PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

El saber a enseñar de la proporcionalidad vista en una colección de cuadernos de trabajo de primaria

Tesis para optar por el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Richard Menacho Taipe

Asesora:

Cintya Sherley Gonzales Hernandez

Lima, 2020

RESUMEN

Este trabajo de investigación tiene por objetivo construir una organización praxeológica de la proporcionalidad a partir de un estudio epistemológico y ecológico, para así determinar, describir y caracterizar la presencia de la proporcionalidad en el nivel primario. Este objetivo parte de la cuestión: ¿Cuál es la organización matemática de la proporcionalidad, en los cuadernos de trabajo oficiales de matemática del nivel de primaria? Para dar respuesta a esta pregunta, desarrollamos una investigación cualitativa con enfoque bibliográfico tomando como referencia teórico y metodológico la Teoría Antropológica de lo Didáctico, el cual emplea como unidad de análisis las praxeologías. Iniciamos revisando los documentos curriculares oficiales e identificamos la presencia de nuestro objeto de estudio desde tercero de primaria en la competencia referido a resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Luego con los aspectos teóricos que nos proporciona el marco se analizaron los cuadernos de trabajo y se identificaron 3 tipos de tareas, 13 tareas, 13 técnicas y discursos tecnológicos que justifican nuestra Organización Matemática. Se privilegia el tipo de tarea hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad, las tareas se presentan bajo el supuesto de ser proporcionales y se asume que se conoce el concepto de magnitud. Además en la mayoría de las tareas es explícito el uso de la tabla de proporcionalidad como ostensivo y en estas pequeñas flechas o líneas que sugieren el tratamiento de la técnica desde una perspectiva de las relaciones internas o externas. A su vez, estás relaciones ha permitido describir dos conceptos implícitos de la proporcionalidad.

Finalmente, el identificar las praxeologías en los cuatro cuadernos de trabajo analizado, ha permitido tener mayor amplitud para concluir que el desarrollo secuencial de las tareas debe presentar un vínculo entre sus respectivas técnicas. Al respecto, al culminar la investigación se propone Una organización Matemática relacionado a una secuencia sobre la presentación tareas para nuestro objeto de estudio en el nivel de primaria.

Palabras clave: Proporcionalidad; Organización Matemática; Educación primaria; TAD.

ABSTRACT

This research work aims to build a praxeological organization of proportionality from an epistemological and ecological study, in order to determine, describe and characterize the presence of proportionality at the primary level. This objective starts from the question: What is the mathematical organization of the unit, which contains the theme of proportionality, in the official mathematics workbooks at the elementary level? To answer this question, we developed a qualitative research with a bibliographic approach, taking as a theoretical and methodological reference the Anthropological Theory of the Didactic, which uses praxeologies as the unit of analysis.

We began by reviewing the official curricular documents and we identified the presence of our object of study from the third year of primary school in the competence related to solving problems of regularity, equivalence and change. Then, with the theoretical aspects provided by the framework, the workbooks were analyzed and 3 types of tasks, 13 tasks, 13 techniques and technological discourses that justify our Mathematical Organization were identified. The type of task related to Finding the unknown term in a situation of proportionality is privileged, the tasks are presented under the assumption of being proportional and it is assumed that the concept of magnitude is known. Furthermore, in most of the tasks the use of the proportionality table as ostensive is explicit and in these small arrows or lines that suggest the treatment of the technique from a perspective of internal or external relationships. In turn, these relationships have allowed us to describe two implicit concepts of proportionality.

Finally, identifying the praxeologies in the four analyzed workbooks has allowed us to have a greater scope to conclude that the sequential development of the tasks must present a link between their respective techniques. In this regard, at the end of the research, a mathematical organization related to a sequence on the presentation of tasks is proposed for our object of study at the primary level.

Keywords: Proportionality; Mathematical Organization; Primary education; TAD.

DEDICATORIA

A Dios, por toda la fortaleza y paciencia que me ha dado.

A mi esposa e hijos, por todo su apoyo y aliento constante

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora Mg. Cintya Gonzales por su constante apoyo y paciencia en el desarrollo y culminación de la tesis.

A la Dra. Cecilia Gaita por sus valiosos y pertinentes aportes en el proceso del proyecto.

Al Dr. Francisco Ugarte por sus sugerencias y observaciones que permitieron mejorar la investigación.

A mi familia por su acompañamiento y comprensión ante mis recurrentes ausencias.

A la línea de investigación de Epistemología de las matemáticas en la didáctica de las matemáticas: la antropología del conocimiento matemático y el diseño de secuencias didácticas por aportar conocimientos a mi formación profesional.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CONSIDERACIONES INICIALES

Esta investigación se enmarca dentro de las investigaciones de tipo epistemológico, ya que se problematiza el saber, en particular se centra en estudiar cómo se presenta la noción de la proporcionalidad en el nivel primaria a través de los cuadernos de trabajo dirigidos a estudiantes, los cuales a su vez sirven de apoyo a los profesores al momento de planificar su enseñanza. Diversas investigaciones (Chaachoua & Comiti,2010, Gonzales, 2014, Wijayanti, 2017, Kaspary, 2020) señalan que los libros de texto asumen un rol primordial en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el análisis de estos nos permite ver en qué momento de la vida del objeto de estudio se encuentra, debido a la transposición didáctica es decir, caracterizar su estado en un instante dado; conocer el funcionamiento del sistema educativo, esto como resultado de las interpretaciones de los autores con relación a los lineamientos curriculares dados en la noosfera; así también conocer la razón de ser de la enseñanza de los saberes. Coincidimos con Gascón (2014) cuando afirma que para analizar los procesos de transposición didáctica de un objeto matemático es necesario analizar de manera crítica los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones implicadas, adoptando una emancipación epistemológica, que a su vez es un primer paso para la emancipación institucional, que consiste en liberarse de la sujeción de las instituciones.

La noción de proporcionalidad tal cual lo indica Wijayanti (2015), se encuentra presente en diversos dominios de la matemática escolar como geometría, aritmética, álgebra. También en el estudio en diversas disciplinas como la física, la química, la estadística, etc. Las cuales pueden ser objetivadas en una anidación de prácticas como afirma Reyes (2016), tales como: derecho (principio de proporcionalidad), medicina (índice de masa corporal), física (Ley de Hooke), Vida cotidiana (trueque, compra-venta, construcción de una vivienda), cognitivo (balanza), densidad poblacional, arte (Le Corbusier), química (concentración).

Esta noción para el currículo escolar peruano, se estudia a lo largo de toda la Educación Básica Regular (EBR), desde el tercer grado de primaria hasta el quinto grado de educación secundaria. En esta investigación, se presenta en particular el estudio realizado en el nivel primario. Se encuentra como desempeño de las diferentes competencias propuestas. Además de estar íntimamente relacionada a las nociones matemáticas tales como: las magnitudes, multiplicación, la división, el número racional, la escala, el porcentaje, entre otras; que son temas de gran importancia para la comprensión de la noción de función en el nivel secundario y superior.

Se realiza el estudio de la proporcionalidad en base a las nociones teóricas de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD), en la que se toma como unidad de análisis las praxeologías. En este caso se analiza las organizaciones matemáticas que se encuentran en los cuadernos de trabajo (CT) que se distribuyen como libro oficial a todas las instituciones educativas estatales de nuestro país.

La Tesis considera cinco capítulos. En el primer capítulo, se presenta la problemática en estudio y las investigaciones de referencia que sirven de apoyo para el desarrollo de esta investigación.

En el segundo capítulo, se presentan los elementos teóricos de la TAD que nos resultan útiles para el estudio de la actividad matemática en cuestión. Elementos como, por ejemplo: la noción de institución, de objeto, de praxeología, clases de praxeología, de ostensivos, así como la noción de modelo praxeológico de referencia que es de mucha importancia en nuestra investigación. También se presenta la metodología que guía el trabajo.

En el tercer capítulo, se presenta el estudio de la proporcionalidad. Consideramos su aspecto epistemológico, donde analizamos su evolución histórica desde el punto de vista matemático y se determinó que la concepción particular que tenían los griegos y los chinos de la proporcionalidad, hoy cohabitan desde un punto de vista de las razones internas y externas. También se revisó su ubicación en los programas oficiales de nuestro país, como son, el Diseño Curricular Nacional 2005 y 2009, la ruta de aprendizaje 2015 y el actual Currículo Nacional y se corroboro un mayor alcance de su presencia con el cambio de cada Currículo.

En el cuarto capítulo, presentamos los estudios preliminares, relacionados con los aspectos didácticos en situaciones de proporcionalidad, como son las clases de problemas, estrategias de solución y el razonamiento proporcional que promueve cada situación. Todo esto ha contribuido a diferenciar el tipo de análisis (escalar o funcional) que le corresponde a cada tarea; también incluimos el estudio de la Organización Matemática (OM) de Wijayanti (2017) y Hersant (2005). Ambos trabajos han influido en nuestra propuesta de OM.

En el quinto capítulo, se realiza el análisis de los cuadernos de trabajo, donde describimos la organización de los elementos encontrados sobre la proporcionalidad usando nuestro referencial teórico TAD.

Finalmente, como resultado de nuestra investigación se presenta nuestra propuesta de organización de las tareas por cada grado, una propuesta de integración de todas las tareas encontradas y las consideraciones finales.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentamos los antecedentes, la justificación, la pregunta de investigación y los objetivos planteados en nuestra investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Nuestra investigación consiste en describir el saber.a enseñar de la proporcionalidad en la EBR y para lograrlo presentamos investigaciones que desarrollan el análisis de textos en el tratamiento de la proporcionalidad trabajados con las herramientas que proporciona la TAD.

Najarro (2018) realizó una investigación referido a la descripción de las características del modelo epistemológico dominante que presenta el objeto matemático proporcionalidad en los libros oficiales de matemática (manuales para docentes y textos escolares de matemática) en el nivel de secundaria bajo el marco de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD).

Para esto, el autor, primero revisa y analiza la presentación del objeto matemático proporcionalidad en los distintos documentos curriculares. Este análisis es importante porque permite conocer qué elementos de la organización matemática (OM) se encuentra en la transposición didáctica, donde se determinó que el objeto proporcionalidad es desarrollado en todos los grados de la educación secundaria. Posteriormente se acude a los textos escolares y al manual del docente para identificar y describir su respectiva organización matemática.

Como resultado de su investigación, el autor en el análisis de los textos y manuales de los docentes identificó 6 tipo de tarea, 15 tareas, 23 técnicas y 8 discursos tecnológicos, a raíz de estos resultados se determina que la Organización Matemática es local; es decir, esta, conformado por varios tipos de tareas relacionados entre sí a través de los elementos tecnológicos.

El autor también analizó los ostensivos que se encuentran presente en los textos escolares y se determinó que, en particular en el texto de primero de secundaria observó que con mayor frecuencia se presentan el oral, las tablas de proporcionalidad y las proporciones que se emplean en las fracciones (a/b = c/d).

Esta investigación también muestra que la proporcionalidad en ese grado se desea articular la proporcionalidad y la función lineal, correspondiendo al modelo dominante, por un lado a la organización clásica de la proporcionalidad, ya que se describe como una relación de dos series de números. Sin embargo, los problemas y técnicas utilizadas en su mayoría están relacionados a la regla de tres, citando dos fenómenos encontrados de “evitación del álgebra” y numeralización de la proporcionalidad” en el sentido de Comin (2000). Por otro lado, aparecen elementos del primer nivel de algebrización, por ejemplo y=kx. Siendo la constante de proporcionalidad un posible elemento de articulación, desvanecido por las tareas clásicas de funciones, por ejemplo, encontrar el dominio y el rango, interceptos, etc.

Por otro lado, en la misma línea, Quentasi (2015), analiza la organización matemática en un texto escolar de primer grado del nivel secundario donde se busca determinar si existe articulación entre el objeto matemático proporcionalidad y función lineal; para esto se traza el siguiente objetivo: Analizar la OM en la unidad donde se desarrolla el tema de función y proporcionalidad directa en el texto oficial del primer grado de secundaria del año 2012, los cuales fueron elaborados teniendo en cuenta el diseño curricular del 2009, para esto se apoya en las herramientas que la TAD proporciona.

El autor, en primer lugar, identifica los objetos matemáticos función y proporcionalidad en la unidad V del libro seleccionado que lleva como título funciones y álgebra. En el análisis se encontró, 17 tipos de tareas, 42 tareas, 38 técnicas, 18 elementos tecnológicos y 2 teorías. Además, describe como se presenta el contenido funciones en el texto y concluye que la función lineal no está explícita en los ejercicios que desarrolla el texto sin embargo en los ejemplos y actividades para los estudiantes la función lineal está presente de forma explícita.

Como resultado de su investigación, el autor concluye, que no existen elementos que articulen la proporcionalidad y la función lineal a pesar de encontrarse en la misma unidad. Respecto al nivel de algebrización, identificó que pertenece al grado de completitud menos completa, pues no se verifica una clara presencia de los indicadores de completitud.

