{V}(\mathbf{f}_k),$$

y cada $\mathbf{V}(\mathbf{f}_j)$ es irreducible con multiplicidad n_j. Cuando $n_j = 1$ para todo j, diremos que $\mathbf{f}$ es reducible.

A continuación presentamos algunas propiedades que relacionan una variedad analítica con sus ideales

Proposición 1.6.12. *Sean $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ dos gérmenes de conjuntos analíticos, entonces se cumple las siguientes propiedades*

i) Si $\mathbf{V}_1 \subseteq \mathbf{V}_2$ entonces $\mathcal{I}(\mathbf{V}_2) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{V}_1)$,

ii) $\sqrt{\mathcal{I}(\mathbf{V})} = \mathcal{I}(\mathbf{V})$,

iii) si $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{O}_n$ son ideales entonces $\bigcap_{\mathbf{f}\in\mathcal{I}_2} \mathbf{V}(\mathbf{f}) \subseteq \bigcap_{\mathbf{f}\in\mathcal{I}_1} \mathbf{V}(\mathbf{f})$,

iv) si I es un ideal de $\mathcal{O}_n$, entonces $V(I) = V(\sqrt{I})$,

v) $V(\mathcal{I}(\mathbf{A}))$ es la variedad más pequeña que contiene al germen de conjunto $\mathbf{A}$.

Demostración. Ver página 88 en [GR09] $\square$

Definición 1.6.13. Sea M una variedad compleja y $\mathbf{A}$ un germen de un conjunto en $\mathbf{p} \in M$. Diremos que $\mathbf{A}$ es un germen de variedad lisa si existe un representante A de $\mathbf{A}$ que sea una subvariedad holomorfa lisa de M que contenga a $\mathbf{p}$.

Lema 1.6.14. *Si $\mathbf{A}$ es un germen en $\boldsymbol{p} \in M$ de subvariedad analítica lisa, dado como en la definición 1.6.10 y de dimensión r, entonces existen coordenadas locales en torno de $\boldsymbol{p}$ (φ, U) tal que*

$$\mathbf{A} = V(\boldsymbol{z}_1) \cap \dots \cap V(\boldsymbol{z}_{n-r}).$$

Demostración. Sea A un representante de $\mathbf{A}$ de dimensión r, con $\mathbf{p} \in A$. Del teorema1.4.15 existen coordenadas locales $((z_1, ..., z_n), U)$ entorno de $\mathbf{p}$ tal que

$$A \cap V = \{q \in V : z_1(\mathbf{q}) = \dots = z_{n-r}(\mathbf{q}) = 0\},$$

por lo tanto $\mathbf{A} = V(\mathbf{z}_1) \cap \dots \cap V(\mathbf{z}_{n-r})$. $\square$

1.7 Gérmenes de variedades invariantes por gérmenes de campos vectoriales

En este sección presentamos los conceptos de gérmenes de variedades invariantes por gérmenes de campos de vectores.

Salvo se especifique lo contrario, de aquí en adelante, consideremos a M una variedad analítica de dimensión n y $\mathbf{p} \in M$. A cada campo de vectores analítico X definido en M, le podemos asociar un flujo maximal, denotado por ϕ_X. Este flujo es único sobre un dominio maximal Ω_X, tal que

- $\phi_X(0, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ para todo $p \in M$,
- $\frac{\partial}{\partial t}\phi_X(t, \mathbf{p}) = X(\phi_X(t, \mathbf{p}))$; para todo $(t, \mathbf{p}) \in \Omega_X$.

A continuación definimos conjunto invariante por un campo de vectores X.

Definición 1.7.1. Un subconjunto A de M es localmente invariante por un campo de vectores analíticos X si para cada $\mathbf{q} \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $t \in \mathbb{D}_\epsilon$ (el disco de radio ϵ centrado en 0) entonces $\phi_X(t, \mathbf{q})$ está definido y $\phi_X(t, \mathbf{q}) \in A$.

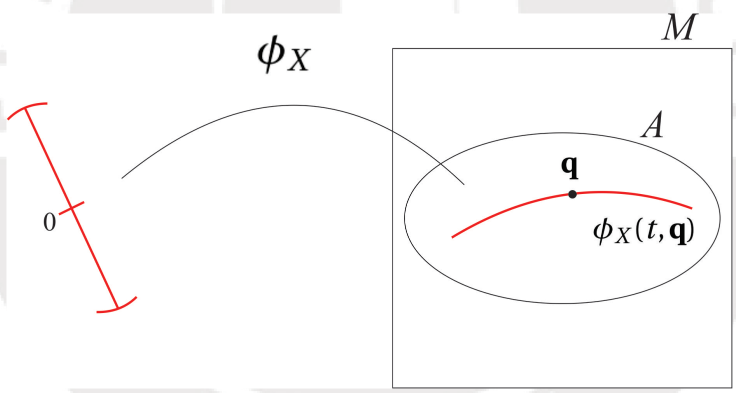

Figura 1.3: Subconjunto localmente invariante

En otras palabras para todo $\mathbf{q} \in A$, la curva integral de X pasando por $\mathbf{q}$ está enteramente contenida en A. Esta curva, por cómo está definida, resuelve un problema de Cauchy y por ello es única. Además, si A fuese una subvariedad analítica de M e invariente por X equivale a que X induzca un campo de vectores sobre A, esto lo vemos en las siguiente proposición. Por simplicidad nos referiremos a subvariedad analítica como subvariedad.

Proposición 1.7.2. *Una subvariedad A es invariante por un campo de vectores X sobre M si y solo si para todo $\boldsymbol{q} \in A$, $X(\boldsymbol{q}) \in T_{\boldsymbol{q}}A$.*

Demostración. Supongamos que A es una subvariedad invariante por el campo X. Por hipótesis, dado $\mathbf{q} \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $t \in \mathbb{D}_\epsilon$ entonces $\phi_X(t, \mathbf{q}) \in A$. Sea $\gamma : \mathbb{D}_\epsilon \to M$ dada por $\gamma(t) = \phi_X(t, \mathbf{q})$ una curva contenida en A tal que $\gamma(0) = \mathbf{q}$. Observe que

$$\gamma'(0) = \frac{\partial \phi_X}{\partial t}(0, \mathbf{q}) = X(\mathbf{q}),$$

esto prueba que $X(\mathbf{q}) \in T_{\mathbf{q}}A$. Recíprocamente si $X(\mathbf{q}) \in T_{\mathbf{q}}A$ para todo $\mathbf{q} \in A$, entonces la restricción de $X|_A$ es un campo definido en A, este campo induce un flujo $\phi_{X|_A}$ tal que para $\mathbf{q} \in A$

$$\tfrac{\partial \phi_{X|_A}}{\partial t}(t, \mathbf{q}) = X|_A(\phi_{X|_A}(t, \mathbf{q})) = X(\phi_{X|_A}(t, \mathbf{q})), \quad \phi_{X|_A}(0, \mathbf{q}) = \mathbf{q}.$$

Luego por unicidad de flujos $\phi_X(t, \mathbf{q}) = \phi_{X|_A}(t, \mathbf{q}) \in A$, esto prueba que A es invariante por el campo X. □

En término de germen de un conjunto invariante por un por un germen de campo de vectores $\mathbf{X}$ viene dado por la siguiente definición.

Definición 1.7.3. Sea $\mathbf{A}$ un germen de conjunto en $\mathbf{p} \in M$ y $\mathbf{X}$ un germen de campo de vectores en $\mathbf{p}$. Diremos que $\mathbf{A}$ es invariante por $\mathbf{X}$ si existe un representante A de $\mathbf{A}$ y un representante X de $\mathbf{X}$ definido en A tal que A es un conjunto invariante por X.

Recordemos que si p es un punto regular del germen de campo de vectores $\mathbf{X}$ entonces, gracias el teorema 1.5.6 (de rectificación), su campo representante se puede identificar, localmente, como un campo constante. Por este motivo nos centraremos en puntos singulares de $\mathbf{X}$.

Ejemplo 1.7.4. Consideremos la curva $\mathbf{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ dada por $\mathbf{h}(x) = (h_1(x), h_2(x))$ tal que $h_1(x) = h_2(x) = x^2$. Sea el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : y = x^2,\ z = x^2\}.$$

Vemos que A es la gráfica de $\mathbf{h}$ que contiene al origen de $\mathbb{C}^3$. Consideremos a U una vecindad abierta de $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^3$ y las funciones holomorfas $f_1, f_2 : U \subset \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, tal que $f_1(x, y, z) = z - x^2$ y $f_2(x, y, z) = y - x^2$. Vemos que $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0}) = 0$ y la matriz jacobiana $\mathcal{J}(f_1, f_2)$ tiene rango 2, luego 0 es un valor regular de f_1 y f_2. Por lo tanto del teorema 1.4.19, $A = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$ es una subvariedad holomorfa lisa de U. Consideramos al campo $X = \frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}$. Se tiene que $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y si $\mathbf{q} \in A$, $X(\mathbf{q}) \in T_{\mathbf{q}}A$, luego de la proposición 1.7.2 A es invariante por X.

Ahora determinemos en general la existencia de una subvariedad invariante por X como la gráfica de una función analítica.

Proposición 1.7.5. *Sea X un campo de vectores analíticos en M con una singularidad en $\boldsymbol{p}$ y A una subvariedad analítica de M que contiene a $\boldsymbol{p}$. Sea (φ, U) una carta local de M en $\boldsymbol{p}$, con $\varphi = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $H = (h_1, ..., h_{n-r})$ una función analítica definida en una vecindad en $\boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^r$ tal que $H(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Si X, en estas coordenadas, está definido por*

$$X = \sum_{i=1}^{r} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-r} w_j \frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{1.13}$$

entonces la variedad analítica $A = \varphi^{-1}(\mathrm{Gr}(H))$ es invariante por X si y solo si para todo $q \in A$

$$w_j(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial(h_j \circ \boldsymbol{x})}{\partial x_i}(\boldsymbol{q}) v_i(\boldsymbol{q}), \tag{1.14}$$

donde $Gr(H)$ es la gráfica de H.

Demostración. Consideremos una aplicación analítica $H = (h_1, ..., h_{n-r}) : \tilde{V} \subseteq \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^{n-r}$ definida en una vecindad $\tilde{V} \subseteq \mathbb{C}^r$ de $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^r$ tal que $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Siendo H analítica entonces H es continua en el origen y para $\tilde{V}$ necesariamente pequeño, la gráfica de h dado por

$$Gr(H) = \{(a_1, ..., a_r, H(a_1, ..., a_r) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^{n-r})/(a_1, ..., a_r) \in \tilde{V}\},$$

está contenido en $\varphi(V)$.

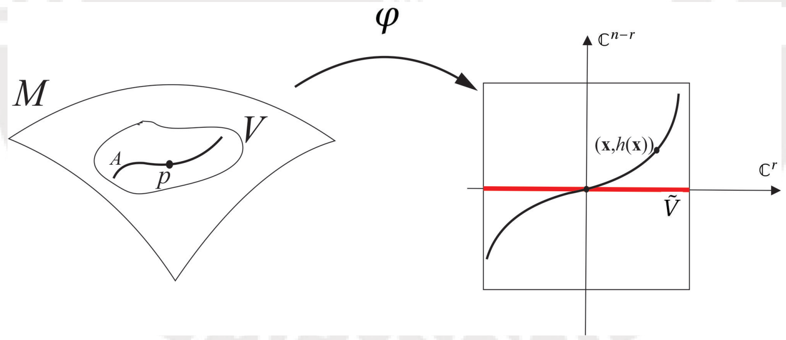

Figura 1.4: Subvariedad analítica lisa de M

Entonces la función $f = \mathbf{y} - h \circ \mathbf{x} : V \to \mathbb{C}^{n-r}$ tiene componentes cuyas derivadas son linealmente independiente sobre el abierto $U = \{\mathbf{q} \in U : \mathbf{x}(\mathbf{q}) = h_j\}$, luego $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{n-r}$ es un valor regular de cada componente. Del teorema 1.4.19 cada $f^{-1}(\mathbf{0})$ es una subvariedad analítica lisa de M de dimensión r entonces

$$A = \varphi^{-1}(Gr(H)) = \{\mathbf{q} \in U : y_i = h_j(\mathbf{x}(\mathbf{q})),\ j = 1, ..., n-r\} = \bigcap_{i=1}^{n-r} f^{-1}(\mathbf{0})$$

es una subvariedad analítica lisa de dimensión r que contiene a $\mathbf{p}$. Luego para cada $\mathbf{q} \in A$ el espacio tangente $T_{\mathbf{q}}A$ está generado por los vectores $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial(h_j \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{q}) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\mathbf{q}}$ para

$i=1,...,r$. Por la proposición 1.7.2, A es invariante si y solo si $X(\mathbf{q}) \in T_{\mathbf{q}}A$, de la ecuación (1.13) tenemos una razón entre los coeficientes, es decir

$$\frac{v_i(\mathbf{q})}{1} = \frac{w_j}{\sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial(h_j \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{q})} \forall j = 1,...,n-r,$$

esto equivale a

$$w_j(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial(h_j \circ \mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{q}) v_i(\mathbf{q}), \text{ para } \mathbf{q} \in A, j = 1,...,n-r.$$

□

Si expresamos la ecuación (1.14) en las coordenadas de $\mathbf{x}$ (podemos identificar a las coordenadas locales en $\mathbb{C}^r$), para cada $\mathbf{x} \in \tilde{V}$ se tiene

$$w_j(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial(h_j \circ \mathbf{x})}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})). \tag{1.15}$$

Sea I un ideal de $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$ y $\mathbf{X}$ un germen de campo de vectores analítico en $\mathbf{p}$, entonces denotamos al conjunto $\mathbf{X}(I)$ como el conjunto dado por $\mathbf{X}(I) = \{\mathbf{X}(\mathbf{f}) : \mathbf{f} \in \mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}\}$.

Definición 1.7.6. Sea $\mathbf{X}$ un germen de campo de vectores analítico en $\mathbf{p}$. Un ideal I de $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$ se dice invariante por $\mathbf{X}$ si $\mathbf{X}(I) \subseteq I$.

En la definición 1.7.6 se entenderá que $\mathbf{X}(I) \subseteq I$ si existen un abierto $U \subset M$ que contiene $\mathbf{p}$, un representante X de $\mathbf{X}$ tal que para cada representante $f : U \to \mathbb{C}$ de $\mathbf{f} \in I$ $X(f)$ es un representante de $\mathbf{X}(\mathbf{f})$ con $\mathbf{X}(\mathbf{f}) \in I$.

