

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Diseño de un dispositivo didáctico en torno a la transformada de
Hough para la formación de ingenieros mecatrónicos

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las
Matemáticas que presenta:

César Elmer Molina Quispe

Asesora:

Cintya Sherley Gonzales Hernandez

Lima, 2022

RESUMEN

Esta investigación se enmarca en el problema de la enseñanza de la matemática en la formación de futuros ingenieros. Para abordar este problema se indaga la relación entre las matemáticas enseñadas y los cursos de ingeniería. Con ese fin se realiza la identificación y análisis de praxeologías en la disciplina intermediaria procesamiento digital de imágenes.

Además, se plantea como objetivo general analizar la transformada de Hough para el diseño de un dispositivo didáctico definido en el paradigma del cuestionamiento del mundo, que permita a los estudiantes de ingeniería mecatrónica desarrollar actividades de modelización matemática que relacionen algunos elementos del procesamiento digital de imágenes y los primeros cursos de matemática.

Para el logro de este objetivo, se ha tomado en cuenta elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en particular el modelo praxeológico extendido propuesto por Castela. El marco teórico ha permitido estudiar las instituciones involucradas en la formación de ingenieros, analizar praxeologías y luego formular la propuesta de un dispositivo didáctico que involucre actividades de modelización. La metodología empleada en la investigación se sustenta en trabajos previos de Macías, Romo Vázquez, Siero entre otros. Se compone de dos fases, las cuales están relacionadas con el análisis preliminar, el diseño del recorrido de estudio e investigación y análisis *a priori* de la ingeniería didáctica.

Como resultados se menciona: el análisis de los referentes epistemológicos de la transformada de Hough en la institución de la disciplina Procesamiento Digital de Imágenes, la identificación y análisis de las praxeologías mixtas dentro de esta disciplina tanto de producción como de enseñanza. Lo cual sirvió como base para determinar la Praxeología mixta de la Transformada de Hough. Finalmente, considerando un contexto de la ingeniería mecatrónica se formuló una cuestión generatriz que permitió a través de análisis *a priori* proponer un posible Recorrido de Estudio e Investigación en torno a la transformada de Hough.

Palabras clave: Teoría antropológica de lo didáctico, formación de ingenieros, recorrido de estudio e investigación, transformada de Hough, procesamiento digital de imágenes.

ABSTRACT

This research is framed within the problem of the teaching of mathematics in the training of future engineers. To address this problem, the relationship between the mathematics taught and the engineering courses are investigated. To this end, the identification and analysis of praxeology in the intermediate discipline of digital image processing are carried out.

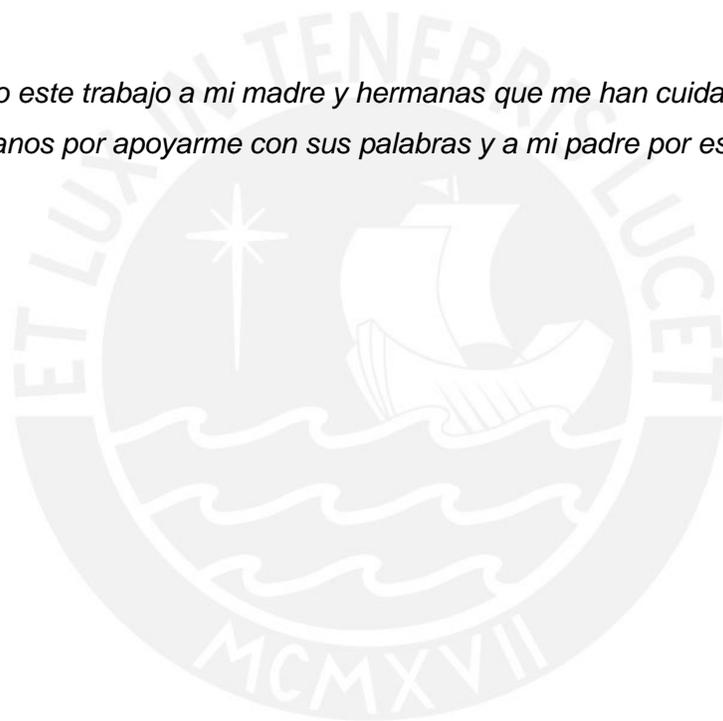
In addition, the general objective is to analyze the Hough transform for the design of a didactic device defined in the paradigm of questioning the world, which allows mechatronics engineering students to develop mathematical modeling activities that relate some elements of digital image processing and the first courses of mathematics.

To achieve this objective, elements of the Anthropological Theory of Didactics have been taken into account, in particular the extended praxeological model proposed by Castela. The theoretical framework has made it possible to study the institutions involved in engineering education, analyze praxeology, and then formulate the proposal of a didactic device involving modeling activities. The methodology used in the research is based on previous works by Macias, Romo Vázquez, Siero, and others. It consists of two phases, which are related to the preliminary analysis, the design of the study and research path, and the a priori analysis of the didactic engineering.

As result, we mention: the analysis of the epistemological referents of the Hough transform in the institution of the Digital Image Processing discipline, the identification, and analysis of the mixed praxeology within this discipline both of production and teaching. This served as a basis for determining the Praxeology mixed of the Hough Transform. Finally, considering the context of mechatronic engineering, a generative question was formulated that allowed, through a priori analysis, to propose a possible Study and Research Path around the Hough Transform.

Keywords: Anthropological theory of didactics, engineering education, study and research path, Hough transform, digital image processing.

Dedico este trabajo a mi madre y hermanas que me han cuidado desde niño, a mis hermanos por apoyarme con sus palabras y a mi padre por estar en mis recuerdos acompañándome.



AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia por brindarme la libertad de continuar con este proyecto, alentándome en momentos que fueron difíciles en estos años de estudio y también por comprender mi ausencia en cada uno de los compromisos.

A la profesora Cintya Gonzales, por sus correcciones, sugerencias y motivarme a continuar con el trabajo de investigación. Agradezco infinitamente por su dedicación, paciencia, confianza, reflexiones y por motivarme a seguir con el estudio.

A la profesora Avenilde Romo por brindarnos su tiempo, compartir sus reflexiones y valiosos aportes para la mejora del trabajo de investigación.

Al profesor Francisco Ugarte por sus sugerencias, exigencias y observaciones que permitieron mejorar el trabajo de investigación.

A la profesora Cecilia Gaita, por esas valiosas clases en Teoría de aprendizaje de las matemáticas, Álgebra y aplicaciones y también por motivarnos a investigar.

A la profesora Jesús Flores, por sus valiosos comentarios en los cursos de métodos y temas de investigación que encaminaron este trabajo.

En general, quedo muy agradecido con todos mis estimados profesores de la maestría en cuyas clases he disfrutado su pasión por enseñar, sus reflexiones sobre la problemática de la enseñanza de la matemática y la educación del Perú. También sus trabajos y exámenes que han sido motivadores y exigentes.

A todos mis amigos que trajeron sus diversas experiencias a las clases los cuales han sido enriquecedores y también motivadoras. A mi gran amiga Hemsy por su enorme corazón y pasión por aprender y que me motivaron a iniciar con la maestría. A mis amigas Andrea y María por darme ejemplo de superación en momentos adversos y darle música en este proceso.

Al Instituto de Ciencias y Humanidades por acogerme en sus aulas y permitirme ser parte de su plana docente. Quedo muy agradecido por todo lo que he aprendido allí.

Finalmente quiero agradecer a la línea de investigación Epistemología de las matemáticas en la didáctica de las matemáticas: la antropología del conocimiento matemático y el diseño de secuencias didácticas de Pontificia Universidad Católica del Perú por el espacio académico para enseñar, reflexionar, investigar y cuestionar.

ÍNDICE

Introducción.....	9
Capítulo I: Problemática.....	12
1.1 Investigaciones de Referencia.....	12
1.2 Justificaciones	32
1.3 Pregunta y objetivos de la investigación.....	37
Capítulo II: Aspecto Teórico y Metodológico	39
2.1 Elementos de la Teoría Antropológica de los Didáctico.....	39
2.2 Marco metodológico.....	49
Capítulo III: Análisis Praxeológico de la Transformada de Hough.....	52
3.1 Análisis de la praxeología mixta en una institución de investigación y enseñanza en ingeniería	52
3.2 Elección de una Institución de Ingeniería e Identificación de Praxeologías Mixtas en el Procesamiento Digital de Imágenes que Involucran a las Matemáticas.....	53
3.3 Análisis de Praxeologías Mixtas en el Procesamiento Digital de Imágenes susceptibles de ser Transpuestas al Aula	88
3.4 Praxeología mixta de la Transformada de Hough	96
3.5 Identificación de cuestiones generatrices.....	113
Capítulo IV: Diseño de la Propuesta de un Recorrido de Estudio e Investigación	116
4.1 Planificación del Desarrollo de un posible Recorrido Estudio e Investigación y análisis a Priori	116
4.2 Medio y media en el análisis a priori del posible recorrido de estudio e investigación	144
Resultados.....	148
Conclusiones.....	152
Referencias.....	155

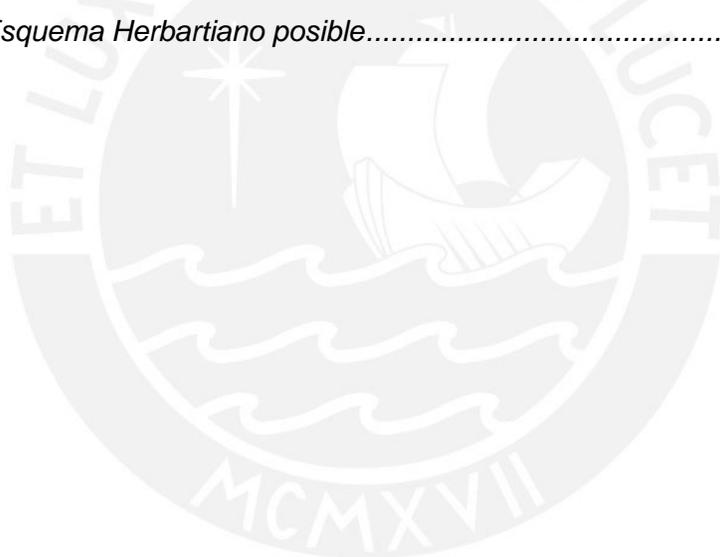
LISTA DE TABLAS

Tabla 1 <i>Perfil del Egresado de Ingeniería Mecatrónica de la PUCP</i>	35
Tabla 2 <i>Tópicos Tratados en el INDRUM 2020</i>	36
Tabla 3 <i>Fases de la Metodología de Investigación</i>	50
Tabla 4 <i>Campo Laboral de los Ingenieros Mecatrónicos</i>	53
Tabla 5 <i>Bits, rango de valores de los pixeles y usos</i>	67
Tabla 6 <i>Documentos para el Análisis Praxeológico</i>	69
Tabla 7 <i>Praxeología Mixta de Adquisición de una Imagen Digital</i>	89
Tabla 8 <i>Praxeología de la Transformada de Hough</i>	90
Tabla 9 <i>Praxeología de la Transformada de Hough por Duda y Hart (1972)</i>	91
Tabla 10 <i>Praxeología de la Transformada de Hough en textos bibliográficos</i>	92
Tabla 11 <i>Determinando la Curva en el Espacio de Parámetros</i>	94
Tabla 12 <i>Tipo de Tarea y Técnicas en la PM-TH</i>	96
Tabla 13 <i>Tareas y técnicas puntuales sobre la Imagen asociadas a MATLAB</i>	97
Tabla 14 <i>Tareas y Técnicas para Determinar la Matriz de Hough o matriz acumuladora (H)</i>	98
Tabla 15 <i>Tecnología y Teoría asociada en la Praxeología Mixta Transformada de Hough</i>	103
Tabla 16 <i>Objetivos de la Institución de Enseñanza Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales</i>	106
Tabla 17 <i>Unidad de Procesamiento Digital de Imágenes</i>	107
Tabla 18 <i>Medias para el REI-TH</i>	109
Tabla 19 <i>Temas del Programa Analítico de AMGA que está asociada a la Praxeología mixta TH</i>	109
Tabla 20 <i>Temas del Programa Analítico de FCAL que está asociada a la Praxeología mixta TH</i>	110
Tabla 21 <i>Praxeología de la Transformada de Hough Escolar</i>	113
Tabla 22 <i>Planificación de proceso de estudio de la sesión 1 (presencial o sincrónica)</i>	118
Tabla 23 <i>Planificación de proceso de estudio de la sesión 2 (virtual o asincrónica)</i>	124
Tabla 24 <i>Planificación de proceso de estudio de la sesión 3 (presencial o sincrónica)</i>	126
Tabla 25 <i>Planificación de proceso de estudio de la sesión 4 (virtual o asincrónica)</i>	132
Tabla 26 <i>Planificación de proceso de estudio de la sesión 5 y 6 (presencial/virtual)</i>	136
Tabla 27 <i>Planificación de proceso de estudio de la sesión 7 y 8 (presencial/virtual)</i>	141

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. <i>Circulación de Praxeologías Matemáticas entre Instituciones</i>	43
Figura 2. <i>Campos de trabajo de la IA</i>	55
Figura 3. <i>Etapas Fundamentales en el Procesamiento Digital de Imágenes</i>	58
Figura 4. <i>Elementos en la Adquisición de una Imagen</i>	60
Figura 5. <i>Geometría de la Lente y el Sensor de un Sistema de Imagen</i>	61
Figura 6. <i>Escala o niveles de grises</i>	62
Figura 7. <i>Nivel de Intensidad de una Imagen en el Segmento AB</i>	63
Figura 8. <i>Muestreo y Cuantización</i>	63
Figura 9. <i>Imagen Digital</i>	64
Figura 10. <i>Representaciones de una Imagen Digital</i>	65
Figura 11. <i>Representación Gráfica del Arreglo de la Imagen Digital</i>	66
Figura 12. <i>Ilustración de la Transformación Plana</i>	71
Figura 13. <i>Diagrama por Bloques del Aparato Electrónico Propuesto por Hough</i>	72
Figura 14. <i>Diagrama de bloques sobre circuitos electrónicos de transformación de planos</i>	74
Figura 15. <i>Plano Cartesiano y el Espacio de Parámetros</i>	76
Figura 16. <i>Espacio de parámetros</i>	77
Figura 17. <i>Geometría para el Algoritmo de la Transformada de Hough</i>	78
Figura 18. <i>Plano XY y Espacio de Parámetros</i>	79
Figura 19. <i>Representación Normal de la recta y el $\rho - \theta$ Plano</i>	80
Figura 20. <i>Ecuación punto-pendiente de la recta</i>	82
Figura 21. <i>Rectas en el Plano Cartesiano y Puntos en el Espacio de Parámetros</i>	83
Figura 22. <i>Código en MATLAB</i>	84
Figura 23. <i>Salida del programa</i>	85
Figura 24. <i>Vista gráfica del proceso de detección de líneas rectas en MATLAB</i>	86
Figura 25. <i>Algoritmo en MATLAB de la Transformada de Hough</i>	87
Figura 26. <i>Tarea en la PTH</i>	93
Figura 27. <i>Función en MATLAB que Determina H, ρ y θ ($\tau 5 \text{MATLAB}$)</i>	100
Figura 28. <i>Función en MATLAB que Determina los máximos en H ($\tau 6 \text{MATLAB}$)</i>	101
Figura 29. <i>Función en MATLAB que Determina las rectas en X ($\tau 7 \text{MATLAB}$)</i>	102
Figura 30. <i>Circulación de Praxeologías entre las Instituciones de la Formación Matemática de Ingenieros</i>	111
Figura 31. <i>Contexto para la Cuestión Generatriz</i>	114

Figura 32. Posibles medias de los grupos de estudiantes	117
Figura 33. Primer mapa de cuestiones derivadas a priori	123
Figura 34. Algoritmo para el ejercicio 2.....	125
Figura 35. Segunda mapa de cuestiones derivadas a priori.....	131
Figura 36. Gráfica de los senoides	133
Figura 37. Rectas identificadas con tres o más puntos.....	134
Figura 38. Ecuaciones de las rectas identificadas	135
Figura 39. Tercer mapa de cuestiones derivadas a priori	138
Figura 40. Salida del programa en Google Colab	140
Figura 41. Términos Posibles de Búsqueda en Google por parte de los Estudiantes...	144
Figura 42. Posibles medias de los grupos de estudiantes en la búsqueda de respuestas	146
Figura 43. Posibles Elementos del Medio respecto a la Transformada de Hough.....	147
Figura 44. Esquema Herbartiano posible.....	151



INTRODUCCIÓN

La presente investigación aborda el tema de la formación matemática de los ingenieros y el diseño de actividades de modelización matemática en torno a praxeologías en la disciplina intermedia. Se considera a las actividades de modelización como “procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente” (Sala et al., 2020, p. 550) y que se origina gracias a cuestiones problemáticas planteadas por una comunidad de estudio. Además, mencionan que estas actividades son la razón de ser de las organizaciones matemáticas y se reconstruyen para dar respuesta a las cuestiones que la comunidad de estudio se va planteando.

Por otro lado, según Barquero et al. (2003) los REIs son dispositivos didácticos que permiten la incorporación de actividades de modelización en la enseñanza de las matemáticas (citado en Sala et al., 2020). También, manifiestan que la generación de respuestas a la cuestión generatriz necesita de la construcción de modelos, el uso y cuestionamiento de su validez, lo que permite nuevas cuestiones que son puestas otra vez en un proceso de modelización. De esta manera, nos dicen que el cuestionamiento de las respuestas es esencial para la “estructura arborescente y articulada de los REI” (Sala et al., 2020, p. 551). Finalmente, mencionan que el REI explicita, institucionaliza y evalúa todo el proceso de modelización, que permite salvar con ello la atomización y el aislamiento de las matemáticas.

También, Bartolomé et al. (2018) señala que la problemática encontrada en la enseñanza de la matemática y la disciplina del ingeniero es que el conocimiento está atomizado. No existe una conexión entre la matemática que se enseña y el uso de esta en las disciplinas ingenieriles. Los problemas que se abordan no se relacionan con el contexto de la ingeniería y hay una fuerte algoritmización de los problemas.

Frente a esta problemática, Barquero et al. (2011) afirma que el diseño e implementación de un Recorrido de Estudio e Investigación genera en los estudiantes de ciencias e ingeniería capacidades de investigación y autonomía para construir sus conocimientos.

En este siglo XXI, el Perú se enfrenta a un reto determinado por el avance vertiginoso de la tecnología que exige una mejor preparación de los ingenieros para abordar problemas complejos.

En ese sentido, al analizar las escuelas de ingeniería de algunas universidades peruanas, observamos que, en la formación del ingeniero, en particular, la enseñanza de la matemática presenta un enfoque tradicional que Chevallard lo conoce como el paradigma de la visita de

obras. Esto se puede notar al analizar los programas analíticos de las asignaturas en la formación del ingeniero.

En relación con esta problemática expuesta, en esta investigación se propone un dispositivo didáctico en torno a la Transformada de Hough, que relaciona la institución de la disciplina intermediaria (Procesamiento Digital de Imágenes) y la institución de enseñanza matemática (asignaturas de matemática del primer ciclo de la escuela de ingeniería).

Para el cual, partimos de una pregunta de investigación general: ¿Cómo el análisis de la transformada de Hough determina el diseño de un dispositivo didáctico definido en el paradigma del cuestionamiento del mundo, que permita a los estudiantes de ingeniería mecatrónica desarrollar actividades de modelización matemática que relacionen algunos elementos del procesamiento digital de imágenes y los primeros cursos de matemática?

El objetivo de esta investigación se centra primero en la identificación y análisis praxeológico de actividades de modelización en la disciplina intermediaria del Procesamiento Digital de Imágenes, para luego determinar una praxeología, la cual se llamó Praxeología mixta de la Transformada de Hough. La identificación y el análisis permitió formular una cuestión generatriz abierta, que a través de un análisis *a priori* nos permitió observar la generación de uno de los posibles Recorridos de Estudio e Investigación.

Para el logro de los objetivos, que planteamos en esta investigación se consideró los procedimientos metodológicos desarrollados en las investigaciones de Macias (2012), Macias y Romo-Vázquez (2014), Guzmán (2106), Siero (2017), Vázquez (2017), Galindo (2019) y Castela y Romo-Vázquez (en prensa).

La estructura de la investigación comprende cuatro capítulos, los cuales se detallan a continuación.

En el capítulo I, se presentan las justificaciones académicas y profesionales. Luego se plantea la pregunta de investigación, junto con los objetivos generales y específicos.

En el capítulo II se desarrolla algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que se van a emplear en la investigación. Luego, se presenta la metodología para el diseño de un dispositivo didáctico con base en la modelización matemática para la formación de ingenieros.

En el capítulo III, se identifica y analizan praxeologías presentes en las instituciones de producción y enseñanza de la disciplina intermediaria Procesamiento Digital de Imágenes. Luego, de dicho análisis y considerando la institución de enseñanza de la matemática, se determina la praxeología mixta de la transformada de Hough. También, se realiza una transposición a la institución de enseñanza de las matemáticas, al cual llamamos praxeología de

la transformada de Hough escolar. Finalmente se plantea la cuestión generatriz.

En el capítulo IV, se presenta a través de un análisis *a priori* la organización didáctica con base en la cuestión generatriz y se realiza una propuesta de uno de los posibles Recorridos de Estudio e Investigación.

Finalmente se presenta las conclusiones del trabajo de investigación tomando en cuenta los elementos del marco teórico y la metodología empleada, así como la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.



CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, se presenta, las investigaciones de referencia bajo tres criterios que tienen el fin de abarcar la Teoría Antropológica de lo Didáctico, diseño de dispositivos didácticos, modelización matemática, los recorridos de estudio e investigación, formación de ingenieros.

Como segunda parte, se mencionan las justificaciones que se relacionan con antecedentes profesionales de la carrera de ingeniería mecánica de algunas universidades del Perú. Además, se presenta la pregunta de investigación, junto con los objetivos generales y específicos que guiaron la investigación.

1.1 Investigaciones de Referencia

En la formación de ingenieros, en particular la enseñanza de las disciplinas de ingeniería (control automático, visión computacional, procesamiento digital de imágenes, inteligencia artificial, análisis estructural, investigación operativa, entre otras), hay un uso demandante de modelos matemáticos para explicar, justificar, validar sus resultados y predicciones. Desde un panorama amplio en estos modelos, se encuentran elementos del cálculo, de la geometría analítica, del álgebra lineal, de las ecuaciones diferenciales, de las series de Fourier, etc. La evidencia de esta afirmación se encuentra en diversas investigaciones, en particular las que se consideran como antecedentes para esta investigación.

Por otro lado, en el perfil profesional del ingeniero, se mencionan que deben generarse habilidades de modelización, uso de herramientas matemáticas para resolver problemas ingenieriles, relacionar diversas disciplinas científicas para afrontar problemas, el uso de programas computacionales entre otras.

Entonces, esto nos invita a reflexionar sobre cómo la enseñanza de la matemática permite a los futuros ingenieros proporcionar herramientas necesarias para que puedan abordar sus cursos de especialidad y generar habilidades que sus programas incentivan.

Bajo esta perspectiva, se considera que los antecedentes que se presentan en esta sección brindarán elementos para poder abordar el problema de la enseñanza de la matemática en el contexto de la formación del futuro ingeniero.

Es importante para el presente trabajo de investigación analizar antecedentes relacionados con la formación de ingenieros, la modelización matemática, y el diseño de dispositivos didácticos, como se ilustra a continuación:

- Investigaciones relacionadas con el modelo praxeológico extendido, se tiene como antecedentes a Castela (2016), Vázquez et al., 2016; Guzmán et al., 2019; Galindo, 2019; Castela y Romo-Vázquez, en prensa; Diego-Montecón et al., 2021.
- Investigaciones relacionadas con los Recorridos de Estudio e Investigación, Modelo Epistemológico de Referencia e Ingeniería Didáctica, se identificó como antecedentes a Bosh, 2018; Bartolomé et al., 2018; García et al., 2019.
- Investigaciones relacionadas con la modelización matemática, se tiene como antecedentes a Frejd y Bergsten, 2018; a Sala et al., 2020 y de Lucas (2015) se presenta puntos relacionados a la modelización matemática desde la TAD.

1.1.1 Investigaciones Relacionadas con el Modelo Praxeológico Extendido

El diseño de actividades didácticas a partir de la institución usuaria es considerado como un problema importante dentro de las investigaciones de la didáctica de la matemática. Por ende, es oportuno analizar artículos relacionados a esta problemática, ya que en esta investigación nuestro interés es analizar las praxeologías habitadas en las instituciones de producción y enseñanza del ingeniero. Es oportuno presentar como punto de partida en estas referencias el trabajo de investigación de Castela (2016). Esto se debe a que la autora presenta el concepto de *boundary crossing* abordado en la teoría de la actividad histórico-cultural con la finalidad de complementar a la teoría antropológica de lo didáctico en el estudio de instituciones como las comunidades laborales. Luego, desarrolla en el sentido de la TAD lo que es una cognición institucional, para luego estudiar la tecnología práctica a partir de sus funciones tecnológicas, además de presentar un modelo sobre la circulación de saberes entre instituciones.

El objetivo de esta investigación es proporcionar herramientas epistemológicas para la investigación de praxeologías matemáticas que habitan en el ámbito profesional. La problemática que considera en esta investigación está relacionada con el hecho de que el saber matemático se transforma al ser utilizado en el ámbito profesional. Por tanto, señala que estas transformaciones deben ser consideradas para el diseño de la formación profesional.

En ese sentido, plantea incorporar a la tecnología de la técnica una componente práctica, el cual se constituye de conocimientos relacionados a las necesidades prácticas en el uso de la técnica. Respecto a estos conocimientos, señala que en general “no derivan de teorías, no se validan por demostraciones, sino de manera empírica, en el seno de la actividad del matemático” (Castela, 2016, p. 16). La componente práctica de la tecnología lo describe a partir de las funciones tecnológicas (describir la técnica, facilitar la aplicación de la técnica, motivar la técnica y sus componentes, evaluar la técnica, validar la técnica y explicar la técnica).

Por otro lado, presenta un esquema que describe el proceso de los efectos transpositivos que sufren las praxeologías matemáticas durante la circulación interinstitucional. Dichos efectos como señala Castela (2016) “afectan posiblemente todos los componentes de la praxeología inicial, al mismo tiempo que se desarrolla un logos propio con orientación práctica” (p. 24).

Castela (2016) concluye que una investigación que se interesa por la importancia de las matemáticas en el campo profesional debe considerar la indagación epistemológica con la siguiente hipótesis: “cada institución ejerce una actividad cognitiva propia; aun cuando importa praxeologías de otras instituciones productoras de matemáticas, o no; las desarrolla y las adapta a sus condiciones instituciones específicas” (Castela, 2016, p. 27). También, señala que es necesario investigar la componente práctica y el discurso racional del modelo praxeológico propuesto por Chevallard.

Por otra parte, consideramos algunas investigaciones que indagan el contexto de la ingeniería que involucran elementos de la matemática en sus actividades de modelización. Como primera referencia, se tiene la investigación de Vázquez et al. (2016).

Las autoras realizan un análisis de la actividad de modelización matemática en torno a la institución usuaria y la institución de enseñanza de la disciplina intermediaria (Análisis de Señales, AS). Luego, plantean una propuesta de transposición para su enseñanza en el Álgebra Lineal (AL). El objetivo de esta investigación es desarrollar una metodología que adapte modelos matemáticos desarrollados en el contexto ingenieril a la enseñanza de las matemáticas. En particular, proponen adaptar el método de separación ciega de fuentes (*Blind Source Separation, BSS*) a la enseñanza del AL.

En esta investigación, se emplea como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), debido a que su eje central es identificar relaciones institucionales en la ingeniería y praxeologías matemáticas presentes en los modelos empleados en el ámbito profesional del ingeniero. La TAD provee de elementos de análisis de las actividades matemáticas y de modelización gracias a sus nociones de praxeología e institución.

Para iniciar la investigación, mencionan que se hizo una revisión bibliográfica de artículos de investigación y divulgación para luego realizar un estado del arte del método BSS. También, revisaron tutoriales y modelos matriciales respecto a este método. En conjunto, estos documentos formaron parte de la institución productora, AS. Asimismo, identificaron las aplicaciones de la BSS en diversas ramas de la ingeniería, lo que permitió a las autoras considerar textos sobre análisis de señales y métodos matemáticos. Además, consideraron las entrevistas a expertos en BSS, AS y documentos especializados de la BSS. Luego, identificaron a partir del análisis praxeológico del método de BSS, el modelo matemático de la forma $As = x$,

donde A representa la matriz de mezcla, s el vector fuente de origen y x el vector de señales mezcladas. Siendo el tipo de tareas separar una mezcla de señales y la técnica es el cálculo de una matriz B de separación que sea aproximadamente la inversa de A . La tecnología se basa en métodos estadísticos para la obtención de B .

Vázquez et al. (2016) concluyen que el análisis praxeológico del BSS en la institución de producción, AS, permite transponer los elementos matemáticos presentes en este modelo a la institución de enseñanza matemática, AL. Es decir, dicho modelo bajo ciertas condiciones está asociado en el AL a la tarea de resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$, para A una matriz invertible, x y b vectores.

Finalmente consideran que las diversas aplicaciones que se pueden realizar con la BSS, permiten generar cuestiones generatrices que sirvan de base al diseño de actividades en la formación matemática de ingenieros entorno a la modelación en la biomedicina, el procesamiento de señales y la radioastronomía.

Continuando con los antecedentes que plantean el diseño de actividades didácticas desde la TAD, consideramos el de Guzmán et al. (2019) en el cual realizaron la propuesta de una metodología para el diseño de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI). En particular, las autoras indican que el curso de Sistemas de Control Automático que se imparte en la especialidad de mecatrónica de la Universidad Tecnológica de Nayerit, se enseñaba sin ningún prerrequisito en matemáticas avanzadas, a pesar de que dicho curso requería de conocimientos en ecuaciones diferenciales ordinarias, función de transferencia y transformada de Laplace.

Frente a esta problemática, las autoras consideran que la modelización matemática es fundamental en la formación de ingenieros y técnicos. Por ende, proponen el problema de investigación planteando la siguiente pregunta “¿cómo diseñar una actividad didáctica basada en modelización matemática que relacione la enseñanza de las matemáticas con la enseñanza de especialidad?” (Guzmán et al., 2019, p. 417). En ese sentido, las autoras, tienen como objetivo diseñar un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) a partir de un curso de especialidad, Sistemas de Control Automático.

Las autoras para el diseño del REI se basaron en cuatro fases metodológicas propuestas por Macias y Romo-Vázquez (2014). A continuación, mostramos las cuatro fases propuestas en Guzmán et al. (2019):

- *Elección de un contexto extramatemático:* -En esta fase, hacen la elección del curso de control automático ya que en este se encuentran modelos matemáticos para el análisis de sistemas físicos.

- *Análisis praxeológico e identificación de modelos matemáticos:* -En esta fase, analizan las leyes físicas de Ohm y Kirchoff que gobiernan a los sistemas eléctricos, y establecen las funciones de transferencia que modela estos sistemas gracias al empleo de la transformada de Laplace
- *Análisis de las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia y su relación con $E(M)$:* -En esta fase, se realiza el análisis de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias relacionadas a las leyes de Kirchoff y Ohm.
- *Diseño de un REI de control:* -En la cuarta fase, la cuestión generatriz es obtenido a partir de las fases previas y es planteada por Guzmán et al. (2019) en los siguientes términos: “¿cómo realizar el control de velocidad proporcional analógico de un motor de corriente directa?” (p. 423)

Luego, plantean la situación problemática con el fin de que los estudiantes solo puedan hacer uso de las ecuaciones diferenciales ordinarias que son resultado de aplicar la ley de Ohm. Esta restricción es justificada por las autoras por el hecho de que en el ámbito profesional los proyectos ingenieriles tienen límites que son impuestos por las empresas o clientes, por ejemplo, el tiempo, la economía, etc.

Guzmán et al. (2019), concluyen que es necesario reconocer las características de cómo se generan las actividades de modelización matemática y cómo estas se hacen presentes en el contexto de la ingeniería. Además, proponen que las actividades de modelización formen parte de la enseñanza de las matemáticas, por ser estos conectores entre el mundo matemático y no matemático. Para el diseño e implementación del REI, las autoras mencionan que es importante analizar las ciencias de la ingeniería y la práctica profesional, porque la modelación tiene un papel clave. Además, afirman que se necesita del trabajo multidisciplinario para lograr una relación fructífera entre la enseñanza de la ingeniería y la enseñanza de las matemáticas.

Dentro de esta misma línea de trabajo, se puede mencionar también la investigación de Galindo (2019) en donde se utiliza la misma metodología, pero en el contexto de la investigación en ingeniería química. Proponen el diseño de dispositivos didácticos que puedan ser aplicados a la formación de futuros ingenieros químicos.

En particular, teniendo en cuenta las restricciones de las instituciones educativas e instituciones usuarias el autor considera que el REI propuesto se pueden implementar en el segundo año de ingeniería química en cursos que comprenden dentro de su plan analítico temas

de modelación y estadística. El objetivo de esta investigación es diseñar un REI basado en el análisis del ámbito profesional del ingeniero químico.

El autor emplea el marco teórico de la TAD, porque le permite abordar el análisis de las instituciones: de producción (disciplinas matemáticas); de enseñanza de las matemáticas y usuarias (ingeniería química). Encuentra praxeologías mixtas dentro de la ingeniería química que contiene elementos de la misma rama y de la disciplina matemática. Según el autor, para analizar y explicitar los elementos dentro de esta praxeología, así como las relaciones existentes entre estos elementos emplea el modelo praxeológico extendido.

Por otro lado, la TAD brinda herramientas para que las actividades matemáticas dentro del aula se desarrollan bajo el estudio de cuestiones. Estos dispositivos se conocen como REIs y el desarrollo de esta, según el autor, se realizó gracias a la dialéctica de cuestiones-respuestas, y la dialéctica de *media-medio*. Cabe señalar que gracias a este trabajo el autor solo se enfocó en el diseño del REI y su validez interna.

Para ello, consideró cuatro fases: 1) Elegir el contexto extramatemático; 2) Identificar praxeologías mixtas susceptibles de ser transpuestas al aula; 3) Analizar las praxeologías de la metodología QSAR y 4) Diseño del REI.

El método QSAR (*Quantitative Structure-Activity Relationship*) es un método empleado en la investigación de la ingeniería química. Esto consiste, según el autor, en métodos matemáticos, estadísticos y disciplinas de la ingeniería química para predecir actividades biológicas y propiedades de los compuestos químicos.

La investigación basada en las fases de la metodología empleada logró identificar la praxeología del método QSAR, la cual comprende: el tipo de tareas está relacionado con la obtención de modelos predictivos de cualidades de compuestos químicos a partir de sus estructuras. La técnica consistió en el empleo del método QSAR la cual se compone de elementos de la matemática e ingeniería química. Respecto a las tecnologías, comprenden aspectos de la matemáticas, estadística, química, fisicoquímica, toxicología, bioquímica y empleo de software. Dentro de la teoría, se observa la topología, álgebra lineal, estadística, química orgánica, fisicoquímica y sistemas computacionales. La cuestión generatriz planteada es: “¿cuál es el modelo válido más adecuado para predecir la [propiedad] del [grupo de sustancias] a partir de su estructura” (Galindo, 2019, p. 72).

La metodología que plantea Galindo (2019) es el diseño del REI-QSAR basada en las condiciones enmarcados por la institución educativa y la consideración de una cuestión generatriz más específica. Propone, a partir de un análisis a priori, que su estudio puede ser desarrollado en nueve partes. Además, plantea las posibles implementaciones, generaciones de

cuestiones derivadas y sus posibles respuestas por parte de los estudiantes, los posibles *medias* consultadas y usadas en el análisis de datos, entre otros aspectos que permiten enrumbar el REI-QSAR. También, indica que, para el diseño del dispositivo didáctico, la cuestión generatriz es clave. Es una cuestión “abierta e investigable” que logra producir el recorrido de estudio e investigación.

Por otro lado, indica que el análisis *a priori* permite brindar viabilidad al proceso de estudio en el aula, más primordialmente la cuestión generatriz se pueda desarrollar en el aula. Esto se debe a la posibilidad de generar posibles preguntas derivadas, permite la interacción entre *media* y *medio*. Además, el análisis *a priori* proporciona al profesor un referente para su organización didáctica particular.

Galindo (2019) señala, que una propuesta teórica metodológica del diseño de un REI es una vía para relacionar saberes en las instituciones disciplinares y usuarias con referentes epistemológicos diferentes. También, mencionan que posibilitan el análisis de praxeologías mixtas y esta permite identificar los procesos didácticos dentro de las instituciones usuarias.

Afirma que esta forma de diseño didáctico logra “[...] llevar la práctica del ingeniero en el contexto de la investigación al aula, permitiendo a los estudiantes conocer un uso práctico del conocimiento e incluso visualizar posibles aplicaciones adicionales” (Galindo, 2019, p. 94).

Otra investigación identificada dentro del diseño de actividades didácticas que tiene su origen en el ámbito profesional es la investigación de Castela y Romo-Vázquez (en prensa). En este trabajo de investigación, las autoras realizaron el análisis desde la TAD de tres ejemplos. El fin es evidenciar la naturaleza de la epistemología industrial y el fenómeno de transposición entre instituciones de diferente índole. Además, indican las dificultades que los profesores encuentran a la hora de adecuar una situación problemática habitada en el campo profesional o laboral del ingeniero o técnico a la enseñanza dentro de los centros de formación. Asimismo, analizan si los tipos de tareas dentro de las instituciones mostrados en los ejemplos admiten justificaciones que pueden ser expresadas solo con elementos discursivos. Las autoras tienen como objetivo mostrar que, al considerar instituciones de diversa índole, es necesario analizar su epistemología como elemento clave para comprender la transformación, la legitimación, la transposición y la difusión de praxeologías.

Respecto a sus resultados, se puede mencionar que, en el primer ejemplo, analizaron el problema de la medida de área de un terreno poligonal dentro de la topografía. Encontraron que la praxeología empleada por el experto comprende elementos adecuados de la praxeología matemática de la geometría analítica, la trigonometría del triángulo rectángulo, circunferencia trigonométrica, sistema de medidas angulares, polígonos y otros. Las adecuaciones que se

puede notar es por ejemplo que el eje X y eje Y es considerado en la topografía como el eje este-oeste y eje norte-sur, respectivamente. Además, destacan que el concepto de rumbo empleado en la topografía es desconocido en las matemáticas. También, observan que las proyecciones hacia los ejes cardinales están en función de seno (horizontal) y coseno (vertical) que es al contrario de lo que se conoce en trigonometría. Asimismo, notan que los números decimales empleados en la medida de lados y proyecciones siempre están representados con dos cifras decimales, aun cuando estas sean ceros. En ese sentido, observan que si un docente quiere implementar una secuencia didáctica basada en el tipo de tareas presentadas en la topografía tendrá que presentar los dos enfoques, necesitando así un trabajo interdisciplinario.

Para señalar los siguientes ejemplos, es necesario indicar aquí que Castela y Romo-Vázquez (en prensa) consideran como tipo de tareas: Describir la técnica, Validar, Explicar la técnica, Motivar, Hacer más fácil utilizar la técnica y Evaluar.

En el segundo ejemplo presentan algunos resultados de un trabajo de tesis relacionado con la investigación epistemológica de manuales de metrología empleado en una planta de producción de puertas de automóviles. Es decir, observan cómo estos manuales determinan que “una empresa o rama de la industria opera como institución, difundiendo a sus sujetos recursos praxeológicos que constituyen un referente que limita las prácticas. Además [...] estos manuales contribuyen a institucionalizar las praxeologías” (p. 7).

Además, concluyen que los procesos de producción y sistemas de medición están en función de estándares que las instituciones usuarias determinan a partir de sus manuales propuestos por sus centros de investigación y desarrollo. También, indican que las técnicas que justifican los tipos de tareas Evaluar, Mejorar y Validar no son todas discursivas, sino que tienen componentes estadísticos y empíricos.

El último ejemplo analizado por las autoras está relacionado con el diseño de actividades de modelización para la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de sistemas e informática. Se tiene como base el análisis que se hace del PageRank, conjunto de algoritmos que hace más eficiente la clasificación de las páginas Web y es empleado por los motores de búsqueda como el Google. La intención de las autoras es analizar la justificación discursiva de los tipos de tareas que tiene una función didáctica: Describir y Hacer más fácil. Mencionan que la investigación se fundamentó en artículos que muestran las matemáticas empleadas en la construcción de los algoritmos de PageRank. La pregunta que plantean las autoras gira en torno a los tipos de tareas que resuelve el PageRank. En este sentido, mencionan tres tipos de tareas: Representar la estructura matemáticamente, definir el proceso para asignar una puntuación de importancia a los sitios y calcular la importancia del sitio.

Concluyen que las técnicas empleadas en las instituciones del campo profesional contienen elementos de la matemática. Por tanto, sugieren que es posible analizarlas con el objetivo de identificar praxeologías susceptibles de ser transpuestas a la enseñanza de la matemática en los centros de formación. La transposición institucional puede ser posible, reconociendo que cada institución tiene su epistemología lo que conlleva a generar una recomposición de bloques tecnológicos teóricos para lograr el diseño de actividades didácticas en el nivel superior que relacionen diversas disciplinas. Por tal motivo, sugieren que es necesario trabajos de investigación sobre las matemáticas empleadas en las instituciones usuarias para dar una mayor perspectiva y herramientas a los profesores de matemáticas para que puedan lograr, por su cuenta, el diseño de actividades didácticas basadas en contextos no matemáticos

Por otro lado, en Diego-Montecón et al. (2021) se realiza un análisis de las matemáticas en el contexto de la vida real, para ello estudia las matemáticas empleadas por un grupo de 312 personas (clientes) y la matemática usada por el empleado de una tienda de carpintería. Los clientes emplean las matemáticas escolares para realizar proyectos de carpintería, por ejemplo, hacen cálculo de perímetros, áreas óptimas, costos, interpretación de diseños y planos. El objetivo de la investigación es analizar cómo es la matemática dentro de la vida cotidiana en un contexto no escolar y cómo las matemáticas escolares son empleadas en ese contexto.

Los autores emplean el marco teórico de la TAD, donde se presenta las nociones de praxeología e instituciones. Dentro de este estudio, nuevamente se considera la distinción entre instituciones de acuerdo con su relación con el conocimiento como instituciones de producción, de enseñanza y usuarias. Asimismo, se considera la existencia de una circulación de praxeologías, de las que resultan praxeologías mixtas, efecto de las transposiciones. Para analizar estas praxeologías, los autores usan el modelo praxeológico extendido, que comprende, por ejemplo, instituciones usuarias (tienda de carpintería), enseñanza (institución escolar), tareas de carpintería (proyectos domésticos de los clientes). En cambio, las técnicas, tecnologías y teoría están relacionadas con la matemática escolar y la carpintería.

Para la investigación, los autores eligieron una tienda española cuyas ventas de productos de carpintería se realizan si los clientes previamente hacen tareas matemáticas de sus proyectos domésticos. Por parte de la tienda, sus empleados solo ofrecen asesoramiento en caso de que estén hecho mal los cálculos de los clientes. Observaron las tareas realizadas por 312 clientes de 30-50 años con una formación al nivel de educación secundaria y el empleado de la tienda con una experiencia en el rubro de carpintería de 25 años. Se emplearon observaciones y entrevistas a lo largo de dos meses del 2017. Mencionan que las observaciones fueron transcritas por los investigadores, lo que permitió recabar información sobre las

praxeologías mixtas. Las entrevistas con el empleado les ayudaron a comprender las praxeologías usadas por los clientes y del empleado. Los datos obtenidos fueron analizados por el grupo de investigadores, de los cuales en el trabajo de investigación se realizaron el análisis de la praxeología de dos actividades que son denominados por los autores como Renovación del suelo de una casa y Construyendo un armario para un nicho. Finalmente, observaron que una gran mayoría de clientes realizaron un inadecuado uso de las técnicas matemáticas en las tareas de carpintería y también notaron que la falta de conocimiento de las tecnologías de carpintería dificultó a la mayoría de los clientes realizar una solución correcta de las tareas.

Los autores concluyen que una formación sólida en matemáticas de las personas no es suficiente, para que ellas puedan resolver problemas de la vida real que requieran matemáticas. Esto debido a que las matemáticas en estas instituciones usuarias tienen sus propias reglas que nos son enseñadas en las escuelas. En ese sentido, mencionan que evaluar las competencias matemáticas bajo el concepto de “capacidad de resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana” (Digo-Montecón et al., 2021, p. 76) se contrapone a lo que se realiza en las escuelas, según los autores la formación se centra en contextos idealizados, no reflejan el problema real, sino que son problemas contextualizados.

Además, los autores mencionan que la formación matemática para afrontar diversos contextos cotidianos en las escuelas es una tarea que no se ajusta a la realidad, debido a las diversas y complejas relaciones entre la matemática escolar y no escolar. Señalan que las matemáticas y didácticas dentro de estos contextos extramatemáticos requieren ser analizados para identificarlas y así ampliar el panorama de las matemáticas escolares para su enseñanza y aprendizaje.

1.1.2 Investigaciones Relacionadas al Recorrido de Estudio e Investigación, Modelo Epistemológico de Referencia e Ingeniería Didáctica

Bosch (2018) realiza en esta investigación un análisis de aspectos teóricos de la TAD. También, muestra el desarrollo de un nuevo paradigma o contraparadigma que contiene al paradigma de enseñanza y aprendizaje imperante en la actualidad. Además, observa cómo este nuevo paradigma de enseñanza y aprendizaje es aplicado en algunos trabajos de investigación en la TAD gracias a la noción de los Recorridos de Estudio e Investigación (REIs). El objetivo de la investigación es fundamentar -dentro de la TAD- a los REIs como proceso de estudio e investigación que pueden abordar fenómenos didácticos relacionados con el paradigma de la visita de obras.

Explica, desde la perspectiva de la TAD, que el objetivo de la didáctica de la matemática es el estudio de las limitaciones y condiciones de los conocimientos en los procesos de difusión de estas; además, estos conocimientos son modelados por las praxeologías.

Por otro lado, caracteriza la difusión de las praxeologías a partir de los sistemas didácticos, que se compone de estudiantes (X) y profesores (Y), y se genera cuando se aprende una praxeología (P) y se representa por $S(X, Y, P)$. La autora menciona dos nociones importantes relacionados al sistema didáctico: la dimensión económica y ecológica.

Del análisis de la dimensión ecológica, a partir de la escala de niveles de codeterminación didáctica, Bosch (2018) señala que el proceso de enseñanza y aprendizaje imperante en nuestra sociedad actual es la organización de praxeologías a través de planes de estudio. Además, bajo la guía de un profesor, los estudiantes van a aprender los elementos principales, así como sus aplicaciones, dejando de lado la razón de ser de estos conocimientos. A esta forma de enseñanza y aprendizaje se le conoce como paradigma de la visita de obras (Chevallard, 2013).

