

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



El Browniano Fraccionario y el Cálculo de Malliavin en las
Finanzas Cuantitativas

Tesis para obtener el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas con
mención en Procesos Estocásticos que presenta:

Abraham Alonso Soldevilla Cueva

Asesor:

Elisa Alos Alcalde

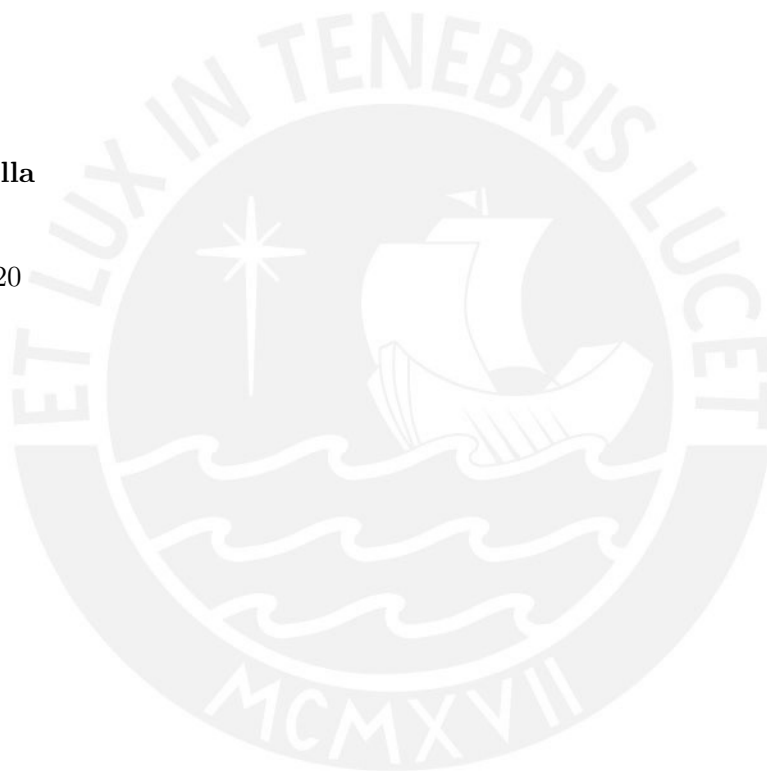
Lima, 2021

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi asesora Elisa Álos por todo el apoyo brindado. Así como a mis padres y hermano por siempre motivarme a seguir avanzando.

Abraham Soldevilla

Lima, August 9, 2020



Abstract

We can define "Quantitative Finance" as the branch of finance that develop and/or implement complex mathematical models, which are used by financial firms to make decisions about risk management, future investments and pricing of new financial products. The objective in this research is to show which mathematical objects are used in quantitative finance for derivatives pricing. My main focus are the stochastic process known as Fractional Brownian Motion and the elements from Malliavin Stochastic Calculus. Given that my goal is to show how several mathematical objects and their context are applied in quantitative finance, I replicate three results about volatility derivatives from Peter Carr and Roger Lee publication "Volatility Derivatives[8]" and evaluate them using simulation exercises and Malliavin Calculus, following the work published in 2019 by Elisa Àlos and Kenichiro Shiraya with the name "Estimating the Hurst parameter from short term volatility swaps: a Malliavin calculus approach[3]".

Resumen

Podemos definir "Finanzas cuantitativas" como la rama de las finanzas donde se desarrollan e implementan modelos matemáticos complejos, los cuales usarán las empresas para tomar decisiones sobre la gestión de riesgos, futuras inversiones y los precios de nuevos productos financieros. El objetivo de la investigación es presentar el Movimiento Browniano Fraccionario y Elementos del Cálculo de Malliavin en su uso para determinar el precio de los derivados financieros. Con el fin de mostrar como son aplicados diversos objetos matemáticos y sus contextos en las Finanzas cuantitativas replico los tres resultados sobre derivados de volatilidad propuestos en 2009 por Peter Carr y Roger Lee en su publicación titulada "Volatility Derivatives[8]", los cuales se evalúan mediante ejercicios de simulación y utilizando el cálculo de Malliavin, siguiendo el trabajo de Elisa Àlos y Kenichiro Shiraya titulado "Estimating the Hurst parameter from short term volatility swaps: a Malliavin calculus approach[3]".

Contenido

Lista de Figuras	III
Lista de Tablas	IV
1 Introducción	1
2 El movimiento Browniano fraccionario	3
2.1 La función de autocovarianza de los incrementos	4
2.2 Métodos para simular trayectorias de fBm	6
2.2.1 El método de Hosking	6
2.2.2 El método de Cholesky	9
2.2.3 El método de Davies y Harte	10
2.2.4 Simulación de trayectorias de fBm	13
3 Nociones elementales sobre el Cálculo de Malliavin	14
3.1 La derivada de Malliavin	14
3.2 La derivada de Malliavin en integrales estocásticas	15
3.3 La integral de Skorokhod	17
3.4 Propiedades básicas del Cálculo de Malliavin	17
3.5 La fórmula de Clark Ocone	18
3.6 La conmutatividad de la derivada de Malliavin y el operador de esperanza condicional	19
3.7 Aplicación: Cálculo del Delta en el modelo SABR	20
4 Conceptos previos a los derivados de volatilidad	24
4.1 Nociones elementales sobre el modelo de Black and Scholes	24

4.2	Introducción a los modelos de volatilidad estocástica	25
4.3	Algunos modelos de volatilidad estocástica	27
4.3.1	El modelo de Heston	27
4.3.2	El modelo SABR	29
4.3.3	Los modelos de volatilidad fraccionaria	30
4.4	Introducción a los derivados de volatilidad	30
5	Los resultados de Carr y Lee (2009)	32
5.1	Un portafolio de cobertura que replique la varianza observada al vencimiento	32
5.1.1	El primer resultado: El orden de error de tercer orden al replicar discretamente la varianza realizada	33
5.1.2	Evaluación del primer resultado	36
5.2	El Strike del VAS y su relación con las varianzas implícitas	39
5.2.1	El segundo resultado: El Strike del VAS como un promedio ponderado de varianzas implícitas	41
5.2.2	Evaluación del segundo resultado	44
5.3	El Strike del VOS y su relación con la volatilidad implícita At The Money (ATM).	45
5.3.1	El tercer resultado: La aproximación de Carr y Lee.	45
5.3.2	Sobre el término de error en la aproximación de Carr y Lee.	48
5.3.3	Ejemplo: El orden de convergencia del error en el modelo SABR	51
5.3.4	Evaluación del tercer resultado	53
6	Extensión del tercer resultado	55
7	Conclusiones	59
8	Bibliografía	60
A	Métodos Generales para discretizar EDE	62
B	Métodos numéricos usados para determinar el precio de las opciones	64
C	Código en Python	67

Lista de Figuras

2.1	Función de autocovarianzas de X_t con índice Hurst de 0.1, 0.5 y 0.8	5
2.2	Varianza de X_t con índice Hurst de 0.1, 0.5 y 0.8	5
2.3	Trayectorias de un fBm con índice Hurst 0.1 y 0.5	13
2.4	Trayectorias de un fBm con índice Hurst 0.9 y 0.5	13
5.1	Sendas del precio forward y de la varianza instantanea del Modelo de Heston	37
5.2	Comparación entre la medida moneyness y y la medida moneyness x	43
5.3	Volatilidad implícita y precios de las opciones calculadas con el Modelo SABR	44

Lista de Tablas

5.1	Evaluación del primer resultado para diferentes vencimientos (Elaboración propia)	37
5.2	Error promedio del primer resultado para diferentes vencimientos (Elaboración propia)	38
5.3	Evaluación del primer resultado para diferentes distancias entre Strikes (Elaboración propia)	38
5.4	Error promedio del primer resultado para diferentes distancias entre Strikes (Elaboración propia)	38
5.5	Evaluación del segundo resultado para diferentes distancias entre Strikes (Elaboración propia)	45
5.6	Evaluación del tercer resultado usando el modelo SABR (Elaboración propia)	53
5.7	Evaluación del tercer resultado usando un modelo de volatilidad fraccionaria (Elaboración propia)	54
6.1	Evaluación de la aproximación de Rolloos y Arslan usando el modelo SABR (Elaboración propia)	58

Lista de códigos

1	Obtener una senda de movimiento Browniano estandar	6
2	Obtener una senda de fBm usando el método de Hosking	8
3	Obtener una senda de fBm usando el método de Choleski	9
4	Obtener una senda de fBm usando el método de Davies y Harte	12
5	Calcular el precio de una opción europea con la formula de Black	25
6	Cálcular el precio de la opción europea con el modelo de Heston	28
7	Cálcular el skew de volatilidad con la fórmula de Hagan	29
8	Código para testear el primer resultado de Carr y Lee	35
9	Código para testear el primer resultado de Carr y Lee	36
10	Código para calcular el Strike del Variance Swap con opciones OTM	40
11	Código para calcular el Strike del Variance Swap con varianzas implícitas	43



Índice de Símbolos

Símbolo	Descripción
$L^2[0, T]$	Espacio de Hilbert en $[0, T]$ de funciones determinísticas cuadrado integrables
(Ω, \mathcal{F}, P)	Espacio de probabilidad
$L^2[\Omega]$	Espacio de variables aleatorias cuadrado integrables en Ω
$L^2([0, \infty] \times \Omega)$	Espacio de procesos estocásticos cuadrado integrables definidos en $[0, \infty] \times \Omega$
C^1	Conjunto de funciones continuamente diferenciables
C_b^1	Conjunto de funciones continuamente diferenciables con derivadas parciales acotadas
W	Movimiento Browniano estandar definido en (Ω, \mathcal{F}, P)
W^H	Movimiento Browniano fraccionario (fBm) con índice Hurst $H \in (0, 1)$ definido en (Ω, \mathcal{F}, P)
\mathcal{F}_t	Filtración aumentada generada por W_t
$\gamma_H(n)$	Función de autocovarianzas del incremento de un fBm evaluado en t y $t + n$, con $n \geq 0$
$N(\cdot)$	Función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estandar
$n(\cdot)$	Función de densidad de una variable aleatoria normal estandar
$D_t F$	Derivada de Malliavin de F en t
$\mathbb{D}^{1,2}$	Espacio de Banach dado por la clausura de la clase de variables aleatorias cuadrado integrables de forma $F = F(W(\omega))$ con respecto a la norma: $\ F\ _{1,2} = (E(F^2) + E(\int_0^T (D_t F)^2 dt))^{0.5}$
$\delta[U]$	Integral estocástica de Skorokhod del proceso $U \in L^2([0, \infty] \times \omega)$
$Dom \delta$	Dominio de δ definido por el conjunto $Dom \delta := \{U \in L^2([0, T] \times \Omega) : E[\langle D_t F, U \rangle] \leq c\ F\ _2, \forall F \in \mathbb{D}^{1,2} \text{ y } c(U) > 0\}$

Símbolo	Descripción
V_t	Precio de una opción en el periodo t
K	Precio umbral constante establecido en el contrato de la opción, en la industria lo denominan precio Strike o simplemente Strike
$BS(K, \dots)$	Formula de Black y Scholes, depende de varios parámetros, incluido K
$Black(K, \dots)$	Formula de Black y Scholes ajustada para derivados sobre Futuros
$\bar{\sigma}$	Volatilidad realizada según los datos de mercado
σ_t	Volatilidad instantanea teórica, dependiente del modelo elegido
$I(K, \dots)$	Volatilidad implícita obtenida al invertir la formula de Black y Scholes
ATM	Siglas de "At the Money", utilizado para opciones con un Strike igual al precio del subyacente
OTM	Siglas de "Out of the Money", utilizado para opciones sin valor fundamental, solo valor extrínseco
Δ_{BS}	Derivada del precio de una opción respecto al precio del activo subyacente
ν_{BS}	Derivada del precio de una opción respecto a la volatilidad implícita
ν_{aBS}	Derivada del Δ_{BS} de una opción respecto a la volatilidad implícita
ν_{oBS}	Derivada del ν_{BS} de una opción respecto a la volatilidad implícita
VAS_t	Notación usada para el precio del Variance Swap en el period t
K_{var}	Strike del VAS, elegido tal que el precio inicial del VAS sea cero ($VAS_0 = 0$)
VOS_t	Notación usada para el precio del Volatility Swap en el period t
K_{vol}	Strike del VOS, elegido tal que el precio inicial del VOS sea cero ($VOS_0 = 0$)

Capítulo 1

Introducción

Las finanzas cuantitativas son una rama de la teoría financiera donde se utiliza intensivamente tópicos matemáticos como: Cálculo diferencial e integral, Teoría de la medida, Ecuaciones diferenciales, Procesos estocásticos, Cálculo estocástico, entre otros. Uno de los objetivos de las finanzas cuantitativas es determinar el precio de los derivados financieros¹.

Al respecto, el modelo propuesto en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes en la publicación titulada "The Pricing of Options and Corporate Liabilities[5]" marcó la ruta actualmente utilizada en el pricing de los derivados financieros. Después de este hito en la teoría financiera, numerosas investigaciones se han enfocado en determinar el precio justo de diferentes tipos de derivados financieros, siguiendo la metodología propuesta en [5], para satisfacer la demanda de los diferentes clientes institucionales. En ese sentido, a fines de los 90s, los inversionistas institucionales, como grandes bancos y fondos de inversión, empezaron a demandar derivados sobre una medida de la volatilidad promedio futura con el fin de obtener una cobertura ante grandes cambios en la volatilidad esperada, estos instrumentos financieros son conocidos como "derivados de volatilidad", los cuales han sido foco de estudio tanto por la academia como por la industria desde la década del 2000.

El objetivo de esta investigación es servir de puente entre la academia y la industria en lo que respecta a derivados de volatilidad. Por este motivo, se presentan los conceptos más básicos, se explica cómo y por qué son aplicados los diferentes modelos o estrategias en la industria y cada capítulo tiene una serie de Snippets escritos en Python para poder replicar los resultados.

El principal aporte de este trabajo es mostrar cómo y por qué son aplicados en las finanzas cuantitativas el proceso estocástico denominado Movimiento Browniano Fraccionario (fBm, por sus siglas en inglés) y los resultados del cálculo estocástico de Malliavin, todo bajo el contexto de determinar el precio de los derivados de volatilidad.

La estructura de este trabajo es la siguiente.

¹Un derivado financiero F es un activo financiero cuyo precio está definido como una función de los precios de otros activos financieros (X_i), denominados activos subyacentes, y del tiempo restante hasta el vencimiento del contrato ($\tau = T - t$). Cabe precisar que, muchas veces los activos subyacentes se transan en el mercado, por ejemplo la acción de una gran empresa. Sin embargo, también existen activos subyacentes que no se transan en el mercado, por ejemplo la volatilidad de un activo

- En el capítulo dos se define el fBm y se presentan tres métodos para simular las trayectorias de este proceso estocástico.
- En el capítulo tres se introducen los elementos básicos del Cálculo de Malliavin y sus principales resultados. Este capítulo se concluye con una aplicación en las finanzas cuantitativas.
- En el cuarto capítulo, se introduce el modelo clásico de Black Scholes (*BS*, en adelante) y los modelos de volatilidad estocástica, los cuales extienden el modelo *BS* para determinar el precio de derivados más complejos, entre ellos los derivados de volatilidad.
- En el quinto capítulo se replican y evalúan los resultados propuestos en 2009 por Peter Carr y Roger Lee en la publicación titulada "Volatility Derivatives[8]", utilizando datos simulados y el Cálculo de Malliavin, siguiendo el trabajo de Elisa Alòs y Kenichiro Shiraya titulado "Estimating the Hurst parameter from short term volatility swaps: A Malliavin Calculus approach[3]".
- En el sexto capítulo se desarrolla una extensión al tercer resultado de Carr y Lee, propuesta en 2017 por Frido Rollos y Melih Arslan en su publicación "Taylor-Made Volatility Swaps[24]".
- Finalmente, se presentan las conclusiones de esta investigación.

Capítulo 2

El movimiento Browniano fraccionario

El movimiento Browniano fraccionario (fBm, por sus siglas en inglés) es un proceso autosemejante con una estructura Gaussiana, el cual depende de un parámetro $H \in (0, 1)$ denominado índice Hurst. A continuación, se procede a definir este proceso siguiendo a Oksendal et al (2008)[4].

Definición 2.0.1. Sea $H \in (0, 1)$ constante y t, s dos elementos en un conjunto de índices de tiempo. Un fBm $W^H = \{W_t^H\}_{t \geq 0}$ con índice Hurst H es un proceso Gaussiano continuo y centrado con $W_0^H = 0$ y función de autocovarianza

$$\mathbb{E}[W_t^H W_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

Este proceso cuenta con las siguientes propiedades:

1. **Un fBm es un proceso Gaussiano con $\mathbb{E}[W_t^H] = 0$ y $\mathbb{E}[(W_t^H)^2] = t^{2H}$, $\forall t \geq 0$,** porque W_t^H es un proceso Gaussiano centrado y dada la forma de la función de autocovarianza.
2. **Un fBm tiene incrementos estacionarios.** Partiendo de la propiedad anterior, el incremento de el fBm en un intervalo $[s, t]$ tiene una distribución Gaussiana con media zero, varianza $(t - s)^{2H}$ y función de autocovarianzas, para un paso de tiempo $n > 0$ fijo, $\frac{1}{2}((n + 1)^{2H} + (n - 1)^{2H} - 2n^{2H})$. Como la función de autocovarianza no depende de t o s , decimos que este proceso es estacionario en sentido débil (o en covarianzas). En particular, como la distribución finito dimensional de un proceso Gaussiano estacionario en covarianzas está completamente parametrizada por su media y varianza, los incrementos del fBm también son estrictamente estacionarios.
3. **El fBm es un proceso autosemejante.** Es decir, $\forall a > 0$, los procesos $a^{-H}W_{at}^H$ y W_t^H tienen la misma distribución de probabilidad. Esta propiedad se obtiene del hecho de que la función de autocovarianza es homogénea de orden $2H$.
4. **Las trayectorias de un fBm son Holder continuas de orden estrictamente menor que H c.s.** Es decir, para $s < t$, la distancia entre W_t^H y W_s^H será de orden $o(|t - s|^{1/H})$. Esto está vinculado a que tan suave ($H > 0.5$) o ruidosa ($H < 0.5$) es la trayectoria del fBm.

5. Un fBm, definido en el intervalo $[0, T]$, tiene "variación $\frac{1}{H}$ " finita. Es decir, el siguiente límite en probabilidad converge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left| W^H\left(\frac{jT}{n}\right) - W^H\left(\frac{(j-1)T}{n}\right) \right|^{\frac{1}{H}} < \infty$$

En consecuencia, si $H \neq 0.5$ ni el fBm, ni las integrales respecto al mismo, serán semimartingalas, ya que para $H < 0.5$ la variación cuadrática es infinito y para $H > 0.5$ la primera variación es infinita.

Según el índice de Hurst, el fBm puede dividirse en tres categorías: $H < 0.5$, $H = 0.5$ y $H > 0.5$ cuyas diferencias podremos apreciar al evaluar la función de autocovarianza (denotada como $\gamma_H(n)$) de sus incrementos, es decir, la diferencia entre dos puntos en la trayectoria del fBm separados por un paso de tiempo δt ($X_t = W_t^H - W_{t-\delta t}^H$).

2.1 La función de autocovarianza de los incrementos

En esta sección se evalúa la función de autocovarianzas de los incrementos de un fBm con índice Hurst H , la cual, para un paso de tiempo δt , es igual a:

$$\begin{aligned} \gamma_H(n) &= \mathbb{E}[X_t X_{t+n}] \\ &= \mathbb{E}\left[(B^H(t) - B^H(t - \delta t))(B^H(t+n) - B^H(t+n - \delta t))\right] \\ &= \frac{1}{2} \left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H} \right) \text{ si } n > 0 \\ &= (\delta t)^{2H} \text{ si } n = 0 \end{aligned}$$

Notemos que cuando $n \neq 0$, $\gamma_H(n)$ no depende de δt .

En la Figura 2.1 se graficó $\gamma_H(n)$ para $n \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ y $H \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$. Podemos observar que cuando $H > 0.5$ (color azul) el decaimiento de $\gamma_H(n)$ es lento, es decir, los incrementos del fBm con índice Hurst mayor a 0.5 tienen dependencia de largo plazo. En cambio, cuando $H < 0.5$ (color naranja) la persistencia de $\gamma_H(n)$ es menor, es decir, los incrementos del fBm con índice Hurst menor a 0.5 tienen dependencia de corto plazo. Finalmente, cuando $H = 0.5$ (color verde) los incrementos del fBm no están correlacionados.

Por otro lado, en la Figura 2.2 se graficó $\gamma_H(0)$, la varianza de los incrementos $X_t = W_t^H - W_{t+\delta t}^H$, para diferentes pasos de tiempo $\delta t \in [0, 2]$. Podemos observar que la varianza tiene diferentes comportamientos para diferentes valores del índice Hurst. Para $H > 0.5$ (color azul) la varianza de X_t se incrementa a una tasa marginal creciente. En cambio, cuando $H < 0.5$ la varianza se incrementa, pero a una tasa marginal decreciente. Finalmente, cuando $H = 0.5$ la varianza se incrementa de manera constante. Otro punto importante a destacar es que la varianza de X_t es mayor cuando $H < 0.5$ que cuando $H > 0.5$ si $\delta t < 1$, y la situación se revierte cuando $\delta t > 1$.