Proposición 1.7.7. *Sea I un ideal de $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$ y $\boldsymbol{X}$ un germen de campo de vectores en M. Sea $\mathbf{V}(I) = \bigcap_{\mathbf{f}\in I} \mathbf{V}(\mathbf{f})$ invariante por $\boldsymbol{X}$ entonces $\boldsymbol{X}(I) \subseteq \boldsymbol{X}(\sqrt{I}) \subseteq \sqrt{I}$. En particular, si I es un ideal radical entonces $\boldsymbol{X}(I) \subseteq I$.*

Demostración. Teniendo en cuenta las propiedades dadas en la proposición 1.6.12, $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{I})$ y como $\sqrt{I}$ es finitamente generado, podemos escribir $\sqrt{I} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$, entonces existe un abierto U de M conteniendo a $\mathbf{p}$ y representantes analíticos $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{C}$ de los gérmenes $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ tal que el conjunto de los ceros $A = \{\mathbf{q} \in U : f_1(\mathbf{q}) = \cdots = f_m(\mathbf{q}) = 0\}$ es un representante de $\mathbf{V}(\sqrt{I})$. Como $\mathbf{V}(\sqrt{I})$ es invariante por $\mathbf{X}$ entonces A es invariante por X, donde X es un representante de $\mathbf{X}$ en U. Entonces para cada $\mathbf{q} \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $|t| < \epsilon$ entonces $\phi_X(t, \mathbf{q}) \in A$. De la definición del conjunto A, $f_i(\phi_X(t, \mathbf{q})) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Derivando la ecuación para cada i en t y evaluando en $\mathbf{0}$, $X(f_i)(\mathbf{q}) = 0$. Esto prueba que

$$A \subseteq \{\mathbf{q} \in U : X(f_1)(\mathbf{q}) = \cdots = X(f_m)(\mathbf{q}) = 0\}.$$

A partir de esto tenemos, en el caso de gérmenes,

$$\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{f}_1), \ldots, \mathbf{X}(\mathbf{f}_m)),$$

de la proposición 1.6.12

$$\mathcal{I}(\mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{f}_1), \ldots, \mathbf{X}(\mathbf{f}_m))) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{V}(I)).$$

Por lo tanto, del teorema 1.6.11, $\mathbf{X}(\mathbf{f}_i) \in \sqrt{I}$ además como los $\mathbf{f}_i \in \sqrt{I}$ entonces $\mathbf{X}(\sqrt{I}) \subset \sqrt{I}$, esto prueba la igualdad de conjuntos.

□

En general el recíproco de la proposición 1.7.7 no se cumple, salvo que $\mathbf{V}(I)$ sea un germen de una subvariedad lisa.

Proposición 1.7.8. *Sea* $\mathbf{A}$ *un germen en* $\boldsymbol{p} \in M$ *de subvariedad holomorfa lisa de dimensión* r *de* M *y* $\boldsymbol{X}$ *un germen de campo de vectores analítico en* $\boldsymbol{p}$*. Entonces* $\mathbf{A}$ *es invariante por* $\boldsymbol{X}$ *si y solo si* $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ *es invariante por* $\boldsymbol{X}$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ invariante por $\mathbf{X}$ entonces de la proposición 1.6.12 $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es un ideal radical. Luego de la proposición 1.7.7 $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es invariante por $\mathbf{X}$. Recíprocamente si $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es invariante por $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(\mathcal{I}(\mathbf{A})) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{A})$ entonces del lema 1.6.14 existen coordenadas locales $((z_1, \ldots, z_n), V)$ tal que

$$\mathcal{I}(\mathbf{A}) = V(\mathbf{z}_1) \cap \cdots \cap V(\mathbf{z}_{n-r}).$$

Del teorema 1.6.11 $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es finitamente generado, es decir $\mathcal{I}(\mathbf{A}) = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)$. Además $\mathbf{A}$ está representado por

$$A = \{\mathbf{q} \in V | z_1(\mathbf{q}) = \cdots = z_{n-r}(\mathbf{q}) = 0\}.$$

Si $\mathbf{q} \in A$ entonces $T_q A = \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-r+1}}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big|_q \right)$, además X se escribe localmente en V como

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

para $i = 1, \ldots, r$. Como $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es invariante por $\mathbf{X}$, $X(z_i) \in (z_1, \ldots, z_{n-r})$ para cada $i = 1, \ldots, r$, luego $X(z_i)(\mathbf{q}) = 0$ para todo $\mathbf{q} \in A$ e $i = 1, \ldots, n-r$. Entonces

$$X(\mathbf{q}) = \sum_{j=n-r+1}^{n} X(z_j)(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial z_j}|_{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}} A.$$

Del teorema 1.7.2 A es invariante por X, entonces $\mathbf{A}$ es invariante por $\mathbf{X}$.

□

1.8 Variedades invariantes formales por gérmenes de campos vectoriales

En esta sección presentamos una caracterización de ideales formales, respecto a la invarianza por medio de gérmenes de campo de vectores, los conceptos aquí expuestos son obtenidos de [CCD13] y [GR09].

Sea $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{O}}_{M,p}$, un germen de serie formal en $\mathbf{p} \in M$, el diferencial de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{p}$ está dado por $d\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \widehat{\mathbf{m}}^2 \in \widehat{\mathbf{m}}_p/\widehat{\mathbf{m}}_p^2$ el cual es identificado con $\widehat{\mathbf{m}}_{\mathbf{p}}/\widehat{\mathbf{m}}_{\mathbf{p}}^2 = T^*_{\mathbf{p}}M$. Fijando las coordenadas locales $(\varphi = (x_1, ..., x_n), U)$ (que abreviaremos por (φ, U)), sea $f \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ un representante de $\mathbf{f}$, $d\mathbf{f}(\mathbf{p})$ en estas coordenadas está representada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})dx_n \in T^*_{\mathbf{p}}M.$$

Sea $\mathbf{X}$ un germen de campo holomorfo en $\mathbf{p} \in M$, con $\mathbf{p}$ un punto singular de $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{X} : \mathcal{O}_{M,\mathbf{p}} \to \mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$ se extiende de manera única a $\widehat{\mathcal{O}}_{M,\mathbf{p}}$, cuya notación seguirá siendo $\mathbf{X}$.

Definición 1.8.1. Sea $\widehat{I}$ el ideal de $\widehat{\mathcal{O}}_{M,\mathbf{p}}$ y $\mathbf{X}$ un germen de un campo de vectores analítico en $\mathbf{p}$. El ideal $\widehat{I}$, se denomina invariante por $\mathbf{X}$ si $\mathbf{X}(\widehat{I}) \subset \widehat{I}$.

Observación 1.8.2. Bajo la notación de la definición 1.8.1, si $u \in \widehat{\mathcal{O}}_{M,p} \setminus \widehat{\mathbf{m}}_p$ es una unidad entonces $\widehat{I} \in \widehat{\mathcal{O}}_{M,p}$ es invariante por $\mathbf{X}$ si y solo si $\widehat{I}$ es invariante por $u\mathbf{X}$.

Definición 1.8.3. Sea X un germen de campo de vectores analíticos en $\mathbf{p}$ e ideal $\widehat{I} \subset \widehat{\mathcal{O}}_{M,\mathbf{p}}$ invariante por $\mathbf{X}$. Diremos que $\widehat{I}$ es una variedad lisa formal invariante por $\mathbf{X}$ si existen elementos $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r} \in \widehat{I}$ tal que $\widehat{I} = (\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_{n-r})$ y $d\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \ldots, d\mathbf{f}_{n-r}(\mathbf{p})$ son linealmente independientes.

Lema 1.8.4. *Teniendo en cuenta las notaciones en la definición anterior si* $r = 0$ *entonces* $\widehat{I} = \widehat{\mathbf{m}}_p$.

Demostración. Observe que no se ha considerado el caso en que $n = r$ en la definición pues en ese caso el único ideal invariante por $\mathbf{X}$ es $\widehat{I} = (\mathbf{0})$. Por otro lado, si $r = 0$ consideremos (φ, U) una carta coordenada de M entorno de p. Como $\widehat{I}$ tiene n generadores, existen f_1, v, f_n series formales representantes de los generadores, que se anulan en $\mathbf{0}$ y sus partes lineales son linealmente independientes. Luego por el teorema de la función inversa el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]] & \to & \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]] \\ x_i & \mapsto & f_i, \end{array}$$

es un automorfismo. Entonces $(f_1, \ldots, f_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ esto equivale a $\widehat{I} = \widehat{\mathbf{m}}_p$. $\square$

Proposición 1.8.5. *Sea $\boldsymbol{X}$ un germen de campo de vectores holomorfo en $\boldsymbol{p} \in M$. Si $\widehat{I}$ es un germen de variedad lisa formal invariante por $\boldsymbol{X}$ de dimensión r, entonces existen coordenadas locales $((x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}), U)$ de M en p y las series formales $h_1, \ldots, h_{n-r} \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ representantes de $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ en $\widehat{I}$, tales que:*

$$\widehat{I} = (\boldsymbol{y}_1 - \mathbf{h}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-r} - \mathbf{h}_{n-r}).$$

Demostración. Por hipótesis, $\widehat{I}$ es un ideal en $\widehat{\mathcal{O}}_{M,p}$ y existen elementos $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$, tal que $\widehat{I} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r})$ y los $d\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \ldots, d\mathbf{f}_{n-r}(\mathbf{p})$ son linealmente independientes. Probemos el resultado por inducción sobre $n - r$.

- Sea $n - r = 1$, $\widehat{I} = (\mathbf{f}_1)$, $d\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{0}$ y $(z_1, \ldots, z_n)$ las coordenadas locales en $\mathbf{p}$. Si f_1 es la serie formal que representa a $\mathbf{f}_1$ en estas coordenadas, entonces
$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{0}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(\mathbf{0}), \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(\mathbf{0}), \ldots, \frac{\partial f_2}{\partial z_n}(\mathbf{0})\right) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$
Supongamos que
$$\frac{\partial f_1}{\partial z_i}(\mathbf{0}) = \alpha \neq 0, \text{ para algún } i = 1, \ldots, n = r + 1.$$
Cambiando f por $\alpha^{-1} f$, se obtiene
$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{0}) \neq (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0).$$
Si reordenamos las coordenadas, de tal manera que para $(x_1, \ldots, x_r, y_1)$
$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{0}) \neq (0, \ldots, 0, 1),$$
entonces f_1 es regular de orden 1 en la variable y_1. Del teorema de preparación de Weierstrass, existen $u_1 \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_r, y_1]]$, con $u_1(\mathbf{0}) \neq 0$, $a_1 \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$ únicos tales que
$$f_1 = u_1(y_1 + a_1),$$
haciendo $h_1 = -a_1 \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$, tenemos la siguiente forma
$$f_1 = u_1(y_1 - h_1),$$
tales que u_1 es una unidad, $(\mathbf{f}_1) = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{h}_1)$ luego $\widehat{I} = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{h}_1)$.

- Supongamos ahora que el resultado cumple para $n - r - 1$, probaremos que se cumple para $n - r$. Se tiene entonces que $\widehat{I} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r})$ y $d\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \ldots, d\mathbf{f}_{n-r}(\mathbf{p})$ son linealmente independiente. Sean $(z_1, \ldots, z_n)$, las coordenadas locales en $\mathbf{p}$ y $f_1, \ldots, f_{n-r}$ las series formales representantes de $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$, respectivamente. De la independencia lineal de los diferenciales, la matriz jacobiana $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-r})}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(\mathbf{0})$ tiene rango $n - r$. Buscamos nuevos generadores a partir de la combinación lineal de los $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ para obtener una reordenación de las coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r})$ en $\mathbf{p}$ tal que

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-r})}{\partial(x_1,\ldots,y_{n-r})}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n-r\times n} = [\mathbf{0}_{n-r\times r} I_{n-r}],$$

donde $\mathbf{0}_{n-r\times r}$ es la matriz nula de orden $n-r\times r$ y I_{n-r} es la matriz identidad de orden $n-r$. Esto implica que para cada $i = 1,\ldots,n-r$, f_i es una serie regular de orden 1 en la variable y_i pero como $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{0}) = 0$ para $i \neq j$ entonces f_i tiene orden mayor o igual a 2, como serie en y_j.

Del teorema de división de Weierstrass, para cada f_i, con $i = 2,\ldots,n-r$, existen $q_i \in \mathbb{C}[[x_1,...,x_r,y_1,...y_{n-r}]]$ y $r_i \in \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_r,y_2,\ldots,y_{n-r}]]$ únicos, tal que $f_i = f_1q_i+r_i$. Siendo cada f_i regular de orden 1 en la variable y_i y $\frac{\partial f_1}{\partial y_i}(\mathbf{0}) = 0$, tenemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(\mathbf{0})q_i(\mathbf{0}) + f_1(\mathbf{0})\frac{\partial q_i}{\partial y_i}(\mathbf{0}) + \frac{\partial r_i}{\partial y_i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial r_i}{\partial y_i}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Luego r_i es una serie regular de orden 1 en la variable y_i. También para $j = 2,\ldots,n-r$ con $j \neq i$ se tiene que el orden es mayor o igual a 2. A partir de esto

$$\frac{\partial(r_2,\ldots,r_{n-r})}{\partial(y_2,\ldots,y_{n-r})}(\mathbf{0}) = I_{n-r}$$

esto quiere decir que los diferenciales $d\mathbf{r}_2(p),\ldots,d\mathbf{r}_{n-1}(p)$ son linealmente independiente.

Considerando el ideal $I' = (\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{n-r})$ en $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_r,\ldots,y_1,\ldots,y_{n-r}]]$, se tiene $n-r-1$ generadores de I'. De la hipótesis inductiva, existen series $h_2,\ldots,h_{n-r}$ en $\mathbb{C}[[x_1,...,x_r,y_1,...y_{n-r}]]$ tales que

$$I' = (\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{n-r}) = (\mathbf{y}_2 - \mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{y}_{n-r} - \mathbf{h}_{n-r}).$$

Entonces $\widehat{I} = (\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{n-r}) = (\mathbf{f}_1,\mathbf{y}_2 - \mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{y}_{n-r} - \mathbf{h}_{n-r})$. Siendo f_1 regular de orden 1 en y_1, podemos escribir $f_1 = u_1(y_1 - \rho(\mathbf{x},y_2,\ldots,y_{n-r}))$ con $u_1 \in \mathbb{C}[[x_1,...,x_r,y_1,...y_{n-r}]]$ y $u_1(\mathbf{0}) \neq 0$. Del teorema de división de Weierstrass, efectuamos divisiones sucesivas al polinomio α

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x},y_2,\ldots,y_{n-r}) &= (y_2 - h_2(\mathbf{x}))q_2 + \beta_2(\mathbf{x},y_3,\ldots,y_{n-r}) \\ \beta_2(\mathbf{x},y_3,\ldots,y_{n-r}) &= (y_3 - h_3(\mathbf{x}))q_3 + \beta_3(\mathbf{x},y_3,\ldots,y_{n-r}) \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \beta_{n-r-1}(\mathbf{x},y_{n-r}) &= (y_{n-r} - h_{n-r}(\mathbf{x}))q_{n-r} + \beta_{n-r}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

hacemos $\beta_{n-r} = h_1$ y a partir de esto obtenemos

$$\widehat{I} = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{h}_1,\mathbf{y}_2 - \mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{y}_{n-r} - \mathbf{h}_{n-r}),$$

esto prueba el resultado.