Propone un cambio de paradigma de la visita de obras, para no partir de la perspectiva de que las matemáticas ya están acabadas, que sus elementos y técnicas son precisas, y que no da lugar a cuestionarse sobre su razón de ser. Asimismo, se necesita incluir este paradigma de la visita de obras en un paradigma del cuestionamiento del mundo, cuyo elemento que la define es el REI y está representado por el esquema Herbartiano. Además, menciona que este esquema permite describir cualquier proceso de estudio e investigación. En este esquema, para el REI, el sistema didáctico está integrado a una cuestión y ya no a una praxeología. También, indica que el estudio de la cuestión genera un proceso de indagación dentro de un medio, cuyo objetivo es encontrar una respuesta que satisfaga al sistema didáctico. Además, dicho proceso está caracterizado por las dimensiones de cronogénesis, mesogénesis y topogénesis, que son productos de las dialécticas preguntas-respuestas, media-medios e individuo-colectivo, respectivamente.

Después de fundamentar los REIs, realiza una exploración de las experimentaciones realizadas en los niveles de secundaria y terciario. En primer lugar, Bosch señala puntos de coincidencia en la implementación de los REIs:

1. Todos tuvieron su origen en una cuestión generatriz, el cual se consideró que era propuesta por un externo. Además, hubo un cambio de roles: el profesor era el director de estudio y el estudiante un consultor junior, para dar importancia a la cuestión generatriz frente a las obras que estaban implícitas.
2. La pregunta planteada fue única para toda la clase, lo cual generó un trabajo colectivo, pero luego se dividieron en pequeños equipos para resolver tareas específicas. Para

ver los avances de los estudiantes, promovieron la presentación de informes semanales. Como dificultades, señala que no disponían de recursos pedagógicos para gestionar el trabajo colectivo.

3. Los REIs se desarrollaron por largos periodos con sesiones de 50 minutos a 2 horas a la semana. Se observó un cansancio por parte de los estudiantes, que, según la autora, se debió a la falta de que los estudiantes no se responsabilizaron en la resolución del problema planteado y por el fracaso en la gestión del proceso de estudio e investigación por parte del profesor.

En los REIs implementados, Bosch (2018) menciona que hubo dificultades a la hora de asumir las nuevas responsabilidades por parte de los estudiantes y profesores. Señala, también, que tuvieron dificultades para desligarse del contrato didáctico tradicional.

En los REIs implementados, observó que, frente al acceso de nuevas fuentes de información para responder la cuestión generatriz, se establecieron nuevas estrategias de validación como comparación de diversas fuentes, preguntas a expertos y rechazo de respuestas no acordes a las necesidades de la investigación. Por su parte, el profesor notó que se enfrentaba a conocimientos que estaban fuera de su alcance.

Además, menciona que un análisis *a priori* de cuestiones derivadas y respuestas posibles que los estudiantes podrían proponer permitió asegurar una buena marcha al proceso de indagación y darle al profesor propuestas posibles que los estudiantes podrían dar a la cuestión generatriz. En los REIs experimentados, según la autora, la evaluación consistió en informes durante el desarrollo, a través de escritos o participaciones orales, organización de paneles con profesores y expertos, y de presentaciones finales de las respuestas a la cuestión generatriz y las derivadas.

También, señala que los REIs implementados parten de cuestionar los modelos epistemológicos establecidos en las escuelas. Además, se debe tomar en cuenta que en las escuelas secundarias los conocimientos están ordenados en un plan curricular y que toda actividad planteada gira alrededor de esta. Entonces, si se proponen problemas reales, estos no puedan ser tratados en su entorno real; por ejemplo, las actividades de modelización. Bajo esta problemática, indica que las investigaciones proponen una reorganización de las praxeologías en la enseñanza y aprendizaje. Los REIs ofrecen, según la autora, “mejores condiciones de existencia para las organizaciones praxeológicas alternativas” (p. 4047). En estos trabajos de investigación, donde la cuestión generatriz de los REIs es alimentada por respuestas provenientes de un plan curricular, según la autora, se les llama REI finalizado.

Además, la aplicación de este REI finalizado en el ámbito universitario, cubriendo casi todo el contenido propuesto en un curso de matemática del primer año Ciencias Naturales, fue implementado como un curso de taller de modelización dictado de forma paralela al curso oficial. Asimismo, su estructura fue modificándose a medida de los requerimientos que necesitaban los estudiantes en su proceso de indagación, lo cual es una “situación ideal del paradigma del cuestionamiento del mundo” (p. 4049)

Concluye que en el paradigma del cuestionamiento del mundo genera cambios en las escalas de niveles de codeterminación, donde el nivel de los sistemas didácticos, $S(X, Y, Q)$, precede a los niveles específicos de las disciplinas. Esto se debe a que la pregunta generadora no corresponde a ningún conocimiento preestablecido sino va a depender de las decisiones que tome la comunidad de estudio respecto a los medios que les proporcione respuestas o preguntas derivadas adecuadas para resolver el problema. En ese sentido, señala que la restricción que propicia esta disposición en los niveles de codeterminación es la falta de recursos didácticos y pedagógicos que permitan al profesor y a los estudiantes estructurar, es decir, encaminar a buen puerto los procesos de estudio e investigación.

Según Bosch (2018), en las investigaciones iniciales, se observó que los estudiantes y profesores usaron sus propios lenguajes, establecieron el camino y ritmo a seguir en su proceso de indagación. En la actualidad, se están usando la dialéctica preguntas y respuestas para gestionar los procesos de indagación, pero que estas aún son problemas abiertos dentro de las investigaciones sobre los REIs.

Bartolomé et al. (2018) realizaron un estudio exploratorio, así como el análisis, diseño e implementación de un REI en un curso de Resistencia de Materiales de la carrera de Ingeniería Mecánica de una universidad de Barcelona durante seis meses, con un grupo de 12 estudiantes entre 19 y 25 años, dos de ellos repitentes. El REI propuesto se basó en la metodología de la Ingeniería Didáctica. También, hacen un análisis de la dialéctica *media-medio* y mapas Q-A usados en el desarrollo del REI por la comunidad de estudio, así como análisis mediante encuesta sobre las ventajas y desventajas respecto a esta nueva forma de enseñanza y aprendizaje. El objetivo de esta investigación es evaluar la viabilidad, condiciones y limitaciones de la metodología de Ingeniería Didáctica y un REI, cuando estas son aplicados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un curso de ingeniería mecánica.

Mencionan como fuente de datos al diario de clase del profesor realizada en cada sesión; donde quedó registrada las preguntas y respuestas trabajadas, tareas abordadas por los grupos de trabajo, fuentes de información y aspectos de organización durante la sesión por parte de los estudiantes. También, consideraron las presentaciones de los estudiantes, donde manifestaban

sus respuestas provisionales a las preguntas específicas que se tenían en los mapas Q-A. Por último, los investigadores realizaron una encuesta para recabar la opinión, actitud y motivación relacionados a esta nueva forma de enseñanza y aprendizaje.

A continuación, se muestran las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica que desarrollaron. En la fase correspondiente al análisis preliminar, resaltan que en la enseñanza tradicional del curso de Resistencia de Materiales (RM) el conocimiento está atomizado, los ejemplos están desligados de problemas reales, el objetivo del curso se centra en darle herramientas a los estudiantes solo para aprobar los exámenes; asimismo, se observó el fenómeno de la algoritmización de los problemas. En la segunda fase, análisis a priori, Bartolomé et al. (2018) manifiestan que se eligió una pregunta generadora que cumpliera tres condiciones: una cuestión que esté dentro del contexto real de la ingeniería, que sea posible su tratamiento en laboratorio y que posibilite abordar el contenido del curso de RM. Por otro lado, los investigadores vieron conveniente presentar la metodología del REI a los estudiantes a partir de un ejemplo práctico y familiar. Para la gestión del REI, los investigadores propusieron cuatro etapas para una adecuada distribución de tareas a realizar durante las sesiones de clase. También, consideraron un tipo de evaluación que garantizó la participación de los estudiantes.

En la tercera fase, correspondiente al análisis en vivo y desarrollo del REI, manifiestan que la pregunta generatriz planteada a los estudiantes fue acerca de los requerimientos de una cama con listones individuales que pueda resistir un máximo de peso. Una vez planteada la cuestión generatriz, los estudiantes crearon un mapa general Q-A que guió el proceso de indagación.

En la cuarta fase, correspondiente a los resultados y discusión, señalan que la dialéctica *media-medio* permitió observar un cambio de actitud de los estudiantes a la hora de validar la fuente, también asumieron una actitud activa en su aprendizaje, ya que el profesor dejó de ser la fuente de validación de sus descubrimientos.

En ese sentido, mencionan que el REI dependía de la participación del profesor y que este les dio una amplia libertad a los estudiantes para realizar sus indagaciones. Se generó un gran ambiente de colaboración, pues tenían un mismo fin: proporcionar una solución al cliente que planteo la pregunta inicial. Observaron también que, gracias a la diversidad de personalidades, se enriqueció el proceso de indagación.

Por otro lado, los mapas Q-A les permitieron a los estudiantes y profesores encaminar adecuadamente las actividades durante el REI. Los autores manifiestan que los estudiantes estuvieron más motivados, por lo que obtuvieron mejores resultados en comparación con los estudiantes en clases tradicionales del curso.

Concluyen que el REI diseñado e implementado a partir de la metodología de la Ingeniería didáctica permite resolver los fenómenos didácticos mencionados; además, logró desarrollar competencias relacionados con RM, así como la promoción del trabajo en equipo. Por otro lado, señalan que los estudiantes estuvieron motivados por el hecho de que estaban trabajando en un proyecto que se asemejaba a lo que iban a realizar en su ámbito laboral. También, manifiestan que los mapas Q-A le permitieron a la comunidad de estudio, durante el REI, planificar y estructurar el trabajo. Finalmente, manifiestan que la dialéctica media-medio les permitió analizar y validar el conocimiento en la comunidad de estudio.

García et al. (2019) realizaron un estudio de elementos de la TAD que fundamentan el diseño de dispositivos didácticos bajo el paradigma del cuestionamiento del mundo. Además, para validar sus propuestas analizan tres ejemplos donde se refleja la metodología indicada por los autores.

Los autores a partir del diseño de tareas respecto a la TAD tienen como objetivo “la identificación de fenómenos didácticos y la exploración de nuevas formas de organizar los procesos de estudio de manera que se puedan modificar los efectos que provocan dichos fenómenos didácticos” (p. 90).

En este sentido, manifiestan que la noción de REI, dentro de la TAD, es un “modelo de tipo de actividad que permitiría desarrollar proceso de estudio escolares” que se basa en los postulados del paradigma de estudio de cuestiones, que va a complementar, ampliar el paradigma de la visita de las obras y cuyo “proceso de diseño [...] en la TAD se apoya en los principios básicos de la metodología de la ingeniería didáctica” (p. 81).

A continuación, se muestran tres investigaciones analizadas por los autores para ejemplificar este proceso de diseño.

En el primer ejemplo, se identifica el objeto matemático de las relaciones funcionales entre magnitudes, para lo cual se construyó un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) que permite integrar el tema de proporcionalidad, estudiada en la aritmética, y la teoría de funciones reales, estudiada en álgebra. Los autores señalan que, bajo este MER, se hace explícito el fenómeno didáctico de la desarticulación de la matemática escolar. Finalmente, señalan que el REI, diseñado con base en este MER, está “centrado en la exploración de tipos de variación entre magnitudes y en la construcción de modelos” (p. 83).

La cuestión generatriz planteada aborda una situación de ahorro de dinero. Mencionan que el diseño del REI “ofrece un material de aula que incide sobre el fenómeno de la desarticulación en el estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria, mostrando el papel de la modelización matemática” (p. 85).

El segundo ejemplo que se aborda es la integración de la modelización matemática a la enseñanza de los cursos de matemática en las escuelas de ciencias e ingenierías. Señalan que dentro de la TAD se asume que toda actividad matemática se puede considerar como una actividad de modelización matemática. Bajo esta premisa, la modelización matemática es considerada como un tema de las matemáticas. Además, en esta investigación se encontraron con el fenómeno didáctico de aplicacionismo, donde la actividad de modelización matemática se reduce a una aplicación de los conocimientos matemáticos divorciada de su pertinencia, eficacia y problemática, que se genera cuando son aplicados a contextos no matemáticos. García et al. (2019) plantean abordar este problema de investigación a partir del diseño, experimentación y análisis ecológico de un REI. La cuestión generatriz, planteada para el diseño de este REI, está relacionada con las dinámicas poblacionales. Según los autores, la estructura del REI permitió abordar la enseñanza del contenido de los programas considerando a la matemática como una herramienta de modelización.

En el tercer ejemplo, abordan el estudio de la elasticidad en la formación de ingenieros mecánicos. El diseño del MER se centra en el “diseño de piezas de forma genérica bajo circunstancias diversas de carga” (García et al., 2019, p. 89). El fenómeno didáctico que señalan es la diferencia que existe entre los problemas abordados en los cursos de Elasticidad y problemas que se realizan en la práctica profesional. Según los autores, el REI parte de una cuestión generatriz sobre el diseño de una pieza de bicicleta, auto, etc.

Finalmente, señalan la importancia de la dimensión epistemológica, la dimensión económica-institucional, la dimensión ecológica y la dimensión normativa que aparecen en un problema didáctico. Según las autoras, las dos primeras permiten aclarar “los fines y objetivos del trabajo de diseño dentro de la TAD” (p. 90). Mencionan que la ecológica aborda las condiciones de vida de las praxeologías en las diversas instituciones, lo que nos permite responder las cuestiones sobre su ser. Finalmente, la normativa se refiere a que un REI no es una norma de cómo enseñar un objeto matemático, sino que es una “respuesta científica a fenómenos didácticos identificados en las instituciones” (p. 91)

También, señalan, dentro de las conclusiones, que la implementación de un REI trae varios cambios en las instituciones escolares, como el hecho de que los estudiantes tienen más responsabilidades en el proceso de estudio y que el docente deja de ser la autoridad del conocimiento, el que tiene todas las respuestas.

1.1.3 Investigaciones Relacionadas con la Modelización Matemática

A lo largo de la investigación, se hace referencia a la noción de modelización matemática. En ese sentido, es necesario conocer, cómo se aborda esta noción, dentro del marco teórico de la TAD.

Según Lucas (2015), la TAD aporta las siguientes interpretaciones acerca de la noción de modelización matemática:

- a) Se integra la modelización intramatemática en la noción de “modelización”.
- b) Se interpreta la modelización matemática como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar.
- c) Los modelos matemáticos como “maquinas”. Crítica y rechazo de la ilusión representacionista.
- d) La modelización no es únicamente un aspecto de las matemáticas, sino que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización.
- e) La modelización matemática es un proceso recursivo.
- f) El modelo epistemológico de la TAD no permite considerar la modelización de componentes aislados de una Organización Matemática como “conceptos”, “técnicas” o “problemas”. (Lucas, 2015, pp. 22-24)

Respecto al ítem (a) menciona, que la modelización extramatemático contiene etapas de modelización intramatemática. También, considera que los problemas dentro de la matemática se resuelven construyendo un modelo matemático. En (b), indica que: “La TAD describe la modelización matemática como un proceso de construcción y reconstrucción de organizaciones matemáticas de complejidad y completitud crecientes (puntuales, locales, regionales) que parte de una cuestión problemática que constituye la “razón de ser” de dicho proceso” (Lucas, 2015, p. 23). En (c), se refiere, a que una interpretación del modelo, en términos de representación e imagen, trae como consecuencia el fenómeno de la ilusión representacionista. Chevallard (1992, citado en Lucas 2015, p. 23) menciona que un modelo es como una máquina que funciona produciendo conocimientos relacionados al sistema modelizado. En (d), señala, que en toda actividad matemática se identifica sistemas que pueden ser matemáticos o extramatemáticos. Cuya formulación de cuestiones dentro de ella, motivan y generan la construcción de modelos. En (e), indica, que en un proceso de modelización existe una progresiva construcción de

modelos, y que se van integrando a los sistemas que cada vez son más matematizados.

Finalmente, en (f), señala que:

Los procesos de modelización pasan a describirse en términos de una articulación entre diversas OM, identificándose la actividad de modelización con una actividad funcional dirigida a la exploración de situaciones problemáticas mediante la construcción de modelos matemáticos que tienen estructura praxeológica y que permiten resolver las situaciones planteadas al tiempo que hacen emerger nuevos y más profundos problemas. (Lucas, 2015, p. 24)

Bajo esta interpretación de los procesos de modelización, Lucas (2015) señala, que desde la perspectiva de la TAD los procesos de modelización son:

procesos de construcción y articulación de praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004) con el objetivo de dar respuestas a ciertas cuestiones problemáticas relativas a cierto ámbito de la realidad matemática o extramatemática. Así, la modelización matemática puede funcionar como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar (García, 2005; Barquero, 2009; Serrano, 2013). (Lucas, 2015, p. 24)

Continuando con la indagación, sobre las nociones de modelización, se presenta el trabajo de investigación de Frejd y Bergsten (2018). Aquí los autores investigan las concepciones sobre la noción de modelización matemática que tienen un grupo de especialistas en esta área. El objetivo de esta investigación es caracterizar las nociones de modelización matemática en las diversas áreas profesionales. El estudio se realiza a partir de una entrevista bajo la pregunta: “¿Qué significa para usted la modelización matemática?” (Frejd y Bergsten, 2018, p. 120). Luego, a partir de esta caracterización, proponen la integración de las actividades de modelización en los planes de estudio y también formulan algunas pautas para el diseño de actividades de modelización en el aula.

Frejd y Bergsten (2018) mencionan que no adoptan un enfoque teórico específico sobre la modelización matemática y consideran un análisis temático para su investigación exploratoria.

La entrevista se realizó a nueve profesionales expertos en modelización en compañías y universidades de nivel doctorado en sectores de la banca, tráfico, la industria aérea, clima, seguro, física, biología y otras. De estas entrevistas, los autores tienen como resultados una caracterización de la modelización matemática, la cual se sistematiza en cuatro ejes temáticos principales: descripción, comprensión, abstracción y negociación.

Los autores consideran que los diversos enfoques sobre la modelización traen confusión a la hora de realizarla en el sistema educativo. También, señalan que en su investigación “la palabra “modelización” se asocia tanto al proceso de modelización como al concepto de modelización” (Frejd y Bergsten, 2018, p.123). Resaltan que no hay una distinción clara respecto a la modelización como concepto o noción, o como proceso o actividad. Además, mencionan que sus entrevistados no realizan su trabajo según los ciclos de modelización que en el sector educación está formalizada.

Finalmente, los autores proponen ciertos principios didácticos para la planificación de actividades de enseñanza que se relacionan con la modelización matemática. A continuación, se presenta la propuesta de (Frejd y Bergsten, 2018, pp.125-126):

- Explicitación del objetivo de la actividad: Hacer explícito el objetivo del trabajo de modelización (describir-comprender-predecir-participar en un debate crítico); cómo una descripción/recreación matemática del problema puede contribuir al objetivo
- Centrarse en el problema: establecer/definir el problema y considerar el problema en su totalidad durante todo el trabajo de modelización
- Nivel de sistema: Ver el problema enmarcado en un sistema, considerando sistemas parciales que deben modelarse por separado
- Supuestos y simplificaciones: Cuestionar por qué son importantes las variables / parámetros elegidos, y lo que no se ha tenido en cuenta (y cómo puede contribuir al “error”).
- Pertinencia y precisión de los datos: Considerar la calidad de los datos/cantidades utilizados para estimar la influencia de las variables seleccionadas dentro del modelo
- Papel de la tecnología: Comprender que el uso de ordenadores (y otros tipos de tecnología) es crucial para el trabajo de modelización, pero también supone en sí mismo una actividad de modelización
- Cómo funciona el modelo: Considerar cómo funciona el modelo cuando se pone a prueba (validación); si es posible probarlo o no, y si es útil y eficaz para su propósito

- La comunicación: Discusión/negociaciones entre los participantes a lo largo de la actividad de modelización sobre las cuestiones anteriores.

Bajo otra perspectiva, a cerca de las actividades de modelización, tenemos el trabajo de investigación de Sala et al. (2020), en el cual se proponen interpretar los procesos de modelización e indagación respecto a la Teoría Antropológico de lo Didáctico. Como objetivos, señalan que su investigación les permitirá:

- (1) Poner de manifiesto los distintos puntos de contacto entre ambos procesos, y (2) mostrar la necesidad de construir un modelo descriptivo y analítico común que dé sentido e integre modelización e indagación dentro de un paradigma mucho más amplio (Sala et al., 2020, p.549).

Para el logro de sus objetivos, analizan un REI experimentado en el nivel secundario con 30 estudiantes de 12-14 años, donde se relacionan dos disciplinas: matemática e historia. En el desarrollo del proyecto, participaron profesores de matemáticas e historia. Además, destacan que los elementos de la TAD permiten dar un marco adecuado para la enseñanza de la matemática con base en la indagación. Además, consideran que el REI es un modelo didáctico que logra dar un papel principal a los procesos de modelización e indagación. Señalan que la propuesta del REI es considerar a las matemáticas como herramientas clave de modelización para el estudio de cuestiones y elaboración de respuestas, mientras que la indagación está relacionada con las dialécticas como las de las *media* y *medio* y el mapa de cuestiones y respuestas.

Sala et al. (2020) mencionan que la cuestión generatriz está involucrada con una situación arqueológica de búsqueda del tipo de edificio, al cual corresponde las ruinas romanas encontradas en Badalona, cercana a Barcelona. La cuestión planteada es: ¿qué esconde estas ruinas? Además, indican que el proceso de indagación de los estudiantes estuvo apoyado por las fases de: “(1) formulación de las primeras cuestiones derivadas y conjeturas respuesta a C0, (2) definición de un plan de búsqueda, análisis y validación de hipótesis y respuestas, y (3) ampliación de sus herramientas de análisis y validación de sus investigaciones” (Sala et al. (2020, 554). Estas están complementadas por sus respectivas preguntas relacionadas con la construcción de los edificios romanos.

Como conclusiones, señalan que dentro de la dialéctica de cuestiones y respuestas la indagación está presente en la formulación de cuestiones, debido a que los estudiantes no asumen una responsabilidad genuina para esta tarea. Además, mencionan que a lo largo del REI

se habilitaron dispositivos varios para la formulación y presentación de cuestiones. También, consideran que al reflexionar sobre las etapas o fases en función de procesos de modelización les permitió a los investigadores plantear y compartir con sus estudiantes cuestiones esenciales para el proceso de estudio. Por ejemplo, “¿qué modelos se proponen? ¿Cómo se puede trabajar con ellos? ¿Cómo se pueden validar?” (Sala et al., 2020, p. 560). Además, destacan que al considerar las respuestas provisionales les permitieron siempre cuestionarlas y reformularlas. Así, se logró una construcción dinámica del conocimiento matemático; del mismo modo, las actividades de modelización se vieron como una actividad que merece ser validada y cuestionada.

Por otro lado, respecto a la dialéctica de *media* y *medio*, mencionan su importancia en la búsqueda de respuestas en las diversas *medias* externos. Además, en estas etapas las praxeologías de modelización juegan un papel importante para “cuestionar la validez de [...] respuestas preexistentes e integrarlas dentro del medio didáctico de los estudiantes” (Sala et al., 2020, p.561).

1.2 Justificaciones

En esta sección, se presenta la pertinencia y relevancia del trabajo de investigación. Para ello, se consideran; las investigaciones mencionadas en los antecedentes, las cuales abordan la problemática de la enseñanza de matemática en la formación de ingenieros. La importancia de la formación de ingenieros en el país dentro del Plan estratégico de Ciencia, Tecnología e Investigación en el Perú. También, los objetivos que se encuentra dentro del perfil profesional de una universidad que ofrecen la carrera de ingeniería mecatrónica, así como el plan analítico de los cursos de matemática que ofrece dicha universidad.

Según Pollak (citado en Guzmán et al., 2019) evidencia que en la formación matemática de ingenieros debe integrarse modelos matemáticos, debido a que estas han generado avances en el desarrollo de la ciencia, tecnología y la ingeniería. En este sentido, existe una preocupación dentro de las investigaciones en didáctica matemática para asociar modelos matemáticos en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de ingeniería.

Considerando esta perspectiva, se encuentra en los antecedentes, dentro del marco de la TAD, las investigaciones que abordan esta relación entre la enseñanza de la matemática, la modelización matemática, la institución de producción y enseñanza de las disciplinas de la ingeniería. El cual está orientada al diseño e implementación de dispositivos didácticos que motiven a los estudiantes generar procesos de estudio e investigación a partir de una cuestión. Se encuentran, diversas investigaciones al respecto, solo por mencionar unas cuantas tenemos

a: Barquero et al., 2011; Guzmán, 2016; Siero, 2017; Vázquez, 2017; Galindo, 2019. El problema que resuelven estas investigaciones, comprende el diseño de estos dispositivos didácticos, sus metodologías para el diseño y la implementación de estas en las instituciones de enseñanza de matemática o de la disciplina intermedia.

Además, si se toma en cuenta los perfiles profesionales y planes analíticos de las escuelas de ingeniería, se encuentra que los estudiantes de ingeniería deben desarrollar las competencias relacionados con el manejo de modelos matemáticos. Pero, dentro de estos documentos no hay claridad de cómo se va a lograr ello. Lo que, si se observa en los contenidos, es una secuencia de temas que el estudiante necesita estudiar y aprender, dejando para el final el estudio de aplicaciones o modelos matemáticos.

En ese sentido, la propuesta para integrar actividades de modelización en el sentido de la TAD es un cambio de paradigma de la visita de obras a un paradigma de estudio e investigación, nombrado por Chevallard como paradigma del cuestionamiento del mundo.

Chevallard (2013), respecto a esta problemática presentada en los planes curriculares o de estudio menciona:

“[...] en el paradigma del *cuestionamiento del mundo*, los planes de estudio se definen en términos de cuestiones Q . [...] las obras O estudiadas a resultados de investigar estas cuestiones Q juegan un papel central en el proceso de definir y refinar el currículum: a partir de un conjunto Q de cuestiones “primarias”, los contenidos curriculares C estudiados eventualmente incluirán cuestiones Q y respuestas R^\heartsuit , además de respuestas R^\diamond y obras O . (Chevallard, 2013, p. 176)

Entonces, la propuesta de la TAD es un cambio de paradigma, donde el contenido de los planes de estudio esté en función de cuestiones generatrices y que las obras tienen su razón de ser gracias a que puedan brindar respuestas pertinentes a la cuestión generatriz y derivadas.

Por otro lado, en documentos oficiales del Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica (CONCYTEC), se evidencia el problema de formación en ciencia y tecnología para el desarrollo del país. Según CONCYTEC (2006), en este siglo XXI, se considera indispensable, para el desarrollo económico y aprovechamiento sostenible de los recursos naturales y humanos, fortalecer el liderazgo en áreas estratégicas como, las tecnologías de información, ciencias básicas, entre otras.

Además, señalan que “[...] la educación básica se encuentra entre los niveles más bajos [...] lo que no favorece la formación de científicos, tecnólogos y técnicos en especialidades [...] prioritarias para el desarrollo del país” (CONCYTEC, 2006, p.25).

Por otro lado, existe una tendencia de las universidades a ser certificadas internacionalmente. Tal es el caso de la Escuela de Ingeniería Informática de la PUCP, que tiene la acreditación del organismo *Accreditation Board for Engineering and Technology (ABET)*. Es un organismo que se encarga de evaluar si los programas de ciencias e ingeniería cumplen con los estándares para la formación de graduados en ciencias e ingeniería. Dentro de sus criterios, respecto a la formación de estudiantes, señalan que los programas deben incluir lo siguiente: “[...] capacidad para aplicar conocimientos, técnicas, habilidades y herramientas modernas de matemáticas, ciencia, ingeniería y tecnología para resolver problemas bien definidos de ingeniería, apropiadas para la disciplina” (ABET, 2020, p. 4)

Esto claramente conlleva a ratificar la tendencia de las escuelas de ingeniería a hacer que la matemática sea enseñada como una matemática aplicada e integrada a las disciplinas de ciencias e ingeniería que permitan resolver problemas que competen a cada especialidad de ingeniería.

Respecto a lo señalado líneas arriba, los antecedentes aquí presentados, incentivan a reflexionar sobre cómo las matemáticas pueden integrar actividades que involucren problemas de la ingeniería. Para responder esta cuestión, por ejemplo, Guzmán et al. (2019) indica que debemos reconocer las características de las actividades de modelización dentro del contexto de la ingeniería y que requiere de un trabajo multidisciplinario. También, Bartolomé et al. (2018) plantea en su investigación un REI, implementado, en su caso, dentro del curso de especialidad del ingeniero. Este dispositivo permitió el desarrollo de competencias relacionadas a la profesión del ingeniero, la promoción del trabajo en equipo y la motivación en los estudiantes para el desarrollo de las tareas propuestas.

A continuación, para observar el ámbito de la formación de ingenieros en el Perú, se muestran los perfiles de egresado de las carreras de Ingeniería de Mecatrónica de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). En la Tabla 1, se observan las habilidades y conocimientos que están asociadas a las habilidades de modelización.

Tabla 1

Perfil del Egresado de Ingeniería Mecatrónica de la PUCP

El estudiante de Ingeniería Mecatrónica desarrollará a lo largo de la carrera el conocimiento y habilidad para

- Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería complejos mediante la aplicación de principios de ingeniería, ciencias y matemáticas.
 - Desarrollar y llevar a cabo una experimentación apropiada, analizar e interpretar datos y usar juicios de ingeniería para emitir conclusiones.
 - Adquirir y aplicar nuevos conocimientos, según sea necesario, utilizando estrategias de aprendizaje apropiadas.
-

Fuente. Adaptado de Perfil del egresado, Ingeniería Mecatrónica, Pontificia Universidad Católica del Perú, <https://facultad.pucp.edu.pe/ingenieria/carreras/ingenieria-mecatronica/perfil-de-egreso/>

Se puede notar que en la tabla hay una clara relación en asociar al egresado de ingeniería con la capacidad de concebir a la matemática como una herramienta de aplicación integrada a las ciencias y disciplinas ingenieriles que le permitan resolver sus problemas. Además, al analizar los programas analíticos de los cursos de matemática de Estudios Generales de Ciencias de la PUCP -por ejemplo, Álgebra matricial y Geometría Analítica dentro de las competencias y resultados de aprendizaje- encontramos que se espera que el estudiante logre capacidades para aplicar conocimientos de matemáticas, ciencias e ingeniería. En ese sentido, es necesario tener actividades o situaciones problemáticas que permitan articular los contenidos del curso con problemas de ciencias e ingeniería.

Pero, en estos programas se encuentra una falta de especificaciones de metodologías que permitan diseñar e implementar actividades didácticas que relacionen los conceptos matemáticos, modelización matemática y las disciplinas de la ciencia e ingeniería.

Bajo esta problemática, las investigaciones de Barquero et al. (2011) permiten afirmar que el diseño e implementación de un REI generaría en los estudiantes de ciencias e ingeniería capacidades de investigación y autonomía para construir sus conocimientos. Tal como señalan los autores, “[...] los REI pretenden recuperar la relación genuina entre cuestiones y respuestas que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general y de la actividad matemática en particular” (p.341).

Asimismo, cabe señalar que hay una preocupación creciente en las estrategias de enseñanza-aprendizaje de matemáticas en la formación inicial de ingenieros. Ello se evidencia

en congresos internacionales como la tercera conferencia de la *International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM 2020), desarrollada virtualmente en Bizerte (Túnez).

En este encuentro, el grupo de investigadores de diversas nacionalidades abordaron temáticas relacionados a las estrategias de enseñanza-aprendizaje para estudiantes de ingeniería, la forma tradicional de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas universitarias para ingenieros y nuevos paradigmas de enseñanza-aprendizaje como las siguientes: actividades de planteamientos de problemas, proyectos interdisciplinarios y los recorridos de estudio e investigación. Se presentaron investigaciones como detallamos en la siguiente Tabla 2:

Tabla 2

Tópicos Tratados en el INDRUM 2020

Tópicos	Temas destacados
A	T1. Estrategias de enseñanza y aprendizaje para estudiantes de ingeniería T2. Prácticas docentes de profesores-investigadores en la universidad
B	T3. Analizar las condiciones imperantes para la docencia y aprendizaje de cálculo para ingenieros T4. Análisis institucional de modelos matemáticos para especialistas
C	T5. Nuevas perspectivas para renovar la enseñanza y aprendizaje de matemáticas: actividades de planteamiento de problemas y proyectos interdisciplinarios T6. Propuestas instruccionales para avanzar hacia el paradigma de 'cuestionamiento del mundo'

Fuente. Adaptado de Gómez et al., 2020, p. 164.

En la tabla, se resaltan las discusiones que tuvieron los investigadores entorno a las matemáticas necesarias para los estudiantes de ingeniería y de qué forma la enseñanza de las matemáticas se adaptan al ámbito profesional cambiante; qué elementos del cálculo, probabilidad y modelo matemático son importantes para el ingeniero; cómo encontrar la pregunta generatriz que desencadena los REIs; y cómo estos pueden reformular el contenido de los cursos.

Finalmente, se puede observar que existen elementos comunes en los antecedentes presentados en esta investigación, de los cuales se resalta el problema de la enseñanza de las

matemáticas en la formación de ingenieros, a partir de actividades de modelización dentro de su ámbito profesional o disciplinas intermedias. Además, muestran cómo los REIs pueden lograr un cambio del paradigma de la visita de obras, que se manifiesta en los currículos o planes analíticos, a un paradigma del cuestionamiento del mundo. También, según las investigaciones presentadas en los antecedentes, los REIs incorporan en su desarrollo las actividades de modelización matemática y logran que las obras recobren su sentido al ser estas fuentes para responder a la cuestión generatriz y sus derivados.

En ese sentido, la importancia de diseñar estos dispositivos didácticos es fundamental para un cambio de paradigma en la formación matemática de los ingenieros. En consecuencia, se busca que no se caiga en el aplicacionismo, algoritmización en los cursos de cálculo o cursos de especialidad.

En relación con la problemática expuesta, esta investigación es importante realizarla para aportar a la comunidad de docentes de matemática un dispositivo didáctico que relacione actividades de modelización de la institución de la disciplina del ingeniero, y con la cual darle un sentido a los elementos de la matemática que son enseñadas en la institución de enseñanza de la matemática. También contribuir a la investigación en la didáctica de la matemática respecto al problema de relacionar praxeologías mixtas que circulan de la institución de producción o enseñanza de la disciplina intermedia hacia la institución de enseñanza de la matemática.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En consideración con la problemática presente, a continuación se presenta la pregunta de investigación.

Pregunta de investigación

¿Cómo el análisis de la transformada de Hough determina el diseño de un dispositivo didáctico definido en el paradigma del cuestionamiento del mundo, que permita a los estudiantes de ingeniería mecatrónica desarrollar actividades de modelización matemática que relacionen algunos elementos del procesamiento digital de imágenes y los primeros cursos de matemática?

Objetivo general

Se busca analizar la transformada de Hough para el diseño de un dispositivo didáctico definido en el paradigma del cuestionamiento del mundo, que permita a los estudiantes de ingeniería mecatrónica desarrollar actividades de modelización matemática que relacionen algunos elementos del procesamiento digital de imágenes y los primeros cursos de matemática.

Objetivos específicos

- Identificar y describir la praxeología mixta de la Transformada de Hough en la institución de producción y enseñanza del procesamiento digital de imágenes.
- Realizar actividades didácticas en la enseñanza de las matemáticas que relacionen elementos de la praxeología mixta de la transformada de Hough.
- Establecer una propuesta *a priori* para el mapa de cuestiones y respuestas, dialéctica de *media-medio* asociadas al dispositivo didáctico diseñado en torno a la praxeología de la transformada de Hough.



CAPÍTULO II: ASPECTO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, se presentan algunos elementos de la TAD que se emplean en la investigación. Se aborda las nociones de institución, praxeología con sus cuatro componentes: tarea, técnica, tecnología y teoría. También se incorpora los momentos de estudio, las nociones de modelo praxeológico extendido, el paradigma del cuestionamiento del mundo y Recorridos de Estudio e Investigación.

Por otro lado, también se presenta la metodología a realizarse para el diseño de un dispositivo didáctico con base en modelización matemática. Para llevar a cabo esta investigación se considera la metodología propuesta en primera instancia en Macias (2012), Macias y Romo-Vázquez (2014) y que luego es extendido en Guzmán (2016), Siero (2017), Vázquez (2017), Galindo (2019).

2.1 Elementos de la Teoría Antropológica de los Didáctico

Antes de profundizar en los elementos teóricos, es importante preguntarse sobre el sentido de la Didáctica dentro de la TAD. Por tal motivo, primero abordamos a qué se refiere con lo didáctico. Según Chevallard (2013), lo didáctico consiste en diversas situaciones sociales donde una persona (conjunto de personas) intenta o realiza “algo” (lo que llama gesto didáctico) para que una persona o grupo de personas puedan estudiar y aprender una apuesta didáctica de la situación, dentro de la TAD, “obra”.

Entonces, lo didáctico es un hecho que se presenta cuando existe un sujeto que pretende realizar un gesto didáctico para que otra estudie una obra (apuesta didáctica), es decir, hay una difusión de conocimientos. Como se observa, hay la presencia de tres componentes en estas situaciones sociales. En general, Chevallard (2013) lo señala mediante la triplete (X, y, O) , donde X es un grupo de estudiantes; y es el profesor encargado de enseñar la obra O , aunque también puede ser un conjunto de profesores o ayudantes didácticos. En ese caso, se representa por Y .

Además, hay que tener en cuenta que una obra, según Chevallard (2013), es “cualquier cosa, material o inmaterial, creada por una acción humana deliberada, con el fin de lograr ciertas funciones específicas” (p.162).

Bajo el enfoque de la TAD, Bosch (2018) señala que la didáctica tiene como objetivo explicar cómo en una sociedad determinada se difunde el conocimiento en las instituciones y entre las personas. El conocimiento se entiende aquí como “las elaboraciones o construcciones teóricas, o [...] la “suma de lo que se sabe” en un dominio o disciplina determinado” (p. 4034); además, considera también la dimensión práctica para así sustentar la actividad humana. Por otro lado, menciona que en la TAD toda actividad humana y el conocimiento proveniente de ella

es descrita a partir de praxeologías.

Según Bosch (2018) la difusión de las praxeologías se realiza a través de los sistemas didácticos, el cual comprende una persona o grupo de personas Y que realizan “algo” para que un grupo de personas X aprendan una praxeología \wp . Se denota por $S(X; Y; \wp)$. También, es factible que se tenga un sistema didáctico con $X = Y = x$. En ese caso, se trata de un sistema autodidáctico.

Por otro lado, señala que el problema clave de la didáctica es “el cuestionamiento sobre la delimitación, composición y origen de \wp ” (p. 4035). Esto corresponde a la dimensión epistemológica. También, está la dimensión económica que se relaciona con lo que hacen X e Y para que se desarrolle el sistema didáctico. Por otro lado, se encuentra la dimensión ecológica que aborda “las condiciones y limitaciones que posibilitan y dificultan” (p. 4035) la dinámica entre las componentes de este sistema.

Para concluir con esta primera parte, se aborda el carácter antropológico que se le asigna a la TAD. Al respecto, Otero (2013) señala que la característica antropológica de la TAD está determinada por la escala de niveles de codeterminación didáctica. Además, considera que las razones de difusión o no difusión de las praxeologías dentro de una institución se explican gracias a cómo viven en los niveles inferiores (sector o dominio) y los niveles superiores (pedagogía, escuela, sociedad, civilización, humanidad).

Según Otero (2013), “el adjetivo “antropológica” expresa que el ámbito de la Didáctica no se restringe a la institución escolar, sino que se amplía a todas las instituciones sociales donde ocurren procesos de difusión de obras, sean estas matemáticas o no” (p. 16).

Observamos que en ese proceso de difusión del conocimiento está presente dos elementos claves de la teoría: praxeología e institución. Por tanto, es pertinente preguntarnos qué se entiende por praxeología e institución dentro de la TAD. Presentamos, a continuación, la noción de praxeología encontrada en la literatura.

2.1.1 Noción de Praxeología.

Según Chevallard (1999), se entiende que un tipo de tarea es una acción específica y una tarea es un elemento del tipo de tareas, mientras que el género de tareas es una acción más general, el cual se expresa mediante un verbo determinativo. Además, menciona que las “tareas, tipos de tareas, géneros de tareas no son datos de la naturaleza, son “artefactos”, “obras”, construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica” (p. 224). También, las tareas se realizan a partir de las técnicas, las cuales, generalmente, no son algoritmos y están enmarcados por las instituciones. De acuerdo con los tipos de tareas, las técnicas

correspondientes tienen sus limitaciones. Las técnicas, respecto a los tipos de tarea, señalan la forma de hacer las tareas. Por ello, al bloque tipo de tareas y técnicas se les conoce como el saber-hacer.

Por otro lado, según Chevallard (1999), la tecnología se determina a partir de las funciones de justificación, explicación y producción. Este elemento de la praxeología valida las técnicas relacionadas a los tipos de tarea. Estas funciones señaladas están al margen de la institución donde habita la praxeología. La justificación se relaciona con la demostración y la explicación, y tiene que ver con hacer comprensible a la técnica.

La última componente es la teoría el cual se presenta de forma abstracta y general. El papel de la teoría es justificar, explicar y producir la tecnología. El bloque tecnología y teoría constituye el saber.

Para terminar, la praxeología, según Vázquez et al. (2016), es la unidad mínima para el análisis de las actividades humanas. Además, se compone de cuatro elementos agrupados en dos bloques: el técnico-práctico $[T, \tau]$ y el tecnológico-teórico $[\theta, \theta]$, T es el tipo de tareas (lo que se hace), τ la técnica (cómo se hace), θ la tecnología (que justifica la técnica) y la teoría θ (que justifica la tecnología). Asimismo, mencionan que “la praxeología es un modelo de la actividad y de los recursos (materiales, pero sobre todo cognitivos) que son producidos socialmente y capitalizados por los grupos humanos para llevar al cabo las actividades (tareas) de forma eficiente” (Vázquez et al., 2019, p. 35).

2.1.2 Noción de Institución.

Castela (2016) señala sobre la institución que es una organización estable donde se realizan actividades sociales sujetas a restricciones. Además, puntualiza que las restricciones son creadas por la institución y que proporciona los recursos materiales, organizativos y cognitivos para el desarrollo de las actividades.

Cabe afirmar que las instituciones, por ser organizaciones sociales, están compuestas por individuos que realizan las actividades de forma natural. Nos preguntamos: ¿cómo se entiende por individuo dentro de la TAD? Para ello, se tiene que comprender primero qué es un sujeto dentro de esta teoría. En esa dirección, Castela (2016) señala que en la TAD los participantes de las actividades se consideran como sujetos en el sentido de que estos están sometidos a las restricciones que ejerce la institución. Además, menciona que la posición del sujeto en una institución está caracterizada a través de un “conjunto de actividades, expectativas y restricciones institucionales” (p. 12). Luego, sobre el individuo comenta que este “se vuelve un sujeto de una institución cuando ocupa una de las posiciones (de sujeto) presentes en dicha institución, intentando adaptarse al contrato que caracteriza esta posición” (p. 12). Finalmente,

señala que un individuo a lo largo de su vida atraviesa diversas instituciones, de ámbito cognitivo creciente; por ende, va cambiando de una posición a otra gracias a su evolución y aprendizaje.

Aunando todo lo mencionado, presentamos la noción de institución de Castela y Romo-Vázquez (2011, como se citó en Guzmán et al., 2019), en donde recalcan que las instituciones por ser organizaciones sociales estables permiten que los sujetos dentro de estas realicen y hagan posible las actividades humanas gracias a los recursos materiales e intelectuales que en ella se tiene. Además, señalan que dichos recursos son producidos por las comunidades cuando se enfrentan a situaciones problema de tal forma que sean resueltas de manera regular y con eficacia.

Romo-Vázquez (2014) señala que, para el diseño de las actividades didácticas con base en los modelos matemáticos encontrados en las disciplinas ingenieriles o el ámbito profesional, es necesario la identificación de las instituciones presentes en la formación del ingeniero y las relaciones establecidas entre ellas. Según Romo-Vázquez (2009, citado en Romo-Vázquez, 2014, p. 324), se rescatan las siguientes instituciones:

Instituciones usuarias: Práctica profesional I_p y Actividades prácticas A_p . En estas instituciones, las praxeologías matemáticas son usadas como herramientas para resolver problemas del ámbito laboral. Las instituciones usuarias son aquellas donde las praxeologías matemáticas son utilizadas para entender a las necesidades de la práctica.

Romo-Vázquez (2014) indica que I_p es una institución que corresponde al ámbito laboral del ingeniero y A_p se relaciona con las actividades de formación en el ámbito práctico.

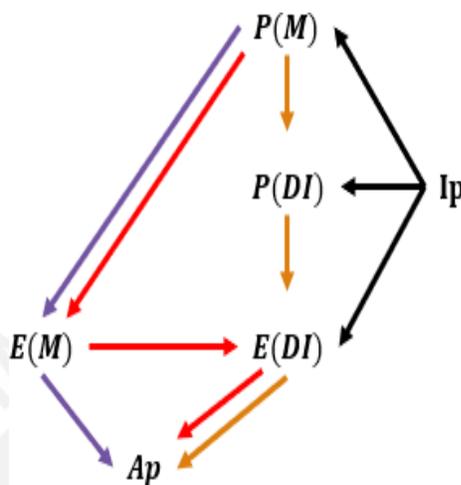
En esta investigación el foco no es la institución usuaria, aunque se consideró un panorama general de esta institución para darle un contexto a las instituciones que interesa a este trabajo. Las instituciones aquí analizadas para el análisis praxeológico de la transformada de Hough son las instituciones que a continuación se señala según Romo-Vázquez (2009, citado en Romo-Vázquez, 2014, p. 324).

Instituciones de producción: La disciplina matemática $P(M)$ y las disciplinas intermediarias (ciencias del ingeniero), $P(DI)$. Las instituciones de producción son las que producen el modelo matemático, visto como praxeologías, y que hacen pesar sobre éste todas sus condiciones y restricciones.

Instituciones de enseñanza: enseñanza de matemáticas, $E(M)$ y enseñanza de las disciplinas intermediarias, $E(DI)$. Las instituciones de enseñanza son las responsables de transmitir las praxeologías (modelos matemáticos). En estas instituciones se operan las transposiciones necesarias para adaptarlas a las condiciones y restricciones de la enseñanza, incluso cuando dichas praxeologías se usan.

Las relaciones institucionales, según Romo-Vázquez (2009, citado en Romo-Vázquez, 2014), está representado por el esquema que se muestra en la Figura 1.