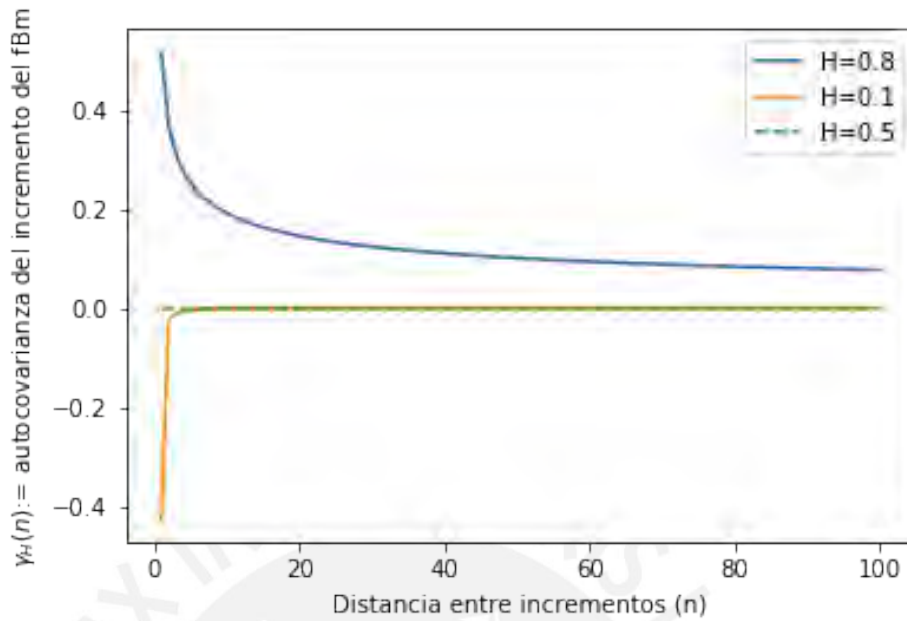


Fig. 2.1: Función de autocovarianzas de X_t con índice Hurst de 0.1, 0.5 y 0.8

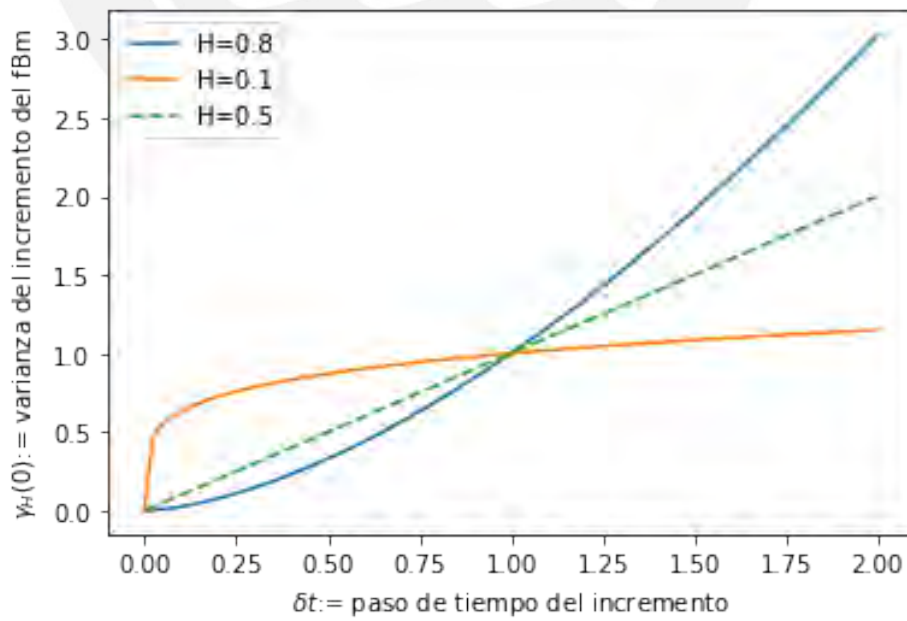


Fig. 2.2: Varianza de X_t con índice Hurst de 0.1, 0.5 y 0.8

2.2 Métodos para simular trayectorias de fBm

Para simular una trayectoria de fBm debemos buscar métodos que capturen su estructura de covarianzas.

Por ejemplo, para simular una senda de Movimiento Browniano Estandar ($H = 0.5$) de tamaño N , tenemos que seguir los siguientes pasos:

- Generar un vector de tamaño N de ruidos gaussianos independientes con media zero y varianza 1 (estos hacen el papel de incrementos en nuestra senda de movimiento Browniano estándar).
- La suma acumulada de estos ruidos gaussianos es nuestra trayectoria Browniana estándar.

Esto es sencillo en cualquier lenguaje de programación, ya que no tenemos que preocuparnos por la estructura de autocovarianzas en un Movimiento Browniano Estandar, ya que es constante e igual a zero. El siguiente fragmento de código en Python prueba mi punto.

```

1  import numpy as np
2
3  def Bm(N,T):
4      ''' Senda de Bm de tamaño N y definida en el indice de tiempo [0,T] '''
5      # Genera un vector de ruidos gaussianos estandar con un incremento de 1
6      gn = np.random.normal(0.0, 1.0, N)
7      # Antes de generar el Bm debemos escalar el ruido gaussiano al time step
8      scale = (1.0 * T / N) ** 0.5
9      gn = gn*scale
10     Bm =np.insert(gn.cumsum(), [0], 0)
11     return Bm

```

Cod. 1: Obtener una senda de movimiento Browniano estandar

Sin embargo, cuando $H \neq 0.5$, obtener el vector de ruidos gaussianos con la estructura de covarianzas adecuada no es trivial.

En esta sección presentaré tres métodos asintóticamente exactos utilizados para obtener estos ruidos gaussianos y posteriormente una trayectoria de un fBm. Esta presentación está basada en el capítulo 3 de [22].

2.2.1 El método de Hosking

El siguiente algoritmo genera un vector de ruidos gaussianos con una estructura de autocovarianza dada. Este vector será denotado como Z , donde $Z_{n+1}|Z_n, \dots, Z_1, Z_0$.

Partimos de la ya conocida función de autocovarianza de los incrementos del fBm con indice Hurst igual a H :

$$\gamma_H(n) = \frac{1}{2} \left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H} \right)$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 2$, tenemos la siguiente relación recursiva para la matriz de autocovarianzas de orden $n + 1$, $\Gamma_n = \{\gamma_H(i - j)\}_{i,j=0,\dots,n}$:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & c_n' \\ c_n & \Gamma_n \end{bmatrix}$$

donde c_n es un vector columna de tamaño $(n+1)$ cuyo k -elemento es igual a

$$c_n[k] = \gamma_H(k + 1), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Antes de continuar, se debe mencionar el siguiente teorema de la distribución normal multivariada:

Teorema 2.2.1. *Todo vector aleatorio normal multivariado Z puede particionarse en dos vectores Z_1 y Z_2 basandonos en su vector media (μ) y su matrix de autocovarianzas (Σ)*

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

La distribución de Z_1 condicional a $Z_2 = a$ es normal multivariada $Z_1|_{Z_2=a} \sim \mathbb{N}(\bar{\mu}, \bar{\Sigma})$ con:

$$\bar{\mu} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(a - \mu_2)$$

$$\bar{\Sigma} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Aplicando el teorema 2.2.1 tenemos que:

$$Z_{n+1}|_{Z_n, \dots, Z_1, Z_0} \sim \mathbb{N}(\mu_{n+1}, \sigma_{n+1}^2), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, N - 2$$

donde,

$$Z_0 \sim \mathbb{N}(0, 1), \quad \mu_{n+1} = c_n' \Gamma_n^{-1} \begin{bmatrix} Z_n \\ \vdots \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{n+1}^2 = 1 - c_n' \Gamma_n^{-1} c_n.$$

Sin embargo, sacar la inversa de Γ_n , para cada n , es muy costoso. Por ello, Hosking propuso calcular Γ_n^{-1} recursivamente.

Una vez se concluye la recursión tenemos nuestro vector de ruidos gaussianos Z de tamaño N con una estructura de covarianzas subyacente adecuada. Vale la pena mencionar que, este algoritmo es aplicable a procesos no estacionarios, aunque no es nuestro caso.

Este método es bastante fácil de implementar; sin embargo, la complejidad del algoritmo tiene orden $O(N^2)$; por lo que es un algoritmo computacionalmente demandante.

El siguiente fragmento de código en Python muestra el procedimiento completo, incluido el algoritmo propuesto por Hosking.

```
1 def autocovariance(k,hurst):
2     """Autocovarianza del ruido gaussiano fraccionario."""
3     cov = 0.5 * (abs(k + 1) ** (2*hurst) + abs(k - 1) ** (2*hurst) - 2 * abs(k) ** (2*hurst))
4     return cov
5
6 def hosking(N,T,hurst):
7     """Genera una senda de fBm utilizando el metodo de Hosking"""
8     gn = np.random.normal(0.0, 1.0, N)
9     fgn = np.zeros(N)
10    phi = np.zeros(N)
11    psi = np.zeros(N)
12    cov = np.array([autocovariance(i,hurst) for i in range(N)])
13
14    # Primer incremento
15    fgn[0] = gn[0]
16    v = 1
17    phi[0] = 0
18
19    # Genera realizaciones de ruidos gaussianos con un incremento de 1
20    for i in range(1, N):
21        phi[i - 1] = cov[i]
22        for j in range(i - 1):
23            psi[j] = phi[j]
24            phi[i - 1] -= psi[j] * cov[i - j - 1]
25        phi[i - 1] /= v
26        for j in range(i - 1):
27            phi[j] = psi[j] - phi[i - 1] * psi[i - j - 2]
28        v *= 1 - phi[i - 1] * phi[i - 1]
29        for j in range(i):
30            fgn[i] += phi[j] * fgn[i - j - 1]
31        fgn[i] += np.sqrt(v) * gn[i]
32
33    # Antes de generar el fBm debemos escalar el ruido gaussiano
34    scale = (1.0 * T / N) ** hurst
35    fgn = fgn*scale
36
37    fBm = np.insert(fgn.cumsum(), [0], 0)
38    return fBm
```

Cod. 2: Obtener una senda de fBm usando el método de Hosking

2.2.2 El método de Cholesky

Este algoritmo se basa en la descomposición de Cholesky, la cual se utiliza en la matriz de autocovarianzas de orden N (Γ), el resultado es el producto de una matrix triangular inferior y su traspuesta:

$$\Gamma = LL'$$

Luego se genera un vector con N ruidos gaussianos estandar independientes V y finalmente, se obtiene el vector de ruidos gaussianos Z con una adecuada estructura de covarianzas al multiplicar el vector V con la matrix triangular inferior L :

$$Z = LV$$

Cabe precisar que, para poder usar este método, la matrix de autocovarianzas Γ debe ser positiva definida para garantizar la no-negatividad de las varianzas. Notar que, la estructura de covarianzas de este proceso está garantizada, ya que:

$$Cov(Z) = Cov(LV) = LCov(V)L' = LL' = \Gamma$$

Este método es bastante fácil de implementar; sin embargo, la complejidad computacional de este algoritmo tiene orden $O(N^3)$; por lo que, es un algoritmo extremadamente demandante computacionalmente. El siguiente fragmento de código en Python prueba mi punto.

```

1 def cholesky(N,T,hurst):
2     """Genera una senda de fBm utilizando el metodo de Choleski"""
3     gn = np.random.normal(0.0, 1.0, N)
4     G = np.zeros([N, N])
5     for i in range(N):
6         for j in range(i + 1):
7             G[i, j] = autocovariance(i - j,hurst)
8     # Descomposicion de Cholesky
9     C = np.linalg.cholesky(G)
10    # Genera un ruido gaussiano con la estructura de covarianza deseada
11    fgn = np.dot(C, np.array(gn).transpose())
12    fgn = np.squeeze(fgn)
13
14    # Antes de generar el fBm debemos escalar el ruido gaussiano
15    scale = (1.0 * T / N) ** hurst
16    fgn = fgn*scale
17
18    fBm =np.insert(fgn.cumsum(), [0], 0)
19    return fBm

```

Cod. 3: Obtener una senda de fBm usando el método de Choleski

2.2.3 El método de Davies y Harte

El método propuesto por Davies y Harte es más complicado que los anteriores, pero también es más eficiente computacionalmente. La idea de este método es la misma que la del método de Cholesky, descomponer la matriz de autocovarianzas. Sin embargo, aumenta significativamente la velocidad al utilizar la transformada rápida de Fourier.

Al igual que antes, partimos de nuestra matriz de autocovarianzas Γ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(N-1) \\ \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(N-1) & \gamma(N-2) & \dots & \gamma(0) \end{bmatrix},$$

pero ahora vamos a expandirla a una matriz circulante C de orden $2N$.

$$C = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \dots & \gamma(N-1) & 0 & \gamma(N-1) & \gamma(N-2) & \dots & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \dots & \gamma(N-2) & \gamma(N-1) & 0 & \gamma(N-1) & \dots & \gamma(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(N-1) & \dots & \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \gamma(3) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(N-1) \\ \gamma(N-1) & \dots & \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(N-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(1) & \dots & 0 & \gamma(N-1) & \gamma(N-2) & \gamma(N-3) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}.$$

Notemos que la i -ésima fila puede construirse tan solo desplazando la primera fila " $i-1$ " lugares a la derecha y agregando los elementos a la izquierda. Las diagonales de ceros pueden entenderse como diagonales de $\gamma(N)$. Cabe precisar que, para el fBm esta matriz es definida positiva. Este algoritmo hace uso del siguiente teorema:

Teorema 2.2.2. *Toda matriz circulante C puede descomponerse como*

$$C = Q\Lambda Q^*$$

donde Λ es una matriz diagonal con los valores propios de C y Q es una matriz unitaria cuyos elementos son

$$(Q)_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \exp \left\{ -2\pi i \frac{jk}{2N} \right\}, \quad \forall j, k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

donde, $i = \sqrt{-1}$ y Q^* es la matriz inversa de Q , la cual es igual a su transpuesta conjugada, es decir $QQ^* = I$. Además, los valores propios que componen la matriz Λ están dados por

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{2N-1} r_j \exp \left\{ 2\pi i \frac{jk}{2N} \right\}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

donde r_j es el elemento $j + 1$ de la primera fila de C .

Dado que nuestra matriz C es semi definida positiva y simétrica, $\lambda_k \in \mathbb{R}^+, \forall k = 0, 1, \dots, 2N-1$. Por lo tanto, $\Lambda^{0.5}$ también es semi definida positiva y $S = Q\Lambda^{0.5}Q^*$ satisface que $SS' = C$.

En conclusión, la matriz S tiene la propiedad que buscamos. Por lo que, para obtener nuestro vector de ruidos gaussianos deseado, debemos encontrar el modo de simular $Z = SV$, donde V es un vector i.i.d de ruidos gaussianos. Para lograrlo debemos seguir los siguientes tres pasos:

1. Usamos la transformada rápida de Fourier sobre $[r_j]_{j=0}^{2N-1}$ para computar $[\lambda_k]_{k=0}^{2N-1}$
2. El siguiente paso es calcular un vector W que tenga la misma distribución que $Q \times V$, esto es posible en dos simples pasos:
 - Generamos dos variables aleatorias normal estándar para que ocupen las posiciones W_0 y W_N en nuestro vector W .
 - Para cada $1 < j < N$, generamos dos variables aleatorias normal estándar independientes $V_j^{(1)}$ y $V_j^{(2)}$ y completamos nuestro vector W :

$$W_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_j^{(1)} + iV_j^{(2)})$$

$$W_{2N-j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_j^{(1)} - iV_j^{(2)})$$

3. El último paso es calcular el vector $Z = Q\Lambda^{0.5}W$, notar que este vector $[Z_k]_{k=0}^{2N-1}$ tiene como elementos:

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{2N-1} \sqrt{\lambda_j} W_j \exp \left\{ -2\pi i \frac{jk}{2N} \right\}$$

Es decir, podemos calcularlos usando la transformada rápida de Fourier sobre el vector $[w_k]_{k=0}^{2N-1}$, definido como:

$$w_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2N}} V_k^{(1)} & k = 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{4N}} (V_k^{(1)} + iV_k^{(2)}) & k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{2N}} V_k^{(1)} & k = N \\ \sqrt{\frac{\lambda}{4N}} (V_{2N-k}^{(1)} + iV_{2N-k}^{(2)}) & k = N+1, \dots, 2N-1 \end{cases}$$

Como resultado, obtenemos un vector de ruidos gaussianos Z de tamaño $2N$. Por lo que, al tomar los primeros N elementos obtenemos lo deseado. Cabe precisar que, la gran ventaja de este método es la eficiencia computacional, ya que el orden de convergencia de este algoritmo es $N \log(N)$.

El siguiente fragmento de código en Python muestra el procedimiento completo. Debo precisar que, en general si nuestra matrix C no es positiva definida este método no es aplicable. En dicho caso, el código propuesto arroja un warning y se usaría el método de Hosking, previamente presentado, en su lugar.

```

1 import warnings
2 def daviesharte(N,T,hurst):
3     gn = np.random.normal(0.0, 1.0, N)
4     row_component = [autocovariance(i,hurst) for i in range(1, N)]
5     reverse_component = list(reversed(row_component))
6     row = [autocovariance(0,hurst)] + row_component + [0] + reverse_component
7     # Obtenemos los eigenvalues de la matriz circulante usando transformadas de fourier,
8     # la parte imaginaria se descarta con el .real (tiende a zero de todos modos)
9     eigenvals = np.fft.fft(row).real
10
11     if np.any([ev < 0 for ev in eigenvals]):
12         warnings.warn(
13             "Combinacion de incrementos N y parametro Hurst invalida"
14             "Se aplica el metodo de Hosking")
15         # Luego, no necesito los eigenvalues.
16         eigenvals = None
17         return hosking(N,T,hurst)
18     # Generamos un segundo vector de ruidos gaussianos i.i.d.
19     gn2 = np.random.normal(0.0, 1.0, N)
20
21     w = np.zeros(2 * N, dtype=complex)
22     for i in range(2 * N):
23         # en Python 1j es sqrt(-1)
24         if i == 0:
25             w[i] = np.sqrt(eigenvals[i] / (2 * N)) * gn[i]
26         elif i < N:
27             w[i] = np.sqrt(eigenvals[i] / (4 * N)) * (gn[i] + 1j * gn2[i])
28         elif i == N:
29             w[i] = np.sqrt(eigenvals[i] / (2 * N)) * gn2[0]
30         else:
31             w[i] = np.sqrt(eigenvals[i] / (4 * N)) * (gn[2 * N - i] - 1j * gn2[2 * N - i])
32
33     # Aplicamos la transformada de fourier a nuestro vector w
34     z = np.fft.fft(w)
35
36     # extraemos los primeros N puntos
37     fgn = z[: N].real
38
39     # Antes de generar el fBm debemos escalar el ruido gaussiano
40     scale = (1.0 * T / N) ** hurst
41     fgn = fgn*scale
42
43     fBm =np.insert(fgn.cumsum(), [0], 0)
44     return fBm

```

Cod. 4: Obtener una senda de fBm usando el método de Davies y Harte

2.2.4 Simulación de trayectorias de fBm

Aplicando cualquiera de los tres métodos descritos previamente, es posible simular una trayectoria de un fBm. En ese sentido, en la Figura 2.3 se presentan dos trayectorias de un fBm con $H = 0.1$ (trayectoria azul) y con $H = 0.5$ (trayectoria naranja). Ambas fueron generadas en base a la misma fuente de incertidumbre.

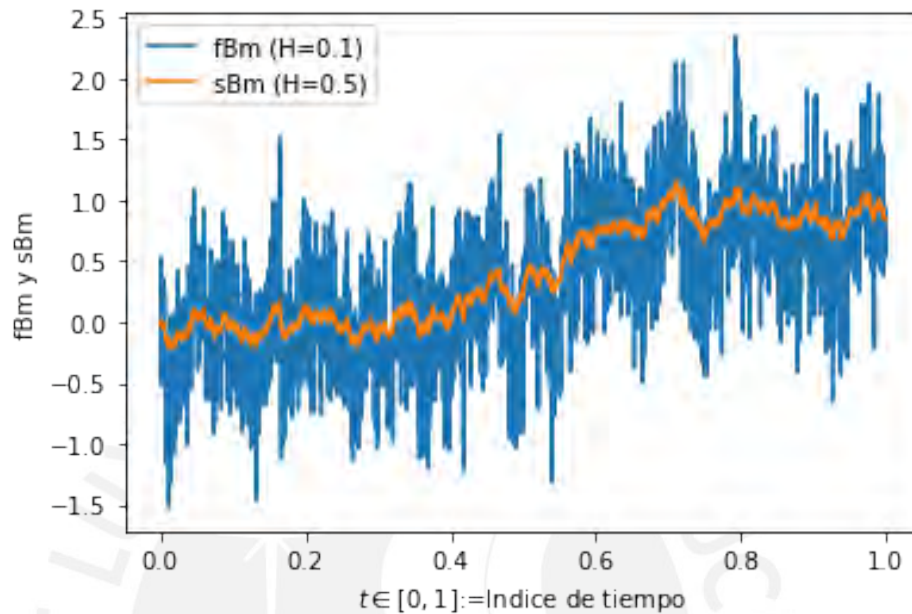


Fig. 2.3: Trayectorias de un fBm con índice Hurst 0.1 y 0.5

Asimismo, en la Figura 2.4 se presentan dos trayectorias de un fBm con $H = 0.9$ (trayectoria azul) y con $H = 0.5$ (trayectoria naranja).

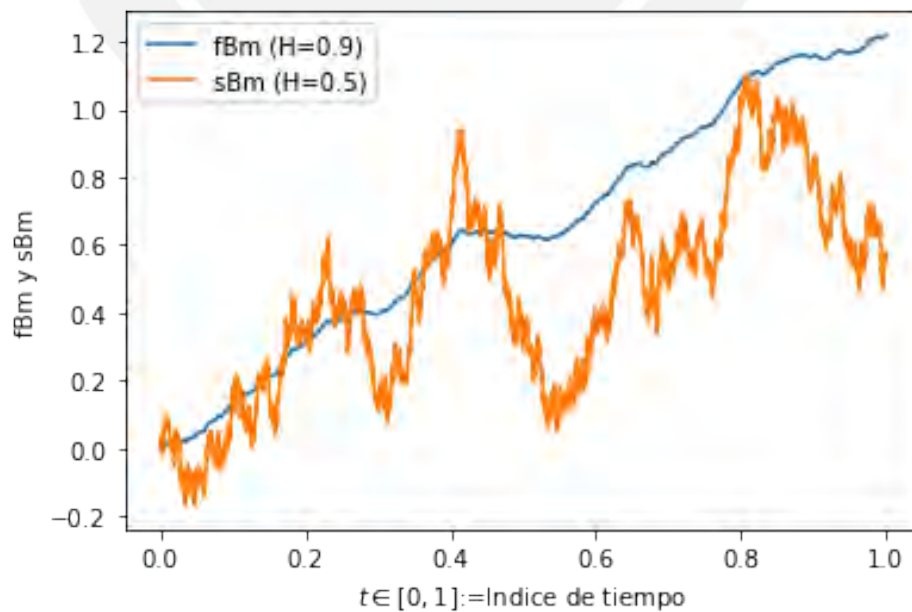


Fig. 2.4: Trayectorias de un fBm con índice Hurst 0.9 y 0.5

Capítulo 3

Nociones elementales sobre el Cálculo de Malliavin

El objetivo de este capítulo es brindar una introducción intuitiva sobre el cálculo estocástico de variaciones, conocido como cálculo de Malliavin, el cual proporciona herramientas matemáticas que permiten resolver importantes problemas en las finanzas. Para una introducción más rigurosa se recomienda revisar Nualart (2006)[23].

El cálculo de Malliavin es un cálculo diferencial desarrollado para trabajar en espacios de dimensión infinita. Es decir, puede ser aplicado a funcionales Brownianos, Brownianos fraccionarios o procesos de Levy. Por simplicidad, solo se usará funcionales Brownianos.

En este capítulo se presentan los dos objetos básicos del cálculo de Malliavin, la derivada de Malliavin (denotada como D) y la integral de Skorokhod (denotada como δ), los cuales mantienen una relación de dualidad que permite plantear la fórmula de integración por partes correspondiente. Finalmente, se muestran las propiedades básicas del Cálculo de Malliavin como la regla de la cadena, la fórmula de Clark-Ocane y la conmutatividad entre el operador D y el operador de esperanza condicional.

3.1 La derivada de Malliavin

Consideremos un movimiento Browniano estándar W definido en (Ω, \mathcal{F}, P) , donde vinculamos cada estado de la naturaleza $\omega \in \Omega$ a una trayectoria.

$$W(\omega) = \{W_{t_i}(\omega), t_i \in [0, T]\}$$

Sea $F \in L^2([0, \infty] \times \Omega)$ una variable aleatoria cuadrado integrable de la forma $F(W) = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$, donde f es una función continuamente diferenciable.

$$F : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

El objetivo en esta sección es diferenciar F con respecto a las trayectorias de W , lo que es equivalente a diferenciar F respecto al parámetro $\omega \in \Omega$.

