

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



**LA CREACIÓN DE PROBLEMAS COMO MEDIO PARA  
COMPRENDER LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CON  
DOCENTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las  
Matemáticas que presenta:

***Jim Alberto Leiva Maldonado***

Asesor:

***Elizabeth Milagro Advincula Clemente***

Lima, 2021

## Resumen

La presente investigación busca contribuir con la formación de profesores de secundaria al presentar una propuesta de trabajo para abordar la función exponencial haciendo uso de la creación de problemas como enfoque didáctico. Dado que no se encuentran investigaciones sobre el uso de este enfoque con este objeto matemático, presentamos este estudio con el fin de fortalecer los conocimientos matemáticos y didácticos de los docentes, vinculados a la función exponencial. Planteamos como objetivo general, analizar cómo la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria. Para esto, proponemos identificar los conocimientos sobre función exponencial que evidencian los docentes de educación secundaria en un taller de creación de problemas, y luego, analizar los problemas creados al aplicar una secuencia de actividades basada en la estrategia EPP respecto a la creación de problemas por variación. Mediante el desarrollo del taller en donde se trabajaron problemas sobre interés simple y compuesto, empleando modelos lineales y exponenciales, encontramos en los problemas creados por los docentes, movilización de conocimientos que tienen sobre el objeto matemático, lo cual se evidencia en sus problemas creados. Asimismo, la información recogida en cuestionarios y entrevistas, y las producciones de los docentes, fue analizada con un enfoque cualitativo para la descripción de resultados. Finalmente, mostramos que la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria, dado que les permite movilizar conocimientos que ayudan a su comprensión para facilitar la elaboración de sus problemas.

Palabras clave: función exponencial, creación de problemas, problema pre, problema pos.

## Resumo

A presente pesquisa tem como finalidade contribuir com a formação de professores de ensino médio, apresentando uma proposta de trabalho que aborda a função exponencial fazendo uso da criação de problemas como enfoque didático. Dado que não é possível encontrar pesquisas sobre o uso de este enfoque matemático, apresentamos este estudo com a finalidade de fortalecer os conhecimentos matemáticos e didáticos dos docentes vinculados ao uso da função exponencial. Propomos como objetivo geral a análise de como a criação de problemas contribui à compreensão da função exponencial dos docentes do ensino médio. Para isto, propomos identificar os conhecimentos da função exponencial que os docentes de ensino médio numa oficina de criação de problemas, e logo, analisar os produtos dos docentes ao aplicar uma sequência de atividades baseadas na estratégia EPP em relação à criação de problemas por variação. Mediante o desenvolvimento da oficina com os docentes onde trabalhamos com problemas relacionados aos juros simples e compostos, empregando modelos lineares e exponenciais, encontramos nos problemas criados pelos docentes mobilização de conhecimentos que têm sobre o objeto matemático, o qual fica evidente nos problemas criados. Da mesma forma, a informação coletada em questionários e entrevistas, e nas produções docentes, foi analisada para a descrição de resultados. Por último, mostramos que a criação de problemas contribui para a compreensão da função exponencial nos docentes de ensino médio, dado que lhes permite mobilizar os seus conhecimentos que ajudam à compreensão para facilitar a elaboração dos seus problemas.

Palavras-chave: função exponencial, criação de problemas, problema pré, problema pós.

## **Abstract**

This research aims to contribute to the high school teachers' background by proposing a framework to deal with the exponential function, taking advantage of the problems posing as a didactic view. Since most of the research with that goal does not use such a view, we present this study to strengthen the pedagogical and mathematical knowledge linked with the exponential function. We propose as a general objective the analysis of posing problems as a contribution to the high school teachers' better understanding of the exponential function. To this end, we posit identifying the exponential function knowledge by the high school teachers in a posing problems workshop, and then analyzing the teachers' products resulting from the application of a sequence of activities based on the EPP strategy regarding the posing problems by variation. Through the teacher's workshop development where we dealt with issues related to the simple and compound interest, using linear and exponential models, we found in the problems posed by the teachers the evolution of the knowledge on that mathematical object; that is evident from the posing problems. In addition, the collected information through questionnaires and interviews and in the teacher's products were analyzed to describe the results. Finally, we show that the method of the posing problem contributes to the better understanding of the exponential function by the high school teachers. It allows them to activate the knowledge that helps the comprehension of it to ease the problems proposals.

Keywords: Exponential function, posing problems, pre-problem, post-problem



*A nuestro buen Dios, de quien recibimos todas las cosas, a mi esposa Katherine quien es un gran apoyo y soporte para mí y mi familia, y a mis hijos Daniela, y Jorge por su entusiasmo, comprensión y paciencia, permitiendo la culminación del presente trabajo .*

## Agradecimientos

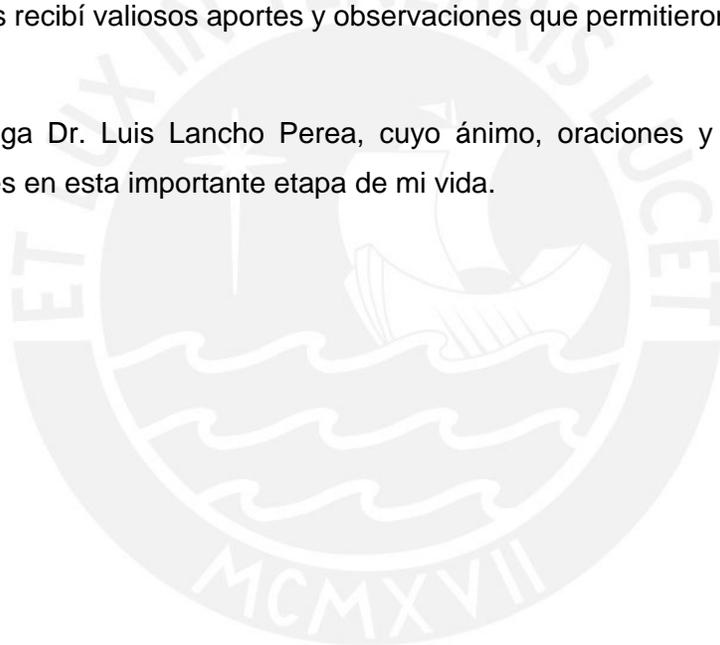
A mi amada familia, por su paciencia en este periodo de trabajo y por haber comprendido esta etapa de dedicación al trabajo de investigación.

A mi asesora de tesis, Mg. Elizabeth Advíncula Clemente por su orientación, guía y dedicación durante este periodo de trabajo y producción.

A los profesores de secundaria participantes del taller, quienes dedicaron un buen tiempo colaborando de manera significativa al desarrollo del presente trabajo.

A todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, con quienes pude compartir los avances de este trabajo y de quienes recibí valiosos aportes y observaciones que permitieron ajustar y mejorar el desarrollo

A mi amigo y colega Dr. Luis Lancho Perea, cuyo ánimo, oraciones y palabras de aliento estuvieron presentes en esta importante etapa de mi vida.



## Índice

Resumen.....	ii
Resumo.....	iii
Abstract.....	iv
Agradecimientos .....	vi
Índice .....	vii
Lista de tablas.....	ix
Lista de figuras.....	xi
Introducción .....	14
Capítulo I: Delimitación del problema de investigación y antecedentes .....	16
1.1 Antecedentes.....	16
1.1.1 Investigaciones sobre el objeto matemático: Función Exponencial.....	16
1.1.2 Investigaciones sobre la creación de problemas .....	22
1.2 Justificación .....	25
1.3 Problema y objetivos de la investigación.....	29
Capítulo II: Marco Teórico.....	31
2.1 Objeto matemático: La función exponencial.....	31
2.1.1 Definición de la función exponencial.....	33
2.1.2 Enseñanza de la Función exponencial .....	38
2.2 El enfoque de creación de problemas .....	47
2.2.1 Aspectos teóricos sobre la Creación de Problemas .....	47
2.2.2 Estrategia de creación de problemas: Episodio, Problema pre y Problema pos .....	50
2.2.3 Ventajas del uso de la creación de problemas .....	53
Capítulo III: Aspectos metodológicos considerados en la investigación y diseño del taller.....	55
3.1 Metodología y procedimientos.....	55
3.1.1 Fase exploratoria .....	58
3.1.2 Fase de planificación .....	58
3.1.3 Fase de entrada al escenario .....	70
3.1.4 Fase de recojo y análisis de información.....	71

3.1.5 Fase de salida del escenario .....	72
3.1.6 Fase de elaboración del informe.....	72
3.2 Experimentación y análisis de los resultados .....	73
3.2.1 Descripción de los sujetos de estudio.....	73
3.2.2 Descripción de la aplicación de la prueba de entrada .....	76
3.2.3 Análisis de los episodios creados en las actividades individuales.....	86
3.2.4 Descripción de la aplicación de la prueba de salida .....	100
3.2.5 Análisis de los problemas pre creados .....	111
3.2.6 Análisis de los problemas pos creados .....	126
3.3 Análisis de los puntajes obtenidos .....	133
3.3.1 Comparación de los puntajes obtenidos en la prueba pre según criterios de evaluación.....	133
3.3.2 Comparación de los puntajes obtenidos en la prueba pos según criterios de evaluación.....	137
3.4 Análisis de la comprensión de los docentes sobre el objeto matemático identificada en los docentes participantes.....	142
3.4.1 Comparación de las respuestas de los docentes en las pruebas de entrada y salida .....	142
3.4.2. Comparación entre los conocimientos matemáticos sobre la función exponencial evidenciados al inicio y al final del taller .....	147
Capítulo IV: Consideraciones finales .....	152
4.1 Conclusiones de la investigación .....	152
4.2 Recomendaciones para futuras investigaciones .....	154
Referencias.....	156
Anexos .....	160

## Lista de tablas

<b>Tabla 1</b> <i>Cronología de las concepciones de función</i> .....	31
<b>Tabla 2</b> <i>Exponentes y valores de la progresión geométrica</i> .....	33
<b>Tabla 3</b> <i>Valores y porcentajes de aumento en el modelo epidemiológico</i> .....	37
<b>Tabla 4</b> <i>Identificación de los elementos del problema</i> .....	50
<b>Tabla 5</b> <i>Actividades por desarrollar en cada fase de la investigación</i> .....	56
<b>Tabla 6</b> <i>Proceso de investigación cualitativa</i> .....	57
<b>Tabla 7</b> <i>Diseño de la sesión No. 1 del taller</i> .....	60
<b>Tabla 8</b> <i>Diseño de la sesión No. 2 del taller</i> .....	61
<b>Tabla 9</b> <i>Aspectos a considerar para el análisis de los problemas creados</i> .....	65
<b>Tabla 10</b> <i>Calificación cualitativa de un problema creado por los docentes</i> .....	66
<b>Tabla 11</b> <i>Resumen de datos recogidos de los docentes participantes del taller</i> .....	74
<b>Tabla 12</b> <i>Descripción a priori de lo que se espera en cada pregunta de la prueba de entrada</i> .	77
<b>Tabla 13</b> <i>Comparación de saldos y diferencia al final de los 5 primeros años en cada opción</i> .	89
<b>Tabla 14</b> <i>Comparación de saldos y diferencia al final de los 17 primeros años en cada opción</i>	90
<b>Tabla 15</b> <i>Deducción de un modelo matemático para cada opción</i> .....	91
<b>Tabla 16</b> <i>Reflexiones de los docentes sobre las opiniones de los estudiantes mostradas en el episodio</i> .....	99
<b>Tabla 17</b> <i>Descripción a priori de lo que se pide en cada pregunta de la prueba de salida</i> .....	101
<b>Tabla 18</b> <i>Respuestas del docente 1 a la primera pregunta de la prueba de salida</i> .....	103
<b>Tabla 19</b> <i>Respuestas del docente 1 a las preguntas 2 y 4 de la prueba de Salida</i> .....	104
<b>Tabla 20</b> <i>Respuestas del docente 6 a la primera pregunta de la prueba de salida</i> .....	106
<b>Tabla 21</b> <i>Respuestas del docente 6 a las preguntas 2 y 4 de la prueba de Salida</i> .....	107
<b>Tabla 22</b> <i>Respuestas del docente 12 a la primera pregunta de la prueba de salida</i> .....	108
<b>Tabla 23</b> <i>Respuestas del docente 12 a las preguntas 2 y 4 de la prueba de Salida</i> .....	110

<b>Tabla 24</b> <i>Respuestas comparativas de los docentes a la pregunta sobre el objeto matemático</i> .....	143
<b>Tabla 25</b> <i>Lo que se esperaba que respondieran sobre el objeto matemático</i> .....	144
<b>Tabla 26</b> <i>Transcripción de la entrevista al docente 1</i> .....	145
<b>Tabla 27</b> <i>Transcripción de la entrevista al docente 6</i> .....	146
<b>Tabla 28</b> <i>Conocimientos observados en el docente 1 antes y después</i> .....	148
<b>Tabla 29</b> <i>Conocimientos observados en el docente 6 antes y después</i> .....	149
<b>Tabla 30</b> <i>Conocimientos observados en el docente 12 antes y después</i> .....	150



## Lista de figuras

<b>Figura 1:</b> Crecimiento y decrecimiento de la función exponencial $f(x)$ .....	36
<b>Figura 2:</b> Información de la editorial COREFO sobre la función exponencial.....	39
<b>Figura 3:</b> Ejercicios propuestos sobre función exponencial en COREFO.....	39
<b>Figura 4:</b> Ejercicios propuestos en Editorial Santillana.....	40
<b>Figura 5:</b> Problema sobre tasa de interés compuesto .....	41
<b>Figura 6:</b> Definición de la función exponencial .....	42
<b>Figura 7:</b> Gráfica de dos funciones exponenciales .....	43
<b>Figura 8:</b> Gráficas mostrando características creciente y decreciente. ....	43
<b>Figura 9:</b> Definición de la función exponencial natural .....	44
<b>Figura 10:</b> Comparación de la gráfica de funciones exponenciales .....	44
<b>Figura 11:</b> Fórmula del interés compuesto .....	45
<b>Figura 12:</b> Fórmula del interés continuo .....	46
<b>Figura 13:</b> Esquema de la estrategia EPP .....	51
<b>Figura 14:</b> Fases de la investigación cualitativa .....	56
<b>Figura 15:</b> Drive de trabajo para el trabajo colaborativo durante el taller .....	64
<b>Figura 16:</b> Site para el desarrollo de las actividades del taller.....	64
<b>Figura 17:</b> Rúbrica para analizar los problemas creados por los docentes .....	67
<b>Figura 18:</b> Distribución de participantes con experiencia en docencia universitaria.....	75
<b>Figura 19:</b> Distribución de docentes según el título profesional .....	76
<b>Figura 20:</b> Respuesta del docente 1 a la primera pregunta .....	79
<b>Figura 21:</b> Respuesta del docente 1 a la tercera pregunta .....	80
<b>Figura 22:</b> Respuesta del docente 6 a la primera pregunta.....	82
<b>Figura 23:</b> Respuesta del docente 6 a la pregunta 3 .....	83
<b>Figura 24:</b> Respuesta del docente 12 a la primera pregunta.....	85
<b>Figura 25:</b> Respuesta del docente 12 a la pregunta 3 .....	86

<b>Figura 26:</b> Episodio presentado a los docentes para la actividad individual.....	87
<b>Figura 27:</b> Representación gráfica de los modelos para el cálculo del interés .....	92
<b>Figura 28:</b> Solución al episodio propuesto por el docente 1 .....	93
<b>Figura 29:</b> Solución al episodio propuesto por el docente 6 .....	95
<b>Figura 30:</b> Solución al episodio propuesto por el docente 12 .....	97
<b>Figura 31:</b> Episodio propuesto por el docente 1 en la actividad individual .....	111
<b>Figura 32:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 1 .....	113
<b>Figura 33:</b> Problema pre creado por el docente 1 en la prueba de salida .....	114
<b>Figura 34:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 1 .....	115
<b>Figura 35:</b> Problema pre propuesto por el docente 6 en la actividad individual .....	116
<b>Figura 36:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 6 .....	118
<b>Figura 37:</b> Problema pre creado por el docente 6 en la prueba de salida .....	119
<b>Figura 38:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 6 .....	120
<b>Figura 39:</b> Episodio propuesto por el docente 12 en la actividad individual .....	121
<b>Figura 40:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 12 .....	123
<b>Figura 41:</b> Problema pre creado por el docente 12 en la prueba de salida .....	124
<b>Figura 42:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 12 .....	125
<b>Figura 43:</b> Problema pos creado por el docente 1 en la prueba de salida .....	127
<b>Figura 44:</b> Rúbrica de calificación del problema pos creado por el docente 1 .....	127
<b>Figura 45:</b> Problema pos creado por el docente 6 en la prueba de salida .....	129
<b>Figura 46:</b> Rúbrica de calificación del problema pos creado por el docente 6 .....	130
<b>Figura 47:</b> Problema pos creado por el docente 12 en la prueba de salida .....	131
<b>Figura 48:</b> Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 12 .....	132
<b>Figura 49:</b> Distribución de puntajes obtenidos por docente en la actividad individual .....	134
<b>Figura 50:</b> Distribución de puntajes obtenidos por docente en la prueba de salida .....	135
<b>Figura 51:</b> Comparación de puntajes por docentes en las pruebas pre creadas.....	136

**Figura 52:** Distribución de los puntajes en los problemas pos por docente..... 137

**Figura 53:** Distribución de puntajes en los problemas pos por criterio ..... 138

**Figura 54:** Distribución comparativa de los puntajes ..... 139

**Figura 55:** Distribución de puntajes por actividad de producción ..... 140



## Introducción

El desarrollo de la presente investigación surgió por el interés en analizar y entender de qué manera la creación de problemas contribuye a la enseñanza de la matemática, específicamente al tema de la función exponencial y su comprensión por parte de los docentes. Dentro de la línea de investigación de resolución y creación de problemas, se ha visto que incluir la estrategia de crear problemas, potencia de manera significativa el aprendizaje y dinamiza los procesos de trabajo. En diversas investigaciones, se ha planteado con claridad la importancia del uso de la creación de problemas y, como menciona Malaspina (2013), estas investigaciones han mostrado ser de utilidad significativa para la formación matemática tanto de los estudiantes como de los docentes.

Por ello, para el desarrollo de nuestra investigación, planteamos como objetivo analizar cómo la creación de problemas contribuye a que los docentes de educación secundaria comprendan la función exponencial. Para lograr este objetivo trabajamos un taller con docentes, donde desarrollamos actividades para movilizar sus conocimientos sobre la función exponencial. Durante el taller, los docentes elaboraron una serie de actividades individuales y grupales basadas en la estrategia Episodio, problema pre y problema pos, los cuales les permitieron movilizar y mostrar sus conocimientos sobre el objeto matemático función exponencial, encontrando en la recolección de información, cuáles podrían ser los posibles cambios en la comprensión del objeto matemático.

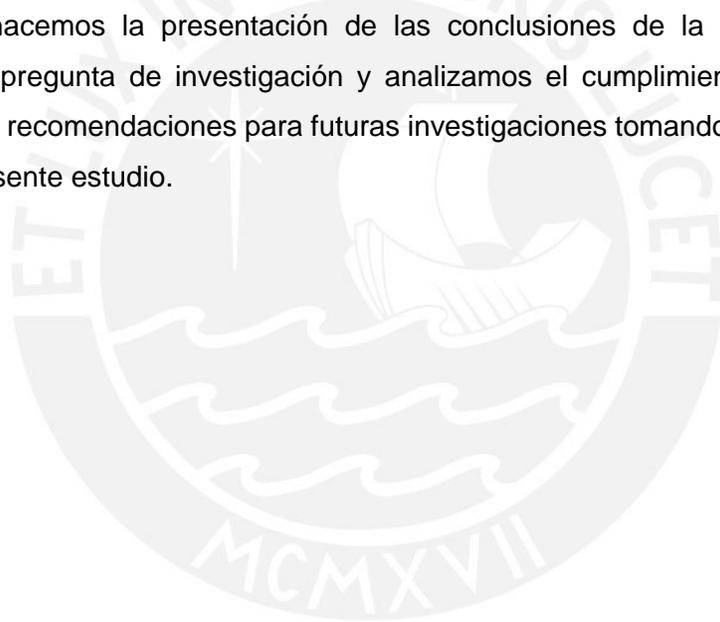
Adicionalmente desarrollamos entrevistas a algunos de los docentes para confirmar y ampliar la información recogida en las pruebas aplicadas durante el taller y poder establecer algunas conclusiones sobre la investigación. Trabajamos como objetivos específicos el identificar los conocimientos sobre función exponencial que evidencian los docentes de educación secundaria en un taller de creación de problemas y a partir de ellos, analizar los resultados al aplicar una secuencia de actividades basada en la estrategia EPP respecto a la creación de problemas por variación sobre funciones exponenciales. Nuestra investigación se ha organizado en 4 capítulos.

En el capítulo 1 analizamos los antecedentes de la investigación, describiendo los alcances de algunas investigaciones anteriores sobre el objeto matemático función exponencial y la creación de problemas, además justifica y plantea los objetivos de trabajo. En el capítulo 2, describimos con detalle el objeto matemático función exponencial, analizando su definición y propiedades, siguiendo la presentación que desarrolla Stewart (2012) y tomando como base la presentación en el libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000).

Presentamos los elementos teóricos sobre la creación de problemas y el enfoque de la estrategia EPP propuesta por Malaspina (2013), mostrando algunos ejemplos de la aplicación de esta propuesta y reflexionando sobre las ventajas de su uso. En el capítulo 3, presentamos la metodología de trabajo, la cual se enmarca dentro de un enfoque cualitativo, se presentan las diversas fases de trabajo, en donde también describimos los detalles del taller desarrollado y los instrumentos para el recojo de la información.

En este capítulo, se hace además una presentación del diseño del taller y de las diferentes actividades desarrolladas con un grupo de docentes de educación secundaria, con quienes analizaremos los resultados del desarrollo de las actividades así como la creación de problemas por variación. Detallamos los resultados de la experimentación y analizamos los resultados describiendo el trabajo de 3 docentes seleccionados dentro del grupo de docentes participantes.

En el capítulo 4 hacemos la presentación de las conclusiones de la investigación donde respondemos a la pregunta de investigación y analizamos el cumplimiento de los objetivos, planteando algunas recomendaciones para futuras investigaciones tomando en consideración la experiencia del presente estudio.



## Capítulo I: Delimitación del problema de investigación y antecedentes

### 1.1 Antecedentes

Como parte de nuestra investigación, hemos revisado algunos trabajos recientes que desarrollan un análisis del manejo de la función exponencial y formas de abordar su enseñanza y otros trabajos que aplican el enfoque de creación de problemas por variación y por elaboración en diversos objetos matemáticos. Hemos encontrado muchas investigaciones que han desarrollado experiencias con docentes empleando las funciones exponenciales como objeto de estudio analizando las situaciones didácticas, así como el uso de la creación de problemas a partir de experiencias desarrolladas con docentes y empleando diversos objetos matemáticos. La revisión de antecedentes da el sustento científico a nuestro trabajo de investigación y servirán para situar nuestro trabajo en el enfoque que actualmente desarrollan investigadores en la educación de la matemática buscando ir más allá del análisis de contenidos, integrando las estrategias didácticas y procesos reflexivos en la enseñanza.

#### 1.1.1 Investigaciones sobre el objeto matemático: Función Exponencial

En un artículo de investigación sobre el manejo de la función exponencial por parte de estudiantes del nivel secundario entre 16 y 17 años de una universidad privada de Lima, García y Martínez (2018), analizan la génesis de dicho objeto mediante el uso de un programa de acceso libre, Geogebra, el cual permitió que los estudiantes interactúen y manipulen el objeto a nivel gráfico, mejorando la comprensión de los conceptos. Los autores, señalan en su investigación la importancia de trabajar con la función exponencial siendo que forma parte del Currículo Nacional Peruano y permite relacionar dicho concepto con las ecuaciones exponenciales lo cual facilita el trabajo de contenidos y problemas de aplicación como crecimiento, interés entre otros.

Esta investigación aborda el trabajo desde una dimensión tecnológica, articulando e integrando las bondades tecnológicas con el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desarrollaron actividades de trabajo con estudiantes empleando fichas de trabajo y una computadora que les permitiera manipular las funciones exponenciales mediante el programa Geogebra. Estas actividades permitieron confirmar en el trabajo que los estudiantes lograron movilizar un repertorio de esquemas sobre el objeto matemático (como ser función, tener asíntotas, etc.) los cuales permiten atribuir un significado concreto a la función. Concluyen en su estudio, que las actividades mostradas, haciendo uso del Geogebra, favorecieron la comprensión de la función

exponencial, validando los conocimientos previos y permitiendo la transformación del artefacto simbólico en instrumento.

Las actividades mostradas, evidencian que, modelar las funciones exponenciales y tener una adecuada representación elaborada y posible de modificar con un graficador, permite a los estudiantes tener una mejor representación del objeto matemático, logrando un mejor uso de este, especialmente cuando aterriza las ideas en la resolución de problemas en una situación dada. Con estas ideas, consideramos importante abordar un trabajo que sistematice los esfuerzos didácticos de los docentes para la enseñanza de este objeto matemático. En nuestra investigación, resulta importante validar este tipo de transformación de conceptos entre los docentes, considerando que dichas transformaciones son posibles de lograr mediante la creación de problemas facilitando la comprensión de la función exponencial entre los docentes de secundaria.

Flores y Font (2017), elaboraron un estudio sobre el impacto producido por un programa de maestría en el trabajo de los docentes participantes, buscando verificar qué propuestas de unidades didácticas desarrolladas en sus trabajos de maestría representan un “cambio para la mejora” de la enseñanza de las funciones, centrando su trabajo en una comparación sobre sus propuestas y las unidades didácticas de los libros de texto. Esta comunicación se centró en el trabajo presentado por docentes ecuatorianos que participaron del máster de la Universidad de Barcelona durante los años 2015 y 2016, y que se referían a investigaciones relacionadas con la función exponencial. La investigación presentó un análisis de los trabajos finales de tesis de los docentes en referencias a las propuestas con la función exponencial.

En la elaboración de sus unidades didácticas, encontraron que la mitad de las propuestas no resultaron ser muy distintas a las propuestas de los libros que no eran muy constructivistas, ni plantearon enfoques diferentes a pesar de que la formación en el programa de maestría tenía ese objetivo. Esto último, probablemente por la situación del contexto de la institución donde laboraban o por los procesos de inspección del trabajo, los lleva a orientar más su enfoque al que se puede encontrar en los textos. Esto hace que una investigación sobre un enfoque diferente, más intuitivo y orientado a la resolución y creación de problemas sea una propuesta importante de ser revisada y analizada. En esta experiencia observamos que la producción de los docentes puede ser mejorada y estimulada mediante una propuesta didáctica que potencie sus habilidades por ello, la investigación nos ayuda a ver la aplicación de estrategias con docentes para mejorar la producción de sus trabajos en cuanto a elaboración de problemas.

Vargas (2013) realizó un estudio de casos sobre la práctica docente en profesores universitarios de precálculo en la enseñanza de las funciones exponenciales. Este trabajo y sus

análisis pueden ser considerados en una investigación como la nuestra en tanto el objeto matemático y las condiciones de enseñanza son semejantes a las del profesor de educación Básica quien trabaja este objeto matemático en los últimos grados de la secundaria. En su trabajo indaga acerca de cómo es que modelan el concepto de función exponencial los profesores de precálculo en su práctica docente, indagando también sobre las características que subyacen en las prácticas analizadas.

Se presenta una propuesta de descomposición genética del concepto de la función recogiendo información de las sesiones de clase analizando esta práctica y sus características, esto nos permitirá tener una mejor visión de cómo puede presentarse el objeto matemático a los docentes y lograr una mejor comprensión de este. En uno de los casos se observa como eje transversal la noción de interés compuesto y continuo donde se hace uso de modelos exponenciales. Esta investigación también nos muestra en su análisis la complejidad de la relación entre las características de la práctica del docente y la perspectiva que tiene sobre el objeto matemático.

En sus conclusiones resalta la necesidad de determinar qué es lo que se debe enseñar en un curso de precálculo sobre esta función y cómo se puede lograr con los estudiantes la construcción del concepto a la par que se aborda un enfoque claro de enseñanza aplicada a situaciones de cálculo de interés, propiedades de los exponentes o razón de cambio, asociado a la función exponencial. Estos aportes serán valiosos en el diseño del material que se compartirá con los docentes en el trabajo de nuestra investigación.

Sudera y Otero (2013), trabajaron con un grupo de estudiantes entre 15 y 16 años con el propósito de describir la forma en la que los estudiantes conceptualizan las funciones exponenciales, mencionando que analizan este proceso a partir de los constructos teóricos propuestos por la Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud (1990), haciendo una descripción de las respuestas de los estudiantes a los problemas propuestos en relación con las funciones exponenciales. Parten de una idea muy importante, y es que un concepto adquiere sentido para un estudiante cuando intenta resolver un problema con él, o cuando trabaja en una situación específica, requiriendo dicho concepto. Por ello, el estudio realizado, diseñó e implementó un conjunto de situaciones con el propósito de enseñar las funciones exponenciales con alumnos de secundaria, analizando 5 sistemas de representación: El sistema de representación numérico (SRN), el sistema algebraico de primer orden (SRA1), el sistema algebraico de segundo orden (SRA2), el sistema analítico gráfico (SRG) y el sistema de representación verbal escrito (SRVE). Sudera y Otero (2013) refieren en su estudio que es posible identificar las características de la conceptualización de las funciones exponenciales en

la escuela secundaria, y ver si se podía inferir a partir del conocimiento que mostraban los estudiantes al resolver situaciones problemáticas.

Luego del estudio, obtuvieron diferentes respuestas, las cuales fueron analizadas y clasificadas para identificar los sistemas de representación empleados. Con esto, llegaron a concluir que trabajar y comprender los conceptos matemáticos relacionados a las funciones exponenciales, requiere un empleo combinado de más de un sistema de representación. Encontraron por otro lado, que algunos alumnos trabajaban respuestas lineales, es decir, asumen que, dentro de la tarea por analizar, los cambios se producían con incrementos constantes. Luego, se observaron respuestas “parcialmente no lineales”, y respuestas “no lineales”, es decir, concluyeron que un grupo de alumnos por el tipo de representación que empleaban, identificaban incrementos no constantes tratando de representarlos. Esto dentro del contexto de una situación problemática de análisis de interés compuesto.

Lo interesante de este estudio y que aporta ideas importantes a nuestra investigación, es la representación parcialmente exponencial descrita en algunas de las tareas cuando elaboraban la representación de los incrementos. Los estudiantes ya no usaban expresiones lineales, e introducían expresiones exponenciales que dependen del tiempo como variable. En este grupo de respuestas, aunque algunas representaciones sean algebraicas o gráficas no coincidían totalmente con el concepto de función exponencial.

En la experiencia descrita, y en la situación trabajada en el contexto de la gripe AH1N1, se logra una representación exponencial, mostradas en representaciones algebraicas de primer orden (SRA1) y las representaciones gráficas que se muestran.

Recogemos de esta investigación algunas conclusiones importantes como es el hecho de haber caracterizado el proceso de conceptualización de la función exponencial y su relación con los sistemas de representación en el contexto del trabajo de estudiantes de secundaria. Con ello, sugieren, que hay una conceptualización progresiva que va desde las intuitivas formas de entender las situaciones como lineales, hasta identificar las características de los crecimientos exponenciales. Esta caracterización identifica las siguientes etapas progresivas:

- **Lineal**, donde el estudiante hace una representación completa y evidencia un esquema lineal complejo que usa en todos los sistemas de representación.
- **Parcialmente no lineal**, Cuando presenta al menos una representación no lineal en su trabajo. Se observa que coexisten esquemas contradictorios entre sí.
- **No lineal**, cuando todas sus representaciones son no lineales, pero no llega a mostrar aún una respuesta exponencial. Esto se observa en las representaciones gráficas que no llegan a mostrar líneas, pero aún no muestran las características exponenciales.

- **Parcialmente exponencial**, cuando emplean al menos una representación exponencial, pero no lo hacen en todas las representaciones. Se observa que coexisten respuestas exponenciales y no exponenciales, sin embargo, la comprensión completa del problema aún es parcial.
- **Exponencial**, donde las respuestas son explícitamente exponenciales en todos sus sistemas de representación.

(Sudera y Otero, 2013, p.96).

Este trabajo no llega a afirmar que es posible describir el proceso de conceptualización de cada estudiante en particular, pero muestra que es posible identificar los aspectos por los que pasa la formalización de este concepto evidenciando una clara transición entre lo lineal y lo exponencial. Es de resaltar que concluye el estudio que esto depende en gran manera y está muy vinculado a la manera en que se les proponen las tareas a los estudiantes, por lo que en nuestra investigación esperamos verificar estas características en las diferentes experiencias de creación de problemas que los docentes de secundaria pueden llegar a tener.

En otra investigación, Vivas (2020) hace una revisión del trabajo que realizan los estudiantes de las carreras de humanidades al resolver ciertas tareas sobre función exponencial. Esta investigación es realizada en el marco de la teoría del Espacio de trabajo Matemático ETM de Kuzniak y Nechache (2016), empleando métodos que ayudaron a profundizar en el análisis de la comprensión del trabajo matemático de los estudiantes quienes debieron elegir entre diversas herramientas útiles para resolver los problemas propuestos en dos preguntas. Los estudiantes, que tenían entre 16 y 18 años evidenciaron la activación de la génesis semiótica, instrumental y discursiva al desarrollar su trabajo, siendo la génesis semiótica la más frecuente entre las acciones, es decir la articulación que los estudiantes pueden realizar entre las representaciones semióticas y las visualizaciones. A partir del trabajo que realizaron los estudiantes, en esta investigación se encontraron acciones que permitirían agrupar los episodios presentados. Estas agrupaciones se podían dar al justificar la monotonía de las funciones con las que se trabajó, construir la función a partir de puntos de paso señalados, representar la gráfica de una función exponencial, justificar la presencia de la asíntota de la función, justificar la descripción del rango de la función o al justificar los interceptos de la función con los ejes en caso los tenga.

Vivas (2020), establece las características evidentes del trabajo de los estudiantes en el desarrollo de la solución del problema propuesto, pudiendo asociar las acciones con los paradigmas correspondientes del marco teórico empleado para este análisis. Entre sus

conclusiones, menciona que los estudiantes contaron para el trabajo, con un material del curso que proporcionaba una definición de función exponencial, el cual resalta las características y acompañándola de ejemplos y tareas que permitieron la activación de la génesis semiótica, instrumental y discursiva, encontrando que la génesis más frecuente es la semiótica y la instrumental. Finalmente menciona como corolario de su trabajo, y como propuesta para futuras investigaciones, el poder analizar el trabajo matemático del profesor para conocer en qué medida la experiencia adquirida como estudiante condiciona su experiencia como docente.

Menciona, además, que el análisis del Espacio de Trabajo Matemático idóneo consiste en ver cómo el docente trabaja el proceso de enseñanza para impulsar la tarea de los estudiantes y en particular, en torno a problemas relacionados con la función exponencial. Considero que es un aporte interesante para el inicio de nuestro trabajo, siendo que la experiencia que vamos a plantear se centra en usar la creación de problemas con docentes de secundaria en relación con la función exponencial y que seguramente modificará la experiencia de enseñanza de los mismos.

Estos antecedentes nos dan una idea clara del trabajo que se ha venido realizando en algunas investigaciones referidas e a la enseñanza de la función exponencial, empleando recursos tecnológicos y que permiten movilizar conocimientos en los estudiantes del nivel secundario sobre el objeto función exponencial. Otros aportes comparan el trabajo de docentes de maestría en ejercicio con los materiales ya existentes en los textos, rescatando que la capacidad para producir materiales puede estimularse mediante una adecuada propuesta. En otra investigación observamos cómo entienden los estudiantes el concepto de función exponencial, empleando dichas conceptualizaciones para tenerlas en cuenta al proponer a los docentes la creación de problemas, incluyendo las características de los problemas que resuelven y son descritos en estas investigaciones.

Velásquez (2014), elabora una investigación sobre las creencias a la aproximación que tienen los docentes de matemáticas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en los cursos de precálculo. Dicha investigación analiza las prácticas matemáticas desarrolladas por un grupo de profesores al enseñar la función exponencial en un curso introductorio al cálculo empleando el análisis didáctico provisto por el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción. Empleando un estudio de casos analiza las respuestas para tratar de establecer la naturaleza de las creencias de los docentes al enseñar la función exponencial como el hecho de considerar a dicha función como una función de variable real que permite la descripción del crecimiento. También creencias como el establecer las características de las

reglas de correspondencia y las restricciones que deben tener los elementos de la expresión algebraica de la regla de correspondencia para ser considerada una función exponencial.

Rescatamos de esta investigación, la experiencia del análisis de las prácticas matemáticas docentes, lo que le permite al investigador establecer y analizar las configuraciones cognitivas y epistémicas, tomando en cuenta para la configuración cognitiva, los conglomerados de objetos personales, mientras que toma en cuenta para las configuraciones epistémicas los conglomerados de objetos institucionales.

### **1.1.2 Investigaciones sobre la creación de problemas**

Algunas investigaciones desarrolladas dentro de la Educación Matemática nos dan algunos aportes adicionales sobre el uso del enfoque de creación de problemas. Tal es el caso del trabajo desarrollado por Pomalaya, (2020) quien plantea un análisis de experiencias con docentes de una universidad privada para lograr la estimulación de la capacidad creadora de problemas por variación sobre proporcionalidad. En esta investigación, se emplea la estrategia de creación de problemas EPP, (Episodio, Problema pre, Problema pos) con un grupo de docentes de una universidad particular en el cual, se esperaba encontrar cambios significativos en el manejo de la creación de problemas por variación. Rescatamos de manera muy importante en esta investigación el formato de trabajo en el cual, mediante una prueba de entrada y una prueba de salida se identifica la capacidad de crear problemas por variación que los docentes participantes tienen sobre el tema de proporcionalidad. Este esquema de trabajo le permitió al investigador hacer una comparación cualitativa de ciertos rasgos previamente identificados y establecer conclusiones sobre la experiencia. El trabajo presenta un esquema claro sobre la propuesta de Malaspina (2013), sobre la creación de problemas, donde incluye los 4 elementos fundamentales que conforman el planteamiento de un problema:

- La Información
- El requerimiento
- El contexto
- El entorno matemático

Estos elementos son los que todo docente debe tener en cuenta al crear un problema. No sólo importa *la información* inicial, donde se presentan los datos del problema, o *el requerimiento* que explícitamente es lo que pide el problema, sino que también es importante determinar tanto *el contexto* en el cual se construye el problema, el cual al construirlo puede ser intra-matemático o extra-matemático, es decir el contexto de temas específicamente

matemáticos o de situaciones cotidianas. También es de suma importancia que el docente sea consciente del *entorno matemático* en el cual sus estudiantes trabajarán los problemas, es decir, saber a qué temas o capítulos propios de la matemática se habrá de referir mientras se trabaja la solución del problema.

Siguiendo la propuesta de Malaspina (2014) y adaptando una rúbrica para la evaluación de los resultados de los participantes, Pomalaya (2020), identifica tres rasgos que debe tener el problema creado: *la flexibilidad*, donde se debe observar si las variaciones van más allá de simples cambios del problema inicial, *la originalidad*, donde se debe verificar si el problema presenta novedad y creatividad respecto del problema inicial, y *la fluidez*, donde también verificamos si el nuevo problema presenta y propone más requerimientos que el problema inicial.

Nos resulta importante entender este esquema, siendo que la rúbrica adaptada permite hacer una evaluación completa del problema creado considerando la forma en que los docentes varían en su creación los elementos del problema y cada una de estas características.

La experiencia de trabajo en la investigación de Pomalaya (2020), muestra cómo mediante el estudio de cada uno de los casos de los maestros participantes, se pudo lograr una clara identificación de las capacidades de creación de problemas que tenían los docentes antes y después de la experiencia de trabajo del taller donde propusieron los alcances de la estrategia EPP. Señala el investigador que logró desarrollar una evaluación objetiva de las producciones de la creación de problemas de los docentes, pudiendo describirlos en función a los rasgos de flexibilidad, originalidad y fluidez, además de identificar la presencia de cada uno de los elementos de un problema matemático descrito.

Para nuestra investigación resulta un aporte importante ya que tomamos como ejemplo las experiencias desarrolladas en el taller propuesto, el cual nos da luces sobre el diseño e implementación del taller que esperamos desarrollar nosotros con el trabajo de la creación de problemas por variación sobre funciones exponenciales.

Por otro lado, Rodríguez (2018), elabora una investigación con docentes del nivel secundario, donde analiza cómo la creación de problemas resulta ser un adecuado medio para comprender la relación entre las ecuaciones y las funciones cuadráticas. En esta investigación, tomamos el aporte del trabajo planteado al relacionar un objeto matemático, función cuadrática, con otro objeto: ecuaciones cuadráticas, con el fin de mejorar la comprensión en la relación entre ambos objetos. Mediante el uso del enfoque de la creación de problemas y aplicando las estrategias: Episodio, Problema pre y Problema pos (EPP), el investigador logra identificar en los docentes participantes, una mejora en la comprensión de las relaciones entre los objetos matemáticos luego de la aplicación de un taller de creación de problemas.

La investigación trabaja la consigna de si es posible contribuir a la comprensión de la relación entre ecuaciones y funciones cuadráticas a partir de la creación de problemas. Para esto, trabajó un taller donde presentaron a los participantes, ejemplos de creación de problemas a partir de episodios de clase según la propuesta de Malaspina (2013). Con esta experiencia se buscó orientar a los docentes en la creación de problemas pre y problemas pos, desarrollando el análisis cualitativo de cada uno de los casos presentados por los docentes. De esta forma se logró cumplir con los tres propósitos de un estudio de casos: *ser exploratorio*: ya que se trata de una primera experiencia para los docentes que participan, creando problemas para conocer la relación entre función y ecuación cuadrática. Por otro lado, el *ser descriptivo*: ya que se hace una descripción del problema creado, a través de las estrategias de creación de problemas entre los dos objetos matemáticos. Finalmente, el *ser analítico*: pues se trabaja investigando y ampliando el campo de la aplicación de la creación de problemas para mejorar la comprensión de las funciones y ecuaciones cuadráticas.

Este último aspecto es relevante para nuestra investigación, en tanto que buscamos ampliar el uso de la estrategia de creación de problemas a campos nuevos como las funciones exponenciales, y esperamos trabajar de modo descriptivo y exploratorio con los docentes con quienes podamos validar el taller que propondremos, considerando los alcances de esta investigación como referencia, así como el modelo de diseño del trabajo desarrollado.

Un aspecto que rescatamos de esta investigación es que el trabajo se desarrolló con una metodología cualitativa. Es así que según Rodríguez (2018), las cinco fases en su experimentación fueron:

- **Fase 1 Exploración:** Donde plantea la pregunta y objetivos de investigación, a partir de la problemática identificada, desarrollando un análisis de las lecturas relacionadas con los objetos matemáticos, y la creación de problemas
- **Fase 2 Planificación:** Donde define las características del taller de creación de problemas, los participantes del taller, y elabora los instrumentos de recojo de información como las pruebas piloto, los cuestionarios y otros.
- **Fase 3 Entrada al escenario:** Consiste en el desarrollo del taller de creación de problemas, tomando las pruebas y desarrollando con ellos los métodos de creación de problemas por variación y elaboración. Finaliza con la prueba de salida para desarrollar los análisis del trabajo.
- **Fase 4 Recojo y análisis:** Momento en el que se sistematizan los resultados de los instrumentos, y se hacen los análisis comparativos en las pruebas de entrada y salida. Incluye también el de recojo de información a través de grabaciones o entrevistas

- **Fase 5 Salida del escenario y elaboración del informe:** Consiste en la elaboración de los informes a partir de los resultados obtenidos en las fases anteriores.

Este trabajo aporta mucho a nuestra investigación, especialmente en el formato del diseño e implementación del taller, donde se ejecuta el trabajo con los docentes. Nos facilitará en gran manera un marco referencial del tipo de dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de este, especialmente en el contexto del trabajo a distancia, como es el caso del taller desarrollado por el investigador y que probablemente sea el mismo esquema que debemos seguir por la coyuntura que aún estamos viviendo en el país.

Según lo visto, el enfoque de creación de problemas ha sido empleado para trabajar diversos objetos matemáticos como proporcionalidad, ecuaciones y funciones cuadráticas entre otros, considerando que las investigaciones halladas y descritas nos permiten tener una adecuada idea de un trabajo de corte cualitativo con el desarrollo de este enfoque. Encontramos que la propuesta de creación de problemas de Malaspina (2013), desarrolla con claridad ideas base para plantear un trabajo de creación de problemas por variación a partir de la modificación de algunos de los elementos. Finalmente encontramos en dichas investigaciones aportes claves para la evaluación de la producción de los trabajos de los docentes en el ejercicio de la creación de problemas los cuales tendremos en cuenta en nuestra propuesta de trabajo.