Estos dos trabajos nos brindan un panorama sobre el tratamiento y evolución de la proporcionalidad en primero de secundaria, ya que es donde se observa el cambio de trabajo con respecto al nivel de primaria.

Gonzales (2014), en su investigación hace un estudio sobre la praxeología matemática del objeto matemático escala y proporción en un texto universitario, bajo la perspectiva de la TAD, donde su objetivo principal es analizar y describir la organización matemática que se propone sobre los objetos matemáticos escala y proporcionalidad de un texto de matemática para estudiantes del I ciclo universitario.

La investigación presenta una metodología cualitativa con un enfoque documental e inicia recopilando investigaciones referidas al tema escala y proporción enfocándose en la tarea, el tipo de tarea y la técnica empleada al resolver problemas de proporcionalidad, luego según el tipo de tratamiento que presentan las investigaciones de enseñanza y de aprendizaje se establecieron tres criterios que permitió el análisis de la organización matemática presente en el texto analizado. El primer criterio está relacionado a las actividades resueltas cuya técnica emplea conceptos referidos a la relación de proporcionalidad y modelización proporcional, ecuacional y funcional, el segundo criterio está relacionado al tipo de tarea sobre escala que presenta el texto y el tercer criterio referido a las formas distintas como se presenta la proporción considerando las categorías de Vergnaud (multiplicación, división partitiva, división media y regla de tres).

Sobre los resultados del análisis, la autora considera que, en alusión al primer criterio, en la mayoría de tareas se identificó el empleo del concepto modelización proporcional, en tanto que las otras concepciones de la proporción como, el ecuacional, funcional y discursivo se encuentra ausente en el texto. Con respecto al segundo criterio se determinó mayor presencia del tipo de tarea con valor desconocido y finalmente como resultado del tercer criterio se encontró que en muchas de las tareas de escalas te dan como dato un numerador igual a la unidad.

Esta investigación brinda un panorama de las técnicas relacionadas a las tareas que presentan como dato explícito o implícito la unidad. Importante para nuestro trabajo, ya que, en el caso de primaria es común encontrar problemas del cuarto valor faltante donde nos proporcionan la unidad como un término.

García (2005), en su tesis doctoral realiza un análisis de los documentos curriculares con lo cual justifica la necesidad de plantear el problema de la articulación del estudio de las relaciones de las magnitudes en la educación secundaria, luego realizó el análisis de texto y confirma la existencia de la desarticulación de la proporcionalidad con las relaciones funcionales, lo cual justifica la necesidad de plantear el problema de la articulación del estudio de las relaciones entre magnitudes en la Educación Secundaria. También el autor al realizar un análisis a los libros de textos que es de uso obligatorio en la Educación Secundaria muestra que la proporcionalidad se ha trabajado de manera muy aritmetizada. Así mismo, muestra una evolución de la organización matemática en torno a la proporcionalidad, a los que llama Sistemas Lineales (SL) y estos sistemas se construyen con un estado, es decir con dos cantidades a y a’ que se corresponden y pertenecen a las magnitudes M y M’ respectivamente y que evolucionan desde la condición de linealidad. Siendo esta condición el punto de partida que permitió la construcción y evolución de sus diferentes modelizaciones, como son: la modelización discursiva, la modelización proporcional, la modelización ecuacional y la modelización funcional.

Consideramos importante destacar el trabajo de García, pues nos brinda un panorama sobre cómo debe enfocarse el análisis de la proporcionalidad en los textos escolares ya que, nuestra investigación está centrada en el análisis de la proporcionalidad en los cuadernos de trabajo.

La tesis de Wijayanti (2017) se encuentra un estudio praxeológico de la proporcionalidad en los libros de texto de primeros grados de secundaria. Al respecto el autor resalta la presencia de la proporcionalidad en tres áreas de la matemática, como son, la Aritmética con el tema de razón y proporción, Geometría con el tema de figuras planas similares y en el Álgebra con la función Lineal. Además, identifica cuatro tipos de problemas de proporcionalidad, los cuales son: encontrar la razón, encontrar el cuarto valor faltante, comparación de razones y producir una relación de equivalencia. También, considera el tratamiento de proporcionalidad en los textos escolares para definir la proporcionalidad como una relación entre dos magnitudes.

> Se dice que dos cantidades (Q_1, Q_2) son proporcionales si existe una correspondencia entre ellas, es decir, dados dos elementos cualesquiera $q_{1.1}$, $q_{1.2}$ en Q_1 y los correspondientes $q_{2.1}$, $q_{2.2}$ en Q_2, tenemos $\frac{q_{1.1}}{q_{1.2}} = \frac{q_{2.1}}{q_{2.2}}$ (p.85)

Considerando esta definición, el autor encontró 7 tipos de tarea que los divide en razón (razón no entera) y escala (razón entera) y en proporción directa e inversa. La tabla 1 muestra los tipos de tarea mencionados.

Tabla 1: Tipo de tarea relacionado a la proporcionalidad

Razón y proporción
T_1: dado x_1 y r, encontrar x_2, de modo que (x_1, x_2) :(1, r) *T_2*: dado x_2 y r, encontrar x_1, de modo que (x_1, x_2) :(1, r) *T_3*: dado x_1 y x_2, encontrar r, de modo que (x_1, x_2) :(1, r)
Proporción directa e inversa
T_4: dado los números a, b y dado que x>y están relacionados con a, b. ¿puede ser cierto que (x, y): (a, b)? *T_5*: dado (x_1, x_2) y (y_1, y_2) compara razones internas. *T_6*: dado (x_1, x_2) e y_1, encontrar y_2 tal que (x_1, x_2) :(y_1, y_2) *T_7*: dado x_1, x_2, y_1 encontrar y_2 tal que (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son inversamente proporcional

Fuente: Traducido de Wijayanti (2017, p.89)

Estos tipos de tareas surge de una definición de proporcionalidad donde relaciona cantidades homogéneas y para nuestra investigación nos orientan en el análisis de tareas que promuevan una relación de tipo escalar entre las cantidades de dos magnitudes.

1.2 Justificación

Iniciamos nuestra justificación resaltando lo expresado por Reyes (2013), la riqueza del concepto de proporcionalidad, permite mostrar a las matemáticas como un todo integrado. Esto debido a que el concepto se aborda desde situaciones extra matemáticos y se extiende hacia la aritmética, el álgebra, la estadística, la probabilidad, la geometría, etc. Por ello diversas investigaciones muestran su preocupación por la comprensión del concepto de proporcionalidad y su vínculo con otros objetos matemático; así tenemos, en los trabajos de Guacaneme (2001), Bosch (1994) y Quentasi (2015), se muestran que los elementos praxeológicos de la proporcionalidad no se articulan con la praxeología del objeto matemático función lineal. Por otro lado, García (2005) también resalta la importancia de la proporcionalidad al decir "Los problemas de proporcionalidad son "el gran tema" de la aritmética enseñada, como muestra su presencia en los manuales escolares a lo largo de la historia. Aún hoy en día ocupa un papel privilegiado en la educación secundaria" (p. 116).

Se observa que a través del Currículo Nacional de la Educación Básica (2016), que la proporcionalidad es un contenido matemático obligatorio desde el nivel de primaria que se desarrolla mediante la competencia referida a regularidad, equivalencia y cambio donde se espera que el estudiante resuelva problemas que presentan dos equivalencias, regularidades o relación de cambio en dos magnitudes y expresiones; [...] (CN, 2016, p.38). Así también, en el mismo Currículo Nacional (CN) en el nivel de primaria encontramos temas como fracciones y porcentaje que requieren de nociones de proporcionalidad, sin embargo en los textos escolares impartidos por el MINEDU notamos que el tratamiento de los conceptos (fracciones y porcentaje) no está articulado al concepto de proporcionalidad. Al respecto Mendoza y Block (2010) sugieren:

> que la apropiación del porcentaje difícilmente puede lograrse de una manera fecunda si no está articulado en la noción de razón, expresada como una relación entre dos cantidades. El paso de la medida a la razón puede ser más accesible si se parte de la definición del porcentaje como una relación entre dos cantidades "tantos de cada 100" (p.13)

Asimismo, su importancia también trasciende en los documentos curriculares. A través de los años, la proporcionalidad ha ganado notoriedad en el Diseño Curricular Nacional (DCN). Así en el DCN (2005) la proporcionalidad se enseñaba a partir de 5° grado de primaria, en tanto en el DCN (2009) su aprendizaje iniciaba en 4° grado de primaria y actualmente en el Currículo Nacional (2016) el estudio de la proporcionalidad ocupa un lugar importante en la educación básica regular, ya que se estudia desde 3ero de primaria hasta 5to de secundaria. Esto ha significado que desde los menores grados se formule preguntas relacionado a la proporcionalidad en la evaluación censal del año 2019. Al respecto el Ministerio de Educación (MINEDU) a través la oficina de la Unidad de Medición de la Calidad (UMC) pone al alcance de toda la comunidad educativa mediante su página web las preguntas modelo para cuarto de primaria correspondiente al examen censal, donde se puede observar que la pregunta 7 está referida al objeto matemático proporcionalidad.

En la figura 1, se muestra la pregunta al cual se hace mención.

En una tienda ofrecen tres paquetes de mantequilla por S/ 5. Juan hace una tabla para calcular lo que gastaría en cierta cantidad de paquetes.

Cantidad de paquetes	3	6	9
Precio (S/)	5	10	15

Si Juan quiere comprar una docena de paquetes de mantequilla en esa tienda, ¿cuánto debe pagar?

a) S/ 15
b) S/ 20
c) S/ 30
d) S/ 60

Figura 1: Pregunta modelo referido al objeto proporcionalidad
Fuente: (UMC, 2019, cuadernillo modelo, 4to primaria, p.5)

Si bien se reconoce la importancia a nivel curricular de la proporcionalidad y por ende de los textos escolares distribuido por el estado desde el nivel de primaria, siendo su uso obligatorio, encontramos resultados que muestra el MINEDU (2017) con respecto a la evaluación PISA 2015 donde solo el 9.8 % de los estudiantes peruanos muestran algunas habilidades en el manejo de relaciones de proporcionalidad. Al respecto, diversas investigaciones coinciden sobre la importancia que tienen los textos escolares en el aprendizaje de los estudiantes. Así mismo, Quispe (2018) afirma “las actividades proporcionadas en los libros de texto poseen una organización de este conocimiento que pueden facilitar u obstaculizar el aprendizaje de las mismas” (p.13). y para Chaachoua (2014), los libros de texto son el resultado de una transposición didáctica. Por esta razón, consideramos necesario e importante realizar el análisis de las organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad presente en los cuadernos de trabajo del nivel primario y determinar los elementos praxeológicos de nuestro objeto de estudio y a partir de ella, proponer una secuencia didáctica de las tareas teniendo en cuenta la articulación de sus respectivas técnicas, ya que investigaciones de esta naturaleza referido a la proporcionalidad en el nivel primario son escasas en nuestro país.

Por todo lo expuesto, justificamos la necesidad de realizar una investigación orientado a realizar un estudio praxeológico referido a la proporcionalidad en los textos escolares de primaria que distribuye el estado. Tomando como marco de referencia la TAD.

1.3 Pregunta y objetivos de investigación

Considerando los antecedentes descritos, nuestra investigación se centra en el análisis de las organizaciones matemáticas del objeto matemático proporcionalidad presente en los cuadernos de trabajo escolares del nivel de primaria distribuido por el MINEDU el año 2019. Por lo tanto, formulamos la siguiente pregunta de investigación.

¿Cuál es la organización matemática de la proporcionalidad en los cuadernos de trabajo de matemática del nivel de primaria?

Objetivo general:

Construir un modelo praxeológico de referencia de la noción de proporcionalidad a partir de un estudio epistemológico y ecológico, para así determinar, describir y caracterizar la presencia de este objeto matemático en el nivel primario.

Objetivos específicos:

1. Realizar un estudio epistemológico y ecológico de la proporcionalidad.
2. Determinar los elementos praxeológicos de este objeto matemático en los cuadernos de trabajo oficiales del nivel primario.
3. Caracterizar el saber a enseñar encontrado, porponer una reorganización.

CAPÍTULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En el presente capítulo abordamos algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante TAD, que sustenta nuestro trabajo de investigación centrado en el análisis de los cuadernos de trabajo, desde 3º grado a 6º grado de primaria. En el capítulo desarrollaremos los siguientes aspectos: La Teoría Antropológica de lo Didáctico, la noción de praxeología, la definición de Modelo Epistemológico de Referencia y los objetos ostensivos

2.1. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La teoría Antropológico de lo Didáctico fue propuesto por el francés Chevallard (1999) y sitúa todo actividad matemática como un conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales donde describe los conocimientos matemáticos en función de las praxeologías u organizaciones matemáticas cuyos principales componentes son los tipos de tareas, las técnicas, tecnologías y teorías.