Definición 3.1.1. (Derivada de Malliavin de F en t): La derivada de F se define como el proceso estocástico $\{D_t F\}_{t=0}^T$ dado por

$$\begin{aligned} D_t F(W) &= \frac{\partial f(W_{t_1} + \epsilon 1_{[t, \infty)}(t_1), \dots, \partial W_{t_k} + \epsilon 1_{[t, \infty)}(t_k), \dots, \partial W_{t_n} + \epsilon 1_{[t, \infty)}(t_n))}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(W + \epsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W)}{\epsilon}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \\ &= \sum_{i=k}^n \partial_i f(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}, \dots, W_{t_n}) 1_{[t, \infty)}(t_i) \end{aligned}$$

En ese sentido, la derivada de Malliavin puede interpretarse como una derivada direccional. Es decir, el cambio en F en respuesta a una perturbación (ϵ) en la trayectoria de W introducida en el periodo $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

Siguiendo [23], el dominio de D (el cual se denota como $\mathbb{D}^{1,2}$) está dado por la clausura de la clase de variables aleatorias cuadrado integrables de la forma $F = F(W(\omega)) = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ con respecto a la norma

$$\|F\|_{1,2} = \left(E(F^2) + E\left(\int_0^T (DF)^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cabe precisar que, $\mathbb{D}^{1,2}$ coincide con un Espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = E(F \times G) + E\left(\int_0^T DF \times DG dt \right)$$

Por lo tanto, es necesario verificar que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ al aplicar la derivada de Malliavin.

Ejemplo 3.1.1. (Derivada de Malliavin de un Movimiento Browniano): Si aplicamos la definición 3.1.1 con $F(W) = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}, \dots, W_{t_n}) = W_s$, con $s \in [0, \infty)$ fijo, tenemos

$$D_t W_s = \sum_{i=k}^n \partial_{W_{t_i}} W_s \times 1_{[t, \infty)}(t_i)$$

$$D_t W_s = 1_{[t, \infty)}(s) = 1_{t \leq s}$$

Ejemplo 3.1.2. (Derivada de Malliavin de un movimiento Browniano geométrico): Sabemos que $S_T = S_0 e^{(\mu - 0.5\sigma)T + \sigma W_T}$, luego si aplicamos la definición 3.1.1 con $F(W) = S_T$ con $t \in [0, T]$, tenemos

$$D_t S_T = \sum_{i=k}^n \partial_{W_{t_i}} S_T \times 1_{[t, \infty)}(t_i)$$

$$D_t S_T = \partial_{W_T} S_T 1_{[t, \infty)}(T) = \sigma S_T, \quad \forall t \in [0, T]$$

3.2 La derivada de Malliavin en integrales estocásticas

En todo campo donde se aplique ecuaciones diferenciales estocásticas, como las finanzas, es muy común encontrarse con integrales estocásticas, como la integral de Itô. El objetivo de esta

sección es calcular la derivada de Malliavin de algunas integrales estocásticas que dependen de la historia de los movimientos Brownianos.

Proposición 1. (La derivada de Malliavin de una Integral de Wiener):

Sea $F(W) = \int_0^T h_s dW_s$ una Integral de Wiener, donde h_s es una función determinística del tiempo. La derivada de Malliavin de $F(W)$ en t es la volatilidad h_t de la integral estocástica.

$$D_t F(W) = h_t$$

Proof. Al integrar por partes $F(W)$ obtenemos que:

$$F(W) = h_T W_T - \int_0^T W_s dh_s, \text{ es decir}$$

$$F(W + \epsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W) = h_T \epsilon - \int_0^T \epsilon 1_{[t, \infty)}(s) dh_s = h_T \epsilon - \int_t^T \epsilon dh_s = \epsilon h_t$$

Por lo tanto, si aplicamos la definición 3.1.1, tenemos que:

$$D_t F(W) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(W + \epsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W)}{\epsilon} = h_t$$

□

Proposición 2. (La derivada de la Integral de Riemann):

Sea $F(W) = \int_0^T h_s(W) ds$ una Integral de Riemann, donde h_s es un proceso adaptado cuadrado integrable. La derivada de Malliavin de $F(W)$ en t es:

$$D_t F(W) = \int_t^T D_t h_s ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Es decir, podemos introducir la derivada de Malliavin D dentro de la integral de Riemann.

Proof. Si aplicamos la definición 3.1.1 sobre $F(W)$ se obtiene

$$D_t F(W) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(W + \epsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left(\frac{h_s(W + \epsilon 1_{[t, \infty)}) - h_s(W)}{\epsilon} \right) ds$$

ya que, $D_t h_s(W) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h_s(W + \epsilon 1_{[t, \infty)}) - h_s(W)}{\epsilon}$ se puede concluir que:

$$D_t F(W) = D_t \int_0^T h_s(W) ds = \int_t^T D_t h_s(W) ds$$

□

Proposición 3. (La derivada de la Integral de Itô):

Sea $F(W) = \int_0^T h_s(W) dW_s$ una Integral de Itô, donde h_s es un proceso adaptado cuadrado integrable. Si aplicamos la definición 3.1.1 a esta integral obtenemos:

$$D_t F(W) = h_t + \int_t^T D_t h_s dW_s \quad \forall t \in [0, T]$$

La prueba de esta proposición sigue los pasos de las dos anteriores; por lo que, será omitida.

3.3 La integral de Skorokhod

El otro operador fundamental en el Cálculo de Malliavin es la integral de Skorokhod, denotada como δ .

Definición 3.3.1. (La integral estocástica de Skorokhod del proceso U): Sea U un proceso estocástico cuadrado integrable $U \in L^2([0, T] \times \Omega)$. Definimos δ como un operador que mapea el proceso U a una variable aleatoria en $L^2(\Omega)$, tal que:

- i El dominio de δ , denotado como $Dom \delta$, está definido como el siguiente conjunto

$$Dom \delta := \{U \in L^2([0, T] \times \Omega) : |E[\langle D_t F, U \rangle]| \leq c \|F\|_2, \forall F \in \mathbb{D}^{1,2} \text{ y } c(U) > 0\}$$

- ii Si $U \in Dom \delta$, luego $\delta[U]$ es una variable aleatoria cuadrado integrable $\delta[U] \in L^2(\Omega)$ caracterizada por

$$E[F \delta[U]] = E[\langle D_t F, U \rangle]$$

para cualquier $F \in \mathbb{D}^{1,2}$

Podemos entender $\delta[U]$ como una generalización de la Integral de Itô¹.

$$\delta[U] = \int_0^T U_t dW_t$$

Consideremos $\omega \in \Omega$ fijo, denotamos al producto interno estandar en $L^2([0, T])$ como:

$$\langle U, DF \rangle = \int_0^T U_t D_t F dt$$

Integrando esta expresión sobre Ω tenemos $E[\langle U, DF \rangle]$. Ahora se puede entender el operador δ como la adjunta del operador D , ya que forman una relación de dualidad en $L^2([0, T] \times \Omega)$:

$$E[\langle U, DF \rangle] = E[F \delta(U)]$$

A partir de esta relación de dualidad obtenemos que:

$$E\left(\int_0^T U_t D_t F dt\right) = E\left(F \int_0^T U_t dW_t\right)$$

3.4 Propiedades básicas del Cálculo de Malliavin

En esta sección se presentan algunas proposiciones del Cálculo de Malliavin que usaremos más adelante, pruebas más detalladas pueden encontrarse en [23].

Proposición 4. (La regla de la cadena): Si $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathbb{D}^{1,2}$, y $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en el espacio $C^1(\mathbb{R}^n)$. Luego, $\psi(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathbb{D}^{1,2}$ y

$$D_t \psi(F_1, F_2, \dots, F_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(F_1, F_2, \dots, F_n) D_t F_i$$

¹Si U es un proceso \mathcal{F}_t -adaptado y cuadrado integrable, $\delta[U]$ coincide con la Integral de Itô

Proof. Por simplicidad tomemos $D_t\psi(F)$. Nuevamente, partamos de la definición de la Derivada de Malliavin:

$$\begin{aligned} D_t\psi(F(W)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(F(W + \epsilon 1_{[t,\infty]})) - \psi(F(W))}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(F(W + \epsilon 1_{[t,\infty]})) - \psi(F(W))}{F(W + \epsilon 1_{[t,\infty]}) - F(W)} \times \frac{F(W + \epsilon 1_{[t,\infty]}) - F(W)}{\epsilon} \\ &= \psi'(F)D_tF \end{aligned}$$

□

Proposición 5. (La regla del producto): Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ y $F \times G \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$D_t(F \times G) = (D_tF) \times G + F \times (D_tG)$$

Proof. Basta con aplicar la Proposición 4 con $\psi(F, G) = F \times G$

□

Proposición 6. (La Isometría de δ): Sea $s < t$, para todo proceso $U \in \text{Dom}\delta$ se cumple,

$$E[\delta(U)^2] = E\left[\int U_t^2 dt\right] + E\left[\int \int D_s U_t D_t U_s ds dt\right]$$

Proposición 7. (La integral de Skorokhod del producto de $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ y $U \in \text{Dom}\delta$):

$$\delta(F \times U) = F \times \delta(U) - \int_0^T U_t \times D_tF dt$$

Proposición 8. (La formula de integración por partes de δ): Sean dos variables aleatorias F y $G \in \mathbb{D}^{1,2}$, y $h_t \in L^2[0, T]$, denotamos como:

$$(D_h F)_t = \int_0^T (D_tF)h_t dt$$

Luego, para toda función continuamente diferenciable $f \in \mathcal{C}^1$:

$$E[f'(F) \times G] = E\left[f(F) \times \delta\left(\frac{G \times h_t}{(D_h F)_t}\right)\right]$$

3.5 La fórmula de Clark Ocone

Un resultado muy importante del cálculo estocástico es que toda variable aleatoria medible con respecto a la filtración generada por un movimiento Browniano puede ser escrita en términos de una integral de Ito

$$F = E[F] + \int_0^t \psi_s dW_s$$

donde, ψ es un proceso \mathcal{F}_t -adaptado. Este resultado es conocido como el Teorema de Representación de Martingalas. Una ventaja del Cálculo de Malliavin es que permite identificar ψ , mediante la formula de Clark Ocone.

Proposición 9. La Formula de Clark-Ocone: Una variable aleatoria $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ puede reescribirse:

$$F = E[F] + \int_0^T E_t[D_t F] dW_t$$

Proof. Sea $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Con el teorema de representación martingala se reescribe como:

$$F = E[F] + \int_0^T \psi_s dW_s$$

Por lo tanto, aplicando la Proposición 3, la derivada de Malliavin de F sería:

$$D_t F = \psi_t + \int_t^T D_t \psi_s dW_s$$

Tomando la esperanza condicional a \mathcal{F}_t en cada lado tenemos que:

$$E_t[D_t F] = \psi_t + E_t \left[\int_t^T D_t \psi_s dW_s \right]$$

Como $D_t \psi_s$ es \mathcal{F}_t -adaptado y cuadrado integrable, $\int_t^T D_t \psi_s dW_s$ es una integral de Itô y su esperanza es cero. lo cual concluye la prueba. □

3.6 La conmutatividad de la derivada de Malliavin y el operador de esperanza condicional

Una de las propiedades más importantes de la derivada de Malliavin (D) es que es conmutable con el operador de esperanza condicional (E_t), es decir:

Proposición 10. Conmutatividad de D y E_t : Sea $v \geq t$ y $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, tenemos que:

$$D_t E_v[F] = E_v[D_t F]$$

Proof. Para probar esta propiedad verifiquemos la equivalencia de ambas partes, empecemos aplicando la formula de Clark Ocone a $D_t E_v[F]$:

$$D_t E_v[F] = D_t \left(E_t[F] + \int_t^v E_s[D_s F] dW_s \right)$$

$$D_t E_v[F] = D_t E_t[F] + \int_t^v D_t E_s[D_s F] dW_s$$

Ahora apliquemos la formula de Clark Ocone a F :

$$F = E_t[F] + \int_t^T E_s[D_s F] dW_s$$

Apliquemos la derivada de Malliavin:

$$D_t F = D_t \left(E_t[F] + \int_t^T E_s[D_s F] dW_s \right)$$

$$D_t F = D_t E_t[F] + \int_t^T D_t E_s[D_s F] dW_s$$

Finalmente, aplicamos el operador de esperanza condicional en $v \geq t$

$$E_v[D_t F] = E_v \left[D_t E_t[F] + \int_t^T D_t E_s[D_s F] dW_s \right]$$

$$E_v[D_t F] = D_t E_t[F] + \int_t^v D_t E_s[D_s F] dW_s$$

lo cual concluye la prueba

□

Corolario 3.6.0.1. *La fórmula de Clark Ocone en función de E_t : Aplicando la conmutatividad de D y E_t en la fórmula de Clark Ocone, podemos reescribirla de la siguiente manera:*

$$F = E_t[F] + \int_t^T E_s[D_s F] dW_s$$

Proof. Si aplicamos la fórmula de Clark Ocone sobre $E_t[F]$ obtenemos:

$$E_t[F] = E[F] + \int_0^T E_s[D_s E_t[F]] dW_s$$

Lo cual puede reescribirse como:

$$E_t[F] = E[F] + \int_t^T E_s[D_s E_t[F]] dW_s + \int_0^t E_s[D_s E_t[F]] dW_s$$

Notar que, en la primera integral $D_s E_t[F] = 0$, ya que $E_t[F]$ es \mathcal{F}_t -adaptado, luego:

$$E_t[F] = E[F] + \int_0^t E_s[D_s E_t[F]] dW_s$$

Finalmente, aplicando la conmutatividad entre E_s y D_s para introducir E_s dentro de D , la ley de esperanzas iteradas y nuevamente la conmutatividad entre E_s y D_s obtenemos:

$$E_t[F] = E[F] + \int_0^t E_s[D_s F] dW_s$$

Restando este resultado en la fórmula de Clark Ocone de F se concluye la prueba

□

3.7 Aplicación: Cálculo del Delta en el modelo SABR

En las finanzas cuantitativas denotamos como "griegos" a las sensibilidades del precio de una opción respecto a los parámetros del modelo. Calcular los griegos es fundamental en las finanzas cuantitativas, ya que brindan información para medir y gestionar el riesgo de un producto, lo cual es aún más importante que determinar el precio mismo. En esta sección, mostraremos como se aplica el cálculo de Malliavin para hallar estas sensibilidades en el modelo SABR, uno de los modelos de volatilidad estocástica más populares en la industria, para mayor información revisar la sección 4.3.

Esta parte se basa en los trabajos publicados en 1999 y en 2001 por Fournié et.al titulado

"Applications of Malliavin Calculus to Monte Carlo methods in Finance"[14][15]. Otros trabajos más recientes incluyen El-Khatib et.al (2009)[12] y Inkaya et.al (2016)[26]. Lo atractivo de este método es que es más exacto y menos demandante computacionalmente que el método de diferencias finitas para estimar la derivada de la esperanza del pago de la opción.

Empezamos resumiendo el modelo SABR del precio forward de una acción:

$$\begin{aligned} F_t &= F_0 \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right\} \\ \sigma_t &= \sigma_0 \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha^2 t + \alpha (\rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t) \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde, σ_t es el proceso de volatilidad de los retornos instantaneos del precio Forward (F_t), α es el parámetro de volatilidad del proceso σ_t , ρ es la correlación entre los retornos instantaneos y su volatilidad. Finalmente, W_t y B_t son movimientos Brownianos estandar independientes.

Ahora, recordemos que el precio de una opción (V_0) sobre F_t puede expresarse como:

$$V_0 = e^{-r(T)} E[V(F_T)]$$

Por lo que, la sensibilidad del precio de la opción V_0 respecto al cambio de un dolar en el precio forward inicial F_0 , conocida como Delta Δ_{BS} , sería:

$$\Delta_{BS} = \frac{\partial V_0}{\partial F_0} = e^{-r(T)} \frac{\partial E[V(F_T)]}{\partial F_0}$$

A continuación mostraremos como utilizar el cálculo de Malliavin para calcular Δ_{BS} .

Paso 1: Expresar Δ_{BS} como la esperanza de una derivada parcial

$$\begin{aligned} e^{r(T)} \Delta_{BS} &= \frac{\partial E[V(F_T)]}{\partial F_0} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E[V(F_T(F_0 + \epsilon))] - E[V(F_T(F_0))]}{\epsilon} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio, sabemos que

$$e^{r(T)} \Delta_{BS} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E \left[\frac{\partial V(F_T(\hat{F}_0))}{\partial F_0} \right], \text{ para algún } \hat{F}_0 \in (F_0, F_0 + \epsilon).$$

Para que no hayan oportunidades de arbitraje en el mercado, el precio de la opción debe ser menor que el subyacente, luego $\Delta_{BS} \in [0, 1]$.

Por tal motivo, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada, obteniendo:

$$e^{r(T)} \Delta_{BS} = E \left[\frac{\partial V(F_T)}{\partial F_0} \right]$$

Por lo tanto,

$$\Delta_{BS} = e^{-r(T)} E \left[V'(F_T) \frac{\partial F_T}{\partial F_0} \right].$$

Paso 2: Usamos la formula de integración por partes del cálculo de Malliavin

$$E[f'(F)G] = E\left[f(F) \times \delta\left(\frac{Gh_t}{D_h F}\right)\right]$$

donde $\delta(h) := \int_0^T h_t dW_t$ es la integral de Skorohod de h , $h_t \in \text{Dom}\delta$ es un proceso arbitrario y $D_h F := \int_0^T h_s D_s F ds$. Cabe precisar que, en la práctica se suele tomar $h_t = 1, \forall t \in [0, T]$. Notemos que esta fórmula es directamente aplicable con $f'(F) = V'(F_T)$ y $G = \frac{\partial F_T}{\partial F_0}$.

$$\Delta_{BS} = e^{-r(T)} E\left[V(F_T) \times \delta\left(\frac{\partial F_T}{\partial F_0} h_t (D_h F_T)^{-1}\right)\right]$$

Paso 3: Calcular Δ_{BS} usando el modelo SABR

Si tomamos $h_t = 1 \forall t \in [0, T]$ y utilizamos el modelo del precio forward descrito en (3.1) para calcular Δ_{BS} , obtenemos:

$$\Delta_{BS} = e^{-r(T)} E\left[V(F_T) \times \delta\left(\frac{F_T}{F_0} (D_h F_T)^{-1}\right)\right]$$

Este paso se divide en dos partes:

a) **Calcular $D_h F_T$:** Lo que implica calcular $D_t F_T$.

Notemos que, la derivada de Malliavin sobre $\{W_t\}_{t=0}^T$ en $s \leq T$ de $X_T = \ln(F_T)$ es $D_s X_T = \frac{D_s F_T}{F_T}$. Por lo tanto, $D_s F_T = F_T D_s X_T$.

Por lo tanto, como $D_h F_T = \int_0^T h_r D_r F_T dr$, podemos re-expresar Δ_t como:

$$\Delta_{BS} = \frac{\exp\{-r(T)\}}{F_0} E\left[V(F_T) \times \delta\left(\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1}\right)\right].$$

En particular, en el modelo SABR:

$$D_t X_T = \sigma_t - \int_t^T \sigma_s D_t \sigma_s ds + \int_t^T D_t \sigma_s dW_s, \text{ y}$$

$$D_t \sigma_s = \alpha \rho \sigma_s$$

b) **Re-expresar $\delta\left(\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1}\right)$**

La proposición 7 indica que si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $h \in \text{Dom}\delta$, y $Fh \in \text{Dom}\delta$, la integral de Skorokhod del producto de F y h es:

$$\delta(Fh) = F\delta(h) - \int_0^T (D_t F)h_t dt$$

En ese sentido, si consideramos como $F = \left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1}$ y $h = 1$ podemos re-expresar

$\delta\left(\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1}\right)$ como:

$$\begin{aligned} \delta\left(\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1}\right) &= \delta(1)\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1} - \int_0^T D_s\left(\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-1}\right) ds \\ &= \frac{W_T}{\int_0^T D_r X_T dr} + \int_0^T \left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^{-2} D_s\left(\int_0^T D_r X_T dr\right) ds \\ &= \frac{W_T}{\int_0^T D_r X_T dr} + \int_0^T \frac{D_s\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)}{\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^2} ds \\ &= \frac{W_T}{\int_0^T D_r X_T dr} + \int_0^T \frac{\left(\int_0^T D_s D_r X_T dr\right)}{\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^2} ds \end{aligned}$$

Es decir,

$$\Delta_{BS} = e^{-r(T)} E\left[V(F_T) \times \left(\frac{W_T}{\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)} + \int_0^T \frac{\int_0^T D_s D_r X_T dr}{\left(\int_0^T D_r X_T dr\right)^2} ds\right)\right]$$

En particular, en el Modelo SABR,

$$D_s D_r X_T = \begin{cases} -2(\alpha\rho)^2 \int_s^T \sigma_t^2 dt + (\alpha\rho)^2 \int_s^T \sigma_t dW_t, & \text{cuando } s > r \\ \alpha\rho\sigma_r - 2(\alpha\rho)^2 \int_r^T \sigma_t^2 dt + (\alpha\rho)^2 \int_r^T \sigma_t dW_t, & \text{cuando } s \leq r. \end{cases}$$

Capítulo 4

Conceptos previos a los derivados de volatilidad

El objetivo de este capítulo es presentar los modelos y conceptos básicos para entender como se determina el precio de un derivado de volatilidad. La breve introducción presentada en este capítulo se basa en [20] y los modelos, en las fuentes originales.

4.1 Nociones elementales sobre el modelo de Black and Scholes

Bajo cierta medida, conocida como riesgo neutral, el modelo estandar de Black-Scholes para calcular el precio de opciones europeas expresa el logaritmo del precio de un activo (X) como la solución a la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, T].$$

En adición a la acción, existe un activo libre de riesgo (digamos un bono) B disponible en el mercado. Este activo satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \in [0, T].$$

Este modelo es popular, porque permite derivar una forma cerrada para los derivados conocidos como opciones europeas. Por ejemplo, una opción Call C con vencimiento (o maturity) en una fecha futura T con pago $(e^{X_T} - K)_+$, donde K es un precio umbral constante, denominado strike, tiene como precio:

$$C = BS(X_t, K, t, T, r, \sigma) = e^{X_t} N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2),$$

donde

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-0.5x^2} dx,$$

$$d_1 = \frac{X_t - \ln(K) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

En el siguiente fragmento de código se muestra como hacer esto en Python, cuando el activo subyacente es un futuro, esta es una variante de la fórmula BS conocida como la fórmula de Black:

```

1  def BSFormula(tipo,F0, K, sigma, T, r):
2  '''Calcula el precio de una opción Call o Put, siendo el default la opción Put'''
3      d1 = (np.log(F0 / K) + sigma**2 / 2 * T) / (sigma * np.sqrt(T))
4      d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
5
6      if tipo == 'Call':
7          BSprice = np.exp(-r * T) * (F0 * ss.norm.cdf(d1) - K * ss.norm.cdf(d2))
8      else: # return a Put
9          BSprice = np.exp(-r * T) * (-F0 * ss.norm.cdf(-d1) + K * ss.norm.cdf(-d2))
10
11     return(BSprice)

```

Cod. 5: Calcular el precio de una opción europea con la formula de Black

Hay más de una forma de derivar la formula BS, las más conocidas son las dos siguientes:

- Construir un portafolio compuesto del activo (X_t) y el bono (B_t) que replique perfectamente el pago de la opción al vencimiento. Asumiendo no arbitraje, el valor de este portafolio debe ser igual al de la opción. En este enfoque se debe resolver la ecuación diferencial parcial resultante para calcular el precio.
- Calcular la esperanza riesgo neutral del pago de la opción al vencimiento y descontarla hasta el presente usando la tasa corta r . En este enfoque se utiliza la simulación de monte carlo para calcular el precio.