## **1.2 Justificación**

Una investigación como la que proponemos resulta muy necesaria, pues son pocos los trabajos realizados con docentes de secundaria sobre las funciones exponenciales. Si bien se ha venido desarrollando propuestas sobre resolución y construcción de problemas, las investigaciones sobre el objeto matemático de la función exponencial se centran más en trabajos con estudiantes universitarios. Es el caso de la investigación de Vivas (2020), que está orientada al desarrollo de tareas y actividades para resolver problemas que involucran a la función exponencial en estudiantes de los primeros ciclos de la carrera de humanidades de una universidad particular de Lima. Su trabajo hace un gran aporte a nuestra investigación, ya que muestra una aplicación del uso de un software que permite realizar representaciones claras de la función exponencial y que ayuda a que los estudiantes logren visualizar mejor el objeto y logren una mejor activación de la génesis semiótica. En este trabajo observamos el análisis de las tareas desarrolladas por los estudiantes sobre la función exponencial, en donde concluye que las activaciones de la génesis semiótica e instrumental fueron las más frecuentes en los trabajos de los estudiantes, quienes partieron de un material que les facilitaba la definición de función

exponencial, con ejemplos y tareas que facilitaron estas activaciones. Estos serán para nuestra investigación, buenos ejemplos del material que podremos facilitar dentro de contextos adecuados, y que favorezcan a una mejor comprensión del objeto matemático.

Un aporte similar encontramos en la propuesta de Advíncula, (2010) en cuyo trabajo sobre situaciones didácticas para la enseñanza de la función exponencial en estudiantes de humanidades, pone de relieve la importancia de la propuesta de situaciones didácticas que permitan una adecuada construcción del concepto de la función exponencial y a partir de un análisis de las experiencias aplicadas con estudiantes de las carreras de humanidades, cuyas edades están entre los 16 y 18 años, y utilizando la ingeniería didáctica, rediseña la situación didáctica original, permitiendo una nueva situación que facilita una mejor construcción del concepto de función exponencial.

Gómez y Cañadas (2016), investigan en un programa de maestría acerca de las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, centrándose en el aprendizaje del análisis fenomenológico. Trabajando con profesores de nivel secundario encontraron que los problemas principales, se manifestaron con las ideas de fenómeno y contexto. Los profesores revisaron diversos temas matemáticos de los cuales debían distinguir contextos para organizar los fenómenos, encontrando que solo la mitad de los participantes fueron capaces de lograrlo. Esto muestra que hay una necesidad clara en identificar los fenómenos y contextos, pues ellos son los que permitirían una adecuada enseñanza de conceptos matemáticos. Según los investigadores, los docentes de secundaria requieren ser capaces de analizar fenomenológicamente un tema de matemáticas, ya que este proceso les permitiría establecer los fenómenos que le dan sentido al tema y así identificar los contextos que organizan esos fenómenos. Al mostrar dificultades para hacerlo, no serían capaces de identificar las relaciones entre las estructuras y subestructuras en esos contextos.

Por otro lado, Flores (2019), parte de la idea inicial de la existencia de vacíos y dificultades que presentan los estudiantes de quinto de secundaria en referencia a la función exponencial, y considera importante el estudio de este objeto matemático en este nivel, analizando en su trabajo las contribuciones de una secuencia didáctica para la construcción del concepto de función exponencial apoyando su análisis en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007). Una investigación en este nivel secundario se justifica en tanto Flores (2019), concluye que las situaciones problema logran contribuir a la construcción del concepto del objeto matemático función exponencial.

Un hecho importante que justifica nuestra investigación es que este objeto matemático está presente en el Programa Curricular de Educación Secundaria (MINEDU, 2016), contenido

que debe ser trabajado por los estudiantes del último grado quienes ya para el final de la secundaria deben ser capaces de identificar las características de las diferentes funciones estudiadas entre ellas la función exponencial. La resolución de problemas está presente en la descripción de los niveles de desarrollo de la competencia matemática, señalando que, para llegar al nivel esperado entre otras capacidades, debe expresar una clara comprensión en “la diferencia entre una función lineal, una función cuadrática y una función exponencial y sus parámetros” (p.157). En nuestra investigación se justifica el trabajo con este objeto matemático siendo que las otras funciones mencionadas son trabajadas en los grados inferiores y en este último nivel de estudio, es de suma importancia su comprensión para una real capacidad de análisis por parte de los docentes para un mejor acompañamiento a los estudiantes.

En referencia al programa curricular vigente, podemos encontrar que en la competencia “Resuelve problemas de cantidad” el currículo nacional hace mención en la *descripción de los niveles de desarrollo de la competencia*, que el estudiante resuelve problemas referidos a cantidades muy grandes o pequeñas, traduciéndolos a expresiones numéricas entre las que sugiere el trabajo con interés simple y compuesto. Continúa en la descripción del nivel de logro, mencionando que debe seleccionar procedimientos matemáticos de cálculo y estimación para resolver problemas, optando por lo que puedan ser más idóneos en la resolución.

En relación con la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, en la *descripción de niveles de logro* encontramos que se hace referencia entre diversos temas, que el estudiante resuelve problemas, identifica relaciones entre valores y magnitudes logrando traducirlas a expresiones algebraicas. Incluye el uso de reglas de formación de sucesiones, funciones periódicas y explícitamente menciona las funciones exponenciales. Describe que, para alcanzar este logro, debe interpretar enunciados usando lenguaje matemático y gráficos pudiendo predecir comportamientos y comprobar o descartar la validez de afirmaciones. Esto se convierte en una posibilidad de abordar no solo el estudio de la función exponencial como objeto matemático en sí, sino que a partir de comprender con claridad la regla de correspondencia y características del modelo, pueda ser empleado para desarrollar ejercicios de análisis y justificación de afirmaciones basadas en datos numéricos que puedan ser extrapolados con un modelo.

Finalmente podemos observar que, en la estructura de trabajo propuesto en el currículo nacional para los desempeños de quinto grado de secundaria, se establece que, al resolver problemas de regularidad, equivalencia y cambio, el estudiante debe poder establecer relaciones entre datos, y transformar estas relaciones en expresiones algebraicas o gráficas, que incluyan sucesiones crecientes o decrecientes empleando entre varias funciones, las funciones

exponenciales. Incluye también en dichos desempeños, el ser capaz de plantear afirmaciones sobre relaciones de cambio que observa entre las variables de una función exponencial, comprobando la validez de dicha afirmación mediante ejemplos y contraejemplos desarrollando así un razonamiento inductivo y deductivo.

Consideramos que estas expectativas de trabajo en el programa curricular ponen en evidencia la necesidad de lograr en los docentes una mejor comprensión de la función exponencial, para así poder guiar a los estudiantes para el logro de estos desempeños. Es importante que la mejora de estos conocimientos se de manera constante a través de programas de capacitación y ejercitándose en el uso de estrategias didácticas como la que proponemos en nuestra investigación y que permitirán generar un conocimiento más profundo de parte de los docentes con evidencias que lo justifiquen.

También consideramos importante mencionar que actualmente existe en la enseñanza secundaria en algunos colegios particulares el programa del Bachillerato Internacional, el cual es un programa de estudio que ha desarrollado un currículo internacional y que está presente en la propuesta de más de 75 países a nivel mundial entre los que se encuentra el Perú, plantea el estudio de las funciones exponenciales como un contenido troncal dentro del grupo de funciones, siendo que forma parte de las herramientas que podemos emplear para la construcción de modelos matemáticos para representar mediante ecuaciones, sucesos de la vida real. En el programa de estudios del diploma, específicamente en el curso Matemáticas Análisis y Enfoques, se plantea la cuestión de representar modelos aplicables a la física, química u otros campos de aplicación matemática como es el crecimiento poblacional o el cálculo del interés compuesto. (IBO, 2019). Cobra una gran importancia en este contexto lograr una comprensión profunda de este objeto matemático que garantice el poder construir y entender con claridad el papel y utilidad de modelos tanto en el área de la matemática como en otras áreas de conocimiento.

Otras investigaciones como la de Sudera y Otero (2013), plantean la importancia de desarrollar adecuadas actividades didácticas que faciliten que los estudiantes logren una buena comprensión de la función exponencial para servir como base y sustento del proceso de construcción de modelos. A partir de la Teoría de Campos conceptuales de Vergnaud (1990), proponen un trabajo que facilite la construcción del concepto de Función exponencial, sin embargo en nuestra investigación consideramos que la propuesta de la creación de problemas, cumplirá igualmente un papel importante en la adecuada comprensión y por ende una buena conceptualización del objeto, lo que facilitará la elaboración de modelos matemáticos que actualmente cobran mucha importancia al representar situaciones de pandemia, crecimiento y propagación rápida.

Realizando mayores búsquedas sobre las dificultades que los docentes evidencian en la práctica docente sobre este objeto matemático, no encontramos investigaciones recientes que orienten el trabajo en función a la enseñanza de la función exponencial y las posibles estrategias para los docentes, ya que el énfasis se tiene en el aprendizaje y los procesos inmersos en el mismo. El enfoque de creación de problemas y el uso en la enseñanza de las funciones exponenciales, resulta ser un intento de trabajar las herramientas didácticas que el docente podrá emplear para desarrollar más eficazmente los conceptos matemáticos que necesita trabajar con sus estudiantes.

Por todo esto, consideramos que la investigación que realizamos sobre la creación de problemas como medio para que docentes de educación secundaria comprendan la función exponencial, es importante pues no hay muchos estudios con docentes de este nivel y tampoco hay en las investigaciones un uso del enfoque de creación de problemas como recurso de apoyo al trabajar la función exponencial en la enseñanza secundaria. También consideramos que el tema es relevante en tanto permite desarrollar competencias docentes para la enseñanza, estimulando la resolución de problemas, aprendiendo a ser competente en la modificación y creación de problemas considerando una finalidad didáctica específica. También permite que los docentes ejerciten su competencia para evaluar críticamente la calidad del trabajo matemático requerido en el momento de resolver problemas.

En general consideramos que el uso de la creación de problemas empleando funciones exponenciales, permite desarrollar conocimientos específicos sobre el objeto matemático, su definición, propiedades y uso del modelo para situaciones concretas y para resolver problemas que involucren crecimientos exponenciales. Así mismo, sobre este objeto matemático, esperamos trabajar la competencia docente del análisis didáctico, es decir, ayudarlo a ser capaz de diseñar, aplicar, crear y evaluar secuencias de aprendizaje y al mismo tiempo ser competente en el análisis didáctico de las actividades matemáticas que involucra resolver problemas con funciones exponenciales.

### **1.3 Problema y objetivos de la investigación**

En base a lo explicado anteriormente, a continuación, presentamos la pregunta y objetivos de la investigación:

#### **Pregunta de investigación**

¿De qué manera la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria?

### **Objetivo general**

Analizar cómo la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria.

### **Objetivos específicos**

- Identificar los conocimientos sobre función exponencial que evidencian los docentes de educación secundaria en un taller de creación de problemas.
- Analizar los resultados al aplicar una secuencia de actividades basada en la estrategia EPP respecto a la creación de problemas por variación sobre funciones exponenciales



## Capítulo II: Marco Teórico

### 2.1 Objeto matemático: La función exponencial

En este capítulo desarrollaremos una descripción sobre el objeto matemático que es tema de nuestra investigación, la función exponencial, considerando su desarrollo con estudiantes del nivel secundario. Haremos una revisión de sus características, notaciones, gráficas y elementos a tener en cuenta cuando describimos este objeto. También aprovecharemos para revisar algunas de las propiedades que se emplean cuando los estudiantes trabajan con los exponenciales y que suelen ser tenidas en cuenta cuando se resuelve problemas con este objeto matemático empleándolo como modelo.

#### Evolución histórica del concepto de la función exponencial

Según Freitas (2015), hubo grandes matemáticos que colaboraron en la construcción del concepto de la función y en particular, de la función exponencial. Este desarrollo no es la forma en que actualmente se aborda el objeto matemático, pero nos da una buena referencia de las formas en que se intentó plantear el concepto. La siguiente tabla, resume un cuadro histórico y cronológico para el desarrollo del concepto de función:

**Tabla 1**

*Cronología de las concepciones de función*

Año	Matemático	Concepto
1594	Napier	Invencción de los logaritmos
1637	Descartes	Ecuación $x$ e $y$ que muestra dependencia entre variables.
1670	Newton	Cantidades relacionadas; fluidos relacionados analíticamente.
1673	Leibniz	Relación, cantidades geométricas que dependen de un punto de la curva, máquina.
1696	Jean Bernoulli	Cálculo con exponenciales.
1718	Jean Bernoulli	Relación entre cantidades variables
1748	Euler	Expresión analítica. Introduce por primera vez el concepto de función exponencial como inversa de la función logarítmica

<b>Año</b>	<b>Matemático</b>	<b>Concepto</b>
1755	Euler	Dependencia arbitraria
1778	Condorcet	Dependencia arbitraria
1797	Lacroix	Dependencia arbitraria
1797	Lagrange	Expresión de cálculo, expresión analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operaciones hechas sobre una o varias cantidades constantes y variables
1822	Fourier	Series trigonométricas; secuencia de valores; ordenadas no sujetas a una ley común.
1834	Lobachevsky	Expresión analítica; condición para probar los números, dependencia arbitraria.
1837	Dirichlet	Correspondencia: para cada valor de $x$ (abscisa), único valor de $y$ (ordenada); función definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de $x$ en cierto intervalo, corresponde un valor bien definido de $y$ ; no es necesario una misma ley para todo el intervalo; y no necesita ser definido por una expresión matemática explícita en $x$ .
1888	Dedekind	Correspondencia entre elementos de dos conjuntos, obedeciendo dos condiciones.
	Cantor	Subconjunto de un producto cartesiano obedeciendo dos condiciones.
1939	Bourbaki	Correspondencia entre elementos de dos conjuntos obedeciendo las dos condiciones

*Fuente:* Adaptado de Sudera (2012)

Como podemos observar, el desarrollo cronológico muestra como a lo largo de los años se fueron desarrollando y construyendo algunos conceptos relacionados a la función exponencial, los cuales nos dan una idea de los elementos que se puede tener en cuenta al construir el concepto de función tanto con estudiantes como con docentes. En el trabajo tomaremos en cuenta estas descripciones de los conceptos que esperamos que aparezcan durante el desarrollo del trabajo de la creación de problemas con este objeto matemático.

### 2.1.1 Definición de la función exponencial

Actualmente, en el nivel secundario, se enseña la función exponencial de la mano de la función logaritmo, presentando a una como la inversa de la otra. Los estudiantes entienden ambos conceptos simultáneamente junto con sus propiedades y algunas aplicaciones algebraicas. Esta es una de las formas en que históricamente fue desarrollado por Euler, quien asoció este objeto matemático con la progresión geométrica:

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \dots$$

la cual usó para vincularla con una progresión aritmética formada por los exponentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., que permitía observar la transformación de productos en sumas y de divisiones en restas. Esto lo podemos visualizar empleando la siguiente tabla:

**Tabla 2**

*Exponentes y valores de la progresión geométrica*

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

*Fuente:* Adaptado de Sureda (2012)

En esta tabla se puede ver cómo se aplican las reglas de multiplicación y división entre los términos de la progresión geométrica, estableciendo la relación con los exponentes. De esta manera, el producto de dos términos de la progresión geométrica produce un término cuyo exponente es la suma de los términos que les corresponde en la progresión aritmética. Por ejemplo, podemos señalar en la tabla que,  $4 \times 16 = 64$ , donde se puede observar que la suma de los términos correspondientes de 4 y 16, que son 2 y 4, resultan en el término correspondiente a 64 que es 6, cumpliéndose:  $2 + 4 = 6$ .

De la misma manera, la división de dos términos de la progresión geométrica produce un término cuyo exponente es la diferencia de los dos términos correspondientes en la progresión aritmética. Digamos  $32 \div 8 = 4$ , donde también se puede verificar que la resta de los términos correspondientes de 32 y 8 que son 5 y 3 resultan en el término correspondiente a 4 que es 2, cumpliéndose:  $5 - 3 = 2$ .

## Propiedades y características de la función exponencial

Con esta consideración, hacemos una revisión de la definición de la función exponencial siguiendo las ideas principales del libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000), así como las descripciones y aspectos didácticos de textos de precálculo empleados en las facultades de ciencias y letras de pregrado.

Según Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000), podemos considerar un número real positivo  $a$ , de tal manera que sea diferente de 1, definiendo la función exponencial de base  $a$  de manera algebraica, de la siguiente forma:

La función exponencial de base  $a$ ,  $f: R \rightarrow R^+$ , indicada por la notación  $f(x) = a^x$ , debe ser definida de modo que tenga las siguientes propiedades, para cualquier  $x, y \in R$ :

- 1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- 2)  $a^1 = a$
- 3)  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  cuando  $a > 1$ , y  
 $x < y \Rightarrow a^x > a^y$  cuando  $0 < a < 1$ . (p. 170)

Esta definición nos plantea qué propiedades debe satisfacer la función, lo cual va en concordancia con la caracterización de Cauchy y la rigurosidad mostrada en su Curso de análisis, donde propone determinar una función  $\varphi(x)$  de tal manera que siga siendo continua entre dos límites reales de la variable  $x$  y de modo que para todos los valores reales de las variables  $x$  e  $y$ , se tenga:  $\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ .

Según esto, la función de tipo exponencial es aquella función que relaciona a dos variables  $x$  e  $y$ , de tal manera que  $x$  representa una progresión aritmética, e  $y$  representa una progresión geométrica. La definición formal de la función exponencial permite enunciar esto último de la siguiente forma:

Sea  $f: R \rightarrow R^+$ ,  $f(x) = ba^x$ , una función de tipo exponencial. Si  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  es una progresión aritmética de razón  $h$ , esto es,  $x_{n+1} = x_n + h$ , entonces los valores  $f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \dots, f(x_n) = ba^{x_n}, \dots$

forman una progresión geométrica de razón  $a^h$  pues:

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h}, (ba^{x_n}) \cdot a^h$$

(Lima, Pinto, Wagner y Morgado, 2000, p.176).

También es importante notar que un caso particular muy conocido y empleado es la función exponencial  $f(x) = e^x$ , la cual fue presentada por primera vez por Euler haciéndolo conocido como el uso de la constante matemática  $e$ , la cual aproximada a 13 dígitos decimales se aproxima a:

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ .\ .\ .$$

Este valor es conocido como la base de los logaritmos naturales, pero también como menciona Martínez (2002), este valor ya era conocido por Bernoulli cuando planteó analizar el problema del cálculo del interés compuesto, en donde propuso hallar el límite:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  aproximando este valor a un número entre 2 y 3. Menciona también que la aparición posterior y explícita del número, se dio con Leibniz en 1660 quien usaba este valor con una notación diferente. Sin embargo, añade que fue en una carta de Euler a Goldbach en 1731 donde introduce la notación del valor  $e$ , como aproximación a esta constante, incluyendo también la demostración de que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \dots,$$

mostrando además una aproximación del valor de la constante con 18 dígitos decimales:  $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235$ ; siendo Euler el primero que demostró que esta constante es un número irracional.

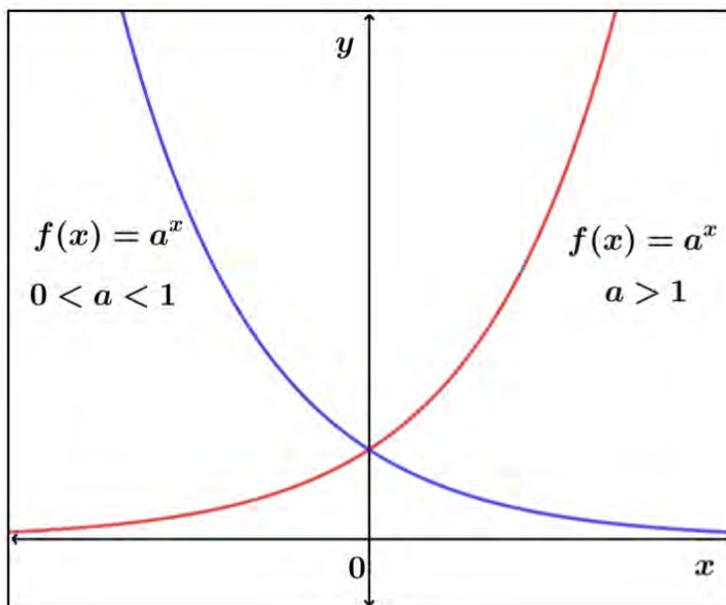
Podemos señalar también algunas características de la función exponencial que resultan muy importantes de ser consideradas para las representaciones gráficas de la misma y las aplicaciones en la resolución de problemas.

Definiendo  $f$  como  $f(x) = a^x$ , para todo  $x \in R$ , que cumple las propiedades anteriores, también cumple las siguientes propiedades:

- 4) La función  $f: R \rightarrow R^+$  definida por  $f(x) = a^x$ , es ilimitada superiormente, más precisamente, si  $a > 1$ , entonces  $a^x$  crece sin límites cuando  $x > 0$  es muy grande. Y si  $0 < a < 1$  entonces  $a^x$  se vuelve arbitrariamente grande cuando  $x < 0$  tiene un valor absoluto grande.
- 5) La función exponencial es continua  
En símbolo:  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$
- 6) La función exponencial  $f: R \rightarrow R^+, f(x) = a^x, a \neq 1$ , es sobreyectiva.  
(Lima, Pinto, Wagner y Morgado, 2000, p.180).

Estas precisiones nos permiten entender características importantes de la función exponencial que ayudan interpretar la gráfica y su comportamiento. Es el caso de la propiedad 4), que nos permite ver que la función  $f$  es creciente cuando  $a > 1$  y es decreciente cuando  $0 < a < 1$ , tal como se observa en la siguiente figura:

**Figura 1:** Crecimiento y decrecimiento de la función exponencial  $f(x)$



Fuente: Creación propia

Lo que vemos hasta aquí, es que las funciones exponenciales al igual que otras funciones importantes, resultan ser los modelos matemáticos más usados para resolver problemas sencillos, siendo importantes en la etapa universitaria por la aplicabilidad que tiene en diversas áreas científicas. Vemos un teorema adicionalmente que menciona:

**Teorema:** (Caracterización de la función exponencial). Sea  $f: R \rightarrow R^+$  una función monótona inyectiva (esto es, creciente o decreciente). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $f(nx) = f(x)^n$  para todo  $n \in Z$  y todo  $x \in R$ .
- 2)  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in R$ , donde  $a = f(1)$ .
- 3)  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ , para cualquier  $x, y \in R$ .

(Lima, Pinto, Wagner y Morgado, 2000, p.183).

Hay diversas formas en las que se puede enseñar la función exponencial y sus características. Sudera y Otero (2013), hacen referencia a una de ellas en la cual señalan que se puede presentar como una función continua cuyo factor de incremento entre  $x$  y  $x + h$  resulta ser independiente de  $x$ , es decir  $\frac{f(x+h)}{f(x)} = g(h)$ . Con esta propiedad, se resalta la particularidad que tiene la función exponencial de aumentar (o disminuir) su valor en un intervalo de tiempo, de manera proporcional a la cantidad con la que había comenzado. Establece que en general, si consideramos la siguiente, función  $f(x) = ka^x$  con  $x \in R$ , cuando  $x$  aumenta  $n$  unidades, la función aumenta (o disminuye) respecto del estado anterior, pero de manera proporcional. Esto se puede demostrar de la siguiente manera:

$$\frac{f(x+n) - f(x)}{f(x)} = \frac{k \cdot a^{x+n} - k \cdot a^x}{k \cdot a^x} = \frac{k \cdot a^x (a^n - 1)}{k \cdot a^x} = a^n - 1$$

Con esto se puede observar que el porcentaje de aumento (o disminución) en una función exponencial, se puede calcular mediante:  $(a^n - 1) \cdot 100\%$ , valor que no dependerá de la variable independiente  $x$ .

Vemos a continuación un ejemplo de cómo presentar un contexto en el cual es claramente identificable el uso del recurso de la función exponencial para modelar la situación. Supongamos una situación en el cual se tiene un modelo epidemiológico simplificado de un virus que se expande de la siguiente forma: Inicialmente había 3 sujetos infectados y, se sabe que por cada hora, pueden transmitir el virus a 5 nuevos contagiados. Esta situación la describiremos con la siguiente tabla con la cual, podemos confirmar cuál es el porcentaje de aumento en los contagios:

**Tabla 3**

*Valores y porcentajes de aumento en el modelo epidemiológico*

Horas Transcurridas	Valor de $f(t)$ (contagiados)	Porcentaje de aumento
0	$f(0) = 3$	3
1	$f(1) = (3) \cdot (5) = 15$	$15 = 3 + 12$ (12 es el 400% de 3)
2	$f(2) = (3) \cdot (5)^2 = 75$	$75 = 15 + 60$ (60 es el 400% de 15)
3	$f(3) = (3) \cdot (5)^3 = 375$	$375 = 75 + 300$ (300 es el 400% de 75)

Fuente: creación propia

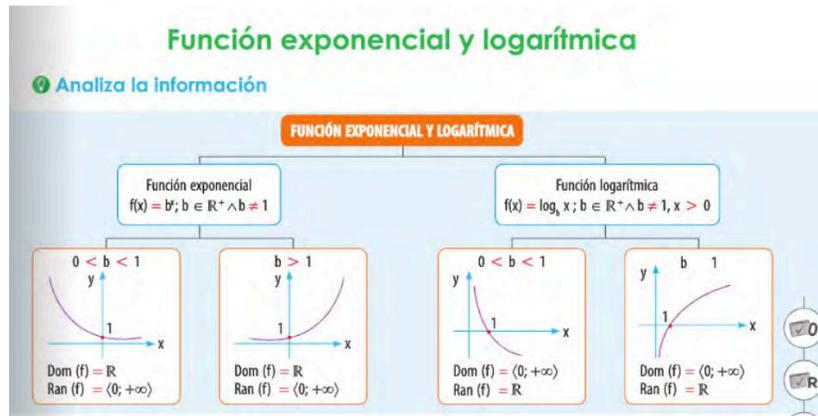
Como se observa en la tabla, por cada unidad de tiempo adicional, el incremento en la cantidad de contagiados es del 400% de la cantidad anterior, verificando que este incremento cumple con la fórmula señalada  $(a^n - 1).100\%$ , y en el ejemplo se da que como los incrementos se dan cada hora (es decir  $n = 1$ ), podemos verificar que el porcentaje de aumento está dado por  $(5^1 - 1).100\%$  que resulta justamente 400% de la cantidad anterior, con lo cual se observa que el aumento en la cantidad de infectados no depende del valor inicial (3 infectados) sino que resulta ser el 400% de la cantidad anterior.

Este hecho es muy interesante pues si bien es posible concluir y generalizar la situación del problema mediante la expresión algebraica  $f(t) = 3.(5)^t$ , para  $t \geq 0$ , al analizar las cantidades, se observa el patrón en los incrementos porcentuales, dando una comprensión del problema que estimula el interés por buscar más patrones que ayuden a usar el modelo para una adecuada solución de problemas solicitados. Es importante mencionar que el manejo de estas y otras propiedades, deben ser de dominio de los docentes en el desarrollo de la creación de problemas, aunque no se tendrán en cuenta para el desarrollo del taller. Al dominar el docente las propiedades, la creación de problemas podrá ser más adecuado y fluido según veremos en la aplicación del taller propuesto en la investigación.

### **2.1.2 Enseñanza de la Función exponencial**

En la secundaria los docentes trabajan con diferentes textos, los cuales en la actualidad priorizan el trabajo con cuaderno de actividades del alumno. A continuación, mostraremos algunas figuras con presentaciones de la función exponencial y algunos ejercicios que complementa dicha presentación. En la siguiente figura, podemos observar la presentación que se hace de manera sintetizada de las propiedades gráficas de la función exponencial en la editorial COREFO.

**Figura 2:** Información de la editorial COREFO sobre la función exponencial



*Fuente:* Libro de actividades matemáticas V, (p 207) Editorial COREFO

Como se puede observar, en este texto se hace una presentación de la regla de correspondencia y las características de la función exponencial junto con la función logarítmica. En este caso se muestra las características de la gráfica dependiendo del valor de la base y se indica el dominio y rango. En la parte de ejercicios de aplicación podemos ver en la siguiente figura el tipo de problemas que se presenta:

**Figura 3:** Ejercicios propuestos sobre función exponencial en COREFO

**Busca soluciones** Revisa la página 201 del Libro del área. Luego, desarrolla las actividades.

Resuelve los siguientes ejercicios de forma individual:

**Nivel 1**

1. Indica la relación de cada función con su inversa.

Función	Inversa
I. $\log_2 x$	a. $\log_2(x - 2)$
II. $2^x + 2$	b. $2^x$
III. $2^{x-2} - 2$	c. $\log_2(x + 2) + 2$

a. (I, b);(II, c);(III, a)      d. (I, c);(II, b);(III, a)  
 b. (I, a);(II, c);(III, b)      e. (I, b);(II, a);(III, c)  
 c. (I, a);(II, b);(III, c)

2. Si  $f: \{1; +\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida por  $f(x) = 1 + \log_2 10$  determina su rango:

a.  $\{1; 10\}$       d.  $\{1; +\infty\}$   
 b.  $(-\infty; 10) - \{1\}$       e.  $\{0; +\infty\}$   
 c.  $\{3; +\infty\}$

Resuelve los siguientes ejercicios de forma grupal:

**Nivel 2**

1. Determina la gráfica de la función:  $f(x) = 5^{k+x}$

a.

b.

c.

d.

e.

2. Indica el conjunto solución de la inequación:  $2^{k+4} (2^{k-4} - 1) < 2^k - 16$ .

a.  $\{4; 64\}$       c.  $\{0; 4\}$       e.  $\{1; 16\}$   
 b.  $\{0; 16\}$       d.  $\{2; 8\}$

*Fuente:* Libro de actividades matemáticas V, (p 208) Editorial COREFO

Como podemos observar, el tipo de ejercicios presentados por este texto, desde el inicio asocia el trabajo de la función exponencial con la función logarítmica, los cuales, asociados por niveles, llevan al estudiante a analizar las características de la función como son el dominio y rango junto con las características de las gráficas.

En la siguiente figura podemos observar el enfoque que le da otro texto escolar a los problemas que plantea al trabajar la función exponencial.

**Figura 4:** Ejercicios propuestos en Editorial Santillana

### Actividades

Identifica funciones exponenciales.

**1** Determina cuáles de las siguientes funciones son exponenciales. Justifica tu respuesta.

a. $y = x^3$	f. $y = 3^x$
b. $y = 2,5^x$	g. $y = 5x + 3$
c. $y = 0,4x$	h. $y = 5^{-x}$
d. $y = 2x^4$	i. $y = 0,2^{x+1}$
e. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	j. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Analiza las características de funciones exponenciales.

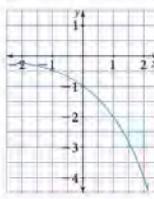
**2** Dadas las funciones exponenciales  $y = 3^x$  y  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , contesta las siguientes preguntas para cada función.

- a. ¿Qué le sucede a  $y$  cuando  $x$  aumenta?
- b. ¿El valor de  $y$  puede ser 0? Explica.
- c. ¿El valor de  $y$  puede ser negativo? Explica.

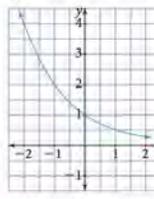
Determina el modelo de la función y la tabla de datos a partir de un gráfico.

**5** Para cada gráfica, define la tabla de valores y la ecuación de la función exponencial que la representa.

a.



b.



Resuelve problemas relacionados con funciones exponenciales.

**6** La pérdida de madera de un bosque viene dada por la función  $y = 100(0,5^{\frac{x}{5}})$  donde  $x$  son los años transcurridos y  $y$  las toneladas de madera.

- a. Traza la gráfica de la función  $y = 100(0,5^{\frac{x}{5}})$
- b. Determina las toneladas de madera perdidas al cabo de 10 años.
- c. Demuestra que la función es  $h(x) = 400(0,5^{\frac{x}{5}})$  igual a cuatro veces  $y = 100(0,5^{\frac{x}{5}})$ .

Fuente: Material de trabajo para Matemática 5. Editorial Santillana

Observamos que el énfasis de algunos ejercicios aplicativos en este texto está orientado a identificar reglas de correspondencia que describan funciones exponenciales, comparar y analizar funciones a partir del gráfico o la regla de correspondencia y problemas de aplicación guiados paso a paso en su desarrollo. Podemos deducir con estos ejercicios, que se espera que, al resolver ejercicios, se identifiquen funciones y se analice el comportamiento de las variables, elaborando aplicaciones que involucren el uso de gráficas.

Otro de los textos que revisamos para identificar algunas de las características de los textos usados en la enseñanza de la matemática en la secundaria, fue el cuaderno de trabajo empleado para el quinto grado de Educación Secundaria publicado por el Ministerio de Educación. En este cuaderno de trabajo, se presentan problemas de aplicación, y no hemos encontrado ejercicios y problemas que explícitamente emplean la función exponencial. Lo que si encontramos son problemas de interés compuesto como el que se presenta en la siguiente figura:

**Figura 5:** Problema sobre tasa de interés compuesto

Miguel ha recibido una bonificación de S/8000 por sus 10 años de trabajo en una empresa. Decide ahorrar este dinero en un banco durante un año. Tiene tres opciones: el Banco del Sur, a una tasa del 15 % anual capitalizable semestralmente; el Banco del Norte, a una tasa del 14 % anual capitalizable mensualmente, y el Banco del Centro, a una tasa de interés compuesto del 15,08 %. Sabe que para decidir puede efectuar cálculos usando la fórmula de interés compuesto o la tasa anual equivalente (TAE). Ayúdate con una calculadora.

$$TAE = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{r}{k \cdot 100} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]$$

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

**1.** El banco que proporciona el mayor monto es:

a) El Banco del Centro  
b) El Banco del Sur  
c) El Banco del Norte  
d) No se puede determinar

**2.** El banco que ofrece la mejor TAE es:

a) El Banco del Sur  
b) El Banco del Norte  
c) El Banco del Centro  
d) Cualquiera de los bancos



Fuente: Resolvemos problemas 5, secundaria. MINEDU

Si bien este problema no emplea explícitamente la función exponencial como modelo de trabajo, presenta una situación concreta que requiere ser abordado con el uso de exponenciales, analizando situaciones comparativas entre bancos, empleando la tasa anual de equivalencia usando la fórmula del interés compuesto. No hemos encontrado en este material, otra mención que se haga al uso de la función exponencial, a pesar de que el tema si está contenido en el programa oficial. No obstante, tomamos este ejemplo como una aplicación implícita,

considerando además que es el tema de aplicación que usaremos en el tema a trabajar en la creación de problemas.

La enseñanza de la función exponencial a nivel secundario o incluso en los primeros cursos de pregrado implican detallar algunas definiciones y características que pueden ser trabajados de manera sintética como presentamos a continuación. Estos conceptos y descripciones del objeto matemático son tomados del autor Stewart (2012) de su curso de pre cálculo el cual es actualmente usado en cursos de secundaria y cursos básicos de universidad

La definición del objeto matemático lo podemos ver en la siguiente figura donde detalla las características de la fórmula matemática y sus elementos.

La enseñanza de la función exponencial a nivel secundario o incluso en los primeros cursos de pregrado, implican facilitar a los estudiantes mediante algunas estrategias didácticas adecuadas que permitan la indagación y la adecuada comprensión, ciertas definiciones y características que pueden ser trabajados de manera sintética como presentamos a continuación. Estos conceptos y descripciones del objeto matemático son tomados del autor Stewart (2012) de su curso de pre cálculo el cual es actualmente usado en cursos de secundaria y cursos básicos de universidad

La definición del objeto matemático lo podemos ver en la siguiente figura donde detalla las características de la fórmula matemática y sus elementos.

**Figura 6:** Definición de la función exponencial

**FUNCIONES EXPONENCIALES**

La **función exponencial con base  $a$**  está definida para todos los números reales  $x$  por

$$f(x) = a^x$$

donde  $a > 0$  y  $a \neq 1$ .

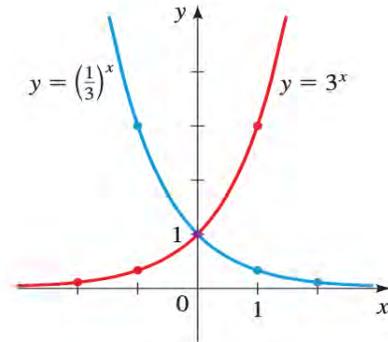
*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 302). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

La definición está acompañada de una representación gráfica en el plano cartesiano, tomando como ejemplo las funciones  $f(x) = 3^x$  y la función  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ . Un punto de partida intuitivo es elaborar tabulaciones y mediante valores adecuadamente seleccionados, ubicar los

puntos en el plano cartesiano y trazar a partir de ellos la curva de la gráfica. La figura 3, muestra un ejemplo de este proceso para dos funciones exponenciales.

**Figura 7: Gráfica de dos funciones exponenciales**

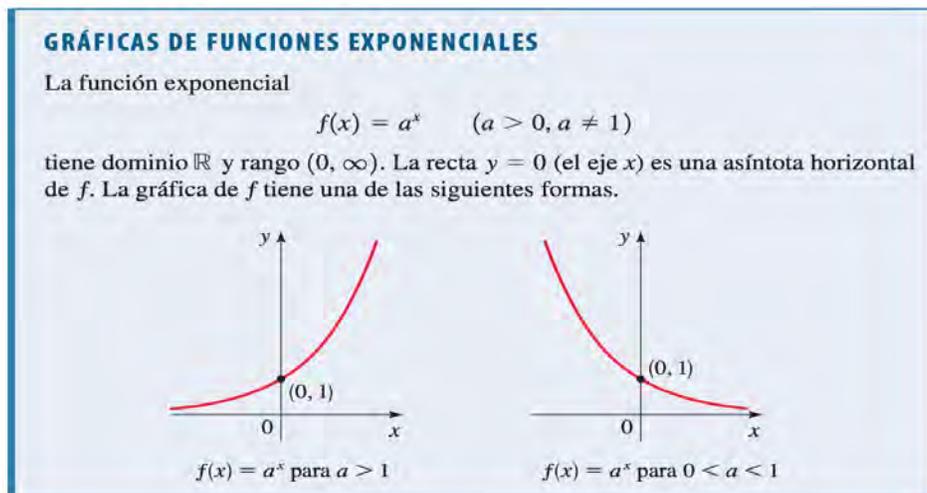
$x$	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 303). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

En este ejemplo ya se puede advertir la particularidad de la monotonía (crecimiento o decrecimiento de la función), dependiendo del valor de la base. Adicionalmente es posible identificar como dominio de la función exponencial al conjunto de todos los números reales como rango, a los reales positivos. Así mismo, el identificar otro elemento importante como es la asíntota horizontal, la cual en este caso está dado por el eje horizontal. La figura 4 resume de manera general los detalles mencionados.

**Figura 8: Gráficas mostrando características creciente y decreciente.**



*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 304). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Como mencionamos en la definición de la función exponencial, un caso particular es la función donde la base es el número  $e$ , es decir el valor de la constante de Euler. Así observamos esta particular definición hecha por los autores:

**Figura 9:** Definición de la función exponencial natural

**LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL**

La **función exponencial natural** es la función exponencial

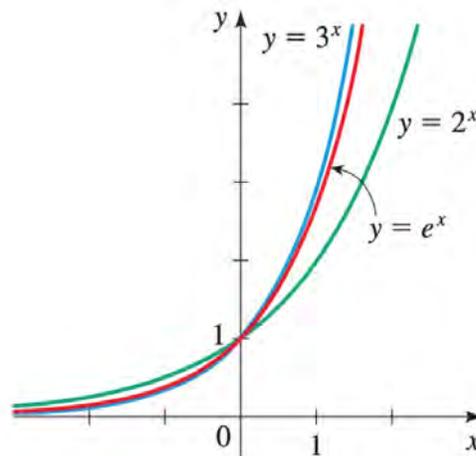
$$f(x) = e^x$$

Con base  $e$ . Es frecuente llamarla *la* función exponencial.

*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 310). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Otro aspecto importante por analizar es que siendo que  $2 < e < 3$ , observamos que la gráfica de la función  $f(x) = e^x$ , estará entre las gráficas de  $f(x) = 2^x$  y  $f(x) = 3^x$ , como se puede ver en la siguiente figura:

**Figura 10:** Comparación de la gráfica de funciones exponenciales



*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 310). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Un tema importante en la enseñanza de la función exponencial y que nos interesa mucho en la presente investigación, son los escenarios en los cuales el objeto matemático puede ser aplicado. Así por ejemplo podemos identificar algunas aplicaciones concretas de la función exponencial pudiendo trabajar temas como:

- Análisis del crecimiento de las poblaciones
- Descripción del aumento o disminución de bacterias
- Crecimiento o decaimiento radioactivo
- Cálculo del interés compuesto

Para nuestra investigación, hemos considerado el caso del escenario en el que se calcula el interés compuesto que produce un capital ( $P$ ) que es depositado en una entidad financiera a una tasa de interés anual ( $r$ ) por un tiempo determinado ( $t$  años), siendo que el interés se capitaliza  $n$  veces en el año. Entonces se afirma que el monto  $A(t)$  producido después de  $t$  años, está dado por la fórmula exponencial. Mostrada en la siguiente figura.

**Figura 11:** Fórmula del interés compuesto

**INTERÉS COMPUESTO**

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$A(t) = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

donde

- $A(t)$  = cantidad después de  $t$  años
- $P$  = principal
- $r$  = tasa de interés por año
- $n$  = número de veces que el interés se capitaliza por año
- $t$  = número de años

*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 306). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Un caso particular y muy ilustrativo para el estudio de los modelos que usan funciones exponenciales se da cuando se produce una capitalización continua, es decir, cuando la cantidad de periodos al año en que se pagan los intereses aumenta de manera muy grande, es decir: Para un capital  $P$ , que se deposita por  $t$  años a una tasa de interés de  $r$  % y se capitaliza  $n$  veces al año, tenemos:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \\
 &= P \left[ \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt}, \quad (\text{haciendo que } m = n/r)
 \end{aligned}$$

$$= P \left[ \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{rt}$$

En este caso, hablamos de interés continuo cuando el valor de  $m$  crece y se hace muy grande, con lo cual se tiene:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$$

por lo que concluimos que el monto final el cual se capitaliza “a cada instante”, se puede calcular mediante la expresión:  $A(t) = Pe^{rt}$ , lo que se resume en la siguiente figura como lo menciona el autor:

**Figura 12:** *Fórmula del interés continuo*

**INTERÉS CAPITALIZADO CONTINUAMENTE**

El **interés capitalizado continuamente** se calcula con la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Donde  $A(t)$  = cantidad después de  $t$  años  
 $P$  = principal  
 $r$  = tasa de interés por año  
 $t$  = número de años

*Fuente:* Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 312). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Como hemos señalado, hay diversas aplicaciones del uso de la función exponencial, una de las cuales como hemos visto es el uso de este modelo matemático para el cálculo de interés. Estas aplicaciones varían en nivel de complejidad dependiendo de si se trata del cálculo de un interés capitalizable anualmente o en periodos más frecuentes, incluso en el caso de la capitalización continua. Esto representa un claro ejemplo de abordar una situación concreta empleando la teoría matemática para general un modelo que permita un adecuado abordaje del tema. Es en base a esto, que estaremos haciendo uso de esta gradual complejidad del uso de los conceptos para plantear los episodios, problema pre y problema pos compartidos en el taller de aplicación, encontrando también en los productos elaborados por los docentes en el momento de aplicar la estrategia de creación de problemas, el uso de estas diferentes características de los entornos matemáticos descritos

## **2.2 El enfoque de creación de problemas**

Diversas investigaciones como las mencionadas en los antecedentes, han trabajado la aplicación de la creación de problemas como estrategia didáctica. Rodríguez (2018), desarrollo un taller con docentes de secundaria empleando esta estrategia como medio para comprender la relación entre las ecuaciones y las funciones cuadráticas logrando verificar la mejora en la comprensión. Esta propuesta viene siendo desarrollada por diversos autores considerando algunos aspectos que revisaremos a continuación.

### **2.2.1 Aspectos teóricos sobre la Creación de Problemas**

En esta parte, haremos una descripción de algunos elementos teóricos relacionados con la creación de problemas matemáticos, y cómo éstos pueden potenciar la práctica de la resolución de problemas, permitiendo un desarrollo concreto de las habilidades que emplean los estudiantes y una adecuada comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. En esta revisión, hemos encontrado que es importante que los estudiantes tengan experiencias que les permitan reconocer los problemas que resuelven, entendiendo su complejidad y teniendo la oportunidad de formular sus propios problemas, es decir, experimentando con la creación de problemas mientras aprenden matemáticas.

