

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



**ESTUDIO DE CRITERIOS DE DISEÑO PARA ESTADOS LÍMITE
EN CONDICIÓN DE SERVICIO PARA ELEMENTOS DE
CONCRETO ARMADO**

Tesis para obtener el título profesional de Ingeniero Civil

AUTORA:

Andrea Mercedes Lozano Guevara

Tesis para obtener el título profesional de Ingeniero Civil

AUTOR:

Miguel Manuel Marcas Arrieta

ASESOR:

Christian Alberto Asmat Garaycochea

Lima, enero, 2022

Resumen

Desde finales de los años 60, el diseño en elementos de concreto armado se ha enfocado principalmente al estudio de los estados límites últimos de rotura o agrietamiento de los elementos, ignorando casi por completo los estados límites a nivel de servicio; siendo estos últimos, solamente verificados una vez que el elemento ya está diseñado (Ottazzi, 2004). Sin embargo, el diseño por resistencia no garantiza un correcto comportamiento bajo cargas de servicio, ya que, a nivel de servicio, pueden presentarse diversos problemas tales como deflexiones excesivas, fisuraciones excesivas, vibraciones indeseables y esfuerzos admisibles.

Los criterios de diseño previos controlaban, de manera indirecta, ciertos estados límites en servicio tales como las deflexiones de los elementos o fisuraciones excesivas (Nilson, 2001). Para ello, limitaban, para cargas de servicio, los esfuerzos que se producían en el acero y el concreto de manera que no excedan ciertos porcentajes de su resistencia. Dichas pautas buscaban obtener un comportamiento satisfactorio de la estructura bajo cargas de servicio. Sin embargo, en la actualidad, debido a la nueva metodología de diseño y al empleo de materiales con resistencias mayores, los elementos estructurales son diseñados con menores dimensiones (McCormac, 2014). Debido a estos cambios, la estimación de fisuraciones y el cálculo de deflexiones se hace más relevante, ya que, de producirse de forma excesiva podría comprometer el confort del usuario y a los elementos no estructurales.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es recopilar los criterios e investigaciones para la verificación de los estados límites antes mencionados. Esto se realizará mediante la revisión de distintas normas y publicaciones relacionadas. Así mismo, se desarrollarán ejemplos aplicativos (en Excel, Etabs 2018) para demostrar la relevancia de corroborar dichas condiciones y, de esa manera, se contribuirá a la comprensión y al uso correcto de las fórmulas o herramientas que cada código u autor considera en su análisis.

Tabla de contenidos

Resumen

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 OBJETIVOS.....	5
1.1.1 Objetivo General.....	5
1.1.2 Objetivos Específicos.....	5
1.2 JUSTIFICACIÓN	5
1.3 ALCANCE.....	6
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	7
2.1 ANTECEDENTES.....	7
2.2 CONCEPTOS BÁSICOS.....	8
2.2.1 Fisuración excesiva.....	10
2.2.2 Deflexiones excesivas.....	17
2.2.3 Vibraciones indeseables.....	20
2.2.4 Esfuerzos admisibles.....	22
CAPÍTULO 3. COMPARACIONES NORMATIVAS Y PRÁCTICAS.....	25
3.1 FISURACIÓN EXCESIVA.....	25
3.1.1 Gergerly y Lutz (1968)	26
3.1.2 Frosch (1999).....	27
3.1.3 Norma peruana E.060 (2019).....	28
3.1.4 ACI 318-19 (2019).....	29
3.1.5 Model Code (2010).....	30
3.1.6 Ejemplos aplicativos	34
3.2 DEFLEXIONES EXCESIVAS	43
3.2.1 Norma peruana E.060 (2019-9).....	46
3.2.2 ACI 318-19 (2019).....	50
3.2.3 Model Code (2010).....	52
3.2.4 Modelación mediante elementos finitos para losas bidireccionales.....	56
3.2.5 Ejemplos aplicativos	56
3.3 VIBRACIONES INDESEABLES	70
3.3.1 D. E. Allen y J. H. Rainer (1976).....	75
3.3.2 Bangladesh University of Engineering and Technology (2013).....	76
3.3.3 Richard Bares (1971).....	78
3.3.4 Ejemplos aplicativos	82

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS	88
4.1 FISURACIONES EXCESIVAS	88
4.2 DEFLEXIONES EXCESIVAS	90
4.3 VIBRACIONES INDESEABLES	95
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	97
CAPÍTULO 6. REFERENCIAS	100

Índice de figuras

Figura 1-1. Representación de la etapa límite para considerar una respuesta como inaceptable.....	1
Figura 1-2. Daños en elementos no estructurales debido a deflexiones excesivas.	3
Figura 1-3. Tipos de agrietamiento.....	4
Figura 1-4. Modo de vibración de un pórtico de 3 pisos con mayor incidencia en la frecuencia de la estructura.....	4
Figura 2-1. Grietas por flexión en elementos de poco peralte (izquierda) y de mayor peralte (derecha)	11
Figura 2-2. Grietas por flexión-cortante (izquierda) y grietas en el alma solo por cortante (derecha) .	11
Figura 2-3. Grieta por torsión donde se aprecia la elipse que envuelve la viga.....	12
Figura 2-4. Grietas originadas por esfuerzos como consecuencia de la adherencia entre materiales. ..	12
Figura 2-5. Pérdida de sección y agrietamiento del concreto.	12
Figura 2-6. Causas físicas del deterioro del concreto.	14
Figura 2-7. Deterioro del concreto por reacciones químicas.	14
Figura 2-8. Cuadro representativo entre la durabilidad y las fisuraciones.....	16
Figura 2-9 Curva esfuerzo vs deformación de una probeta de concreto.....	23
Figura 2-10. Curvas esfuerzo-deformación de las barras de acero de refuerzo más utilizadas	24
Figura 3-1. Formación de grietas a causa del esfuerzo a tracción en el prisma	25
Figura 3-2. Representación de los componentes de la fórmula	29
Figura 3-3. Gráfica de carga vs deflexión en el centro de la luz. Los puntos A y B representan la generación de grietas a los extremos y medio respectivamente. El punto C representa el punto de trabajo habitual de la sección (servicio).....	44
Figura 3-4. Efecto del creep en las deformaciones de la viga. Se ve como a pesar de que las cargas permanecen constantes se genera una deformación adicional	46
Figura 3-5 Efecto de la retracción del concreto en las deformaciones. Se ve como la retracción genera deformaciones que se superponen a las deformaciones a corto plazo.	46
Figura 3-6. Sección transformada agrietada	47

Figura 3-7. Factor dependiente del tiempo de las cargas sostenidas.....	49
Figura 3-8. Tabla 9.2 de la norma E.060 de concreto armado	49
Figura 3-9 Factor dependiente del tiempo de las cargas sostenidas.....	52
Figura 3-10. Valores de K para distintos diagramas de momentos.....	65
Figura 3-11. Valores recomendados de aceleración pico.....	72
Figura 3-12. Tendencia de la frecuencia natural de la losa en función del espesor, longitud menor de 3 metros y una relación de lados de 1.4.	77
Figura 3-13. Comparación entre espesor y longitud menor de losa para una relación de lados de 1. ..	78
Figura 3-14. Valores de ϕ dependiendo de las condiciones de borde.	80
Figura 3-15. Primer modo de vibración para paños continuos (Aalami, 2008).....	81
Figura 3-16. Verificación de límites de serviciabilidad.....	85
Figura 4-1. Gráfico de inercia efectiva vs relación entre el momento de agrietamiento y el momento actuante.	92
Figura 4-2. Gráfica deflexión versus momento actuante donde se visualizan las regiones para utilizar los criterios.....	93

Índice de tablas

Tabla 3-1. Límites permisibles de tamaño de fisuras según el ambiente al que se encuentra expuesta la estructura.....	30
Tabla 3-2. Valores de τ_{bms} , β y η_r dependiendo del tipo de carga y la etapa de formación de grietas	32
Tabla 3-3 Anchos de grieta máximo permitido según el tipo de exposición de la estructura. Unidades en milímetros	34
Tabla 3-4 Deflexiones máximas permisibles permitidas por el ACI 318-19.....	52
Tabla 3-5. Tabla 5.1-11 del Model Code 2010 de la que se puede extraer el valor del coeficiente del creep para una edad de 70 años.....	54
Tabla 3-6. Tabla 5.1-14 del Model Code 2010 de la que se puede extraer el valor de $\epsilon_{cs} \cdot 10^3$	55
Tabla 3-7 Momentos resultantes bajo carga muerta y viva obtenidos a partir del modelamiento.	57
Tabla 3-8 Valores de deflexión inmediata.	58
Tabla 3-9 Valores de deflexión diferida	59
Tabla 3-10 Valores de momento de agrietamiento, inercias agrietadas y momentos actuantes.	59
Tabla 3-11. Comparación entre los resultados de la Norma ACI 318-19 y el ACI 435	60
Tabla 3-12 Deflexión para la inercia no agrietada y agrietada	62
Tabla 3-13. Deflexión diferida para el efecto de la carga cuasipermanente y el efecto del creep para el estado agrietado y no agrietado.....	63

Tabla 3-14. Curvatura y deformación para el estado agrietado y no agrietado	65
Tabla 3-15. Resultados parciales de la deflexión instantánea y diferida para cada caso y deflexión diferida total.....	66
Tabla 3-16 Momentos últimos en la dirección 1-1 y 2-2	67
Tabla 3-17 Acero requerido en la dirección 1-1 y 2-2	67
Tabla 3-18 Momento en servicio en la dirección 1-1 y 2-2.....	68
Tabla 3-19. Deflexión inmediata y diferida para cada uno de los casos.....	68
Tabla 3-20 Deflexión inmediata y diferida para cada uno de los casos.....	70
Tabla 3-21 Frecuencias recomendadas según el uso de la estructura	71
Tabla 3-22 Valores de K para obtener la frecuencia mínima aceptable.....	74
Tabla 3-23 Valores de porcentaje de amortiguamiento recomendados según el uso.....	74
Tabla 3-24 Valores recomendados para diseño por vibraciones.....	74
Tabla 3-25 Valores de la constante k_n para elementos de sección uniforme.....	75
Tabla 4-1. Comparación del ancho de grietas entre los dos arreglos planteados y porcentaje de reducción entre ellos.....	88
Tabla 4-2. Media, desviación estándar y coeficiente de variabilidad para los arreglos planteados en el Ejemplo 3.1	89
Tabla 4-3. Deflexiones calculadas según las distintas normas	90
Tabla 4-4. Inercia agrietada (Norma peruana E.060), efectiva (ACI 318-19) y porcentaje de variación para las zonas positiva y negativa.....	91
Tabla 4-5. Variación de la inercia efectiva con respecto a la inercia de agrietamiento en función de la relación I_{cr}/I_g y la relación M_a/M_{cr}	93
Tabla 4-6. Deflexión diferida total considerando la inercia efectiva en el paño central (Primer caso) y un promedio ponderado en función del diagrama de momentos (Segundo caso).....	94
Tabla 4-7. Frecuencias naturales y aceleraciones pico para la losa aligerada y maciza según las distintas fuentes y, comparación con las frecuencias mínimas planteadas por Allen et al. y Model Code 2010 95	

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios la ingeniería estructural se ha enfocado en el diseño de edificaciones que garanticen la comodidad y seguridad del usuario. Para ello, el comportamiento de las estructuras, frente a la aplicación de agentes externos (generalmente cargas), debe permanecer dentro de unos límites admisibles (Meli, 2001). Se entiende como estado límite a una etapa del desempeño estructural a partir de la cual la respuesta (deformaciones, esfuerzos, daño, entre otros) se considera inaceptable. La Figura 1-1 permite esquematizar el comportamiento descrito anteriormente.

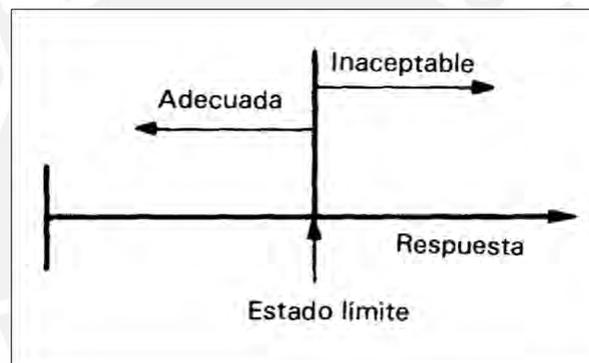


Figura 1-1. Representación de la etapa límite para considerar una respuesta como inaceptable. Tomado de "Diseño Estructural. 2da ed. por Meli (Ciudad de México), 2001

Se pueden diferenciar dos tipos de estados límites: estado límite de servicio y estado límite último. Los primeros están relacionados con la funcionalidad de la estructura y se desarrollan bajo la aplicación de cargas habituales (McCormac, 2014). La metodología de diseño antigua, denominada *Allowable Stress Design* (ASD), se enfocaba en dichos estados y buscaba que, para cargas normales, los esfuerzos en los elementos no excedan un porcentaje de su resistencia. De esa manera, se aseguraba su permanencia en el rango elástico. Por otro lado, presentaba desventajas tales como la incapacidad de establecer un factor mínimo de seguridad frente al estado límite último y no se tomaban en cuenta la variabilidad de los distintos tipos de carga que sufre la estructura. Ante dichos problemas, se realizaron estudios

para desarrollar una nueva metodología que se vio reflejada en el código ACI del año 1963. Dicha metodología involucra el estado límite de falla o último.

Los estados límites últimos están relacionados con la seguridad e involucran el colapso parcial o total de la estructura, o situaciones en las cuales se presenten daños que reduzcan su capacidad de resistir cargas (Ottazzi, 2016). El estudio de dichos estados ha permitido dar origen a la metodología *Load and Resistance Factor Design* (LRFD) la cual aplica factores de amplificación, para las cargas, y reducción, para las resistencias, en base a un análisis estadístico previo. Gracias a esto se puede definir con menor incertidumbre un factor de seguridad frente al colapso.

Según Roberto Meli (2001), “el objetivo del diseño estructural se replantea como: proporcionar una seguridad adecuada ante la aparición de estados límite de falla para las acciones más desfavorables que puedan presentarse durante su vida útil y procurar que en condiciones normales de operación no se sobrepasen los estados límite de servicio” (p. 57). Por ello, los criterios actuales, para diseñar elementos de concreto armado, se preocupan por garantizar que la estructura mantenga un margen de seguridad frente al colapso. Dichos criterios conforman la filosofía de diseño que se conoce como “Diseño por resistencia”.

Usualmente, los diseñadores se enfocan en cumplir con los requisitos por resistencia y dejan de lado los estados límite a nivel de servicio. Dicha omisión puede ocasionar situaciones que hagan inservible la estructura, aun cuando tenga un adecuado margen de seguridad. Esto último se hace evidente cuando se presentan condiciones como grietas anchas, vibraciones excesivas o caídas notables de los elementos horizontales que generan una alarmante sensación de inseguridad en los ocupantes; lo cual, a su vez, pone en riesgo la función de la estructura. Existen distintas normas que proponen controlar dichas condiciones mediante espesores mínimos de diseño, no obstante, la visión del arquitecto no siempre permite hacer uso de estos.

Ante tal situación, surge la necesidad de verificar el adecuado desempeño de la estructura bajo las condiciones mencionadas anteriormente. A continuación, se definirán algunos de los estados límites en servicio más resaltantes.

- a) **Deflexiones excesivas:** Es importante tenerlas en cuenta, ya que pueden producir daño en elementos no estructurales, además de ser estéticamente inaceptables. En la Figura 1-2 se muestra una de las consecuencias de que se generen deflexiones excesivas.

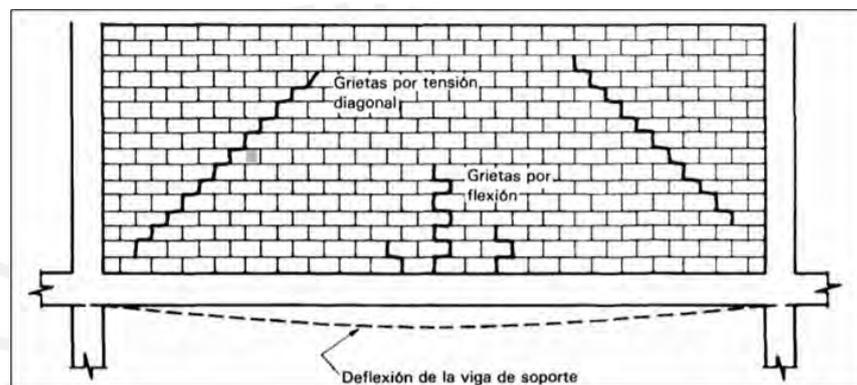


Figura 1-2. Daños en elementos no estructurales debido a deflexiones excesivas.
Tomado de "Diseño Estructural. 2da ed. por Meli (Ciudad de México), 2001.

- b) **Fisuraciones excesivas:** El concreto siempre se fisurará debido a su baja capacidad de resistir cargas a tracción. Sin embargo, grietas anchas y abundantes generan temor en el usuario, por lo que es importante controlarlas. Además, puede generar problemas en estructuras donde es necesario contener líquidos. En la Figura 1-3 se muestran los diversos tipos de agrietamiento.

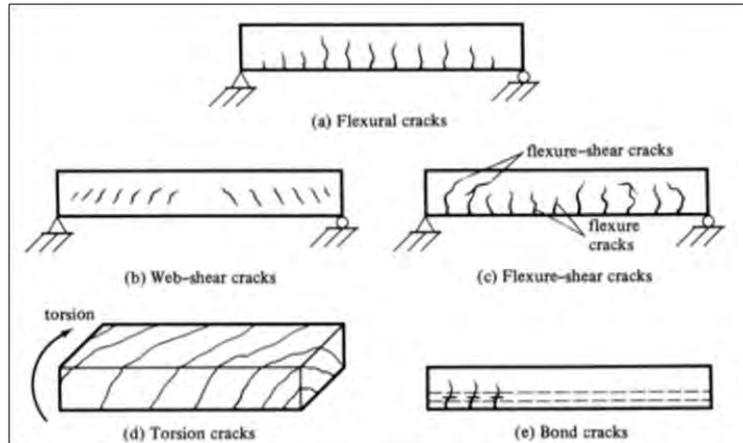


Figura 1-3. Tipos de agrietamiento

Tomado de "Design of reinforced concrete. 9th ed" por McCormac (New Jersey), 2014

- c) **Vibraciones indeseables:** Oscilaciones verticales en losas y vigas, ocasionadas por una alta concentración de personas o maquinaria, que generan incomodidad en los ocupantes. Es un problema dinámico y complejo que requiere un estudio detallado. Se elaboró la Figura 1- 4 donde se puede observar uno de los modos de vibración de un edificio de pórticos de 3 pisos.

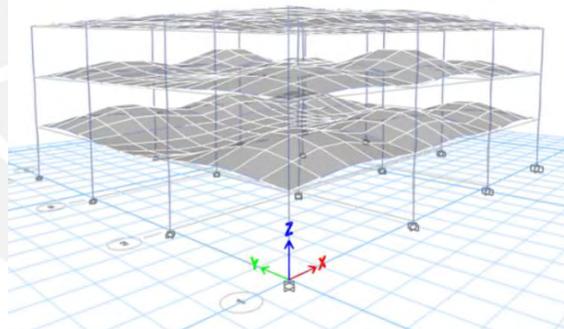


Figura 1-4. Modo de vibración de un pórtico de 3 pisos con mayor incidencia en la frecuencia de la estructura.

- d) **Esfuerzos admisibles:** Son esfuerzos bajo los cuales se espera un comportamiento elástico de los elementos. Exceder dichos límites puede devenir en los problemas mencionados anteriormente.

Estos problemas cobran mayor importancia por dos razones principales: la implementación de aceros de mayor resistencia y el uso de la metodología LRFD (la cual se

profundizará en el siguiente capítulo). Dichas situaciones han incrementado la probabilidad de que se generen grietas más anchas y caídas más pronunciadas (McCormac, 2014), por lo que surge la necesidad de verificar los estados límites de servicio. Para corroborar que un diseño satisface las necesidades bajo cargas normales, se debe utilizar las fórmulas y estimaciones que brindan los distintos códigos e investigaciones independientes.

Dichos aportes serán estudiados e incluidos en la presente tesis, la cual consiste en un trabajo recopilatorio que incluirá métodos de cálculo para deflexiones, estimación de ancho de fisuras y evaluación de vibraciones. Además, servirá de guía para diseñadores que no cuenten con la información suficiente para comprobar la ausencia o no de dichos fenómenos. Adicionalmente, para demostrar la importancia de corroborar dichas condiciones y ayudar a la comprensión y correcto uso de las distintas fórmulas o herramientas a usar, se desarrollarán ejemplos aplicativos donde se verán casos específicos a tomar en cuenta.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo General

Aportar al conocimiento del comportamiento de vigas y losas de concreto armado, bajo cargas de servicio, a través de la recopilación de criterios de estados límites.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Analizar las consideraciones que toman las distintas normas para la verificación de los estados límites en servicio.
- Comparar mediante ejemplos aplicativos el comportamiento de los elementos según los distintos criterios.

1.2 Justificación

El diseño de toda estructura debe garantizar su seguridad frente al colapso y asegurar su funcionalidad en condiciones de servicio. Sin embargo, un correcto diseño por resistencia

(estado límite último de rotura) no garantiza un correcto comportamiento bajo cargas de servicio. Por lo tanto, esta tesis pretende recopilar criterios de distintas normas y bibliografías para asegurar el comportamiento satisfactorio de las estructuras de concreto armado bajo condiciones habituales.

1.3 Alcance

Se estudiará cuatro estados límites en servicio más resaltantes: a) deflexiones excesivas, b) fisuración excesiva, c) esfuerzos admisibles y d) vibraciones indeseables. Esto se logrará a través de la recopilación de los diferentes criterios de verificación que se utilizan en distintas normas del mundo. La presente tesis pretenderá servir como guía para diseñadores que no cuenten con información suficiente para realizar dichas verificaciones, así como, ejemplos aplicativos que permitan comparar los resultados obtenidos con cada método. Esto último se conseguirá mediante el uso de hojas de cálculo tales como Excel y la ayuda de programas para el análisis estructural como Etabs 2018. Además, se podría analizar si es necesario aumentar la cantidad de acero para evitar cierto valor de deflexión.

Adicionalmente, se realizarán comparaciones, entre los resultados obtenidos y los distintos criterios analizados, con el fin de determinar cuáles son más conservadores y qué criterios arrojan las mejores estimaciones. Los resultados y los procedimientos de cálculo permitirán al diseñador elegir entre una verificación sencilla pero conservadora (que pueda devenir en cambios importantes de diseño) o una estimación más compleja, pero a la vez más precisa.

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

Para comprender la importancia del estudio de los estados límites de servicio es fundamental entender los factores que han agravado su presencia. Por ello, se describirán los antecedentes y conceptos básicos de los principales estados límites de servicio a estudiar en la presente tesis.

2.1 Antecedentes

Para comprender la importancia del estudio de los estados límites de servicio es fundamental entender los factores que han agravado su presencia. Desde inicios del siglo XX, la metodología de diseño estándar era el “diseño por esfuerzos admisibles” (ASD por sus siglas en inglés). Gracias a dicha metodología, aspectos relacionados con las condiciones de servicio se controlaban indirectamente (Nilson, 2001, p. 194). Por ejemplo, para los valores de esfuerzos admisibles se observa que las deformaciones en el acero son menores y como son un factor importante en la aparición de los estados límites en servicio, se hace evidente su control indirecto.

Sin embargo, esta metodología poseía ciertas desventajas. Una de ellas era la ausencia de un nivel de seguridad respecto al estado límite último de rotura (se asume que al utilizar los esfuerzos admisibles se cumple con dicho estado, lo cual no es del todo cierto). Además, no se consideraba la variabilidad de los distintos tipos de cargas aplicadas y de la resistencia. Dichos problemas originaron el desarrollo de la metodología más difundida en la actualidad, el “diseño por resistencia” o LRFD (Ottazzi, 2016). El razonamiento del nuevo método es el siguiente: las cargas aplicadas en una estructura deberán ser mayoradas por un factor de amplificación el cual dependerá de la variabilidad de dicha carga en cuestión. Las cargas con mayor variabilidad tendrán un factor mayor y viceversa. Finalmente, el problema se simplifica en la Ecuación (1.1)

$$\phi S_n \geq \alpha(\gamma_d D + \gamma_l L + \gamma_w W + \dots) \quad (1.1)$$

Dicha ecuación muestra la relación entre las cargas mayoradas aplicadas a la estructura (en función a su variabilidad) y la resistencia de diseño (S_n). Donde ϕ es un factor de reducción de la resistencia nominal del elemento que toma en cuenta la variabilidad de la resistencia, la importancia del elemento en la estructura y el tipo de falla del elemento (Ottazzi, 2016). A partir de dichas consideraciones, se puede comprender el motivo por el cual la resistencia a flexión posee un ϕ de 0.9 (debido a su baja variabilidad, menor importancia relativa de una viga respecto de una columna y su mecanismo de falla dúctil), mientras que la resistencia a cortante tiene un factor de 0.85. Esto último se debe a que la incertidumbre de la resistencia al corte es mucho mayor. Los factores γ son amplificadores que varían dependiendo de la variabilidad del tipo de carga, por lo que cargas más variables, como la carga viva, tendrán factores de amplificación mayores.

Este nuevo enfoque redujo la incertidumbre inherente al diseño de los elementos estructurales frente al estado último de rotura, solucionando los inconvenientes antes mencionados. Sin embargo, esto incrementa la incertidumbre en los estados límites en servicio. Por lo tanto, se genera la necesidad de verificar la aparición dichos problemas antes mencionadas.

2.2 Conceptos básicos

Previamente se mencionó el concepto de estados límites, los cuales, en otros términos, son condiciones que se presentan cuando una estructura se vuelve incapaz de cumplir la función para la cual fue concebida (Wight, 2015). Además, se explicó que dichos estados establecen un límite entre un comportamiento admisible e inaceptable y, a continuación, se mostrarán los estados límites que se han logrado identificar y agrupar para elementos de concreto armado según se detalla en el libro de James Wight.

- i. Estados límites últimos: Involucran el colapso de una parte o de toda la estructura.
- ii. Estados límites de servicio: Involucran el mal funcionamiento de la estructura bajo cargas habituales, pero no incluyen el colapso de esta. Se profundizará sobre estos más adelante.
- iii. Estados límites especiales: Involucran daño o falla bajo situaciones atípicas como, por ejemplo, terremotos extremos, efectos estructurales a causa de la corrosión del acero, entre otros.

Una metodología de diseño ideal debería de tomar dentro de sus consideraciones de diseño, al menos, los dos primeros grupos de estados límites. Sin embargo, esto no se emplea en la metodología de diseño LRFD, la cual está relacionada con la ruptura de los elementos. Esto tiene como consecuencia que los diseñadores hagan uso de su criterio para evitar los estados límites en servicio. Tal como lo menciona McCormac (2014): “El código del ACI contiene requerimientos muy específicos con relación a los estados límites de resistencia de los elementos de concreto armado, pero permite al diseñador un poco de libertad de juicio en las áreas de serviciabilidad” (p. 154). En las siguientes páginas se profundizará más respecto a los estados límites en condición de servicio y se detallará los distintos criterios que se pueden considerar para verificar estos estados.