Al respecto, Lucas (2010) afirma que:

> Para la TAD su eje de estudio central es el hombre aprendiendo y enseñando la estructura matemática a través de las relaciones humanas frente a la relatividad del saber científico con respecto a las instituciones sociales. [...], la TAD se pregunta cuáles son las condiciones que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar o “vivir”) en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las restricciones que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades (p.13)

Para la TAD todo quehacer, práctica o actividad matemática es considerada una actividad humana más y estas actividades pueden describirse mediante un único modelo formulada en términos de praxeologías. Según Gonzales (2014), “este modelo permite el análisis de las prácticas sociales, tanto por su descripción, como por el estudio de las condiciones en que tales prácticas se realizan” (p.37) la TAD al referirse a la actividad matemática distingue dos tipos de organizaciones o praxeologías: la Organización Matemática (OM) y la Organización Didáctica (OD)

Al respecto, Bosch y Gascón (2003)

> para la TAD la didáctica se preocupa por el estudio de las condiciones y restricciones bajo las cuales las praxeologías comienzan su vida, migran, cambian, funcionan, mueren, desaparecen, reviven, etc., dentro de los grupos humanos. [...]: la didáctica estudia lo didáctico, en cualquier forma que pueda aparecer. Dándose el objeto de estudio adecuado, la didáctica aumenta progresivamente sus esperanzas de evitar quedar dormida por campos disciplinares establecidos en la escuela (p.11)

de la misma manera Chevallard, Bosch y Gascón (1997) afirman que:

> La didáctica de las matemáticas es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio –o procesos didácticos- de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.), que se ven llevados a estudiar matemáticas o ayudar a otros a estudiar matemática. (p.60).

Es decir, para la TAD, el objetivo de la Didáctica de la Matemática no sólo se limita en estudiar los procesos cognitivos que se genera en los estudiantes en torno al empoderamiento de un concepto específico, tampoco se trata de analizar y comprender las dificultades que presenta el docente en su proceso de enseñanza cuando transmite un determinado concepto matemático.

> En resumen, el modelo epistemológico propuesto por la TAD permite describir y analizar la complejidad de la actividad matemática institucional, y se convierte así en un valioso instrumento para intentar analizar los procesos de creación y difusión del conocimiento matemático, en cuyo núcleo es posible situar los procesos de modelización y la dicotomía de lo matemático y lo no-matemático (García, 2005, p.144)

2.2. Institución y sujeto

Son dos conceptos básicos que maneja la TAD que independientemente no se puede definir. Para Castela (2016)

> Una institución es una organización social estable en el seno de la cual se realizan ciertas actividades sociales, bajo ciertas restricciones. Por un lado, la institución crea un marco vinculante para las actividades que se desarrollan en su seno, por otro, las hacen posibles proporcionando ciertos recursos materiales, organizativos y cognitivos. Donde los participantes en dichas actividades tienen que convertirse en sujetos de la institución, es decir someterse a sus restricciones. (p.12)

De lo expresado podemos entender que la institución limita la libertad de los sujetos, pero también genera situaciones que permiten el desarrollo de sus actividades porque provee al sujeto de recursos materiales, organizativos y cognitivos.

Para Bosch (1994)

> “El universo de prácticas sociales está formado por instituciones: la “cultura”, la “familia”, el bar, la tienda de mi barrio, un país, su sistema de enseñanza, etc., son ejemplos de instituciones. Y también son instituciones una clase, una clase de matemáticas, la enseñanza primaria, la secundaria, los matemáticos investigadores, los profesores de secundaria, etc.” (p.19).

2.3 Praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM)

La praxeología no tiene una definición explícita pero su noción está vinculada a las construcciones institucionales como son la tarea, actividades, problemas y ejercicios. Estas tareas no son estáticas ya que se construyen y reconstruyen en una institución o en una clase siendo este proceso permanente de construcción y re-construcción de la tarea un problema complejo, debido a todo lo que implica esta actividad.

La palabra “praxeología” deriva de dos términos “praxis” y “logos”, el primero identifica el “saber hacer” donde encontramos las tareas y la técnica que se emplean para realizarla y en el segundo término “logos” que identifica el saber dónde encontramos la **tecnología** que describe las explicaciones para hacer comprensible las técnicas, encontramos también la **teoría** que permite dar significado y sentido a los problemas planteados, también interpreta las técnicas y justifica el desarrollo y las demostraciones de las tecnologías.

Para Chevallard (1999) la praxeología es la unidad mínima en la que la actividad matemática puede ser descrita y se representa mediante sus cuatros componentes, como **[**$T/\tau/\theta/\Theta$**]**. Donde T es el tipo de tarea, τ es la técnica que se emplea para realizar la tarea, θ es la tecnología que justifica la técnica y Θ es la teoría que justifica el desarrollo de las tecnologías.

Al respecto Lucas (2010) manifiesta que:

> Los componentes de la OM no son independientes, por el contrario, están fuertemente relacionados entre sí. Por ejemplo, el manejo de las técnicas genera nuevos tipos de problemas provocando nuevas necesidades tecnológicas, o dicho de manera más global, el bloque práctico-técnico no puede vivir aisladamente en una institución, requerirá la existencia del “discurso racional” que justifique la técnica y muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas. (p.25)

- Bloque práctico-técnico [T/τ**]** este bloque se identifica con el saber hacer. Está formado por T un tipo de tarea que puede ser un ejercicio, un problema o una actividad propuesto por el docente y también formado por las τ técnicas que son las maneras de resolver una tarea

- Bloque tecnológico - teórico [θ/Θ**]** este bloque se identifica con el saber, ubicamos la tecnología que son los discursos razonados que va describir, explicar y justificar las técnicas que se emplean. En este bloque también se postula la teoría que es un segundo nivel de descripción, justificación y explicación (tecnología de la tecnología).

En la tabla N°2, observamos los dos bloques correspondientes a las praxeologías matemáticas.

Tabla 2: Componentes de una praxeología u organización matemática

BLOQUE	COMPONENTE	
práctico - técnico (Praxis)	tarea	Saber hacer
	técnica	
tecnológico - teórico (Logos)	tecnología	Saber
	teoría	

Fuente: Adaptado de Lucas (2010, p.25)

2.4. Elementos de las praxeologías matemáticas

Los cuatro componentes de la organización praxeológica son: los tipos de tarea (T), la técnica (τ), tecnología (θ) y la teoría (Θ). Considerados por Serrano (2013) como la mínima unidad de análisis de las actividades humanas

2.4.1 tipos de tarea (T)

En una organización matemática una tarea puede presentarse a los estudiantes de formas diversas, como: una actividad, un ejercicio, un ejemplo, un problema, etc. Este tipo de presentación va depender del docente o de quien redacte un texto escolar. Así las tareas y tipo de tareas son "obras" construido por una institución y cuya reconstrucción es un objeto de estudio de la didáctica (Chevallard, 1999). En el mismo año Chevallard también sostiene.

> la noción de tarea o, mejor, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo. (p.2)

de lo anterior un género de tareas existe sólo bajo la forma de diferentes tipos de tareas, como el caso del género calcular que se va enriqueciendo con los nuevos tipos de tarea, como, por ejemplo, un estudiante en sus inicios comienza con cálculos aritméticos básicos, luego cálculos con vectores y más adelante calculo vectorial. Así determinar es un género de tarea, determinar el dominio de una función es un tipo de tarea y determinar el dominio de la función a partir de su gráfica es una tarea.

> Esto significa que una tarea es la acción sobre un objeto particular, un tipo de tareas es la acción que puede recaer sobre un diverso tipo de objetos y por último, los géneros de tareas son aquellas en las que se menciona la acción pero no se especifica el objeto sobre el que ésta recae. (Quentasi, 2015, p.27)

2.4.2. Técnica (τ)

Una técnica es el método con el cual se realiza una tarea, la técnica es una "manera de hacer". Una técnica necesariamente no va resolver todas las tareas de un tipo de tarea y esta parte en las que sí tiene éxito se le denomina "alcance de la técnica". Para Chevallard (1999) una técnica puede ser superior a otro en la medida que, esa técnica sea capaz de resolver en mayor medida una tarea de un determinado tipo de tarea con respecto a otra técnica.

Con respecto a este punto, Chevallard (1999), afirma:

> En primer lugar, una técnica τ -una "manera de hacer"- no tiene éxito más que sobre una parte P (τ) de las tareas del tipo T a la cual es relativa, parte que se denomina alcance de la técnica: la técnica tiende a fracasar sobre $T \backslash P(\tau)$ de manera que se puede decir que "no se sabe, en general, realizar las tareas del tipo T ". (p.3)

Para Serrano (2013) la existencia de la técnica genera nuevos tipos de tareas y genera la necesidad de un discurso interpretativo y justificativo que la TAD lo denomina tecnología

2.4.3. Tecnología (θ)

Una tecnología es la encargada de justificar una técnica y hacerla comprensible. La tecnología permite explicar, describir y justificar por qué funciona una técnica, además una importante función que tiene es la de aportar elementos a la técnica para que este supere sus limitaciones y pueda producir nuevas técnicas.

Respecto a la tecnología, Chevallard (1999), manifiesta

> Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ, un discurso racional -el logos- sobre la técnica -la tekhnê- τ, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica τ, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución (p.4)

De acuerdo con el autor la tecnología es el discurso de la técnica, cuyo objetivo primordial es justificar racionalmente la técnica, otro objetivo de la tecnología es crear nuevas técnicas y adaptarla al desarrollo de una determinada tarea

2.4.4. Teoría (Θ)

La teoría Θ tiene misma función frente a la tecnología θ, que el de la tecnología frente a la técnica τ. A la teoría se le atribuye el nivel máximo de justificación y explica las afirmaciones de la tecnología.

Para Chevallard (1999) en el discurso tecnológico algunas veces en necesario establecer la razón respecto a sus afirmaciones vertidas. Es allí la necesidad de plantear un nivel superior de justificación y explicación que se conoce como teoría. La teoría es el discurso racional sobre la tecnología.

Al respecto, Serrano (2013) manifiesta que:

> La teoría (asociada a una tecnología) es el discurso justificador de esta tecnología y constituye por decisión metodológica el último nivel de

justificación de la actividad. [...], el nivel de la teoría acostumbra a permanecer implícito, formado por principios y verdades asumidas por el grupo, que solo suben a la superficie en caso de problemas o dificultades, cuando se cuestiona la razón de ser de un tipo de tareas o la manera de llevarla a cabo (p.19)

2.5. Generadores de tipo de tareas (GT_i) y variables didácticas (V_i)

Es una extensión del modelo praxeológico, que al igual que la TAD el primer objeto es la noción del tipo de tarea. Al respecto, Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019) señalan que en la propuesta de una praxeología debe considerarse el generador de un tipo de tarea (GT_i) y las variables didácticas (V_i). Esta última permite relacionar lo especifico y lo genérico al organizar los tipos de tareas. Al respecto Chaachoua (2010) desarrollo el proyecto T4TEL, donde T4 se relaciona con la praxeología clásica (tarea, técnicas, tecnología y teoría) y TEL se relaciona con una mejorada tecnología del aprendizaje.

Sobre lo mencionado, Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019), expresan lo siguiente:

- Tipo de tarea y subtipos de tareas: un tipo de tarea se describe con un verbo de acción y algunos complementos. El verbo de acción va distinguir cada tipo de tarea como por ejemplo “hallar o multiplicar” y para definir los complementos se puede considerar los distintos niveles de complejidad, desde los más específico hasta lo más genérico. Por ejemplo, el tipo de tarea, “multiplicar números enteros” es más general que “multiplicar número enteros de una cifra”. Además, dentro de las organizaciones del tipo de tarea cabe preguntarse ¿Cómo podemos categorizar un conjunto de tipos de tareas relacionados con un objeto que debe enseñarse haciendo una estructura “calculable”? Al respecto, los autores señalan que es necesario confiar en él alcance de la técnica y expresan lo siguiente.

  Si se considera un tipo de tarea T y una técnica τ que pertenece a T con alcance $P(\tau)$. Se puede generar las siguientes observaciones:

  a) Si T está incluido en $P(\tau)$, puede existir un tipo de tareas T’ que es más genérico que T, por lo tanto, también lo es una técnica τ.

b) Si P(τ) está incluido en T, también puede existir un tipo de tarea más específico, donde τ es una técnica.

- Noción de generador de tipos de tareas y variables. Un generador se define por un tipo de tarea y un sistema de variables. Estas variables hacen referencia a una lista de variables acompañado de ciertos valores que pueden tomar. Por ejemplo, el tipo de tareas "Calcular el término desconocido en una relación de proporcionalidad" define un generador del tipo de tareas GT: [Calcular el término desconocido en una relación proporcional; V_1, V_2, V_3] donde se puede considerar que V_1 es el tipo de relación (directa, inversa), V_2 es la naturaleza numérica de la razón de proporcionalidad (números enteros, decimales, etc) y V_3 es el tipo de razón (interna o externa). Al respecto se puede considerar muchas más variables y se debe tener en cuenta que todas ellas generan tipos de tareas más específicas que el tipo de tareas T.