$\square$

Observación 1.8.6. En la prueba de la proposición 1.8.5 los $h_i \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_r]]$ obtenidos, satisfacen $h_i(\mathbf{0}) = 0$, debido a que $\mathbf{y}_i - \mathbf{h}_i \in \widehat{\mathbf{m}}_p$. Además, las series h_i determinan la invarianza de $\widehat{I}$ por $\mathbf{X}$, esta afirmación es justificada por la siguiente proposición.

Proposición 1.8.7. *Sean $\boldsymbol{X}$ un germen de campo de vectores analítico en $\boldsymbol{p} \in M$. El ideal $\widehat{I} \subset \mathcal{O}_{M,p}$ es invariante por $\boldsymbol{X}$ si y solo si existen coordenadas locales $((x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}), U)$ de M en $\boldsymbol{p}$ y series formales $h_1, \dots, h_{n-r} \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]$ representantes de $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-r}$ en $\widehat{I}$, tales que*

$$\boldsymbol{X}(y_i - h_i)(\boldsymbol{x}, h_1, \dots, h_{n-r}) = 0 \textit{ para } i = 1, \dots, n-r.$$

Demostración. Sea $\widehat{I}$ invariante por $\mathbf{X}$ entonces existe un cambio de coordenadas locales $(\varphi = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}))$ de M centrada en p y series formales $h_1, \dots, h_{n-r} \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]$ tales que

$$\widehat{I} = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-r} - \mathbf{h}_{n-r}).$$

Como $\mathbf{X}(\widehat{I}) \subset \widehat{I}$ para cada $\mathbf{y}_i - \mathbf{h}_i$ existen $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n-r} \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r, y_1, ...y_{n-r}]]$ tales que

$$X(y_i - h_i) = \alpha_{i,1}(y_1 - h_1) + \cdots + \alpha_{i,n-r}(y_{n-r} - h_{n-r}) = \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_{i,j}(y_j - h_j),$$

donde X es un representante de $\mathbf{X}$. Evaluando en $(\mathbf{x}, h_i)$, $X(y_i - h_i)(\mathbf{x}, h_i) = 0$, esto prueba la condición necesaria.

Probemos la condición suficiente. Supongamos que para cada $i = 1, \dots, n-r$,

$$X(y_i - h_i)(\mathbf{x}, h_i) = 0.$$

Como la serie $y_j - h_j$ es regular de orden 1 por el teorema de división de Weierstrass existen $\alpha_{i,j}$ tales que

$$\begin{aligned} X(y_i - h_i) &= (y_1 - h_1(\mathbf{x}))\alpha_{i,1} + \beta_{i,1}(\mathbf{x}, y_3, \dots, y_{n-r}), \\ \beta_{i,1}(\mathbf{x}, y_3, \dots, y_{n-r}) &= (y_2 - h_2(\mathbf{x}))\alpha_{i,2} + \beta_{i,2}(\mathbf{x}, y_3, \dots, y_{n-r}), \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_{i,n-r-1}(\mathbf{x}, y_{n-r}) &= (y_{n-r} - h_{n-r}(\mathbf{x}))\alpha_{i,n-r} + \beta_{i,n-r}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Luego $X(y_i - h_i) = \sum_{j=1}^{n-r}(y_j - h_j)\alpha_{i,j} + \beta_{i,n-r}(\mathbf{x})$, evaluando en $(\mathbf{x}, h_i)$ se tiene

$$X(y_i - h_i)(\mathbf{x}, h_1, \dots, h_{n-r}) = \beta_{i,n-r}(\mathbf{x}).$$

Como $X(y_i - h_i)(\mathbf{x}, h_1, \dots, h_{n-r}) = 0$, luego $\beta_{i,n-r}(\mathbf{x}) = 0$. Por tanto

$$X(y_i - h_i) = \sum_{j=1}^{n-r}(y_j - h_j)\alpha_{i,j}$$

Esto prueba que $\widehat{I}$ es invariante por $\mathbf{X}$.

$\square$

Teniendo en cuenta las coordenadas locales $(\varphi = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}), U)$, el campo de vectores X se puede escribir en estas coordenadas de la siguiente forma

$$X = \sum_{j=1}^{r} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n-r} w_l \frac{\partial}{\partial y_l}.$$

Sea $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_{n-r}(\mathbf{x})) \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]^{n-r}$, una serie de potencias formales, entonces $X(y_i - h_i)(\mathbf{x}, h) = 0$, es decir

$$\sum_{j=1}^{r} (v_i \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \frac{\partial (y_i - h_i)}{\partial x_j} \left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) + \sum_{l=1}^{n-r} \left(w_l \circ \varphi^{-1}\right)(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \frac{\partial (y_i - h_i)}{\partial y_l}(\mathbf{x}) = 0.$$

Como $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$, $\frac{\partial y_i}{\partial y_l} = 0$ si $i \neq l$, y $\frac{\partial y_i}{\partial y_l} = 1$ si $i = l$, la igualdad anterior queda de la siguiente forma

$$-\sum_{j=1}^{r} (v_i \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \frac{\partial (h_i)}{\partial x_j} \left(\varphi^{-1}(\mathbf{x})\right) + \left(w_i \circ \varphi^{-1}\right)(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = 0.$$

Entonces para cada $i = 1, \ldots, n-r$, obtenemos la siguiente ecuaciones:

$$\left(w_i \circ \varphi^{-1}\right)(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})(v_i \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})). \tag{1.16}$$

Estas ecuaciones se entienden como la igualdad entre series de potencias y si X es analítico entonces las funciones $v_i \circ \varphi^{-1}$ y $w_i \circ \varphi{-}1$ son analíticas y se pueden expresar como series de potencias convergentes alrededor de $\mathbf{0}$. La ecuación (1.16) determina la ecuación en series formales de la ecuación (1.14) dada en la proposición 1.7.5.

Recordar que si tenemos fijas las coordenadas locales podemos identificar los $w_i \circ \varphi^{-1}$ con $w_i(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$ igual con los demás términos. También las ecuaciones dadas en (1.16) se pueden expresar como un sistema matricial de ecuaciones de la siguiente forma

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (h_1, \ldots, h_{n-r})}{\partial (x_1, \ldots, x_r)} \in M_{(n-r)\times r}(\mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]),$$

donde $h = (h_1, \ldots, h_{n-r})$. Sean $v = (v_1, \ldots, v_r) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}\}^r$ y $w = (w_1, \ldots, w_{n-r}) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}\}^{n-r}$, luego se tiene la siguiente ecuación matricial

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = w(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})). \tag{1.17}$$

Observación 1.8.8. Sea $h = (h_1, \ldots, h_{n-r}) \in \mathbb{C}[[x_1, ..., x_r]]^{n-r}$ cumpliendo la ecuación (1.17). De la proposición 1.8.5 y 1.8.7, las series formales $y_1 - h_1, \ldots, y_{n-r} - h_{n-r}$ generan un ideal en $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_r, y_1, ...y_{n-r}]]$ correspondiente al germen $\widehat{I}$ de una variedad lisa formal invariante por $\mathbf{X}$.

A continuación definimos el espacio tangente a un germen de una variedad invariante $\widehat{I}$, usando el teorema de la función implícita.

Definición 1.8.9. Sea $\mathbf{X}$ un germen de campo de vectores analítico en torno de $\mathbf{p} \in M$ e $\widehat{I}$ un germen de variedad invariante formal de $\mathbf{X}$. Definimos el espacio tangente a $\widehat{I}$ como el subespacio $T_{\mathbf{p}}\widehat{I}$ de $T_{\mathbf{p}}M$, definido por

$$T_p\widehat{I} = \bigcap_{\mathbf{f}\in\widehat{I}} \ker\left(d\mathbf{f}(\mathbf{p})\right).$$

Lema 1.8.10. *Sean los $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-r} \in \widehat{I}$ generadores de $\widehat{I}$ dados como en la definición 1.8.9, entonces*

$$T_p\widehat{I} = \bigcap_{i=1}^{n-r} \ker d\mathbf{f}_i(\boldsymbol{p}).$$

Demostración. Siendo los $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-r}$ generadores de $\widehat{I}$ entonces existen funciones formales $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n-r}$ en $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n-r} \mathbf{g}_i\mathbf{f}_i$ y $d\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n-r} \mathbf{g}_i(\mathbf{p})d\mathbf{f}_i(\mathbf{p})$. Luego $\cap_{i=1}^{n-r} \ker(d\mathbf{f}_i(\mathbf{p})) \subset \ker(d\mathbf{f}(\mathbf{p}))$ para todo $\mathbf{f} \in \widehat{I}$, esto prueba que

$$\bigcap_{i=1}^{n-r} \ker(d\mathbf{f}_i(\mathbf{p})) \subset \bigcap_{\mathbf{f}\in\widehat{I}} \ker(d\mathbf{f}(\mathbf{p})) = T_{\mathbf{p}}\widehat{I}.$$

La otra inclusión se obtiene por definición de $T_{\mathbf{p}}\widehat{I}$, es decir

$$T_{\mathbf{p}}\widehat{I} = \bigcap_{\mathbf{f}\in\widehat{I}} \ker(d\mathbf{f}(\mathbf{p})) \subset \ker(d\mathbf{f}_i(\mathbf{p})), \forall i = 1, \dots, n-r.$$

Siendo los $d\mathbf{f}_i(\mathbf{p})$ linealmente de independiente, entonces $\dim T_p\widehat{I} = r$. □

Observación 1.8.11. Si los $\mathbf{y}_1 - \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-r} - \mathbf{h}_{n-r}$ son los generadores de $\widehat{I}$ dado en la proposición 1.8.5, entonces $T_p\widehat{I}$ se identifica con el subespacio generado por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\mathbf{p}}, \ i = 1, \dots, r.$$

Capítulo 2

Teorema de Briot-Bouquet

En este capítulo presentamos el teorema de Briot-Bouquet. Este resultado permite encontrar, en dimensión 2, variedades analíticas y formales invariantes por gérmenes de campos de vectores analíticos en torno de puntos singulares simples. Esto se logra a partir de las condiciones de los autovalores de la parte lineal del representante del germen de campo vectorial. Además, estas variedades son tangentes a los correspondientes autoespacios. Una aplicación relevante del teorema de Briot-Bouquet es dado en el teorema de reducción de singularidades de Camacho-Sad [CS82].

2.1 Existencia de variedades invariantes por campo de vectores en dimensión 2

Consideremos en esta sección que la dimensión de M es 2. Si $\mathbf{X}$ es un germen de campo de vectores en torno a $\mathbf{p} \in M$ y $((x, y), U)$ una carta coordenada de M en $\mathbf{p}$ tal que en estas coordenadas

$$X = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.1}$$

De la observación 1.8.8, si existe $h \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que

$$a(x, h(x))\frac{dh}{dx} = b(x, h(x)), \tag{2.2}$$

entonces, la serie formal $y - h$ genera un ideal en $\mathbb{C}[[x, y]]$ correspondiente al germen $\widehat{I}$ de una variedad lisa invariente por $\mathbf{X}$. Debemos probar la existencia de una serie formal h para probar la existencia de un germen de variedades invariante por un germen de campo de vectores. A estas variedades lisas formales de dimensión 1 se denominan curvas formales lisas invariantes por $\mathbf{X}$.

Los conceptos y resultados que a continuación se presentan son adoptados de [CCD13].

Definición 2.1.1. Si $\mathbf{X}$ es un germen de campo de vectores analítico en torno a $\mathbf{p} \in M$ y $((x,y),U)$ una carta coordenada de M en $\mathbf{p}$ tal que en estas coordenadas

$$X = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.3}$$

Decimos que $\mathbf{p}$ es una singularidad simple de $\mathbf{X}$ si la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}(\mathbf{0}) & \frac{\partial a}{\partial y}(\mathbf{0}) \\ \frac{\partial b}{\partial x}(\mathbf{0}) & \frac{\partial b}{\partial y}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

tiene valores propios no todos nulos λ y μ tales que si $\lambda \neq 0$ entonces $\mu/\lambda \notin \mathbb{Q}^+$.

Bajo las condiciones de la definición anterior tenemos que si $\mathbf{p}$ es una singularidad simple de $\mathbf{X}$ entonces para todo $q \in \mathbb{N}$ tenemos $\frac{\mu}{\lambda} \neq \frac{1}{q}$. Esto equivale a que $q\mu - \lambda \neq 0$ o también que $|q\mu - \lambda| > 0$. Más adelante generalizaremos esta relación.

Teniendo en cuenta la definición 2.1.1 los valores propios de la parte lineal de $\mathbf{X}$, $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$ no depende de las coordenadas elegidas.

A continuación presentamos la existencia de curvas formales invariantes por gérmenes de campos de vectores.

