

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



Estrategia óptima de inversión-consumo con tasa de interés  
estocástica y función de utilidad HARA

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas  
Aplicadas con mención en Procesos Estocásticos que presenta:

***Abel Guillén Mendoza***

Asesor:

***Dr. Jonathan Samuel Farfan Vargas***

Lima, 2022

## Resumen

En el presente trabajo estudiamos el problema de optimización de inversión-consumo en tiempo continuo cuando la tasa de interés es estocástica (bajo el modelo de Vasicek, de Hull-White y de Ho-Lee) y la función de utilidad pertenece a la familia de funciones HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), la cual engloba funciones de utilidad que se emplean frecuentemente en problemas de optimización de portafolios de inversión. El objetivo es encontrar una estrategia dinámica de distribución de la riqueza de un individuo entre consumo e inversión en instrumentos financieros riesgosos (cuyos precios están gobernados por movimientos geométricos brownianos) y uno libre de riesgo con retorno igual a la tasa de interés, la cual debe maximizar su utilidad agregada durante un periodo de tiempo finito. Este problema de control óptimo estocástico se resuelve usando el principio de programación dinámica, por lo que se busca una función que resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Para simplificar esta ecuación diferencial parcial no lineal en tres variables empleamos la transformada de Legendre, la cual reduce el problema a dos ecuaciones diferenciales parciales lineales en dos variables. Estas se resuelven aplicando el principio de Duhamel, con lo cual conseguimos otra manera de obtener la solución del problema a la planteada por Chang y Chang en [4]. Los aportes principales del trabajo son el teorema de verificación que demuestra que la función hallada que resuelve la ecuación HJB equivale a la función de valor del problema de inversión-consumo, la demostración de que las funciones en las que se alcanzan los supremos en la ecuación HJB forman la estrategia óptima, y el desarrollo del problema de inversión-consumo bajo los modelos de Hull-White y de Ho-Lee de tasa de interés.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Problema de inversión-consumo</b>	<b>6</b>
2.1. Modelo matemático . . . . .	6
2.2. Formulación del problema . . . . .	7
<b>3. Función de valor</b>	<b>9</b>
3.1. Programación dinámica . . . . .	9
3.2. Verificación de los supuestos . . . . .	18
<b>4. Teorema de verificación</b>	<b>24</b>
<b>5. Resultados bajo otros modelos de tasa de interés</b>	<b>38</b>
5.1. Hull-White . . . . .	38
5.2. Ho-Lee . . . . .	47
<b>6. Simulación numérica</b>	<b>53</b>
6.1. Metodología . . . . .	53
6.2. Resultados . . . . .	55
<b>7. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los problemas más importantes en finanzas es determinar la estrategia óptima de inversión de un portafolio, esto es, escoger los montos óptimos que se deben invertir en los distintos activos financieros disponibles para el gestor de un portafolio de inversión.

En [16], Merton enfoca este problema por primera vez como uno de optimización estocástica en tiempo continuo, a diferencia del célebre trabajo de Markowitz en [14], donde el problema se plantea con un solo periodo. Por lo tanto, la estrategia de inversión óptima que se obtiene no es estática en el tiempo y depende del valor de las variables de mercado. En el problema original planteado por Merton, un individuo debe decidir en cada instante del tiempo un nivel de consumo<sup>1</sup> y el resto de su riqueza se debe de invertir entre un activo que tiene un retorno seguro e igual a una tasa de interés constante en el tiempo, y en un número fijo de activos riesgosos (en el sentido de que sus retornos no son conocidos anticipadamente). Cuando el horizonte de tiempo es finito, el individuo debe escoger la mejor estrategia de consumo e inversión que maximice tanto la utilidad que obtiene por su consumo durante el periodo de inversión, así como el nivel de riqueza al final de este periodo, cantidades que son descontadas con una tasa de descuento constante.

En la literatura académica, este tipo de problema recibe el nombre de problema de inversión-consumo, en contraste con el problema de inversión, en el cual solo se maximiza el valor final de la riqueza. Ambos tipos de problemas, a pesar de ser similares, han sido desarrollados de manera separada en trabajos posteriores. Por ejemplo, en [12], Korn y Kraft resuelven el problema de inversión cuando la tasa de interés es estocástica bajo el modelo de Vasicek y Ho-Lee; en [11], Grasselli resuelve el problema de inversión bajo el modelo de Cox-Ingersoll-Ross de tasa de interés; en [17], Munk y Sørensen resuelven el problema de inversión-consumo bajo el modelo de Heath-Jarrow-Morton de tasa de interés; Benth et. al. en [2] y Kraft en [13] resuelven el problema de inversión cuando el inversionista puede invertir en un activo riesgoso cuyo precio y volatilidad son estocásticos; en [7], Fleming y Hernández-Hernández resuelven el problema de inversión-consumo con horizonte infinito cuando la volatilidad del precio de los activos riesgosos es estocástico; en [5], Chang y Rong resuelven el problema de inversión-consumo cuando la tasa de interés y la volatilidad del precio de los activos riesgosos son estocásticos; Framstad et. al. en [9] y Ait-Sahalia et. al.

---

<sup>1</sup>En el contexto de gestión de portafolios de inversión, el consumo se puede interpretar como dividendos para los inversionistas.

en [1] resuelven el problema de inversión-consumo con horizonte infinito cuando los precios de los activos riesgosos presentan saltos aleatorios; y en [21], Pirvu y Zhang resuelven el problema de inversión-consumo cuando la tasa de descuento depende de una cadena de Markov que refleja el estado de la economía.

Por otro lado, en [15], Merton generaliza el problema de inversión-consumo cuando la función de utilidad pertenece a la familia de funciones HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion). Esta familia incluye las funciones de utilidad isoelásticas y exponencial, las cuales son frecuentemente usadas tanto en problemas de inversión, como en problemas de inversión-consumo.

En esta línea, en [4], Chang y Chang plantean el problema inversión-consumo para esta familia de funciones de utilidad cuando la tasa de interés es estocástica. En lo que sigue, presentaremos, de manera resumida, el modelo desarrollado por estos autores.

El problema de inversión-consumo se plantea con un horizonte de inversión finito  $T > 0$  y en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  completo. Además, se asume que en este espacio existe un movimiento browniano estándar  $\widetilde{W} = (W_0, W_1, \dots, W_n)$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

La tasa de interés,  $R$ , se modela por medio de un proceso Ornstein-Uhlenbeck, también llamado modelo de Vasicek en la literatura financiera, con la siguiente especificación:

$$dR = k_1(k_2 - R)dt + b d\overline{W},$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$  y  $b$  son constantes positivas, y

$$d\overline{W}(t) = \sqrt{1 - |\rho(t)|^2} dW_0(t) + \rho(t)' dW(t),$$

donde  $|\cdot|$  denota la norma euclidiana,  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) : [0, T] \rightarrow [-1, 1]^n$  es una función determinística y  $W = (W_1, \dots, W_n)$ .

Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , el precio del  $i$ -ésimo activo riesgoso,  $S_i$ , sigue un movimiento geométrico browniano con la siguiente especificación:

$$dS_i = S_i(R + \mu_i)dt + S_i \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j,$$

donde  $\mu_i$  y  $\sigma_{ij} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , son funciones determinísticas.

De esta manera,  $\mu_i$  representa el excedente esperado del retorno del activo riesgoso  $i$  sobre la tasa de interés. Además,  $\rho_i$  representa la correlación instantánea entre el precio del activo riesgoso  $i$  y  $\overline{W}$ , por lo que el precio de estos activos no es independiente de la tasa de interés.

En cada instante de tiempo  $t \in [0, T]$ , el inversionista debe decidir el monto que se destina a consumo,  $C(t)$ , y el monto que desea invertir en cada activo riesgoso  $i$ , el cual se denota como  $\pi_i(t)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Su riqueza restante se invierte en un activo libre de riesgo con retornos igual a la tasa de interés  $R$ .

Por lo tanto, la variación en la riqueza del inversionista se puede explicar por tres factores: sus ganancias o pérdidas por sus inversiones en los activos riesgosos, sus ingresos por su inversión en el activo libre de riesgo, y una reducción por el monto destinado a consumo.

Entonces, la riqueza,  $X$ , tiene la siguiente dinámica:

$$dX = \sum_{i=1}^n \pi_i \frac{dS_i}{S_i} + \left[ X - \sum_{i=1}^n \pi_i \right] Rdt - Cdt.$$

Por otro lado, como la función de utilidad del individuo pertenece a la familia HARA, este se puede expresar de la siguiente manera:

$$U(x) = \frac{1-p}{pq} \left( \frac{q}{1-p} x + \eta \right)^p,$$

donde  $p$ ,  $q$  y  $\eta$  son constantes tales que  $p < 1$ ,  $p \neq 0$ ,  $q > 0$  y  $\eta \geq 0$ .

Luego, el individuo debe escoger la estrategia de inversión y de consumo que maximiza la siguiente función de ganancia:

$$E \left[ \alpha \int_0^T e^{-\beta s} U(C(s)) ds + (1-\alpha) e^{-\beta T} U(X(T)) \right], \quad (1.1)$$

donde  $\beta$  es una constante positiva que representa una tasa de descuento y  $\alpha \in (0, 1)$  es un factor de ponderación entre la utilidad que se obtiene por el consumo intermedio y la utilidad por el valor final de la riqueza. Notemos que si  $\alpha = 0$ , el problema planteado es equivalente a un problema de inversión, y cuando  $\alpha = 0.5$ , es equivalente a un problema de inversión-consumo clásico.

Por consiguiente, el individuo debe sopesar el beneficio de destinar parte de su riqueza a consumo y obtener una utilidad descontada por un factor más pequeño, con respecto a invertirla con el objetivo de incrementar su riqueza futura.

Cabe resaltar que, como los montos de inversión y de consumo en general pueden depender de las variables de mercado y de la riqueza disponible, las estrategias también son procesos estocásticos. No obstante, la optimización solo se realiza sobre un conjunto de estrategias admisibles que cumplan propiedades adecuadas para el problema planteado. Por ejemplo, el consumo debe pertenecer al dominio de la función de utilidad, ya que de otra manera, no se podría evaluar la función de ganancia bajo esta estrategia.

Por consiguiente, el problema de inversión-consumo se considera resuelto si podemos hallar el máximo valor de (1.1) sobre todas las estrategias admisibles, y si encontramos una estrategia admisible con la que se alcanza este valor máximo.

Chang y Chang proponen una estrategia óptima de inversión-consumo que maximiza esta función de ganancia usando el principio de programación dinámica. Sin embargo, al plantear el problema con una tasa de interés estocástica y con una familia amplia de funciones de utilidad, se generan dificultades que no se revisan con detalle.

En [12], Korn y Kraft resaltan que cuando la tasa de interés es estocástica, la dinámica de la riqueza sigue una ecuación diferencial lineal estocástica y no una difusión como en el problema de inversión-consumo clásico planteado por Merton. Por lo tanto, la existencia de una solución para la ecuación de la riqueza bajo la estrategia óptima no es un resultado inmediato y debe ser demostrado.

Además, como no se incluye un control sobre el rango de valores que puede tomar la

riqueza, se debe verificar que todos los procesos estocásticos y funciones que dependen de la riqueza estén bien definidos. Por ejemplo, para que la función de ganancia (1.1) esté bien definida,  $X(T)$  debe pertenecer al dominio de la función de utilidad.

Por otra parte, Chang y Chang utilizan la transformada de Legendre para obtener un candidato que resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman que obtienen con el principio de programación dinámica. No obstante, los autores no verifican si este candidato finalmente cumple con las condiciones necesarias para poder aplicar este operador.

Finalmente, los resultados que se obtienen en este trabajo al resolver las ecuaciones diferenciales que se consiguen al usar la transformada de Legendre difieren ligeramente a los obtenidos por Chang y Chang. En específico, utilizamos el principal de Duhamel para encontrar la solución de un problema de valor terminal no homogéneo, lo cual resulta en que la variable de integración en un par de funciones auxiliares sea distinta.

La estructura del trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 describimos formalmente las ecuaciones diferenciales estocásticas de las variables en el mercado financiero y el problema de inversión-consumo. En el capítulo 3, primero buscamos un candidato solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman usando la transformada de Legendre, y luego demostramos que este candidato efectivamente resuelve esta ecuación, así como otros supuestos que se realizan en la primera parte del capítulo. Seguidamente, en el capítulo 4 planteamos un teorema de verificación para demostrar que la función hallada en el capítulo anterior resuelve el problema de inversión-consumo y verificamos que la estrategia óptima es una estrategia admisible, lo cual incluye demostrar que existe una solución de la ecuación de la riqueza bajo esta estrategia y que esta siempre se encuentra dentro del dominio de las funciones en las que se evalúa. En el capítulo 5 resolvemos el problema de inversión-consumo cuando cambiamos el modelo de la dinámica de la tasa de interés por el de Hull-White y el de Ho-Lee. En el capítulo 6 describimos la metodología y resultados de un ejercicio de simulación de la riqueza bajo la estrategia óptima. Por último, en el capítulo 7 presentamos las conclusiones del trabajo.

## Capítulo 2

# Problema de inversión-consumo

### 2.1. Modelo matemático

Fijemos un horizonte de inversión  $0 < T < \infty$  y un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con un movimiento browniano estándar  $\widetilde{W} = (W_0, W_1, \dots, W_n)$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En lo que sigue, cuando nos referimos a procesos adaptados o progresivamente medibles, estos serán con respecto a la filtración natural generada por este movimiento browniano.

La tasa de interés,  $R$ , la modelaremos por medio de un proceso Ornstein-Uhlenbeck (modelo de Vasicek) de la siguiente manera:

$$dR = k_1(k_2 - R)dt + b\overline{dW},$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$  y  $b$  son constantes positivas, y

$$\overline{dW}(t) = \sqrt{1 - |\rho(t)|^2}dW_0(t) + \rho(t)'dW(t),$$

donde  $|\cdot|$  denota la norma euclidiana,  $W = (W_1, \dots, W_n)$  y  $\rho : [0, T] \rightarrow [-1, 1]^n$  es una función determinística integrable.

Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , el precio del  $i$ -ésimo activo riesgoso,  $S_i$ , sigue un movimiento geométrico browniano con la siguiente especificación:

$$dS_i = S_i(R + \mu_i)dt + S_i \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}dW_j,$$

donde  $\mu_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función determinística integrable, y  $\sigma_{ij} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función determinística cuadrado integrable para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Luego, para una estrategia de inversión-consumo  $(\pi, C) = (\pi_1, \dots, \pi_n, C)$ , la riqueza del individuo  $X$  tiene la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} dX &= \sum_{i=1}^n \pi_i \frac{dS_i}{S_i} + \left[ X - \sum_{i=1}^n \pi_i \right] Rdt - Cdt \\ &= [RX + \pi' \mu - C]dt + \pi' \sigma dW, \end{aligned} \tag{2.1}$$



donde  $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$  y  $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{n \times n}$ .

Como se evidenciará en el siguiente capítulo, es importante que las funciones determinísticas presentadas cumplan con algunas condiciones para poder simplificar y/o resolver ciertas ecuaciones diferenciales. De manera más precisa, asumiremos que:

1. La matriz  $\sigma(t)\sigma(t)'$  es definida positiva para todo  $t \in [0, T]$ .
2. La función  $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)\mu(t)$  es acotada e integrable.
3. Se cumple que  $|\rho(t)| = 1$  para todo  $t \in [0, T]$ .

Por otro lado, la utilidad del individuo se modelará por medio de una función de la familia HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), la cual se puede expresar como

$$U(x) = \frac{1-p}{pq} \left( \frac{q}{1-p}x + \eta \right)^p,$$

con dominio  $O = (\hat{\eta}, \infty)$ , donde  $p$ ,  $q$  y  $\eta$  son constantes tales que  $p < 1$ ,  $p \neq 0$ ,  $q > 0$ ,  $\eta \geq 0$  y  $\hat{\eta} = -\eta(1-p)/q \leq 0$ .

Las dos primeras derivadas de esta función de utilidad son

$$U_x(x) = \left( \frac{q}{1-p}x + \eta \right)^{-(1-p)},$$

$$U_{xx}(x) = -q \left( \frac{q}{1-p}x + \eta \right)^{-(2-p)}.$$

Por lo tanto, la función de utilidad es estrictamente creciente y estrictamente cóncava ya que  $U_x(x) > 0$  y  $U_{xx}(x) < 0$ , para todo  $x \in O$ . Además, se puede verificar que

$$\lim_{x \rightarrow \hat{\eta}^+} U_x(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U_x(x) = 0,$$

y que  $U_x$  posee función inversa dada por

$$U_x^{-1}(y) = \frac{1-p}{q} y^{-\frac{1}{1-p}} + \hat{\eta},$$

Por otra parte, una propiedad característica de las funciones de la familia HARA es que estas cumplen la siguiente igualdad:

$$-\frac{U_x(x)}{U_{xx}(x)} = \frac{1}{1-p}x + \frac{1}{q}.$$

## 2.2. Formulación del problema

Como es usual, trabajaremos solo con un grupo de estrategias a las cuales llamaremos estrategias admisibles. El conjunto de estas estrategias lo denotamos con  $\Gamma$  y para cada estrategia admisible  $(\pi, C) \in \Gamma$ , definimos la siguiente función de ganancia:

$$V^{\pi, C}(t, r, x) = E_{t, r, x} \left[ \alpha \int_t^T e^{-\beta s} U(C(s)) ds + (1-\alpha) e^{-\beta T} U(X(T)) \right],$$

donde  $E_{t,r,x}$  denota el valor esperado con respecto a la medida de probabilidad  $P$  condicionado al evento  $\{X(t) = x, R(t) = r\}$ ,  $\beta$  es una constante positiva que representa una tasa de descuento, y  $\alpha \in (0, 1)$  es una constante que representa un factor de ponderación entre la utilidad que se obtiene por el consumo intermedio y la utilidad por el valor final de la riqueza.

Como es estándar en la literatura, nos enfocaremos solo en los casos en que la riqueza y la tasa de interés inician con valores positivos. Entonces, si denotamos  $Q^+ = [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , el primer objetivo es hallar la función de valor  $V : Q^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual se define como el supremo de la función de ganancia sobre todas las estrategias admisibles:

$$V(t, r, x) = \sup_{(\pi, C) \in \Gamma} V^{\pi, C}(t, r, x).$$

El segundo objetivo es encontrar una estrategia admisible  $(\pi^*, C^*)$  tal que  $V = V^{\pi^*, C^*}$ , la cual denominamos estrategia óptima. En particular, buscaremos dos funciones  $\pi^* : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $C^* : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\pi^*(t, R(t), X(t))$  y  $C^*(t, R(t), X(t))$  forman la estrategia óptima.

Si bien aún no se va a establecer las condiciones que debe cumplir una estrategia admisible  $(\pi, C)$ , hay dos condiciones que son importantes para que la función de ganancia de una estrategia esté bien definida:

1.  $C(t) > \hat{\eta}$ , para todo  $t \in [0, T]$ .
2. Para todo  $(t, x, r) \in Q^+$ , existe una solución única para la ecuación diferencial estocástica de la riqueza (2.1) con valores iniciales  $X(t) = x$  y  $R(t) = r$ . Además,  $X(T) > \hat{\eta}$ .

## Capítulo 3

# Función de valor

### 3.1. Programación dinámica

Para resolver el problema de inversión-consumo planteado, emplearemos el principio de programación dinámica (por ejemplo, ver [8]) para encontrar una función  $J : Q \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $Q^+ \subset Q$ , y la cual esperamos que coincida con  $V$  en  $Q^+$ .