4.2 Introducción a los modelos de volatilidad estocástica

En las Finanzas cuantitativas debemos tener en cuenta tres volatilidades distintas para los retornos instantáneos: la volatilidad realizada promedio (la cual denotaremos $\bar{\sigma}$), la volatilidad teórica (σ_t) y la volatilidad implícita (I).

Hay dos formas de definir $\bar{\sigma}^2$: la primera es la sumatoria del log retorno al cuadrado

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - X_{t-1})^2,$$

la segunda es la sumatoria de la tasa de crecimiento de los retornos al cuadrado

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{\Delta e^{X_t}}{e^{X_{t-1}}} \right)^2.$$

Cabe precisar que, ambas definiciones son equivalentes cuando $\Delta t \rightarrow 0$, ya que el retorno instantaneo tiende a zero¹.

Asimismo, σ_t se define como el término de volatilidad del modelo a utilizar. Por ejemplo, en el modelo BS es una constante ($\sigma_t = \sigma$).

¹Sea $R_i = \frac{P_{t_i} - P_{t_{i-1}}}{P_{t_i}}$. Si tomamos el logaritmo en ambos lados tenemos: $\ln(P_{t_i}) - \ln(P_{t_{i-1}}) = \ln(1 + R_i)$. Si $R_i \rightarrow 0$ tenemos que $\ln(P_{t_i}) - \ln(P_{t_{i-1}}) = R_i$. Lo cual, en finanzas, ocurre casi seguramente cuando $\Delta t = t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$

$$dX_t = (r - \frac{1}{2}\sigma)dt + \sigma dW_t.$$

Finalmente, I se define como el número que al introducirlo en la formula BS nos retorna el precio de mercado de la opción europea. Es decir, obtenemos I invirtiendo la formula BS:

$$I = BS^{-1}(S_t, K, t, T, r, C_t(T, K)).$$

El problema con el modelo BS es que al asumir que la volatilidad teórica es una constante ($\sigma_t = \sigma$), la volatilidad implícita es igual a dicha constante ($I = \sigma, \forall T, K$).

Sin embargo, si calculamos la volatilidad implícita con el precio de mercado de la opción europea ($I = BS^{-1}(S_t, K, t, T, r, C_t)$), se observa que opciones con diferentes strikes (K) requieren diferentes volatilidades implícitas (I) para ajustar el precio de mercado (este hecho es conocido como volatility skew/smile o sonrisa de volatilidad). Este hecho estilizado sugiere que la volatilidad teórica no es una constante.

Por lo tanto, se tiene dos alternativas: la primera es modelar la volatilidad como una función determinística del tiempo y la segunda es modelar la volatilidad como un proceso estocástico. Tanto en la academia como en la industria, modelar la volatilidad como un proceso estocástico es lo convencional.

En consecuencia, en la literatura es común encontrar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE):

$$\begin{aligned} dX_t &= (r + \frac{\sigma_t}{2})dt + \sigma_t dW_{S,t}, \forall t \in [0, T] \\ d\sigma_t &= f(W_{\sigma,t}), \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

donde, X_t es el log-retorno del activo subyacente, r es la tasa libre de riesgo, σ_t es la volatilidad instantánea de X_t y $f \in C_b^1(\mathbb{R})$. La familia de modelos que da solución a este sistema de EDE son conocidos como modelos de volatilidad estocástica. Su utilidad radica en explicar de forma autoconsistente la sonrisa de volatilidad y otros hechos estilizados. Hay tres grandes grupos en esta familia de modelos:

1. Modelos de volatilidad local: $W_{S,t}$ y $W_{\sigma,t}$ están perfectamente correlacionados. Se recomienda revisar el trabajo publicado en 1994 por Bruno Dupire titulado "Pricing with a Smile[11]" y el libro "The Volatility Surface[16]" como referencias².
2. Modelos de volatilidad como difusión: $W_{S,t}$ y $W_{\sigma,t}$ podrían estar correlacionados, pero no perfectamente correlacionados. Se recomienda revisar los trabajos de Steven Heston[19] y Hagan et al[18], además de los libros titulados "Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility[13]" y "The Volatility Surface[16]" como referencias.
3. Modelos de volatilidad fraccionaria: σ_t depende de un movimiento Browniano fraccional definido en función de $W_{\sigma,t}$. Se recomienda revisar los trabajos de Comte et al (1998)[10], Comte et al (2012)[9] y Àlos et al[1] como referencias.

²El problema con este tipo de modelos es que predicen un comportamiento dinámico del smile (skew) contrario al observado en el mercado. Cuando el underlying aumenta, el skew se contrae.

4.3 Algunos modelos de volatilidad estocástica

En esta sección presentamos algunos modelos de volatilidad estocástica. Antes de empezar con los modelos específicos se denotan algunas variables o parámetros comunes en todos los modelos:

1. F_t es el precio Forward de un activo con vencimiento T en el instante $t < T$,
2. σ_t es la volatilidad instantánea en t ,
3. W_t y B_t son movimientos brownianos estándar independientes,
4. ρ es el parámetro de correlación entre los retornos instantáneos y la volatilidad instantánea,
5. ν denota la volatilidad de la volatilidad (también conocido como vol of vol).

4.3.1 El modelo de Heston

El modelo de Heston[19] es utilizado para determinar el precio de opciones u otros instrumentos derivados. A diferencia del modelo Black and Scholes, donde la volatilidad instantánea es un parámetro del modelo, la varianza instantánea es un proceso estocástico de Ornstein Uhlenbeck. Es decir, la varianza instantánea es un proceso que retorna a su media (la varianza de largo plazo).

En ese sentido, el modelo de Heston es la solución al siguiente sistema de EDEs:

$$\begin{aligned} dF_t &= \sigma_t F_t (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t), \quad \forall t \in [0, T] \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + \nu \sqrt{\sigma_t^2} dW_t, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

donde θ es la varianza de largo plazo y κ es el parámetro de velocidad de convergencia a la varianza de largo plazo. Cabe precisar que, para garantizar una varianza positiva en cada instante, los parámetros del modelo deben satisfacer la siguiente condición: $2\kappa\theta > \nu^2$

La gran ventaja de este modelo es su solución de forma (quasi) cerrada del precio de opciones europeas:

$$C(x, \sigma^2, \tau) = e^{-r\tau} [e^x P_1(x, \sigma^2, \tau; k) - e^k P_2(x, \sigma^2, \tau; k)].$$

Donde $x = \ln(F_t)$, $\tau := T - t$, $k := \ln(K)$ y,

$$\begin{aligned} P_j(x, \sigma^2, T; k) &= \mathbb{P}r[x(T) > k \mid x(t) = x, \sigma^2(t) = \sigma^2], \quad \text{para } j = 1, 2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left(e^{-i\phi k} \cdot \frac{f_j(x, \sigma^2, T; \phi)}{i\phi} \right) d\phi \end{aligned}$$

donde: $\text{Re}(z)$ denota la parte real de $z \in \mathbb{C}$, y

$$f_j(x, \sigma^2, T; \phi) := e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)\sigma^2 + i\phi x}$$

denota la función característica del problema, la cual depende de los siguientes valores:

- $C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\nu^2} \left((b_j - \rho\nu\phi i + d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g}\right) \right)$
- $D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\nu\phi i + d}{\nu^2} \left(\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right)$
- $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\nu$, $b_2 = \kappa + \lambda$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$
- $g = \frac{b_j - \rho\nu\phi i + d}{b_j - \rho\nu\phi i - d}$
- $d = \sqrt{(\rho\nu\phi i - b_j)^2 - \nu^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$

```

1  import numpy as np
2  from functools import partial
3  from scipy.integrate import quad
4
5  class Heston_price():
6
7      def __init__(self, S0, K, t, v0, mu, kappa, theta, sigma, rho, right_lim):
8          """Inicializacion"""
9          self.S0 = S0
10         self.K = K
11         self.t = t
12         self.v0 = v0
13         self.mu = mu
14         self.kappa = kappa
15         self.theta = theta
16         self.sigma = sigma
17         self.rho = rho
18         self.right_lim = right_lim
19         self.call = self.call(self.S0,self.K,self.t,self.v0,self.mu,
20                             self.kappa,self.theta,self.sigma,self.rho,
21                             self.right_lim)
22
23     def call(self, S0, K, t, v0, mu, kappa, theta, sigma, rho, right_lim):
24         cf_H_b_good = partial(self.cf_Heston_good,t=t,v0=v0,mu=mu,
25                             kappa=kappa,theta=theta,sigma=sigma,rho=rho)
26
27         k = np.log(K/S0)
28         Q1 = self.Q1(k, cf_H_b_good, right_lim=right_lim)
29         Q2 = self.Q2(k, cf_H_b_good, right_lim=right_lim)
30         call = S0 * Q1 - K * np.exp(-mu*t) * Q2
31         return call
32
33     def cf_Heston_good(self, u, t, v0, mu, kappa, theta, sigma, rho):
34         xi = kappa - sigma*rho*u*1j
35         d = np.sqrt( xi**2 + sigma**2 * (u**2 + 1j*u) )
36         g1 = (xi+d)/(xi-d)
37         g2 = 1/g1
38         A = kappa*theta/sigma**2 * ( (xi-d)*t - 2*np.log( (1-g2*np.exp(-d*t))/(1-g2) ) )
39         B = v0/sigma**2 * (xi-d) * (1-np.exp(-d*t))/(1-g2*np.exp(-d*t))
40         cf = np.exp(1j*u*mu*t + A + B)
41         return cf
42
43     def Q1(self, k, cf, right_lim):
44         integrand = lambda u: np.real( (np.exp(-u*k*1j) / (u*1j)) *
45                                     cf(u-1j) / cf(-1.00000000000001j) )
46         return 1/2 + 1/np.pi * quad(integrand, 1e-15, right_lim, limit=2000 )[0]
47
48     def Q2(self, k, cf, right_lim):
49         integrand = lambda u: np.real( np.exp(-u*k*1j) / (u*1j) * cf(u) )
50         return 1/2 + 1/np.pi * quad(integrand, 1e-15, right_lim, limit=2000 )[0]

```

Cod. 6: Calcular el precio de la opción europea con el modelo de Heston

4.3.2 El modelo SABR

En el modelo de Heston la varianza instantanea sigue un proceso Ornstein Uhlenbeck (un proceso que retorna a su media). Sin embargo, los datos de mercado no muestran evidencia concluyente de que este sea el caso. En ese sentido, en el modelo SABR[18], la volatilidad instantanea se modela como un movimiento browniano geométrico. Es decir, el modelo SABR, con $\beta = 1$, es la solución al siguiente sistema de EDE:

$$\begin{aligned} dF_t &= F_t \sigma_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t \right), \\ d\sigma_t &= \sigma_t \nu dW_t. \end{aligned}$$

La gran ventaja de este modelo es que tiene una solución analítica para la volatilidad implícita (I), conocida como la Formula de Hagan:

$$\sigma(K) = \sigma_0 \frac{z}{x(z)} \left[1 + \frac{1}{8} T \left(2\nu\rho\sigma_0 + \nu^2 \left(\frac{2}{3} - \rho^2 \right) \right) \right]$$

donde

- $x(z) = \log \left[\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2+(z-\rho)}}{1-\rho} \right]$, y
- $z = \frac{\nu}{\sigma_0} \log \left(\frac{F}{K} \right)$

Notar que, esta formula es indeterminada si la evaluamos cuando ($F = K$) o, análogamente cuando $z = 0$. Sin embargo, si usamos la Regla de L'Hospital se puede comprobar que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sigma(K) = \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{8} T \left(2\nu\rho\sigma_0 + \nu^2 \left(\frac{2}{3} - \rho^2 \right) \right) \right]$$

En ese sentido, calibrar un modelo para ajustar la superficie de volatilidad del mercado es más sencillo usando el modelo SABR, ya que cuenta con una fórmula analítica. En el siguiente fragmento de código se presenta la fórmula de Hagan, aunque en su forma general ($\beta \in [0, 1]$), para más información del modelo SABR se recomienda revisar [6]. Cabe precisar que, normalmente para calcular la volatilidad implícita se requiere invertir la formula de BS, para lo cual es necesario utilizar métodos numéricos, ya que es un problema altamente no lineal.

```

1  def HaganFormula(K,F,T,nu,beta,rho,sigma0):
2      N = 1 + ( (1-beta)**2/24*(sigma0**2/(F*K)**(1-beta))
3              + 0.25*(rho*beta*nu*sigma0)/(F*K)**((1-beta)/2)
4              + (2-3*rho**2)*(nu**2)/24 ) * T
5      D = (F*K)**((1-beta)/2)*(1 + (1-beta)**2 * np.log(F/K)**2/24
6              + (1-beta)**4 * np.log(F/K)**4/1920)
7      z=(nu/sigma0)*(F*K)**((1-beta)/2)*np.log(F/K)
8      x_z=np.log((np.sqrt(1-2*rho*z+z**2)+z-rho)/(1-rho))
9      IV=sigma0*(N/D)*(z/x_z)
10     ## ATM Hagan formula, obtenida con la regla D'Hospital
11     ATM = np.where(F/K==1)
12     IV[ATM]=sigma0*(N[ATM]/D[ATM])
13     return IV

```

Cod. 7: Calcular el skew de volatilidad con la fórmula de Hagan

4.3.3 Los modelos de volatilidad fraccionaria

Los modelos de volatilidad como difusión, como el Heston o el SABR, permiten explicar la sonrisa de volatilidad así como su comportamiento dinámico ante cambios en el activo subyacente. Sin embargo, estos modelos fallan en replicar otro hecho estilizado presente en los datos de mercado, el grado de persistencia en el proceso de volatilidad. En ese sentido, los modelos de volatilidad fraccionaria son más generales, ya que permiten explicar los diferentes grados de persistencia observados en los datos de mercado, variando un único parámetro, el índice Hurst ($H \in (0, 1)$):

- El proceso de volatilidad, en el largo plazo, presenta memoria larga, es decir, su función de autocorrelación decae lentamente (ver Comte et al (1998)[10]). Para replicar esto, el parámetro Hurst debe ser mayor a un medio ($H > 0.5$).
- El proceso de volatilidad, en el corto plazo, presenta memoria corta, es decir, su función de autocorrelación decae exponencialmente (ver Ålos et al (2007)[2] y Gatheral et al (2018) [17]). Para replicar esto, el parámetro Hurst debe ser menor a un medio ($H < 0.5$).

En este trabajo tomamos como ejemplo el modelo de volatilidad fraccionaria presentado en Ålos y Shiraya (2019)[3], el cual es la solución al siguiente sistema de EDE:

$$\begin{aligned} dF_t &= F_t \sigma_t \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t \right), \quad \forall t \in [0, T] \\ \sigma_t &= \sigma_0 \exp \left(\nu W_t^H - \frac{\nu^2 t^{2H}}{4H} \right), \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde, W_t^H denota un movimiento Browniano fraccionario.

La ventaja de este tipo de modelos es que permite explicar una mayor cantidad de hechos estilizados del mercado; sin embargo, no cuentan con formas analíticas de solución. En consecuencia, se requiere utilizar métodos numéricos para poder encontrar los precios de las opciones y, una vez se determine el precio, optimización numérica para encontrar la volatilidad implícita. En consecuencia, este enfoque demanda una considerablemente mayor cantidad de tiempo, lo cual puede llegar a ser inviable en la industria. Los métodos numéricos utilizados en este trabajo son presentados a detalle en el Anexo B.

4.4 Introducción a los derivados de volatilidad

Los derivados de volatilidad son instrumentos financieros que son comercializados para coberturarse en caso vengan periodos con alta volatilidad. Definimos los derivados de volatilidad como aquellos instrumentos financieros cuyo pago depende explícitamente de la volatilidad (varianza) realizada ($\text{PayOff}_T = f(\tilde{\sigma})$). En esta sección presentaremos los derivados de volatilidad más populares en el mercado.

El Variance Swap (VAS) y el Volatility Swap (VOS) cuyas funciones de pago al vencimiento (T) son:

$$VAS_T = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\sigma}_s^2 ds - K_{var}, \quad y \quad VOS_T = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\sigma}_s^2 ds} - K_{vol}, \text{ respectivamente,}$$

donde K_{var} es el strike del VAS y K_{vol} es el strike del VOS.

Con el fin de mostrar como son aplicados los objetos matemáticos previamente presentados, en el siguiente capítulo se estudia a detalle los tres resultados sobre derivados de volatilidad presentados en Carr y Lee (2009)[8] y se discuten las ventajas o desventajas de su implementación. La estructura

del capítulo es la siguiente. Primero, presentamos y probamos el primer resultado propuesto en Carr y Lee (2009)[8] y discutimos brevemente las fortalezas y debilidades de este resultado en la práctica. Segundo, utilizamos un modelo de volatilidad estocástica para simular datos, los cuales utilizamos para calcular el resultado previamente descrito. Tercero, pasamos al siguiente resultado y repetimos los puntos anteriores. Finalmente, se presenta una extensión del último resultado.



Capítulo 5

Los resultados de Carr y Lee (2009)

En el capítulo anterior presentamos los derivados de volatilidad como aquellos derivados cuyas funciones de pago dependen explícitamente de la volatilidad. Asimismo, resaltamos que los derivados de volatilidad más populares en el mercado son el Variance Swap (VAS) y el Volatility Swap (VOS) cuyas funciones de pago al vencimiento son las siguientes:

$$VAS_T = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\sigma}_s^2 ds - K_{var}, \quad y \quad VOS_T = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\sigma}_s^2 ds} - K_{vol},$$

donde K_{var} es el strike del VAS y K_{vol} es el strike del VOS.

En Carr y Lee (2009)[8] se presentan los siguientes tres resultados fundamentales sobre derivados de volatilidad

- La replicación de $\tilde{\sigma}^2$ monitoreado en tiempo discreto con un 'delta hedging' de un contrato logarítmico genera un error de tercer orden de los retornos diarios.
- Existe una relación entre el valor teórico de K_{var} y el promedio de la varianza implícita a través de una medida estandarizada del strike (K).
- La volatilidad implícita cuando $F = K$ (denotada como ATMI) obtenida con un modelo de volatilidad estocástica (bajo ciertos supuestos) es una buena aproximación de K_{vol} .

En esta sección presentamos los tres resultados descritos en [8] detallando sus pruebas. Asimismo, discutimos sobre la viabilidad de su uso en la industria mediante un ejercicio de simulación.

5.1 Un portafolio de cobertura que replique la varianza observada al vencimiento

El método más utilizado en las finanzas cuantitativas para determinar el precio de instrumentos derivados complejos es construir un portafolio, compuesto por instrumentos financieros más simples (como bonos, acciones u opciones europeas), cuyo valor al vencimiento ($t = T$) sea igual al pago del derivado. Este método se conoce como portafolio de cobertura, ya que permite al emisor del derivado cubrirse del riesgo al replicar la función de pago del producto ofrecido, obteniendo como ganancia la comisión o fee de vender este producto.

En esta sección se presenta y evalúa el primer resultado de Carr y Lee (2009)[8], el cual consiste en construir un portafolio de cobertura para la varianza que se observará al vencimiento del contrato. Cabe precisar que, el portafolio se construye de tal forma que necesita rebalancearse diariamente. En ese sentido, en Carr y Lee (2009)[8] se determina el orden de error de replicar la varianza realizada con un portafolio de cobertura rebalanceado diariamente.

5.1.1 El primer resultado: El orden de error de tercer orden al replicar discretamente la varianza realizada

En esta sección seguimos a Carr y Lee (2009)[8, p. 9- 11]. Consideremos un conjunto finito de índices de tiempo $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ donde podemos comerciar contratos de Futuros asumiendo cierres diarios. Una medida estándar anualizada de la varianza observada de los retornos diarios se define como

$$\tilde{\sigma}^2 := \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n \ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right).$$

El primer resultado consiste en construir un portafolio de cobertura para la varianza observada al vencimiento.

Proposición 11. *Funcion de pago de la varianza observada al vencimiento $\tilde{\sigma}^2$: Podemos descomponer $\tilde{\sigma}^2$ en tres términos*

$$\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{2N}{n} \left(\frac{1}{F_{i-1}} - \frac{1}{F_0} \right) (F_i - F_{i-1}) + \left[\int_0^{F_0} \frac{2N}{nK^2} (K - F_n)^+ dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{2N}{nK^2} (F_n - K)^+ dK \right] + \sum_{i=1}^n O(R_i^3)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \text{Posición Dinámica}(DP) + \text{Posición Estática}(SP) + \text{Fuente de error}(SE). \quad (5.1)$$

Proof. Denotemos el retorno diario del periodo i como R_i

$$R_i = \frac{F_i - F_{i-1}}{F_{i-1}}.$$

Una expansion de Taylor de $\ln(F_i)$ alrededor de F_{i-1} resulta en:

$$\ln(F_i) = \ln(F_{i-1}) + R_i - \frac{R_i^2}{2} + \frac{R_i^3}{3} + O(R_i^4), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\ln(F_i) - \ln(F_{i-1}) = R_i - \frac{R_i^2}{2} + \frac{R_i^3}{3} + O(R_i^4), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Elevando al cuadrado tenemos,

$$\ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right) = R_i^2 - R_i^3 + \frac{11}{12}R_i^4 + O(R_i^5), \quad i = 1, 2, \dots, n..$$

Despejando R_i^2 de esta ecuacion tenemos,

$$R_i^2 = \ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right) + R_i^3 - \frac{11}{12}R_i^4 + O(R_i^5), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Reemplazando esta expresion en la expansión de $\ln(F_i)$, resulta en:

$$\ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right) = 2R_i - 2(\ln(F_i) - \ln(F_{i-1})) - \frac{R_i^3}{3} + O(R_i^4), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sumando sobre i , obtenemos la suma al cuadrado de los log-retornos

$$\sum_{i=1}^n \ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right) = 2 \sum_{i=1}^n R_i - 2(\ln(F_n) - \ln(F_0)) - \sum_{i=1}^n \frac{R_i^3}{3} + \sum_{i=1}^n O(R_i^4). \quad (5.2)$$

Si usamos la expansion de Taylor sobre $\ln(F_n)$ alrededor de F_0 , expresando el residuo de Taylor en su forma exacta¹, tenemos:

$$\ln(F_n) = \ln(F_0) + \frac{F_n - F_0}{F_0} - \int_0^{F_n} (F_n - K) \frac{1}{K^2} dK.$$

Notar que, $F_n \in [0, \infty]$ y que $\int_0^{F_n} (F_n - K) \frac{1}{K^2} dK > 0$; por lo tanto, podemos expresar esta integral en términos de pagos de opciones vainilla

$$\ln(F_n) = \ln(F_0) + \frac{F_n - F_0}{F_0} - \int_0^{F_0} \frac{(K - F_n)^+}{K^2} dK - \int_{F_0}^{\infty} \frac{(F_n - K)^+}{K^2} dK.$$

Reemplazando este resultado en la ecuacion (5.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right) &= 2 \sum_{i=1}^n R_i - 2 \frac{F_n - F_0}{F_0} + \int_0^{F_0} \frac{2}{K^2} (K - F_n)^+ dK \\ &\quad + \int_{F_0}^{\infty} \frac{2}{K^2} (F_n - K)^+ dK \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{R_i^3}{3} + \sum_{i=1}^n O(R_i^4). \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que $\tilde{\sigma}^2 := \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n \ln^2\left(\frac{F_i}{F_{i-1}}\right)$. Lo cual concluye la prueba □

A continuación se interpreta cada término en (5.1):

- DP: El primer término de la derecha son las ganancias y pérdidas (PL) de una posición dinámica en futuros

$$\text{compro } e^{-r(t_n - t_i)} \frac{2N}{n} \left(\frac{1}{F_{i-1}} - \frac{1}{F_0} \right) \text{ de futuros cada día}$$

- SP: El segundo término son las ganancias y pérdidas (PL) de una posición estática en opciones

$$\text{compro } \frac{2N}{nK^2} dK \text{ de opciones Put, con todos los Strike menores al precio inicial, y}$$

$$\text{compro } \frac{2N}{nK^2} dK \text{ de opciones Call con todos los Strike mayores al precio inicial}$$

- SE: El tercer término es la fuente de error de la aproximación.