Estados límites de servicio

Dicho término representa un mal funcionamiento de la estructura bajo cargas de servicio y se mide en función de las ya mencionadas deflexiones, fisuras, vibraciones y esfuerzos que se presentan en las estructuras. Estas condiciones no están relacionadas al colapso de la estructura, por lo cual, posee una mayor probabilidad de ocurrencia (Ottazzi, 2016). El diseñador podría interpretar esto último dándole poca o nula relevancia a estos estados, sin embargo, estas condiciones deben recibir un mayor reconocimiento, ya que el usuario es quien define que tan seguro y cómodo se siente en una edificación, independientemente del nivel de seguridad provisto en el diseño. Situaciones como vigas o losas con caídas pronunciadas,

fisuradas y tabiquería dañada a causa de dichas caídas, resultan incómodas para el usuario. El cual, al desconocer la lógica tras el diseño estructural, valora la seguridad de la estructura en base a su percepción ante dichas situaciones. A pesar de que, como ya se mencionó, la metodología LRFD no toma en cuenta dentro de sus consideraciones a los estados límites en servicio, los incluye dentro de su filosofía de diseño al mencionar que siempre se debe buscar un comportamiento satisfactorio bajo cargas normales. En consecuencia, las normas que emplean dicha metodología también incluyen estos requisitos. Por ejemplo, se presenta el artículo 9.1.2 de la Norma E.060 (2019) donde se estipula lo siguiente:

Artículo 9.1.2 - Las estructuras y los elementos estructurales deberán cumplir además con todos los demás requisitos de esta Norma, para garantizar un comportamiento adecuado bajo cargas de servicio.

Adicionalmente, dado que, en la mayor parte de su vida útil, la estructura está sometida a cargas habituales y no a cargas últimas (utilizadas para el Diseño por resistencia), es fundamental tener en cuenta los estados límites en servicio (Ottazzi, 2016). A continuación, se profundizará sobre los estados más importantes y los distintos criterios propuestos con el fin de garantizar que se cumplan los requisitos bajo cargas de servicio.

2.2.1 Fisuración excesiva

Es fundamental mantener las grietas dentro de un rango aceptable, especialmente en situaciones donde se ven afectadas la durabilidad del concreto o sean estéticamente inaceptables. Asimismo, el control de la fisuración tiene una mayor relevancia en estructuras que retienen líquidos, donde es imprescindible garantizar una baja permeabilidad (Ottazzi, 2016), así como en estructuras esenciales (hospitales) y de seguridad crítica (plantas nucleares). En el presente acápite se presentarán los tipos de grietas más comunes, las variables que influyen en su generación, así como la relación entre las fisuraciones y la durabilidad del

concreto. Por último, se presentarán las razones por las cuales se debe controlar el ancho de grietas.

Tipos de grietas

Existen múltiples tipos de grietas las cuales dependen de diversos factores como la aplicación de cargas, desplazamientos importantes o cambios volumétricos propios del material. A continuación, se mencionarán los principales tipos de agrietamiento.

- a) **Grietas por flexión:** Son grietas verticales que se extienden desde la zona en tensión de la viga hasta el eje neutro. Son más pronunciadas en el centro de la luz. Dicho fenómeno se puede observar en la Figura 2-1.

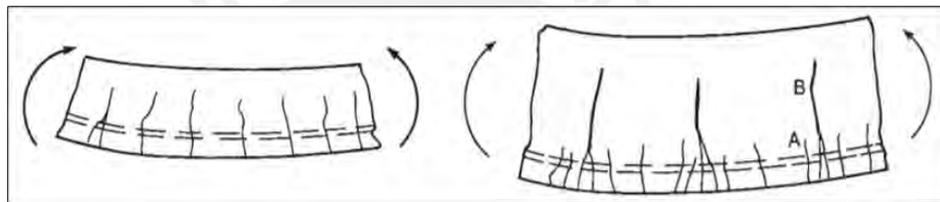


Figura 2-1. Grietas por flexión en elementos de poco peralte (izquierda) y de mayor peralte (derecha)
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015

- b) **Grietas por cortante en el alma:** Se presentan como grietas inclinadas a 45° que aparecen en el alma.
- c) **Grietas por flexión-cortante:** Comprende la superposición de los efectos de las grietas por flexión y cortante. Empiezan como grietas verticales en la zona a tensión y conforme se extienden en el alma su ángulo de inclinación va cambiando. En la Figura 2-2 se presentan las grietas por cortante y flexión cortante.

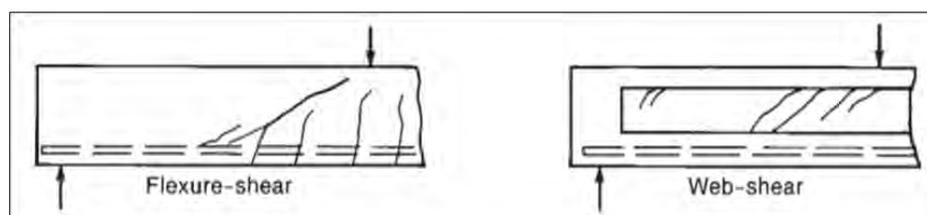


Figura 2-2. Grietas por flexión-cortante (izquierda) y grietas en el alma solo por cortante (derecha)
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015.

- d) **Grietas por torsión:** Se presentan de manera similar a las fallas por cortante, ya que son a 45°, sin embargo, la diferencia radica en que estas crean una espiral alrededor de la viga. La Figura 2-3 representa este fenómeno.

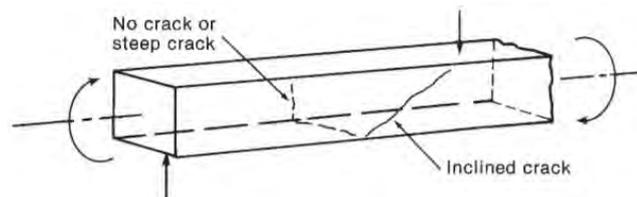


Figura 2-3. Grieta por torsión donde se aprecia la elipse que envuelve la viga.
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015.

- e) **Grietas por adherencia acero-concreto:** Los esfuerzos generados por la adherencia entre ambos materiales pueden generar separaciones entre barras. La Figura 2-4 muestra el efecto antes mencionado.

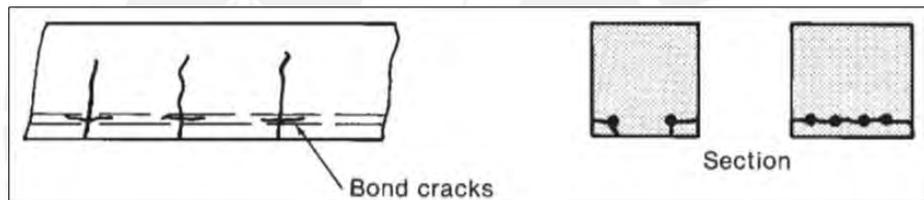


Figura 2-4. Grietas originadas por esfuerzos debido a la adherencia entre materiales.
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015.

- f) **Grietas por corrosión del refuerzo:** Debido a la corrosión del refuerzo, el acero ocupa un mayor volumen y esto genera esfuerzos radiales que empujan el recubrimiento. Dichas grietas suelen ser paralelas al refuerzo. Se hacen evidentes a través de manchas en la superficie cuando el nivel de corrosión es avanzado. La Figura 2-5 muestra las grietas mencionadas.



Figura 2-5. Pérdida de sección y agrietamiento del concreto.
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015.

g) Grietas por retracción plástica: Se forman fácilmente en altas temperaturas, baja humedad relativa, viento y condiciones de curado insuficiente. Generalmente se producen por la rápida evaporación del agua en la superficie del concreto.

Es importante mencionar que la presente tesis se enfocará en presentar criterios referidos a grietas por flexión, ya que es el tipo más común y posee mayor cantidad de estudios al respecto.

Variables que influyen en la generación de grietas

La fisuración en el concreto es un problema que siempre estará presente, ya que el concreto posee una muy baja resistencia a los esfuerzos de tensión y tiende a sufrir cambios volumétricos como el creep, retracción por secado, etc. (Ottazzi, 2016). Sin embargo, no solía ser tan notorio debido a las limitaciones de los esfuerzos en el acero, el cual es un factor determinante en la generación de grietas, producto del diseño por esfuerzos admisibles. Otra variable que influye en el agrietamiento de los elementos, como menciona Nilson (2001), es la adherencia entre el acero y el concreto, por lo que, una buena resistencia al deslizamiento garantizará grietas más finas. Finalmente, una última variable a considerar es el espesor del recubrimiento el cual influye de manera proporcional al ancho de grietas, sin embargo, modificar esta variable no es una solución óptima. Entre los factores mencionados, el aumento importante de los esfuerzos en el acero bajo cargas normales ha producido en mayor medida que los problemas de fisuraciones se agraven. Por ello, su estudio cobra mayor relevancia.

Relación entre la durabilidad y las fisuraciones

Es importante entender el concepto de durabilidad el cual el comité 201 del ACI define como la capacidad que tiene el concreto de resistir procesos de deterioro. Entonces, un concreto durable es aquel capaz de resistir la acción del ambiente y mantener sus propiedades sin deteriorarse. Sin embargo, es imposible que los materiales no se deterioren con el paso del tiempo, por lo que, habrá distintos factores que generen un deterioro progresivo en elementos

de concreto armado. Mehta y Gerwick (1982) clasifican los factores que influyen en su deterioro en físicos y químicos. La división de estos se muestra en las Figuras 2-6 y 2-7.

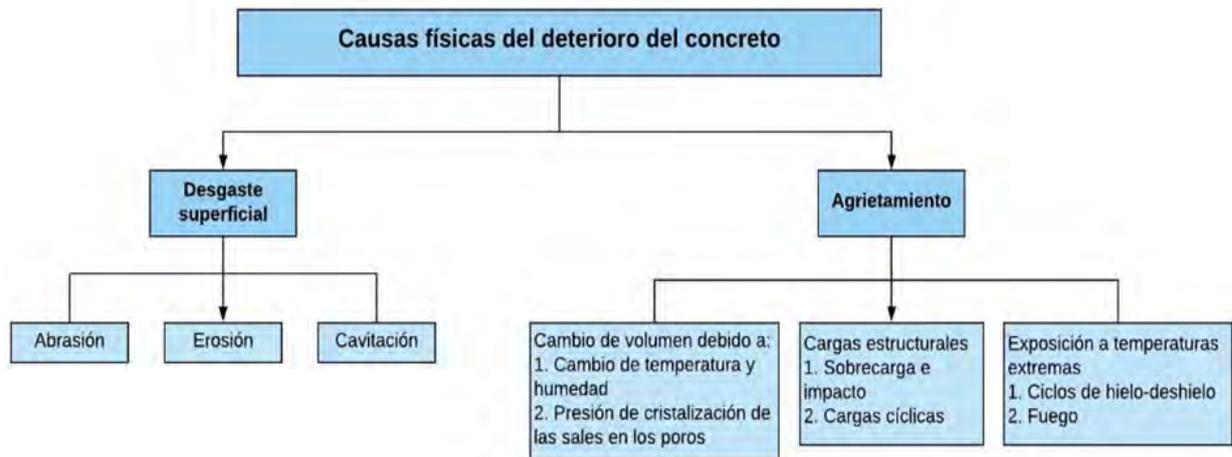


Figura 2-6. Causas físicas del deterioro del concreto.
Adaptado de Mehta y Monteiro, 2006.

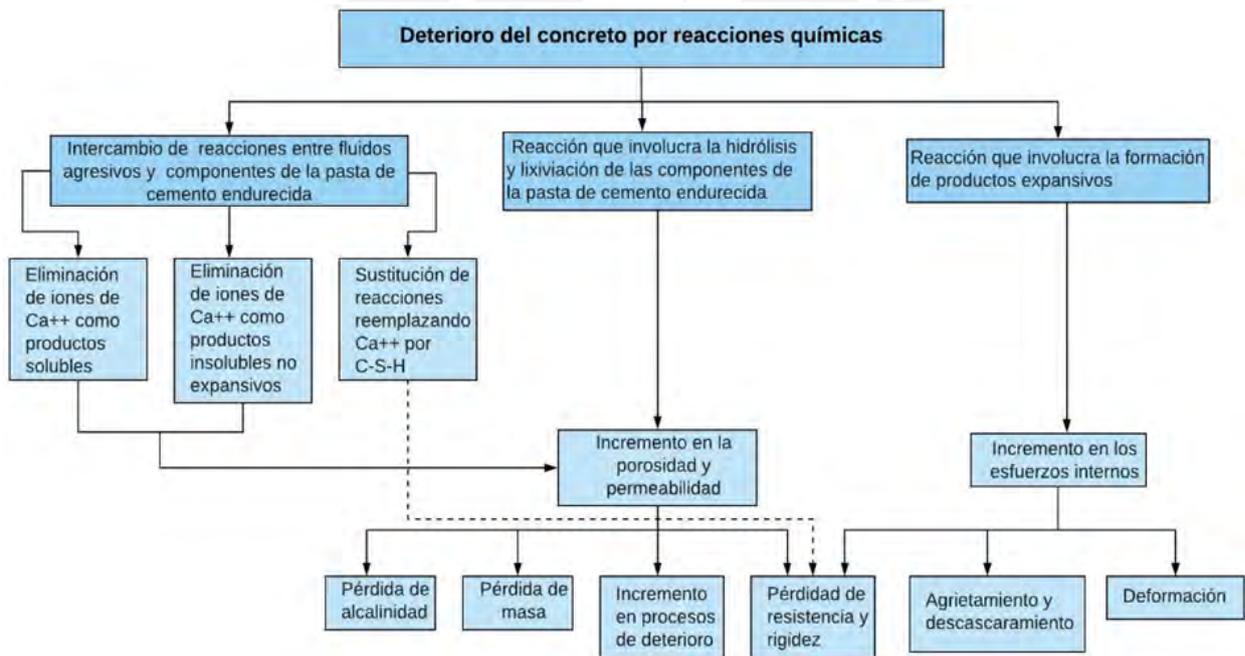


Figura 2-7. Deterioro del concreto por reacciones químicas.
Adaptado de Mehta y Monteiro, 2006.

Las causas físicas que generan deterioro en el concreto se dividen en: a) deterioro de la superficie y b) agrietamiento, el cual puede estar generado por cambios volumétricos, cargas aplicadas y exposición a temperaturas extremas. Mientras que las causas químicas se agrupan en: a) hidrólisis de los elementos de la pasta de cemento, b) reacciones de intercambio de

caciones entre fluidos agresivos y la pasta de cemento y c) reacciones que generan productos expansivos.

Se puede apreciar cómo la fisuración en los elementos está bastante ligada con su durabilidad, ya que pueden ser una causa o un efecto de algunos factores que generan deterioro en el concreto. Como mencionan Mehta y Monteiro (2006), la distinción que se hace es completamente arbitraria, únicamente se limita a separar los procesos físicos de los químicos, sin embargo, en la realidad, estos efectos se superponen unos sobre otros. A continuación, se presentará la definición de algunas de las causas propuestas según Mehta y Monteiro (2006):

- Abrasión: Este término hace referencia al desgaste superficial del concreto en condiciones secas.
- Ciclos de congelación y deshielo: Dicha condición es bastante común en climas fríos donde se presentan daños en muros, losas y pavimentos de concreto atribuibles a la acción de hielo y deshielo del agua atrapada en el concreto. Las consecuencias más comunes de este efecto son el agrietamiento y desprendimiento del concreto.
- Reacciones álcali-agregado: Estas reacciones genera una expansión y agrietamiento del concreto, ocasionando la pérdida de su resistencia y módulo de elasticidad. Se produce por la reacción entre el álcali y los iones hidroxilos del cemento con ciertos minerales silíceos presentes en el agregado.
- Ataque de sulfatos: Altas concentraciones de estos pueden generar degradación en el concreto debido a reacciones entre la pasta de cemento hidratada y los iones de sulfato. El ataque de los sulfatos se puede manifestar en forma de expansión y agrietamiento del concreto, incrementando su permeabilidad y facilitando el ingreso de sustancias nocivas acelerando el proceso de degradación.

- Corrosión del acero de refuerzo: Este problema es mucho más recurrente en estructuras donde se presente una gran cantidad de cloruros, agua u oxígeno que ingresan al concreto y dañan al acero cubierto. La corrosión genera una reducción de la sección del acero, lo cual genera una expansión en el concreto alrededor de este, fisuras excesivas e incluso desprendimiento del recubrimiento.

Entre los distintos agentes que aceleran el deterioro del concreto, muchos de ellos están altamente ligados al ancho de grietas que se deben presentar bajo cargas de servicio. La relación mencionada anteriormente se resume en la Figura 2-8.

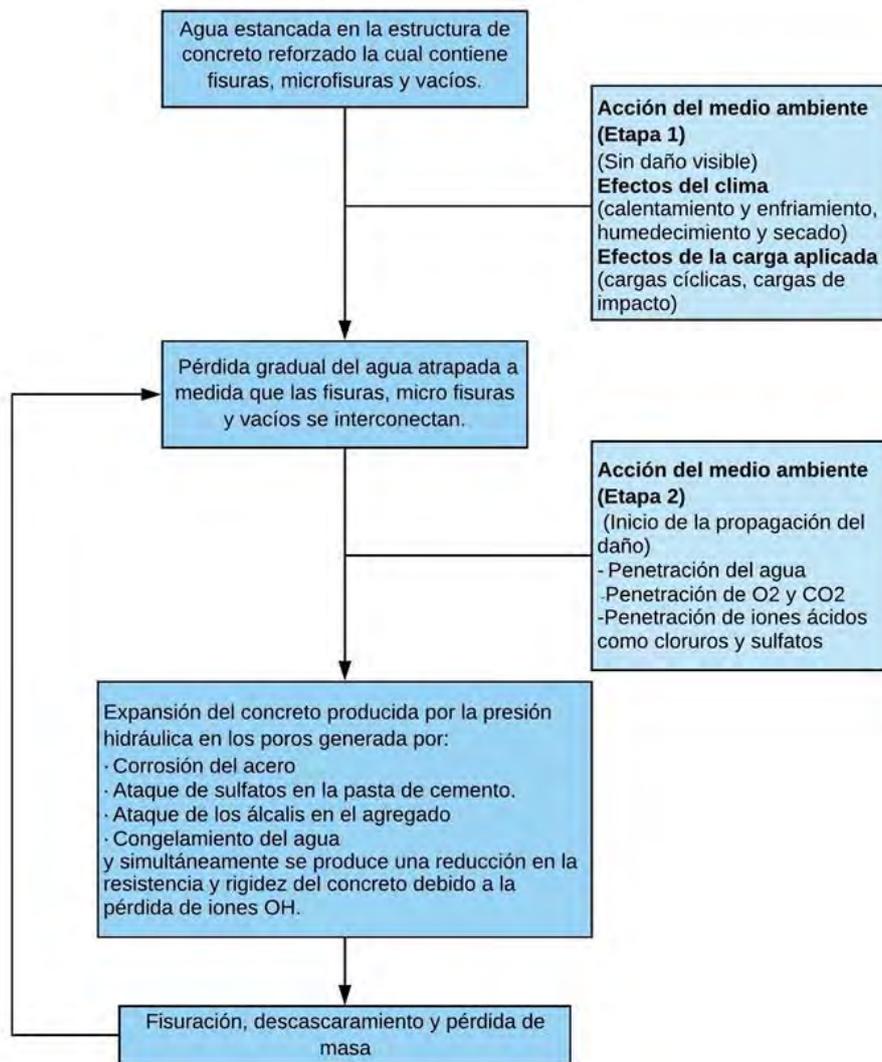


Figura 2-8. Cuadro representativo entre la durabilidad y las fisuraciones.
Adaptado de Mehta y Monteiro, 2006.

Razones para controlar el ancho de grietas

Wight (2015) menciona que existen tres razones para verificar el ancho de grietas:

- a) **Apariencia:** Una encuesta realizada por el comité 224 del ACI permitió establecer ciertos límites bajo los cuales el ancho de grietas genera incomodidad e inseguridad en las personas. Estos límites se encuentran, aproximadamente, entre 0.25 y 0.33 mm.
- b) **Permeabilidad:** Este factor cobra importancia cuando se diseñan estructuras que retienen líquidos, las filtraciones son función del ancho de las grietas por lo que se busca que estos estén debajo de límites permisibles.
- c) **Corrosión:** Diversos estudios, presentes en el artículo de Borosnyó (2010), sugieren que la corrosión y el ancho de grietas superficiales son fenómenos independientes.

2.2.2 Deflexiones excesivas

Las deflexiones o flechas de los elementos de concreto armado se deben controlar, puesto que valores excesivos puede ocasionar un mal funcionamiento de la estructura. Lo anterior se produce por la fisuración de muros o vigas que pueden descuadrar las puertas o ventanas y ocasionar problemas en las instalaciones sanitarias. Asimismo, se pueden generar deformaciones visualmente desagradables. Por ello, el diseño de elementos debe garantizar un comportamiento adecuado y cumplir con los requisitos de resistencia.

Para poder controlar el problema descrito con antelación se emplean dos enfoques. El primero está basado en limitar el espesor mínimo de los elementos y dependen de la función de cada elemento, el tipo de apoyo y la luz libre. Sin embargo, este enfoque se aplica para elementos bajo condiciones habituales. El segundo enfoque está basado en el cálculo directo de la flecha mediante ecuaciones; no obstante, debido a la variabilidad de los parámetros, la presente metodología no posee gran exactitud.

Tipos de deflexiones

Para el cálculo de deflexiones se toman en consideración dos tipos de flechas, la instantánea y la diferida o a largo plazo. La primera se genera siempre que un elemento sufra el efecto de cargas aplicadas como, por ejemplo, el peso propio, peso de los acabados, carga viva, entre otros. Las deflexiones diferidas también se ven afectadas por las cargas aplicadas durante largos intervalos de tiempo, no obstante, predomina el efecto del creep o flujo plástico del concreto. Por otro lado, se podría asumir que las deflexiones instantáneas son más importantes de estudiar debido a la rapidez con la que se presentan, sin embargo, se ha demostrado que las deflexiones diferidas pueden superar a la instantánea en magnitud, llegando a ser entre dos y hasta tres veces la instantánea. En la presente tesis, se presentará cómo estimar la deflexión ocasionada por flexión, dejando de lado las flechas ocasionadas por fuerza cortante o por pérdida de adherencia (ocasionado por grietas de flexión).

Variables que influyen en las deflexiones

Según Ottazzi (2016), existen diversas variables que influyen en el incremento de las deflexiones en elementos de concreto armado. Entre ellas está la resistencia a tracción del concreto, ya que, para una mayor resistencia, las deflexiones se reducen. Pese a ello, dicho aporte no se toma en cuenta en el diseño por resistencia en flexión. Otra variable para considerar es el módulo de la elasticidad del concreto (E_c). Para un mayor valor de E_c se producen menores curvaturas y, por ende, las deflexiones instantáneas (deflexiones iniciales ante la aplicación de una carga) serán menores.

Asimismo, los elementos también se ven afectados por los cambios en la cantidad de acero (en tracción y compresión) y por la distribución de la armadura del refuerzo. El uso de una mayor cantidad de acero en tracción está relacionado con el fenómeno de deflexión ya que, una mayor cantidad de refuerzo en tracción ocasiona que el esfuerzo en el acero, bajo cargas

de servicio, disminuya. Por lo tanto, la deformación en el acero será menor y por ende también las deflexiones. Adicionalmente, existen variables que originan deformaciones en el tiempo, entre ellas está el creep o flujo plástico y la retracción del concreto, cuyo estudio y evolución se convierte en un problema no lineal dado que la secuencia de cargas es muy variable y difícil de predecir.

Importancia del cálculo de deflexiones

Existen diversas razones para controlar la magnitud de los desplazamientos verticales. A continuación, se mostrarán las razones más resaltantes propuestas por diversos autores:

- a) **Apariencia:** Deformaciones muy amplias pueden ser visualmente desagradables y generar incomodidad en el usuario.
- b) **Vibraciones indeseables:** La magnitud de las vibraciones verticales está estrechamente relacionada con las deflexiones en los elementos. Ya que, como explica Meli (2001), los elementos con deflexiones pronunciadas son elementos de baja rigidez que son más propensos a vibraciones generadas por las cargas de impacto presentes en la estructura.
- c) **Daño en elementos no estructurales:** Se pueden producir daños importantes en la tabiquería de la estructura y un agrietamiento pronunciado, lo cual genera una sensación de inseguridad en los ocupantes a pesar de que el edificio sea completamente seguro.
- d) **Daño en elementos estructurales:** Wight (2015) explica que, si la deflexión de un elemento es lo suficiente como para entrar en contacto con otros miembros de la estructura, se podría redistribuir el camino de las cargas aplicadas ocasionando un agrietamiento no previsto.
- e) **Mal funcionamiento de la estructura:** Las deflexiones excesivas pueden producir problemas en el funcionamiento de equipos de precisión y la maquinaria presente en

la estructura. Además, se puede producir hundimiento de los pisos superiores lo cual generaría estancamiento excesivo de agua de lluvia (Ottazzi, 2016).

- f) **Durabilidad:** Esto es una consecuencia de lo mencionado anteriormente. La acumulación excesiva de agua podría generar problemas de durabilidad en el concreto. Ya que, en caso el concreto presente problemas de permeabilidad, se permitiría el ingreso de agua a la estructura interna, deteriorando al concreto y sus propiedades mecánicas.
- g) **Fisuraciones:** Una elevada deflexión de los elementos trae como consecuencia una mayor probabilidad de formación de grietas. Elementos que sean poco rígidos tendrán mayores esfuerzos en los aceros de refuerzo y, por lo tanto, mayores deformaciones, lo cual incrementará el ancho de las grietas.

2.2.3 Vibraciones indeseables

Las vibraciones excesivas son un estado límite muy importante a considerar en el diseño debido a que pueden generar incomodidad física y preocupación en los ocupantes. En los últimos años, tal como lo explica Hong et al. (2015), este problema se ha agravado debido a que existe una tendencia a incrementar la esbeltez y reducir el peso de los elementos estructurales, lo cual ha hecho que su estudio cobre mayor relevancia. Debido a que el problema tiene una naturaleza dinámica, en la cual influyen diversos factores como las características dinámicas de la oscilación (frecuencia y amplitud) y las características dinámicas propias de la estructura tales como su frecuencia natural y su amortiguamiento (Meli, 2001), el planteamiento del problema se vuelve altamente complejo. Por ello, es importante definir los niveles de vibración permisibles los cuales están relacionados con el efecto que tienen dichas vibraciones en las personas. A continuación, se presentarán las principales causas de las vibraciones y los diversos factores que más influyen en la magnitud y su efecto en las personas.

Principales causas de las vibraciones

El cálculo de vibraciones es complejo por las distintas variables a considerar y la naturaleza dinámica del problema. Por ello, para poder controlarlas, es importante identificar las causas de su generación. Wight (2015) describe 4 principales causas de la formación de oscilaciones. Entre ellas está el movimiento generado por personas y el efecto del viento. Para edificios altos, las cargas de viento pueden ocasionar oscilaciones que generan malestar en las personas. Además, la presencia de equipo o maquinaria que imponga aceleraciones considerables o que generen impacto sobre la estructura, pueden contribuir con el aumento de las vibraciones. Por último, también se pueden generar dichas oscilaciones a causa del tráfico cercano a la estructura.