Figura 1. *Circulación de Praxeologías Matemáticas entre Instituciones*



Nota. Tomado de Romo-Vázquez, 2014, p. 325

Romo-Vázquez (2014) señala que las instituciones $P(M)$ y $P(DI)$ se comportan como instituciones de referencia, es decir, que en estas instituciones las praxeologías de modelización matemática son producidas y son las encargadas de validar las técnicas que resuelven las tareas de modelización. Las flechas de un mismo color indican que la circulación de las praxeologías inicia desde su producción, $P(M)$, hasta llegar a las instituciones donde se usan estas praxeologías, que en el esquema se señala como las actividades prácticas (A_p).

También, señala que en esta circulación las praxeologías experimentan variaciones debido a que las instituciones relacionadas son distintas y, por tanto, las justificaciones de las actividades de modelización difieren de una institución a otra. Para analizar estas justificaciones, propone considerar el modelo praxeológico extendido donde para la tecnología asocia dos componentes una teórica, relacionada con las justificaciones matemáticas y la componente práctica, y con las justificaciones dentro de la disciplina intermediaria o de las instituciones usuarias. A continuación, se presenta con mayor detalle este modelo praxeológico extendido.

2.1.3 Modelo Praxeológico Extendido.

Según Diego-Montecón et al. (2021), las praxeologías sufren transposiciones cuando circulan de una institución a otra, es decir, acontece un cambio en su estructura. Por ejemplo, pueden contener elementos de la institución original y de la institución donde se ha transpuesto. A estas praxeologías se les conoce como praxeologías mixtas.

Por otro lado, señalan que este tipo de praxeologías es analizado gracias al modelo praxeológico extendido. Encontramos en Castela y Romo-Vázquez (2011), Romo-Vázquez (2014) que el modelo es representado mediante el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l} [T, \tau, \theta^{th}, \Theta] \leftarrow P(S) \\ \theta^p \leftarrow I_u \end{array}$$

Aquí, $P(S)$ representa a la institución de producción como la disciplina matemática o las disciplinas intermediarias, mientras que I_u es la institución usuaria de los saberes generados en $P(S)$.

Romo-Vázquez (2014) señala que las tareas resueltas en el contexto ingenieril son realizadas con las técnicas matemáticas involucradas a los modelos matemáticos usados y que dichas técnicas se validan con la componente teórica θ^{th} . En tanto, la justificación y validación del uso de los modelos corresponde a la componente práctica θ^p , más específicamente a las funciones tecnológicas relacionadas al bloque $[T, \tau]$: describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar. Además, menciona que estas funciones abordan las cuestiones relacionadas al modelo matemático como la condición en que se utiliza el modelo, conocimiento de elementos para el uso del modelo, conocimiento para la elección y utilización de un modelo, y la explicación del uso del modelo. Luego afirma que:

El modelo praxeológico extendido amplía la noción de validación de la técnica matemática, permite el análisis de los discursos tecnológicos prácticos que posibilitan usos y, más aún, reconoce las posibles relaciones con los discursos tecnológicos teóricos que producen dicha técnica. Por tanto, las funciones tecnológicas de la componente práctica constituyen una herramienta metodológica para analizar la actividad de modelización matemática de los ingenieros. (Romo-Vázquez, 2014, p. 328)

Este modelo que permite el análisis de las praxeologías matemáticas en las disciplinas de la ingeniería fue desarrollado por Castela y Romo-Vázquez (2011). Pero, también es empleado para el análisis de praxeologías en otros contextos extramatemáticos, por ejemplo, en Diego-Montecón et al. (2021) se empleó para el análisis de praxeologías en un contexto relacionado con almacén de carpintería y construcción. Dicho modelo que presentan tiene el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} [T^a, \tau^m, \theta^m, \Theta^m] &\leftarrow E_i(M) \\ [\tau^a, \theta^a, \Theta^a] &\leftarrow U_i(A) \end{aligned}$$

Donde $E_i(M)$ y $U_i(A)$ son la institución de enseñanza de matemáticas e institución usuaria respectivamente. Además, T^a es la tarea en la institución usuaria; $[\tau^m, \theta^m, \Theta^m]$ son la técnica, la tecnología y la teoría de la institución de enseñanza de las matemáticas; y $[\tau^a, \theta^a, \Theta^a]$ son la técnica, la tecnología y la teoría de cualquier institución usuaria, en este caso el almacén de carpintería y construcción.

En la sección 3.4 se explicita el esquema del modelo praxeológico extendido de la transformada de Hough que motiva a esta investigación.

Diego-Montecón et al. (2021) señala que $[\tau^a, \theta^a, \Theta^a]$ puede traer consigo elementos transpuestos de matemáticas de la institución de enseñanza, lo que implica que este modelo permite analizar la matemática empleada en la institución usuaria.

Tomando en cuenta lo señalado en Romo-Vázquez (2014), respecto al bloque $[\tau^m, \theta^m, \Theta^m]$ se relaciona al uso de modelos matemáticos para resolver tareas en ingeniería. Dichos modelos se hacen con técnicas matemáticas, cuya coherencia está determinada por $[\theta^m, \Theta^m]$, aunque estas validaciones puedan ser dejadas de lado durante el uso del modelo. Del mismo modo, el uso de estos modelos en la institución usuaria estaría justificada y validada por el bloque $[\theta^a, \Theta^a]$ a través de las funciones tecnológicas de θ^a . Dichas funciones se encuentran desarrolladas en Castela y Romo Vázquez (2011) y son: describir el tipo de tareas y la técnica, validar la técnica, explicar la técnica, facilitar la aplicación de la técnica, motivar la técnica y los pasos que la componen y, evaluar la técnica.

Respecto a estas funciones tecnológicas, señalan que, la primera, corresponde al discurso que permite identificar el bloque técnico-práctico a través de una representación verbal y simbólica. Con validar la técnica se refieren al hecho de que esta justifica la técnica, solo que, en este caso, los saberes que no corresponden a la matemática se validan en el laboratorio o en la práctica misma de su uso. Para nuestra investigación se está relacionando con los algoritmos computacionales. Con explicar la técnica, relacionan, al conjunto de saberes, dentro de la cultura de los sujetos, que explican la viabilidad de la técnica. Con facilitar la aplicación de la técnica,

consideran que los saberes dentro de esta función permiten el uso eficiente de la técnica, mejoras y evitan errores. Además, con estos saberes los usuarios acumulan experiencia y elaboran tecnologías en el proceso de adaptación de la técnica a casos particulares dentro de un contexto institucional. Con Motivar la técnica y los pasos que la componen, nos señalan que, los saberes en esta función se orientan a la práctica, en el cual se realizan, en una secuencia ordenada y justificada, cada elemento de la técnica. Además, guarda una relación con los saberes sobre el tipo de tarea. Finalmente, sobre evaluar la técnica, mencionan que, los saberes de esta función corresponden al dominio, condiciones y límites de la técnica respecto a la tarea y los usuarios.

2.1.4 Momentos del proceso de estudio de una praxeología.

Siero (2017) y Vázquez (2017), señalan que, las praxeologías matemáticas son construidos y reconstruidos gracias a los procesos de estudio. Para describir estos procesos, de acuerdo con la TAD se propone un modelo de estudio, que se compone de seis momentos didácticos o momentos de estudio por la cual pasa la praxeología. A continuación, presentamos dichos momentos que se encuentra en (Vázquez, 2017) y son: momento del primer encuentro (M1), momento exploratorio (M2), momento del trabajo de la técnica (M3), momento tecnológico teórico (M4), momento de la institucionalización (M5) y momento de la evaluación (M6).

Vázquez (2017), señala que en M1, los estudiantes se enfrentan a un elemento de la praxeología o una cuestión relacionada con dicha praxeología. Además, indica que en este momento

En el caso de praxeologías mixtas —por ejemplo, una praxeología que proviene de Disciplina de la Ingeniería P(DI) y se transpone a la Enseñanza de las matemáticas E(M)— se pondrá a la luz discursos de justificación desde ambas instituciones que, al compararse, pueden enriquecer el estudio de la transposición entre estas instituciones.

(Vázquez, 2017, p. 47)

Respecto a, M2, señala que, en este momento se realiza una búsqueda de otras técnicas que logren resolver la cuestión inicial. También, se pone a prueba la potencialidad y el límite de las técnicas que resuelven las diversas tareas que ha generado la cuestión inicial.

Por otro lado, señala que M3, es el momento de la mejora de la técnica, una vez que esta ha sido muy usada. Se producen nuevas técnicas o tareas, para ello, es necesario tiempo y creatividad. Además, indica que en la investigación es importante identificar las condiciones institucionales para este momento.

Vázquez (2017), señala que:

Al recrear el momento M4 en el aula los estudiantes emulan una de las actividades que caracterizan el trabajo del matemático profesional: hacer generalizaciones y cuestionarse sobre las posibilidades de generar técnicas más potentes, que permitan resolver un conjunto más amplio de tareas. (p. 48)

Respecto a, M5, indica que, en este momento “[...] se definen los tipos de tareas de manera precisa, se identifican las técnicas asociadas y el discurso tecnológico que las sostiene, desde la matemática” (Vázquez, 2017, p. 48).

Finalmente, respecto a M6, señala que, “en este momento se evalúa la calidad de los componentes de la praxeología, en términos de la claridad en la definición de sus componentes, la amplitud de las técnicas, su eficiencia y pertinencia del discurso tecnológico” (Vázquez, 2017, p. 48).

Por otro lado, Vázquez (2017), señala que, los momentos M1, M2 y M3 por estar relacionados al bloque técnico práctico pueden ser implementados para desarrollar praxeologías mixtas en torno a las actividades de modelización. Es decir, esta actividad se presenta a partir de una cuestión inicial Q_0 planteado desde un contexto extramatemático (contexto de la ingeniería). Además, menciona que si el modelo matemático que resuelve la tarea T, definida por Q_0 , es conocido, entonces la reconstrucción de la praxeología corresponde a un proceso de estudio finalizado; dicho de otro modo, el modelo forma parte de las técnicas con las que se hacen la tarea T. Además, la praxeología se enriquece, debido a que contiene elementos técnicos y tecnológicos de la institución no matemática (usuaria).

2.1.5 Cuestionamiento del mundo y Recorridos de Estudio e Investigación.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las escuelas de ingeniería se constituye a partir de un conjunto de praxeologías organizados en el currículo, los cuales se considera que son útiles para los estudiantes en su formación como ingenieros y para el ejercicio de su profesión. Según Bosch (2018), esta es la base del paradigma de la visita de obras, pero la utilidad es asumida y en general no es explícita; además, la razón de ser de estas praxeologías permanece en general oculta.

Por otro lado, Bosch (2018) señala que esta forma de seleccionar y organizar el conocimiento matemático en las instituciones de enseñanza trae como consecuencia que estas sean consideradas como productos terminados, cuyas nociones, resultados y técnicas son

precisas y por tanto no admiten cuestionamientos sobre su construcción. A este fenómeno didáctico, Chevallard lo llama monumentalización del currículo.

Según Salgado (2019) el recorrido de estudio e investigación redefine los programas de estudio a través de cuestiones generatrices, los cuales traen como consecuencia la determinación de respuestas. En cambio, la enseñanza en el paradigma de la visita de obras se basa en el aprendizaje de respuestas, y las preguntas a estudiar dejan de tener sentido para los alumnos y profesores. Bajo esa mirada, señala que el dispositivo didáctico REI redefine el paradigma de la visita de obras al paradigma del cuestionamiento del mundo, lo cual daría sentido al proceso de estudio en las escuelas a partir de la investigación.

Para representar el REI, se emplea el esquema Herbartiano (Chevallard, 2013; Bosch, 2018; Salgado, 2019)

$$[S(X; Y; Q_0) \sim M] \hookrightarrow R^\heartsuit$$

Donde el sistema didáctico $S(X; Y; Q_0)$ fabrica y organiza el medio M . Luego, conjuntamente el sistema S y el medio producirá una respuesta R^\heartsuit . Además, M es el *medio didáctico* que se estructura de la siguiente forma:

$$M = \{R_1^\diamond; R_2^\diamond; \dots; R_m^\diamond; O_{m+1}; \dots; O_n; Q_{n+1}; \dots; Q_p, D_{p+1}; \dots; D_q\}$$

Aquí, R_i^\diamond son respuestas institucionales que son útiles para responder Q_0 o alguna cuestión Q_k . Además, los O_j son obras que dan sentido a las respuestas R_i^\diamond . D_l son los datos diversos recopilados durante la investigación. Todos estos elementos del *medio* se interrelacionan con $S(X; Y; Q_0)$ para producir una respuesta R^\heartsuit que según Chevallard (2013) no es una respuesta universal a Q_0 , sino es una respuesta que está sujeta a determinadas restricciones.

Chevallard (2009) respecto a la fabricación del *medio* M , mesogénesis, señala que no está hecho, más bien, es construido por la clase $[X, y]$ gracias a producciones tanto internas como externas a esta. En las producciones internas, se hallan las respuestas R_x propuestas por los alumnos x . Además, menciona que el medio M debe:

- (a) someter a cada una de sus respuestas R_i^\diamond constitutiva, así como a la respuesta R^\heartsuit en desarrollo, a la prueba de una dialéctica adecuada de las *medias* y del *medio*, y (b) ofrecer materiales adecuados para construir una respuesta R^\heartsuit validada que satisface las restricciones impuestas. (Chevallard, 2009, p. 23)

Al considerar la topogénesis, menciona que la construcción del medio M es realizado por la clase $[X, y]$ y no solo de y . Bajo este señalamiento, indica que el alumno puede incorporar al

medio M , con total libertad, cualquier trabajo que crea conveniente y que aporte, además de sus respuestas personales. También, considerar el cambio en el *topos* del alumno, trae como consecuencia un cambio en el *topos* de y . Al respecto, señala que se le considera como el director de estudio o investigación y como tal decidirá en última instancia la viabilidad del estudio, además de plantear respuestas R_y , que pueden ser suyas o no, al medio M . Sin embargo, como estarán sometidas a la dialéctica de *media* y *medio*, no tendrán ningún privilegio. Respecto a la cronogénesis, indica que el trabajo de M para producir R^\bullet da pie a una ampliación del tiempo didáctico, donde el sistema didáctico $S(X; Y; Q_0)$ en ciertos momentos se transformará en un sistema didáctico clásico $S(X, y, O_j)$, en el cual se realiza un estudio de la obra O_j relacionado con el uso de esta en la deconstrucción de R_1° o en la elaboración de R^\bullet , o también en la indagación de su razón de ser y su funcionamiento.

Finalmente, Guzmán et al. (2019) señalan que las praxeologías de modelización matemática son un producto de los REI basado en el paradigma del cuestionamiento del mundo; además, involucra la razón de ser de las matemáticas en el ámbito escolar. Por otro lado, mencionan que, desde el enfoque de Chevallard del cuestionamiento del mundo, una actividad realizada con el REI se genera por el estudio de una cuestión generatriz gracias a las cuestiones derivadas y sus correspondientes respuestas provisionales; estos saberes que van construyendo dinamizan el proceso de estudio e investigación. También, señalan que durante esta evolución del REI las respuestas provisionales van formando parte de la actividad de modelización para así lograr una respuesta adecuada que satisface a la comunidad de estudio.

2.2 Marco metodológico

Según Hernández, Fernández y Baptista (2010), una de las características de las investigaciones cualitativas es que son inductivas, es decir, tienen un carácter descriptivo; además, la acción de indagación es dinámica, en otras palabras, fluctúa de forma circular entre los hechos y su interpretación. Del mismo modo, mencionan que este enfoque mejora las preguntas de investigación u obtiene nuevas interrogantes a medida que interpreta los datos que va recolectando y analizando. En ese sentido, la investigación que se va a realizar es de corte cualitativa.

2.2.1 Metodología y Procedimientos.

Los procedimientos metodológicos que se emplea en esta investigación es la metodología propuesta en trabajos de Macias (2012), Macias y Romo-Vázquez (2014), que posteriormente fue desarrollada en trabajos de tesis (Guzmán, 2016; Siero 2017; Vázquez, 2017; Galindo, 2019).

En estas investigaciones se diseñan dispositivos didácticos que relacionan las instituciones usuarias y las instituciones de enseñanza, además de abarcar actividades de modelización matemática.

Se va a considerar la metodología propuesta en Romo-Vázquez y Artigue (en prensa). Como mencionan sus autores, está relacionada a la ingeniería didáctica. Se muestra en la Tabla 3 las siguientes fases:

Tabla 3

Fases de la Metodología de Investigación

	FASE 1			FASE 2
	Análisis de la praxeología mixta en una institución de investigación y enseñanza en ingeniería			Diseño del REI y análisis <i>a priori</i>
	Paso 1: Elección de una institución de ingeniería e identificación de praxeologías mixtas que involucran a las matemáticas	Paso 2: Análisis de praxeologías mixtas susceptibles de ser transpuestas al aula	Paso 3: Identificación de cuestiones generatrices	
Objetivo	Identificar praxeologías en la institución de P(DI) y E(DI) que involucran a las matemáticas	Analizar la praxeología mixta de la Transformada de Hough para la identificación de elementos que puedan transponerse a E(M)	Plantear la cuestión generatriz Q_0 entorno al contexto de la ingeniería.	Diseñar la organización didáctica en torno a Q_0 . Analizar un posible REI entorno a la praxeología mixta de la transformada de Hough y mapa de cuestiones y respuestas

Resultado	Elección de una institución de ingeniería relacionado con mecatrónica y descripción de las praxeologías	Determinación de la praxeología de la transformada de Hough escolar en base a documentos de la P(DI) y E(DI)	Planteo de la cuestión generatriz Q_0 .	Organizaciones didácticas entorno a la praxeología mixta de la transformada de Hough escolar.
------------------	---	--	---	---

Según Vázquez (2017), y Romo-Vázquez y Artigue (en prensa), en la fase 1 se realiza el análisis epistemológico de las actividades de modelización presentes en las instituciones de producción, enseñanza o usuaria. Luego de considerar la institución de ingeniería, se realiza un análisis de documentos con la finalidad de identificar praxeologías mixtas que serán usadas como referentes epistemológicos para el diseño del REI. Esta fase concluye con la identificación de cuestiones generatrices entorno a la praxeología mixta que movilicen un REI.

En la fase 2, tomando en cuenta la praxeología mixta obtenida en la fase anterior, se genera una organización didáctica en donde se reconstruirá dicha praxeología gracias a la cuestión generatriz planteada. Además, el análisis *a priori* permite identificar cómo se va involucrando en la comunidad de estudio las dialécticas (la dialéctica de media-medio, la dialéctica de preguntas-respuestas) en el desarrollo de un posible REI.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA TRANSFORMADA DE HOUGH

En el presente capítulo, se va a desarrollar la fase 1 del procedimiento metodológico, que consiste en identificar, analizar las praxeologías presentes en las instituciones de producción y enseñanza de la disciplina intermediaria Procesamiento Digital de Imágenes. Se encuentra praxeologías susceptibles a ser transpuestas a la institución de la enseñanza de la matemática. Se considera un contexto de la ingeniería, procesamiento digital de imágenes, para identificar praxeologías mixtas y luego realizar su análisis praxeológico. También se procede a plantear la transposición de la praxeología de la transformada de Hough a la institución de enseñanza de la matemática.

Además, se plantea la cuestión generatriz a partir del contexto del ámbito laboral del ingeniero mecatrónico. Dicha cuestión generatriz servirá para el desarrollo de un posible recorrido de estudio e investigación.

3.1 Análisis de la praxeología mixta en una institución de investigación y enseñanza en ingeniería

En concordancia con Romo-Vázquez y Artigue (en prensa), se realiza un análisis epistemológico de la institución de producción y enseñanza. Para nuestra investigación, esta institución, es el procesamiento digital de imágenes. Las referencias que se consideran son (Hough, 1962; Duda y Hart, 1972; Pratt, 2007, Sundararajan, 2017; Gonzalez y Woods 2018; Mery, 17 nov 2020). Los dos primeros corresponden a los artículos de investigación sobre la transformada de Hough, los siguiente tres son bibliografías respecto al procesamiento digital de imágenes y el último corresponde a un curso virtual de acceso libre en YouTube. Estos documentos nos permiten identificar tantos elementos de la matemática y de la disciplina intermediaria, los cuales sirvieron para identificar y analizar la praxeología de la transformada de Hough. Luego, se realiza una transposición didáctica de esta praxeología de la disciplina intermediaria hacia la enseñanza de las matemáticas. Así, se obtiene con esta la praxeología de la transformada de Hough escolar.

Por otro lado, para plantear la cuestión generatriz, se ha tenido que considerar un contexto de la ingeniería para que dicha cuestión tenga sentido y relevancia para la comunidad de estudio. Por tal motivo, se elegido una institución de ingeniería relacionado con la inteligencia artificial que es un área donde los ingenieros mecatrónicos tienen participación.

3.2 Elección de una Institución de Ingeniería e Identificación de Praxeologías Mixtas en el Procesamiento Digital de Imágenes que Involucran a las Matemáticas

Esta sección, corresponde al paso 1, dentro del procedimiento metodológico considerado en esta investigación.

Macias (2012) y Siero (2017) señalan que para proponer actividades didácticas en torno a la modelización matemática primero se tiene que reconocer el nivel educativo donde se va a enseñar y el contexto de uso, es decir, las instituciones donde las actividades de modelización tienen lugar. En el caso de la formación de ingenieros, las instituciones a las que se refieren son las instituciones de enseñanza de la disciplina intermediaria o la institución usuaria (práctica profesional o campo laboral). En ese sentido, señalan que la elección del contexto está en función del reconocimiento de la institución o subinstitución, de documentos sugeridos, o de documentos obtenidos por una búsqueda personal, y también de la identificación de actividades matemáticas y de modelización que se realizan en dichas instituciones. Por otro lado, señalan que deben analizarse si los modelos matemáticos identificados tienen relación con lo que se enseña en las instituciones de enseñanza de la matemática. Finalmente, indican que estas condiciones permiten que el contexto elegido sea pertinente para el diseño de la actividad didáctica.

Tomando en cuenta lo señalado arriba, primero se elige el contexto de la ingeniería mecatrónica para identificar actividades matemáticas y de modelización. Después de un análisis praxeológico de las actividades identificadas, se seleccionan aquellas que estén relacionadas con la enseñanza de los primeros cursos de matemáticas. De una manera amplia, se considera el campo laboral del ingeniero mecatrónico, que se encuentra en los perfiles de egresado de algunas universidades. A continuación, en la Tabla 4 se menciona el campo laboral del ingeniero mecatrónico de ciertas universidades del Perú, que se encontraron en sus páginas web, dentro del campo laboral de las carreras de Ingeniería Mecatrónica.

Tabla 4

Campo Laboral de los Ingenieros Mecatrónicos

UNIVERSIDAD	CAMPO LABORAL
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)	El egresado podrá laborar donde existan procesos automatizados o donde se puedan potencialmente desarrollar estos, vale decir, en los sectores: Metalmecánico, manufacturero, minería, pesquería, agroindustria, textil, energía, petroquímica, transporte y servicios.

Universidad Tecnológica del Perú (UTP)	Empresas de diseño e implementación de proyectos de automatización, empresas de software de control y SCADA, empresas manufactureras, empresas mineras, industria automotriz, empresas asociadas al mundo del transporte, empresas o industrias innovadoras de componentes, dispositivos o sistemas electromecánicas en procesos productivos.
Universidad de ingeniería y tecnología (UTECH)	Empresas privadas o gubernamentales que empleen sistemas automatizados de producción. Compañías automotrices, o aeronáuticas que utilicen sistemas de control automático. Institutos y compañías interesadas en la investigación y el desarrollo de nuevas tecnologías en el área de sistemas robóticos, sistemas de control y automatización.

De la tabla, se puede rescatar un elemento particular que identifica el campo laboral del ingeniero mecatrónico. Su labor está relacionada con procesos de automatización en la industria. Por otro lado, Aquino et al. (2013) señalan que en la actualidad los ingenieros mecatrónicos disponen de dispositivos digitales (ordenadores industriales) para diseñar y controlar los procesos automatizados. Por ejemplo, mencionan que los movimientos coordinados de las máquinas automatizadas se realizan gracias a softwares de control que es gestionado por un ordenador o un autómeta, o un microcontrolador o procesador digital de señales. Además, sostiene que la mecatrónica es una especialidad de la ingeniería que tiene como elementos: “los sistemas informáticos, los desarrollos de la microelectrónica, la inteligencia artificial, la teoría de control y todas relacionadas con tecnologías de vanguardia” (Aquino et al., 2013, p. 237).

Entonces, sí es conveniente que se puede indagar el contexto de la Inteligencia Artificial (IA) ya que forma parte de la ingeniería mecatrónica. Además, porque también la inteligencia artificial -como señalan Iglesias et al. (2020)- está presente en nuestras actividades habituales y que trae a nivel mundial una revolución económica.

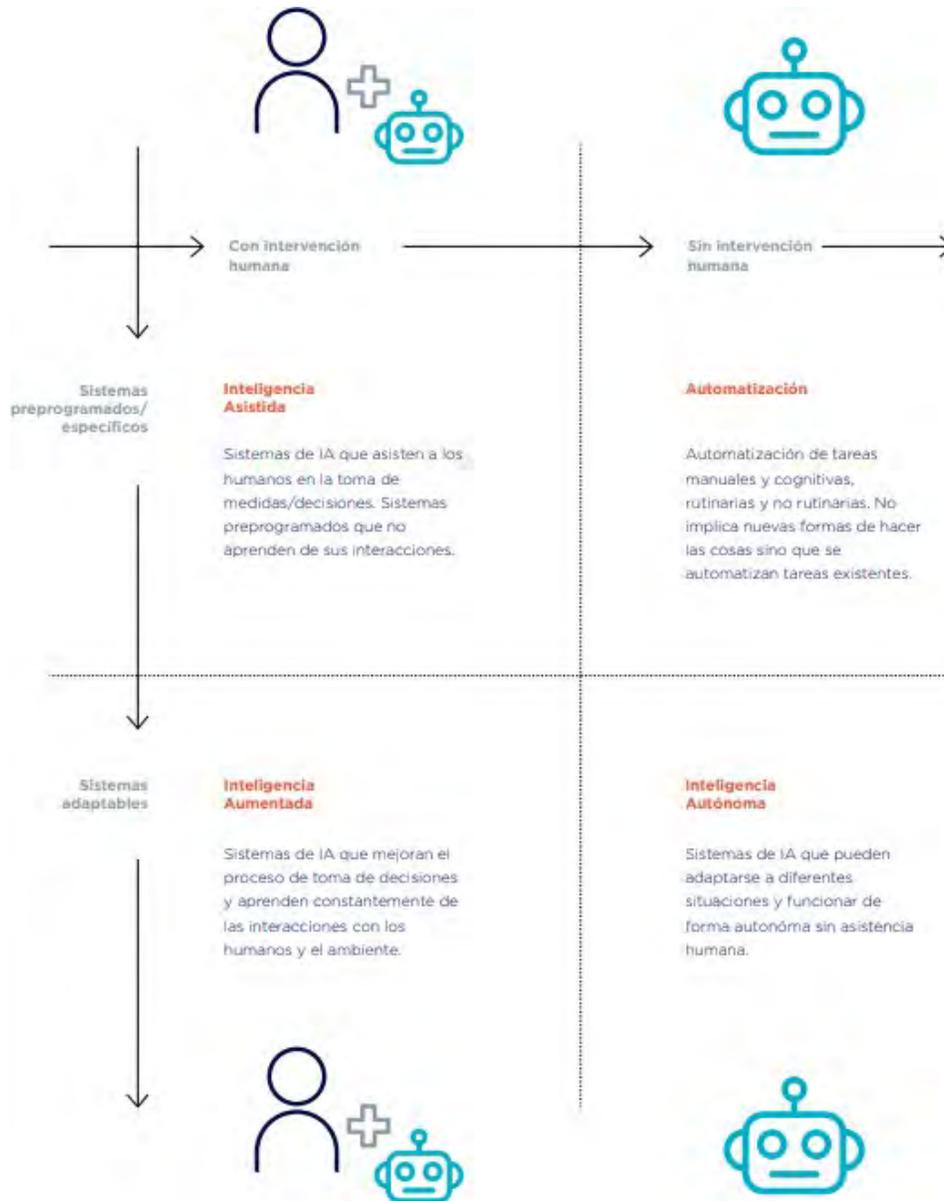
Rouhiainen (2018) señala que:

La IA es la capacidad de las máquinas para usar algoritmos, aprender de los datos y utilizar lo aprendido en la toma de decisiones tal y como lo haría un ser humano. Sin embargo, a diferencia de las personas, los dispositivos basados en IA no necesitan descansar y pueden analizar grandes volúmenes de información a la vez. Asimismo, la

proporción de errores es significativamente menor en las máquinas que realizan las mismas tareas que sus contrapartes humanas (p. 17).

Además, indica que la IA trata con problemas que se puede clasificar en cuatro campos de trabajo, los cuales se presenta en la Figura 2.

Figura 2. Campos de trabajo de la IA



Fuente. Tomado de Iglesias et al., 2020, p. 9

En la figura 2, observamos que los campos de trabajo de la IA se determinan por la interacción humana y el tipo de sistemas (preprogramadas y adaptables). Además, Iglesias et al. (2020) señalan que los factores que necesita la IA para que las máquinas “aprendan de la experiencia, se ajusten a nuevos contextos y actúen de forma similar a como lo haría un humano” (p. 10), son los siguientes: capacidad de procesamiento ilimitado y crecimiento de los macrodatos (grandes cantidades de datos y de calidad).

Las líneas de investigación de la IA, según Iglesias et al. (2020), son las siguientes: aprendizaje automático a gran escala, aprendizaje profundo, procesamiento del lenguaje natural, sistemas colaborativos, visión por computador, teoría algorítmica de juegos y automatización de procesos robóticos. Luego, mencionan que estas líneas de investigación permiten a la IA aplicarse a una variedad de tareas en la mayoría de los sectores de producción.

Por otro lado, Ponce et al. (2014) mencionan que la IA se construyó gracias a los conocimientos en áreas como la ciencia de la computación, la filosofía, la lingüística, las matemáticas y la psicología. Señalan también que en particular:

Las matemáticas proveyeron las herramientas para manipular las aseveraciones de certeza lógica, así como aquellas en las que existe incertidumbre de tipo probabilista; el cálculo por su lado brindó las herramientas que nos permiten la modelación de diferentes tipos de fenómenos y fueron también las matemáticas, quienes prepararon el terreno para el manejo del razonamiento con algoritmos. (Ponce et al., 2014, p. 17)

A partir de este punto, se puede sospechar de cómo en el contexto de la IA se localiza o identifica praxeologías que tienen que ver con actividades matemáticas. De hecho, existen infinidad de recursos como artículos científicos, libros, clases virtuales, donde se puede notar con facilidad que existe una presencia notable de estas praxeologías.

Hasta aquí, se ha realizado una descripción general de la IA. Ahora es necesario abordar en una subárea en particular para hacer una investigación enfocada y más profunda. En ese sentido, fue conveniente observar las áreas donde se aplican la IA.

En particular, consideramos la industria de vehículos autónomos en donde se aplican diversos conocimientos de la ingeniería. Por ejemplo, cuando uno se cuestiona cómo estos vehículos autónomos tienen la capacidad de poder identificar las carreteras, a las personas, a otros coches, reconocer los semáforos para luego tomar decisiones, etc. Nos encontramos con diversas disciplinas de la ingeniería mecatrónica involucradas en estos problemas.

Considerando esta inquietud, se explora de manera superficial sobre la disciplina de la ingeniería de Visión por Computador o Artificial, el cual consiste en el “proceso de extracción de información importante de una imagen o de un conjunto de imágenes para poder realizar clasificaciones y análisis avanzados” (Iglesia et al., 2020, p. 10). Entonces, al considerar el contexto de los vehículos autónomos, se encuentra con esta subárea de la visión por computador, cuyo objeto de estudio, de acuerdo con Iglesias et al. (2020), es la extracción de información de las imágenes.

El objeto imagen en visión por computador es importante para el desarrollo de aplicaciones en esta subárea. Entonces, naturalmente, se puede cuestionar: ¿qué es una imagen?, ¿cómo se caracteriza una imagen en esta subárea?, ¿cómo es el proceso de analizar una imagen? Al indagar sobre estas cuestiones, nos encontramos con otra disciplina: el Procesamiento Digital de Imágenes. Una vez más, se retoma una búsqueda de documentos de esta disciplina intermedia, tanto de la enseñanza, como de producción. Asimismo, se encuentra que el concepto de una imagen está relacionado con una función real de dos variables; además, tiene una representación matricial y representación tridimensional. Entonces, nuestro enfoque se centró en indagar sobre este objeto, puesto que tenía elementos matemáticos involucradas en su concepción y uso. En la siguiente sección, se formalizará con mayor profundidad el estudio de las imágenes digitales. Por el momento, se presentará una descripción general del Procesamiento Digital de Imágenes.

El Procesamiento Digital de Imágenes según González y Woods (2018) “abarca procesos cuyas entradas y salidas son imágenes y, además, incluye los procesos de extracción de atributos de las imágenes hasta el reconocimiento de objetos individuales” (p. 19). También señala que el procesamiento de estos objetos se realiza a través de computadoras digitales.

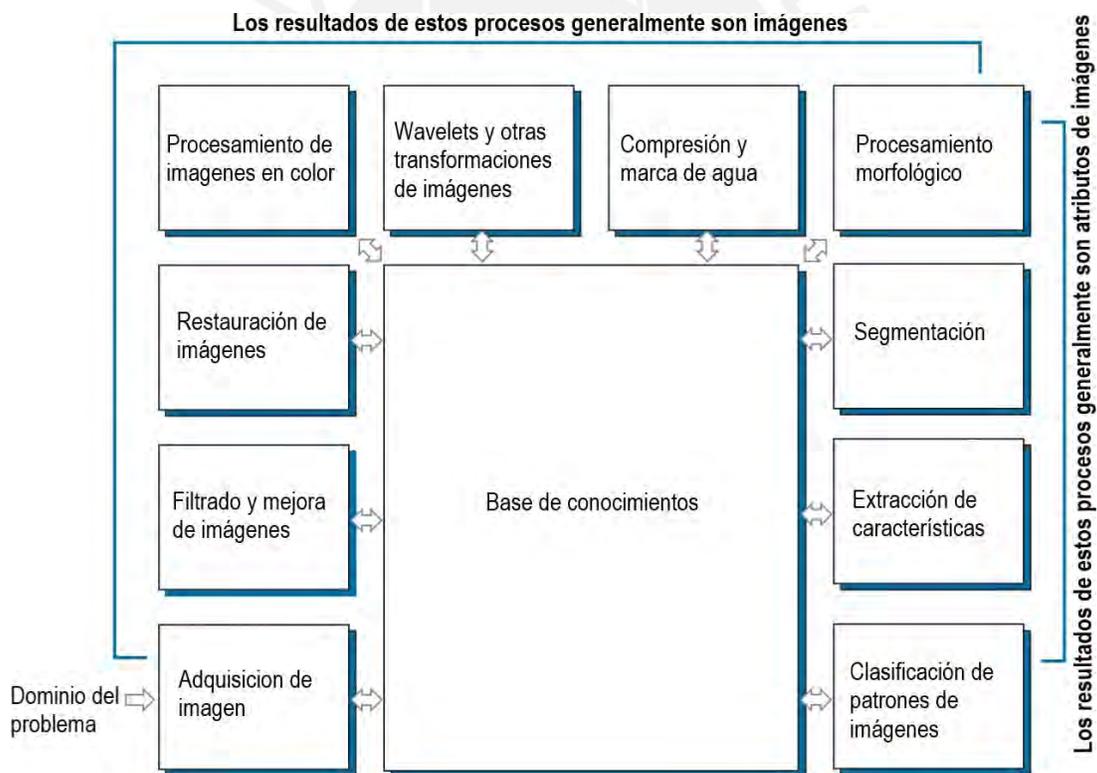
González y Woods (2018) menciona que existe tres niveles de procesamiento computarizado de las imágenes: nivel bajo, nivel medio y nivel alto. Se caracterizan de la siguiente manera:

El procesamiento de nivel bajo esta caracterizado por el hecho de que ambas entradas y salidas es una imagen. [...] El procesamiento de nivel medio esta caracterizado por el hecho que sus entradas generalmente son imágenes, pero sus salidas son atributos extraídos de estas imágenes. [...] Finalmente, el procesamiento de nivel alto implica “dar sentido” a un conjunto de objetos reconocidos, como en el análisis de imágenes,

finalizando, en el otro extremo del continuo, con la ejecución de las funciones cognitivas normalmente asociadas a la visión humana (Gonzalez y Woods, 2018, p. 19).

En resumen, señalan que el Procesamiento Digital de Imágenes es una disciplina que tiene como objetivo el mejoramiento de las imágenes digitales tanto para los humanos como para las máquinas; de esta forma, se obtienen datos relevantes sobre los objetos como sus características geométricas, físicas, etc. Para ello, los métodos o procesos que se realiza en el procesamiento digital de imágenes. Según González y Woods (2018), se organizan en dos categorías: métodos que tienen como entrada y salida una imagen, y métodos que tienen como entrada una imagen y la salida es un atributo de dicha imagen. En la Figura 3, se muestra estos métodos o procesos.

Figura 3. Etapas Fundamentales en el Procesamiento Digital de Imágenes



Fuente. Tomado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 41

En la figura, se muestra etapas que no son necesariamente secuenciales y se pueden considerar como actividades dentro de esta disciplina. Por tanto, dichos métodos o procesos son praxeologías dentro de la disciplina intermedia de procesamiento digital de imágenes. Bajo esta

consideración, en lo que sigue, se realiza una descripción de algunas actividades de esta disciplina para localizar praxeologías matemáticas. Otro aspecto para conseguir tal objetivo es la institución de su enseñanza. En ese sentido, es conveniente también el análisis de este tipo de instituciones.

Para el análisis de la institución de enseñanza, se consideró el curso en línea proporcionado en el GitHub del profesor Domingo Mery: Asignatura de Procesamiento Digital de Imágenes del ciclo 2020 del departamento de Ciencia de la Computación de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

3.2.1 Identificación de praxeologías mixtas que involucran a las matemáticas.

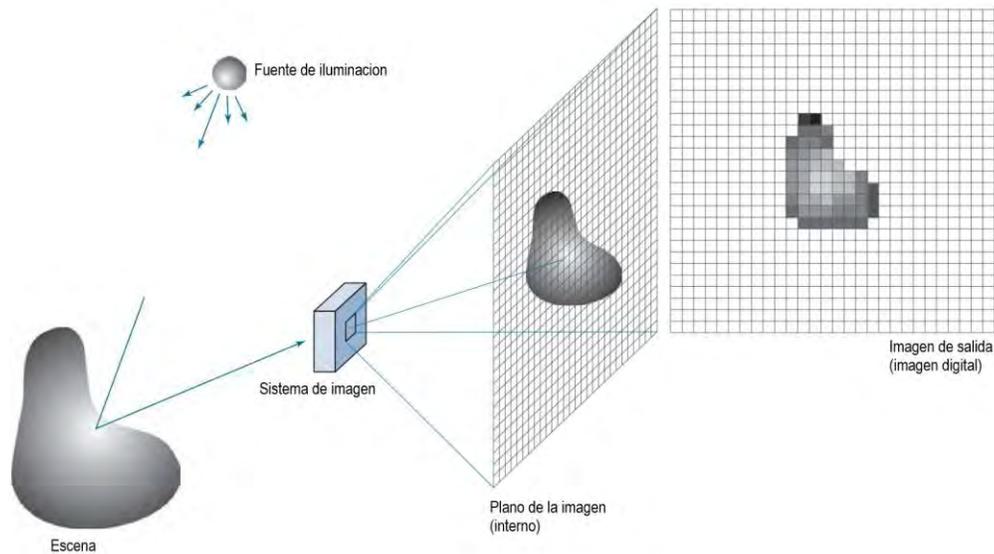
A continuación, se va a hacer la identificación de praxeologías en esta disciplina intermediaria Procesamiento Digital de Imágenes o Digital Image Processing tomando como referencia los documentos recomendados en el curso en línea y los encontrados en el programa analítico del curso de Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales de la escuela de Ingeniería Mecatrónica de la PUCP. Además, servirá como pretexto para señalar algunos conceptos que se van a usar en el análisis praxeológico de la Transformada de Hough. Para identificar, las praxeologías se consideran como referencia las siguientes investigaciones: Pratt, 2007; Burger y Burge, 2016; Sundararajan, 2017; Gonzales y Woods, 2018; además de las clases virtuales de Mery, 17 nov 2020.

Como se notará en el desarrollo, se muestra modelos matemáticos relacionados con cada uno de los conceptos del procesamiento digital de imágenes, así como elementos de esta disciplina. Además, se espera alcanzar al lector aspectos relevantes de esta disciplina que se van a tratar en esta investigación.

Sensado y adquisición de imágenes. Para concebir que es una imagen dentro de la disciplina intermediaria procesamiento digital de imágenes, se debe partir de la pregunta: ¿cómo se obtiene una imagen? Sobre el particular, Gonzalez y Woods (2018) menciona que una imagen se genera “por la combinación de una fuente de “iluminación” y la reflexión o absorción de energía de esa fuente por parte de los elementos de la “escena” que se está fotografiando” (p. 57). También, señalan que la fuente de iluminación tiene que considerarse en términos amplios. Es decir, las fuentes pueden ser: un radar, sistemas de rayos X, ultrasonidos, entre otros. De la misma forma, como escenas pueden considerarse a las moléculas, el cerebro humano, etc.

A continuación, se ilustra en la Figura 4 elementos presentes en la adquisición de una imagen.

Figura 4. Elementos en la Adquisición de una Imagen



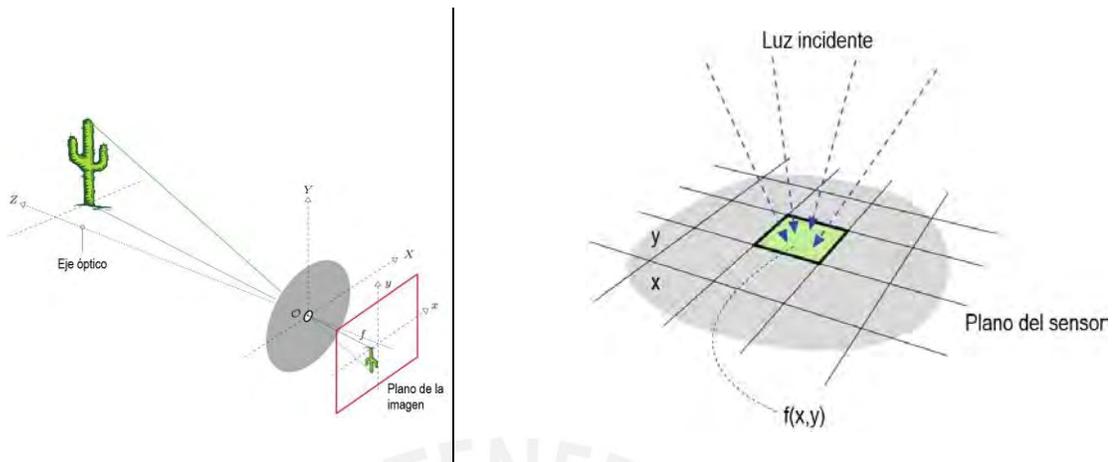
Fuente. Adaptado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 64

En esta figura, la luz de la fuente de iluminación incide en la escena (lugar donde ocurre un acontecimiento) para luego ser reflejado hacia el sistema de imagen o dispositivo electrónico implementado con un arreglo de sensores de luz. Gonzalez y Woods (2018) señalan que los sensores tienen la tarea de transformar la energía entrante (luz incidente sobre el sistema) en voltaje, debido a la interacción de la energía eléctrica entrante y el material del sensor, para que luego dicho voltaje de salida sea digitalizado. En conclusión, a partir de este sistema, se obtiene una imagen digital, es decir, una respuesta del sensor a la interacción de la energía incidente sobre ella.

Antes de seguir, se tiene que tomar en cuenta que, para la investigación, el elemento de interés que vamos a tomar de esta disciplina intermedia es la imagen digital, mas no son importante los elementos físicos y electrónicos que están involucrados en su obtención. Por tal motivo, no se profundiza en estos aspectos.

Continuando con el estudio de las imágenes, se considera como caso particular el proceso de fotografía que se presenta en la Figura 5. Señalar sus elementos nos permitirá entender cómo es el sensado y cómo se adquiere una imagen.

Figura 5. Geometría de la Lente y el Sensor de un Sistema de Imagen



Fuente. Adaptado de Burger y Burge, 2016, pp. 6-8

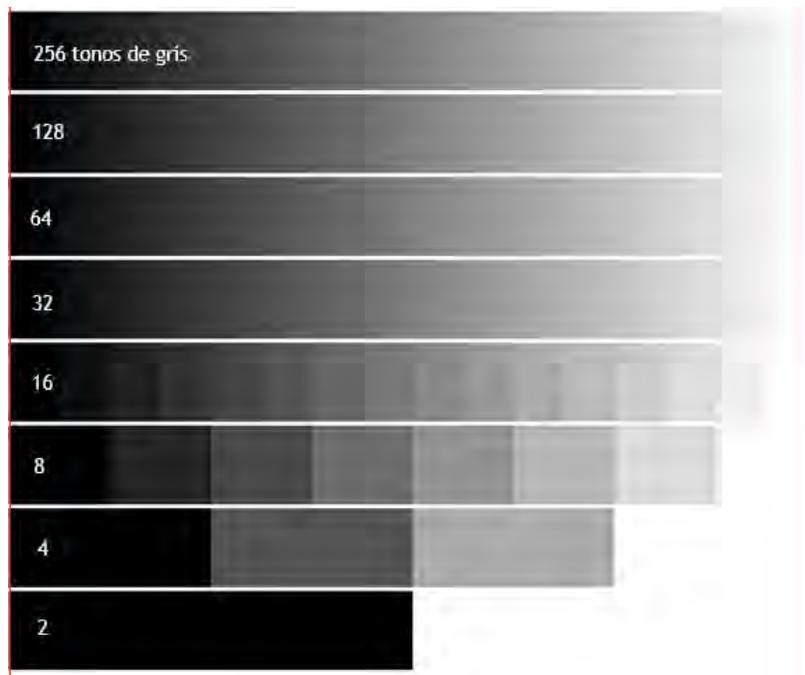
En el lado izquierdo de la figura, se presenta un modelo geométrico de lente, cuyo centro es considerado como el origen de coordenadas del sistema XYZ. Al lado derecho de la figura, se muestra el sensor que, según Burger y Burge (2016) va a ser el encargado de distribuir la luz incidente sobre el plano del sensor (en la figura queda representado por la región espacial xy). Además de medir intervalos regulares del tiempo de incidencia de la luz sobre cada elemento del sensor, también va a determinar una escala de enteros (por ejemplo, escala de grises 256 o 4096) para el almacenamiento en la computadora.