  Por otro lado, las variables cumplen dos funciones, la primera es generar sub tipos de tareas atribuyéndole distintos valores y estas tareas pueden tener técnicas específicas y la segunda función es permitir la caracterización de los ámbitos de las técnicas.

2.6. Clases de praxeología

Chevallard (1999) propone herramientas más precisas para analizar las actividades matemáticas desarrolladas en una institución, introduciendo tipos de praxeologías u organización praxeológica donde considera el grado de complejidad ascendente de las praxeologías, las cuales según (Becerra, 2015) surgen del cuestionamiento sobre las razones de ser de las OM que se desea reconstruir y articular

- **Organización Matemática Puntual (OMP)**. Esta noción está definida en principio por el bloque práctico - técnico y son aquellas que son generadas por lo que se considera en una institución como un único tipo de tarea.

> El predominio del saber, se encuentra raramente en las praxeologías puntuales. Generalmente en una institución dada, I, una teoría Θ responde a varias tecnologías θ_j, cada una de las cuales a su vez

> justifican y hace inteligibles varias técnicas τ_{ij}, correspondientes a otros tantos tipos de tareas T_{ij} . (Chevallard 1999, p. 6)

Esto quiere decir que no es común encontrar una praxeología puntual puesto que una teoría generalmente responde a varias tecnologías y estas a su vez justifican varias técnicas que corresponden a varios tipos de tareas. “Las praxeologías puntuales irán así combinándose integrando cada vez una estructura más compleja y relativamente más completa de sus componentes” (Oliveira, 2009, p.26)

- **Organización Matemática Local (OML)**, resulta de integrar varias praxeologías puntuales. Está integración permite al discurso tecnológico asumir protagonismo ya que algunas técnicas pierden el carácter auto-tecnológico. En general las praxeologías puntuales se agrupan en praxeologías locales para dar respuestas a situaciones problemáticas que ninguna de las praxeologías puntuales de partida pudo solucionar.
- **Organización Matemática Regional (OMR)**, pertenecen a esta praxeología aquellas organizaciones matemáticas en las cuales una misma teoría fundamenta distintas tecnologías.

  Al respecto Lucas (2010) expresa,

  > una Organización Matemática Regional se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una teoría matemática común, de diversas praxeologías locales. Esta integración comporta que el discurso teórico tome el papel central. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías de las praxeologías locales que integran la praxeología regional. (p.26)

- **Organización Matemática Global (OMG)**, surge como consecuencia de integrar varias praxeologías regionales en una institución dada a partir de la agrupación de distintas teorías.

A manera de resumen en la figura 2, se muestra la relación de las jerarquías entre los tipos de praxeologías u organizaciones matemáticas.

2.7. Objetos ostensivos y no ostensivos

Un objeto ostensivo es todo objeto dotado de una naturaleza sensible que se presenta como una realidad perceptible ante el sujeto humano, mientras que los objetos no-ostensivo en matemática son aquellas nociones que no se pueden manipular, como los conceptos, definiciones, ideas, etc. Al respecto Bosch (1994) expresa que:

> El adjetivo ostensivo está formado a partir del sustantivo *ostensión* que proviene del latín *osténdere*, "presentar con insistencia", es decir ostentar. Al sustantivo *ostensión* se le puede asociar dos adjetivos: *ostensivo*, entendido como "que se muestra", y ostensible, "susceptible de ser ostentado o mostrado". De acuerdo con esta distinción que registran un gran número de lenguas latinas, llamaremos objeto ostensivo a todo objeto dotado de una naturaleza sensible, de cierta materialidad, y que, por ello, puede presentarse al sujeto humano como una realidad perceptible. Será pues un objeto ostensivo cualquier objeto material y, en particular, los sonidos (entre ellos los "morfemas" lingüísticos), los grafismos (entre los cuales se encuentran los "grafemas" que componen la escritura de las lenguas naturales o formales) y los gestos. (pp. 47- 48)

Los ostensivos constituyen la parte perceptible de la actividad, es decir, que en la realización de la tarea, los conceptos emergen de la manipulación de los ostensivos, la dimensión ostensiva y no ostensiva afecta a todos los elementos de la praxeología matemática. De acuerdo con Bosch (1994, citada en Najarro, 2018)

> …los objetos ostensivos tienen una valencia instrumental y una valencia semiótica dentro de una institución, por un periodo de tiempo y con ciertos objetos matemáticos... La instrumentalidad está referida a la utilización en técnicas para realizar tareas determinadas. Por ejemplo la notación $\sqrt{\ }$ y la notación ½ como exponente fraccionario tienen la misma instrumentalidad si se quire calcular $\sqrt{25}$ o $25^{1/2}$, sin embargo, si se desea calcular la derivada de $\sqrt{x}$ la notación ½ como exponente fraccionario tiene una valencia instrumental superior pues permite resolver la tarea de manera formal.

Por otro lado, la notación $\sqrt{\ }$ evoca el objeto no ostensivo raíz cuadrada, este ostensivo tiene una valencia semiótica que le permite funcionar como signo.

Figura 2 valencia de un objeto ostensivo
Fuente: Najarro (2018, p.23)

Un objeto no- ostensivo solo existe si puede ser evocado por otros objetos ostensivos que harán posible evocarlos e integrarlos en distintas actividades, así, por ejemplo, la notación: $f(x) = kx$ evoca a la proporcionalidad directa, como también las tablas, la representación gráfica en el plano cartesiano de la recta que pasa por el origen, son consideradas también ostensivos de la proporcionalidad. Otro ostensivo que evoca diferentes significados es $\frac{a}{b}$, este puede evocar un número racional, una razón, un cociente indicado, etc. Al respecto Bosch (1994, p.57) afirma:

> Las posibles utilizaciones de un objeto ostensivo en actividades diferentes hacen que su valencia semiótica esté siempre abierta, pudiendo evocar o representar diferentes objetos, según el tipo de actividad que se considere (y en función, de la institución en la que nos situemos). Será entonces al ser movilizado en una técnica concreta donde adquirirá su semioticidad efectiva.

2.8. Modelo Epistemológico de Referencia (MER)

En el ámbito de la TAD, las estructuras con el cual se construye un MER son conexiones de praxeologías matemáticas (Munzón, Bosch, Gascón, 2011). Estas construcciones deben ser contrastadas experimentalmente ya que es considerado como una hipótesis provisional, y esto permite su permanente revisión y modificación.

Por otro lado, para Sierra (2006) los MER son descritos como un proceso de construcción de praxeologías que posee una complejidad creciente. Así mismo para Gascón (2014) todo MER permite identificar y dar una interpretación a los fenómenos didáctico, como también esbozar sus posibles soluciones y explicaciones.

También Lucas (2015), expresa:

> El MER debe interpretarse como una hipótesis o conjetura provisional y, por lo tanto, susceptible de ser completado, modificado y revisado constantemente. Un MER es una hipótesis científica creativa que debemos someter a la prueba de la contingencia. Esta prueba se lleva a cabo mediante el diseño y experimentación de recorridos de estudio e investigación (REI) sustentados en dicho MER. En el capítulo V se describe con todo detalle este proceso en el caso del MER que proponemos en esta memoria. (p.89)

podemos decir entonces que un MER es un modelo teórico que nos permite analizar la evolución y transición de los saberes entre sus distintas instituciones. Un MER también tiene un carácter relativo y nace como una propuesta a los modelos epistemológicos dominantes y en nuestra investigación vamos usar el MER como un instrumento para analizar el modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos escolares del nivel de primaria.

2.9. Metodología

Entendemos como metodología al camino que nos trazamos para alcanzar nuestros objetivos. Adoptaremos para nuestra investigación un enfoque cualitativo de tipo bibliográfico ya que según Gil (2002) “una investigación bibliográfica es desarrollada con base a material ya elaborado, establecido principalmente en libros, quienes constituyen fuentes bibliográficas por excelencia” (p.44).

El recurso de análisis de los libros de texto sigue siendo el principal punto de entrada para el cuestionamiento ecológico o antropológico. Por supuesto, el corpus de datos puede complementarse con otros documentos como los programas oficiales, documentos educativos, revistas, etc. En estos trabajos, el investigador elige los libros de texto y adopta una metodología de análisis de acuerdo con las preguntas que se plantea. A continuación presentamos elementos que concretan las características del manual, el contexto de su elaboración y una caracterización de la relación institucional.

Representatividad

En nuestro país existen varios libros de texto, mucho de ellos con su propio cuaderno de trabajo, sobre todo en los grados menores. Por eso, es importante elegir uno o más libros de texto que sean los más utilizados por los profesores. En nuestro caso se decidió hacer uso de los cuadernos de trabajo que distribuye el estado, ya que su uso es obligatorio, exige que todos los docentes del sector público lo utilicen y muchos del sector privado indirectamente se familiaricen con ella.

La estructura

El estudio de la estructura de los cuadernos de trabajo nos informa sobre el lugar que se da a las actividades, la presencia o no de los ejercicios resueltos y los posibles comentarios de los autores.

Por ejemplo la estructura de los cuadernos de trabajo del nivel primario, ha cambiado estos últimos años, actualmente su índice está dividido en 8 unidades, a su vez, cada unidad contiene entre 4 a 9 sesiones (antes llamado temas) con una serie de problemas extra-matemáticos no resueltos pero con ostensivos orales, simbólicos y/o gráficos que sugieren la forma de solución en cada ejercicio.

Análisis ecológico

El análisis ecológico de un objeto de conocimiento se organiza en torno a dos conceptos: hábitat que designa los lugares de vida y el entorno conceptual de este objeto de conocimiento y el nicho que designa la función de este objeto en el sistema de objetos con los que interactúa.

Análisis praxeológico

Bosch y Chevallard (1999) presentan el concepto de praxeología para caracterizar mejor la relación institucional:

> Lo que falta es el desarrollo de un método de análisis de las prácticas institucionales que permita la descripción y estudio de las condiciones de realización. Los últimos avances en teorización vienen a llenar este vacío. La noción clave que luego aparece es la de organización praxeológica o praxeología. (p.86)

La teoría antropológica de lo Didáctico considera que, en última instancia, toda la actividad humana consiste en realizar una tarea t de cierto tipo T, a través de una técnica τ, justificado por una tecnología θ, y que a su vez es justificable por una teoría Θ.

A continuación, describiremos nuestro procedimiento metodológico, entendido como una secuencia de pasos a seguir durante el desarrollo de la investigación.

• **Revisar investigaciones relacionados con nuestra problemática y objeto de investigación.**

Revisamos investigaciones, entre tesis y/o artículos relacionados a la proporcionalidad desde el la perspectiva de la TAD, esto generó referencias que guían nuestra investigación. Aunque la revisión de la referencia es cíclica, lo consideramos un primer inicio porque nos proporciona los primeros argumentos para delimitar nuestra investigación.

• **Realizar un estudio epistemológico de la proporcionalidad**

En esta etapa revisamos el origen de la proporcionalidad desde la civilización griega y China hasta la actualidad, también se consultó algunas investigaciones especializadas y textos escolares, se conoció el tratamiento de la proporcionalidad a través del tiempo y la evolución de su definición.

• **Revisar de los documentos curriculares**

En esta etapa revisamos el Currículo Nacional (2016). En esta parte de la Noosfera se pudo evidenciar la proporcionalidad desde tercero de primaria hasta quinto de secundaria. El estudio de los documentos curriculares nos va permitir ubicar nuestro objeto matemático de estudio en los textos escolares, además de ser importante porque influye sobre el resto de las organizaciones matemáticas (enseñada y aprendida)

• **Revisar los libros de texto**

En esta se revisa los cuadernos de trabajo desde tercero hasta sexto grado de primaria, la finalidad es analizar e identificar los elementos praxeológicos de la proporcionalidad en los cuadernos de trabajo. Luego de revisar, se analizó la estructura de la proporcionalidad, de la siguiente manera.

- **La identificación de los tipos de tarea:** se analizó las actividades propuestas relacionado a la proporcionalidad que están presente en parte del texto. Se considera los problemas y actividades presente en los cuadernos de trabajo para agrupar las tareas en un tipo de tareas.

- **Identificación de las técnicas:** Luego de identificar los tipos de tareas caracterizamos las técnicas que se usan para resolver los ejercicios de proporcionalidad, también analizamos el carácter matemático en los problemas presente en los problemas.
- **Identificación de tecnologías y teorías:** al igual que las técnicas, las tecnologías son importantes identificarlas para determinar la justificación de los procedimientos propuestos.

• **Construir un modelo praxeológico de referencia**

De las descripciones realizadas sobre nuestro objeto matemático de estudio ubicados en los cuadernos de trabajo, se sugiere una organización matemática en relación a la proporcionalidad donde se considera los elementos praxeológicos como los tipos de tareas, las técnicas, tecnologías y las teorías asociadas a nuestro tema de investigación.