Bonotto, (como se citó en Malaspina, 2014), amplía esta idea y enfatiza la importancia de la creación de problemas:

El proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática que, adecuadamente implementada en actividades de clase, tiene el potencial de llegar más allá de las limitaciones de los problemas verbales, por lo menos como son típicamente tratados. Impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental. (p. 53)

Es por esto que la tarea de crear problemas como estrategia de enseñanza, no debe ser entendida como una tarea que solo pueden desarrollar profesores expertos y con mucha experiencia. Es por ello que la creación de problemas puede ser considerada también como una manera de desarrollar una formación continua de profesores, pues en el ejercicio de desarrollar tareas de creación, se actualizan los conocimientos de los objetos matemáticos involucrados, y se potencia las habilidades de creatividad y resolución de problemas. Es en este sentido que, el crear problemas debe ser visto como una tarea cotidiana del trabajo docente, y una tarea que

debe ser desarrollada con los estudiantes, a fin de estimular y desafiar sus conocimientos, animándolos a aprender no sólo resolviendo problemas sino aprendiendo “ir más allá” (Malaspina y Vallejo, 2014).

Para poder entender mejor que es la creación de problemas, vamos a comentar algunos aspectos teóricos planteado por Malaspina (2013), quien afirma en relación con lo que es un problema matemático:

La creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema) (Malaspina, 2013, p. 131).

Cuando un docente y un alumno crean juntos un problema matemático como parte del trabajo del aula, ponen en funcionamiento una serie de procesos mentales que incluyen la comprensión, la memoria, la contextualización y la creatividad, los cuales se combinan en una serie de tareas individuales y grupales logrando una mejor comprensión del concepto involucrado en el contexto del problema. Para que un estudiante resuelva un problema, debe entenderlo primero, pero, para lograr crear un problema, no solo debe entender el problema, sino que, haciendo uso de su pensamiento lógico, ideas intuitivas, sus experiencias y conocimientos previos sobre un concepto y contexto dado, puede ser capaz de estructurar cierta información organizando datos e ideas propias, generando requerimientos que puede entender con más claridad que solo intentando resolver un problema.

Siguiendo a Malaspina y Vallejo (2014), podemos mencionar que, al crear un problema, este proceso se puede hacer de dos maneras:

*Variación de un problema dado:* proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema dado. Ejemplos muy interesantes de éstos son los que resultan de plantear generalizaciones a partir de un problema dado.

*Elaboración de un problema:* proceso según el cual se construye un nuevo problema, a partir de una situación (dada, o configurada por el autor)

- cuyo contexto se origina en tal situación
- cuya información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación
- y cuyo requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, que están implícitas en el enunciado, dentro de un cierto entorno matemático. (p. 14)

Para Malaspina (2013), la creación de problemas toma en consideración cuatro elementos importantes y que caracterizan a un problema matemático: información, requerimiento, contexto y entorno matemático, cada uno de los cuales los podemos entender de la siguiente manera:

- (1) *Información*: Se trata de los datos cuantitativos o diferentes relaciones que se presentan en el enunciado del problema.
- (2) *Requerimiento*: Es básicamente lo que se está pidiendo encontrar o analizar en el problema, lo cual puede incluir datos cuantitativos, cualitativos, gráficas o demostraciones.
- (3) *Contexto*: Se refiere en este caso a la situación real o ficticia que involucra el problema y es el que le da un cierto sentido y conexión con la realidad, aunque también puede ser un contexto matemático.
- (4) *Entorno matemático*: Aquí se refiere a los conceptos matemáticos que pueden intervenir en la resolución del problema. Este entorno puede ser variado especialmente porque un mismo problema puede abordarse desde diferentes estrategias y con diferentes objetos, lo que hace que una resolución de un problema no sea única.

Por ejemplo, podríamos mencionar un problema que regularmente es trabajado en el nivel secundario y que puede ser modelado mediante exponenciales o una función exponencial. Un maestro de escuela describe el siguiente problema a sus estudiantes:

*“Un inversionista deposita \$ 20 000 en una cuenta bancaria que le paga un interés del 6 % anual, capitalizable mensualmente. Hallar cuál será el monto de dicha inversión después de 10 meses y cuál es el tiempo que debe mantener su inversión para que dicho monto supere los \$ 25 000”.*

Esta situación problemática facilita una *Información*, (Un inversionista depositando dinero en un determinado momento, con la tasa del 6% y por 10 meses), dando explícitamente el *requerimiento*, el cual, en este caso, es buscar el monto después de los 10 meses. Es fácil identificar que se trata de una situación de *contexto* ficticio, pues las verdaderas tasas que ofrecen los bancos pueden ser distintas; sin embargo, la información le da sentido dentro de un contexto de inversión de dinero. Finalmente, podemos ver que el *entorno matemático* involucrado se refiere a la realización de cálculos directos, pero también se refiere al uso de las funciones exponenciales y probablemente las ecuaciones exponenciales, pudiendo emplear un modelo exponencial para este caso. Resumimos la información en la siguiente tabla:

**Tabla 4***Identificación de los elementos del problema*

Información	Requerimiento	Contexto	Entorno Matemático
<b>Un inversionista deposita un capital de \$ 20000 al 6% capitalizable mensualmente por 10 meses</b>	Calcular el monto luego de 10 meses y además hallar el tiempo para que la inversión supere los \$ 25000	Un contexto ficticio simulando las condiciones de inversión en cuenta bancaria	Desarrollo de cálculo, uso de propiedades y modelos exponenciales, ecuaciones exponenciales

*Fuente: creación propia*

### 2.2.2 Estrategia de creación de problemas: Episodio, Problema pre y Problema pos

En los últimos años, se han desarrollado muchas investigaciones en torno a la creación de problemas. Estas han estado orientadas a diversos objetos matemáticos y con fines didácticos, mencionando claramente la importancia que tiene este proceso para el desarrollo de las competencias docentes (Malaspina, Mallart y Font, 2015)

Para nuestro trabajo, desarrollaremos la estrategia Episodio, Problema pre y problema pos (EPP) diseñada por Malaspina (2012), organizando un taller de trabajo con diversas actividades para que los docentes puedan entender la estrategia y ser capaces de generar problemas sobre la función exponencial.

El procedimiento por desarrollar en esta estrategia consiste en una serie de pasos específicos que desarrollamos en un taller de trabajo buscando que los participantes sean capaces de crear sus propios problemas. Estos pasos son los siguientes:

- 1) Presentamos a los participantes del taller un “Episodio de clase” es decir un relato en donde un profesor plantea un problema que además contiene preguntas y comentarios de los estudiantes al intentar entender y resolver el problema.
- 2) Se pide a los participantes que tomen un tiempo para resolver el problema propuesto en el episodio de manera individual, y que luego de lograrlo, construyan un “Problema Pre”, es decir, un problema similar al propuesto, pero considerando que debe facilitar a los estudiantes el comprender lo pedido en el problema del episodio. La consigna y redacción deben girar en torno al mismo tema, pero con procesos más simples.
- 3) Luego de culminar las creaciones, los participantes se reúnen en grupos de 3 ó 4 para comparar y reflexionar sobre sus problemas pre, buscando como grupo elaborar un solo

producto que permita con claridad aproximar a los estudiantes a la comprensión del problema.

- 4) Se hace una socialización de los problemas pre creados, aprovechando para dar recomendaciones y mejorar el problema pre.
- 5) Se retorna nuevamente al trabajo en grupos pequeños para desarrollar un “Problema Pos”, el cual es un problema más retador y que debe estar inspirado en problema presentado inicialmente en el episodio.
- 6) Esta última parte se vuelve a socializar en plenario, buscando siempre hacerle mejoras al problema pos.

La siguiente figura, muestra un esquema de la estrategia EPP, en la cual se muestra cómo se debe ir presentando una dificultad gradual desde el episodio de clase, hasta el problema pos.

**Figura 13: Esquema de la estrategia EPP**



*Fuente: elaboración propia*

En este esquema podemos ver la secuencia de trabajo y descripción presentada anteriormente de cada uno de los problemas empleados como parte de esta estrategia. A continuación, presentaremos un ejemplo de Episodio, problema pre y problema pos, presentado por Malaspina (2014):

### **Episodio**

En el grupo de estudios de matemáticas, el profesor propone el siguiente problema a los alumnos:

En la tienda ALFA, la primera semana de julio ofrecían todos sus productos sin descuento; la segunda semana, con un descuento del 20%; y la tercera semana, con un descuento adicional del 15%, lo cual anunciaron como GRAN DESCUENTO DEL 20% + 15% EN TODOS NUESTROS PRODUCTOS.

Examinar si es verdad que la tercera semana de julio la tienda ALFA ofreció sus productos con el 35% de descuento, respecto a los precios de la primera semana.

Después de unos minutos:

- La mayoría dice que sí, que es verdad.
- Juan y Carla dicen que no, que el descuento de la tercera semana fue menos del 35%
- María dice que el descuento de la tercera semana fue del 68%

### **Problema pre**

Rosa compra una blusa que tiene precio de 100 nuevos soles, pero con un descuento del 20% por remate de saldos y un descuento adicional del 10% por tener tarjeta de la tienda.

- ¿Cuánto paga María por la blusa si la compra en la segunda semana?
- El precio que paga en la segunda semana, ¿qué porcentaje es del precio de la blusa sin descuentos?
- ¿Cuál es el porcentaje total de descuento de la blusa en la segunda semana?

### **Problema pos**

En una tienda, si se compra con una tarjeta para hacer el pago luego de 30 días de efectuada la compra, el precio se recarga en un 10% y si el pago es entre los días 31 y 35 posteriores al día de la compra, se hace un recargo adicional de 5%. Si Juan hizo una compra con este sistema el día 20 de agosto y pagó el día 23 de septiembre ¿qué porcentaje de recargo pagó? (p.19)

Como podemos observar, las diferentes variaciones ya sea de información, requerimiento o incluso el contexto, permite crear un nuevo problema con los menores o mayores demandas

cognitivas y que definen el proceso de la estrategia contribuyendo a desarrollar el pensamiento matemático de quienes los crean, logrando ampliar su horizonte matemático.

En el caso del problema pre, lo consideramos de esta naturaleza porque los requerimientos han sido modificados a preguntas más simples, guiándolo a hallar los descuentos sucesivos y preguntando solo por el descuento total, sin requerir que justifique una respuesta. Esta modificación en el requerimiento guía paso a paso al estudiante para dar respuestas cortas y directas y aproximarse a un análisis concreto de las rebajas porcentuales. Esto le permitirá ver el problema del episodio con mayor claridad para examinarlo y redactar ciertas conclusiones que le permitan responder con mayor facilidad al requerimiento del episodio. Para nuestra investigación trabajaremos con una situación similar en cuanto al esquema y también en cuanto a la particularidad del problema pre y del problema pos de variar la complejidad del problema.

En el caso del problema pos, también es claro que se ha incrementado el nivel de complejidad generando una mayor demanda cognitiva para lograr el desarrollo del problema. En el episodio, se pedía examinar una combinación de descuentos, los cuales pueden ser analizados con los cálculos correspondientes; sin embargo, en el problema pos, se incluye la opción del uso de la tarjeta y los pagos diferidos en dos posibilidades. En este nuevo esquema de preguntas, al encontrar diferentes alternativas que pueden darse y distintos recargos porcentuales, esta variación llevará al estudiante a abordar la solución del problema no solo observando los cálculos de los incrementos, sino también considerando los dos posibles escenarios de pago con las condiciones en los que se aplicarían dichos incrementos.

### **2.2.3 Ventajas del uso de la creación de problemas**

Martínez (2015), menciona en su investigación, que una de las grandes ventajas que se logra con la aplicación de la estrategia de creación de problemas, es permitir que los profesores estimulen a sus estudiantes con problemas contextualizados, logrando que los problemas que resuelven respondan a sus capacidades e intereses. Adicionalmente, el trabajar problemas creados con los estudiantes ayuda a adecuar los contenidos a los intereses del grupo, permitiendo también una evaluación personalizada, pudiendo observar con mayor objetividad los logros y fortalezas de los estudiantes.

Malaspina (2013), menciona también algunas ventajas que son que ayudan a entender el valor agregado de la aplicación de la propuesta para el trabajo en el aula:

- a. La posibilidad de proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alumnos y a los contextos en los que viven. Esto facilita la motivación en el estudiante.
- b. El poder crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante. Esto permite manejar la variación en la gradualidad de los problemas que se espera crear.
- c. El proponer problemas que respondan a las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos. Esto permitirá aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas.
- d. La posibilidad de proponer problemas y actividades que respondan a las orientaciones generales que suelen darse en los diseños curriculares y documentos complementarios desde los organismos centralizados de educación. Esto permite la adaptación a los programas curriculares.
- e. El uso de la estrategia permite llenar el vacío sobre la resolución de problemas que hay en la mayoría de los textos de matemáticas, sobre todo en los de nivel escolar.
- f. Se puede tener problemas adecuados para aplicar las teorías sobre educación matemática fuertemente apoyadas en la resolución de problemas.
- g. Se puede mejorar la calidad de las evaluaciones.
- h. Se logra consolidar la formación matemática de los profesores. (p.10)

### **Capítulo III: Aspectos metodológicos considerados en la investigación y diseño del taller**

En el presente capítulo, desarrollaremos la descripción de la metodología que usaremos en la presente investigación, la cual es de corte cualitativo, así como una descripción de los sujetos de investigación y las actividades a desarrollar.

#### **3.1 Metodología y procedimientos**

Al trabajar una investigación con un enfoque cualitativo, nuestro objetivo se centra en la comprensión de la complejidad de la experiencia de aprendizaje a partir de las acciones e interacciones de los actores o participantes de nuestra investigación.

Hernández, Fernández y Baptista (2014), nos señalan que este enfoque centra el trabajo en la recolección y análisis de los datos de la investigación, con el propósito de responder a las preguntas planteadas. Esta indagación y análisis se da de modo dinámico, es decir entre los hechos observados y su interpretación donde puede ser que las secuencias varíen.

En este sentido, este tipo de investigación nos orienta a tratar de captar y comprender lo que las personas dicen o hacen, pudiendo construir con la propuesta didáctica de trabajo. Como mencionan Maykut y Morehouse (1994), el fin de este tipo de metodología es desarrollar construcciones que nos guíen en la comprensión de los significados y las acciones, permitiendo una ordenada y clara descripción e interpretación de las acciones educativas. Como estamos hablando de la creación y resolución de problemas, nos interesará estudiar los significados y construcciones de conceptos manejados en el esfuerzo de los estudiantes y los docentes. En una investigación cualitativa, es importante entrar en el mundo de la persona investigada, es decir en el mundo cognitivo de los participantes, describiendo la interacción que tiene con los otros y consigo mismo y los conceptos que trae para dar sentido al trabajo realizado. Este enfoque metodológico, propone en contacto directo con los participantes, buscando por un lado un estudio global de la realidad (contexto, experiencia, relaciones, conceptos, etc.), sin fragmentarla ni dividir el estudio en variables aisladas, pero también buscando un estudio inductivo de la situación, a fin de construir las interpretaciones con la información que vamos obteniendo en la investigación y no basándose en teorías o hipótesis.

Como señala también Latorre (1996), un proceso de investigación cualitativa responde a un trabajo continuo, es decir, responde al diseño y desarrollo de distintas fases que van a configurar el trabajo y cuyos resultados progresivos en la experiencia misma, permitirán una continua retroacción, es decir que las descripciones e interpretaciones obtenidas en cada una de

las fases servirán como información de base e interpretación de las otras. Este es el motivo por el cual este tipo de metodología debe ser flexible a los cambios y posibles redefiniciones que podamos dar. Esta información la podemos ilustrar en la siguiente figura:

**Figura 14:** Fases de la investigación cualitativa



Fuente: Creación propia

Para el desarrollo de nuestra investigación, adaptaremos cada una de las fases mencionadas empleando los diferentes momentos de aplicación e intervención mostrados a continuación en la tabla 5.

**Tabla 5**

*Actividades por desarrollar en cada fase de la investigación*

Fase Exploratoria	Fase de Planificación	Entrada al escenario	Recojo y análisis de información	Salida del escenario	Elaboración del informe
Revisión de bibliografía	Elaboración del Marco Teórico	Convocatoria de participantes	Aplicación de la prueba diagnóstica	Agradecimiento a los participantes	Consolidación de resultados de pruebas
Identificación de Antecedentes	Diseño de la propuesta	Explicación del trabajo y la propuesta	Elaboración de productos del taller	Entrevistas finales para completar información	Elaboración de conclusiones y sugerencia
Diseño de la propuesta	Preparación del taller y materiales	Desarrollo del taller	Aplicación de la prueba de salida	Aplicación de encuesta final	

Fuente: Creación propia

Janesick (1994, p.212) menciona varias características que corresponden a un diseño metodológico cualitativo, de los cuales destaco 5 de ellos que son evidentes en el trabajo de investigación que realizamos:

1. El trabajo es contextualizado, por lo que la investigación toma en cuenta las relaciones e interacciones de los participantes considerando aspectos importantes del sistema y la cultura a la que pertenecen.
2. Se enfatiza un trabajo cara a cara, ya que como mencionamos, la información se levanta directamente en las experiencias, y es de suma importancia el contacto directo que permita una mejor observación, descripción e interpretación de la experiencia.
3. Se centra en comprender la situación dentro de la dinámica de trabajo y situación social, no buscando explicaciones en teorías ni realizar predicciones, solo una interpretación concreta, clara y completa.
4. Se requiere de la destreza por parte del investigador para observar y entrevistar, ya que su desempeño en la actividad permitirá el levantamiento objetivo y completo de la información que se va a emplear.
5. La investigación exige un continuo análisis de la información que se está recogiendo y empleando para las descripciones e interpretaciones del trabajo.

El desarrollo de nuestra investigación seguirá la propuesta de Latorre (1996), quien plantea que el proceso de investigación se desarrolla considerando 6 fases, siendo las principales el recojo y la organización de la información para el posterior informe e interpretaciones correspondientes

En la siguiente tabla, mostramos el resumen del proceso de investigación cualitativa donde presentamos cada una de las fases que describiremos a continuación

**Tabla 6**

*Proceso de investigación cualitativa*

<b>Fase Exploratoria</b>	<b>Fase de Planificación</b>	<b>Entrada al escenario</b>	<b>Recojo y análisis de información</b>	<b>Salida del escenario</b>	<b>Elaboración del informe</b>
Identificación del problema	Selección del escenario de investigación	Negociación del acceso	Fijar las estrategias de recolección	Finalización de la recopilación de la información	Establecer el tipo de informe
Elaboración de preguntas de investigación	Selección de la estrategia	Selección de los participantes y monitoreo del investigador	Usar técnicas de análisis	Negociación de la retirada	Elaboración del informe
Revisión de documentos	Elaboración de documentos	seguimiento del investigador	Garantizar el rigor de los análisis	Análisis intensivo de la información	
Elección de una perspectiva teórica		Elección de una muestra intencional			

*Fuente: Adaptada de Latorre (1996, p. 206)*

### **3.1.1 Fase exploratoria**

En esta fase indagamos los aspectos relacionados a la función exponencial y a la propuesta didáctica de creación de problemas. Inicialmente desarrollamos una revisión bibliográfica y exploración sobre los antecedentes relacionados a las diferentes investigaciones sobre la propuesta de creación de problemas y el objeto matemático función exponencial. Encontramos diversas investigaciones sobre ambos aspectos lo cual hemos señalado en los antecedentes, lo que resulta un adecuado sustento para justificar nuestra investigación, así como el poder justificar la relevancia de aplicar la creación de problemas en el estudio de las funciones exponenciales. Esto nos permite en esta fase orientar las primeras ideas que nos ayudarán a dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿De qué manera la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria? El trabajo de las sucesivas fases ayudará a dar respuesta a esta pregunta, para lo cual trabajaremos en un marco teórico adecuado que sustente las acciones.

### **3.1.2 Fase de planificación**

En esta fase, nos ocupamos de describir la forma de aplicación de la propuesta a través del taller de creación de problemas desarrollado, de la descripción de la muestra de docentes que fueron convocados para la aplicación y con quienes se desarrolla el análisis de resultados, del diseño de la estructura de los talleres, incluyendo explicaciones de la propuesta y ejemplos de la estrategia EPP, del diseño de la prueba diagnóstica, tanto en la prueba de entrada como de salida seleccionando los conceptos y tareas a incluir en las preguntas, del diseño de actividades a desarrollar para el trabajo en el taller y el desarrollo de los productos de trabajo, y finalmente de la elaboración de instrumentos de recojo de información incluyendo formatos de fichas y rúbricas.

### **Forma de Aplicación**

Dadas las actuales circunstancias de pandemia y educación virtual a distancia, que aún se vienen desarrollando en nuestro medio, para nuestra investigación desarrollaremos conexiones virtuales con los docentes participantes del taller quienes son convocados con anticipación para garantizar la asistencia y participación en las dos fechas de los talleres. Usaremos la plataforma Zoom, con la cual están muy familiarizados todos los actuales docentes en ejercicio y nos permitirá llegar a diferentes participantes en diferentes lugares. Incluiremos para el trabajo un drive compartido donde se facilitará los documentos de trabajo como las fichas

y evaluaciones diagnósticas y donde los docentes entregarán sus fichas de trabajo individuales y grupales. Además, se diseñará un Site con la información y accesos rápidos que podrán usar los docentes para acceder a los links de acceso, a las fichas de trabajo y al formulario de cierre del taller.

### **Descripción de la muestra**

La muestra de docentes participantes de esta investigación está conformada por docentes en ejercicio y que dictan clases de matemáticas en toda la secundaria. Se trata de docentes invitados a participar voluntariamente quienes firmaron el consentimiento para uso de productos realizados. Inicialmente se convocó a 15 docentes, asistiendo un total de 14 en la primera sesión y 13 en la segunda. Con los 13 restantes, se eligieron 9 trabajos de quienes completaron adecuadamente todas las actividades y evaluaciones diagnósticas. Los docentes indicaron estar actualmente enseñando en educación secundaria y dos de ellos mencionaron tener experiencia en educación superior. Todos mencionaron estar dictando clases en el nivel secundario y 8 de ellos lo hacen en 5to de secundaria, que es el grado en donde se emplea la función exponencial como uno de los contenidos a trabajar con sus estudiantes.

Los docentes manifiestan tener más de 10 años de experiencia enseñando, mencionando 2 de ellos tener más de 20 años enseñando. Algunos de los docentes tiene experiencia adicionalmente en la enseñanza de nivel superior dictando cursos en el nivel de pregrado y otros en el dictado de cursos en el programa del Bachillerato Internacional, quienes desarrollan además del dictado de clases, actividades de indagación y exploración para la presentación de sus trabajos de evaluación interna, lo que implica un la elaboración de un trabajo de investigación, algunos de los cuales emplean modelos matemáticos aplicados a situaciones reales, entre las cuales está el uso de las funciones exponenciales.

### **Diseño de la estructura y las actividades del taller**

El taller se realizará en dos sesiones de trabajo en las cuales se presentará la estrategia EPP, ejemplificando su uso y desarrollando actividades individuales y grupales buscando que los docentes participantes conozcan la propuesta y sean capaces de implementarla para enseñanza de la función exponencial, reflexionando sobre los productos desarrollados con los participantes.

En las tablas 8 y 9, mostramos la estructura que desarrollamos en cada una de las sesiones de trabajo con los participantes del taller quienes fueron en su totalidad docentes de matemáticas del nivel secundario.

**Tabla 7***Diseño de la sesión No. 1 del taller*

<b>Actividad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Tiempo</b>
Inicio y Apertura	Presentación de los alcances del taller, de los participantes y mostrar la estructura de las sesiones de trabajo	Mostrar a los participantes los alcances de las actividades a desarrollar, explicando los alcances de las sesiones del taller.	10 min
Datos y prueba diagnóstica	Confirmación de los datos de los participantes y desarrollo la prueba de entrada	Aplicar la evaluación de entrada para la recolección de información sobre las capacidades iniciales de los docentes participantes	20 min
Presentación del enfoque de Creación de problemas.	Desarrollo con los participantes de los conceptos y estrategias para la creación de problemas según la propuesta EPP. Fomentando el diálogo y la participación constante.	Presentar la propuesta EPP, identificando con los docentes los conceptos y estrategias de la creación de problemas.	20 min
Actividades individuales	Análisis grupal del episodio y creación de un problema pre de manera individual.	Analizar grupalmente el episodio presentado y crear un problema pre de manera individual.	20 min
Presentación de algunos productos	Presentación de los problemas pre creados fomentando el intercambio de ideas para mejorar las propuestas y elección de una propuesta para mejorarla.	Presentar los problemas propuestos por los docentes trabajando mejoras en las propuestas con las opiniones y sugerencias de los docentes.	15 min
Cierre del primer día de taller	Agradecimiento por su participación e invitación a la segunda sesión del taller.	Resumir las ideas de trabajo del día, organizando las ideas para el trabajo de la siguiente sesión.	5 min

*Fuente: Creación propia*

**Tabla 8***Diseño de la sesión No. 2 del taller*

<b>Actividad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Tiempo</b>
Inicio y Síntesis del trabajo de la sesión anterior	Elaboración de un resumen de conceptos relacionados con la propuesta EPP ampliando las ideas para las propuestas de los problemas pre y problemas pos.	Sintetizar las ideas desarrolladas en la sesión anterior, planteando las tareas del trabajo de la sesión No. 2.	10 min
Actividades grupales	Revisión de los problemas pre, planteamos el reto de elaborar problemas pos. En esta oportunidad invitamos al trabajo en grupos de 2 o 3.	Crear un problema pos para el episodio presentado, trabajando las propuestas en grupos de 2 o 3 docentes.	20 min
Socialización de trabajos	Presentación a los grupos de los productos, invitando a los docentes a mejorar los problemas propuestas con ideas grupales.	Analizar los problemas presentados por los grupos, elaborando mejor a las propuestas	15 min
Cierre el trabajo de producción	Presentación de una síntesis de las ideas desarrolladas y los problemas pre y pos desarrollados y mejorados.	Recoger las opiniones de los participantes sobre la experiencia del análisis y creación de problemas.	10 min
Aplicación de la prueba de Salida	Invitación a los participantes a desarrollar la prueba de salida	Aplicar la evaluación de salida para recoger información sobre las capacidades de los docentes después del desarrollo del taller.	20 min
Cierre del taller	Agradecimiento a los participantes por su participación y tomamos un cuestionario para recoger las impresiones y propuestas de los participantes	Sintetizar las ideas del taller aplicando el cuestionario final para recoger información final de los participantes	15 min

Fuente: Creación propia

## **Diseño de las evaluaciones de diagnóstico**

La evaluación de entrada está diseñada para recoger información sobre las habilidades docentes para el manejo de conceptos relacionados con la función exponencial y las capacidades para la creación de problemas antes del desarrollo del taller. En el caso de la evaluación de salida, se diseñarán preguntas similares para el recojo de la misma información luego de la participación de las actividades del taller.

## **Instrumentos para el recojo de la información**

Para el desarrollo de la investigación, usaremos los siguientes instrumentos diseñados para recoger la información necesaria con los docentes participantes.

- Ficha de inscripción y de datos de los participantes
- Prueba de entrada
- Prueba de salida
- Cuestionario del taller
- Entrevista individual posterior al desarrollo del taller.
- Drive como repositorio de materiales
- Google Site con los accesos a los links y las actividades del taller

A continuación, describiremos brevemente la información detallada de cada elemento:

### **Ficha de inscripción y de datos de los participantes**

Mediante dos formularios de Google, se recogió la intención de participación de los docentes mediante una inscripción, y luego en otro formulario, se solicitó los datos generales de los participantes. En ambos formularios se incluyó preguntas para recoger información sobre los años de experiencia en la docencia, el colegio donde enseña, los grados en que dicta clases y si conoce o no la propuesta de creación de problemas. Ver Anexo 1 y Anexo 2

### **Prueba de entrada**

La evaluación consta de 4 preguntas, las cuales indagan sobre los temas que el docente toma en cuenta cuando enseña la función exponencial y si le queda clara la diferencia entre el interés simple y compuesto, que es el contexto en el cual se trabajó el episodio. Adicionalmente se incluye un problema para que resuelva empleando conocimientos de porcentaje, cálculo de interés y propiedades de los exponentes. Ver anexo 3

### **Prueba de salida**

En esta evaluación, también se diseñaron 4 preguntas incluyendo nuevamente preguntas sobre los conceptos relacionados con la función exponencial, que debe ser tenido en cuenta en la enseñanza, adicionalmente se preguntó sobre la utilidad que el docente encuentra en la estrategia de creación de problemas, así como las dificultades que considera que puede encontrar en su aplicación. También se incluyó un problema similar al episodio trabajado, solicitando la elaboración de un problema pre y un problema pos. Ver anexo 4.

### **Cuestionario del taller**

Para el cierre del taller, se presentó un cuestionario para que los participantes evaluaran el desarrollo de este y puedan brindar sus opiniones y sugerencias. Ver anexo 5.

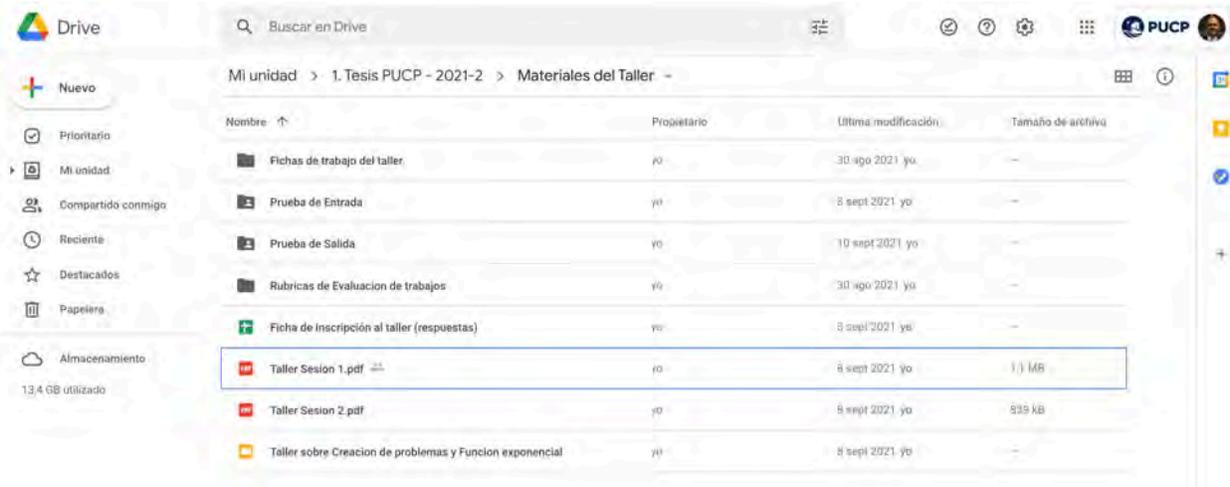
### **Entrevista individual posterior al desarrollo del taller**

Con el propósito de confirmar y ampliar algunas de las respuestas obtenidas en la prueba de entrada y la prueba de salida, realizamos una entrevista grabada a algunos de los docentes participantes a partir de las cuales realizaremos las transcripciones correspondientes que nos permitan ampliar el análisis de los resultados. Ver Anexo 6.

### **Drive como repositorio de materiales**

Para el trabajo colaborativo, se hizo uso de la herramienta de Google drive, para compartir el link de acceso a las evaluaciones, y fichas de trabajo individual y grupal, de tal modo que los participantes tenían acceso a ellos de modo operativo dándonos acceso al trabajo desarrollado en el momento en que lo estaban haciendo. La siguiente figura muestra dicho Drive.

**Figura 15: Drive de trabajo para el trabajo colaborativo durante el taller**



Fuente: Creación propia

### Google Site con los accesos a los links y las actividades del taller

Para lograr una mejor eficiencia al compartir los links de acceso para las sesiones online, y dar un espacio organizado de acceso a las evaluaciones, fichas de trabajo individual y grupal, así como acceso a las presentaciones compartidas, se elaboró un Site usando la herramienta Google lo cual facilitó el compartir los accesos rápidamente y permitió aprovechar mejor el tiempo de trabajo. La siguiente figura, muestra la parte inicial del Site incluyendo el link de acceso.

**Figura 16: Site para el desarrollo de las actividades del taller.**



Fuente: Creación propia

## Rúbrica para analizar los problemas creados

Para la evaluación de los trabajos desarrollados por los docentes en las diferentes actividades individuales y grupales, emplearemos una rúbrica adaptada del trabajo de la investigación de Martínez (2015). En dicha evaluación, usaremos los conceptos de flexibilidad, originalidad y fluidez mencionados por Malaspina (2014), para calificar las producciones de los problemas creados por los docentes, otorgando a cada producto un puntaje según la característica que cumpla dicha producción y así para poder medir la calidad del problema por variación propuesto. La calificación será aplicada tanto a los problemas creados en las actividades individuales como grupales, así como a los productos realizados en la prueba de salida al final del desarrollo del taller. En la siguiente tabla describimos los criterios empleados y la forma en que otorgamos los puntajes.

**Tabla 9**

*Aspectos a considerar para el análisis de los problemas creados*

<b>Aspecto</b>	<b>Descripción</b>	<b>Puntaje</b> <i>Otorgar cada punto por cada característica que cumple:</i>
Flexibilidad	Revisión del problema creado por variación buscando que refleje modificaciones con amplitud clara, mostrando ir más allá de cambios ligeros al problema propuesto inicialmente	(1) Muestra uno o más requerimientos de dificultad gradual. (1) Los requerimientos pueden responderse de varias maneras. (1) El problema favorece la conexión con otros temas matemáticos. (1) El problema favorece la conexión con otras áreas del conocimiento.
Originalidad	Revisión del problema creado buscando que refleje novedad y creatividad respecto del problema inicialmente propuesto, pudiendo identificar con claridad las modificaciones hechas al mismo problema ya realizadas por otros docentes.	(1) Es el único problema creado diferente a los demás (1) El problema es uno de los dos que se distingue de los demás. (1) El problema presenta novedad en la información dada. (1) El problema presenta novedad en el requerimiento

<b>Aspecto</b>	<b>Descripción</b>	<b>Puntaje</b> <i>Otorgar cada punto por cada característica que cumple:</i>
Fluidez	Revisión del problema creado, buscando que el docente proponga más requerimientos que el problema propuesto inicialmente	(1) Propone un problema con cuatro requerimientos. (1) Propone un problema con tres requerimientos. (1) Propone un problema con dos requerimientos. (1) Propone un problema con un requerimiento.

*Fuente: Adaptado de Martínez (2015) y Aguilar (2018)*

Siguiendo la propuesta de Martínez (2015), el puntaje que obtenemos al evaluar la producción de los problemas de los docentes nos permitirá calificar cualitativamente los trabajos según las siguientes categorías de acuerdo con el puntaje total alcanzado. Para hacer esta calificación, mostramos en la siguiente tabla las bandas de calificación de calidad.

**Tabla 10**

*Calificación cualitativa de un problema creado por los docentes*

<b>Puntaje</b>	<b>Calificación cualitativa de la calidad</b>
1 – 4	Calidad Baja
5 – 8	Calidad Media
9 – 12	Calidad Alta

*Fuente: Adaptado de Martínez (2015)*

Estas bandas nos permitirán asignar una calificación para describir la calidad del problema creado por los docentes y analizar de manera cualitativa sus productos. Dicha calificación estará acompañada de una descripción cualitativa del producto, señalando el tipo de problema creado, el entorno matemático considerado y señalando las modificaciones realizadas en los elementos del problema. En la figura 13, mostramos la rúbrica de calificación empleada para este propósito.

Figura 17: Rúbrica para analizar los problemas creados por los docentes

Rúbrica para Analizar el problema Creado							
Docente No.		Nombre de la actividad:				Tipo de problema	
						Problema de cálculo y proceso	
						Problema de la vida real	
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	
						Problema de comparación	
						Otros:	
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
						Otros (especifique)	
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o mas requerimientos de dificultad		(1) Unico problema diferente a los demás		(1) Propone un problema con 4 requerimeín			
(1) Puede responder de varias formas		(1) El problema se distingue de los demás		(1) Propone un problema con 3 requerimeín			
(1) Favorece la conexión con varios temas		(1) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerimeín			
(1) Favorece la conexión otras áreas		(1) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerimeín			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	

Fuente: Adaptado de Martínez (2015) y Pomalaya (2020)

La rúbrica, nos permite asignar puntajes al problema creado según las características de flexibilidad, originalidad y fluidez de acuerdo con los aspectos descritos en la tabla 9 anteriormente mostrada, sin embargo, también nos permite describir algunas características que encontramos en los problemas creados por los docentes como son indicar el tipo de problema según su enunciado, contexto y requerimientos y cuáles son los entornos matemáticos que podemos identificar de acuerdo a los elementos matemáticos presentes. Así, por ejemplo, podemos identificar los siguientes tipos de problemas:

- Problema de cálculo y proceso, si el problema centra el trabajo en el desarrollo de cálculos empleando el modelo exponencial, debiendo mostrar los procesos. *Ejemplo: Se tiene que la población de una ciudad puede ser modelada mediante la fórmula:  $P_f = 15000(1.02)^t$ , donde  $P_f$  es la población final y  $t$  es el tiempo transcurrido en años. Encuentra la población de la ciudad después de 1,2,3, 4 y 5 años.*
- Problema de la vida real, cuando el problema describe situaciones de la vida cotidiana o donde se identifican aspectos conocidos del entorno del estudiante. *Ejemplo: Un cultivo de bacterias contiene inicialmente 1200 bacterias las cuales se sabe que se duplican cada hora. Encuentre una función que modele el número de bacterias después de  $t$  años.*

- Problema de análisis y justificación, si el enunciado del problema o los requerimientos plantean afirmaciones que deben ser analizadas como verdaderas o falsas o que deben justificar una afirmación dada empleando el modelo. *Ejemplo: Un paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a la velocidad de ella, y la constante de proporcionalidad es 0,2. Analice y justifique si una expresión para la velocidad hacia abajo del paracaidista en el tiempo  $t$ , estaría dado por la fórmula:  $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$ , donde  $t$  se mide en segundos y  $v(t)$  se mide en pies por segundo. A partir de allí encuentre la velocidad inicial del paracaidista.*
- Problema de representación, si en el problema se solicita establecer algún tipo de representación, gráfica, algebraica, tabular u otra que permita responder a los requerimientos. *Ejemplo: Unos médicos usan yodo radioactivo como trazador en el diagnóstico de ciertas enfermedades. Este tipo de yodo se desintegra en forma tal que la masa restante después de  $t$  días está dada por la función  $m(t) = 6e^{-0.087t}$ , donde  $m(t)$  se mide en gramos. Traza una gráfica aproximada de  $m(t)$  y con ella determine cuánta masa resta después de 20 días.*
- Problema de comparación, cuando el enunciado permite más de una representación, o uso de modelos que deben ser comparados en el tiempo, o empleando los resultados que se plantean. *Ejemplo: Se desea invertir capital de \$5000 dólares y se tiene dos opciones, primero se puede invertir en una cuenta que paga el 3% de interés compuesto mensual, y por otro lado se puede invertir en otra cuenta que paga el 3.01% de interés compuesto anual. Compare los saldos de ambas inversiones después de 2, 5 y 10 años.*
- Otros tipos de problema, en caso el problema propuesto tenga algún otro elemento no contemplado anteriormente.

También, en referencia a los entornos matemáticos que podemos encontrar en los problemas creados, podemos identificar entornos de:

- Uso de representaciones, si debe emplear necesariamente una representación algebraica, gráfica o tabular para responder a los requerimientos. *Ejemplo: Grafique la función exponencial  $y = 2(3)^x$ , para los valores de  $x \in [-2, 2]$  y para  $y \in [-1, 20]$ . A partir de allí identifique si hubiera intersecciones con los ejes y las asíntotas.*
- Uso de restricciones, cuando la solución incluye necesariamente el análisis de las limitaciones de por lo menos una de las variables en el contexto. *Ejemplo: La población del pueblo de San José  $t$  años después del año 2000 se puede modelar según la función exponencial  $P(t) = P_0 \cdot b^t$ , donde  $P_0$  es la población que había en el año 2000 y  $b$  es un*

valor constante. Si se sabe que en el año 2010 la población era de 785 000 habitantes y que el año 2020 la población llegó a 855 250 habitantes, encuentre el valor de la constante  $b$ .

- Procesos algorítmicos con el modelo, si a partir del uso del modelo se requerirá mostrar una ruta de desarrollo empleando las propiedades de los exponentes, resolución de ecuaciones, etc. *Ejemplo: La cantidad de Antílopes que habitan una pradera, se puede modelar mediante la función exponencial  $P(t) = 1200(1.035)^t$ , donde  $P(t)$  es la población después de  $t$  años. Encuentre después de cuantos años la cantidad superará los 2000 antílopes.*
- Monotonía y características del modelo, ya que, tratándose de funciones exponenciales, se puede identificar comportamientos crecientes o decrecientes que deben ser interpretadas a partir del modelo descrito. *Ejemplo: La cantidad  $C(t)$  en gramos de carbono 14 presente en una cierta sustancia después de  $t$  años está dada por la expresión  $C(t) = 24e^{0.00001215t}$ . ¿Cuánto será la cantidad de carbono 14 que quedará después de 5000 años, 10 000 años y 15 000 años? ¿A qué se debe que las cantidades estén variando de la manera hallada? Interprete su respuesta en el contexto del problema.*
- Relación entre variables, al establecer la relación de dependencia entre las variables e interpretar dicha relación en el contexto del problema. Por ejemplo, identificar la variación porcentual de una de las variables mientras se da una variación constante en la otra variable. *Ejemplo: En una situación de pandemia, se encuentra que una persona infectada con un virus puede contagiar a 4 personas cada día. Si hay una población inicial de 10 habitantes infectados, elabore una tabla que muestre las cantidades de personas contagiadas por el virus en los primeros 10 días y a partir de allí elabore un modelo exponencial que permita hallar la cantidad de habitantes contagiados después de  $t$  días.*
- Otros entornos, cuando se identifican algunos entornos adicionales que puedan surgir o que se puedan alternar con otros.

Adicionalmente, en la rúbrica, se señala el tipo de modificación que el docente realiza a alguno de los elementos fundamentales del problema, pudiendo ser esta modificación:

- En la Información, que acepta modificaciones cuantitativas o cualitativas en la forma en que se presenta el problema.
- En el requerimiento, que se refiere también a modificaciones cuantitativas o cualitativas, considerando la cantidad de requerimientos o la manera como se solicitan.

- En el contexto, que en este caso puede ser intra-matemático o extra-matemático dependiendo de la variación que se realice al problema.
- En el entorno matemático, que puede observarse en los procesos matemáticos, representaciones, o uso de propiedades del objeto matemático.

### **3.1.3 Fase de entrada al escenario**

Según Latorre (1996), es en esta fase donde se debe tener en cuenta lo necesario para acceder a la institución y a las personas que estarán involucradas en la investigación:

El acceso al escenario es un proceso, en el sentido que el investigador pueda ir donde desee, observar lo que quiera, hablar con las personas que precise, obtener y leer los documentos, y hacer todo esto durante el tiempo que necesite para los propósitos de la investigación (Latorre, 1996, p.210).

En esta fase, compartimos el esquema general de trabajo a través de las agendas de cada sesión indicando la participación en las pruebas de entrada y salida, y el desarrollo de las actividades individuales y grupales. Como parte de la estrategia EPP, se les indica a los participantes en qué consiste el episodio y la importancia del análisis de las reflexiones de los estudiantes que se muestran. Se identifican las características generales de lo que es un problema pre y un problema pos.

En esta fase, los docentes participan activamente con sus preguntas y opiniones durante la exposición, y con sus comentarios durante la revisión del episodio. Siendo que el desarrollo del taller fue virtual, no requerimos permisos especiales para usar ambientes de alguna institución, ya que cada docente participaba desde su propia computadora vía Zoom y en la mayoría de los casos desde sus propias casas.

En esta fase, el investigador compartió el Site de trabajo con acceso a los links de conexión, y actividades de trabajo individual y grupal. Se presentaron las ideas generales de la propuesta de creación de problemas, y ejemplos de la propuesta EPP empleando una presentación de Google (Anexo No.6), la cual fue compartida también en el Site con todos los participantes. Esta fase de entrada al escenario continuó con la confirmación de la recolección de datos de los participantes y la aplicación de la prueba de entrada.

### 3.1.4 Fase de recojo y análisis de información

Según Latorre (1996), al recoger los datos durante la investigación, debemos tener en cuenta que están principalmente constituidos por palabras y acciones, por lo que lo más recomendable es el uso de las técnicas de observación, entrevistas y análisis de documentos.

Es por ello que, durante la implementación de las actividades en las dos sesiones del taller, el investigador empleó fichas para recoger las propuestas de trabajo de los docentes al crear los problemas pre y pos, usando las herramientas de trabajo colaborativo de documentos compartidos en Google, las cuales fueron usadas para el correspondiente análisis de los productos. También fue muy importante la observación del trabajo individual y grupal, para lo cual se les pidió a los participantes mantener las cámaras prendidas para poder observar y registrar las impresiones, reacciones a los diálogos y el lenguaje no verbal mostrado durante las actividades. De esta manera se fue recogiendo información que complementa el análisis del trabajo de producción.