Variables que influyen en la magnitud de las vibraciones y su efecto en las personas

Dentro de las variables se destaca la frecuencia natural del elemento. En la actualidad se está haciendo más común reducir el peso de las estructuras a través de la reducción de la sección de sus elementos, con el fin de poder aprovechar mejor el espacio. En consecuencia, como mencionan Hong et al. (2015), se origina una reducción de la capacidad de amortiguamiento y la frecuencia natural de la estructura. Por ello, además de la frecuencia natural de la estructura, las actividades que se realizan en las edificaciones también se deben tomar en cuenta. Wight (2015) establece límites de la frecuencia natural para actividades cotidianas. Sin embargo, es importante tomar en cuenta que se pueden presentar actividades que generen vibraciones mayores, por ejemplo, en edificaciones que poseen un elevado número de personas al mismo tiempo. Otro factor para tomar en cuenta, principalmente en el efecto en las personas, es el rango de frecuencias para el cual las personas son más sensibles. Según Khan et al. (2013), las personas son capaces de percibir frecuencias entre 8 y 10 Hz. Esto se debe a que, existen órganos del cuerpo humano que trabajan en un rango de frecuencias entre 4 y 8 Hz. Por ello, una vibración entre el rango de dichas frecuencias entraría en resonancia con el cuerpo humano.

Razones para controlar las vibraciones

Debido a la gravedad del problema, es fundamental resaltar las razones para controlar las vibraciones. Los principales motivos son los siguientes:

- a) **Efecto en las personas:** El efecto que tienen las vibraciones en las personas es altamente notorio. Produce incomodidad física, psicológica y sensaciones de estrés y ansiedad.
- b) **Daño estructural:** Vibraciones que entran en resonancia con la frecuencia fundamental de la estructura son capaces de generar daños tales como grietas, e inclusive, en casos extremos, colapso de estructuras.
- c) **Mal funcionamiento de la estructura:** Vibraciones constantes en losas y vigas pueden provocar funcionamiento pobre de la estructura y genera problemas en caso se tengan equipos o maquinaria que deben de ser usados con alta precisión.
- d) **Sobrecostos por correcciones del problema:** En el artículo presentado por Hanagan (2005), se estudiaron edificaciones con problemas de vibraciones y las medidas correctivas tomadas y, a partir de ello, se concluyó que los costos por resolver los problemas de vibraciones sobrepasan considerablemente a lo que se hubiera invertido por cambiar el diseño de la losa.

2.2.4 Esfuerzos admisibles

Es importante conocer los límites de resistencia de los materiales utilizados en el diseño bajo los cuales los elementos estructurales sometidos a cargas de servicio se comportan satisfactoriamente. Para ello, es importante entender el comportamiento mecánico de los materiales utilizados, para poder percatarse de los límites que nos permitan asegurar un desempeño aceptable de la estructura.

Comportamiento del concreto

El concreto es un material con una gran capacidad de resistir compresión, por lo tanto, es importante conocer el comportamiento que tiene su estructura interna bajo estas sollicitaciones. En la Figura 2-9 se puede apreciar la curva esfuerzo-deformación que nos da una idea del comportamiento del concreto.

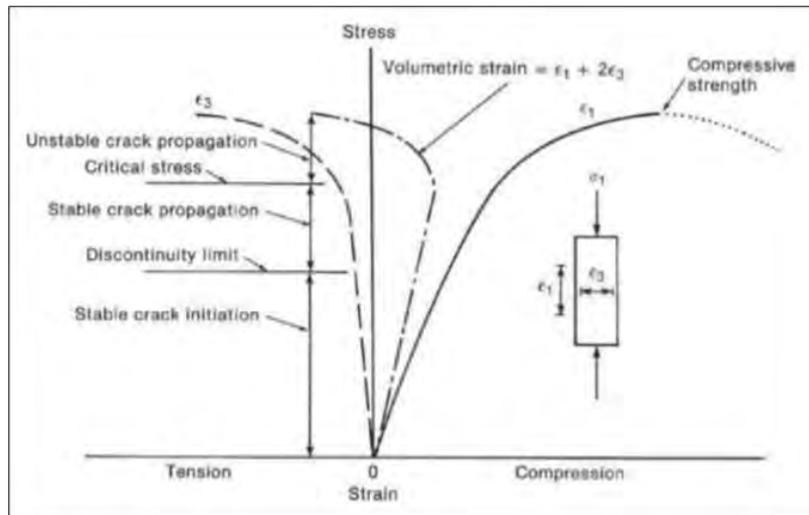


Figura 2-9 Curva esfuerzo vs deformación de una probeta de concreto
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015

De la gráfica se diferencian cuatro zonas importantes que describen el comportamiento interno de las probetas de concreto, durante el ensayo de compresión. Según Wight (2015), en la primera zona (hasta el 30% del f_c) se empiezan a formar grietas debido a la retracción por secado del concreto, sin embargo, estas grietas no tienen efectos importantes en su comportamiento.

Luego, se podría asumir un comportamiento lineal hasta una magnitud del 50% de la resistencia en compresión, nivel al cual se generan grietas en la interfaz pasta-agregado pero que no representan un peligro en los elementos. En la tercera etapa se propagan grietas de manera estable y, finalmente, en niveles de compresión desde el 75% se produce el estado de esfuerzos críticos. En esta etapa las grietas se incrementan considerablemente, ya no hay posibilidad de redistribuir los esfuerzos a través de la estructura interna. De lo anterior se podría afirmar que para esfuerzos en compresión menores al 50% de la resistencia final, el

comportamiento del concreto será satisfactorio y con una posibilidad de resistir una carga mayor sin consecuencias nocivas.

Comportamiento del acero de refuerzo

El acero de refuerzo se aprovecha para resistir los esfuerzos a tracción, por lo que el análisis de su comportamiento se hará mediante ensayos a tracción de las barras de refuerzo.

En la Figura 2-10 se muestran curvas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero.

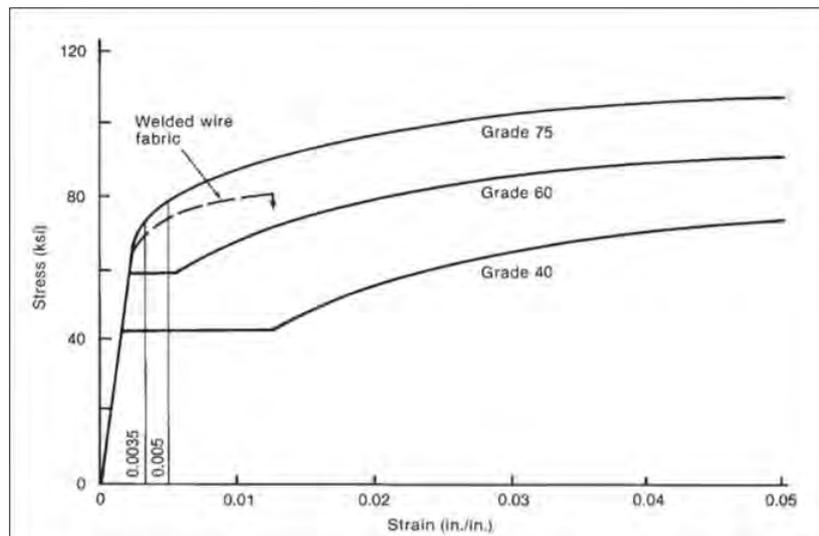


Figura 2-10. Curvas esfuerzo-deformación de las barras de acero de refuerzo más utilizadas
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015

En la curva esfuerzo-deformación (Figura 2-10) se observa que el comportamiento, hasta el punto de fluencia de cada barra, es linealmente elástico. Por lo tanto, el límite de esfuerzo que se debe asumir para el acero debe ser uno que no genere problemas de adherencia con el concreto.

Capítulo 3. COMPARACIONES NORMATIVAS Y PRÁCTICAS

En este capítulo se realizarán comparaciones entre los diferentes criterios de verificación que se utilizan en distintas normas del mundo para cada uno de los estados límites mencionados con antelación.

3.1 Fisuración excesiva

En el presente acápite se estudiará el mecanismo de formación de grietas bajo cargas de tracción en el concreto y se presentarán los límites para ancho de grietas que determinan un comportamiento satisfactorio y las diversas formas que se han desarrollado para su estimación.

Mecanismo de formación de grietas debido a la aplicación de cargas

La formación de grietas es un fenómeno muy usual debido a la baja capacidad del concreto de resistir esfuerzos de tracción. Según Wight (2015), si se tiene un prisma con una barra de acero embebida, las primeras grietas se forman cuando los esfuerzos aplicados superan la resistencia a tracción del concreto. Este fenómeno se puede apreciar en la Figura 3-1.

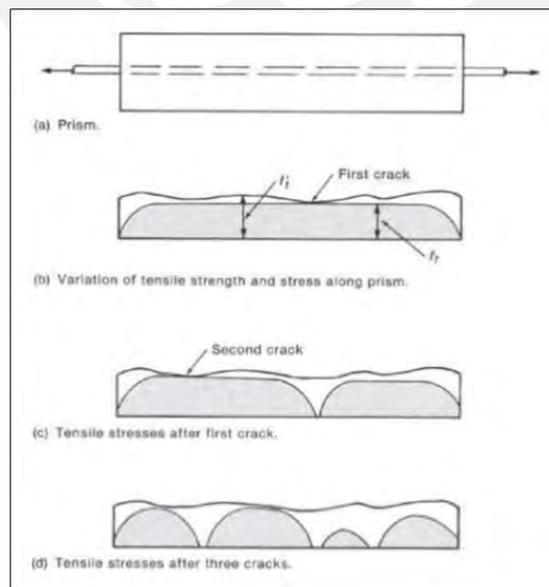


Figura 3-1. Formación de grietas a causa del esfuerzo a tracción en el prisma
Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015

En la grieta, el esfuerzo aplicado es resistido por la barra de refuerzo, redistribuyendo el esfuerzo aplicado en el concreto. Luego, si se sigue incrementando la carga, el proceso anterior se repite generando una nueva grieta y redistribuyendo nuevamente el esfuerzo en el concreto. Dicho proceso continúa hasta que el esfuerzo a tracción en el concreto no supere su resistencia.

Este mecanismo de generación de grietas ha sido utilizado por investigadores para desarrollar fórmulas empíricas que permitan calcular el ancho máximo de grietas en elementos de concreto armado. Estas han sido extrapoladas para casos en los cuales las grietas se generan por momentos flectores, siendo este último el caso más común. A continuación, se presentarán las fórmulas más resaltantes recopiladas a partir de distintas normas e investigadores.

3.1.1 Gergerly y Lutz (1968)

Ambos investigadores se encargaron de identificar las distintas variables con mayor influencia en la generación de grietas por flexión. A partir de los resultados experimentales de investigadores previos a ellos, realizaron un extenso análisis estadístico y lograron concluir una ecuación que contenía las principales variables que influyen en la generación de grietas. La ecuación original propuesta por ambos fue la siguiente:

$$w_s = 0.011 \cdot \sqrt[3]{\left(c + \frac{\phi}{2}\right) \cdot A_o \cdot (f_s - 34.45) \cdot 10^{-3}} \quad (3.1)$$

Donde w_s representa el ancho de la grieta más probable generado al nivel del acero de refuerzo (mm), f_s es el esfuerzo en el acero en N/mm^2 , A_o representa el área de concreto que rodea al refuerzo de acero de forma simétrica dividida por el número de barras (en mm^2), c representa el valor del recubrimiento de la viga (en mm) y ϕ es el valor del diámetro del primer refuerzo medido desde el borde tensionado (en mm). El valor de la constante $0.011 \cdot 10^{-3}$ depende del sistema de unidades en que se utilice dicha fórmula, en este caso sus unidades se

encuentran en mm^2/N . Dicha ecuación ha sufrido cambios en su forma siendo la Ecuación 3.2 la usada por distintos códigos.

$$W_s = 0.011 \cdot \beta \cdot f_s \cdot \sqrt[3]{d_c \cdot A_0} \cdot 10^{-3} \quad (3.2)$$

Donde d_c es el valor de la distancia de la parte más tensionada de la viga hasta el centroide de las barras de refuerzo, en caso sean varias filas será al centroide de estas. Por otro lado, si se desea obtener el ancho en el extremo de la fibra tensionada se debe de utilizar el factor $(h-x)/(d-x)$, donde h es el peralte total del elemento, x es el valor del eje neutro y d es el peralte efectivo del elemento. McCormac (2014) recomienda que para simplificar cálculos se utilice el valor de β como 1.2 para vigas y 1.35 para losas, debido a que se ha demostrado que se pueden obtener resultados razonables para dichas magnitudes.

3.1.2 Frosch (1999)

Frosch explicó que la fórmula de la Ecuación 3.2 era válida pero solo para valores de recubrimiento menores a 65 mm. Por ello, propuso la Ecuación 3.3 de manera que se pueda realizar el cálculo sin limitaciones de recubrimiento.

$$W_{max} = 2 \cdot \frac{f_s}{E_s} \cdot d^* \cdot \beta \quad (3.3)$$

En dicha ecuación las variables f_s y E_s son el esfuerzo en el acero y su módulo de elasticidad, respectivamente. Además, el valor de d^* se determina escogiendo el mayor valor entre las siguientes expresiones:

$$\sqrt{(d_c)^2 + (d_s)^2} \quad (3.4)$$

$$\sqrt{(d_c)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad (3.5)$$

Donde d_s es el valor del recubrimiento lateral del refuerzo, d_c es el valor del recubrimiento del refuerzo hasta la fibra más tensionada, β es el resultado de la expresión $(h-x)/(d-x)$.

3.1.3 Norma peruana E.060 (2019)

La norma peruana está basada en la fórmula de Gergerly-Lutz, sin embargo, establece un valor del parámetro Z que depende del espesor del recubrimiento y el esfuerzo aplicado en el acero bajo cargas de servicio. Para el cálculo de dicho parámetro se emplea la siguiente fórmula:

$$Z = f_s \cdot \sqrt[3]{d_c \cdot Act} \quad (3.6)$$

De dicha expresión, f_s representa el esfuerzo aplicado en el acero (en MPa) a causa del momento bajo cargas de servicio (M_s) y se puede calcular a través de la siguiente fórmula:

$$f_s = \frac{M_s}{(0.9 \cdot d \cdot A_s)} \quad (3.7)$$

Donde d_c representa el espesor del recubrimiento (mm) medido desde la fibra más traccionada hasta el centroide del refuerzo más cercano a la fibra, Act es el área efectiva del concreto a tracción (mm²) que rodea al refuerzo principal de tracción y cuyo centroide coincide con el de dicho refuerzo, dividida entre el número de barras.

Esta fórmula es una porción de la Ecuación 3-2 (ecuación modificada de Gergerly y Lutz) y se utiliza para verificar que la distribución del esfuerzo escogido cumple con evitar un ancho de grietas excesivo. Por ello, la norma E.060 establece un valor máximo del parámetro Z , el cual no debe exceder de 26 KN/mm. Dicho valor de Z está asociado a una fisuración de aproximadamente 0.34 mm. Adicionalmente, cuando el refuerzo principal de tracción está compuesto por barras de varios diámetros, el número de barras equivalente se calculará

dividiendo el área total de acero entre al área de la barra de mayor diámetro. La norma proporciona la siguiente imagen con el fin de visualizar con mayor claridad lo que representa cada variable de la fórmula.

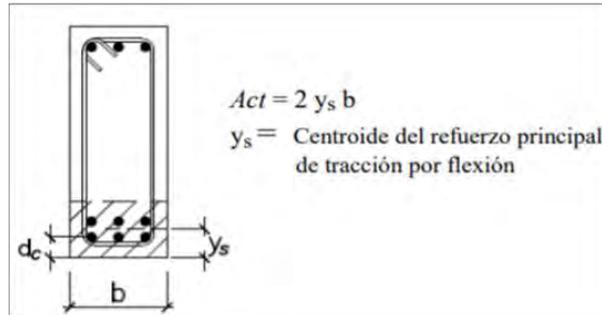


Figura 3-2. Representación de los componentes de la fórmula
Tomado de Norma E.060 (2019)

3.1.4 ACI 318-19 (2019)

Hasta el año 1999, el ACI utilizaba la Ecuación 3.1 propuesta por Gergerly-Lutz para la estimación de grietas generadas por flexión. La fórmula estaba organizada de modo que empleaban un parámetro Z, similar a lo utilizado en la norma peruana. Sin embargo, en el 2005, se modificó el código del ACI y se empezó a utilizar la expresión que detallan en sus artículos 24.3.1 y 24.3.2. En dichas secciones se especifica los espaciamientos mínimos para conseguir un control satisfactorio de grietas generadas a causa de la flexión. Por ello, se establece que el espaciamiento máximo (s) en los elementos debe ser el menor valor obtenido al emplear las siguientes fórmulas:

$$s = 38 \cdot \left(\frac{276}{f_s} \right) - 2.54 \cdot c_c \quad (3.8)$$

$$s = 30.5 \cdot \left(\frac{276}{f_s} \right) \quad (3.9)$$

Donde f_s es el esfuerzo en los aceros de refuerzo bajo cargas de servicio en N/mm^2 . El ACI permite elegir si utilizar el valor real de dicho esfuerzo, obtenido con el momento en servicio aplicado, o utilizar 2/3 del valor de la fluencia del acero y, C_c representa el

recubrimiento medido desde la superficie de concreto más traccionada hasta el borde de la barra de refuerzo más cercana a dicha superficie en cm. Según McCormac (2014), el procedimiento anteriormente mencionado es razonable para losas en una dirección y vigas de gran peralte. Por otro lado, para vigas con peraltes ordinarios se debe de utilizar la fórmula de Gergerly-Lutz y se debe comparar con los valores máximos permisibles de ancho de grietas provisto por el comité 224 del ACI. Estos se muestran en la Tabla 3.1 y dependen del ambiente bajo el cual se encuentran sometidos los elementos.

Tabla 3-1. Límites permisibles de tamaño de fisuras según el ambiente al que se encuentra expuesta la estructura

Elementos sometidos a:	Ancho de grietas permitidos	
	(in.)	(mm)
Aire seco	0.016	0.41
Aire húmedo, suelo	0.012	0.30
Productos químicos descongelantes	0.007	0.18
Agua de mar y agua salada	0.006	0.15
Uso en estructuras de retención de agua	0.004	0.10

Nota. Tomado de "Design of reinforced concrete" por McCormac, 2014

3.1.5 Model Code (2010)

El acápite 7.6.4 del Model Code 2010 explica a detalle el estado límite de fisuraciones excesivas y propone un método de cálculo. Se explica, bajo el mismo enfoque, que la generación de grietas se genera debido a la baja resistencia a tracción del concreto. Estas grietas se van distribuyendo conforme se va venciendo la resistencia a tracción del concreto. Tomando estas consideraciones se obtuvo, experimentalmente, una fórmula que permite determinar el agrietamiento por carga axial que luego se extrapolo a un agrietamiento por flexión. A partir de las consideraciones mencionadas anteriormente, el Model Code 2010 propone la Ecuación 3.10 para el cálculo de grietas.

$$w_d = 2 \cdot l_{s,max} \cdot (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} - \epsilon_{cs}) \quad (3.10)$$

Donde w_d es la grieta obtenida del cálculo, $l_{s,max}$ es la longitud de la zona de discontinuidad entre el acero y el concreto. Los esfuerzos generados en esta zona contribuyen al ancho de las grietas, ε_{sm} es la deformación promedio del acero a lo largo de la zona de discontinuidad, ε_{cm} es la deformación promedio del concreto a lo largo de la zona de discontinuidad y ε_{cs} es la deformación en el concreto producida por la retracción libre de este. En la presente tesis, y con el fin de poder comparar los resultados numéricos con los criterios propuestos por otras normas, se despreciará el aporte de la última deformación y se considerará que las grietas formadas se producen a corto plazo. Por lo que, la determinación del valor de $l_{s,max}$ se realiza a partir de la siguiente ecuación:

$$l_{s,max} = k \cdot c_c + \frac{1}{4} \cdot \frac{f_{ctm}}{\tau_{bms}} \cdot \frac{\phi_s}{\rho_{s,ef}} \quad (3.11)$$

Donde k es el parámetro empírico que afecta directamente la influencia del recubrimiento del concreto. Se podría considerar un factor de $k=1$ como una simplificación, c_c es el recubrimiento del concreto a la cara del refuerzo, τ_{bms} es el esfuerzo de enlace entre el concreto y el acero. Se considera que está uniformemente repartido entre cada grieta. El valor de τ_{bms} se puede determinar a partir de la Figura 3.8. Por otro lado, f_{ctm} es el valor medio de la resistencia a tracción del concreto. Para concretos de resistencia menores a 50 MPa: $f_{ctm}=0.3 \cdot (f_{ck})^{(2/3)}$ y para concretos de resistencia mayores a 50 MPa: $f_{ctm}=2.12 \cdot \ln(1+f_{cm}/10)$, donde f_{ck} es el valor de la resistencia del concreto y f_{cm} es el valor de la resistencia media del concreto (se calcula agregándole 8 al valor de f_{ck}). Además, ϕ_s es el diámetro nominal de las barras de refuerzo y $\rho_{s,ef}$ es la relación entre el área de acero en el prisma de concreto y el área efectiva de concreto ($A_{c,ef}$) afectado por los esfuerzos de tensión. Además, para determinar el área efectiva de concreto a considerar, en vigas en flexión, se escogerá el menor valor obtenido al emplear las siguientes expresiones:

$$A_{c,ef} = 2.5 \cdot (h - d) \quad (3.12)$$

$$A_{c,ef} = (h - x)/3 \quad (3.13)$$

Para dichas fórmulas, se debe tener en cuenta que h es el peralte total del elemento, d es el peralte efectivo del elemento y x es la longitud del eje neutro del elemento. Por otro lado, los valores de τ_{bms} , β y η_r se calculan de acuerdo a la Tabla 3-2.

Tabla 3-2. Valores de τ_{bms} , β y η_r dependiendo del tipo de carga y la etapa de formación de grietas

	Etapas de formación de grietas	Etapa de fisuración estable
Corto plazo, carga instantánea	$\tau_{bms} = 1.8 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $n_r = 0$	$\tau_{bms} = 1.8 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $n_r = 0$
Largo plazo, carga permanente en el tiempo	$\tau_{bms} = 1.35 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $n_r = 0$	$\tau_{bms} = 1.8 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.4$ $n_r = 1$

Nota. Tomado de "Design of reinforced concrete" por FIB International, 2012

La determinación de la expresión $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs})$ se realizará mediante la siguiente ecuación:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) = \frac{\sigma_s - \beta \cdot \sigma_{sr}}{E_s} - \eta_r \cdot \varepsilon_{sh} \quad (3.14)$$

Donde σ_s es el esfuerzo en el acero en la fisura bajo cargas de servicio, β es el factor empírico que permite evaluar la deformación media en la longitud de la zona de discontinuidad y σ_{sr} es el esfuerzo máximo del acero en la fisura en la etapa de formación de grietas. La última parte de la ecuación representa las consideraciones por la retracción libre del concreto. Además, η_r es un coeficiente que considera la contribución de la retracción. Su valor se obtiene de la Figura 3.8 y ε_{sh} es la deformación por retracción. Como ya se mencionó, esta última expresión será despreciada para poder comparar los resultados con las demás fórmulas. Para un análisis más preciso a lo largo del tiempo, se puede considerar los efectos de la retracción del concreto.

Por otro lado, debido a que estas fórmulas están calculadas para esfuerzos de tracción pura, si se desea obtener resultados para casos en flexión, se deberá de multiplicar los resultados por el factor $(h-x)/(d-x)$, donde h es el peralte total de la viga, x es la longitud del eje neutro y d es el peralte efectivo de la viga. Además, la ecuación posee el término $((\beta \cdot \sigma_{sr})/E_s)$ que se observa en la Figura 3.7 y representa la diferencia entre la deformación unitaria que sufre una barra de acero libre y una barra encerrada en un prisma de concreto. Para el cálculo de σ_{sr} se utilizará la siguiente expresión (obtenida despejando la Ecuación 3.10):

$$\sigma_{sr} = \frac{f_{ctm}}{\rho_{s,ef}} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \quad (3.15)$$

Una forma alternativa de obtener el ancho de grieta sin necesidad de obtener el factor $(h-x)/(d-x)$ y al mismo tiempo simplificar el cálculo se logra despejando la Ecuación 3.15 de la siguiente manera:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{\sigma_s - \beta \cdot \sigma_{sr}}{E_s} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right) = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{M_{cr}}{M_a}\right) \quad (3.16)$$

Donde M_{cr} es el momento de agrietamiento de la sección y M_a es el momento aplicado. Esto se puede asumir ya que los esfuerzos en el acero bajo los efectos de flexión en ambos casos son proporcionales a sus momentos, además, se incluye el efecto de la flexión evitando el cálculo del factor antes mencionado. El objetivo de obtener el w_d es que no supere el w_{lim} , el cual está dado por la tabla 7.6.1 del Model Code 2010 y que se presenta en la Tabla 3.3. Los valores que están dentro del alcance de la tesis están en la columna RC, dado que estos valores son para elementos de concreto reforzado. Las demás columnas son para elementos pre-esforzados.

Tabla 3-3 Anchos de grieta máximo permitido según el tipo de exposición de la estructura. Unidades en milímetros

	RC	PL1	PL2	PL3
X0	0.3	0.2	0.3	0.3
XC	0.3	0.2	0.3	0.3
XD	0.2	$\sigma < 0'$	0.2	0.2
XS	0.2	$\sigma < 0'$	0.2	0.2
XF	0.2	$\sigma < 0'$	0.2	0.2

Nota. Tomado de "Design of reinforced concrete" por FIB International, 2012

Donde X0 representa un ambiente seco donde no hay riesgo de corrosión, al que estaría expuestos elementos interiores de una estructura con baja humedad en el aire y poca probabilidad de sufrir corrosión, XC corresponde a los ambientes que generan corrosión en el acero inducida por la carbonatación en el concreto, XD representa ambientes bajo los cuales se produce corrosión a causa de cloruros no provenientes del agua de mar, XS son ambientes bajo los cuales se produce corrosión a causa de cloruros provenientes de agua de mar y XF corresponde a los ambientes que generan un efecto de congelación-deshielo en el concreto. A continuación, se ilustrará los procedimientos descritos anteriormente, para cada norma o investigación independiente, a través de ejemplos aplicativos.

3.1.6 Ejemplos aplicativos

Ejemplo 3.1. Se tienen una viga simplemente apoyada con una luz de 6.8 m. La sección de la viga, así como la disposición del acero (obtenido a partir del diseño por resistencia), se muestra en la figura (A)

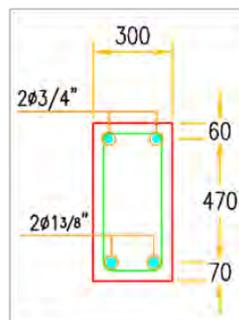


Figura (A)

Se tienen los siguientes datos:

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

Asumiendo una carga muerta (CM) de 2400kg/m y una carga viva (CV) de 1700kg/m, se tiene una carga total (CT) de 4100kg/m. A continuación, se mostrará el cálculo del ancho de grietas de acuerdo a las diferentes normas e investigaciones mencionadas en los incisos anteriores.