Para esto, nos apoyamos en el modelo praxeológico propuesto por Chevallard (1999), [$\boldsymbol{T}$, τ, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$], así también en lo propuesto por Chaachoua, Besot, Romo y Castella (2019) donde manifiestan lo siguiente. En una propuesta praxeológica se debe considerar el generador de un tipo de tareas ($\boldsymbol{GT}_{i}$) y sus variables didácticas ($\boldsymbol{V_i}$) ya que permite establecer una relación entre lo específico y le genérico al organizar los tipos de tarea, además promueve un conjunto estructurado de subtipos de tareas.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En el presente capítulo abordamos un breve estudio epistemológico de la proporcionalidad con la finalidad de identificar las condiciones que posibilitaron su origen. Así mismo, se estudiará la proporcionalidad desde una perspectiva matemática y por último la proporcionalidad desde la noosfera, es decir revisaremos el tratamiento de la proporcionalidad en el actual Currículo Nacional (CN).

3.1 Aspecto histórico epistemológico.

En este apartado desarrollamos la evolución del concepto de proporcionalidad a través de la historia. Esto nos permitirá conocer las restricciones del saber sabio. Sobre esto, Barquero, Bosch y Gascón (2013) manifiestan, que estas restricciones son visibles cuando el objeto matemático es manipulado y transformado para ser enseñado por una institución que a la vez impone sus condiciones.

Así mismo, recalcamos que no es posible conocer en que punto de nuestra historia apareció la idea de razón y proporción ya que su uso es palpable en diversas situaciones, momentos y lugares de nuestra historia; tenemos por ejemplo el trueque donde 1 gallina pudo ser equivalente a 2 conejos.

Sin embargo, muchos investigadores, consideran que fueron matemáticos griegos, babilónicos, chinos, egipcios e hindúes los que contribuyeron a la definición moderna que se tiene de razón. Así, por ejemplo, para Obando (2015) el concepto moderno de razón se debe en gran medida a los aportes de los matemáticos griegos plasmado en los elementos de Euclides, en el libro V dedicado a las magnitudes y el libro VII dedicado a la aritmética (donde los números se representan con segmentos). También se le atribuye al Griego Tales de Mileto el descubrimiento de 5 teoremas geométricos entre ellos la proporcionalidad que se origina entre segmentos que son cortados por rectas paralelas. La historia resalta en Thales el haber medido la altura de la pirámide de Keops relacionando las alturas y la medida de la sombra proyectada entre la pirámide con una estaca clavada al suelo, lo cual supone el tratamiento de las razones, proporciones y semejanzas.

Respecto al libro V de los elementos de Euclides, podemos encontrar algunas definiciones referentes a la razón y proporción. Guacaneme (2012) resalta, el libro V contiene 18 definiciones relacionado a nuestro objeto de estudio, todos revisados y discutidos por matemáticos e historiadores, siendo 3 las definiciones que sobresalen

Definición 3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas

Definición 6: Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.

Definición 11: Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.

Respecto a las definiciones mencionadas, Guacaneme (2012) expresa.

> la Definición 3 (nomina la razón como una relación entre dos magnitudes), la Definición 6 (nomina magnitudes proporcionales o proporción a las que satisfacen la condición de la Definición 5) y la Definición 11 (nomina magnitudes correspondientes a lo que hoy llamaríamos parejas de antecedentes y parejas de consecuentes) (p.16)

Así mismo, consideramos necesario declarar la definición 5 para mayor comprensión de la definición 6

Definición 5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

Sobre esta definición, encontramos en Gonzales (2008) la siguiente interpretación que realza el trabajo realizado por Eudoxo al igualar dos razones.

> Sí a, b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c, d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b), Eudoxo define que las razones: a/b y c/d son proporcionales: a/b = c/d, cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene: na>mb y nc>md o na = mb y nc = md, o na<md (p.14).

Por lo mencionado, autores como Gonzales (2008), expresan que en las 18 definiciones de Euclides no se considera el producto ni el cociente entre magnitudes.

Ya que según Comin (2000, p.28 anexos) afirma que “los elementos de Euclides tratan separadamente la aritmética y las magnitudes, no solo por tradición, sino también porque las razones de magnitudes inconmensurables no son reconocidas como números”.

Hasta el siglo XVI, según Comin (2000) las razones de magnitudes inconmensurables no eran considerados objetos matemáticos independientes de las magnitudes físicas. Los matemáticos, es decir, con estos no era posible realizar operaciones. Los denominaban números oscuros, sordos, inexplicables, absurdos. (p.44 anexos)

Así mismo, Oller y Gairín (2013), considerando la definición III y IV, expresan:

> […] la razón no es, en modo alguno, un número. Este carácter no numérico de las razones en los Elementos está reforzado por el hecho de que apenas se da un tratamiento sistemático a las operaciones entre razones; además nunca se habla de igualdad de razones, sino de “guardar la misma razón” (V, Def. 5) o de “guardar una razón mayor” (V, Def. 7). (p.6)

Por otro lado, no solo en la cultura griega se evidenciaron algunos intentos por teorizar la noción de proporcionalidad, tenemos a los chinos, en cuyos textos según Oller y Gairín (2013) no se encontraron alguna connotación teórica que justifiquen los métodos empleados en sus diversos problemas; Sin embargo, todos sus problemas poseen un enfoque practico.

En el libro “los nueve capítulos sobre el arte matemático” considerado uno de los libros más antiguo de la cultura China, que compila una variedad de problemas con solución numérica donde no existía demostraciones formales contradiciendo así, el paradigma griego. En el libro aparece una noción al tratamiento de la proporcionalidad que fue traducido por Liu Hiu, donde define la proporcionalidad como un conjunto de números correlacionados y además entre dichas cantidades se menciona algunas operaciones y propiedades. Esta nueva noción tiene su aplicabilidad en situaciones mercantiles, ya que los chinos relacionan directamente dos magnitudes heterogéneas; mientras los griegos relacionaban las magnitudes por separado. Es decir, para los chinos predominaba la idea de la razón externa frente a la razón interna de los griegos; es por esto que la noción sobre la proporcionalidad que tenían los chinos es considerada la más cercana a la concepción funcional que actualmente se tiene.

Posteriormente en la edad media se da inicio al proceso de aritmetización, donde la razón se identifica con los entes numéricos. A mediados del siglo XIII, Giovanni Campano consigue traducir los elementos de Euclides que para la época fue considerada una de las mejores traducciones realizada en La Europa medieval donde el cristianismo estaba en pleno apogeo. Sobre esta traducción Oller y Gairín (2013) destacan los inicios al concepto referido a “denominación de una razón”, mientras que Rommevaux (1999), traduce la definición de Campano relacionado a la “denominación de una razón”, de la siguiente manera.

> “Se dice denominación de una razón, específicamente de un número más pequeño en relación a uno más grande, a la parte o las partes de ese [número] menor que están en el mayor. Y [de una razón] de un número más grande en relación a otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es.” (citado por Oller y Gairín, 2013, p.16)

Aunque autores como Oller y Gairín (2013) consideran la existencia de cierto vacío sobre esta definición, también resaltan la intención que tiene Campano de aritmetizar el concepto de razón asignándole un número por cada razón.

Esta inclinación sobre la razón interna heredada de los griegos, se mantuvo en las disciplinas teóricas por siglos, por ejemplo, lo observamos en la segunda y tercera leyes de Kepler:

- en tiempos iguales el radio vector desde el Sol a un planeta barre áreas iguales;
- los cuadrados de los tiempos de revolución están en la misma razón que los cubos de los ejes mayores de las orbitas.

3.2 Aspectos didácticos de la proporcionalidad

Antes de presentar la definición de proporcionalidad, es necesario considerar algunos conceptos como magnitud, medida, unidad de medida. Sobre esto, Gonzales (2014) expresa.

> Llamaremos magnitud a toda propiedad susceptible de ser cuantificada, por ejemplo, la longitud, la masa, el tiempo, el precio, etc. Llamaremos cantidad al resultado de la medida, es decir al par (medida, unidad) donde la medida es un número real positivo y la unidad viene dada por el sistema de unidades elegido. En adelante escribiremos la medida y a continuación la unidad. Por ejemplo, en lugar de (3, kg) escribiremos 3 kg y diremos que 3 kg es una cantidad de magnitud donde 3 es la medida y kg es la unidad de medida (p.45).

Una de las necesidades praxeológicas en el estudio de la proporcionalidad es la teoría de las magnitudes y su medida, es decir, se hace necesario describir el trabajo con las unidades de medida, cuando se trabaja con las estructuras multiplicativas, para Bourdage (2020)

> …la construcción de proporcionalidad como una propiedad de aditividad común a dos magnitudes. Basándose en esta propiedad, podemos observar que, si compramos un litro de gasolina pagando 1.48 €, dos litros (volumen del bidón que se obtiene al unir dos bidones de un litro cada) costarán 1.48 € + 1.48 € (precio del bidón que se obtiene al unir dos bidones de 1.48€ cada), etc., y 40 litros costarán 1.48 € + ... + 1.48 € = 40 × 1.48 €. El 40 que aparece en este cálculo representa el número de volúmenes de un litro de que consta un volumen de 40 L, así que tenemos: 40 = 40L / 1L, o sea:
>
> 1.48 € + ... + 1.48 € = 40 × 1.48 € = 40L/1L × 1.48 € = 40L × 1.48 € / 1 L = 40 L × 1.48 €/L. (p.8)

Esto nos lleva a definir una magnitud cociente, la cual se genera de comparar dos magnitudes .

La proporcionalidad pone en evidencia que el estudio de la teoría de las magnitudes y el de la proporcionalidad están estrechamente relacionadas, y que se llevan a cabo durante varios años de estudio.

Asimismo, al considerar la noción de cantidad, podemos diferenciar dos clases:

1. Cantidades homogéneas. Dado las cantidades C_1 y C_2 diremos que son homogéneas al resultado de medir una misma magnitud. Si C1 y C2 poseen la misma unidad de medida, diremos que son cantidades homogéneas que pertenecen a la misma naturaleza, con los cuales se puede realizar operaciones, ejemplo: C_1 = 5kg y C_2 = 8kg. Podemos observar que C_1 se puede expresar con otra unidad de medida, es decir C_1 = 5 000g y tendríamos el mismo ejemplo con unidades distintas, es decir: C_1 = 5 000g y C_2 = 8kg. A este último se le conoce como cantidades homogéneas de naturaleza distinta.

2. Cantidades heterogéneas, Dado las cantidades C_1 y C_2 diremos que son heterogéneas si pertenecen a diferentes magnitudes. Ejemplo: C_1 = 6kg y C_2 = 8km

Por otro lado, la razón se define como la relación de dos cantidades en forma de cociente y según la naturaleza de las cantidades a relacionar podemos distinguir dos tipos de razones. Por una parte, cuando se relaciona dos cantidades de una misma magnitud se le conoce como razón escalar o interna, y cuando se relaciona dos cantidades de diferentes magnitudes se le conoce como razón funcional o externa.

Definición 1: una relación entre dos conjuntos de cantidades de magnitudes M1 y M2, es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales. A dichos factores también se los denominan razones internas.

Definición 2: una relación entre dos conjuntos de cantidades de magnitudes M1 y M2, es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente del otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante.

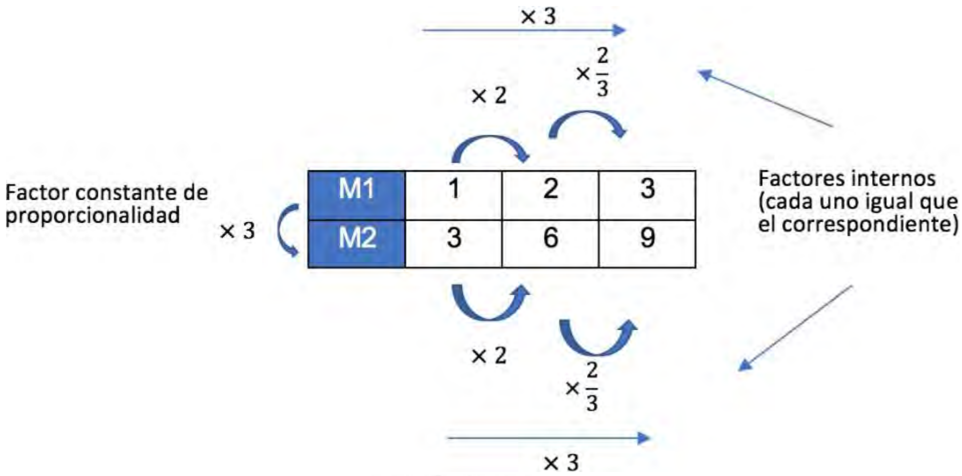


Figura 3: Definiciones de proporcionalidad empleando factores

La diferencia entre factor y razón se debe a que el factor es un número que resulta de una relación, y la razón es la relación que guarda una cantidad respecto de otra.