En primer lugar, para todo  $\pi \in \mathbb{R}^n$  y  $C \in \mathbb{R}$ , se define el operador  $\mathcal{A}^{\pi, C}$  para funciones de clase  $C^{1,2,2}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\pi, C} \phi(t, r, x) &= \phi_t + (rx + \pi' \mu(t) - C) \phi_x + \frac{1}{2} |\pi' \sigma(t)|^2 \phi_{xx} \\ &\quad + k_1(k_2 - r) \phi_r + \frac{1}{2} b^2 \phi_{rr} + b \pi' \sigma(t) \rho(t) \phi_{rx}. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) del problema de inversión-consumo planteado es

$$\sup_{\substack{\pi \in \mathbb{R}^n \\ C \geq \hat{\eta}}} \left\{ \mathcal{A}^{\pi, C} J(t, r, x) + \alpha e^{-\beta t} U(C) \right\} = 0, \quad (3.1a)$$

$$J(T, r, x) = (1 - \alpha) e^{-\beta T} U(x). \quad (3.1b)$$

Supongamos que existe una función  $J$  que cumple con ser solución de la ecuación HJB. Si consideramos las siguientes funciones auxiliares

$$H = J_t + rx J_x + k_1(k_2 - r) J_r + \frac{1}{2} b^2 J_{rr}, \quad (3.2)$$

$$A(\pi) = \mu(t)' \pi J_x + \frac{1}{2} |\sigma(t)' \pi|^2 J_{xx} + b \rho(t)' \sigma(t)' \pi J_{rx}, \quad (3.3)$$

$$B(C) = -C J_x + \alpha e^{-\beta t} U(C), \quad (3.4)$$

podemos expresar la ecuación HJB de la siguiente manera:

$$H + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \{A(\pi)\} + \sup_{C \geq \hat{\eta}} \{B(C)\} = 0.$$

Notemos que, como  $U$  es una función estrictamente cóncava,  $B$  también lo es. Por otro

lado,  $A$  es una función cuadrática de la forma (3.3), por lo que también es una función estrictamente cóncava si  $J_{xx} < 0$ . Por el momento, supongamos que la función  $J$  cumple esta propiedad.

Así, la primera derivada de las funciones  $A$  y  $B$  son

$$\begin{aligned} A_\pi &= \mu(t)J_x + \sigma(t)\sigma'(t)\pi J_{xx} + b\sigma(t)\rho(t)J_{rx}, \\ B_C &= -J_x + \alpha e^{-\beta t}U_x(C), \end{aligned}$$

con lo que podemos hallar los valores que maximizan  $A$  y  $B$  a partir de la condición de primer orden:

$$\pi^*(t, r, x) = -\sigma^{-1}(t)\theta(t)\frac{J_x}{J_{xx}} - b\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{J_{rx}}{J_{xx}}, \quad (3.5)$$

$$C^*(t, r, x) = U_x^{-1}\left(\frac{J_x}{\alpha e^{-\beta t}}\right). \quad (3.6)$$

Luego, si evaluamos  $A$  en  $\pi^*$ , tenemos que

$$\begin{aligned} A(\pi^*) &= \mu(t)\pi^* J_x + \frac{1}{2}|\sigma(t)\pi^*|^2 J_{xx} + b\rho(t)\sigma(t)\pi^* J_{rx} \\ &= -|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} - b\theta(t)\rho(t)\frac{J_{rx}J_x}{J_{xx}} + \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} + b\theta(t)\rho(t)\frac{J_x J_{rx}}{J_{xx}} \\ &\quad + \frac{1}{2}b^2|\rho(t)|^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} - b\rho(t)\theta(t)\frac{J_x J_{rx}}{J_{xx}} - b^2|\rho(t)|^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} \\ &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} - \frac{1}{2}b^2|\rho(t)|^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} - b\rho(t)\theta(t)\frac{J_x J_{rx}}{J_{xx}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, podemos expresar la ecuación HJB de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \{A(\pi)\} + \sup_{C \geq \hat{\eta}} \{B(C)\} \\ &= H + A(\pi^*) + B(C^*) \\ &= H - \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} - \frac{1}{2}b^2|\rho(t)|^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} - b\rho(t)\theta(t)\frac{J_x J_{rx}}{J_{xx}} - C^* J_x + \alpha e^{-\beta t}U(C^*). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para simplificar la ecuación diferencial (3.8), emplearemos la transformada de Legendre.

**Definición 3.1.1.** Sea  $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava. Su transformada de Legendre  $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es la función definida por

$$L(z) = \sup_{x \in S} \{f(x) - xz\}.$$

En particular, como  $J_{xx} < 0$ , se cumple que  $J(t, r, \cdot)$  es una función estrictamente cóncava para cualquier  $t \in [0, T]$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Por ende, podemos usar la transformada de Legendre de la siguiente manera:

$$\hat{J}(t, r, z) = \sup_{x \in Q^{t,r}} \{J(t, r, x) - xz\}, \quad (3.9)$$

donde  $Q^{t,r} = \{x \in \mathbb{R} : (t, r, x) \in Q\}$ , para todo  $t \in [0, T]$  y  $r \in \mathbb{R}$ .

Supongamos, por el momento, que el rango de  $J_x$  es  $\mathbb{R}^+$  y que existe la función inversa de  $J_x(t, r, \cdot)$ , la cual denotamos por  $g(t, r, \cdot)$ . Por lo tanto, se cumple que

$$J_x(t, r, g(t, r, z)) = z. \quad (3.10)$$

Supongamos también que se cumple la siguiente igualdad:

$$\hat{J}(t, r, z) = J(t, r, g(t, r, z)) - g(t, r, z). \quad (3.11)$$

Entonces, si calculamos las derivadas parciales en (3.11), conseguimos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \hat{J}_t(t, r, z) &= J_t(t, r, g(t, r, z)) + J_x(t, r, g(t, r, z))g_t(t, r, z) - zg_t(t, r, z) \\ &= J_t(t, r, g(t, r, z)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_r(t, r, z) &= J_r(t, r, g(t, r, z)) + J_x(t, r, g(t, r, z))g_r(t, r, z) - zg_r(t, r, z) \\ &= J_r(t, r, g(t, r, z)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_z(t, r, z) &= J_x(t, r, g(t, r, z))g_z(t, r, z) - zg_z(t, r, z) - g(t, r, z) \\ &= -g(t, r, z). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Seguidamente, podemos calcular sus segundas derivadas parciales con respecto a  $r$  y  $z$  a partir de las igualdades halladas en el paso anterior:

$$\hat{J}_{rr}(t, r, z) = J_{rr}(t, r, g(t, r, z)) + J_{rx}(t, r, g(t, r, z))g_r(t, r, z), \quad (3.15)$$

$$\hat{J}_{rz}(t, r, z) = J_{rx}(t, r, g(t, r, z))g_z(t, r, z), \quad (3.16)$$

$$\hat{J}_{zr}(t, r, z) = -g_r(t, r, z), \quad (3.17)$$

$$\hat{J}_{zz}(t, r, z) = -g_z(t, r, z). \quad (3.18)$$

Si derivamos (3.10) con respecto a  $z$  y usamos la igualdad en (3.18), tenemos que

$$1 = J_{xx}(t, r, g(t, r, z))g_z(t, r, z) = -J_{xx}(t, r, g(t, r, z))\hat{J}_{zz}(t, r, z), \quad (3.19)$$

por lo que  $\hat{J}_{zz} = -1/J_{xx} > 0$ .

Por otro lado, de (3.16) y (3.18), obtenemos

$$J_{rx}(t, r, g(t, r, z)) = -\frac{\hat{J}_{rz}(t, r, z)}{\hat{J}_{zz}(t, r, z)}. \quad (3.20)$$

Luego, podemos despejar  $J_{rr}$  de (3.15), con lo que se conseguir

$$J_{rr}(t, r, g(t, r, z)) = \hat{J}_{rr}(t, r, z) - J_{rx}(t, r, g(t, r, z))g_r(t, r, z).$$

De esto, (3.18), (3.20) y el hecho que  $\hat{J}_{rz} = \hat{J}_{zr}$ , concluimos que

$$J_{rr}(t, r, g(t, r, z)) = \hat{J}_{rr}(t, r, z) - \frac{\hat{J}_{rz}^2(t, r, z)}{\hat{J}_{zz}(t, r, z)}.$$

Hasta el momento hemos obtenido varias relaciones entre las derivadas parciales de  $J$  y las de su transformada de Legendre, las cuales podemos usar en la ecuación HJB en (3.8). De este modo, definimos las siguientes funciones auxiliares:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= H|_{x=g(t,r,z)} \\
&= \hat{J}_t + rgz + k_1(k_2 - r)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b^2 \left( \hat{J}_{rr} - \frac{\hat{J}_{rz}^2}{\hat{J}_{zz}} \right) \\
&= \hat{J}_t + rgz + k_1(k_2 - r)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b^2 \left( \hat{J}_{rr} + \frac{g_r^2}{g_z} \right), \\
\tilde{A} &= A(\pi^*)|_{x=g(t,r,z)} \\
&= \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{z^2}{1/\hat{J}_{zz}} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\hat{J}_{rz}^2/\hat{J}_{zz}^2}{1/\hat{J}_{zz}} - b\rho(t)\theta(t) \frac{z\hat{J}_{rz}/\hat{J}_{zz}}{1/\hat{J}_{zz}} \\
&= \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 \hat{J}_{zz} + \frac{1}{2}b^2 |\rho(t)|^2 \frac{\hat{J}_{rz}^2}{\hat{J}_{zz}} - b\rho(t)\theta(t) z \hat{J}_{rz} \\
&= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_z - \frac{1}{2}b^2 |\rho(t)|^2 \frac{g_r^2}{g_z} + b\rho(t)\theta(t) z g_r, \\
\tilde{B} &= B(C^*)|_{x=g(t,r,z)} \\
&= -C^*(t, r, g(t, r, z))z + \alpha e^{-\beta t} U(C^*(t, r, g(t, r, z))).
\end{aligned}$$

Notemos que la expresión  $g_r^2/g_z$  está presente tanto en  $\tilde{H}$  como en  $\tilde{A}$ . Como hemos impuesto la condición  $|\rho(t)| = 1$  al formular el problema en el capítulo anterior, al sumar estas funciones se elimina el término  $\frac{1}{2}b^2 g_r^2/g_z$ . Consideremos entonces las funciones

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{J}_t + rgz + k_1(k_2 - r)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b^2 \hat{J}_{rr}, \\
\hat{A} &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_z + b\rho(t)\theta(t) z g_r.
\end{aligned}$$

Como  $\tilde{H} + \tilde{A} + \tilde{B} = 0$ , también se cumple que  $\hat{H}_z + \hat{A}_z + \hat{B}_z = 0$ . Por consiguiente, calculamos las derivadas de estas funciones con respecto a  $z$ , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{H}_z &= \hat{J}_{tz} + rg_z z + rg + k_1(k_2 - r)\hat{J}_{rz} + \frac{1}{2}b^2 \hat{J}_{rrz} \\
&= -g_t + rg_z z + rg - k_1(k_2 - r)g_r - \frac{1}{2}b^2 g_{rr}, \\
\hat{A}_z &= -|\theta(t)|^2 z g_z - \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_{zz} + b\rho(t)\theta(t)(g_r + z g_{rz}), \\
\hat{B}_z &= -C^*(t, r, g) - C_x^*(t, r, g)g_z z + \alpha e^{-\beta t} U_x(C^*(t, r, g))C_x^*(t, r, g)g_z \\
&= -U_x^{-1}\left(\frac{z}{\alpha e^{-\beta t}}\right) - C_x^*(t, r, g)g_z z + \alpha e^{-\beta t} U_x\left(U_x^{-1}\left(\frac{z}{\alpha e^{-\beta t}}\right)\right) C_x^*(t, r, g)g_z \\
&= -\frac{1-p}{q} \alpha^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p}t} z^{-\frac{1}{1-p}} - \hat{\eta}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, por (3.10) y la condición terminal (3.1b) en  $J$  de la ecuación HJB, tenemos

$$z = J_x(T, r, g(T, r, z)) = (1 - \alpha)e^{-\beta T} U_x(g(T, r, z)),$$

de donde obtenemos la siguiente condición terminal para la función  $g$ :

$$\begin{aligned} g(T, r, z) &= U_x^{-1} \left( \frac{z}{(1-\alpha)e^{-\beta T}} \right) \\ &= \frac{1-p}{q} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p} T} z^{-\frac{1}{1-p}} + \hat{\eta}. \end{aligned}$$

Basados en esta condición terminal, se conjetura que  $g$  tiene la siguiente forma:

$$g(t, r, z) = \frac{1-p}{q} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p} t} z^{-\frac{1}{1-p}} f(t, r) + \hat{\eta} h(t, r), \quad (3.21)$$

donde  $f, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones por determinar tales que  $f(T, r) = 1$  y  $h(T, r) = 1$ .

Entonces, las derivadas de la función  $g$  son:

$$\begin{aligned} g_t(t, r, z) &= M(t, z) \left( -\frac{\beta}{1-p} f(t, r) + f_t(t, r) \right) + \hat{\eta} h_t(t, r), \\ g_r(t, r, z) &= M(t, z) f_r(t, r) + \hat{\eta} h_r(t, r), \\ g_z(t, r, z) &= -M(t, z) \frac{1}{(1-p)z} f(t, r), \\ g_{rr}(t, r, z) &= M(t, z) f_{rr}(t, r) + \hat{\eta} h_{rr}(t, r), \\ g_{zz}(t, r, z) &= M(t, z) \frac{2-p}{(1-p)^2 z^2} f(t, r), \\ g_{rz}(t, r, z) &= -M(t, z) \frac{1}{(1-p)z} f_r(t, r), \end{aligned}$$

donde  $M : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función auxiliar dada por

$$M(t, z) = \frac{1-p}{q} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p} t} z^{-\frac{1}{1-p}}.$$

Reemplazando estas derivadas en  $\hat{H}_z$  y  $\hat{A}_z$  tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{H}_z &= M(t, z) \left[ \frac{\beta}{1-p} f - f_t - \frac{1}{1-p} r f + r f - k_1(k_2 - r) f_r - \frac{1}{2} b^2 f_{rr} \right] \\ &\quad + \hat{\eta} \left[ -h_t + r h - k_1(k_2 - r) h_r - \frac{1}{2} b^2 h_{rr} \right] \\ &= M(t, z) \left[ \frac{\beta - rp}{1-p} f - f_t - k_1(k_2 - r) f_r - \frac{1}{2} b^2 f_{rr} \right] \\ &\quad + \hat{\eta} \left[ -h_t + r h - k_1(k_2 - r) h_r - \frac{1}{2} b^2 h_{rr} \right], \\ \hat{A}_z &= M(t, z) \left[ \frac{1}{1-p} |\theta(t)|^2 f - \frac{1}{2} \frac{2-p}{(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f + b\rho(t)' \theta(t) \left( 1 - \frac{1}{1-p} \right) f_r \right] \\ &\quad + \hat{\eta} b\rho(t)' \theta(t) h_r \\ &= -M(t, z) \left[ \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f + \frac{p}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) f_r \right] + \hat{\eta} b\rho(t)' \theta(t) h_r. \end{aligned}$$

Adicionalmente, observemos que

$$\hat{B}_z = - \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} M(t, z) - \hat{\eta}.$$

De esta manera, conseguimos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \hat{H}_z + \hat{A}_z + \hat{B}_z \\ &= M(t, z) \left[ \frac{\beta - rp}{1-p} f - f_t - k_1(k_2 - r)f_r - \frac{1}{2}b^2 f_{rr} - \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f - \frac{p}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) f_r \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \right] + \hat{\eta} \left[ -h_t + rh - k_1(k_2 - r)h_r - \frac{1}{2}b^2 h_{rr} + b\rho(t)' \theta(t) h_r - 1 \right]. \end{aligned}$$

Para que esta expresión sea igual a 0 para cualquier valor de  $z > 0$ , necesariamente las expresiones dentro de los corchetes deben ser igual a 0. En consecuencia, tenemos los siguientes problemas de valor terminal para  $f$  y  $h$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\beta - rp}{1-p} - \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 \right] f - f_t - \left[ k_1(k_2 - r) + \frac{p}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) \right] f_r \\ & \quad - \frac{1}{2}b^2 f_{rr} = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \end{aligned} \tag{3.22a}$$

$$f(T, r) = 1, \tag{3.22b}$$

$$f(t, r) > 0, \tag{3.22c}$$

y,

$$rh - h_t - [k_1(k_2 - r) - b\rho(t)' \theta(t)] h_r - \frac{1}{2}b^2 h_{rr} = 1, \tag{3.23a}$$

$$h(T, r) = 1, \tag{3.23b}$$

$$h(t, r) > 0. \tag{3.23c}$$

Para encontrar las soluciones a ambas ecuaciones diferenciales, emplearemos los siguientes resultados basados en el principio de Duhamel (por ejemplo, ver [6]) para resolver problemas no homogéneos.

**Lema 3.1.2.** *Consideremos el siguiente problema no homogéneo de valor terminal:*

$$\begin{aligned} & A_1(t, r)y + y_t + A_2(t, r)y_r + A_3(t)y_{rr} + A_4 = 0, \\ & y(T, r) = 1, \end{aligned}$$

donde  $A_1, A_2 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A_3 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $A_4 \in \mathbb{R}$ .

Supongamos que, para cada  $\tau \in [0, T]$ , existe una función  $\hat{y}^{(\tau)} : [0, \tau] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que resuelve el siguiente problema homogéneo de valor terminal:

$$\begin{aligned} & A_1(t, r)y + y_t + A_2(t, r)y_r + A_3(t)y_{rr} = 0, \\ & y(\tau, r) = 1. \end{aligned}$$



Sea  $\hat{y}(t, r, \tau) = \hat{y}^{(\tau)}(t, r)$ . Entonces,

$$y(t, r) = A_4 \int_t^T \hat{y}(t, r, \tau) d\tau + \hat{y}(t, r, T)$$

resuelve el problema no homogéneo planteado.

*Demostración.* Primero, definimos el operador  $\mathcal{L}$  para funciones  $C^{1,2}$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}w(t, r) = A_1(t, r)w(t, r) + A_2(t, r)w_r(t, r) + A_3(t)w_{rr}(t, r).$$

Entonces, se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y(t, r) &= A_1(t, r)y(t, r) + A_2(t, r)y_r(t, r) + A_3(t)y_{rr}(t, r) \\ &= A_4 \int_t^T [A_1(t, r)\hat{y}(t, r, \tau) + A_2(t, r)\hat{y}_r(t, r, \tau) + A_3(t)\hat{y}_{rr}(t, r, \tau)] d\tau \\ &\quad + A_1(t, r)\hat{y}(t, r, T) + A_2(t, r)\hat{y}_r(t, r, T) + A_3(t)\hat{y}_{rr}(t, r, T) \\ &= A_4 \int_t^T \mathcal{L}\hat{y}(t, r, \tau) d\tau + \mathcal{L}\hat{y}(t, r, T). \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} y_t(t, r) + A_4 &= A_4 \left[ \int_t^T \hat{y}_t(t, r, \tau) d\tau - \hat{y}(t, r, t) \right] + \hat{y}_t(t, r, T) + A_4, \\ &= A_4 \int_t^T \hat{y}_t(t, r, \tau) d\tau + \hat{y}_t(t, r, T). \end{aligned}$$

Notemos que para cualquier  $\tau \in [0, T]$ ,  $\hat{y}(t, r, \tau)$  cumple  $\mathcal{L}\hat{y}(t, r, \tau) + \hat{y}_t(t, r, \tau) = 0$  al ser solución del problema homogéneo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}y(t, r) + y_t(t, r) + A_4 \\ &= A_4 \int_t^T \mathcal{L}\hat{y}(t, r, \tau) d\tau + \mathcal{L}\hat{y}(t, r, T) + A_4 \int_t^T \hat{y}_t(t, r, \tau) d\tau + \hat{y}_t(t, r, T) \\ &= A_4 \int_t^T [\mathcal{L}\hat{y}(t, r, \tau) + \hat{y}_t(t, r, \tau)] d\tau + [\mathcal{L}\hat{y}(t, r, T) + \hat{y}_t(t, r, T)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por último, como  $y(T, r) = \hat{y}(T, r, T) = 1$ , concluimos que  $y$  resuelve el problema no homogéneo.  $\square$

**Lema 3.1.3.** Sea  $\tau \in [0, T]$ . Consideremos el siguiente problema homogéneo de valor terminal:

$$\begin{aligned} [A_1(t) + A_2r]y + y_t + [A_3(t) + A_4r]y_r + A_5(t)y_{rr} &= 0, \\ y(\tau, r) &= 1, \\ y(t, r) &> 0, \end{aligned}$$

donde  $A_1, A_3, A_5 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones integrables y  $A_2, A_4 \in \mathbb{R}$  son constantes tales que  $A_4 \neq 0$ .