El recojo de la información se basó principalmente en:

- La prueba de entrada
- La prueba de salida
- La ficha de actividades individuales
- La ficha de actividades grupales
- Cuestionario de cierre del taller
- Entrevista individual posterior al desarrollo del taller.

Toda la información recogida, sirvió para estructurar un adecuado análisis dentro del marco teórico propuesto y tomando en consideración los trabajos de Pomalaya (2020) y Aguilar (2018), cuyos aportes y metodologías de trabajo sirvieron como base para nuestra investigación. Adicionalmente dentro de la Estrategia EPP, pudimos cuantificar los logros de los docentes en cada uno de los productos en lo referente a la producción de sus problemas pre y problemas pos.

Para la elaboración de las pruebas de entrada y salida, se consideraron los conocimientos previos que el docente debe tener sobre la función exponencial y algunas ideas básicas que pudiera conocer sobre la creación de problemas y que pudiera conocer de alguna experiencia anterior. Para las fichas de actividades, se tuvo en cuenta la estructura del trabajo individual y grupal que se esperaba que desarrollen, considerando que debe contener la solución del problema, la creación de sus problemas y los comentarios del docente. Para el cuestionario final se consideraron las opiniones que pudieran tener sobre el desarrollo del taller, y para la

entrevista, se consideró los temas no comentados en las pruebas de entrada salida o en los comentarios a sus producciones.

### **Consentimiento de participación en el proyecto de tesis**

También debemos señalar que, para el proceso de recolección de datos, se elaboró un documento para la autorización del uso de datos y producción de trabajo. Para esto redactamos una carta de consentimiento que firmaron los docentes participantes del taller, autorizando el uso de sus productos y reflexiones en cada fase. (Ver anexo 7). Se explicó a todos los docentes que su participación era voluntaria y esperábamos tener su consentimiento para el uso y tratamiento de los trabajos realizados como parte de las actividades de trabajo. En dicha carta se les dio la información necesaria para conocer los contactos con la universidad en caso tuvieran alguna consulta.

#### **3.1.5 Fase de salida del escenario**

En esta fase según Latorre (1996), corresponde realizar la “negociación de retirada”, es decir, informar a la institución y sus autoridades sobre la finalización del trabajo de aplicación.

En el caso de nuestra investigación, como ya mencionamos, al no desarrollarse dentro de una institución específica por el trabajo virtual desplegado, se cumplió con dar a los docentes participantes los agradecimientos del caso, comprometiéndonos a compartir con ellos vía correo electrónico los alcances y conclusiones de nuestra investigación. Adicionalmente dejamos abierta la posibilidad de desarrollar algunas entrevistas individuales con los participantes para darles un feedback de su participación dejando así abierta la posibilidad de continuar las conversaciones sobre el tema desarrollado y la experiencia de trabajo grupal.

#### **3.1.6 Fase de elaboración del informe**

Según Latorre (1996) “El informe cualitativo debe ser sólido y de argumento convincente que apoye los resultados del estudio y refute las explicaciones alternativas que puedan emerger” (p. 214).

Por ello, dentro de la estructura de nuestra investigación, dedicaremos el siguiente capítulo para sistematizar las principales ideas obtenidas en el recojo de información y el correspondiente análisis y elaboración de las conclusiones y sugerencias de la investigación. En esta fase sintetizamos los principales hallazgos y conclusiones sobre la calidad de los problemas

propuestos y las mejoras en las capacidades de los docentes para crear problemas sobre la función exponencial.

### **3.2 Experimentación y análisis de los resultados**

En esta sección, presentaremos los resultados de la aplicación del taller de creación de problemas, llevado a cabo los días 8 y 10 de septiembre, haciendo un análisis de las diferentes actividades realizadas por los docentes participantes. Luego de una presentación general de los participantes, nos ocuparemos más en detalles en analizar las respuestas de 3 docentes identificados como Docente 1, Docente 6 y Docente 12 a fin de interpretar sus productos empleando la rúbrica de calificación

#### **3.2.1 Descripción de los sujetos de estudio.**

La información de los participantes fue obtenida mediante unos cuestionarios, que nos permitió indagar sobre diversos aspectos de su formación profesional y laboral (Ver anexos 1 y 2). En ellos solicitamos datos referentes a:

- Niveles en los que enseña matemática
- Centro Educativo donde enseña actualmente
- Grado o título profesional
- Cantidad de años de experiencia docente acumulados
- Si tiene o no, o tuvo en algún momento experiencia enseñando a nivel superior
- Si ha participado en algún taller relacionado con la creación de problemas

Los participantes del taller fueron 15 docentes de diferentes instituciones educativas, teniendo algunos de ellos, experiencia en la enseñanza en el nivel superior y contando con la participación de docentes que ya antes habían participado de algún taller sobre creación de problemas. La información recogida se resume en la siguiente tabla:

**Tabla 11**

*Resumen de datos recogidos de los docentes participantes del taller*

Num	Docente	Nivel en el que enseña matemáticas	Institución donde trabaja actualmente	Título profesional	Experiencia como docente de matemáticas	Grados que enseña matemática actualmente	Experiencia enseñando nivel superior	Participo en talleres de Creación de Problemas
1	D01	Secundario	Nuestra Señora del Carmen	Magister	13 años o más	1ero a 5to	Ahora ya no	Si en la PUCP
2	D02	Secundario	San Agustín Chiclayo	Licenciado	13 años o más	4to y 5to	Nunca he tenido	NO
3	D03	Secundario	Abraham Lincoln	Licenciado	13 años o más	8vo a 5to	Ahora ya no	No
4	D04	Secundario	Saint George College	Licenciado	13 años o más	6to a 3ero	Ahora ya no	No
5	D05	Secundario	Nuestra Señora del Consuelo	Licenciada	De 8 a 12 años	8vo grado	Nunca he tenido	No
6	D06	Secundario	Casuarinas International College	Bachiller	13 años o más	1ero a 5to	Ahora ya no	No
7	D07	Secundario	Abraham Lincoln	Bachiller	13 años o más	6to y 7mo	Nunca he tenido	No
8	D08	Secundario	Euroamerican College	Bachiller	13 años o más	2do a 5to	Nunca he tenido	No
9	D09	Secundario	San Agustín	Bachiller	13 años o más	Coordinador	Ahora ya no	No
10	D10	Primario y Secundario	Aleph	Licenciado	13 años o más	6to grado	Ahora ya no	No
11	D11	Secundario y Superior	Ulma	Magister	13 años o más	Superior	Si actualmente	No
12	D12	Secundario	San Agustín de Lima	Licenciado	13 años o más	4to y 5to	Nunca he tenido	Si en la PUCP
13	D13	Secundario	Saint George College	Magister	13 años o más	4to y 5to	Nunca he tenido	Si en la PUCP
14	D14	Secundario	La Molina Christian Schools	Magister	13 años o más	8vo y 5to	Ahora ya no	No
15	D15	Secundario	Casuarinas International College	Licenciado	13 años o más	1ero a 5to	Ahora ya no	No

*Fuente:* creación propia

En este grupo de docentes, podemos destacar inicialmente que 14 de ellos se encuentran enseñando matemáticas a nivel secundario, siendo que 1 refiere también estar enseñando en el nivel primario, 1 de ellos refiere estar enseñando en el nivel superior y 1 menciona no estar enseñando actualmente por desempeñar tareas de coordinación en la escuela. Adicionalmente al ser consultados sobre si tuvieron en algún momento experiencia en la enseñanza a nivel superior, encontramos 3 grupos. Mientras 6 de ellos mencionan no tener experiencia enseñando a nivel superior, 8 refieren haber enseñado en el pasado, pero ahora ya no lo hacen y 1 menciona estar enseñando actualmente en universidad.

En la figura 14 podemos observar un diagrama que muestra la distribución de docentes según su experiencia en enseñanza universitaria.

**Figura 18:** Distribución de participantes con experiencia en docencia universitaria



Fuente: creación propia

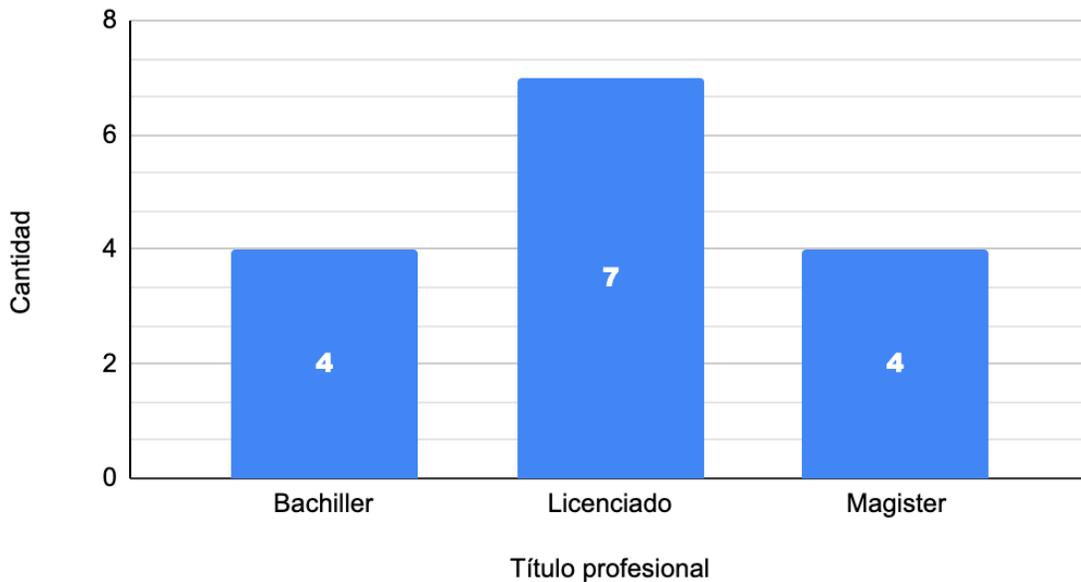
Esto nos muestra que una de las características del grupo participante es la de tener o haber tenido experiencia en docencia universitaria, acumulando un 60% de participantes con esta experiencia en nivel superior. Es claro que un docente que trabajó en el nivel superior enseñando matemáticas, ha de haber trabajado el modelo exponencial con mayor profundidad, por las aplicaciones y ejemplos que se desarrolla en un curso de pre cálculo. Esto en particular, podría indicar que estos docentes tienen posibilidades de manejar los temas matemáticos con mayor profundidad. Adicionalmente en la tabla podemos observar que solo un docente tiene entre 8 y 12 años el cual es un rango que puede ser considerado para profesores con una experiencia mediana, sin embargo, los 14 profesores restantes marcaron el mayor rango de experiencia de 13 a más años. Esta característica del grupo de tener experiencia y seguridad en su trabajo fue evidente en los momentos de participar en las actividades grupales e individuales.

Otro aspecto importante para mencionar es que la mayoría tiene experiencia en la enseñanza de todos los grados de la secundaria, por lo que podemos asumir que el grupo de docentes que participaron son expertos y experimentados en la enseñanza a nivel secundario. Los docentes que mencionaron estar dictando además clases en el nivel primario, comentaron estar haciéndolo para completar horas siendo que les fue asignado este año adicionalmente a su carga horaria en secundaria.

Otro aspecto importante para considerar en la muestra es el grado académico de los participantes. En la figura 15, podemos ver un gráfico que nos describe esta distribución según los participantes son solo bachilleres, licenciados o cuentan con el grado de magíster.

**Figura 19:** *Distribución de docentes según el título profesional*

### Distribución de los docentes según el título profesional



*Fuente:* creación propia

Un último aspecto por señalar de la muestra de docentes es el hecho de que 3 de los 15 docentes menciona haber tenido alguna experiencia en talleres referentes a la creación de problemas, mientras que 12 de ellos menciona no haber tenido esta experiencia.

En resumen, la muestra de docentes participantes del taller cuenta en su mayoría con amplia experiencia en la enseñanza de la matemática a nivel escolar. Adicionalmente, en el grupo podemos encontrar 3 docentes con algo de experiencia en el uso de creación de problemas como estrategia didáctica, mencionando algunos de ellos haber participado en talleres sobre el tema.

### **3.2.2 Descripción de la aplicación de la prueba de entrada**

Iniciamos con un análisis a priori de la aplicación de la prueba de entrada, es decir, revisando lo que se preguntó y lo que se esperaba que los docentes contestaran en cada pregunta. La prueba de entrada (ver anexo 3) fue diseñada considerando dos aspectos

importantes que deberían conocer los docentes de secundaria al trabajar el tema de la función exponencial: El manejo de los conceptos asociados a la función exponencial incluyendo los conceptos relacionados al interés simple y compuesto (temas de aplicación en el episodio presentado) y el conocimiento y uso de la creación de problemas como estrategia general de trabajo. Se consideró la manera en que los docentes enseñan la función exponencial, en donde se esperaba que mencionaran la definición de función exponencial y la característica de ser creciente o decreciente dependiendo de la base del exponencial, las características de la gráfica incluyendo la existencia de la asíntota e intersección con el eje vertical. También la relación entre las variables y la variación porcentual constante y la mención de algunas propiedades de los exponenciales y el uso de los logaritmos al resolver ecuaciones exponenciales.

La siguiente tabla muestra una descripción de los elementos esperados en cada una de las preguntas.

**Tabla 12**

*Descripción a priori de lo que se espera en cada pregunta de la prueba de entrada*

No.	Pregunta	Lo que se espera
1	Cuando enseñamos el tema de la función exponencial, ¿cuáles son los conceptos importantes que debemos trabajar con los estudiantes?	Se espera que el docente mencione cómo se relacionan las variables en una función exponencial, por ejemplo, si $x$ varía en una cantidad constante, $f(x)$ sufre una variación porcentual constante. Se espera que mencionen que a medida que la variable $x$ varía en una cantidad constante, la variable $f(x)$ varía de manera porcentual y constante. Se espera que los docentes indiquen que la variable $f(x)$ varía de manera porcentual constante, formando una progresión geométrica. Se espera que mencionen conceptos asociados a la función exponencial como las propiedades, uso de logaritmos, resolución de ecuaciones con propiedades o logaritmos, condiciones de la base del exponencial y características de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, entre otros.
2	Explique la diferencia entre el cálculo de interés simple y el interés compuesto, mencionando si en el caso de alguna de ellas podemos usar conceptos relacionados con la función exponencial.	Se espera que el docente mencione en su descripción que el interés compuesto, crece de manera más rápida que el interés simple porque en el primer caso la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad, generando un crecimiento porcentual constante, mientras que, en el segundo, solo se tiene un crecimiento constante, es decir por un mismo valor. El docente puede asociar el interés simple a las progresiones aritméticas y el interés compuesto a las progresiones geométricas, lo cual muestra también la diferencia en los crecimientos. En esta parte, el docente puede mencionar que el interés compuesto puede asociarse al crecimiento exponencial.

No.	Pregunta	Lo que se espera
3	<p>Resuelva los siguientes problemas mostrando su procedimiento:</p> <p>(a) Se deposita \$2000 en una cuenta de ahorros que paga 5% de interés simple anual. Calcule el monto final (capital depositado más interés ganado) después de 3 años.</p> <p>(b) Un capital de \$4000 es depositado en una cuenta de ahorros que paga el 3% de interés compuesto anual. Halle el monto final después de 5 años.</p>	<p>Se espera que el docente llegue a las siguientes respuestas de manera clara y explícita:</p> <p>(a) Identificar los elementos y elaborar el cálculo para el interés simple.  <math>C = 2000</math> ; <math>i = 0,05</math> ; <math>t = 3</math> años  <math>M = 2000 + 2000(0,05)(3) = \\$2300</math></p> <p>(b) Identifica los elementos y elaborar el cálculo para el interés compuesto:  <math>C = 4000</math> ; <math>i = 0,03</math> ; <math>t = 5</math> años  <math>M = 4000</math> ; <math>i = 0,03</math> ; <math>t = 5</math> años  <math>M = 4000(1,03)^5 = 4637,10</math></p>
4	<p>Responda brevemente las siguientes preguntas:</p> <p>(a) ¿Qué es lo que debe tener en cuenta un profesor al crear un problema para usarlo en la enseñanza de la matemática?</p> <p>(b) ¿Considera que los estudiantes pueden crear problemas matemáticos mientras están aprendiendo un tema nuevo?</p>	<p>Se espera que el docente:</p> <p>(a) Mencione los elementos de un problema como enunciado, contexto, entorno y requerimientos. Así mismo, se espera que mencionen la importancia que le da el profesor a cada uno de estos elementos para una buena comprensión del problema.</p> <p>(b) Describa si está o no de acuerdo con el uso de la creación de problemas como estrategia didáctica dando algún argumento que justifique su respuesta.</p>

Fuente: creación propia

La prueba de entrada, la rindieron los 15 docentes, que fueron codificados según la tabla 12. De este grupo, hemos elegido a 3 docentes codificados como docentes 1, 6 y 12, para analizar sus respuestas de manera minuciosa y comentar los logros mostrados contrastando con los requerimientos esperados. Con la información obtenida en las respuestas de estos 3 docentes, podremos hacer una comparación de los resultados presentados por ellos y

compararlos con los que darán en la prueba de salida. A continuación, mostramos los resultados de los docentes elegidos en la prueba de entrada.

### **Resultados del docente 1 en la prueba de entrada**

En la pregunta 1, el docente 1 menciona los elementos de una potencia, identificando la base y el exponente. Es claro que el docente identifica los aspectos algebraicos de una potencia con la regla de correspondencia de la función exponencial, evidenciando un conocimiento de la función exponencial. Esto lo confirmará con el desarrollo de las siguientes preguntas.

La figura 16 muestra cómo respondió el docente a la pregunta 1 de la prueba de entrada:

**Figura 20:** *Respuesta del docente 1 a la primera pregunta*

Se debe reconocer elementos de una potencia, es decir, la base y el exponente así como los conceptos de función, dominio, rango, representación gráfica en el plano bidimensional

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

Al ver la respuesta dada por el docente observamos que indica características generales de las funciones, solo distingue a la función exponencial al mencionar a las potencias, pero de manera general. No menciona la relación entre las variables, característica de la función o su gráfica, ni la característica de la variación porcentual entre otros conceptos señalados en la tabla 12 donde detallamos lo que se espera que responda.

También es claro que identifica la diferencia entre el cálculo de interés simple e interés compuesto tal como lo describe en la respuesta dada en la pregunta 2 y el desarrollo presentado en la pregunta 3. Esto resultó muy importante pues como mencionamos, la idea de plantear esta pregunta era la de estar seguros que los docentes puedan hacer mención del uso del modelo lineal al asociar el caso del interés simple empleando las expresiones lineales adecuadas que involucra el Capital, tasa de interés y tiempo o, mencionar el modelo exponencial al asociar el interés compuesto con la expresión que permite el cálculo del monto a partir del uso del capital, tasa de interés y tiempo, según el contexto que se presente en el problema sugerido. Como estrategia, vemos que el docente emplea las fórmulas del interés simple y del interés compuesto, diferenciando claramente cuándo usar un modelo donde el tiempo es el exponente. También cabe mencionar que se observa en su respuesta un desarrollo ordenado y claro, a pesar de la

dificultad en el uso de la notación al tener que escribir en el programa de documentos Google, y no emplear el editor de ecuaciones sino el acento circunflejo para indicar exponenciales.

En la figura 17 se muestra a continuación la solución que el docente 1 dio a la tercera pregunta indicando sus respuestas.

**Figura 21:** Respuesta del docente 1 a la tercera pregunta

<p>(a)</p> $I = (C \times r \times t) / 100$ $I = (2000 \times 5 \times 3) / 100$ $I = 300$ $M = C + I$ $M = 2000 + 300$ $M = 2300$ <p><b>El monto final al cabo de 3 años será de \$ 2300</b></p>
<p>(b)</p> $C_i = 4000$ $r = 3\%$ $t = 5 \text{ años}$ $C_f = C_i(1 + r)^{\exp(t)}$ $C_f = 4000(1 + 0,03)^5$ $C_f = 4000(1,03)^5$ $C_f = 4637,1$ <p><b>El monto final al cabo del 5to año será de \$4637,10</b></p>

Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

Podemos observar que el docente 1, muestra la movilización de un conocimiento matemático relacionado con los siguientes temas:

- Procedimientos para calcular el interés simple e interés compuesto.
- Modelo lineal para el interés simple

Para el cálculo del interés simple usamos:  $I = C \cdot r \cdot t$ , donde:

$I$  = interés pagado al final del periodo

$r$  = tasa de interés

$t$  = tiempo en años

$M$  = Monto final (Capital más interés)

- Modelo exponencial para el caso del interés compuesto

Para el interés compuesto:  $C_f = C_i(1 + r)^t$ , donde:

$C_f$  = Capital final (Monto + interés)

$C_i$  = Capital inicial

$r$  = tasa de interés

$t$  = tiempo en años

- Identificación periodos de tiempo para el capital final luego del pago de los intereses

Lo que podemos observar en este caso, es que el docente no incluye los siguientes elementos importantes del modelo exponencial:

- Identificación y descripción de las variables.
- Descripción del significado del dominio y rango de acuerdo con el contexto.
- Determinación de los valores requeridos de cada uno de los 5 años.
- Descripción de unidades monetarias.

En el caso de las preguntas relacionadas con la creación de problemas y su uso como estrategia didáctica para el trabajo con los estudiantes, el docente menciona que es importante conocer y dominar el tema a tratar. Menciona explícitamente que el docente “*debe conocer a fondo*”, indicando que se trata de conocer el tema sobre el cual va a girar el contexto del problema. Con esto, podemos ver que, para la creación de un problema, el docente da una evidencia de considerar que la creación de problemas sería una tarea de expertos. Sugiere además el uso de aspectos de la historia de la matemática para crear problemas. Sin embargo, en la última parte de la pregunta el docente resalta las ventajas del uso de esta estrategia como alternativa para reforzar el trabajo grupal y colaborativo, motivando el apoyo mutuo entre los estudiantes, lo que evidenciaría que si está en cierta medida de acuerdo con el uso de esta estrategia.

### **Resultados del docente 6 en la prueba de entrada**

En el caso del docente 6, es importante mencionar que, en sus datos personales señaló haber tenido experiencia en la enseñanza a nivel superior. En una conversación adicional preguntándole sobre esta experiencia, mencionó que ella le ayudó a mejorar el manejo de los conceptos matemáticos que debe enseñar en 5to de secundaria entre los cuales está la función exponencial. En su respuesta a la pregunta 1, podemos encontrar que menciona los conceptos

generales de las funciones como coordenadas, dominio, rango, asíntotas y monotonía. Además, también hace referencia a la característica de crecimiento o decrecimiento que da la base del exponente en la regla de correspondencia. También, leemos en su respuesta que indica el comportamiento creciente o decreciente, pero no precisa diferencias de este crecimiento respecto a otras funciones.

La Figura 18 muestra a continuación la respuesta que dio el docente.

**Figura 22:** *Respuesta del docente 6 a la primera pregunta*

El docente debe asegurarse que los estudiantes identifiquen los elementos de una función en general, coordenadas, dominio, rango, asíntotas, monotonía. Particularmente en cuanto a la función exponencial, identificar las propiedades de la potencia, la asíntota horizontal y la características de la función dependiendo de la base (comportamiento creciente o decreciente)

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

En su respuesta observamos que al responder la pregunta 1, el docente hace referencia a lo que se debe tener en cuenta al enseñar la función exponencial. Podemos deducir de su respuesta que de manera general tiene presente los elementos de la función exponencial, como las coordenadas, dominio, rango, la asíntota y la característica de monotonía, siendo que no profundiza o detalla las características propias del crecimiento rápido de la variable dependiente. En las siguientes preguntas podemos deducir que entiende la diferencia entre los dos tipos de interés, lo cual también comentó en la respuesta dada en la pregunta 2 de manera clara y explícita, mostrando un proceso claro y ordenado para el desarrollo de su pregunta 3 como se muestra a continuación en la siguiente figura:

**Figura 23:** Respuesta del docente 6 a la pregunta 3

$$\begin{aligned} \text{Monto} &= \text{Capital} + \frac{\text{Capital} \times \text{interés} \times \text{tiempo}}{100} \\ \text{Monto} &= 2000 + \frac{2000 \times 5 \times 3}{100} \\ \text{Monto} &= \$ 2300 \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} \text{Monto} &= \text{Capital} \left(1 + \frac{\text{interés}}{100}\right)^{\text{tiempo}} \\ \text{Monto} &= 4000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 \\ \text{Monto} &\approx \$ 4637.10 \end{aligned}$$

Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

Según este desarrollo, podemos observar que el conocimiento matemático que moviliza el docente se limita a:

- Identificación de las fórmulas para hacer los cálculos de interés simple compuesto
- Para el interés simple emplea:

$$\text{Monto} = \text{Capital} + \frac{(\text{Capital})(\text{Interés})(\text{tiempo})}{100}$$

Se observa que el docente no emplea variables sino directamente palabras que describen las cantidades.

- Para el interés compuesto emplea:

$$\text{Monto} = \text{Capital} \left(1 + \frac{\text{interés}}{100}\right)^{\text{tiempo}}$$

Al igual que en la fórmula anterior, el docente no emplea variables

- Muestra ideas de aproximación numérica.
- Usa unidades monetarias

En el caso de este desarrollo el docente no emplea elementos importantes como:

- Uso de variables, y determinación de restricciones según el contexto.
- Una representación algebraica de los modelos.
- Los valores requeridos para los 5 años como se solicitó en el requerimiento.

En las preguntas relacionadas con el uso de la creación de problemas para la enseñanza, el docente menciona nuevamente que es importante conocer los conceptos relacionados sobre función y sus respectivos elementos, tal como lo mencionó en la pregunta 1, en el sentido de que un problema se puede modelar con funciones. Consideró también necesario el manejo de tecnología como los graficadores o calculadoras de pantalla gráfica, usados como soporte y ayuda para visualizar mejor el comportamiento de la función. Adicionalmente sugiere plantear diferentes escenarios de contextos reales en donde se puedan aplicar los problemas. En sus respuestas, podemos observar que lo que considera el uso de problemas, para él, es el proceso y recursos necesarios para resolverlo, sin reparar en la pertinencia de su uso para la enseñanza. En la última pregunta, el docente hace hincapié que antes de crear problemas el estudiante debe entender la aplicación del tema que se está estudiando. En este sentido resulta interesante ver si en los siguientes instrumentos de recolección de información se mantiene esta misma opinión.

### **Resultados del docente 12 en la prueba de entrada**

El docente 12, desarrolló la prueba de entrada con mucha rapidez. Es importante mencionar que fue uno de los docentes en terminar primero y comentar que las preguntas le resultaron sencillas. No obstante, se observa en sus respuestas poca información al desarrollar las preguntas, no siendo explícito al mencionar cuál es el comportamiento de la función exponencial. Sus respuestas, aunque son correctas, se dan de manera directa sin detallar su razonamiento o procesos empleados. Esto podría interpretarse, por un lado, como que el docente considera importante llegar a la respuesta más que mostrar los procesos, pues asume la evaluación como un proceso de preguntas que requieren respuestas, por otro lado, podría reflejar la poca reflexión que le da a los procesos didácticos que puede emplear para sus explicaciones. Esto lo veremos más adelante en las producciones mostradas en la creación de problemas.

En la primera parte de la evaluación, al igual que en los casos anteriores, el docente identifica los elementos y conceptos que debe tener en cuenta al trabajar la función exponencial con sus estudiantes como se muestra a continuación en la siguiente figura.

**Figura 24:** *Respuesta del docente 12 a la primera pregunta*

- Elementos de la función exponencial (Regla de correspondencia, asíntotas, intersecciones con los ejes)
- Comportamiento de una función exponencial.
- Gráfico de una función exponencial

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

Podemos observar en la respuesta, que el docente trata de ser estructurado al establecer la lista de temas y conceptos relacionados a la función exponencial que se debe tener en cuenta al enseñarla. Ha mostrado también un conocimiento básico sobre el objeto matemático, aunque es claro y se deja entender. De manera parcial se acerca a lo que se esperaba que respondiera, pero sin profundizar en el rápido crecimiento de la función exponencial. En las siguientes respuestas de su prueba de entrada menciona la diferencia que encuentra entre el trabajo con el interés simple y compuesto mencionando: “La *primera es una sucesión aritmética y la segunda es geométrica en algunos casos*”, haciendo el paralelo de los modelos con las progresiones, estableciendo además que, en el caso del interés compuesto, se puede trabajar con funciones exponencial para analizar el crecimiento del dinero. En la pregunta en la cual debía resolver el problema, hizo un desarrollo bastante simplificado, no respondiendo a todas las preguntas como se solicitó pero mostrando algunos cálculos. Se consultó con el docente sobre si considera que el procedimiento presentado es claro y suficiente, a lo que mencionó que escribió lo necesario para mostrar su respuesta, y que cuando trabaja con alumnos, ellos son los que deben mostrar su trabajo con más claridad y se les da algunos ejemplos más amplios al principio. La figura 21 muestra el proceso empleado y descrito por el docente en el desarrollo del problema de cálculo de interés.

**Figura 25:** Respuesta del docente 12 a la pregunta 3

Parte (a)  $I = (2000 \times 0.05 \times 3) = 300$ Monto Final = $2000 + 300 = 2300$
Parte (b)  Monto Final = $4000(1,03)^5 = 4637.10$

Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

Analizando sus respuestas sobre lo que considera que debe tener en cuenta el profesor al crear problemas, emitió sus respuestas a manera de preguntas, es decir preguntándose si luego de que un docente crea problemas está seguro si:

- *¿Ayuda a reforzar el concepto?*
- *¿Los estudiantes poseen las herramientas cognitivas para desarrollarlo?*
- *¿Es algo retador?*

Es claro que el docente está reflexionando sobre el contenido del problema y sobre la posibilidad o no de parte del alumno de abordar con éxito el desarrollo del problema. Adicionalmente en la última pregunta el docente menciona que, sí es posible el uso de la creación de problemas con los estudiantes, pero haciendo también énfasis en que el estudiante debe comprender bien el tema antes de crear problemas. También resalta la necesidad del acompañamiento del docente para aclarar el contexto, enseñando a usar graficadores y ayudándoles con las preguntas que se espera que resuelvan. Menciona además que es necesario que el docente considere que el problema debe ser retador para el alumno, y debe considerar si es que el uso de estos problemas ayudaría a reforzar conceptos.

### **3.2.3 Análisis de los episodios creados en las actividades individuales**

A continuación, mostramos el episodio presentado en el taller a los docentes, acompañado de las reflexiones de los estudiantes que participan del episodio y que será materia de análisis durante el taller. Este problema fue leído de manera grupal con todos los docentes después de revisar los conceptos iniciales de la propuesta de creación de problemas recurso didáctico, así como luego de presentar la estrategia EPP.

**Figura 26:** Episodio presentado a los docentes para la actividad individual

**Episodio**

*El profesor Javier plantea el siguiente problema a sus estudiantes de 5to de secundaria cuando están desarrollando el tema de funciones exponenciales*

Una persona está decidiendo si debe invertir su dinero en la financiera “Ahorro” o en el Banco “Beneficio”. La Financiera le ofrece pagar un interés simple del 3% anualmente, mientras que el Banco le ofrece un interés compuesto anual del 2,5%. Si esta persona decide ahorrar \$10 000 dejando el dinero en la entidad financiera por varios años, responda a las siguientes preguntas:

- (a) Calcule el saldo (capital más interés) que tiene este inversionista al final de los primeros 5 años en ambos casos, indicando la diferencia entre ambas inversiones
- (b) ¿Después de cuántos años aproximadamente, el saldo que obtiene en el banco será mayor al saldo que obtiene en la financiera? Confirme la explicación mediante una representación gráfica.

*Algunos de los alumnos comentan:*

- **Fernando:** Creo que, como el porcentaje que le paga la financiera es mayor que el del Banco, siempre el saldo será mayor allí.
- **Julia:** El saldo con el interés compuesto será mayor después de varios años y lo podemos ver gráficamente.
- **Verónica:** Si vamos a comparar, hay que trabajar con tablas para hacerlo más rápida y claramente. Al hacer las gráficas, una de ellas será exponencial.

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

Una vez presentado el episodio, se le dio a cada docente las siguientes consignas para ser desarrolladas individualmente:

1. Resolver el problema del episodio.
2. Reflexionar acerca de los comentarios de los estudiantes Fernando, Julia y Verónica.
3. Crear un Problema Pre (es decir, un problema que haga más fácil comprender y resolver lo que pide el problema del episodio).
4. Resolver el Problema Pre creado.

**Solución del episodio presentado como modelo en el taller**

En la solución del episodio esperábamos que los docentes mostraran la respuesta a las dos preguntas dadas, empleando un proceso que evidencie los elementos que consideran necesarios para dar a entender la solución y el uso de la función exponencial.

A continuación, vemos una posible solución al problema antes de analizar las soluciones dadas por los docentes participantes:

- a) En esta primera parte del problema, vamos a desarrollar los cálculos para encontrar el saldo de cada inversión en los 5 primeros años, y a partir de ellos encontraremos las diferencias de ambas inversiones

Para calcular los saldos, trabajaremos con las dos condiciones de cada inversión:

### **Caso de la Financiera:**

La Financiera paga el 3% de interés anual, lo que significa que al final de cada año, suma al capital el 3% del monto, es decir:

Monto inicial depositado: \$ 10 000

$$\text{Año 1: } 10\,000 + 3\% (10\,000) = 10\,000 + 0,03 (10\,000) = 10\,000(1 + 0,03 \times 1) = 10\,300$$

$$\text{Año 2: } 10\,000 (1 + 0,03 \times 2) = 10\,600$$

Observamos el patrón siguiente:

$$\text{Año 3: } 10\,000 (1 + 0,03 \times 3) = 10\,900$$

$$\text{Año 4: } 10\,000 (1 + 0,03 \times 4) = 11\,200$$

$$\text{Año 5: } 10\,000 (1 + 0,03 \times 5) = 11\,500$$

### **Caso del Banco:**

El banco paga el 2,5 % de interés anual, lo que significa que cada final del año suma el 2,5% del saldo del año anterior al monto inicial, o también:

Monto inicial depositado: \$ 10 000

$$\text{Año 1: } 10\,000 + 2,5\% (10\,000) = 10\,000 + 0,025 \times 10\,000 = 10\,000(1 + 0,025)^1 = 10\,250,00$$

$$\text{Año 2: } 10\,000 + 2,5\% (10\,000) = 10\,000 + 0,025 \times 10\,000 = 10\,000(1 + 0,025)^2 = 10\,506,25$$

Observamos el siguiente patrón x:

$$\text{Año 3: } 10\,000 + 2,5\% (10\,000) = 10\,000 + 0,025 (10\,000) = 10\,000(1 + 0,025)^3 = 10\,768,91$$

$$\text{Año 4: } 10\,000 + 2,5\% (10\,000) = 10\,000 + 0,025 (10\,000) = 10\,000(1 + 0,025)^4 = 10\,038,13$$

$$\text{Año 5: } 10\,000 + 2,5\% (10\,000) = 10\,000 + 0,025 (10\,000) = 10\,000(1 + 0,025)^5 = 11\,314,08$$

En el caso de los cálculos de los montos al final de cada año en la inversión realizada en la financiera, podemos identificar un patrón aritmético, es decir, que al final de cada año se produce un incremento que en este caso es de \$300 cada final del año. Esto cambia en el caso de la inversión realizada en el banco, pues el patrón que se forma en los incrementos anuales es un patrón geométrico, es decir, que cada final del año, el monto se incrementa quedando multiplicada en 1,25 respecto del monto del año anterior.

A continuación se muestra una tabla en la cual se hace una presentación comparativa de los saldos al final de cada año, y donde podemos observar la diferencia que se genera entre ambas opciones:

**Tabla 13**

*Comparación de saldos y diferencia al final de los 5 primeros años en cada opción*

<b>Año</b>	<b>Tasa de Interés simple al 3 %</b>	<b>Tasa de Interés compuesto al 2,5 %</b>	<b>Diferencia de intereses</b>
<b>0</b>	10000,00	10000,00	0,00
<b>1</b>	10300,00	10250,00	50,00
<b>2</b>	10600,00	10506,25	93,75
<b>3</b>	10900,00	10768,91	131,09
<b>4</b>	11200,00	11038,13	161,87
<b>5</b>	11500,00	11314,08	185,92

*Fuente:* Creación propia

Como podemos observar, al final del primer año, la diferencia es de 50 dólares, y ocurre que en cada año la diferencia se hace más grande. Esto da la impresión de que conforme pasan los años el saldo en la financiera será mayor ya que las diferencias van incrementándose., sin embargo, se requiere verificar que pasa en los siguientes años y si es el caso de que el monto obtenido en el banco será mayor que el obtenido en la financiera.

- b) Para encontrar el tiempo en que el saldo de la inversión en el banco será mayor a la de la financiera, podemos comparar las diferencias mediante una tabla en la cual continuamos realizando los mismos cálculos para los siguientes años. La tabla 14, nos nuestros dichos cálculos durante 17 años:

**Tabla 14***Comparación de saldos y diferencia al final de los 17 primeros años en cada opción*

Año	Tasa de Interés simple	Tasa de Interés compuesto	Diferencia de intereses
	al 3%	al 5%	
0	10000,00	10000	0,00
1	10300,00	10250,00	50,00
2	10600,00	10506,25	93,75
3	10900,00	10768,91	131,09
4	11200,00	11038,13	161,87
5	11500,00	11314,08	185,92
6	11800,00	11596,93	203,07
7	12100,00	11886,86	213,14
8	12400,00	12184,03	215,97
9	12700,00	12488,63	211,37
10	13000,00	12800,85	199,15
11	13300,00	13120,87	179,13
12	13600,00	13448,89	151,11
13	13900,00	13785,11	114,89
14	14200,00	14129,74	70,26
15	14500,00	14482,98	17,02
16	14800,00	14845,06	<b>- 45,06</b>
17	15100,00	15216,18	<b>-116,18</b>

*Fuente:* creación propia

En la pregunta anterior, parecía que la financiera permitía tener un mayor saldo, sin embargo, vemos que conforme pasan los años, esta diferencia va reduciéndose a partir del año 9. También observamos que después del año 15 el monto de propuesta del banco será mayor, manteniéndose a partir de ese año una diferencia creciente que permite concluir que la opción del Banco pagará un mejor saldo.

Para esto podemos buscar una expresión general para cada opción como se muestra en la tabla a continuación.

**Tabla 15**

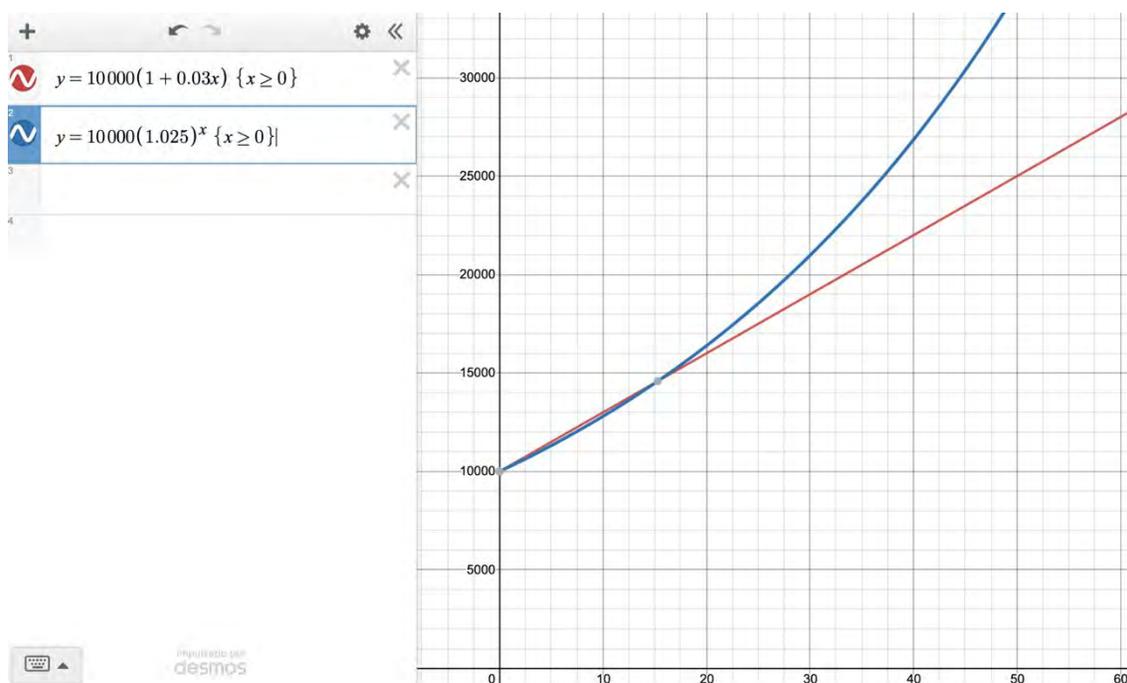
*Deducción de un modelo matemático para cada opción*

Para la Financiera	Para el banco
Año 1: $10\,000(1 + 0,03 \times 1) = 10\,300$	Año 1: $10\,000(1 + 0,0205)^1 = 10\,250$
Año 2: $10\,000(1 + 0,03 \times 2) = 10\,600$	Año 2: $10\,000(1 + 0,0205)^2 = 10\,506,25$
Año 3: $10\,000(1 + 0,03 \times 3) = 10\,900$	Año 3: $10\,000(1 + 0,0205)^3 = 10\,768,91$
Año 4: $10\,000(1 + 0,03 \times 4) = 11\,200$	Año 4: $10\,000(1 + 0,0205)^4 = 11\,038,13$
Año 5: $10\,000(1 + 0,03 \times 5) = 11\,500$	Año 5: $10\,000(1 + 0,0205)^5 = 11\,314,08$
En general para n años: Año n: $10000(1 + 0,03n)$ <b><math>A_1(n) = 10000(1 + 0,03n)</math></b>	En general para n años: Año n: $10000(1 + 0,025)^n$ <b><math>A_2(n) = 10000(1,025)^n</math></b>

*Fuente:* Creación propia

Mediante un graficador, representamos ambas gráficas y hallamos el punto de intersección entre ambos modelos, mostrando que, en el caso del modelo exponencial, a partir de un determinado valor, tendrá valores mayores que el modelo lineal, lo que se muestra a continuación en la siguiente figura.

**Figura 27:** Representación gráfica de los modelos para el cálculo del interés



Fuente: creación propia

A partir de esta gráfica, podemos confirmar con claridad que si bien al inicio, la gráfica que muestra el interés simple está por encima de la gráfica que representa el interés compuesto, este comportamiento cambia después de aproximadamente 15 años a partir del cual el saldo obtenido con el interés compuesto será siempre mayor.

En las actividades individuales, cada docente debería dedicar un tiempo aproximado de 15 minutos para resolver el problema del episodio, analizando el comentario de los estudiantes compartiendo en grupo sus soluciones y comentarios.

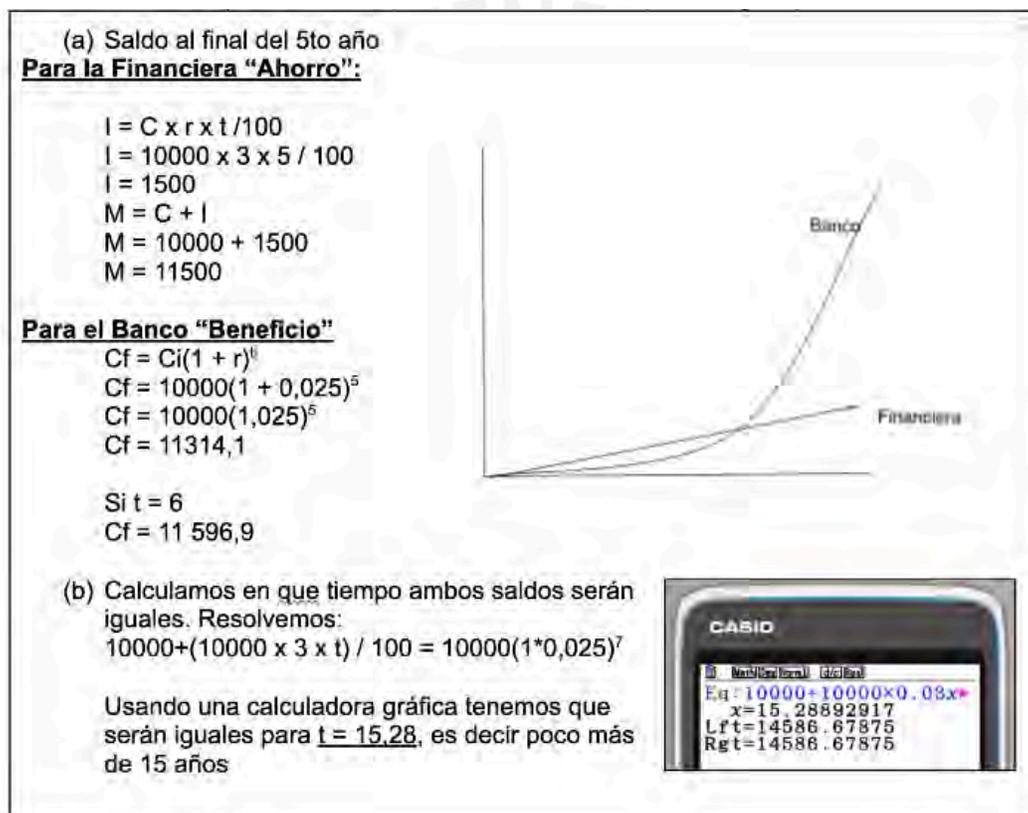
A continuación, presentamos algunas de las soluciones mostradas por los docentes de la muestra seleccionados.