Según Gergerly y Lutz (1968):

Se emplea la siguiente ecuación mencionada en el inciso 3.1.1 correspondiente a dichos autores.

$$W_s = 0.011 \cdot \sqrt[3]{\left(c + \frac{\phi}{2}\right) \cdot A_0 \cdot (f_s - 34.45) \cdot 10^{-3}} \quad (3.1)$$

Previo al cálculo de los parámetros, se determina la ubicación del eje neutro y la inercia de la sección. Dado que, para el momento aplicado, la sección se encuentra agrietada, se tiene un centroide (c) de 18.52 cm y una inercia agrietada (Icr) de $3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. Para el cálculo del eje neutro se empleó “2n-1” para transformar el acero en compresión, ya que toma en cuenta, de manera aproximada, el efecto del flujo plástico en el concreto (Ottazzi, 2016). A continuación, se procede a hallar la relación entre la diferencia del peralte y el centroide con la diferencia entre el peralte efectivo y el centroide (conocido también como β), la relación modular, el momento máximo (bajo la asunción de una viga simplemente apoyada) y el momento de agrietamiento.

- $\beta = \frac{h-x}{d-x} = \frac{60-18.52}{53-18.52} = 1.20$
- $n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2000000}{15000 \cdot \sqrt{210}} = 9.20$
- $M_{\text{máx}} = \frac{CT \cdot l^2}{8} = \frac{39.59 \cdot 6.8^2}{8} = 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m}$

A partir de dichos cálculos, se prosigue con la determinación del esfuerzo en el acero (fs) y el área de concreto a tracción entre el número de barras (Ao):

- $f_s = \frac{n \cdot M_{\text{máx}} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{9.20 \cdot 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m} \cdot (53 \text{ cm} - 18.52 \text{ cm})}{3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot 10^3 = 242.73 \text{ N/mm}^2$
- $A_o = \frac{2 \cdot d' \cdot b}{\# \text{barras tracción}} = \frac{2 \cdot 7 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{2} \cdot 10^2 = 21000 \text{ mm}^2$

Finalmente, reemplazando se tiene el siguiente valor de ancho de grietas:

- $W_s = 0.011 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \cdot 1.2 \cdot (243.81 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 34.45) \cdot \sqrt[3]{70 \text{ mm} \cdot 21000 \text{ mm}^2} = 0.31 \text{ mm}$

Comparándolo con los límites permisibles, se observa que el valor del ancho de grietas excede a 0.3 mm, el cual corresponde a ambientes donde no hay riesgo de corrosión o donde hay riesgo de corrosión inducida por carbonatación.

Con el propósito de reducir dicho valor, se cambia la disposición del acero en tracción a 4 Ø 1" y, con el fin de observar si la variación es significativa, se realiza nuevamente el cálculo del centroide y de la inercia agrietada. Para un valor de c igual a 18.85 cm y una inercia agrietada, I_{cr} , igual a $3.15 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$, los cuales no cambian considerablemente debido a la poca variación en el área de acero, se prosigue con la determinación de los parámetros β , n , $M_{\text{máx}}$, f_s y A_o .

- $\beta = \frac{h-x}{d-x} = \frac{60-18.85}{54-18.85} = 1.17$
- $n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2000000}{15000 \cdot \sqrt{210}} = 9.20$
- $M_{\text{máx}} = \frac{CT \cdot l^2}{8} = \frac{39.59 \cdot 6.8^2}{8} = 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m}$
- $f_s = \frac{n \cdot M_{\text{máx}} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{9.20 \cdot 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m} \cdot (54 \text{ cm} - 18.85 \text{ cm})}{3.15 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot 10^3 = 234.83 \text{ N/mm}^2$
- $A_o = \frac{2 \cdot d' \cdot b}{\# \text{barras tracción}} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 30}{4} \cdot 10^2 = 9000 \text{ mm}^2$

Finalmente, se tiene el nuevo valor de ancho de grietas

- $W_s = 0.011 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \cdot 1.17 \cdot (234.83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 34.45) \cdot \sqrt[3]{60 \text{ mm} \cdot 9000 \text{ mm}^2} = 0.21 \text{ mm}$

A diferencia del caso anterior, se observa que dicho valor no excede el límite permisible de 0.3 mm correspondiente a los ambientes ya mencionados. Esto evidencia que una mejor distribución del acero de refuerzo, en la zona de tracción, disminuye el ancho de grietas (Ottazzi, 2016).

Según Frosch (1999):

Del inciso 3.1.2 se tiene la siguiente ecuación para el cálculo del ancho de grietas de acuerdo a este investigador.

$$W_{max} = 2 \cdot \frac{f_s}{E_s} \cdot d^* \cdot \beta \tag{3.3}$$

Dado que se utiliza el arreglo mostrado en la figura A, se tienen los mismos valores de centroide e inercia agrietada ($c = 18.52$ e $I_{cr} = 3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$). Por ende, los valores del parámetro β y del esfuerzo en el acero (f_s) serán los mismos. A diferencia de la fórmula propuesta por Gergerly- Lutz, Frosch incluye un parámetro adicional conocido como d^* que será igual al

$$\max(\sqrt{dc^2 + ds^2}, \sqrt{dc^2 + \frac{s^2}{2}}).$$

- $d^* = \sqrt{70^2 + 60^2} = 92.20 \text{ mm}$
- $d^* = \sqrt{70^2 + (\frac{164.2}{2})^2} = 107.89 \text{ mm}$

Finalmente, se tendrá un valor de $d^* = 107.89 \text{ mm}$. Reemplazando en la ecuación, se tiene:

- $W_{m\acute{a}x} = 2 \cdot \frac{242.73 \frac{N}{mm^2}}{1.96 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}} \cdot 107.89 \text{ mm} \cdot 1.20 = 0.32 \text{ mm}$

Comparándolo con los límites permisibles, se observa que el valor del ancho de grietas excede de 0.3 mm. Por ello, se cambia la disposición del acero en tracción a $4\phi 1"$ y se realiza nuevamente el cálculo. Después, de manera similar al arreglo anterior, se calculan los parámetros que componen la fórmula para la determinación del ancho de grietas. Dado que

corresponde al mismo arreglo del caso anterior, se tiene los mismos valores de β (1.17) y f_s (234.83 N/mm²). De igual manera que en el caso anterior, el valor de d^* se calcula como el

$$\max(\sqrt{dc^2 + ds^2}, \sqrt{dc^2 + \frac{s^2}{2}})$$

- $d^* = \sqrt{60^2 + 60^2} = 84.85 \text{ mm}$
- $d^* = \sqrt{60^2 + \left(\frac{58.3}{2}\right)^2} = 66.71 \text{ mm}$

Se escoge el mayor valor, por ende, $d^* = 84.85 \text{ mm}$. Finalmente se calcula el ancho de grietas.

$$\bullet \quad W_{\text{máx}} = 2 \cdot \frac{234.83 \frac{N}{mm^2}}{1.96 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}} \cdot 84.85 \text{ mm} \cdot 1.17 = 0.24 \text{ mm}$$

Si se compara este nuevo valor con los límites admisibles, se observa que el valor del ancho de grietas es menor al valor permisible. Asimismo, se puede apreciar que, para un mayor número de barras, el valor de d^* dependerá de la distancia al recubrimiento (puesto que se escoge el máximo entre las dos maneras de calcular dicho parámetro). Esto hace referencia a que la contribución del número de barras se vuelve irrelevante en el cálculo del ancho de grietas.

Según la Norma peruana E.060 (2019):

Para el valor del ancho de grietas se emplea la ecuación mostrada en el inciso 3.1.3 correspondiente a la presente norma.

$$Z = f_s \cdot \sqrt[3]{dc \cdot Act} \quad (3.6)$$

De igual manera que en los casos anteriores, se tiene un centroide (c) de 18.52 cm y una inercia agrietada (I_{cr}) de $3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. A partir de ello, se prosigue con el cálculo del esfuerzo del acero (f_s) y del área efectiva del concreto en tracción entre el número de barras (Act).

- $f_s = \frac{n \cdot M_{\text{máx}} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{9.20 \cdot 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m} \cdot (53 \text{ cm} - 18.52 \text{ cm})}{3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot 10^3 = 242.73 \text{ N/mm}^2$
- $A_{ct} = \frac{2 \cdot y_s \cdot b}{\# \text{barras}} = \frac{2 \cdot 7 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{2} \cdot 10^2 = 2.1 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$

Finalmente, empleando la fórmula mostrada inicialmente, se procede al cálculo del parámetro Z y el ancho de grieta asociado utilizando la Ecuación 3.6. Ya que los resultados son los mismos que en casos anteriores, el valor de β será igual a 1.20.

- $Z = \frac{242.73 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \sqrt[3]{70 \text{ mm} \cdot 21000 \text{ mm}}}{1000} = 27.60 \text{ KN/mm}$
- $w = 0.011 \cdot 1.20 \cdot 27.60 = 0.37 \text{ mm}$

Dado que el valor límite establecido por la Norma peruana es de 26 KN/mm, se observa que el valor calculado excede dicho valor permisible. Por ello, se cambia la disposición del acero en tracción a 4Ø1" y se realiza nuevamente el cálculo. Debido a la poca variación del área total de acero en tracción, no se muestra un cambio considerable en los valores del centroide (c) e inercia agrietada (I_{cr}). De forma análoga al caso anterior, se calcula lo siguiente:

- $f_s = \frac{n \cdot M_{\text{máx}} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{9.20 \cdot 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m} \cdot (53 \text{ cm} - 18.85 \text{ cm})}{3.15 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} = 234.83 \text{ N/mm}^2$
- $A_{ct} = \frac{2 \cdot y_s \cdot b}{\# \text{barras}} = \frac{2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{4} \cdot 10^2 = 9000 \text{ mm}^2$
- $Z = \frac{234.83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \sqrt[3]{60 \text{ mm} \cdot 9000 \text{ mm}}}{1000} = 19.12 \frac{\text{KN}}{\text{mm}}$
- $w = 0.011 \cdot 1.17 \cdot 19.12 = 0.25 \text{ mm}$

Si se compara este nuevo valor con los límites admisibles, se observa que el valor del ancho de grietas es menor al valor permisible.

Según el ACI 318-19 (2019):

Dado que la presente norma toma en cuenta la separación entre barras para verificar el control satisfactorio de las grietas, es necesario calcular dicho parámetro para poder compararlo con el valor admisible. Previo a ello, se procede a calcular el esfuerzo del acero (f_s).

- $f_s = \frac{n \cdot M_{\max} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{9.20 \cdot 233.28 \text{ KN}\cdot\text{m} \cdot (53 \text{ cm} - 18.52 \text{ cm})}{3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot 10^3 = 242.73 \text{ N/mm}^2$

Con dicho valor se prosigue con el cálculo de la separación entre barras mediante el empleo de las ecuaciones 3.8 y 3.9 observadas en el inciso 3.1.4.

$$s = 38 \cdot \left(\frac{276}{f_s} \right) - 2.54 \cdot c_c \quad (3.8)$$

$$s = 30.5 \cdot \left(\frac{276}{f_s} \right) \quad (3.9)$$

Reemplazando el valor de f_s y c_c , se tiene lo siguiente:

- $s = 38 \cdot \left(\frac{276}{242.73 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \right) - 2.54 \cdot 5 \text{ cm} = 25.43 \text{ cm}$
- $s = 30.5 \cdot \left(\frac{276}{242.73 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \right) = 34.68 \text{ cm}$

Finalmente, de acuerdo con lo que el ACI 318-19 establece, se elige el menor valor entre estos dos resultados. Por lo tanto, el espaciamiento máximo entre las barras en tracción es de 25.43 cm, lo cual es mayor al valor presente en la viga (16.4 cm).

Según el Model Code (2010):

Mediante la Ecuación 3.10 explicada en el inciso 3.1.5 correspondiente al presente código, se calcula el valor del ancho de grietas.

$$w_d = 2 \cdot l_{s,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) \quad (3.10)$$

A diferencia que en casos anteriores en este código se presentan fórmulas distintas para el cálculo del módulo de elasticidad del concreto, el momento de agrietamiento, el centroide y la inercia agrietada. En este caso se debe de conocer el valor de la resistencia a compresión (f'_c) y a partir de dicho valor se obtiene el valor de la resistencia a compresión media (f_{cm}):

- $f'_c = 210 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 20.6 \text{ MPa}$

- $f_{cm} = f'_c + 8 = 28.6 \text{ MPa}$

Con dichos resultados se determina el valor del módulo de elasticidad del concreto (E_c) y la relación entre los módulos de elasticidad del acero y el concreto (n):

- $E_c = 21500 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = 21500 \cdot \left(\frac{28.59 \text{ MPa}}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.05 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
- $n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{1.96 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{3.05 \cdot 10^4 \text{ MPa}} = 6.43$

Para determinar el centroide de la sección no agrietada se considerará un factor de (n) como se explicó antes. De esta forma se determina el centroide (c) de 16.88 cm y un I_{cr} de $2.21 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. Luego, se procederá a calcular la longitud de la zona de discontinuidad entre el acero y el concreto a partir de la ecuación mostrada con antelación.

$$l_{s,max} = k \cdot c_c + \frac{1}{4} \cdot \frac{f_{ctm}}{\tau_{bms}} \cdot \frac{\phi_s}{\rho_{s,ef}} \quad (3.11)$$

Para ello, se calcula la resistencia a tracción del concreto (f_{ctm}), el esfuerzo de enlace entre el concreto y el acero (τ_{bms}) y la cuantía efectiva ($\rho_{s,ef}$). El valor de c_c se asume 50 mm de recubrimiento. Con ello, se reemplaza en la fórmula mostrada previamente y se obtiene el primer parámetro que constituye la fórmula para la determinación del W_d .

- $f_{ctm} = 0.3 \cdot f'_c^{\frac{2}{3}} = 0.3 \cdot \left(\frac{210}{10.2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.25 \text{ MPa}$
- $\tau_{bms} = 1.8 \cdot f_{ctm} = 1.8 \cdot 2.254 = 4.06 \text{ MPa}$

Para determinar la cuantía efectiva primero se debe de obtener el área efectiva de concreto en tensión ($A_{c,ef}$).

- $A_{c,ef} = (base) \cdot \min\left(2.5 \cdot c; \frac{h-x}{3}\right) = (300) \cdot \min\left(2.5 \cdot 70; \frac{600-168.78}{3}\right) = 43120 \text{ mm}^2$

En donde el valor de c es la distancia desde el extremo de la viga más tensionado hasta centroide de las barras a tracción en milímetros. Finalmente, se determina el valor de $\rho_{s,ef}$ y de $l_{s,max}$.

- $\rho_{s,ef} = \frac{A_s}{A_{c,ef}} = \frac{2012}{43120} = 0.0467$
- $l_{s,max} = 1 \cdot 50 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2.25}{4.06} \cdot \frac{35.8}{0.0467} = 156.57 \text{ mm}$

A continuación, se calcula el segundo parámetro, con el uso de la ecuación mostrada en el inciso anterior, que relaciona la deformación promedio del acero y del concreto en la zona de discontinuidad, y la deformación en el concreto ocasionada por la retracción.

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) = \frac{\sigma_s - \beta \cdot \sigma_{sr}}{E_s} - \eta_r \cdot \varepsilon_{sh} \quad (3.14)$$

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{M_{cr}}{M_a}\right) \quad (3.14(a))$$

Para la etapa de formación de grietas a corto plazo, se tienen los siguientes valores de momento actuante, esfuerzo en el acero y momento de agrietamiento:

- $M_a = \frac{(Carga \text{ Total}) \cdot (longitud)^2}{8} = \frac{39.59 \frac{KN}{m} \cdot (6.8 \text{ m})^2}{8} = 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m}$
- $\sigma_s = \frac{n \cdot M_{máx} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{6.43 \cdot 228.85 \text{ KN} \cdot \text{m} \cdot (53 \text{ cm} - 16.88 \text{ cm})}{2.21 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot 10^3 = 240.25 \text{ N/mm}^2$
- $M_{cr} = f_{ctm} \cdot \frac{(base) \cdot (peralte)^2}{6} = 2.25 \frac{N}{\text{mm}^2} \cdot \frac{300 \text{ mm} \cdot 600 \text{ mm}^2}{6} \cdot 10^{-6} = 40.56 \text{ KN} \cdot \text{m}$

Reemplazando dichos valores en la fórmula y despreciando el último término debido que se considerará un efecto a corto plazo, se obtiene el valor correspondiente a $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$. Por último, se reemplaza en la expresión inicial y se determina el ancho de grietas.

- $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{240.25 \text{ MPa}}{1.96 \cdot 10^5 \text{ MPa}} \cdot \left(1 - 0.6 \cdot \frac{40.56 \text{ KN} \cdot \text{m}}{228.85 \text{ KN} \cdot \text{m}}\right) = 0.001095$
- $W_d = 2 \cdot 156.57 \text{ mm} \cdot 0.001095 = 0.34 \text{ mm}$

Comparando el resultado obtenido, se observa que no cumple con los límites permisibles para ningún tipo de ambiente. Por ello, se cambia la disposición del acero en tracción a $4\phi 1''$ y se realiza nuevamente el cálculo. Para este nuevo arreglo se recalculó el centroide (c) y la inercia agrietada (I_{cr}), los cuales resultaron en un $c = 17.17$ cm y un $I_{cr} = 2.33 \cdot 10^5$ cm⁴. A continuación, se determinan los valores de f_{ctm} , τ_{bms} , $\rho_{c,ef}$ e $l_{s,max}$.

- $f_{ctm} = 0.3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 0.3 \cdot \left(\frac{210}{10.2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.25$ MPa
- $\tau_{bms} = 1.8 \cdot f_{ctm} = 1.8 \cdot 2.254 = 4.06$ MPa
- $\rho_{s,ef} = \frac{A_s}{A_{c,ef}} = \frac{2040}{42830} = 0.0476$
- $l_{s,max} = 1 \cdot 50 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2.25}{4.06} \cdot \frac{25.4}{0.0476} = 124.07$ mm

Por otro lado, se tienen determina nuevamente el valor de σ_s para el cálculo de la diferencia de deformaciones. Finalmente, con todos los cálculos realizados, se determina el ancho de grietas.

- $\sigma_s = \frac{n \cdot M_{\text{máx}} \cdot (d-x)}{I_{cr}} = \frac{6.43 \cdot 228.85 \text{ KN}\cdot\text{m} \cdot (54 \text{ cm} - 17.17 \text{ cm})}{2.33 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot 10^3 = 232.48$ MPa
- $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{230.72 \text{ MPa}}{1.96 \cdot 10^5 \text{ MPa}} \cdot \left(1 - 0.6 \cdot \frac{40.56 \text{ KN}\cdot\text{m}}{228.85 \text{ KN}\cdot\text{m}}\right) = 0.00106$
- $W_d = 2 \cdot 124.07 \text{ mm} \cdot 0.00106 = 0.26$ mm

Si se compara este nuevo valor con los límites admisibles, se observa que el valor del ancho de grietas cumple con las solicitaciones.

3.2 Deflexiones excesivas

En esta sección se estudiarán los distintos métodos que se han propuesto para poder estimar satisfactoriamente las deflexiones de los elementos horizontales y, además, que cumplan con los distintos límites establecidos por las normas para garantizar un buen

comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio. Para poder comprender el problema será necesario explicar el enfoque que se utiliza en el cálculo.

Comportamiento de vigas ante la aplicación de cargas de gravedad e inercia a utilizar

Como ya se mencionó en el capítulo 2, el concreto posee una baja capacidad para resistir tracción y esto genera grietas que afectan el comportamiento de los elementos. En la Figura 3.3, presentada a continuación, se aprecia cómo la formación de grietas afecta la tendencia lineal de la relación entre carga aplicada y deflexión en el centro de la luz.

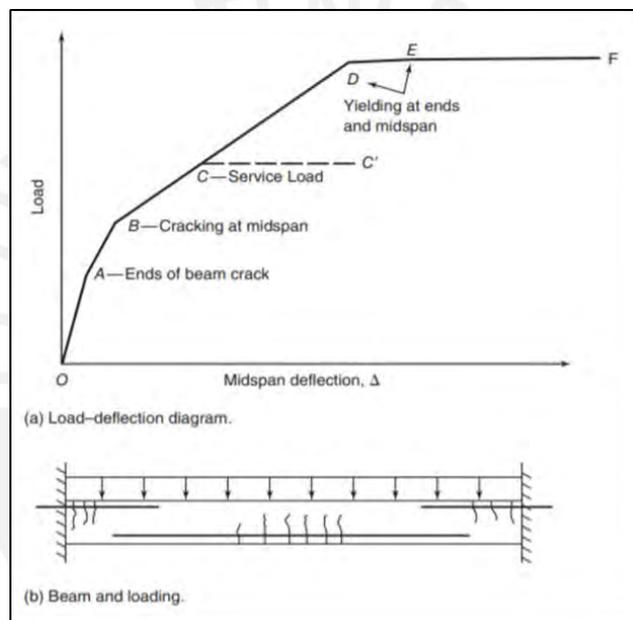


Figura 3-3. Gráfica de carga vs deflexión en el centro de la luz. Los puntos A y B representan la generación de grietas a los extremos y medio respectivamente. El punto C representa el punto de trabajo habitual de la sección (servicio)

Tomado de "Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed" por Wight (Boston), 2015

Siempre que la carga aumente se generan más grietas hasta que el elemento alcance su estado estable. Cuando se forman las primeras grietas en los extremos se ve como la tendencia cambia ligeramente y cuando se forman las grietas en el centro de la luz se puede apreciar un gran cambio en la pendiente. Wight (2015) explica que esto se debe a que la generación de grietas cambia el momento de inercia con el cual trabaja la sección. El momento de inercia se reduce, debido a que el concreto no aporta para resistir los esfuerzos a tracción y, por lo tanto,

se reduce la rigidez de la sección haciendo al elemento más propenso a sufrir deflexiones considerables (esto genera el cambio de pendiente). Asimismo, es importante considerar que el creep del concreto amplifica las deflexiones bajo cargas sostenidas el tiempo. Debido a la incertidumbre que existe sobre la inercia a utilizar para el cálculo, lo primordial para su estudio es la definición de una inercia efectiva que provea resultados satisfactorios (Nilson, 2001). Las distintas investigaciones y códigos tienen acercamientos distintos sobre qué inercia utilizar, pero la idea alrededor de su estudio es la misma. Finalmente, la inercia efectiva obtenida será utilizada en las ecuaciones presentadas anteriormente.

Comportamiento de losas unidireccionales y bidireccionales

La diferencia más resaltante, respecto al comportamiento de las vigas, es la forma de obtener la rigidez a flexión. En elementos tipo losa, la rigidez a flexión depende del módulo de elasticidad (E), el espesor de la losa (h) y el módulo de Poisson (ν) como se ve en la Ecuación 3.17.

$$D = \frac{E * h^3}{12 * (1 - \nu^2)} \quad (3.17)$$

Sin embargo, para el caso de losas unidireccionales, el comportamiento esperado es bastante similar al de una viga. Por ello, el análisis a realizar se puede limitar a una porción del paño que represente de manera apropiada el comportamiento de la losa. Además, la determinación de la inercia efectiva para el cálculo se obtendrá dependiendo del código o norma a utilizar. Para el caso de losas bidireccionales, su comportamiento es más complejo, ya que ofrece rigidez a la flexión en ambas direcciones. Por dicho motivo, habrá que analizar y diseñar la losa en los dos sentidos, es decir, que existe la posibilidad de obtener distintas inercias efectivas para ambos sentidos. Esto dificulta la determinación de las deflexiones, ya que el cálculo se hace tedioso y poco práctico. Ante esto, la mejor solución para el cálculo de deflexiones es el uso de elementos finitos.

Cálculo de deflexiones a largo plazo

Ya se mencionó con anterioridad que para largos periodos de tiempo se genera un incremento en las deflexiones a causa del creep y la retracción por secado del concreto. En la Figura 3.4 se puede apreciar el efecto que tiene el creep sobre la curvatura de la viga y por ende, en sus deflexiones. En la Figura 3.5, se muestra de manera similar el efecto que tiene el secado. Debido a la gran cantidad de variables que se presentan en su estudio, las normas utilizan coeficientes que amplifican el efecto a lo largo del tiempo.

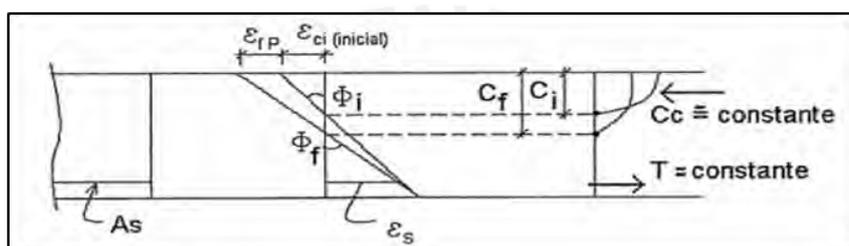


Figura 3-4. Efecto del creep en las deformaciones de la viga. Se ve como a pesar de que las cargas permanecen constantes se genera una deformación adicional
Tomado de "Apuntes del curso Concreto Armado 1.16ta ed. por Otazzi (Lima), 2016.

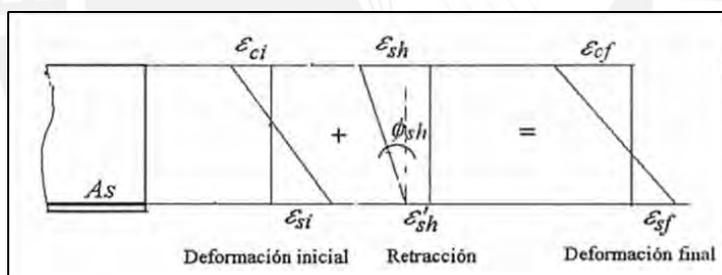


Figura 3-5 Efecto de la retracción del concreto en las deformaciones. Se ve como la retracción genera deformaciones que se superponen a las deformaciones a corto plazo.
Tomado de "Apuntes del curso Concreto Armado 1.16ta ed. por Otazzi (Lima), 2016.

3.2.1 Norma peruana E.060 (2019-9)

Como ya se explicó, el factor clave en el cálculo de las deflexiones en elementos de concreto armado es la determinación de la inercia efectiva que se utilizará. Debido a la elevada complejidad e incertidumbre que supondría la determinación de una fórmula, la asunción de la norma es utilizar la menor inercia posible, la cual corresponde a la inercia agrietada. La sección agrietada, según Ottazzi (2016), es la que se obtiene cuando la tracción por flexión supera la

resistencia a tracción del concreto y por simplicidad se asume que la sección está agrietada desde la parte más traccionada del elemento hasta el eje neutro. La sección se aprecia en la Figura 3.6 mostrada a continuación:

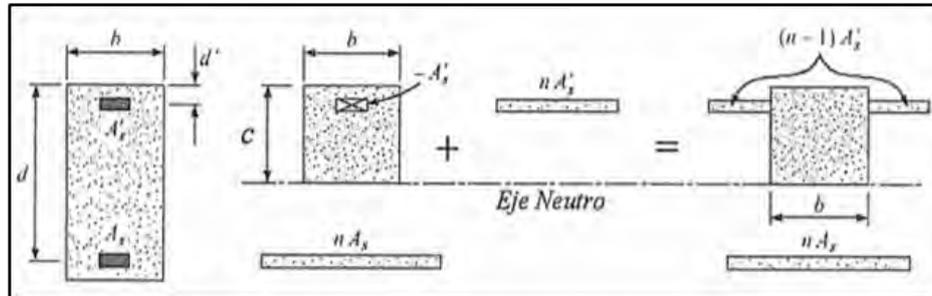


Figura 3-6. Sección transformada agrietada
Tomado de "Apuntes del curso Concreto Armado 1.16ta ed. por Otazzi (Lima), 2016.