Entonces,

$$y(t, r) = e^{B(t)+D(t)r},$$

donde  $B, D : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones tales que  $B(\tau) = D(\tau) = 0$ , es solución del problema de valor terminal si

$$B(t) = \int_t^\tau [A_1(s) + A_3(s)D(s) + A_5(s)D(s)^2] ds,$$

$$D(t) = \frac{A_2}{A_4} \left( e^{A_4(\tau-t)} - 1 \right).$$

*Demostración.* Notemos que

$$y_t(t, r) = [B_t(t) + D_t(t)r] y(t, r),$$

$$y_r(t, r) = D(t)y(t, r),$$

$$y_{rr}(t, r) = D(t)^2 y(t, r).$$

Reemplazando estas igualdades en la ecuación diferencial del problema de valor terminal, tenemos que

$$[A_1(t) + A_2r]y + [B_t(t) + D_t(t)r]y + [A_3(t) + A_4r]D(t)y + A_5(t)D(t)^2y = 0.$$

Como  $y > 0$ , este se puede cancelar de la expresión anterior, con lo que se obtiene

$$A_1(t) + B_t(t) + A_3(t)D(t) + A_5(t)D(t)^2 + r[A_2 + D_t(t) + A_4D(t)] = 0. \quad (3.24)$$

Ya que  $r$  puede tomar cualquier valor en  $\mathbb{R}$ , la expresión dentro de los corchetes debe ser igual a 0. En particular, se trata de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden en  $D$ , la cual tiene la siguiente solución:

$$D(t) = \frac{A_2}{A_4} \left( e^{A_4(\tau-t)} - 1 \right).$$

Por último, integrando de  $t$  a  $\tau$  en (3.24), obtenemos

$$B(t) = \int_t^\tau [A_1(s) + A_3(s)D(s) + A_5(s)D(s)^2] ds.$$

□

**Corolario 3.1.4.** *Consideremos el siguiente problema de valor terminal:*

$$[A_1(t) + A_2r]y + y_t + [A_3(t) + A_4r]y_r + A_5(t)y_{rr} + A_6 = 0,$$

$$y(T, r) = 1,$$

$$y(t, r) > 0,$$

donde  $A_1, A_3, A_5 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones integrables y  $A_2, A_4, A_6 \in \mathbb{R}$  son constantes tales que  $A_4 \neq 0$ .

Sean  $B$  y  $D$  funciones dadas por

$$B(t, \tau) = \int_t^\tau [A_1(s) + A_3(s)D(s, \tau) + A_5D(s, \tau)^2] ds,$$

$$D(t, \tau) = \frac{A_2}{A_4} \left( e^{A_4(\tau-t)} - 1 \right).$$

Entonces,

$$y(t, r) = A_6 \int_t^T e^{B(t, \tau) + D(t, \tau)r} d\tau + e^{B(t, T) + D(t, T)r}$$

es solución del problema de valor terminal.

Si aplicamos el corolario anterior a los problemas de valor terminal de  $f$  y  $h$  obtenemos

$$f(t, r) = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r},$$

$$D_1(t, \tau) = \int_t^\tau \left( \frac{p}{1-p} b\theta(s)' \rho(s) + k_1 k_2 \right) D_2(s, \tau) ds$$

$$+ \int_t^\tau \left( \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(s)|^2 - \frac{\beta}{1-p} \right) ds + \frac{1}{2} b^2 \int_t^\tau D_2(s, \tau)^2 ds,$$

$$D_2(t, \tau) = \frac{p}{k_1(1-p)} \left( 1 - e^{-k_1(\tau-t)} \right),$$

y,

$$h(t, r) = \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r},$$

$$D_3(t, \tau) = \int_t^\tau \left( -b\theta(s)' \rho(s) + k_1 k_2 \right) D_4(s, \tau) ds + \frac{1}{2} b^2 \int_t^\tau D_4(s, \tau)^2 ds,$$

$$D_4(t, \tau) = -\frac{1}{k_1} \left( 1 - e^{-k_1(\tau-t)} \right).$$

Con estas ecuaciones a la mano, podemos obtener una forma explícita para la función  $J$ . Primero, despejamos  $z$  de la definición de la función  $g$  en (3.21) y lo reemplazamos en (3.10):

$$J_x(t, r, g(t, r, z)) = (1-\alpha)e^{-\beta t} \left( \frac{q}{1-p} g(t, r, z) + \eta h(t, r) \right)^{-(1-p)} f(t, r)^{1-p}.$$

Como se ha supuesto que  $g(t, r, \cdot)$  es una función invertible, la igualdad anterior también se cumple para cualquier  $(t, r, x) \in Q$  de la siguiente manera:

$$J_x(t, r, x) = (1-\alpha)e^{-\beta t} \left( \frac{q}{1-p} x + \eta h(t, r) \right)^{-(1-p)} f(t, r)^{1-p}.$$

Si definimos la función auxiliar  $\delta : (t, r, x) \mapsto x + \hat{\eta}(1 - h(t, r))$ , podemos escribir la

expresión anterior de la siguiente forma:

$$J_x(t, r, x) = (1 - \alpha)e^{-\beta t}U_x(\delta(t, r, x))f(t, r)^{1-p}.$$

Luego, si integramos con respecto a  $x$ , obtenemos

$$\begin{aligned} J(t, r, x) &= (1 - \alpha)e^{-\beta t}U(\delta(t, r, x))f(t, r)^{1-p} + K \\ &= (1 - \alpha)e^{-\beta t}U(\delta(t, r, x))f(t, r)^{1-p}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $K$  es una constante de integración, la cual debe ser igual 0 para que  $J$  cumpla con la condición terminal (3.1b). Así, con la función candidato  $J$  hallada en (3.25), definimos  $Q$  como el dominio implícito de la función  $J$ .

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} J_{xx} &= (1 - \alpha)e^{-\beta t}U_{xx}(\delta(t, r, x))f(t, r)^{1-p}, \\ J_{rx} &= (1 - p)(1 - \alpha)e^{-\beta t}U_x(\delta(t, r, x))f(t, r)^{-p}f_r(t, r) \\ &\quad - \hat{\eta}(1 - \alpha)e^{-\beta t}U_{xx}(\delta(t, r, x))f(t, r)^{1-p}h_r(t, r). \end{aligned}$$

De esta manera, ahora podemos hallar  $\pi^*$  a partir de (3.5) y  $C^*$  a partir de (3.6):

$$\begin{aligned} \pi^*(t, r, x) &= -\sigma^{-1}(t)\theta(t)\frac{J_x(t, r, x)}{J_{xx}(t, r, x)} - b\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{J_{rx}(t, r, x)}{J_{xx}(t, r, x)} \\ &= \left[ -\sigma^{-1}(t)\theta(t) - (1 - p)b\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \right] \frac{U_x(\delta(t, r, x))}{U_{xx}(\delta(t, r, x))} \\ &\quad + \hat{\eta}b\sigma^{-1}(t)\rho(t)h_r(t, r) \\ &= \left[ \sigma^{-1}(t)\theta(t) + (1 - p)b\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \right] \left( \frac{1}{1 - p}\delta(t, r, x) + \frac{1}{q}\eta \right) \\ &\quad + \hat{\eta}b\sigma^{-1}(t)\rho(t)h_r(t, r) \\ &= \left[ \frac{1}{1 - p}\sigma^{-1}(t)\theta(t) + b\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \right] (x - \hat{\eta}h(t, r)) \\ &\quad + \hat{\eta}b\sigma^{-1}(t)\rho(t)h_r(t, r), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} C^*(t, r, x) &= U_x^{-1} \left( \frac{J_x(t, r, x)}{\alpha e^{-\beta t}} \right) \\ &= U_x^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} U_x(\delta(t, r, x))f(t, r)^{1-p} \right) \\ &= \frac{1 - p}{q} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{1-p}} U_x(\delta(t, r, x))^{-\frac{1}{1-p}} f(t, r)^{-1} + \hat{\eta} \\ &= \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} f(t, r)^{-1} (x - \hat{\eta}h(t, r)) + \hat{\eta}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.2. Verificación de los supuestos

En esta sección demostraremos que se cumplen los supuestos que se asumieron en la sección anterior para hallar  $J$ , así como verificar que esta función resuelve la ecuación HJB.

Lo primero que necesitamos revisar es que el dominio de  $J$  debe contener el conjunto  $Q^+$ . Con este fin, fijemos  $t \in [0, T]$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Observemos que para que  $J$  esté bien definido,  $\delta(t, r, x)$  debe pertenecer al dominio de la función de utilidad  $U$ . Esto es equivalente a que  $x > \hat{\eta}h(t, r)$ , lo cual se cumple para cualquier  $x > 0$  ya que  $\hat{\eta} < 0$  y  $h(t, r) > 0$ .

Seguidamente, el primer supuesto realizado fue que  $J_{xx} < 0$  para obtener (3.5) a partir de la condición de primer orden, y para usar la transformada de Legendre sobre  $J(t, r, \cdot)$  en (3.9). Esto es inmediato de verificar si calculamos  $J_{xx}$ :

$$J_{xx}(t, r, x) = (1 - \alpha)e^{-\beta t} U_{xx}(\delta(t, r, x)) f(t, r)^{1-p}, \quad (3.28)$$

el cual siempre es negativo ya que  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $U_{xx} < 0$  y  $f > 0$ .

Para demostrar los demás supuestos (el rango de  $J_x$  es  $\mathbb{R}^+$ ,  $J_x(t, r, \cdot)$  es invertible, y la igualdad en (3.11)), extenderemos el siguiente teorema demostrado en [20].

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente cóncava, creciente y diferenciable tal que*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_x(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = 0.$$

*Entonces, se cumple que para todo  $z > 0$ ,*

$$L(z) = f(g(z)) - g(z)z,$$

*donde  $L$  denota la transformada de Legendre de  $f$ , y  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  denota la función inversa de  $f_x$ .*

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente cóncava, creciente y diferenciable tal que*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f_x(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = 0.$$

*Entonces, se cumple que, para todo  $z > 0$ ,*

$$L(z) = f(g(z)) - g(z)z, \quad (3.29)$$

*donde  $L$  denota la transformada de Legendre de  $f$ , y  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow (a, \infty)$  denota la función inversa de  $f_x$ .*

*Demostración.* Primero, definimos la función auxiliar  $\hat{f} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\hat{f}(x) = f(x+a)$ . Por ende,  $\hat{f}$  cumple con las condiciones del teorema anterior.

Entonces, para  $z > 0$ , se tiene que

$$\hat{L}(z) = \hat{f}(\hat{g}(z)) - \hat{g}(z)z,$$

donde  $\hat{L}$  denota la transformada de Legendre de  $\hat{f}$ , y  $\hat{g} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  denota la función inversa de  $\hat{f}_x$ .

Luego, como  $\hat{f}_x(x) = f_x(x+a)$ , se cumple que  $\hat{g}(z) = f_x^{-1}(z) - a = g(z) - a$ . En consecuencia,  $g(z) = \hat{g}(z) + a$ , por lo que el dominio y rango de  $g$  son  $\mathbb{R}^+$  y  $(a, \infty)$ , respectivamente.

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\hat{L}(z) &= \sup_{x>0} \{\hat{f}(x) - xz\} \\
&= \sup_{x>a} \{\hat{f}(x-a) - (x-a)z\} \\
&= \sup_{x>a} \{f(x) - xz + az\} \\
&= \sup_{x>a} \{f(x) - xz\} + az \\
&= L(z) + az.
\end{aligned}$$

Además, se tiene que  $\hat{f}(\hat{g}(z)) = \hat{f}(g(z) - a) = f(g(z))$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
L(z) &= \hat{L}(z) - az \\
&= \hat{f}(\hat{g}(z)) - \hat{g}(z)z - az \\
&= f(g(z)) - (\hat{g}(z) + a)z \\
&= f(g(z)) - g(z)z,
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que se cumple la igualdad en (3.29).  $\square$

**Corolario 3.2.3.** *Para todo  $t \in [0, T]$  y  $r \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $J_x(t, r, \cdot)$  es una función invertible con rango igual a  $\mathbb{R}^+$  y cumple la igualdad en (3.11).*

*Demostración.* Primero, fijemos  $t \in [0, T]$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Sea  $\xi = \hat{\eta}h(t, r)$  y definamos la función  $\phi : (\xi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x) = J(t, r, x) = (1 - \alpha)e^{-\beta t} f(t, r)^{1-p} U(x - \xi + \hat{\eta}).$$

Notemos que el corolario queda demostrado si podemos aplicar la proposición anterior a la función  $\phi$ . Esto es así ya que la función de utilidad  $U : (\hat{\eta}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cumple las condiciones que se exigen en esta proposición, tal como se evidenció en el capítulo anterior, y la expresión  $(1 - \alpha)e^{-\beta t} f(t, r)^{1-p}$  no altera sus propiedades al ser una constante positiva.  $\square$

Por último, probaremos que la función  $J$  hallada resuelve la ecuación HJB.

**Proposición 3.2.4.** *La función  $J$  definida en (3.25) cumple las ecuaciones (3.1a) y (3.1b).*

*Demostración.* La condición terminal en (3.1b) se cumple ya que  $f(T, r) = h(T, r) = 1$ :

$$\begin{aligned}
J(T, r, x) &= (1 - \alpha)e^{-\beta T} U(\delta(T, r, x)) f(T, r)^{1-p} \\
&= (1 - \alpha)e^{-\beta T} U(x + \hat{\eta} - \hat{\eta}h(T, r)) \\
&= (1 - \alpha)e^{-\beta T} U(x).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para probar que se cumple (3.1a), es suficiente con verificar que se cumple (3.8), puesto que ya hemos comprobado que  $J_{xx} < 0$ .

En lo que sigue de la demostración, escribiremos  $\delta$  en vez de  $\delta(t, r, x)$  para simplificar las notación. De esta manera, tenemos que las derivadas parciales de  $J$  se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
J_x &= Z(t)U_x(\delta)f^{1-p}, \\
J_{xx} &= Z(t)U_{xx}(\delta)f^{1-p}, \\
J_t &= Z(t)U(\delta)[- \beta f^{1-p} + (1-p)f^{-p}f_t] - Z(t)U_x(\delta)f^{1-p}\hat{\eta}h_t \\
&= Z(t)U(\delta)f^{-p}[- \beta f + (1-p)f_t] - \hat{\eta}J_xh_t, \\
J_r &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p}f_r - Z(t)U_x(\delta)f^{1-p}\hat{\eta}h_r \\
&= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p}f_r - \hat{\eta}J_xh_r, \\
J_{rx} &= (1-p)Z(t)U_x(\delta)f^{-p}f_r - \hat{\eta}J_{xx}h_r, \\
J_{rr} &= (1-p)Z(t)U(\delta)[-pf^{-1-p}f_r^2 + f^{-p}f_{rr}] - (1-p)Z(t)U_x(\delta)f^{-p}f_r\hat{\eta}h_r - \hat{\eta}J_{rx}h_r - \hat{\eta}J_xh_{rr} \\
&= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p}[-pf^{-1}f_r^2 + f_{rr}] - \hat{\eta}[J_{rx} + \hat{\eta}J_{xx}h_r]h_r - \hat{\eta}J_{rx}h_r - \hat{\eta}J_xh_{rr} \\
&= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p}[-pf^{-1}f_r^2 + f_{rr}] - \hat{\eta}^2J_{xx}h_r^2 - 2\hat{\eta}J_{rx}h_r - \hat{\eta}J_xh_{rr},
\end{aligned}$$

donde  $Z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función auxiliar dada por  $Z(t) = (1 - \alpha)e^{-\beta t}$ .

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
H - rxJ_x - \frac{1}{2}b^2J_{rr} &= J_t + k_1(k_2 - r)J_r \\
&= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ -\frac{\beta}{1-p}f + f_t + k_1(k_2 - r)f_r \right] \\
&\quad - \hat{\eta}J_x[h_t + k_1(k_2 - r)h_r].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Luego, para simplificar  $A(\pi^*)$ , usaremos la siguiente igualdad:

$$\frac{U_x(x)^2}{U_{xx}(x)} = -\frac{1}{q} \left( \frac{q}{1-p}x + \eta \right)^p = -\frac{p}{1-p}U(x).$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{J_x^2}{J_{xx}} &= \frac{Z(t)^2 U_x(\delta)^2 f^{2(1-p)}}{Z(t) U_{xx}(\delta) f^{1-p}} \\
&= -\frac{p}{1-p} Z(t) U(\delta) f^{1-p}, \\
\frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} &= \frac{(1-p)^2 Z(t)^2 U_x(\delta)^2 f^{-2p} f_r^2}{Z(t) U_{xx}(\delta) f^{1-p}} + \frac{\hat{\eta}^2 J_{xx}^2 h_r^2 - 2\hat{\eta}(1-p) Z(t) U_x(\delta) f^{-p} f_r J_{xx} h_r}{J_{xx}} \\
&= -p(1-p) Z(t) U(\delta) f^{-1-p} f_r^2 + \hat{\eta}^2 J_{xx} h_r^2 - 2\hat{\eta}(1-p) Z(t) U_x(\delta) f^{-p} f_r h_r, \\
&= -p(1-p) Z(t) U(\delta) f^{-1-p} f_r^2 + \hat{\eta}^2 J_{xx} h_r^2 - 2\hat{\eta}[J_{rx} + \hat{\eta} J_{xx} h_r] h_r \\
&= -p(1-p) Z(t) U(\delta) f^{-1-p} f_r^2 - \hat{\eta}^2 J_{xx} h_r^2 - 2\hat{\eta} J_{rx} h_r, \\
\frac{J_x J_{rx}}{J_{xx}} &= Z(t) U_x(\delta) f^{1-p} \left[ \frac{(1-p) Z(t) U_x(\delta) f^{-p} f_r}{Z(t) U_{xx}(\delta) f^{1-p}} - \frac{\hat{\eta} J_{xx} h_r}{J_{xx}} \right] \\
&= (1-p) Z(t) \frac{U_x(\delta)^2}{U_{xx}(\delta)} f^{-p} f_r - \hat{\eta} Z(t) U_x(\delta) f^{1-p} h_r \\
&= -p Z(t) U(\delta) f^{-p} f_r - \hat{\eta} J_x h_r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.7),

$$\begin{aligned}
A(\pi^*) + \frac{1}{2} b^2 J_{rr} &= -\frac{1}{2} |\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} + \frac{1}{2} b^2 \left( J_{rr} - \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} \right) - b\rho(t)' \theta(t) \frac{J_x J_{rx}}{J_{xx}} \\
&= (1-p) Z(t) U(\delta) f^{-p} \left[ \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f + \frac{1}{2} b^2 f_{rr} + \frac{p}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) f_r \right] \\
&\quad - \hat{\eta} J_x \left[ \frac{1}{2} b^2 h_{rr} - b\rho(t)' \theta(t) h_r \right].
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por último, observemos que

$$\begin{aligned}
(x - \hat{\eta} h(t, r)) U_x(\delta(t, r, x)) &= (x - \hat{\eta} h(t, r)) \left( \frac{q}{1-p} x + \eta h(t, r) \right)^{p-1} \\
&= \frac{1-p}{q} \left( \frac{q}{1-p} x + \eta h(t, r) \right)^p \\
&= p U(\delta(t, r, x)).
\end{aligned}$$