Por otro lado, se encuentra una caracterización matemática en Gonzalez y Woods (2018), quienes señalan que una imagen está representada por una función bidimensional $f(x, y)$, donde esta función se define por $f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$; con $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces: (1) la cantidad de iluminación incidente sobre la escena (objeto) se representa por la función $i(x, y) \in [0; +\infty)$ (2) la cantidad de iluminación reflejada por el objeto se representa por la función $r(x, y) \in [0; 1]$ donde 0 es absorción total y 1 es reflectancia total. De aquí que $0 \leq f(x, y) < \infty$, además $i(x, y)$ queda determinado por la iluminación de la fuente y $r(x, y)$ está relacionado con las características del objeto fotografiado.

Además, señalan un concepto importante en el Procesamiento Digital de Imágenes: las imágenes monocromáticas, que se determinan a partir de colores que van desde el negro, grises, hasta el blanco. A esta gama de colores se les llama intensidades o niveles de grises. Esto determina un intervalo acotado $[L_{min}; L_{max}]$ para la función que representa a la imagen monocromática, es decir: $L_{min} \leq f(x, y) \leq L_{max}$, donde $L_{min} \geq 0$ y L_{max} es finito. Considerando el párrafo anterior, se tiene que: $L_{min} = i_{min} \cdot r_{min}$ y $L_{max} = i_{max} \cdot r_{max}$. Como caso particular, se tiene que el intervalo de $[0; 1]$ o $[0; C]$ donde $f(x, y) = 0$ es negro y $f(x, y) = 1$ ($f(x, y) = C$) es

blanco y los colores grises están determinados por los valores entre 0 y 1 (o C). Se muestra en la Figura 6 una escala de grises comúnmente empleada en el procesamiento de imágenes.

Figura 6. Escala o niveles de grises

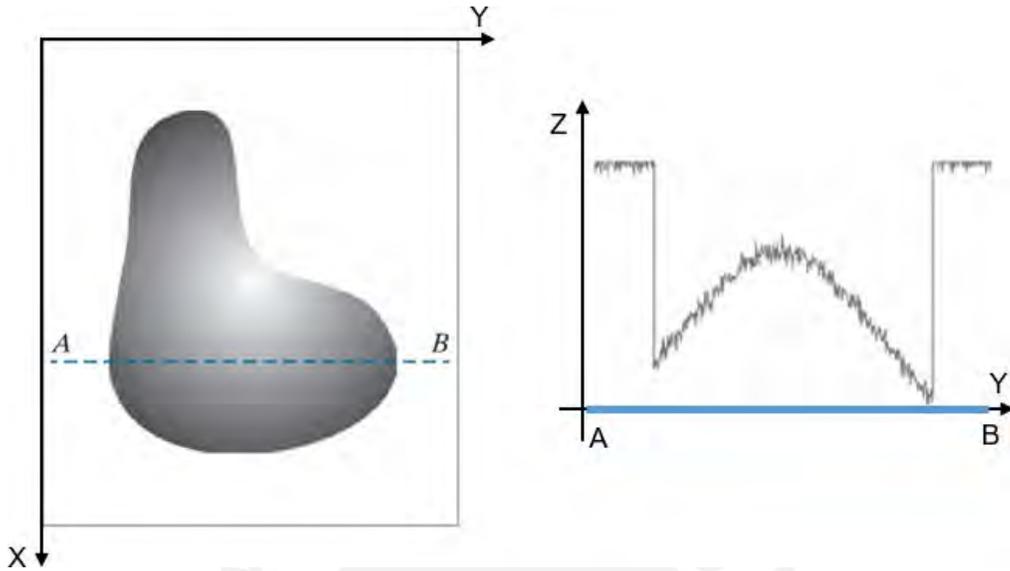


Fuente. Tomado de Mery, 2021, 4m33s-5m24s

Muestreo y cuantización de imágenes. Según Gonzalez y Woods (2018), el objetivo de adquisición de una imagen, como se señaló líneas arriba, es generar la imagen digital a partir de los datos sensados, es decir, se convierte a estos datos continuos en un formato digital (o se convierte o codifica los datos en números). Los procesos encargados para realizar la digitalización de la imagen son: *sampling* (muestreo) y *quantization* (cuantización).

A continuación, se explica los procedimientos de muestreo y cuantización. Según Gonzalez y Woods (2018), el muestreo y cuantización está determinado por el sensor utilizado para generar la imagen. La imagen digital obtenida va a depender, entonces, de la calidad del sensor. Se considera un segmento sobre una imagen y se analiza los niveles de intensidad sobre esta, como se muestra en la Figura 7.

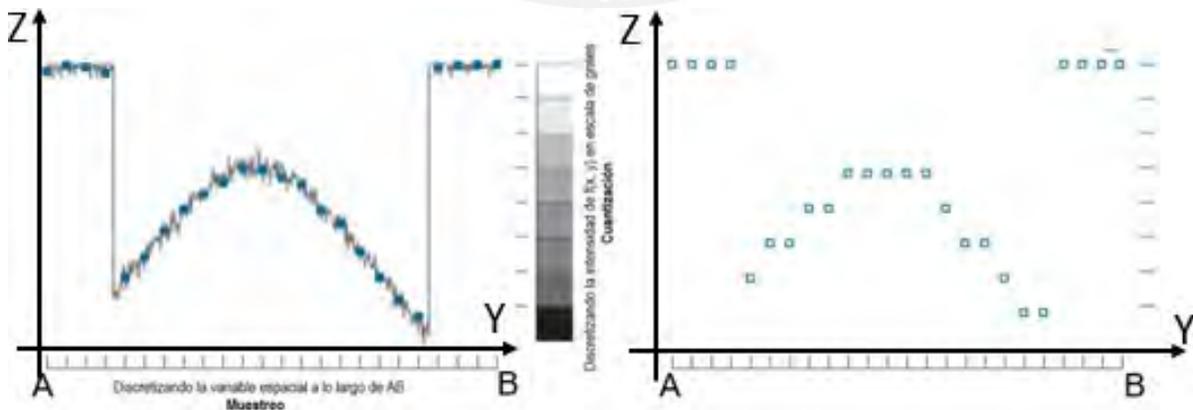
Figura 7. Nivel de Intensidad de una Imagen en el Segmento AB



Fuente. Adaptado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 64

En la figura, al lado izquierdo, se presenta la imagen en escala de grises y al lado derecho se muestra los niveles de intensidad de la imagen para los valores continuos sobre AB (observar que la componente espacial x es constante a lo largo de dicho segmento). Ahora, hacemos que el segmento AB se divida en un número finito de intervalos de igual longitud y para cada una de estas consideramos un valor de la intensidad $f(x, y)$ que genere valores discretos, que en la Figura 8 se muestra como pequeños cuadrados celestes sobre la gráfica continua.

Figura 8. Muestreo y Cuantización

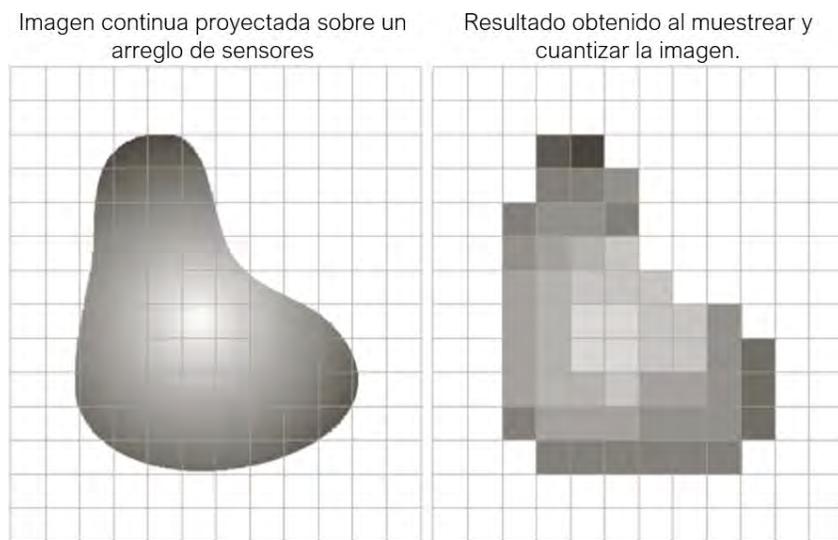


Fuente. Adaptado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 64

En el centro de la figura, se muestra como los valores de $f(x, y)$ va a tomar valores entre ocho escalas de grises. Al lado derecho de la figura, se muestra la imagen discretizada a lo largo del segmento AB y además tomando valores discretos a lo largo del eje Z.

Finalmente, se obtendrá la imagen digital, la cual comprende de cuadrículas escalados en grises cuyo intervalo corresponde entre los extremos 0 (que corresponde al color negro) y el valor de 255 (que corresponde al blanco). A continuación, se muestra en la Figura 9 el resultado obtenido después de los procesos de muestreo y cuantización.

Figura 9. Imagen Digital

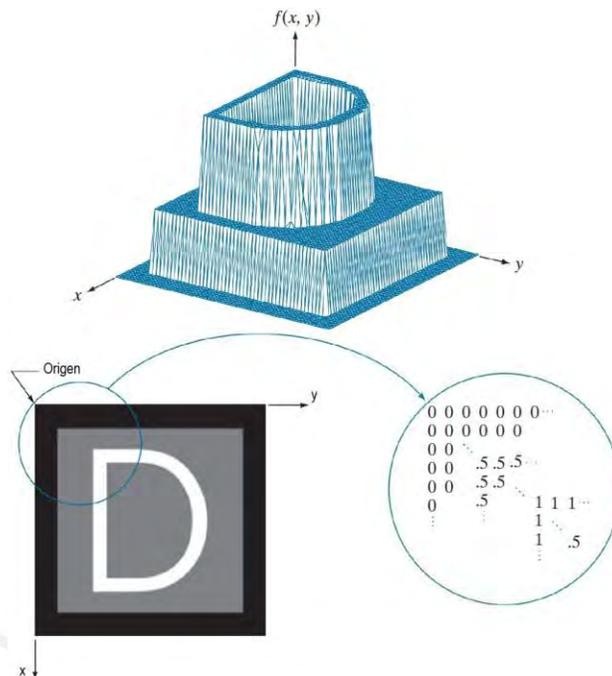


Fuente. Adaptado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 65

En la figura, en el lado derecho, cada elemento rectangular que compone a la imagen digital se conoce como *píxel* y su valor está determinado por un promedio de $f(x, y)$. Según Gonzalez y Woods (2018), el muestreo y cuantización depende del arreglo de sensores del sistema de imagen, además la calidad de la imagen digital está relacionada con los niveles de discretización empleados en el muestreo y cuantización.

Representación de una imagen digital. Entonces, se puede interpretar que una imagen digital se obtiene a partir del proceso de muestreo y cuantización efectuada a una imagen. Según Gonzalez y Woods (2018), el valor de la imagen digital en cada par (x, y) está determinada por la función $f(x, y)$ donde las componentes del par (x, y) son enteros. En la Figura 10, se muestra las representaciones elementales de la función $f(x, y)$.

Figura 10. Representaciones de una Imagen Digital



Fuente. Tomado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 65

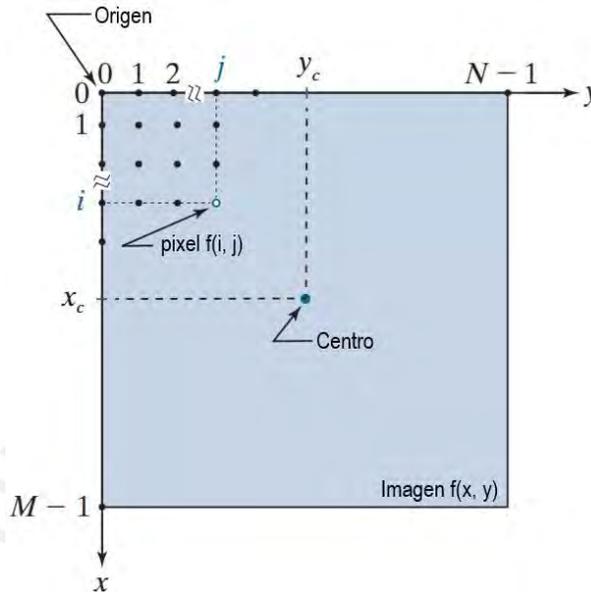
En la parte superior de la imagen, se encuentra la gráfica de f cuyo valor está definida para todo valor (x, y) del plano de la imagen y está determinado a lo largo del eje Z. En la parte inferior, a la izquierda, se tiene una representación que puede compararse con una fotografía o un monitor y además la intensidad de cada punto de esta, es proporcional al valor de $f(x, y)$ en dicho punto. Asimismo, la parte inferior derecha se tiene la representación de la imagen en un arreglo cuyos elementos son los valores de $f(x, y)$. Veamos más claramente esta última representación. Para ello, sea una imagen digital obtenida después de un proceso de muestreo compuesto de M filas y N columnas, además, convenientemente se toma valores enteros para las coordenadas (x, y) : $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ e $y = 1, 2, \dots, N - 1$. Entonces, según Gonzalez y Woods (2018) esta representación de la imagen digital está dada por un arreglo numérico de valores de $f(x, y)$. Dicho arreglo es de dimensión $M \times N$ como se muestra a continuación:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, N - 2) & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, N - 2) & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \dots & f(M - 1, N - 2) & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix} \dots (1)$$

Donde $f(i, j)$ es un número real y es conocida como “*elemento de imagen, elemento de fotografía, píxel o pel*” (Gonzalez y Woods, 2018, p. 66). Además, el valor de la imagen digital

en el origen es $f(0, 0)$. En la Figura 11, se muestra la representación gráfica del arreglo de la imagen donde el eje Y denota la fila y el eje X la columna del arreglo.

Figura 11. Representación Gráfica del Arreglo de la Imagen Digital



Fuente. Adaptado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 68

Donde $f(i, j)$ se refiere al píxel con coordenadas (i, j) . En esta figura, las coordenadas del centro (x_c, y_c) se determinan por el máximo entero de $\frac{M}{2}$ y $\frac{N}{2}$, es decir $(x_c, y_c) = \left(\lfloor \frac{M}{2} \rfloor, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \right)$;

para lenguajes de programación como MATLAB, el centro de la imagen se determina por $(x_c, y_c) = \left(\lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 \right)$, debido a que en esta el origen de coordenadas inicia en $(1, 1)$,

Gonzalez y Woods (2018).

Luego, Gonzalez y Woods (2018) mencionan que una imagen digital puede representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0N-2} & a_{0N-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1N-2} & a_{1N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{M-10} & a_{M-11} & \dots & a_{M-2N-2} & a_{M-1N-1} \end{bmatrix} \dots (2)$$

Donde $a_{ij} = f(i, j)$, de aquí la relación (1) y (2) son idénticos.

Además, mencionan que existe una correspondencia uno a uno entre los valores enteros de x e y de la representación gráfica con las filas y las columnas de la matriz. Esto se debe a que por convención el origen de una imagen digital es la parte superior izquierda. Esta consideración es debido al hecho de que “muchas pantallas de imágenes (por ejemplo, los

monitores de televisión) hace un barrido de la imagen empezando por la parte superior izquierda y moviéndose hacia la derecha de una en una” (Gonzalez y Woods, 2018, p. 67).

Como resumen de lo que se ha descrito líneas arriba, se encuentra en Gonzalez y Woods (2018) que el proceso de muestreo consiste en realizar una partición del plano XY en cuadrículas donde cada una de ellas tiene como coordenadas el centro de estas celdas. Luego, $f(x, y)$ es una imagen digital si para cada par (x, y) de números enteros positivos, se asigne, en general, un número real a $f(x, y)$, a este tipo de asignaciones funcionales se les conoce como proceso de cuantización.

Por otro lado, señalan que, al considerar una imagen digital, cuyo tamaño está determinado por el número de filas y columnas de la matriz de orden $M \times N$ y siendo sus niveles de intensidad $L = f(x, y)$. Entonces se tiene las condiciones relacionadas a M , N y L . Los dos primeros tienen que ser números enteros positivos y además debido al almacenamiento digital y al hardware de cuantización el valor de L tienen que ser potencias enteras de dos ($L = 2^k$), es decir $f(x, y)$ toma valores discretos en el intervalo de $[0, L - 1]$. También, el número de bits requeridos para almacenar una imagen digital está determinado por:

$$b = M \cdot N \cdot k$$

Donde un *bit* es una unidad mínima de información que está determinado por cero o uno. Mientras que un *píxel* es una unidad mínima de la imagen digital, el valor de un *píxel* está determinado por ceros y unos de longitud k . Dependiendo del tipo de imagen un *píxel* tomará un determinado valor entero del intervalo $[0, L - 1]$. En la Tabla 5 se muestra el número de *bits* usados para determinar el rango de valores de la unidad de imagen digital (*píxel*) en sus distintos tipos.

Tabla 5

Bits, rango de valores de los píxeles y usos

Cantidad	Bits (k)	Rango de valores para el píxel	Uso
1	1	[0, 1]	Imagen binaria: documentos, ilustraciones, fax
1	8	[0, 255]	Universal: foto, escaneo, impresión
1	12	[0, 4095]	Alta calidad: foto, escaneo, impresión
1	14	[0, 16383]	Profesional: foto, escaneo, impresión
1	16	[0, 65535]	Máxima calidad: medicina, astronomía

Fuente. Adaptado de Burger y Burge, 2016, p. 10

Thresholding (umbralización). Según Sundararajan (2017), la umbralización es un proceso que se usa en tareas como la mejora, segmentación y compresión de imágenes digitales. Uno de los tipos de umbralización consiste especificar un valor de intensidad de $T > 0$ (umbral) en una imagen en niveles de grises. El autor menciona que para todos los niveles de grises con un valor de intensidad menor o igual a T se coloca el valor de cero (valor de su correspondiente píxel), mientras para el resto se coloca el valor de uno.

Segmentación de imágenes digitales. Según Gonzalez y Woods (2018), la segmentación es un método del procesamiento de imágenes en el cual la entrada es una imagen y cuya salida son atributos de dicha imagen. Además, señalan que este método se basa en dos propiedades que tienen que ver con los valores de intensidad. Por un lado, está la propiedad de discontinuidad, que consiste en dividir la imagen en regiones de acuerdo con cambios bruscos en la intensidad. Por otro lado, está la propiedad de similitud, que consiste en dividir la imagen en regiones que son similares de acuerdo con criterios predefinidos.

Respecto a la primera propiedad, señalan, que el método de segmentación se ocupa de tres características de una imagen: puntos aislados, líneas y bordes (*edge*). Indican que:

Los píxeles de los bordes son píxeles en los que la intensidad de una imagen cambia bruscamente, y los bordes (o segmentos de borde) son conjuntos de píxeles de borde conectados. Los detectores de bordes son herramientas de procesamiento de imágenes locales diseñadas para detectar píxeles de borde. Una línea puede verse como un segmento de borde (típicamente) delgado en el que la intensidad del fondo a ambos lados de la línea es mucho mayor o menor que la intensidad de los píxeles de la línea.

(Gonzalez y Woods, 2018, p. 702)

Por otro lado, Pratt (2007) señala que segmentar una imagen a través de la detección de fronteras es posible, debido a que existe un cambio significativo de intensidad en la frontera. También, indica que la detección de estas fronteras se puede realizar por técnicas de detección de bordes (en esta investigación se señala el método de CANNY, el cual se ejecuta con la función de MATLAB: *edge(I, method)*). Ahora, si la imagen tiene intensidades que difieren en mínimas cantidades entre las regiones, menciona que la frontera detectada puede ser incompleta. Para sobrellevar dicho problema, plantea el uso de técnicas de enlace de bordes (*edge linking*) como la transformada de Hough, el cual se usa para enlazar bordes.

En esta investigación, no se va a profundizar en el método de segmentación, pero este concepto permite ubicar al método de la transformada de Hough como un sub método, en el cual dado una imagen su objetivo es obtener píxeles de dicha imagen cuyo atributo o característica es que estén sobre una línea recta.

El problema que plantean Gonzalez y Woods (2018) es que dados n puntos en una imagen, se desea encontrar subconjuntos de dichos puntos que están sobre una recta. Una solución que proponen es encontrar todas las rectas determinadas por un par de puntos y luego encontrar el subconjunto de puntos que pertenecen a las rectas. El número de rectas a partir de los pares de puntos es $n(n + 1)/2$. Luego, con los n puntos se tiene que realizar las comparaciones con todas las rectas obtenidas, lo cual tendría que hacerse $n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ cálculos. El número de rectas es proporcional a n^2 y las comparaciones son proporcionales a n^3 . Esto implica que a mayor número de puntos los cálculos son demasiados laboriosos computacionalmente. Una propuesta a este problema es la transformada de Hough que a continuación se estudiará.

De ahora en adelante, se enfocará la investigación en la Transformada de Hough. Los primeros desarrollos de este método fueron realizados en las investigaciones de Hough (1962) y de Duda y Hart (1972).

Para el análisis praxeológico de la Transformada de Hough, vamos a considerar los documentos presentes en la Tabla 6 los cuales corresponden a la institución de producción de Procesamiento Digital de Imágenes y la institución de enseñanza de Procesamiento Digital de Imágenes.

Tabla 6

Documentos para el Análisis Praxeológico

Autores	Tipo de documento	Institución de referencia	Dirigido a
Hough (1962)	Artículo de investigación	P(Digital Image Processing)	Investigadores, profesores
Duda y Hart (1972)	Artículo de investigación	P(Digital Image Processing)	Investigadores Profesores, ingenieros, estudiantes
Pratt (2007)	Book	P(Digital Image)	Investigadores

		Processing)	
Gonzalez y Woods (2018)	Book	P(Digital Image Processing), E(Digital Image Processing)	Investigadores, profesores, estudiantes
Mery (2020)	Curso virtual	E(Digital Image Processing)	Estudiantes, público

3.2.2 Transformada de Hough en la Institución de Producción de la Disciplina Intermediaria.

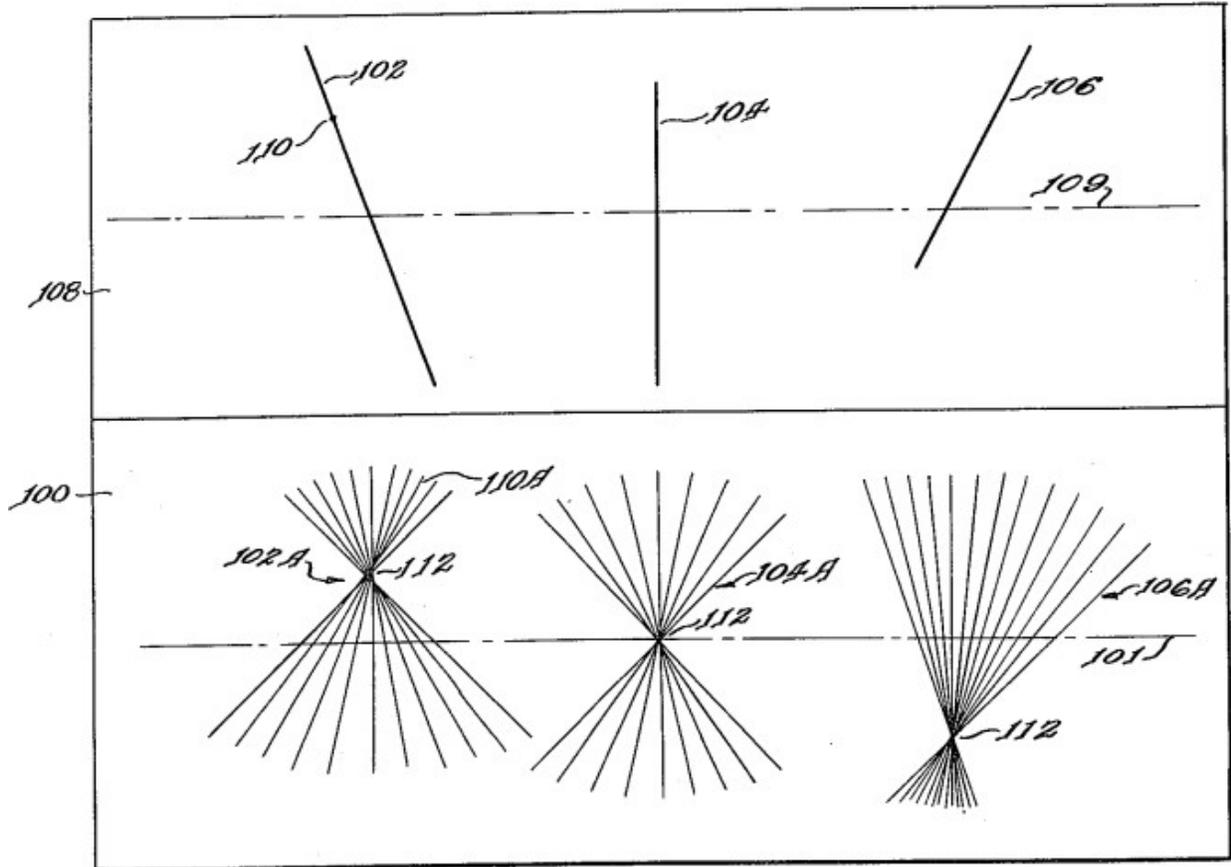
La transformada de Hough es presentada por Paul Hough el año 1960 a la oficina de patentes de Estados Unidos, en el artículo “*Method and means for recognizing complex patterns*”. Hough (1962) menciona que su invento tiene como objetivo “el reconocimiento de patrones complejos y más específicamente un método y medio para el reconocimiento mecánico de líneas complejas en fotografía u otras representaciones pictóricas” (p. 1)

El problema encontrado por Hough es cómo determinar de manera económica la trayectoria de partículas subatómicas que se bombardean sobre una cámara de burbujas, a partir de las observaciones de una multitud de fotografías tomadas en fondo negro. Para resolver dicho problema, Hough propone un dispositivo electrónico que va a automatizar el análisis de las fotografías.

En líneas generales, Hough (1962) menciona que sus objetivos se obtienen al dividir la imagen en sectores pequeños de tal forma que el patrón presente en dicha imagen se descomponga en segmentos de recta. Luego, estos segmentos se caracterizan a partir del dato de su pendiente e intercepto. Dichos datos se almacenan y se analizan para observar los patrones presentes en la imagen. La fundamentación de este procedimiento es presentada a partir de tres figuras que a continuación se va a mostrar.

En la Figura 12, se presenta una relación entre el plano geométrico (parte superior, indicado por 108) y el plano transformado (parte inferior, indicado con 100) donde las rectas en el primer plano son transformadas en rectas bajo ciertos criterios.

Figura 12. Ilustración de la Transformación Plana



Fuente. Tomado de Hough, 1962, p. 1

En la parte superior de la figura 12, se tiene tres rectas en el plano geométrico asignadas con números 102, 104 y 106. Luego, en la parte inferior, se encuentra sus correspondientes transformaciones representadas por 102A, 104A y 106A. Las transformaciones se realizan bajo tres criterios. Según Hough (1962), son las siguientes:

- (1) Para un punto dado en un segmento de línea en el cuadro 108, se dibuja una línea en el plano transformado en el cuadro 100.
- (2) Para un punto sobre la línea en la parte superior del cuadro 108, la línea en el plano transformado está inclinada 45° a la derecha; un punto sobre el segmento de línea en la línea media horizontal del cuadro 108 da una línea vertical en el plano transformado; un punto sobre el segmento de línea en la parte inferior del cuadro 108 da una línea en el plano transformado inclinada a 45° a la izquierda. En general, la línea en el plano

transformado tiene un ángulo relativo a la vertical, cuya tangente es proporcional al desplazamiento vertical del punto en el segmento de línea desde la línea media horizontal 109 del cuadro 108.

(3) Cada línea en el plano transformado se hace para tener una intercepción con la línea media horizontal 101 del cuadro 100, igual a la coordenada horizontal de su respectivo punto en el segmento de línea en el cuadro 108 (p. 1).

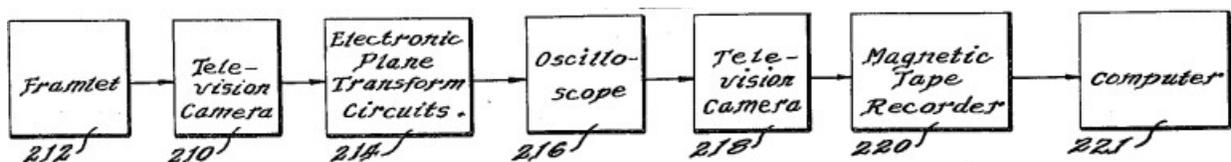
De aquí Hough (1962) plantea que el conjunto de puntos que se encuentren sobre una recta, en el plano geométrico, determinan líneas que se intersecan en algún punto sobre el plano transformado. En la figura mostrada, el punto de intersección se representa por 112, al cual llama nudo. Además, señala algunas propiedades que satisface dicho punto.

(1) Las coordenadas horizontales de los nudos 112 son iguales a las coordenadas horizontales en el cuadro 108 en el que los segmentos de línea recta 102, 104 y 106 interceptan la línea media horizontal 109 del cuadro 108.

(2) La coordenada vertical de los nudos 112, respecto a la línea media horizontal 101 del cuadro 100, es proporcional a la tangente del ángulo de los segmentos de recta 102, 104 y 106 respecto a la vertical. Así, las coordenadas de los nudos 112 en las transformadas planas 102A, 104A y 106A dan las pendientes e intercepciones de los segmentos de recta 102, 104 y 106 en el cuadro 108 (Hough, 1962, p. 1).

Hough (1962) señala, que estos procedimientos que se pueden realizar manualmente también pueden realizarse a partir de aparatos electrónicos. A continuación, se muestra en la Figura 13 el esquema de cómo se realiza el procedimiento de identificación de segmentos de recta.

Figura 13. Diagrama por Bloques del Aparato Electrónico Propuesto por Hough

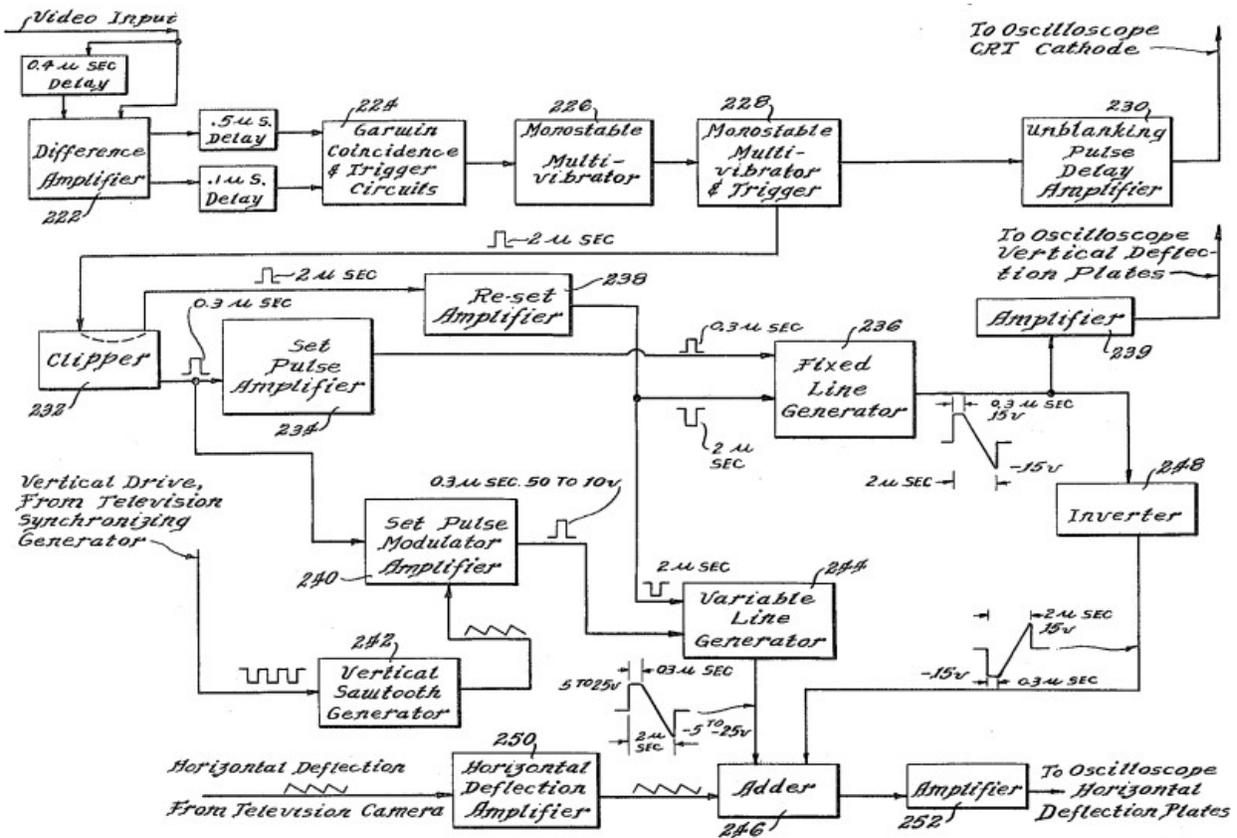


Fuente. Tomado de Hough, 1962, p. 1

De la figura 13, según Hough (1962), el bloque 212 representa a un cuadro de la imagen global. En particular, se tratan de fotografías de trayectorias de partículas subatómicas que son descritas por burbujas a lo largo de la cámara de burbujas. El cuadro contiene una porción de todo el patrón que está en la fotografía. En dicho cuadro, la porción del patrón debe ser un segmento de recta. El bloque 210 se encarga de escanear el cuadro, obteniendo un pulso eléctrico cuando identifica cada punto (burbuja) del segmento de recta. Dicho pulso de salida es transformado por los circuitos eléctricos (bloque 214) en una línea recta en la pantalla del osciloscopio (bloque 216). Dicha pantalla es identificada con el plano transformado, por tanto, las líneas rectas dibujadas aquí satisfacen las reglas señaladas líneas arriba, además para el segmento de línea presentado en el bloque 212 se tiene el plano transformado con lo cual se tiene la pendiente y el intercepto gracias al punto de intersección (nudo) de todas las líneas en este plano. El bloque 216 se encarga de escanear la pantalla del osciloscopio y detectar las coordenadas del nudo, la salida de este bloque pasa a grabarse por la cinta magnética (bloque 220) y de aquí los datos del segmento es analizado, para identificar el patrón en la imagen gracias a un computador.

También cabe señalar que Hough presenta un esquema del circuito eléctrico (ver Figura 14) que permite dibujar líneas rectas en el osciloscopio, hace una descripción detallada de como a partir del pulso eléctrico identificado en el bloque 210 se va dibujando la línea recta bajo los criterios señalados en la construcción del plano transformado.

Figura 14. Diagrama de bloques sobre circuitos electrónicos de transformación de planos



Fuente. Tomado de Hough, 1962, p. 2

Hough (1962) concluye, que este procedimiento se puede aplicar a áreas como el análisis de la escritura a mano, el monitoreo de radares y lectura de mapas. Señala que es necesario tomar en cuenta cada etapa del procedimiento indicado, es decir, que se considere los criterios y propiedades señalados para construir el plano transformado.

Por otro lado, Duda y Hart (1972) abordan el problema de la detección de líneas rectas en imágenes digitales a partir de una parametrización normal de la recta y así evitar el problema de la indeterminación cuando se considera los parámetros pendientes y el intercepto. Finalmente propone una ampliación de la técnica para realizar tareas de identificar circunferencias o curvas en una imagen digital.

Duda y Hart (1972) parte de la ecuación normal de la recta $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$, con $\theta \in [0, \pi]$ y $-R \leq \rho \leq R$, siendo R el tamaño de la imagen. Donde (θ, ρ) son llamados parámetros normales. Consideran un conjunto de n puntos en la imagen: $\{ (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n) \}$ y para encontrar el conjunto de rectas que se ajustan a dichos puntos, transforma cada par $(x_i; y_i)$ a las curvas sinusoidales en el plano $\theta - \rho$, las cuales se definen por $\rho = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta$.

De aquí, plantean algunas propiedades que no son demostrados en el artículo, pero que se pueden justificar teniendo en cuenta la geometría analítica. A continuación, se señala:

Propiedad 1. Un punto en el plano de la imagen corresponde a una curva sinusoidal en el plano de los parámetros.

Propiedad 2. Un punto en el plano de los parámetros corresponde a una línea recta en el plano de la imagen.

Propiedad 3. Los puntos que se encuentran sobre una misma recta en el plano de la imagen corresponden a curvas que pasan por un punto común en el plano de los parámetros.

Propiedad 4. Los puntos que se encuentran en la misma curva en el plano de los parámetros se corresponden con rectas que pasan por el mismo punto en el plano de la imagen. (Duda y Hart, 1972, p. 12)

Estas propiedades como señalan los autores sirven como herramientas para detectar puntos colineales en el plano de la imagen. Una propuesta para interpretar el algoritmo de Hough es la siguiente: en primer lugar, se construye una cuadrícula en el plano $\rho - \theta$ (espacio de parámetros) con $\theta \in [0, \pi]$ y $-R \leq \rho \leq R$. Luego consideran a esta región como un arreglo cuyos elementos son pares ordenados que sirve para acumular en cada una de sus celdas las curvas correspondientes a un punto en el plano de la imagen. Cuando se hayan encontrado las curvas en el plano $\theta - \rho$ de todos los puntos de la imagen, se identifican las celdas de mayor recuento. Por ejemplo, si “el recuento en una celda dada $(\theta_i; \rho_i)$ es k , entonces precisamente k puntos en la imagen se encuentran (dentro del error de cuantificación) a lo largo de la línea cuyos parámetros normales son $(\theta_i; \rho_i)$ ” (Duda y Hart, 1972, p. 13).

También señalan, que la eficiencia del algoritmo es lineal respecto al número de puntos. Pues si tenemos dividido el intervalo de $\theta \in [0, \pi]$ una cantidad de K intervalos se hará K cálculos de ρ para cada punto de la imagen y si son n puntos entonces tendremos $n \cdot K$ cálculos. A comparación de determinar las $n(n - 1)/2$ rectas formadas por los pares de puntos.

Como conclusiones señalan, que la transformada de Hough se puede aplicar a cualquier tipo de curvas, para ello basta con considerar una adecuada parametrización de la curva. Por ejemplo, la circunferencia de ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ puede ser parametrizada por las componentes (h, k, r) , así cada punto (x, y) del plano de la imagen se representará en el

espacio tridimensional de parámetros como un cono circular recto y se tendrá “una matriz tridimensional de acumuladores que representen el espacio tridimensional de los parámetros” (Duda y Hart, 1972, p. 15).

En estos artículos de investigación, se pueden notar claramente que la praxeología de la Transformada de Hough se compone de elementos matemáticos de la geometría analítica, en particular, se manifiesta en las propiedades que señalan los autores. Además, de sus restricciones o limitaciones propias de la institución. En conjunto, aunque no tan específicos en los artículos, se observan elementos teóricos (matemática) y prácticos (Procesamiento de imágenes, electrónica, física de partículas subatómicas) que permiten describir, validar, explicar, facilitar el método de Hough y también motiva a realizar otras tareas. Con más detalle en la sección 3.3 se realizará el análisis praxeológico.

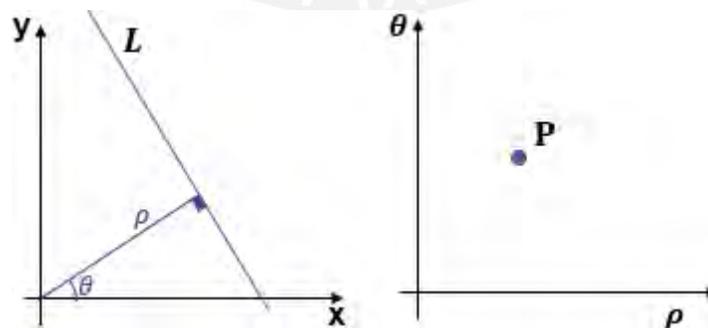
Por otro lado, se considera textos bibliográficos para la identificación de las praxeologías mixtas. Los textos son: Pratt (2007), Gonzalez y Woods (2018).

Pratt (2007) menciona, que la transformada de Hough es un método que es empleado para enlazar bordes (*edge linking*) y que esta permite relacionar una línea recta del plano cartesiano con un punto en el sistema de coordenadas polares. Para ello considera las propiedades mencionadas en Duda y Hart (1972) y la ecuación de la recta en la forma:

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \dots (3)$$

Donde ρ , es la distancia del origen de coordenadas cartesianas a la recta y θ , es el ángulo con vértice en el origen y medido desde el eje X (observar la Figura 15). Esta ecuación (3) es conocida como ecuación normal de la recta.

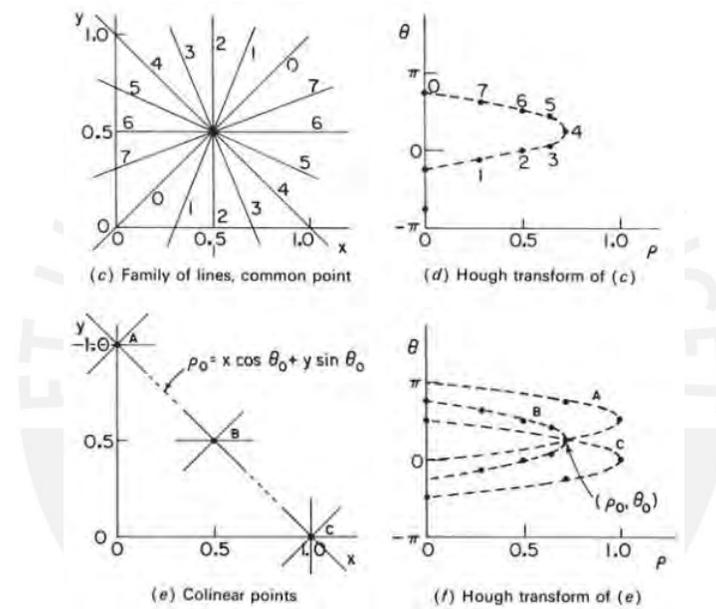
Figura 15. Plano Cartesiano y el Espacio de Parámetros



Fuente. Adaptado de Pratt, 2007, p. 601

En la figura, la recta L es parametrizada por ρ , θ de acuerdo con la ecuación normal de la recta y en el espacio de parámetros esta recta se representa por un punto P . Pratt (2007) señala que una familia de rectas que tienen un punto en común en el plano XY , en el $\rho - \theta$ espacio es una curva. Además, menciona que, si se considera tres puntos colineales en el plano cartesiano, a la familia de rectas que pasan por cada uno de dichos puntos le corresponde tres $\rho - \theta$ curvas y el punto de intersección (ρ_0, θ_0) determina la línea recta en el plano cartesiano que pasa por los tres puntos. Ver Figura 16.

Figura 16. Espacio de parámetros

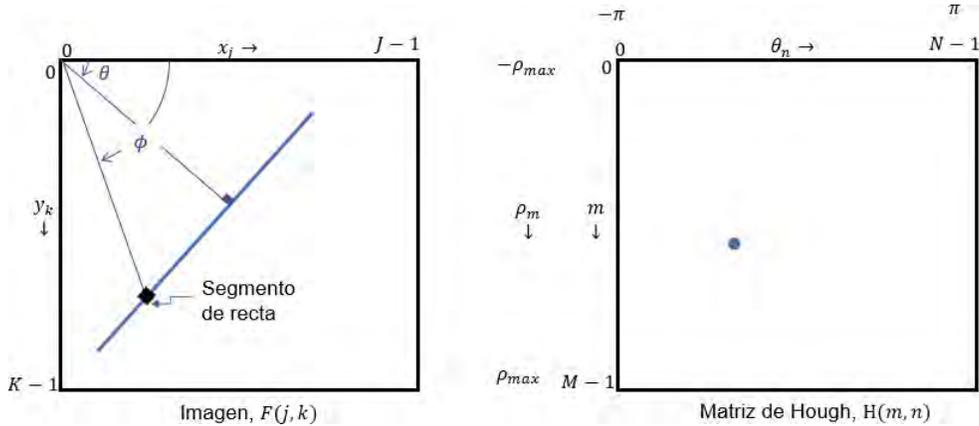


Fuente. Tomado de Pratt, 2007, p. 601

Además, Pratt (2007) señala dos versiones para realizar la transformada de Hough: versión de Duda y Hart, versión de O’Gorman y Clowes. En este trabajo de investigación nos centraremos en la versión de Duda y Hart. Que a continuación detallamos.

Versión de Duda y Hart. Según Duda y Hart (citado en Pratt, 2007), la transformada de Hough está orientada a la detección de líneas rectas y curvas en imágenes binarias y discretas. Además, Pratt (2007) señala que para el desarrollo del algoritmo de la transformada de Hough se considera algunos elementos que están presentes en la Figura 17.

Figura 17. Geometría para el Algoritmo de la Transformada de Hough



Fuente. Adaptado de Pratt, 2007, p. 602

De la figura, las coordenadas cartesianas de un punto de la imagen (j, k) está dado por $x_j = j + 1/2$ y $y_k = k + 1/2$. Además, la matriz de Hough $H(m, n)$ tiene como elementos a valores cuantificados de las variables ρ y θ , donde $-\frac{\rho_{max}}{2} \leq \rho \leq \frac{\rho_{max}}{2}$; $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$ y $\rho = \sqrt{(x_j)^2 + (y_k)^2}$, Pratt (2007).

Para plantear el algoritmo de la transformada de Hough, considerando que M y N sean número impares, encontramos en (Pratt, 2007, p. 603) los siguientes pasos:

1. Inicializar la matriz de Hough con ceros
2. Para cada (j, k) para los cuales $F(j, k) = 1$, computar

$$\rho(n) = x_j \cos \theta_n + y_k \sin \theta_n$$

Donde $\theta_n = \pi - \frac{2\pi(N-n)}{N-1}$ es incrementado sobre el rango $1 \leq n \leq N$ con la restricción $\phi -$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_n \leq \phi + \frac{\pi}{2}, \text{ con } \phi = \arctan\left(\frac{y_k}{x_j}\right)$$

3. Determinar el índice m para los valores cuantificados de $\rho, \rho(n)$

$$m = \left\lceil M - \frac{[\rho_{max} - \rho(n)](M-1)}{2\rho_{max}} \right\rceil$$

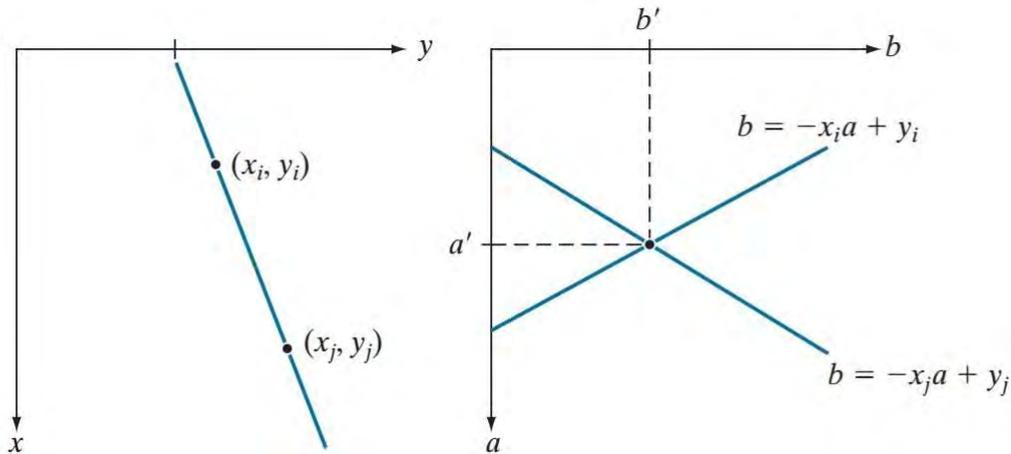
Donde $\lceil \cdot \rceil$ es el máximo entero.