### Resultados del docente 1 en la actividad individual

En la respuesta dada por el Docente 1, vemos que trabajó el problema del episodio, considerando solo el último año, a pesar de que la pregunta pedía al final de los 5 primeros años. Observamos que no respondió completamente a la pregunta, sin embargo la respuesta que dio para el quinto año es una respuesta correcta, lo que nos permite deducir que no interpretó correctamente el requerimiento que pedía calcular el monto para cada uno de los 5 primeros años. Según el desarrollo que presentó, podemos observar que emplea un enfoque gráfico para

ilustrar su respuesta, y hace uso de una calculadora de pantalla gráfica para mostrar la gráfica y para encontrar la intersección entre las curvas y dar una respuesta aproximada. Da una respuesta a cada pregunta, aunque parcialmente ya que como dijimos, no halla los saldos de cada año ni las diferencias, las cuales fueron explícitamente solicitadas en el requerimiento. Podemos inferir de sus respuestas que la comprensión del tema es clara y adecuada, aunque no da una respuesta completa a la pregunta planteada y comete un pequeño error en la aproximación de los decimales de la respuesta de su ecuación. Sus respuestas se muestran en la siguiente figura a continuación.

**Figura 28:** Solución al episodio propuesto por el docente 1



Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

### Conocimiento matemático evidenciado en la solución

Observando la solución presentada por el docente 1, encontramos evidencia de que posee habilidades matemáticas que pone en práctica para la solución del problema y que conoce y maneja con eficacia algunos conceptos asociados a la función exponencial y el manejo de modelos. Podemos señalar:

- Usa representaciones algebraicas para modelos lineales y exponenciales.

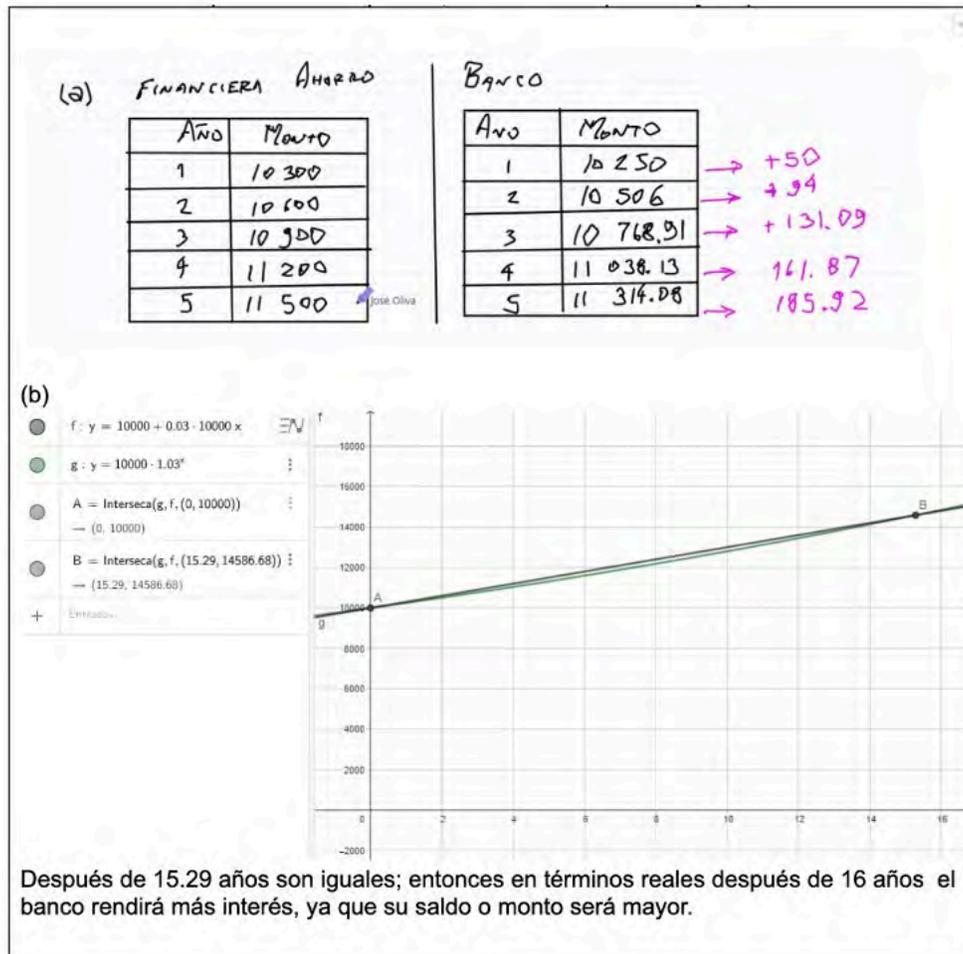
- Conoce y representa de manera general el comportamiento de las gráficas de los modelos.
- Resuelve ecuaciones empleando una calculadora.
- Calcula e interpreta la intersección de dos curvas.
- Aproxima valores e interpreta resultados discretos.

Según lo mencionado, el docente aborda el problema evidenciando un conocimiento sobre los modelos lineales y exponenciales. Aborda el problema mediante uso de calculadora gráfica, lo que nos da evidencia de un conocimiento claro y subyacente sobre la diferencia entre los modelos. Para el caso de la función exponencial, evidencia un manejo adecuado para hallar la solución de la ecuación planteada, pues no solo encuentra el valor numérico, sino también describe una solución clara y aproximada según el contexto. La presentación de esta solución nos permite suponer que el docente identificará los posibles elementos del problema que podrá variar para la elaboración del problema pre y del problema pos según la propuesta de la estrategia EPP.

### **Resultados del docente 6 en la actividad individual**

En el caso de las respuestas dadas por el docente 6, podemos observar que hace uso de una tabla de valores obtenidos para cada caso en cada uno de los 5 primeros años tal como se solicita en la pregunta. En su desarrollo podemos ver que plantea las respuestas de manera numérica al darlas en una tabla, y de manera gráfica, al usar un graficador. También establece los modelos lineales y exponenciales que se espera que debiera escribir. Comentó que no fue necesario usar una hoja de cálculo pues le bastó con una calculadora con la cual pudo hallar y escribir los resultados tal como se muestran a continuación. Se observa que da las respuestas correctas tanto en los saldos como en las diferencias solicitadas, llegando incluso a colocar los modelos matemáticos correspondientes a cada situación de interés simple e interés compuesto, lo que podemos observar en la respuesta dada en la parte (b), donde mediante un graficador, encuentra la solución de hallar después de cuánto tiempo, el saldo producido por el interés compuesto será mayor al saldo producido por el interés simple. Es claro que el docente 6 maneja adecuadamente los conceptos asociados al objeto matemático, y al mismo tiempo tiene una variedad de estrategias para resolver el problema y dar a entender su solución. En la siguiente figura podemos observar el desarrollo que le dio a la pregunta.

**Figura 29:** Solución al episodio propuesto por el docente 6



Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

### Conocimiento matemático evidenciado en la solución

El docente 6 desarrolla el problema mostrando evidencia de conocer y manejar adecuadamente conceptos matemáticos evidenciando también el manejo de habilidades claras para la solución del problema. Algunos conocimientos y habilidades son:

- Identifica los modelos lineales y exponenciales.
- Calcula valores de los montos empleando los modelos.
- Aborda gráficamente el problema, elaborando las gráficas de modelos empleando un graficador.
- Encuentra e interpreta la intersección de curvas.
- Establece patrones comparativos entre los resultados.
- Generaliza los patrones a partir de las gráficas.

Según lo indicado es posible afirmar que el docente aborda la solución del problema con un conocimiento claro de los elementos matemáticos correspondientes al uso de modelos lineales y exponenciales. También observamos que su enfoque de trabajo, en comparación con el mostrado en el desarrollo del problema de la prueba de entrada, es más amplio, permitiendo observar el manejo de las representaciones gráfica, tabular y del uso de modelos algebraicos, los cuales empleó en el graficador. Al igual que en la solución mostrada por el docente 1, el tener una solución clara, asumimos que podrá identificar las variaciones necesarias para la creación de sus problemas.

### **Resultados del docente 12 en la actividad individual**

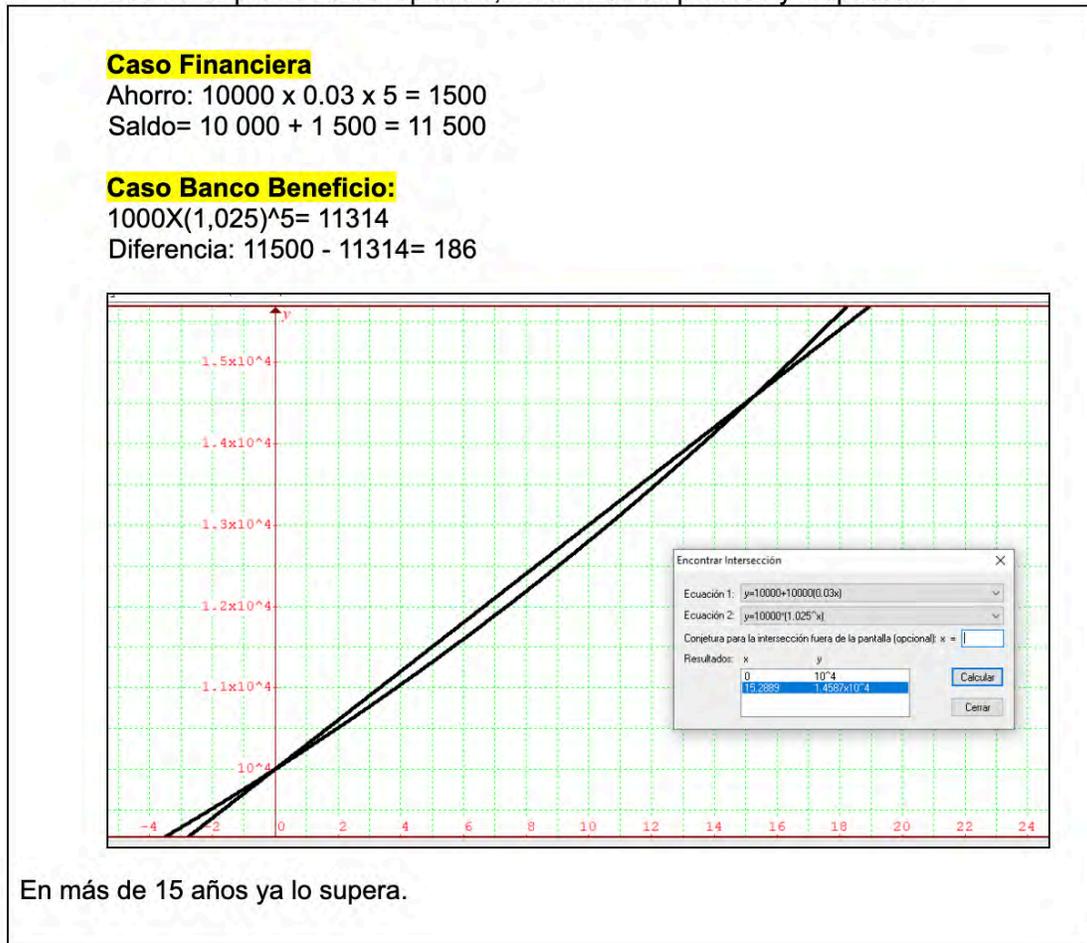
En el caso del docente 12, la solución que describe es parcial, mostrando solo el saldo para el 5to año, al igual que el primer docente. Aunque no señala la fórmula para cada modelo, es claro con el uso del graficador, que le fue posible llegar a ella para poder representar gráficamente ambos modelos. Podríamos confirmar, tal como lo hizo en la prueba de entrada, que el docente no pone mucho énfasis en mostrar los procesos pues trata de dar la respuesta directamente. Para cada modelo, hizo el cálculo y halló la diferencia dando sus aproximaciones a los enteros. Como podemos ver en su respuesta, no hizo uso de un editor de ecuaciones, por lo que se valió de la notación de exponencial usado en la calculadora. Al ser consultado en la exposición de su trabajo, mencionó que no se percató que debía hallar el saldo de cada uno de los 5 años, pero mencionó que fue un error suyo, pues en ese momento consideró que la pregunta estaba clara y fue una omisión suya.

No obstante, es claro que su intento de desarrollo pone en evidencia la comprensión del tema. Se observa que, por hallar rápidamente las respuestas, sacrifica la claridad en la explicación y un adecuado manejo de notaciones, lo que ya se viene encontrando en su trabajo desde las respuestas anteriores. En la siguiente figura mostramos su desarrollo.

Figura 30: Solución al episodio propuesto por el docente 12

**PARA RESOLVER INDIVIDUALMENTE:**

1. Resolver el problema del episodio, mostrando su proceso y respuestas.



Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

**Conocimiento matemático evidenciado en la solución**

El docente 12 muestra un desarrollo simplificado en donde podemos identificar que moviliza los siguientes conocimientos matemáticos:

- Identifica los modelos lineales y exponenciales para cada caso.
- Hace cálculos directos de los montos y las diferencias,
- Emplea recursos gráficos para representar los modelos.
- Realiza gráficas y determina intersecciones entre gráficas. Interpreta la intersección entre gráficas.

Las características descritas nos permiten observar que el docente aborda el problema con un enfoque gráfico de manera similar a la manera en que lo abordaron los otros docentes. Podemos inferir que el docente maneja las representaciones algebraicas de los modelos, los cuales son necesarios para elaborar las gráficas. No se observa identificación de relaciones entre las variables sin embargo si se puede observar procesos algorítmicos empleados para los cálculos.

Lo que buscamos en esta parte del taller, luego de que los docentes intentaran resolver el episodio, era que de manera espontánea mostraran su resolución. Algunos docentes resolvieron el problema usando recursos tecnológicos como programas graficadores, calculadoras de pantalla gráfica y hojas de cálculo, mientras que otros intentaron plantearlo a partir de las fórmulas de cálculo de interés para responder solo a los valores pedidos.

Como se ha visto en los intentos, hubo enfoques distintos para la solución, pero para los tres docentes que hemos descrito, se observó un buen intento del uso del objeto matemático función exponencial, aunque diferentes manejos de recursos y estrategias didácticas como por ejemplo el uso de recursos tecnológicos, requerimientos basados en afirmaciones por discutir y justificar o la elaboración de tablas para generar comparaciones.

Esto sirvió para que, en la siguiente etapa de trabajo colaborativo, al trabajar de manera grupal, pudieran considerar el análisis de sus problemas creados y una mejor comprensión de este para crear en conjunto un problema mejorado tanto de menor exigencia como de mayor demanda cognitiva.

Antes de que los grupos presentaran sus problemas mejorados, se realizó un breve momento de intercambio de ideas sobre los comentarios de los alumnos del episodio. Lo interesante es que la mayoría de los docentes coincidió en que la opinión dada por el estudiante Fernando, ponía en evidencia que su comprensión del problema era muy superficial, considerando las cifras en el corto plazo, no dándose cuenta de que las situaciones de inversión cambiarían con el tiempo. Esto en virtud de que no conocía detalles del crecimiento exponencial que tenía la inversión depositada a un interés compuesto. El docente 6 mencionó adicionalmente que la opinión de Fernando era correcta hasta cierto punto, pues consideraba intuitivamente la respuesta, lo que considera un primer acercamiento a una situación matemática. En el caso del docente 12, mencionó que opiniones como esta deben corregirse con preguntas adecuadas y orientando al estudiante a darse cuenta de su error.

En el caso de las reflexiones de la alumna Julia, encontramos que los comentarios de los 3 docentes coinciden en que el acercamiento de dicha alumna es correcto. El docente 1, considera que es probable que ella lidere el trabajo de su grupo, mientras que el docente 6 opinó

que es probable que sea la alumna adelantada en el curso y que probablemente conozca la respuesta del problema antes de resolverlo. El docente 12 no añadió más ideas a la opinión, salvo mencionar que la visión que la alumna tiene de la función exponencial para el interés compuesto le permite ver intuitivamente la respuesta y adelantarse a una posible solución.

En el caso de la reflexión de la estudiante Verónica, vemos que en el comentario dado por el docente 1, éste considera que la alumna se aleja del tema por estudiar. Considera que es la que va a tener más problemas para entender los conceptos relacionados con la función exponencial, ya que ve la solución del problema sin usar esta herramienta. El docente 6, por el contrario, ve en el trabajo propuesto por la estudiante Verónica, un tratamiento alternativo y válido para resolverlo. No descarta que la opinión mencionada sea buena, y la considera complementaria a uso del modelo exponencial ya que da una alternativa de trabajo para responder a las preguntas. Sugiere que el grupo inicie el trabajo con esta idea antes de pasar al modelo exponencial. En el caso del docente 12, cree que siempre y cuando de la respuesta correcta que se pide, el considera que todo proceso es válido, evidenciando como en el caso de sus respuestas en la prueba de entrada, que la reflexión didáctica de este docente no considera la pertinencia del entendimiento del proceso, pues valora más el resultado que el proceso.

Un resumen de las ideas de los docentes se presenta en la siguiente tabla, mencionando los comentarios dados por los docentes.

**Tabla 16**

*Reflexiones de los docentes sobre las opiniones de los estudiantes mostradas en el episodio*

Alumnos	Opiniones dadas por el Docente 1	Opiniones dadas por el Docente 6	Opiniones dadas por el Docente 12
<b>Fernando</b>	La idea no es correcta Es probable que no tenga los requisitos necesarios para entender el tema	Es un primer acercamiento intuitivo y correcta hasta un punto. Se debe usar para guiar un desarrollo coherente	Lo que dice no es correcto, y con el desarrollo lo verificará. Es importante que el docente formule preguntas adecuadas para corregirlo
<b>Julia</b>	Parece ser la estudiante que conoce mejor el tema. Tal vez es la “chancona” del grupo Es probable que lidere el trabajo	Siempre hay un alumno destacado en cada grupo y ella parece conocer el tema de antemano. La sugerencia de trabajar gráficamente nos da indicios que ve el problema como uso de modelo	Yo creo que ya ha resuelto antes este problema o ha leído un ejemplo resuelto. A leer el problema, intuitivamente parece que ya sabe lo que debe hacer

Alumnos	Opiniones dadas por el Docente 1	Opiniones dadas por el Docente 6	Opiniones dadas por el Docente 12
Verónica	Creo que la estudiante se aleja de lo que se está estudiante. Puede que encuentre la respuesta, pero no entenderá el tema del uso de la función exponencial para resolver problemas	Es una manera alternativa y válida para trabajar el problema. No todos los problemas se resuelven de una sola forma y ella ha buscado una alternativa al uso de la función exponencial. Si todos los alumnos usan tablas, les será más fácil entender el modelo lineal y exponencial	Ya creo que dará respuesta al problema de manera correcta. El proceso justifica la respuesta la cual es lo importante al resolver un problema.

*Fuente:* Creación propia con los resultados de las respuestas en la actividad grupal

Es importante mencionar que los aportes de los docentes a la interpretación de los comentarios de los estudiantes del episodio, permite observar cómo puede analizarse la cercanía o lejanía de las ideas de los alumnos al concepto estudiado a partir de sus comentarios. Si bien los comentarios se pueden observar que son de manera general, éstos pueden dar evidencia de cómo entienden el modelo y la situación presentada como un caso de aplicación de la función exponencial.

### 3.2.4 Descripción de la aplicación de la prueba de salida

La prueba de salida (ver anexo 4), fue diseñada tomando en cuenta las actividades individuales y grupales desarrolladas en el taller, considerando que éstas permitieron que los docentes asimilaran la estrategia EPP para la creación de problemas y considerando que el desarrollo de problemas pre y problemas pos, movilizaron y activaron los conocimientos que se tenía sobre el objeto matemático función exponencial. Las preguntas fueron diseñadas en parte repitiendo las mismas consignas solicitadas en la prueba de entrada sobre los conceptos relacionados con el objeto matemático y que es lo que se debe tener en cuenta al enseñar dicho tema con estudiantes de educación secundaria.

En esta prueba se pone énfasis en el uso de la estrategia EPP, verificando en la mayoría de las preguntas la capacidad del docente de identificar cada uno de los pasos para crear problemas pre y pos a partir del episodio, poniendo en evidencia que es posible disminuir la

exigencia en las preguntas o aumentar el nivel de demanda cognitiva respectivamente. Se hizo un diseño basado en las actividades que se realizaron para familiarizar a los docentes con la estrategia, ya que como se mencionó en la descripción de la muestra, casi la totalidad de los docentes mencionó que no conocía y que nunca había aplicado esta estrategia en la enseñanza de las funciones exponenciales u otro tema.

La prueba también contiene preguntas sobre el objeto matemático función exponencial, permitiendo recoger evidencia de una mejor comprensión de este y ver lo que el profesor considera importante y prioritario al desarrollar dicho tema. Estas preguntas, que son similares a las presentadas en la prueba de entrada, nos permitieron hacer un análisis comparativo de la movilización de los conceptos sobre la función exponencial, lo cual comentaremos en el siguiente apartado del análisis.

En la tabla No. 17 mostrada a continuación, podemos ver los detalles de lo que se pregunta y lo que se espera en cada una de las preguntas de la evaluación.

**Tabla 17**

*Descripción a priori de lo que se pide en cada pregunta de la prueba de salida*

No.	Pregunta	Lo que se espera que respondan
1	Escribe 3 conceptos importantes asociadas a la función exponencial que considere deben tener en cuenta los docentes al enseñar este tema con sus estudiantes.	Se espera que el docente mencione la relación que existe entre las variables involucradas en una función exponencial, se espera que comenten sobre la variación porcentual que se mantiene constante. Se espera que los docentes indiquen que la variable $f(x)$ varía de manera porcentual constante, formando una progresión geométrica. Se espera que mencione conceptos asociados a la función exponencial como las propiedades, uso de logaritmos, resolución de ecuaciones con propiedades o logaritmos, condiciones de la base del exponencial y características de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, entre otros.
2	Después de participar en el taller de Creación de problemas, ¿considera que esta estrategia es útil para la enseñanza de la función exponencial u otros temas de matemáticas? Comente brevemente su respuesta.	Se espera que el docente pueda mencionar parte de las experiencias vividas en el taller, mencionando lo pertinente de la estrategia, y cómo encuentra útil este recurso didáctico. En los comentarios esperamos ver evidencias de haber asimilado la propuesta didáctica proponiendo cómo usarla en la enseñanza de otros conceptos

No.	Pregunta	Lo que se espera que respondan
3	<p>A continuación, se le presenta un problema de interés: Un inversionista tiene la opción de depositar \$3000 en una cuenta de ahorros en una financiera que paga un interés simple del 4,75% anual, o depositarlo en un banco que le ofrece pagar el 4 % de interés compuesto mensual%. Se desea saber después de cuánto tiempo la inversión en el Banco tendrá un saldo mayor que la de la financiera.</p> <p>(a) <b>Elabore un problema pre,</b> (b) <b>Elabore un problema pos,</b></p>	<p>Esperamos que el docente pueda construir:</p> <p>(a) <b>Un problema pre,</b> describiendo los elementos que lo hagan similar al problema propuesto, pero con un evidente menor grado de dificultad y que facilite entender el problema mencionado.</p> <p>(b) <b>Un problema pos,</b> similar al problema propuesto, pero detallando evidentemente las características del problema que lo hagan más retador y con una mayor carga cognitiva.</p> <p>En ambos casos, no se solicita resolverlo (por el tiempo) pero si se espera que el docente comente porqué lo considera un problema pre y un problema pos. Esperamos también encontrar evidencias de las ideas trabajadas en los plenarios del taller.</p>
4	<p>Responda brevemente a las siguientes preguntas</p> <p>(a) Mencione 3 ideas importantes sobre el uso de la creación de problemas para la enseñanza de la función exponencial</p> <p>(b) Comente las dificultades que puede encontrar al usar la creación de problema como estrategia para la enseñanza de la función exponencial.</p>	<p>En esta sección se espera que el docente:</p> <p>(a) Seleccione y comente 3 ideas que considere importantes a modo de ejemplo, que puede haber asimilado como resultado del taller de creación de problemas y que pueda ser usado en la enseñanza de la función exponencial.</p> <p>(b) Mencione cuáles son las dificultades que podrían aparecer, en el uso de la estrategia como por ejemplo el desconocimiento de la estrategia EPP, la falta de tiempo para implementarla o alguna dificultad para trabajar en grupo. Puede mencionar también que el tema de la función exponencial es muy abstracto para iniciar un problema.</p>

Fuente: creación propia

A continuación, describiremos aspectos relevantes encontrados en las evaluaciones de salida de los docentes 1, 6 y 12. Estos resultados los comentaremos y compararemos con algunas de las respuestas de la prueba de entrada. En esta parte trabajaremos principalmente con las preguntas relacionadas con la función exponencial y el uso de la estrategia EPP, buscando describir lo que los docentes encontraron en la aplicación de la misma.

La calificación de las producciones de problemas pre y pos los realizaremos empleando una rúbrica planteada para dar puntaje a las producciones (ver anexo 9). Estas calificaciones y comentarios serán presentados en detalle en la siguiente parte.

## Respuestas del Docente 1 a la prueba de salida

En cuanto a la primera pregunta de la prueba de salida en donde se le pide identificar los conceptos importantes relacionados a la función exponencial que debe tener en cuenta al enseñar, vemos que el docente plantea una respuesta similar a la que dio a la prueba de entrada donde se le hizo una pregunta similar pidiéndole que señale los conceptos sobre la función exponencial que considera importante trabajar con los estudiantes. En la prueba de salida, su respuesta la presentó de manera más estructurada pues enumera los conceptos agrupándolos por elementos, conceptos y representaciones gráficas. No obstante, comparando con las respuestas dadas en la prueba de entrada, prácticamente coloca las mismas ideas. La tabla 18 nos muestra las respuestas de la pregunta 1 con las ideas que el docente considera importante para la enseñanza de la función exponencial.

**Tabla 18**

*Respuestas del docente 1 a la primera pregunta de la prueba de salida*

Pregunta	Respuesta del docente
<b>Prueba de Salida:</b> Escribe 3 conceptos importantes asociadas a la función exponencial que considere deben tener en cuenta los docentes al enseñar este tema con sus estudiantes.	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"><p>Elementos de una potencia, la base y el exponente.</p><p>Conceptos de función, dominio, rango, regla de correspondencia.</p><p>Representación gráfica de una función en el plano bidimensional.</p></div>

*Fuente:* creación propia a partir de las respuestas del docente 1

Para analizar las respuestas que el docente 1, dio sobre el uso de la estrategia EPP, mostramos en la siguiente tabla, las ideas que presentó sobre su utilidad, importancia y dificultades de su aplicación:

**Tabla 19**

*Respuestas del docente 1 a las preguntas 2 y 4 de la prueba de Salida*

Preguntas	Respuesta del docente 1
2. Después de participar en el taller de Creación de problemas, ¿considera que esta estrategia es útil para la enseñanza de la función exponencial u otros temas de matemáticas? Comente brevemente su respuesta.	Definitivamente, es muy importante conocer y aplicar dicha estrategia en el trabajo con los estudiantes dado que contribuye significativamente a desarrollar en ellos las competencias, capacidades y desempeños matemáticos para resolver problemas de diversos contextos. Al crear problemas, los estudiantes muestran una mejor comprensión del problema, pues deben modificar un elemento del mismo y así se ayudan y se exigen a comprenderlo mejor.
4. (a) Mencione 3 ideas importantes sobre el uso de la creación de problemas para la enseñanza de la función exponencial	<i>La creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema.</i> <i>Un problema puede ser elaborado por variación de un problema dado, según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más elementos del problema dado como es el caso del contexto de una situación dada.</i> <i>Un problema también puede ser generado por elaboración, en forma libre, a partir de una situación dada o configurada o a partir de un requerimiento específico de orden matemático o didáctica.</i>
4. (b) Comente las dificultades que puede encontrar al usar la creación de problema como estrategia para la enseñanza de la función exponencial.	<i>Como capacitador de profesores, se recomienda realizar a través del MINEDU la orientación en el desarrollo de la destreza de abordar y resolver problemas en diversos contextos, a nivel financiero, médico, ciencia física, etc.</i> <i>Los profesores deben ir más allá del rol de sólo resolver problemas. Deben ser hábiles en el descubrimiento y en la creación correcta de problemas que requieren soluciones.</i> <i>Si los maestros no conocen la existencia de estas estrategias, continuarán en la enseñanza tradicional, mecánico y memorística en cualquiera de los tópicos del área, incluyendo la exponencial.</i>

*Fuente:* creación propia a partir de las respuestas del docente 1

Podemos observar que en la segunda pregunta se le solicitó mencionar si considera útil el uso de la estrategia EPP para la enseñanza de la función exponencial, y en la pregunta 4, se le pidió que comentara por un lado las ideas importantes sobre el uso de esta estrategia y por otro lado que indique las dificultades que puede encontrar en el uso de la misma.

En el caso del docente 1, menciona que le parece importante conocer y usar esta estrategia pues le parece que contribuye al desarrollo de competencias matemáticas especialmente para resolver problemas. Es interesante encontrar que el docente señala como

un aspecto importante la modificación para crear un nuevo problema y cómo esto ayuda a mejorar la comprensión de la función exponencial. En la pregunta 4, describe ideas de lo aprendido en el taller sobre lo que significa crear problemas. Podemos observar que identifica las dos posibilidades de crear un problema (por variación y elaboración), y evidencia en su descripción una comprensión de la estrategia. Sobre las dificultades que considera que puede encontrar en el uso de esta estrategia, menciona la necesidad de capacitación para el docente para desarrollar una buena destreza para elaborar problemas en diferentes contextos. Menciona además que, si los docentes no conocen esta estrategia, reproducirán enseñanzas tradicionales mecánicas y memorísticas.

Considerando las respuestas del docente 1, podemos concluir que su participación en el taller fue productiva por las evidencias de comprensión de la estrategia y la consideración de la misma como alternativa para la enseñanza. Podemos inferir de sus respuestas que las ideas compartidas en el taller sirvieron para que el docente identificara la estrategia EPP y considere el uso de la creación de problemas como una estrategia válida y viable para su trabajo. También podemos interpretar que el uso de la estrategia para la enseñanza de la función exponencial, resultó ser una experiencia ilustrativa de la aplicación de la creación de problemas.

### **Respuestas del Docente 6 a la prueba de salida**

En el caso del docente 6, al analizar sus respuestas a la pregunta 1 en comparación con la dada en la prueba de entrada, destaca con más claridad los conceptos asociados a la función exponencial como es el caso de la definición de potenciación y radicación, el uso de ecuaciones exponenciales y el uso de dichos conceptos en el cálculo del interés compuesto. En su respuesta enumera los elementos que conforman la función exponencial y el uso de ecuaciones exponenciales esta vez, incluyendo la posibilidad de usar logaritmos y las aplicaciones como el cálculo del interés compuesto o crecimiento exponencial.

Es claro que luego del taller, organiza con claridad los conceptos y las aplicaciones al mencionar lo que debe considerar importante para su enseñanza. Podemos observar su respuesta a la pregunta inicial de la prueba de salida en la tabla 20.

**Tabla 20**

*Respuestas del docente 6 a la primera pregunta de la prueba de salida*

Preguntas	Respuestas del docente 6
<b>Prueba de Salida:</b> Escribe 3 conceptos importantes asociadas a la función exponencial que considere deben tener en cuenta los docentes al enseñar este tema con sus estudiantes.	<ul style="list-style-type: none"><li>• La definición de Potenciación y Radicación como exponente Fraccionario, incluyendo las leyes de Exponentes. Exponente negativo.</li><li>• Ecuaciones Exponenciales usando propiedades de los exponentes y logaritmos para valores aproximados con calculadora</li><li>• Aplicaciones del uso de exponenciales como el Interés Compuesto y el crecimiento exponencial</li></ul>

*Fuente:* creación propia a partir de las respuestas del docente 6

Para la respuesta que el docente 6 dio a la pregunta 2 sobre si considera útil la estrategia trabajada, destaca la mención que hace de la ventaja de lograr un adecuado trabajo cooperativo lo cual permite el uso de esta estrategia ya que abre un espacio de diálogo entre los alumnos participantes, tanto en el momento de resolver el problema, analizar los comentarios de los estudiantes, y tratar de crear un problema pre y un problema pos. Por otro lado, menciona que al crear sus propios problemas, considera que los estudiantes entenderán mejor el problema pues para crearlo deben analizarlo de diferentes formas. Es claro que el docente identifica claras ventajas en la estrategia, ya que en la siguiente pregunta destaca que con ella, se entienden mejor el uso de modelos exponenciales, y hay cooperación entre los alumnos a partir del uso de las habilidades que tengan más desarrolladas, como el desarrollar los cálculos o gráficas o manejo de tecnología, incluso reconoce que los hace más imaginativos y con la capacidad de considerar más de una propuesta de solución a un problema. Sobre las dificultades que señala que se pueden presentar al aplicar esta estrategia, menciona que el tiempo puede ser un problema, pues para él, en el nivel secundario a veces hay muchos temas que deben trabajarse y cumplirse por lo que no pueden detenerse mucho tiempo en un solo tema. También menciona que puede hallar dificultades en el nivel de motivación que pueden traer los estudiantes a la clase, ya que al parecer en su experiencia, encuentra que algunos alumnos pueden preferir trabajar solos especialmente si para ellos, aprender matemáticas consiste básicamente en resolver problemas.

Las respuestas dadas por el docente, y algunos de sus comentarios sobre la importancia y dificultades para aplicar la estrategia se muestran en la tabla 21.

**Tabla 21**

*Respuestas del docente 6 a las preguntas 2 y 4 de la prueba de Salida*

Preguntas	Respuestas del docente 6
2. Después de participar en el taller de Creación de problemas, ¿considera que esta estrategia es útil para la enseñanza de la función exponencial u otros temas de matemáticas? Comente brevemente su respuesta.	<i>La encuentro muy interesante y práctica, pues permite que los alumnos trabajen de manera cooperativa. A veces unos saben más que otros o tienen más habilidad para resolver problemas. Si además crean sus propios problemas, me parece que entenderán mejor el problema, y lo que se pide en ellos. La encontraría útil para problemas de aplicación en donde se valora más de una forma de resolver un problema matemático.</i>
4. (a) Mencione 3 ideas importantes sobre el uso de la creación de problemas para la enseñanza de la función exponencial	<i>Creo que los alumnos entienden más un problema después de analizarlo de diferentes maneras, pues necesitan ver cómo emplear los modelos exponenciales. Promueve el trabajo cooperativo en el aula. Unos serán buenos haciendo los cálculos de los montos, otros pueden ser más hábiles graficando las funciones exponenciales digamos al manejar las escalas para que se vea bien. Hace que los alumnos sean más imaginativos y consideran varias opciones o diferentes formas de preguntar por el uso del interés compuesto anual.</i>
4. (b) Comente las dificultades que puede encontrar al usar la creación de problema como estrategia para la enseñanza de la función exponencial.	<i>Principalmente me parece que el tiempo sería un problema. A veces debemos trabajar muchos temas que el programa propone y no nos podemos detener mucho en un solo tema. También puede ser que algunos alumnos no estén motivados y prefieren trabajar solos. Algunos pueden pensar que aprender matemáticas es resolver problemas y no solo entenderlos o crearlos. También si vamos a usar este método para problemas de interés simple y compuesto, debemos darles las fórmulas pues no todos los alumnos tienen la capacidad de encontrar la información que necesitan.</i>

*Fuente:* Creación propia a partir de las respuestas del docente 6

Según estas respuestas, también podemos considerar que el docente encontró el taller muy interesante según lo menciona, pues le permitió ver una oportunidad para promover el trabajo cooperativo. Una ventaja adicional que señala es que, al crear problemas, considera que los podrán entender mejor, especialmente al tener la posibilidad de verlos desde diferentes maneras de solución y trabajándolo de manera cooperativa. Otra ventaja que señala el docente

es que la experiencia de trabajo hace que los alumnos sean más imaginativos, y que al trabajar con la función exponencial encontrarán diferentes formas de aplicar el objeto matemático y hacer preguntas sobre el interés compuesto.

En relación a la creación de problemas, consideramos que las apreciaciones del docente muestran un interés en trabajar esta estrategia didáctica, ya que señala varias ventajas como promover el pensamiento creativo, incentivar el uso del pensamiento divergente y la búsqueda de varias formas de desarrollo de un problema, siendo los estudiantes quienes planteen diferentes requerimientos al crear sus problemas.

### Respuestas del Docente 12 a la prueba de salida

Analizando las respuestas de la primera pregunta del docente 12, también observamos que, en la prueba de salida, precisa de una manera más clara y detallada los conceptos que deben ser trabajados cuando enseña función exponencial. Es evidente que, respecto de su prueba de entrada, ahora considera importante trabajar problemas contextualizados ajustando los valores del dominio y del rango en los modelos exponenciales para darle sentido a la situación problemática. En cuanto a los detalles de la gráfica de la función, en la prueba de entrada sólo había mencionado de manera general que consideraba importante trabajar el comportamiento de la función y su gráfica, sin embargo, en la prueba de salida, amplía y precisa más las ideas que considera que debe trabajar, como por ejemplo las características de la gráfica cuando la base del exponencial es menor o mayor a 1. Podemos encontrar en la tabla 22 la respuesta que dio el docente.

### Tabla 22

*Respuestas del docente 12 a la primera pregunta de la prueba de salida*

Preguntas	Respuestas del docente 12
<p><b>Prueba de Salida:</b></p> <p>Escribe 3 conceptos importantes asociadas a la función exponencial que considere deben tener en cuenta los docentes al enseñar este tema con sus estudiantes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Componentes de la función exponencial (Base, exponente, regla de correspondencia)</li> <li>• Limitaciones de los componentes de una función exponencial. (que pasa cuando la base es mayor o menor que 1)</li> <li>• Ajustar dominio y rango de la función exponencial al trabajar problemas contextualizados. (Los valores no pueden ser infinitos)</li> </ul>

*Fuente:* creación propia a partir de las respuestas del docente 12

En la respuesta, podemos observar que el docente considera importante hablar de los componentes o elementos de la función exponencial, algunas limitaciones considerando las posibles bases de la función y la necesidad de ajustar el dominio y rango como parte del modelo dependiendo del contexto de trabajo.

Según estas respuestas, podemos observar que el docente 12, ha considerado algunos detalles que considera importante tener en cuenta al enseñar la función exponencial como son sus elementos los cuales detalla y suponemos que se refiere a la construcción del modelo y la representación gráfica. Por otro lado, creemos que cuando habla de las limitaciones, se refiere a darle significado en el contexto a la variable que usa así como interpretar el comportamiento de dependencia entre variables ya que en el contexto del problema, los valores que pueden tomar las variables pueden no tener sentido como es el caso de los valores negativos o si es el caso el hecho de que no pueden asumir valores muy grandes o infinitos. Considerando a la creación de problemas como estrategia didáctica aplicable en sus clases, el docente menciona que puede emplear un problema creado por los estudiantes para que sean ellos quienes identifiquen los elementos y trabajen con las limitaciones que indica. Podríamos inferir que el docente considera que la creación de problemas permitiría que al enunciar un problema se tenga que profundizar en el conocimiento y entendimiento de dichos conceptos. Así mismo la función exponencial podría ser trabajada a partir del análisis de las limitaciones y condiciones del dominio y rango y así lograr ejercitar el pensamiento crítico.

Al considerar las respuestas de la pregunta 2 sobre la utilidad que encuentra en la estrategia de creación de problemas, encontramos que menciona la posibilidad de orientar a los estudiantes a ir de lo más simple a lo más complejo, Esto le permitiría plantear el desarrollo de problemas pre y luego el uso de problemas pos manejando la gradualidad de la exigencia, elaborando tareas previas y de fácil entendimiento y problemas más retadores respectivamente. El docente menciona antes haber aplicado esta estrategia similar, pero no con el detalle trabajado en el taller, mencionando que encuentra útil y beneficioso el desarrollo de las actividades planteadas. En la pregunta 4, resalta el poder plantear un proceso secuencial de trabajo, hacer más activa la clase con sus estudiantes y el tener una mayor claridad al hacer las preguntas de un problema. También menciona la dificultad del tiempo, ya señalada por otros docentes entre otras dificultades al aplicar la estrategia, pues comenta que encuentra que no todos los estudiantes están dispuestos a trabajar grupalmente así como la heterogeneidad de los niveles de los estudiantes para resolver problemas.

En la tabla 23, que presentamos a continuación podemos encontrar las respuestas del docente anteriormente comentadas .

**Tabla 23**

*Respuestas del docente 12 a las preguntas 2 y 4 de la prueba de Salida*

<b>Preguntas</b>	<b>Respuestas del docente 12</b>
2. Después de participar en el taller de Creación de problemas, ¿considera que esta estrategia es útil para la enseñanza de la función exponencial u otros temas de matemáticas? Comente brevemente su respuesta.	<i>Sí, me permite partir de lo más simple a lo más complejo usando Pre y Pos, con una participación activa del estudiante. A veces he aplicado esta estrategia, pero no tan en detalle. Ahora lo encuentro más útil</i>
4. (a) Mencione 3 ideas importantes sobre el uso de la creación de problemas para la enseñanza de la función exponencial	<i>Da un proceso secuenciado de aprendizaje. Da la oportunidad de participación más activa del estudiante. Da mayor claridad de entorno y requerimientos.</i>
4. (b) Comente las dificultades que puede encontrar al usar la creación de problema como estrategia para la enseñanza de la función exponencial.	<i>Toma mayor tiempo. No todos los estudiantes pueden estar dispuestos a trabajar en ello. En clase es difícil promover el trabajo en grupo para resolver problemas de matemáticas pues no todos tienen el mismo nivel</i>

*Fuente:* Creación propia a partir de las respuestas del docente 12

Al igual que en los casos anteriores, podemos observar que la experiencia de trabajo en el taller con el docente 12, ha significado una oportunidad de mejorar la forma en que entender los conceptos que maneja al enseñar la función exponencial. También podemos inferir en sus respuestas que esta estrategia le permitirá identificar la estructura de la estrategia y características de su aplicación. Desde la perspectiva del uso de la creación de problemas, vemos que el docente considera que la estrategia permite una mayor claridad del entorno y de los requerimientos del problema. Como toda estrategia, para el docente se presentan dificultades entre las cuales señala también el tiempo que debe emplear el cual considera que será mayor, y el hecho que no todos los estudiantes pueden estar dispuestos a trabajar grupalmente. Estos son aspectos que señala el docente y podrían ser válidos y necesarios de tomar en cuenta en la aplicación de la estrategia.

Como podemos observar en las tres descripciones dadas, los tres docentes han evidenciado mejoras en la comprensión de los conceptos que deben tener en cuenta al enseñar

este objeto matemático como es el caso de identificar con claridad los elementos, las dificultades de su aplicación y la posibilidad de plantear los requerimientos con claridad.

A continuación, desarrollaremos una revisión de los productos de los docentes, empleando nuestra rúbrica de evaluación, considerando los desarrollos individuales y grupales.

### 3.2.5 Análisis de los problemas pre creados

En esta parte, se presentarán los problemas pre creados por los docentes en la actividad individual y en la prueba de salida con los correspondientes análisis a dichas producciones. También presentaremos la puntuación obtenida en cada problema empleando la rúbrica de calificación y comentando brevemente dichos resultados.

A continuación, se mostrarán y comentarán los problemas pre creados por los docentes 1, 6 y 12 durante las actividades desarrolladas en el taller.

#### Creación del problema pre de Docente 1 en la actividad individual

En la Figura 27, reproducimos la imagen del problema pre creados por el docente 1 el cual desarrolló al final de la primera sesión de trabajo individual.

**Figura 31:** Episodio propuesto por el docente 1 en la actividad individual

2. Crear individualmente un Problema Pre (es decir, un problema que haga más fácil comprender y resolver lo que pide el problema del episodio). Justificar porque considera que es un problema pre.