Entonces, de (3.27), tenemos que

$$\begin{aligned}
C^*(t, r, x)J_x &= \left[ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} (x - \hat{\eta}h) f^{-1} \right] Z(t)U_x(\delta)f^{1-p} + \hat{\eta}J_x \\
&= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} Z(t)(x - \hat{\eta}h)U_x(\delta)f^{-p} + \hat{\eta}J_x \\
&= p \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} Z(t)U(\delta)f^{-p} + \hat{\eta}J_x, \\
\alpha e^{-\beta t}U(C^*(t, r, x)) &= \alpha e^{-\beta t} \frac{1-p}{pq} \left[ \frac{q}{1-p} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{1-p}} (x - \hat{\eta}h) f^{-1} \right]^p \\
&= \alpha e^{-\beta t} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{p}{1-p}} \frac{1-p}{pq} \left[ \frac{q}{1-p} (x - \hat{\eta}h) \right]^p f^{-p} \\
&= \alpha e^{-\beta t} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{p}{1-p}} U(\delta) f^{-p} \\
&= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} Z(t)U(\delta) f^{-p}, \\
xJ_x &= (x - \hat{\eta}h)J_x + \hat{\eta}J_x h \\
&= Z(t)(x - \hat{\eta}h)U_x(\delta)f^{1-p} + \hat{\eta}J_x h \\
&= pZ(t)U(\delta)f^{1-p} + \hat{\eta}J_x h.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
B(C^*) + rxJ_x &= -C^*J_x + \alpha e^{-\beta t}U(C^*) + rxJ_x \\
&= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} + \frac{rp}{1-p} f \right] - \hat{\eta}J_x[1 - rh] \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Si sumamos las igualdades en (3.30), (3.31) y (3.32), obtenemos

$$\begin{aligned}
H + A(\pi^*) + B(C^*) &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ -\frac{\beta}{1-p} f + f_t + k_1(k_2 - r)f_r + \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} b^2 f_{rr} + \frac{p}{1-p} b\rho(t)\theta(t)f_r + \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} + \frac{rp}{1-p} f \right] \\
&\quad - \hat{\eta}J_x \left[ h_t + k_1(k_2 - r)h_r + \frac{1}{2} b^2 h_{rr} - b\rho(t)\theta(t)h_r + 1 - rh \right]
\end{aligned}$$

Notemos que las expresiones dentro de los corchetes coinciden exactamente con las ecuaciones diferenciales de  $f$  y  $h$  en (3.22a) y (3.23a), respectivamente. En consecuencia, estos términos son iguales a 0, por lo que  $H + A(\pi^*) + B(C^*) = 0$ , lo cual demuestra que  $J$  resuelve la ecuación HJB.  $\square$

## Capítulo 4

# Teorema de verificación

Primero, planteamos la siguiente definición de procesos  $L^\lambda$ , la cual se usará para definir las estrategias admisibles y algunas condiciones en el teorema de verificación.

**Definición 4.0.1.** Para una constante  $\lambda \geq 1$ , diremos que  $Y : [t, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  es un proceso  $L^\lambda$  si es un proceso progresivamente medible y

$$E \left[ \int_t^T |Y(s)|^\lambda ds \right] < \infty.$$

Además, si para cada  $\lambda \geq 1$  empleamos la norma

$$\|Y\|_\lambda = \left( E \left[ \int_t^T |Y(s)|^\lambda ds \right] \right)^{1/\lambda}$$

para los procesos  $L^\lambda$ , tenemos que se cumplen las siguientes desigualdades (por ejemplo, ver [22]).

**Proposición 4.0.2.** Sean  $Y$  y  $Z$  dos procesos  $L^\lambda$ , para una constante  $\lambda \geq 1$ . Entonces  $\|Y + Z\|_\lambda < \infty$ , por lo que  $Y + Z$  también es un proceso  $L^\lambda$ .

**Proposición 4.0.3** (Desigualdad de Hölder). Sean  $a, b, c \geq 1$  constantes tales que  $1/a + 1/b = 1/c$ . Si  $Y$  y  $Z$  son procesos  $L^a$  y  $L^b$ , respectivamente, entonces  $\|YZ\|_c \leq \|Y\|_a + \|Z\|_b$ , por lo que  $YZ$  es un proceso  $L^c$ .

Luego, conociendo el dominio de la función  $J : Q \rightarrow \mathbb{R}$  que resuelve la ecuación HJB, definida en (3.25), podemos establecer las propiedades que caracterizan una estrategia admisible.

**Definición 4.0.4.** Diremos que una pareja de procesos  $(\pi, C) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , es una estrategia admisible si cumple con las siguientes condiciones:

1. Los procesos  $\pi$  y  $C$  son adaptados.
2. Se cumple que  $C(t) > \hat{\eta}$ , para todo  $t \in [0, T]$ .
3. Para todo  $(t, x, r) \in Q^+$ , existe una solución única para la ecuación diferencial estocástica de la riqueza (2.1) con valores iniciales  $X(t) = x$  y  $R(t) = r$ . Además,  $(s, X(s), R(s)) \in Q$  para todo  $s \geq t$ .

4. El producto  $\pi'\sigma$  es un proceso  $L^4$ .

Observemos que una condición equivalente para que se cumpla  $(s, X(s), R(s)) \in Q$  es que  $X(s) > \hat{\eta}h(s, R(s))$ . Por lo tanto,

1. Cuando  $s = T$ , tenemos que  $X(T) > \hat{\eta}$ .
2. Cualquier estrategia que cumpla que  $X(s) > 0$ , automáticamente cumple la condición  $(s, X(s), R(s)) \in Q$ , ya que  $\hat{\eta} < 0$  y  $h$  es una función estrictamente positiva.
3. Si  $\eta = 0$ , todas las estrategias admisibles deben cumplir  $X(s) > 0$ . En este caso se tiene que  $Q = Q^+$ .

En lo siguiente, probaremos que la función  $J$  coincide con la función de valor del problema de inversión-consumo  $V : Q^+ \rightarrow \mathbb{R}$  bajo esta definición de estrategia admisible. Además, las funciones  $\pi^*$  y  $C^*$  definidas en (3.26) y (3.27), respectivamente, forman la estrategia óptima.

**Teorema 4.0.5.** *Sea  $J : Q \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida en (3.25), la cual cumple con resolver la ecuación HJB en (3.1a) y (3.1b). Además, sean  $\pi : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $C : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que:*

$$\mathcal{A}^{\pi(t,r,x), C(t,r,x)} J(t, r, x) + \alpha e^{-\beta t} U(C(t, r, x)) = 0. \quad (4.1)$$

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1. Los procesos  $\pi^*(s) = \pi(s, R(s), X(s))$  y  $C^*(s) = C(s, R(s), X(s))$  forman una estrategia admisible.
2. El proceso  $J_x(s) := J_x(s, R(s), X(s))$  es un proceso  $L^4$ .
3. El proceso  $J_r(s) := J_r(s, R(s), X(s))$  es un proceso  $L^2$ .

Entonces,

$$J(t, r, x) = V(t, r, x) = V^{\pi^*, C^*}(t, r, x),$$

para todo  $(t, r, x) \in Q^+$ .

*Demostración.* Fijemos  $(t, r, x) \in Q^+$  y denotemos por  $X$  a la solución de la ecuación de la riqueza con  $X(t) = x$  y  $R(t) = r$  bajo una estrategia admisible  $(\pi_0, C_0)$ .

Si usamos la fórmula de Itô (en particular, empleamos la fórmula multidimensional de Itô en [19]) en  $J(s) := J(s, R(s), X(s))$ , obtenemos

$$J(u) = J(t, r, x) + \int_t^u \mathcal{A}^{\pi_0(s), C_0(s)} J(s) ds + M(u), \quad t \leq u \leq T \quad (4.2)$$

donde

$$M(u) = \int_t^u J_x(s) \pi_0(s)' \sigma(s) dW(s) + \int_t^u b J_r(s) \rho(s)' dW(s), \quad t \leq u \leq T.$$

Como  $\pi_0$  forma parte de una estrategia admisible,  $\pi'_0\sigma$  es un proceso  $L^4$ . Entonces, por la desigualdad de Hölder, se cumple que el proceso  $J_x\pi'_0\sigma$  es un proceso  $L^2$ . Además, como  $bJ_r\rho$  también es un proceso  $L^2$ , se tiene que  $M$  es una martingala, por lo que  $E_{t,r,x}[M(T)] = E_{t,r,x}[M(t)] = 0$ .

Luego, si tomamos el valor esperado en (4.2) con  $u = T$ , tenemos que

$$\begin{aligned} E_{t,r,x}[J(T)] &= E_{t,r,x} \left[ J(t, r, x) + \int_t^T \mathcal{A}^{\pi_0(s), C_0(s)} J(s) ds + M(T) \right] \\ &= J(t, r, x) + E_{t,r,x} \left[ \int_t^T \mathcal{A}^{\pi_0(s), C_0(s)} J(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que  $J$  resuelve la ecuación HJB, se sabe que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\pi_0(s), C_0(s)} J(s) + \alpha e^{-\beta s} U(C_0(s)) &\leq 0, \\ J(T) &= (1 - \alpha) e^{-\beta T} U(X(T)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J(t, r, x) &= E_{t,r,x} \left[ - \int_t^T \mathcal{A}^{\pi_0(s), C_0(s)} J(s) ds + J(T) \right] \\ &\geq E_{t,r,x} \left[ \alpha \int_t^T e^{-\beta s} U(C_0(s)) ds + (1 - \alpha) e^{-\beta T} U(X(T)) \right] \\ &= V^{\pi_0, C_0}(t, r, x). \end{aligned}$$

En cambio, bajo la estrategia  $(\pi^*, C^*)$ , tenemos que la desigualdad anterior se cumple con igualdad debido a la condición (4.1). En consecuencia,

$$V^{\pi^*, C^*}(t, r, x) = J(t, r, x) \geq V^{\pi_0, C_0}(t, r, x).$$

Finalmente, tomando el supremo sobre todas las estrategias admisibles en la relación anterior, obtenemos  $J(t, r, x) = V(t, r, x)$ .  $\square$

Para poder usar este teorema, necesitamos demostrar que algunos procesos que dependen de  $f$  y  $h$  son  $L^\lambda$  para algún  $\lambda \geq 1$ . Los siguientes resultados prueban algunas propiedades, que conjuntamente con la desigualdad de Hölder, simplifican este proceso.

**Lema 4.0.6.** *Sea  $Y$  un proceso adaptado con caminos muestrales continuos tal que*

$$\sup_{t \in [0, T]} E \left[ |Y(t)|^\lambda \right] < \infty,$$

*para una constante  $\lambda \geq 1$ . Entonces,  $Y$  es un proceso  $L^\lambda$ .*

*Demostración.* Fijemos una constante  $\lambda \geq 1$ . Aplicando el teorema de Tonelli obtenemos

$$E \left[ \int_0^T |Y(s)|^\lambda ds \right] = \int_0^T E \left[ |Y(s)|^\lambda \right] ds \leq T \sup_{t \in [0, T]} E \left[ |Y(t)|^\lambda \right] < \infty.$$

Además, como  $Y$  es un proceso adaptado y tiene caminos muestrales continuos, también es progresivamente medible.  $\square$

**Proposición 4.0.7.** *Para cualquier constante  $\gamma \in \mathbb{R}$ , se cumple que*

$$\sup_{t \in [0, T]} E[|f(t, R(t))|^\gamma] < \infty.$$

*Demostración.* Primero, notemos que  $R$  es un proceso gaussiano con media y varianza dados por

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= k_2 + (R(0) - k_2)e^{-k_1 t}, \\ \text{Var}[R(t)] &= \frac{b^2}{2k_1} \left(1 - e^{-2k_1 t}\right), \end{aligned}$$

(por ejemplo, ver [18]).

Luego, definimos una variable aleatoria  $Z$  con distribución normal y con media y varianza iguales a

$$\begin{aligned} E[Z] &= \max\{R(0), k_2\}, \\ \text{Var}[Z] &= \frac{b^2}{2k_1}, \end{aligned}$$

de modo que  $E[Z] \geq E[R(t)]$  y  $\text{Var}[Z] \geq \text{Var}[R(t)]$ , para cualquier  $t \in [0, T]$ . Notemos que, como  $R(0) > 0$ , se cumple que

$$E[R(t)] > k_2(1 - e^{-k_1 t}) \geq 0$$

Entonces, para  $\alpha = \gamma D_2(0, T)$ , tenemos que  $\exp(\alpha R(t))$  es una variable aleatoria con distribución lognormal y

$$\begin{aligned} E \left[ e^{\alpha R(t)} \right] &= e^{\alpha E[R(t)] + \frac{1}{2} \alpha^2 \text{Var}[R(t)]} \\ &\leq e^{|\alpha| E[Z] + \frac{1}{2} \alpha^2 \text{Var}[Z]} \\ &= E \left[ e^{|\alpha| Z} \right]. \end{aligned}$$

Seguidamente, sea  $\varphi : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$  una función auxiliar definida de la siguiente manera:

$$\varphi(t) = \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau)} d\tau + e^{D_1(t, T)}.$$

Al ser  $\varphi$  una función continua que retorna valores positivos, existen dos números  $m$  y  $M$  tales que,  $0 < m \leq \varphi(t) \leq M$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

Como  $D_2$  es una función que retorna valores no negativos, es decreciente en  $t$  y creciente

en  $\tau$ , para  $r \geq 0$  se cumple que

$$\begin{aligned}
f(t, r) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r} \\
&\leq \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(0, T)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(0, T)r} \\
&= \varphi(t) e^{D_2(0, T)r} \\
&\leq M e^{D_2(0, T)r}.
\end{aligned}$$

Por el contrario, si  $r < 0$ ,

$$\begin{aligned}
f(t, r) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r} \\
&\leq \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau)} d\tau + e^{D_1(t, T)} \\
&= \varphi(t) \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para  $\gamma \geq 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
E[|f(t, R(t))|^\gamma] &= E[f(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[f(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq E[M^\gamma e^{\gamma D_2(0, T)R(t)} 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[M^\gamma 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&= M^\gamma E[e^{\alpha R(t)} 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + M^\gamma E[1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq M^\gamma E[e^{\alpha R(t)}] + M^\gamma \\
&\leq M^\gamma E[e^{|\alpha|Z}] + M^\gamma.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para  $r \geq 0$ , se cumple que

$$\begin{aligned}
f(t, r) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r} \\
&\geq \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau)} d\tau + e^{D_1(t, T)} \\
&= \varphi(t) \\
&\geq m.
\end{aligned}$$

En cambio, para  $r < 0$ ,

$$\begin{aligned}
f(t, r) &= \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r} \\
&\geq \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t, \tau) + D_2(0, T)r} d\tau + e^{D_1(t, T) + D_2(0, T)r} \\
&= \varphi(t) e^{D_2(0, T)r} \\
&\geq m e^{D_2(0, T)r}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para  $\gamma < 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
E[|f(t, R(t))|^\gamma] &= E[f(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[f(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq E[m^\gamma 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[m^\gamma e^{\gamma D_2(0, T)R(t)} 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&= m^\gamma E[1_{\{R(t) \geq 0\}}] + m^\gamma E[e^{\alpha R(t)} 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq m^\gamma + m^\gamma E[e^{\alpha R(t)}] \\
&\leq m^\gamma + m^\gamma E[e^{|\alpha|Z}].
\end{aligned}$$

Por ende, el supremo de  $E[|f(t, R(t))|^\gamma]$  sobre  $t \in [0, T]$  es finito. □

**Proposición 4.0.8.** *Para cualquier constante  $\gamma \in \mathbb{R}$ , se cumple que*

$$\sup_{t \in [0, T]} E[|h(t, R(t))|^\gamma] < \infty.$$

*Demostración.* En la proposición anterior definimos una variable aleatoria  $Z$  con distribución normal tal que  $E[Z] \geq E[R(t)]$  y  $Var[Z] \geq Var[R(t)]$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

Entonces, si denotamos  $\alpha = \gamma D_4(0, T)$ , tenemos que  $\exp(\alpha R(t))$  es una variable aleatoria con distribución lognormal y

$$\begin{aligned}
E[e^{\alpha R(t)}] &= e^{\alpha E[R(t)] + \frac{1}{2} \alpha^2 Var[R(t)]} \\
&\leq e^{|\alpha| E[Z] + \frac{1}{2} \alpha^2 Var[Z]} \\
&= E[e^{|\alpha|Z}].
\end{aligned}$$

Luego, sea  $\varphi : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$  una función auxiliar definida de la siguiente manera:

$$\varphi(t) = \int_t^T e^{D_3(t, \tau)} d\tau + e^{D_3(t, T)}.$$

Al ser  $\varphi$  una función continua que retorna valores positivos, existen dos números  $m$  y  $M$  tales que,  $0 < m \leq \varphi(t) \leq M$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

Como  $D_4$  es una función que retorna valores no positivos, es creciente en  $t$  y decreciente

en  $\tau$ , para  $r \geq 0$  se cumple que

$$\begin{aligned}
h(t, r) &= \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \\
&\leq \int_t^T e^{D_3(t, \tau)} d\tau + e^{D_3(t, T)} \\
&= \varphi(t) \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

En cambio, para  $r < 0$ ,

$$\begin{aligned}
h(t, r) &= \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \\
&\leq \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(0, T)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(0, T)r} \\
&= \varphi(t) e^{D_4(0, T)r} \\
&\leq M e^{D_4(0, T)r}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para  $\gamma \geq 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
E[|h(t, R(t))|^\gamma] &= E[h(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[h(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq E[M^\gamma 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[M^\gamma e^{\gamma D_4(0, T)R(t)} 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&= M^\gamma E[1_{\{R(t) \geq 0\}}] + M^\gamma E[e^{\alpha R(t)} 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq M^\gamma + M^\gamma E[e^{\alpha R(t)}] \\
&\leq M^\gamma + M^\gamma E[e^{|\alpha|Z}].
\end{aligned}$$

Por otro lado, para  $r \geq 0$ , se cumple que

$$\begin{aligned}
h(t, r) &= \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \\
&\geq \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(0, T)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(0, T)r} \\
&= \varphi(t) e^{D_4(0, T)r} \\
&\geq m e^{D_4(0, T)r}.
\end{aligned}$$

Por el contrario, si  $r < 0$ ,

$$\begin{aligned}
h(t, r) &= \int_t^T e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \\
&\geq \int_t^T e^{D_3(t, \tau)} d\tau + e^{D_3(t, T)} \\
&= \varphi(t) \\
&\geq m.
\end{aligned}$$



Finalmente, para  $\gamma < 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
E[|h(t, R(t))|^\gamma] &= E[h(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[h(t, R(t))^\gamma 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq E[m^\gamma e^{\gamma D_4(0, T) R(t)} 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + E[m^\gamma 1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&= m^\gamma E[e^{\alpha R(t)} 1_{\{R(t) \geq 0\}}] + m^\gamma E[1_{\{R(t) < 0\}}] \\
&\leq m^\gamma E[e^{\alpha R(t)}] + m^\gamma \\
&\leq m^\gamma E[e^{|\alpha|Z}] + m^\gamma.
\end{aligned}$$

Por ende, el supremo de  $E[|h(t, R(t))|^\gamma]$  sobre  $t \in [0, T]$  es finito.  $\square$

**Corolario 4.0.9.** Para cualquier constante  $\gamma > 0$ , se cumple que

$$\sup_{t \in [0, T]} E[|f_r(t, R(t))|^\gamma] < \infty \quad y \quad \sup_{t \in [0, T]} E[|h_r(t, R(t))|^\gamma] < \infty.$$

*Demostración.* Recordemos que  $D_2$  es una función que retorna valores no negativos, es decreciente en  $t$  y creciente en  $\tau$ . Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
f_r(t, r) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T D_2(t, \tau) e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + D_2(t, T) e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r} \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T D_2(0, T) e^{D_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)r} d\tau + D_2(0, T) e^{D_1(t, T) + D_2(t, T)r} \\
&= D_2(0, T) f(t, r).
\end{aligned}$$

Por otro lado,  $|D_4|$  es una función decreciente en  $t$  y creciente en  $\tau$ , por lo que

$$\begin{aligned}
|h_r(t, r)| &= \left| \int_t^T D_4(t, \tau) e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + D_4(t, T) e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \right| \\
&\leq \int_t^T |D_4(t, \tau)| e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + |D_4(t, T)| e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \\
&\leq \int_t^T |D_4(0, T)| e^{D_3(t, \tau) + D_4(t, \tau)r} d\tau + |D_4(0, T)| e^{D_3(t, T) + D_4(t, T)r} \\
&= |D_4(0, T)| h(t, r).
\end{aligned}$$

En consecuencia, a partir de las proposiciones anteriores, tenemos que los supremos de  $E[|f_r(t, R(t))|^\gamma]$  y  $E[|h_r(t, R(t))|^\gamma]$  sobre  $t \in [0, T]$  también son finitos.  $\square$

**Corolario 4.0.10.** Sea  $\varphi$  cualquiera de las funciones  $f$ ,  $1/f$ ,  $f_r$ ,  $h$ ,  $1/h$  y  $h_r$ . Entonces, el proceso  $\varphi(t, R(t))$  es un proceso  $L^\lambda$  para todo  $\lambda \geq 1$ .