Teorema 2.1.2. *Sea M una variedad compleja de dimensión 2, $\mathbf{p} \in M$ y $\mathbf{X}$ un germen en $\mathbf{p}$ de campo de vectores analítico. Si $\mathbf{p}$ es una singularidad simple de $\mathbf{X}$, entonces para cada autovalor de la parte lineal $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$ existe una única curva lisa formal invariante por $\mathbf{X}$ tal que su espacio tangente en $\mathbf{p}$ es el autoespacio del autovalor correspondiente.*

Demostración. Sean λ y μ los correspondientes autovalores de $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$, como $\mathbf{p}$ es una singularidad simple de $\mathbf{X}$ entonces $\lambda \neq 0$, $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$. Podemos elegir a la carta coordenada de M centrada en $\mathbf{p}$ $((x,y),U)$ tal que

$$D_{\mathbf{p}}X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Luego el autoespacio correspondiente a λ es generado por $\frac{\partial}{\partial x}\big|_{\mathbf{p}}$. Además, en estas coordenadas si X es un representante de $\mathbf{X}$, podemos escribir

$$X = (\lambda x + f(x,y))\frac{\partial}{\partial x} + (\mu y + g(x,y))\frac{\partial}{\partial y},$$

donde f y g son convergentes en x e y con ordenes mayor que 1. Nuestro objetivo es encontrar $h \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que $y = h(x)$ resuelve la ecuación (2.2), y al aplicar la proposición 1.8.5 se prueba la existencia de $\widehat{I}$, subvariedad invariante por $\mathbf{X}$. En efecto, si $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$, reemplazando en (2.2)

$$(\lambda x + f(x,h(x)))\frac{dh}{dx} = \mu h(x) + g(x,h(x)),$$

$$\lambda x\frac{dh}{dx}+f(x,h(x))\frac{dh}{dx}=\mu h(x)+g(x,h(x))$$
$$\lambda x\frac{dh}{dx}-\mu h(x)=g(x,h(x))-f(x,h(x))\frac{dh}{dx}. \tag{2.4}$$

$$\lambda x\left(\sum_{n=2}^{+\infty}nh_nx^{n-1}\right)-\mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty}h_nx^n\right)=g(x,h(x))-\left(\sum_{n=2}^{+\infty}nh_nx^{n-1}\right)f(x,h(x)).$$

$$-\mu h_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}(\lambda n-\mu)h_nx^n=g(x,h(x))-\left(\sum_{n=2}^{+\infty}nh_nx^{n-1}\right)f(x,h(x)). \tag{2.5}$$

La serie de la derecha de esta última igualdad tiene orden mayor o igual a dos, $h_1=0$ entonces $h(0)=0$ y $h'(0)=0$, luego si existe la curva dada por $y=h(x)$ con las condiciones requeridas, esta es tangente al autoespacio

$$E_\lambda=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{d}{dx}h(0)\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Del lado derecho de la igualdad dada en (2.5), se puede expresar de manera más corta como sigue

$$g(x,h(x))=\sum_{i+j\geq 2}g_{ij}x^i\left(h(x)\right)^j=\sum_{i+j\geq 2}g_{ij}x^i\left(\sum_{n=2}^{+\infty}x^n\right)^j$$
$$=g_{20}x^2+\sum_{n=2}^{+\infty}g_{11}h_nx^{n+1}+\sum_{n=4}^{+\infty}\left(g_{02}\sum_{r+s=n}h_rh_s\right)x^n+\dots$$

Mediante un reordenamiento de índices podemos escribir

$$g(x,h(x))=\sum_{n\geq 2}R_n(h_2,\dots,h_{n-1})x^n,$$

donde los $R_n(h_2,\dots,h_{n-1})$ son polinomios que dependen de los coeficientes de g. De manera análoga

$$\frac{dh}{dx}f(x,h(x))=\sum_{n\geq 2}R_n(h_2,\dots,h_{n-1})x^n.$$

Así la ecuación (2.4) queda

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(\lambda n-\mu)h_nx^n=\sum_{n=2}^{+\infty}P_n(h_2,\dots,h_{n-1}).$$

Si comparamos los coeficientes para $n\geq 2$

$$(\lambda n-\mu)h_n=P_n(h_2,\dots,h_{n-1}),$$

donde los P_n son plinomios cuyos coeficientes dependen de f y g. Como $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$ entonces $\frac{\lambda}{\mu} \neq \frac{1}{n}$ para todo entero positivo n, es decir $\lambda n - \mu \neq 0$, así

$$h_n = \frac{P_n(h_2, \ldots, h_{n-1})}{n\lambda - \mu} \qquad \forall n \geq 2.$$

Obtenemos de esta forma los coeficientes h_n de forma recursiva, para todo $n \geq 2$. Como f y g son series convergentes entonces encontramos un único $h \in \mathbb{C}$ que resuelva la ecuación (2.2) y por lo tanto la existencia de una única curva lisa formal invariante X dada por la gráfica de $y = h(x)$ cuyo espacio tangente en $\mathbf{p}$ es $E_\lambda = (\frac{\partial}{\partial x}|_{\mathbf{p}})$. $\square$

A continuación mostraremos que la curva obtenida en el teorema 2.1.2 es convergente, siempre que los autovalores de $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$, λ, μ son tales que $n\lambda - \mu \neq 0$ y $\lambda \neq 0$, esto se obtiene a partir de un cambio de variable, que se denomina explosión, que mantiene invariante la singularidad simple.

Definición 2.1.3. Sea $\mathbf{X}$ un germen en $\mathbf{p} \in M$ un campo de vectores sobre M y $((x, y), U)$ las coordenadas locales de M en torno de $\mathbf{p}$. Si en estas coordenadas un representante de $\mathbf{X}$ es dado por

$$X = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

definimos la multiplicidad de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{p}$ como $\nu_{\mathbf{X}} = \text{mín}\{\text{ord}_{\mathbf{0}}(a), \text{ord}_{\mathbf{0}}(b)\}$, donde $\text{ord}_{\mathbf{0}}$ denota el orden de la serie en el origen.

Observación 2.1.4. Esta definición no depende de las coordenadas elegidas ni del germen de $\mathbf{X}$. Pues si $\overline{X}$ es otro representante de $\mathbf{X}$, entonces existe una unidad u en $\hat{\mathcal{O}}_{M,\mathbf{p}}|\widehat{\mathbf{m}}_{\mathbf{p}}$ tal que $X = u\overline{X}$.

Lema 2.1.5. *Sea $\boldsymbol{X}$ un germen en $\boldsymbol{p}$ de campo de vectores definido sobre M, $\nu_{\boldsymbol{X}} \geq 1$, $((x, y), U)$ las coordenadas locales centradas en $\boldsymbol{p}$ y X un representante de $\boldsymbol{X}$ en U. Sea $\Phi : x = \tilde{x},\ y = \tilde{x}\tilde{y}$. Esta aplicación envía coordenadas (x, y) de U en entornos del origen $((\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{U})$ de $\mathbb{C}^2$. Entonces se cumple las siguientes proposiciones:*

1. *Existe un único campo de vectores analítico $\tilde{X}$ en las coordenadas $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ tal que $\Phi^*(X) = \tilde{x}^{\nu-1}\tilde{X}$,*

2. *$y - h(x)$ es una curva lisa formal invariante por X si y solo si $\tilde{y} - \tilde{h}(\tilde{x})$ es una curva lisa formal invariante por $\tilde{X}$, tal que $\tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}}$.*

Demostración. 1. Supongamos que en las coordenadas locales $((x, y), U)$, X es dado por

$$X = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Escribiendo $a(x,y)$ y $b(x,y)$ como suma de sus componentes homogéneas

$$a = a^{(\nu)} + a^{(\nu+1)} + \cdots$$

$$b = b^{(\nu)} + b^{(\nu+1)} + \cdots ,$$

donde $a^{(\nu)} \neq 0$ y $b^{(\nu)} \neq 0$. Podemos elegir las coordenadas $((x,y),U)$ de tal manera que, para $n \geq \nu$

$$a^{(n)}(x,y) = \prod_{i=1}^{k}(y - t_i x)^{p_i} \quad b^{(n)}(x,y) = \prod_{j=1}^{k}(y - s_j x)^{\overline{p}_j},$$

donde $t_i,\ s_j \in \mathbb{C}^*$ y $n = \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j$. Luego

$$\Phi^* a^{(n)}(\tilde{x},\tilde{y}) = a^{(n)} \circ \Phi(\tilde{x},\tilde{y}) = a^{(n)}(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) = \tilde{x}^n a^{(n)}(1,\tilde{y}),$$

$$\Phi^* b^{(n)}(\tilde{x},\tilde{y}) = b^{(n)} \circ \Phi(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}^n b^{(n)}(1,\tilde{y}),$$

luego

$$\Phi^* a(\tilde{x},\tilde{y}) = a \circ \Phi(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}^{\nu}\left(a_{\nu}(1,\tilde{y}) + \tilde{x} a_{\nu+1}(1,\tilde{y}) + ...\right) = \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y}),$$

donde $\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{n=\nu}^{+\infty} \tilde{x}^{n-\nu} a^{(n)}(1,\tilde{y})$. Análogamente

$$\Phi^* b(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}^{\nu}\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y}),$$

donde $\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{n=\nu}^{+\infty} \tilde{x}^{n-\nu} b^{(n)}(1,\tilde{y})$.

$$\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{n=\nu}^{+\infty} \tilde{x}^{n-\nu} a^{(n)}(1,\tilde{y}), \quad \tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{n=\nu}^{+\infty} \tilde{x}^{n-\nu} b^{(n)}(1,\tilde{y}) \ ,$$

luego $a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) = \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})$, $b(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}^{\nu}\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y})$.

Calculemos $X(\tilde{x},\tilde{y})$ a partir de Φ^*. En las cartas coordenadas $((x,y),U)$ entorno de $\mathbf{p}$. Tenemos

$$\Phi(\tilde{x},\tilde{y}) = (x,y) = (x(\tilde{x},\tilde{y}), y(\tilde{x},\tilde{y})) = (\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}),$$

luego

$$\Phi^{-1}(x,y) = (x(\tilde{x},\tilde{y}), y(\tilde{x},\tilde{y})) = \left(x, \frac{y}{x}\right),$$

tomando el diferencial

$$D\Phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{q} = (\tilde{x},\tilde{y})$, entonces $\mathbf{p} = \Phi(\mathbf{q}) = (\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y})$ además

$$D\Phi^{-1}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\tilde{x}^2} & \frac{1}{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} & \frac{1}{\tilde{x}} \end{pmatrix}.$$

Aplicando a X

$$
\begin{aligned}
D\Phi^{-1}(\mathbf{p})X(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} & \frac{1}{\tilde{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) \\ b(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) \end{pmatrix} \\
&= a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\tilde{x}}b(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y})\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\
&= \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(\tilde{x}^{\nu-1}\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y}) - \tilde{y}\tilde{x}^{\nu-1}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y})\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\
&= \tilde{x}^{\nu-1}\left(\tilde{x}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y}) - \tilde{y}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right).
\end{aligned}
$$

Haciendo

$$
\tilde{X} = \tilde{x}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{y}) - \tilde{y}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \tag{2.6}
$$

luego $\Phi^*(X) = \tilde{x}^{\nu-1}\tilde{X}$. Como a y b son analíticos entonces $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ lo son, luego $\tilde{X}$ es analitico.

2. La curva invariante es dado por:

$$
C : (g(x,y) = 0) \equiv (y - h(x) = 0),
$$

luego

$$
\Phi^*C : (g(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) = 0) \equiv (\tilde{x}\tilde{y} - h(\tilde{x}) = 0),
$$

entonces

$$
\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}} = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n \tilde{x}^{n-1}.
$$

Si hacemos $\tilde{h}_n = h_{n+1}$, $\tilde{h}(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\tilde{h}_n\tilde{x}^n \in \mathbb{C}[[\tilde{x}]]$, luego si $y - h(x)$ es una curva lisa formal invariante por X, entonces h satisface la ecuación (2.2).

Si $\tilde{X}$ es definido como en (2.6) entonces $\tilde{y} - \tilde{h}$ es una curva invariante formal si y solo si

$$
\tilde{x}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} = \tilde{b}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x})) - \tilde{h}(\tilde{x})\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x})). \tag{2.7}
$$

Se tiene $\Phi^*a(\tilde{x},\tilde{y}) = a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{y}) = \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{y})$, $\tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}}$, la ecuación queda como

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} &= \tilde{x}\left(\tilde{x}^{-\nu}a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{h}(\tilde{x}))\right)\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right) \\
&= \tilde{x}^{1-\nu}a(\tilde{x},h(\tilde{x}))\frac{\left(\frac{dh}{d\tilde{x}}(\tilde{x})\tilde{x} - h(\tilde{x})\right)}{\tilde{x}^2} \\
&= \tilde{x}^{1-\nu}a(\tilde{x},h(\tilde{x}))\left(\frac{dh}{d\tilde{x}}(\tilde{x})\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} &= \tilde{x}^{-\nu}a(\tilde{x},h(\tilde{x}))\frac{dh}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) - \tilde{x}^{-\nu}a(\tilde{x},h(\tilde{x}))\frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}} \\
&= \tilde{x}^{-\nu}b(\tilde{x},h(\tilde{x})) - \tilde{x}^{-\nu}a(\tilde{x},h(\tilde{x}))\tilde{h}(\tilde{x}) \\
&= \tilde{b}(\tilde{x},h(\tilde{x})) - \tilde{a}(\tilde{x},h(\tilde{x}))\tilde{h}(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $\tilde{y} - \tilde{h}(\tilde{x})$ es una curva lisa formal invariante por $\tilde{X}$.

Recíprocamente, si $\tilde{y}-\tilde{h}(\tilde{x})$ es una curva formal invariante por $\tilde{X}$ entonces $\tilde{h}$ resuelve la ecuación (2.2), es decir

$$
\tilde{x}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} = \tilde{b}(\tilde{x},h(\tilde{x})) - \tilde{a}(\tilde{x},h(\tilde{x}))\tilde{h}(\tilde{x}).
$$

De las derivadas parciales respecto de x, y visto en (2.7),

$$
\begin{aligned}
a(x,h(x))\frac{dh}{dx} &= a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{h}(\tilde{x}))\frac{d}{dx}(\tilde{x}\tilde{h}(\tilde{x})) \\
&= a(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{h}(\tilde{x}))\left(\tilde{x}\frac{d\tilde{h}}{dx}(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x})\right) \\
&= \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\left(\tilde{x}\frac{d\tilde{h}}{dx}(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x})\right) \\
&= \tilde{x}^{\nu+1}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\frac{d\tilde{h}}{dx}(\tilde{x}) + \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\tilde{h}(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

De (2.7)

$$
\begin{aligned}
a(x,h(x))\frac{dh}{dx} &= \tilde{x}^{\nu}\left(\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x})) - \tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\tilde{h}(\tilde{x})\right) + \tilde{x}^{\nu}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{h}(\tilde{x}))\tilde{h}(\tilde{x}) \\
&= \tilde{x}^{\nu}\tilde{b}(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{h}(\tilde{x})) = b(\tilde{x},\tilde{x}\tilde{h}(\tilde{x})) \\
&= b(\tilde{x},h(\tilde{x})) \qquad ,
\end{aligned}
$$

considerando que $x = \tilde{x}$, se verifica que $h \in \mathbb{C}[[x]]$ y cumple la ecuación (2.2), esto prueba $y - h(x)$ es una curva lisa formal invariante por X.