4. Incrementar la matriz de Hough

$$H(m, n) = H(m, n) + 1$$

Gonzalez y Woods (2018) presentan la propuesta de Hough. Para recapitular lo que se identificó en párrafos anteriores, presentamos de forma sucinta los conceptos señalados allí. Para esto, consideremos la Figura 18.

Figura 18. Plano XY y Espacio de Parámetros



Fuente. Tomado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 738

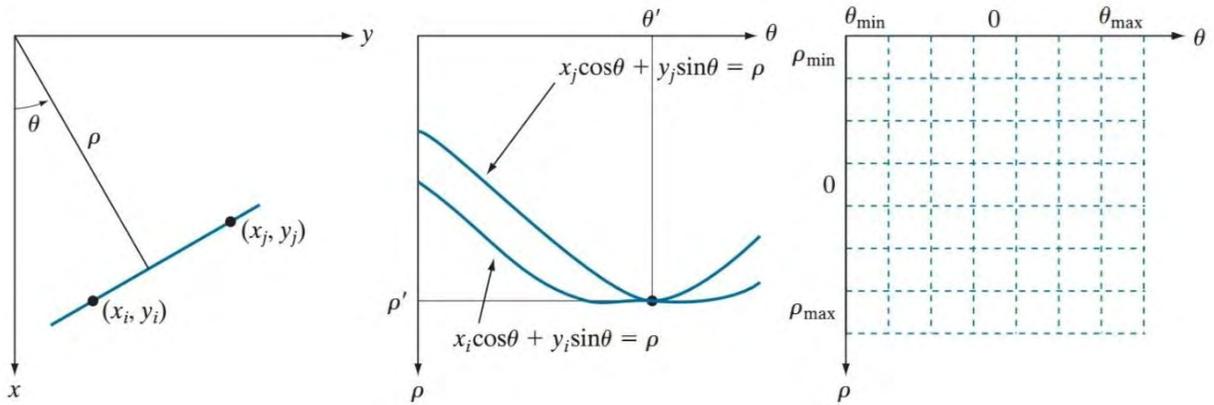
Los autores afirman que al punto (x_i, y_i) (figura 18) se puede asociar a infinitas rectas que pasan por dicho punto, cuya ecuación pendiente-intercepto es de la forma $y_i = ax_i + b$, donde a y b son parámetros que determinan a las rectas. Considerando la ecuación $b = -ax_i + y_i$ y también el ab – plano (espacio de parámetros) se tiene la siguiente afirmación: para un punto fijo se obtiene una sola recta de ecuación $b = -ax_i + y_i$ en el espacio de parámetros. Otra afirmación es: para un punto diferente (x_j, y_j) también se obtiene una sola recta en el espacio de parámetros que se interseca con el primero en el punto (a', b') . Aquí a' es la pendiente y b' es el intercepto de la recta que contiene a los puntos $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ en el plano XY. Finalmente, afirman que todos los puntos sobre esta recta $y_i = a'x_i + b'$ en el plano XY tiene rectas que se intersecan en (a', b') en el espacio de parámetros.

Gonzalez y Woods (2018) señalan que para todo punto (x_k, y_k) en el plano XY se pueden graficar sus correspondientes rectas en el espacio de parámetros. Para identificar la recta en el plano XY es necesario identificar en el espacio de parámetros el punto donde se intersecan la mayor cantidad de rectas en este espacio. Sin embargo, alertan que la dificultad de este enfoque de Hough se encuentra cuando se trata con rectas verticales pues el parámetro a , pendiente, se aproxima al infinito. De aquí formulan la ecuación normal de la recta para superar esta dificultad que se mencionó. La representación normal de la recta es:

$$x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = \rho$$

Para ilustrar sus elementos se considera la Figura 19. Donde se puede notar que los parámetros ρ y θ se determinan en el plano XY. Notar que este plano esta girada 90° en sentido horario respecto al plano cartesiano estudiado en geometría analítica.

Figura 19. Representación Normal de la recta y el $\rho - \theta$ Plano



Fuente. Tomado de Gonzalez y Woods, 2018, p. 739

Señalan que la recta horizontal se determina con $\theta = 0^\circ$ y ρ es la distancia del origen a la intersección de dicha recta con el eje X positivo del plano XY. La recta vertical se determina con $\theta = 90^\circ$ y ρ es la distancia del origen a la intersección de dicha recta con el eje Y positivo del plano XY o también con $\theta = -90^\circ$ y ρ es la distancia del origen a la intersección de dicha recta con el eje Y negativo del plano XY.

En la parte central de la figura se muestra el espacio de parámetros, donde una curva senoidal representa a todas las rectas que pasan por un punto (x_k, y_k) en el plano XY. Además, el punto de intersección (ρ', θ') relaciona a una recta en el plano XY que pasa por los puntos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) .

La parte derecha de la figura 19 se muestra el espacio de parámetros dividido en celdas, al cual llaman los autores *celda acumulador*. Donde $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ y $\rho \in [-D, D]$, D es la máxima distancia entre esquinas opuestas de la imagen. Gonzalez y Woods (2018) describen el procedimiento, que a continuación se señala:

- (A) Se discretizan el plano de la imagen, tal como se señala en la sección de adquisición de imágenes. También se discretiza el espacio de parámetros, obteniéndose la *celda acumulador*.

(B) La *celda acumulador* es inicializada en ceros, bajo la condición: A las coordenadas del espacio de parámetros (ρ_i, θ_j) se hace corresponder un valor de $A(i, j)$ en la *celda acumulador*, donde (i, j) es las coordenadas en el plano de la imagen.

(C) Para cada punto (x_i, y_j) en el plano XY (plano de la imagen) que no sea fondo, es decir que el *píxel* sea 1, se determina los valores de ρ con la ecuación $\rho = x_i \cos \theta + y_j \sin \theta$ para cada valor de θ que sea dividido el eje θ . Los valores de ρ se redondean al más cercano y que pertenezca a los valores en el eje ρ . También, tener en cuenta que $(x, y_j) = (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$.

(D) Si la elección de algún valor de θ_q resulta un valor ρ_p , tal que las coordenadas (θ_q, ρ_p) se repiten entonces el valor del acumulador se va incrementa en uno, $A(p, q) = A(p, q) + 1$.

(E) Al final del procedimiento si el valor de $A(i, j)$ es K, entonces se tiene K puntos sobre la recta $x \cos \theta_j + y \sin \theta_j = \rho_i$ en el plano XY. La precisión de colinealidad de estos puntos depende de la división que se haga al plano $\rho\theta$.

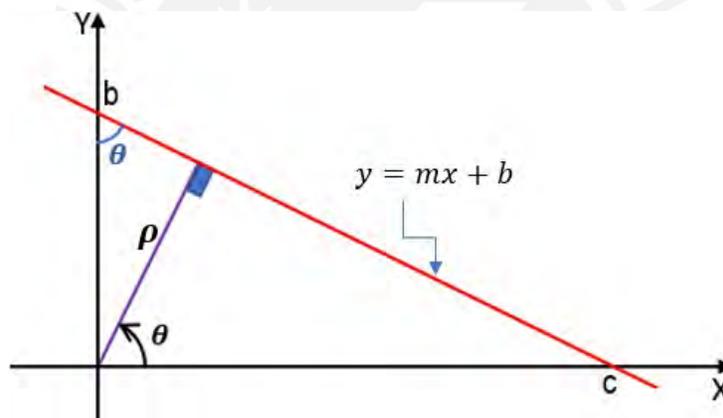
En estos libros de Pratt (2007), Gonzalez y Woods (2018) la praxeología de la Transformada de Hough se encuentra con más detalle respecto a los artículos analizados anteriormente. En principio, ambos se fundamentan en el artículo de Duda y Hart (1972). También, hay una mayor explicitación de elementos matemáticos presentes en la praxeología. Se puede notar que existe una superposición de elementos. Por un lado, tenemos a la imagen, como un arreglo de $J \times K$ y el plano cartesiano con origen en la parte superior izquierda de la imagen. Además, el arreglo es conocido como plano de la imagen y está dividido en un número entero de cuadrículas cuyos centros van a determinar a las coordenadas cartesianas. Los puntos en este plano de la imagen son transformados, a partir de la ecuación normal de la recta, el cual se puede interpretar según las propiedades señaladas, como una transformación que aplica sobre un punto, con lo cual, se obtiene una recta. Además, se puede manifestar que este espacio generado, al cual se le llama espacio de parámetros, está relacionado con el plano polar, debido a las características de los parámetros ρ, θ determinados en la ecuación de la recta. Otro elemento importante que mencionan Pratt, Gonzalez y Woods es el algoritmo de la transformada de Hough, los cuales proporcionan pasos para desarrollar el método de la transformada de Hough. En las secciones 3.3 y 3.4 se realiza un análisis más detallado de estos aspectos.

3.2.3 Transformada de Hough en la Institución de Enseñanza de la Disciplina Intermediaria.

En esta sección, se hace el análisis de la institución de enseñanza de Procesamiento Digital de Imágenes, EPDI. En particular, se considera el curso de Procesamiento Digital de Imágenes 2020 realizada en la Pontificia Universidad Católica de Chile impartida por el profesor Domingo Mery, quien se encuentra disponible en su página personal y corresponde a la clase N°27 donde trata sobre la Transformada de Hough.

El profesor señala que la Transformada de Hough (TH) se emplea para detectar líneas rectas y con algunas variantes se puede también identificar circunferencias y elipses. Considera el plano cartesiano y la ecuación de la recta $y = mx + b$, de pendiente $m = -\frac{b}{c}$. De acuerdo con la Figura 20.

Figura 20. Ecuación punto-pendiente de la recta



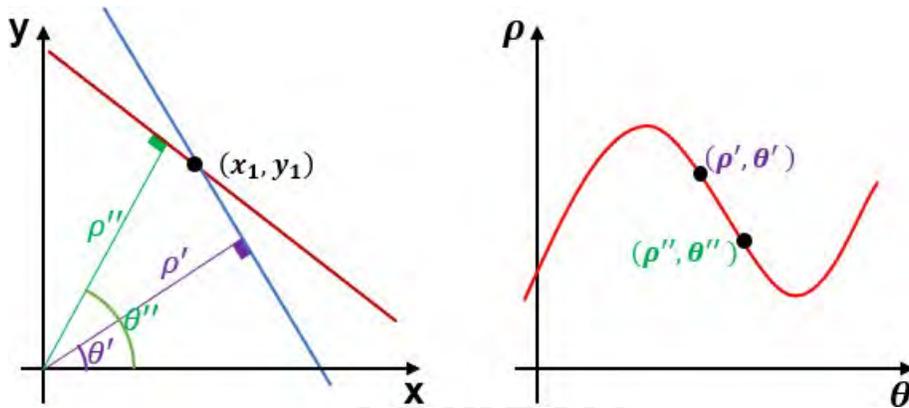
Fuente. Adaptado de Mery, 17 nov 2020, 7m15s-7m37s

En la figura, se muestra elementos que considera el profesor. A partir de los conceptos de las razones trigonométricas seno y coseno realiza los siguientes cálculos: $b = \frac{\rho}{\sin \theta}$ y $c = \frac{\rho}{\cos \theta}$, luego determina la siguiente ecuación

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \dots (4)$$

Afirma, que, dado un punto en el plano cartesiano, (x_1, y_1) le corresponde una ecuación $\rho = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$. Además, cada una de las infinitas rectas que pasan por el punto (x_1, y_1) en el plano XY, es una curva (senoidal) $\rho - \theta$. Luego, concluye que para cada punto en la curva $\rho - \theta$, digamos (ρ', θ') , (ρ'', θ'') se tiene en el plano cartesiano XY una recta pasando por el punto (x_1, y_1) con sus respectivos parámetros como se señala en la Figura 21.

Figura 21. Rectas en el Plano Cartesiano y Puntos en el Espacio de Parámetros



Fuente. Adaptado de Mery, 17 nov 2020, 10m44s-15m24s

En la figura 21, se muestra, cómo a partir de los puntos de la curva $\rho - \theta$ puede determinarse una recta en el plano cartesiano. A continuación, tomando en cuenta lo señalado Mery realiza una explicación de que estaría pasando cuando $\rho - \theta$ curvas se intersecan. Para ello, considera tres puntos colineales en el plano cartesiano XY y observa que en el espacio determinado por las variables ρ, θ las tres $\rho - \theta$ curvas se intersecan en el punto $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$ y, por tanto, concluye que esta coordenada determinaría la recta en el plano XY que contiene a dichos puntos. A continuación, para validar estas ideas realiza una simulación en MATLAB.

En la Figura 22 mostramos el código de programación en MATLAB propuesta por el profesor que sirvió para verificar las ideas, conceptos mostrados en la descripción del método de Transformada de Hough.

Figura 22. Código en MATLAB

```
1 x1 = [0:0.25:1];
2 y1 = -0.5*x1+0.5;
3 x2 = [0:0.25:1];
4 y2 = 0.2*x2+0.1;
5 x = [x1 x2];
6 y = [y1 y2];
7 figure(1);clf
8 plot(x,y,'o');hold on
9 pause
10 th = [0:179]/180*pi;
11 figure(2);clf
12 for i=1:length(x)
13     p = x(i)*cos(th)+y(i)*sin(th);
14     if (i<6)
15         figure(2)
16         plot([0:179],p)
17         figure(1)
18         plot(x(i),y(i),'*')
19     else
20         figure(2)
21         plot([0:179],p,'r')
22         figure(1)
23         plot(x(i),y(i),'r*')
24     end
25     figure(2)
26     axis([0 180 -1 1 ])
27     hold on
28     pause
29 end
30 figure(1)
31 hold on
32 plot(x1,y1)
33 plot(x2,y2,'r')
```

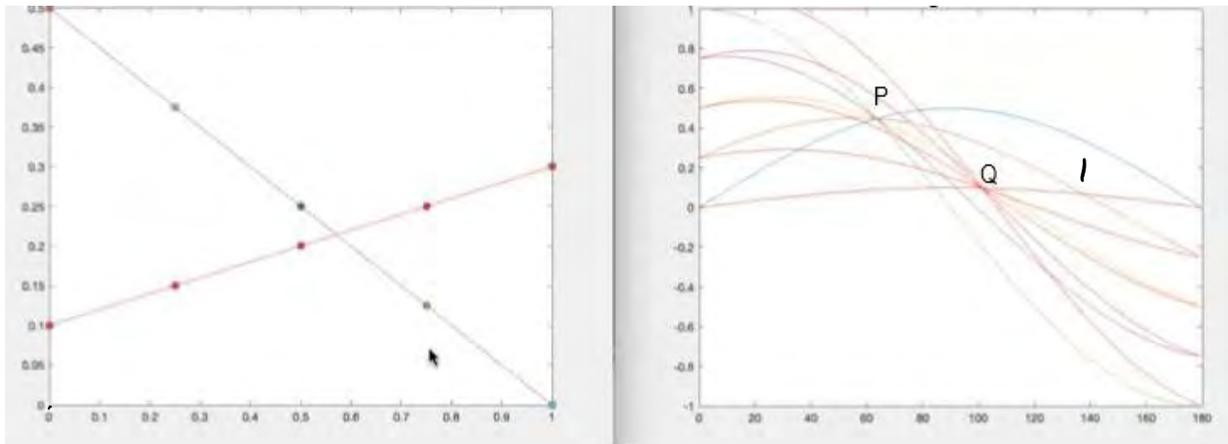
Fuente. Tomado de "imágenes" por D. Mery, 17 nov 2020

(https://github.com/domingomery/imagenes/blob/master/clases/Cap08_Segmentacion/matlab/IMG08_Ho_ugh_Toy.m)

De la figura, se nota que la línea de código 1-9 se ha generado un vector $x = [x_1 \ x_2]$ de 10 componentes donde las primeras 5 componentes corresponden al vector x_1 y las otras restantes a x_2 . Además, estos vectores determinan dos vectores $y_1 = -0.5 * x_1 + 0.5$ y $y_2 = 0.2 * x_2 + 0.1$, las cuales van a estar ploteados (graficados). En la línea 10, se crea un vector ángulo th , para el cual en las líneas del 11 hasta el 12 se van a determinar los valores de $p = x(i) * \cos(th) + y(i) * \sin(th)$ y además el programa plotea th VS p , como se ve al lado derecho de

la Figura 23. En las líneas 30-33 el programa muestra las rectas determinadas por los puntos P y Q.

Figura 23. Salida del programa



Fuente. Adaptado de Mery, 17 nov 2020, 19m15s-22m25s

La figura constata lo que se discute en clase; que los 5 puntos de la figura a la izquierda (en su diagonal) generan 5 curvas que se intersecan en P y para los puntos de rojo se tiene las curvas que se intersecan en Q.

Luego de explicar las ideas y validarlo con el programa en MATLAB, el profesor (Mery, 17 nov 2020, 23m40s-27m-51s) presenta el algoritmo que a continuación señalamos:

0. Leer la imagen de entrada X
1. Inicializar en cero H, el histograma 2D
2. Calcular E, la imagen binaria de los bordes de X
3. Para cada *píxel* "1" en E, obtener las coordenadas (x, y)
4. Calcular la curva $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$.
5. Discretizar la curva (ρ, θ) y actualizar histograma H sumando +1 en las celdas por donde pasa la curva
6. Buscar en H, los máximos: por cada máximo hay una recta detectada en X

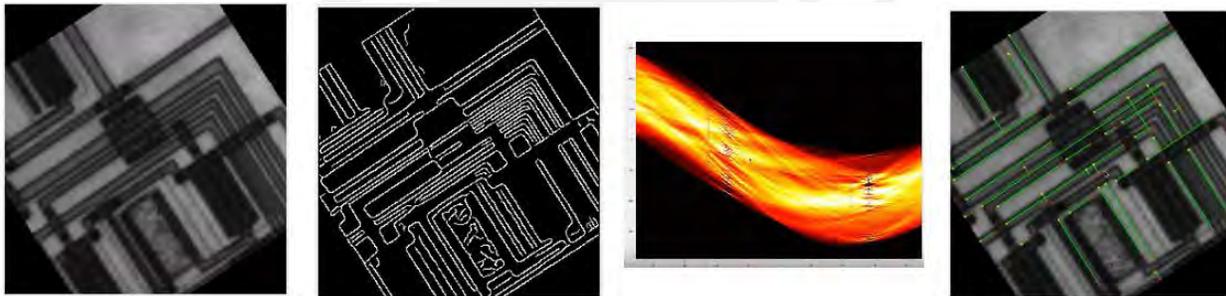
En el paso 1, el profesor señala que el histograma necesita una malla donde ρ se discretiza teniendo en cuenta el tamaño de la imagen y θ se hace lo mismo, pero en el rango de los valores de 0° y 360° .

En el paso 2, menciona que se identifican los bordes de la imagen con algunas librerías del MATLAB como el CANNY, LOG, SOVEL y otros. En ella menciona que para un borde de la imagen se asigna como valor del *píxel* a uno; en caso contrario, se le asigna al *píxel* el valor de cero.

En el paso 4, menciona que se obtiene la curva para cada *píxel* del borde para que en el paso 5 se vaya acumulando en el histograma H en los *píxeles* donde se intersecan las curvas. Finalmente, se identifican en H los máximos. Para ello, menciona que se debe tener en cuenta un umbral.

Luego describe con un ejemplo todos estos pasos del algoritmo el cual a continuación se muestra en la Figura 24.

Figura 24. Vista gráfica del proceso de detección de líneas rectas en MATLAB



Fuente. Tomado de Mery, 17 nov 2020, 39m15s-42m23s

En la figura, de derecha a izquierda, se muestra la adquisición de la imagen monocromática, identificación de bordes, gráfica de las curvas senoidales y búsqueda de máximos en la matriz H. Finalmente, se tiene la imagen de salida con líneas rectas detectadas. Todos estos pasos son efectuados gracias al algoritmo computacional implementado en MATLAB. Para ilustrar como sea han obtenido estos resultados se muestra en la Figura 25, el programa implementado por Mery.

Figura 25. Algoritmo en MATLAB de la Transformada de Hough

```
1 % help from Matlab
2 close all
3 disp('Example 2 of Matlab');
4
5
6
7 % The following example shows how to use these functions to detect lines in an image.
8
9 % Read an image into the MATLAB workspace.
10 I = imread('circuit.tif');
11 % For this example, rotate and crop the image using the imrotate function.
12 rotI = imrotate(I,33,'crop');
13 fig1 = imshow(rotI);
14
15 % Find the edges in the image using the edge function.
16 BW = edge(rotI,'canny');
17 figure, imshow(BW);
18
19 % Compute the Hough transform of the image using the hough function.
20 [H,theta,rho] = hough(BW);
21 % Display the transform using the imshow function.
22 figure, imshow(imadjust(mat2gray(H)),[],'XData',theta,'YData',rho,...
23 'InitialMagnification','fit');
24 xlabel('\theta (degrees)'), ylabel('\rho');
25 axis on, axis normal, hold on;
26 colormap(hot)
27
28 % Find the peaks in the Hough transform matrix, H, using the houghpeaks function.
29 P = houghpeaks(H,12,'threshold',ceil(0.3*max(H(:)))));
30 % Superimpose a plot on the image of the transform that identifies the peaks.
31 x = theta(P(:,2));
32 y = rho(P(:,1));
33 plot(x,y,'s','color','blue');
34
35 % Find lines in the image using the houghlines function.
36 lines = houghlines(BW,theta,rho,P,'FillGap',5,'MinLength',7);
37 % Create a plot that superimposes the lines on the original image.
38 figure, imshow(rotI), hold on
39 max_len = 0;
40 for k = 1:length(lines)
41     xy = [lines(k).point1; lines(k).point2];
42     plot(xy(:,1),xy(:,2),'LineWidth',2,'Color','green');
43
44     % Plot beginnings and ends of lines
45     plot(xy(1,1),xy(1,2),'x','LineWidth',2,'Color','yellow');
46     plot(xy(2,1),xy(2,2),'x','LineWidth',2,'Color','red');
47
48     % Determine the endpoints of the longest line segment
49     len = norm(lines(k).point1 - lines(k).point2);
50     if ( len > max_len)
51         max_len = len;
52         xy_long = xy;
53     end
54 end
55
56 % highlight the longest line segment
57 %plot(xy_long(:,1),xy_long(:,2),'LineWidth',2,'Color','red');
```

Fuente. Tomado de "imágenes" por D. Mery, 17 nov 2020

(https://github.com/domingomery/imagenes/blob/master/clases/Cap08_Segmentacion/matlab/IMG08_Hough_Toy.m)

A modo de conclusión de este apartado, se puede indicar que en la institución de enseñanza hay una descripción más detallada de la praxeología de la Transformada de Hough. Cabe destacar que, en esta institución de enseñanza para explicar, motivar y validar este método se implementa un programa computacional, en este caso, en el lenguaje de programación MATLAB. También, la descripción del algoritmo de la transformada de Hough involucra elementos de la disciplina intermedia (procesamiento digital de imágenes).

3.3 Análisis de Praxeologías Mixtas en el Procesamiento Digital de Imágenes susceptibles de ser Transpuestas al Aula

En esta sección, el foco está en el análisis praxeológico de la Transformada de Hough. Se considera el modelo praxeológico extendido, formulado en Castela y Romo-Vázquez (2011), Romo-Vázquez (2014).

En las instituciones de ingeniería (o no matemáticas) Castela y Romo-Vázquez (2011) señalan que el modelo praxeológico extendido tiene dos componentes tecnológicas. El primero corresponde a la componente teórica (θ^t) que comprenden a los saberes matemáticos y que validan las técnicas matemáticas del modelo matemático usado en las tareas de ingeniería, mientras que la segunda es la componente práctica (θ^p) que comprende a los saberes prácticos legitimados por la institución usuaria y que valida el uso de la técnica. Además, la tecnología θ^p es un discurso que tiene seis funciones tecnológicas relacionados a la técnica. Vázquez et al. (2016) señala que en el “análisis del contexto ingenieril habrá funciones tecnológicas matemáticas (asociadas a modelos matemáticos), pero también funciones tecnológicas prácticas (asociadas al uso de los modelos en ingeniería)” (p. 38).

Al adaptar este modelo a nuestro análisis, permite identificar las matemáticas transpuestas en la institución usuaria, procesamiento digital de imágenes. Encontramos el bloque tecnológico práctico que corresponde a la institución de producción y también a la institución usuaria que a través de discursos explican y justifican el uso de las técnicas (por ejemplo, muestreo y cuantización). También, ubicamos la componente tecnológica teórica que corresponde a elementos de la institución de enseñanza de la matemática, pero adecuados a los elementos propios de la disciplina intermedia, lo que le permiten brindar una validez y pertinencia a sus conceptos y usos.

En la sección 3.2.1, al hacer el estudio de elementos de la disciplina intermedia, procesamiento digital de imágenes, se encontró que un concepto importante dentro de esta disciplina es la imagen digital, del cual se pudo identificar praxeologías mixtas. En el bloque tecnológico – práctico, está relacionado con los métodos de sensado y adquisición de imágenes,

muestro y cuantización de imágenes. También, observamos cómo utilizan elementos matemáticos para representar o modelar una imagen digital. Se muestra en la Tabla 7 la praxeología mixta identificada en la institución de producción y enseñanza del procesamiento digital de imágenes, Mery (2020).

Tabla 7

Praxeología Mixta de Adquisición de una Imagen Digital

<p>Tipo de tarea: T_1^{PDI}  procesar una imagen digital</p> <p>Sub-Tipo de Tarea: T_1^{PDI}  Adquirir una imagen digital</p>
<p>Técnica:</p> <p>τ_{11}^{PDI}: Muestreo. Esta técnica consiste en discretizar las coordenadas espaciales donde se define la función $f(x, y)$ que caracteriza a la imagen continua.</p> <p>τ_{11}^{PDI}: Cuantización. Esta técnica consiste en discretizar la intensidad $f(x, y)$. Por ejemplo, se tiene una escala de grises.</p>
<p>Tecnología:</p> <p>θ_1^{P-PDI}: Adquisición de imágenes. Consiste en elementos físicos, electrónicos y matemáticos que permiten adquirir una imagen para su procesamiento por el computador.</p> <p>θ_1^{th-PDI}: Plano cartesiano. Matriz, cuyos elementos están dados por valores enteros en unidad de píxeles. Funciones en \mathbb{R}^2 con valores enteros.</p>
<p>Teoría:</p> <p>Procesamiento digital de imágenes, álgebra matricial, geometría analítica, cálculo.</p>

Nota. Procesamiento Digital de Imágenes (PDI)

A continuación, vamos a detallar la tecnología práctica θ_1^{P-PDI} . Como se mencionó en la sección 3.2.1, tanto la tarea y las técnicas de muestreo y cuantización se presenta bajo un discurso que involucra elementos de la física y elementos transpuestos de la matemática para representar la imagen digital. Estas técnicas dependen del sistema de imagen, más específicamente de sus sensores. El objetivo de estas técnicas es obtener una imagen digital, como un conjunto de píxeles. Las técnicas mencionadas se justifican gracias a elementos de la física y la matemática, por ejemplo, al considerar a la función $f(x, y)$ proporcional a la cantidad de luminosidad incidente y reflejada del objeto.

Luego, está la imagen digital como un arreglo o matriz, así como también su representación gráfica. Aunque su uso sea diferente a lo presentado en cursos de matemática,

resulta comprensible su adecuación en la institución de la disciplina intermedia. En general, se observa que el bloque tecnológico-teórico θ_1^{th-PDI} está presente de manera conjunta en los discursos del bloque tecnológico-práctico para justificar y explicar conceptos y usos.

Análisis de la Praxeología de la Transformada de Hough en la Institución de Producción de la Disciplina Intermediaria.

Para realizar el análisis praxeológico de la transformada de Hough, consideramos las investigaciones de Hough (1962) y las de Duda y Hart (1972) como representantes de la institución de producción de la disciplina intermedia. En la Tabla 8 se muestra la praxeología mixta hallada en la institución de producción.

Tabla 8

Praxeología de la Transformada de Hough

Tipo de tarea: T_1  Identificar o detectar líneas rectas en una imagen digital.
Técnica: τ_1 : Algoritmo de Hough
Tecnología: θ_1^P : Diagrama del aparato de Hough, el diagrama del circuito electrónico de Hough, reglas y propiedades de la transformación plana.
Teoría: Computación, electrónica

La técnica, a la cual se llama *algoritmo de Hough* se detalla en la figura 13. Consiste en que cada bloque del diagrama de bloques es descrito por Hough, mostrando cómo se realiza el tipo de tarea T_1 . La tecnología se describe a partir del *diagrama del aparato de Hough* (ver figura 13). También, Hough explica cuál es la tarea que realiza cada bloque. Por ejemplo, el bloque 214 (*electronic plane transform circuits*) presenta un circuito electrónico, que se detalla en la figura 14, que se encarga de analizar cada burbuja de la fotografía del trayecto de las partículas subatómicas y luego va construyendo la línea recta que contiene a dichas burbujas. La validación que hace Hough de su técnica está relacionada con transformaciones planas. Aquí se observa que hace referencia al plano cartesiano y relaciona un espacio (al cual llama plano transformado) a partir de la ecuación lineal de la recta. Dicho plano, está determinado por la pendiente y el intercepto. La validación de su técnica es presentada a partir de reglas y propiedades, el cual se detalla en la sección 3.2.2 y la figura 12. Hay que resaltar que en el artículo no se presenta de

forma explícita elementos de la matemática, pero como se señaló, se observa como elemento principal la ecuación punto-pendiente de la recta.

Además, en la explicación de su técnica, Hough menciona que se encuentran ciertas sutilezas con rectas verticales. Esto motiva a que en las investigaciones de Duda y Hart (1972) se tenga una adaptación diferente de la técnica presentada por Hough. Esta investigación se detalla en la sección 3.2.2.

A continuación, en la Tabla 9, se muestra la praxeología de la Transformada de Hough propuesta por Duda y Hart (1972).

Tabla 9

Praxeología de la Transformada de Hough por Duda y Hart (1972)

Tipo de tarea: T_1 ⑦ Identificar o detectar líneas rectas en una imagen digital
Técnica: τ_1^* : Algoritmo de Hough versión Duda y Hart (1972).
Tecnología: $\theta_1^* - P$: Propiedades en Duda y Hart (1972). $\theta_1^{PDI} - P$: Cuantización. Gradiente. θ_1^{th} : Plano cartesiano. Ecuación de la recta. Ecuación normal de la recta. Función seno
Teoría: Procesamiento digital de imágenes, geometría analítica.

Nota. Procesamiento Digital de Imágenes (PDI)

La técnica τ_1^* se describe a partir de los siguientes pasos: (1) Se cuantifica el plano $\theta - \rho$, considerando $0 \leq \theta \leq \pi$ y $-R \leq \rho \leq R$, donde R depende de las características del sistema con el cual se adquiere la imagen (tamaño de la retina). (2) El plano $\theta - \rho$ es considerada como un arreglo bidimensional, cuyos elementos son las coordenadas (θ, ρ) . (3) Para cada punto (x, y) del plano de la imagen se determina la curva senoidal $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$. (4) la curva $\theta - \rho$ es graficada en el plano $\theta - \rho$. (5) se contabiliza las intersecciones entre las curvas $\theta - \rho$. (6) Se obtiene la línea recta en los recuentos altos y a partir del cálculo de ρ y θ se determina la recta en el plano de la imagen.

La tecnología práctica $\theta_1^* - P$ está relacionado con las reglas y propiedades de Hough, que fueron mejoradas por Duda y Hart (1972), para más detalle ver la sección 3.2.2. Estas propiedades señaladas por Duda y Hart (1972) tienen su fundamento en la ecuación normal de

la recta, cuya gráfica en el plano $\theta - \rho$ corresponde a la función seno, mientras que las de Hough se fundamentan en la ecuación pendiente-intercepto. La validación de la técnica τ_1 corresponde al siguiente criterio: Los pasos (1) y (2) podemos relacionarlos con la tecnología práctica del procesamiento digital de imágenes $\theta_1^{PDI} - P$. El gradiente es un procedimiento que consiste en obtener una imagen binaria (blanco y negro) a partir de una imagen en escala de grises. El paso (3) se justifica con la propiedad 1 y 2, además de la tecnología matemática θ_1^{th} . El paso (4) y (5) se justifica con la ubicación de coordenadas en el plano cartesiano y de θ^{th} . El paso (6) se justifica con las propiedades 3 y 4.

Por otro lado, se ha considerado analizar las praxeologías de la Transformada de Hough en los textos bibliográficos de procesamiento digital de imágenes. Se ha considerado a Pratt (2007), Gonzalez y Woods (2018). Se ha seleccionado esta bibliografía pues, Pratt tiene una descripción más detallada de los elementos matemáticos de la Transformada de Hough que Gonzalez y Woods (2018), mientras que esta última involucra ejemplos concretos de la Transformada de Hough. Además, son bibliografías referentes en los cursos de procesamiento digital de imágenes.

A continuación, en la Tabla 10 se muestra la praxeología de la Transformada de Hough analizada en los textos bibliográficos señalados.

Tabla 10

Praxeología de la Transformada de Hough en textos bibliográficos

<p>Tipo de tarea: T_2 ⑦ Identificar bordes en una imagen digital</p> <p>Sub Tipo de tarea: T_{21} ⑦ Identificar líneas rectas en una imagen digital</p>
<p>Técnica:</p> <p>τ_{21}^{PDI}: Algoritmo de la Transformada de Hough, Duda y Hart.</p>
<p>Tecnología:</p> <p>θ_{21}^{PDI}: Propiedades en Duda y Hart (1972), adquisición de imágenes, edge-linking (enlace de bordes), <i>thresholding</i> (umbral)</p> <p>θ_{21}^{th}: Plano cartesiano. Ecuación de la recta. Ecuación normal de la recta. Representación de matrices. Desigualdades, función seno.</p>
<p>Teoría:</p> <p>Procesamiento digital de imágenes, geometría analítica, álgebra matricial, cálculo.</p>

Nota. Procesamiento Digital de Imágenes (PDI)

Pratt (2007), Gonzalez y Woods (2018) señalan que dentro de los tipos de tareas de segmentación existe el problema de *edge-linking*, identificar bordes en una imagen digital. En particular, si se quiere identificar líneas rectas en una imagen una de las técnicas que resuelve este tipo de tareas es el algoritmo de la Transformada de Hough, T_{21}^{PDI} . En términos generales, para cualquier curva, señalan dicho algoritmo en los siguientes pasos:

1. Obtener un mapa binario de bordes [...].
2. Especificar subdivisiones en el $\rho - \theta$ plano.
3. Examinar los recuentos de las celdas del acumulador para las altas concentraciones de píxeles.
4. Examinar la relación (principalmente de continuidad) entre los píxeles de una celda elegida. (Gonzalez y Woods, 2018, p. 741)

Respecto a la tecnología práctica, θ_{21}^{PDI} : El paso 4 consiste en encontrar la curva que representa a cada *píxel*, por ejemplo, una recta o una circunferencia. La transformada de Hough puede aplicarse para identificar no solo rectas sino cualquier curva en la imagen como se señala en Duda y Hart (1972). En particular, para la subtarea T_{21} Gonzalez y Woods (2018) describen y explican cómo se va a desarrollar la técnica en los ítems del (A) al (E), señalados en la sección 3.2.2. Resaltamos que el ítem (A) se justifica con la adquisición de imágenes (C) y (E) con las propiedades de Duda y Hart (1972). En los ítems, también, se observa cómo están presentes elementos de la tecnología teórica θ_{21}^{th} para explicar los procedimientos de la técnica. Además, el paso 1 se justifica con praxeologías del Procesamiento digital de Imágenes: *edge-linking* y el paso 3 con *thresholding*. Los cuales se describieron en la sección 3.2.1.

Para observar la praxeología de la transformada de Hough, que se señala en esta sección, analizamos el siguiente ejemplo (ver Figura 26).

Figura 26. Tarea en la P_{TH}

Example 7.7 Detect the line in the 4×4 binary image $x(m, n)$. The origin is at the top-left corner.

$$x(m, n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fuente. Tomado de Sundararajan, 2017, p. 210

Técnica: Algoritmo de la transformada de Hough

Se realizan tareas puntuales:

- Adquirir la imagen, es decir discretizar el plano de la imagen (mapa binario de bordes):

$$x(m, n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinar la variación del parámetro ρ : $\rho \in [0, \sqrt{3^2 + 3^2}]$
- Discretizar los parámetros (ρ, θ) : $\rho = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $\theta = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$ (estos valores van a depender de la precisión que se requiera).
- Determinar el espacio de parámetros: entonces el espacio de parámetros $(\rho, \theta) =$

$$\begin{matrix} (0, 0^\circ) & (0, 45^\circ) & (0, 90^\circ) & (0, 135^\circ) \\ (1, 0^\circ) & (1, 45^\circ) & (1, 90^\circ) & (1, 135^\circ) \\ (2, 0^\circ) & (2, 45^\circ) & (2, 90^\circ) & (2, 135^\circ) \\ (3, 0^\circ) & (3, 45^\circ) & (3, 90^\circ) & (3, 135^\circ) \\ [(4, 0^\circ) & (4, 45^\circ) & (4, 90^\circ) & (4, 135^\circ)] \end{matrix}, \text{ donde serán mapeados los píxeles no nulos}$$

- Inicializar la matriz acumuladora $acc(5 \times 4)$: $acc(5 \times 4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [0 & 0 & 0 & 0] \end{bmatrix}$
- Computar $\rho(k)$: $\rho(k) = m \cos \theta(k) + n \sin \theta(k)$ para todos los píxeles no nulos en la imagen, además el $\rho(k)$ encontrados deben ser próximos a ρ

A continuación, se determina la curva en el espacio de parámetros, es decir las coordenadas (ρ, θ) de la fila 2 de la matriz $x(m, n)$. El cálculo se determina en la Tabla 11.

Tabla 11
Determinando la Curva en el Espacio de Parámetros

Píxeles no nulos	Calculando ρ	Puntos en el espacio de parámetros
$x(1, 0)$	$\rho = 1 \cos(0^\circ) + 0 \sin(0^\circ) = 1$	$(1, 0^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(45^\circ) + 0 \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1$	$(1, 45^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(90^\circ) + 0 \sin(90^\circ) = 0$	$(0, 90^\circ)$

	$\rho = 1 \cos(135^\circ) + 0 \sin(135^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	No se considera
$x(1, 1)$	$\rho = 1 \cos(0^\circ) + 1 \sin(0^\circ) = 1$	$(1, 0^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(45^\circ) + 1 \sin(45^\circ) = \sqrt{2} \approx 1$	$(1, 45^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(90^\circ) + 1 \sin(90^\circ) = 1$	$(1, 90^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(135^\circ) + 1 \sin(135^\circ) = 0$	$(0, 135^\circ)$
$x(1, 2)$	$\rho = 1 \cos(0^\circ) + 2 \sin(0^\circ) = 1$	$(1, 0^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(45^\circ) + 2 \sin(45^\circ) = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2$	$(2, 45^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(90^\circ) + 2 \sin(90^\circ) = 2$	$(2, 90^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(135^\circ) + 2 \sin(135^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1$	$(1, 135^\circ)$
$x(1, 3)$	$\rho = 1 \cos(0^\circ) + 3 \sin(0^\circ) = 1$	$(1, 0^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(45^\circ) + 3 \sin(45^\circ) = 2\sqrt{2} \approx 3$	$(3, 45^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(90^\circ) + 3 \sin(90^\circ) = 3$	$(3, 90^\circ)$
	$\rho = 1 \cos(135^\circ) + 3 \sin(135^\circ) = \sqrt{2} \approx 1$	$(1, 135^\circ)$

Fuente. Adaptado de Sundararajan, 2017, p. 211

De la tabla, tenemos una curva en el espacio de parámetros (ρ, θ) que corresponde al punto $(1, 0)$ el cual se define por $C_{(1,0)} = \{(1, 0^\circ), (1, 45^\circ), (0, 90^\circ)\}$. Para el punto $(1, 1)$ tenemos la curva $C_{(1,1)} = \{(1, 0^\circ), (1, 45^\circ), (1, 90^\circ), (0, 135^\circ)\}$. Para el punto $(1, 2)$ tenemos la curva $C_{(1,2)} = \{(1, 0^\circ), (2, 45^\circ), (2, 90^\circ), (1, 135^\circ)\}$. Finalmente, para el punto $(1, 3)$ tenemos la curva $C_{(1,3)} = \{(1, 0^\circ), (3, 45^\circ), (3, 90^\circ), (1, 135^\circ)\}$. Ahora se tiene que observar en que coordenadas del espacio de parámetros hay más curvas intersecándose. En las coordenadas $(1, 0^\circ)$ las cuatro curvas se cruzan, también tenemos que $C_{(1,0)}$ y $C_{(1,1)}$ se intersecan en $(1, 45^\circ)$, y finalmente $C_{(1,2)}$ y $C_{(1,3)}$ se intersecan en $(1, 135^\circ)$. Luego la matriz acumulador está dado por:

$$acc(5 \times 4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ [0 & 0 & 0 & 0] \end{bmatrix}$$

Considerando como umbral a 3, es decir, vamos a considerar como máximos a valores mayores a este número. Entonces $acc(1, 0) = 4$ determina una recta en $x(m, n)$. Esto es una recta a una distancia 1 desde el origen (el origen es la entrada $(0,0)$ de $x(m, n)$) y un ángulo de

0° desde el eje m (tener en cuenta que el eje m es la vertical) entonces dicha recta es $L = \{(1,0), (1,1), (1, 2), (1, 3)\}$.

3.4 Praxeología mixta de la Transformada de Hough.

Tomando como referencia el análisis praxeológico de la Transformada de Hough en las secciones previas, se determina la praxeología mixta de la Transformada de Hough. Para ello, se considera la institución de producción del procesamiento digital de imágenes *PDI* y de su enseñanza *EPDI*.

Entonces, el esquema del modelo praxeológico extendido en torno a la Transformada de Hough, que de ahora en adelante lo llamaremos praxeología mixta de la Transformada de Hough (PM – TH), quedaría de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{l} T^{PDI}, \tau^M, \theta^M, \Theta^M \\ T^{PDI}, \tau^{PDI}, \theta^{PDI}, \Theta^{PDI} \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} EM \leftarrow M \\ EPDI \leftarrow PDI \end{array}$$

Donde las instituciones que están involucradas en esta praxeología son: las matemáticas *M*, la enseñanza de las matemáticas *EM*, el procesamiento digital de imágenes *PDI* y la enseñanza del procesamiento digital de imágenes *EPDI*. Además T^{PDI} es el tipo de tarea en el *PDI*; los componentes $[\tau^M, \theta^M, \Theta^M]$ son la técnica, la tecnología y la teoría de las matemáticas o de su enseñanza *EM*; y $[\tau^{PDI}, \theta^{PDI}, \Theta^{PDI}]$ son la técnica, la tecnología y la teoría del *PDI* o de su enseñanza *EPDI*.

En las siguientes tablas se va a precisar los elementos de la praxeología mixta de la transformada de Hough (PM-TH). Se señala en la Tabla 12 el tipo de tarea y las técnicas.

Tabla 12

Tipo de Tarea y Técnicas en la PM-TH

Tipo de tarea: Identificar bordes en una imagen digital
Sub Tipo de Tarea: T^{PDI} ⑦ Identificar líneas rectas en una imagen digital
Técnica:
$(\tau')^{PDI}$ ⑦ Algoritmo de transformada de Hough
$(\tau'')^{PDI}$ ⑦ Algoritmo de transformada de Hough según Duda y Hart (1972)

Nota. Procesamiento Digital de Imágenes (*PDI*)

De la tabla $(\tau')^{PDI}$, una técnica propuesta por Hough (1962) en el cual se considera como espacio de parámetros la pendiente y el intercepto (m, c) de la ecuación $y = mx + c$. Entonces, si se tienen n puntos en el plano cartesiano y se quiere identificar las líneas rectas formadas por

los pares de puntos se tendría que hacer $n(n - 1)/2$ cálculos. Si tuviéramos puntos sobre una vertical, el valor de m sería indeterminada. Por tal motivo, Duda y Hart (1972) proponen la técnica $(\tau'')^{PDI}$ que resulta más eficiente que $(\tau')^{PDI}$ tal como se detalló en la sección 3.3.

Por otro lado, al analizar cómo se hace el sub tipo de tarea T^{PDI} a partir de la técnica $(\tau'')^{PDI}$, se encuentra con tareas puntuales con sus respectivas técnicas y justificaciones tanto matemáticas como de la disciplina intermedia, Procesamiento Digital de Imágenes. Además, estas tareas se realizan de acuerdo con las técnicas en Procesamiento Digital de Imágenes, el cual se va a denotar por τ_i^{PDI} , pero que necesitan desarrollarse en lenguajes de programación como PYTHON o entornos de programación como el MATLAB que en esta investigación se está considerando, debido a que el curso desarrollado de Procesamiento Digital de Imágenes de Mery (2020) se realiza en ella. En ese sentido, para indicar esa relación entre la técnica en procesamiento digital de imágenes y la herramienta para explicar y motivar la técnica se usa la notación $\tau_i^{PDI} \rightarrow \tau_i^{MATLAB}$.

A continuación, se menciona en la Tabla 13 las tareas y técnicas presentes en $(\tau'')^{PDI}$ asociadas a MATLAB para determinar la matriz binaria de la imagen (E). Se toma como referencia el algoritmo presentado en (Mery, 17 nov 2020).