*Demostración.* Primero, fijemos una constante  $\lambda \geq 1$  arbitraria y denotemos con  $\varphi$  cualquiera de las funciones enunciadas en el corolario.

En los resultados anteriores, se ha demostrado que el supremo de  $E[|\varphi(t, R(t))|^\lambda]$  sobre  $t \in [0, T]$  es finito. Por lo tanto, para demostrar este corolario, solo debemos verificar que

el proceso  $\varphi(t, R(t))$  es progresivamente medible, lo cual se cumple ya que  $\varphi$  es una función continua y  $R$  es un proceso adaptado con caminos muestrales continuos.  $\square$

Con estos resultados a la mano, pasamos a demostrar que la estrategia que se forma con  $\pi^*$  y  $C^*$  cumple las condiciones de una estrategia admisible. Pero antes, probamos la siguiente propiedad de los procesos de Itô.

**Lema 4.0.11.** *Sea  $Z$  un proceso de Itô definido de la siguiente manera:*

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW(s),$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son procesos  $L^1$  y  $L^2$ , respectivamente. Entonces, se cumple que

$$\sup_{t \in [0, T]} E[|Z(t)|] < \infty.$$

En particular, todo proceso de Itô con caminos muestrales continuos es un proceso  $L^1$ .

*Demostración.* Como  $\alpha$  y  $\beta$  son procesos  $L^1$  y  $L^2$ , respectivamente, se cumple que

$$E \left[ \int_0^T |\alpha(s)|ds \right] = M_\alpha < \infty \quad \text{y} \quad E \left[ \int_0^T |\beta(s)|^2 ds \right] = M_\beta < \infty.$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} |Z(t)| &\leq |Z(0)| + \left| \int_0^t \alpha(s)ds \right| + \left| \int_0^t \beta(s)dW(s) \right| \\ &\leq |Z(0)| + \int_0^t |\alpha(s)|ds + 1 + \left| \int_0^t \beta(s)dW(s) \right|^2. \end{aligned}$$

Entonces, si aplicamos el valor esperado en ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} E[|Z(t)|] &\leq 1 + |Z(0)| + E \left[ \int_0^t |\alpha(s)|ds \right] + E \left[ \left| \int_0^t \beta(s)dW(s) \right|^2 \right] \\ &= 1 + |Z(0)| + E \left[ \int_0^t |\alpha(s)|ds \right] + E \left[ \int_0^t |\beta(s)|^2 ds \right] \\ &= 1 + |Z(0)| + M_\alpha + M_\beta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el supremo de  $E[Z(t)]$  sobre  $t \in [0, T]$  es finito.  $\square$

**Lema 4.0.12.** *Sean  $B_1$  y  $B_2$  procesos  $L^1$  y  $L^2$ , respectivamente. Entonces, la solución única de la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} dY &= B_1 Y dt + B_2 Y dW, \\ Y(t) &= y \end{aligned}$$

es

$$Y(s) = y \exp \left( \int_t^s \left[ B_1(u) - \frac{1}{2} |B_2(u)|^2 \right] du + \int_t^s B_2(u) dW(u) \right).$$

*Demostración.* Si denotamos  $Z = \ln(Y)$ , tenemos que

$$Z(s) = \ln(y) + \int_t^s \left[ B_1(u) - \frac{1}{2} |B_2(u)|^2 \right] du + \int_t^s B_2(u) dW(u).$$

Por lo tanto,

$$dZ = \left( B_1 - \frac{1}{2} |B_2|^2 \right) dt + B_2 dW.$$

Luego, si aplicamos la fórmula de Itô en  $Y = \exp(Z)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} dY &= Y dZ + \frac{1}{2} Y dZ dZ \\ &= \left( B_1 - \frac{1}{2} |B_2|^2 \right) Y dt + B_2 Y dW + \frac{1}{2} |B_2|^2 Y dt \\ &= B_1 Y dt + B_2 Y dW. \end{aligned}$$

Además, observemos que  $Y(t) = y$ . □

**Proposición 4.0.13.** *Existe una solución única para la ecuación de la riqueza en (2.1) bajo la estrategia  $\pi(s) = \pi^*(s, R(s), X(s))$  y  $C(s) = C^*(s, R(s), X(s))$ .*

*Demostración.* Para simplificar la notación, denotaremos las estrategias óptimas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \pi(s) &= A_1(s)Y(s) + A_2(s), \\ C(s) &= A_3(s)Y(s) + \hat{\eta}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{1}{1-p} \sigma^{-1}(s)' \theta(s) + b \sigma^{-1}(s)' \rho(s) \frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))}, \\ A_2(s) &= b \sigma^{-1}(s)' \rho(s) \hat{\eta} h_r(s, R(s)), \\ A_3(s) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \frac{1}{f(s, R(s))}, \\ Y(s) &= X(s) - \hat{\eta} h(s, R(s)). \end{aligned}$$

Si aplicamos la fórmula de Itô en  $\varphi(t, r, x) := x - \hat{\eta} h(t, r)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_t dt + \varphi_x dX + \frac{1}{2} \varphi_{xx} dX dX + \varphi_r dR + \frac{1}{2} \varphi_{rr} dR dR + \varphi_{xr} dX dR \\ &= -\hat{\eta} h_t dt + dX - \hat{\eta} h_r dR - \frac{1}{2} \hat{\eta} h_{rr} dR dR \\ &= -\hat{\eta} h_t dt + dX - \hat{\eta} h_r [k_1(k_2 - R) dt + b \rho' dW] - \frac{1}{2} \hat{\eta} b^2 h_{rr} dt \\ &= dX - \hat{\eta} \left[ h_t + k_1(k_2 - R) h_r + \frac{1}{2} b^2 h_{rr} \right] dt - \hat{\eta} b h_r \rho' dW. \end{aligned}$$

Notemos que el término dentro de los corchetes aparece en la ecuación diferencial parcial de  $h$  en (3.23a). Por lo tanto, la ecuación anterior también la podemos expresar de la siguiente manera,

$$dY = dX - \hat{\eta} [Rh + bh_r \rho' \theta - 1] dt - \hat{\eta} bh_r \rho' dW.$$

Por otro lado, a partir de la definición de la función auxiliar  $A_2$ , podemos derivar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} A_1(s)' \mu(s) Y(s) - \pi(s)' \mu(s) &= -A_2(s)' \mu(s) = -\hat{\eta} bh_r(s, R(s)) \rho(s)' \theta(s), \\ A_1(s)' \sigma(s) Y(s) - \pi(s)' \sigma(s) &= -A_2(s)' \sigma(s) = -\hat{\eta} bh_r(s, R(s)) \rho(s)'. \end{aligned}$$

Luego, conjuntamente con la ecuación de la riqueza (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} dY &= dX - \hat{\eta} [Rh - 1] dt + A_2' \mu dt + A_2' \sigma dW \\ &= dX - \hat{\eta} [Rh - 1] dt + A_1' \mu Y dt - \pi' \mu dt + A_1' \sigma Y dW - \pi' \sigma dW \\ &= [RX - C] dt - \hat{\eta} [Rh - 1] dt + A_1' \mu Y dt + A_1' \sigma Y dW \\ &= [RX - A_3 Y - \hat{\eta}] dt - \hat{\eta} [Rh - 1] dt + A_1' \mu Y dt + A_1' \sigma Y dW \\ &= [R(X - \hat{\eta} h) - A_3 Y + A_1' \mu Y] dt + A_1' \sigma Y dW \\ &= [R - A_3 + A_1' \mu] Y dt + A_1' \sigma Y dW. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Esta ecuación diferencial estocástica de  $Y$  tiene solución única si es que  $R$ ,  $A_3$  y  $A_1' \mu$  son procesos  $L^1$ , y si  $A_1' \sigma$  es un proceso  $L^2$ .

Como  $R$  es un proceso de Itô con caminos muestrales continuos, sabemos por un lema anterior que también es un proceso  $L^1$ . También se ha demostrado que  $f(t, R(t))^{-1}$  es un proceso  $L^1$ , por lo que  $A_3$  también lo es. Además, los procesos

$$\begin{aligned} A_1(s)' \mu &= \frac{1}{1-p} |\theta(s)|^2 + b \frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))} \rho(s)' \theta(s), \\ A_1(s)' \sigma &= \frac{1}{1-p} \theta(s)' + b \frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))} \rho(s)', \end{aligned}$$

también son procesos  $L^1$  y  $L^2$ , respectivamente, ya que  $\rho$  y  $\theta$  son funciones acotadas y  $f(t, R(t))^{-1}$  y  $f_r(t, R(t))$  son procesos  $L^4$ .

Por lo tanto, existe una solución de la ecuación diferencial estocástica, la cual está dada por

$$Y(s) = Y(t) \exp \left( \int_t^s \left[ B_1(u) - \frac{1}{2} |B_2(u)|^2 \right] du + \int_t^s B_2(u) dW(u) \right), \quad s > t, \tag{4.4a}$$

$$Y(t) = X(t) - \hat{\eta} h(t, R(t)), \tag{4.4b}$$

donde  $B_1(u) = R(u) - A_3(u) + A_1(u)' \mu(u)$  y  $B_2(u) = A_1(u)' \sigma(u)$ .

Luego, el proceso  $X$  lo podemos expresar en función de  $Y$  de la siguiente manera:

$$X(s) = Y(s) + \hat{\eta} h(s, R(s)), \tag{4.5}$$

con lo cual queda demostrado la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de la riqueza.  $\square$

**Corolario 4.0.14.** Para  $(t, r, x) \in Q^+$ , denotemos por  $X$  a la solución de la ecuación de la riqueza con valores iniciales  $R(t) = r$  y  $X(t) = x$ , bajo la estrategia  $\pi(s) = \pi^*(s, R(s), X(s))$  y  $C(s) = C^*(s, R(s), X(s))$ . Entonces,  $(s, R(s), X(s)) \in Q$  y  $C^*(s) > \hat{\eta}$ , para todo  $s \in [t, T]$ .

*Demostración.* A partir de la proposición anterior, sabemos que  $X$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$X(s) = Y(s) + \hat{\eta}h(s, R(s)),$$

donde  $Y$  es el proceso definido en (4.4a) y (4.4b).

Observemos que  $Y(s) > 0$  ya que  $X(t) = x > 0$ ,  $\hat{\eta} < 0$  y  $h$  es una función estrictamente positiva. Entonces, se tiene que  $(s, R(s), X(s)) \in Q$ .

Por otro lado, la estrategia óptima de consumo es

$$\begin{aligned} C(s) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \frac{1}{f(s, R(s))} [X(s) - \hat{\eta}h(s, R(s))] + \hat{\eta} \\ &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \frac{1}{f(s, R(s))} Y(s) + \hat{\eta}. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $C(s) > \hat{\eta}$  si el primer término en la ecuación anterior es positivo, lo cual también se cumple ya que  $\alpha \in (0, 1)$  y  $f$  es una función estrictamente positiva.  $\square$

**Corolario 4.0.15.** Sean  $(t, r, x) \in Q^+$  y  $\lambda$  una constante en  $\mathbb{R}$ . Entonces, se cumple que

$$\sup_{s \in [t, T]} E_{t, r, x} [ |Y(s)|^\lambda ] < \infty. \quad (4.6)$$

*Demostración.* Si denotamos  $Z(s) = |Y(s)|^\lambda$ , tenemos que

$$Z(s) = |Y(t)|^\lambda \exp \left( \int_t^s \left[ \lambda B_1(u) - \frac{1}{2} \lambda |B_2(u)|^2 \right] du + \int_t^s \lambda B_2(u) dW(u) \right).$$

Por lo tanto, el proceso  $Z$  cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dZ = \left[ \lambda B_1 - \frac{1}{2} \lambda |B_2|^2 + \frac{1}{2} |\lambda B_2|^2 \right] Z dt + \lambda B_2 Z dW.$$

Luego, como  $B_2$  es un proceso  $L^2$ , se tiene que  $\lambda |B_2|^2$  y  $|\lambda B_2|^2$  son procesos  $L^1$ . Además, como  $\lambda B_1$  es un proceso  $L^1$ ,  $Z$  es un proceso de Itô y, por un lema anterior, el supremo de  $E[Z(t)]$  es finito.  $\square$

**Corolario 4.0.16.** El proceso  $J(s) = J(s, R(s), X(s))$  es  $L^\lambda$ , para todo  $\lambda \geq 1$ .

*Demostración.* Recordemos que

$$\begin{aligned} J(s, r, x) &= (1 - \alpha)e^{-\beta s}U(\delta(s, r, x))f(s, r)^{1-p}, \\ &= (1 - \alpha)e^{-\beta s}\frac{1-p}{pq} \left( \frac{q}{1-p}x + \eta h(s, r) \right)^p f(s, r)^{1-p}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J(s, R(s), X(s)) &= (1 - \alpha)e^{-\beta s}\frac{1-p}{pq} \left( \frac{q}{1-p}X(s) + \eta h(s, R(s)) \right)^p f(s, R(s))^{1-p} \\ &= (1 - \alpha)e^{-\beta s}\frac{1-p}{pq} \left( \frac{q}{1-p}Y(s) \right)^p f(s, R(s))^{1-p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $J(s)$  es un proceso adaptado con caminos muestrales continuos. Más aún, por el corolario anterior sabemos que  $Y(s)^p$  es un proceso  $L^\gamma$  para todo  $\gamma \geq 1$ . Como  $f(s, R(s))^{1-p}$  también cumple esta propiedad, usando la desigualdad de Hölder obtenemos que  $J(s)$  es un proceso  $L^\lambda$ .  $\square$

**Proposición 4.0.17.** *Sea  $\pi(s) = \pi^*(s, R(s), X(s))$ . Entonces, se cumple que  $\pi(s)'\sigma(s)$  es un proceso  $L^4$ .*

*Demostración.* Notemos que

$$\pi(s)'\sigma(s) = \left[ \frac{1}{1-p}\theta(s)' + b\rho(s)\frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))} \right] Y(s) + \hat{\eta}b\rho(s)'h_r(s, R(s)).$$

Como se ha demostrado en los enunciados anteriores, para todo  $\lambda \geq 1$ , los procesos  $Y(s)$ ,  $f(s, R(s))$ ,  $h_r(s, R(s))$ ,  $f_r(s, R(s))$ ,  $h_r(r, R(s))$  y  $f(s, R(s))^{-1}$  son  $L^\lambda$ . Luego, como  $\rho$  y  $\theta$  son funciones acotadas, se cumple que el proceso  $\pi(s)'\sigma(s)$  es  $L^4$ .  $\square$

Finalmente, probamos que  $\pi^*$  y  $C^*$  cumplen las condiciones del teorema de verificación.

**Proposición 4.0.18.** *Las funciones  $\pi^*$  y  $C^*$  definidas en (3.26) y (3.27), respectivamente, cumplen con las condiciones del teorema de verificación.*

*Demostración.* Por construcción sabemos que  $\pi^*$  y  $C^*$  cumplen con la ecuación (4.1). Además, a partir de los enunciados anteriores sabemos que  $\pi(s) = \pi^*(s, R(s), X(s))$  y  $C(s) = C^*(s, R(s), X(s))$  forman una estrategia admisible. Por lo tanto, queda demostrar que los procesos  $J_x(s)$  y  $J_r(s)$  son  $L^4$  y  $L^2$ , respectivamente.

Primero, recordemos que

$$\begin{aligned} J_x(s, r, x) &= (1 - \alpha)e^{-\beta s}U_x(\delta(s, r, x))f(s, r)^{1-p}, \\ &= (1 - \alpha)e^{-\beta s} \left( \frac{q}{1-p}x + \eta h(s, r) \right)^{-(1-p)} f(s, r)^{1-p}. \end{aligned}$$

Entonces, como el proceso  $J_x(s, R(s), X(s))$  es igual al producto de procesos que son  $L^\lambda$ , para todo  $\lambda \geq 1$ , este proceso también cumple esta propiedad.

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
 J_r(s, r, x) &= (1 - p)(1 - \alpha)e^{-\beta s}U(\delta(s, r, x))f(s, r)^{-p}f_r(s, r) \\
 &\quad - \hat{\eta}(1 - \alpha)e^{-\beta s}U_x(\delta(s, r, x))f(s, r)^{1-p}h_r(s, r) \\
 &= (1 - p)J(s, r, x)f(s, r)^{-1}f_r(s, r) - \hat{\eta}J_x(s, r, x)h_r(s, r).
 \end{aligned}$$

Similar al caso anterior,  $J_r(s, R(s), X(s))$  también se puede expresar como la diferencia de productos de procesos que son  $L^\lambda$ , para todo  $\lambda \geq 1$ . Entonces,  $J_r(s)$  también cumple esta propiedad.  $\square$



## Capítulo 5

# Resultados bajo otros modelos de tasa de interés

En los capítulos anteriores hemos hallado la solución al problema de inversión-consumo bajo el modelo de Vasicek para caracterizar la dinámica de la tasa de interés. En este capítulo presentamos cuáles son los cambios en los resultados encontrados si reemplazamos el modelo de la tasa de interés por el modelo de Hull-White o por el modelo de Ho-Lee.

### 5.1. Hull-White

En esta sección asumimos que la dinámica de la tasa de interés se puede modelar bajo la siguiente especificación del modelo de Hull-White<sup>1</sup>:

$$dR = (k_2(t) - k_1 R)dt + b(t)d\bar{W}$$

donde  $k_1 > 0$  y  $k_2, b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones determinísticas tales que  $k_2$  es integrable y  $b$  es cuadrado integrable. Adicionalmente, asumiremos que  $b$  es una función acotada para poder extender fácilmente los resultados anteriores.