Características de los factores:

Si las cantidades son medidas en el marco de un sistema de medidas estandarizadas, entonces se puede hablar de cuántas unidades hay en una de las cantidades por cada unidad de medida en la otra. Es el caso, por ejemplo, del precio por unidad de un producto en un supermercado, o de magnitudes físicas como la velocidad (distancia por unidad de tiempo) o la aceleración (cambio en la velocidad por unidad de tiempo).

Estos dos factores pueden definirse con o sin unidades de medida, por lo que se presenta 3 casos:

CASO 1

$x\,70\ \frac{km}{h}$

Tiempo	Distancia
3 h	210 km
6 h	420 km
9 h	630 km

CASO 2

$x\,0.62\ \frac{millas}{km}$

Kilómetros	Millas
1	0.62
15	9.3
12	7.44

CASO 3

$x\,4$

Figura A	Figura A'
4 cm	16 cm
5 cm	20 cm
7 cm	28 cm

Figura 4: Unidades de la relación entre dos cantidades
Fuente: Block, Mendoza & Ramírez (2010, p.33)

Tratamiento didáctico de la correlación

En tareas donde se pide el reconocimiento y enunciación del tipo de correlación, es decir, cuando se pide resolver una tarea de una situación en la que se relacionan dos magnitudes, donde los valores de la primera están ordenados de menor a mayor, y afirmen que esta crece y que luego para valores de la segunda magnitud, que también están ordenados de menor a mayor, hagan la misma afirmación. Es decir, que "a medida que una magnitud crece, la otra también lo hace". Guacaneme (2003) define esto como correlación directa.

> En una tabla en la cual ni los valores x_i ni los y_i están ordenados, exhibe una correlación directa si las comparaciones se corresponden, es decir si $x_i < x_{i+1}$ entonces también $y_i < y_{i+1}$ o si $x_{i+1} < x_i$ entonces también $y_{i+1} < y_i$, en tanto que muestra una correlación inversa si las comparaciones son opuestas, es decir si $x_i < x_{i+1}$ entonces $y_{i+1} < y_i$ o si $x_{i+1} < x_i$ entonces $y_i < y_{i+1}$. (p.31)

	$x_1 < x_2$	$x_2 < x_3$	
X	x_1	x_2	x_3
Y	y_1	y_2	y_3
	$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$	

En términos matemáticos se puede expresar que: Dos magnitudes X y Y tienen una correlación directa, cuando para todo $x_i,\ x_j$ de X con $x_i < x_j$ entonces $y_i < y_j$. De manera similar, se establece que tienen correlación inversa, si para todo $x_i,\ x_j$ de X con $x_i < x_j$ entonces $y_j < y_i$. Si se aceptara que las magnitudes están relacionadas mediante una función f se diría entonces que f es creciente, en el primer caso, y que es decreciente, en el segundo.

Al respecto el Guacaneme (2003) afirma que para el caso de la proporcionalidad el tratamiento que se hace de la correlación en la escuela es limitada, ya que lo expresado se trabaja solo con magnitudes absolutas, las cuales trabajan con valores de sus medidas que son positivas o cero, esto solo permite el estudio de correlaciones directas para la proporcionalidad. Si se amplía el dominio de las magnitudes, es decir trabajar con magnitudes relativas sería posible estudiar la correlación inversa a través de una función de proporcionalidad decreciente.

3.3 La Proporcionalidad en los programas curriculares

En esta sección realizaremos un análisis de la proporcionalidad donde se considera la noosfera, es decir revisaremos la presencia y comportamiento de la proporcionalidad en los programas curriculares que han guiado nuestro quehacer educativo, tales como el Diseño Curricular y las rutas de aprendizaje, que finalmente se manifiesta en el cuaderno de trabajo que el Ministerio de Educación distribuye a los estudiantes. Al respecto Chevallard (1985/1991, citado en Barquero, Bosch y Gascón, 2013).

> El saber que se enseña en la escuela proviene de distintas transformaciones de un “saber sabio” que es el que legitima y justifica su difusión (o “transposición”) a otras instituciones. Dichas transformaciones se operan en instituciones intermedias y, en particular, en la “noosfera”. Esta actúa como membrana del sistema de enseñanza, haciéndola permeable a ciertos objetos y protegiéndola de otros. Es en esta institución intermedia donde se decide, determina y describe el “saber a enseñar”, es decir aquellos objetos matemáticos que se propone transponer en la escuela y que se acaban oficializando en los programas oficiales, libros de texto, recomendaciones a profesores, materiales didácticos, etc. (p. 20)

El Perú cuenta con un currículo integrado desde el año 2005, esto debido al esfuerzo por unificar los currículos en sus diferentes niveles (inicial, primaria y secundaria), posteriormente en el año 2009 sale impreso una segunda versión que implementa el diseño curricular por competencia; donde la valoración sobre el estudiante se enfoca en el “saber hacer” y no solo en el “conocer”. Finalmente, en el año 2016, se aprueba el Currículo Nacional para la Educación Básica desplazando al Diseño Curricular Nacional (DCN). Este último Currículo Nacional (CN) presenta sus estándares de aprendizaje y un perfil del egresado, resultado del trabajo articulado entre sus tres niveles. En la figura 5, podemos observar la evolución del Currículo desde el año 2005.

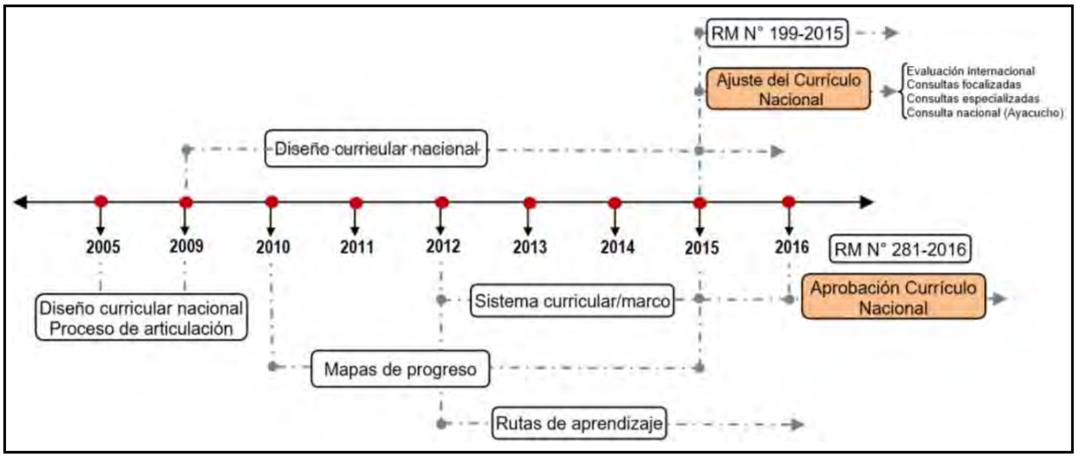


Figura 5: Evolución del currículo
Fuente: MINEDU (2016)

A continuación, revisaremos la presencia de la proporcionalidad en el currículo desde el año 2005 hasta el actual Currículo Nacional (CN).

3.3.1 La proporcionalidad en el DCN 2005

Este Diseño Curricular Nacional fue aprobado el 07 de noviembre del año 2005 mediante Decreto Supremo Nº 013-2004-ED y a Resolución Ministerial N° 0068-2005-ED, con lo cual, se da inicio al proceso de articulación en los tres niveles de Educación Básica Regular y se implementó a nivel nacional el año 2006.
Respecto al área de Lógico Matemático, este se divide en tres componentes: Número relaciones y funciones, Geometría y medida, Estadística y probabilidad.

La proporcionalidad vista en el componente de Número relaciones y funciones se presenta así: “Este componente busca que el estudiante adquiera el conocimiento de los números, el sistema de numeración y el sentido numérico... Trata también de la aplicación de relaciones de proporcionalidad en porcentajes y reglas de tres simple.” (DCN, 2005, p.125).
Como se puede observar se hace mención al algoritmo “regla de tres”, por lo que podemos inferir su uso en la educación primaria de esa época.

En la programación del DCN se presentan los logros de aprendizaje por ciclos, y las capacidades y actitudes los presenta por grado.

Tabla 3: Logro de aprendizaje y capacidades relacionado con la proporcionalidad

COMPONENTE: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES			
LOGROS DE APRENDIZAJE			
Resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales y de la adición y sustracción de fracciones. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.		Formula y resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de las operaciones con números naturales, fracciones y decimales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.	
IV CICLO		**IV CICLO**	
Tercer Grado	**Cuarto Grado**	**Quinto Grado**	**Sexto Grado**
Capacidades y actitudes			
		- Resuelve y formula problemas que implican la aplicación de la **proporcionalidad.**	-Resuelve y formula problemas que implican el cálculo de porcentajes.

Fuente: Adaptado del DCN (2005, p.125)

De la tabla 3, en la componente de número, relaciones y funciones se puede evidenciar la presencia de nuestro objeto de estudio en 5º de primaria, en tanto en 6º de primaria una ausencia, sin embargo, se puede ver que está presente de manera implícila en los porcentajes. En este currículo no se presentan técnicas para el estudio de la proporcionalidad.

3.3.2 La proporcionalidad en el DCN 2009

En diciembre del 2008 se aprueba una versión actualizada y mejorada del DCN 2005, denominado: Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (DCN), el cual fue aplicado a comienzos del año escolar 2009. Este estaba organizado por niveles, ciclos y grados, donde cada nivel está dividido en ciclos y cada ciclo desarrolla una determinada competencia, también se desarrolla una variedad de capacidades conocimientos y actitudes de manera gradual, según el grado del estudiante.

El objeto matemático de estudio en esta investigación se encontraba dentro de la organización: Número, relaciones y operaciones. Tal cual se muestra en la tabla 4

Tabla 4: Capacidades y conocimientos relacionados con la proporcionalidad

Números, relaciones y operaciones
COMPETENCIAS

<table>
<tr><td colspan="4">Resuelve problemas de contexto real y contexto matemático, que requieren del establecimiento de relaciones y operaciones con números naturales y fracciones, e interpreta los resultados obtenidos, mostrando perseverancia en la búsqueda de soluciones.</td><td colspan="4">Resuelve y formula, con autonomía y seguridad, problemas que requieren del establecimiento de relaciones entre números naturales, decimales y fracciones, y sus operaciones, argumentando los procesos empleados en su solución e interpretando los resultados obtenidos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">CICLO IV</td><td colspan="4">CICLO V</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tercer grado</td><td colspan="2">Cuarto grado</td><td colspan="2">Quinto grado</td><td colspan="2">Sexto grado</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Capacidades</td><td>Conocimientos</td><td>Capacidades</td><td>Conocimientos</td><td>Capacidades</td><td>Conocimientos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Interpreta y establece relaciones entre cantidades directamente proporciona-les, y las organiza en tablas.</td><td>Tablas de proporcionali-dad directa.</td><td>Interpreta y establece relaciones entre cantidades directa e inversamente proporcionales organizadas en tablas y gráficos.

Resuelve y formula problemas que implican la aplicación de la proporcionali-dad directa.</td><td>Cantidades directa e inversamente proporcionales

Criterios de proporcionali-dad directa.

Equivalencias y canjes de monedas</td><td>Resuelve problemas que implican proporcionali-dad directa y porcentaje

Resuelve problemas que implican equivalencias y cambio monetario.</td><td>Proporcionali-dad directa e inversa.

Aplicación de la proporcionali-dad en: cambio monetario, impuestos, intereses.</td></tr>
</table>

Fuente: DCN 2009

En la tabla 4, se observa que una característica de nuestro objeto de estudio en el DCN 2009 es su mayor presencia con comparación con el DCN 2005, pues se enseña en los grados de 4º, 5º y 6º de primaria. Por lo tanto, podemos concluir que la proporcionalidad ha ganado notoriedad. Además se observa que se comienza a dar relevancia al uso de tablas de proporcionalidad, y se ve los rezagos de la matemática moderna, donde los libros de texto presentaban problemas mercantiles.

Con el nombre de "razones y proporciones", la organización clásica de la proporcionalidad de finales del siglo XIX proponía un universo de objetos y prácticas en aplicaciones comerciales, como intereses, repartos proporcionales, regla de compañía, regla de interés, etc. (Bosch, 1994, p.167).

3.3.3 La proporcionalidad en las rutas de aprendizaje

Las rutas de aprendizaje era un instrumento para el docente, publicado el año 2012 como una primera versión y reestructurado en una segunda versión el año 2015. Entre sus principales objetivos está, fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, brindar orientación a los profesores y proporcionar indicadores del logro de los estudiantes terminado su respectivo ciclo.

En el DCN 2009 cada ciclo presentaba su respectiva competencia, en tanto, en las Rutas de aprendizaje cada competencia se desarrollaba a lo largo de toda la escolaridad, siendo cuatro las competencias que presentaba el área de matemática, las cuales son:

1. Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad
2. Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.
3. Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización
4. Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre.