**Problema Pre**

Una persona está decidiendo si debe invertir su dinero en la financiera “Ahorra más” o en el Banco “Siempre ganas”. La Financiera le ofrece pagar un interés simple del 3% anualmente, mientras que el Banco le ofrece un interés compuesto anual del 2%. Si esta persona decide ahorrar \$1000 dejando el dinero en la entidad financiera por un año, responda la siguientes pregunta:

- Calcule el saldo (capital más interés) que tiene este inversionista al final del año en ambos casos, indicando la diferencia entre ambas inversiones
- ¿Dónde se ganó más?

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

#### Conocimiento matemático evidenciado en la creación del problema

En el enunciado propuesto por el docente 1, podemos identificar que plantea un contexto similar al del episodio mostrado, no realizando mayor variación en el entorno matemático el cual plantea el cálculo de montos al final de un año. Identificamos la movilización de los siguientes conocimientos matemáticos.

- Uso del modelo lineal para determinar la inversión de dinero en el contexto de interés simple.
- Uso del modelo exponencial para determinar la inversión de dinero en el contexto de interés compuesto anual.
- Cálculo de saldos. Empleo de recursos tecnológicos.
- Análisis y justificación de la mayor ganancia.

En esta producción podemos observar que la variación desarrollada por el docente está básicamente orientada al contexto y el requerimiento. Sin embargo, la propuesta no se diferencia mucho del problema presentado en el episodio. Es claro que si bien el docente entendió la consigna de bajar el nivel de exigencia en el problema y proponer un problema que facilite la comprensión del episodio mostrado, su producción no fue muy adecuada ya que reprodujo un problema similar y los requerimientos no añadieron pasos o tareas previas que acerquen más rápidamente al estudiante a la solución del problema. Los conocimientos vinculados a la función exponencial no se describen con claridad ya que los requerimientos se centran en el cálculo y los procesos.

No presentó algún comentario a su problema justificando porqué lo considera un problema pre tal como se solicitó en la actividad, sin embargo, en la entrevista posterior que se hizo y se comenta en el siguiente apartado, aclaró su la explicación de porque lo considera un problema pre.

A continuación, mostramos la siguiente figura, donde indicamos la calificación otorgada al problema pre creado empleando la rúbrica de propuesta para la evaluación de problemas.

**Figura 32: Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 1**

Rúbrica para Analizar el problema Creado							
Docente 1		Nombre de la actividad: Problema creado en la ACTIVIDAD INDIVIDUAL				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> Una persona está decidiendo si debe invertir su dinero en la financiera "Ahorra más" o en el Banco "Siempre ganas". La Financiera le ofrece pagar un interés simple del 3% anualmente, mientras que el Banco le ofrece un interés compuesto anual del 2%. Si esta persona decide ahorrar \$1000 dejando el dinero en la entidad financiera por un año, Calcule el saldo (capital más interés) que tiene este inversionista al final del año en ambos casos, indicando la diferencia entre ambas inversiones ¿Dónde se ganó más?						Problema de cálculo y proceso	
						Problema de la vida real	X
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	
						Problema de comparación	X
						Otros: Cálculo de valores y uso de modelo	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	X
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
X			X		X	Otros: Comparación por diferencia	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(0) Uno o mas requerimientos de dificultad gradual	(0) Único problema diferente a los demás	(0) Propone un problema con 4 requerimientos	3		Calidad alcanzada		
(1) Puede responder de varias formas	(0) El problema se distingue de los demás	(0) Propone un problema con 3 requerimientos					
(0) Favorece la conexión con varios temas	(0) Presenta novedad en la información	(1) Propone un problema con 2 requerimientos					
(0) Favorece la conexión otras áreas de conocimiento	(0) Presenta novedad en el requerimiento	(1) Propone un problema con 1 requerimiento					
Puntaje obtenido	Puntaje obtenido	Puntaje obtenido	Calidad alcanzada		Calidad Baja		
1	0	2					

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

Tal como podemos observar, en el criterio de Flexibilidad y Originalidad, la producción recibió una baja calificación. Podemos observar que la redacción del enunciado es simple y reducida, no distinguiéndose de los demás problemas y no presentando novedad en la información. Observamos que el problema modifica los elementos del problema considerando solo dos requerimientos. En cuanto a la redacción, podemos observar que presenta de manera muy simplificada el contexto, no variando mucho del contexto presentado en el episodio. Si bien es claro que el problema pertenece a la vida real y mantiene una consigna de elaborar comparaciones entre modelos, mantiene requerimientos centrados en la elaboración de cálculos.

Finalmente podemos encontrar que con el problema creado, el docente 1 evidencia que conoce el modelo exponencial y lo asocia la situación de inversión de dinero en el contexto del interés anual, diferenciándolo del modelo lineal para el interés simple, aunque hay mucha similitud con el problema del episodio mostrado, no encontrando muchas modificaciones significativas. Esto muestra una comprensión similar en cuanto a la función exponencial. Con este análisis concluimos que la calidad alcanzada en esta producción es baja.

### Creación del problema pre del Docente 1 en la prueba de salida

A continuación, en la figura 29, reproducimos la imagen del problema pre creado por el mismo docente en la prueba de salida, al final de todo el taller.

**Figura 33:** Problema pre creado por el docente 1 en la prueba de salida

3. A continuación se le presenta un problema de interés:  
Un inversionista tiene la opción de depositar \$3000 en una cuenta de ahorros en una financiera que paga un interés simple del 4,75% anual, o depositarlo en un banco que le ofrece pagar el 4 % de interés compuesto mensual%. Se desea saber después de cuánto tiempo la inversión en el Banco tendrá un saldo mayor que la de la financiera.

(a) **Elabore un problema pre**, es decir, un problema que facilite la comprensión y la elaboración de la solución de este problema. (No es necesario mostrar su solución) Comente en qué sentido ayudaría.

Un inversionista tiene la opción de depositar \$3000 en una cuenta de ahorros de un banco que paga un interés del 4% de interés simple, o depositarlo en una financiera que le ofrece pagar el 3.5 % de interés compuesto anual.

(a) ¿Donde ganaría más el inversionista luego de 5 años?  
(b) Si deposita el dinero y lo retira después de 10 años, ¿la ganancia seguiría siendo mayor en la misma entidad financiera que en la parte (a) ?  
(c) Mediante una tabla, encuentre el monto ganado en los primeros 10 años  
(d) Muestre gráficamente los valores de la tabla anterior, escribiendo para cada caso un modelo matemático.

**Comentario:**  
*Considero que es un problema pre porque trabaja las primeras preguntas de modo comparativo y lleva al alumno a analizar poco a poco cómo los modelos son distintos para llegar a concluir en la última pregunta que el interés compuesto que se modela con una función exponencial crecerá más que el interés simple*

Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

### Conocimiento matemático evidenciado en la creación del problema

La elaboración de este problema por el docente 1 contiene más elementos y aunque mantiene el mismo contexto del episodio, se observa un intento por mejorar la propuesta de un problema pre. Podemos identificar la movilización de los siguientes conceptos matemáticos considerados en la creación:

- Uso del modelo lineal para determinar la inversión de dinero en el contexto de interés simple.
- Uso del modelo exponencial para determinar la inversión de dinero en el contexto de interés compuesto anual.
- Cálculo de montos después de periodos específicos de tiempo.
- Plantea enunciados que requieren discusión, análisis y justificación.
- Realiza representaciones tabulares en diversos periodos de tiempo.
- Realiza representaciones algebraicas y gráficas de los modelos.

Comparando con la producción inicial del problema desarrollado en la actividad individual, podemos observar que en el problema se observa más original ya que plantea una secuencia de preguntas que gradúa las tareas que se debe desarrollar al resolver el problema. Si bien plantea de inicio un requerimiento de comparación cuantitativa, orienta a través de las preguntas el proceso que el estudiante debe seguir para elaborar dicha comparación, la cual deberá confirmar gráficamente.

Adicionalmente, podemos observar que, en esta oportunidad, el docente elaboró un comentario sobre su problema pre donde planteaba una breve justificación de porque consideraba que es un problema pre. En esta justificación señala que el problema lleva al alumno a analizar poco a poco los modelos y que ello le ayudará concluir en la última pregunta que el interés compuesto crecerá más que el interés simple. La rúbrica de calificación del producto mostrado se puede observar en la siguiente figura.

**Figura 34: Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 1**

Rubrica para Analizar el problema Creado							
Docente 1		Nombre de la actividad:			Tipo de problema		
		Problema PRE creado en la Prueba de Salida					
<b>Problema creado:</b> Un inversionista tiene la opción de depositar \$3000 en una cuenta de ahorros de un banco que paga un interés del 4% de interés simple, o depositarlo en una financiera que le ofrece pagar el 3.5% de interés compuesto anual. (a) ¿Dónde ganaría más el inversionista luego de 5 años? (b) Si deposita el dinero y lo retira después de 10 años, ¿la ganancia seguiría siendo mayor en en la misma entidad financiera que en la parte (a)? (c) Mediante una tabla, encuentre el monto ganado en los primeros 10 años. (d) Muestre gráficamente los valores de la tabla anterior, escribiendo para cada caso un modelo matemático.					Problema de cálculo y proceso	X	
					Problema de la vida real	X	
					Problema de análisis y justificación		
					Problema de representación		
					Problema de comparación	X	
					Otros:		
					Combina el uso de gráficas y tablas	X	
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	X
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
X		X	X		X	Otros: Comparación cuantitativa en el tiempo	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o mas requerimientos de dificultad	(0) Unico problema diferente a los demás	(1) Propone un problema con 4 requerimientos	(1) El problema se distingue de los demás	(1) Propone un problema con 3 requerimientos	(1) Propone un problema con 2 requerimientos	7	
(1) Puede responder de varias formas	(0) Presenta novedad en la información	(1) Propone un problema con 2 requerimientos	(1) Propone un problema con 1 requerimiento				
(0) Favorece la conexión con varios temas	(0) Presenta novedad en el requerimiento						
(0) Favorece la conexión otras áreas						Calidad alcanzada	
Puntaje obtenido	Puntaje obtenido	Puntaje obtenido	Calidad Media				
2	1	4					

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

Al considerar la revisión del problema, podemos observar que hay una mejora en relación con el trabajo en el problema pre de la actividad individual, que podríamos suponer que se debe a la experiencia de intercambio de ideas en el trabajo en grupo, lo que le dio una mayor

comprensión de la estructura del problema pre, por lo que la calificación alcanzada por el docente quien obtiene en este caso una calificación de calidad media. Esta mejora se evidencia en el planteamiento del problema el cual plantea gradualmente los requerimientos, guiando el desarrollo para llegar a la respuesta final.

### Creación del problema pre del Docente 6 en la actividad individual

En la Figura 28, reproducimos la imagen del problema pre creado por el docente 6 en la actividad individual, en donde plantea una pregunta en base al desarrollo de una tabla que contiene los resultados de los cálculos de los saldos mensuales de las dos posibilidades de ahorro presentados. Podemos observar que la idea principal planteada para el problema se orienta al trabajo gráfico de los modelos para poder encontrar la intersección de las curvas determinadas por los modelos A partir de esto se le solicita hallar e interpretar la cantidad de tiempo que deberá transcurrir para que una inversión supere a la otra. En el comentario presentado por el docente sobre su problema, observamos que menciona que la característica de bajar el nivel y permitir entender mejor el problema del episodio, está principalmente en que se trabaja con valores numéricos más pequeños y en dividir los requerimientos en pasos más pequeños que lo aproximan a la solución. El problema se presenta en la siguiente figura.

**Figura 35:** Problema pre propuesto por el docente 6 en la actividad individual

**Problema Pre**

El prestamista Pepe hace préstamos con interés simple del 5% mensual, mientras que la caja metropolitana presta dinero al 3% mensual de interés compuesto. Si se pide un préstamo de 2000 soles

(1) Completa la siguiente tabla con los montos después de la cantidad de los meses indicados:

	1° mes	2° mes	3° mes	4° mes	5° mes
Pepe					
Caja					

(2) Escribe una relación matemática que pueda describir el comportamiento de cada modelo:

- Pepe
- Caja metropolitana:

(3) Grafique dichas relaciones, puede usar algún medio tecnológico. identificando el punto de intersección.

(4) ¿Qué significado tiene este punto de intersección?

(5) ¿Cuántos meses deben pasar para que se pague más por el préstamo en la caja metropolitana?

**COMENTARIO:**  
El problema es similar al problema que dieron, pero baja la exigencia al trabajar con valores más pequeños, tasas de interés sin números decimales y separa las preguntas en pequeños pasos para lograr guiar mejor al estudiante. EL alumno al final debe realizar una comparación, pero le será más fácil encontrarla si resuelve las preguntas iniciales

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

## Conocimiento matemático evidenciado en la creación del problema

El contexto del problema creado por el docente 6 varía un poco en tanto menciona elementos nuevos como es el caso del prestamista y la caja metropolitana y el tiempo es considerado en meses, sin embargo, mantiene el entorno matemático del episodio presentado. En el problema creado podemos identificar que el docente moviliza los siguientes conocimientos:

- Uso del interés simple y del modelo lineal para los cálculos.
- Uso del interés compuesto y del modelo exponencial para los cálculos.
- Representación tabular de los resultados.
- Representación gráfica de los modelos y determinación de la intersección de las curvas, identificando el significado en el contexto.
- Resolución de ecuaciones empleando tecnología. Interpretación de la solución del problema.

En el caso del producto presentado por el docente, se puede observar un planteamiento con varias consignas y diferentes formas de aproximarse a la solución, usando tablas y variando las preguntas llevándolas a realizar cálculos, gráficas e interpretar el resultado de la intersección de las curvas de los modelos. Podemos observar también que el problema se orienta al manejo de tablas y construcción de gráficas, exigiendo el uso de recurso tecnológicos. El docente plantea el problema con una variación clara del contexto, trabajando por un lado con meses en lugar de tiempo, y planteando una situación de comparación entre una financiera y una caja metropolitana. Es notorio también, a partir de su comentario, que identifica una variación clara que permite bajar el nivel de complejidad del problema al separar las preguntas en pequeñas preguntas que gradualmente guiarán al estudiante a poder realizar la comparación.

A continuación, en la figura 32 se muestra la rúbrica de calificación otorgada al problema pre creado por el docente 6 en la actividad individual.

**Figura 36: Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 6**

Rúbrica para Analizar el problema Creado							
Docente 6		Nombre de la actividad: Problema creado en la ACTIVIDAD INDIVIDUAL				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> El prestamista Pepe hace préstamos con interés simple del 5% mensual, mientras que la caja metropolitana presta dinero al 3% mensual de interés compuesto. Si se pide un préstamo de 2000 soles. Completa una tabla con los montos después de la cantidad de los meses Indicados: (a) Escribe una relación matemática que pueda describir el comportamiento de cada modelo: El Pepe y la Caja metropolitana: (b) Grafique dichas relaciones, puede usar algún medio tecnológico, identificando el punto de intersección. (c) ¿Qué significado tiene este punto de intersección? (d) ¿Cuántos meses deben pasar para que se pague más por el préstamo en la caja metropolitana?						Problema de cálculo y proceso	X
						Problema de la vida real	X
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	
						Problema de comparación	X
						Otros: Combina el uso de tablas y gráficas	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación Relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	X
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
						Otros: análisis de curvas, intersecciones e interpretaciones	X
X			X		X		
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(0) Uno o mas requerimientos de dificultad		(1) Unico problema diferente a los demás		(1) Propone un problema con 4 requerimientos		7	
(0) Puede responder de varias formas		(0) El problema se distingue de los demás		(1) Propone un problema con 3 requerimientos			
(1) Favorece la conexión con varios temas		(0) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerimientos			
(0) Favorece la conexión otras áreas		(1) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerimiento			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	
1		2		4		Calidad Media	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

Como podemos observar, el docente plantea un problema con más originalidad al presentar novedad en la formulación, así como en la cantidad de requerimientos que plantea, que como mencionamos muestran pasos sucesivos para llegar a la respuesta. El tipo de problema es de la vida real y sigue siendo de comparación, y orienta los procesos de cálculo para dicha comparación. En cuanto al entorno matemático, se prioriza el uso de representaciones y el uso de restricciones, debiendo analizar las curvas, su intersección y encontrar una adecuada interpretación en el contexto del problema. Se trabaja con modelos añadiendo la exigencia del análisis de las curvas a partir de calcular e interpretar las intersecciones. Según la puntuación obtenida, su producto alcanza una calidad media de producción en parte debido a una mejora en la redacción del enunciado, modificando el contexto del enunciado. Incluye la posibilidad de incluir el trabajo con gráficas e interpretar la intersección.

### Creación del problema pre del Docente 6 en la prueba de salida

A continuación, en la figura 33, reproducimos la imagen del problema pre creado por el mismo docente 6 en la prueba de salida, al final de todo el taller

**Figura 37:** Problema pre creado por el docente 6 en la prueba de salida

Podemos plantear un problema dividido en tres partes:

1. Una persona tiene la opción de depositar \$2000 en una cuenta de ahorros en una financiera que paga un interés del 4% de interés compuesto mensual. Si mantiene el dinero en dicha cuenta durante 10 años, calcular:
  - a. ¿Cuánto tiene en su cuenta al final del primer año?
  - b. ¿Cuánto tiene en su cuenta al final de cada uno de los primeros 5 años?
2. La misma persona decide al mismo tiempo depositar \$2000 en otra financiera que le ofrece pagar el 4,75 % de interés simple.
  - a. ¿Cuánto tiene en su cuenta al final del primer año?
  - b. ¿Cuánto tiene en su cuenta al final de cada uno de los primeros 5 años?
3. Esta persona afirma que si mantiene ambos depósitos durante más años, el saldo en el segundo caso siempre será mayor que el primero. ¿Su afirmación es correcta? Explica tu respuesta

Comentario sobre el problema:

Me parece que si dividimos el problema en diferentes partes, los estudiantes podrán concentrarse en cada una de ellas, y al final elaborar una conjetura para responder de manera general haciendo más sencillo encontrar que un interés es mejor que otro

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

### **Conocimiento matemático evidenciado en la creación del problema**

En esta producción, podemos observar que el docente 6 elabora un problema separando las tareas en partes definidas. Trabaja con el mismo contexto del episodio y hace una clara variación en la forma de presentar los requerimientos. Podemos identificar la movilización de los siguientes conocimientos matemáticos:

- Uso de interés simple y modelo lineal para elaborar los cálculos en diferentes periodos de tiempo.
- Uso del interés compuesto mensual y del modelo exponencial para desarrollar los cálculos en diferentes periodos de tiempo.
- Análisis y discusión de afirmaciones, justificando la respuesta empleando cálculos.

Observamos en este caso que el docente planteó un problema dividido en tres partes, cada una de ellas con preguntas particulares. Invertió el orden para elaborar el modelo, es decir, primero planteó un entorno matemático referido al uso de modelos exponenciales, separando un primer cálculo y luego un grupo de cálculos solicitados de manera similar al episodio. Las consignas son similares en la segunda parte, donde plantea una pregunta que requerirá el uso

del modelo lineal en el caso del interés simple. Finalmente, en la tercera parte solicita analizar una afirmación en la cual se conjetura que el saldo en depósito realizado a interés simple será siempre mayor al realizado con el interés compuesto. Esta afirmación que resultará ser falsa busca orientar el desarrollo para justificar dicha falsedad con los cálculos anteriores. En el comentario otorgado por el docente sobre por qué considera que el problema es un problema pre, menciona que la opción de dividir el problema en 3 partes ayudará al estudiante a concentrarse en cada una de ellas. Adicionalmente comenta que la pregunta de la parte 3 busca hacer más sencillo encontrar que un interés será mayor que el otro.

A continuación, la siguiente figura, muestra la calificación otorgada al problema pre creado por el docente 6. En dicha calificación observamos que la puntuación mejoró respecto del producto presentado en la actividad individual.

**Figura 38: Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 6**

Rúbrica para Analizar el problema Creado							
Docente 6		Nombre de la actividad: Problema PRE creado en la Prueba de Salida				Tipo de problema	
Una persona tiene la opción de depositar \$2000 en una cuenta de ahorros en una financiera que paga un interés del 4% de interés compuesto mensual. 1. Si mantiene el dinero en dicha cuenta durante 10 años, calcular: (a) ¿Cuánto tiene en su cuenta al final del primer año? (b) ¿Cuánto tiene en su cuenta al final de cada uno de los primeros 5 años? 2. La misma persona decide al mismo tiempo depositar \$2000 en otra financiera que le ofrece pagar el 4,75 % de interés simple. (a) ¿Cuánto tiene en su cuenta al final del primer año? (b) ¿Cuánto tiene en su cuenta al final de cada uno de los primeros 5 años? 3. Esta persona afirma que si mantiene ambos depósitos durante más años, el saldo en el segundo caso siempre será mayor que el primero. ¿Su afirmación es correcta? Explica tu respuesta						Problema de cálculo y proceso	X
						Problema de la vida real	
						Problema de análisis y justificación	X
						Problema de representación	
						Problema de comparación	X
Otros: Confirmación de una conjetura	X						
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	X
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
X		X	X		X	Otros: Resolver comparación de saldos en el tiempo	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o mas requerimientos de dificultad	(0) Unico problema diferente a los demás	(1) Propone un problema con 4 requerimientos				9	
(1) Puede responder de varias formas	(1) El problema se distingue de los demás	(1) Propone un problema con 3 requerimientos					
(0) Favorece la conexión con varios temas	(1) Presenta novedad en la información	(1) Propone un problema con 2 requerimientos					
(0) Favorece la conexión otras áreas	(1) Presenta novedad en el requerimiento	(1) Propone un problema con 1 requerimiento					
Puntaje obtenido	Puntaje obtenido	Puntaje obtenido				Calidad alcanzada	
2	3	4				Calidad Alta	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

La calificación otorgada al problema pre, es de 9 puntos, alcanzando un nivel de calidad alta según nuestra tabla de calificación. Podemos observar en la aplicación de la rúbrica que el tipo de problema tiene mayor originalidad en el formato de presentación por la división del problema en tres partes, así como el de plantear el requerimiento final a partir de una conjetura

para analizar. Se observa que el problema tiene una estructura más secuencial, es decir que las preguntas van guiando el desarrollo y los procesos de cálculo, orientando el trabajo de análisis para conseguir justificar si la afirmación del requerimiento final es correcta o no. El tipo de problema sigue siendo de la vida real y de comparación en un entorno de uso de modelos, manteniendo la necesidad de la comparación de dichos modelos. Para obtener este nivel de calidad, podemos reconocer que su elaboración responde mejor al criterio de flexibilidad ya que tiene más de un requerimiento que añade gradualmente la dificultad, así como el tener más de una forma de ser respondido, ya que puede comparar los modelos a partir de tablas, gráficas o los resultados calculados directamente. Presenta una mayor originalidad en su estructura y en los requerimientos, distinguiéndose claramente del producto de los demás trabajos. La fluidez mantiene un puntaje alto, en tanto que la cantidad de requerimientos permite guiar gradualmente a la respuesta del problema final que es decidir cuál de los dos préstamos tendrá mayor saldo.

### **Creación del problema pre del Docente 12 en la actividad individual**

En la Figura 35, reproducimos la imagen del problema pre creado por el docente 12 el cual desarrolló en la actividad individual donde plantea su problema y comenta porque considera que es un problema pre.

**Figura 39:** *Episodio propuesto por el docente 12 en la actividad individual*

<p><b><u>Problema Pre</u></b></p> <p>Encuentra el 3% de 10 000 luego haz una 1era tabla aumentando este valor año con año, así hasta 5 veces. Encuentra el 2,5% más de 10000, a ese valor obtenido encuentra el 2,5% más , a ese mismo valor le encuentras 2,5% más y así sucesivamente hasta 5 veces colocándolo en una segunda tabla.</p> <p>(a) Representa ambos valores en una sola tabla para compararlos</p> <p>(b) Si continuamos calculando más veces, encuentra después de cuántos cálculos los valores de la primera tabla superarán a los de la segunda.</p> <p><i>Comentario:</i></p> <p>El problema presentado es más corto y simplifica las preguntas para que el alumno responda directamente. Creo que si planteamos un problema sin hablar de bancos o financieras el alumno podrá ir directamente a hacer los cálculos y la mejor manera sería mostrarlo con tablas. Es mi opinión sobre cómo hacer el problema más simple</p>
--

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

## Conocimiento matemático evidenciado en la creación del problema

En esta primera creación del docente 12, no se observa un contexto específico y se observa un problema que es netamente intra-matemático. Podemos identificar en dicha creación la movilización de los siguientes conocimientos matemáticos.

- Cálculo de porcentajes.
- Elaboración de progresiones aritméticas y geométricas a partir de los porcentajes hallados.
- Representación tabular de los resultados.
- Comparación de resultados y elaboración de conjeturas a partir de dicha comparación.

El docente planteó un problema sin ningún contexto, pues como añade en su comentario, considera que una manera de bajar el nivel del problema es limitándose solamente a los cálculos. Consideramos que esto, le baja la calidad al problema, pues se torna más en un ejercicio guiado de cálculos. Podemos observar que los requerimientos se limitan a indicar la realización de cálculos por un lado para una situación de incrementos lineales de porcentajes y en el segundo caso, de incrementos porcentuales, pero por la manera en que se plantean, crecerán de manera geométrica. Observamos que el docente no incluye el contexto del cálculo del interés siendo al final su consigna la de comparar resultados en ambas situaciones.

Como menciona al final de su comentario, él entendió que debería hacer el problema más simple, obteniendo una calificación muy baja como se muestra a continuación en la rúbrica de calificación. La siguiente figura, muestra la calificación del problema pre creado por el docente 12 el cual obtiene en este un puntaje bajo mostrando una calidad baja de producción.

**Figura 40: Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 12**

Rubrica para Analizar el problema Creado							
Docente 12		Nombre de la actividad: Problema creado en la ACTIVIDAD INDIVIDUAL				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> Encuentra el 3% de 10 000 luego haz una 1era tabla aumentando este valor año con año, así hasta 5 veces. Encuentra el 2,5% más de 10000, a ese valor obtenido encuentra el 2,5% más , a ese mismo valor le encuentras 2,5% más y así sucesivamente hasta 5 veces colocándolo en una segunda tabla. - Representa ambos valores en una sola tabla para compararlos - Si continuamos calculando más veces, encuentra después de cuántos cálculos los valores de la primera tabla superarán a los de la segunda.						Problema de cálculo y proceso	X
						Problema de la vida real	
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	
						Problema de comparación	X
						Otros: Cálculo de valores y representación usando tablas	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
	X	X		X		Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
						Otro: Cálculo de porcentajes y comparación en el tiempo	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(0) Uno o mas requerimientos de dificultad		(0) Unico problema diferente a los demás		(0) Propone un problema con 4 requerimientos		3	
(0) Puede responder de varias formas		(0) El problema se distingue de los demás		(0) Propone un problema con 3 requerimientos			
(0) Favorece la conexión con varios temas		(0) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerimientos			
(0) Favorece la conexión otras áreas		(1) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerimiento			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	
0		1		2		Calidad Baja	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

### Conocimiento matemático evidenciado en la creación del problema

En este segundo problema creado por el docente 12, observamos que el docente mantiene el mismo contexto, y trata de reformular los requerimientos para desagregar el problema en pasos más sencillos. Se puede identificar la movilización de los siguientes conocimientos matemáticos:

- Cálculo de interés simple anual, y uso de modelo lineal.
- Cálculo de interés compuesto semestral y uso de modelo exponencial.
- Representación tabular de los resultados en diferentes periodos de tiempo.
- Representación algebraica y generalización del modelo
- Comparación e identificación de patrones.

El problema propuesto sigue siendo de tipo comparativo, pero limita el trabajo a cálculos y procesos guiados. El énfasis del trabajo está en la representación de valores en tablas para realizar las comparaciones. En cuanto a la variación hecha en los elementos del problema, no se observa novedad en la información ni el requerimiento, por lo que no obtiene puntaje en el criterio de originalidad. En cuanto a la originalidad, le otorgamos un punto pues si presentó alguna

novedad en el requerimiento. El planteamiento incluye 2 requerimientos muy puntuales y que otorgan algo de fluidez al trabajo. El puntaje obtenido es de 3 puntos dentro de la calificación, por lo que el problema creado es considerado de una calidad baja de producción. Al ser consultado posteriormente el docente sobre la simplificación que dio al problema, insistió en que para él una forma de hacer más sencillo el problema es hacerlo más corto.

### **Creación del problema pre del Docente 12 en la prueba de salida**

A continuación, en la figura 37, reproducimos la imagen del problema pre creado por el mismo docente 12 en la prueba de salida. Podemos observar que luego del momento de intercambio de opiniones en el grupo de docentes y de haber participado de la revisión de los productos mejorados por los grupos, consideró hacer mejoras a su planteamiento respecto al problema que había presentado en la actividad individual.

**Figura 41:** *Problema pre creado por el docente 12 en la prueba de salida*

Javier es una persona que tiene que decidir cómo invertir una cantidad de dinero.

Tiene la opción de depositar \$8000 en una cuenta de banco que le paga un interés del 5% de interés compuesto semestral.

- Realice una tabla de cuánto obtiene año por año en los primeros 5 años.
- Escriba una fórmula para hallar cuánto obtiene por año

Por otro lado, una financiera le ofrece pagar un 4,75% de interés simple anual.

- Realice una tabla del monto obtenido año con año en los primeros 5 años.
- Escriba una fórmula para hallar lo que le pagaría cada año
- Compare ambas tablas para mostrar que la diferencia entre ambas inversiones va disminuyendo cada año.

**Comentario al problema:**  
**Según entiendo, el problema no solo debe ser más simple, sino que también tiene que parecerse al problema que nos dieron. Por ello, puse una situación similar de inversión y la forma en que se hacen las preguntas lo harán más simple pues dirigirán el trabajo del alumno. El objetivo del problema solo es mostrar que las diferencias van disminuyendo lo cual lo pueden hacer con las tablas y en un problema posterior mas complejo le puedo pedir que grafique.**

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

En esta oportunidad, el docente planteó un problema similar al del episodio manteniendo el contexto de depósitos en un banco y una financiera. Aunque no lo dice explícitamente, su

planteamiento está basado en dos partes, la primera en la que trabaja con un interés compuesto y propone hallar los montos al finalizar los 5 primeros años y luego escribir un modelo o ecuación para hallar posibles valores en diferentes tiempos. Esto se repite en la segunda parte, pero proponiendo trabajar con el interés simple. Adicionalmente en esta segunda parte solicita hacer una comparación empleando tablas que permita mostrar las diferencias entre los valores. Si bien se observa una mejora en el planteamiento de su problema pre respecto del propuesto en la actividad individual, no consideramos que añada más fluidez pues aún contiene pocas consignas que sugieren la realización de más cálculos o manipulación de los modelos para diferentes tiempos o para un tratamiento gráfico como es el caso de lo solicitado en el episodio. En el comentario escrito sobre su problema pre creado, el docente menciona que trató de hacerlo similar al problema propuesto procurando colocar preguntas que considera que guiarán al alumno. Añade la idea de que considera que es un problema más simple por solicitar solo analizar las diferencias entre los montos hallados, sin embargo, los requerimientos para graficar los reservará para plantear un problema más complejo más adelante.

La calificación al problema presentado se observa en la figura que se plantea a continuación.

**Figura 42: Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 12**

Rubrica para Analizar el problema Creado							
Docente 12		Nombre de la actividad: Problema PRE creado en la Prueba de Salida				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> Javier es una persona que tiene que decidir cómo invertir una cantidad de dinero. Tiene la opción de depositar \$8000 en una cuenta de banco que le paga un interés del 5% de interés compuesto semestral. * Realice una tabla de cuánto obtiene año por año en los primeros 5 años. * Escriba una fórmula para hallar cuánto obtiene por año Por otro lado, una financiera le ofrece pagar un 4,75% de interés simple anual. * Realice una tabla del monto obtenido año con año en los primeros 5 años. * Escriba una fórmula para hallar lo que le pagaría cada año * Compare ambas tablas para mostrar que la diferencia entre ambas inversiones va disminuyendo cada año.						Problema de cálculo y proceso	X
						Problema de la vida real	X
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	
						Problema de comparación	X
						Otros: Cálculo de valores y comparación cuantitativa	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	X
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
X		X			X	Otro: Cálculo de porcentajes y comparaciones en el tiempo	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o más requerimientos de dificultad	(0) Unico problema diferente a los demás	(1) Propone un problema con 4 requerimientos				6	
(0) Puede responder de varias formas	(0) El problema se distingue de los demás	(1) Propone un problema con 3 requerimientos					
(0) Favorece la conexión con varios temas	(0) Presenta novedad en la información	(1) Propone un problema con 2 requerimientos					
(0) Favorece la conexión otras áreas	(1) Presenta novedad en el requerimiento	(1) Propone un problema con 1 requerimiento					
<b>Puntaje obtenido</b>	<b>Puntaje obtenido</b>	<b>Puntaje obtenido</b>				<b>Calidad alcanzada</b>	
1	1	4				<b>Calidad Media</b>	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

En esta versión del problema pre propuesto, consideramos que propone un requerimiento con cierto grado de dificultad al proponer la comparación de los resultados hallados, confirmando la afirmación que dichas diferencias van disminuyendo. En cuanto a la originalidad, consideramos que no añade muchas diferencias, salvo el formato de preguntas y el orden que solicita hallar las respuestas, es decir, primero hallar los cálculos, y luego generalizar la fórmula. No consideramos que tenga mayores aportes en la originalidad. Sí consideramos que mejora la fluidez del problema colocando más de cuatro requerimientos, lo que permite ver el problema desagregado en partes más simples para el desarrollo. Según la calificación otorgada, obtiene 6 puntos y logra una calidad media según la escala propuesta. Comparando con la puntuación obtenida en su primera producción, alcanza una mejora en su producción.

### **3.2.6 Análisis de los problemas pos creados**

Aquí presentaremos los problemas pos creados por los docentes en la prueba de salida. Empleando la misma rúbrica de calificación usada en la sección anterior, presentaremos la puntuación obtenida en cada problema comentando brevemente dichos resultados.

A continuación, presentamos los problemas pos creados por los docentes 1, 6 y 12.

#### **Creación del problema pos del Docente 1 en la prueba de salida**

En esta parte mostramos el problema pos creado por el docente 1 en la prueba de salida, en donde podemos observar que reproduce de manera similar, el problema del episodio, realizando la variación del entorno matemático al solicitar trabajar con capitalización diaria y la variación de los requerimientos con 3 consignas que no se presentan como desarrollo guiado sino como preguntas de discusión que requieren una justificación. Se puede observar en el problema que en la consigna (b), plantea la pregunta de manera que el estudiante deberá trabajar con algún recurso gráfico. Como podemos observar en el comentario del docente, menciona que el problema creado es más retador que el episodio o el problema pre, a partir del uso de la capitalización diaria, por lo que considera que el problema sería más complejo, pero aún posible de ser desarrollado por el alumno.

En la siguiente figura mostramos el problema pos creado por el docente 1.

**Figura 43:** Problema pos creado por el docente 1 en la prueba de salida

**Problema Pos**

Un inversionista tiene la opción de depositar \$3000 en una cuenta de ahorros de un banco que paga un interés del 4.5% de interés simple anual, o depositarlo en una financiera que le ofrece pagar el 4 % de interés compuesto diariamente.

(a) ¿Donde ganaría más el inversionista luego de 5 años? Justifique su respuesta  
 (b) ¿Habrá algún momento en que ambos ganen igual? ¿Cuántos años?  
 (c) Elabore un modelo exponencial para cada opción y representa gráficamente ambas situaciones

**Comentario:**  
 Considero que es más retador pues se trabaja con capitalización, lo que hará que el modelo sea más complejo, pero aún al alcance del alumno que resolvió el primer problema del episodio ya que mantiene características similares.

Fuente: Tomado del drive de trabajo del taller

A continuación, en la siguiente figura mostramos la rúbrica de calificación del problema pos creado, donde observamos que el docente mantiene un puntaje similar.

**Figura 44:** Rúbrica de calificación del problema pos creado por el docente 1

Rúbrica para Analizar el problema Creado							
Docente 1		Nombre de la actividad: Problema POS creado en la Prueba de Salida				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> Un inversionista tiene la opción de depositar \$3000 en una cuenta de ahorros de un banco que paga un interés del 4.5% de interés simple anual, o depositarlo en una financiera que le ofrece pagar el 4 % de interés compuesto diariamente. (a) ¿Donde ganaría más el inversionista luego de 5 años? Justifique su respuesta (b) ¿Habrá algún momento en que ambos ganen igual? ¿Cuántos años? (c) Elabore un modelo exponencial para cada opción y representa gráficamente ambas situaciones						Problema de cálculo y proceso	
						Problema de la vida real	
						Problema de análisis y justificación	X
						Problema de representación	X
						Problema de comparación	X
						Otros: Problema de capitalización continua.	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	X
						Relación entre variables	
X			X		X	Otros: Comparación de modelos empleando gráficas	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o mas requerimientos de dificultad		(0) Unico problema diferente a los demás		(0) Propone un problema con 4 requerimien		7	
(1) Puede responder de varias formas		(1) El problema se distingue de los demás		(1) Propone un problema con 3 requerimien			
(0) Favorece la conexión con varios temas		(1) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerimien			
(0) Favorece la conexión otras áreas.		(0) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerimien			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	
2		2		3		Calidad Media	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

Como observamos en la rúbrica de calificación, el docente crea un problema considerando en él, aspectos de flexibilidad, originalidad y fluidez, al incluir requerimientos con un mayor grado de dificultad. Podemos observar que en la resolución es necesario emplear las intersecciones de las gráficas para responder a la pregunta en la cual ambas propuestas generen una ganancia similar. Esto podría indicarnos que el docente eleva la dificultad del problema, incluyendo la necesidad de hallar la intersección de las gráficas que corresponde a los modelos. Se observa que es un problema muy similar al episodio, por lo que mantiene un puntaje bajo en originalidad, sin embargo, mantiene una calidad media de producción según la calificación en la rúbrica. Esto podríamos entender que se debe al poco tiempo con el que se cuenta para esta tarea y al hecho de que son las primeras experiencias de producción de problemas empleando esta estrategia. La redacción del problema mantiene un lenguaje claro y sencillo de entender. Plantea requerimientos claros y a pesar de que no guían paso a paso al estudiante, incrementa la complejidad en el trabajo esperando la comparación de los modelos ya sea de modo algebraico resolviendo ecuaciones o de manera gráfica. En cuanto a los elementos del problema creado, se usa el mismo contexto y se da un enunciado muy parecido, lo cual menciona el docente en su comentario al decir que mantiene las características similares.

### **Creación del problema pos del Docente 6 en la prueba de salida**

En esta parte mostramos el problema pos creado por el docente 6. En dicho problema identificamos una diferencia del problema inicial dado en el episodio a partir de los requerimientos al mencionar que dividirá el planteamiento en 4 tareas de trabajo. Se puede ver que las tareas están orientadas a la elaboración de tablas con los resultados de hallar el monto de la inversión al final de los 5 años. También es claro que busca que en la solución del problema se desarrolle la elaboración de modelos algebraicos para ambas situaciones, la construcción de las gráficas de cada uno de los modelos usando medios tecnológicos y la obtención de una cantidad aproximada de años en el que un modelo es más rentable que el otro. Se observa que, si bien el contexto es similar al que se presenta en el episodio, se hacen suficientes variaciones para obtener un problema con algunas diferencias. En su enunciado vemos que el docente añade el concepto de “extrapolar valores”, con lo que podemos suponer que está buscando que el estudiante encuentre en el modelo una herramienta para estimar los montos en el tiempo. También podemos ver que otro aspecto importante que se introduce en el problema pos, es el uso de la capitalización mensual en el cálculo del interés del banco, lo cual se puede interpretar como un intento por añadir ideas que no estaban presentes en el episodio y así intentar hacerlo más retador. En cuanto a lo solicitado en el episodio, y el problema pre creado, el tener que usar

capitalización mensual, obliga a que el desarrollo sea más complejo pues se debe interpretar la frecuencia de pagos de intereses y hacer la modificación correcta para que el modelo lo describa. En su comentario, el docente reconoce las similitudes con el problema pre, sin embargo, identifica mayores exigencias para los estudiantes, en tanto éstos tendrán que hacer comparaciones entre expresiones algebraicas y gráficas de modelos con comportamientos distintos. También señala el requerimiento del uso de habilidades tecnológicas para realizar las comparaciones empleando algún graficador.

En la siguiente figura mostramos el problema pos creado por el docente 6.

**Figura 45:** Problema pos creado por el docente 6 en la prueba de salida

Planteamos un solo problema con 4 tareas de trabajo:

Un inversionista toma la decisión de depositar \$10000 en una cuenta de ahorros de un Banco que paga un interés del 4% de interés compuesto mensual, pero le plantean la posibilidad también de hacer la inversión en una Financiera que le ofrece pagar el 4,75 % de interés simple.

1. Cree una tabla indicando los montos que se generan al final de los 5 primeros años.
2. Escriba modelo un matemático que permita hallar el monto de cada inversión al final de “t” años para cada una de las opciones de inversión
3. Construya una gráfica usando un graficador mostrando los valores de los primeros 5 años y extrapole los valores para los siguientes años
4. ¿En cuánto tiempo una opción será más rentable que la otra? Explique sus respuesta

EL problema aunque se parece al problema inicial y al problema pre, pide hacer uso de las expresiones algebraicas de las funciones. Los alumnos deberán exigirse en encontrar y comparar ambos modelos no solo algebraicamente sino también de manera gráfica. Se pide el uso de un graficador, por lo que deberán mostrar habilidades de trabajo con tecnología además de entender el tema de matemáticas. Pienso que la firma en que se pide la última pregunta les demandará organizar sus ideas y debatir opciones.

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

En la siguiente figura podemos observar la puntuación obtenida en este problema empleando la rúbrica de calificación

**Figura 46: Rúbrica de calificación del problema pos creado por el docente 6**

Rubrica para Analizar el problema Creado							
Docente 6		Nombre de la actividad: Problema POS creado en la Prueba de Salida				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> Un inversionista toma la decisión de depositar \$10000 en una cuenta de ahorros de un Banco que paga un interés del 4% de interés compuesto mensual, pero le plantean la posibilidad también de hacer la inversión en una Financiera que le ofrece pagar el 4,75 % de interés simple. 1. Cree una tabla indicando los montos que se generan al final de los 5 primeros años. 2. Escriba un modelo matemático que permita hallar el monto de cada inversión al final de "t" años para cada una de las opciones de inversión. 3. Construya una gráfica usando un graficador mostrando los valores de los primeros 5 años y extrapole los valores para los siguientes años. 4. ¿En cuánto tiempo una opción será más rentable que la otra? Explique sus respuesta						Problema de cálculo y proceso	X
						Problema de la vida real	X
						Problema de análisis y justificación	X
						Problema de representación	
						Problema de comparación	X
						Otros: Problema de discusión empleando tablas gráficas y modelos	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	X
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
X	X		X		X	Otros: Uso de diferentes representaciones funcionales	X
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o mas requerimientos de dificultad		(0) Unico problema diferente a los demás		(1) Propone un problema con 4 requerimien		9	
(1) Puede responder de varias formas		(1) El problema se distingue de los demás		(1) Propone un problema con 3 requerimien			
(0) Favorece la conexión con varios temas		(1) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerimien			
(0) Favorece la conexión otras áreas		(1) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerimien			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	
2		3		4		Calidad Alta	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

En cuanto al tipo de problema, observamos que se requiere el desarrollo de cálculos para representar los valores solicitados. Es un problema de la vida real por el contexto y busca elaborar comparaciones entre los modelos presentados para analizar las opciones del inversionista. Se observa que hay requerimientos con un cierto grado de dificultad que se presenta de modo gradual desde la elaboración de la tabla, el modelo y las gráficas hasta el requerimiento de decidir en cuánto tiempo una inversión será más rentable que la otra. A pesar de ser un problema similar a los trabajados en el episodio y el problema pre, podemos ver que se distingue de los demás mostrando novedades en la forma de presentar la información y de hacer los requerimientos ya que divide las tareas en preguntas puntuales, demostrando fluidez en las preguntas. Del enunciado también podemos ver que se solicita realizar análisis y justificar el tiempo señalado al resolver la pregunta 4 del enunciado. Esto nos indicaría que el modelo que se solicita deberá ser usado para hacer cálculos necesarios y así poder identificar cuál de las dos opciones presentadas en el problema sería más rentable según el requerimiento. En cuanto al entorno matemático, podemos inferir que el problema requerirá el uso de representaciones funcionales empleando las restricciones que debe tener cada modelo. Según la calificación,

observamos que obtiene un puntaje que lo sitúa en el rango de calidad alta por mostrar rasgos de flexibilidad, originalidad y fluidez adecuados de acuerdo con el análisis de la rúbrica.