El siguiente fragmento de código calcula la varianza realizada y las partes de esta descomposición:

¹Si $f^{(n+1)}$ es continua en un intervalo abierto I donde $a, x \in I$, entonces, el residuo de Taylor de orden n ($R_n(x)$) es equivalente a:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s) ds$$

```

1 def RepErrorSVS(K,N,F):
2     """This function give us a realize variance approximation
3     base on the first finding of Carr&Lee2009 """
4     ## N son el número de días en un año
5
6     n = len(F)-1
7
8     '''Dinamic Position (DP)'''
9     DP = 2*N/n*sum((1/F[0:n]-1/F[0])*np.diff(F)) #OK
10
11     #### #inputs for Static Position (SP)
12     Kput = K[np.where(K<=F[0])]
13     Kcall = K[np.where(K>=F[0])]
14     nput = len(Kput)
15     ncall = len(Kcall)
16     payoffPut = (Kput[1:nput]>F[-1])*(Kput[1:nput]-F[-1])
17     INTput = 2*N/n*sum(1/(Kput[1:nput]**2)*payoffPut)*F[0]/nput
18     payoffCall= (F[-1]>Kcall[1:ncall])*(F[-1]-Kcall[1:ncall])
19     INTcall = 2*N/n*sum(1/(Kcall[1:ncall]**2)*payoffCall)*(K[-1]-F[0])/(ncall-nput)
20     '''Static Position (SP)'''
21     SP = INTput+INTcall
22
23     '''Source of Error (SE)'''
24     R = np.diff(F)/F[0:n]
25     SE = -N/(3*n)*sum(R**3)+(5*N)/(12*n)*sum(R**4)
26
27     '''Realized Variance Descomposition'''
28     V = DP+SP
29
30     # varianza observada
31
32     last = len(F)
33
34     VAR = N/n*sum(np.log(F[1:last]/F[0:-1])**2)
35
36     mydata = {"varianza observada":VAR,
37              "posicion dinamica":DP,
38              "posicion estatica":SP,
39              'varianza aproximada':V
40              }
41     return mydata

```

Cod. 8: Código para testear el primer resultado de Carr y Lee

En la industria, el hecho de contar con una estrategia de cobertura para la varianza realizada del subyacente es de gran utilidad. Sin embargo, en [8] no se discute la cantidad de información necesaria para aplicar este resultado adecuadamente. A continuación, evaluamos este resultado con diferentes conjuntos de información para averiguar a partir de cuando se puede recomendar aplicar en la práctica.

5.1.2 Evaluación del primer resultado

Para evaluar el primer resultado de Carr y Lee (2009)[8], necesitamos simular la senda del precio forward; es decir, se reemplaza la serie de tiempo con datos de mercado del precio forward de un instrumento de renta variable con una trayectoria del precio forward obtenida con un modelo de volatilidad estocástica.

Para simular la senda del precio forward se utilizó el modelo de Heston, descrito en 4.3.1. Debido a que los modelos matemáticos para el pricing de opciones son modelos en tiempo continuo, necesitamos discretizarlos para poder trabajar con ellos.

Existen diversos métodos de discretización, los más utilizados para este fin son el método de Euler Maruyama y el método de Milstein, los cuales se presentan brevemente en el Anexo A. En esta oportunidad se optó por utilizar el método de discretización de Milstein:

$$\sigma_{i+1}^2 = \sigma_i^2 + \kappa(\theta - \sigma_i^2)\Delta t + \nu\sqrt{\sigma_i^2}\Delta B_i + \frac{\nu^2}{4}(\Delta B_i^2 - \Delta t),$$

donde, σ_{i+1}^2 es la varianza instantánea en el periodo $i+1$, la cual está distanciada de σ_i^2 por un paso de tiempo Δt . Ahora, podemos simular el precio forward. Consideremos $F_i = e^{X_i}$, donde

$$X_{i+1} = X_i + (-0.5\sigma_i^2)\Delta t + \sqrt{\sigma_i^2}(\rho\Delta W_i + \sqrt{1-\rho^2}\Delta B_i).$$

El siguiente fragmento de código muestra este procedimiento:

```

1 def HestonMilstein (T, n, sigmasquare0, F0, kappa, theta, nu, rho,B,W):
2     # time step and time index
3     dt = T/n; t = np.arange(0,T+T/n,dt)
4     # instantaneous variance brownian motion
5     dB = np.diff(B); dB2 = np.diff(B**2)
6     # forward price brownian motion
7     dW = np.diff(W)
8     # initial values for instantaneous variance and forward
9     sigmasquare=np.zeros(n+1); sigmasquare[0]=sigmasquare0
10    X=np.zeros(n+1); X[0]=np.log(F0)
11    # stochastic volatility compute from Heston Model from 0 to T
12    for i in range(0,n):
13        sigmasquare[i+1] = sigmasquare[i] + kappa*(theta-sigmasquare[i])*dt +
14            nu*np.sqrt(sigmasquare[i])*dB[i]+nu**2/4*(dB2[i]-dt)
15        # absorbing asumption
16        if sigmasquare[i+1] < 0:
17            sigmasquare[i+1] = 0
18        X[i+1] = X[i]+(-0.5*sigmasquare[i])*dt+
19            np.sqrt(sigmasquare[i])*(rho*dW[i]+np.sqrt(1-rho**2)*dB[i])
20    return {'sqrtvol_path': sigmasquare , 'forward_path': np.exp(X)}

```

Cod. 9: Código para testear el primer resultado de Carr y Lee

En este ejercicio se ha fijado el precio inicial del forward en 100 ($F_0 = 100$) y la varianza instantánea inicial en 0.04 ($\sigma_0^2 = 0.04$). Se asume que en el mercado se transan contratos con Strikes entre 1 y 1000 ($K \in [1, 1000]$). Además fijamos en 360 el número de pasos que tiene la senda de F , donde consideramos cada punto de esta trayectoria como el dato de mercado observado al final del día. Es decir, la senda simulada reemplaza un año de datos de mercado.

Para evaluar este resultado en diferentes condiciones fraccionamos la trayectoria de F para considerar diferentes vencimientos ($T \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, 1]$), para ello se fija la distancia entre Strikes en 0.1 $dK = 0.1$. Asimismo, se evalúa este resultado para diferentes distancias entre Strikes $dK \in [1E - 05, 0.001, 0.1, 1, 3, 10]$, para ello se fija el vencimiento en 1 año ($T = 1$).

Para simular la senda del precio forward y de la varianza instantánea del mismo, mostradas en la Figura 5.1, asumimos los siguientes parámetros: 1) el vol of vol es igual a 0.3 ($\nu = 0.3$); 2) la correlación entre el retorno instantáneo del precio forward y de la variación de la volatilidad instantánea es -0.5 ($\rho = -0.5$); y 3) la velocidad de convergencia de la varianza instantánea es de un año ($\kappa = 1$).

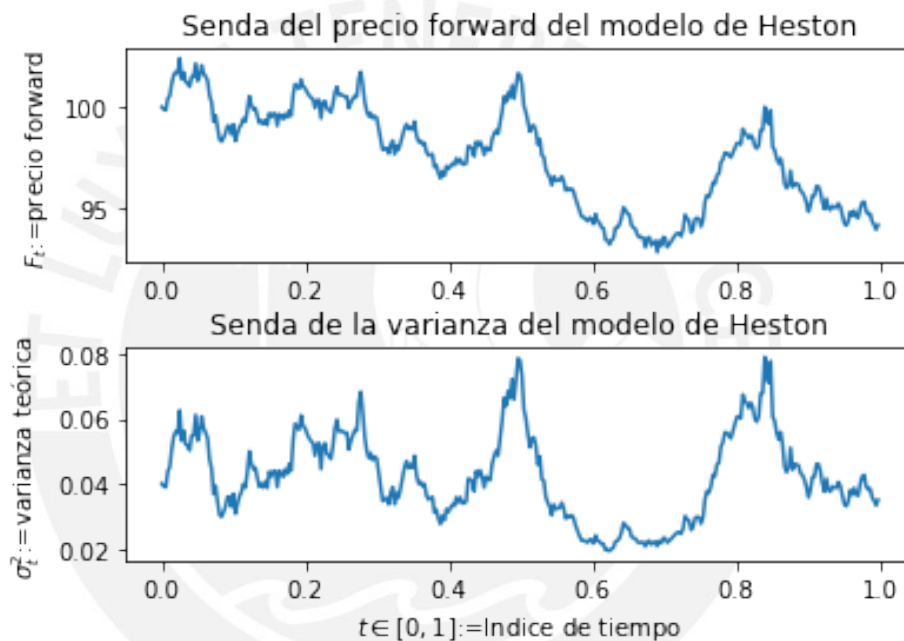


Fig. 5.1: Sendas del precio forward y de la varianza instantánea del Modelo de Heston

El primer resultado de Carr y Lee (2009)[8] nos dice que podemos expresar la varianza observada ($\tilde{\sigma}^2$) en función de tres términos: 1) una posición dinámica en forwards, 2) una posición estática en opciones OTM, y 3) el error. Por lo tanto, se espera una diferencia muy pequeña entre la varianza realizada con datos sintéticos ($\tilde{\sigma}^2$) y la suma de la posición dinámica y la posición estática, o varianza aproximada, obtenidas con los mismos datos sintéticos. De ser el caso, habría evidencia que sustente aplicar este resultado en la práctica.

Table 5.1: Evaluación del primer resultado para diferentes vencimientos (Elaboración propia)

	T=0.1	T=0.2	T=0.3	T=0.5	T=0.75	T=1
Varianza Observada	0.00770517	0.00674044	0.00634585	0.00586255	0.00534409	0.00562935
Dinamic Position	0.00577307	0.00623354	0.00627225	0.00531096	0.00115713	0.00178444
Static Position	0.00352562	0	0.000308384	0	0.00490371	0.0044094
Varianza Aproximada	0.00929868	0.00623354	0.00658063	0.00531096	0.00606084	0.00619384

En la Tabla 5.1 se muestran la evaluación del primer resultado de [8] efectuada con una senda de datos

sintéticos considerando diferentes vencimientos (nos centramos en el error de la posición dinámica). Se observa que el mejor resultado no es ni el vencimiento más corto ($T = 0.1$) ni el más largo ($T = 1$), sino uno intermedio de 108 días ($T = 0.3$).

Para verificar que la evaluación efectuada no depende de la senda utilizada, se generaron 1000 sendas y se calculó el error cuadrático medio para cada vencimiento. La Tabla 5.2 presenta los resultados de esta verificación.

Table 5.2: Error promedio del primer resultado para diferentes vencimientos (Elaboración propia)

	T=36	T=72	T=108	T=180	T=270	T=360
maturity (in days)	8.43144e-05	3.09345e-05	2.7434e-05	6.66628e-05	0.000154166	0.000425222

Dada la evaluación efectuada, se concluye que este resultado es sensible al vencimiento teniendo un menor error cuando se aplica con vencimientos entre 70 y 120 días.

Table 5.3: Evaluación del primer resultado para diferentes distancias entre Strikes (Elaboración propia)

	dK=1E-04	dK=0.001	dK=0.1	dK=1	dK=3	dK=10
Varianza Observada	0.00562001	0.00562001	0.00562001	0.00562001	0.00562001	0.00562001
Dinamic Position	0.00208412	0.00208412	0.00208412	0.00208412	0.00208412	0.00208412
Static Position	0.00353396	0.00353445	0.00358878	0.00408773	0.00406376	0.0105954
Source of Error	1.83747e-06	1.83747e-06	1.83747e-06	1.83747e-06	1.83747e-06	1.83747e-06
Varianza Aproximada	0.00561992	0.00562042	0.00567474	0.00617369	0.00614972	0.0126813

En la Tabla 5.3 se muestra la evaluación del primer resultado de [8] efectuada con una senda de datos sintéticos considerando diferentes distancias entre Strikes (ahora nos centramos en el error de la posición estática). Se observa que el mejor resultado se obtiene con la menor distancia ($dK = 1E - 05$). Esto es lógico, ya que la posición estática consiste en un portafolio conformado por un continuo de Opciones Europeas. Por lo tanto, a mayor cantidad de opciones disponibles (con diferentes Strikes) menor el error.

Para verificar que la evaluación efectuada no depende de la senda utilizada, se generaron 1000 sendas y se calculó el error cuadrático medio para cada distancia entre Strikes. La Tabla 5.4 presenta los resultados de esta verificación.

Table 5.4: Error promedio del primer resultado para diferentes distancias entre Strikes (Elaboración propia)

	dK=1	dK=2	dK=3	dK=5	dK=7.5	dK=10
distant between K	0.000410586	0.000222728	0.000174812	0.00034416	0.000520822	0.00207293

Dado los resultados obtenidos en este ejercicio, se concluye que este resultado es sensible a la distancia entre Strikes o al número de Strikes utilizados (mientras más mejor) teniendo un menor error cuando se aplica una distancia entre Strikes entre $1E - 05$ y 0.1 ($dK \in [1E - 05, 0.1]$).

5.2 El Strike del VAS y su relación con las varianzas implícitas

Un resultado altamente conocido en la industria es que el valor teórico de la tasa del Variance Swap (o Strike del Variance Swap) es equivalente a mantener continuamente una posición de $\frac{1}{K^2}$ en opciones "Out of the Money" (OTM).

Proposición 12. *El Strike del variance swap (K_{var}) como un portafolio de opciones europeas OTM:*

Asumamos por simplicidad que la tasa corta es igual a cero ² ($r = 0$), luego

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_F^\infty \frac{1}{K^2}C(K)dK + \int_0^F \frac{1}{K^2}P(K)dK \quad (5.3)$$

donde,

- K_{var} es el Strike del VAS,
- T es el vencimiento del contrato del VAS,
- K es el Strike de una opción Europea
- F o F_0 es el precio forward del activo subyacente al inicio del contrato,
- $C(K)$ es el precio de una opción Call con Strike K , y
- $P(K)$ es el precio de una opción Put con Strike K

Proof. Asumiendo una probabilidad de riesgo neutral P tal que:

$$dF_t = F_t\sigma_t dZ_t.$$

Aplicando el Lema de Ito a $\ln(F_t)$ tenemos:

$$d\ln(F_t) = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 dt + \sigma_t dZ_t.$$

Notemos que:

$$\frac{dF_t}{F_t} - d\ln(F_t) = \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt.$$

Si multiplicamos por $\frac{2}{T}$ e integramos ambas partes obtenemos:

$$\frac{2}{T} \left(\int_0^T \frac{dF_t}{F_t} - \ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right) \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt.$$

Recordemos que, $K_{var} = E\left[\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt\right]$. En consecuencia: $K_{var} = \frac{2}{T} E\left[\int_0^T \frac{dF_t}{F_t} - \ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right)\right]$. Asumiendo que $\sigma_t \in L^2$, tenemos que:

$$K_{var} = \frac{2}{T} E\left[-\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right)\right].$$

Cuando probamos la ecuación (5.1) en la sección anterior, verificamos que

$$\ln(F_n) = \ln(F_0) + \frac{F_n - F_0}{F_0} - \int_0^{F_0} \frac{(K - F_n)^+}{K^2} dK - \int_{F_0}^\infty \frac{(F_n - K)^+}{K^2} dK.$$

²Este supuesto es fácilmente relajable, pero simplifica significativamente (5.3)

En consecuencia,

$$K_{var} = \frac{2}{T} E \left[-\frac{F_n - F_0}{F_0} + \int_0^{F_0} \frac{(K - F_n)^+}{K^2} dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{(F_n - K)^+}{K^2} dK \right].$$

Recordemos que el precio de una Call es

$$C(K) = e^{-rT} E[(F_n - K)^+]$$

y el de una Put es

$$P(K) = e^{-rT} E[(K - F_n)^+].$$

Por lo tanto,

$$K_{var} = \frac{2}{T} \left(-E \left[\frac{F_T - F_0}{F_0} \right] + \int_0^{F_0} \frac{e^{rT} P(K)}{K^2} dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{e^{rT} C(K)}{K^2} dK \right).$$

Si asumimos, por simplicidad, que $r = 0$, se completa la prueba

□

En el siguiente fragmento de código se muestra como calculamos el Strike del Variance Swap con opciones europeas Out of The Money (OTM). Los insumos en esta función son:

- K : un array con un "continuo" de posibles Strikes para las opciones europeas
- F0 : el precio actual del subyacente (un futuro)
- C,P: array con el precio de la opción europea para cada Strike K

```

1 def VarSwapRate(K,F0,C,P,T):
2     """This function give us an expression to write a Variance Swap Rate """
3     #####inputs#####
4     Kput = K[np.where(K<=F0)]; Kcall = K[np.where(K>=F0)]
5     nput = len(Kput); ncall = len(Kcall)
6     dKput = np.diff(Kput); dKcall= np.diff(Kcall)
7     #####integrales#####
8
9     if len(P) == nput-1:
10        INTput = sum(1/(Kput[1:nput]**2)*P*dKput)
11    elif len(P) == nput:
12        INTput = sum(1/(Kput[1:nput]**2)*P[1:nput]*dKput)
13
14    if len(C) == ncall-1:
15        INTcall= sum(1/(Kcall[1:ncall]**2)*C*dKcall)
16    elif len(C) == ncall:
17        INTcall= sum(1/(Kcall[1:ncall]**2)*C[1:ncall]*dKcall)
18
19    % Strike del Variance Swap
20    K_var = 2/T*(INTcall+INTput)
21
22    return K_var

```

Cod. 10: Código para calcular el Strike del Variance Swap con opciones OTM

5.2.1 El segundo resultado: El Strike del VAS como un promedio ponderado de varianzas implícitas

Cabe precisar que, en la práctica es más fácil trabajar con volatilidades implícitas que con precios de opciones, ya que es más factible completar el smile/skew de volatilidad para un vencimiento (T) y todos los strikes (K) disponibles, que contar con todos los precios de mercado de las opciones vainilla.

En ese contexto, en Carr y Lee (2009)[8, p. 12 a p. 15] proponen una forma alternativa de hallar K_{var} como un promedio ponderado de varianzas implícitas, donde el ponderador es la densidad de la normal estandar $n(\cdot)$

Proposición 13. *El Strike del variance swap (K_{var}) como un promedio ponderado de varianzas implícitas:*

$$K_{var} = \int_{-\infty}^{\infty} n(y) \bar{I}(y)^2 dy \quad (5.4)$$

donde,

- $n(y)$ es la densidad de una variable aleatoria normal estandar evaluada en y ,
- $\bar{I}(y)^2$ es la varianza implícita expresada en función de y .

Proof. En adelante, asumamos T fijo; por lo tanto, $I(T, K) = I(K)$. Antes de empezar con la prueba denotemos algunas variables a utilizar:

- $x := \ln\left(\frac{K}{F}\right)$ es una medida normalizada de la posición de la opción, conocida como "moneyness".
- $\hat{I}(x)$ es la volatilidad implícita obtenida con el modelo de Black.
- $y = d_2(x) = \frac{-x}{\hat{I}(x)\sqrt{T}} - \frac{\hat{I}(x)\sqrt{T}}{2}$ es una nueva medida "moneyness" para una opción Call.

Notar que, si asumimos que la función $d_2(x)$ es estrictamente decreciente en x , se puede afirmar que la función $d_2^{-1}(y)$ existe.