En este caso, el operador  $\mathcal{A}$  sobre funciones de clase  $C^{1,2,2}$  para formular la ecuación HJB es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\pi, C} \phi(t, r, x) &= \phi_t + [rx + \pi' \mu(t) - C] \phi_x + \frac{1}{2} |\pi' \sigma(t)|^2 \phi_{xx} \\ &\quad + (k_2(t) - k_1 r) \phi_r + \frac{1}{2} b(t)^2 \phi_{rr} + b(t) \pi' \sigma(t) \rho(t) \phi_{rx}. \end{aligned}$$

De esta manera, si consideramos las siguientes funciones auxiliares:

$$H = J_t + rx J_x + (k_2(t) - k_1 r) J_r + \frac{1}{2} b(t)^2 J_{rr}, \quad (5.1)$$

$$A(\pi) = \mu(t)' \pi J_x + \frac{1}{2} |\sigma(t)' \pi|^2 J_{xx} + b(t) \rho(t)' \sigma(t)' \pi J_{rx}, \quad (5.2)$$

$$B(C) = -C J_x + \alpha e^{-\beta t} U(C), \quad (5.3)$$

<sup>1</sup>Si bien en la versión más general del modelo de Hull-White el factor  $k_1$  puede ser una función que dependa del tiempo, es usual en la práctica utilizar una constante positiva (por ejemplo, ver [3]).



podemos expresar la ecuación HJB de la siguiente manera:

$$H + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \{A(\pi)\} + \sup_{C \geq \hat{\eta}} \{B(C)\} = 0,$$

con condición terminal  $J(T, r, x) = (1 - \alpha)e^{-\beta T}U(x)$ .

Notemos que  $B$  como función de  $C$  es igual al obtenido bajo el modelo de Vasicek en (3.4), por lo que el valor  $C^*$  que maximiza la función  $B$  también es

$$C^*(t, r, x) = U_x^{-1} \left( \frac{J_x}{\alpha e^{-\beta t}} \right).$$

Por consiguiente, las diferencias en la estrategia óptima de consumo,  $C^*$ , solo se darán por las diferencias que encontremos en la función de valor  $J$ .

Por su parte,  $A$  es una función cuadrática de la forma (5.2), por lo que también es una función estrictamente cóncava si  $J_{xx} < 0$ . Por el momento, supongamos que la función  $J$  cumple esta propiedad.

Entonces, como la primera derivada de las función  $A$  es

$$A_\pi = \mu(t)J_x + \sigma(t)\sigma(t)'\pi J_{xx} + b(t)\sigma(t)\rho(t)J_{rx},$$

a partir de la condición de primer orden tenemos que el vector que maximiza  $A$  es:

$$\pi^*(t, r, x) = -\sigma^{-1}(t)\theta(t)\frac{J_x}{J_{xx}} - b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{J_{rx}}{J_{xx}}, \quad (5.4)$$

Luego, si evaluamos  $A$  en  $\pi^*$ , obtenemos

$$\begin{aligned} A(\pi^*) &= \mu(t)\pi^*J_x + \frac{1}{2}|\sigma(t)'\pi^*|^2 J_{xx} + b(t)\rho(t)\sigma(t)'\pi^*J_{rx} \\ &= -|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} - b(t)\theta(t)'\rho(t)\frac{J_{rx}J_x}{J_{xx}} + \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} + b(t)\theta(t)'\rho(t)\frac{J_xJ_{rx}}{J_{xx}} \\ &\quad + \frac{1}{2}b(t)^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} - b(t)\rho(t)'\theta(t)\frac{J_xJ_{rx}}{J_{xx}} - b(t)^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} \\ &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{J_x^2}{J_{xx}} - \frac{1}{2}b(t)^2 \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} - b(t)\rho(t)'\theta(t)\frac{J_xJ_{rx}}{J_{xx}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por otro lado, las relaciones que se obtuvieron entre las derivadas parciales de  $J$  y las de su transformada de Legendre,  $\hat{J}$ , no dependen de la dinámica de la tasa de interés. En consecuencia, podemos utilizar estos resultados directamente y así definir las siguientes funciones auxiliares:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= H|_{x=g(t,r,z)} \\
&= \hat{J}_t + rgz + (k_2(t) - k_1r)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b(t)^2 \left( \hat{J}_{rr} - \frac{\hat{J}_{rz}^2}{\hat{J}_{zz}} \right) \\
&= \hat{J}_t + rgz + (k_2(t) - k_1r)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b(t)^2 \left( \hat{J}_{rr} + \frac{g_r^2}{g_z} \right), \\
\tilde{A} &= A(\pi^*)|_{x=g(t,r,z)} \\
&= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 \frac{z^2}{-1/\hat{J}_{zz}} - \frac{1}{2}b(t)^2 \frac{\hat{J}_{rz}^2/\hat{J}_{zz}^2}{-1/\hat{J}_{zz}} - b(t)\rho(t)'\theta(t) \frac{-z\hat{J}_{rz}/\hat{J}_{zz}}{-1/\hat{J}_{zz}} \\
&= \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 \hat{J}_{zz} + \frac{1}{2}b(t)^2 \frac{\hat{J}_{rz}^2}{\hat{J}_{zz}} - b(t)\rho(t)'\theta(t)z\hat{J}_{rz} \\
&= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_z - \frac{1}{2}b(t)^2 \frac{g_r^2}{g_z} + b(t)\rho(t)'\theta(t)zg_r, \\
\hat{B} &= B(C^*)|_{x=g(t,r,z)} \\
&= -C^*(t, r, g(t, r, z))z + \alpha e^{-\beta t} U(C^*(t, r, g(t, r, z))),
\end{aligned}$$

donde  $g(t, r, \cdot)$  es la función inversa de  $J_x(t, r, \cdot)$ .

Notemos que al igual que  $B$ ,  $\hat{B}$  es equivalente a la misma función definida bajo el modelo de Vasicek. Por lo tanto, su derivada con respecto a  $z$  es igual a

$$\hat{B}_z = -\frac{1-p}{q} \alpha^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p}t} z^{-\frac{1}{1-p}} - \hat{\eta}.$$

Por otra parte, como el término  $\frac{1}{2}b(t)^2 g_r^2/g_z$  está presente tanto en  $\tilde{H}$  y  $\tilde{A}$  con signos opuestos, este se elimina cuando se suman estas funciones. Consideremos entonces las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{J}_t + rgz + (k_2(t) - k_1r)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b(t)^2 \hat{J}_{rr}, \\
\hat{A} &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_z + b(t)\rho(t)'\theta(t)zg_r,
\end{aligned}$$

de modo que  $\tilde{H} + \tilde{A} + \hat{B} = \hat{H} + \hat{A} + \hat{B} = 0$ .

Luego, las derivadas de estas funciones con respecto a  $z$  son

$$\begin{aligned}
\hat{H}_z &= \hat{J}_{tz} + rg_z z + rg + (k_2(t) - k_1r)\hat{J}_{rz} + \frac{1}{2}b(t)^2 \hat{J}_{rrz} \\
&= -g_t + rg_z z + rg - (k_2(t) - k_1r)g_r - \frac{1}{2}b(t)^2 g_{rr}, \\
\hat{A}_z &= -|\theta(t)|^2 z g_z - \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_{zz} + b(t)\rho(t)'\theta(t)(g_r + z g_{rz}).
\end{aligned}$$

Entonces, para resolver  $\hat{H}_z + \hat{A}_z + \hat{B}_z = 0$ , podemos emplear la misma función  $g$  propuesta en (3.21), con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{H}_z &= M(t, z) \left[ \frac{\beta}{1-p} f - f_t - \frac{1}{1-p} r f + r f - (k_2(t) - k_1 r) f_r - \frac{1}{2} b(t)^2 f_{rr} \right] \\
&\quad + \hat{\eta} \left[ -h_t + r h - (k_2(t) - k_1 r) h_r - \frac{1}{2} b(t)^2 h_{rr} \right] \\
&= M(t, z) \left[ \frac{\beta - rp}{1-p} f - f_t - (k_2(t) - k_1 r) f_r - \frac{1}{2} b(t)^2 f_{rr} \right] \\
&\quad + \hat{\eta} \left[ -h_t + r h - (k_2(t) - k_1 r) h_r - \frac{1}{2} b(t)^2 h_{rr} \right], \\
\hat{A}_z &= M(t, z) \left[ \frac{1}{1-p} |\theta(t)|^2 f - \frac{2-p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f + b(t) \rho(t)' \theta(t) \left( 1 - \frac{1}{1-p} \right) f_r \right] \\
&\quad + \hat{\eta} b(t) \rho(t)' \theta(t) h_r \\
&= -M(t, z) \left[ \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f + \frac{p}{1-p} b(t) \rho(t)' \theta(t) f_r \right] + \hat{\eta} b(t) \rho(t)' \theta(t) h_r. \\
\hat{B}_z &= - \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} M(t, z) - \hat{\eta},
\end{aligned}$$

donde  $f, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones por determinar tales que  $f(T, r) = h(T, r) = 1$  y  $M : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función auxiliar dada por

$$M(t, z) = \frac{1-p}{q} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p} t} z^{-\frac{1}{1-p}}.$$

Una ventaja de usar la misma función  $g$  es que  $J$  tiene la misma forma que (3.25) y, por lo tanto, las diferencias solo se presentan en las funciones  $f$  y  $h$ , las cuales deben resolver los siguientes problemas de valor terminal:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\beta - rp}{1-p} - \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 \right] f - f_t - \left[ \frac{p}{1-p} b(t) \rho(t)' \theta(t) - k_2(t) + k_1 r \right] f_r \\
&\quad - \frac{1}{2} b(t)^2 f_{rr} = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \tag{5.6a}
\end{aligned}$$

$$f(T, r) = 1, \tag{5.6b}$$

$$f(t, r) > 0, \tag{5.6c}$$

y,

$$r h - h_t - [b(t) \rho(t)' \theta(t) - k_2(t) + k_1 r] h_r - \frac{1}{2} b(t)^2 h_{rr} = 1 \tag{5.7a}$$

$$h(T, r) = 1, \tag{5.7b}$$

$$h(t, r) > 0. \tag{5.7c}$$

Observemos que el corolario 3.1.4 también es aplicable para ambos problemas de valor terminal. Por lo tanto, obtenemos las siguientes soluciones para  $f$  y  $h$ :

$$\begin{aligned}
f(t, r) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t,\tau)+D_2(t,\tau)r} d\tau + e^{D_1(t,T)+D_2(t,T)r}, \\
D_1(t, \tau) &= \int_t^\tau \left( \frac{p}{1-p} b(s)\theta(s)'\rho(s) + k_2(s) \right) D_2(s, \tau) ds \\
&\quad + \int_t^\tau \left( \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(s)|^2 - \frac{\beta}{1-p} \right) ds + \frac{1}{2} \int_t^\tau b(s)^2 D_2(s, \tau)^2 ds, \\
D_2(t, \tau) &= \frac{p}{k_1(1-p)} \left( 1 - e^{-k_1(\tau-t)} \right),
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
h(t, r) &= \int_t^T e^{D_3(t,\tau)+D_4(t,\tau)r} d\tau + e^{D_3(t,T)+D_4(t,T)r}, \\
D_3(t, \tau) &= \int_t^\tau (-b(s)\theta(s)'\rho(s) + k_2(s)) D_4(s, \tau) ds + \frac{1}{2} \int_t^\tau b(s)^2 D_4(s, \tau)^2 ds, \\
D_4(t, \tau) &= -\frac{1}{k_1} \left( 1 - e^{-k_1(\tau-t)} \right).
\end{aligned}$$

Para poder recuperar  $J$  a partir de su transformada de Legendre, asumiremos adicionalmente que el rango de  $J_x$  es  $\mathbb{R}^+$  y que  $J_x(t, r, \cdot)$  es invertible. Así, utilizando la igualdad en (3.10), tenemos que

$$J(t, r, x) = (1 - \alpha)e^{-\beta t} U(\delta(t, r, x)) f(t, r)^{1-p}, \quad (5.8)$$

donde  $\delta(t, r, x) = x + \hat{\eta}(1 - h(t, r))$ .

Luego, podemos utilizar el corolario 3.2.3 para demostrar que esta función  $J$  cumple los supuestos realizados líneas arriba ya que  $f$  en este caso también es una función positiva. Además, tenemos que

$$J_{xx}(t, r, x) = (1 - \alpha)e^{-\beta t} U_{xx}(\delta(t, r, x)) f(t, r)^{1-p} < 0,$$

ya que  $U_{xx} < 0$  para todo  $x \in O$ .

Asimismo, recordemos que para demostrar que  $J$  resuelve la ecuación HJB bajo el modelo de Vasicek, no usamos las soluciones explícitas de  $f$  y  $h$ , sino solo las ecuaciones diferenciales que estas funciones satisfacen. Por esta razón, las demostraciones resultan similares.

**Proposición 5.1.1.** *La función  $J$  definida en (5.8) resuelve la ecuación HJB del problema de inversión-consumo bajo el modelo de Hull-White.*

*Demostración.* En primer lugar, verificamos que se cumple la condición terminal de la ecuación HJB:

$$\begin{aligned}
J(T, r, x) &= (1 - \alpha)e^{-\beta T} U(\delta(T, r, x)) f(T, r)^{1-p} \\
&= (1 - \alpha)e^{-\beta T} U(x + \hat{\eta} - \hat{\eta}h(T, r)) \\
&= (1 - \alpha)e^{-\beta T} U(x).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para probar que  $J$  cumple

$$H + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \{A(\pi)\} + \sup_{C \geq \hat{\eta}} \{B(C)\} = 0$$

es suficiente con verificar que  $H + A(\pi^*) + B(C^*) = 0$ , puesto que ya hemos verificado que  $J_{xx} < 0$ .

En la proposición 3.2.4 encontramos varias expresiones para las derivadas de  $J$  en términos de  $f$  y  $h$  que también podemos emplear en esta demostración.

Para simplificar la notación, escribiremos  $\delta$  en vez de  $\delta(t, r, x)$  en lo que sigue de la demostración.

De esta manera, primero tenemos que

$$\begin{aligned} H - rxJ_x - \frac{1}{2}b(t)^2J_{rr} &= J_t + (k_2(t) - k_1r)J_r \\ &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ -\frac{\beta}{1-p}f + f_t + (k_2(t) - k_1r)f_r \right] \\ &\quad - \hat{\eta}J_x [h_t + (k_2(t) - k_1r)h_r]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde  $Z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función auxiliar dada por  $Z(t) = (1 - \alpha)e^{-\beta t}$ .

Por otro lado, de (5.5), obtenemos

$$\begin{aligned} A(\pi^*) + \frac{1}{2}b(t)^2J_{rr} &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2\frac{J_x^2}{J_{xx}} + \frac{1}{2}b(t)^2 \left( J_{rr} - \frac{J_{rx}^2}{J_{xx}} \right) - b(t)\rho(t)'\theta(t)\frac{J_xJ_{rx}}{J_{xx}} \\ &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ \frac{p}{2(1-p)^2}|\theta(t)|^2f + \frac{1}{2}b(t)^2f_{rr} + \frac{p}{1-p}b(t)\rho(t)'\theta(t)f_r \right] \\ &\quad - \hat{\eta}J_x \left[ \frac{1}{2}b(t)^2h_{rr} - b\rho(t)'\theta(t)h_r \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Por último, recordemos que la función  $B$  solo difiere de la misma función hallada bajo el modelo de Vasicek en las funciones  $f$  y  $h$ , por lo que también cumple la igualdad en (3.32):

$$\begin{aligned} B(C^*) + rxJ_x &= -C^*J_x + \alpha e^{-\beta t}U(C^*) + rxJ_x \\ &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} + \frac{rp}{1-p}f \right] - \hat{\eta}J_x[1 - rh]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si sumamos las igualdades en (5.9), (5.10) y (5.11), obtenemos

$$\begin{aligned} H + A(\pi^*) + B(C^*) &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ -\frac{\beta}{1-p}f + f_t + (k_2(t) - k_1r)f_r + \frac{p}{2(1-p)^2}|\theta(t)|^2f \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}b(t)^2f_{rr} + \frac{p}{1-p}b(t)\rho(t)'\theta(t)f_r + \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} + \frac{rp}{1-p}f \right] \\ &\quad - \hat{\eta}J_x \left[ h_t + (k_2(t) - k_1r)h_r + \frac{1}{2}b(t)^2h_{rr} - b(t)\rho(t)'\theta(t)h_r + 1 - rh \right]. \end{aligned}$$

Notemos que las expresiones dentro de los corchetes coinciden exactamente con las ecuaciones diferenciales de  $f$  y  $h$  en (5.6) y (5.7), respectivamente. En consecuencia, estos términos son iguales a 0, por lo que  $H + A(\pi^*) + B(C^*) = 0$ .  $\square$

Por otra parte, podemos hallar la función  $\pi^*$  a partir de (5.4), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\pi^*(t, r, x) &= -\sigma^{-1}(t)\theta(t)\frac{J_x(t, r, x)}{J_{xx}(t, r, x)} - b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{J_{rx}(t, r, x)}{J_{xx}(t, r, x)} \\
&= \left[ -\sigma^{-1}(t)\theta(t) - (1-p)b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \right] \frac{U_x(\delta(t, r, x))}{U_{xx}(\delta(t, r, x))} \\
&\quad + \hat{\eta}b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)h_r(t, r) \\
&= \left[ \sigma^{-1}(t)\theta(t) + (1-p)b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \right] \left( \frac{1}{1-p}\delta(t, r, x) + \frac{1}{q}\eta \right) \\
&\quad + \hat{\eta}b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)h_r(t, r) \\
&= \left[ \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}(t)\theta(t) + b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)\frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \right] (x - \hat{\eta}h(t, r)) \\
&\quad + \hat{\eta}b(t)\sigma^{-1}(t)\rho(t)h_r(t, r),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

En cambio, la función  $C^*$  tiene la misma forma a la obtenida en (3.27):

$$C^*(t, r, x) = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} f(t, r)^{-1} (x - \hat{\eta}h(t, r)) + \hat{\eta}. \tag{5.13}$$

En resumen, las diferencias bajo el modelo de Hull-White solo se presentan en las funciones  $f$ ,  $h$  y  $\pi^*$ , por lo que es suficiente con verificar que estas funciones también cumplen las propiedades y condiciones necesarias para emplear el teorema de verificación que se probó bajo el modelo de Vasicek.

Para las funciones  $f$  y  $h$ , estas propiedades se resumen en el corolario 4.0.10, cuya demostración se basa en:

1.  $R$  es un proceso gaussiano tal que podemos encontrar cotas superiores sobre la media y varianza de  $R(t)$  en  $[0, T]$ .
2. La función  $D_2$  es creciente en  $t$  y decreciente en  $\tau$ , mientras que  $D_4$  es decreciente en  $t$  y creciente en  $\tau$ .
3. El rango de la función  $D_2$  es el conjunto de números no negativos y de  $D_4$  es el conjunto de números no positivos.

Sobre el primer punto, tenemos que bajo el modelo de Hull-White,  $R$  también es un proceso gaussiano con media y varianza dadas por

$$\begin{aligned}
E[R(t)] &= R(0)e^{-k_1 t} + \int_0^t e^{-k_1(t-s)} k_2(s) ds, \\
Var[R(t)] &= \int_0^t e^{-2k_1(t-s)} b^2(s) d(s)
\end{aligned}$$

(por ejemplo, ver [18]). Como la media y varianza son funciones continuas en  $t$ , existen cotas superiores sobre ambas funciones en  $[0, T]$ .

Por otro lado, notemos que  $D_2$  y  $D_4$  son iguales a los obtenidos bajo el modelo de Vasicek, por lo que también se cumple este corolario bajo el modelo de Hull-White.