Tabla 13

Tareas y técnicas puntuales sobre la Imagen asociadas a MATLAB

tareas/ sub tareas	Técnicas
<p>t_1: Leer la imagen de entrada X</p> <p>t_{12}: Determinar la imagen X en escala de grises</p> <p>t_{13}: Calcular E, la imagen binaria de los bordes de X</p>	<p>$\tau_1^{PDI} \rightarrow \tau_1^{MATLAB}$: Realizar la tarea t_1 involucra ejecutar la función en MATLAB <code>imread(filename)</code>. Esta función lee la imagen a partir del archivo que puede ser de tipo JPG, entre otros.</p> <p>$\tau_{12}^{PDI} \rightarrow \tau_{12}^{MATLAB}$: Realizar la t_{12} se requiere de la función en MATLAB <code>imshow(I)</code>, que determina la imagen en escala de grises.</p> <p>$\tau_{13}^{PDI} \rightarrow \tau_{13}^{MATLAB}$: Realizar la tarea t_{13} se requiere el uso de la función en MATLAB <code>edge(I, method)</code>, que detecta los bordes de la imagen. Además, sus argumentos son la imagen y el método para realizar la</p>

	detección. En particular, en esta función de MATLAB se usa el método CANNY.
--	---

Nota. Procesamiento Digital de imágenes (PDI)

En la tabla, estas tareas se realizan para lograr que la imagen sea binaria, es decir, valor del píxel es cero para el color negro y valor del píxel es 1 para el blanco. Con esto queda determinada la matriz E cuyos elementos son ceros y unos. Observar que las funciones que se indica en la tabla ya están implementadas en MATLAB, basta entonces hacer el llamado en el algoritmo de la transformada de Hough que se está realizando.

Continuando con el análisis, pasamos a la siguiente Tabla 14 donde se menciona las demás tareas y técnicas asociadas a $(\tau'')^{PDI}$ en la determinación de la matriz de Hough (H).

Tabla 14

Tareas y Técnicas para Determinar la Matriz de Hough o matriz acumuladora (H)

Tareas/ sub tareas	Técnicas
t_2 : Determinar la matriz H	τ_2^M, τ_2^{PDI} : Según Pratt (2007), para determinar H, se considera cuantificar las variables (ρ, θ) considerando las variaciones $-\frac{\rho_{max}}{2} \leq \rho_m \leq \rho_{max}$; $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_n \leq \pi$ y donde $\rho_{max} = \sqrt{(x_j)^2 + (y_k)^2}$, además $J \times K$ son las dimensiones de la matriz E. Se cuantifica de tal manera que las dimensiones de H, $M \times N$ queden determinados por números impares.
t_3 : Calcular las coordenadas espaciales (x, y) en E donde el valor del píxel sea 1.	τ_3^M, τ_3^{PDI} : $x_j = j + 1/2$ y $y_k = k + 1/2$ donde (j, k) indica los índices del elemento $a_{jk} = f(j, k)$ de la matriz de la imagen binaria, E.
	τ_4^M : Se toma en cuenta la ecuación normal de la recta $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ Donde ρ es la distancia del origen a la recta en el plano cartesiano y θ es el ángulo entre el eje X y el radio vector ρ .

<p>t_4: Determinar la curva senoidal para cada (x, y) en E</p> <p>t_{41}: Calcular la curva (ρ, θ) a través de los valores discretizados de ρ y θ.</p>	<p>$\tau_{41}^M, \tau_{41}^{PDI}$: Según Pratt (2007) se tiene:</p> $\rho(n) = x_j \cos \theta_n + y_k \sin \theta_n$ <p>y además</p> $\theta_n = \pi - \frac{2\pi(N-n)}{N-1}$ <p>es incrementado sobre el rango $1 \leq n \leq N$ con la restricción $\phi - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \phi + \frac{\pi}{2}$, con $\phi = \arctan(\frac{y_k}{x_j})$</p> <p>Ver Figura 17 para reconocer gráficamente los elementos que aquí se señala.</p>
<p>t_5: Actualizar la matriz H, sumando +1 en las celdas por donde van pasando las curvas.</p> <p>t_6: Determinar en H los elementos donde hay máximos valores</p>	<p>$\tau_5^{PDI} \rightarrow \tau_5^{MATLAB}$: Se determina una función en MATLAB que tenga como entrada a E y tenga como salida matriz H, vectores ρ y θ. Dentro de esta función se actualiza H a partir de estructuras de control (for, if and else).</p> <p>$\tau_6^{PDI} \rightarrow \tau_6^{MATLAB}$: Se determina una función en MATLAB que tenga como entrada H de la tarea t_5 y que tenga como salida una matriz de los elementos máximos de H.</p>
<p>t_7: determinar la recta con las coordenadas (ρ, θ) del elemento de H correspondiente al máximo valor.</p>	<p>$\tau_7^{PDI} \rightarrow \tau_7^{MATLAB}$: Se determina una función en MATLAB que tenga como entrada a la imagen X, una matriz de los máximos en H, los vectores ρ y θ. Además, esta función gráfica sobre la imagen X las líneas rectas para cada $\rho(i)$ y $\theta(j)$ que corresponde a una máximo en H.</p>

Nota. Procesamiento Digital de imágenes (PDI)

Para aclarar, las técnicas τ_5^{MATLAB} , τ_6^{MATLAB} , τ_7^{MATLAB} se señala en las figuras los códigos de las funciones elaboradas en MATLAB, el cual puede variar de acuerdo con la interpretación del estudiante de $(\tau')^{PDI}$. En la Figura 27, se muestra la función Hough_line_acc que permite determina la matriz H y los vectores ρ y θ .

Figura 27. Función en MATLAB que Determina H , ρ y θ (τ_3^{MATLAB})

```
1 function [H, theta, rho] = hough_lines_acc(BW, varargin)
2 % Compute Hough accumulator array for finding lines.
3 %
4 % BW: Binary (black and white) image containing edge pixels
5 % RhoResolution (optional): Difference between successive rho values, in pixels
6 % Theta (optional): Vector of theta values to use, in degrees
7 % Rows of H should correspond to values of rho, columns those of theta.
8
9 p = inputParser();
10 addParameter(p, 'RhoResolution', 1);
11 addParameter(p, 'Theta', linspace(-90, 89, 180));
12 parse(p, varargin{:});
13
14 rhoStep = p.Results.RhoResolution;
15 theta = p.Results.Theta;
16
17
18 dMax = sqrt((size(BW,1) - 1) ^ 2 + (size(BW,2) - 1) ^ 2);
19 numRho = 2 * (ceil(dMax / rhoStep)) + 1;
20 diagonal = rhoStep * ceil(dMax / rhoStep); % rho ranges from -diagonal to diagonal
21 numTheta = length(theta);
22 H = zeros(numRho, numTheta);
23 rho = -diagonal : diagonal;
24 for i = 1 : size(BW,1)
25     for j = 1 : size(BW,2)
26         if (BW(i, j))
27             for k = 1 : numTheta
28                 temp = j * cos(theta(k) * pi / 180) + i * sin(theta(k) * pi / 180);
29                 rowIndex = round((temp + diagonal) / rhoStep) + 1;
30                 H(rowIndex, k) = H(rowIndex, k) + 1;
31             end
32         end
33     end
34 end
35 end
```

Fuente. Tomado de "Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform-" por Tao, 2 de junio 2016 (https://github.com/taochenshh/Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform-/blob/master/hough_lines_acc.m)

En la figura, se muestra la función `Hough_line_acc` que en líneas generales se define gracias a funciones propias del MATLAB como: `varargin`, `inputParse`, `addParameter`, `linspace`, `parse`, `ceil`, `length`, `zeros`, `round`. Previamente definida los vectores `theta` y `rho`, se inicializa `H` con ceros a partir de la asignación `H = zeros(numRho, numTheta)`, es decir una matriz de dimensiones `numRho × numTheta`. Luego, sus elementos se van incrementando en +1 a medida que se va recorriendo por cada elemento de la matriz `BW`, observar las líneas de código 24 al 34.

A continuación, se muestra la Figura 28 la implementación de la función en MATLAB `hough_peaks` que determina una matriz con los valores máximos de `H`.

Figura 28. Función en MATLAB que Determina los máximos en H (τ_6^{MATLAB})

```
1 function peaks = hough_peaks(H, varargin)
2 % Find peaks in a Hough accumulator array.
3 %
4 % Threshold (optional): Threshold at which values of H are considered to be peaks
5 % NHoodSize (optional): Size of the suppression neighborhood, [M N]
6
7 p = inputParser;
8 addOptional(p, 'numpeaks', 1, @isnumeric);
9 addParameter(p, 'Threshold', 0.5 * max(H(:)));
10 addParameter(p, 'NHoodSize', floor(size(H) / 100.0) * 2 + 1); % odd values >= size(H)/50
11 parse(p, varargin{:});
12
13 numpeaks = p.Results.numpeaks;
14 threshold = p.Results.Threshold;
15 nHoodSize = p.Results.NHoodSize;
16
17 peaks = zeros(numpeaks, 2);
18 num = 0;
19 while(num < numpeaks)
20     maxH = max(H(:));
21     if (maxH >= threshold)
22         num = num + 1;
23         [r,c] = find(H == maxH);
24         peaks(num,:) = [r(1),c(1)];
25         rStart = max(1, r - (nHoodSize(1) - 1) / 2);
26         rEnd = min(size(H,1), r + (nHoodSize(1) - 1) / 2);
27         cStart = max(1, c - (nHoodSize(2) - 1) / 2);
28         cEnd = min(size(H,2), c + (nHoodSize(2) - 1) / 2);
29         for i = rStart : rEnd
30             for j = cStart : cEnd
31                 H(i,j) = 0;
32             end
33         end
34     else
35         break;
36     end
37 end
38 peaks = peaks(1:num, :);
39 end
```

Fuente. Tomado de “Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform-” por Tao, 2 de junio 2016 (https://github.com/taochenshh/Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform-/blob/master/hough_peaks.m)

En la figura, se muestra la función `hough_peaks` que se define gracias a funciones propias de MATLAB como: `varargin`, `inputParse`, `addOptional`, `addParameter`, `floor`, `linspace`, `parse`, `min`, `max`, `zeros`, `find`, `size`. Esta función tiene como objetivo encontrar los máximos (peaks) en la matriz H , acumulador de Hough. Además, la función tiene como entrada la matriz H y su salida es un vector, `peaks`.

Finalmente, se muestra en la Figura 29 la implementación en MATLAB de una función que grafique las rectas en la imagen X a partir de los datos en las funciones anteriores que se señalan en las técnicas τ^{MATLAB} , τ^{MATLAB} .

Figura 29. Función en MATLAB que Determina las rectas en X (τ^{MATLAB})

```

1  function hough_lines_draw(img, peaks, rho, theta)
2      % Draw lines found in an image using Hough transform.
3      %
4      % img: Image on top of which to draw lines
5      % peaks: Qx2 matrix containing row, column indices of the Q peaks found in accumulator
6      % rho: Vector of rho values, in pixels
7      % theta: Vector of theta values, in degrees
8
9      figure();
10     imshow(img);
11     hold on;
12     for i = 1 : size(peaks,1)
13         rho_i = rho(peaks(i,1));
14         theta_i = theta(peaks(i,2)) * pi / 180;
15         if theta_i == 0
16             x1 = rho_i;
17             x2 = rho_i;
18             if rho_i > 0
19                 y1 = 1;
20                 y2 = size(img,1);
21                 plot([x1,x2],[y1,y2], 'g', 'Linewidth',3);
22             end
23         else
24             x1 = 1;
25             x2 = size(img, 2);
26             y1 = (rho_i - x1 * cos(theta_i)) / sin(theta_i);
27             y2 = (rho_i - x2 * cos(theta_i)) / sin(theta_i);
28             plot([x1,x2],[y1,y2], 'g', 'Linewidth',3);
29         end
30     end
31 end
32 end

```

Fuente. Tomado de “Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform-” por Tao, 2 de junio 2016 (https://github.com/taochenshh/Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform-/blob/master/hough_lines_draw.m)

En la figura, se muestra la función hough_lines_draw que se define a partir de la imagen de entrada X, la salida de la función hough_peaks y de la salida de la función Hough_line_acc, los vectores rho y theta. Se determina rho_i y theta_i para cada elemento del vector peaks luego se halla las coordenadas (x1, y1) y (x2, y2) para graficar las rectas mediante la función de MATLAB plot.

A continuación, en la Tabla 15, se señala el bloque del *logos* de la *PM-TH*, donde la tecnología del procesamiento digital de imágenes, θ^{PDI} , se relaciona con las herramientas de MATLAB para justificar las técnicas y por ende la realización de las tareas. También se tiene la tecnología matemática θ^M que dan la razón de ser de las técnicas empleadas en la implementación del algoritmo de la transformada de Hough.

Tabla 15

Tecnología y Teoría asociada en la Praxeología Mixta Transformada de Hough

Tecnologías θ^{PDI} y θ^M	Teoría
<p>La tecnología práctica θ^{PDI} del procesamiento digital de imágenes de las técnicas $\tau_1^{PDI} \rightarrow \tau_1^{MATLAB}$, $\tau_{12}^{PDI} \rightarrow \tau_{12}^{MATLAB}$, $\tau_{13}^{PDI} \rightarrow \tau_{13}^{MATLAB}$ son las funciones de MATLAB aquí empleadas y que están justificadas en el código desarrollado por MATLAB.</p>	
<p>La tecnología práctica θ^{PDI} del procesamiento digital de imágenes de las técnicas τ_{41}^{PDI}, $\tau_5^{PDI} \rightarrow \tau_5^{MATLAB}$, $\tau_6^{PDI} \rightarrow \tau_6^{MATLAB}$, $\tau_7^{PDI} \rightarrow \tau_7^{MATLAB}$ son las 4 propiedades señaladas en Duda y Hart, 1972.</p>	
<p>La tecnología matemática θ^M en el algoritmo de TH comprende:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Distancia entre dos puntos, por ejemplo, para determinar ρ_{max} 2. Definición de las coordenadas polares (ρ, θ) como se muestra en la Figura 20. 3. Ecuación normal de la recta 4. Definición de función en la implementación de las funciones en MATLAB presentes en las técnicas τ_5^{PDI}, τ_6^{PDI}, τ_7^{PDI} 	<ul style="list-style-type: none"> • Procesamiento digital de imágenes • Geometría analítica • Trigonometría y álgebra • Lógica proposicional • Vectores y matrices • Teoría de funciones

<p>5. Funciones especiales dentro de la implementación de las funciones en MATLAB (Ver Figuras 27, 28 y 29)</p> <p>6. Definición de matriz y vectores como variables y constantes dentro de las funciones en MATLAB (Ver Figuras 27, 28 y 29)</p> <p>7. Lógica proposicional en la implementación de las estructuras de control (Ver Figuras 27, 28 y 29)</p>	
---	--

Nota. Procesamiento Digital de imágenes (PDI)

Respecto a las propiedades de Duda y Hart (1972), es conveniente señalar como estas se justifican con elementos de la geometría analítica (ecuación de la recta) y sistemas de ecuaciones lineales. A continuación, se presenta las demostraciones de las propiedades.

Propiedad 1. Un punto en el plano de la imagen corresponde a una curva sinusoidal en el plano de la imagen.

Demostración:

Un punto en el plano de la imagen está determinado por un solo par de coordenadas polares (ρ, θ) y también por un solo par de coordenadas cartesianas (x, y) : considerando la siguiente ecuación $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ tenemos que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\theta + \varphi)$ con $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Entonces, observamos que ρ es una función de θ y considerando un plano con ejes $\rho - \theta$ tenemos que la gráfica de ρ es la función seno con amplitud $\sqrt{x^2 + y^2}$ y un desfase φ .

Propiedad 2. Un punto en el plano de parámetros corresponde a una línea recta en el plano de la imagen.

Demostración:

De manera recíproca a la propiedad 1, un punto fijo en el plano de parámetros está determinado por las coordenadas (ρ, θ) y considerando la ecuación $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ con x, y variables tenemos que esta determina en el plano de la imagen (plano cartesiano) una recta con pendiente $m = -\cot(\theta)$ y punto de corte con el eje y $b = \frac{\rho}{\sin \theta}$.

Propiedad 3. Los puntos que se encuentran sobre una misma recta en el plano de la imagen corresponden a curvas que pasan por un punto común en el plano de los parámetros.

Demostración:

Consideremos tres puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) en la recta de ecuación $x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 = \rho_0$. Entonces si reemplazamos estos puntos en la ecuación tenemos

$$x_1 \cos \theta_0 + y_1 \sin \theta_0 = \rho_0 \dots (1)$$

$$x_2 \cos \theta_0 + y_2 \sin \theta_0 = \rho_0 \dots (2)$$

$$x_3 \cos \theta_0 + y_3 \sin \theta_0 = \rho_0 \dots (3)$$

De aquí, tenemos en el plano de parámetros tres curvas senoidales con las siguientes ecuaciones:

$$x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta = \rho \dots (1')$$

$$x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta = \rho \dots (2')$$

$$x_3 \cos \theta + y_3 \sin \theta = \rho \dots (3')$$

Entonces por las ecuaciones (1), (2) y (3) observamos que una solución del sistema de ecuaciones (1'), (2') y (3') es (ρ_0, θ_0) . Por tanto, las curvas senoidales se cortan en el punto (ρ_0, θ_0) .

Propiedad 4. Los puntos que se encuentran en la misma curva en el plano de los parámetros se corresponden con rectas que pasan por el mismo punto en el plano de la imagen.

Demostración:

Consideramos la curva dada por la ecuación de la forma:

$$\rho = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

Por otro lado, tengamos dos puntos (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) de dicha curva entonces estas satisfacen la ecuación y, por tanto, tenemos:

$$\rho_1 = x_0 \cos \theta_1 + y_0 \sin \theta_1 \dots (1)$$

$$\rho_2 = x_0 \cos \theta_2 + y_0 \sin \theta_2 \dots (2)$$

Estas igualdades en el plano de la imagen (cartesiano) satisfacen las siguientes ecuaciones de rectas:

$$x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 = \rho_1 \dots (1')$$

$$x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2 = \rho_2 \dots (2')$$

Por las ecuaciones (1) y (2), tenemos que el punto (x_0, y_0) es solución de las ecuaciones (1') y (2'). Por tanto, dichas rectas se intersecan en dicho punto. Luego, a los puntos (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) le corresponden las rectas (1') y (2') las cuales se intersecan en un punto (x_0, y_0) .

3.4.1 *Condiciones institucionales para la implementación de la praxeología mixta de la transformada de Hough*

En esta sección, se presenta las condiciones y limitaciones institucionales de la enseñanza de la disciplina intermediaria y la enseñanza de las matemáticas. El objetivo es dar a conocer el modelo formativo en estas instituciones, y sus relaciones. Para a partir de ello, poder dar un contexto al diseño de un proceso de estudio e investigación en torno a la praxeología mixta de la transformada de Hough en la enseñanza de la matemática para la formación del futuro ingeniero. En adelante, a este proceso se le va a identificar por Recorrido de Estudio e Investigación en torno a la transformada de Hough (REI-TH).

En ese sentido, se inicia con el análisis de los programas analíticos de la institución de enseñanza de la disciplina intermediaria Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales (PSDI) de la Escuela de Ingeniería Mecatrónica de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Dicha disciplina es obligatoria, se encuentra programada en el octavo nivel y tiene como requisito haber aprobado Estadística para Ingeniería y Electrónica Básica.

Por otro lado, es importante señalar que dentro del plan de estudios del PSDI manifiestan que el estudiante tenga habilidades, y destrezas en el uso de conceptos y técnicas de dicha disciplina con la finalidad de aplicar en su futuro profesional estos conocimientos a actividades en el que están involucradas. A continuación, en la Tabla 16 se indica algunos objetivos del curso PSDI que estén relacionados con actividades de modelización matemática.

Tabla 16

Objetivos de la Institución de Enseñanza Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales

Capacidades	<ul style="list-style-type: none">- Analizar señales e imágenes empleando algoritmos matemáticos- Aplicar las técnicas básicas de procesamiento de imágenes que le permitan desarrollar sistemas de visión por computadora.
Habilidades	<ul style="list-style-type: none">- La habilidad para identificar, formular y resolver problemas de ingeniería complejos mediante la aplicación de principios de ingeniería, ciencia y matemáticas.- La habilidad para aplicar el diseño de ingeniería para producir soluciones que satisfagan necesidades específicas teniendo en cuenta la salud pública, la seguridad y el bienestar, así como factores globales, culturales, sociales, ambientales y económicos.- La habilidad para comunicarse de manera efectiva con un rango de audiencias

- La habilidad para adquirir y aplicar nuevos conocimientos, según sea necesario, utilizando estrategias de aprendizaje apropiadas.

Fuente: adaptado del Programa analítico de Procesamiento de señales e imágenes digitales, 2021-2, Ingeniería Mecatrónica, Pontificia Universidad Católica del Perú, <https://eros.pucp.edu.pe/pucp/jsp/Intranet.jsp>

En la tabla, hacen referencia a que la matemática se usa como herramienta para el análisis de elementos de la disciplina intermediaria tal como se ha podido identificar en la sección 3.2.1. Asimismo, menciona que los principios de matemática, ciencia e ingeniería sirven para resolver problemas de ingeniería. En concreto, nos da entender que se tiene una mirada algorítmica o aplicada de la matemática.

Además, en la unidad 2 del programa analítico de PSDI se observa los siguientes contenidos relacionados al Procesamiento Digital de Imágenes que en la Tabla 17 se presenta.

Tabla 17

Unidad de Procesamiento Digital de Imágenes

Introducción al procesamiento digital de imágenes (3h)	
Capítulo 6	1. Elementos de percepción visual
	2. Sensado y adquisición de imágenes
	3. Muestreo y cuantización de imágenes
	4. Relaciones básicas entre píxeles
	5. Transformaciones espaciales
Mejora de imágenes en el dominio espacial (6h)	
Capítulo 7	1. Transformación de intensidad
	2. Ecuilización de histograma
	3. Transformaciones espaciales
	4. Convolución bidimensional
	5. Suavizado y realzado de imágenes
Mejora de imágenes en el dominio de frecuencia (3h)	
Capítulo 8	1. Transformada de Fourier bidimensional
	2. Propiedades de la transformada de Fourier bidimensional
	3. Filtrado a partir de producto en frecuencia
	4. Suavizado en el dominio de frecuencia

Segmentación de imágenes (9h)

Capítulo 9

1. Operaciones morfológicas básicas
2. Detección de discontinuidades
3. Técnicas para la detección de bordes: Marr-Hildreth, Canny, Hough
4. Técnicas de umbralización: Rosin, Otsu
5. Segmentación basada en movimiento
6. Segmentación a color. Agrupamiento. K-Means
7. Puntos de interés. Algoritmo Surf.

Fuente. Adaptado del Programa analítico de Procesamiento de señales e imágenes digitales, 2021-2, Ingeniería Mecatrónica, Pontificia Universidad Católica del Perú, <https://eros.pucp.edu.pe/pucp/jsp/Intranet.jsp>

En la tabla, se observa que para abordar la transformada de Hough, que se encuentra en el capítulo 9, es necesario que el estudiante pueda conocer los elementos presentes en el capítulo 6. En ese sentido, se observa algunas restricciones para que la actividad de modelización entorno a la Transformada de Hough se pueda realizar dentro de E(M). Estas restricciones pueden ser: a) que el conjunto de imágenes a considerar en el programa de computación contenga pocas líneas rectas b) que se permita el uso de algunas librerías ya implementadas en MATLAB, por ejemplo, para la mejora de imágenes, operaciones morfológicas, entre otras que son necesarias previas a la tarea de detección de líneas, T^{PDI} . Estas restricciones permitirán trabajar con un mínimo de datos en las imágenes y no entrar en problemas que los estudiantes con sus conocimientos previos y que vayan adquiriendo en el recorrido no puedan manejar o se prolongue la actividad.

También, es importante señalar que dentro de este programa analítico de PSDI encontramos que el tipo de calificación corresponde a tareas académicas con un peso de 4/10, dichas tareas corresponden a dos proyectos, siendo una de ellas relacionado al procesamiento digital de imágenes. Finalmente, encontramos importantes *medias* para el estudio tanto para el docente y el estudiante, que en la siguiente Tabla 18 se mencionan.

Tabla 18*Medias para el REI-TH*

Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2008). <i>Digital image processing</i> . Prentice Hall.
Gonzalez, R. C. (2008). <i>Digital image processing using MATLAB</i> . Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
Gonzalez, R. C. (1996). <i>Tratamiento digital de imágenes</i> . Wilmington, Del. Addison-Wesley.

Fuente: Adaptado del Programa analítico de Procesamiento de señales e imágenes digitales, 2021-2, Ingeniería Mecatrónica, Pontificia Universidad Católica del Perú, <https://eros.pucp.edu.pe/pucp/jsp/Intranet.jsp>

Para poder relacionar las instituciones de la disciplina intermediaria y la institución de enseñanza matemática, se considera como instituciones de enseñanza de la matemática a las asignaturas: Álgebra Matricial y Geometría Analítica que denotamos por AMGA y Fundamentos de cálculo denotado por FCAL.

En el programa analítico de AMGA mencionan que las competencias a desarrollar consisten en aprender a aprender, de comunicar efectivamente y la capacidad de aplicar conocimientos de matemática, ciencia e ingeniería. Además, consideran tres unidades didácticas que se menciona en la Tabla 19. Solo se muestra algunos temas que podría relacionarse con la PM-TH que esta descrita en la sección 3.4.

Tabla 19*Temas del Programa Analítico de AMGA que está asociada a la Praxeología mixta TH*

Contenidos	
Geometría Analítica (17h)	Sistema de coordenadas cartesianas. Distancia entre dos puntos en el plano. Aplicaciones. Ángulo de inclinación y pendiente de una recta. La recta y su ecuación punto-pendiente. Otras formas de ecuación de una recta: dos puntos, pendiente-ordenada en el origen y simétrica. Forma general de la ecuación de la recta. Ejemplos. Teoremas sobre rectas paralelas y perpendiculares. Distancia de un punto a una recta.
Introducción al Álgebra Lineal (29h)	Matrices. Operaciones de adición de matrices y multiplicación de matrices por escalares. Propiedades de las operaciones con matrices. Matriz identidad. Multiplicación de matrices. Propiedades.

Fuente: Adaptado de Programa Analítico de Álgebra Matricial y Geometría Analítica, 2021-2, Estudio Generales Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú, <https://eros.pucp.edu.pe/pucp/jsp/Intranet.jsp>

En la metodología de enseñanza, consideran explicaciones teóricas y ejemplos a cargo del profesor y lista de problemas desarrolladas por los estudiantes. También, se promueve el uso de software matemático como una herramienta para validar las soluciones o procedimientos. Finalmente, las evaluaciones se comprenden de dos exámenes, prácticas calificadas y dirigidas. Por otro lado, en el programa analítico de FCAL encontramos los logros de aprendizaje entorno a la aplicación de conceptos y propiedades de los números y las funciones reales para la resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos, así como en el uso de software para afianzar estos conocimientos y además sirva como herramienta para verificar procedimientos y generar conjeturas.

Adicionalmente se menciona en la Tabla 20 los temas que tienen alguna relación con la praxeología mixta de la transformada de Hough.

Tabla 20

Temas del Programa Analítico de FCAL que está asociada a la Praxeología mixta TH

		Contenidos
Lógica e inducción matemática (8h)	e	Lógica proposicional elemental. Cuantificadores existencial y universal. Negación de proposiciones con cuantificadores. Condicionales y bicondicionales.
Inecuaciones en \mathbb{R} (29h)		Recta real. Intervalos. Valor absoluto. Expresión lineal en una variable. Resolución de inecuaciones lineales en una variable.
Funciones reales variable (42h)	de real	Definición de función. Dominio y rango. Funciones lineales. Gráficas: rectas, intersección de rectas, rectas paralelas y perpendiculares. Ecuaciones e inecuaciones. Funciones seccionadas. Dominio y rango. Gráficas. Funciones trigonométricas de números reales. Gráficas. Transformaciones de las funciones seno y coseno- Amplitud y periodo.

Fuente: Adaptado de Programa Analítico de Fundamentos de cálculo, 2021-2, Estudio Generales Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú, <https://eros.pucp.edu.pe/pucp/jsp/Intranet.jsp>

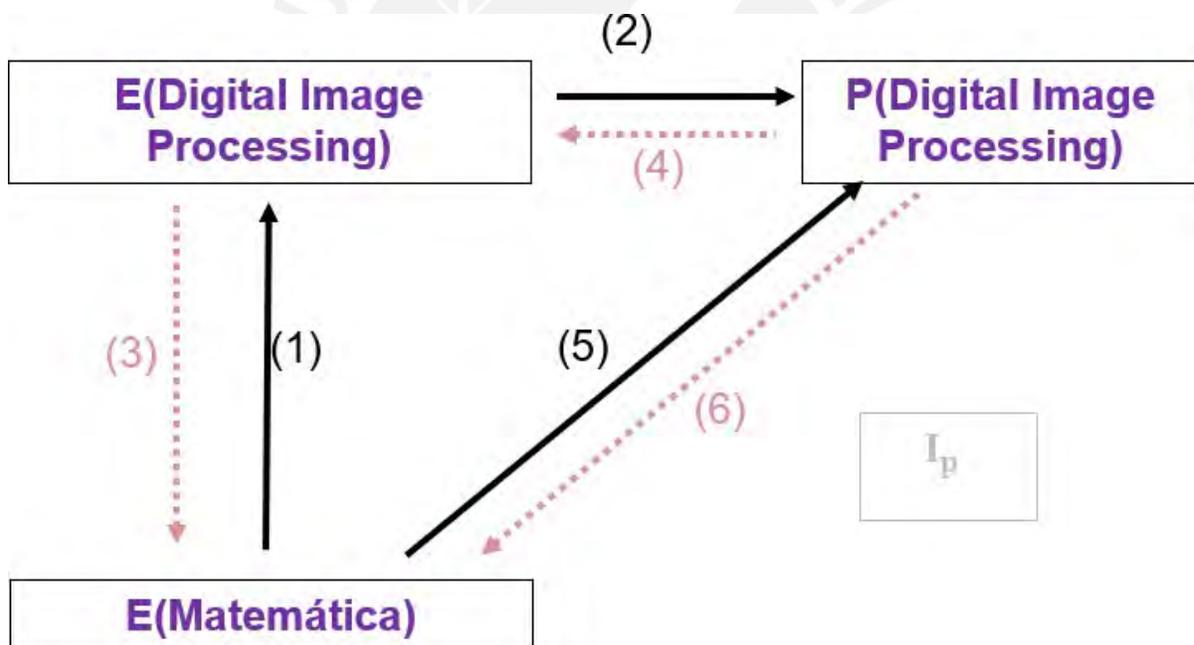
Al igual que en AMGA, se tiene la misma metodología de enseñanza y evaluación en FCAL.

Al considerar el modelo de instituciones involucradas en la formación de ingenieros Vázquez (2017) señala que existe circulación de praxeologías sobre estas instituciones, el cual

se esquematizó en la figura 1. Al respecto, indica que dichas circulaciones en la formación tradicional se relacionan por: $E(M) \rightleftharpoons E(DI)$, $E(M) \rightleftharpoons P(DI)$ y $E(DI) \rightleftharpoons P(DI)$.

Al identificar y analizar praxeologías de la disciplina intermedia se encuentra con praxeologías matemáticas en las instituciones de la disciplina intermedia, pero bajo sus condiciones o adecuaciones a sus elementos propios de esta disciplina. Al respecto, Vázquez (2017) señala, que las circulaciones son en doble sentido. Entonces, se plantea, en esta investigación una transposición de la praxeología de la transformada de Hough que circule de $P(\text{Digital Image Processing})$, $E(\text{Digital Image Processing})$ hacia la $E(M)$, que por lo analizado arriba se considera a la asignatura de AMGA y FCAL del Estudio General de Ciencias de la PUCP. En la Figura 30, se muestra la circulación de praxeologías que en particular para esta investigación se está considerando.

Figura 30. Circulación de Praxeologías entre las Instituciones de la Formación Matemática de Ingenieros



Fuente. Adaptado de Vázquez, 2017, p. 50

De la figura, la praxeología de la transformada de Hough habitada en $P(\text{Digital Image Processing})$ (ver tabla 8 y tabla 9) es transpuesta en $E(\text{Digital Image Processing})$ (ver tabla 10). El análisis praxeológico en estas instituciones y tomando en cuenta el desarrollo didáctico del profesor de procesamiento digital de imágenes, Domingo Mery, se establece la praxeología mixta de la transformada de Hough (ver tablas: 12, 13, 14 y 15).

Ahora, considerando la institución de enseñanza de la matemática (AMGA y FCAL), es conveniente establecer una transposición de la praxeología mixta de la transformada de Hough hacia esta institución.

3.4.2 Praxeología de la transformada de Hough Escolar

En las secciones precedentes el análisis de documentos, en la institución de producción del procesamiento digital de imágenes, así como en la institución de su enseñanza, se pudo reconocer elementos matemáticos como ecuación de la recta, matrices, transformaciones. También tareas, técnicas y tecnologías propias de la disciplina intermedia, lo que nos lleva a considerar que la praxeología de la transformada de Hough es una praxeología mixta.

Por otro lado, al analizar los contenidos de los cursos de álgebra matricial y geometría analítica, así como fundamentos de cálculo se observaron elementos de la praxeología mixta de la transformada de Hough que forman parte de la enseñanza de estos cursos. Además, son las primeras asignaturas de matemática en la formación de ingenieros. Entonces, se plantea que los estudiantes pueden abordar estos elementos presentes en la praxeología mixta de la transformada de Hough considerando algunas limitaciones y condiciones a las tareas y técnicas propias de la disciplina intermedia. Estas pueden ser ejecutadas por los estudiantes a partir de los algoritmos o librerías ya existentes en los lenguajes de programación como MATLAB o PYTHON. La otra dificultad que se encuentra es que necesitan tener una experiencia en programación para generar algoritmos como las que se señala en la figura 27, 28 y 29. Entonces, se debe proponer actividades que no demanden un alto nivel de programación, que incluso pueda realizarse con GeoGebra. Además, puede presentarse programas implementados que solo requieran ejecutar algunos códigos esenciales, pero con preguntas que permitan un análisis por parte de los estudiantes.

Para la investigación, se emplea el Google Colab como herramienta para el desarrollo de actividades en donde los estudiantes solo puedan manipular, reconocer elementos del procesamiento digital de imágenes y también ejecutar pequeños códigos de lo que van conociendo en su estudio e investigación. Así como cálculos que puedan manejar.

Gracias al análisis praxeológico de la Transformada de Hough se ha podido identificar tareas, técnicas, tecnologías y teorías que relacionan dos disciplinas una la enseñanza de la matemática y la otra, el procesamiento digital de imágenes. Por ejemplo, la praxeología mixta de la transformada de Hough en el procesamiento digital de imágenes está asociado a la noción de imagen digital y detección de líneas en una imagen digital. Estas nociones podrían transponerse a la institución de la enseñanza de la matemática, como una praxeología escolar cuya tarea

consiste en determinar líneas rectas a partir de parámetros relacionados con la ecuación normal de la recta, además de representar a una imagen digital por matrices o vectores cuyas componentes son pares ordenados de elementos enteros positivos. Asimismo, involucra elementos de la función seno para identificar las líneas rectas. Tomando en cuenta esta relación, se planteó una posible transposición de esta praxeología mixta de la Transformada de Hough para que este situada en la institución de E(M) al cual llamamos Praxeología de la Transformada de Hough Escolar (*PTHE*) que mostramos en la Tabla 21.

Tabla 21

Praxeología de la Transformada de Hough Escolar

<p>Tipo de Tarea:</p> <p>T_1^{PTHE} : Determinar líneas rectas en un plano cartesiano de ejes entero no negativos, a partir de varios puntos arbitrarios en el plano.</p> <p>T_2^{PTHE} : Determinar líneas rectas de una imagen digital desde programas en Google Colab.</p>
<p>Técnica:</p> <p>τ_1^M: Cálculo de rectas a partir de (ρ, θ). Donde (ρ, θ) son parámetros de la ecuación de la recta $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$. Además (ρ, θ) se determina a partir de la intersección de las curvas senoidales, una cantidad de intersecciones mayor a dos.</p> <p>τ_1^{PDI}: Se ejecuta el programa implementado en Google Colab, para determinar las rectas en la imagen digital.</p>
<p>Tecnología:</p> <p>θ^M: Ecuación normal de la recta ($\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$), matrices.</p> <p>$\theta^{PDI}$: Algoritmo de la transformada de Hough, propiedades mencionadas en Duda y Hart (1972). Imagen digital.</p>
<p>Teoría: Procesamiento digital de imágenes, álgebra y trigonometría, geometría analítica, álgebra Matricial.</p>

Nota. Procesamiento Digital de imágenes (*PDI*)

3.5 Identificación de cuestiones generatrices

Para la cuestión generatriz, se plantea un contexto que relaciona la inteligencia artificial y la industria automotriz. El objetivo es proporcionar una situación real, para que la pregunta generadora no sea tan artificial. Además, motive a que los estudiantes identifiquen los desafíos que son resueltos en esta industria y como la búsqueda de respuestas involucran el desarrollo e

incorporación de diversas disciplinas como la visión artificial o visión por computador, procesamiento digital de imágenes, matemática, entre otras. En la Figura 31, se presenta el contexto.

Figura 31. Contexto para la Cuestión Generatriz

Según Rodríguez *et al.* (2020) en nuestras actividades diarias existe una interacción con sistemas de inteligencia artificial (IA) cuando usamos aplicativos en nuestro ordenador o smartphone como Spotify, Netflix, Google Maps, Amazon entre otros.

Por ejemplo, Gonzalez (2020) menciona que Spotify utiliza un sistema de IA denominado BaRT, el cual tiene la función de organizar la pantalla de inicio de cada usuario de forma personalizada según tus preferencias musicales anteriores, pero también recomienda otras que podrían gustarte basado en usuarios que tienen preferencias semejantes a los tuyos, el lugar donde vives, artistas similares a tus preferidos, popularidad de los artistas.

Por otro lado Rodríguez *et al.*(2020) menciona que la IA se aplica a una gran cantidad de tareas en los sectores de producción debido a que se fundamenta en campos de investigación como: aprendizaje automático a gran escala, aprendizaje profundo, procesamiento de lenguaje natural, sistemas colaborativos, visión por computador, teoría algorítmica de juegos y automatización de procesos robóticos.

En un artículo de Amadoz (2019) que lleva como título "los ojos de los coches autónomos, mejores que los de los humanos". Nos señala que los sistemas de visión artificial incorporados a coches autónomos se encargan de registrar su entorno con sus potentes sensores y con sus algoritmos analizan y toman decisiones. Pero también indica que estos sistemas aún tienen dificultades tanto en software como hardware.

Por otro lado, Amadoz (2019) compara dos tipos de algoritmos. Una clásica que consiste en segmentar la imagen de un objeto según sus colores y formas a través de píxeles para luego determinar los objetos a partir de sus correspondientes píxeles. La otra técnica para extraer información son las redes neuronales, las cuales a partir de la imagen captada por una cámara, las redes se encargan de analizar los píxeles buscando patrones y una serie de estimaciones con las cuales indica al vehículo el entorno por donde transita.

Fuente. Adaptado de Amadoz, 2019, Rodríguez *et al.*, 2020, Gonzalez, 2020,

Según Chevallard (2013), en el paradigma del cuestionamiento del mundo, el sujeto x debe tener una actitud herbartiana; es decir, acepta una cuestión que no tiene una respuesta evidente para él, pero se enfrenta a la búsqueda de respuestas valiosas con ayuda de algún y . Para encontrar una respuesta a la cuestión, menciona que x indagará en la literatura respuestas esenciales a la cuestión y empleará herramientas tanto matemáticas como no matemáticas. Es decir, buscará obras que les servirá como herramientas para estudiar las repuestas y así pueda

construir una respuesta adecuada a la cuestión. En ese sentido, se podría plantear una cuestión (de las tantas que se puede realizar) que movilice obras que están relacionadas con la praxeología mixta de la transformada de Hough, al cual vamos a denominar cuestión generatriz Q_0 , y que tiene la siguiente formulación: ¿Cómo explicar que una inteligencia artificial tiene la habilidad de “ver”?



CAPÍTULO IV: DISEÑO DE LA PROPUESTA DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se desarrolla la fase 2 del procedimiento metodológico. Se presenta la organización didáctica que consta de cuatro ejes. A partir de una cuestión generatriz obtenida en la fase 1, se realiza una propuesta de un posible recorrido de estudio e investigación. El primer eje tiene el objetivo del primer encuentro con elementos de la disciplina intermediaria como la imagen digital, y el segundo y tercer eje es el primer encuentro con la transformada de Hough, así como del momento exploratorio y momento tecnológico teórico. Finalmente, el cuarto eje es el momento de evaluación e institucionalización.

4.1 Planificación del Desarrollo de un posible Recorrido Estudio e Investigación y análisis a Priori

El sistema didáctico por considerar, según Chevallard (2013) y Bosch (2018) para el desarrollo de un paradigma del cuestionamiento del mundo es $S(X, Y, Q_0)$. El cual está formado por una cuestión generatriz Q_0 señalada en el capítulo III, X son los estudiantes de ingeniería mecatrónica de los cursos de matemática del primer ciclo e Y es el docente o/e investigador los que ayudarán la obtención de una respuesta R^\heartsuit validada por la comunidad de estudio $[X, Y]$. El sistema didáctico genera un *medio* durante el recorrido de estudio e investigación hasta obtener la respuesta corazón (provisional) que satisface a la comunidad. Esta interacción entre sistema didáctico, *medio* y respuesta corazón está representado por el esquema herbartiano: $[S(X; Y; Q_0) \rightsquigarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit$.

Entonces, para obtener la respuesta corazón a la cuestión generatriz planteada, la propuesta es considerar dos sesiones por cuatro semanas, donde una sea presencial (o sincrónica) y la otra virtual (asincrónica). Además, como se ha propuesto al inicio de esta sección, puede ser implementada en los primeros cursos de matemática en la formación del ingeniero.

Las sesiones que se propone abordararán los siguientes ejes:

1. Presentación de la Cuestión Generatriz y estudio e investigación de la imagen digital
2. Estudio e investigación de la transformada de Hough
3. Identificación y Validación del Algoritmo computacional de la Transformada de Hough
4. Presentación y Discusión de Resultados

El desarrollo del proceso de estudio e investigación puede iniciarse después de un mes de iniciado clases en la institución de enseñanza de las matemáticas. Hay que tener en cuenta,

que la propuesta para desarrollar las sesiones en cada semana es que sean una sesión presencial (o sincrónica) y la otra virtual (o asincrónica).

4.1.1 Semana 1: Presentación de la Cuestión Generatriz y estudio e investigación de la imagen digital.

En esta primera parte tenemos como objetivo:

- Presentar la situación problemática y la cuestión generatriz
- Estudiar e investigar los elementos que componen a la imagen digital
- Construir un primer mapa de cuestiones y repuestas derivadas posibles
- Desarrollar actividades relacionadas a la imagen digital

Sesión 1 y 2. Se plantea la organización del proceso de estudio de acuerdo con la Tabla 22 y 23 para cada sesión, respectivamente, donde se señala las actividades, los objetivos, las tareas y los tiempos.

En la actividad 1a, el docente presenta la situación problemática señalada en la figura 31, junto con el video $D_0(p_M)$ (<https://www.youtube.com/watch?v=Q2LdNDDdYOk&t=140s>). Además, toma en cuenta las referencias que se señala en la Figura 32.

Figura 32. Posibles medias de los grupos de estudiantes

Páginas web:

- D_1 : https://elpais.com/retina/2019/11/07/innovacion/1573119342_580859.html
- D_2 : <https://www.xeridia.com/blog/la-vision-artificial-y-el-procesamiento-de-imagenes>
- D_3 : <https://ecosistemahuawei.xataka.com/sentidos-ia-como-consigue-ver-oler-escuchar/>

Video en YouTube:

- D_4 : <https://www.youtube.com/watch?v=s9AWUmviNhE&t=722s>

Tabla 22

Planificación de proceso de estudio de la sesión 1 (presencial o sincrónica)

Tiempo	Actividades	Objetivos	Tareas
20 min	En plenario: Actividad 1a que consiste en presentación de la situación problemática, planteo de la cuestión generatriz y metodología de evaluación.	Presentar el contexto donde se enmarca la cuestión generatriz. Presentar la metodología de evaluación de los informes y presentaciones de los grupos.	Plantear la actividad 1b.
100min	En grupos: Actividad 1b consiste en la elaboración del mapa de cuestiones y respuestas por cada grupo.	Elaborar el mapa de cuestiones y respuestas. Justificar las cuestiones derivadas y sus repuestas correspondientes. Hacer las referencias de las <i>medias</i> usadas	Buscar de información en las <i>medias</i> como virtuales, libros, especialistas, entre otras. Presentar cuestiones derivadas de Q_0 .
40min	En plenario: Actividad 1c es la presentación de los informes de cada grupo y discusión de resultados	Presentación de informes de cada grupo. Generar cuestiones Q'_0 Q1, Q2, Q3. que viabilicen el proceso de estudio e investigación.	Socializar lo que cada grupo va encontrando en su estudio e investigación.

De acuerdo con los objetivos de la tabla 22, el docente presentará la metodología de evaluación que regirá a lo largo de todas las actividades. En línea generales, se plantea que la forma de evaluar el trabajo de los estudiantes debe estar relacionada con las participaciones del grupo durante las presentaciones plenarias. Además, la propuesta es que se puede considerar los siguientes criterios: 1) número de participaciones entorno a las actividades, 2) formulación de preguntas, 3) justificación de las preguntas y 4) contribución con una nueva media relacionado

al contexto de cada actividad. Se considerará importante la calificación del grupo en torno a la calidad de la cuestión, la justificación presentada a la comunidad de estudio y los resúmenes de las *medias* consultadas.

A continuación, se muestra la actividad 1b que el docente proporcionará a cada grupo de estudiantes. Bajo un contexto, de una situación problemática se presenta la cuestión generatriz Q_0 .

Actividad 1b

Una empresa peruana X desea incursionar en la fabricación de robots móviles autónomos, pues estas pueden facilitar actividades de alto riesgo como desactivar bombas en zonas inaccesibles para los humanos o tareas rutinarias que demanda bastante tiempo en las industrias, entre otras áreas. Estos robots para que puedan desarrollar estas tareas necesitan planificar las trayectorias óptimas, libre de obstáculos. Para ello, el equipo de ingenieros de dicha empresa, proponen que a los robots se les incorporen con cámaras de alta resolución y programas computacionales con las que puedan adquirir imágenes de su entorno y con esta información planificar sus rutas de movimiento. Entonces, el equipo de ingenieros observó diversos problemas que se presentan en la fabricación de estos robots autónomos. Siendo uno de ellos la detección de líneas rectas por parte de estos. En ese sentido, los ingenieros con el ánimo de generar investigación, innovación y creatividad entre la comunidad universitaria proponen realizar una competencia entre los estudiantes de la facultad de ingeniería.

Una propuesta que los ingenieros de la empresa X realizan a los equipos de estudiantes es la siguiente cuestión:

¿Cómo explicar que una inteligencia artificial (IA) tiene la habilidad de “ver”?