Los criterios a tomar en cuenta para el uso de la inercia de la sección agrietada son los siguientes:

- I. Cuando se cumpla que el momento actuante sea menor que el momento que produce el agrietamiento, entonces la inercia efectiva será igual a la inercia bruta de la sección.
- II. Cuando se cumpla que el momento actuante sea mayor al momento de agrietamiento, entonces la inercia efectiva será igual a la inercia de la sección agrietada.

Según la norma, el momento de agrietamiento (M_{cr}) se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$M_{cr} = \frac{f_{cr} \cdot I_g}{Y_t} \quad (3.18)$$

En esta ecuación el valor de f_{cr} es la resistencia a tracción por flexión del concreto, la cual se calcula, para concretos convencionales, de la siguiente manera (unidades en el sistema MKS):

$$f_{cr} = 2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \quad (3.19)$$

El valor de λ para concretos de peso normal es 1 y para concretos livianos se especifica su valor en el acápite 8.6 de la norma. Dado que se está utilizando el valor de inercia producido

por la sección con menor rigidez, los valores estimados para las deflexiones serán conservadores a comparación con otras normas que utilizan inercias efectivas de transición entre la inercia bruta y la agrietada (Ottazzi, 2016). Además, la norma también especifica que la inercia efectiva que se utiliza en los cálculos es un promedio ponderado de las inercias en los extremos y al centro de la viga. A continuación, se presentarán los casos expuestos en la norma E.060 del 2019:

a) En elementos continuos en ambos extremos:

$$I_e \text{ promedio} = (I_{e1} + I_{e2} + 2 I_{e3}) / 4$$

Donde I_{e1} y I_{e2} son los momentos de inercia en las secciones extremas del tramo y I_{e3} es el momento de inercia de la sección central del tramo.

b) Si el tramo sólo es continuo en un extremo:

$$I_e \text{ promedio} = (I_{e2} + 2 I_{e3}) / 3$$

Donde I_{e2} es el momento de inercia en la sección en el extremo continuo y I_{e3} es el momento de inercia en la sección central del tramo.

c) Para elementos simplemente apoyados en ambos extremos, se usará el momento de inercia calculado para la sección central.

d) Para elementos en voladizo se usará el momento de inercia calculado para la sección en el apoyo del voladizo.

Las fórmulas para el cálculo ya fueron presentadas con anterioridad en el capítulo anterior de la presente tesis (Figura 2.12). Para la determinación de las deflexiones máximas se puede superponer los efectos de distintas fórmulas o se puede asumir como simplemente apoyado, lo cual sería una asunción conservadora pero que simplificaría los cálculos. Finalmente, para el cálculo de las deflexiones diferidas se utilizará la siguiente expresión:

$$\lambda_{\Delta} = \frac{\xi}{1 + \rho'} \quad (3.20)$$

Donde ξ es un factor dependiente del tiempo para las cargas sostenidas. Se obtiene de la siguiente gráfica en la Figura 3.7 y ρ' es la cuantía de acero en compresión.

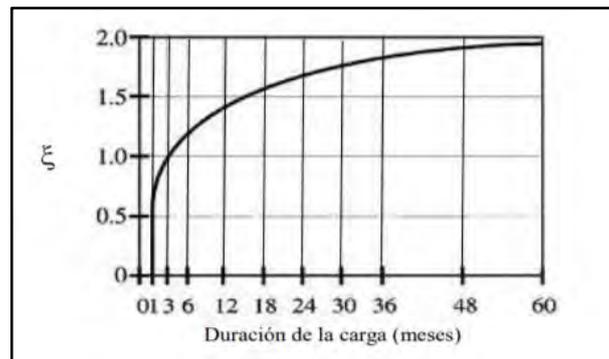


Figura 3-7. Factor dependiente del tiempo de las cargas sostenidas
Tomado de RNE (2019) NTE E.0.60 Concreto Armado

Es importante resaltar que, para el cálculo de cargas sostenidas, se debe utilizar únicamente la carga viva que será constante a lo largo de la vida útil de la estructura. Por último, es relevante determinar los límites permisibles para las deflexiones mostrados en la Figura 3- 8.

TABLA 9.2 DEFLEXIONES MÁXIMAS ADMISIBLES		
Tipo de elemento	Deflexión considerada	Límite de deflexión
Techos planos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	Deflexión inmediata debida a la carga viva	$l/180^*$
Pisos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	Deflexión inmediata debida a la carga viva	$l/360$
Pisos o techos que soporten o estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas permanentes, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional)†	$l/480‡$
Pisos o techos que soporten o estén ligados a elementos no estructurales no susceptibles de sufrir daños debido a deflexiones grandes.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas permanentes, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional)†	$l/240§$

* Este límite no tiene por objeto constituirse en un resguardo contra el estancamiento de aguas. Este último se debe verificar mediante cálculos de deflexiones adecuados, incluyendo las deflexiones debidas al agua estancada, y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas permanentes, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las medidas tomadas para el drenaje de las aguas.

† Las deflexiones a largo plazo se pueden reducir en la cantidad de deflexión calculada que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determina basándose en datos de ingeniería aceptables correspondiente a las características tiempo-deflexión de elementos similares a los que se están considerando.

‡ Este límite se puede exceder si se toman medidas adecuadas para prevenir daños en elementos apoyados o unidos.

Figura 3-8. Tabla 9.2 de la norma E.060 de concreto armado
Tomado de RNE (2019) NTE E.0.60 Concreto Armado

Adicionalmente, es importante acotar que la norma también especifica que la deflexión (instantánea y diferida) no debe de exceder el límite $L/250$. Esto se debe a que, las deflexiones que exceden dicho valor, como ya se explicó anteriormente, son visibles a simple vista y generan incomodidad a los ocupantes. En caso se exceda dicho valor, la norma propone especificar una contraflecha en el diseño para compensar las deflexiones por carga muerta.

3.2.2 ACI 318-19 (2019)

En esta última edición del ACI, se ha modificado el método para obtener la inercia efectiva de la sección. Los criterios por tomar en cuenta para utilizar la inercia efectiva son los siguientes:

- a) Cuando el momento máximo aplicado en la sección de análisis (M_a) es menor o igual a dos tercios del momento de agrietamiento (M_{cr}), la inercia efectiva de la sección será igual a la inercia bruta.
- b) Cuando el momento máximo aplicado en la sección de análisis es mayor a dos tercios del momento de agrietamiento, la inercia efectiva se calculará de la siguiente manera:

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right) \cdot M_{cr}}{M_a} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)} \quad (3.21)$$

Los componentes de la ecuación son los mismos que en la fórmula anterior. No obstante, esta nueva ecuación no aplica para concreto pre-esforzado, donde aún se debe aplicar la ecuación propuesta por Branson (1965). El ACI también especifica la inercia efectiva promedio que se debe utilizar. En el artículo 24.2.3.6 establece que para una viga continua o en una losa continua de una dirección, el valor de la inercia efectiva se calcula como un promedio de los valores de momento positivo y negativo obtenidos para las secciones críticas. Además, el artículo 24.2.3.7 especifica que para vigas y losas simplemente apoyadas se considerará

únicamente la inercia efectiva obtenida al medio de la luz y, por otro lado, para voladizos se utilizará la inercia efectiva en el extremo del volado. Sin embargo, el comité 435 del ACI propuso, en 1966, utilizar la siguiente consideración para la inercia efectiva promedio:

- a) Para vigas con dos extremos continuos, la inercia efectiva promedio será la siguiente:

$$I_e = 0.7 \cdot (I_{em}) + 0.15 \cdot (I_{e_1} + I_{e_2}) \quad (3.22)$$

En esta ecuación, I_{em} es la inercia efectiva al centro de la luz de la viga y los valores de I_{e1} e I_{e2} representan las inercias efectivas del extremo derecho e izquierdo de la viga.

- b) Para vigas con un solo extremo continuo, la inercia efectiva promedio será la siguiente:

$$I_e = 0.85 \cdot (I_{em}) + 0.15 \cdot (I_{e_{ext. continuo}}) \quad (3.23)$$

Finalmente, para la determinación de las deflexiones diferidas se utilizará la expresión mostrada en la Ecuación 3.24.

$$\lambda_{\Delta} = \frac{\xi}{1 + \rho'} \quad (3.24)$$

Donde ξ es un factor dependiente del tiempo para las cargas sostenidas. Se obtiene de la siguiente gráfica en la Figura 3.9 y ρ' es la cuantía de acero en compresión.

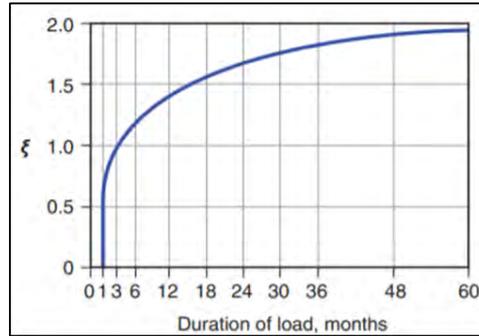


Figura 3-9 Factor dependiente del tiempo de las cargas sostenidas

Tomado de ACI 318 (2019) Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary

Por último, se debe de establecer los valores límites bajo los cuales se considera que la estructura no tiene un comportamiento satisfactorio bajo cargas habituales. En la tabla 24.2.2 del ACI 318, mostrado en la Tabla 3-4, se presentan dichos valores límites.

Tabla 3-4 Deflexiones máximas permisibles permitidas por el ACI 318-19

Elementos	Condición		Deflexión a considerar	Límite de deflexión
Techos planos	No soporta ni está adherido a elementos no estructurales que pueden dañarse por grandes deflexiones. Deflexión inmediata debido a L		Deflexión inmediata debido a un máximo de L_r, S y R	$l/180^{(1)}$
Pisos			$l/360$	
Techo o pisos	Apoyo o unido a elementos no estructurales.	Probable a ser dañado por grandes deflexiones	La parte de la deflexión total que ocurre después de la fijación de elementos no estructurales, que es la suma de la deflexión dependiente del tiempo debido a todas las cargas sostenidas y la deflexión inmediata debido a cualquier carga <i>viva</i> ⁽²⁾	$l/480^{(3)}$
		No es probable que se dañe por grandes deflexiones		$l/240^{(4)}$

Tomado de ACI 318 (2019) Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary

3.2.3 Model Code (2010)

El presente código propone dos metodologías para el cálculo de deflexiones. El primer enfoque es obtener las deflexiones mediante una interpolación entre las deformaciones que se obtendrían para las secciones agrietadas y no agrietadas, lo cual se muestra a continuación:

$$a = \zeta \cdot a_{II} + (1 - \zeta) \cdot a_I \quad (3.25)$$

Donde a es el parámetro de deformación calculado, el cual podría ser una curvatura, una deformación o un giro. Para efectos del presente trabajo se utilizarán deflexiones. Asimismo, a_I y a_{II} son las deformaciones calculadas para las condiciones de sección no agrietada y sección agrietada respectivamente y ζ es el coeficiente de interpolación. Este último se calcula como:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (3.26)$$

Donde β es el coeficiente que toma en cuenta la influencia del tiempo de aplicación de la carga y la posible repetición constante de la aplicación de cierta carga. Para cargas aplicadas a corto plazo, $\beta=1$ y para cargas sostenidas en el tiempo o múltiples ciclos de repetición de carga, $\beta=0.5$. Por otro lado, σ_s es el esfuerzo de tensión en el acero de refuerzo calculado para la sección agrietada y σ_{sr} es el esfuerzo producido bajo las condiciones de carga que producen el agrietamiento en la fibra más tensionada del concreto.

Los esfuerzos σ_{sr} y σ_s se calculan para la sección más desfavorable del elemento analizado, la cual es, usualmente, la sección con el mayor momento flector aplicado. Para elementos sometidos a flexión, que son los que se están estudiando, el cociente σ_{sr}/σ_s puede ser reemplazado por M_{cr}/M , donde M_{cr} es el momento de agrietamiento de la sección. Además de la sección anteriormente mencionada, también es posible calcular un EI equivalente o efectivo, a partir de la Ecuación 3.27, que permita obtener resultados similares.

$$(EI)_{eff} = \frac{(EI_I) \cdot (EI_{II})}{\zeta \cdot (EI_I) + (1 - \zeta) \cdot (EI_{II})} \quad (3.27)$$

El cálculo de EII se hace mediante la inercia bruta de la sección. Para el caso de la sección agrietada, se puede obtener utilizando fórmulas de sección transformada. Por otro lado, para el

cálculo de deflexiones en el largo plazo, el código propone trabajar por separado las deflexiones diferidas producidas por el creep y por la retracción por secado. En la ecuación que se muestra a continuación, se modifica el módulo de elasticidad del concreto en función del creep.

$$E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} \quad (3.28)$$

Donde φ representa el coeficiente del creep que corresponde a una determinada carga y un tiempo de aplicación determinado. Si se desea realizar un análisis profundo al respecto, el código propone distintas ecuaciones que permiten obtener un valor de φ bastante certero. Sin embargo, si no se cuenta con la información suficiente para realizar dicho estudio se puede utilizar la Tabla 5.1-11 del Model Code 2010, mostrada en la Tabla 3.5, para obtener dicho valor.

Tabla 3-5. Tabla 5.1-11 del Model Code 2010 de la que se puede extraer el valor del coeficiente del creep para una edad de 70 años

Edad del concreto a la que se aplicó carga (días)	Condiciones atmosféricas secas (Humedad Relativa = 50%)			Condiciones atmosféricas húmedas (Humedad relativa = 80%)		
	$2A_c/u$ (mm)					
	50	150	600	50	150	600
1	5.8	4.8	3.9	3.8	3.4	3.0
7	4.1	3.3	2.7	2.7	2.4	2.1
28	3.1	2.6	2.1	2.0	1.8	1.6
90	2.5	2.1	1.7	1.6	1.5	1.3
365	1.9	1.6	1.3	1.2	1.1	1.0

Nota. Tomado de "Design of reinforced concrete" por FIB International, 2012

La expresión $(2A_c/u)$ presente en la tabla es una variable que relaciona el área de la sección transversal del elemento (A_c) y el perímetro del elemento en contacto con la atmósfera (u). Con ambos se podrá estimar, para un periodo de carga de 70 años y las condiciones de humedad presentadas, el coeficiente del creep para las respectivas edades en que se empezó a cargar el elemento. Con el valor efectivo del módulo de elasticidad del concreto se realiza el mismo procedimiento anteriormente mencionado y se obtiene un valor de deflexión diferida mediante una interpolación de los casos de sección agrietada y no agrietada. Además, se debe

de considerar de manera independiente el efecto de la retracción del concreto. La ecuación presentada a continuación está relacionada con dicha condición:

$$\frac{1}{r_{cs}} = \epsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S}{I} \quad (3.29)$$

Donde $1/r_{cs}$ es la curvatura producida por la retracción por secado del elemento, ϵ_{cs} es la deformación producida por la retracción libre. Se calcula mediante las especificaciones del artículo 5.1.10.7.2 del código. Además, α_e es la relación entre el módulo de elasticidad del acero y el módulo de elasticidad efectivo del concreto, S es el primer momento de área del refuerzo de acero respecto del centroide de la sección, I es el segundo momento de inercia de área de la sección. El valor de ϵ_{cs} consta de cálculos muy complejos que se pueden simplificar si se utiliza la Tabla 5.1-14 del Model Code 2010, para concretos de resistencia normal, presentada en la Tabla 3.6.

Tabla 3-6. Tabla 5.1-14 del Model Code 2010 de la que se puede extraer el valor de $\epsilon_{cs} \cdot 10^3$

Condiciones atmosféricas secas (RH = 50%, interior)			Condiciones atmosféricas húmedas (RH = 80%, exteriores)		
Tamaño teórico $2A_c/u$ (mm)					
50	150	600	50	150	600
-0.57	-0.56	-0.47	-0.32	-0.31	-0.26

Los valores de I y S deben de ser calculados para la sección agrietada y no agrietada; luego se aplica la relación que interpola los resultados de ambos para obtener el efecto de la retracción. Además, el código no establece límites para las deflexiones máximas permisibles, sin embargo, sugiere que las deflexiones máximas para carga sostenida no excedan en $L/250$. Por otro lado, para deflexiones de elementos, como tabiquería, se sugiere no exceder la relación $L/500$.

3.2.4 Modelación mediante elementos finitos para losas bidireccionales

Como ya se ha mencionado en el acápite anterior, una opción para la determinación de las deflexiones en losas bidireccionales son los programas computacionales que permitan introducir los valores de inercia efectiva, obtenidos según el código que se esté utilizando, en cada sentido del análisis para que los resultados obtenidos sean razonables. En la presente tesis se utilizará el programa ETABS 2018 para una demostración de cómo aplicar correctamente este método.

3.2.5 Ejemplos aplicativos

Ejemplo 3.2. Se desarrolló un modelo estructural simple para calcular las deflexiones. Para el desarrollo del ejemplo se tiene el siguiente edificio de pórticos de 3 pisos con paños de 7x8 metros (distancias entre ejes). Las losas son aligeradas de 25 cm, las vigas son de secciones de 30x60 cm y las columnas son de 40x40 cm. En el programa ETABS se definió el concreto a utilizar ($f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$), y sus propiedades mecánicas. Para obtener los resultados se definieron los elementos estructurales y se modeló la estructura en el programa.

Asimismo, considerando una sobrecarga de 300 kg/m^2 , se realizó el modelado de la estructura y se obtuvo los resultados del análisis estructural para el diseño de la sección. Para el ejemplo, se utilizará la viga del segundo piso del pórtico del eje 3. Con el propósito de emplear las combinaciones establecidas por la norma, se extraen los valores de momentos y se realiza el diseño por resistencia. Se considera 2 barras corridas de 1" de acero superior e inferior, el acero máximo en la sección es de 32.27 cm^2 . Se obtuvieron los siguientes resultados de acero requerido:

$$Mu^- = 48436 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad As^- = 31.54 \text{ cm}^2$$

$$Mu^+ = 24159 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad As^+ = 13.08 \text{ cm}^2$$

El arreglo de acero superior será de 2 ϕ 1” (barras corridas) y 1 ϕ 1” y 5 ϕ 3/4” (bastones) para la zona de momento negativo. Por otro lado, el arreglo de acero inferior será de 2 ϕ 1” (barras corridas) y 1 ϕ 1” (bastón) para la zona de momento positivo. Los momentos bajo carga muerta y viva obtenidos con la modelación son los siguientes:

Tabla 3-7 Momentos resultantes bajo carga muerta y viva obtenidos a partir del modelamiento.

	Momento Izquierda (kg-m)	Momento Positivo (kg-m)	Momento Derecha (kg-m)
Carga muerta	22284	11160	22284
Carga viva al 100%	10141	5021	10141
Carga viva al 30%	3042	1506	3042

Según la Norma E.060 (2019):

Se inicia calculando el módulo de rotura (f_r), el módulo de elasticidad (E_c) del concreto y la relación entre el módulo del concreto y el acero (n):

- $f_r = 2 \cdot \sqrt{210} = 29 \text{ kg/cm}^2$
- $E_c = 15000 \cdot \sqrt{210} = 2.17 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$
- $n = \frac{E_s}{E_c} = 9.2$

Luego, se calcula el momento de agrietamiento de la sección el cual se aproxima utilizando la inercia bruta de la sección y el módulo de rotura:

$$\bullet \quad M_{cr} = \frac{2 \cdot I_g \cdot f_r}{h} = \frac{2 \cdot 540000 \text{ cm}^4 \cdot 28.98 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{60 \text{ cm}} \cdot 10^{-2} = 5217 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

A continuación, se debe calcular la inercia agrietada en los extremos y en la zona central de la viga. En los extremos de la viga se tiene un peralte efectivo de 52 cm y una distancia al centro de las barras en compresión de 6 cm. Realizando los cálculos, considerando una relación de módulos de $(2n-1)$ para el acero en compresión, se obtuvo valores de c igual a 20.19 cm y una inercia agrietada igual a $3.93 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$.

- $b \cdot \frac{c^2}{2} + (2n - 1) \cdot A's \cdot (c - d') = n \cdot As \cdot (d - c) \rightarrow c = 20.19 \text{ cm}$
- $I_{cr} = b \cdot \frac{c^3}{3} + (2n - 1) \cdot A's \cdot (c - d')^2 + n \cdot As \cdot (d - c)^2 = 3.93 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$

De igual manera se calcula el centroide y la inercia agrietada de la sección central, la cual tiene un peralte efectivo de 54 cm y una distancia al centro de las barras en compresión de 6 cm. Se obtuvo valores de centroide (c) igual a 15.67 cm y una inercia agrietada (Icr) igual a $2.62 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. Para realizar el cálculo de las deflexiones se trabajará con el valor de Icr debido a que el momento actuante excede el valor del momento de agrietamiento. El valor de la inercia efectiva será el que indica la norma para el caso de vigas continuas:

- $I_{ef} = \frac{I_{cr_i^-} + I_{cr_d^-} + 2 \cdot I_{cr^+}}{4} = 3.27 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$

Para el cálculo de las deflexiones en el centro de la viga se utilizará la siguiente fórmula y se calculará la deflexión bajo carga muerta y viva a manera de ejemplo:

- $def = \frac{5 \cdot L^2}{48 \cdot Ec \cdot I_{ef}} \cdot (M^+ - 0.1 \cdot (M_i + M_d))$
- $def = \frac{5 \cdot (7600 \text{ cm})^2}{48 \cdot 2.17 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 3.27 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} \cdot (16181 \text{ kg} \cdot \text{m} - 0.1 \cdot (32425 + 32425) \text{ kg} \cdot \text{m}) = 0.0081 \text{ m}$

Para las deflexiones a largo plazo se debe calcular el valor del factor λ , el cual se calculará para un tiempo de 5 años a más. El valor de la cuantía a compresión es de 0.0063.

- $\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} = \frac{2}{1 + 50 \cdot 0.0063} = 1.52$

Haciendo uso de las fórmulas se tienen los siguientes valores de deflexiones inmediatas:

Tabla 3-8 Valores de deflexión inmediata.

Deflexión inmediata CM (cm)	0.57
Deflexión inmediata CV 100% (cm)	0.25
Deflexión inmediata CV 30% (cm)	0.08

En el largo plazo los valores son los siguientes:

Tabla 3-9 Valores de deflexión diferida

Deflexión diferida CM (cm)	0.86
Deflexión diferida CV 30% (cm)	0.12
Deflexión diferida total (cm)	1.23

El valor de la deflexión a largo plazo para evitar problemas en elementos no estructurales debajo de las vigas sería de $L/480$ (1.58 cm). En este ejemplo se obtuvo una deflexión de 1.23 cm, el cual se obtiene sumando los valores de deflexión diferida por carga muerta, deflexión inmediata por el 100% de la carga viva y la deflexión diferida por el 30% de la carga viva.

Según el ACI 318-19 (2019):

Se debe calcular el módulo de rotura, módulo de elasticidad, la relación de módulos y la inercia bruta de la sección. Los valores para estos serán los mismos que los utilizados en el código anterior, por lo que, los valores de M_{cr} e I_{cr} en las secciones de los extremos y en la sección central son los siguientes:

Tabla 3-10 Valores de momento de agrietamiento, inercias agrietadas y momentos actuantes.

M_{cr} (kg·m)	5217
I_{cr}^- (cm ⁴)	$3.93 \cdot 10^5$
I_{cr}^+ (cm ⁴)	$2.62 \cdot 10^5$
M_a^- CM + CV (kg·m)	32425
M_a^+ CM + CV (kg·m)	16181

Es importante recalcar que el procedimiento planteado se realiza para cada caso de carga, es decir que se debe de obtener una inercia efectiva cuando se encuentra actuando únicamente la carga muerta. Luego, obtener una inercia efectiva cuando actúa el 100% de la carga viva y se obtiene la carga viva restando los resultados obtenidos, se realiza de la misma manera para la inercia con el 30% de carga viva. Sin embargo, se puede simplificar los cálculos utilizando la inercia efectiva para el 100% de carga viva, ya que es conservador y los resultados son bastantes similares a los resultados obtenidos utilizando la inercia efectiva para cada caso.