$\square$

2.2 Teorema de Briot-Bouquet

Teorema 2.2.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un germen de campo de vectores en $\boldsymbol{p} \in M$. Si $\boldsymbol{p}$ es una singularidad simple de $\boldsymbol{X}$, entonces la curva lisa formal invariante por $\boldsymbol{X}$ correspondiente al autovalor no nulo de la parte lineal $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{X}$ es convergente.*

Demostración. Sean λ y μ los autovalores de $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$ y supongamos que $\lambda \neq 0$. Sean las coordenadas locales $((x,y),U)$ de M entorno de $\mathbf{p}$ tal que $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X}$ es diagonal, esto es posible pues $\lambda \neq \mu$. En estas coordenadas un representante de $\mathbf{X}$ es dado por

$$X = (\lambda x + f(x,y))\frac{\partial}{\partial x} + (\mu y + g(x,y))\frac{\partial}{\partial y},$$

donde $f, g \in \mathbb{C}\{x,y\}$ son de orden mayor o igual a 2. De la observación 1.8.8, si $\widehat{I_\lambda}$ es una variedad lisa invariante por X entonces $\widehat{I_\lambda} = (\mathbf{y} - \mathbf{h})$ tal que si $h \in \mathbb{C}[[x]]$ es un representante de $\mathbf{h}$ y resuelve la ecuación (2.5), entonces del teorema 2.1.2, el espacio tangente de $\widehat{I_\lambda}$ es $E_\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x}|_{\mathbf{p}}\right)$.

Probemos ahora que $h(x)$ es convergente. Como la parte lineal de $\mathbf{X}$, $D_{\mathbf{p}}\mathbf{X} \neq 0$, entonces $\nu_{\mathbf{X}} = 1$. Aplicando la transformación definida en el lema 2.1.5 $\Phi : x = \tilde{x}$, $y = \tilde{x}\tilde{y}$, obtenemos de la ecuación 2.6:

$$\tilde{X} = \left(\tilde{x}(\lambda + \tilde{x}\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}))\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left((\mu - \lambda)\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{g}(\tilde{x},\tilde{y}) - \tilde{x}\tilde{y}\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y})\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}.$$

Los valores propios de la parte lineal de $\tilde{X}$ son λ y $\mu - \lambda$. Como $\mathbf{p}$ es una singularidad simple, entonces $\frac{\mu}{\lambda} - 1 \notin \mathbb{Q}^+$, esto prueba que $\mathbf{0}$ es una singularidad simple de $\tilde{X}$. Del lema 2.1.5 $\tilde{I} = (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{h}})$ es una curva lisa formal invariante por $\tilde{\mathbf{X}}$. Además, si definimos $\tilde{I}_\lambda = (\tilde{x})$,

$$\tilde{X}(\tilde{x}) = \tilde{x}(\lambda + \tilde{x}\tilde{f}(\tilde{x})) \subset (\tilde{x}).$$

Lo que prueba que existe una curva analítica invariante por $\tilde{X}$. Además

$$T_{\mathbf{p}}\tilde{X} = \ker d\tilde{x}(\mathbf{p}) = \{\tilde{x} = 0\} = \left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\mathbf{0}}\right),$$

entonces $T_{\mathbf{p}}\tilde{X}$ es tranversal a $\tilde{I}_\lambda$. Como $\tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{h(\tilde{x})}{\tilde{x}}$ la convergencia de $\tilde{h}$ depende de la convergencia de h.

Tomando a x fijo y eligiendo a $((x,y),U)$ coordenadas locales de M en $\mathbf{p}$ tal que $D_{\mathbf{p}}X$ sea diagonal y $X = \mathbf{u}\overline{X}$, donde $\mathbf{u}$ es una unidad de $\mathcal{O}_{M,\mathbf{p}}$ y

$$\overline{X} = \lambda x\frac{\partial}{\partial x} + (\mu y + b(x,y))\frac{\partial}{\partial y},$$

donde $b \in \mathbb{C}\{x,y\}$ es de orden mayor o igual a dos en el origen. Si $\widehat{I_\lambda} = (\mathbf{y} - h)$ con representante $h \in \mathbb{C}[[x]]$ entonces $h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n x^n$ es la solución de (2.4), es decir

$$\lambda x\frac{dh}{dx} = \mu h(x) + b(x, h(x))$$

$$\lambda x\left(\sum_{n=3}^{+\infty} n h_n x^n\right) = \mu\sum_{n=2}^{+\infty} h_n x^n + b(x,h(x)). \tag{2.8}$$

De forma análoga como en lema 2.1.5 y haciendo un reordenamiento de índice en la serie al lado izquierdo de la igualdad en (2.8)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\lambda n - \mu)\, h_n x^n = b(x, h(x)) = \sum_{i+j\geq 2} b_{ij} x^i (h(x))^j.$$

Veamos la forma explícita del desarrollo de la serie del lado derecho de esta última igualdad

$$\sum_{i+j\geq 2} b_{ij} x^i (h(x))^j = b_{20}x^2 + (b_{30} + b_{11}h_2)x^3 + \left(b_{40} + b_{11}h_3 + 2b_{02}h^2 + b_{21}h_2\right) x^4$$

$$+ \left(b_{50} + 2b_{02}h_2^2 h_3 + b_{11}b_4 + b_{21}h_3 + b_{12}h^2 + b_{31}h_2\right) x^5 + ...$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{|k|+i=n, j<n} c_k b_{ij} h_{k_1} h_{k_2} \cdots h_{k_{n-1}} \right) x^n.$$

donde $k = (k_1, ..., k_{n-1})$ y los c_k son enteros no negativos. Luego

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\lambda n - \mu)\, h_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{|k|+i=n, j<n} c_k b_{ij} h_{k_1} h_{k_2} \cdots h_{k_{n-1}} \right) x^n.$$

Simplificando, tenemos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n - \frac{\mu}{\lambda}\right) h_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} P_n x^n, \tag{2.9}$$

donde para $n \geq 2$, $i + j \leq n$ se tiene $P_n = P_n(b_{ij}, h_2, ..., h_{n-1})$. Igualando los coeficientes

$$\left(n - \frac{\mu}{\lambda}\right) h_n = P_n. \tag{2.10}$$

Sea $\alpha = \text{ínf}_{n\geq 2} \left\{ \left| \frac{\mu}{\lambda} - n \right| \right\}$, como $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$ entonces $\alpha > 0$. Definamos

$$F(x, v) = \alpha v - \sum_{i+j\geq 2} |b_{ij}| x^i v^j,$$

una función analítica definida en cierta vecindad del origen, donde

$$b(x, y) = \sum_{i+j\geq 2} b_{ij} x^i y^j.$$

Vemos que $F(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial v}(0, 0) = \alpha$, del teorema de la función implícita existe una función analítica

$$v(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n$$

tal que $F(x, v(x)) = 0$. Luego

$$\alpha v - \sum_{i+j\geq 2} |b_{ij}| x^i v^j = 0,$$

análogo a lo obtenido en 2.9

$$\alpha \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{|k|+i=n, j<n} c_k |b_{ij}| v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_{n-1}} \right) x^n$$

de donde se sigue que

$$\alpha v_n = Q_n. \tag{2.11}$$

Además, para cada $n \geq 2$, $Q_n = P_n(|b_{ij}|, v_2, ..., v_{n-1})$ son polinomios con coeficientes positivos que dependen de los v_i y $|b_{ij}|$.

Para probar la convergencia de h usemos el criterio de comparación con la serie analítica $v(x)$, es decir veamos que se cumpla $|h_n| \leq v_n$. Probemos por inducción sobre n. Sea $n = 2$ y reemplazando en 2.10

$$|h_2| = \frac{|P_2|}{|\frac{\mu}{\lambda} - 2|} = \frac{|b_{20}|}{|\frac{\mu}{\lambda} - 2|} \leq \frac{|b_{20}|}{\alpha} = v_2.$$

Supongamos que para todo $k \leq n$ se cumple

$$|h_k| \leq v_k,$$

luego

$$\begin{aligned} |h_{n+1}| = \frac{|p_{n+1}|}{|\frac{\mu}{\lambda} - n - 1|} &\leq \frac{1}{|\frac{\mu}{\lambda} - n - 1|} \left| \sum_{|k|+i=n+1, j<n} c_k |b_{ij}| h_{k_1} h_{k_2} \cdots h_{k_n} \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{|k|+i=n+1, j<n} c_k |b_{ij}| |h_{k_1}| |h_{k_2}| \cdots |h_{k_n}| \right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{|k|+i=n+1, j<n} c_k |b_{ij}| v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_n} \right) \leq \frac{Q_{n+1}}{\alpha}. \end{aligned}$$

De 2.11

$$|h_{n+1}| \leq \frac{Q_{n+1}}{\alpha} = v_{n+1}$$

Esta comparación muestra que h converge. □

La hipótesis del teorema anterior $\lambda \neq 0$, es suficiente para probar la convergencia de la curva. Esto se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. Ecuación de Euler. Considere el germen de campo de vectores En $(\mathbb{C}, (0,0))$ cuyo representante es dado por

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Observe que la parte lineal de X tiene autovalor $\lambda = 0$ y su correspondiente autoespacio $E_\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x}\big|_{\mathbf{0}} + \frac{\partial}{\partial x}\big|_{\mathbf{0}} \right)$. Si $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n x^n$ es la solución formal (2.2) entonces

$$x^2 \frac{d}{dx} h(x) = x - h(x).$$

Determinemos la solución

$$x^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n h_n x^{n-1} \right) = x - \sum_{n=0}^{+\infty} h_n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n h_n x^{n+1} = -h_0 + (h_1 - 1)x - \sum_{n=2}^{+\infty} h_n x^n,$$

$$h_0 + (1 - h_1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} n h_n x^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} h_n x^n = 0,$$

mediante un reordenamiento de índices

$$h_0 + (1 - h_1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} (h_{n+1} + n h_n) x^{n+1} = 0,$$

luego se tiene que $h_0 = 0$, $h_1 = 1$ y $h_{n+1} = (-1)^n n h_n$, obteniendo de forma recursiva que

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! x^{n+1},$$

el cual no es convergente, por tanto $\lambda \neq 0$ es una condición suficiente para que $h(x)$ sea convergente.

Capítulo 3

Resultado principal: Teorema de Briot-Bouquet en dimensiones altas

En este capítulo, dispuesto en dos secciones, mostramos primero la existencia de una variedad formal invariante por un germen de campo de vectores, análogo al teorema 2.2.1. Posteriormente bajo las condiciones de no resonancia se logra probar la convergencia de dicha variedad. De esta manera se obtiene una versión del teorema de Briot-Bouquet para dimensión $n > 2$.

3.1 Existencia de variedades invariantes formales en dimensión $n > 2$

En esta sección presentamos el concepto de condición de no-resonancia, que permite garantizar la existencia de variaded no sigular de variedad formal.

Sea k un entero positivo, denotaremos por $\mathcal{P}_k$ el espacio de los polinomios homogéneos de grado k en las variables z_1, z_2,...,z_r, cuya base es dado por elementos de la forma $\mathbf{z}^q$, tal que $|q| = k$.

Sean las matrices cuadradas A y B de orden r y s respectivamente sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}_k^s = \mathcal{P}_k \times \cdots \times \mathcal{P}_k$, $s-$veces y sea el operador $L_{k,A,B} : \mathcal{P}_k^s \to \mathcal{P}_k^s$ dado por

$$L_{k,A,B}(v) = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - Bv, \tag{3.1}$$

donde $v = (v_1, ..., v_s)$ y $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(v_1,...,v_s)}{\partial(x_1,...,x_r)} \in M_{s\times r}(\mathcal{P}_{k-1})$. El siguiente resultado describe los autovalores de $L_{k,A,B}$ en términos de los autovalores de A y de B, que más adelante nos permitirá definir una condición llamada resonancia.

Lema 3.1.1. *Sean $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ y $\{\mu_1, ..., \mu_s\}$ los valores propios de A y B respectivamente, entonces el conjunto $\{< q, \mu > -\lambda_j, j = 1, ..., s; |q| = k\}$ son los valores propios de $L_{k,A,B}$ tal que $q = (q_1, ..., q_r)$ y $< q, \mu >= \sum_{i=1}^r q_i\mu_i$.*

Demostración. La forma de cómo elegimos A y B permiten reducir el problema a una forma más sencilla, probemos entonces que si elegimos matrices equivalentes de A y B los valores propios del operador $L_{k,A,B}$ no cambian.

En efecto. Sea $\beta \neq 0$ un valor propio de $L_{k,A,B}$ entonces existe $v \in \mathcal{P}_k^s$ tal que $L_{k,A,B}(v) = \beta v$. Sea M y N dos matrices no singulares de orden r, s respectivamente, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^r$ entonces definimos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_k^s & \to & \mathcal{P}_k^s \\ v & \mapsto & w, \end{array}$$

tal que

$$w(\mathbf{y}) = N^{-1}v(M\mathbf{y}) \in \mathcal{P}_k. \tag{3.2}$$

Como $\beta \neq 0$ y $L_{k,A,B}(v) = \beta v$ se tiene $\frac{L_{k,A,B}}{\beta}(v) = v$, reemplazando en (3.2)

$$w(\mathbf{y}) = N^{-1}\frac{L_{k,A,B}}{\beta}(v)(M\mathbf{y}), \tag{3.3}$$

siendo en (3.1) $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$.