Partiendo de (5.3):

$$\frac{T}{2} K_{var} = \int_F^\infty \frac{1}{K^2} C(K) dK + \int_0^F \frac{1}{K^2} P(K) dK.$$

Al integrar por partes (la opción como u y $\frac{1}{K^2} dK$ como dv) obtenemos:

$$\frac{T}{2} K_{var} = \int_F^\infty \frac{1}{K} C'(K) dK + \int_0^F \frac{1}{K} P'(K) dK - \frac{C(K)}{K} \Big|_F^{+\infty} - \frac{P(K)}{K} \Big|_0^F.$$

Recordando la "paridad Put-Call": $C(K) + K = F + P(K)$, y que $\lim_{K \rightarrow \infty} C(K) = \lim_{K \rightarrow 0} P(K) = 0$, tenemos que

$$\frac{T}{2} K_{var} = \int_F^\infty \frac{1}{K} C'(K) dK + \int_0^F \frac{1}{K} P'(K) dK.$$

Siguiendo el modelo de Black donde $I(K)$ es la volatilidad implícita como función de K

$$C(K) = FN(d_2(K) + I(K)\sqrt{T}) - KN(d_2(K)).$$

Si diferenciamos $C(K)$ y factorizamos $n(d_2(K))$, donde $d_2(K) = \frac{\ln(F) - \ln(K) - I^2(K)T/2}{I(K)\sqrt{T}}$, tenemos:

$$\begin{aligned} C'(K) &= -N(d_2(K)) + Fn(d_2(K) + I(K)\sqrt{T})(d_2'(K) + I'(K)\sqrt{T}) - Kn(d_2(K))d_2'(K) \\ &= -N(d_2(K)) + \left(Fe^{-\left(\frac{I^2(K)T}{2} + I(K)\sqrt{T}d_2(K)\right)} (d_2'(K) + I'(K)\sqrt{T}) - Kd_2'(K) \right) n(d_2(K)) \\ &= -N(d_2(K)) + \sqrt{T}n(d_2(K))KI'(K). \end{aligned}$$

Siguiendo los mismos pasos:

$$P'(K) = N(-d_2(K)) + \sqrt{T}n(d_2(K))KI'(K).$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2}K_{var} &= \int_F^\infty \frac{1}{K} \left(-N(d_2(K)) + \sqrt{T}n(d_2(K))KI'(K) \right) dK + \\ &\int_0^F \frac{1}{K} \left(N(-d_2(K)) + \sqrt{T}n(d_2(K))KI'(K) \right) dK. \end{aligned}$$

A continuación se realiza un cambio de variable en la integral

$$x = \ln \frac{K}{F} \Rightarrow dx = \frac{F}{K} dK \text{ y } \hat{I}(x) = \sigma(Fe^x),$$

notar que si $K > F$, entonces $x \in (0, +\infty)$. Por otro lado, si $K < F$, entonces $x \in (-\infty, 0)$. En consecuencia, obtenemos la siguiente equivalencia

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_0^\infty \left(-N(d_2(x)) + \sqrt{T}n(d_2(x))\hat{I}'(x) \right) dx + \int_{-\infty}^0 \left(N(-d_2(x)) + \sqrt{T}n(d_2(x))\hat{I}'(x) \right) dx.$$

Agregando las integrales, tenemos que:

$$\frac{T}{2}K_{var} = - \int_0^\infty N(d_2(x)) dx + \int_{-\infty}^0 N(-d_2(x)) dx + \int_{-\infty}^\infty \sqrt{T}n(d_2(x))\hat{I}'(x) dx.$$

Si integramos por partes las dos primeras integrales, por la simetría de la función de densidad de la distribución normal tenemos que:

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_{-\infty}^\infty \sqrt{T}\hat{I}'(x)n(d_2(x)) dx + \int_{-\infty}^\infty xn(d_2(x))d_2'(x) dx - xN(d_2(x)) \Big|_0^\infty + xN(-d_2(x)) \Big|_{-\infty}^0.$$

Dado que la suma de los términos de frontera va a cero, si integramos por partes la primera integral, tenemos que:

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_{-\infty}^\infty \sqrt{T}\hat{I}(x)d_2(x)n(d_2(x))d_2'(x) dx + \sqrt{T}\hat{I}(x)n(d_2(x)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^\infty xn(d_2(x))d_2'(x) dx.$$

Como el término de frontera va a cero,

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_{-\infty}^\infty \sqrt{T}\hat{I}(x)d_2(x)n(d_2(x))d_2'(x) dx + \int_{-\infty}^\infty xn(d_2(x))d_2'(x) dx.$$

Factorizando el factor común tenemos,

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_{-\infty}^\infty n(d_2(x))d_2'(x) \left(\sqrt{T}\hat{I}(x)d_2(x) + x \right) dx.$$

Notemos que $x + \sqrt{T}\hat{I}(x)d_2(x) = -\frac{\hat{I}(x)^2 T}{2}$, entonces podemos simplificar esta integral a:

$$\frac{T}{2}K_{var} = \int_{-\infty}^\infty n(d_2(x))d_2'(x) \left(-\frac{\hat{I}(x)^2 T}{2} \right) dx.$$

Finalmente, cambiando de variable, de x a $y := d_2(x)$, obtenemos

$$K_{var} = \int_{-\infty}^\infty n(y)\bar{I}^2(y) dy.$$

Lo cual concluye la prueba □

En el siguiente fragmento de código se muestra como calculamos el Strike del Variance Swap con utilizando las varianzas implícitas. Los insumos en esta función son los mismos que en la anterior, pero en vez de los arrays con precios de opciones usamos un array con varianzas implícitas:

- T : El vencimiento de todos los contratos
- IV : un array con el implied volatility de las opciones europeas para cada Strike con T fijo

```

1 def CL_VarSwapRate(IV,K,FO,T):
2     """This function give us another expression to write a
3     Variance Swap Rate, second finding of Carr&Lee2009 """
4     N = len(K)
5     x = np.log(K/F)
6     y = -x/(IV*np.sqrt(T))-(IV*np.sqrt(T))/2
7     pdf_y = ss.norm(0, 1).pdf(y)
8     # given the order I obtain y (from higher to smaller when I want it from smaller to higher),
9     # I decide to multiple by minus to obtain dy (this guarantee a positive I)
10    dy = -np.diff(y)
11
12    K_var = sum(pdf_y[1:N]*IV[1:N]**2*dy)
13
14    return K_var

```

Cod. 11: Código para calcular el Strike del Variance Swap con varianzas implícitas

Utilizar la densidad de la normal como ponderador de las varianzas implícitas a través de nuestra variable moneyness "y" es muy útil, ya que la densidad evaluada en las colas de la normal es despreciable, como se muestra en la Figura 5.2. En consecuencia, el problema de no contar con muchas opciones vainilla en el mercado es menos crítico en (5.4) que en (5.3).

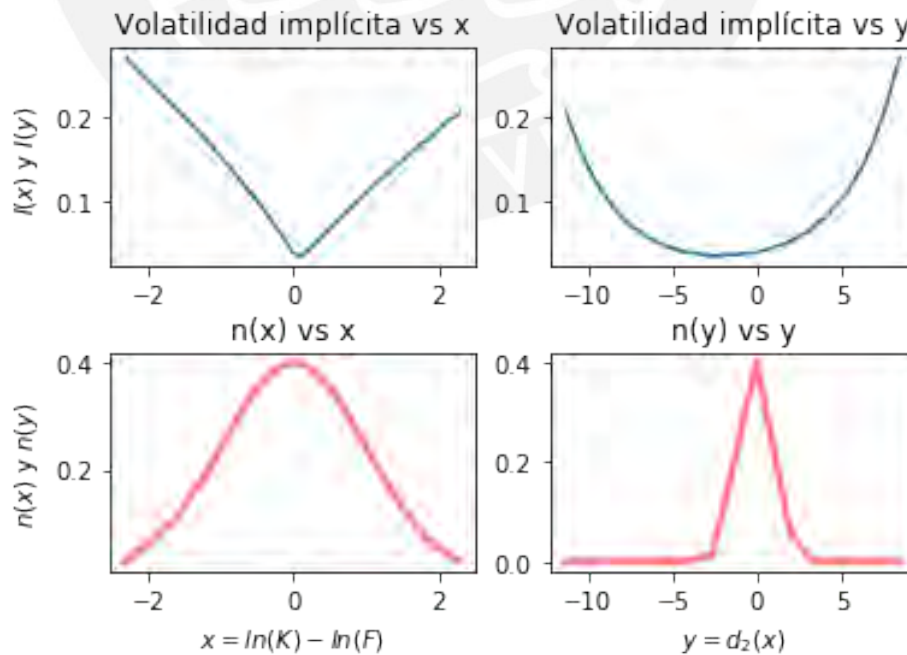


Fig. 5.2: Comparación entre la medida moneyness y y la medida moneyness x

A continuación, evaluaremos estas dos especificaciones de K_{var} sobre diferentes conjuntos de información para compararlas con mayor detalle.

5.2.2 Evaluación del segundo resultado

Para evaluar el segundo resultado de Carr y Lee (2009)[8], se necesita calcular K_{var} .

Como se mostró en este capítulo, hay dos formas de calcularlo. La primera consiste en mantener una posición de $\frac{1}{K^2}$ en opciones europeas OTM. Para esto necesitamos calcular el precio de las opciones europeas para una grilla de Strikes (Nuevamente se asume que en el mercado se transan contratos con Strikes entre 1 y 1000 ($K \in [1, 1000]$)). La distancia entre los Strikes (dK) será nuestra variable.

La segunda consiste en calcular un promedio ponderado de las varianzas implícitas, donde el ponderador es la densidad de la distribución normal estandar sobre una medida moneyness ($y = y(K)$). Para esto necesitamos calcular la volatilidad implícita para toda la grilla de Strikes.

Debido a que necesitamos calcular la volatilidad implícita para diferentes Strikes, el modelo SABR es el más conveniente para evaluar este resultado. Cabe precisar que, una vez se cuente con la volatilidad implícita para cada Strike, se puede calcular el precio de las opciones europeas utilizando la fórmula de Black.

En ese sentido, asumimos un precio inicial del forward igual 100 ($F_0 = 100$), la volatilidad instantánea inicial es igual a 0.2 ($\sigma_0 = 0.2$), el vol of vol igual a 0.3 ($\nu = 0.3$), la correlación entre los Brownianos del retorno del precio forward y de la variación de la volatilidad instantánea es -0.5 ($\rho = -0.5$), el vencimiento se fija en un año ($T = 1$). y, por simplicidad, la tasa de interés se fija en 0 ($r = 0$). El volatility skew y los precios de las opciones europeas calculados con el modelo SABR y estos parámetros son mostrados en la Figura 5.3.

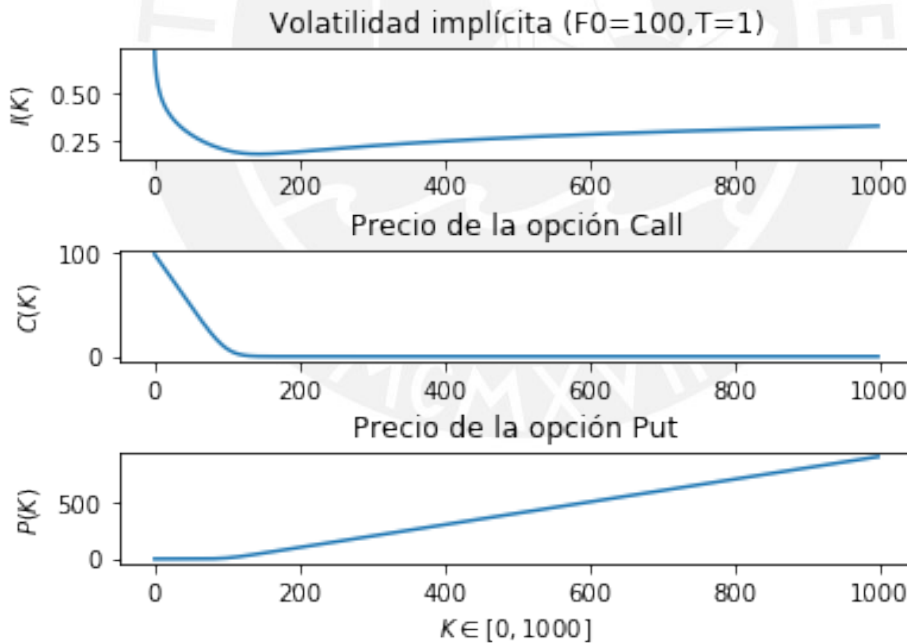


Fig. 5.3: Volatilidad implícita y precios de las opciones calculadas con el Modelo SABR

Siguiendo el segundo resultado en Carr y Lee (2009)[8], podemos calcular de forma exacta K_{var} ya sea como en la ecuación (5.3), en función de opciones europeas OTM, o como en la ecuación (5.4), en función de las varianzas implícitas (como recomiendan Carr y Lee (2009)[8]).

El problema en ambos métodos es que se requiere información para una gran cantidad de Strikes. Como podemos apreciar en la Tabla 5.5, cuando $dK = 1E - 05$ el K_{var} de ambos métodos convergen en 0.041931; por lo que, asumimos que este es el verdadero valor de K_{var} . Sin embargo, cuando $dK \geq 1$, el K_{var} calculado con la ecuación (5.3) se aleja mucho del verdadero K_{var} (el error es

Table 5.5: Evaluación del segundo resultado para diferentes distancias entre Strikes
(Elaboración propia)

	dK=1E-05	dK=0.001	dK=1	dK=2	dK=3	dK=5	dK=7.5	dK=10
K_var	0.041931	0.0419294	0.0398115	0.0389712	0.0358175	0.0346233	0.0348354	0.0280135
CL_K_var	0.041931	0.0419311	0.0419901	0.0420488	0.0421072	0.0422231	0.0423669	0.0425102

creciente respecto a la distancia entre Strikes).

Por otro lado, si calculamos el K_{var} con la ecuación (5.4) observamos el mismo comportamiento, pero el error es ínfimo en comparación con el obtenido usando la ecuación (5.3). Lo cual sugiere que el método propuesto en Carr y Lee (2009)[8] es mejor que el utilizado en el mercado.

5.3 El Strike del VOS y su relación con la volatilidad implícita At The Money (ATM).

En la sección anterior derivamos dos formas exactas de K_{var} , las cuales parten de un argumento de replicación por portafolio. Debido a que se conoce una forma cerrada para K_{var} , el VAS es el derivado de volatilidad preferido en la industria, ya que es fácil de valorizar y replicar.

Por el contrario, si hablamos del VOS, se tiene muy pocos resultados analíticos o aproximaciones disponibles para K_{vol} . En este contexto, en Carr y Lee (2009)[8, p. 16 a p. 17] derivan una aproximación para K_{vol} .

El problema con este resultado es uno de sus supuestos, los cuales se enumerarán en breve. Finalmente, como un adicional en esta sección, se analiza el orden de convergencia de la aproximación del K_{vol} propuesta por Carr y Lee (2009)[8] cuando $T \rightarrow t$, siguiendo el trabajo de Alos y Shiraya (2019)[3].

5.3.1 El tercer resultado: La aproximación de Carr y Lee.

El último resultado descrito por Carr y Lee (2009)[8] consiste en aproximar (K_{vol}) con información observable. La aproximación propuesta por Carr y Lee (2009)[8] se construye bajo los siguientes supuestos:

$H1$: existe una probabilidad riesgo neutral. En consecuencia, no hay oportunidades de arbitraje (NOA).

$H2$: no hay ni default ni saltos en el activo subyacente

$H3$: los incrementos del proceso de volatilidad instantánea son independientes de los retornos instantáneos

$H1$ es ampliamente aceptado en las finanzas cuantitativas. En cuanto $H2$ puede aceptarse, ya que dichos eventos son poco comunes y los contratos a evaluar se efectúan con vencimientos cortos. Sin embargo, el tercer supuesto es bastante restrictivo, ya que implica que el proceso de los retornos instantáneos y los incrementos de la volatilidad instantánea no están correlacionados, lo cual no se ajusta a los hechos estilizados del mercado.

Bajo estos supuestos, en Carr y Lee (2009)[8] se prueba la siguiente aproximación para K_{vol} :

Proposición 14. *La volatilidad implícita ATM como aproximación del Strike del volatility swap (K_{vol}): Bajo $H1$, $H2$ y $H3$, podemos aproximar K_{vol} como:*

$$K_{vol} \approx I(F_0, T) \quad (5.5)$$

donde $I(F_0, T)$ es el volatilidad implícita cuando $K = F_0$ o volatilidad implícita ATM.

Proof. Asumamos un mercado libre de fricciones, tasa de interes igual a cero (por simplicidad) y que el mercado está libre de arbitraje. Por lo tanto, podemos describir la dinámica del precio forward como

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma_t dW_t, \quad t \in [0, T]$$

donde, F_0 es conocido, W_t es un movimiento Browniano estándar bajo la probabilidad riesgo neutral Q , y σ_t es un proceso adaptado, independiente de W_t , que satisface $E_0^Q \int_0^T \sigma_t^2 dt < \infty$.

Consideremos un VOS monitoreado en tiempo continuo y con un nominal de \$1. Por definición, el payoff al vencimiento (T) de este instrumento es $\tilde{\sigma} - K_{vol}$, donde $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\sigma}_u^2 du}$ es la volatilidad realizada entre 0 y T y K_{vol} es el Strike del VOS, el cual es elegido tal que el valor inicial del VOS sea cero. Por lo tanto,

$$K_{vol} = E_0^Q[\tilde{\sigma}].$$

Asumiendo que la tasa de interes es igual a cero, el precio inicial de una opción Call puede reescribirse de la siguiente forma (aplicamos la transformación de Hull y White[21], quien asume que $\rho=0$, lo cual está comprendido en el supuesto de independencia):

$$\begin{aligned} C_0(F_0, K, T) &= E_0^Q(F_T - K)^+ \\ &= E_0^Q[E_0^Q(F_T - K)^+ | \mathcal{F}_T^\sigma] \\ &= E_0^Q[Black(F_0, T, K, \tilde{\sigma})] \\ &= E_0^Q[C_0(F_0, T, K, \tilde{\sigma})] \end{aligned}$$

donde,

\mathcal{F}_T^σ es la filtración generada por el proceso $\sigma \{\tilde{\sigma}_t\}_0^T$ y $Black(\cdot)$ es la fórmula de Black:

$$Black(F_0, T, K, \tilde{\sigma}) = F_0 N(d_1) - KN(d_2),$$

donde

- $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una normal estándar,
- $d_2 = \frac{\ln(F_0/K)}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} - \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}$, y
- $d_1 = d_2 + \tilde{\sigma}\sqrt{T}$

Asumiendo que el Call está ATM ($K = F_0$)

$$C_0(F_0, T) = E_0^Q F_0 \left[N\left(\frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}\right) - N\left(-\frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}\right) \right] = E_0^Q A(F_0, \tilde{\sigma}).$$

A continuación utilizaremos la expansión de Taylor en cada distribución evaluándola en cero

$$\begin{aligned} N\left(\pm \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}\right) &= N(0) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{x=0} \left(\pm \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}\right) - x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{x=0} \left(\pm \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}\right)^2 + O(\tilde{\sigma}^3\sqrt{T}^3) \\ &= N(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\pm \frac{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}{2}\right) + O(\tilde{\sigma}^3\sqrt{T}^3). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_0(F_0, T) = E_0^Q F_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\sigma}\sqrt{T} + O(\tilde{\sigma}^3\sqrt{T}^3) \right).$$

En consecuencia, K_{vol} se puede aproximar como:

$$K_{vol} = E_0^Q \tilde{\sigma} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{F_0\sqrt{T}} C_0(F_0, T).$$

Por otro lado, el ATMI $I(F_0, T)$ se define implícitamente por

$$C_0(F_0, T) = Black(F_0, T, I(F_0, T)) = F_0 \left[N\left(\frac{I(F_0, T)\sqrt{T}}{2}\right) - N\left(-\frac{I(F_0, T)\sqrt{T}}{2}\right) \right].$$

Por lo tanto, siguiendo los mismo pasos de la prueba anterior, se puede aproximar por

$$I(F_0, T) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{F_0\sqrt{T}} C_0(F_0, T).$$

Lo cual concluye la prueba. □

Sin embargo, como se indicó al principio, para llegar a este resultado se asume que la variación de la volatilidad y el retorno del subyacente tienen correlación igual a cero, lo cual hace de esta fórmula muy restrictiva como para aplicarla en la industria, ya que al analizar los datos de mercado se ha encontrado evidencia de que $\rho < 0$.

Debido a esto, en la siguiente sección se presenta el trabajo publicado en 2019 por Elisa Àlos y Kenichiro Shiraya[3], donde estudian el término de error de la aproximación de K_{vol} propuesta por Carr y Lee (2009)[8].

5.3.2 Sobre el término de error en la aproximación de Carr y Lee.

En Àlos y Shiraya (2019)[3] se estudia el orden de convergencia de la aproximación de K_{vol} propuesta en Carr y Lee (2009)[8] cuando $T \rightarrow t$ utilizando resultados de Cálculo de Malliavin.

Consideremos el siguiente modelo para el logaritmo del precio del subyacente bajo la probabilidad riesgo neutral

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s (\rho dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} dB_s), \quad \forall t \in [0, T] \\ \sigma_t^2 &\in L^2([0, T] \times \mathbb{D}^{1,2}) \\ Y_t &= \int_t^T \sigma_s^2 ds \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde,

- X_t es el logaritmo del precio en el periodo t ,
- W_t y B_t son movimientos brownianos estandar independientes, y
- σ_t^2 es la varianza instantanea que pertenece a la clase de procesos estocásticos cuadrado integrables, continuo por la derecha y \mathcal{F}_t -adaptados

En principio, en Carr y Lee (2009)[8] concluyen que, cuando $\rho = 0$,

$$K_{vol} \approx I(t, T, X_t, k_t^*)$$

donde $k_t^* = Ln(K) |_{K=F_t}$ es el ATM log Strike. Para encontrar el orden de convergencia del error de esta aproximación Àlos y Shiraya (2019)[3] realizan los siguientes supuestos:

$$H_1 : \exists a, b > 0, \text{ tal que } \sigma_t \in [a, b] \forall t \in [0, T],$$

$$H_2 : \sigma_t^2 \in \mathbb{L}^{1,2},$$

$$H_3 : \exists \delta \in (-0.5, 0.5) \text{ y } C > 0, \text{ tal que } \forall 0 < r < s < T$$

$$E_r[D_r \sigma_s^2] \leq C(s - r)^\delta.$$

donde, D_r es la derivada de Malliavin de σ_s^2 en r ,

$H_4 :$

$$A = \lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{(T - t)^{3+2\delta}} E_t \left[\int_t^T \left(E_r \left[\int_r^T D_r \sigma_s^2 ds \right] \right)^2 dr \right] < \infty.$$

A continuación, se procederá a calcular el orden de convergencia del error de $K_{vol} \approx I(t, T, X_t, k_t^*)$ siguiendo a Àlos y Shiraya (2019)[3] cuando $\rho = 0$ y asumiendo por simplicidad que $r = 0$, es decir $k_t^* = X_t$.

Proposición 15. Considerando el modelo definido en (5.6), cuando $\rho = 0$ y bajo H_1 y H_2 , $I(t, T, X_t, k_t^*)$ se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I(t, T, X_t, k_t^*) - E_t[v_t] &= -\frac{1}{32(T - t)} E_t \left[\int_t^T \frac{BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_r)}{(N'(d_1(k_t^*, BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_r))))^2} \times \right. \\ &\quad \left. \left(E_r \left[N'(d_1(k_t^*, v_t)) \frac{\int_r^T D_r^W \sigma_s^2 ds}{v_t} \right] \right)^2 dr \right]. \end{aligned}$$

Proof. La transformación de Hull y White permite reescribir el precio de una opción como:

$$V_t = E_t[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)],$$

donde $v_t = \sqrt{\frac{Y_t}{T-t}}$ representa la volatilidad realizada promedio entre t y T .

Por lo tanto, la "ATMI ($I = I(t, T, X_t, k_t^*)$)" satisface que:

$$I = BS^{-1}(k_t^*, E_t[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)]) = E_t[BS^{-1}(k_t^*, E_t[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)])].$$

Si restamos $E_t[v_t] = E_t[BS^{-1}(k_t^*, BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t))]$ en ambos lados, tenemos:

$$I - E_t[v_t] = E_t[BS^{-1}(k_t^*, E_t[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)]) - BS^{-1}(k_t^*, BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t))].$$

Denotemos $\Lambda_s := E_s[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)]$ y notemos que $\Lambda_T = BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)$, luego:

$$I - E_t[v_t] = E_t[BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_t) - BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_T)].$$

Si aplicamos la formula de Clark-Ocone a $E_s[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)]$, tenemos:

$$E_s[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)] = E[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)] + \int_0^s D_r^W(E_r[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)])dW_r.$$

Si denotamos como $U_r = D_r^W(E_r[BS(t, T, X_t, k_t^*, v_t)])$ tenemos que,

$$\Lambda_s = \Lambda_0 + \int_0^s U_r dW_r.$$

Como Λ_s es un proceso adaptado podemos aplicar el Lema de Itô a $BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s)$

$$BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s) = BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_0) + \int_0^s (BS^{-1})'U_r dW_r + \frac{1}{2} \int_0^s (BS^{-1})''U_r^2 dr.$$

Por lo tanto,

$$I - E_t[v_t] = -E_t\left[\int_t^T (BS^{-1})'U_r dW_r + \frac{1}{2} \int_t^T (BS^{-1})''U_r^2 dr\right].$$

Analizemos el primer término del lado derecho de la ecuación:

$E_t\left[\int_t^T (BS^{-1})'U_r dW_r\right] = E_t\left[\int_t^T F dW_r\right]$ es igual a cero, ya que la esperanza condicional de una integral de Itô es cero; si y solo si, F es adaptado y cuadrado integrable. Lo cual es cierto bajo H1 y H2.