Con respecto a  $\pi^*$ , las condiciones relevantes que debe cumplir esta función son:

1. Existe una única solución para la ecuación de la riqueza bajo la estrategia formada por  $C^*(s, R(s), X(s))$  y  $\pi^*(t, R(s), X(s))$ .
2. El producto  $\pi^*(t, R(s), X(s))'\sigma(s)$  es un proceso  $L^4$ .

El primer punto se puede demostrar de manera análoga que con el modelo de Vasicek ya que hemos asumido que  $b$  es una función acotada.

**Proposición 5.1.2.** *Existe una solución única para la ecuación de la riqueza bajo la estrategia  $\pi(s) = \pi^*(s, R(s), X(s))$  y  $C(s) = C^*(s, R(s), X(s))$ .*

*Demostración.* Para simplificar la notación, expresaremos las estrategias óptimas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\pi(s) &= A_1(s)Y(s) + A_2(s), \\ C(s) &= A_3(s)Y(s) + \hat{\eta},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A_1(s) &= \frac{1}{1-p}\sigma^{-1}(s)'\theta(s) + b(s)\sigma^{-1}(s)'\rho(s)\frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))}, \\ A_2(s) &= b(s)\sigma^{-1}(s)'\rho(s)\hat{\eta}h_r(s, R(s)), \\ A_3(s) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-p}}\frac{1}{f(s, R(s))}, \\ Y(s) &= X(s) - \hat{\eta}h(s, R(s)).\end{aligned}$$

Si aplicamos la fórmula de Itô en  $\varphi(t, r, x) := x - \hat{\eta}h(t, r)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}dY &= \varphi_t dt + \varphi_x dX + \frac{1}{2}\varphi_{xx}dXdX + \varphi_r dR + \frac{1}{2}\varphi_{rr}dRdR + \varphi_{xr}dXdR \\ &= -\hat{\eta}h_t dt + dX - \hat{\eta}h_r dR - \frac{1}{2}\hat{\eta}h_{rr}dRdR \\ &= -\hat{\eta}h_t dt + dX - \hat{\eta}h_r [(k_2 - k_1R)dt + b\rho'dW] - \frac{1}{2}\hat{\eta}b^2h_{rr}dt \\ &= dX - \hat{\eta}\left[h_t + (k_2 - k_1R)h_r + \frac{1}{2}b^2h_{rr}\right]dt - \hat{\eta}bh_r\rho'dW.\end{aligned}$$

Notemos que el término dentro de los corchetes aparece en la ecuación diferencial parcial de  $h$  en (5.7). Por lo tanto, la ecuación anterior también la podemos expresar de la siguiente manera,

$$dY = dX - \hat{\eta}\left[Rh + bh_r\rho'\theta - 1\right]dt - \hat{\eta}bh_r\rho'dW.$$

Por otro lado, a partir de la definición de la función auxiliar  $A_2$ , podemos derivar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} A_1(s)' \mu(s) Y(s) - \pi(s)' \mu(s) &= -A_2(s)' \mu(s) = -\hat{\eta} b(s) h_r(s, R(s)) \rho(s)' \theta(s), \\ A_1(s)' \sigma(s) Y(s) - \pi(s)' \sigma(s) &= -A_2(s)' \sigma(s) = -\hat{\eta} b(s) h_r(s, R(s)) \rho(s)'. \end{aligned}$$

Luego, conjuntamente con la ecuación de la riqueza (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} dY &= dX - \hat{\eta}[Rh - 1]dt + A_2' \mu dt + A_2' \sigma dW \\ &= dX - \hat{\eta}[Rh - 1]dt + A_1' \mu Y dt - \pi' \mu dt + A_1' \sigma Y dW - \pi' \sigma dW \\ &= [RX - C]dt - \hat{\eta}[Rh - 1]dt + A_1' \mu Y dt + A_1' \sigma Y dW \\ &= [RX - A_3 Y - \hat{\eta}]dt - \hat{\eta}[Rh - 1]dt + A_1' \mu Y dt + A_1' \sigma Y dW \\ &= [R(X - \hat{\eta}h) - A_3 Y + A_1' \mu Y]dt + A_1' \sigma Y dW \\ &= [R - A_3 + A_1' \mu]Y dt + A_1' \sigma Y dW. \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial estocástica de  $Y$  tiene solución única si es que  $R$ ,  $A_3$  y  $A_1' \mu$  son procesos  $L^1$ , y si  $A_1' \sigma$  es un proceso  $L^2$ .

Como  $R$  es un proceso de Itô con caminos muestrales continuos, también es un proceso  $L^1$ . Además, se ha revisado que  $f(t, R(t))^{-1}$  es un proceso  $L^1$ , por lo que  $A_3$  también lo es. Asimismo, los procesos

$$\begin{aligned} A_1(s)' \mu &= \frac{1}{1-p} |\theta(s)|^2 + b(s) \frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))} \rho(s)' \theta(s), \\ A_1(s)' \sigma &= \frac{1}{1-p} \theta(s)' + b(s) \frac{f_r(s, R(s))}{f(s, R(s))} \rho(s)', \end{aligned}$$

también son procesos  $L^1$  y  $L^2$ , respectivamente, ya que  $b$ ,  $\rho$  y  $\theta$  son funciones acotadas y  $f(t, R(t))^{-1}$  y  $f_r(t, R(t))$  son procesos  $L^4$ .

Por lo tanto, existe una solución de la ecuación diferencial estocástica, la cual está dada por

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y(t) \exp \left( \int_t^s \left[ B_1(u) - \frac{1}{2} |B_2(u)|^2 \right] du + \int_t^s B_2(u) dW(u) \right), \quad s > t, \\ Y(t) &= X(t) - \hat{\eta} h(t, R(t)), \end{aligned}$$

donde  $B_1(u) = R(u) - A_3(u) + A_1(u)' \mu(u)$  y  $B_2(u) = A_1(u)' \sigma(u)$ .

Luego, el proceso  $X$  lo podemos expresar en función de  $Y$  de la siguiente manera:

$$X(s) = Y(s) + \hat{\eta} h(s, R(s)),$$

con lo cual queda demostrado la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de la riqueza.  $\square$



Para verificar el segundo punto, notenemos que

$$\pi^*(s, R(s), X(s))' \sigma(s) = \left[ \frac{1}{1-p} \theta(s)' + b(s) \rho(s)' \frac{f_r(s, r)}{f(s, r)} \right] Y(s) - \hat{\eta} b(s) \rho(s)' h_r(s, R(s)),$$

el cual es un proceso que está compuesto por el producto de funciones acotadas y procesos  $L^\lambda$ , para todo  $\lambda \geq 1$ . Por lo tanto, es un proceso  $L^4$  como se requiere.

## 5.2. Ho-Lee

Bajo el modelo de Ho-Lee, la tasa de interés tiene la siguiente dinámica

$$dR = k_2(t)dt + b(t)d\bar{W},$$

donde  $k_2, b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones determinísticas tales que  $k_2$  es integrable y  $b$  es cuadrado integrable. Al igual que en la sección anterior, asumiremos que  $b$  es una función acotada.

El operador  $\mathcal{A}$  sobre funciones de clase  $C^{1,2,2}$  para formular la ecuación HJB con esta especificación del problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\pi, C} \phi(t, r, x) &= \phi_t + [rx + \pi' \mu(t) - C] \phi_x + \frac{1}{2} |\pi' \sigma(t)|^2 \phi_{xx} \\ &\quad + k_2(t) \phi_r + \frac{1}{2} b(t)^2 \phi_{rr} + b(t) \pi' \sigma(t) \rho(t) \phi_{rx}. \end{aligned}$$

Entonces, si definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} H &= J_t + rx J_x + k_2(t) J_r + \frac{1}{2} b(t)^2 J_{rr}, \\ A(\pi) &= \mu(t)' \pi J_x + \frac{1}{2} |\sigma(t)' \pi|^2 J_{xx} + b(t) \rho(t)' \sigma(t)' \pi J_{rx}, \\ B(C) &= -C J_x + \alpha e^{-\beta t} U(C), \end{aligned}$$

podemos expresar la ecuación HJB de la siguiente manera:

$$H + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \{A(\pi)\} + \sup_{C \geq \hat{\eta}} \{B(C)\} = 0,$$

con condición terminal  $J(T, r, x) = (1 - \alpha) e^{-\beta T} U(x)$ .

Notemos que las funciones  $A$  y  $B$  son iguales a las obtenidas bajo el modelo de Hull-White, por lo que podemos enfocarnos principalmente en la función  $H$ .

Como mencionamos anteriormente, podemos aplicar las relaciones entre las derivadas parciales de  $J$  y su transformada de Legendre,  $\hat{J}$ . Por lo tanto, definimos las siguientes

funciones auxiliares:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= H|_{x=g(t,r,z)} \\
&= \hat{J}_t + rgz + k_2(t)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b(t)^2 \left( \hat{J}_{rr} - \frac{\hat{J}_{rz}^2}{\hat{J}_{zz}} \right) \\
&= \hat{J}_t + rgz + k_2(t)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b(t)^2 \left( \hat{J}_{rr} + \frac{g_r^2}{g_z} \right), \\
\tilde{A} &= A(\pi^*)|_{x=g(t,r,z)} \\
&= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_z - \frac{1}{2}b(t)^2 \frac{g_r^2}{g_z} + b(t)\rho(t)'\theta(t)z g_r, \\
\tilde{B} &= B(C^*)|_{x=g(t,r,z)} \\
&= -C^*(t, r, g(t, r, z))z + \alpha e^{-\beta t} U(C^*(t, r, g(t, r, z))),
\end{aligned}$$

donde  $g(t, r, \cdot)$  es la función inversa de  $J_x(t, r, \cdot)$ .

Como el término  $\frac{1}{2}b(t)^2 g_r^2/g_z$  aparece con signos opuestos en  $\tilde{H}$  y  $\tilde{A}$ , definiremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{J}_t + rgz + k_2(t)\hat{J}_r + \frac{1}{2}b(t)^2 \hat{J}_{rr}, \\
\hat{A} &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_z + b(t)\rho(t)'\theta(t)z g_r,
\end{aligned}$$

de modo que  $\tilde{H} + \tilde{A} + \tilde{B} = \hat{H} + \hat{A} + \hat{B} = 0$ .

Las derivadas de estas funciones con respecto a  $z$  son

$$\begin{aligned}
\hat{H}_z &= \hat{J}_{tz} + rg_z z + rg + k_2(t)\hat{J}_{rz} + \frac{1}{2}b(t)^2 \hat{J}_{rrz} \\
&= -g_t + rg_z z + rg - k_2(t)g_r - \frac{1}{2}b(t)^2 g_{rr}, \\
\hat{A}_z &= -|\theta(t)|^2 z g_z - \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 z^2 g_{zz} + b(t)\rho(t)'\theta(t)(g_r + z g_{rz}), \\
\hat{B}_z &= -\frac{1-p}{q} \alpha^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p}t} z^{-\frac{1}{1-p}} - \hat{\eta}.
\end{aligned}$$

Al igual que el caso anterior, usamos la misma función  $g$  propuesta en (3.21) para resolver

$\hat{H}_z + \hat{A}_z + \hat{B}_z = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_z &= M(t, z) \left[ \frac{\beta}{1-p} f - f_t - \frac{1}{1-p} r f + r f - k_2(t) f_r - \frac{1}{2} b(t)^2 f_{rr} \right] \\
&\quad + \hat{\eta} \left[ -h_t + r h - k_2(t) h_r - \frac{1}{2} b(t)^2 h_{rr} \right] \\
&= M(t, z) \left[ \frac{\beta - rp}{1-p} f - f_t - k_2(t) f_r - \frac{1}{2} b(t)^2 f_{rr} \right] \\
&\quad + \hat{\eta} \left[ -h_t + r h - k_2(t) h_r - \frac{1}{2} b(t)^2 h_{rr} \right], \\
\hat{A}_z &= -M(t, z) \left[ \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f + \frac{p}{1-p} b(t) \rho(t)' \theta(t) f_r \right] + \hat{\eta} b(t) \rho(t)' \theta(t) h_r. \\
\hat{B}_z &= - \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} M(t, z) - \hat{\eta},
\end{aligned}$$

donde  $f, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones por determinar tales que  $f(T, r) = h(T, r) = 1$  y  $M : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función auxiliar dada por

$$M(t, z) = \frac{1-p}{q} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}} e^{-\frac{\beta}{1-p} t} z^{-\frac{1}{1-p}}.$$

Ya que se está usando la misma función  $g, J$  (y por consiguiente también  $\pi^*$  y  $C^*$ ) bajo el modelo de Ho-Lee solo se diferencia en las funciones  $f$  y  $h$ , las cuales en este caso deben resolver los siguientes problemas de valor terminal:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\beta - rp}{1-p} - \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 \right] f - f_t - \left[ \frac{p}{1-p} b(t) \rho(t)' \theta(t) - k_2(t) \right] f_r \\
&\quad - \frac{1}{2} b(t)^2 f_{rr} = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \tag{5.15a}
\end{aligned}$$

$$f(T, r) = 1, \tag{5.15b}$$

$$f(t, r) > 0, \tag{5.15c}$$

y

$$r h - h_t - [b(t) \rho(t)' \theta(t) - k_2(t)] h_r - \frac{1}{2} b(t)^2 h_{rr} = 1 \tag{5.16a}$$

$$h(T, r) = 1, \tag{5.16b}$$

$$h(t, r) > 0. \tag{5.16c}$$

Notemos que el corolario 3.1.4 no es aplicable para estos problemas de valor terminal ya que el término  $A_4$  es igual a 0 en ambos casos. Por lo tanto, planteamos el siguiente lema.

**Lema 5.2.1.** *Sea  $\tau \in [0, T]$ . Supongamos que tenemos el siguiente problema homogéneo*

de valor terminal:

$$\begin{aligned} [A_1(t) + A_2r]y + y_t + A_3(t)y_r + A_4(t)y_{rr} &= 0, \\ y(\tau, r) &= 1, \\ y(t, r) &> 0, \end{aligned}$$

donde  $A_1, A_3, A_4 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones integrables y  $A_2 \in \mathbb{R}$  es una constante.

Entonces,

$$y(t, r) = e^{B(t)+D(t)r},$$

donde  $B, D : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones tales que  $B(\tau) = D(\tau) = 0$ , es solución del problema de valor terminal si

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_t^\tau [A_1(s) + A_3(s)D(s) + A_4(s)D(s)^2] ds, \\ D(t) &= A_2(\tau - t), \end{aligned}$$

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned} y_t(t, r) &= [B_t(t) + D_t(t)r] y(t, r), \\ y_r(t, r) &= D(t)y(t, r), \\ y_{rr}(t, r) &= D(t)^2 y(t, r). \end{aligned}$$

Reemplazando estas igualdades en la ecuación diferencial del problema de valor terminal, tenemos que

$$[A_1(t) + A_2r]y + [B_t(t) + D_t(t)r]y + A_3(t)D(t)y + A_4(t)D(t)^2y = 0.$$

Como  $y > 0$ , este se puede cancelar de la ecuación anterior, con lo que se obtiene

$$A_1(t) + B_t(t) + A_3(t)D(t) + A_4(t)D(t)^2 + r[A_2 + D_t(t)] = 0. \quad (5.17)$$

Ya que  $r$  puede tomar cualquier valor en  $\mathbb{R}$ , la expresión dentro de los corchetes debe ser igual a 0. Por lo tanto:

$$D(t) = A_2(\tau - t).$$

Por último, integrando de  $t$  a  $\tau$  en (5.17), obtenemos

$$B(t) = \int_t^\tau [A_1(s) + A_3(s)D(s) + A_4(s)D(s)^2] ds.$$

□

Con este resultado y el lema 3.1.2, obtenemos las siguientes soluciones de  $f$  y  $h$ :

$$\begin{aligned} f(t, r) &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} \int_t^T e^{D_1(t,\tau)+D_2(t,\tau)r} d\tau + e^{D_1(t,T)+D_2(t,T)r}, \\ D_1(t, \tau) &= \int_t^\tau \left( \frac{p}{1-p} b(s)\theta(s)' \rho(s) + k_2(s) \right) D_2(s, \tau) ds \\ &\quad + \int_t^\tau \left( \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(s)|^2 - \frac{\beta}{1-p} \right) ds + \frac{1}{2} \int_t^\tau b(s)^2 D_2(s, \tau)^2 ds, \\ D_2(t, \tau) &= -\frac{p}{1-p} (\tau - t). \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} h(t, r) &= \int_t^T e^{D_3(t,\tau)+D_4(t,\tau)r} d\tau + e^{D_3(t,T)+D_4(t,T)r}, \\ D_3(t, \tau) &= \int_t^\tau (-b(s)\theta(s)' \rho(s) + k_2(s)) D_4(s, \tau) ds + \frac{1}{2} \int_t^\tau b(s)^2 D_4(s, \tau)^2 ds, \\ D_4(t, \tau) &= \tau - t. \end{aligned}$$

Luego, podemos definir la función  $J$  de la siguiente manera:

$$J(t, r, x) = (1-\alpha)e^{-\beta t} U(\delta(t, r, x)) f(t, r)^{1-p}, \quad (5.18)$$

donde  $\delta(t, r, x) = x + \hat{\eta}(1 - h(t, r))$ .

Para demostrar que  $J$  resuelve la ecuación HJB, podemos utilizar algunos de los resultados hallados en la sección anterior debido a la similitud en las funciones  $A$  y  $B$ .

**Proposición 5.2.2.** *La función  $J$  definida en (5.18) resuelve la ecuación HJB del problema de inversión-consumo bajo el modelo de Ho-Lee.*

*Demostración.* Al igual que en los casos anteriores, la función  $J$  cumple con la condición terminal de la ecuación HJB:

$$\begin{aligned} J(T, r, x) &= (1-\alpha)e^{-\beta T} U(\delta(T, r, x)) f(T, r)^{1-p} \\ &= (1-\alpha)e^{-\beta T} U(x + \hat{\eta} - \hat{\eta}h(T, r)) \\ &= (1-\alpha)e^{-\beta T} U(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, para probar que  $J$  satisface

$$H + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \{A(\pi)\} + \sup_{C \geq \hat{\eta}} \{B(C)\} = 0,$$

es suficiente con verificar que  $H + A(\pi^*) + B(C^*) = 0$ , puesto que  $J_{xx} < 0$ .

Como las funciones  $A$  y  $B$  son equivalentes a los hallados en la sección anterior, exceptuando solo las diferencias dadas por las funciones  $f$  y  $h$ , tenemos que también cumplen las igualdades en (5.10) y (5.11).

Por otro lado, en la proposición 3.2.4 encontramos varias expresiones para las derivadas de  $J$  en términos de  $f$  y  $h$  que también podemos emplear en esta demostración. De este

modo, y si para simplificar la notación escribimos  $\delta$  en vez de  $\delta(t, r, x)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} H - rxJ_x - \frac{1}{2}b(t)^2J_{rr} &= J_t + k_2(t)J_r \\ &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ -\frac{\beta}{1-p}f + f_t + k_2(t)f_r \right] \\ &\quad - \hat{\eta}J_x [h_t + k_2(t)h_r], \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde  $Z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función auxiliar dada por  $Z(t) = (1 - \alpha)e^{-\beta t}$ . Finalmente, si sumamos las igualdades en (5.19), (5.10) y (5.11), obtenemos

$$\begin{aligned} H + A(\pi^*) + B(C^*) &= (1-p)Z(t)U(\delta)f^{-p} \left[ -\frac{\beta}{1-p}f + f_t + k_2(t)f_r + \frac{p}{2(1-p)^2}|\theta(t)|^2f \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}b(t)^2f_{rr} + \frac{p}{1-p}b(t)\rho(t)'\theta(t)f_r + \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}} + \frac{rp}{1-p}f \right] \\ &\quad - \hat{\eta}J_x \left[ h_t + k_2(t)h_r + \frac{1}{2}b(t)^2h_{rr} - b(t)\rho(t)'\theta(t)h_r + 1 - rh \right]. \end{aligned}$$

Notemos que las expresiones dentro de los corchetes coinciden exactamente con las ecuaciones diferenciales de  $f$  y  $h$  en (5.15) y (5.16), respectivamente. En consecuencia, estos términos son iguales a 0, por lo que  $H + A(\pi^*) + B(C^*) = 0$ .  $\square$

Luego, como  $A$  y  $B$  son equivalentes a los hallados en la sección anterior, tenemos que  $\pi^*$  y  $C^*$  cumplen las igualdades definidas en (5.12) y (5.13), respectivamente.