Definimos la aplicación $\tilde{L} : \mathcal{P}_k^s \to \mathcal{P}_k^s$ tal que $\tilde{L}(w(\mathbf{y})) := N^{-1}L_{k,A,B}v(M\mathbf{y})$. De (3.3)

$$\tilde{L}w(\mathbf{y}) = \beta w(\mathbf{y}).$$

De esta manera $\tilde{L}$ y $L_{k,A,B}$ tienen los mismos autovalores. Además, de la definición de $L_{k,A,B}$ tenemos

$$\tilde{L}w(\mathbf{y}) = N^{-1}L_{k,A,B}(v)(M\mathbf{y}) = N^{-1}\left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})B\mathbf{x} - Av(\mathbf{x})\right) = N^{-1}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})B\mathbf{x} - N^{-1}Av(\mathbf{x}).$$

De (3.2) y considerando que $\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{x}$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = N\frac{\partial w}{\partial \mathbf{y}}M^{-1},$$

tenemos así que

$$\tilde{L}w(\mathbf{y}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{y}}M^{-1}BM(\mathbf{y}) - N^{-1}ANw(\mathbf{y}).$$

La última igualdad prueba que $\tilde{L}w(y) = L_{k,M^{-1}BM,N^{-1}AN}w(y)$ además se probó que $\tilde{L}$ y $L_{k,A,B}$ tienen los mismos valores propios, lo que nos permite entonces elegir matrices equivalentes. Considerando A y B en su forma canónica de Jordan dada de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \tau_s & \lambda_s \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \mu_r \end{pmatrix}.$$

con $\sigma_i \in \{0,\sigma\}$ y $\tau_i \in \{0,\tau\}$. Sea $w = L_{k,A,B}(v)$, escribimos de manera explícita el sistema, viendo a $w = (w_1, ..., w_s)$ como vector columna,

$$L_{k,A,B}(v) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_s}{\partial x_1} & \frac{\partial v_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_s}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \mu_2 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & \mu_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & ... & \sigma_r & \mu_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \tau_2 & \lambda_2 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & ... & \tau_s & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\mu_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\sigma_2 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\mu_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\sigma_3 & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_{r-1}}\mu_{r-1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_r}\sigma_r & \frac{\partial v_1}{\partial x_r}\mu_r \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\mu_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\sigma_2 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\mu_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\sigma_3 & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_{r-1}}\mu_{r-1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_r}\sigma_m & \frac{\partial v_2}{\partial x_r}\mu_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_s}{\partial x_1}\mu_1 + \frac{\partial v_s}{\partial x_2}\sigma_2 & \frac{\partial v_s}{\partial x_2}\mu_2 + \frac{\partial v_s}{\partial x_3}\sigma_3 & \cdots & \frac{\partial v_s}{\partial x_{r-1}\mu_{r-1}} + \frac{\partial v_s}{\partial x_r}\sigma_m & \frac{\partial v_s}{\partial x_r}\mu_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \tau_2 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ \tau_s v_{s-1} + \lambda_s v_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\mu_1 x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\sigma_2 x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\mu_2 x_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\sigma_3 x_2 + & \ldots & + \frac{\partial v_1}{\partial x_r}\sigma_r x_{r-1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_r}\mu_r x_r \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\mu_1 x_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\sigma_2 x_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\mu_2 x_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\sigma_3 x_2 + & \ldots & + \frac{\partial v_2}{\partial x_r}\sigma_r x_{r-1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_r}\mu_r x_r \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_s}{\partial x_1}\mu_1 x_1 + \frac{\partial v_s}{\partial x_2}\sigma_2 x_1 + \frac{\partial v_s}{\partial x_2}\mu_2 x_2 + \frac{\partial v_s}{\partial x_3}\sigma_3 x_2 + & \ldots & + \frac{\partial v_s}{\partial x_s}\sigma_s x_{s-1} + \frac{\partial v_r}{\partial x_r}\mu_r x_r \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \tau_2 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ \tau_s v_{s-1} + \lambda_s v_s \end{pmatrix}$$

Haciendo $\sigma_1 = \tau_1 = 0$ y $x_0 = v_0$ podemos escribir

$$w_j = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\sigma_i x_{i-1} + \mu_i x_i) - \lambda_j v_j - \tau_j v_{j-1}. \tag{3.4}$$

Como cada $w_j(\mathbf{x})$ y v_i son polinomios en las variables $x_1, ..., x_r$, escribiendo los v_j como suma de sus componentes homogéneas $v_j = \sum_{k=1}^{+\infty} v_j^{(k)}$, con $v_j^{(k)} = \sum_{|q|=k} v_{i,\mathbf{q}}^{(k)} \mathbf{x}^q$ obtenemos

$$w_j = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_j^{(k)} \right) (\sigma_i x_{i-1} + \mu_i x_i) - \left(\tau_j (\sum_{k=1}^{\infty} v_{j-1}^{(k)}) + \lambda_j (\sum_{k=1}^{\infty} v_j^{(k)}) \right).$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{|\mathbf{q}|=k} v_{i,\mathbf{q}}^{(k)} q_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}-e_i} \right) (\sigma_i x_{i-1} + \mu_i x_i) \right] - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{|\mathbf{q}|=k} v_{j-1,\mathbf{q}}^{(k)} \tau_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{|\mathbf{q}|=k} v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} \lambda_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sum_{|\mathbf{q}|=k} \sum_{i=1}^{r} v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} q_i \sigma_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}+e_{i-1}-e_i} + \sum_{|\mathbf{q}|=k} \sum_{i=1}^{r} v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} q_i \mu_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}} - \sum_{|\mathbf{q}|=k} v_{j-1,\mathbf{q}}^{(k)} \tau_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}} - \sum_{|\mathbf{q}|=k} v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} \lambda_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \right],$$

si hacemos $< \mathbf{q}, \mu >= \sum_{i=1}^{r} \mu_i q_i$, tenemos

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sum_{|\mathbf{q}|=k} \sum_{i=1}^{r} v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} q_i \sigma_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}+e_{i-1}-e_i} + \sum_{|\mathbf{q}|=k} (< \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j) v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} \mathbf{x}^{\mathbf{q}} - \sum_{|\mathbf{q}|=k} v_{j-1,\mathbf{q}}^{(k)} \tau_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \right].$$

Como $|\mathbf{q} - e_i + e_{i-1}| = k$, podemos escribir $\mathbf{q}$ en lugar de $\mathbf{q} - e_i + e_{i-1}$, de esta manera la componente q_i del nuevo q será $q_i - 1$, luego para uniformar el cambio de índices definimos $v_{i,\mathbf{q}-e_{i-1}+e_i} = 0$ cuando $q_{i-1} = 0$. Luego

$$w_j = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{|\mathbf{q}|=k} \left[\sum_{i=1}^{r} \sigma_i v_{j,\mathbf{q}+e_i-e_{i-1}}^{(k)} (q_i + 1) + (< \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j) v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} - \tau_j v_{j-1,\mathbf{q}}^{(k)} \right] \mathbf{x}^{\mathbf{q}}.$$

Igualando los coeficientes de los polinomios homogéneos de orden k

$$w_j^{(k)} = (< \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j) v_{j,\mathbf{q}}^{(k)} + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i (q_i + 1) v_{j,\mathbf{q}+e_i-e_{i-1}}^{(k)} - \tau_j v_{j-1,\mathbf{q}}^{(k)},$$

como queremos ver la forma de los valores propios del operador $\tilde{L}v = \beta v$ los $v_{j,\mathbf{q}+e_i-e_{i-1}}^{(k)}$ y $v_{j-1,\mathbf{q}}^{(k)}$ preceden a los $v_{j,\mathbf{q}}^{(k)}$, entonces al comparar se tiene que $< \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j = \beta$ y si queremos una solución no nula, $< \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j \neq 0$ que corresponden a los valores propios de $\tilde{L}$ y de L, lo que prueba el lema. $\square$

Definición 3.1.2. Sean $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ y $\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ los valores propios de A y B respectivamente; diremos que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ y $\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ cumplen la condición de resonancia:

si existe $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}$ con $|\mathbf{q}| \geq 2$ tales que $< \mathbf{q}, \mu >= \lambda_j$ para todo $j = 1, \ldots, s$.

En el caso que $< \mathbf{q}, \mu > \neq \lambda_j$, diremos cumplen la condición de no resonancia.

Bajo los resultados obtenidos hasta ahora es posible encontrar una variedad formal invariante por un germen de campo vectorial holomorfo $\mathbf{X}$ a través de un punto $\mathbf{p} \in M$. Sin pérdida de generalidad trabajamos sobre el espacio $M = \mathbb{C}^n$. Fijemos primero algunas notaciones.

Sea X un representante de $\mathbf{X}$ tal que $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$, $D_{\mathbf{0}}X$ es la parte lineal X en el origen, $s = n - r$ y $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbb{C}^r$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{C}^s$ donde $\{\mu_1, \ldots, \mu_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ es el espectro de D_0X (μ_j o los λ_j pueden repetirse según su multiplicidad, por tanto no necesariamente son distintos). Podemos descomponer el espacio tangente como suma directa $T_0\mathbb{C}^n = E \oplus F$ de los respectivos subespacios propios, esto hace que E y F sean subespacios invariantes por D_0X. Lograremos encontrar una subvariedad analítica W_E de dimensión r, no singular en el origen, cuyo espacio tangente en 0 es igual a E e invariante por el campo vectorial X.

Se sabe que en general tal variedad invariante W_E no existe, luego varias condiciones serán impuestas para tal objetivo.

Teorema 3.1.3. *Supongamos que los autovalores satisfacen la condición de no resonancia*

$$\lambda_j \neq \langle \boldsymbol{q}, \mu \rangle \, , \; \forall q \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \text{ con } |\boldsymbol{q}| \geq 2. \tag{3.5}$$

Entonces existe una única variedad formal no singular $r-$dimensional $\widehat{W}_E$ tangente a E en 0 e invariante por el campo vectorial X.

Demostración. Elegimos las coordenadas analíticas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ tal que los espacios lineales E y F están dados por

$$E = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{0}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\bigg|_{\mathbf{0}} \right), \quad F = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_{\mathbf{0}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_s}\bigg|_{\mathbf{0}} \right).$$

Así E es tangente a $\{\mathbf{y} = 0\}$. Si $A \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ y $B \in M_{s\times s}(\mathbb{C})$ son los representantes de $D_{\mathbf{0}}X|_E$ y $D_{\mathbf{0}}X|_F$ respectivamente, podemos expresar $D_{\mathbf{0}}\mathbf{X}$ en esta base como

$$D_{\mathbf{0}}X = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Por la proposición 1.8.7, en esta base, podemos expresar X como $X = \sum_{i=1}^r v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^s w_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ o de forma más abreviada

$$X = a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}},$$

donde $a = (a_1, \ldots, a_r)$ y $b = (b_1, \ldots, b_s)$ son vectores de series de potencias convergentes. De la ecuación (1.17) $\mathbf{y} - h(\mathbf{x})$, es una solución formal, de la ecuación expresada en forma matricial como

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} a(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = b(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})), \tag{3.6}$$

Definimos $\widehat{W}_E$ dado por la gráfica de h

$$\widehat{W}_E := \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{y} = h(\mathbf{x}),\ h(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), ..., h_s(\mathbf{x})),\ h_j \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]\}\,, \tag{3.7}$$

donde para cualquier j, $h_j(\mathbf{0}) = 0$ y $h'_j(\mathbf{0}) = 0$ (tangente a E). Escribimos a y b de la forma

$$a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + f(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B\mathbf{y} + g(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Así la ecuación (3.6) se convierte en

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(A\mathbf{x} + Ch(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))) = Bh(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})), \tag{3.8}$$

tal que $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$, $f = (f_1, \ldots, f_r)$ y $g = (g_1, \ldots, g_s)$ son vectores de series de potencias convergentes en las variables $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de grado mayor o igual que dos. Escribimos cada h_j como suma de sus componentes homogéneas

$$h_j = \sum_{k=1}^{+\infty} h^{(k)_j}, \quad h = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} h^{(k)} \quad h^{(k)} = (h_1^{(k)}, \ldots, h_s^{(k)}),$$

y sean $F^{(k)}$ y $G^{(k)}$ las componentes homogéneos de grado k de $f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$ y $g(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$, respectivamente. Notamos que como f y g son vectores de series potencias de grado mayor o igual a dos, las componentes $F^{(1)} = G^{(1)} = 0$. Reemplazando $h = \sum_{k=1}^{+\infty} h^{(k)}$ en la ecuación (3.8) y distribuyendo la multiplicación

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) A\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) C \left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) + \frac{\partial}{\partial\ x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right)\left(\sum_{k=2}^{\infty} F^{(k)}\right)$$
$$= B\left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} G^{(k)}\right).$$

Usando la propiedad del producto de series

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h^{(k)}\right) A\mathbf{x} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} h^{(k)}\right) C \left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h^{(k)}\right)\left(\sum_{k=2}^{\infty} F^{(k)}\right)$$
$$= B\left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} G^{(k)}\right),$$

luego

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial h^{(k)}}{\partial \mathbf{x}}\right) A\mathbf{x} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k-2} \frac{\partial h^{(l+1)}}{\partial \mathbf{x}} C h^{(k-l)}\right) + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial h^{(k-l+1)}}{\partial \mathbf{x}} F^{(l)}\right)$$
$$= B\left(\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}\right) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} G^{(k)}\right),$$

De esta manera, para $k \geq 2$ comparamos las componentes homogéneas de grado k de ambas partes de la igualdad anterior y obtenemos

$$\frac{\partial h^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} + \sum_{l=1}^{k-2} \frac{\partial h^{(l+1)}}{\partial \mathbf{x}} C h^{(k-l)} + \sum_{l=2}^{k-1} \frac{\partial h^{(k-l+1)}}{\partial \mathbf{x}} F^{(l)} = B h^{(k)} + G^{(k)}. \tag{3.9}$$

Reordenando 3.9 tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial h^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - B h^{(k)} = G^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-2} \frac{\partial h^{(l+1)}}{\partial \mathbf{x}} C h^{(k-l)} - \sum_{l=2}^{k-1} \frac{\partial h^{(k-l+1)}}{\partial \mathbf{x}} F^{(l)}. \tag{3.10}$$

De (3.8) f y g son series en las variables $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de orden mayor o igual a 2, luego al lado derecho de (3.10) solo las componentes homogéneas $h^{(2)}, \ldots, h^{(k-1)}$ son considerados pero no $h^{(k)}$. Por otro lado, escribimos el lado izquierdo de la ecuación (3.10) como una aplicación

$$L_{k,A,B}(v) = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - Bv.$$

Del lema 3.1.1, el espectro del operador $L_{k,A,B}$ es dado por el conjunto

$$\left\{ < \mathbf{q}, \mu > -\lambda_j \, : \, q \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}, \ |\mathbf{q}| = k, \ j = 1, \ldots, s \right\}.$$

Luego, de la hipótesis de no resonancia dado en (3.5) y del lema 3.1.1 se sigue que $L_{k,A,B}$ es no singular y la ecuación (3.10) puede ser resuelta recursiva y únicamente por $h^{(k)}$ por medio de la fórmula

$$h^{(k)} = L^{-1}_{k,A,B} \left(G^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-2} \frac{\partial h^{(l+1)}}{\partial \mathbf{x}} C h^{(k-l)} - \sum_{l=2}^{k-1} \frac{\partial h^{(k-l+1)}}{\partial \mathbf{x}} F^{(l)} \right).$$

Esto muestra la existencia de h tal que $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ es una solución de la ecuación (3.6) y por tanto existe una variedad formal $\widehat{W}_E$ dada por la gráfica de la función $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ que es invariante por el campo de vectores X. Como $h'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y del hecho que $T_{\mathbf{0}}\widehat{W}_E$ está generado por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{0}} + \sum_{j=1}^{n-r} \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\mathbf{0}}, \ i = 1, \ldots, r,$$

entonces $T_{\mathbf{0}}\widehat{W}_E = E$. $\square$

3.2 Demostración del resultado principal

En esta sección presentamos la prueba del resultado principal, cabe resaltar que se expone una generalización del teorema 2.2.1 a partir de generalizar la condición dada en (1) para los autovalores de la parte lineal del campo de vectores X.