Para decidir el valor de inercia a utilizar se deben comparar los valores de momento actuante (M_a) con los dos tercios del momento de agrietamiento ($2/3M_{cr}$). En ambos casos se supera dicho valor por lo que las inercias en cada zona de la viga se calcularán de la siguiente manera:

- $$I_{e^{-}} = \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{M_{cr}}{M_a}} \cdot \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right)} = \frac{3.93 \cdot 10^5}{1 - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5217}{32425}} \cdot \left(1 - \frac{3.93 \cdot 10^5}{5.4 \cdot 10^5}\right)} = 3.94 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$
- $$I_{e^{+}} = \frac{2.62 \cdot 10^5}{1 - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5216.90}{16181}} \cdot \left(1 - \frac{2.62 \cdot 10^5}{5.4 \cdot 10^5}\right)} = 2.68 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

El código del ACI 318-19 establece que la inercia efectiva a utilizar se calculará de la siguiente forma:

- $$I_{e_{prom}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{3.94 \cdot 10^5 + 3.94 \cdot 10^5}{2} \right) + 2.68 \cdot 10^5 \right) = 3.31 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Como se mencionó anteriormente, el comité 435 del ACI sugiere utilizar otra ecuación para determinar la inercia promedio para vigas con ambos extremos continuos:

- $$I_{e_{prom}} = 0.7 \cdot 2.68 \cdot 10^5 + 0.15 \cdot (3.94 \cdot 10^5 + 3.94 \cdot 10^5) = 3.06 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

El cálculo de las deflexiones se realizará de la misma forma que se obtuvo para el criterio anterior y los valores de momentos a utilizar serán los mismos. A continuación, se mostrará en la Tabla 3-11 una comparación de ambos resultados utilizando la fórmula antes mencionada:

Tabla 3-11. Comparación entre los resultados de la Norma ACI 318-19 y el ACI 435

	Norma ACI 318-19	Recomendación ACI 435
Λ	1.52	1.52
Cuantía en comp	0.0063	0.0063
I_{ef} promedio (cm^4)	$3.31 \cdot 10^5$	$3.06 \cdot 10^5$
Def carga muerta inst. (cm)	0.56	0.61
Def carga viva inst. (cm)	0.25	0.27
Def carga viva 30% inst. (cm)	0.08	0.08
Def diferida muerta (cm)	0.85	0.92

	Norma ACI 318-19	Recomendación ACI
Def diferida viva 30% (cm)	0.11	0.12
Deflexión a largo plazo (cm)	1.22	1.32

Según el Model Code (2010):

A diferencia de los códigos anteriores, en este código se presentan fórmulas distintas para el cálculo del módulo de elasticidad del concreto, el momento de agrietamiento, el centroide y la inercia agrietada. En este caso se debe de conocer el valor de la resistencia a compresión ($f'c$) y a partir de dicho valor se obtiene el valor de la resistencia a compresión media (fcm) y la resistencia a tracción del concreto ($fctm$):

- $f'c = 210 \frac{kg}{cm^2} = 20.6 MPa$
- $fcm = f'c + 8 = 28.6 MPa$
- $fctm = 0.3 \cdot (f'c)^{\frac{2}{3}} = 0.3 \cdot (20.59)^{\frac{2}{3}} = 2.25 MPa$

Con dichos resultados se determina el valor del módulo de elasticidad del concreto (Ec), el momento de agrietamiento de la sección (Mcr) y la relación entre los módulos de elasticidad del acero y el concreto (n):

- $Ec = 21500 \cdot \left(\frac{fcm}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = 21500 \cdot \left(\frac{28.59}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.05 \cdot 10^4 MPa$
- $Mcr = \frac{fctm \cdot b \cdot h^2}{6} = \frac{2.25 \cdot 300 \cdot 600^2}{6 \cdot 10^6} = 40.6 KN \cdot m$
- $n = \frac{Es}{Ec} = 6.43$

Se determina el centroide y la inercia de la sección no agrietada, para dicho cálculo se consideró el efecto del acero en tracción y compresión, de lo cual se obtuvo un $c = 30.34$ cm y un $II = 6.19 \cdot 10^5$ cm⁴. Luego, se determina el centroide y la inercia de la sección agrietada para lo cual se considera una relación de (n) para el acero a compresión. Con dichas consideraciones se obtuvo un c igual a 14.79 cm y un III igual a $1.89 \cdot 10^5$ cm⁴. En este código se realiza una

interpolación entre los valores de inercia no agrietada y agrietada de la sección crítica a deformarse. Para ello se calcula el factor de interpolación ζ usando el momento de agrietamiento y el momento positivo actuante:

$$\bullet \quad \zeta = 1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2 = 1 - 0.5 \cdot \left(\frac{40.56}{158.74}\right)^2 = 0.97$$

Si se desea realizar un procedimiento completo, se debería determinar un factor ζ para la carga muerta y determinar su deflexión. Luego, utilizar un nuevo factor ζ para cargas en servicio con el 100% de la carga viva y restarlo con el valor original. De igual forma para hallar la deflexión para cargas permanentes en el tiempo (30% de la carga viva). Sin embargo, los resultados son considerablemente similares si se utiliza únicamente el valor obtenido para carga viva al 100%. Se utiliza la fórmula para el cálculo de deflexiones para el caso de vigas continuas:

$$\bullet \quad def = \frac{5 \cdot L^2}{48 \cdot E_c \cdot I_{ef}} \cdot (M^+ - 0.1 \cdot (M_i + M_d))$$

Se calcula la deflexión para la inercia no agrietada y la agrietada:

Tabla 3-12 Deflexión para la inercia no agrietada y agrietada

	Estado no agrietado (a_I)	Estado agrietado (a_{II})
Def. carga muerta (cm)	0.209	0.688
Def. carga viva (cm)	0.093	0.307
Def. carga viva 30% (cm)	0.028	0.092
Def. instantánea total (cm)	0.303	0.995
Def. instantánea cuasi (m)	0.237	0.780

El valor de la deflexión instantánea total y la ejercida por las cargas cuasipermanentes será un valor interpolado entre ambos valores de la siguiente manera:

- $Def = \zeta \cdot a_{II} + (1 - \zeta) \cdot a_I$
- $Def \text{ Inst Total} = 0.97 \cdot 0.995 + (1 - 0.97) \cdot 0.303 = 0.972 \text{ cm}$
- $Def \text{ Inst Cuasipermanente} = 0.97 \cdot 0.780 + (1 - 0.97) \cdot 0.237 = 0.762 \text{ cm}$

A continuación, se determinarán las deflexiones a largo plazo generadas por el creep y la retracción del concreto. Se obtiene el coeficiente de creep de la Tabla 3.5, interpolando para el valor de tamaño teórico (h_0) que se ve en dicha tabla:

- $$h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 600}{2 \cdot (600 - 250) + 300} = 360 \text{ mm}$$

Interpolando entre los valores de la tabla se obtiene un coeficiente ϕ de 2.26 con el cual se determina el módulo de elasticidad efectivo.

- $$E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \phi} = \frac{3.05 \cdot 10^4}{1 + 2.26} = 9.36 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

- $$n = \frac{E_s}{E_{c,ef}} = 20.95$$

Se calcula nuevamente el centroide y la inercia para los casos de sección agrietado y no agrietado usando la nueva relación de módulos. Para el caso no agrietado se obtuvo un c igual a 31.06 cm y una inercia de $8.30 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. Para el caso agrietado se obtuvo un c igual a 21.64 cm y una inercia de $4.89 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. En este caso se calculó la deflexión diferida para el caso de carga cuasipermanente (30% de carga viva) con las nuevas inercias:

Tabla 3-13. Deflexión diferida para el efecto de la carga cuasipermanente y el efecto del creep para el estado agrietado y no agrietado

	Estado no agrietado	Estado agrietado
Def. inst. Cuasiperm. + Creep (cm)	0.577	0.980

Interpolando con el factor $\zeta=0.97$ se obtiene una deflexión final de 0.97 cm, este valor se debe sustraer con el valor obtenido por la deflexión instantánea, de las cargas cuasipermanentes, sin considerar efectos del creep. Finalmente, se debe considerar los efectos de la retracción del concreto. Para ello, se debe de calcular la curvatura generada por la retracción, la cual se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{r_{cs}} = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S}{I}$$

Se debe calcular la inercia agrietada y no agrietada (cuyos datos ya se obtuvieron) y se debe obtener el primer momento de área de las barras de acero respecto del centroide en cada caso:

- $S = As' \cdot (c - d') + As \cdot (d - c)$
- $S_I = 10.2 \text{ cm}^2 \cdot (31.06 \text{ cm} - 6 \text{ cm}) + 15.3 \text{ cm}^3 \cdot (54 \text{ cm} - 31.06 \text{ cm}) = 606.6 \text{ cm}^3$
- $S_I = 10.2 \text{ cm}^2 \cdot (21.64 \text{ cm} - 6 \text{ cm}) + 15.3 \text{ cm}^3 \cdot (54 \text{ cm} - 21.64 \text{ cm}) = 654.5 \text{ cm}^3$

Se obtuvo un valor de S igual a 606.6 cm^3 para el caso no agrietado y un valor de S de 654.5 cm^3 para el caso agrietado. Además, el valor de ε_{cs} obtenido de la interpolación de la Tabla 3.6 fue de 0.00029 y se prosigue a calcular los valores de curvatura agrietada y no agrietada.

- $\left(\frac{1}{r_{cs}}\right)_I = 0.00029 \cdot 20.95 \cdot \frac{606.6 \text{ cm}^3}{8.30 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} = 4.44 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}$
- $\left(\frac{1}{r_{cs}}\right)_I = 0.00029 \cdot 20.95 \cdot \frac{654.5 \text{ cm}^3}{4.89 \cdot 10^5 \text{ cm}^4} = 8.17 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}$

Las deflexiones para cada caso se obtendrán a partir de las curvaturas calculadas. Para ello, se calculará como $Def = K \cdot L^2 \cdot \left(\frac{1}{r_s}\right)$. Donde K es un factor que se obtiene dependiendo de las condiciones de apoyo y el diagrama de momento flector de la viga. La siguiente tabla presentada en la guía How to design concrete structures using Eurocode 2, explica la forma de calcular el valor de K para distintos casos:

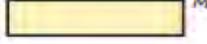
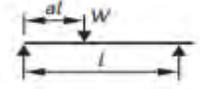
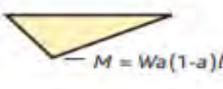
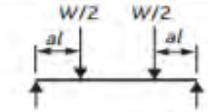
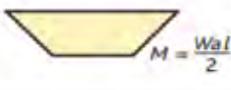
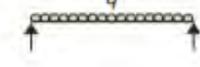
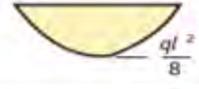
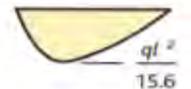
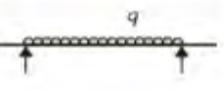
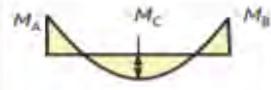
Loading	Bending moment diagram	K
		0.125
		$\frac{3-4a^2}{48(1-a)}$ If $a = \frac{1}{2}$, $K = \frac{1}{12}$
		0.0625
		$0.125 - \frac{a^2}{6}$
		0.104
		0.102
		$K = 0.104 \left(1 - \frac{\beta}{10}\right)$ $\beta = \frac{M_A + M_B}{M_C}$

Figura 3-10. Valores de K para distintos diagramas de momentos
Tomado de Concrete Society (2006)

Para el caso presentado en el ejemplo, se calculan, a partir de la tabla, los siguientes parámetros:

- $K = 0.104 \cdot \left(1 - \frac{\beta}{10}\right)$
- $\beta = \left(\frac{M_{iz} + M_{de}}{M_{cent}}\right) = \frac{25186 + 25186}{12571} = 4.01$
- $K = 0.104 \cdot \left(1 - \frac{4.01}{10}\right) = 0.0623$

Tabla 3-14. Curvatura y deformación para el estado agrietado y no agrietado

	Estado no agrietado	Estado agrietado
Curvatura (1/cm)	$4.44 \cdot 10^{-6}$	$8.17 \cdot 10^{-6}$
Deformación (cm)	0.160	0.294

Se obtuvo un valor de deformación por retracción de 0.290 cm. Agregando este resultado a la deflexión diferida por creep (0.97 cm) se obtiene una deflexión diferida total de 1.26 cm bajo cargas cuasipermanentes. A continuación, se presentan los resultados parciales para cada caso obtenidos utilizando el factor de interpolación 0.97.

Tabla 3-15. Resultados parciales de la deflexión instantánea y diferida para cada caso y deflexión diferida total.

Deflexión instantánea (CM) (cm)	0.67
Deflexión instantánea (100% CV) (cm)	0.30
Deflexión instantánea (30% CV) (cm)	0.09
Deflexión instantánea (CM+30% CV) (cm)	0.76
Deflexión diferida (CM+30% CV) (cm)	1.26
Deflexión diferida total (cm)	1.56

Para poder comparar los resultados finales obtenidos utilizando este código, se sumaron los mismos valores que se utilizan en la determinación de la deflexión total para la Norma E.060 y el ACI 318-19. El Model Code solo considera los resultados obtenidos para cargas cuasipermanentes, por lo que, su resultado final sería 1.26 cm. Sin embargo, este no es comparable, ya que se deja de lado una parte importante. Ya que se obtuvo un valor de 1.56 cm de deflexión final se puede decir que cumple con el requisito de la Norma E.060 y el ACI 318-19 (1.58 cm). Sin embargo, este valor es muy cercano al límite y se debería de considerar una contraflecha.

Ejemplo 3.3. El siguiente ejemplo aplicativo tiene como fin la obtención de deflexiones en losas bidireccionales a partir del uso de programas computacionales. Se modelará un paño de losa de 7x8 m, con los bordes simplemente apoyados. El espesor de losa asumido será de 20 cm, el concreto a usar tendrá una resistencia a la compresión igual a 210 kg/cm² y sus propiedades mecánicas se definirán de la misma forma que en el ejemplo 3.2. Se realizará una discretización de 0.5x0.5 m para un mejor análisis. Para el siguiente ejemplo se utilizarán las fórmulas provistas por la Norma peruana E.060 (2019). Asimismo, considerando una

sobrecarga de 300 kg/m², se modeló la losa y se generaron los casos y combinaciones de carga para obtener los resultados del análisis estructural y diseñar el paño de losa. Los momentos últimos obtenidos para el diseño fueron los siguientes:

Tabla 3-16 Momentos últimos en la dirección 1-1 y 2-2

Momento último	(ton·m/ml)
Momento 1-1	4.15
Momento 2-2	3.38

Con estos resultados se determinó en cada sentido, a través del diseño por resistencia, la cantidad de acero requerida por momento flector.

Tabla 3-17 Acero requerido en la dirección 1-1 y 2-2

Acero requerido	(cm ² /ml)
Momento 1-1	6.78
Momento 2-2	5.57

Se utilizará una barra de ½” cada 20 cm en ambas direcciones. Para el eje X se tiene un déficit de 5% y para el eje Y se tiene un exceso de 15% de acero. Con este arreglo de acero se determina el momento de agrietamiento ($M_{cr}=1.93$ ton·m/ml) de una sección de un metro de ancho de la losa, el cual, se calcula mediante la Ecuación 3.27. Luego, asumiendo una cuantía mínima de acero negativo (0.18%), se utilizará una barra de 3/8” cada 20 cm en ambas direcciones (déficit de 1.5%). Con dicha cantidad de acero total se obtiene un valor de centroide igual a 3.94 cm y un valor de la inercia agrietada (I_{cr}) igual a $1.22 \cdot 10^4$ cm⁴ para la sección de losa de 1 metro de ancho. Según la Norma peruana E.060, para el caso de apoyos simples (como es el caso de los bordes de la losa), el valor de la inercia efectiva a utilizar será igual a la inercia efectiva de la sección central. Para ello, se debe analizar si el momento actuante en ambos sentidos (cargas de servicio) es superior al momento de agrietamiento y con ello determinar qué inercia utilizar. Del modelo se obtuvieron los siguientes momentos máximos bajo cargas de servicio.

Tabla 3-18 Momento en servicio en la dirección 1-1 y 2-2.

Momento en servicio	(ton·m/ml)
Momento 1-1	2.79
Momento 2-2	2.27

Con estos resultados se puede ver que el momento actuante es superior al momento de agrietamiento, por lo que la inercia efectiva a utilizar, será la inercia agrietada. Para introducir esta inercia en el modelo se multiplicará la rigidez a la flexión por un factor igual a la relación entre la inercia agrietada y bruta. El factor será el mismo en cada sentido ya que las condiciones de borde son iguales y en ambos casos el momento actuante es superior al momento de agrietamiento.

- $\frac{I_{cr}}{I_g} = \frac{1.22 \cdot 10^4 \text{ cm}^4}{6.67 \cdot 10^4 \text{ cm}^4} = 0.18$

Con el factor de rigidez ingresado se pueden obtener resultados bastante aceptables para el cálculo de las deflexiones. En este caso se comparará la deflexión con los límites permitidos por la norma. Como se tiene una cuantía en compresión de 0.0018, se deberá calcular el factor λ .

- $\lambda = \frac{2}{1+50 \cdot 0.0018} = 1.83$

Tabla 3-19. Deflexión inmediata y diferida para cada uno de los casos.

Deflexión inmediata CM (cm)	1.18
Deflexión inmediata CV 100% (cm)	0.49
Deflexión inmediata CV 30% (cm)	0.15
Deflexión diferida CM (cm)	2.16
Deflexión diferida CV 30% (cm)	0.27
Deflexión diferida total (cm)	2.92

El valor permisible de la norma para el caso máximo, considerando daño en los elementos no estructurales, es de 1.40 cm (L/480), por lo tanto, se concluye que la losa no cumple con los requisitos de deflexión de la norma. Se podría reconsiderar el rediseño de la losa dotándola de

un mayor espesor, sin embargo, si esto no cumple con algunos requisitos arquitectónicos, una contraflecha de 2 cm (usando puntales en las partes centrales) podría ser una solución viable.

Los factores que más influyen en este resultado puede ser la asunción que la inercia agrietada se da a lo largo de toda la dimensión del paño, lo cual no es cierto. Esto genera que el valor digitado como la inercia efectiva sea bastante conservador. Para completar el ejemplo, se determinará de forma aproximada una nueva inercia agrietada considerando todo el largo del elemento. De las gráficas de momentos flectores en X e Y se puede obtener las longitudes, de manera aproximada, desde donde el momento en las losas es menor que el agrietado.

Para el caso de los momentos flectores en el sentido horizontal, la longitud que tiene un momento superior al momento de agrietamiento calculado es aproximadamente 4.25 m. Por lo que la nueva inercia efectiva para toda la losa podría considerarse de la siguiente manera.

$$\bullet \quad I_e = \frac{L_1 \cdot I_{cr} + L_2 \cdot I_g}{L_{Total}} = \frac{4.25 \text{ m} \cdot 1.22 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 + 3.75 \text{ m} \cdot 6.67 \cdot 10^4 \text{ cm}^4}{8 \text{ m}} = 3.77 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

Por lo que el factor de reducción de rigidez en el eje X se incrementaría.

$$\bullet \quad \frac{I_e}{I_g} = \frac{3.77 \cdot 10^4 \text{ cm}^4}{6.67 \cdot 10^4 \text{ cm}^4} = 0.57$$

Para el caso de los momentos flectores en el sentido vertical, la longitud que tiene un momento superior al momento de agrietamiento calculado es aproximadamente 2.5 m. Por lo que la nueva inercia efectiva para toda la losa podría considerarse de la siguiente manera.

$$\bullet \quad I_e = \frac{L_1 \cdot I_{cr} + L_2 \cdot I_g}{L_{Total}} = \frac{2.5 \text{ m} \cdot 1.22 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 + 4.5 \text{ m} \cdot 6.67 \cdot 10^4 \text{ cm}^4}{7 \text{ m}} = 4.72 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

Por lo que el factor de reducción de rigidez en el eje Y también se incrementaría.

$$\bullet \quad \frac{I_e}{I_g} = \frac{4.72 \cdot 10^4 \text{ cm}^4}{6.67 \cdot 10^4 \text{ cm}^4} = 0.71$$

Con estos resultados, se ingresa nuevamente al programa y se determinan las deflexiones para compararlas con los valores obtenidos anteriormente.

Tabla 3-20 Deflexión inmediata y diferida para cada uno de los casos

Deflexión inmediata CM (cm)	0.78
Deflexión inmediata CV 100% (cm)	0.32
Deflexión inmediata CV 30% (cm)	0.10
Deflexión diferida CM (cm)	1.43
Deflexión diferida CV 30% (cm)	0.18
Deflexión diferida total (cm)	1.93

El valor permisible de la norma, para el caso máximo y considerando daño en los elementos no estructurales, es de 1.40 cm (L/480). Por lo tanto, se concluye que, a pesar de haber realizado un nuevo análisis más detallado, la deflexión máxima esperada sigue sin cumplir el requisito de la norma. Sin embargo, si se compara con el resultado obtenido anteriormente, se puede observar que la deflexión total se redujo en aproximadamente 1 cm. Con el propósito de ser más riguroso, se podría desarrollar la misma idea en el otro sentido de la losa para obtener un resultado más cercano y reducir la deflexión obtenida. Para este caso se seguiría recomendando una contraflecha en la parte central para cumplir con los requerimientos.

3.3 Vibraciones indeseables

En esta sección se expondrán los criterios recolectados para la determinación de dimensiones que eviten la generación de vibraciones que puedan suponer un comportamiento inaceptable bajo cargas de servicio. Algunos autores y normas han tratado de determinar una expresión que permita determinar las frecuencias fundamentales de los entrepisos considerando parámetros que influyen en su respuesta tales como la masa, el módulo de elasticidad, el amortiguamiento del sistema de losas y el grado de agrietamiento de la losa (Aalami, 2008).

Antes de presentar los criterios, se mostrarán los límites mínimos para cumplir un buen desempeño por servicio.

Model Code (2010):

El código propone que, para garantizar un comportamiento satisfactorio, la frecuencia natural de la estructura relevante debe mantenerse a un margen razonable de los valores recomendados en la tabla 7.6-7 del mismo código y que se observa en la Tabla 3.21 mostrada a continuación:

Tabla 3-21 Frecuencias recomendadas según el uso de la estructura

Table 7.6-7 Frecuencia crítica en estructuras sujetas a vibraciones causadas por movimientos de personas.	
Estructuras	Frecuencia (s^{-1}) f_{crit}
Gimnasios y pabellones deportivos.	8.0
Salas de baile y salas de conciertos sin asientos permanentes.	7.0
Salas de conciertos con asientos permanentes.	3.4
Áreas críticas de trabajo	1.0
Residencia	1.4 - 4.0
Oficina	4.0
Taller	8.0
Estructuras para peatones y ciclistas	Ver abajo*
*Las frecuencias naturales entre 1.6 y 2.4 s^{-1} y entre 3.5 y 4.5 s^{-1} deben evitarse en estructuras para peatones y ciclistas. Los corredores también pueden causar vibraciones en estructuras con frecuencias naturales entre 2.4 y 3.5 s^{-1}	

Nota. Tomado de "Design of reinforced concrete" por FIB International, 2012

D. E. Allen, T. M. Murray & E. Ungar (1997):

En su publicación se explica que las características dinámicas de los sistemas de piso requieren determinar su frecuencia natural y aceleración pico producida por la actividad realizada. Utilizando estos dos parámetros, se establecieron los siguientes límites de serviciabilidad.

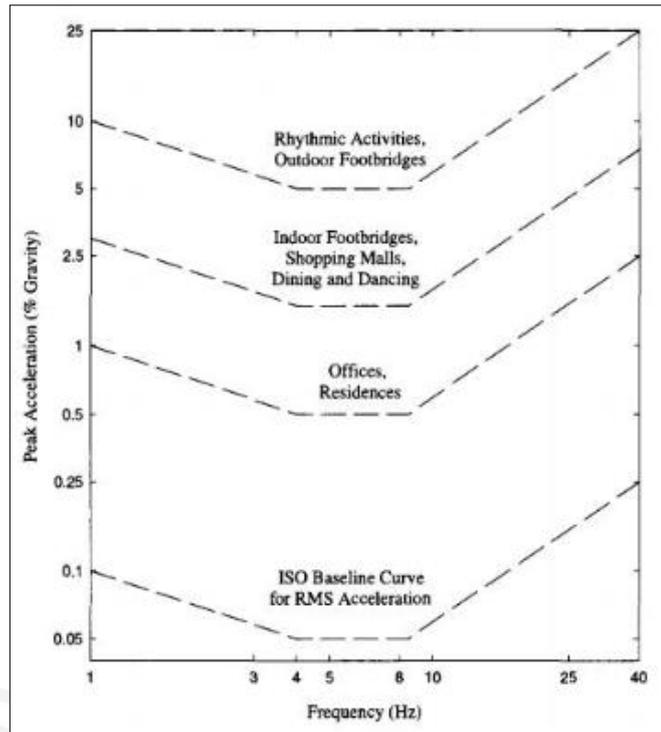


Figura 3-11. Valores recomendados de aceleración pico
Tomado de “Design Criterion for Vibrations Due to Walking” por Allen y Murray, 1993

La aceleración pico permisible alcanza su valor mínimo permisible para frecuencias entre 4 y 8 Hz, debido a que estas frecuencias pueden entrar en resonancia con el cuerpo humano y generar una mayor incomodidad. La aceleración pico se calcula dependiendo del tipo de actividad que se realice. Para el cálculo de la aceleración pico (a_p/g) en un piso donde no se realizarán actividades demandantes se utiliza la siguiente expresión.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_o \cdot e^{-0.35f_n}}{\beta \cdot W} \quad (3.30)$$

Donde P_o es el valor constante de la fuerza aplicada. Se usa 0.29 kN para pisos y 0.41 kN para puentes peatonales, f_n es la frecuencia natural del piso, β es el porcentaje de amortiguamiento (ver Tabla 3.9) y W es el peso del área del paño analizado (kN). Para el cálculo de la aceleración pico (a_p/g) en zonas donde se realizarán actividades físicas, como salones de baile, aeróbicos, entre otros, se utilizará la siguiente expresión.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{1.3 \cdot \alpha_i \cdot (w_p/w_t)}{\sqrt{\left(\frac{f_n}{f}\right)^2 - 1)^2 + \left(\frac{2 \cdot \beta \cdot f_n}{f}\right)^2}} \quad (3.31)$$

Donde α_i es el coeficiente dinámico, depende de la actividad realizada y el armónico, i es el número del armónico analizado, f_n corresponde a la frecuencia natural del piso, f es la frecuencia de la fuerza, depende de la actividad y el armónico. Además, w_p es el peso efectivo por unidad de área de los participantes de la actividad, w_t es el peso efectivo por unidad de área actuando en el piso, incluyendo a los participantes y β es el porcentaje de amortiguamiento. Para estas actividades se analizan diversos armónicos (la cantidad depende de la actividad realizada), por consiguiente, la aceleración pico resultante se obtiene de la siguiente manera:

$$a_m = \left[\sum a_i^{1.5} \right]^{1/1.5} \quad (3.32)$$

En este caso, el valor de a_i es la aceleración pico en cada armónico analizado. Además de proponer formas de determinar la aceleración pico para los pisos, también propone fórmulas para determinar la frecuencia mínima de diseño aceptable. Para el cálculo de la frecuencia natural de un piso, que solo será afectado por el caminar de los usuarios, se utiliza la siguiente expresión.

$$f_{min} = 2.86 \cdot \ln\left(\frac{K}{\beta \cdot W}\right) \quad (3.33)$$

Donde K es la constante dependiente del uso (kN), ver Tabla 3.8, β es el porcentaje de amortiguamiento, ver Tabla 3.9 y W corresponde al peso del área del paño analizado (kN). Para pisos donde se realizarán actividades de mayor impacto se utiliza la siguiente fórmula:

$$f_{min} = f \cdot \sqrt{1 + \frac{k}{(a_o/g)} \cdot \frac{\alpha_i \cdot w_p}{w_t}} \quad (3.34)$$

Dichos parámetros se explicaron anteriormente. Por otro lado, a_o/g es la aceleración límite permisible y k es la constante (1.3 para salas de baile, 1.7 para conciertos o deportes y 2 para aeróbicos). Las ecuaciones presentadas han sido obtenidas de manera empírica y los valores calculados deben cumplir con los requerimientos de serviciabilidad mostrados en la Figura 3.11.

Tabla 3-22 Valores de K para obtener la frecuencia mínima aceptable.

Uso	K (kN)
Oficinas, residencias, salas de asamblea.	58
Centros comerciales.	20
Puentes peatonales	8

Tabla 3-23 Valores de porcentaje de amortiguamiento recomendados según el uso.

Uso	B
Solo losa de concreto.	0.02
Amueblado y con tabiquería baja.	0.03
Amueblado y con tabiquería en toda la altura.	0.05
Centros comerciales.	0.02

Tabla 3-24 Valores recomendados para diseño por vibraciones.

Actividad		f (Hz)	Aceleración límite (a_o/g)	α_i
Baile	1° armónico	1.5 - 3	0.02	0.5
Concierto y eventos deportivos	1° armónico	1.5 - 3	0.05	0.25
	2° armónico	3 - 5		0.05
Aeróbicos	1° armónico	2 - 2.75	0.06*	1.5
	2° armónico	4 - 5.5		0.6
	3° armónico	6 - 8.25		0.1
*Usar 0.02 en caso se comparta el área con ambientes para hacer ejercicio estático como gimnasios.				

A partir de dichos criterios y valores se realizará la comparación entre los resultados de frecuencia natural, obtenidos mediante las investigaciones mostradas a continuación, y se verificará si se tendrá un desempeño aceptable.