En consecuencia,

$$I - E_t[v_t] = -E_t\left[\frac{1}{2} \int_t^T (BS^{-1})''U_r^2 dr\right]$$

donde

- $(BS^{-1})''(k_t^*, \Lambda_r) = -(BS)''((BS)')^{-3} = -\frac{d_1(k_t^*)d_2(k_t^*)}{BS^{-1}}(e^{X_t}n(d_1)\sqrt{T-t})^{-2} = \frac{BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_r)}{4(e^{X_t}n(d_1(k_t^*, BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_r))))^2}$,
- $U_r = E_r[D_r^W(BS(k_t^*, v_t))] = E_r[e^{X_t}n(d_1(k_t^*, v_t))\sqrt{T-t}D_r^W v_t] = \frac{e^{X_t}}{2\sqrt{T-t}}E_r\left[n(d_1(k_t^*, v_t))\frac{\int_r^T D_r^W \sigma_u^2 du}{v_t}\right]$,
- $U_r^2 = \frac{e^{2X_t}}{4(T-t)}E_r\left[n(d_1(k_t^*, v_t))\frac{\int_r^T D_r^W \sigma_u^2 du}{v_t}\right]^2$.

Lo cual concluye la prueba. □

El siguiente paso es probar el siguiente Teorema enunciado en Alos y Kenichiro (2019)[3]:

Teorema 5.3.1. *Consideremos el modelo descrito en (5.6) con $\rho = 0$ y bajo $H1$, $H2$, $H3$ y $H4$. Entonces,*

$$\lim_{T \rightarrow t} \frac{I(t, T, X_t, k_t^*) - E_t[v_t]}{(T-t)^{2+2\delta}} = \frac{1}{32\sigma_t} \lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{(T-t)^{3+2\delta}} E_t \left[\int_t^T \left(E_r \left[\int_r^T D_r^W \sigma_s^2 ds \right] \right)^2 dr \right].$$

Proof. Los pasos de la prueba son los siguientes:

paso1 : Expandimos $BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s) = E_s[BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s)]$

$$BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s) = E_s \left[BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_T) - \frac{1}{2} \int_s^T (BS^{-1})'' U_r^2 dr \right] = E_s[v_t] - \frac{1}{2} E_s[A]$$

paso2 : Evaluamos el orden de convergencia de cada término en A usando $H1$ y $H3$:

1) Por $H1$ sabemos que

$$(BS^{-1})''(k_t^*, \Lambda_r) = \frac{BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_r)}{4(e^{X_t} N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_r))))^2}$$
 está acotado

2) Por $H3$, sabemos que

$$U_r^2 = \left(E_r \left[e^{X_t} N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, v_t)) \frac{\int_r^T D_r \sigma_s^2 ds}{2\sqrt{T-tv_t}} \right] \right)^2 \leq C(T-t)^{1+2\delta}.$$

Es decir, $U_r^2 \rightarrow O((T-t)^{1+2\delta})$, cuando $T \rightarrow t$

Luego, $A \rightarrow O((T-t)^{2+2\delta}) \Rightarrow BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s) = E_s[v_t] + O((T-t)^{2+2\delta})$.

paso3 : Analizamos la Proposición 15 cuando $T \rightarrow t$:

$$\lim_{T \rightarrow t} \frac{I(t, T, X_t, k_t^*) - E_t[v_t]}{(T-t)^{2+2\delta}} = \lim_{T \rightarrow t} -\frac{1}{32(T-t)^{3+2\delta}} E_t \left[\int_t^T BS^{-1}(k_t, \Lambda_s) \times \left(E_s \left[\frac{N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, v_t))}{N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s)))} \frac{\int_s^T D_s \sigma_r^2 dr}{v_t} \right] \right)^2 ds \right]. \quad (5.7)$$

Primero, notemos que cuando $T \rightarrow t$

$$\frac{N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, v_t))}{N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s)))} = e^{-0.125(T-t)(v_t - BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s))} \rightarrow 1.$$

Luego,

$$\lim_{T \rightarrow t} E_s \left[\frac{N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, v_t))}{N'(\mathbf{d}_+(k_t^*, BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s)))} \frac{\int_s^T D_s \sigma_r^2 dr}{v_t} \right] = E_s \left[\frac{\int_s^T D_s \sigma_r^2 dr}{v_t} \right].$$

Ahora, notemos que $BS^{-1}(k_t, \Lambda_s)$ es \mathcal{F}_s -adaptado, luego puede entrar en $E_s(\cdot)$

Recordemos que, cuando $T \rightarrow t$

$BS^{-1}(k_t, \Lambda_s) \rightarrow E_s[v_t] \rightarrow v_t \rightarrow \sigma_t$ para $s \in (t, T)$; luego

$$\lim_{T \rightarrow t} \left(E_s \left[\frac{(BS^{-1}(k_t^*, \Lambda_s))^{0.5}}{v_t} \int_s^T D_s \sigma_r^2 dr \right] \right)^2 = \frac{1}{\sigma_t} \left(E_s \left[\int_s^T D_s \sigma_r^2 dr \right] \right)^2.$$

paso4 : Reemplazando estos límites en (5.7) se concluye la prueba.

□

Este teorema nos dice que, bajo parámetros razonables, la diferencia entre $E_t[v_t] = K_{vol}$ y el ATMI $I(t, T, X_t, k_t^*)$ es muy pequeña, lo cual está en línea con el resultado presentado en Carr y Lee (2009)[8]. De manera más precisa;

$$|I(t, T, X_t, k_t^*) - E_t[v_t]| = O((T - t)^{2+2\delta}).$$

5.3.3 Ejemplo: El orden de convergencia del error en el modelo SABR

En esta sección evaluamos la convergencia del término de error de la aproximación de Carr y Lee cuando σ_t es un Movimiento Browniano Geométrico sin drift; es decir el modelo SABR:

$$d\sigma_t = \alpha\sigma_t dW_t \forall t \in [0, T],$$

o su solución,

$$\sigma_t = \sigma_s e^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-s) + \alpha(W_t - W_s)} \forall t \in [0, T].$$

Paso 1: calculamos $D_r^W \sigma_s^2$, para $r \leq s$:

$$\begin{aligned} D_r^W \sigma_s^2 &= 2\sigma_s D_r^W \sigma_s \\ &= 2\alpha\sigma_s^2 \\ &= 2\alpha\sigma_r^2 e^{-\alpha^2(s-r) + 2\alpha(W_s - W_r)} \\ &= 2\alpha\sigma_r^2 e^{\alpha^2 r - 2\alpha W_r} e^{-\alpha^2 s + 2\alpha W_s}. \end{aligned}$$

Paso 2: calculamos $A = E_r \left[\int_r^T D_r^W \sigma_s^2 ds \right]$ y luego $A^2 = \left(E_r \left[\int_r^T D_r^W \sigma_s^2 ds \right] \right)^2$,

$$E_r \left[\int_r^T D_r^W \sigma_s^2 ds \right] = 2\alpha\sigma_r^2 e^{\alpha^2 r - 2\alpha W_r} E_r \left[\int_r^T e^{-\alpha^2 s + 2\alpha W_s} ds \right]$$

Por el Lemma de Itô sabemos que,

$$F(T, W_T) = F(r, W_r) + \int_r^T \partial_s F ds + \int_r^T \partial_W F dW + \int_r^T \frac{1}{2} \partial_{WW}^2 F ds$$

re-ordenando términos, tenemos que

$$\int_r^T (\partial_s F + \frac{1}{2} \partial_{WW}^2 F) ds = F(T, W_T) - F(r, W_r) - \int_r^T \partial_W F dW.$$

Consideremos $F(s, W_s) = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 s + 2\alpha W_s}$, luego:

$$\int_r^T e^{-\alpha^2 s + 2\alpha W_s} ds = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 T + 2\alpha W_T} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 r + 2\alpha W_r} - \int_r^T \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha^2 s + 2\alpha W_s} dW.$$

Si aplicamos el operador de esperanza condicional ($E_r(\cdot)$) en ambos lados de la igualdad, solo nos queda evaluar que $E_r \left[e^{2\alpha W_T} \right] = e^{2\alpha W_r + 2\alpha^2(T-r)}$ y así

$$E_r \left[\int_r^T e^{-\alpha^2 s + 2\alpha W_s} ds \right] = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 r + 2\alpha W_r} (e^{\alpha^2(T-r)} - 1).$$

Por lo tanto,

$$A = E_r \left[\int_r^T D_r^W \sigma_s^2 ds \right] = \frac{2}{\alpha} \sigma_r^2 \left(e^{\alpha^2(T-r)} - 1 \right),$$

$$A^2 = \frac{4}{\alpha^2} \sigma_r^4 \left(e^{2\alpha^2(T-r)} - 2e^{\alpha^2(T-r)} + 1 \right).$$

Paso 3: Calculamos $B = E_t \left[\int_t^T A^2 dr \right]$

$$\begin{aligned} E_t \left[\int_t^T A^2 dr \right] &= \frac{4}{\alpha^2} E_t \left[\int_t^T \sigma_r^4 e^{2\alpha^2(T-r)} dr - 2 \int_t^T \sigma_r^4 e^{\alpha^2(T-r)} dr + \int_t^T \sigma_r^4 dr \right] \\ &= \frac{4}{\alpha^2} \left(E_t[A_1] - 2E_t[A_2] + E_t[A_3] \right), \end{aligned}$$

donde

$$E_t[A_1] = \sigma_0^4 e^{2\alpha^2 T} E_t \left[\int_t^T e^{-4\alpha^2 r + 4\alpha W_r} dr \right],$$

$$E_t[A_2] = \sigma_0^4 e^{\alpha^2 T} E_t \left[\int_t^T e^{-3\alpha^2 r + 4\alpha W_r} dr \right],$$

$$E_t[A_3] = \sigma_0^4 E_t \left[\int_t^T e^{-2\alpha^2 r + 4\alpha W_r} dr \right].$$

Continuamos utilizando el Lemma de Itô, como en el **Paso 2**, para cada término dentro de la integral. Notar que en todos estos casos el único término que queda dentro del operador $E_t[\cdot]$ para evaluar es $E_t[e^{4\alpha W_T}] = e^{4\alpha W_t + 8\alpha^2(T-t)}$.

En ese sentido, para A_1 se considera $F(r, W_r) = \frac{1}{4\alpha^2} e^{-4\alpha^2 r + 4\alpha W_r}$, luego se obtiene:

$$E_t[A_1] = \frac{\sigma_t^4}{4\alpha^2} e^{2\alpha^2(T-t)} \left(e^{4\alpha^2(T-t)} - 1 \right)$$

Asimismo, para A_2 se considera $F(r, W_r) = \frac{1}{5\alpha^2} e^{-3\alpha^2 r + 4\alpha W_r}$, luego se obtiene:

$$E_t[A_2] = \frac{\sigma_t^4}{5\alpha^2} e^{\alpha^2(T-t)} \left(e^{5\alpha^2(T-t)} - 1 \right)$$

Finalmente, para A_3 se considera $F(r, W_r) = \frac{1}{6\alpha^2} e^{-2\alpha^2 r + 4\alpha W_r}$, luego se obtiene:

$$E_t[A_3] = \frac{\sigma_t^4}{6\alpha^2} \left(e^{6\alpha^2(T-t)} - 1 \right).$$

Por lo tanto, $B = E_t \left[\int_t^T A^2 dr \right]$ es igual a

$$\begin{aligned} E_t \left[\int_t^T A^2 dr \right] &= \frac{4}{\alpha^2} \left(E_t[A_1] - 2E_t[A_2] + E_t[A_3] \right) \\ &= \frac{\sigma_t^4}{\alpha^4} \left(e^{2\alpha^2(T-t)} \left(e^{4\alpha^2(T-t)} - 1 \right) - \frac{8}{5} e^{\alpha^2(T-t)} \left(e^{5\alpha^2(T-t)} - 1 \right) + \frac{2}{3} \left(e^{6\alpha^2(T-t)} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Paso 4: Se evalúa el siguiente límite

$$\frac{1}{32\sigma_t} \lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{(T-t)^3} B$$

Evidentemente, este límite es indeterminado. Aplicamos la regla de L' Hôpital tres veces, como resultado obtenemos:

$$\frac{1}{32\sigma_t} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{B}{(\tau)^3} = \frac{1}{32\sigma_t} \frac{8\alpha^2\sigma_t^4}{6} = \frac{\alpha^2\sigma_t^3}{24}.$$

En conclusión, el orden de error de la aproximación de Carr y Lee, cuando $T \rightarrow t$, en el modelo SABR es:

$$\lim_{T \rightarrow t} \frac{I(t, T, X_t, k_t^*) - E_t[v_t]}{(T-t)^2} = \frac{\alpha^2\sigma_t^3}{24}.$$

5.3.4 Evaluación del tercer resultado

Para evaluar el tercer resultado en Carr y Lee (2009)[8], necesitamos calcular la volatilidad implícita ATM, ya que se prueba que este valor es una buena aproximación de (K_{vol}) .

A diferencia de los otros dos resultados previos, la información de mercado se requiere para calibrar los parámetros de algún modelo de volatilidad estocástica.

En ese sentido, como necesitamos calcular la volatilidad implícita, el modelo SABR es el más conveniente en esta ocasión por la fórmula de Hagan (revisar Sección 4.3.2). En ese sentido, asumimos un precio inicial del forward igual 100 ($F_0 = 100$), la volatilidad instantánea inicial es igual a 0.1 ($\sigma_0 = 0.1$) y el vol of vol es igual a 0.2 ($\nu = 0.4$). Asimismo, presentamos los resultados para un rango de correlaciones entre el retorno instantáneo y la variación de la volatilidad instantánea ($\rho \in \{-0.9, -0.5, 0, 0.5, 0.9\}$) y un rango de vencimientos ($T \in \{0.1, 0.5, 0.75, 1, 2, 5\}$).

Table 5.6: Evaluación del tercer resultado usando el modelo SABR
(Elaboración propia)

Aproximación de Carr y Lee del volatility swap rate con K=F=100, SABR Model

	T=0.1	T=0.5	T=0.75	T = 1	T = 2	T = 5
rho=-0.9	0.0999478	0.0997392	0.0996088	0.0994783	0.0989567	0.0973917
rho=-0.5	0.0999958	0.0999792	0.0999687	0.0999583	0.0999167	0.0997917
rho = 0	0.100033	0.100167	0.10025	0.100333	0.100667	0.101667
rho= 0.5	0.100046	0.100229	0.100344	0.100458	0.100917	0.102292
rho= 0.9	0.100038	0.100189	0.100284	0.100378	0.100757	0.101892

Parámetros del SABR model: sigma_0 = 0.1, nu = 0.2 y beta = 1

Por otro lado, se considera necesario presentar la sensibilidad de este resultado a la elección del modelo. En ese sentido, también se presenta el resultado obtenido al utilizar el modelo de volatilidad fraccionaria presentado en Àlos y Shiraya (2019)[3]. Para ello se fija el parámetro Hurst en 0.3 ($H = 0.3$), al igual que en la tabla anterior, presentamos los resultados para un rango de correlaciones entre el retorno instantáneo y la volatilidad instantánea ($\rho \in \{-0.9, -0.5, 0, 0.5, 0.9\}$) y un rango de vencimientos ($T \in \{0.1, 0.5, 0.75, 1, 2, 5\}$).

Table 5.7: Evaluación del tercer resultado usando un modelo de volatilidad fraccionaria (Elaboración propia)

Aproximación de Carr y Lee del volatility swap rate con $K=F=100$, rough volatility model

	T=0.1	T=0.5	T=0.75	T = 1	T = 2	T = 5
rho=-0.9	0.0775412	0.0621689	0.0651554	0.0565676	0.0460224	0.0378598
rho=-0.5	0.0882519	0.0804102	0.076097	0.0756788	0.07006	0.0600802
rho = 0	0.10032	0.0994947	0.0997672	0.099948	0.0996432	0.098466
rho= 0.5	0.11613	0.124762	0.127005	0.130544	0.134119	0.156473
rho= 0.9	0.128405	0.143122	0.147026	0.153893	0.17634	0.205765

Parámetros del modelo: $\sigma_0 = 0.1$, $\nu = 0.2$ y $\text{hurst} = 0.3$

Siguiendo el tercer resultado de Carr y Lee (2009)[8], una buena aproximación de K_{vol} es la volatilidad implícita ATM. Sin embargo, esta aproximación es buena cuando $\rho = 0$, siendo el orden de convergencia del error significativamente mayor para otros casos, como se señala en el trabajo de Àlos y Shiraya (2019)[3]. Podemos ver que, los resultados de las tablas no son muy diferentes cuando $\rho = 0$; sin embargo, para otros casos las diferencias son significativas.

Capítulo 6

Extensión del tercer resultado

En esta sección mostramos una extensión a la aproximación de Carr y Lee (2009)[8], el cual no asume independencia entre la volatilidad y los retornos instantaneos del activo.

Rolloos y Arslan (2017)[24] proponen una aproximación para K_{vol} igual de elegante a la propuesta por Carr y Lee (2009)[8], pero robusta a la existencia de correlación entre el proceso de volatilidad y del subyacente.

Pese a la significativa mejora de esta aproximación, la única diferencia fue cambiar el punto donde se evalúa la volatilidad implícita.

Considerando los mismos supuestos de Carr y Lee (2009)[8], pero permitiendo que los incrementos del proceso de la volatilidad estén correlacionados con los retornos del subyacente, Rolloos y Arslan (2017)[24] prueban lo siguiente:

Proposición 16. *Bajo los supuestos H1 y H2 presentados al inicio de la sección 5.3, podemos aproximar K_{vol} como:*

$$K_{vol} \approx I(K_{d_2}, T), \quad (6.1)$$

donde K_{d_2} es un strike elegido de tal forma que $d_2 = 0$; es decir, $I(K_{d_2}, T)$ es la volatilidad implícita obtenida cuando $d_2(F_0, K, I(K, T)) = 0$

Proof. Siguiendo la misma notación de la sección anterior, el precio inicial de una opción Call puede reescribirse de la siguiente forma si aplicamos la transformación de Willard (1997)[25], la cual funciona cuando $\rho \neq 0$:

$$\begin{aligned} C_0(F_0, K, T) &= E_0^Q(F_T - K)^+ \\ &= E_0^Q[E_0^Q(F_T - K)^+ | \mathbb{F}_T^\sigma] \\ &= E_0^Q[Black(F_0 M_T(\rho), T, K, \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho^2})] \\ &= E_0^Q[C_0(F_0 M_T(\rho), T, K, \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho^2})], \end{aligned}$$

donde $M_T = e^{-\frac{\rho^2}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du + \rho \int_0^T \sigma_u dW^\sigma}$.

El primer paso es aproximar esta expresión usando la expansión de Taylor, alrededor de $\rho = 0$:

$$C_0(F_0, K, T) = E_0^Q[Black(F_0 M_T(\rho), T, K, \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho^2})]$$

$$\begin{aligned}
 C_0(F_0, K, T) &\approx E_0^Q \left[Black(F_0, T, K, \bar{\sigma}) + \frac{\partial Black(F_0 M_T(\rho), T, K, \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho^2})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} \rho + O(\rho^2) \right] \\
 &\approx E_0^Q \left[Black(F_0, T, K, \bar{\sigma}) + \frac{\partial Black(*)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} \rho + O(\rho^2) \right] \\
 &\approx E_0^Q \left[Black(F_0, T, K, \bar{\sigma}) + \left(\frac{\partial Black(*)}{\partial F_0 M_T(\rho)} F_0 M_T(\rho) \left(-\rho \int_0^T \sigma_u^2 du + \int_0^T \sigma_u dW^\sigma \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial Black(*)}{\partial \bar{\sigma} \sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\bar{\sigma}}{2} (1 - \rho^2)^{-0.5} (-2\rho) \right) \Big|_{\rho=0} \rho + O(\rho^2) \right] \\
 &\approx E_0^Q \left[Black(F_0, T, K, \bar{\sigma}) + \rho F_0 \frac{\partial Black(F_0, T, K, \bar{\sigma})}{\partial F_0} \left(\int_0^T \sigma_u dW^\sigma \right) + O(\rho^2) \right] \\
 &\approx E_0^Q \left[C_0(F_0, T, K, \bar{\sigma}) + \rho F_0 \Delta_{BS}(F_0, T, K, \bar{\sigma}) \int_0^T \sigma_u dW^\sigma + O(\rho^2) \right]
 \end{aligned}$$

donde $\Delta_{BS}(*)$ es el Delta de Black and Scholes, el cual mide la sensibilidad de la opción Call respecto a cambios en el precio del activo subyacente:

$$\Delta_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial F} = N(d_1).$$

Antes de continuar, es necesario presentar otros griegos:

1. El vega, $\nu_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}$, es la sensibilidad de la opción Call respecto a cambios en la volatilidad.

$$\nu_{BS} = K e^{-rT} n(d_2) \sqrt{T}.$$

2. El vanna, $\nu a_{BS} = \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial F \partial \sigma}$, es la sensibilidad del Delta de la opción Call respecto a cambios en la volatilidad

$$\nu a_{BS} = \frac{\nu_{BS}}{F} \frac{d_2}{I(K, T)}.$$

3. El vomma, $\nu o_{BS} = \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \sigma^2}$, es la sensibilidad del vega de la opción Call respecto a cambios en la volatilidad

$$\nu o_{BS} = \nu_{BS} \frac{d_2 d_1}{I(K, T)}.$$

Al respecto, en Rolloos y Arslan (2017)[24] aprovechan que el vanna y el vonna son directamente proporcionales a d_2 .

Por lo tanto, ambas cantidades son zero cuando $d_2(K, T) = 0$.