### **Creación del problema pos de Docente 12 en la prueba de salida**

En esta parte, podemos observar la propuesta de problema pos del docente 12. En ella se ve que el enunciado es similar al del episodio, mostrando una redacción clara y fluida. Describe un contexto de comparación entre dos situaciones, una de interés compuesto semestralmente y el otro de interés compuesto anualmente. A partir del enunciado, plantea 3 requerimientos solicitando la elaboración de un modelo algebraico para cada opción de ahorro, la elaboración de gráficos que muestren la evolución de las inversiones, y solicita al final hallar el tiempo en que cada una de dichas inversiones superarían un monto fijo. Podemos interpretar a partir de dicho enunciado que el problema es distinto al episodio en el requerimiento general del problema, ya que no solicita una comparación de los modelos, sino el analizar el comportamiento de cada modelo por separado. Observamos además en el comentario que hace el docente, que considera que el problema puede incluir el uso de los logaritmos como opción para responder a la pregunta, pero esto, a partir de plantear ecuaciones. Otra opción podría ser la de emplear el modelo exponencial de opción de ahorro y resolver el problema mediante recursos gráficos. Podemos interpretar a partir de allí que la propuesta del problema busca no solo la elaboración sino también el uso del modelo en sus diferentes representaciones.

A continuación, mostramos el problema pos creado por el docente 12.

**Figura 47:** *Problema pos creado por el docente 12 en la prueba de salida*

Javier tiene la opción de depositar \$ 8000 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 5% de interés compuesto semestralmente, o depositarlo en una financiera que le ofrece pagar el 4,75 % de interés compuesto anual%

- a) Encuentre una expresión algebraica del monto en función del tiempo tanto para la cuenta de ahorros como para la financiera.
- b) Realice un gráfico de cada función mostrando cómo varían ambas inversiones
- c) ¿Cuánto tiempo pasará para que en cada inversión se llegue a \$10000?

#### **Comentario al problema**

**Las preguntas son más exigentes para los alumnos ya que deberán trabajar con modelos y en la parte final deberán resolver ecuaciones con exponenciales. Podrían usar logaritmos o los recursos gráficos que han desarrollado.**

*Fuente:* Tomado del drive de trabajo del taller

En la siguiente figura podemos observar la puntuación obtenida en este problema empleando la rúbrica de calificación.

**Figura 48:** Rúbrica de calificación del problema pre creado por el docente 12

Rubrica para Analizar el problema Creado							
Docente 12		Nombre de la actividad: Problema POS creado en la Prueba de Salida				Tipo de problema	
<b>Problema creado:</b> Javier tiene la opción de depositar \$ 8000 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 5% de interés compuesto semestralmente, o depositarlo en una financiera que le ofrece pagar el 4,75 % de interés compuesto anual% a) Encuentre una expresión algebraica del monto en función del tiempo tanto para la cuenta de ahorros como para la financiera. b) Realice un gráfico de cada función mostrando cómo varían ambas inversiones c) ¿Cuánto tiempo pasará para que en cada inversión se llegue a \$10000?						Problema de cálculo y proceso	
						Problema de la vida real	X
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	X
						Problema de comparación	X
						Otros: Problema de cálculo de valores y graficación	X
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	X
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	X
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
						Otros: Analisis de modelos a partir de las representaciones gráficas.	X
X	X		X		X		
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(0) Uno o mas requerimientos de dificultad		(0) Unico problema diferente a los demás		(0) Propone un problema con 4 requerimien		6	
(1) Puede responder de varias formas		(1) El problema se distingue de los demás		(1) Propone un problema con 3 requerimien			
(0) Favorece la conexión con varios temas		(0) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerimien			
(0) Favorece la conexión otras áreas		(1) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerimien			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	
1		2		3		Calidad media	

Fuente: Adaptado de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020)

La puntuación obtenida en la elaboración de este problema pos, permite alcanzar una calidad media siendo la flexibilidad y la originalidad los aspectos más bajos en la calidad de la creación. En el caso de la flexibilidad observamos que el problema plantea preguntas que pueden responderse de varias formas pues la pregunta final admite el uso de los modelos hallados en las primeras preguntas ya sea de manera gráfica como algebraica. Los requerimientos son diferentes a los anteriormente presentados en los problemas pre y el episodio por lo que se puede considerar que presenta novedad en el requerimiento. En cuanto a la fluidez, se considera adecuada por la manera y la cantidad de requerimientos planteados. Este problema presenta situaciones de la vida real y plantea la necesidad de elaborar representaciones para las dos situaciones planteadas de ahorro. Se trata de una situación que busca elaborar una comparación de ambas condiciones, para lo cual deberá desarrollar procesos algorítmicos para encontrar la respuesta final del problema. Se puede observar también que el problema es presentado con

una redacción clara y sencilla de entender, presentando todos los elementos necesarios de un problema como son el contexto, el entorno, los requerimientos y el enunciado.

Podemos observar que los tipos de problemas elegidos por los docentes en su mayoría mantuvieron la característica de ser problemas de aplicación de la vida real y de comparación, priorizando el desarrollo de cálculos y guiando los procesos para la obtención de los resultados solicitados, ya que esta es una característica que mantuvieron del modelo seguido en el problema del episodio.

Sobre el entorno matemático empleado, podemos observar que se mantiene el uso de modelos y representaciones de la situación presentada proponiendo un trabajo comparativo a partir de los resultados obtenidos en los cálculos desarrollados. En su mayoría los docentes optaron por emplear la representación gráfica de los modelos, incluyendo como requerimiento la elaboración de los modelos y el uso e interpretación de la intersección de las gráficas que representaban los modelos propuestos.

Considerando los puntajes obtenidos en las rúbricas de calificación, a continuación, presentamos algunos cuadros comparativos de las calificaciones, tanto por docente, como por criterio de calificación y una distribución comparativa de los puntajes obtenidos

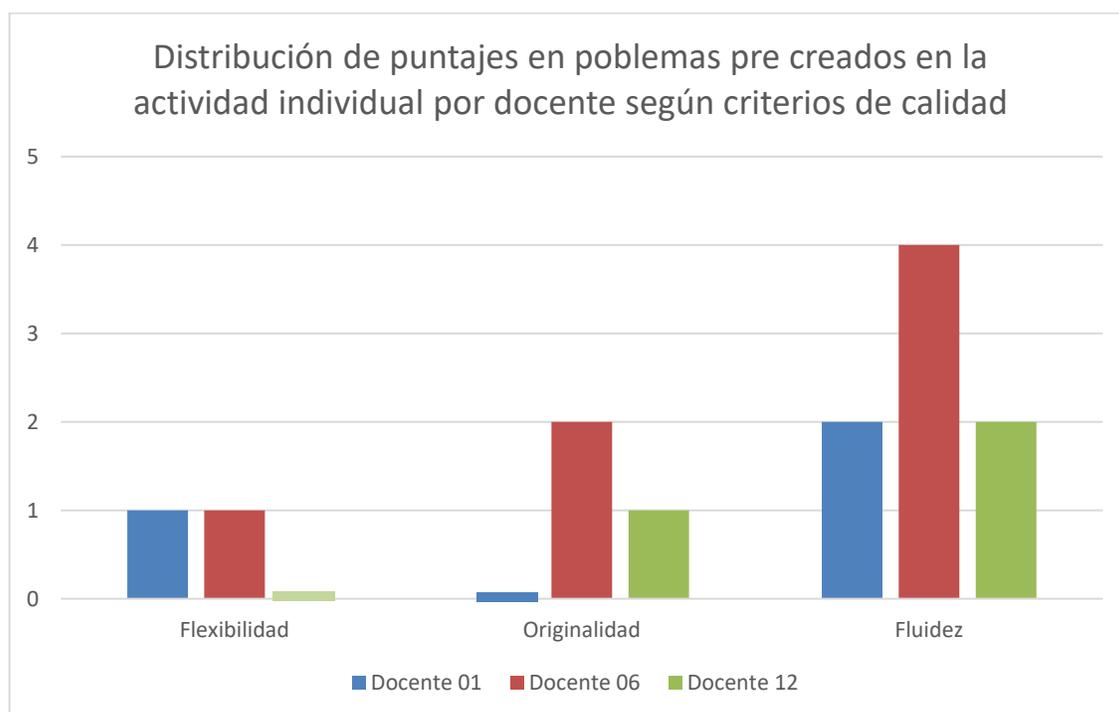
### **3.3 Análisis de los puntajes obtenidos**

A continuación, presentamos un análisis de los puntajes obtenidos en la calificación de los problemas pre y problemas pos elaborados por los docentes 1,6 y 12. Estas calificaciones nos permitirán analizar la calidad de las producciones de los docentes durante el desarrollo del taller.

#### **3.3.1 Comparación de los puntajes obtenidos en la prueba pre según criterios de evaluación**

En la siguiente figura se muestra un diagrama que nos permite comparar las puntuaciones que obtuvieron los docentes por cada criterio al ser evaluados en la creación de los problemas pre creados en la actividad individual.

**Figura 49:** *Distribución de puntajes obtenidos por docente en la actividad individual*

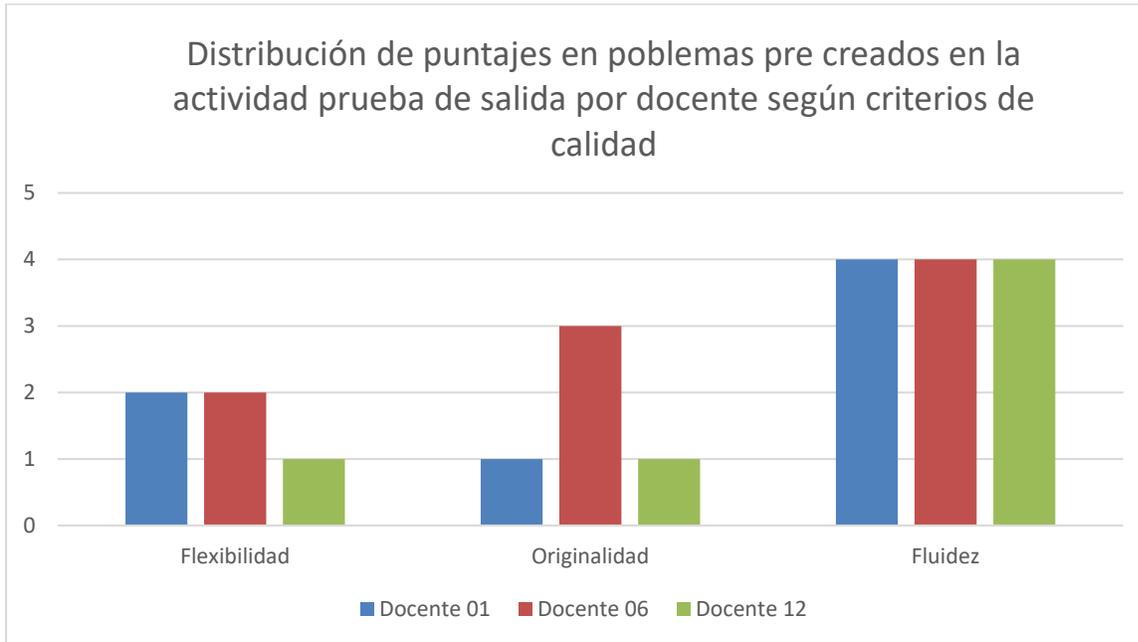


*Fuente:* creación propia

Al observar los puntajes por criterio, vemos que el que obtiene menor puntuación es el de flexibilidad dado que si bien los productos presentados contenían requerimientos con cierto grado de dificultad, no llegaron a incluir conexiones con otros temas o áreas. El criterio con mayor puntaje fue el de fluidez, debido a que los docentes en su mayoría consideraron pertinente detallar varios requerimientos de trabajo como una forma para facilitar el desarrollo, guiando al estudiante con preguntas que lo guiaban paso a paso a la resolución de las consignas solicitadas en los problemas. En el caso del criterio de originalidad, uno de los docentes no alcanzó puntuación por el tipo de problema presentado, sin embargo, pudimos identificar que, en el caso de dos de los docentes, presentaron novedad en la forma de presentar el problema distinguiéndose de los demás problemas presentados.

En el caso de los productos presentados en la prueba de salida, la siguiente figura nos permite ver la puntuación obtenida.

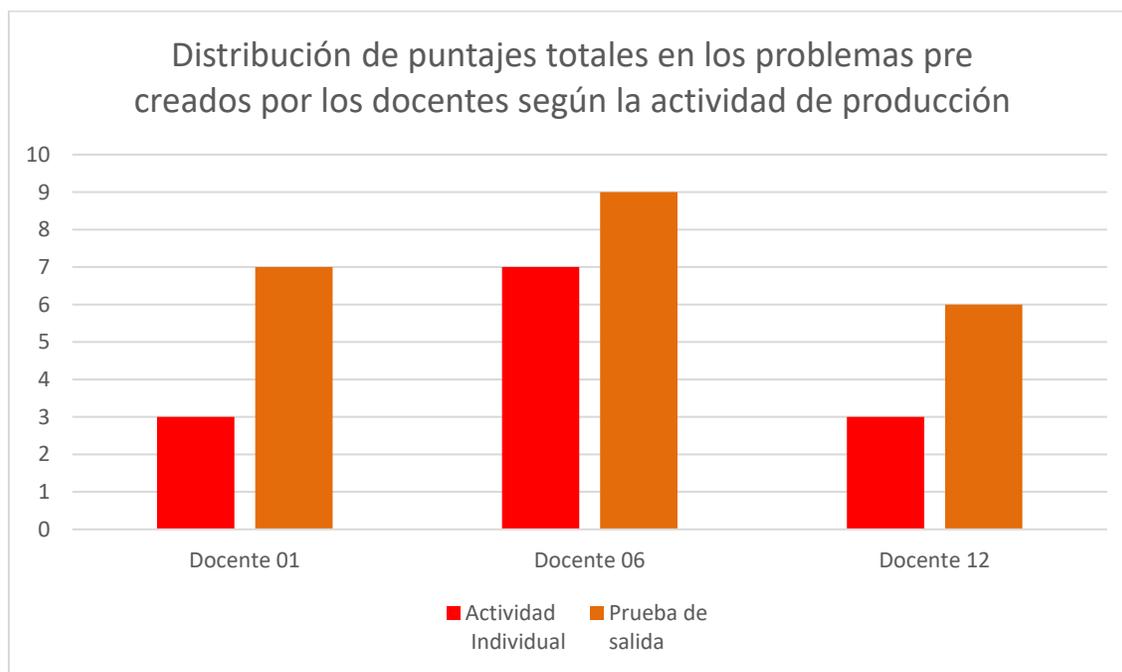
**Figura 50:** Distribución de puntajes obtenidos por docente en la prueba de salida



Fuente: creación propia

En esta figura también podemos observar que en los diferentes criterios hay una mejora en los puntajes obtenidos en comparación con los del cuadro anterior. En el caso de la flexibilidad, siguió manteniendo una puntuación máxima de 2 debido a que los docentes trabajaron más en la presentación de requerimientos con cierta dificultad y planteando situaciones que podían tener más de una manera de ser resuelta. En cuanto al criterio de originalidad, también se mejoró relativamente pues se trabajó más en las formas novedosas de dar la información y en la manera de hacer los requerimientos. El criterio de fluidez sí mejoró notoriamente en todos los trabajos de los docentes, quienes plantearon varias consignas gradualmente para presentar un problema más simple y con una manera más sencilla de ser resuelto con éxito, ya que las preguntas graduaban el trabajo que se iba acercando a la solución final del problema. También podemos observar en la siguiente figura, cómo han cambiado los puntajes de los docentes respecto de la actividad individual.

**Figura 51:** Comparación de puntajes por docentes en las pruebas pre creadas.



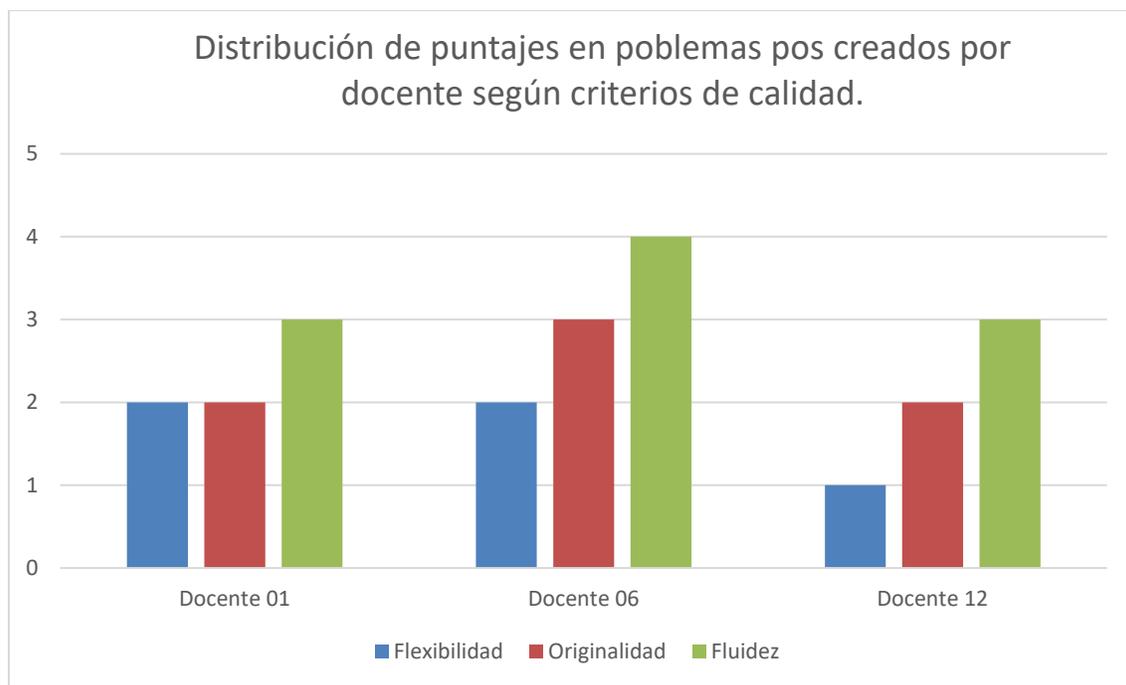
*Fuente:* creación propia

Con esta gráfica observamos que el producto de cada docente trabajado en la prueba de salida mejoró en la originalidad del diseño de los problemas y la fluidez de los requerimientos respecto del trabajado en la actividad individual. Adicionalmente observamos que los docentes identifican con claridad el objeto matemático a emplear, cuando solicitan el uso de modelos donde la variable es necesariamente exponencial. La identificación de sus elementos y la intersección de las curvas que representan a los modelos son trabajos necesarios para desarrollar las interpretaciones y análisis solicitados. Es importante notar que la primera actividad individual se completó luego de presentar los aspectos teóricos de la propuesta didáctica, sin embargo, hasta ese momento, solo se había revisado un ejemplo que fue discutido en grupo en el plenario. Para la producción de la prueba de salida, los docentes habían enriquecido su conocimiento y habilidad para crear problemas, después de haber compartido y comentado algunos de los productos explicados, y además pasaron un momento de socialización y trabajo en grupos pequeños, por lo que suponemos que ese momento sirvió para interiorizar más los aspectos necesarios para crear un problema pre.

### 3.3.2 Comparación de los puntajes obtenidos en la prueba pos según criterios de evaluación

Luego de la presentación de los productos y análisis de los resultados según los puntajes obtenidos en las rúbricas de calificación, a continuación, presentamos algunos cuadros comparativos de las calificaciones, con estos cuadros, podremos analizar comparativamente las calificaciones de los tres docentes. La figura 48, muestra gráficamente la distribución de puntajes de los docentes 1, 6 y 12 según los criterios de flexibilidad, originalidad y fluidez.

**Figura 52:** *Distribución de los puntajes en los problemas pos por docente.*



*Fuente:* creación propia

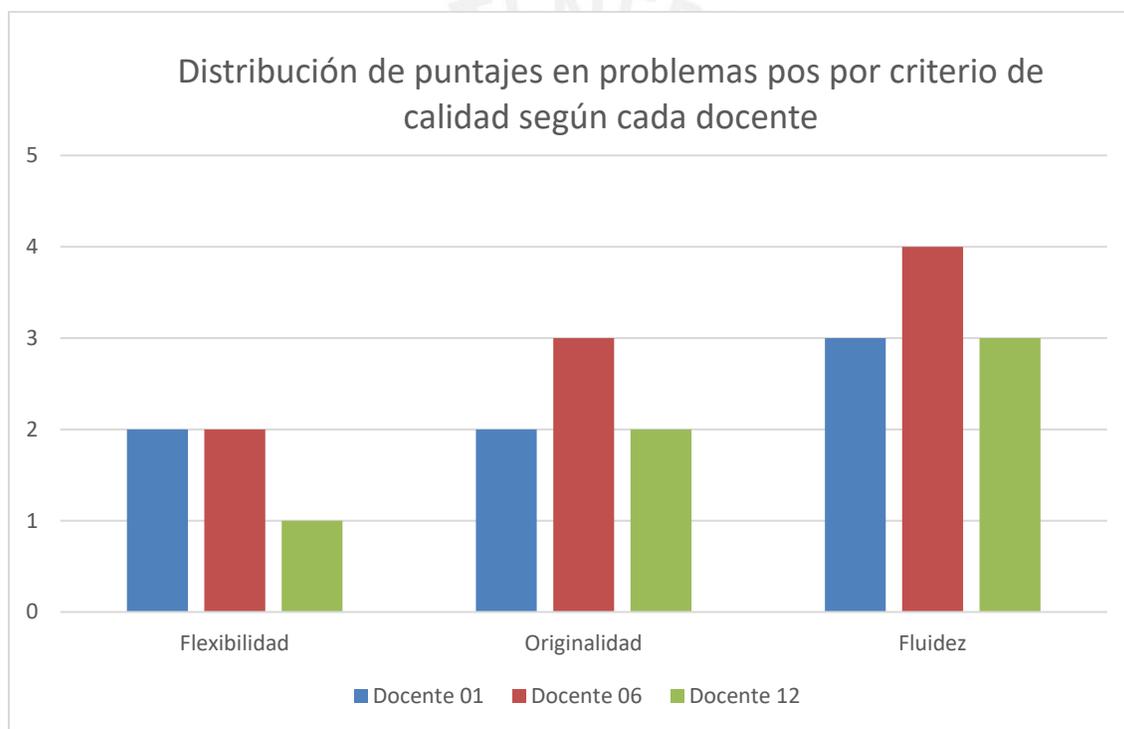
Como podemos observar, los puntajes de cada docente son diferentes según cada criterio. Los tres docentes obtienen su mayor puntaje en el criterio de fluidez, pero en el caso del docente 6, tanto en el criterio de originalidad como en el de fluidez, supera al puntaje de los otros docentes. En el caso del docente 12, obtiene puntajes similares al docente 1 en los criterios de originalidad y fluidez, pero obtiene el menor puntaje en flexibilidad.

Este gráfico nos permite ver, que si bien, luego del desarrollo del taller cada docente obtiene un puntaje que lo sitúa en un producto de calidad media o alta, la distribución de puntajes por criterios es variada, siendo más altas en el docente 6 y más bajas en el docente 12.

Con estos resultados, podemos suponer que los docentes conocieron la estrategia EPP, aplicándola en una experiencia propia. Pudieron experimentar el resolver el problema de un episodio propuesto y a partir de allí crear problemas pre modificando alguno de los elementos del problema y con menor exigencia para hacer más entendible el problema del episodio, y también el poder crear un problema pos también con variaciones de algunos elementos del problema asegurando una mayor demanda cognitiva.

La figura 49, muestra de manera comparativa los mismos puntajes, permitiendo obtener otras conclusiones.

**Figura 53:** Distribución de puntajes en los problemas pos por criterio



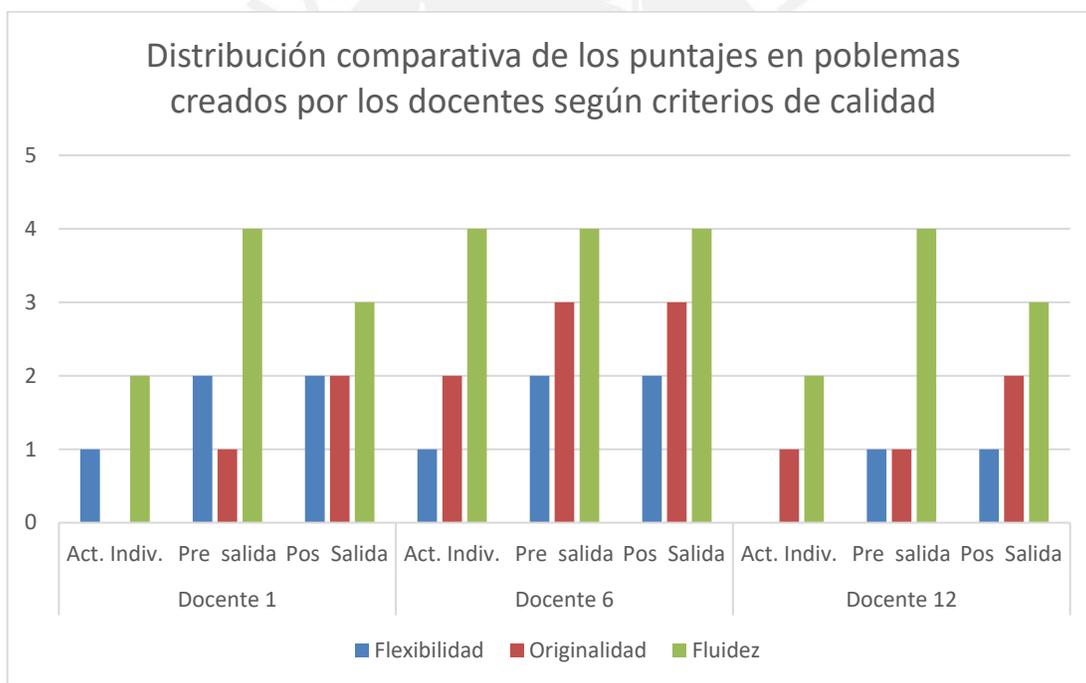
*Fuente:* creación propia

Como podemos observar, el criterio de flexibilidad muestra los más bajos puntajes en todos los docentes, mientras que, para los 3 docentes, el criterio de fluidez obtiene el mayor puntaje. Este resultado nos permite inferir que luego del taller los docentes trabajaron como estrategia en la variación de sus problemas a la hora de crearlos, el hacer los problemas más fluidos, es decir, trabajar con los requerimientos, incrementándolos o desagregando los pasos en varios pasos más para dar un mejor entendimiento o una mayor exigencia según era el caso.

Podemos suponer con estos resultados que los docentes conocieron las características de la creación de problemas mediante la estrategia EPP, logrando hacer las variaciones necesarias al problema presentado en el episodio como modelo. Como señalan las últimas gráficas, se consiguió trabajar en la originalidad y fluidez de los problemas, logrando los objetivos de hacer más entendible el problema pre y acercar a los estudiantes que lo resuelvan a un mejor entendimiento del problema, así como generar una mayor exigencia en la redacción del problema pos.

Para analizar los resultados de manera comparativa en las producciones de los problemas pre y problemas pos, tanto de la actividad individual y la prueba de salida, presentamos la siguiente figura con la gráfica que nos muestra los resultados de los docentes 1, 6 y 12 simultáneamente.

**Figura 54:** Distribución comparativa de los puntajes



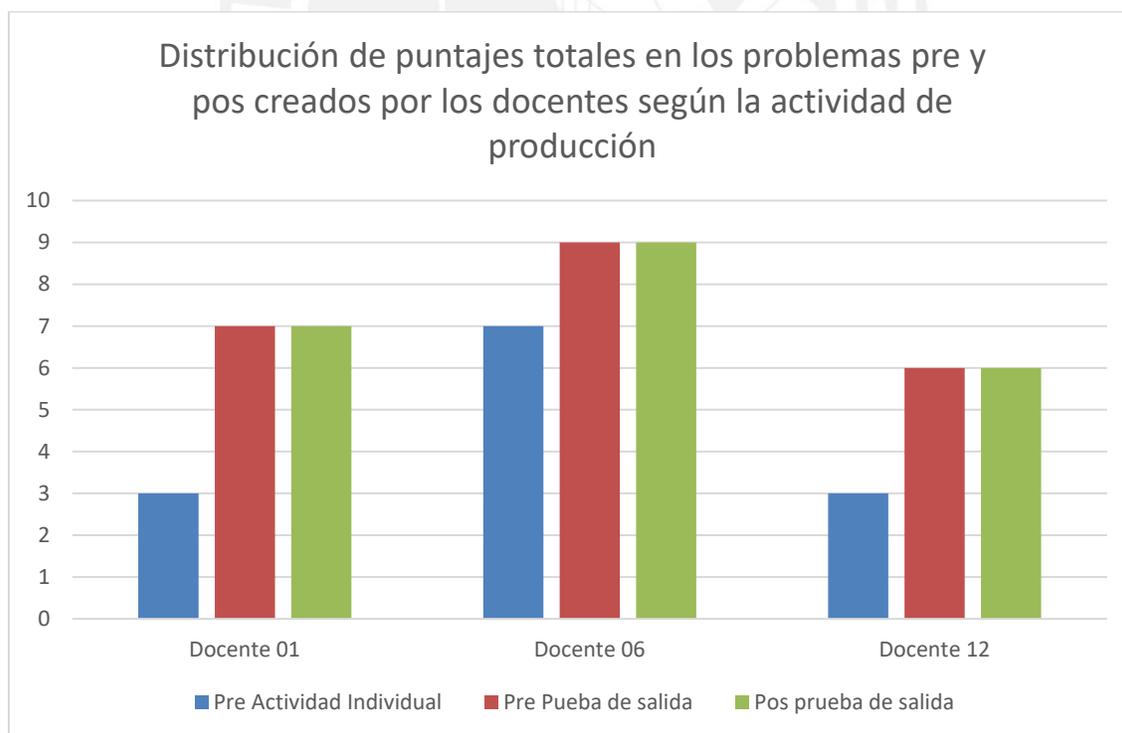
*Fuente:* creación propia

Observamos en este gráfico, que el docente 6, tiene una mejor puntuación en cada uno de los criterios de forma comparativa con los otros docentes. Su producto en el problema pre y el problema pos son similares, pero con puntajes superiores al desarrollado en la actividad individual. En el caso del docente 1, se observa una mejora en la puntuación en el problema pre

de la prueba de salida respecto de la actividad individual y en el problema pos, respecto del problema pre. Igualmente, en el caso del docente 12, la mejora de los puntajes obtenidos es evidente en el problema pos, respecto del problema pre y ambos respecto del problema elaborado en la actividad individual.

Tal como fuimos encontrando en los cuadros anteriores, identificamos por docente una mejora en la obtención de puntajes obtenidos en la creación de los problemas pre, siendo además que los puntajes obtenidos en la creación de los problemas pos se mantiene con una calidad media y alta. Esto nos permite suponer que la estrategia EPP fue gradualmente asimilada por los docentes mientras se desarrollaba el taller, permitiendo que los docentes puedan trabajar con más eficacia en la elaboración de sus problemas. La estrategia EPP, fue nueva para todos los docentes participantes del taller, y corroboramos con el análisis de los resultados de los docentes 1,6 y 12 que les fue posible ir asimilándola para un manejo aceptable de la creación de problemas como estrategia didáctica para la enseñanza de la función exponencial. En la figura 51, a continuación, podemos ver un comparativo de los puntajes totales por docente.

**Figura 55:** *Distribución de puntajes por actividad de producción*



*Fuente:* creación propia

Este cuadro nos permite observar que el puntaje obtenido por los docentes en el problema pre y el problema pos de la prueba de salida, se mantienen igual, siendo ambos mejores que los obtenidos en la actividad individual. Esto muestra que los docentes trabajaron mejor en la producción de sus problemas, poniendo más énfasis en la claridad de la redacción, las preguntas y el nivel de complejidad que debe tener el problema, lo cual se evidencia en los puntajes obtenidos por los docentes. Es importante mencionar que cada uno de los docentes cuyos trabajos hemos analizado, participaron en diferentes grupos de trabajo en el momento de la producción grupal. Finalmente podemos mencionar de manera general que los puntajes obtenidos se mantienen en las producciones de la prueba de salida.

La estrategia EPP fue conocida, practicada y aplicada por los docentes que participaron del taller, y los resultados nos mostraron que los docentes 1,6 y 12 cuyos resultados fueron presentados, mejoraron en la elaboración de sus problemas pre y problemas pos adecuando las variaciones de los problemas para sus productos. Esto nos permite mostrar que la estrategia es aplicable con docentes en ejercicio, con experiencia en la enseñanza y con la oportunidad de integrar más estrategias didácticas para su enseñanza y en particular para la enseñanza de la función exponencial.

Observamos con todo esto que la investigación permitió realizar una aplicación de la estrategia EPP con docentes, en donde se pudo identificar los conocimientos que los participantes evidenciaban sobre la función exponencial. También, mediante el desarrollo del taller de creación de problemas se pudo analizar los resultados al aplicar la secuencia de actividades basadas en la estrategia EPP respecto de la creación de problemas por variación sobre funciones exponenciales

A partir de este análisis verificamos que los docentes profundizaron en diversos conceptos relacionados al objeto matemático, como son la definición de la función, la representación gráfica, la identificación de valores de la función y el uso de esta como modelo para representar una situación concreta. Con la estrategia se trabajó en la formulación de los requerimientos tomando en consideración las formas en que se puede desarrollar gradualmente una pregunta para facilitar más su comprensión. Se vio en la experiencia del uso de la estrategia que los docentes asimilaron la estructura de trabajo para modelar problemas más simples como es el caso de los problemas pre y posteriormente con mayor demanda cognitiva en el caso de los problemas pos.

### **3.4 Análisis de la comprensión de los docentes sobre el objeto matemático identificada en los docentes participantes**

Adicionalmente podemos mencionar que el trabajo desarrollado durante el taller con los docentes nos da indicios de que los docentes muestran una mejor comprensión de los conceptos relacionados al objeto matemático función exponencial. Esto lo podemos inferir al observar la forma en que describieron inicialmente en la prueba de entrada los conceptos asociados a la función exponencial y cómo deben tenerlos en cuenta al enseñarlos a sus estudiantes, y por otro lado a la manera cómo respondieron nuevamente a preguntas similares en la prueba de salida, mostrando en algunos casos las mismas ideas, pero en otros casos ideas más estructuradas y ampliadas detallando algún elemento adicional que no fue mencionado anteriormente en la prueba de entrada. En el caso de los docentes 1, 6 y 12, al analizar comparativamente sus respuestas, encontramos una variación en la manera como comprenden los temas asociados a la función exponencial. Es posible suponer que la experiencia de participar en las actividades individuales y grupales del taller, movilizaron conocimientos y formas de estructurar las ideas, las cuales pudieron ser organizadas en las respuestas de la prueba de salida.

#### **3.4.1 Comparación de las respuestas de los docentes en las pruebas de entrada y salida**

Si observamos comparativamente las respuestas de los docentes 1,6 y 12 en la prueba de entrada y la prueba de salida, cuando se les preguntó por los conceptos asociados a la función exponencial que deben tener en cuenta cuando la enseñan a sus estudiantes, podemos observar algunas de estas diferencias mencionadas. En la siguiente tabla mostramos comparativamente las respuestas dadas por los docentes mencionados:

**Tabla 24***Respuestas comparativas de los docentes a la pregunta sobre el objeto matemático*

<b>Docente</b>	<b>En la prueba de entrada</b>	<b>En la prueba de salida</b>
Docente 1	Se debe reconocer elementos de una potencia, es decir la base y el exponente, así como los conceptos de función, dominio, rango, representación gráfica en el plano bidimensional.	Elementos de una potencia, la base y el exponente. Conceptos de función, dominio, rango, regla de correspondencia. Representación gráfica de una función en el plano bidimensional.
Docente 6	El docente debe asegurarse que los estudiantes identifiquen los elementos de una función en general, coordenadas, dominio, rango, asíntotas, monotonía. Particularmente en cuanto a la función exponencial, identificar las propiedades de la potencia, la asíntota horizontal y las características de la función dependiendo de la base (comportamiento creciente o decreciente)	La definición de Potenciación y Radicación como exponente Fraccionario, incluyendo las leyes de Exponentes. Exponente negativo. Ecuaciones Exponenciales usando propiedades de los exponentes y logaritmos para valores aproximados con calculadora Aplicaciones del uso de exponenciales como el Interés Compuesto y el crecimiento exponencial
Docente 12	Elementos de la función exponencial (Regla de correspondencia, asíntotas, intersecciones con los ejes) Comportamiento de una función exponencial. Gráfico de una función exponencial	Componentes de la función exponencial (Base, exponente, regla de correspondencia) Limitaciones de los componentes de una función exponencial. (que pasa cuando la base es mayor o menor que 1) Ajustar dominio y rango de la función exponencial al trabajar problemas contextualizados. (Los valores no pueden ser infinitos)

*Fuente:* Elaboración propia

Algunas de las repuestas, como en caso del docente 1, son similares y detallan casi las mismas ideas, pero podemos observar en el caso del docente 6 y del docente 12, un incremento en las ideas y conceptos que describen, así como un orden más detallado.

En el momento de hacer el diseño de ambas pruebas, las expectativas de las respuestas que se esperaba por parte de los docentes eran mayores ya que hay muchos más elementos asociados al objeto matemático que esperábamos que los docentes identifiquen. En la siguiente tabla reproducimos las ideas que se esperaban en ambas pruebas y que se detallaron en el diseño de estas:

**Tabla 25***Lo que se esperaba que respondieran sobre el objeto matemático*

En la prueba de entrada	En la prueba de salida
Se espera que el docente mencione cómo se relacionan las variables en una función exponencial, por ejemplo, si $x$ varía en una cantidad constante, $f(x)$ sufre una variación porcentual constante. Se espera que mencionen que a medida que la variable $x$ varía en una cantidad constante, la variable $f(x)$ varía de manera porcentual y constante. Se espera que los docentes indiquen que la variable $f(x)$ varía de manera porcentual constante, formando una progresión geométrica. Se espera que mencione conceptos asociados a la función exponencial como las propiedades, uso de logaritmos, resolución de ecuaciones con propiedades o logaritmos, condiciones de la base del exponencial y características de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, entre otros.	Se espera que el docente mencione la relación que existe entre las variables involucradas en una función exponencial, se espera que comenten sobre la variación porcentual que se mantiene constante. Se espera que los docentes indiquen que la variable $f(x)$ varía de manera porcentual constante, formando una progresión geométrica. Se espera que mencione conceptos asociados a la función exponencial como las propiedades, uso de logaritmos, resolución de ecuaciones con propiedades o logaritmos, condiciones de la base del exponencial y características de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, entre otros.

*Fuente:* Elaboración propia

Podríamos hacer conjeturas sobre algunas causas por las cuales los docentes no llegaron a responder completamente a las preguntas según las expectativas que teníamos inicialmente. Podemos suponer que el factor tiempo o el interés que pusieron al responder las preguntas con esmero pudieron influir en la calidad de la respuesta. También podría ser que el nivel de formación docente o experiencia que tenían. Sin embargo, creemos que hay evidencia en las respuestas mostradas en la tabla 24, para considerar que el desarrollo del taller y las actividades desarrolladas con en la estrategia EPP, permitieron que algunos docentes respondieran con más detalle al momento de señalar las características y conceptos asociados a la función exponencial al enseñar dicho tema.

A fin de reforzar esta idea, podemos ver que en la entrevista personal que se realizó con el docente 1 y el docente 6, dichos docentes ampliaron sus reflexiones y comentarios sobre el objeto matemático, evidenciando esta mejor comprensión. Las preguntas que se hicieron a los docentes en estas entrevistas están en el anexo 6, pero a continuación, reproducimos algunas de las preguntas y respuestas de dicha entrevista:

## Entrevista al docente 1

La siguiente tabla, muestra algunas de las preguntas y fragmentos transcritos de las respuestas dada por el docente 1

**Tabla 26**

*Transcripción de la entrevista al docente 1*

Pregunta	Respuesta
Pregunta 1: ¿Cómo explica la relación que existe entre las variables involucradas en una función exponencial?	<p><i>“La variable independiente que es la variable <math>x</math>, es la que justamente va a empezar a variar encontrándose en el exponente de una base. Eso va a determinar la variable dependiente que es la <math>y</math> que depende de los resultados de <math>a^x</math> donde la <math>x</math> es el exponente de la base...</i></p> <p><i>... estamos observando justamente que la variable dependiente va a crecer de manera multiplicativa en una magnitud bastante considerable a partir de datos puntuales de <math>x</math> ...”</i></p>
Pregunta 2: ¿Cuáles son las características propias de la función exponencial? Mencione las características que la diferencia de otras funciones.	<p><i>“... Se puede visualizar justamente en los modelos ... si hacemos la comparación entre una función lineal, una cuadrática o una raíz cuadrada o logarítmica o valor absoluto, etc. Vamos a ver las comparaciones con características muy especiales.</i></p> <p><i>Hay aplicaciones que ayudan a entender este comportamiento como la física, la biología o la matemática propiamente dicha, ayudan a modelar situaciones de contexto real para entender algunos aspectos, cómo la bacteriología, la pandemia, y ver como se reproducen por ejemplo en el COVID, o las bacterias. Entender este comportamiento nos ayuda a partir de modelaciones de tipo exponencial...”</i></p>
Pregunta 3: ¿Cómo explica el rápido crecimiento o decrecimiento de la función exponencial?	<p><i>“Se parte de situaciones en forma intuitiva e inductiva ...con algunos valores podemos ver que cuando crece la variable <math>x</math>, que pasa con la variable <math>y</math>... por ejemplo <math>y = 2^x</math> o, <math>y = 4^x</math> ,, etc. ... con modelos pequeños para que el estudiante pueda inferir lo que ocurre...</i></p> <p><i>El docente a veces da directamente la fórmula del interés, cuando en realidad eso tiene una génesis, un inicio en la cual el estudiante se da cuenta el proceso de inducción matemática, el proceso de descubrir heurísticamente la fórmula o el modelo, de que tiene ese tipo de variable...”</i></p>
Pregunta 4: Cuando enseña función exponencial, ¿cuáles son los conceptos matemáticos más importantes que trabaja con sus estudiantes?	<p><i>“... qué entendemos por función, qué elementos tiene la función, a que denominamos dominio, rango, pre imagen o imagen. Las diferentes relaciones que existen entre dos conjuntos, cuando diferenciamos si es relación o función. Es tácito decir que toda relación es una función o a la inversa. Todo esto lo debe tener claro.</i></p>

Fuente: Elaboración propia

Como mencionamos podemos ver en las respuestas brindadas por el docente, más información sobre el objeto matemático, menciona la dependencia entre variables y cómo la variable dependiente crece de manera multiplicativa dando indicios de conocer el tipo de crecimiento que se da en la variable dependiente, aunque no es tan explícito en su argumento. Describe con más detalle los elementos que considera que debe tener en cuenta sobre el objeto matemático, mencionando la posibilidad de trabajar con ejemplos que permitan visualizar el rápido crecimiento. Podemos ver que da algunas sugerencias para trabajar con más conceptos necesarios, como es el hecho de saber qué es una función y la relación entre elementos de conjuntos que definen una función o una relación, aunque estos conceptos son generales y no propios de la función exponencial. Finalmente, destacamos que en sus respuestas sugiere trabajar con ejemplos pequeños que ayuden al estudiante a entender la génesis de modelos exponenciales mayores, con lo que podemos inferir que el docente visualiza el objeto matemático más allá de una simple regla de correspondencia.

### Entrevista al docente 6

La siguiente tabla, muestra algunas de las preguntas y fragmentos transcritos de las respuestas dada por el docente 6

**Tabla 27**

*Transcripción de la entrevista al docente 6*

Pregunta	Respuesta
Pregunta 1: ¿Cómo explica la relación que existe entre las variables involucradas en una función exponencial?	<i>“... la relación que existe entre la variable, la variable independiente que normalmente la ponemos como la <math>x</math>, sería el tiempo y el monto, tendría un modelo lineal o exponencial...”</i>
Pregunta 2: ¿Cuáles son las características propias de la función exponencial? Mencione las características que la diferencia de otras funciones.	<i>“Su comportamiento, como va evolucionando de una manera geométrica, . . . como profesor, decimos que la variable dependiente, la variable <math>y</math>, va creciendo en una proporción geométrica como te iba comentando anteriormente...”</i>
Pregunta 3: ¿Cómo explica el rápido crecimiento o decrecimiento de la función exponencial?	<i>“... cuando introduzco este tema, los mando a graficar con una herramienta tecnológica para que los chicos en primer lugar vayan observando la tendencia y vamos experimentando con la herramienta tecnológica, cuál es el crecimiento o cual es el patrón que van a seguir según ese crecimiento. Luego con herramientas analíticas comenzamos a ver de qué manera se puede llegar a tener ese patrón matemático, pero en primer lugar es observación. En un plano cartesiano con una ayuda tecnológica”.</i>

Pregunta	Respuesta
Pregunta 4: Cuando enseña función exponencial, ¿cuáles son los conceptos matemáticos más importantes que trabaja con sus estudiantes?	<i>“La relación entre las dos variables, cuando la variable independiente toma un valor específico, supongamos cero, ver que valor arroja para el y, en consecuencia, van a tener un par ordenado, y también deben tener el concepto de par ordenado y cómo ubicarlo en el plano cartesiano ... ellos pueden observar ese crecimiento que se va dando de una manera bastante “acelerada” con respecto a esa variable dependiente”.</i>

*Fuente:* Elaboración propia

En estas respuestas podemos leer cómo el docente menciona varios elementos que sí esperábamos que estén presente en sus repuestas de la prueba de salida. Por ejemplo, el patrón geométrico de crecimiento de la función exponencial y el crecimiento acelerado que se puede encontrar en este modelo. Al detallar los conceptos para tener en cuenta cuando trabaja con sus estudiantes, señala el identificar la relación entre las variables, las cuales originarán pares ordenados que podrán visualizar en el plano cartesiano de manera gráfica. Describe cómo a partir de esta representación se puede también visualizar el crecimiento acelerado de la variable dependiente, dando indicios de una comprensión de las características del objeto matemático.