3.3.1 D. E. Allen y J. H. Rainer (1976)

En sus investigaciones se propuso utilizar la Ecuación 3.35 para determinar las frecuencias naturales de un sistema de losas de concreto superpuestas en viguetas de acero que trabajaban en un solo sentido.

$$f_n = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I \cdot g}{W \cdot L^4}} \quad (3.35)$$

Donde E corresponde al módulo de elasticidad del material (N/mm²), I es el momento de inercia del sistema de piso (mm⁴), L es la longitud de la luz del elemento (mm), W es el peso a considerar en el cálculo de la frecuencia natural. (N/mm) y g es la aceleración de la gravedad (9810 mm/s²). Esta fórmula es limitada debido a que solo es aplicable cuando las condiciones de borde de los elementos eran simplemente apoyadas. Sin embargo, investigaciones posteriores lograron determinar constantes que permiten tomar en consideración las condiciones de borde de los elementos. Dichas constantes son expuestas por Smith, Hicks y Devine (2009).

$$f_n = \frac{\kappa_n}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I \cdot g}{W \cdot L^4}} \quad (3.36)$$

Donde los valores para κ_n se presentan en la tabla mostrada a continuación.

Tabla 3-25 Valores de la constante κ_n para elementos de sección uniforme.

Condiciones de apoyo	κ_n
Apoyo simple a ambos lados	π^2
Empotrado a ambos lados	22.4
Apoyado y empotrado (uno en cada extremo)	15.5
Voladizo	3.52

Estas fórmulas fueron desarrolladas para elementos tipo viga, sin embargo, pueden ser adaptadas para elementos tipo losa que trabajan en una dirección si se cambia el factor E·I de la Ecuación 3.36 por la rigidez a flexión equivalente de las losas (Ecuación 3.37).

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (3.37)$$

Donde E corresponde al módulo de elasticidad de la losa, h es el espesor de la losa y ν es el módulo de Poisson del material. Finalmente, la Ecuación 3.38 representa la expresión final para obtener la frecuencia natural de las losas que trabajan en una dirección.

$$f = \frac{\kappa_n}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot g}{W \cdot L^4}} \quad (3.38)$$

De dicha expresión, el valor de la masa estará expresado en kilogramos por unidad de área. Esta ecuación permite obtener de manera aproximada las frecuencias naturales de los elementos tipo losa que trabajen en una dirección. Para el caso de losas aligeradas se deberá obtener un espesor equivalente para calcular su rigidez a la flexión.

3.3.2 Bangladesh University of Engineering and Technology (2013)

A diferencia de las metodologías anteriores, investigadores de la Universidad de Bangladesh, Khan et al. (2013), propusieron una modelación en 3D utilizando elementos finitos, a través de la cual se pueda evaluar la variación de la frecuencia natural de los entrepisos y expresarla en función de las distintas variables que influyen en esta (espesor de la losa, longitud de la luz y la relación entre sus lados).

Para el estudio se modeló una estructura tipo pórtico de tres pisos cuyas dimensiones, de vigas y columnas, se establecieron como funciones del espesor de losa. Mediante el análisis dinámico de cargas en la estructura, se estableció una relación entre los parámetros previamente mencionados y la frecuencia natural de la losa.

A través del análisis de la estructura modelada se obtuvo la relación entre la frecuencia fundamental de la losa y su espesor. Dicho análisis se realizó para cada longitud de losa

estudiada y para cada relación de lados. En la Figura 3.12 se presenta un ejemplo de la tendencia del espesor de la losa respecto de la frecuencia fundamental para ciertas condiciones específicas.

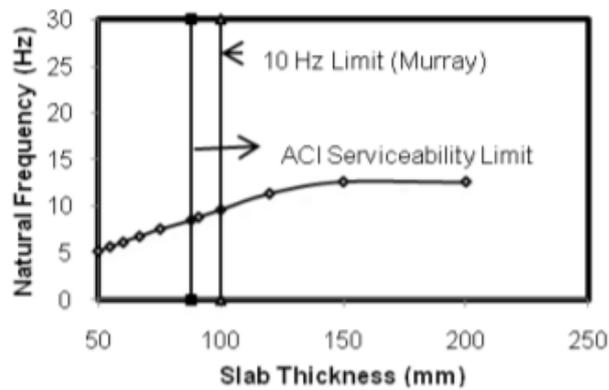


Figura 3-12. Tendencia de la frecuencia natural de la losa en función del espesor, longitud menor de 3 metros y una relación de lados de 1.4.
Tomado de *Minimum slab thickness of RC slab to prevent undesirable floor vibration* por Khan et al; 2013

Luego, con estos resultados se obtuvo el espesor de losa que se requiere para obtener una frecuencia mínima de 10 Hz para cada uno de los casos estudiados. Finalmente, esta información se recopiló en una serie de gráficas para poder establecer una tendencia. A continuación, se presentan una de las muchas tablas que se generaron con los resultados obtenidos de los modelos. En la figura se muestran tres curvas que representan la variación del espesor de la losa en función de la luz. La curva roja representa la variación tomando una frecuencia fundamental mínima de 10 Hz, la curva azul representa el límite de serviciabilidad establecido por el ACI y la curva verde representa la función deducida para establecer un espesor de losa permisible. Cada figura representa la tendencia para cada relación entre lados estudiada.

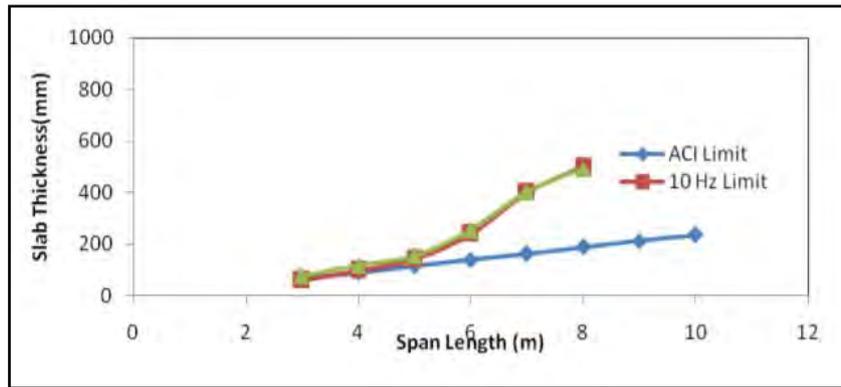


Figura 3-13. Comparación entre espesor y longitud menor de losa para una relación de lados de 1. Tomado de *Minimum slab thickness of RC slab to prevent undesirable floor vibration* por Khan et al; 2013

Con estos resultados, se estableció una función que permite establecer un espesor de losa que cumpla con tener una frecuencia fundamental superior a 10Hz y así poder garantizar un correcto comportamiento en servicio. La fórmula deducida es la siguiente:

$$t = (-3.541x^4 + 75x^3 - 558x^2 + 1795x - 2050) \cdot \beta \quad (3.39)$$

Donde t es el espesor de la losa con frecuencia fundamental de 10 Hz en milímetros, x es la longitud de la distancia más corta de la losa y β es la relación entre lados. Cabe resaltar que la modelación de la estructura no tomó en consideración el incremento dinámico que tiene el módulo de elasticidad del concreto o la reducción de la rigidez a causa del agrietamiento. Sin embargo, no deja de ser un método válido para estimar, aproximadamente, las frecuencias naturales de la edificación.

3.3.3 Richard Bares (1971)

En su libro *Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms Based on the Elastic Theory* propone la siguiente ecuación para determinar la frecuencia fundamental en losas macizas de concreto de espesor uniforme.

$$f = \frac{c}{a^2} \cdot \varphi \quad (3.40)$$

Para dicha expresión, el valor del parámetro c está dado por la siguiente expresión:

$$c = \sqrt{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{g}{q}} \quad (3.41)$$

Donde f es la frecuencia fundamental, a corresponde a la dimensión de la longitud más larga del paño (mm), E es el módulo de elasticidad dinámico del concreto (1.25 veces el valor estático; MPa), h es el espesor de la losa (mm), ν corresponde al módulo de Poisson (el autor propone 0.2), g es la aceleración de la gravedad (9810 mm/s²) y q es el peso por unidad de área de la losa a analizar (MPa).

Para el cálculo de la constante c , puede verse la influencia de la rigidez a flexión de la viga en la primera división dentro del radical. Por ello, en caso se incluya el efecto del agrietamiento para la obtención de las frecuencias, se deberá de multiplicar dicha expresión por un porcentaje que será la relación entre la inercia efectiva y la inercia bruta de una porción de losa o, en caso la relación largo:espesor sea mayor a 30, se podrá utilizar una reducción del 30% como valor recomendado (Aalami, 2008). La constante φ depende de las condiciones de borde del paño a analizar y las dimensiones de dicho paño como se puede observar en la Figura 3.14.

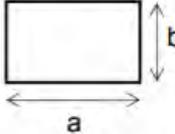
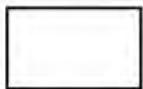
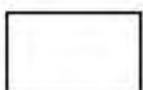
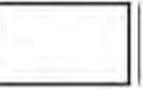
Case	Boundary Conditions	Constant φ
1		$\varphi = 1.57(1 + \gamma^2)$
2		$\varphi = 1.57\sqrt{1 + 2.5\gamma^2 + 5.14\gamma^4}$
3		$\varphi = 1.57\sqrt{5.14 + 2.92\gamma^2 + 2.44\gamma^4}$
4		$\varphi = 1.57\sqrt{1 + 2.33\gamma^2 + 2.44\gamma^4}$
5		$\varphi = 1.57\sqrt{2.44 + 2.72\gamma^2 + 2.44\gamma^4}$
6		$\varphi = 1.57\sqrt{5.14 + 3.13\gamma^2 + 5.14\gamma^4}$

Figura 3-14. Valores de φ dependiendo de las condiciones de borde.

Tomado de *Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms Based on the Elastic Theory* por Bares, 1971

Una línea representa un borde que se encuentra apoyado rígidamente en el sentido vertical pero que permite el giro. Doble línea representa un borde apoyado verticalmente y con restricción al giro. El parámetro γ es la relación entre lados (a/b) siendo “a” el lado de mayor dimensión.

Para aplicar este método se necesita escoger el paño de losa a analizar, el cual se recomienda que sea el de mayores dimensiones para pisos con un mismo espesor. Luego, se debe escoger las condiciones de borde que mejor representen el paño crítico para determinar el mejor valor de φ . Para ello, se debe tener en consideración las dimensiones de los paños adyacentes. Para paños adyacentes de similar tamaño, la respuesta del primer periodo es más parecido a la de un paño con bordes que permiten el giro. Por otro lado, para paños adyacentes

de menor dimensión, el comportamiento es similar a un paño con giros restringidos en los bordes (Aalami, 2008). Esto se representa en la Figura 3.15(c) donde se visualiza el primer modo de vibración de paños continuos con paños de similar tamaño.

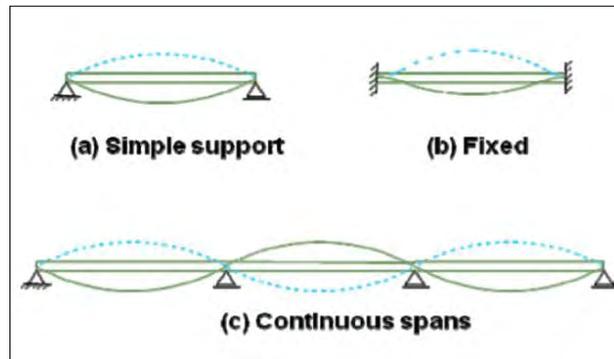


Figura 3-15. Primer modo de vibración para paños continuos (Aalami, 2008)

En 1974, en su libro *Theory and Analysis of Plates- Classical and Numerical Methods*, Rudolph Szilard presenta una ecuación bastante similar para determinar la frecuencia fundamental para losas de concreto en dos direcciones con espesor constante. Sin embargo, presenta la limitación de que solo es válida para el caso donde los bordes actúan como apoyos simples que permiten la rotación.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.42)$$

Para dicha ecuación, el valor del parámetro ω está dado por la siguiente expresión:

$$\omega = \pi^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot \frac{g}{q} \quad (3.43)$$

Donde a es la dimensión de mayor longitud y b , la de menor longitud. Los demás parámetros son los mismos mencionados anteriormente. En esta expresión, la diferencia más grande respecto a la propuesta por Bares (1971) radica en que no hay constante ϕ que considere el efecto de los bordes del paño en su comportamiento. Por otro lado, la rigidez a flexión de la losa está incluida en la primera división dentro del radical y, para incluir el efecto del

agrietamiento en el cálculo, se deberá multiplicar por un factor de reducción, el cual será la relación entre inercia efectiva e inercia bruta o, en caso la relación largo:espesor sea mayor a 30, se podrá usar una reducción del 30% como valor recomendado (Aalami, 2008). La Ecuación 3.43 puede modificarse para determinar la frecuencia fundamental de losas que trabajen en una sola dirección de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{1.57}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{g}{q}} \quad \text{Ecuación 3.44}$$

Esta expresión podría utilizarse para losas aligeradas, en caso se desee, siempre que se determine un espesor equivalente de dicha losa (h) y se utilice la longitud de la dimensión en la que trabajan dichas losas aligeradas. De igual manera, se debe escoger el paño crítico a analizar y ya que no se toma en cuenta las condiciones de borde se procede a utilizar las ecuaciones anteriores para la determinación de la frecuencia fundamental.

3.3.4 Ejemplos aplicativos

Ejemplo 3.4. Para el análisis de vibraciones se tomará la configuración de la estructura del Ejemplo 3.2 presentándose unos ligeros cambios. En este caso, se modificará el sistema de losa aligerada por un sistema de losas macizas de 20 cm. Las propiedades mecánicas de los materiales serán las mismas ($f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$) y se asumirá el edificio como una vivienda multifamiliar. El valor del módulo de elasticidad del concreto (E) será de $2.2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ y el módulo de Poisson (ν) de 0.15. Los valores presentados son recomendaciones de la Norma peruana E.060, sin embargo, para que el módulo de elasticidad pueda ser utilizado en las fórmulas de los criterios referenciados se debe de transformar las unidades a megapascales (MPa).

- $E = 2.2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 0.1 = 2.2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

Finalmente, para los cálculos a realizar se deberá amplificar dicho valor en un 25% para obtener el módulo de elasticidad dinámico del concreto.

- $E_{din} = 1.25 \cdot 2.2 \cdot 10^4 = 2.75 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

Se tomará en consideración la reducción de rigidez del 30%, valor recomendado para losas de concreto armado, a causa del agrietamiento

Según Richard Bares (1971):

Se emplean las ecuaciones 3.45y 3.46, planteadas por el presente autor, para el cálculo de la frecuencia natural.

$$f = \frac{c}{a^2} \cdot \varphi \tag{3.45}$$

$$c = \sqrt{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{g}{q}} \tag{3.46}$$

Se comienza determinando el paño crítico de análisis, el cual, como se explicó anteriormente, será el de mayor tamaño. En este caso se tomará el paño central para el análisis. Luego, se debe definir el peso por unidad de área que se considerará. Para esta ocasión consideraremos que el peso será obtenido a partir de la carga muerta y un 30% de la carga viva asumida.

- $q = 730 \frac{kg}{m^2} + 0.3 \cdot 200 \frac{kg}{m^2} = 790 \frac{kg}{m^2}$
- $q = 790 \frac{kg}{m^2} \cdot \frac{9.81}{10^6} = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$

Con este valor del peso se determina el parámetro c, el cual estará afectado por un factor de 0.7 que representa la reducción de rigidez por agrietamiento, ya que su relación largo: espesor es superior a 30.

- $c = \sqrt{0.7 \cdot \frac{2.75 \cdot 10^4 \text{ MPa} \cdot (200 \text{ mm})^3}{12 \cdot (1 - 0.15^2)} \cdot \frac{9810 \frac{mm}{s^2}}{7.75 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}}} = 1.29 \cdot 10^8 \frac{mm^2}{s}$

El valor de la mayor longitud del paño es igual a 7.7 m (distancia entre caras de vigas). Para obtener el valor del parámetro ϕ se debe de tener en cuenta lo que se explicó en el acápite anterior. Debido que las dimensiones de los paños adyacentes al paño analizado son las mismas, su comportamiento dinámico será el de un paño con bordes simplemente apoyados. Por lo tanto, la constante ϕ se hallará utilizando la primera fórmula de la Figura 3.21.

- $\phi = 1.57 \cdot \left(1 + \left(\frac{7.7}{6.7}\right)^2\right) = 3.64$

Finalmente, se determina la frecuencia natural del paño crítico.

- $f = \frac{1.29 \cdot 10^8 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}}{(7700 \text{ mm})^2} \cdot 3.64 = 7.91 \text{ Hz}$

Una vez calculada la frecuencia natural del entrepiso, se determina si su valor cumple con los requisitos mínimos encontrados. Debido a que se trata de un edificio de vivienda, las vibraciones en la edificación serán producto del caminar de los usuarios por lo que se puede utilizar ambos criterios. Según el Model Code (2010), la frecuencia mínima de diseño debe ser mayor que el rango de 1.4 - 4.0 Hz (ver Tabla 3.7). Ya que se obtuvo una frecuencia de 7.91 Hz, el diseño de la losa cumple con los requisitos mínimos del Model Code.

Según Allen, Murray & Ungar (1997), se debe calcular la frecuencia mínima y la aceleración pico para el caso donde no se realizarán actividades demandantes.

- $K = 58 \text{ kN}$, ya que se ha mencionado que es un edificio residencial.
- $\beta = 0.05$, ya que al ser un edificio residencial se espera que la tabiquería vaya de piso a techo y que se encuentre amueblado.

Se debe de obtener el peso (en kN) en el área de análisis para finalmente obtener la frecuencia mínima y se determinará la aceleración pico (a_p/g).

- $W = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} \cdot (7700 \text{ mm} \cdot 6700 \text{ mm}) \cdot 10^{-3} = 399.8 \text{ kN}$

- $f_{min} = 2.86 \cdot \ln\left(\frac{58 \text{ kN}}{0.05 \cdot 399.8 \text{ kN}}\right) = 3.05 \text{ Hz}$
- $P_o = 0.29 \text{ kN}$, ya que se trata de un piso común.
- $\beta = 0.05$, ya que al ser un edificio residencial se espera que la tabiquería vaya de piso a techo y que se encuentre amueblado.
- $f_n = 7.91 \text{ Hz}$, obtenida del cálculo.
- $W = 399.8 \text{ kN}$
- $\frac{a_p}{g} (\%) = \frac{0.29 \text{ kN} \cdot e^{-0.35 \cdot 7.91 \text{ Hz}}}{0.05 \cdot 399.8 \text{ kN}} = 0.09\%$

Por último, se verifica en la gráfica de serviciabilidad límite vista anteriormente.

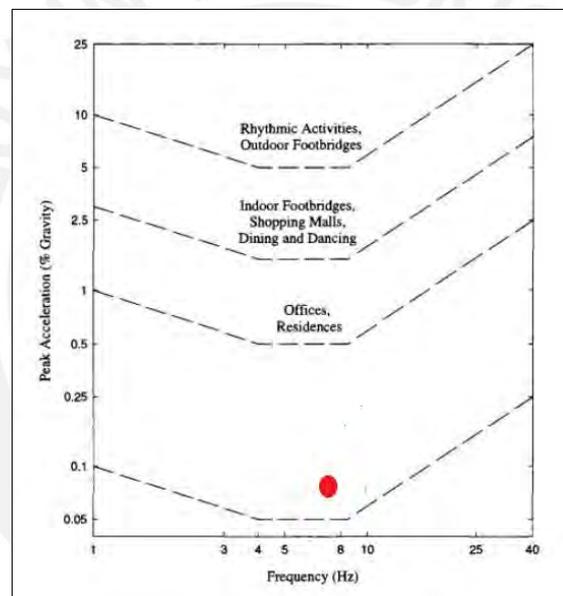


Figura 3-16. Verificación de límites de serviciabilidad

Al obtenerse una frecuencia natural de 7.91 Hz y una aceleración pico por debajo del límite, se concluye que cumple con el límite presentado. Es importante recalcar, que en el ejemplo desarrollado se asumió una reducción de la rigidez recomendada para simplificar cálculos. En caso se desee obtener una reducción de la rigidez más precisa, se deberá obtener una relación entre la inercia efectiva y la inercia bruta de la losa. Se recomienda obtener dicha inercia efectiva considerando un valor del momento actuante producido por la carga muerta y un 30% de la carga viva.

Según el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Bangladesh (2013):

En este caso se realizará un modelo de la estructura completa, con las losas discretizadas, y se procederá a obtener un análisis modal de la estructura, del cual se obtendrá un modo de vibración del que se pueda extraer la frecuencia natural de los entrepisos. Para la modelación de la estructura no se consideró el incremento del módulo de elasticidad dinámico o la reducción de la rigidez a la flexión de las losas. Las propiedades mecánicas definidas fueron las mismas a las del Ejemplo 3.2. En este caso se definió una losa maciza de 20 cm y se discretizaron los elementos para un mejor análisis (Mesh 8x7). Además, en la azotea solo se considerará carga muerta adicional por piso terminado y 100 kg/m² de carga viva. Al definir la masa participante se escogió un 30% de la masa por carga viva, para que el análisis sea comparable con el de los ejemplos anteriores, y se activó la opción para considerar la masa vertical. Además, se definió el caso modal usando vectores Ritz donde se incluyó aceleración vertical y se corrió el modelo.

Una vez definidas estas opciones se obtuvieron los modos de vibración en el eje Z de los cuales, el mayor porcentaje de masa participante está en el modo 5 cuya frecuencia es igual a 7.69 Hz, lo cual hace que esta sea la frecuencia del entrepiso. Finalmente, se compara el valor obtenido con los límites anteriormente calculados. Ya que se trata del mismo edificio residencial, el valor de 7.69 Hz cumple con los requisitos mínimos propuestos por el Model Code (1.4 – 4 Hz).

Según Allen, Murray & Ungar (1997), se debe calcular la frecuencia mínima y la aceleración pico para el caso donde no se realizarán actividades demandantes.

- $K = 58 \text{ kN}$, ya que es un edificio residencial.
- $\beta = 0.05$, ya que al ser un edificio residencial se espera que la tabiquería vaya de piso a techo y que se encuentre amueblado.

Se debe de obtener el peso (en kN) en el área de análisis para finalmente obtener la frecuencia mínima.

- $W = 399.8 \text{ kN}$, igual que en el caso anterior.
- $f_{min} = 2.86 \cdot \ln\left(\frac{58 \text{ kN}}{0.05 \cdot 399.8 \text{ kN}}\right) = 3.05 \text{ Hz}$

A continuación, se deberá determinar la aceleración pico (a_p/g). Para ello, se obtendrán los siguientes parámetros:

- $P_o = 0.29 \text{ kN}$, ya que se trata de un piso común.
- $\beta = 0.05$, ya que al ser un edificio residencial se espera que la tabiquería vaya de piso a techo y que se encuentre amueblado.
- $f_n = 7.69 \text{ Hz}$, obtenida del cálculo.
- $W = 399.8 \text{ kN}$
- $\frac{a_p}{g} (\%) = \frac{0.29 \text{ kN} \cdot e^{-0.35 \cdot 7.69 \text{ Hz}}}{0.05 \cdot 399.8 \text{ kN}} = 0.10\%$

Este resultado es bastante similar al obtenido con el criterio anterior por lo que su posición en el gráfico de límites de serviciabilidad será satisfactoria. Es importante recalcar que en este modelo no se consideró el incremento de 25% que tiene el módulo de elasticidad del concreto, ni la reducción de rigidez de la losa.

Capítulo 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Mediante la revisión de la bibliografía se recopilaron las distintas normas e investigaciones que estudian los estados límites en condiciones de servicio mencionados en la presente tesis. Para cada límite estudiado se detallaron las consideraciones de cada fuente y se analizaron las variables que influyen en los cálculos. A continuación, se contrastarán e interpretarán los resultados obtenidos en los ejemplos aplicativos para cada uno de ellos.

4.1 Fisuraciones excesivas

En la Tabla 4.1 se observan los valores de ancho de grietas que se obtuvieron mediante las distintas normas e investigaciones para los dos tipos de arreglos planteados en el Ejemplo 3.1 Se dejó de lado los resultados obtenidos con el ACI 318-19 ya que no ofrece un método para determinar el ancho de las fisuras.

Tabla 4-1. Comparación del ancho de grietas entre los dos arreglos planteados y porcentaje de reducción entre ellos.

Ecuación	Ancho de grietas - Primer arreglo (mm)	Ancho de grietas - Segundo arreglo (mm)	Reducción (%)
Gergerly - Lutz	0.31	0.21	32.9%
Frosch	0.32	0.24	25.9%
Norma peruana E.060	0.37	0.25	32.6%
Model Code	0.34	0.26	23.3%

De las ecuaciones analizadas se puede concluir que la presentada por la Norma peruana E.060 es la más conservadora ya que el resultado excede en mayor magnitud el valor máximo permisible de 0.3 mm. Por otro lado, la ecuación propuesta por Gergerly-Lutz da un resultado de ancho de grietas muy cercano al valor límite, por lo que, se podría decir que es el menos exigente. Ambos criterios redujeron en mayor medida el valor del agrietamiento máximo en el segundo arreglo (32.6% y 32.9% respectivamente). Sin embargo, podemos afirmar que todos los criterios redujeron de manera similar el ancho de grietas. Además, comparando los

resultados obtenidos, se observa que los valores de ancho de grietas, obtenidos mediante las cuatro fuentes, son cercanos. En la tabla presentada a continuación se muestran valores de media y desviación estándar:

Tabla 4-2. Media, desviación estándar y coeficiente de variabilidad para los arreglos planteados en el Ejemplo 3.1

	Primer arreglo	Segundo arreglo
Media (mm)	0.34	0.24
Desviación estándar (mm)	0.023	0.022
Coef. De variabilidad	6.97%	9.24%

Los resultados nos dan coeficientes de variabilidad menores al 10%. Es decir que independientemente de la complejidad de los cálculos, los resultados siempre serán relativamente similares. Sin embargo, también se ve que la variabilidad se incrementa cuando los anchos de grieta se hacen cada vez menores. Para estructuras donde el ancho de grietas sea una necesidad principal (y la dispersión de resultados es mayor) se recomienda usar el Model Code, ya que el análisis detrás de su concepción es mucho más detallado.

A continuación, se comentará acerca de las variables que influyeron de manera más significativa en la determinación del ancho de grietas y en la reducción que se obtuvo en el segundo arreglo. En el ejemplo desarrollado se trató de obtener la misma cantidad de acero en cada arreglo, por lo que, para este caso, la reducción del ancho de grietas depende en mayor medida de la distribución del acero y el número de barras de refuerzo. Las ecuaciones utilizadas por Gergerly-Lutz y la Norma Peruana E.060 consideran el efecto de la distribución y el número de barras de refuerzo en la variable A_o , ya que esta representa el área de concreto en tensión dividida entre el número de barras. Este valor se redujo considerablemente ya que pasó de 21000 mm^2 a 9000 mm^2 , siendo este el cambio más notorio en el nuevo arreglo. A diferencia de los casos anteriores, la ecuación presentada por Frosch incluye la distribución del acero en el parámetro d^* , el cual depende del espaciamiento entre barras longitudinales y de los valores de recubrimiento tanto horizontales como verticales. Como se mencionó

anteriormente, si el valor del espaciamiento no supera el doble del recubrimiento horizontal al centro de las barras de acero, el valor final del ancho de grietas se mantendrá casi constante. Es decir, el factor d^* dependerá únicamente de los valores de recubrimiento y el número de barras empleadas en el diseño ya no influirá en el ancho de grietas.