Entonces, como las diferencias con el modelo de Hull-White solo se presentan en las funciones  $f$  y  $h$ , es suficiente con verificar que estas funciones también cumplen lo propuesto en el corolario 3.1.4 para utilizar el teorema de verificación propuesto bajo el modelo de Vasicek.

De esta manera, notemos que bajo el modelo de Ho-Lee,  $R$  también es un proceso gaussiano con media y varianza dadas por

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= R(0) + \int_0^t k_2(s)ds, \\ Var[R(t)] &= \int_0^t b^2(s)ds. \end{aligned}$$

(por ejemplo, ver [10]). Dado que la media es una función continua en  $t$ , existe una cota superior sobre  $[0, T]$ . Además,  $Var[R(t)] \leq Var[R(T)]$  para cualquier  $t \leq T$ .

Por otro lado, notemos que  $D_2$  y  $D_4$  son funciones lineales, por lo que son monótonas con respecto a  $t$  y  $\tau$ . Además,  $D_2$  retorna valores no positivos y  $D_4$ , valores no negativos. Por consiguiente, el corolario 4.0.10 también se cumple bajo el modelo de Ho-Lee.

## Capítulo 6

# Simulación numérica

En el presente capítulo desarrollaremos una alternativa para simular la riqueza del individuo bajo la estrategia óptima. En la primera parte se describe el procedimiento para obtener un proceso más práctico de simular que la riqueza  $X$ , y en la segunda parte se exponen los resultados numéricos que se obtienen al utilizar el método de Euler-Maruyama.

### 6.1. Metodología

Recordemos que la riqueza  $X$  bajo la estrategia óptima con el modelo de Vasicek cumple la siguiente relación hallada en (4.5):

$$X(s) = Y(s) - \hat{\eta}h(s, R(s)),$$

donde  $Y$  es un proceso con la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} dY &= A_1(t, R)Y dt + A_2(t, R)Y dW, \\ A_1(t, r) &= r + \frac{1}{1-p} |\theta(t)|^2 + \frac{1}{f(t, r)} [b\rho(t)\theta(t)f_r(t, r) - K], \\ A_2(t, r) &= \frac{1}{1-p} \theta(t)' + b \frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} \rho(t)', \\ K &= \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-p}}. \end{aligned}$$

Para simular la riqueza  $X$ , no obstante, resulta complicado usar directamente  $Y$  debido a la presencia de términos no lineales en  $A_1$  y  $A_2$ , los cuales deberían cumplir la condición de crecimiento lineal en  $r$  para poder usar un método numérico de discretización como el de Euler-Maruyama (por ejemplo, ver [10]). Por este motivo, primero buscaremos un proceso más simple de simular y que guarde una relación algebraica con  $Y$ .

Primero, observemos que

$$\begin{aligned} d \ln(Y) &= \frac{1}{Y} dY - \frac{1}{2} \frac{1}{Y^2} dY dY \\ &= \left[ A_1(t, R) - \frac{1}{2} |A_2(t, R)|^2 \right] dt + A_2(t, R) dW. \end{aligned}$$

De esta manera, como

$$|A_2(t, r)|^2 = \frac{1}{(1-p)^2} |\theta(t)|^2 + \frac{2}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) \frac{f_r(t, r)}{f(t, r)} + b^2 \frac{f_r(t, r)^2}{f(t, r)^2}$$

y recordando la ecuación diferencial que cumple  $f$  en (3.22a), se tiene que

$$\begin{aligned} & A_1(t, r) - \frac{1}{2} |A_2(t, r)|^2 + \frac{1}{2} b^2 \frac{f_r(t, r)^2}{f(t, r)^2} \\ &= r + \frac{1-2p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 - \frac{1}{f(t, r)} \left[ \frac{p}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) f_r(t, r) + K \right] \\ &= r + \frac{1}{2(1-p)} |\theta(t)|^2 - \frac{1}{f(t, r)} \left[ \frac{p}{1-p} b\rho(t)' \theta(t) f_r(t, r) + \frac{p}{2(1-p)^2} |\theta(t)|^2 f(t, r) + K \right] \\ &= r + \frac{1}{2(1-p)} |\theta(t)|^2 - \frac{\beta - rp}{1-p} + \frac{1}{f(t, r)} \left[ f_t(t, r) + k_1(k_2 - r) f_r(t, r) + \frac{1}{2} b^2 f_{rr}(t, r) \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \left[ r - \beta + \frac{1}{2} |\theta(t)|^2 \right] + \frac{1}{f(t, r)} \left[ f_t(t, r) + k_1(k_2 - r) f_r(t, r) + \frac{1}{2} b^2 f_{rr}(t, r) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, denotemos  $F = f(s, R(s))$ , el cual es un proceso estocástico estrictamente positivo y con la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} dF &= f_t dt + f_r dR + \frac{1}{2} f_{rr} dR dR \\ &= \left[ f_t + k_1(k_2 - R) f_r + \frac{1}{2} b^2 f_{rr} \right] dt + b f_r \rho' dW. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d \ln(F) &= \frac{1}{F} dF - \frac{1}{2} \frac{1}{F^2} dF dF \\ &= \frac{1}{f} \left[ f_t + k_1(k_2 - R) f_r + \frac{1}{2} b^2 f_{rr} \right] dt - \frac{1}{2} b^2 \frac{f_r^2}{f^2} dt + b \frac{f_r}{f} \rho' dW. \end{aligned}$$

Notemos que hay varios términos en común entre las dinámicas de  $\ln(Y)$  y  $\ln(F)$ . Más aún,

$$d \ln(Y) - d \ln(F) = \frac{1}{1-p} \left[ R - \beta + \frac{1}{2} |\theta(t)|^2 \right] dt + \frac{1}{1-p} \theta(t)' dW.$$

Luego, si denotamos  $Z = (1-p)[\ln(Y) - \ln(F)]$ , tenemos

$$dZ = \left[ R - \beta + \frac{1}{2} |\theta(t)|^2 \right] dt + \theta(t)' dW$$

En resumen, se tiene que

$$X(s) = \exp \left( \frac{Z(s)}{1-p} + \ln(f(s, R(s))) \right) - \hat{\eta} h(s, R(s)),$$

por lo que podemos simular la riqueza bajo la estrategia óptima a partir de las simulaciones de los procesos  $Z$  y  $R$ .

Para fines prácticos, supongamos que  $\rho$  y  $\theta$  son funciones constantes. Entonces, bajo el



esquema de Euler-Maruyama, podemos aproximar  $Z$  y  $R$  de la siguiente manera:

$$Z(t + \Delta t) \approx Z(t) + \left[ R(t) - \beta + \frac{1}{2}|\theta|^2 \right] \Delta t + \theta' [W(t + \Delta t) - W(t)],$$

$$R(t + \Delta t) \approx R(t) + k_1(k_2 - R(t))\Delta t + b\rho' [W(t + \Delta t) - W(t)].$$

## 6.2. Resultados

Para realizar el ejercicio de simulación utilizamos el language de programación Python. En particular, se usaron las librerías Numpy y Scipy para generar números aleatorios con distribución normal y para calcular numéricamente las integrales en las funciones  $f$  y  $h$ . Los valores de los parámetros que se usaron en la simulación son los siguientes:

- Problema de inversión-consumo:  $T = 1$ ,  $\alpha = 0.70$ ,  $\beta = 0.05$  y  $X(0) = 100$ .
- Dinámica de la tasa de interés:  $k_1 = 0.02$ ,  $k_2 = 0.05$ ,  $b = 0.02$ ,  $R(0) = 0.05$  y, para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.80 \end{bmatrix}.$$

- Dinámicas de los precios de los activos riesgosos: para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.18 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t) = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.25 \\ 0.25 & 0.45 \end{bmatrix}.$$

- Función de utilidad:  $p = -0.50$ ,  $q = 3$  y  $\eta = 0.60$ .

Se simularon 1000 caminos muestrales, con un tamaño de paso  $\Delta t = 0.01$ , de la riqueza  $X$  del inversionista bajo la estrategia óptima. Los diez primeros caminos muestrales de este proceso se presentan en la figura 6.1 y la evolución de los estadísticos descriptivos calculados con el total de los caminos muestrales en la figura 6.2.

Un punto importante a resaltar es que la riqueza presenta, en promedio, una tendencia negativa, pero no llega a ser igual a 0, incluso hasta el instante  $T$ .

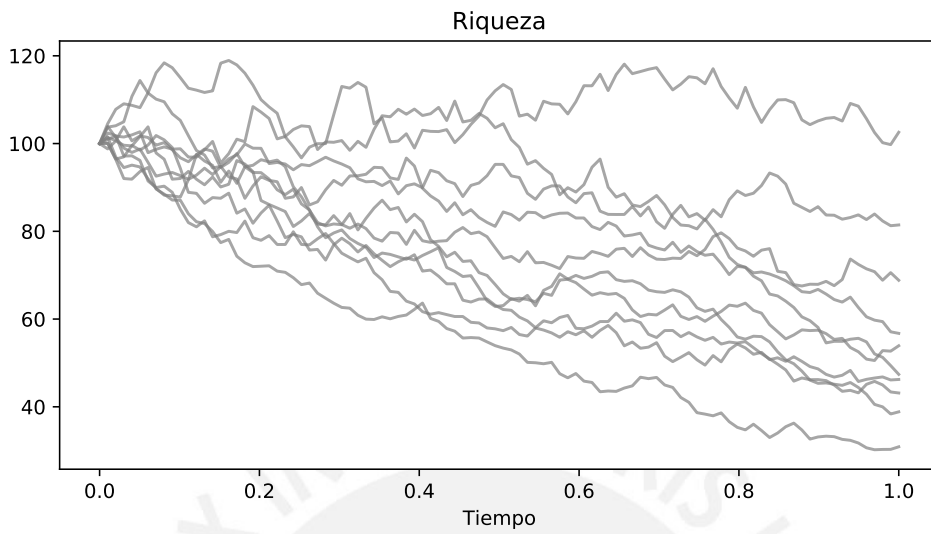


Figura 6.1: Caminos muestrales

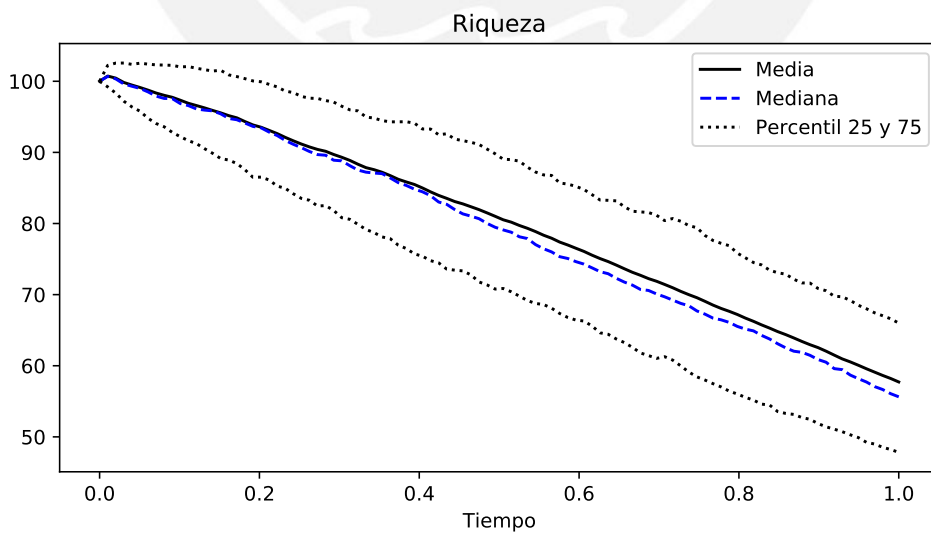


Figura 6.2: Estadísticos descriptivos

## Capítulo 7

# Conclusiones

En esta tesis aplicamos la teoría de control óptimo estocástico para resolver el problema de inversión-consumo, el cual consiste en maximizar la utilidad que obtiene un inversionista durante un periodo finito de tiempo por su consumo en cada instante de tiempo, y por su riqueza al final del periodo, cantidades que son descontadas con una tasa de descuento constante. Además, el inversionista puede invertir en un activo libre de riesgo con retornos iguales a una tasa de interés estocástica, o en activos riesgosos, cuyos retornos son desconocidos anticipadamente.

Primero encontramos una función que resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) del problema inversión-consumo bajo el modelo de tasa de interés de Vasicek. La fórmula de nuestra solución es diferente a la hallada por Chang y Chang en [4] ya que en este trabajo empleamos el principio de Duhamel para resolver las ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas que se presentan al utilizar la transformada de Legendre. Además, este punto también impacta en la estrategia óptima de inversión y de consumo ya que dependen de las funciones que resuelven estas ecuaciones diferenciales.

Seguidamente, demostramos detalladamente que la estrategia óptima es una estrategia admisible, lo cual no solamente implica verificar que existe una solución única para la ecuación diferencial estocástica de la riqueza, sino que los valores de la estrategia óptima de consumo y de la riqueza pertenecen a los dominios de las funciones en las que se evalúan. La demostración de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de la riqueza lo conseguimos expresando la riqueza como la suma de un proceso estocástico exponencial, cuya ecuación diferencial estocástica es más simple de resolver, y un proceso adicional que depende de la tasa de interés. Merton en [15] también emplea una expresión similar para obtener la ecuación de la riqueza bajo la estrategia óptima, lo cual le permite concluir que la riqueza en cada instante del tiempo tiene una distribución lognormal “desplazada”. Lo mismo no se puede concluir del problema estudiado ya que en nuestro caso la tasa de interés es estocástica, lo cual añade más complejidad a la distribución de la riqueza además de desplazar el rango de la distribución del proceso estocástico exponencial.

Luego, probamos con un teorema de verificación que la solución a la ecuación HJB equivale a la función de valor del problema de inversión-consumo, y que bajo la estrategia óptima se puede alcanzar este supremo. Para esto fue necesario demostrar que ciertas derivadas parciales de la función que resuelve la ecuación HJB son procesos  $L^2$  o  $L^4$ . Las demostra-

ciones de estas propiedades se agilizan al observar que podemos expresar dichas derivadas como la suma y producto de procesos estocásticos exponenciales, los cuales resultan ser procesos  $L^\lambda$  para todo  $\lambda \geq 1$ .

Por otro lado, también conseguimos resolver el problema de inversión-consumo cuando cambiamos el modelo de tasa de interés por el modelo de Hull-White o de Ho-Lee. Los resultados son similares a los obtenidos bajo el modelo Vasicek ya que la tasa de interés sigue siendo un proceso gaussiano, las ecuaciones diferenciales parciales que se obtienen al usar la transformada de Legendre son parecidas, y las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son la base para construir la solución de la ecuación HJB y la estrategia óptima. En particular, bajo el modelo de Hull-White los resultados se extienden naturalmente ya que este modelo se puede considerar como una generalización del modelo de Vasicek en el que se emplean funciones determinísticas en vez de constantes. En cambio, bajo el modelo de Ho-Lee, algunas funciones pasan a ser lineales en vez de exponenciales, lo cual se debe a la ausencia de la tasa de interés en el componente de tendencia de su ecuación diferencial estocástica.

Por último, si bien la expresión que se obtuvo al resolver la ecuación de la riqueza bajo la estrategia óptima simplificó la demostración del teorema de verificación, resulta complicado obtener resultados de su distribución en el tiempo con esta formulación. Asimismo, no es posible simular caminos muestrales utilizando algún método numérico clásico de discretización debido a que se utilizan funciones que no cumplen la condición de crecimiento lineal. Por esta razón, se consiguió una segunda manera de expresar la riqueza en términos de procesos estocásticos que son más simples de simular.

# Bibliografía

- [1] Yacine Aït-Sahalia, Julio Cacho-Diaz y Tom Hurd. “Portfolio choice with jumps: A closed-form solution”. En: *The Annals of Applied Probability* 19.2 (2009), págs. 556-584.
- [2] Fred Benth, Kenneth Karlsen y Kristin Reikvam. “Merton’s portfolio optimization problem in a Black and Scholes market with non-Gaussian stochastic volatility of Ornstein-Uhlenbeck type”. En: *Mathematical Finance* 13.2 (2003), págs. 215-244.
- [3] Damiano Brigo y Fabio Mercurio. *Interest rate models - theory and practice*. Springer Finance. Springer, 2006.
- [4] Hao Chang y Kai Chang. “Optimal consumption–investment strategy under the Vasicek model: HARA utility and Legendre transform”. En: *Insurance: Mathematics and Economics* 72 (2017), págs. 215-227.
- [5] Hao Chang y Xi-min Rong. “An investment and consumption problem with CIR interest rate and stochastic volatility”. En: *Abstract and Applied Analysis* (2013).
- [6] Lawrence Evans. *Partial differential equations*. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [7] Wendell Fleming y Daniel Hernández-Hernández. “An optimal consumption model with stochastic volatility”. En: *Finance and Stochastics* 7 (2003), págs. 245-262.
- [8] Wendell Fleming y Halil Soner. *Controlled markov processes and viscosity solutions*. Vol. 25. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2006.
- [9] Nils Framstad, Bernt Øksendal y Agnès Sulem. “Optimal consumption and portfolio in a jump diffusion market with proportional transaction costs”. En: *Journal of Mathematical Economics* 35.2 (2001), págs. 233-257.
- [10] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Vol. 53. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2003.
- [11] Martino Grasselli. “A stability result for the HARA class with stochastic interest rates”. En: *Insurance: Mathematics and Economics* 33.3 (2003), págs. 611-627.
- [12] Ralf Korn y Holger Kraft. “A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates”. En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 40.4 (2002), págs. 1250-1269.
- [13] Holger Kraft. “Optimal portfolios and Heston’s stochastic volatility model: An explicit solution for power utility”. En: *Quantitative Finance* 5.3 (2005), págs. 303-313.

- [14] Harry Markowitz. “Portfolio selection”. En: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), págs. 77-91.
- [15] Robert C Merton. “Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model”. En: *Journal of Economic Theory* 3.4 (1971), págs. 373-413.
- [16] Robert C. Merton. “Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case”. En: *The Review of Economics and Statistics* (1969), págs. 247-257.
- [17] Claus Munk y Carsten Sørensen. “Optimal consumption and investment strategies with stochastic interest rates”. En: *Journal of Banking & Finance* 28.8 (2004), págs. 1987-2013.
- [18] Marek Musiela y Marek Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*. Vol. 36. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2005.
- [19] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer, 2003.
- [20] Huyên Pham. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*. Vol. 61. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2009.
- [21] Traian A. Pirvu y Huayue Zhang. “Investment–consumption with regime-switching discount rates”. En: *Mathematical Social Sciences* 71 (2014), págs. 142-150.
- [22] Jianfeng Zhang. *Backward stochastic differential equations: from linear to fully non-linear theory*. Vol. 86. Probability Theory and Stochastic Modelling. Springer, 2017.