### **3.4.2. Comparación entre los conocimientos matemáticos sobre la función exponencial evidenciados al inicio y al final del taller**

A continuación, presentamos una descripción de los conocimientos evidenciados al inicio y al final del taller por los docentes 1,6 y 12 sobre la función exponencial. Para esto, hemos considerado los conocimientos mostrados en la prueba de entrada y posteriormente en la prueba de salida y productos finales desarrollados. La siguiente tabla muestra una comparación entre los conocimientos observados en las respuestas del docente 1 antes y después de la aplicación del taller:

**Tabla 28***Conocimientos observados en el docente 1 antes y después*

Conocimientos mostrados antes	Conocimientos mostrados después
Sobre el concepto de función exponencial identifica las propiedades de los exponenciales, la identificación del dominio y rango de la función y la representación gráfica.	Muestra el manejo del concepto de función y aplicación del modelo en la resolución de problemas. Reconoce los elementos de la regla de correspondencia, y menciona el reconocimiento del dominio y rango en el modelo, así como su representación gráfica
En la plantear y resolver problemas no muestra el uso del modelo exponencial y trabaja con fórmulas de interés simple y compuesto. No identifica las variables ni relación entre ellas y da respuestas directas al problema. Añade en la solución, representaciones gráficas de funciones lineales y exponenciales, empleando el método de intersección de curvas para	Está presente el uso de la función exponencial como modelo para la resolución. Establece requerimientos que evidencian el uso de tabulaciones y cálculos empleando propiedades y ecuaciones exponenciales de ser necesarias. Plantea el uso de la gráfica para elaborar conjeturas y descubrimientos que den una mejor comprensión. Emplea el modelo para establecer análisis de los resultados y justificación de enunciados basados en los resultados. Evidencia un acentuado uso de recursos tecnológicos

*Fuente:* Elaboración propia

Podemos observar que menciona al inicio aspectos muy generales y no identifica la relación las variables, las características de la función exponencial más en detalle ni la variación porcentual. Al final del trabajo, evidencia una mejora en sus conocimientos mostrando una estructura más sistemática. Se apoya más en el uso de la función como modelo, aunque no reconoce conocimientos asociados como el uso de logaritmos, aunque reconoce el uso de las propiedades al resolver ecuaciones. Identificamos una mejora clara, teniendo aún conceptos y conocimientos por cubrir.

A continuación, en la siguiente tabla, observamos la comparación entre los conocimientos evidenciados por el docente 6:

**Tabla 29***Conocimientos observados en el docente 6 antes y después*

Conocimientos mostrados antes	Conocimientos mostrados después
<p>Sobre el concepto de función exponencial identifica conceptos de coordenadas en el plano, dominio, rango, asíntotas y característica de monotonía según la base del exponencial. Menciona las propiedades de la potencia, pero no describe la relación entre las variables.</p>	<p>Reconoce con mayor claridad la diferencia entre un modelo lineal y uno exponencial para el cálculo de intereses. Menciona la posibilidad del uso de potencias fraccionarias y exponentes negativos. En el modelo exponencial reconoce el uso de la regla de correspondencia, los elementos y la característica del crecimiento acelerado en la función exponencial. En cuanto a la relación entre las variables no llega a identificar la relación porcentual entre ellas</p>
<p>En la resolución de problemas identifica la diferencia entre los dos tipos de interés, pero las identifica como fórmulas y no como funciones. En las notaciones, no emplea variables sino palabras, por lo que no muestra un tratamiento estrictamente funcional. Usa tabulación y graficadores asociados a las funciones para emplear el método de intersección de curvas para la solución del problema.</p>	<p>Evidencia un claro y adecuado uso de las gráficas para la resolución de los problemas. Asocia cada tipo de interés al modelo funcional correspondiente. Plantea requerimientos que evidencian identificación de patrones para la elaboración de los modelos. Para la resolución del problema sugiere el uso de los conceptos asociados como las propiedades, los logaritmos y las diferentes formas de resolución de ecuaciones, mostrando en su caso el uso del método gráfico.</p>

*Fuente:* Elaboración propia

En el caso del docente 6, observamos también una mejora en el manejo de conocimientos antes y después. Muestra un mayor énfasis a reconocer el uso del modelo funcional y no solo trabajar con fórmulas. Identifica los conocimientos asociados necesarios para resolver el problema. No muestra mayor detalle en el análisis de las gráficas y la relación porcentual entre las variables, así como las estrategias para construir las gráficas cuando no se cuenta con recursos tecnológicos. Es claro que el análisis de los problemas y la estrategia de crear problemas no fue suficiente para que el docente identificara estas características.

A continuación, en la siguiente tabla, observamos la comparación entre los conocimientos evidenciados por el docente 12:

**Tabla 30***Conocimientos observados en el docente 12 antes y después*

Conocimientos mostrados antes	Conocimientos mostrados después
Sobre el concepto de función exponencial, menciona el uso de una regla de correspondencia, existencia de asíntotas e intersecciones con los ejes. Destaca la característica del comportamiento gráfico de una función exponencial.	Identifica en la regla de correspondencia los elementos como son la base, el exponente y la ecuación que relaciona ambas variables. Analiza las limitaciones que se debe tener, es decir el dominio y rango de la función, así como la necesidad de que la base sea no negativa. Plantea contextualizar los problemas para analizar que los valores en los exponenciales si bien crecen indefinidamente, en el contexto del problema no puede ser así.
Al plantear y resolver problemas, identifica la relación con las progresiones aritméticas y geométricas e identifica la progresión geométrica con la función exponencial, sin embargo, resuelve el problema sin notación funcional y solo empleando cálculos. Para la solución del problema también usa un graficador para la intersección de curvas.	Al resolver problemas identifica la relación porcentual y lo asocia con las progresiones aritméticas y geométricas. Esto lo estructura mediante el uso de tablas para elaborar conjeturas a partir de los valores y analizar los requerimientos que se le piden. No menciona aspectos como el dominio y rango ni la posibilidad de interpretar el sentido de la asíntota. En general se observa mas un tratamiento algebraico.

*Fuente:* Elaboración propia

En el caso de el último docente, vemos presente pequeñas mejoras respecto de lo evidenciado al inicio, sin embargo, su trabajo es más algebraico y se limita más a los cálculos por lo que es posible que el uso del modelo no sea aprovechado de manera amplia.

Posteriormente en las entrevistas mencionadas, se pudo corroborar algunos aspectos concretos sobre los conocimientos respecto de la función exponencial, encontrando que si identifican la relación entre las variables. También mencionan los docentes que la experiencia del taller mostró la necesidad clara del manejo de conceptos por parte del docente, pues intentar variar condiciones del problema implica conocerlos mejor, y consideran que la estrategia EPP ayuda a identificar estos conceptos como es identificar la regla de correspondencia como generalización de los patrones numéricos que se pueden encontrar al calcular el interés simple y compuesto.

Algunos aspectos matemáticos que quedaron sin ser explorados y movilizados por los docentes son: Análisis del dominio y rango de los modelos en el contexto del problema, las variaciones porcentuales en el cálculo del interés compuesto, identificación del sentido de las asíntotas en los modelos y resolución de ecuaciones exponenciales sin uso de tecnología. Estos y otros temas podrán ser enfatizados como parte de esta estrategia para este objeto matemático mediante estrategias adicionales y asegurar así un adecuado conocimiento matemático en los docentes.



## Capítulo IV: Consideraciones finales

### 4.1 Conclusiones de la investigación

Iniciamos nuestro trabajo buscando investigaciones con focos de interés en el objeto matemático función exponencial y en la propuesta EPP dentro de la estrategia didáctica de creación de Problemas. Encontramos trabajos como los de García y Martínez (2018), Sudera y Otero (2013), y Vivas (2020), los cuales nos permitieron conocer los diferentes enfoques con los que se aborda la función exponencial con estudiantes. Asimismo, encontramos investigaciones como las de Pomalaya (2020), Rodríguez (2018) y la propuesta de Malaspina (2013) nos permitieron trabajar sobre la estructura y elementos de un problema y las formas de trabajar la estrategia de creación de problemas. A partir de esto, pudimos desarrollar una propuesta para analizar cómo es que el uso de la creación de problemas puede contribuir a una mejor comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria.

#### **Sobre el primer objetivo específico:**

Nos planteamos: *Identificar los conocimientos sobre función exponencial que evidencian los docentes de educación secundaria en un taller de creación de problemas.*

Consideramos que este objetivo se logró y se verificó mediante la aplicación de la prueba de entrada (ver anexo 3) y el desarrollo de la actividad individual (ver anexo 6) a partir del cual, pudimos recabar la información necesaria para organizar y sistematizar los conocimientos acerca de 3 de los docentes participantes evidenciaron en sus respuestas y los procedimientos empleados para resolver el problema del episodio propuesto. En dichas producciones y los diferentes momentos de trabajo grupal, así como las plenarias en el taller en donde presentaban sus observaciones, resultados y trabajos de producción de problemas, pudimos verificar que los docentes identificaron los elementos del objeto matemático función exponencial y mediante los ejercicios de crear problemas, verificamos los conocimientos que tenían sobre él. Estos conocimientos referentes al objeto matemático función exponencial, fueron analizados en los grupos de trabajo y comentados de manera comparativa en los momentos de plenario, logrando identificar que los docentes cuentan con un conocimiento básico sobre la función exponencial y las funciones en general, identificando algunos elementos tales como variable dependiente e independiente, representaciones gráficas, comportamiento creciente y decreciente, así como el concepto de dominio y rango. Así mismo, evidenciaron ser competentes para resolver problemas de cálculo, comparación y justificación de conjeturas como lo mostraron en el desarrollo del

episodio propuesto y los momentos en los que expusieron sus actividades grupales y al plantear las soluciones a los problemas pre y pos que propusieron.

### **Sobre el segundo objetivo específico:**

Nos planteamos: *Analizar los resultados al aplicar una secuencia de actividades basada en la estrategia EPP respecto a la creación de problemas por variación sobre funciones exponenciales.*

Consideramos que este objetivo también se logró, ya que se ha logrado presentar un análisis detallado de los productos propuestos por 3 de los docentes participantes empleando la rúbrica de calificación adaptada de Aguilar (2018) y Pomalaya (2020). En ella pudimos encontrar que la calidad de producción, que en algunos casos comenzó siendo baja, pues solo hicieron problemas similares al episodio con pocos requerimientos y poca originalidad, aumentó luego de las experiencias de trabajo individual, y grupal, mostrando los docentes una cierta mejora en la calidad de producción de problemas como se puede ver en los problemas reproducidos y la calificación empleado la rúbrica, lo cual consideramos que puede evidenciar que los docentes entendieron la propuesta EPP para la creación de problemas por variación. Sobre la comprensión del objeto matemático función exponencial, y su uso para la creación de problemas, encontramos que los conocimientos parecen ser los mismos, por lo que es necesario ahondar en las estrategias de trabajo en la búsqueda de una mejor comprensión. También consideramos que la participación en los momentos de trabajo grupal, y exposición de trabajos les permitió a los docentes asimilar mejor las características de la estrategia, por lo que los productos finales presentados en la prueba de salida permitieron observar una mejor calidad en cuanto a la flexibilidad, originalidad y fluidez de los problemas creados.

### **Sobre el objetivo general**

Consideramos que hemos descrito el cumplimiento de los objetivos específicos, dado que hemos presentado en la figura 40 la distribución comparativa de puntajes obtenidos en los problemas creados por los docentes según criterios de calidad en cada uno de los instrumentos de recolección de datos, y habiendo presentado un análisis de las respuestas y resultados individuales presentados por los docentes 01, 06 y 12 del grupo de docentes participantes, podemos afirmar que hemos cumplido el objetivo general de la investigación: *Analizar cómo la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria.*

Por lo tanto, podemos contestar a la pregunta de investigación: *¿De qué manera la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria?*

Considerando los objetivos logrados, podemos afirmar que la creación de problemas contribuye a la comprensión de la función exponencial en docentes de educación secundaria teniendo en cuenta los siguientes alcances:

- Permite que los docentes puedan identificar los elementos y conceptos fundamentales para la enseñanza de la función exponencial. Antes del taller identificaba ideas generales, pero el trabajo desarrollado permitió, como hemos visto en las pruebas y la entrevista realizada luego del taller en donde confirmamos que los docentes tenían una identificación más detallada tanto del objeto matemático como de la estrategia EPP.
- Otorga a los docentes una herramienta didáctica de trabajo para abordar un concepto matemático dentro de contextos reales.
- Facilita la comprensión de la estructura de un problema relacionado con la función exponencial, permitiendo identificar situaciones con crecimientos exponenciales y representarlos mediante gráficas que ilustren la rapidez en el tiempo de dicho crecimiento.
- Es un buen ejemplo de cómo identificar los elementos de un problema, como la información, el contexto, los requerimientos y el entorno matemático, y ver cómo pueden variar para hacer un problema más sencillo de comprender aplicado a la función exponencial.
- Permite que los docentes conozcan y apliquen la estrategia EPP de la propuesta creación de problemas Malaspina (2013), para crear problemas pre y problemas pos por variación, dando oportunidad para la comprensión de la función exponencial y al desarrollo de habilidades de resolución de problemas; así como al desarrollo de la creatividad.

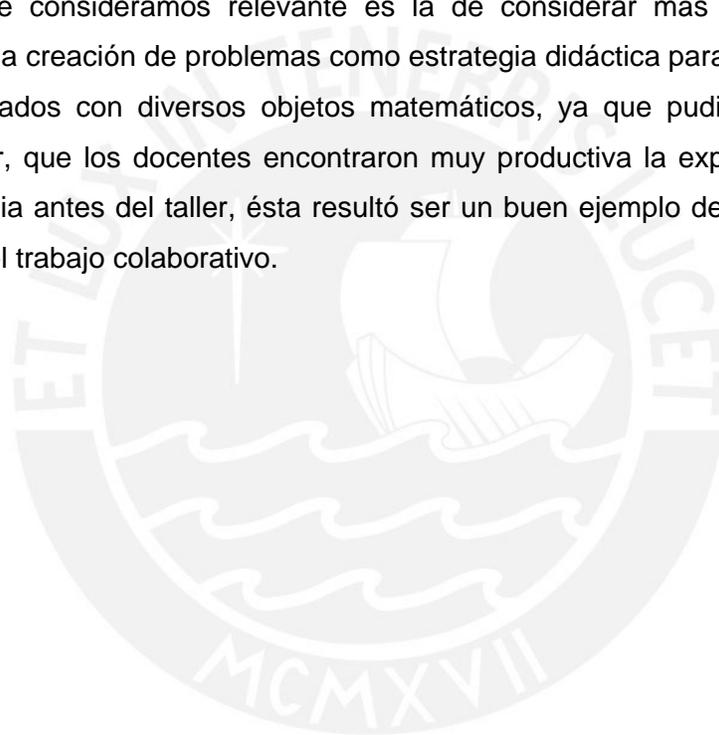
#### **4.2 Recomendaciones para futuras investigaciones**

Tomando en cuenta los aportes descritos en nuestro trabajo y pensando en algunas investigaciones futuras, consideramos que es importante seguir trabajando sobre el objeto matemático función exponencial, ya que es un tema sobre el cual se puede seguir ampliando investigaciones con este enfoque u otro enfoque didáctico para apoyar el trabajo de los docentes siendo éste un tema abordado con los alumnos de manera rápida y superficial. Consideramos que los docentes requieren diferentes ejemplos de cómo aplicar diversas estrategias didácticas que permitan presentar mejor el concepto a los estudiantes. Además, es importante considerar

los conceptos relacionados que se conectan directamente con este tema, como es la función logaritmo y las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Respecto del trabajo en el aula, es importante señalar que la investigación deja abierta la posibilidad de replicar la experiencia en nuevas investigaciones que consideren a la función exponencial como objeto matemático de trabajo. En estas investigaciones se puede enfatizar la implicancia que los docentes encuentran en las actividades de trabajo en el aula el impacto con los estudiantes con el uso de esta estrategia.

Con estos temas es posible replicar investigaciones similares para desarrollar las habilidades de resolución de problemas a partir del uso de la estrategia didáctica. Otra recomendación que consideramos relevante es la de considerar más investigaciones que planteen el uso de la creación de problemas como estrategia didáctica para profundizar más los conceptos relacionados con diversos objetos matemáticos, ya que pudimos observar en la aplicación del taller, que los docentes encontraron muy productiva la experiencia, pues al no conocer la estrategia antes del taller, ésta resultó ser un buen ejemplo de cómo dinamizar las clases y fomentar el trabajo colaborativo.



## Referencias

- Advíncula, E. M. (2010). *Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de la carrera de humanidades*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú] <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4717>
- Aguilar, A. (2018). *Estimulación de la capacidad de crear problemas sobre sistemas de inequaciones lineales con dos incógnitas. Un estudio de caso en un grupo de docentes de matemática de los primeros ciclos de educación superior*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12178>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal. Recuperado de [http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod\\_resouce%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf](http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resouce%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf)
- Flores, R. W. (2019). *Construcción de la función exponencial con estudiantes de quinto de secundaria por medio de situaciones didácticas*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/14603>
- Flores Marín, M. y Font, V. (2017). Impacto de un programa de desarrollo profesional para profesores de secundaria de matemáticas sobre la enseñanza de funciones en el Ecuador. El caso de la función exponencial. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <http://enfogueontosemiotico.ugr.es/civeos/flores.pdf>
- Freitas, R. L. (2015). *A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura: um estudo da função exponencial*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidade Católica de São Paulo]. <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11041>
- García, D., y Martínez, M. (2018). *Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2077-29552018000200010](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200010)

- Gómez, P., y Cañadas, M. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19 (3), 311-334. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1933>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. *Metodología de la investigación* (5ta ed.). McGraw-Hill / Interamericana Editores
- IBO. (2019). *Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques. Versión en español del documento publicado en febrero del 2019: Mathematics: Analysis and Approaches guide*. Programa del Diploma.
- Janesick, V. (1998). The dance Qualitative Research Design. In N.K. Denzin & Y.S. Lincoln. (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp.209-219). London, Inglaterra: Sage Publication.
- Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). *Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Relime*, 17(4), 9–10.
- Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development mathematical wor in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics Education*, 40, 861.874. doi: <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0>
- Latorre, A., Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: GR92.
- Lima, E., Morgado, A., Pinto, P. y Wagner, E. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*. Lima: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines.
- Malaspina, U. (2013). La creación de problemas matemáticos en la formación de profesores. VII SIBEM, pp. 129-140. Uruguay. Recuperado de <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/727.pdf>
- Malaspina, U. (2014). *Flexibilidad, originalidad y fluidez en la variación de problemas. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (39), 135 - 140. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo12.pdf>
- Malaspina, U., y Vallejo, E. (2014). *Creación de Problemas en la Docencia e investigación*. En Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática. Lima, Perú: Editorial Moshera S.R.L.
- Malaspina, U. (2017). *La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas*. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>

- Malaspina, U., Mallart, A., & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In K. Krainer, & N. Vondrová. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9) (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME.
- Martínez Sierra, Gustavo (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (5)1, pp 47-78.
- Martínez, C. (2015). *Estrategias para estimular la creación de problemas de adición y sustracción de números naturales con profesores de educación primaria*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú] <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6665>
- Maykut, P. y Morehouse, R. (2004). *Investigación cualitativa. Una guía práctica y filosófica*. Barcelona, Hurtado. (Obra Original publicada en 1994).
- MINEDU (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>
- MINEDU (2017) Currículo Nacional de la educación Básica. Ministerio de Educación. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Pomalaya, D. (2020). *Estimulación de la capacidad creadora de problemas por variación, sobre proporcionalidad, en docentes de matemática de las carreras de comunicaciones de una universidad privada de Lima*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/17402>
- Rodriguez, J. J. (2018). *La creación de problemas como medio para comprender la relación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13364>
- Sudera, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial *Educación Matemática*, vol. 25, núm. 2, pp. 89-118
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. (2ª ed.). Cengage Learning
- Vargas Hernández, J. (2013). Análisis de la práctica del docente universitario de pre cálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las Funciones Exponenciales. DOI: [10.13140/RG.2.1.2058.9922](https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2058.9922)

- Velásquez, F. (2014). *Creencias y una aproximación de la concepción de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en curso de pre-cálculo*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/5498>
- Vergnaud, G. (1990). *La Teoría de los Campos Conceptuales*. <https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/phocadownloadpap/CONSTRUC-EPISTEM-CUALITA/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf>
- Vivas, J. L. (2020). *Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre función exponencial*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/18104>



## Anexos

### Anexo 1: Ficha de inscripción al taller

# Taller de Creación de Problemas

Estimado profesor:

En primer lugar, quiero agradecerle su disposición para participar en este taller. El presente formulario me permitirá recoger información general sobre los participantes y así organizar el material que estaremos compartiendo en el taller.

Muchas Gracias

Fecha: Miércoles 8 y Viernes 10 de Setiembre

Hora: 7:30 - 9:00pm

leiva.ja@pucp.edu.pe [Cambiar de cuenta](#)



**\*Obligatorio**

**Correo \***

Tu dirección de correo electrónico

**Número Celular \***

Tu respuesta

**¿En cual institución educativa se encuentra enseñando actualmente? \***

Tu respuesta

¿Conoce la propuesta didáctica de enseñanza mediante la creación de problemas? \*

- Sí
- No
- He oído algo de ella

**Muchas gracias por su participación**

Estaremos enviando en los próximos días por correo detalles de las dos sesiones de trabajo y mediante documentos compartidos de Google (Drive) estaremos desarrollando algunas actividades individuales y grupales.

Enviar

Página 1 de 1

Borrar formulario



## Anexo 2: Ficha de Datos personales

### Datos personales

Estimado Profesor:

Quiero agradecer su inscripción y participación en el Taller de Creación de problemas que desarrollaremos el miércoles 8 y viernes 10 a las 7:30pm. A fin de procesar y tabular adecuadamente los trabajos que desarrollaremos, le agradeceré completar la siguiente información de los participantes.

Muchas Gracias

#### 1. Apellidos y nombres

Texto de respuesta corta

---

#### 3. Años de experiencia en la docencia de matemáticas

- De 1 a 3 años
- De 4 a 7 años
- De 8 a 12 años
- 13 años o más

#### 3. Enumere los grados en los que enseña matemática actualmente:

Texto de respuesta corta

---

4. ¿Ha tenido o tiene actualmente experiencia formal enseñando matemática en el nivel superior?

- Si he tenido experiencia pero ya no lo hago en la actualidad
- Actualmente estoy enseñando en el nivel superior
- No he tenido ni tengo experiencia en ese nivel

5. ¿Ha participado en algún curso, taller o capacitación sobre Creación de problemas? Si la respuesta es afirmativa, indicar dónde.

Tu respuesta

---

**Muchas Gracias por sus respuestas**

Sus respuestas y aportes en el taller son muy valiosos, por lo que le pido ser puntual en las conexiones que tendremos y en dichos días contar con su participación activa.

Enviar

Borrar formulario

Anexo 3: Prueba de entrada

**Prueba de Entrada**

-

**Indicaciones:**

*Responder cada una de las siguientes preguntas en este documento compartido en el drive.*

*Si desea responder a mano, puede pegar una foto del proceso.*

*Puede usar cualquier herramienta que considere necesaria (Word, Excel, Calculadora, etc.).*

*Duración: 15 minutos*

**Apellidos y nombres:** .....

1. Cuando enseñamos el tema de la función exponencial, ¿cuáles son los conceptos importantes que debemos trabajar con los estudiantes?

2. Explique la diferencia entre el cálculo de interés simple y el interés compuesto, mencionando si en el caso de alguna de ellas podemos usar conceptos relacionados con la función exponencial.

3. Resuelva los siguientes problemas mostrando su procedimiento:

(a) Se deposita \$2000 en una cuenta de ahorros que paga 5% de interés simple anual. Calcule el monto final (capital depositado más interés ganado) después de 3 años.

(b) Un capital de \$4000 es depositado en una cuenta de ahorros que paga el 3% de interés compuesto anual. Halle el monto final después de 5 años.

4. Responda brevemente las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué es lo que debe tener en cuenta un profesor al crear un problema para usarlo en la enseñanza de la matemática?

(b) ¿Considera que los estudiantes pueden crear problemas matemáticos mientras están aprendiendo un tema nuevo?

Anexo 4: Prueba de salida

**Prueba de Salida**

**Indicaciones:**

Responder cada una de las siguientes preguntas en este documento compartido en el drive.

Si desea hacerlo a mano, puede pegar una foto del proceso.

Puede usar cualquier herramienta que considere necesaria.

Duración: 15 minutos

**Apellidos y nombres:** .....

1. Escribe 3 conceptos importantes asociadas a la función exponencial que considere deben tener en cuenta los docentes al enseñar este tema con sus estudiantes.

2. Después de participar en el taller de Creación de problemas, ¿considera que esta estrategia es útil para la enseñanza de la función exponencial u otros temas de matemáticas? Comente brevemente su respuesta.

3. A continuación se le presenta un problema de interés:

Un inversionista tiene la opción de depositar \$ 3000 en una cuenta de ahorros en una financiera que paga un interés simple del 4,75% anual, o depositarlo en un banco que le ofrece pagar el 4 % de interés compuesto mensual%. Se desea saber después de cuánto tiempo la inversión en el Banco tendrá un saldo mayor que la de la financiera.

(a) **Elabore un problema pre**, es decir, un problema que facilite la comprensión y la elaboración de la solución de este problema. (No es necesario mostrar su solución) Comente en qué sentido ayudaría.

(b) **Elabore un problema pos**, es decir un problema que sea más retador que el problema propuesto. (No es necesario mostrar su solución) Comente en qué sentido el problema exige una mayor demanda cognitiva.

4. Responda brevemente a las siguientes preguntas

(a) Mencione 3 ideas importantes sobre el uso de la creación de problemas para la enseñanza de la función exponencial.

(b) Comente las dificultades que puede encontrar al usar la creación de problema como estrategia para la enseñanza de la función exponencial.

## Anexo 5: Cuestionario para el cierre del taller

### Cuestionario de Cierre de Taller

Agradecemos mucho su tiempo y participación en el Taller. Para finalizar, le pedimos unos minutos para completar el siguiente cuestionario para evaluar el trabajo del taller y recoger sus impresiones y sugerencias finales  
Muchas Gracias.

leiva.ja@pucp.edu.pe [Cambiar de cuenta](#)



**\*Obligatorio**

Correo \*

Tu dirección de correo electrónico

En general, el la organización y desarrollo del taller le pareció:

- Muy bien organizado con un buen desarrollo del tema.
- Se trabajó bien, pero creo que se pudo organizar mejor.
- El taller estuvo bien organizado, pero durante el desarrollo se presentaron algunos problemas
- No participé mucho y no puedo opinar al respecto.

Comente en breves palabras que le pareció el taller y qué tan útil considera que será para su trabajo.

Tu respuesta

¿Qué importancia le da usted al uso de la creación de problemas para la enseñanza de la matemática y en particular para el estudio de la función exponencial? (marque la opción que más se acerque a su opinión)

- Creo que es una buena propuesta y espero poder aplicarla a mi trabajo
- Me parece que la propuesta es buena, pero no considero que me sea útil
- No considera que sea una buena propuesta para la enseñanza de la matemática

Menciona dos ideas importantes que le quedan después del taller

Tu respuesta \_\_\_\_\_

Comente alguna sugerencia que considere importante para mejorar el desarrollo de este tipo de talleres

Tu respuesta \_\_\_\_\_

Enviar

Borrar formulario

Anexo 6: Preguntas para la entrevista semiestructurada a los docentes informantes.

*El cuestionario se desarrollará mediante una sesión Zoom, dándole acceso al docente (solo como lectura) a los productos presentados en la actividad individual y prueba de salida para que pueda comentar sobre ellos*

**I. Respetto al objeto matemático función exponencial:**

1. *¿Cómo explica la relación que existe entre las variables involucradas en una función exponencial?*
2. *¿Cuáles son las características propias de la función exponencial? Mencione las características que la diferencia de otras funciones.*
3. *¿Cómo explica el rápido crecimiento o decrecimiento de la función exponencial?*
4. *Cuando enseña función exponencial, ¿cuáles son los conceptos matemáticos más importantes que trabaja con sus estudiantes?*
5. *Si aplicamos un interés compuesto y un interés simple a un mismo capital con una misma tasa de interés y durante un mismo período de tiempo, ¿el interés compuesto que se obtiene es siempre mayor que el interés simple? ¿Por qué?*

**II. Respetto al problema pre creado en el taller:**

1. *¿Cómo describirías la idea de crear un problema pre a partir del episodio?*
2. *¿Qué conocimientos matemáticos considera que se requieren para resolverlo?*
3. *¿Los conocimientos que considera se requieren para su solución están vinculados con la función exponencial?*
4. *¿Añadiría alguna pregunta? ¿Por qué?*

**III. Respetto al problema pos creado en el taller:**

1. *¿Cómo describirías la idea de crear un problema pos a partir del episodio?*
2. *¿Qué conocimientos matemáticos considera que se requieren para resolverlo?*
3. *¿Los conocimientos que considera se requieren para su solución están vinculados con la función exponencial?*
4. *¿Qué conocimientos propios de la función exponencial se requieren para resolver el problema pos creado?*
5. *¿Añadiría alguna pregunta? ¿Por qué?*

*Las respuestas que darán los docentes podrán ser transcritas parcialmente para añadir información y completar al análisis de sus respuestas.*

## Anexo 7: Diapositivas de la presentación del taller

# Taller sobre el uso de Creación de problemas para la enseñanza de la Función Exponencial

## Sesión 1

Propuesta didáctica para profesores de secundaria

### Agenda de las sesiones de trabajo

**SESIÓN 1:** Conociendo la propuesta

- Presentación general
- Evaluación Diagnóstica
- Elementos de un problema
- Solución y creación de problemas
- Revisando la estrategia EPP
- Actividad Individual

**SESIÓN 2:** Consolidando la propuesta

- Actividades grupales
- Socializamos los productos
- Creamos un problema por
- Ventajas y desventajas de la estrategia
- Evaluación de salida
- Cuestionario final y cierre

### Objetivo del taller

Conocer y analizar la estrategia EPP (Episodio, Problema Pre y Problema Pos) para la aplicación del enfoque de creación de problemas por variación como una propuesta didáctica para la enseñanza de la función exponencial.

## Sesión 1

### Conociendo la propuesta

### Pensemos en unas ideas generales

"Impulsar la **creación de problemas**, es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental".  
Bonotto (2013)

"La Creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema conocido (**Variación de un problema dado**) o a partir de una situación dada (**elaboración de un problema**)".  
Malaspina (2013)

### Evaluación Diagnóstica

Iniciaremos el taller con una sencilla prueba diagnóstica que nos permitirá saber de donde estamos partiendo.

- La podemos encontrar en el drive "Evaluación de entrada" en el site
- Tomaremos entre 10 a 15 minutos para completarla
- La desarrollaremos directamente en el documento. Es posible usar cualquier recurso que considere necesario

### Elementos de un problema matemático

Cuando enseñamos matemática, solemos usar **problemas contextualizados** que demandan el uso de conceptos matemáticos y habilidades de pensamiento.

Cuales son los elementos de un Problema Matemático:

### Elementos de un problema matemático

Información	Contexto	Requerimiento	Entorno matemático
Son los datos cualitativos o relaciones que describen el problema.	Puede ser de 2 tipos: <b>Intra matemático</b> Emplea algoritmos y procesos <b>Extra matemático</b> Emplea las matemáticas en situaciones cotidianas	Lo que se pide "hallar" o concluir que puede ser: <b>Cuantitativo</b> Espere una respuesta numérica <b>Cualitativo</b> Espere el empleo de tablas o gráficas para justificar argumentos	Son los conceptos matemáticos que intervienen y pueden ser necesarios para la resolución del problema.

### Enfoque de la creación de problemas

La Creación de problemas de matemática consiste en elaborar un problema nuevo a partir de ciertas condiciones. Podemos identificar dos maneras de hacerlo:

**Podemos crear diversos problemas**

**Por Variación**

- Crear un problema nuevo
- Modificar alguna parte del problema
- Eliminar alguna condición

**Por Elaboración**

- Añadir condiciones nuevas
- Cambiar el contexto del problema
- Cambiar el sistema matemático

### ESTRATEGIA EPP

Es una estrategia de creación de problemas orientada a elaborar problemas por variación, es decir cambiando algún elemento del problema.

### Aplicando la propuesta EPP

¿Continúan viendo cómo se aplica la propuesta EPP?

- Un espacio en una clase para el desarrollo de la función exponencial
- Experiencias de situaciones en la clase
- Resolución del problema propuesto en el espacio
- Situación de problemas que, en principio, más sencillos que los de la comprensión
- Socialización de resultados
- Reflexión de los errores
- Socialización de resultados



### Cálculo de interés simple y compuesto

**EPSDDQ**  
El profesor Julio plantea el siguiente problema a sus estudiantes en fin de semana cuando están realizando un curso de Matemática intermedias:

Una persona está pensando si debe invertir su dinero en la financiera "Ahorro" o en el Banco "Beneficio". La Financiera le ofrece pagar un monto extra del 7% anualmente, mientras que el Banco le ofrece un interés compuesto anual del 2,7%. Si esta persona decide invertir \$10.000, ¿de qué el dinero en la entidad Ahorro por varios años, respecto a las siguientes preguntas:

- (a) Calcule el saldo que tiene esta inversión al final de los primeros 5 años en ambos casos, indicando la diferencia entre ambas inversiones.
- (b) ¿Después de cuántos años aproximadamente, el saldo que obtiene en el banco será mayor al saldo que obtiene en la financiera? Confirme la afirmación mediante una representación gráfica.

### Comentarios de los alumnos

Algunos de los alumnos comentan:

- **Fernando:** Creo que, como el problema que le pasó al Sr. Marcelo es mejor que el del Banco, siempre el saldo será mayor allí.
- **Julia:** El saldo con el interés compuesto será mayor después de varios años y lo podemos ver gráficamente.
- **Verónica:** Si vamos a comparar, hay que trabajar con tablas para hacerlo más rápido y claramente se hace los gráficos una de ellas será exponencial.



### Actividad Individual

Durante 10 minutos de trabajo individual trabajaremos estas actividades:

1. Resolver el problema del espacio. En el momento en la hora individual en el libro
  - Si se hace el mismo, puede tomar una foto del desarrollo y pegarlo en la hoja de propuestas.
  - Si está con el libro cerrado y no se acuerda, puede tomar una foto y volver al momento.
2. Reflexionar acerca de los comentarios de los estudiantes Fernando, Julia y Verónica. **Anota sus comentarios para compartirlos en la siguiente sesión en grupos.**
3. Crear un Problema Pregunta de un problema que haga más fácil comprender y resolver lo que pide el problema del espacio. **Cuando sea necesario, referencia al espacio y realizando alguna variación de los elementos.**
4. Resolver el Problema Pregunta. **Al final de la parte 1, Anote el enunciado y la solución.**

### Compartiendo los resultados individuales

- Analizar los resultados de los estudiantes
- Comparar los resultados de los estudiantes con los resultados de los alumnos
- Analizar los problemas que existen.



### Fin de la Sesión No. 1

- Al finalizar la sesión que finalizó con el problema de la parte 1, se le pide al docente y al estudiante que reflexionen y comenten en la hora individual.
- La docente, según los comentarios realizados al trabajar en la elaboración de un problema con:
- Los alumnos del libro y los problemas elaborados serán compartidos al final de la sesión en el espacio que se les va a proporcionar.



## Taller sobre el uso de Creación de problemas para la enseñanza de la Función Exponencial

### Sesión 2

## Sesión 2 Consolidando las ideas

### Recapitulando las ideas trabajadas

Problemas para crear situaciones problemáticas

En la sesión	En la sesión
• Se trabajó con el problema de la sesión anterior.	• Se trabajó con el problema de la sesión anterior.
• Se trabajó con el problema de la sesión anterior.	• Se trabajó con el problema de la sesión anterior.
• Se trabajó con el problema de la sesión anterior.	• Se trabajó con el problema de la sesión anterior.



### Recapitulando las ideas trabajadas

**ESTRATEGIA EPP**




## Actividad Grupal



**Objetivo:** 10 minutos para trabajar en pequeños grupos la siguiente tarea:

1. Comentar en el grupo las experiencias al desarrollar la actividad individual.
2. Reflexionar sobre los comentarios dados por los estudiantes Fernando, Verónica y Julia.
3. Crear de manera grupal un problema pre y resolverlo y prepararse para socializar con los demás grupos.

**Nota:** Cada participante debe traer un problema pre que se socialice con los demás grupos.

**10 MINS**

## Compartimos la mejora del problema

Un estudiante decide siempre presentar el problema que que mejoró, y comentarlo porque sintió que este problema ayudó a mejorar, comentando el problema en el aula y la solución.



## Ejemplo de problema pre

Financiera A	Financiera B
Oferta pagar un interés simple anual del 5%	Oferta pagar un interés compuesto anual del 4%

Un inversionista decide hacer una inversión de inversión de \$1000 en cada una de las financieras y comparar los resultados:

- Calcular el monto que queda al final del primer año en cada financiera. Calcular la diferencia y predecir cuál de las dos le dará más interés.
- Calcular el monto que queda al final de los primeros 5 años, hallando en cada caso la diferencia de las finanzas ganadas y determinar cuál de las dos le da mejor ganancia.
- Encuentra un monto numérico que represente cada año de inversión final en cada financiera.
- Determina los montos anuales. Representa gráficamente los montos durante los primeros 20 años en cada financiera.
- El inversionista desea saber a partir de qué momento, una de las financieras le pagará mayores intereses.

## Grupalmente Trabajemos un problema Pos

Ahora trabajemos un problema pre de manera grupal, teniendo en cuenta las siguientes características:

- Es un problema similar al Teórico
- Los requerimientos deben ser más sencillos que el teórico
- Cuando se puede identificar elementos del problema sea justificando más de una solución cognitiva que para dar respuesta.

**Nota:** Cada participante debe traer un problema pre que se socialice con los demás grupos.

**10 MINS**

## Ejemplo de problema Pos

Una persona quiere invertir un monto de dinero y se le presentan dos opciones en dos financieras. Una de ellas paga el 5% de interés compuesto capitalizando mensualmente. El inversionista decide hacer una comparación entre ambas inversiones eligiendo un depósito de \$200 000:

- Calcular cuál es el monto al final de los primeros 5 años en cada inversión.
- Utilizar un modelo exponencial en cada caso, para hallar el monto después de 5 años.
- Determinar en cuánto tiempo ambas inversiones amparan el mismo monto. Elabora una conjetura a partir de una representación gráfica de los modelos.
- Empleando la información obtenida anteriormente, determina cuánto tiempo le tomará al dado caso, obtener un monto de \$30 000.

## Ventajas y desventajas

Como toda propuesta educativa, existen ventajas y desventajas en la metodología. Comentemos algunas de ellas:

VENTAJAS	DESVENTAJAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprensión gradual de un problema.</li> <li>• Fomenta la participación activa del estudiante.</li> <li>• Propone momentos de reflexión del proceso y solución.</li> <li>• Estimula la creatividad y trabajo grupal.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Podemos encontrar aspectos muy heterogéneos.</li> <li>• El tiempo puede quedar corto.</li> <li>• Descartamiento de la propuesta didáctica.</li> <li>• Resistencia al cambio en el enfoque de enseñanza de la matemática.</li> </ul>

## Evaluación de Salida

A continuación, te presentamos una encuesta de evaluación de la calidad de la sesión. Al momento de responder, te daremos tus resultados:

- La prueba le entregamos en el drive, en el link compartido: [https://forms.gle/...](#)
- Toma de 10 a 15 minutos para completarla.
- Puedes hacerla de los celulares que tengas disponible.
- Si tienes cualquier duda, puedes pagar un fee de \$5000.
- Al final del taller nos juntamos nuevamente para tener el taller.

## Ideas de cierre del taller

- Agradecemos la participación de todos.
- Esperamos que las ideas compartidas sean útiles en el trabajo.
- La importancia de la participación es una de las características de la metodología que se puede aplicar en la enseñanza.
- Como parte de la sesión de trabajo, se puede realizar una encuesta de satisfacción.

**Para terminar:** Realizar un taller de reflexión y evaluación de la sesión de trabajo.

**Gracias**  
Sus comentarios son muy importantes




Anexo 8: Consentimiento de participación en el proyecto de tesis.

Mi nombre es Jim Leiva Maldonado y actualmente me encuentro desarrollando un trabajo de investigación de tesis con el apoyo de docentes de la PUCP como parte del curso Taller especial de investigación del programa de Maestría de Enseñanza de la Matemática. Este trabajo está dirigido a docentes de secundaria para identificar cómo la propuesta de **Creación de Problemas** permite ampliar la comprensión del tema de la función exponencial en docentes de secundaria. Para ello solicitaremos la colaboración de un grupo de docentes de secundaria en ejercicio para participar de un taller de trabajo que estamos diseñando.

Desarrollaremos un taller en dos sesiones, donde presentaremos la propuesta de creación de problemas y exploraremos los conocimientos de los docentes que participan de manera voluntaria, sobre la función exponencial antes y después del taller. Es claro que siendo una participación voluntaria, si algún participante manifestara que no desea que sus respuestas o información sea considerada en el análisis de la investigación, podrá indicarlo para que así sea. Los participantes tienen la libertad en cualquier momento de retirarse del taller sin ningún perjuicio.

La información recogida será de carácter confidencial por lo que se empleará códigos para las identidades de los participantes para mantener el anonimato en los informes. El acceso a la información recogida será manejada de manera digital compartida solamente con la asesora del trabajo de investigación y sólo podrá ser usada nuevamente en investigaciones futuras con el consentimiento expreso de los participantes.

Ante cualquier duda acerca de nuestra investigación, en esta segunda etapa, puede escribir a la asesora de esta etapa del proyecto de tesis cuyo correo es el siguiente: [eadvincula@pucp.edu.pe](mailto:eadvincula@pucp.edu.pe) y ante consultas sobre temas de ética de la investigación puede comunicarse con el Comité de Ética de la Investigación (CEI) al correo electrónico: [etica.investigacion@pucp.edu.pe](mailto:etica.investigacion@pucp.edu.pe).

Si acepta participar en esta etapa de nuestra investigación, le pedimos que ponga un "Sí" en el recuadro de abajo. En caso contrario, coloque un "No".

	Acepto participar del estudio señalado y que se usen mis respuestas en las diferentes actividades.
	Acepto que se utilicen fotografías del taller donde aparezca mi imagen
	Acepto que se graben mis diferentes participaciones durante el taller

Nombre y DNI del docente que otorga su consentimiento	Firma del docente

Lima 10 de Setiembre de 2021

Anexo 9: Rúbrica de calificación

Rubrica para Analizar el problema Creado							
Docente No.		Nombre de la actividad:				Tipo de problema	
						Problema de cálculo y proceso	
						Problema de la vida real	
						Problema de análisis y justificación	
						Problema de representación	
						Problema de comparación	
						Otros:	
Elementos fundamentales del problema creado							
Información		Requerimiento		Contexto		Entorno matemático	
Modificación Cuantitativa	Modificación relacional	Modificación cuantitativa	Modificación cualitativa	Intra matemático	Extra matemático	Uso de representaciones	
						Uso de restricciones	
						Procesos algorítmicos con el modelo	
						Monotonía y características del modelo	
						Relación entre variables	
						Otros (especifique)	
Calidad del problema creado							
Flexibilidad		Originalidad		Fluidez		Puntaje total	
(1) Uno o mas requerimientos de dificultad		(1) Unico problema diferente a los demás		(1) Propone un problema con 4 requerime			
(1) Puede responder de varias formas		(1) El problema se distingue de los demás		(1) Propone un problema con 3 requerime			
(1) Favorece la conexión con varios temas		(1) Presenta novedad en la información		(1) Propone un problema con 2 requerime			
(1) Favorece la conexión otras áreas		(1) Presenta novedad en el requerimiento		(1) Propone un problema con 1 requerime			
Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Puntaje obtenido		Calidad alcanzada	