Teorema 3.2.1. *Sea $\boldsymbol{X}$ un germen de un campo vectorial en $\boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^n$ y E un subespacio lineal $r-$dimensional de $\mathbb{C}^n$ invariante para la parte lineal D_0X. Sea $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ donde $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ son los autovalores de $D_0X|_E$ y $\{\mu_1, \ldots, \mu_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}\}$ los autovalores de D_0X. Si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$| < \boldsymbol{q}, \mu > -\lambda_j| \geq \alpha|\boldsymbol{q}| \text{ para todo } j = 1, \ldots, n-r \text{ y } \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \text{ con } |\boldsymbol{q}| \geq 2. \tag{3.11}$$

Entonces la variedad invariante formal $\widehat{W}_E$ dado por el teorema 3.1.3 es convergente.

Demostración. Elegimos las coordenadas analíticas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ tal que los espacios lineales E y F están dados por

$$E = (\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{0}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\Big|_{\mathbf{0}}), \quad F = (\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{\mathbf{0}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_s}\Big|_{\mathbf{0}}).$$

Así E es tangente a $\{\mathbf{y} = 0\}$. Si $A \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ y $B \in M_{s\times s}(\mathbb{C})$ son los representantes de $D_{\mathbf{0}}X|_E$ y $D_{\mathbf{0}}X|_F$ respectivamente, podemos expresar $D_{\mathbf{0}}\mathbf{X}$ en esta base como

$$D_{\mathbf{0}}X = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Nuestro principal objetivo es reducir el problema al caso en dimensión dos y aplicar el Teorema de Briot-Bouquet (teorema 2.2.1). Dividiremos la prueba en varios pasos.

Paso 1. Sea $s = n - r$ y F el subespacio lineal $s-$dimensional invariante por la parte lineal D_0X tal que $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son los autovalores de $D_0X|_E$. Denotamos las coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en $\mathbf{0}$ donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s)$ son tal que E es tangente a $\{\mathbf{y} = 0\}$. En estas coordenadas podemos escribir

$$D_0X = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

donde A y B son la matrices cuadrada de orden r y s respectivamente, representantes de la restricción $D_0X|_E$ en la coordenada $\mathbf{x}$ y $D_0X|_F$ en la coordenada $\mathbf{y}$.

Podemos tomar las matrices A y B por sus correspondientes equivalentes en la forma de Jordan en las coordenadas elegidas. Escogemos una constante $\sigma \in \mathbb{R}$ con $0 < \sigma < \frac{\alpha}{2r}$ y $\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & \mu_r \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tau_2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_s & \lambda_s \end{pmatrix}$$

con $\sigma_i \in \{0, \sigma\}$ y $\tau_i \in \{0, \tau\}$. Podemos unificar la notación haciendo $\sigma_1 = \tau_1 = 0$.

Paso 2. La ecuación de $\widehat{W}_E$ $(\mathbf{y} = h(\mathbf{x}))$. Como se hizo en la prueba del teorema 3.1.3, si la expresión de X en las de coordenadas elegidas es

$$X = (A\mathbf{x} + C\mathbf{y} + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + (B\mathbf{y} + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}},$$

entonces existe una variedad invariante formal $\widehat{W}_E$ dada por la gráfica de $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$, donde $h = (h_1, ..., h_s) \in (\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])^s$ es una solución del sistema (3.8). Probaremos que cualquier componente h_i de h es una serie convergente en la variable $\mathbf{x}$. Del sistema (3.8) podemos escribir

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_s) := \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - Bh(\mathbf{x}) \in (\mathbb{C}[[\mathbf{x}]])^s.$$

Sean $f = (f_1, \ldots, f_r)$, $g = (g_1, ..., g_s)$, donde f_j, $g_j \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ y $C = (c_{lm})$ una matriz de orden $r \times s$. Reemplazando $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ y escribiendo la forma matricial la igualdad

$$U = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - Bh(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\left(Ch(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))\right), \tag{3.12}$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1} & \frac{\partial h_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_s}{\partial x_r} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1} & \frac{\partial h_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_s}{\partial x_r} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \sum_{m=1}^s c_{1m}h_m \\ \sum_{m=1}^s c_{2m}h_m \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^s c_{rm}h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1} & \frac{\partial h_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_s}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^s c_{1m}h_m + f_1 \\ \sum_{m=1}^s c_{2m}h_m + f_2 \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^s c_{rm}h_m + f_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\left(\sum_{m=1}^s c_{1m}h_m + f_1\right) + \ldots + \frac{\partial h_1}{\partial x_r}\left(\sum_{m=1}^s c_{rm}h_m + f_r\right) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}\left(\sum_{m=1}^s c_{1m}h_m + f_1\right) + \ldots + \frac{\partial h_2}{\partial x_r}\left(\sum_{m=1}^s c_{rm}h_m + f_r\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1}\left(\sum_{m=1}^s c_{1m}h_m + f_1\right) + \ldots + \frac{\partial h_s}{\partial x_r}\left(\sum_{m=1}^s c_{rm}h_m + f_r\right) \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación (3.8) es equivalente a

$$u_i = g_i(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) - \sum_{j_1}^{r} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}_j}\left(f_j(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) + \sum_{m=1}^{s} c_{jm}h_m(\mathbf{x})\right) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.13}$$

Paso 3. Ahora comparamos los otros elementos de la igualdad (3.12). Las fórmulas para las componentes homogéneas de u_i. Usando la forma especial de las matrices

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1} & \frac{\partial h_s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_s}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \mu_2 & ... & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \mu_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau_1 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \tau_s & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_r \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\mu_1 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\sigma_2 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\mu_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3}\sigma_3 & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_r}\mu_1 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}\mu_1 + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\sigma_2 & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\mu_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x_3}\sigma_3 & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_r}\mu_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\mu_1 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\sigma_2 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\mu_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3}\sigma_3 & \dots & \frac{\partial h_s}{\partial x_r}\mu_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \tau_2 h_1 + \lambda_2 h_2 \\ \vdots \\ \lambda_{s-1}h_{s-2} + \lambda_{s-2}h_{s-1} \\ \tau_s h_{s-1} + \lambda_s h_s \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\sigma_1 x_0 + \mu_1 x_1) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \mu_2 x_2) \dots \frac{\partial h_1}{\partial x_r}(\sigma_r x_{r-1} + \mu_r x_r) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\sigma_1 x_0 + \mu_1 x_1) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \mu_2 x_2) \dots \frac{\partial h_2}{\partial x_r}(\sigma_r x_{r-1} + \mu_r x_r) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1}(\sigma_1 x_0 + \mu_1 x_1) + \frac{\partial h_s}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \mu_2 x_2) \dots \frac{\partial h_s}{\partial x_r}(\sigma_r x_{r-1} + \mu_r x_r) \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \tau_2 h_1 + \lambda_2 h_2 \\ \vdots \\ \lambda_{s-1}h_{s-2} + \lambda_{s-2}h_{s-1} \\ \tau_s h_{s-1} + \lambda_s h_s \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\sigma_1 x_0 + \mu_1 x_1) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \mu_2 x_2) \dots \frac{\partial h_1}{\partial x_r}(\sigma_r x_{r-1} + \mu_r x_r) - \lambda_1 h_1 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\sigma_1 x_0 + \mu_1 x_1) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \mu_2 x_2) \dots \frac{\partial h_2}{\partial x_r}(\sigma_r x_{r-1} + \mu_r x_r) - (\tau_2 h_1 + \lambda_2 h_2) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_s}{\partial x_1}(\sigma_1 x_0 + \mu_1 x_1) + \frac{\partial h_s}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \mu_2 x_2) \dots \frac{\partial h_s}{\partial x_r}(\sigma_r x_{r-1} + \mu_r x_r) - (\tau_s h_{s-1} + \lambda_s h_s) \end{pmatrix}$$

Igualando componente a componente tenemos

$$u_i = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\sigma_j x_{j-1} + \mu_j x_j) - (\tau_i h_{i-1} + \lambda_i h_i). \qquad (3.14)$$

Escribimos explícitamente las componentes homogéneas de u_i, reemplazando $h_i = \sum_{k=2}^{+\infty} h_i^{(k)}$, $h_i^{(k)} = \sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}$, en (3.14)

$$u_i = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} h_i^{(k)}\right)(\sigma_j x_{j-1} + \mu_j x_j) - \left(\tau_i(\sum_{k=2}^{+\infty} h_{i-1}^{(k)}) + \lambda_i(\sum_{k=2}^{+\infty} h_i^{(k)})\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty}\left[\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)} q_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}-e_j}\right)\right](\sigma_j x_{j-1} + \mu_j x_j) - \left(\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\tau_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}} + \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)}\lambda_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty}\left[\sum_{|\mathbf{q}|=k}\sum_{j=1}^{+\infty} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)} q_j \sigma_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}+e_{j-1}-e_j} + \sum_{|\mathbf{q}|=k}\sum_{j=1}^{+\infty} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)} q_j \mu_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}} - \sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\tau_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}} - \sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)}\lambda_i \mathbf{x}^{\mathbf{q}}\right]$$

$$u_i = \sum_{k=2}^{+\infty}\left[\sum_{|\mathbf{q}|=k}\sum_{j=1}^{r} h_{i,\mathbf{q}}^{(k)} q_j \sigma_j \mathbf{x}^{\mathbf{q}+e_{j-1}-e_j} + \sum_{|\mathbf{q}|=k}\left(h_{i,\mathbf{q}}^{(k)}(<\mathbf{q},\mu> - \lambda_i) + h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\tau_i\right)\mathbf{x}^{q}\right] \quad (3.15)$$

donde e_i es el i-ésimo vector de la base estándar de $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$. Para uniformar la notación respecto al índice $i-1$ convenimos hacer $h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j}^{(k)} = 0$ si $q_{j-1} = 0$ y cambiando el índice $\mathbf{q}$ por $\mathbf{q} + e_{j-1} - e_j$ en el primer sumando de la ecuación (3.15) (en ese cambio tenemos en cuenta que la nueva componente q_j es q_{j+1}) las componentes de grado k de u_i es dado por

$$u_i^{(k)} = \sum_{|\mathbf{q}|=k}\left[\sum_{j=2}^{r}\sigma_j(q_j+1)h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j}^{(k)} + (<\mathbf{q},\mu> - \lambda_i)h_{i,\mathbf{q}}^{(k)} - \tau_i h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\right]\mathbf{x}^{\mathbf{q}}. \quad (3.16)$$

Paso 4. Comparamos las normas de $u_i^{(k)}$ y $h^{(k)_j}$. Para cada $\mathbf{q}$ en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ con $|\mathbf{q}| = k$, y considerando la desigualdad triangular

$$\left|\sum_{j=2}^{r}\sigma_j(q_j+1)h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j}^{(k)} + (<\mathbf{q},\mu> - \lambda_i)h_{i,\mathbf{q}}^{(k)} - \tau_i h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\right| \geq$$

$$|<\mathbf{q},\mu> - \lambda_i|\left|h_{i,q}^{(k)}\right| - \sum_{j=2}^{r}\sigma(q_j+1)\left|h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j}^{(k)}\right| - \left|\tau_i h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\right|,$$

luego tomando las sumatorias cuando $|q| = k$

$$\sum_{|\mathbf{q}|=k}\left|\sum_{j=2}^{r}\sigma_j(q_j+1)h_{i,q-e_{j-1}+e_j}^{(k)} + (<\mathbf{q},\mu> - \lambda_i)h_{i,q}^{(k)} - \tau_i h_{i-1,q}^{(k)}\right| \geq$$

$$|<\mathbf{q},\mu> - \lambda_i|\sum_{|\mathbf{q}|=k}\left|h_{i,\mathbf{q}}^{(k)}\right| - \tau_i\sum_{|\mathbf{q}|=k}\left|h_{i-1,\mathbf{q}}^{(k)}\right| - \sum_{|\mathbf{q}|=k}\sum_{j=2}^{r}\sigma(q_j+1)\left|h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j}^{(k)}\right|,$$

usamos la hipótesis

$$\|u_i^{(k)}\| \geq \alpha k\|h_i^{(k)}\|_k - \tau_i\|h_{i-1}^{(k)}\|_k - \sum_{|q|=k}\sum_{j=2}^{r}\sigma(q_j+1)\left|h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j}^{(k)}\right|.$$

De la convención hecha en el paso 3 si $q_j = k$ como $|\mathbf{q}| = k$ entonces $q_{j-1} = 0$, luego $h_{i,\mathbf{q}-e_{j-1}+e_j} = 0$. Teniendo en cuenta $2\sigma r < \alpha$

$$\sum_{|\mathbf{q}|=k}\sum_{j=2}^{+\infty}\sigma(q_j+1)\left|h_{i,e_{j-1}+e_j}\right| = \sum_{j=2}^{r}\sigma(q_j+1)\|h_i^{(k)}\|_k$$

$$< \sum_{j=2}^{r}\sigma k\|h_i^{(k)}\|_k \leq \sigma(r-1)k\|h_i^{(k)}\|_k < \sigma rk\|h_i^{(k)}\|_k.$$

De la condición $r\sigma < \frac{\alpha}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|u_i^{(k)}\| &\geq \alpha k\|h_i^{(k)}\|_k - \tau_i\|h_{i-1}^{(k)}\|_k - \sigma rk\|h_i^{(k)}\|_k \\ &> \alpha k\|h_i^{(k)}\|_k - \tau_i\|h_{i-1}^{(k)}\|_k - \frac{\alpha k}{2}\|h_i^{(k)}\| \\ &= \frac{\alpha k}{2}\|h_i^{(k)}\| - \tau_i\|h_{i-1}^{(k)}\|_k,\end{aligned}$$

luego

$$\|u_i^{(k)}\|_k > \frac{\alpha k}{2}\|h_i^{(k)}\|_k - \tau_i\|h_{i-1}^{(k)}\|_k \tag{3.17}$$

Paso 5. En este paso usamos el mayorante. Probaremos primero que la serie $h_i \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ es convergente, esto se obtiene probando que su mayorante $\widehat{h}_i \in \mathbb{C}[[t]]$ definido como en (1.7), es una serie convergente en la variable t. Por la definición de mayorante y usando la propiedad (1.12), tenemos

$$\widehat{h} = \sum_{k=0}^{+\infty}\|h_i^{(k)}\|_k t^k$$

$$\widehat{\frac{dh}{dt}} = \sum_{k=1}^{+\infty}k\|h_i^{(k)}\|_k t^{k-1}$$

$$t\widehat{\frac{dh}{dt}} = \sum_{k=1}^{+\infty}k\|h_i^{(k)}\|_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}k\|h_i^{(k)}\|_k t^k.$$