El área de Matemática también presenta cuatro capacidades, los cuales son:

1. Matematiza situaciones.
2. Comunica y representa ideas matemáticas.
3. Elabora y usa estrategias.
4. Razona y argumenta generando ideas matemáticas.

En la tabla 5, se muestra las competencias y capacidades en los cuales se desarrollaba nuestro objeto matemático de estudio.

Tabla 5: Competencias, capacidades e indicadores de desempeño relacionado al objeto matemático "proporcionalidad"

Competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio				
	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado

Matematiza situaciones	Relación de cambio: • Identifica los datos y relaciones a partir de una situación experimental de variación de una magnitud con respecto al tiempo, y los relaciona en tablas simples.	Relación de cambio: • Recoge datos experimentales de dos magnitudes en problemas de variación y los relaciona en tablas simples.	Relaciones proporcionales: • Interpreta los datos en problemas de variación entre dos magnitudes, expresándolos en una relación de proporcionalidad directa usando tablas	Proporcionalidad: • Interpreta los datos en una situación de variación entre dos magnitudes, expresándolos en una relación de proporcionalidad directa.
Comunica y representa ideas matemáticas	Relaciones de cambio: • Describe la relación de cambio entredos magnitudes.	Relaciones de proporcionalidad: • Expresa las relaciones de proporcionalidad de dos magnitudes	Relaciones de proporcionalidad: • Expresa las relaciones de proporcionalidad de dos magnitudes.	Problemas de proporcionalidad: • Utiliza tablas o gráficos en el plano cartesiano, para expresar la proporcionalidad directa entre dos magnitudes.
Elabora y usa estrategias	Problemas de cambio: • Emplea esquemas y procedimientos de comparación para encontrar la relación de cambio entre una magnitud y el tiempo.	Problemas de cambio: • Emplea esquemas, procedimientos de comparación y operaciones para encontrar relaciones numéricas entre dos magnitudes.	Problemas de proporcionalidad: • Emplea estrategias de ensayo y error, experimentación, tablas, recojo de datos u operaciones para resolver problemas de relaciones de cambio o de proporcionalidad.	
Razona y argumenta generando ideas matemáticas	Relaciones de cambio: • Elabora supuestos sobre la relación de cambio entre una magnitud y el tiempo, basándose en lo observado en actividades vivenciales, concretas y gráficas.	Relaciones de cambio: • Elabora supuestos sobre la relación de cambio entre dos magnitudes, basándose en lo observado en actividades vivenciales, concretas y gráficas.	Relaciones proporcionales: • Justifica sus conjeturas, usando ejemplos, para afirmar que dosmagnitudes son directamente proporcionales • Justifica sus conjeturas, usando ejemplos y contraejemplos	Problemas de proporcionalidad: • Justifica y defiende argumentaciones propias y de otros, usando ejemplos, para afirmar que dos magnitudes son directamente proporcionales.

Competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización	
Elabora y usa estrategias	5º de primaria Ampliación y reducción: Emplea procedimientos de cálculo y relaciones de proporcionalidad para ampliar o reducir una figura.
Razona y argumenta generando ideas matemáticas	5º de primaria Ampliación y reducción: Elabora conjeturas sobre la relación entre la ampliación y reducción con la proporcionalidad.

Fuente: Rutas de aprendizaje 2015

A partir de la tabla 5, notamos que la proporcionalidad como objeto matemático de estudio se abordaba desde el tercer grado de primaria, con lo cual, se muestra una mayor presencia con respecto al DCN 2005 y DCN 2009.

Con respecto a la formalización del concepto de proporción, los cuadernos de trabajo elaborados en ese periodo de tiempo no brindan un concepto formal de la proporcionalidad. Buscamos en las sesiones de aprendizaje de 6º grado que toma como referencia las rutas de aprendizaje, en la cual se presentan una diversidad de significados asociados a la proporcionalidad, tal como que se aprecia en la figura 6.

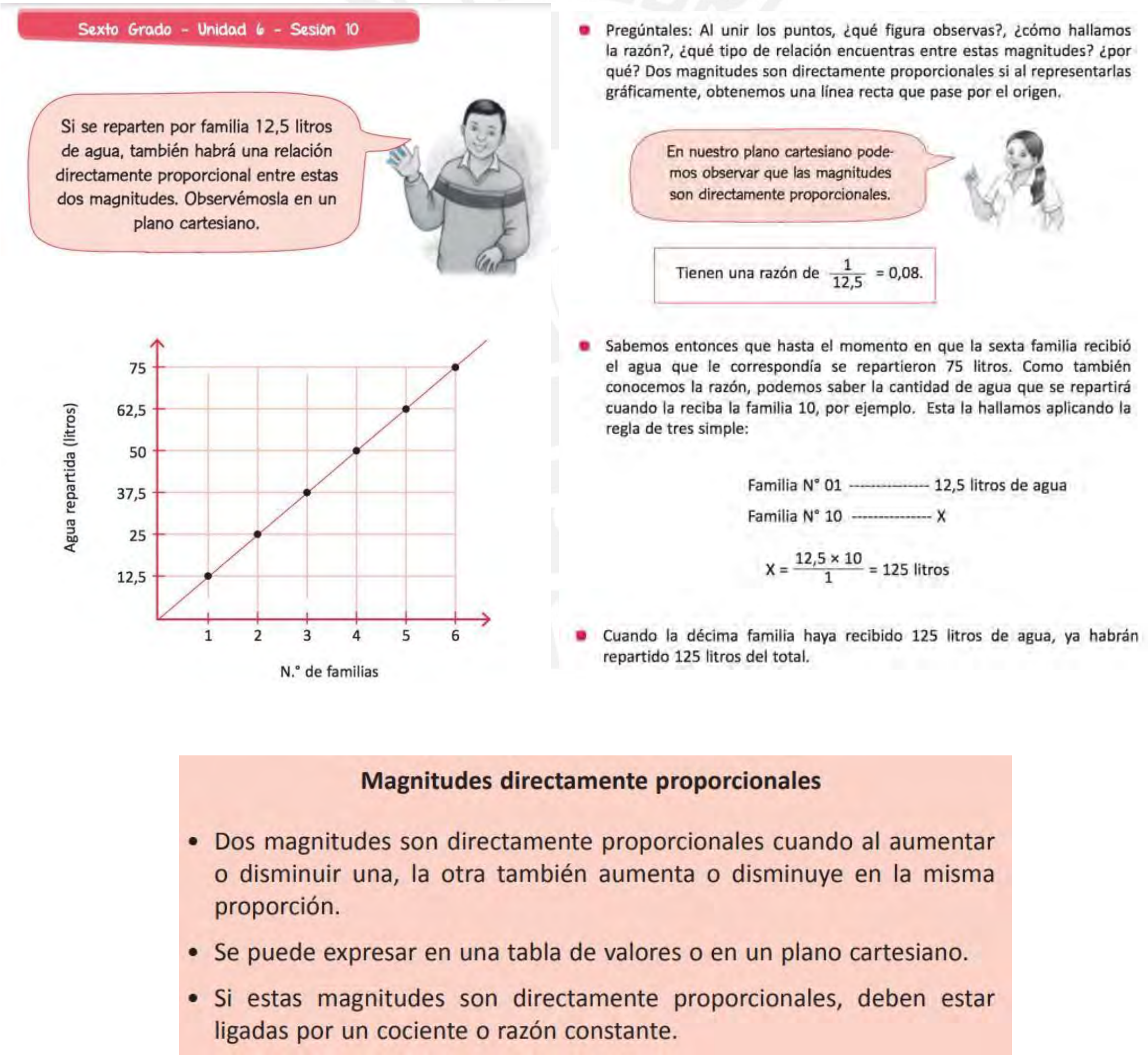


Figura 6: Definición de proporcionalidad
Fuente: MINEDU, Rutas de aprendizaje-Documento 6º primaria

Se puede ver que para estudiar la proporcionalidad en este se pretendía que los estudiantes manipularan una variedad de ostensivos.

Hasta aquí se han presentado los documentos curriculares pasados para observar si ha habido a partir de los cambios curriculares, estos han modificado la forma de presentar nuestro objeto de estudio.

3.3.4 La proporcionalidad en el Currículo Nacional (CNEB)

El CNEB fue aprobado el 2 de junio del año 2016 con Resolución Ministerial N° 281-2016-MINEDU. Este Currículo respecto al Diseño Curricular Nacional presenta una considerable reducción en cuanto a la cantidad de competencias y capacidades, ambas vinculadas entre sí y gradualmente durante toda la etapa escolar, esto permite que se tenga una visión común sobre los aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes al culminar su etapa escolar.

Este documento en el área de Matemática también presenta cuatro competencias, pero con algunas modificaciones respecto a los empleados en las Rutas de Aprendizaje. Siendo estas competencias las siguientes:

1. Resuelve problemas de Cantidad.
2. Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
3. Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
4. Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Es bien sabido que la proporcionalidad se estudia en las 4 competencias. Sin embargo, mostramos solo los desempeños de la competencia de Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio en la tabla 6.

Los desempeños relacionados nos ayudarán a comprender las directivas institucionales relativas a la proporcionalidad.

En primer lugar, en esta tabla se puede observar el término de estrategia heurística, según el CNEB, estas son las que sirven para transformar un problema haciéndolo más sencillo, entenderlo mejor y lograr progresos hacia su solución. En el lenguaje de la TAD, estas serían las técnicas para resolver una tarea, si bien se presentan algunos indicios de las técnicas a tratar para la resolución de ecuaciones, para determinar el término general de un patrón, para la proporcionalidad no es explícita.

Tabla 6: Desempeño por grado

COMPETENCIA	Desempeños			
	Tercer grado	**Cuarto grado**	**Quinto grado**	**Sexto grado**
RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO	• Describe el **cambio de una magnitud** con respecto al paso del tiempo, apoyándose en tablas o dibujos. • Emplea estrategias heurísticas y estrategias de cálculo (la descomposición aditiva y multiplicativa, agregar o quitar en ambos lados de la igualdad, relaciones inversas entre operaciones y otras), para encontrar equivalencias, mantener la igualdad ("equilibrio"), encontrar **relaciones de cambio entre dos magnitudes** o continuar, completar y crear patrones.	• Describe la **relación de cambio de una magnitud** con respecto de otra, apoyándose en tablas o dibujos. • Emplea estrategias heurísticas o estrategias de cálculo (duplicar o repartir en cada lado de la igualdad, relación inversa entre operaciones), para encontrar equivalencias, completar, crear o continuar patrones, o para encontrar **relaciones de cambio entre dos magnitudes.** • Hace afirmaciones sobre las regularidades, las **relaciones de cambio entre magnitudes**, así como los números o elementos que siguen en un patrón, y las justifica con sus experiencias concretas. Así también, justifica sus procesos de resolución.	• Establece relaciones entre datos y valores desconocidos de una equivalencia y relaciones de variación entre los **datos de dos magnitudes**, y las transforma en ecuaciones simples (por ejemplo: x + a = b) con números naturales, o en tablas de proporcionalidad. • Expresa, con lenguaje algebraico y diversas representaciones, su comprensión de la regla de formación de un patrón de segundo orden, así como de los símbolos o letras en la ecuación y de la **proporcionalidad como un cambio constante**. • Emplea estrategias heurísticas, estrategias de cálculo y propiedades de la igualdad (uniformidad y cancelativa) para encontrar el valor de la incógnita en una ecuación, para hallar la regla de formación de un patrón o para encontrar **valores de magnitudes proporcionales**.	• Establece relaciones entre datos y valores desconocidos de una equivalencia, de no equivalencia ("desequilibrio") y de **variación entre los datos de dos magnitudes**, y las transforma en ecuaciones que contienen las cuatro operaciones, desigualdades con números naturales o decimales, o en proporcionalidad directa. • Expresa, con lenguaje algebraico y diversas representaciones, su comprensión del término general de un patrón (por ejemplo: 2, 5, 8, 11, 14...--> término general = triple de un número, menos 1), condiciones de desigualdad expresadas con los signos > y <, así como de la **relación proporcional como un cambio constante**. • Emplea estrategias heurísticas y estrategias de cálculo para determinar la regla o el término general de un patrón, y propiedades de la igualdad (uniformidad y cancelativa) para resolver ecuaciones o hallar valores que cumplen una **condición de desigualdad o de proporcionalidad**.

Fuente: Programa curricular de educación primaria – 2017

Analizando este extracto del CN se observa en los indicadores de desempeños de manera explícita tres tipos de tareas, las cuales formulamos de la siguiente manera:

Tipo de tarea1: Describir el cambio de una magnitud con respecto a otra (tiempo).

Tipo de tarea2: Encontrar las relaciones de cambio entre dos magnitudes.

Tipo de tarea3: Hallar valores que cumplen una condición de proporcionalidad.