Considerando que esta cuestión es Q_0 , desarrolle las siguientes preguntas:

1. ¿Qué cuestiones adicionales podrían plantear para que el equipo de estudiantes de ingeniería pueda responder Q_0 ? Considere denotar dichas cuestiones por Q_i con $i = 1, 2, 3, \dots$
2. Respecto a las cuestiones que planteen indicar posibles respuestas en base a fuentes adecuadas en internet, libros, consultas a especialistas, entre otras
3. Realizar resúmenes de contenidos relevantes para las cuestiones que propongan

OBSERVACIÓN: La explicación tiene que estar sustentada en las ciencias, como: matemática, física, ingeniería entre otras.

Para esta actividad 1b, la consigna va a estar enmarcado con lo que señala Frejd y Bergsten (2018) respecto a las concepciones de modelización de los especialistas. Una de estas concepciones es la comprensión, la cual consiste en considerar que la modelización es el uso de las matemáticas para entender el funcionamiento de un problema o situación de la realidad, así como de los factores que la influyen. En ese sentido, se espera que las cuestiones formuladas por los estudiantes relacionen en alguna medida elementos de la matemática, física e ingeniería.

Respecto a esta actividad 1b, esperamos que los grupos de estudiantes generen cuestiones relacionados a la imagen digital, procesamiento digital de imágenes, transformada de Hough, algoritmos computacionales. Considerando el análisis praxeológico realizado en el capítulo III, se podría señalar algunas cuestiones que generarían los estudiantes, que pueden ser lo siguiente:

Q'0: ¿Cómo explicar que una inteligencia artificial (IA) tiene la habilidad de “ver” líneas rectas?

Q1: ¿Qué es una inteligencia artificial?

Q11: ¿Qué es visión artificial?

Q12: ¿Qué es procesamiento digital de imágenes?

Q2: ¿Qué es una imagen digital?

Q21: ¿Cuáles son las representaciones matemáticas de una imagen digital?

Q22: ¿Cómo se adquiere una imagen digital?

Q23: ¿Qué es un píxel?

Q24: ¿Cuáles son las escalas o niveles de grises de una imagen digital?

Q25: ¿Qué es muestreo de una imagen digital?

Q26: ¿Qué es cuantización de una imagen digital?

Q3: ¿Cómo se identifica una línea recta en una imagen digital?

Q31: ¿Qué es la transformada de Hough?

Q4: ¿Qué es un algoritmo computacional?

Q41: ¿Qué es un lenguaje de programación?

A continuación, se señala respuestas que puedan ser generadas por el grupo de estudiantes. Se espera que estas respuestas no sean tan profundas, pero que contengan elementos que permitan conocer puntos claves, como la representación matemática, componentes de la imagen digital, la escala de grises y el concepto de adquisición de la imagen digital. En los siguientes párrafos, se describen las respuestas posibles a las cuestiones derivadas, las cuales tienen como referencia al análisis praxeológico realizado en el capítulo III.

Respecto a la cuestión Q'_0 , se considera que orientará el proceso de estudio e investigación de acuerdo al contexto señalado en la actividad 1b.

Q_1 : ¿Qué es una inteligencia artificial? R_1 : “La IA es la capacidad de las máquinas para usar algoritmos, aprender de los datos y utilizar lo aprendido en la toma de decisiones tal y como lo haría un ser humano” (Rouhiainen, 2018, p. 17).

Q_{11} : ¿Qué es visión artificial? R_{11} : es el “proceso de extracción de información importante de una imagen o de un conjunto de imágenes para poder realizar clasificaciones y análisis avanzados” (Iglesia et al., 2020, p. 10).

Q_{12} : ¿Qué es procesamiento digital de imágenes? R_{12} : son “procesos cuyas entradas y salidas son imágenes y, además, incluye los procesos de extracción de atributos de las imágenes hasta el reconocimiento de objetos individuales” (Gonzalez y Woods, 2018, p. 19).

Q_2 : ¿Qué es una imagen digital? R_2 : Una imagen digital es un conjunto de píxeles que se obtienen al pasar por un proceso de muestreo y cuantización de una imagen tridimensional obtenida a partir de un sistema de adquisición de imágenes, Gonzalez y Woods (2018).

Q_{21} : ¿Cuáles son las representaciones matemáticas de una imagen digital? R_{21} : Se pueden representar a partir de un arreglo rectangular cuyos elementos son valores que están en una escala de grises. Estos elementos se les conoce como píxeles. Para mayor detalle, se espera que los grupos encuentren información relacionados en la sección 3.2.1 en la parte de *representación de una imagen digital*.

Q_{22} : ¿Cómo se adquiere una imagen digital? R_{22} : Esperamos que los grupos relacionen sus repuestas de acuerdo con la sección 3.2.1 en las partes de *sensado y adquisición de imágenes*, también, en *muestreo y cuantización de imágenes*.

Q_{23} : ¿Qué es un *píxel*? R_{23} : Unidad mínima de la imagen, cuyos valores dependen del tipo de imagen.

Q_{24} : ¿Cuáles son las escalas o niveles de grises de una imagen digital? R_{24} : Son los valores que toma cada píxel. Se espera que relacionen una tabla similar a la tabla 5 donde se puede observar el rango de valores de los píxeles y sus usos.

Q_{25} : ¿Qué es muestreo de una imagen digital? R_{25} : se espera que la respuesta esté relacionada con lo que se señaló en la sección 3.2.1 en la parte *muestreo y cuantización de imágenes*.

Q_{26} : ¿Qué es cuantización de una imagen digital? R_{26} : se espera que la respuesta esté relacionada con lo que se señaló en la sección 3.2.1 en la parte *muestreo y cuantización de imágenes*.

Q₃: ¿Cómo se identifica una línea recta en una imagen digital? R₃: Identificando cada píxel de una imagen digital, a partir de sus coordenadas espaciales y agrupando las coordenadas sobre una recta a través de algoritmos computacionales.

Q₃₁: ¿Qué es la transformada de Hough? R₃₁: Es un método para detectar líneas rectas en imágenes digitales a partir de la ecuación paramétrica de una recta. Fue desarrollada por Hough en 1962 y mejorada por Duda y Hart en 1972.

Q₄: ¿Qué es un algoritmo computacional? R₄: en términos generales un algoritmo es “una lista bien definida, ordenada y finita de operaciones que permite encontrar la solución a un problema determinado” (Juganaru, 2014, p. 2) en informática este algoritmo se expresa a partir de lenguajes de programación y se ejecutan gracias a los programas de computadora.

Q₄₁: ¿Qué es un lenguaje de programación? R₄₁: “[...] está definido por su sintaxis, que establece e indica las reglas de escritura (la gramática), y por la semántica de los tipos de datos, instrucciones, definiciones, y otros elementos que constituyen un programa” (Juganaru, 2014, p. 5).

En la reunión plenaria, correspondiente a la actividad 1c, el docente puede pedir a los estudiantes organizar las cuestiones presentadas por los grupos, en función de estos probables ejes: 1) Imagen digital 2) transformada de Hough 3) Desarrollo del algoritmo de la transformada de Hough. En la Figura 33, se presenta el esquema posible del mapa de cuestiones generadas por los estudiantes. Ahora se presenta la actividad 1c, que corresponde al desarrollo en un plenario con participación de la comunidad de estudio.

Actividad 1c

Presentar el mapa de cuestiones y respuestas encontradas, señalando referencias relevantes para su esquema (5min por grupo)

Figura 33. Primer mapa de cuestiones derivadas a priori

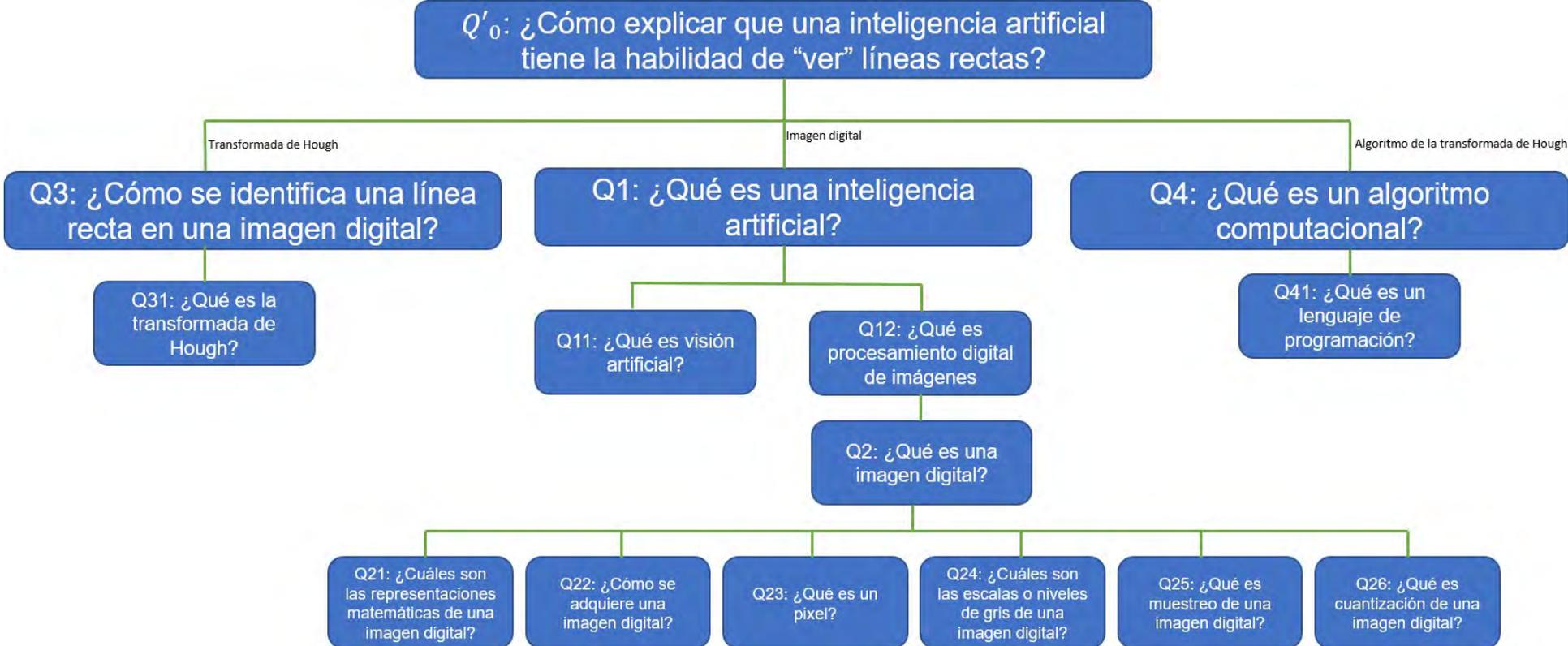


Tabla 23*Planificación de proceso de estudio de la sesión 2 (virtual o asincrónica)*

Tiempo	Actividades	Objetivos	Tareas
120 min	En grupos: Actividad 2a (a través de Zoom u otras plataformas)	Identificar elementos de la imagen digital, como píxeles, bits, escala de grises, etc.	Desarrollar los ejercicios de la actividad 2a

A continuación, se muestra la actividad 2a, donde las preguntas 1 y 2 son adaptados de Sundararajan (2017, p.19).

Actividad 2a

- Encontrar la memoria requerida, en bytes, para almacenar las siguientes imágenes
 - Imagen binaria de 64×64
 - Imagen de 128×128 en niveles de gris de 8 bits
- Encontrar los valores de los píxeles de la imagen de 8×8 en nivel de gris de 8 bits

$$\{f(m, n): m = 0, 1, 2, \dots, 7 \wedge n = 0, 1, 2, \dots, 7\}$$

Donde $f(m, n) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{8}m + \frac{2\pi}{8}n - \frac{\pi}{4}\right)$. (Redondear los valores reales de la imagen al entero más cercano)

Sugerencia: dar como respuesta la representación matricial de la imagen.

- Abrir la siguiente ruta y hacer las tareas indicadas. Enlace :
<https://colab.research.google.com/drive/1gfJtK3FZciRr9-EgwtNLqBA-azQ1gW2K?usp=sharing>

Se espera que los estudiantes puedan interpretar que si tienen una imagen digital de tamaño $M \times N$ entonces se obtiene $M \cdot N$ celdas. Luego, si la imagen es binaria, cada celda tendrá un bit de almacenamiento. Por ejemplo, en el ítem a) se tiene $b = 64 \cdot 64 \cdot 1 = 4096$ bits, considerando que 8bits es un byte, se tiene 512 bytes de almacenamiento para esa imagen. En el ítem b) se tiene $b = 128 \cdot 128 \cdot 8 = 131\,728$ bits, en este caso por cada celda se tiene 8bits, luego la imagen tiene 16384bytes de almacenamiento.

El ejercicio 2 tiene como objetivo que los estudiantes puedan identificar una imagen digital en escala de grises en su representación matricial. Se espera que los estudiantes identifiquen cada componente de la representación matricial de la imagen. Además, se puede sugerir que el

docente promueva el uso de herramientas tecnológicas para el cálculo automático de las componentes de la matriz, como la técnica de cálculo manual. No es eficiente cuando n es grande, es necesario usar un algoritmo computacional, por ejemplo, MATLAB o GEOGEBRA. En la Figura 34, se muestra el algoritmo en MATLAB que los estudiantes puedan realizar.

Figura 34. Algoritmo para el ejercicio 2

```

1  F = zeros(8); % matriz de 8x8
2  for m = 1:8
3      for n = 1:8
4          F(m,n) = round(1 + cos(2*m*pi/8+2*n*pi/8-pi/4));
5      end
6  end
7  F

```

Command Window

```

>> ejercicio_2

F =

     2     1     0     0     0     1     2     2
     1     0     0     0     1     2     2     2
     0     0     0     1     2     2     2     1
     0     0     1     2     2     2     1     0
     0     1     2     2     2     1     0     0
     1     2     2     2     1     0     0     0
     2     2     2     1     0     0     0     1
     2     2     1     0     0     0     1     2

```

En la parte inferior de la figura 34, se muestra la salida del algoritmo. Se espera que los estudiantes puedan determinar esta matriz, así como el reconocimiento del bucle *for* y funciones de máximo entero (*round*).

Finalmente, del ejercicio 3, se espera que los estudiantes tengan un acercamiento a herramientas que usan en el campo laboral, así como el manejo de los conceptos estudiados de la imagen digital.

4.1.2 Semana 2: Estudio e investigación de la Transformada de Hough.

En esta segunda parte tenemos como objetivo:

- Comunicar los resultados de la investigación y de los ejercicios de la actividad 2a por parte de los equipos de estudiantes
- Investigar el método que se emplea para identificar líneas en una imagen digital
- Estudiar el algoritmo de la Transformada de Hough
- Construir el segundo mapa de cuestiones y respuestas derivadas posibles.

Sesión 3 y 4. Se plantea la organización del proceso de estudio de acuerdo con la Tabla 24 y 25 para cada sesión, respectivamente, donde se señala las actividades, los objetivos, las tareas y los tiempos.

Tabla 24

Planificación de proceso de estudio de la sesión 3 (presencial o sincrónica)

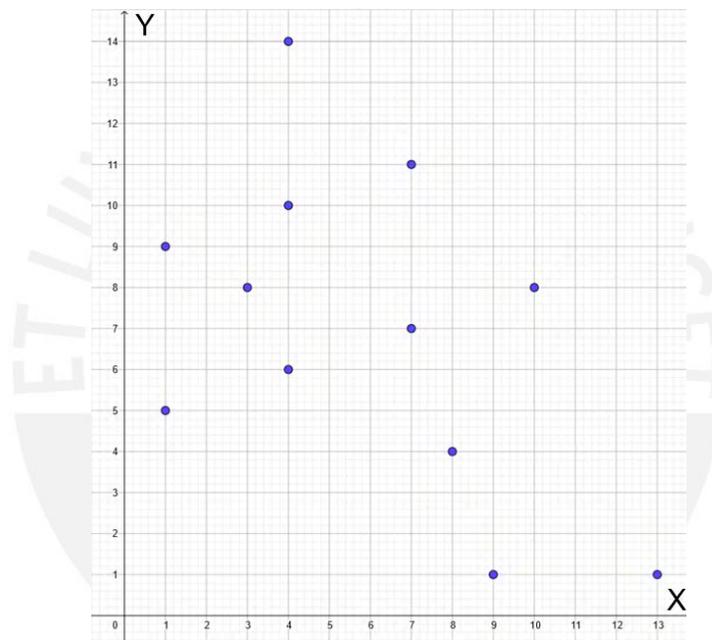
Tiempo	Actividades	Objetivos	Tareas
20 min	En plenario: Presentación de los grupos de la actividad 2a	Identificar los conceptos de procesamiento digital de imágenes. Identificar el concepto de imagen digital.	Participar en la exposición de los grupos con preguntas y sugerencias para mejorar el estudio. Obtener reportes para consulta de todos los grupos.
30min	En grupos: Actividad 3a	Identificar la necesidad de usar el método de Hough para resolver los problemas.	Utilizar herramientas de geometría analítica para la resolución de los ejercicios. Plantear ideas para un método más eficiente para resolver el problema 2 de la actividad 3a.
70min	En grupos: Actividad 3b es Informe y elaboración del mapa de cuestiones y respuestas.	Elaborar el mapa de cuestiones y respuestas.	Búsqueda de información en las <i>medias</i> como virtuales, libros, especialistas, entre otras.
30 min	En plenario: Actividad 3c Presentación del mapa de	Presentar el mapa de cuestiones y respuestas a la comunidad de estudio.	Socializar lo que cada grupo va encontrando en su estudio e investigación

	cuestiones y respuestas		
--	-------------------------	--	--

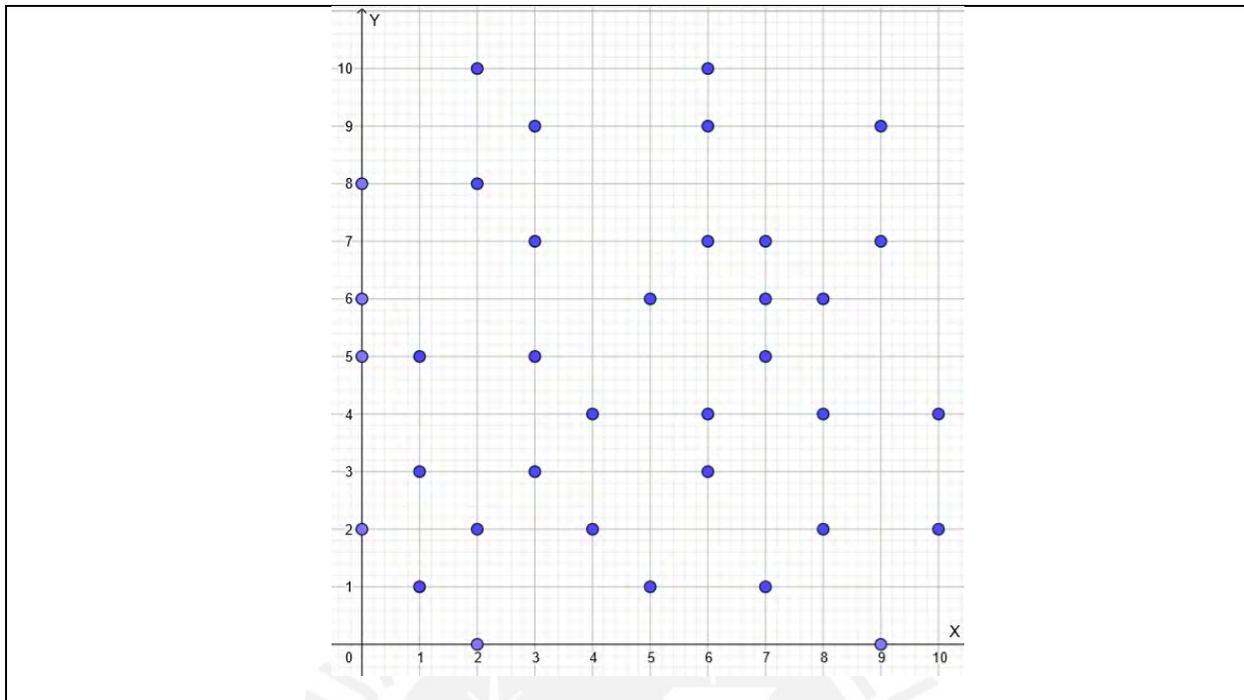
La actividad 3a se plantea con la necesidad de generar en los estudiantes la búsqueda de una técnica más adecuada para resolver los ejercicios que se plantea. Se considera que puedan relacionar dicha técnica con el algoritmo de la transformada de Hough.

Actividad 3a

- De la siguiente figura, indicar las ecuaciones de las rectas que contenga como mínimo 3 puntos. Justificar sus respuestas



- Con las ideas del ejercicio 1. En la siguiente figura, ¿es posible identificar todas las líneas rectas que contengan como mínimo 5 puntos? Si es posible, realizar los cálculos. En caso contrario, hay que plantear una idea para resolver el problema.



Se espera que los estudiantes resuelvan el ejercicio 1, determinando con los 12 puntos todas las rectas. Una de las técnicas consiste en agrupar dos puntos y graficar la recta que pasa por dichos puntos. Esta técnica se fundamenta en la ecuación de la recta punto-pendiente. Entonces, el estudiante puede identificar las rectas a partir de dos puntos, además como son coordenadas enteras pueden facilitarse llevando los 12 puntos a una hoja cuadrangular y luego hacer el trazo de las rectas. A partir de esto, pueden lograr la identificación de las rectas que contienen más o igual a tres puntos y con dos puntos determinar su ecuación. Si emplean GeoGebra, es la misma idea.

Observar que, para determinar las rectas con los 12 puntos, es necesario que se tracen rectas pasando por una pareja de puntos, lo que generaría un aproximado de 66 trazos. Esto hace que esta técnica sea poco eficiente cuando tenga una cantidad bien grande de puntos, por ejemplo, una imagen de un tamaño de 256x256 píxeles contendría 65 536 puntos (cada píxel es un punto en la imagen).

Por tal motivo, se desea con el ejercicio 2 que los estudiantes o la comunidad de estudio puedan formular cuestiones sobre ¿cómo buscar una técnica más eficiente para resolver el problema? ¿Qué pasaría si tuviéramos una cantidad grande de puntos? ¿Qué técnicas se podría aplicar? ¿Qué herramientas tecnológicas podría ayudar a optimizar los cálculos? Entonces, esto puede motivar a buscar una alternativa para resolver este problema y se considera que este ejercicio es un primer encuentro con la transformada de Hough.

Ahora, presentamos la actividad 3b el cual va a relacionar el estudio e investigación de la Transformada de Hough.

Actividad 3b

A) Profundizar el estudio e investigación a partir de las siguientes cuestiones:

Q_3 : ¿Cómo se identifica una línea recta en una imagen digital?

Q_{31} : ¿Qué es la transformada de Hough?

B) A partir del ítem A) elaborar un mapa de cuestiones y respuestas

Tomando como referencia el capítulo III, sobre la praxeología mixta de la Transformada de Hough, esperamos que los estudiantes puedan proponer las siguientes cuestiones:

Q_5 : ¿Cuál es la ecuación normal de la recta, que se emplean en la transformada de Hough?

Q_6 : ¿Cuáles son las propiedades matemáticas que respaldan a la Transformada de Hough?

Q_{61} : ¿Cómo se determina el plano de la imagen?

Q_{62} : ¿Cómo se determina el plano de parámetros?

Q_{63} : ¿Cómo se determina la curva senoidal?

Q_{64} : ¿Cómo se utiliza estos principios en la detección de líneas rectas?

Q_7 : ¿Qué pasos tiene el algoritmo de la Transformada de Hough?

Q_{71} : ¿Cómo se determina la matriz de Hough o matriz acumulador?

Q_{72} : ¿Cómo calculamos las coordenadas (x, y) del punto donde el valor píxel es 1?

Q_{73} : ¿Cómo calculamos la curva en el espacio (ρ, θ) para estos puntos (x, y) ?

Q_{74} : ¿Cómo determinamos la recta con las coordenadas (ρ, θ) a partir de los elementos máximos de la matriz de Hough?

A continuación, se desarrolla algunas repuestas de manera concisa a las cuestiones esperadas por parte de los estudiantes. Tomando como referencia el análisis praxeológico de la transformada de Hough realizada en el capítulo III. $Q_5 \rightarrow R_5$: corresponde a la ecuación punto pendiente de la recta, donde los parámetros pendiente y punto de corte con el eje Y, se determina en términos de las coordenadas polares. $Q_6 \rightarrow R_6$: estos principios o propiedades matemáticas están señaladas en primera instancia en el artículo de Duda y Hart (1972). Esperamos que los estudiantes pueden interpretar estas propiedades empleando elementos de la geometría analítica y sistemas de ecuaciones.

Las respuestas a las cuestiones Q_{61} , Q_{62} , Q_{63} y Q_{64} están relacionadas con los conceptos señalados en la imagen digital, la construcción del plano de parámetros y el desarrollo de

algoritmo de Hough, los cuales se indican en el análisis de los artículos de Hough (1962), Duda y Hart (1972), Pratt (2007) y Gonzalez y Woods (2018).

Respecto a las cuestiones Q_7 , Q_{71} , Q_{72} , Q_{73} y Q_{74} , esperamos que las repuestas de los estudiantes se correspondan con la praxeología mixta de la transformada de Hough; es decir, nos referimos a las tareas, técnicas y tecnologías, las cuales se muestran en las tablas 13 y 14.

Ahora, señalamos la actividad 3c, el cual se desarrollará en el plenario.

Actividad 3c

Presentar el mapa de cuestiones y respuestas encontradas, señalando referencias relevantes para su esquema (5min por grupo)

A continuación, presentamos el posible mapa de cuestiones correspondientes a la transformada de Hough. Se espera que la comunidad de estudio durante las discusiones en el plenario pueda elaborar el mapa que se muestra en la Figura 35.

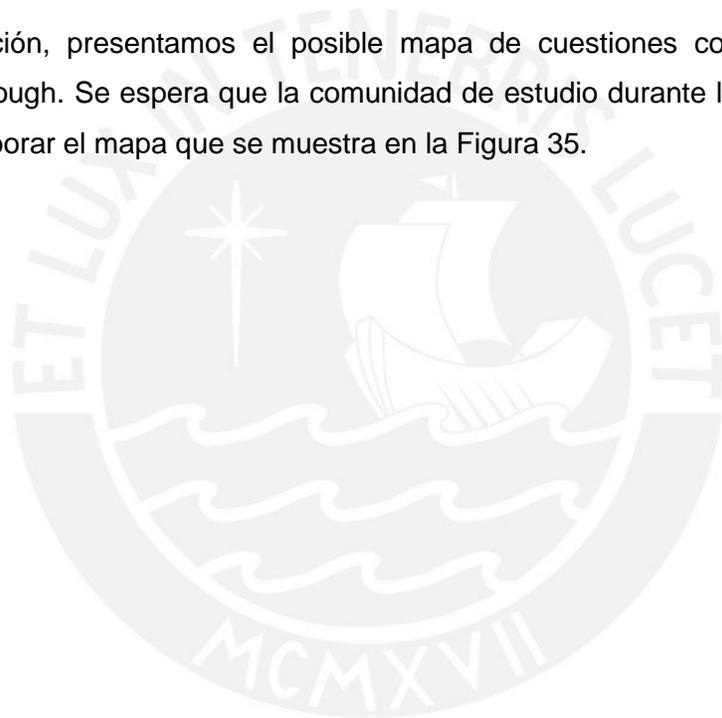


Figura 35. Segundo mapa de cuestiones derivadas a priori

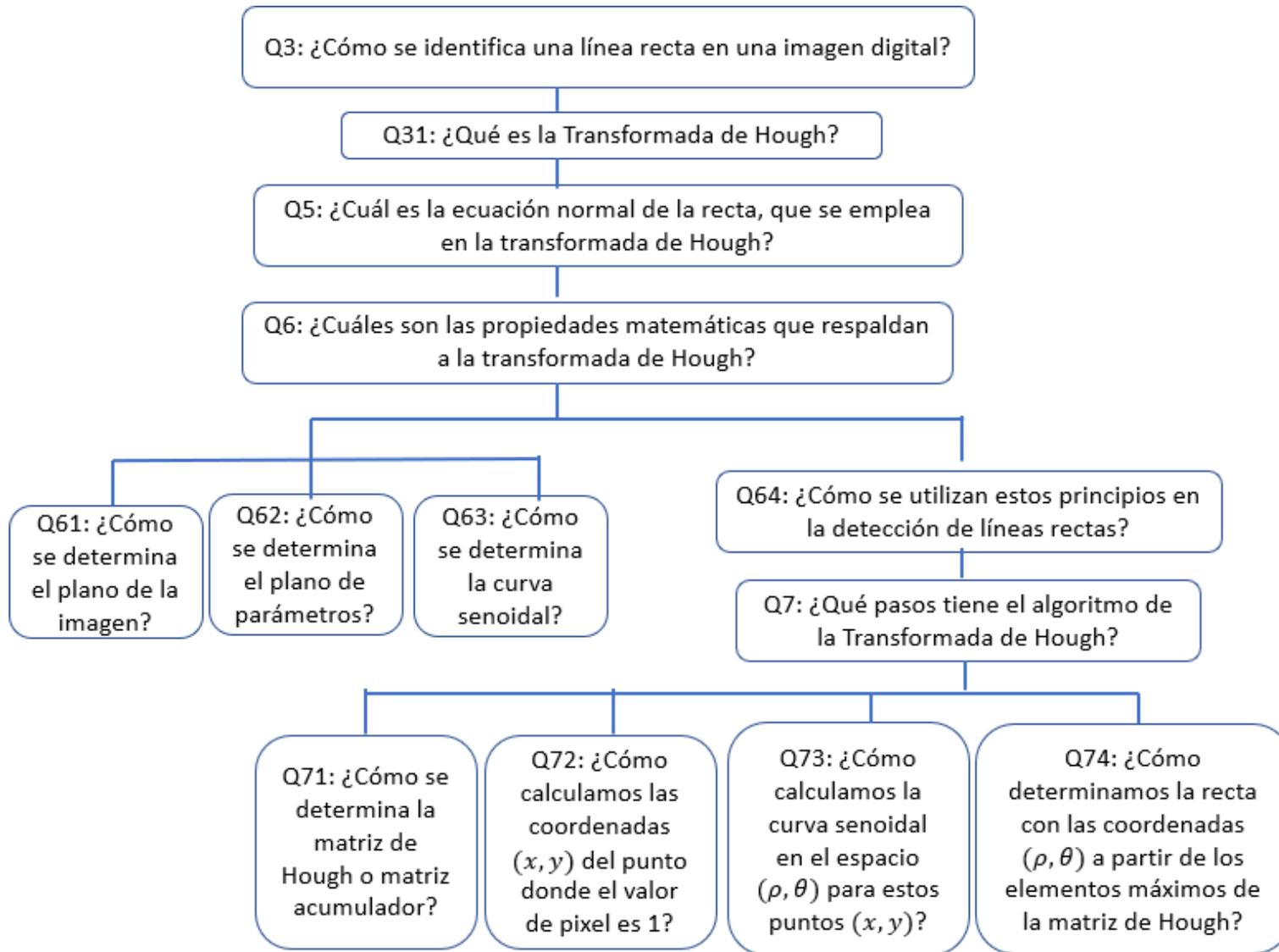


Tabla 25*Planificación de proceso de estudio de la sesión 4 (virtual o asincrónica)*

Tiempo	Actividades	Objetivos	Tareas
120 min	En grupos: Actividad 4a (a través de Zoom u otras plataformas)	Identificar las herramientas matemáticas en la Transformada de Hough. Desarrollar los pasos de la transformada de Hough	Desarrollar los ejercicios de la actividad 4a.

A continuación, se muestra la actividad 4a, cuyo ejercicio 1 fue adaptado de Sundararajan (2017, p. 216). Respecto al umbral indicado en la actividad, hacemos referencia al número de intersecciones de las curvas senoidales.

Actividad 4a

1. Detectar las rectas en las imágenes binarias $x(m, n)$. Elegir un umbral adecuado, recomendable mayor o igual a 3.

$$I) \quad x(m, n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$II) \quad x(m, n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

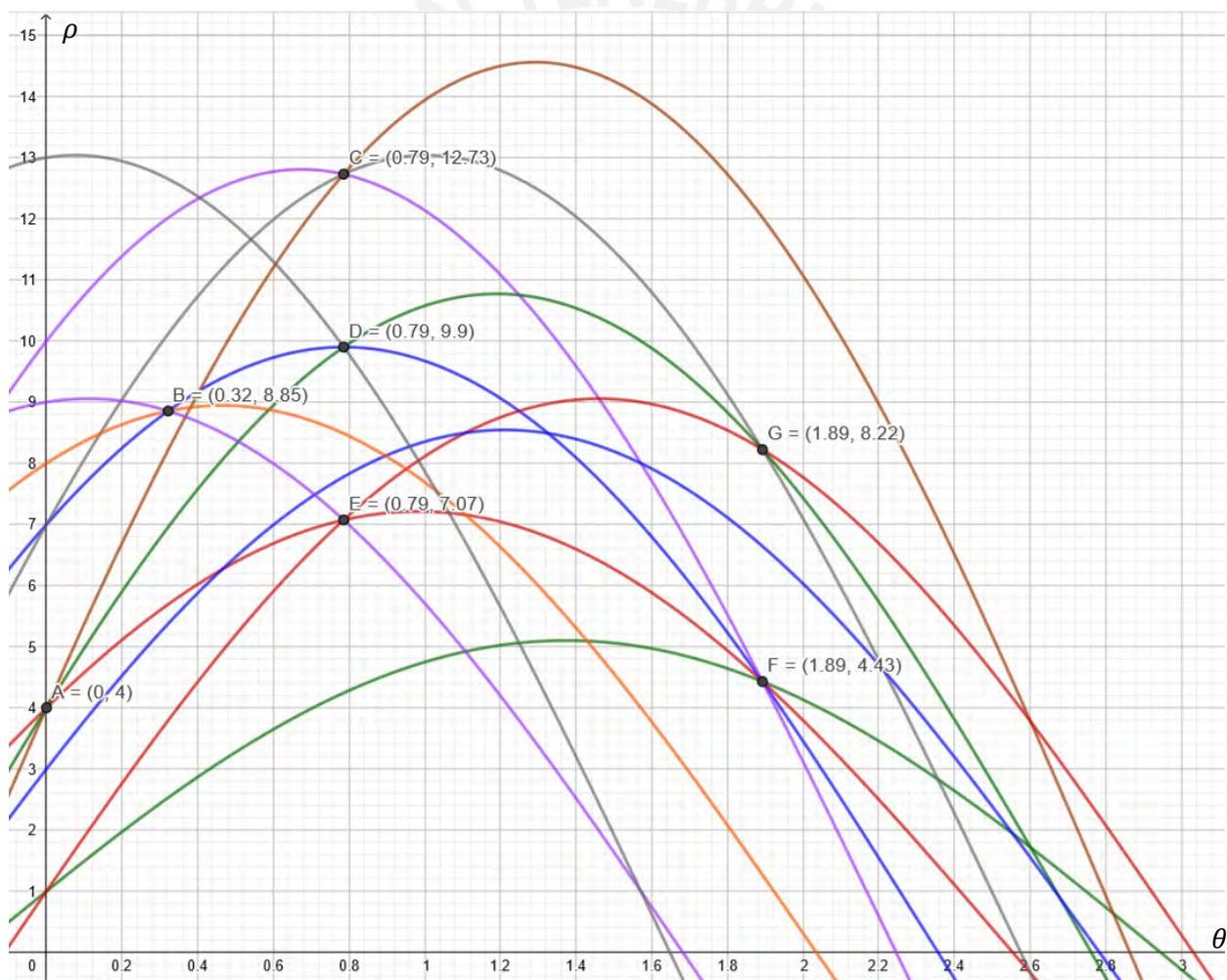
Indicar las coordenadas (ρ, θ) de cada recta y su correspondiente ecuación.

2. De la actividad 3a, desarrollar el ejercicio 1 empleando los procedimientos (o algoritmos) de la Transformada de Hough.

Se espera del ejercicio 1 que los estudiantes puedan desarrollar según lo mostrado en la sección 3.3, correspondiente a la tarea P_{TH} de la figura 26.

Respecto al ejercicio 2, se espera que los estudiantes puedan usar la Transformada de Hough para determinar dichas rectas. Para ello, tendrían que hacer solo 17 cálculos. Pueden determinar las funciones senoidales a partir de las coordenadas de cada punto, es decir, usar la ecuación normal de la recta: $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$. En GeoGebra la gráfica de estas funciones es con $\theta \in [0, \pi]$. Los puntos de intersección determinarán las rectas. Donde exista tres o más curvas intersecándose se tendrá una recta en el plano XY. En la Figura 36 se muestra dichas curvas.

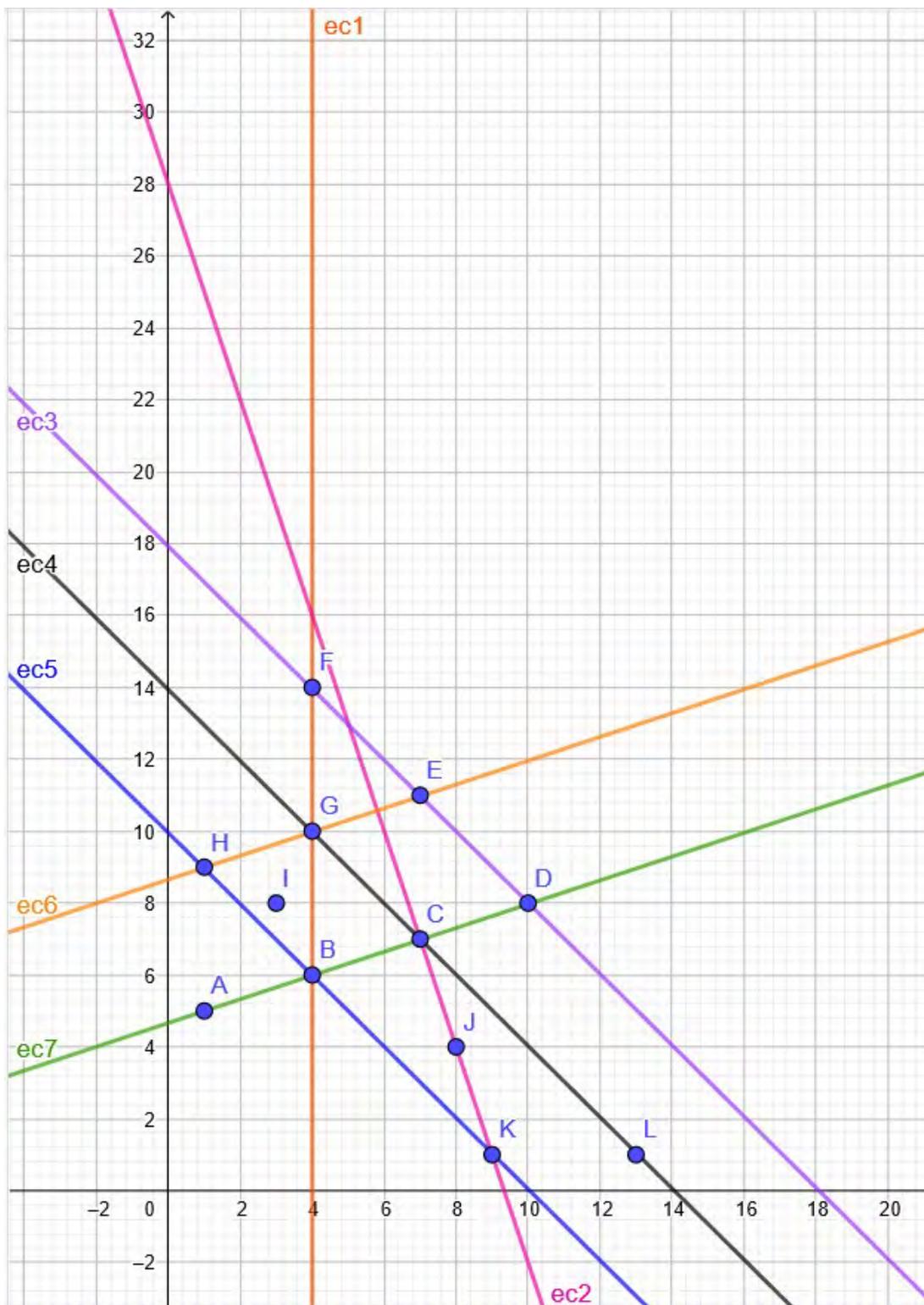
Figura 36. Gráfica de los senoides



Con los puntos de intersección de tres a más curvas, se determinan las rectas, en la figura tenemos: A, B, C, D, E, G y F. Se tiene en cuenta que los valores de θ están en radianes. Se

espera que hagan la conversión a grados para graficarlos en GeoGebra. En la Figura 37, se muestra los resultados que esperamos que obtengan.

Figura 37. Rectas identificadas con tres o más puntos



Las ecuaciones están determinadas en la Figura 38.

Figura 38. Ecuaciones de las rectas identificadas

	ec1 : $\cos(0) x + \sin(0) y = 4$
	ec2 : $\cos\left(0.32 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) x + \sin\left(0.32 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) y = 8.85$
	ec3 : $\cos\left(0.79 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) x + \sin\left(0.79 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) y = 12.73$
	ec4 : $\cos\left(0.79 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) x + \sin\left(0.79 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) y = 9.9$
	ec5 : $\cos\left(0.79 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) x + \sin\left(0.79 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) y = 7.07$
	ec6 : $\cos\left(1.89 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) x + \sin\left(1.89 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) y = 8.22$
	ec7 : $\cos\left(1.89 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) x + \sin\left(1.89 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right) y = 4.43$

4.1.3 Semana 3: Identificación y Validación del Algoritmo Computacional de la Transformada de Hough.

La comunidad de estudio trabajará con la lista de ejercicios. Será el momento del trabajo de la técnica, tecnológico teórico. Para esta parte, tenemos como objetivo:

- Construir el mapa de cuestiones y respuestas para el algoritmo de la Transformada de Hough.
- Emplear elementos de la praxeología de la Transformada de Hough para desarrollar las actividades.
- Reconocer en MATLAB o GOOGLE COLAB el algoritmo de la transformada de Hough

Sesión 5 y 6. Se plantea la organización del proceso de estudio de acuerdo con la Tabla 26 y 27 para cada sesión, respectivamente, donde se señala las actividades, los objetivos, las tareas y los tiempos.

Tabla 26

Planificación de proceso de estudio de la sesión 5 y 6 (presencial/virtual)

Tiempo	Actividades	Objetivos	Tareas
60 min	En plenario: Presentación de los grupos de la actividad 4a.	Identificar los elementos de la praxeología de la transformada de Hough. Aplicar el método de la transformada de Hough en la resolución de problemas.	Participar en la exposición de los grupos con preguntas y sugerencias para mejorar el estudio. Obtener reportes para consulta de todos los grupos.
60min	En grupos: Actividad 5a	Elaborar un mapa de cuestiones respecto al algoritmo de la transformada de Hough.	Búsqueda de información en las <i>medias</i> como virtuales, libros, especialistas, entre otras.
60min	En grupos: Actividad 6a se realiza de forma virtual a través de Zoom o Google Meet.	Identificar elementos del procesamiento digital de imágenes respecto a la transformada de Hough en Google Colab. Identificar los pasos del algoritmo de la transformada de Hough en Google Colab.	Manipular el Google Colab en la implementación computacional del algoritmo de la transformada de Hough. Determinar las ecuaciones cartesianas de las rectas en la imagen digital y la distancia entre ellas.

Respecto a la actividad 5a, corresponde elaborar un mapa de cuestiones que pueda orientar la lectura del programa que se presentará en la actividad 6a. Tomando como referencia el capítulo III, sobre la praxeología mixta de la Transformada de Hough, esperamos que los estudiantes puedan proponer las siguientes cuestiones:

Q_8 : ¿Cómo se implementa el algoritmo de la transformada de Hough en un lenguaje de programación?

Q_{81} : ¿Qué es un código fuente?

Q_{82} : ¿Cuál es el código fuente para la transformada de Hough en MATLAB o PYTHON (Google Colab)?

Q_{821} : ¿Qué función en MATLAB o PYTHON (Google Colab) lee la imagen de entrada X?

Q_{822} : ¿Qué función en los lenguajes de programación nos permite inicializar en cero la matriz de Hough, H?

Q_{823} : ¿Qué función en los lenguajes de programación nos permite determinar la imagen binaria de los bordes (E) de una imagen digital, X?

Q_{824} : ¿Con qué código se puede obtener las coordenadas (x, y) de cada píxel "1" en E?

Q_{825} : ¿Con que código se puede calcular la curva senoidal para cada (x, y) del paso anterior en E?

Q_{826} : ¿Con qué código se puede discretizar la curva (ρ, θ) ?

Q_{827} : ¿Con qué función en lenguaje de programación actualizamos H?

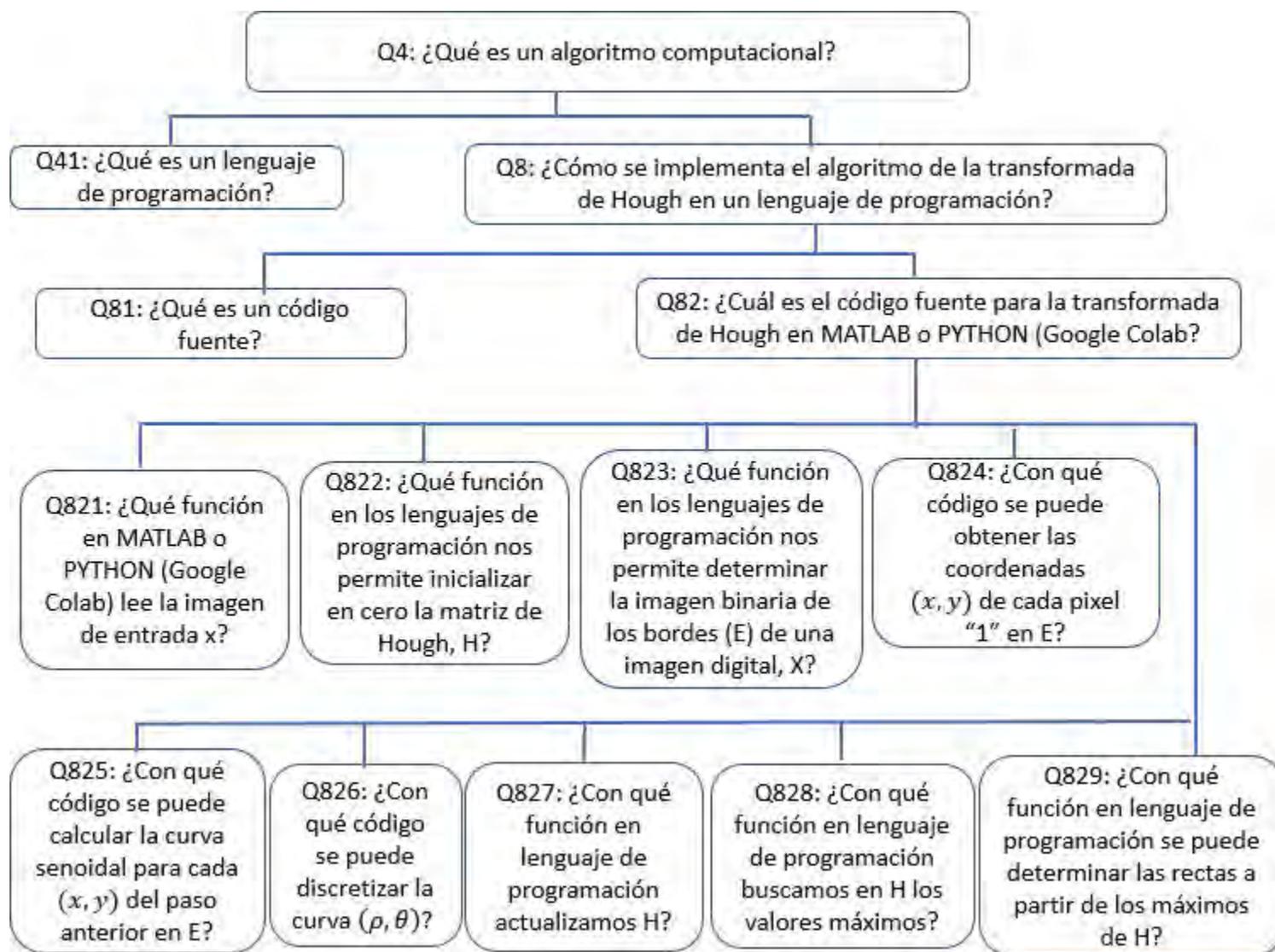
Q_{828} : ¿Con que función en lenguaje de programación buscamos en H, los valores máximos?