Usando la ecuación (3.17)

$$\alpha\frac{d\widehat{h}_i}{dt} \preceq \tau_i\widehat{h_{i-1}+u_i} \preceq \tau_i\widehat{h_{i-1}} + \widehat{u}_i,$$

por lo tanto escribimos (3.17) como

$$\frac{\alpha}{2}t\frac{dh_i}{dt} \preceq \tau_i\widehat{h}_{i-1} + \widehat{u}_i. \tag{3.18}$$

Para probar la convergencia de los h_i será suficiente mostrar que la serie

$$H(t) = \widehat{h}_1 + \widehat{h}_2 + \cdots + \widehat{h}_s$$

es convergente. Formemos una ecuación diferencial con H. En primer lugar, de la inecuación (3.18) para cualquier $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\frac{\alpha}{2}t\frac{dH}{dt} = \frac{\alpha}{2}t\left(\frac{d\widehat{h}_1(t)}{dt} + \frac{d\widehat{h}_2(t)}{dt} + \cdots + \frac{d\widehat{h}_s(t)}{dt}\right) \preceq \tau_1\widehat{h}_0 + \tau_2\widehat{h}_1 + \cdots + \tau_{s+1}\widehat{h}_s + \widehat{u}_1 + \widehat{u}_2 + \cdots + \widehat{u}_s,$$

teniendo en cuenta que $\tau_i \in \{0, \tau\}$ y haciendo $\widehat{h}_0 = 0$

$$\frac{\alpha}{2}t\frac{dH}{dt} \preceq \tau\left(\widehat{h}_1(t) + \widehat{h}_2(t) + \cdots + \widehat{h}_s(t)\right) + \widehat{u}_1 + \widehat{u}_2 + \cdots + \widehat{u}_s = \tau H + \widehat{u}_1 + \cdots + \widehat{u}_s,$$

entonces

$$\frac{\alpha}{2}t\frac{dH}{dt} \preceq \tau H + \widehat{u}_1 + \cdots + \widehat{u}_s. \tag{3.19}$$

Por otro lado, tomamos $c > 0$ tal que $|c_{lm}| \leq c$ para cualquier l, m y el mayorante ambos lados de la igualdad (3.13), además si usamos la propiedad triangular dada en (1.3.7)

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_i &\preceq \widehat{g}_i + \sum_{j=1}^{r}\widehat{\frac{\partial h_i}{\partial x_j}}\left(\widehat{f}_j + \sum_{m=1}^{s} c_{jm}\widehat{h}_m\right) \\
&\preceq |g_i|(t, \ldots, t, \widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_s) + \sum_{j=1}^{r}\widehat{\frac{\partial h_i}{\partial x_j}}\left(\widehat{f}_j + \sum_{m=1}^{s} c_{jm}\widehat{h}_m\right) \\
&\preceq |g_i|(t, \ldots, t, \widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_s) + \frac{d\widehat{h}_i}{dt}\sum_{j=1}^{r}\left(|f_j|(t, \ldots, t, \widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_s) + cH\right).
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
|g_i|(t, \ldots, t, \widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_s) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{(\mathbf{q}, J) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s} \\ |\mathbf{q}| + |J| \leq m}} \ \sum_{\substack{k_1 \geq j_1, \ldots, k_s \geq j_s \\ k_1 + \cdots + k_s = m - |\mathbf{q}|}} |g_{\mathbf{q},J}|(\widehat{h}_1^{(j_1)})_{k_1} \cdots (\widehat{h}^{j_s})_{k_s}\right) t^m \\
&\preceq |g_i|(t, .., t, H, \ldots, H),
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\widehat{u}_i \preceq |g_i|(t,\ldots,t,H,\ldots,H) + \frac{d\widehat{h}_i}{dt}\left(\sum_{j=1}^{r}|f_j|(t,\ldots,t,H,\ldots,H) + cH\right). \tag{3.20}$$

Definiendo F y G como

$$\begin{aligned} F(t,z) &= \textstyle\sum_{j=1}^{r}|f_j|(t,\ldots,t,z,\ldots,z)\\ G(t,z) &= \textstyle\sum_{i=1}^{s}|g_i|(t,\ldots,t,z,\ldots,z). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Existen series de potencias en dos variables (t,z) con orden mayor o igual que dos y con coeficientes reales. Adhiriendo la desigualdad (3.20) para $i = 1,...,r$ y usando (3.19)

$$\frac{\alpha}{2}t\frac{dH}{dt} \preceq \tau H + \widehat{u}_1 + ... + \widehat{u}_s$$

$$\preceq \tau H + \sum_{i=1}^{s}|g_i|(t,...,t,H,...,H) + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s}\widehat{h}_i\left(\sum_{j=1}^{r}|f_j|(t,..,t,H,...,H) + cH\right)$$

$$\frac{\alpha}{2}t\frac{dH}{dt} \preceq \tau H + G(t,H) + \frac{dH}{dt}\left(F(t,H) + cH\right) \tag{3.22}$$

Paso 6. Reducción a dimensión 2. Consideramos el campo vectorial analítico en el origen de $\mathbb{C}^2$

$$Y = \left(\frac{\alpha t}{2} - cz - F(t,z)\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\tau z + G(t,z)\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

tal que la parte lineal de Y es $D_0Y = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & -c \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$, cuyos autovalores son $\alpha/2$ y τ. Siendo $\alpha \neq 0$ y $\frac{\tau}{\alpha/2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$, el campo vectorial Y cumple la hipótesis del teorema de Briot-Bouquet, con $E = \{z = 0\}$. Por lo tanto existe una única serie formal $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ que es solución de la ecuación diferencial

$$\alpha t\frac{dz}{dt} = \tau z + G(t,z) + \frac{dz}{dt}(F(t,z) + cz) \tag{3.23}$$

y es convergente. Por último mostraremos que cualquier coeficiente z_n de la serie $z(t)$ son no negativas y que si escribimos $H = \sum_{n=2}^{\infty} H_n t^n$ entonces $H_n \leq z_n$ para cualquier $n \geq 2$. En efecto, primeros veamos la forma de F y G. Mirando con más atención cómo las series $F(t,z)$ y $G(t,z)$, que son construidas en (3.21) y lo ponemos en función de los coeficientes de z

$$F(t,z) = \sum_{j=1}^{r}|f_j|(t,...,t,z,...z) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{(\mathbf{q},J)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+s}}\left|f_{\mathbf{q},J}^{j}\right| t^{|\mathbf{q}|} z^{|J|}$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\sum_{J\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{|\mathbf{q}|=k}\left|f_{\mathbf{q},J}^{j}\right| t^{k}\right)\left[\sum_{|\mathbf{q}|=k}\sum_{n=|J|}^{+\infty}\left(\sum_{0\leq\beta_i\leq|J|,m<n} C_J z_2^{\beta_1} z_3^{\beta_2} ... z_m^{\beta_m}\right) t^{n+k}\right],$$

donde C_J, para todo J, son enteros no negativos obtenidos al agrupar los coeficientes de t con el mismo exponente, luego considerando cómo varía q y J y el orden de F, se realiza un proceso análogo a lo obtenido en (2.9). Luego la serie formal se puede escribir de la siguiente forma

$$F(t,z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \overline{F}_n(z_2, ..., z_{n-1})t^n,$$

donde los $\overline{F}_n$ son polinomios homogéneos de $n-2$ variables con coeficientes no negativos. De igual manera se puede escribir G como

$$G(t,z(t)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \overline{G}_n(z_2, ..., z_{n-1})t^n,$$

tenemos para $n = 2$ $\overline{F}_2$ y $\overline{G}_2$ son constantes no negativas. Procedamos por inducción sobre n. Primero para $n = 2$ y veamos la forma explícita la desigualdad (3.22) para hacer la comparación

$$\frac{\alpha}{2}t\left(2H_2t + 3H_3t^2 + ...\right) \preceq \tau\left(H_2t^2 + H_3t^3 + ...\right) + \left(\overline{G}_2t^2 + \overline{G}_3t^3 + ...\right)$$
$$+ \left(2H_2t + 3H_3t^3 + ...\right)\left[\left(F_2t^2 + F_3t^3 + ...\right) + c\left(H_2t^2 + H_3t^3 + ...\right)\right],$$

luego

$$\alpha H_2t^2 + \frac{3}{2}\alpha H_3t^3 + ...\frac{n}{2}\alpha H^{n-1} \preceq \left(\tau H_2t^2 + \tau H_3t^3 + ...\tau H_nt^n + ...\right) + \left(\overline{G}_2t^2 + \overline{G}_3t^3 + ...\overline{G}_nt^n + ...\right)$$
$$+ \left(2H_2t + 3H_3t^3 + ...\right)\left[\left(\overline{F}_2t^2 + \overline{F}_3t^3 + ...\right) + c\left(H_2t^2 + H_3t^3 + ...\right)\right],$$

entonces para los términos de orden 2

$$\alpha H_2 \leq \tau H_2 + \overline{G}_2$$

$$(\alpha - \tau)H_2 \leq \overline{G}_2.$$

Haciendo el mismo proceso en la ecuación (3.23) para $n = 2$

$$\alpha z_2 t = \tau z_2 + \overline{G}_2$$

$$(\alpha - \tau)z_2 = \overline{G}_2,$$

entonces

$$(\alpha - \tau)H_2 \leq (\alpha - \tau)z_2 \to H_2 \leq z_2.$$

Supongamos ahora que $H_k \leq z_k$ para $k \leq n-1$ y $n \geq 3$. Como $\overline{F}_k$ y $\overline{G}_k$ son no negativos y usando (3.22)

$$\alpha H_2t^2 + \frac{3}{2}\alpha H_3t^3 + ...\frac{n}{2}\alpha H_nt^n \preceq \left(\tau H_2t^2 + \tau H_3t^3 + ...\tau H_nt^n + ...\right) + \left(\overline{G}_2t^2 + \overline{G}_3t^3 + ...\overline{G}_nt^n + ...\right)$$

$$+\left[2H_2\overline{F}_2t^3+\left(2H_2\overline{F}_3+3H_3\overline{F}_2\right)t^4+\left(4H_4\overline{F}_2+3H_3\overline{F}_3+2H_2\overline{F}_4\right)t^5\right.$$
$$\left.+\left(2H_2\overline{F}_5+3H_3\overline{F}_4+4H_4\overline{F}_3+5H_5\overline{F}_2\right)t^6+...+\left(\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)H_{k+1}\overline{F}_{n-k}\right)t^n+...\right]$$
$$+c\left[2H_2H_2t^3+(2H_2H_3+3H_3H_2)t^4+(4H_4H_2+3H_3H_3+2H_2H_4)t^5\right.$$
$$\left.+(2H_2H_5+3H_3H_4+4H_4H_3+5H_5H_2)t^6+...+\left(\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)H_{k+1}H_{n-k}\right)t^n+...\right]$$

ahora comparamos los coeficientes de los términos semejantes

$$\frac{n}{2}\alpha H_n\leq\tau H_n+\left(\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)H_{k+1}\overline{F}_{n-k}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)H_{k+1}H_{n-k}\right)$$

de la hipótesis inductiva

$$\overline{G}_n(H_2,...,H_{n-1})\leq\overline{G}_n(z_2,...,z_{n-1}),\ \overline{F}_{n-k}(H_2,...,H_{n-1})\leq\overline{F}_{n-k}(z_2,...,z_{n-k-1})$$

luego

$$\left(\frac{\alpha}{2}n-\tau\right)H_n\leq\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)z_{k+1}\overline{F}_{n-k}(z_2,...z_{n-k-1})+c\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)z_{k+1}z_{n-k}$$

de la ecuación (3.23)

$$\left(\frac{\alpha}{2}n-\tau\right)H_n\leq\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)z_{k+1}\overline{F}_{n-k}(z_2,...z_{n-k-1})+c\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)z_{k+1}z_{n-k}=\left(\frac{\alpha}{2}n-\tau\right)z_n,$$

finalmente

$$\left(\frac{\alpha}{2}n-\tau\right)H_n\leq\left(\frac{\alpha}{2}n-\tau\right)z_n\to H_n\leq z_n.$$

Esto prueba que $H\preceq z$, como la serie de coeficientes positivos $z=\sum z_nt^n$ converge entonces H converge, luego $\widehat{h}=(\widehat{h}_1,...,\widehat{h}_s)$ converge. Por lo tanto h que define la variedad formal invariante $\widehat{W_E}$ converge. $\square$

Conclusiones

En esta tesis se presentó una generalización del teorema de Briot-Bouquet en dimensión mayor a 2, se consigue determinar la existencia de una variedad formal invariante por un germen de campo vectorial **X** que converge a partir de la condición de no resonancias impuesta sobre los autovalores de la parte lineal de **X**. Esto puede dar inicio a generalizaciones de resultados en dimensión dos que dependen de esta condición , como el conocido teorema de Camacho-Sad; sin embargo aún no se ha logrado encontrar alguna publicación que determine tales generalizaciones. Recordemos que hemos impuestos ciertas condiciones a los valores propios de la parte lineal de **X** que no necesariamente es única y por tanto más versiones de este teorema es posible.

Bibliografía

[Ati20] Michael Francis Atiyah, *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté, 2020.

[CCD13] Felipe Cano, Dominique Cerveau, and Julie Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*, 2013.

[CH12] S-N Chow and Jack K Hale, *Methods of bifurcation theory*, vol. 251, Springer Science & Business Media, 2012.

[Con78] John B Conway, *Functions of one complex variable, gtm, springer verlage, ny.*

[CS82] César Camacho and Paulo Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Annals of mathematics **115** (1982), no. 3, 579–595.

[CS+14] SA Carrillo, F Sanz, et al., *Briot-bouquet's theorem in high dimension*, Publicacions Matemàtiques (2014), 135–152.

[DFN00] BA Dubrovin, Anatolij T Fomenko, and Sergei Petrovich Novikov, *Geometría moderna: métodos y aplicaciones. geometría de las superficies, de los grupos de transformaciones y de los campos*, URSS, 2000.

[GR09] Robert Clifford Gunning and Hugo Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, vol. 368, American Mathematical Soc., 2009.

[Gun90] Robert Clifford Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables*, vol. 1, CRC Press, 1990.

[KK11] Ludger Kaup and Burchard Kaup, *Holomorphic functions of several variables: an introduction to the fundamental theory*, vol. 3, Walter de Gruyter, 2011.

[LO00] I Luengo and J Olivares, *Germs of holomorphic vector fields in cn without a separatrix*, Transactions of the American Mathematical Society **352** (2000), no. 12, 5511–5524.

[LVGMÁ92] Ignacio Luengo Velasco and Xavier Gómez-Mont Ávalos, *Germs of holomorphic vector fields in c3 without a separatrix*, Inventiones Mathematicae **109** (1992), no. 1, 211–219.

[War13] Frank W Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, vol. 94, Springer Science & Business Media, 2013.