En la ecuación presentada por el Model Code, el impacto de la distribución del acero se encuentra implícito en el cálculo de la longitud de la zona de discontinuidad (l_s). El valor que más influye en el cálculo de este parámetro es el diámetro de las barras de acero, sin embargo, el valor del diámetro de las barras usadas modifica la cantidad y, por lo tanto, la distribución del acero de refuerzo. Por otro lado, la resistencia a compresión del concreto es una variable que no se tomó en cuenta, ya que se utilizó el mismo para todos los casos. Sin embargo, es una variable importante, debido a que un mayor valor de la resistencia incrementa la resistencia a tracción del concreto, reduciendo de esta forma el ancho de las grietas.

4.2 Deflexiones excesivas

I. Deflexiones en vigas

En la Tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos, en el Ejemplo 3.2, para las deflexiones en las vigas. A partir de ello, se compararán dichos resultados con los valores permisibles según las respectivas normas y se explicarán los motivos por los que varían los resultados.

Tabla 4-3. Deflexiones calculadas según las distintas normas

Deflexión calculada (unidades en cm)	E.060	ACI318-19	ACI 435	Model Code
Deflexión inmediata CM	0.57	0.56	0.61	0.67
Deflexión inmediata CV 100%	0.25	0.25	0.27	0.30
Deflexión inmediata CV 30%	0.07	0.08	0.08	0.09
Deflexión inmediata CM+CV	0.82	0.81	0.88	0.97
Deflexión inmediata CM+0.3CV	0.64	0.64	0.69	0.76
Deflexión diferida CM+0.3CV	0.98	0.97	1.05	1.26
Deflexión diferida total (cm)	1.23	1.22	1.32	1.56

Para el cálculo de deflexiones, la diferencia principal radica en la forma como se determina la inercia efectiva en cada zona (central y extremos) y al porcentaje de influencia de cada zona analizada para el cálculo de la inercia efectiva promedio. El valor más conservador fue el obtenido con el Model Code (1.56 cm). Este valor está bastante cercano al límite establecido por el ACI y la Norma E.060 (1.58 cm). Esto se debe a que esta metodología sugiere utilizar una inercia intermedia entre la transformada agrietada y la transformada no agrietada de la zona central, pero no toma en consideración la inercia en los extremos. Esto afecta de gran manera los resultados puesto que todos valores parciales que se muestran en la tabla son superiores a los obtenidos con el método del ACI y la Norma E.060. Es importante mencionar que la forma de determinar el módulo de elasticidad del concreto (E_c) en este código es distinta. El valor de E_c con el método del Model Code es un 43% superior al que se obtendría con el propuesto por la Norma E.060 o el ACI 318-19.

Con respecto a la Norma E.060, se esperaba que sus resultados sean más conservadores puesto que solo indica emplear la inercia agrietada si se verifica que el momento actuante es superior al momento de agrietamiento. Sin embargo, el resultado obtenido fue de los menos conservadores (1.23 cm). Para el ACI 318-19, la ecuación para obtener la inercia efectiva depende del momento actuante que se esté aplicando en la zona analizada. Esto podría suponer que los resultados obtenidos serían menos conservadores que los obtenidos por la Norma E.060, sin embargo, se ve que ambos resultados son prácticamente iguales. Para explicar este fenómeno, en la Tabla 4.4 se muestra la variación de la inercia efectiva de la zona positiva y negativa del ejemplo respecto de la inercia agrietada.

Tabla 4-4. Inercia agrietada (Norma peruana E.060), efectiva (ACI 318-19) y porcentaje de variación para las zonas positiva y negativa

	Inercia agrietada (cm^4)	Inercia efectiva (cm^4)	Variación (%)
Zona negativa	$3.93 \cdot 10^4$	$3.94 \cdot 10^4$	0.31%
Zona positiva	$2.62 \cdot 10^4$	$2.68 \cdot 10^4$	2.44%

Para un análisis más detallado, se generó la gráfica de la Figura 4.1. Cada una de las curvas representa la relación entre la inercia efectiva y la inercia bruta en función de la relación entre el momento actuante y el momento de agrietamiento. Dichas curvas se generaron dejando la fórmula del ACI en función de las relaciones entre la inercia de agrietamiento con la inercia bruta (I_{cr}/I_g) y el momento actuante con el momento de agrietamiento (M_a/M_{cr}).

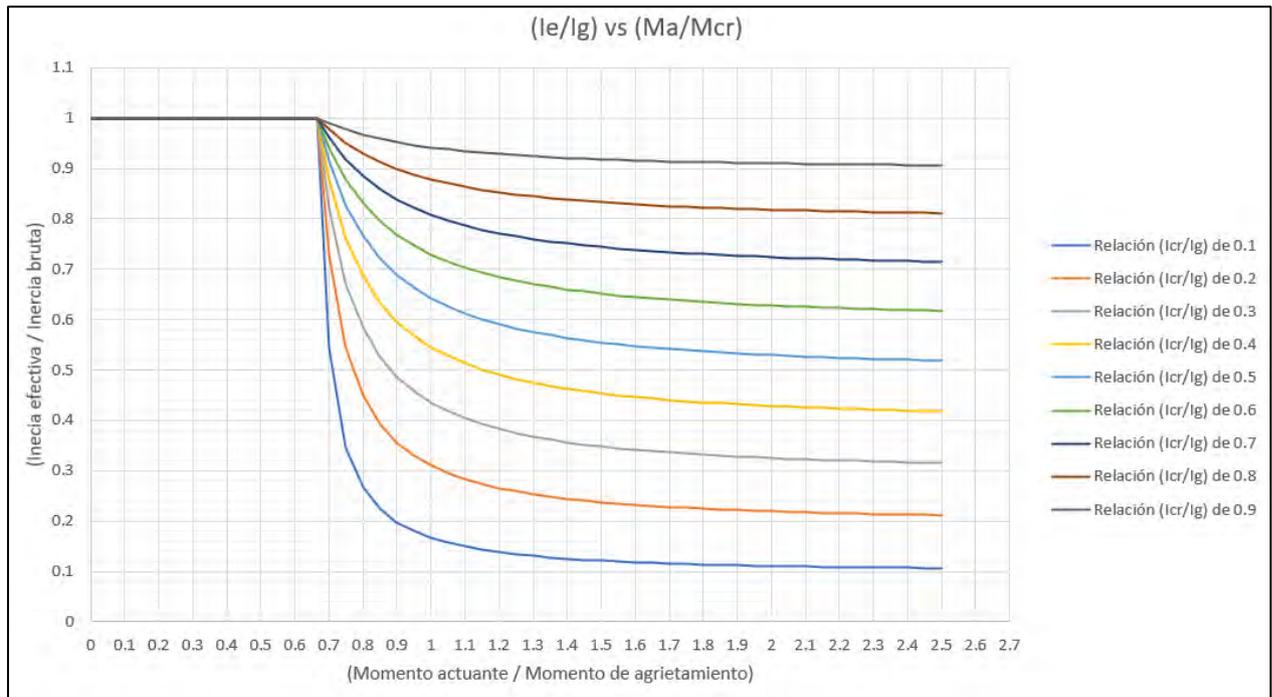


Figura 4-1. Gráfico de inercia efectiva vs relación entre el momento de agrietamiento y el momento actuante.

La fórmula del ACI propone que cuando el momento actuante sea menor que los dos tercios que el momento de agrietamiento se utilice la inercia bruta de la sección. Por ello, cuando (M_a/M_{cr}) sea menor que $2/3$, en la gráfica se alcanza el valor de 1 que representa el 100% de la inercia bruta. Por otra parte, cuando la relación (M_a/M_{cr}) se hace muy elevada, la curva tiene a alcanzar el valor de la inercia de agrietamiento. En la Tabla 4.5 se puede ver que si la relación (M_a/M_{cr}) es muy elevada, el valor de la inercia efectiva no aumenta tanto porcentualmente. Calculando el incremento porcentual en algunos casos se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 4-5. Variación de la inercia efectiva con respecto a la inercia de agrietamiento en función de la relación I_{cr}/I_g y la relación M_a/M_{cr}

Relación (I_{cr}/I_g)	M_a/M_{cr} de 10	M_a/M_{cr} de 5	M_a/M_{cr} de 2.5	M_a/M_{cr} de 2
0.90	0.04%	0.18%	0.72%	1.12%
0.80	0.09%	0.36%	1.44%	2.27%
0.70	0.13%	0.54%	2.18%	3.45%
0.60	0.18%	0.72%	2.93%	4.65%
0.50	0.22%	0.90%	3.69%	5.88%
0.40	0.27%	1.08%	4.46%	7.14%
0.30	0.31%	1.26%	5.24%	8.43%
0.20	0.36%	1.44%	6.03%	9.76%
0.10	0.40%	1.63%	6.84%	11.11%

Se puede ver que cuando la relación (M_a/M_{cr}) es mayor a 2, la inercia efectiva según el ACI 318-19 varía como máximo 11.11%. Gracias a estos resultados podemos diferenciar tres regiones en la gráfica deflexión versus momento actuante de la Figura 4.2. La primera cuando el momento actuante es menor al de agrietamiento y se utiliza la inercia bruta (I_g) en ambos. La segunda región es cuando nos encontramos en un momento actuante menor a dos veces el momento de agrietamiento donde el resultado de la deflexión si tiene variación considerable. Y, finalmente, la tercera región la cual es para valores mayores que el doble del momento de agrietamiento donde el resultado de deflexión es bastante similar al obtenido con la Norma E.060.

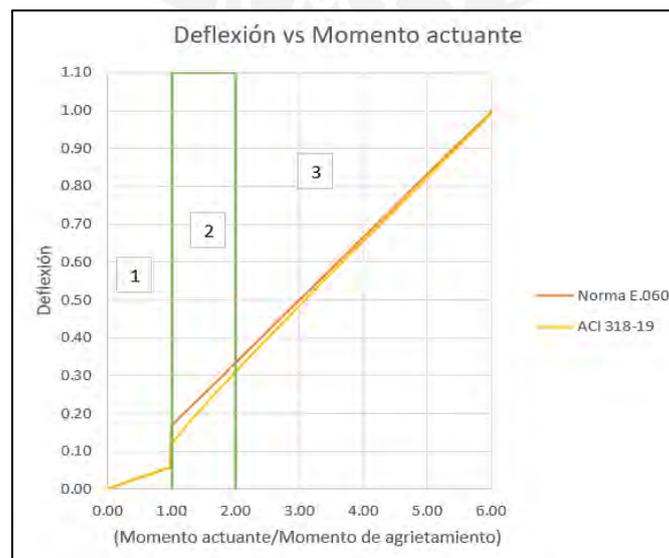


Figura 4-2. Gráfica deflexión versus momento actuante donde se visualizan las regiones para utilizar los criterios.

Finalmente, la variable que diferencia el resultado obtenido por la recomendación del comité 435 del ACI es la importancia que se le da a la inercia efectiva, en cada zona del elemento (central y bordes), para determinar la inercia efectiva promedio a utilizar. En el caso del ACI 318-19 y la Norma peruana E.060, se le da una importancia del 50% a la inercia efectiva central y un 25% para cada inercia efectiva en los extremos, para el caso de elementos continuos. El comité 435 le da una importancia del 70% a la zona central. Esto explica el porqué de su variación respecto de los demás. En caso se desee realizar un análisis más preciso, los porcentajes a considerar para cada zona se deberían obtener en función de los diagramas de momento de cada viga. Se deberá verificar, en el diagrama, la zona de momentos que excede el momento de agrietamiento tanto positivos como negativo. Luego con esto se obtendrá un promedio ponderado de la inercia en función de las longitudes.

II. Deflexiones en losas bidireccionales

En este ejemplo se explica cómo se utilizarían programas computacionales para el cálculo de deflexiones en losas bidireccionales ya que dicho cálculo presenta un comportamiento complejo. Los valores obtenidos, se obtuvieron reduciendo la rigidez a la flexión de las losas en cada sentido de acuerdo a lo estipulado en la Norma peruana E.060. En una primera instancia, se asumió que la inercia efectiva a considerar para toda la losa sería la de la sección central del paño. Esto resultó en un factor de reducción de 0.18 en ambos sentidos. Dicho valor es conservador, ya que se sabe que en una losa bidireccional los momentos varían a lo largo de la dimensión de la losa. Por ello, luego de tomar en consideración la variación del momento actuante y generar una inercia efectiva ponderada, se obtuvieron factores de reducción de 0.57 en 1-1 y 0.71 en 2-2. Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente Tabla 4.6.

Tabla 4-6. Deflexión diferida total considerando la inercia efectiva en el paño central (Primer caso) y un promedio ponderado en función del diagrama de momentos (Segundo caso)

	Primer caso	Segundo caso	% Diferencia
Inercia efectiva 1-1 (cm ⁴)	1.22·10 ⁴	3.77·10 ⁴	209
Inercia efectiva 2-2 (cm ⁴)	1.22·10 ⁴	4.72·10 ⁴	286.9
Deflexión inmediata CM (cm)	1.18	0.78	33.9

	Primer caso	Segundo caso	% Diferencia
Deflexión inmediata CV 100% (cm)	0.49	0.32	34.7
Deflexión inmediata CV 30% (cm)	0.15	0.10	33.3
Deflexión diferida CM (cm)	2.16	1.43	33.8
Deflexión diferida CV 30% (cm)	0.27	0.18	33.3
Deflexión diferida total (cm)	2.92	1.93	33.9

Para un incremento en la inercia efectiva del 209% en el sentido 1-1 y del 287% en el sentido 2-2 se obtuvo una reducción de la deflexión diferida total del 34%. Por lo tanto, si se desea ser conservador, se puede realizar el análisis considerando únicamente la reducción de rigidez de la zona central del paño, puesto que una reducción de 1 cm no amerita el análisis adicional.

4.3 Vibraciones indeseables

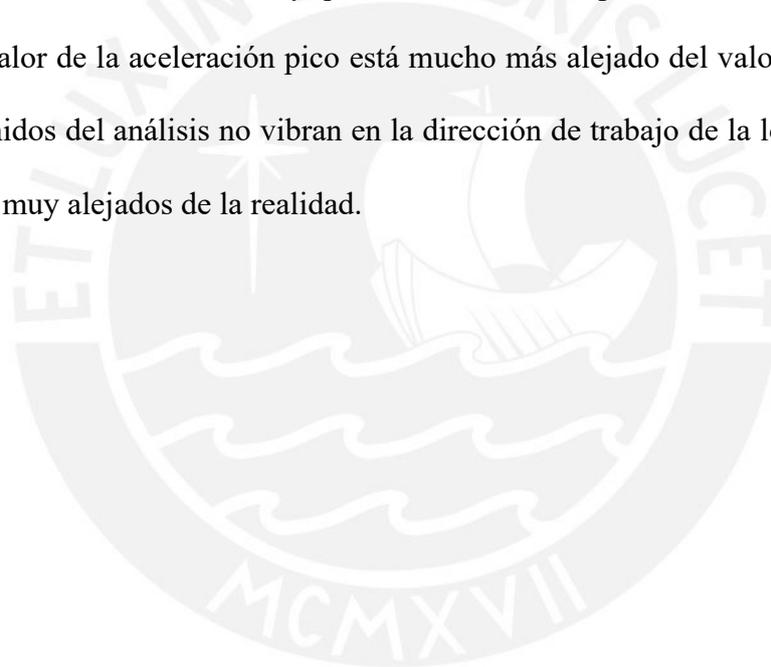
En la Tabla 4.7 se muestran los resultados obtenidos para las frecuencias naturales y aceleraciones pico de los Ejemplos 3.4 y 3.5. Se agruparon ambos resultados, ya que se desea comparar el efecto que tiene el sistema de losas en el estudio de vibraciones.

Tabla 4-7. Frecuencias naturales y aceleraciones pico para la losa aligerada y maciza según las distintas fuentes y, comparación con las frecuencias mínimas planteadas por Allen et al. y Model Code 2010

	Losa maciza		Losa aligerada	
	Richard Bares	Elementos finitos	Allen & Rainer	Elementos finitos
Frecuencia natural (Hz)	7.91	7.69	4.46	6.29
Aceleración pico (% de g)	0.09	0.10	0.36	0.19
Frecuencia mínima según Allen et al. (Hz)	3.05	3.05	3.56	3.56
Frecuencia mínima según Model Code 2010 (Hz)	4.00	4.00	4.00	4.00

Se puede apreciar que los resultados obtenidos mediante el método manual presentado por Richard Bares son bastante similares a los resultados del análisis mediante elementos finitos. Esto quiere decir que lo que se asumió en un principio para el análisis manual fue correcto, ya que se decidió utilizar el coeficiente ϕ que se utiliza para bordes simplemente apoyados con libertad de giro como se explicó en capítulos anteriores. Ambos valores de

frecuencias naturales son muy superiores a los valores mínimos e incluso podrían soportar algunas actividades más demandantes sin problemas. Además, sus aceleraciones pico están muy alejadas del límite de serviciabilidad por lo que se descartaría una posible resonancia. Por otra parte, cuando se analiza el caso de losa aligerada, el efecto de que la losa trabaje en una sola dirección reduce considerablemente su frecuencia natural. Al reducir su frecuencia natural, se incrementó el valor de su aceleración pico el cual se acerca mucho más al límite de serviciabilidad propuesto por Allen, Murray & Ungar. (0.50% de la gravedad para el caso de oficinas y viviendas). Sin embargo, en el análisis mediante elementos finitos se obtuvo una frecuencia natural mucho más elevada y que nos da resultados para la aceleración pico mucho menores. Este valor de la aceleración pico está mucho más alejado del valor límite. Además, los modos obtenidos del análisis no vibran en la dirección de trabajo de la losa por lo que los resultados están muy alejados de la realidad.



Capítulo 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Fisuraciones

Para vigas con arreglos de acero convencionales, diseñadas por resistencia, y sin condiciones ambientales agresivas, no se esperarían problemas de fisuraciones excesivas que puedan atentar contra su integridad estructural. Sin embargo, los anchos de grietas no cumplirían con los requisitos estéticos, ya que, según una encuesta elaborada por el ACI 224 (2007), las personas sienten incomodidad e inseguridad para rangos de grietas entre 0.25 y 0.33 mm.

Es importante recalcar que los cálculos obtenidos no incluyen efectos no estructurales intrínsecos al concreto. Dentro de estos efectos, Neville y Brooks (2010) destacan a la retracción plástica, la retracción por secado y el efecto de la temperatura. Dichos factores incrementarían considerablemente los resultados obtenidos generando problemas estéticos y estructurales. Además, cuando las condiciones ambientales sean distintas, es decir, con requerimientos para anchos de grietas más exigentes, los problemas se volverán mucho más graves. Por ello, es importante saber que se pueden modificar otras variables para controlar dicho problema.

Finalmente, como se observó en el análisis de resultados, la variabilidad de los resultados obtenidos por distintas fórmulas es mínima. Por lo tanto, utilizar cualquiera de los criterios será válido para el análisis en estructuras convencionales. Sin embargo, si se desea diseñar estructuras donde el ancho de grietas sea una necesidad principal se recomienda usar el Model Code. Esto se debe a que involucra un análisis detallado de los efectos del creep y la retracción del concreto.

Deflexiones

En vigas diseñadas convencionalmente por resistencia, no se esperaría tener problemas de deflexiones excesivas, ya que los resultados obtenidos cumplen con los requisitos más exigentes analizados. El criterio del Model Code es el menos recomendado, puesto que tiene muchos cálculos previos y además solo considera el efecto de la inercia efectiva en la sección central.

De las normas restantes, se recomendará su uso en función del momento actuante. Si observamos la gráfica de la Figura 4.2 del acápite anterior, podemos ver que el criterio ofrecido por la Norma E.060 es el más recomendado en la tercera región donde el momento actuante es mayor que dos veces el momento de agrietamiento. Esto debido a que es el criterio que tiene la menor cantidad de cálculos y permite obtener resultados similares al grupo de datos observados. En la segunda región donde el momento de actuante es menor que dos veces el momento de agrietamiento se recomienda utilizar la fórmula de ACI 318-19 si se desea obtener un resultado más ajustado.

Para losas macizas bidireccionales, el análisis mediante elementos finitos nos permite ingresar la inercia efectiva, impuesta por la norma a usar, mediante factores de reducción de rigidez a la flexión en cada sentido. Esto es importante, ya que se simplifica significativamente el cálculo. Cuando se compararon los resultados obtenidos utilizando la reducción por la sección central y la obtenida mediante un ponderado a lo largo de la dimensión de la losa, se obtuvo una variación muy reducida en comparación al incremento de rigidez en cada sentido.

Vibraciones

Las losas macizas diseñadas convencionalmente mediante la metodología LRFD, no parecen presentar problemas de vibraciones. Los resultados obtenidos de los ejemplos muestran cierta holgura frente a este fenómeno e incluso podrían soportar algunas actividades

más demandantes. Además, los resultados obtenidos mediante ambos métodos son bastante cercanos, por lo que utilizar cualquiera de los criterios es altamente recomendable y dependerá únicamente de los recursos disponibles para realizar el cálculo.

Las losas aligeradas son más propensas a las vibraciones y tienen una discrepancia mayor entre los resultados obtenidos entre ambos métodos. Esto se debe a que, como se ha mencionado, el programa considera la rigidez en el sentido perpendicular al aligerado. Por ello, se recomienda utilizar los resultados obtenidos del cálculo manual, ya que son más conservadores y no se tiene estudios que validen los resultados obtenidos de la modelación mediante elementos finitos. Para el caso de losas macizas se utilizará el método propuesto por Richard Bares (1971) y para losas aligeradas se utilizará el propuesto por Allen, Murray & Ungar (1997). Sin embargo, existen otros softwares que tienen la capacidad de analizar un conjunto de paños y podrían ser empleados para la determinación de la frecuencia natural en estos casos complejos.

Capítulo 6. REFERENCIAS

ACI Committee 201 (2002). Guide to Durable Concrete, ACI Manual of Concrete Practice. Proceedings of Katherine and Bryant Mather Conference on Concrete Durability.

ACI Committee 224 (2007). “Causes, Evaluation, and Repair of Cracks in Concrete Structures” (ACI 224. 1R-07), ACI Manual of Concrete Practice, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.

ACI Committee 318 (2019). Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary (ACI 318-R19). American Concrete Institute.

ACI Committee 435 (1966). “Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members,” ACI Journal Proceedings, Vol. 63, No. 6, pp. 637–674.

Adolfo, G. (1993). La confiabilidad estructural y método de diseño LRFD. Magister en ingeniería estructural. Universidad Nacional de Ingeniería.

Aalami, B. O. (2008). Vibration design of concrete floors for serviceability. ADAPT Corporation, Redwood City.

Allen D. E. and Rainer J. H. (1976). “Vibration Criteria for Long-Span Floors”. Canadian Journal of Civil Engineers, Vol. 3, No 2, pp. 165-173.

Allen, D. E., and Murray, T. M. (1993) “Design Criterion for Vibrations Due to Walking”. Engineering Journal - American Institute of Steel Construction, Vol. 30, No 4, pp. 117-129.

Bares, R., (1971). Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms Based on the Elastic Theory. Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin, pp. 626

Bishchoff P.H. (2005). “Revaluation of Deflection Prediction for Concrete Beams Reinforced with Steel and Fiber Reinforced Polymer Bars,” Journal of Structural Engineering, V. 131, No. 5, May, pp. 752-767.

Bond, A. J., Brooker, O., Harris, A. J., Harrison, T., Moss, R. M., Narayanan, R. S., & Webster, R. (2006). *How to design concrete structures using Eurocode 2*. Concrete Centre.

Borosnyói, A., & Snóbli, I. (2010). Crack width variation within the concrete cover of reinforced concrete members. *Epitoanyag - Journal of Silicate Based & Composite Materials*, 2010(3), 70–74. Recuperado de:

<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=59578674&lang=es&site=eds-live&scope=site>

Branson, D. E. (1965). “Instantaneous and Time-Dependent Deflections on Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams”. HPR Report No. 7, Part 1, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, Aug., pp. 1-78.

SENCICO (2019). Reglamento Nacional de Edificaciones. Norma E.060 Concreto Armado. Lima, Perú: Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento.

Frosch R.J. (1999). “Another look at cracking and crack control in reinforced concrete”, *ACI Structural Journal*, 96 (3), pp. 437– 442.

Gergely P. and Lutz L. A. (1968). “Maximum Crack Width in Reinforced Flexural Members,” *Causes, Mechanisms and Control of Cracking in Concrete*, SP-20 (Detroit: American Concrete Institute), pp. 87–117.

Hanagan, L. M. (2005). Walking-Induced Floor Vibration Case Studies. *Journal of Architectural Engineering*, 11(1), 14–18. Recuperado de [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1076-0431\(2005\)11:1\(14\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1076-0431(2005)11:1(14))

Hong, S. U., Na, J. H., Kim, S. H., & Lee, Y. T. (2015). Evaluation of the floor vibration of concrete structures. *Materials Research Innovations*, 19, S5-799-S5-804. Recuperado de <https://doi.org/10.1179/1432891714Z.0000000001196>

Khan et. Al (2013,08 de septiembre). Minimum slab thickness of RC slab to prevent undesirable floor vibration. Department of Civil Engineering, Bangladesh University of Engineering and Technology, Dhaka-1000, Bangladesh, pp 1893-1898

Longinow, A., & Hannen, W. R. (2009). Floor Vibrations in Buildings. *Practice Periodical on Structural Design & Construction*, 14(4), pp. 143–145. Recuperado de

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000048](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000048)

MacGregor, J. (1976), "Safety and Limit States Design for Reinforced Concrete," Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 3, No. 4, pp. 484–513.

McCormac, J. and Brown, R. (2014). Design of reinforced concrete. 9th ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., pp.154-184.

Mehta, P. and Monteiro, P. (2006). Concrete: Microstructure, Properties, and Materials. 3rd ed. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc, pp.121-198.

Meli, R. (2001). Diseño estructural. 2da ed. Ciudad de México: Editorial LIMUSA, pp.55-113.

Murray, T.M., D. Allen and E. Ungar, (1997). Design Guide No. 11 "Floor Vibrations Due to Human Activity". American Institute of Steel Construction (AISC), Chicago, IL.

Neville, A. and Brooks, J., 2010. *Concrete Technology*. 2nd ed. Londres: Pearson Education Limited, pp.233-257.

Nilson, A. (2001). Diseño de estructuras de concreto. 12ma ed. Bogotá: McGRAW-HILL INTERAMERICANA S.A., pp.194-220.

Ottazzi, G. (2016). Apuntes del curso Concreto Armado 1. 16ta ed. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, pp. 78-315.

Smith, A., Hicks, S. & Devine, P. (2009). SCI Publication P354 Design of Floors for Vibration: A New Approach. Steel Construction Institute, Ascot: Reino Unido.

Szilard, R., (1974). Theory and Analysis of Plates- Classical and Numerical Methods. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp 724.

Wight, J. (2015). Reinforced concrete, mechanics, and design. 7th ed. Boston: Pearson, pp. 13-460.