Q_{829} : ¿Cómo determinar las rectas a partir de los máximos de H?

Las cuestiones aquí mencionadas se espera que sean justificadas por los estudiantes de acuerdo con las tareas, técnicas y tecnologías presentadas en la praxeología mixta de la transformada de Hough, las cuales se señalan en las tablas 13, 14 y 15, además de las figuras 27, 28 y 29, donde se presentan los códigos fuentes en MATLAB. Respecto a la cuestión Q_{81} : ¿Qué es un código fuente? Se espera una respuesta R_{81} : son sentencias lógicas, articuladas en un lenguaje de programación que las computadoras pueden entender y ejecutar dichas sentencias.

A continuación, presentamos, en la Figura 39, el mapa de cuestiones esperadas por parte de los estudiantes.

Figura 39. Tercer mapa de cuestiones derivadas a priori



Presentamos la actividad 6a, que consiste en familiarizarse con el Google Colab, así como identificar los procedimientos del código fuente del algoritmo de la transformada de Hough.

Actividad 6a

En el siguiente enlace:

<https://colab.research.google.com/drive/1rdT44eYX3RwWgx67SkufYY79yc6ShlBw?usp=sharing> encontrará implementado el algoritmo de la Transformada de Hough para una porción de carretera. Luego de ejecutar cada una de las celdas conteste las siguientes preguntas.

- Determine las ecuaciones de las rectas, señala cuatro líneas representativas que han sido identificadas por el programa.
- Determinar el ancho de la franja blanca y negra. Considere que la imagen tiene una resolución de 200PPI, es decir se tiene en la imagen 200 pixeles por pulgada. (1pulgada es 2.54cm)

Se espera que los estudiantes puedan ejecutar las celdas que se presentan en el Google Colab. Luego, identifiquen algunos de los pasos señalados en el mapa de cuestiones. Una vez determinado por el programa las líneas identificadas, los estudiantes podrán notar que el programa arroja varias rectas como se señala en la Figura 40, además de las coordenadas (ρ, θ) . Como se puede notar el programa identificó 18 rectas. Para esto, se ha realizado una lectura desde la parte superior izquierda y esperando que los estudiantes elijan las coordenadas más representativas para cada línea que se observa. Podrían señalar aproximadamente las siguientes coordenadas:

$$L_1: (\rho, \theta) = (92.6, 61^\circ)$$

$$L_2: (\rho, \theta) = (169.6, 61^\circ)$$

$$L_3: (\rho, \theta) = (345.6, 61^\circ)$$

$$L_4: (\rho, \theta) = (430.6, 61^\circ)$$

Entonces, las ecuaciones que posiblemente señalen estarán determinadas de la siguiente forma:

$$L_1: x \cos 61^\circ + y \sin 61^\circ = 92.6$$

$$L_2: x \cos 61^\circ + y \sin 61^\circ = 169.6$$

$$L_3: x \cos 61^\circ + y \sin 61^\circ = 345.6$$

$$L_4: x \cos 61^\circ + y \sin 61^\circ = 430.6$$

Por otro lado, como se trata de rectas paralelas, pueden señalar que el ancho de las franjas pedidas estaría dado por:

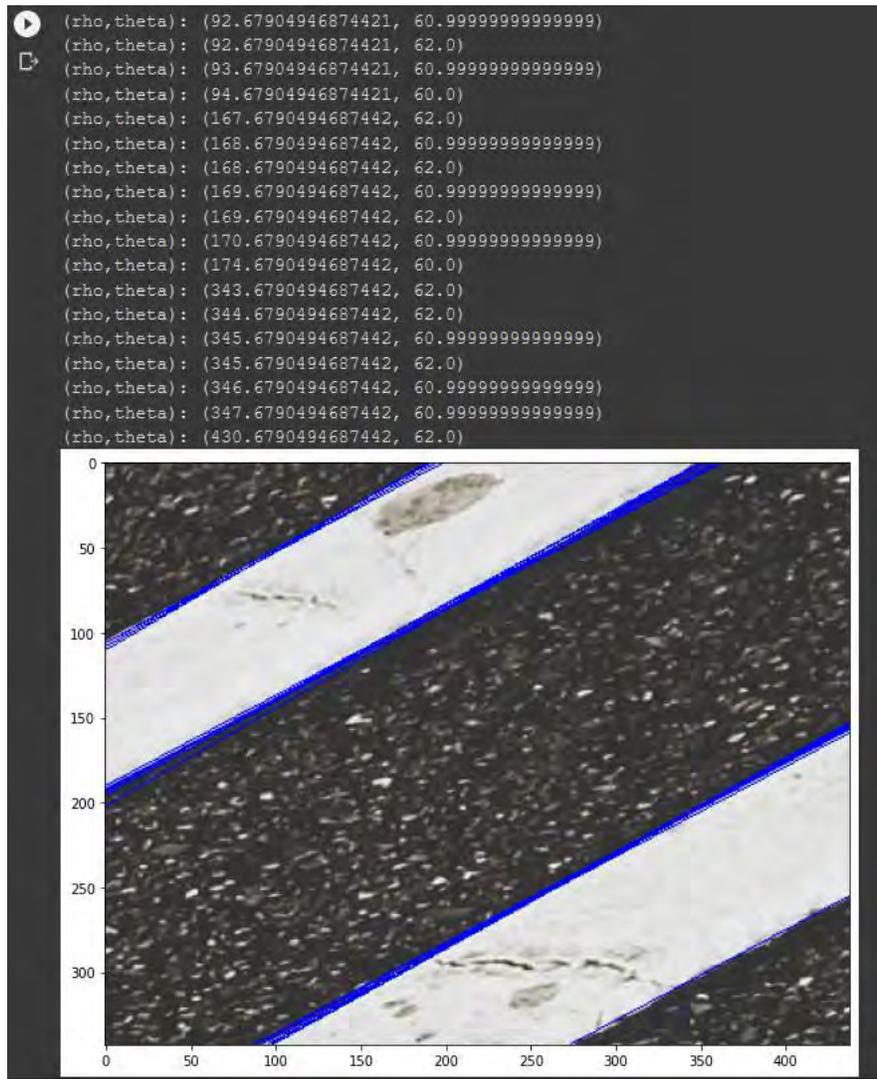
$$\text{Blanco1} = 169.6 - 92.6 = 77$$

$$\text{AnchoNegro} = 345.6 - 169.6 = 176$$

$$\text{AnchoBlanco2} = 430.6 - 345.6 = 85$$

Teniendo en cuenta que estas longitudes están dadas en píxeles y considerando la resolución de la imagen señalada, esperamos que los estudiantes obtengan las longitudes en centímetros. Calculando por regla de tres tenemos: la primera franja de blanco tiene 0.9779 cm, la franja de negro tiene 2.2352 cm y finalmente la segunda franja de blanco tiene 1.0795cm.

Figura 40. Salida del programa en Google Colab



Con las figuras 33, 35 y 39 se obtiene el posible mapa de cuestiones para el REI de la transformada de Hough que se propone en esta investigación.

4.1.4 Semana 4: Presentación y discusión de resultados.

Para la comunidad de estudio, será el momento de la institucionalización y evaluación de la praxeología de la transformada de Hough. De acuerdo con ello, tenemos los siguientes objetivos:

- Presentar el mapa de cuestiones y respuestas respecto al algoritmo de la transformada de Hough
- Identificar la matemática asociado a la componente tecnológica de la transformada de Hough
- Evaluar si las componentes de la praxeología de la transformada de Hough proporcionan elementos para responder la cuestión generatriz
- Establecer una respuesta provisional a la cuestión generatriz
- Determinar el esquema Herbartiano
- Resaltar el empleo del lenguaje de programación (MATLAB y PYTHON) para resolver los ejercicios
- Resaltar el trabajo en equipo y la importancia de la comunicación de los resultados

Sesión 7 y 8. En la Tabla 27, se señala la actividad 7a, el cual corresponde a la presentación y discusión final del algoritmo computacional de la transformada de Hough. Además de la actividad 7b, se espera que la comunidad de estudio, emplee técnicas y tecnologías para resolver problemas en la formación matemática de ingenieros.

Tabla 27

Planificación de proceso de estudio de la sesión 7 y 8 (presencial/virtual)

Tiempo	Actividades	Objetivos	Tareas
120min	En plenario: Actividad 7a es la presentación de los informes de cada grupo y discusión de resultados	Presentación de informes de cada grupo. Llegar a consensos entre los grupos que viabilicen el proceso de estudio e investigación.	Socializar lo que cada grupo va encontrando en su estudio e investigación

120 min	En grupos: Actividad 8a	Emplear elementos de la praxeología de la transformada de Hough.	Resolver los problemas propuestos
---------	----------------------------	--	-----------------------------------

A continuación, se señala la actividad 7a

Actividad 7a

- A) Presentar los resultados obtenidos en las actividades 5a, 6a de la sesión 5 y 6. Cada grupo tiene un tiempo de 10 minutos.
- B) Proponer una respuesta a la actividad 1a, bajo el contexto que se describe en dicha actividad.

Se espera, que la comunidad de estudio, considere como posible respuesta a la cuestión generatriz, los algoritmos computacionales presentados en el entorno de Google Colab. También, reconozcan los elementos de la praxeología de la transformada de Hough. Entonces, una respuesta a la cuestión generatriz, bajo el contexto planteado, sería lo siguiente:

$R^\vee \rightarrow$ Algoritmos computacionales de la Transformada de Hough

Finalmente, se presenta la actividad 8a, el cual se desarrolla en una sesión virtual y consiste en:

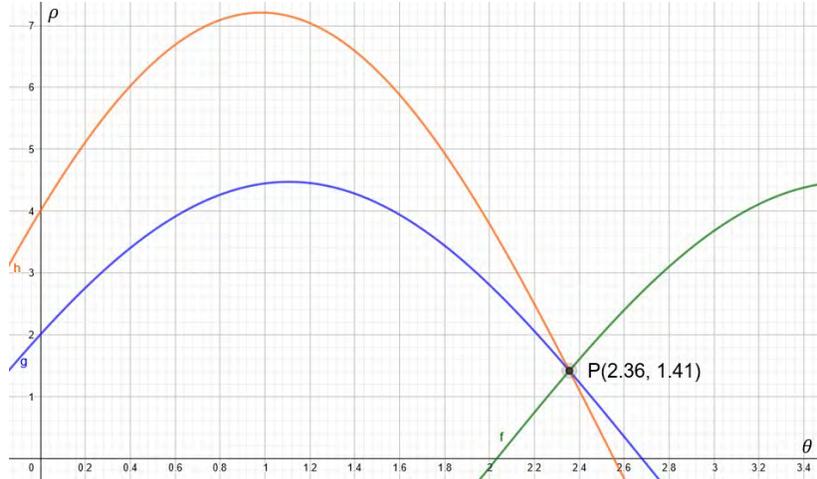
Actividad 8a

1. En la figura se muestra el espacio de parámetros donde cada curva senoidal está dada por

$$f(\theta) = \rho_1 = -4 \cos \theta - 2 \sin \theta$$

$$g(\theta) = \rho_2 = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$$

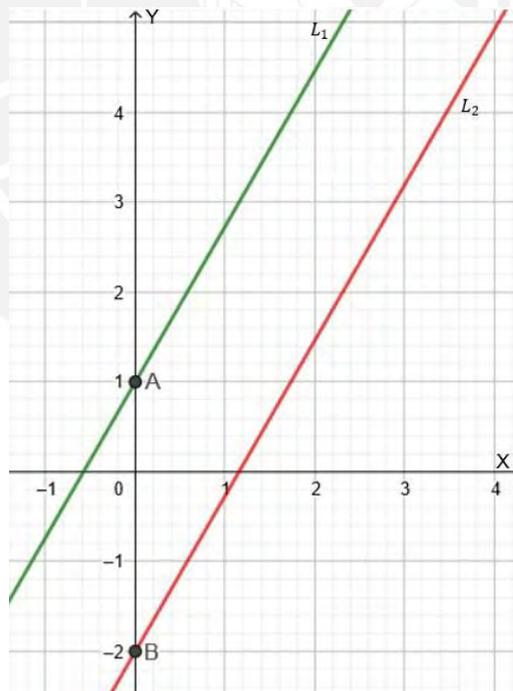
$$h(\theta) = \rho_3 = 4 \cos \theta + 6 \sin \theta$$



- A) Graficar en el espacio de imagen (plano cartesiano) la representación de estas curvas
 B) Analizar en el espacio de imagen el significado del punto de intersección de las curvas en el plano de parámetros

Considere $2.36 \approx \frac{3\pi}{4}$ y también $\sqrt{2} \approx 1.41$.

2. En la figura se tiene dos rectas paralelas, con ángulos de inclinación de 60° en el plano de la imagen.



Determinar la representación de dichas rectas en el espacio de parámetros.

Se espera del ejercicio 1 que los estudiantes puedan identificar de las funciones senoidales los puntos (x, y) de acuerdo con la relación $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$. Entonces para el

ítem A) se tiene los puntos $(-4, -2)$, $(2, 4)$ y $(4, 6)$ para el ítem B) el punto de intersección $P(2.36, 1.41)$ indica que los tres puntos hallados son colineales y con estos valores se puede determinar la ecuación de la recta: $x \cos(2.36) + y \sin(2.36) = 1.41$, considerando las aproximaciones se tiene $-x + y = 2$.

Respecto al ejercicio 2, se espera que los estudiantes determinen las ecuaciones de las rectas: $L_1: \sqrt{3}x - y - 1 = 0$ y $L_2: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$. Para determinar la representación de estas rectas en el espacio de parámetros (ρ, θ) , determinan el ángulo de inclinación de las rectas normales a estas rectas y la distancia del origen a dichas rectas. Entonces tendríamos los puntos en el espacio de parámetros: $(\rho_1, \theta_1) = (1, \frac{2\pi}{3})$ y $(\rho_2, \theta_2) = (1, \frac{\pi}{3})$ correspondientes a las rectas L_1 y L_2 respectivamente.

El desarrollo de este ejercicio está relacionado con las propiedades señaladas en Duda y Hart (1972).

4.2 Medio y media en el análisis a priori del posible recorrido de estudio e investigación.

En esta sección se presenta las *media-medio*, obras (O_i), datos diversos (D_i) que posiblemente puedan encontrar los estudiantes en internet.

Respecto al momento de encuentro y exploración con elementos del procesamiento digital de imágenes y la transformada de Hough correspondientes a la actividad 1b se espera que los estudiantes empleen como términos de búsqueda lo que se muestran en la Figura 41.

Figura 41. Términos Posibles de Búsqueda en Google por parte de los Estudiantes

<p>Entradas en Google:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Inteligencia artificial - Visión artificial - Procesamiento digital de imágenes - Imagen digital - Matemática e inteligencia artificial - Detección de líneas rectas en imágenes - otros

Se espera que estos términos de búsqueda señaladas en la figura 41 estén motivados por el contexto de la actividad 1a y las *medias* señaladas por el docente (ver figura 32). En este proceso de búsqueda, es posible que los estudiantes encuentren dificultades para usar los

buscadores y la elección de las *medias* más fiables, que luego formarán parte del *medio*. En ese sentido, esperamos que la comunidad de estudio proporcione algunos parámetros mínimos de fiabilidad.

Para responder a las cuestiones propuestas en la actividad 1b, es posible que la comunidad de estudio considere como obras (O_i) lo siguiente:

Artículos, libros y tesis:

- O_1 : Capítulo II. Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2018) Digital image processing. (4ta ed.). Pearson.
- O_2 : Capítulo II. Gonzalez, R. C. (2008). *Digital image processing using MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Videos:

O_3 : Videos 1 y 2. Mery, D. (12 agosto 2021). *Curso de Procesamiento de Imágenes 2020*. YouTube. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLiWJnCHHGI2MECnUo0REYid7ZB7jNiHd>

En las sesiones 3 y 4, se considera que los términos de búsqueda en Google o YouTube posiblemente contengan las palabras: procesamiento, identificación, rectas, segmentación, transformada de Hough, entre otras. A medida que avancen en la búsqueda y teniendo en cuenta la consigna, los equipos de estudiantes podrían empezar a relacionar términos que les permite enfocarse en la transformada de Hough, puesto que este es el método usual para detectar líneas rectas en una imagen digital. Las *medias* que posiblemente encuentren en las búsquedas de respuestas a las actividades 3b, 3c y 4a se muestran en la Figura 42, las cuales complementan a las obras señaladas líneas arriba.

Figura 42. Posibles medias de los grupos de estudiantes en la búsqueda de respuestas

Artículos:

- D_5 → La transformada de Hough. Detección de líneas y círculos:
<https://porprofesionalmic.files.wordpress.com/2015/09/investigacion-documental-transformada-hough.pdf>

Páginas web:

- D_6 →: Transformada de Hough: https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Hough
- D_7 →: Transformada de Hough: <https://programmerclick.com/article/37371278385/>

Video en YouTube:

- $D_8(X_i)$ → Transformada de Hough para detección de líneas:
<https://www.youtube.com/watch?v=zbyn57jgWNg&t=1903s>
- $D_9(X_i)$ → 27 procesamiento de imágenes: transformada de Hough, Watershed, Templetas, Movimiento: <https://www.youtube.com/watch?v=V94QX4aCglo>

Además, cuentan con las obras: O_4 y O_5 ; específicamente el capítulo 10 y de D_9 , que desde ahora lo identificamos con la obra O_6 que justifica las respuestas sobre la transformada de Hough. Una dificultad con la que se pueden encontrar los estudiantes será el idioma. Lo que se espera es que los equipos puedan consultar a especialistas para afianzar lo que van encontrando en las distintas medias. Un nuevo elemento del medio para justificar la respuesta derivada a la transformada de Hough será el artículo de Duda y Hart. Entonces tenemos la obra siguiente:

O_7 [Duda, R. O. y Hart, P. E. (1972). Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. *Communication of the ACM*, 15(1), 11-15. <https://doi.org/10.1145/361237.361242>]

También, es importante que determinen elementos del medio para que la comunidad de estudio siga indagando sobre el algoritmo de la transformada de Hough. En la Figura 43, se muestra algunos elementos que formarían parte del medio.

Figura 43. Posibles Elementos del Medio respecto a la Transformada de Hough

Artículos/ libros:

- O_4 : Capítulo X. Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2018) Digital image processing. (4ta ed.). Pearson.
- O_5 : Capítulo X. Gonzalez, R. C. (2008). *Digital image processing using MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- O_7 → Duda, R. O. y Hart, P. E. (1972). Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. *Communication of the ACM*, 15(1), 11-15.
<https://doi.org/10.1145/361237.361242>.

Video en YouTube:

- O_6 → 27 procesamiento de imágenes: transformada de Hough, Watershed, Templetas, Movimiento: <https://www.youtube.com/watch?v=V94QX4aCglo>
- O_8 → Transformada de Hough para detección de líneas:
<https://www.youtube.com/watch?v=zbyn57jgWNg&t=1903s>

Estas obras que se muestra en la figura 43 pueden generar las respuestas derivadas a las cuestiones presentadas en el segundo mapa de cuestiones.

Respecto a la cuestión Q_7 , se pueden relacionar con los algoritmos encontrados en Gonzalez y Woods (2018) y Pratt (2007). También se puede considerar como obra, O_9 → Capítulo 7 de Sundararajan, D. (2017) *Digital image processing. A signal processing and algorithmic approach*. Springer. <https://www.springer.com/gp/book/9789811061127>.

Para las cuestiones Q_{82} y derivadas de esta, se espera que la comunidad de estudio pueda considerar como obra a O_5 . Adicionalmente, se puede considerar los códigos fuente de Taochenshh encontrado en GitHub, el cual señalamos como obra O_9 → <https://github.com/taochenshh/Find-Lines-and-Circles-in-an-Image-Hough-Transform->. Además, consideramos el código fuente de la transformada de Hough de Mery (2021), al cual consideramos como obra:

O_{10} → <https://colab.research.google.com/drive/12gRRaaXfl3Prb39dmnCIDOVxLtJNuBnQ?usp=ssharing>

RESULTADOS

Al principio de la investigación, la propuesta fue abordar el campo de la Inteligencia Artificial (IA), por motivación del investigador. Por otro lado, como manifiesta Iglesias et al. (2020) la IA tendrá repercusión en el futuro. Esto traerá una revolución económica. Se prevé que para el año 2030 generará unos 16 500 trillones de dólares y según *McKinsey Global Institute* (citado en Iglesias et al., 2020) “el 70% de las empresas a nivel mundial adoptaran algún tipo de IA” (Iglesias et al., 2020, p. 7).

Al explorar el campo de la IA, se encontraron diversas disciplinas, por ejemplo, visión computacional y procesamiento digital de imágenes que solucionan problemas diversos en áreas como la medicina, astronomía, industria automotriz, etc. En estas disciplinas, se identificó que su objeto de estudio está relacionado con las imágenes digitales que admiten modelos matemáticos. Esta característica nos llevó a investigar con más profundidad este objeto.

Castela (2016) señala “cada institución ejerce una actividad propia; aun cuando importa praxeologías de otras instituciones productoras de matemática, o no; las desarrolla y las adapta a sus condiciones institucionales específicas” (p. 27). En ese sentido, al analizar las praxeologías presentes en el procesamiento digital de imágenes, en particular del método de la Transformada de Hough, a partir de documentos que le dieron su origen, se localizó elementos matemáticos que al principio se presentaron de forma discursiva con matices propios de la disciplina intermedia. Así tenemos el plano de la imagen, espacio de parámetros, arreglo, píxeles, función imagen. Sin embargo, se encontraron elementos prácticos de la disciplina intermedia como muestreo, cuantización, segmentación, umbralización, detección de bordes. Estos se presentaron con detalle en las instituciones de enseñanza de la disciplina intermedia. Cabe resaltar que estos elementos se validaron gracias a algoritmos computacionales, como las que se muestra en las figuras 22, 25, 27, 28 y 29.

En la investigación de los referentes epistemológicos de la Transformada de Hough (Hough, 1962), se observa que la praxeología TH (ver tabla 8) tiene elementos que están justificados en términos prácticos por la electrónica, mientras que el sustento matemático se presenta de forma discursiva. Sobre la institución de disciplina intermedia (Duda y Hart, 1972; Pratt, 2007; Sundararajan, 2017; Gonzalez y Woods, 2018) hay cambios significativos en los elementos de la praxeología (ver tablas, 9, 10, 12, 13, 14 y 15). Por ejemplo, en Pratt y Sundararajan hay más presencia de elementos de la matemática que justifican a la técnica. Asimismo, las técnicas y tecnologías relacionadas con la disciplina intermedia son más sofisticadas y necesitan en la mayoría de los casos algoritmos computacionales para ser validadas.

Cabe destacar que esta praxeología de la transformada de Hough a lo largo del tiempo ha sufrido cambios para que en las instituciones usuarias puedan ejecutarse de manera eficiente. Por ejemplo, en sus inicios, se fundamentó en la ecuación lineal de la recta para luego considerar la función trigonométrica seno, puesto que esta es más conveniente para desarrollar un algoritmo computacional. Además, las cuatro propiedades señaladas en Duda y Hart (1972) permiten relacionar el espacio de la imagen con el espacio de parámetros que son presentados como discursos que justifican a la técnica de esta praxeología.

Para el diseño del dispositivo didáctico entorno a la praxeología de Hough, es importante tener a disposición toda la información posible de las instituciones de la disciplina del ingeniero (producción y enseñanza). Además, para obtener la cuestión generatriz, tenemos que investigar un contexto cercano al campo de trabajo del ingeniero y presente un impacto en la sociedad, porque de esta manera se tendrá más *medias* y *medios* donde la comunidad de estudio puede indagar.

García et al. (2019) señala que la cuestión generadora del proceso de indagación, Q_0 , es una cuestión crucial, viva y auténtica; que la comunidad de estudio la asume como una cuestión valiosa y seria para su estudio. En ese sentido, nos parece adecuado indagar documentos de divulgación sobre cómo la inteligencia artificial está cambiando el modo de vida de las personas (ver figura 31). Frente a este contexto, es importante motivar la formulación de cuestiones. Por ende, en esta investigación, se considera la cuestión: ¿cómo explicar que una inteligencia artificial tiene la habilidad de “ver”? Pensamos que esta pregunta es amplia, auténtica y valiosa para la comunidad de estudio.

En el análisis *a priori*, se observó que hay etapas donde la comunidad de estudio tiene que tomar decisiones para avanzar en el recorrido. Además, dada la complejidad del problema es pertinente considerar la participación de especialista de procesamiento digital de imágenes (pueden ser estudiantes del octavo o décimo ciclo de ingeniería mecatrónica). Asimismo, durante este análisis, se vio conveniente plantear actividades (1b, 2a, 3a, 3b) en las sesiones. La idea es que la comunidad de estudio se enfoque en cuestiones que les permita indagar en obras que están relacionados con la praxeología mixta de la transformada de Hough.

Galindo (2019) señala que el proceso de investigación difícilmente es previsto. Un análisis *a priori* es fundamental para observar que el estudio de Q_0 se pueda facilitar en el aula. En ese sentido, el análisis *a priori* realizado, nos procura, que es posible que se genere cuestiones derivadas y sus correspondientes respuestas sustentadas en el *medio* que van construyendo la comunidad de estudio.

Bartolomé et al. (2018) señalan que los mapas de cuestiones y respuestas son útiles en el diseño *a priori* y en la gestión del proceso de estudio. Por otro lado, mencionan que la dialéctica de *media-medio* es conveniente para el profesor y estudiantes investigadores para generar y validar el conocimiento en la comunidad de estudio. Efectivamente, en el análisis *a priori*, el mapa de cuestiones y respuestas que se va generando es gracias a las indagaciones que se realizó en la institución *PDI* y su enseñanza *EPDI*, así como de las instituciones de enseñanza de la matemática *EM* y de las matemáticas *M*. En particular, se consideró los elementos estudiados en el capítulo III y de la praxeología mixta de la transformada de Hough para formular las cuestiones, y plantear un bosquejo de las respuestas. Todo este análisis de cuestiones y respuestas permitió guiar la organización didáctica, es decir los tiempos, objetivos, tareas y actividades a desarrollar en los grupos de estudiantes, así como en las reuniones de toda la comunidad de estudio.

Por otro lado, García et al. (2019) señalan que la respuesta R^\heartsuit tiene que ser significativa para la comunidad de estudio. Además, es una respuesta tentativa y provisional. En el análisis *a priori*, se observa como la respuesta al contexto planteado en la actividad 1b corresponde a una respuesta provisional y parcial que se va construyendo en las sesiones (1, 2,3, 4, 5, 6 y 7). Asimismo, están relacionados con los elementos de la praxeología mixta de la transformada de Hough y cómo esta respuesta se generaría por toda la comunidad de estudio en las reuniones plenarias (sesión 7). Se considera que la respuesta que proporcionen sea significativa para estos.

Además, es importante indicar que el análisis *a priori* se puede inferir que es posible generar un posible REI de las tantas que puede generar la comunidad de estudio en su proceso de investigación e indagación sobre la respuesta a la cuestión generatriz planteada en la actividad 1b. Hay que tener en cuenta que en la actividad 1b se reduce a que la comunidad de estudio. Se tiene que responder a la cuestión de cómo explicar que la IA (robot) pueda “ver” líneas rectas en su camino. A continuación, dicho REI se representa con el siguiente esquema Herbartiano de la Figura 44.

Figura 44. Esquema Herbartiano posible

$$[S(X; Y; Q'_0) \sim M] \hookrightarrow R^\forall$$

Donde

Q'_0 : ¿Cómo explicar que una inteligencia artificial tiene la habilidad de “ver” líneas rectas?

$M = \{ \text{Cuestiones señaladas en las figuras 33, 35, 39; respuestas mencionadas en las actividades 1c, 3c, 5a y 7a; Obras señaladas y datos varias señaladas en la sección Media y Medio en el análisis a priori} \}$

$R^\forall \rightarrow$ Algoritmos computacionales sobre la Transformada de Hough

En el desarrollo del posible REI-TH, observamos que hay la necesidad de realizar tareas de procesamiento digital de imágenes: adquirir imagen digital, procesar imagen digital y analizar imagen digital. Esto conlleva al uso de lenguajes de programación para justificar y validar las técnicas. En esta investigación, en particular las actividades 2a, 6a se presenta el lenguaje de Python a través de Google Colab. Esto se debe a que es usada dentro de las disciplinas de la ingeniería, al igual que MATLAB que también en esta investigación se incentiva para que los estudiantes se motiven en usar estas herramientas.

Las limitaciones encontradas al analizar los programas analíticos de las instituciones de enseñanza de las matemáticas (AMGA, FCAL) nos sugieren establecer, gracias al análisis *a priori* ejercicios que relacionen programas computacionales que les facilite aplicar los conocimientos que van adquiriendo en la disciplina intermedia de procesamiento digital de imágenes. Además, como en estas asignaturas no se imparten lenguajes de programación, se ha planteado en las actividades presentar los programas implementados sobre la adquisición de imágenes digitales y de la transformada de Hough con la finalidad de que los estudiantes solo ejecuten algunos códigos y en la mayoría de los casos interpreten con lo señalado en los programas las tareas que se les pide. Asimismo, se tiene finalidad de que los estudiantes puedan identificar elementos de la praxeología mixta de la transformada de Hough.

CONCLUSIONES

Esta investigación, se enmarca en el problema de la formación matemática de los futuros ingenieros. Para abordar esta problemática, se ha planteado indagar las praxeologías habitadas en las instituciones de producción y enseñanza de la disciplina de la ingeniería, con la finalidad de encontrar praxeologías que puedan ser susceptibles a ser transpuestas a la enseñanza de la matemática (EM). En particular para esta investigación; considerando los antecedentes y la praxeología mixta de la transformada de Hough, construido, se puede concluir que las actividades de modelización matemática dentro de la institución del Procesamiento Digital de Imágenes (*PDI*) y su enseñanza (*EPDI*), contribuyen a la articulación y a dotar de sentido a las praxeologías matemáticas de los primeros cursos en la formación de los ingenieros.

Al realizar, un análisis epistemológico de la transformada de Hough en documentos correspondientes a las instituciones de producción y enseñanza del procesamiento digital de imágenes, se nota la presencia de praxeologías matemáticas relacionados a la geometría analítica, álgebra matricial y cálculo. También, se observó, que estas praxeologías, dentro de la disciplina de la ingeniería, sufrió transposiciones para su uso en esta disciplina. Así vemos, el plano de la imagen y el plano de parámetros que están relacionados con el plano cartesiano y el plano de coordenadas polares, respectivamente. También, tenemos la representación de una imagen digital como un arreglo matricial o una función bidimensional definido sobre valores enteros no negativos.

Por otro lado, para concretizar el objetivo general, fue importante los procedimientos metodológicos. Con la primera fase del análisis de artículos de investigación relacionados con procesamiento digital de imágenes y transformada de Hough se logra, gracias a la TAD, identificar y analizar las praxeologías matemáticas, también, las praxeologías propias de la disciplina de la ingeniería *PDI* que están presentes en el método de la Transformada de Hough. Luego, se construye en base a este análisis, un modelo epistemológico praxeológico, al cual le llamamos praxeología mixta de la transformada de Hough. Este modelo sirvió como base para la formulación de la praxeología de la transformada de Hough escolar, así como para la organización didáctica en el análisis *a priori*.

También, a partir del análisis praxeológico de la transformada de Hough y considerando un contexto cotidiano de la inteligencia artificial, se formuló la cuestión generatriz. Planteamos, que dicha cuestión es de interés y motivadora para la comunidad de estudio. Además, con el análisis *a priori* observamos que la cuestión generatriz Q_0 tenía que ser presentada para un caso particular, y así no involucre herramientas muy sofisticadas para estudiantes de ingeniería del primer ciclo. Entonces, lo que se planteó fue la actividad 1b, con el cual, se espera que la

comunidad de estudio formule la cuestión Q'_0 que encamine el REI en torno a algunos elementos del procesamiento digital de imágenes y la transformada de Hough, en concreto la praxeología mixta transformada de Hough.

Con la segunda fase del procedimiento metodológico, se logró realizar una propuesta de un posible Recorrido de Estudio e Investigación. En el diseño y análisis *a priori* se puede notar claramente como la cuestión generatriz Q'_0 permite, en un sistema didáctico $S(X, Y, Q'_0)$, generar elementos que determinan un posible REI. Por mencionar, en el análisis *a priori* se tiene el desarrollo de las dialécticas de pregunta-respuesta (ver figuras 33, 35 y 39) y de las dialécticas de *media-medio* (ver sección 3.4).

También, para plantear actividades didácticas a lo largo de las sesiones que se mencionaron en el análisis *a priori*, se consideró como base el análisis praxeológico de la transformada de Hough y también de la praxeología de la transformada de Hough escolar.

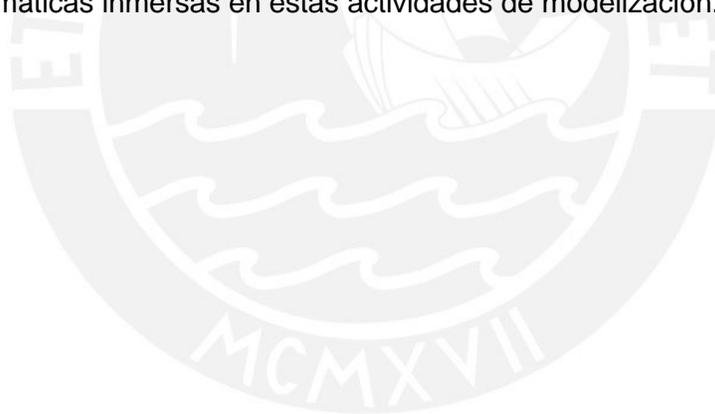
Respecto a los objetivos específicos:

- Identificar y describir la praxeología mixta de la Transformada de Hough en la institución de producción y enseñanza del procesamiento digital de imágenes, en la investigación, como consta en el desarrollo del capítulo III, es importante para el investigador, pues proporciona la composición del bloque teórico y práctico de la praxeología. Explicita la técnica, la tecnología y la teoría relacionado con la institución matemática (M) y EM. Además, debido a la identificación de la técnica, la tecnología y la teoría presente de la disciplina de la ingeniería PDI y EPDI, se observó la importancia de lenguajes de programación, para validar, explicar y motivar las técnicas en PDI y EPDI. También, todos estos elementos, tanto teóricos como prácticos, se observó que están articulados en la actividad de modelización entorno a la tarea dentro de PDI. Por tanto, este objetivo se ha logrado bajo estas conclusiones.
- Realizar actividades didácticas en la enseñanza de las matemáticas que relacionen elementos de la praxeología mixta de la transformada de Hough, en la investigación, las actividades que se proponen en el análisis *a priori* (sección 4.1) permiten que la comunidad de estudio pueda desarrollarse a lo largo del posible Recorrido de Estudio e Investigación de la transformada de Hough (REI-TH). En caso contrario, la cuestión generatriz Q_0 , podría generar un recorrido que involucre herramientas sofisticadas de la inteligencia artificial. Entonces, el planteamiento de las actividades 1b, 2a, 3a, 3b, 4a, 6a, 7a y 8a, es importante para el REI-TH. En consecuencia, queda determinado este objetivo.
- Establecer una propuesta *a priori* para el mapa de cuestiones y respuestas, dialéctica de media-medio asociadas al dispositivo didáctico diseñado en torno a la praxeología de la

transformada de Hough, este objetivo fue desarrollado gracias al análisis *a priori* realizado en el capítulo IV. En el cual, se ha logrado la construcción del mapa de cuestiones y respuestas (figuras 33, 35 y 39). También, en la sección 4.2 se logró; gracias al análisis preliminar de documentos de investigación, bibliografía, artículos y videos de divulgación, clases virtuales y otros, tener una base de datos que permitió al investigador proponer algunas *medias* y posiblemente *medios* para el proceso de estudio e investigación de la comunidad de estudio en una posible experimentación del dispositivo didáctico.

Se espera que el trabajo de investigación aporte al estudio de la relación entre las instituciones de enseñanza de la matemática y las instituciones de enseñanza de la ingeniería e institución de producción de la disciplina del ingeniero. Asimismo, contribuya al análisis de la circulación de praxeologías de estas instituciones de la disciplina del ingeniero a la formación matemática del ingeniero, así como el estudio de las transposiciones que ocurren en las praxeologías matemáticas dentro de las instituciones de la disciplina intermediarias.

Finalmente, queda por profundizar en las praxeologías del procesamiento digital de imágenes de los diversos temas que la componen para explicitar las técnicas, tecnologías y teorías de las matemáticas inmersas en estas actividades de modelización.



REFERENCIAS

- ABET. (2020). *Criteria for accrediting engineering technology programs*.
<https://www.abet.org/accreditation/accreditation-criteria/criteria-for-accrediting-engineering-programs-2020-2021/>
- Amadoz, S. (09 de noviembre de 2019). *El País*. Los ojos de los coches autónomos, mejores que los de los humanos.
https://elpais.com/retina/2019/11/07/innovacion/1573119342_580859.html
- Aquino, J. A., Germán, L. y Trujillo J. C. (2013). Tendencia en la enseñanza de la Ingeniería Mecatrónica y su Campo disciplinar. *Ciencia y Tecnología*, 13, 233-250.
<https://doi.org/10.18682/cyt.v1i13.109>
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352. <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/247884>
- Bartolomé, E., Florensa, I., Bosch, M. y Gascón, J. (2018). A 'study and research path' enriching the learning of mechanical engineering. *European Journal of Engineering Education*, 44(3), 330-346. <https://doi.org/10.1080/03043797.2018.1490699>.
- Bosch, M. (2018). Study and research paths: a model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematics (ICM 2018)*, 4, 4033-4054.
https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210
- Burger, W. y Burge, M. J. (2016). *Digital image processing. An algorithmic introduction using Java*. (2da ed.) Springer.
- Castela y Romo-Vazquez (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática*, 28(2), 9-2.
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262016000200009&script=sci_abstract&tlng=pt
- Castela, C., Romo Vazquez, A. (en prensa). Towards an institutional eistemology. In R. Biehler, G. Gueudet, M. Liebendörfer, C. Rasmussen, & C. Winslow (Eds), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education: New Directions*. Springer.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du

- didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266
- Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=144
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- CONCYTEC. (2006). *Plan nacional estratégico de ciencia, tecnología e innovación para la competitividad y el desarrollo humano 2006-2021*. <https://portal.concytec.gob.pe/index.php/concytec/estrategias/41-plan-nacional-de-cti-2006-2021>
- Diego-Montecón, J. M., Haro, E., Blanco, T. F., Romo-Vázquez, A. (2021). The chimera of the competency-based approach to teaching mathematics: a study of carpentry purchases for home projects. *Educational Studies Mathematics*, 107(1), 75-94. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10032-5>
- Duda, R. O. y Hart, P. E. (1972). Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. *Communication of the ACM*, 15(1), 11-15. <https://doi.org/10.1145/361237.361242>
- Frejd, P. y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of Mathematical modelling: ideas for Education. *ZDM Mathematics Education*, (50), 117-127. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0928-2>
- Galindo, N. (2019). *Diseño de una unidad de aprendizaje sobre Relaciones Cuantitativas de Estructura-Actividad (QSAR) en la carrera de ingeniería* (Tesis de maestría). https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2019/galindo_2019.pdf
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosh M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15(1), 75-94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>
- Gonzalez, L. (18 de enero de 2020). *aprendaIA*. La inteligencia artificial y los servicios de transmisión de música. <https://aprendeia.com/inteligencia-artificial-y-los-servicios-de-transmision-de-musica/>
- Gonzalez, R. C. y Woods, R. E. (2018) *Digital image processing*. (4ta ed.). Pearson.
- Gonzalez, R. C., Woods, R. E. y Eddins, S. L. (2008) *Digital image processing using MATLAB*. Pearson Education.

- Gonzalez, L. (18 de mayo de 2020). *La inteligencia artificial y los servicios de transmisión de música*. AprendelA. <https://aprendeia.com/inteligencia-artificial-y-los-servicios-de-transmision-de-musica/>
- Gómez, Giménez, Vega, Sanabria, Santa Cruz, Maidana; Mello y Solís (2020). TWG2: Mathematics for engineers; mathematical modelling; mathematics and other disciplines. En T. Hausberger, M. Bosh y F. Chelougui (Ed.), *INDRUM2020 PROCEEDINGS Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. (pp. 163-281). <https://indrum2020.sciencesconf.org/>
- Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelización matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros* (Tesis de maestría). https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/guzman_2016.pdf
- Guzmán, P., Romo-Vázquez, A. y Covián, O. (2019). Diseño de actividad didáctica para un curso de control automático basada en modelización matemática. Una propuesta desde la teoría antropológico de lo didáctico. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 412-430. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/42595>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). McGraw-Hill.
- Hough, P. V. C. (1962). Method and Means for Recognizing Complex Patterns (Patente de U.S. No. 30696541962). <https://www.freepatentsonline.com/3069654.html>
- Iglesias, E., García, A., Puig, P. y Benzaquén, I. (2020). *Inteligencia artificial: Gran oportunidad del siglo XXI: Documento de reflexión y propuesta de actuación*. Banco Interamericano de Desarrollo. <http://dx.doi.org/10.18235/0003037>
- Juganaru, M. (2014). *Introducción a la programación*. Grupo editorial Patria. https://books.google.com.pe/books?id=_9rhBAAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=lenguaje+de+programacion+definicion&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwjOhobJ-rz2AhXMkmoFHWRsBoAQ6AF6BAgFEAI#v=onepage&q&f=false
- Lucas, C. O. (2015). *Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis de doctorado). Universidad de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo.
- Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros* (Tesis de maestría). https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/macias_2012.pdf
- Macias, C. y Romo-Vázquez A. (2014). *Metodología para el diseño de actividades basadas en modelización matemática* [Sesión de conferencia]. Comité Latinoamericano de

- Matemática Educativa A. C. DF, México.
<https://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>
- Mery, D. (2020). Curso de procesamiento de imágenes 2020. Recuperado el 12 de agosto del 2021 de:
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLiWJnCHHGI2MECnUo0REYid7ZB7jNiHd>
- Mery, D. (17 nov 2020). *27 procesamiento de Imágenes: Transformada de Hough, Watershed, Templates, Movimiento.* YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=V94QX4aCglo&list=PLiWJnCHHGI2MECnUo0REYid7ZB7jNiHd&index=27&t=2477s>
- Mery, D. (2021). Curso de procesamiento de imágenes digitales. Ejemplo Transformada de Hough. Recuperado el 18 de noviembre del 2021 de:
<https://colab.research.google.com/drive/12gRRaaXfI3Prb39dmnCIDOVxLtJNuBnQ?usp=sharing>
- Otero, FM. R. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico. En M. R. Otero, M. A. Fanaro y A. R. Corica (Ed.), *La Teoría Antropológica de lo didáctico en el aula de matemáticas* (pp. 15-27).
https://www.researchgate.net/publication/259287004_La_Teoria_Antropologica_de_lo_Didactico_en_el_Aula_de_Matematica
- Ponce, J. C., Torres, A., Quezada, F. S., Silva, A., Martínez, E. U., Casali, A., Scheihing, E., Túpac, Y. J., Torres, D., Ornelas, F. J., Hernández, J. A., Zavala, C., Vakhnia, N. & Pedreño, P. (2014). *Inteligencia artificial*. Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abierta. https://www.researchgate.net/publication/269466259_Inteligencia_Artificial
- Pratt, W. K. (2007). *Digital Image Processing*. (4ª ed.). Wiley.
https://drive.google.com/file/d/0B30qTepNcnnAOGhIOUQ4Z1o1Sm8/view?resourcekey=0-hSogsioYn1O_qRyq74UVsA
- Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Revista de educación matemática*, 26(1), 314-338. <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2016/08/04/la-modelizacion-matematica-en-la-formacion-de-ingenieros/>
- Romo-Vázquez, A. & Artigue, M. (2022). Challenges for research on tertiary mathematics education for non-specialists: Where are we and where are we to go? In R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen. C. Winsløw. (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education*. (xxx-xxx). Springer.
- Rouhiainen, L. (2018).

- Inteligencia artificial: 101 cosas que debes saber hoy sobre nuestro futuro*. Alienta.
<https://www.planetadelibros.com/libro-inteligencia-artificial/280581>
- Sala, G., Barquero, B. y Font, V. (2020). Modelización e indagación en la propuesta de un REI codisciplinar de matemáticas e historia. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 546-562. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p546-562>
- Salgado, D. P. (2019). *Diseño, implementación, análisis y evaluación de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo en dos variables* (Tesis de doctorado). https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/guzman_2016.pdf
- Siero, L. R. (2017). *Diseño de una secuencia didáctica de modelación matemática para la enseñanza del álgebra lineal en la formación de ingenieros* (Tesis de doctorado). <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2216>
- Sundararajan, D. (2017) *Digital image processing. A signal processing and algorithmic approach*. Springer. <https://www.springer.com/gp/book/9789811061127>
- Vázquez, R. (2017). *Diseño de actividades didácticas basadas en modelización para la formación matemática de futuros ingenieros* (Tesis de doctorado). <https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/24099>
- Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R. y Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática*, 28(2), 31-57. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262016000200031&script=sci_abstract&tlng=pt