Recordemos que

$$d_2 = \frac{\ln(F) - \ln(K)}{I(K, T) \sqrt{T}} - \frac{I(K, T) \sqrt{T}}{2}.$$

Por lo tanto, debe existir un K tal que $d_2 = 0$, denotemos dicho K como K_{d_2} , el cual es la solución al siguiente proceso iterativo:

$$K_{d_2} = F e^{-\frac{1}{2} I(T, K_{d_2})^2 T}.$$

El siguiente paso es aproximar $Black(F_0, T, K, \bar{\sigma})$ y $\Delta_{BS}(F_0, T, K, \bar{\sigma})$ usando la expansión de Taylor

cuando $\bar{\sigma}$ está alrededor de la volatilidad implícita $I(K, T)$:

$$\begin{aligned} Black(*, \bar{\sigma}) &\approx Black(*, I(*)) + \nu_{BS}(*, I(*))(\bar{\sigma} - I(*)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\nu_{oBS}(*, I(*))(\bar{\sigma} - I(*))^2 + O(|\bar{\sigma} - I(*)|^3) \\ \Delta_{BS}(*, \bar{\sigma}) &\approx \Delta_{BS}(*, I(*)) + \nu_{aBS}(*, I(*))(\bar{\sigma} - I(*)) + O(|\bar{\sigma} - I(*)|^2). \end{aligned}$$

Si evaluamos ambas cuando $K = K_{d_2}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} Black(F, T, K_{d_2}, \bar{\sigma}) &\approx Black(F, T, K_{d_2}, I(K_{d_2}, T)) + \nu_{BS}(F, T, K_{d_2}, I(K_{d_2}, T))(\bar{\sigma} - I(K_{d_2}, T)) \\ &\quad + O(|\bar{\sigma} - I(K_{d_2}, T)|^3) \\ \Delta_{BS}(F, T, K_{d_2}, \bar{\sigma}) &\approx \Delta_{BS}(F, T, K_{d_2}, I(K_{d_2}, T)) + O(|\bar{\sigma} - I(K_{d_2}, T)|^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si evaluamos la opción call en K_{d_2} tendríamos que:

$$\begin{aligned} C_0(*) &\approx E_0^Q \left[C_0(*) + \nu_{BS}(*)(\bar{\sigma} - I(*)) + O(|\bar{\sigma} - I(*)|^3) \right. \\ &\quad \left. + \rho F_0(\Delta_{BS}(*)) + O(|\bar{\sigma} - I(*)|^2) \int_0^T \sigma_u dW^\sigma + O(\rho^2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0(*) &\approx C_0(*) + \nu_{BS}(*)(\bar{\sigma} - I(*)) + E_0^Q [O(|\bar{\sigma} - I(*)|^3)] \\ &\quad + \rho F_0 \Delta_{BS}(*)(\bar{\sigma} - I(*)) + E_0^Q [O(|\bar{\sigma} - I(*)|^2) \int_0^T \sigma_u dW^\sigma] \\ &\quad + E_0^Q [O(\rho^2)]. \end{aligned}$$

Notar que los términos de la segunda línea contienen la esperanza de la integral de $It\hat{o}$ de un proceso adaptado e integrable (la volatilidad), luego esos términos son iguales a zero

$$C_0(*) \approx C_0(*) + \nu_{BS}(*)(\bar{\sigma} - I(*)) + E_0^Q [O(|\bar{\sigma} - I(*)|^3)] + E_0^Q [O(\rho^2)].$$

Asumamos que la esperanza de los residuos de Taylor de esta expresión van a zero. En consecuencia, tendríamos la siguiente aproximación:

$$C_0(*) \approx C_0(*) + \nu_{BS}(*)(\bar{\sigma} - I(*)).$$

Lo cual es cierto si y solo si,

$$E_0^Q [\bar{\sigma}] = I(K_{d_2}, T).$$

Esto concluye la prueba. □

Este resultado es mucho más general que el descrito por Carr y Lee[8], ya que es robusto al grado de correlación entre el subyacente (F_t) y su volatilidad (σ_t).

Table 6.1: Evaluación de la aproximación de Rolloos y Arslan usando el modelo SABR
(Elaboración propia)

Aproximación de Rolloos y Arslan del volatility swap rate con $K=F=100$, SABR Model

	T=0.1	T=0.5	T=0.75	T = 1	T = 2	T = 5
rho=-0.9	0.0399885	0.0399422	0.039913	0.0398835	0.0397632	0.0393799
rho=-0.5	0.0400334	0.0401672	0.0402512	0.0403355	0.0406754	0.0417236
rho = 0	0.0400533	0.0402668	0.0404003	0.0405338	0.0410686	0.0426814
rho= 0.5	0.0400333	0.0401662	0.0402489	0.0403314	0.0406591	0.0416197
rho= 0.9	0.0399885	0.0399428	0.0399144	0.039886	0.0397732	0.0394419

Parámetros del SABR model: $\sigma_0 = 0.04$, $\nu = 0.4$ y $\beta = 1$



Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo y motivación de esta investigación fue crear una referencia sobre los métodos utilizados para determinar el precio de los derivados financieros con volatilidad estocástica que sea útil tanto para la academia como para la industria.

En ese sentido, considero que esta investigación es de utilidad para la academia por la presentación de algunos tópicos avanzados en procesos estocásticos como el movimiento Browniano fraccionario y el cálculo de Malliavin, pero sobre todo por la explicación de algunas de sus aplicaciones en las finanzas cuantitativas, lo cual espero amplíe el espectro de investigaciones en estos temas en un futuro cercano.

Por otro lado, considero que esta investigación es de utilidad para la industria por las siguientes razones:

- la revisión de conceptos: desde los más básicos cómo el modelo Black and Scholes o los tipos de volatilidades hasta modelos de volatilidad estocástica y la determinación del precio de instrumentos derivados con subyacentes no negociables, permiten al lector captar la intuición detrás de estos conceptos.
- los numerosos ejemplos, a lo largo de esta investigación se introducen y utilizan una gran variedad de modelos con el fin de familiarizar al lector. Si bien, la presentación de cada modelo es muy puntual, ya que cada modelo merece una investigación propia para profundizar en sus detalles, siempre se recomiendan las referencias que se consideran apropiadas en caso se quiera profundizar en un modelo particular.
- los fragmentos de código, es muy difícil encontrar investigaciones sobre finanzas cuantitativas con fragmentos de código listos para usar. Sin embargo, considero que esta parte es vital para que el lector termine de entender cada concepto presentado.
- la recopilación y estudio de resultados sobre derivados de volatilidad, la verdad no hay muchos resultados disponibles sobre derivados de volatilidad, el trabajo de Carr y Lee[8] es uno de los más populares. Sin embargo, poco se escribe sobre sus críticas u oportunidades de mejora, ya que en el mercado financiero la información es un bien rival muypreciado. Por este motivo, en el capítulo 5 se muestra como podemos poner a prueba todo resultado que nos presenten sin la necesidad de contar con datos de mercado.

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Elisa Alós, Rupak Chatterjee, Sebastian Tudor, and Tai-Ho Wang. Target volatility option pricing in lognormal fractional sabr model. *Quantitative Finance*, 01 2018.
- [2] Elisa Alós, Jorge Leon, and Josep Vives. On the short-time behavior of the implied volatility for jump-diffusion models with stochastic volatility. *Finance and Stochastics*, 11:571–589, 2007.
- [3] Elisa Alós and Kenichiro Shiraya. Estimating the hurst parameter from short term volatility swaps: a malliavin calculus approach. *Finance and Stochastics*, 23, 03 2019.
- [4] Oksendal B Biagini F, Hu Y and Zhang T. *Stochastic Calculus for fractional Brownian motion and Applications*. Springer, 2008.
- [5] Fischer Black and Myron S Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, May-June 1973.
- [6] Rodriguez Bogatyreva, Grandez and Soldevilla. *SABR : a stochastic volatility model in practice*. UPF University Press, 07 2019.
- [7] Richard Peirce Brent. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. *The Computer Journal*, 14:422–425, 1971.
- [8] Peter Carr and Roger Lee. Volatility derivatives. *Annual Review of Financial Economics*, 1:319–339, 12 2009.
- [9] Fabienne Comte, L. Coutin, and Eric Renault. Affine fractional stochastic volatility models. *Annals of Finance*, 2-3(8):337–378, 2012.
- [10] Fabienne Comte and Eric Renault. Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4):291–323, 1998.
- [11] Bruno Dupire. Pricing with a Smile. *Risk*, pages 18–20, 1994.
- [12] Youssef El-Khatib. Computations of greeks in stochastic volatility models via the malliavin calculus. *U.A.E University Working Paper*, 05 2009.
- [13] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, and K R Sircar. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press, 01 2000.
- [14] Eric Fournié, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Jérôme Lebuchoux. Applications of malliavin calculus to monte-carlo methods in finance. i. *Finance and Stochastics*, 5:201–236, 05 1999.
- [15] Eric Fournié, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Jérôme Lebuchoux. Applications of malliavin calculus to monte-carlo methods in finance. ii. *Finance and Stochastics*, 5:201–236, 05 2001.

- [16] Jim Gatheral. *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley, 2006.
- [17] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, and Mathieu Rosenbaum. Volatility Is Rough. *Quantitative Finance*, 18(6):933–949, 2018.
- [18] Patrick Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, and Diana E. Woodward. Managing Smile Risk. *Wilmott Magazine*, 1(1):84–108, 2002.
- [19] Steven Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, pages 327–343, 1993.
- [20] Yves Hilpisch. *Listed Volatility and Variance Derivatives*. Wiley and sons/ Wiley Finance, 2017.
- [21] John Hull and Alan White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281–300, 06 1987.
- [22] Masaaki Kijima and Chun Ming Tam. *Theory and Applications of Monte Carlo Simulations*. IntechOpen, 01 2013.
- [23] David Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer, 01 2006.
- [24] Frido Rolloos and Melih Arslan. Taylor-made volatility swaps. *Wilmott*, 2017:56–61, 01 2017.
- [25] Gregory Willard. Calculating prices and sensitivities for path-independent derivative securities in multifactor models. *Journal of Derivatives*, 5, 11 1997.
- [26] Inkaya B Yilmaz B and Yolcu Okur Y. Application of the malliavin calculus for computation of greeks in black-sholes and stochastic volatility models. *SSRN Electronic Journal*, 06 2016.

A Métodos Generales para discretizar EDE

La gran mayoría de los modelos en las finanzas matemáticas son modelos en tiempo continuo. La gran ventaja de trabajar en este espacio es que se cuenta con una gran variedad de herramientas, las cuales permiten alcanzar soluciones de forma cerrada. Sin embargo, en la práctica, observamos y/o generamos los datos en tiempo discreto. En ese sentido, suele ser más conveniente expresar nuestro problema en forma de pasos de tiempo (δt). En las finanzas, los métodos más populares para hacer esto son:

1. El método de Euler Maruyama
2. El método de Milstein

En esta sección se explica el fundamento de ambos métodos.

El método de Euler Maruyama

Consideremos una ecuación diferencial estocástica en el sentido de $Itô$:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \forall t \in [0, T].$$

Esta ecuación puede expresarse en su forma integral para la distancia δt , es decir:

$$\int_t^{t+\delta t} dX_s = \int_t^{t+\delta t} a(X_s, s)ds + \int_t^{t+\delta t} b(X_s, s)dW_s$$

$$X_{t+\delta t} = X_t + \int_t^{t+\delta t} a(X_s, s)ds + \int_t^{t+\delta t} b(X_s, s)dW_s.$$

Si utilizamos la regla de integración por la izquierda, $X_{t+\delta t}$ puede aproximarse como:

$$X_{t+\delta t} \approx X_t + a(X_t, t) \int_t^{t+\delta t} ds + b(X_t, t) \int_t^{t+\delta t} dW_s$$

$$X_{t+\delta t} \approx X_t + a(X_t, t)\delta t + b(X_t, t)(W_{t+\delta t} - W_t).$$

Este es el esquema más simple para aproximar un proceso de $Itô$ a tiempo discreto. Este método de aproximación es conocido como el método de Euler Maruyama. El orden de convergencia del error por discretización de este método es $\frac{1}{2}$ o $O(\sqrt{\delta t})$.

El método de Milstein

Partamos de la misma ecuación diferencial estocástica:

$$X_{t+\delta t} = X_t + \int_t^{t+\delta t} a(X_s, s)ds + \int_t^{t+\delta t} b(X_s, s)dW_s.$$

El paso clave en esta aproximación es utilizar el lema de Itô para reexpresar el drift:

$$da(X_t, t) = \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial X_t^2} b(X_t, t)^2 \right) dt + \frac{\partial a}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_t$$

$$a(X_s, s) = a(X_t, t) + \int_t^s \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial X_t^2} b(X_t, t)^2 \right) du + \int_t^s \frac{\partial a}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_u.$$

y la volatilidad de nuestra EDE:

$$b(X_s, s) = b(X_t, t) + \int_t^s \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial X_t^2} b(X_t, t)^2 \right) du + \int_t^s \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_u.$$

De tal forma que nuestra EDE se puede reescribir como:

$$X_{t+\delta t} = X_t + \int_t^{t+\delta t} \left(a(X_t, t) + \int_t^s \left(\frac{\partial a}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial X_t^2} b(X_t, t)^2 \right) du + \int_t^s \frac{\partial a}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_u \right) ds$$

$$+ \int_t^{t+\delta t} \left(b(X_t, t) + \int_t^s \left(\frac{\partial b}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial X_t^2} b(X_t, t)^2 \right) du + \int_t^s \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_u \right) dW_s.$$

Recordemos que, $ds \cdot du = O(\delta t^2)$ y que $ds \cdot dW_u = O(\delta t^{\frac{3}{2}})$, debido a que buscamos una aproximación de orden 1 o $O(\delta t)$ estos términos pueden ser ignorados. Por lo tanto, podemos aproximar la EDE como:

$$X_{t+\delta t} \approx X_t + \int_t^{t+\delta t} a(X_t, t) ds + \int_t^{t+\delta t} b(X_t, t) dW_s + \int_t^{t+\delta t} \int_t^s \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_u dW_s.$$

Notemos que el último término puede reescribirse como

$$\int_t^{t+\delta t} \int_t^s \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_u dW_s = \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) \cdot \int_t^{t+\delta t} (W_s - W_t) dW_s$$

$$= \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) \cdot \left(W_t^2 - W_t \cdot W_{t+\delta t} + \int_t^{t+\delta t} W_s dW_s \right).$$

Sea $Y_t = f(t, W_t)$, tal que $dY_t = W_t dW_t$. Si aplicamos el lema de Ito sobre Y_t tenemos que:

$$dY_t = \frac{\partial Y}{\partial t} dt + \frac{\partial Y}{\partial W} dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial W^2} dt.$$

En consecuencia, $\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial W^2} = 0$ y $\frac{\partial Y}{\partial W} = W_t$

Esto quiere decir que, $Y_t = \frac{W_t^2}{2} - \frac{1}{2}t$. Por lo tanto, $\int_t^{t+\delta t} dY_s = Y_{t+\delta t} - Y_t = \frac{W_{t+\delta t}^2}{2} - \frac{W_t^2}{2} - \frac{1}{2}\delta t$.

Reemplazando este resultado en nuestra EDE obtenemos la siguiente expresión:

$$X_{t+\delta t} \approx X_t + a(X_t, t)\delta t + b(X_t, t)(W_{\delta t} - W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial X_t} b(X_t, t) \cdot ((W_{t+\delta t} - W_t)^2 - \delta t).$$

Este método de aproximación es conocido como el método de Milstein. El orden de convergencia del

error por discretización de este método es 1 o $O(\delta t)$.

B Métodos numéricos usados para determinar el precio de las opciones

La gran mayoría de modelos diseñados para el pricing de opciones no cuentan con soluciones analíticas. Sin embargo, muchos de estos modelos permiten una mejor gestión de riesgos; por lo que, no deben ser dejados de lado.

En esta sección, se explica los métodos numéricos utilizados en este trabajo en el pricing de opciones y en el cálculo de la volatilidad implícita.

Monte Carlo Condicional

La simulación de Monte Carlo Condicional es un método muy popular, ya que reduce una dimensión de incertidumbre en nuestro problema. Su mayor ventaja es su generalidad, es decir, podemos aplicarlo a cualquier modelo de volatilidad estocástica.

Pese a ello, el Monte Carlo Condicional (CMC, por sus siglas en inglés) no es muy popular en la industria, porque es computacionalmente mucho más demandante que utilizar una fórmula analítica renunciando de esta forma a utilizar modelos que permitan una mejor gestión de riesgos. La idea detrás del CMC es usar la Ley de Esperanzas iteradas para re-escribir nuestro problema. Dada una apropiada elección de sendas condicionadas, podemos reducir la dimensión de incertidumbre en nuestro problema objetivo y obtener una expresión adecuada para realizar simulaciones.

Un modelo de volatilidad estocástica estándar está caracterizado por al menos un sistema de dos ecuaciones, como las siguientes:

$$\begin{aligned} dF_t &= F_t \sigma_t dW_t^{(1)} \\ \sigma_t &= f(W_t^{(2)}) \end{aligned}$$

donde, $W_t^{(1)}$ y $W_t^{(2)}$ son dos movimientos Brownianos correlacionados, $Corr(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}) = \rho$

Nuestro problema objetivo general es calcular el precio de una opción Call, V_0 , la cual puede re-escribirse utilizando la Ley de Esperanzas Iteradas:

$$\begin{aligned} V_0 &= E \left[e^{-rT} (F_T - K)_+ \right] \\ &= E \left[E \left[e^{-rT} (F_T - K)_+ \mid \{W_{2,t_i}\}_0^T, \{\sigma_{t_i}\}_0^T \right] \right] \end{aligned} \tag{1}$$

Un problema que encontramos cuando queremos usar el CMC para calcular el precio de una opción siguiendo algún modelo de volatilidad estocástica es la correlación entre $W_{1,t}$ (componente estocástico del retorno instantáneo) y $W_{2,t}$ (componente estocástico de la volatilidad instantánea). Normalmente, necesitamos procesos no correlacionados para aplicar este método. Sin embargo, podemos solucionar este problema con una simple transformación[25].

Para empezar, notemos que todo par de movimientos Brownianos correlacionados $(W_{1,t}, W_{2,t})$ con ρ como correlación, puede descomponerse en un par de movimientos Brownianos independientes $W_{2,t}$ y B_t , tal que

$$W_{1,t} = \sqrt{1 - \rho^2} B_t + \rho W_{2,t}$$

Luego, el modelo del precio forward resulta en

$$dF_t = F_t \sigma_t (\sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + \rho dW_{2,t}). \quad (2)$$

En consecuencia, nuestro problema objetivo (1) puede re-escribirse como la esperanza de una versión modificada de la formula de Black:

$$V_0 = E \left[e^{-rT} (F_0 \xi_0 \text{Prob}(x < d_1) - K \text{Prob}(x < d_2)) \right] = E \left[\text{Black}(F_0 \xi_0, K, \bar{\sigma}_\rho, T, r) \right],$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \exp \left\{ \rho \int_0^T \sigma_s dW_s^{(2)} - \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^T \sigma_s^2 ds \right\} \\ \bar{\sigma}_\rho &= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^T \sigma_s^2 ds - \rho^2 \int_0^T \sigma_s^2 ds \right)} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{F_0 \xi_0}{K}\right)}{\bar{\sigma}_\rho \sqrt{T}} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T}; \quad d_1 = d_2 + \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T} \end{aligned}$$

Proof. Sabemos que, el precio de una opción Call es:

$$V_0 = E \left[e^{-rT} (F_T - K)_+ \right]$$

Usando la Ley de Esperanzas Iteradas podemos re-escribir V_0 como:

$$V_0 = E \left[E \left[e^{-rT} (F_T - K)_+ \mid \{W_{t_i}^{(2)}\}_0^T, \{\sigma_{t_i}\}_0^T \right] \right]$$

$$V_0 = E \left[e^{-rT} E \left[(F_0 e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma_s dZ_s + \rho \int_0^T \sigma_s dW_s^{(2)}} - K)_+ \mid \{W_{t_i}^{(2)}\}_0^T, \{\sigma_{t_i}\}_0^T \right] \right]$$

Asumamos que conocemos $\bar{\sigma}_\rho^2 := \frac{1}{T} \left(\int_0^T \sigma_s^2 ds - \rho^2 \int_0^T \sigma_s^2 ds \right)$, podemos re-escribir V_0 como:

$$V_0 = E \left[e^{-rT} E \left[(F_0 e^{-\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_\rho^2 T + \rho^2 \int_0^T \sigma_s^2 ds) + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma_s dZ_s + \rho \int_0^T \sigma_s dW_s^{(2)}} - K)_+ \mid \{W_{t_i}^{(2)}\}_0^T \right] \right]$$

Asumamos que conocemos $\ln(\xi_0) := \rho \int_0^T \sigma_s dW_s^{(2)} - \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^T \sigma_s^2 ds$; por lo que, V_0 sería:

$$V_0 = E \left[e^{-rT} E \left[(F_0 \xi_0 e^{-\frac{1}{2} \bar{\sigma}_\rho^2 T + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma_s dZ_s} - K)_+ \right] \right]$$

Notar que, $\sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T \sigma_s dZ_s = \mathcal{N}(0, \bar{\sigma}_\rho^2 T)$.

Por lo tanto V_0 es igual a:

$$V_0 = E \left[e^{-rT} E \left[(F_0 \xi_0 e^{-\frac{1}{2} \bar{\sigma}_\rho^2 T + \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T} \mathcal{N}(0,1)} - K)_+ \right] \right]$$

Recordemos que, $(F_0 \xi_0 e^{-\frac{1}{2} \bar{\sigma}_\rho^2 T + \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T} \mathcal{N}(0,1)} - K)_+ \neq 0 \iff F_0 \xi_0 e^{-\frac{1}{2} \bar{\sigma}_\rho^2 T + \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T} \mathcal{N}(0,1)} > K$.

Luego $\mathcal{N}(0, 1) < d_2 := \frac{\ln\left(\frac{F_0 \xi_0}{K}\right) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\rho^2 T}{\bar{\sigma}_\rho \sqrt{T}}$. Por lo tanto, podemos re-escribir V_0 como:

$$V_0 = E \left[e^{-rT} \left(\int_{-\infty}^{d_2} F_0 \xi_0 \frac{e^{-\frac{(x - \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx - K \text{Pr}(x < d_2) \right) \right]$$

$$V_0 = E \left[e^{-rT} (F_0 \xi_0 \text{Pr}(x - \bar{\sigma}_\rho \sqrt{T} < d_2) - K \text{Pr}(x < d_2)) \right]$$

$$V_0 = E \left[e^{-rT} (F_0 \xi_0 \text{Pr}(x < d_1) - K \text{Pr}(x < d_2)) \right].$$

En consecuencia, el precio de la opción Call es equivalente a resolver la siguiente esperanza:

$$V_0 = E \left[BS(F_0 \xi_0, K, \bar{\sigma}_\rho, T, r) \right].$$

□

Como resultado, la esperanza en (1) puede calcularse fácilmente, gracias a la Ley de los Grandes Números, como el promedio de muchas realizaciones de la formula de Black y Scholes.

Usando el precio de la opción para calcular la volatilidad implícita

Empecemos este capítulo explicando como calcular el precio de una opción europea utilizando CMC. En esta sección explicaré como calcular la volatilidad implícita (I) dado este precio siguiendo la definición de volatilidad implícita descrita en [13].

Podemos calcular I resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$I = \arg \min_{I > 0} \left(e^{-rT} (F_0 \text{Prob}(x < d2 + I\sqrt{T}) - K \text{Prob}(x < d2)) - V_0 \right)^2 \quad (3)$$

donde

$$d2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right)}{I\sqrt{T}} - \frac{1}{2}I\sqrt{T}$$

$$x \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Notar que este problema es altamente no lineal, por lo que necesitamos utilizar métodos numéricos de optimización, los más populares son el metodo de biseccion, el algoritmo de Newton-Raphson y el algoritmo de Brent–Dekker[7].

C Código en Python

El código utilizado para computar nuestros resultados se encuentra en el siguiente repositorio de GitHub:

<https://github.com/AbrahamSoldevilla?tab=repositories>