Las técnicas que se observan mencionan que las tareas deben ser resueltas a través de estrategias heurísticas y de cálculo, a partir de 5º hace referencia a que la proporcionalidad debe ser vista como cambio constante.

Y con respecto a los ostensivos propuestos a emplear, se puede observar que desde el currículo del 2009, aparecen como ostensivo las tablas de proporcionalidad.

Se hace referencia a los términos de variación y cambio, sin hacer explícito las situaciones en las que serán empleadas, en nuestra interpretación esto puede llevar a diferentes concepciones y significados que los docentes pueden dar por entendido.

En la figura anterior se observa que una definición encontrada en los lineamientos dados para la enseñanza de la proporcionalidad de 5º grado de primaria, se presenta como paso de la técnica para determinar la proporcionalidad encontrar una correlación directa entre magnitudes (si una magnitud aumenta la otra también aumenta) es una aspecto importante en la definición. Además no se emplea el término razón, sin embargo, se entiende este de manera implícita como el cociente indicado, es decir, se asume la razón como número.

En conclusión, de la revisión de los documentos curriculares, se puede observar que en las modificaciones al pasar a desempeños de las competencias, la proporcionalidad ha evolucionado, del estudio de la teoría de proporcionalidad clásica a denominarse relación proporcional.

A continuación, se presenta algunos aportes de carácter didáctico y metódico que contribuye al estudio de la noción de proporcionalidad.

CAPÍTULO IV: ESTUDIOS PRELIMINARES DE LA PROPORCIONALIDAD

En este capítulo presentamos algunas investigaciones que contribuyen al estudio de la noción de proporcionalidad desde el punto de vista de la Didáctica y de la educación Matemática. En estos trabajos consideramos lo relacionado a las clases de problemas que suelen presentarse con nuestro objeto de estudio, también el grado de dificultad que presentan los problemas, los tipo de razonamiento se desencadena en el estudiante cuando se enfrenta a un problema de carácter proporcional y por último los trabajos realizados por Hersant (2005) y Wijayanti (2017) relacionado a la organización matemática de nuestro objeto de estudio.

4.1 Clases de problemas y estrategias de resolución en situaciones de proporcionalidad.

Estudios como lo realizado por Lesh, Post & Behr (1988 citado en Floriani, 2004) y por Cramer y Post, 1993a; Lamón, 2007; Kaput y West, 1994; entre otros (citados por Rivas 2013) clasifican los distintos problemas de proporcionalidad en tres grupos de tarea: (a) tareas de comparación, (b) tareas del valor desconocido y (c) tarea cualitativos de predicción o de comparación. A continuación, describimos de manera sucinta cada uno de estos tipos de tareas.

a) Tareas de comparación: en este tipo de problema nos brindan dos razones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$, donde los valores de cada término son conocidos y tiene como objetivo comparar dichas razones al reconocer cuál es mayor, menor o igual ($\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$ ó $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$). Al respecto Rivas (2013) expresa lo siguiente.

> en un problema de comparación son dados cuatro valores, en el que se relacionan de manera multiplicativa, dos a dos, formando dos razones. El problema consiste en determinar cuál de las condiciones de la tricotomía es válida entre ellas, es decir, determinar si las razones que se forman son iguales o si una es mayor (o menor) que la otra (p.22)

b) Tareas de valor desconocido: también llamado problemas de valor faltante, son problemas donde intervienen los cuatro elementos. Tres términos con valores conocidos y piden determinar el valor del cuarto término. Al respecto Rivas (2013) manifiesta lo siguiente.

> un problema de valor faltante se caracteriza por estar constituido por cuatro valores que están en relación, en la que tres de ellos son conocidos y uno desconocido. Resolver el problema consiste en encontrar el valor que falta. Si el problema es de proporcionalidad dos de los valores conocidos forman una razón y el tercer valor conocido con el que falta forman otra razón (p.22)

c) Tareas cualitativo de predicción o comparación: son problemas con estructura semejante a las tareas de comparación o término desconocido (predicción), en cuyas soluciones los cálculos numéricos no se presentan de manera explícita.

A continuación, en la tabla 7, mostramos un ejemplo correspondiente a cada tipo de tarea

Tabla 7: Ejemplo de tipos de problemas en la proporcionalidad

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Problemas de comparación</td><td>Sara y Silvana están utilizando dos mapas de carreteras de la ciudad. En el mapa de Sara una carretera de 7cm de longitud es en realidad de 24km. En el mapa de Silvana una carretera de 21cm de longitud es en realidad 72km. ¿Quién está utilizando el mapa más grande? (a) Sara (b) Silvana (c) sus mapas son el mismo (d) la información es insuficiente para dar una respuesta.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Problemas del término desconocido</td><td>Kleider y Lucy conducen a igual velocidad a lo largo de una carretera de la ciudad. Lucy tarda 8 minutos en recorrer 13km. ¿Cuánto tardará Kleider en recorrer 10km?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">Problema cualitativo</td><td>Predicción</td><td>Si David mezcla menos concentrado de maracuyá con más agua de la que él preparó ayer, su jugo de maracuyá tendrá un gusto (a) Más fuerte (b) Menos fuerte (c) Exactamente el mismo gusto o (d) la información es insuficiente para dar una respuesta.</td></tr>
<tr><td>comparación</td><td>Esteban y Alejandra colocan una línea de clavos en dos tablas diferentes. Esteban coloca más clavos que Alejandra, la tabla de Esteban es más pequeña que la de Alejandra. ¿En cuál de las tablas los clavos están más juntos? (a) En la tabla de Esteban (b) En la tabla de Alejandra (c) sus clavos están igualmente espaciados (d) la información es insuficiente para dar una respuesta.</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Rivas (2013, p.23).

Por otro lado, para Vergnaud (1983), la proporcionalidad es en esencia un problema de tipo multiplicativo e introdujo la idea de campo conceptual, definido como, un conjunto de situaciones y problemas que requiere para su tratamiento de los conceptos, procedimientos y representaciones de distintos tipos, pero estrechamente interconectados, con la finalidad de organizar situaciones que poseen estructuras aditivas y multiplicativas.

En cuanto a las estructuras multiplicativas que es de interés para nuestro trabajo, son aquellas que son vista como un conjunto de problemas que contienen los conceptos de multiplicación, división, fracción, razón, función lineal, número racional, etc. Al respecto, Vergnaud (1983) sugirió clasificar los problemas multiplicativos en tres tipos especiales, la cuales son: Isomorfismo de medidas, problemas de proporción múltiple y problemas sobre producto de medidas.

a) **Isomorfismo de medida**, También llamado de proporción simple directa y son problemas cuya estructura consiste en establecer una proporción entre dos espacios de medida (magnitudes) M_1 y M_2. Ejemplo:
   - José compra 5 camisas al precio de 30 soles cada una. ¿Cuánto pagara José?

En el esquema observamos el “Isomorfismo de Medidas” del problema anterior, donde M_1 es el espacio de medida (número de camisas), y M_2 es el espacio de medidas (el costo de las camisas)

M_1	**M_2**
1	30
5	?

b) **Proporción múltiple**, son problemas en los que la medida de las cantidades de una magnitud es proporcional a la medida de dos cantidades correspondiente a dos magnitudes distintas.

Ejemplo: Si 8 carpinteros construyen un portón de madera en 36 días trabajando 6 horas diarias, ¿en cuántos días12 carpinteros trabajando 8 horas por día terminarán el portón?

c) **Producto de medida**, son problemas en cuya estructura existe una composición cartesiana de dos espacios de medidas (Magnitud).

Ejemplo: 5 hombres y 7 mujeres quieren bailar. Si cada mujer debe bailar con cada hombre y cada hombre con cada mujer. ¿Cuántos pares son posibles?

Sobre los problemas de Isomorfismo de medida, notamos la existencia de una relación entre sus cuatro cantidades y según en cuál de las cantidades se encuentra la incógnita, Vergnaud (1997) distingue cuatro tipos de problemas: multiplicación, división partition (división partitiva), división quotition (división media) y regla de tres. En la figura 7 se muestra los tipos de problemas

Multiplicación		División partitiva		División Media		Regla de Tres	
M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
1	a	1	x=f(1)	1	a=f(1)	a	b
b	x	a	b=f(a)	x	b=f(x)	c	x
Esquema 1		Esquema 2		Esquema 3		Esquema 4	

Figura 7: Isomorfismo de medida y sus tipos de problemas multiplicativos

Fuente: Adaptado de Artifon (2008, p.70)

Presentamos a continuación, en la tabla 8, ejemplos de los cuatro tipos de problemas correspondiente al Isomorfismo de medidas.

Tabla 8: Isomorfismo de medida y sus tipos de problemas

Isomorfismo de medidas		
Tipo de problema	Problema	Esquema

Multiplicación	En un campo deportivo hay 6 reflectores. Si en cada reflector hay 4 focos, ¿cuántos focos hay en total?	n° reflectores | n° focos 1 | 4 6 | x
División partitiva	José va repartir 20 caramelos entre sus 4 hermanos. ¿Cuántos caramelos recibe cada hermano?	n° hermanos | n° caramelos 1 | x 4 | 20
División media	Lucy va repartir 24 caramelos entre sus amigas. Si cada amiga recibe 3 caramelos, ¿cuántas amiga tiene Lucy?	n° amigas | n° caramelos 1 | 3 x | 24
Regla de tres	Si 6 dulces me costaron S/15, ¿cuánto me costara 10 dulces?	n° dulces | Precio (S/) 6 | 15 10 | x

Fuente: autoría propia

Sin embargo, Floriani (2004), analiza los problemas del tipo Isomorfismo de medida relacionado a los problemas de proporcionalidad directa e inversa y los categorizó considerando la relación entre las magnitudes, en directamente proporcional e inversamente proporcional. Así mismo, sub categorizo cada uno de estas categorías considerando las relaciones existentes entre los valores numéricos, siendo estas, unitario, múltiplo y no múltiplo.

En los problemas del tipo **unitario** la unidad es un referente, en el tipo **múltiplo** existe una relación de multiplicidad entre los valores numéricos de las cantidades proporcionados en él problema, y en lo **no múltiplo** los valores numéricos de las cantidades no mantienen una relación de multiplicidad. Además, dentro de estas subcategorías presente en relaciones directamente proporcional el autor los clasifica en problemas que relacionan una misma unidad de medida y problemas que relacionen diferentes unidades de medidas.

Para propósitos de nuestra investigación consideramos la clasificación de Floriani (2004), relacionado a lo directamente proporcional. Al respecto en la tabla 9 podemos ver un ejemplo correspondiente a cada subcategoría.

Tabla 9: Tipos de problemas de proporcionalidad directa

	Subcategorías	Condiciones	Ejemplo
Multiplicación	Unitaria	Misma unidad	En una feria de productos alimenticios dos comerciantes cambiaron 1 kg de cebolla con 4 kg de zanahoria. Con 3 kg de cebolla. ¿Cuántos kilogramos de zanahoria podrían intercambiar?
		Diferente unidad	Si por un pan pago 0.20 céntimos, ¿cuánto pagaré por 8 panes?
División partitiva		Misma unidad	En un pueblo distante de nuestra amazonia peruana con 6kg de azúcar se puede obtener 3 kg de arroz, ¿cuánto kg de azúcar puedo obtener con 1 kg de arroz?
		Diferente unidad	José va repartir 20 caramelos entre sus 4 hermanos, ¿cuántos caramelos recibe cada hermano?
División Media			Lucy va repartir 24 caramelos entre sus amigas. Si cada amiga recibe 3 caramelos, ¿cuántas amigas tiene Lucy?
Regla de tres	Múltiplo	Misma unidad	Si con 10 kg de caña puedo obtener 6 kg de azúcar, ¿cuántos kilogramos de caña se debe tener para obtener 30 kg de azúcar?
		Diferente unidad	Con S/48 se puede adquirir 9 mascarillas. ¿Cuántos dinero es necesario para comprar 27 mascarillas?
	No múltiplo	Misma unidad	Con 6 kg de caña se puede obtener 4 kg de azúcar. ¿Cuántos kilogramos de caña se necesita para obtener 10 kg de azúcar?
		Diferente unidad	Un grifo almacena 25 litros de agua en 6 minutos. ¿En cuántos minutos llenara 20 litros?

Fuente: Adaptado de Gonzales (2014, p.24)

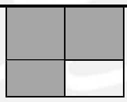
4.2 Jerarquía en los problemas de proporcionalidad y el razonamiento proporcional.

Cubillos (2017), al revisar el análisis de Vergnaud (1991) concerniente a las estructuras multiplicativas, establece una jerarquía sobre la complejidad de los problemas considerando el tipo de número que intervienen. Al respecto Cubillos (2017), manifiesta:

> la complejidad de cada problema es afectada tanto por el tipo de números intervinientes (enteros, enteros y decimales, decimales infinitos, etc.) sino también por la presencia o ausencia explícita de la razón unitaria y por la cantidad y naturaleza de las operaciones necesarias para calcular la solución: solo multiplicación, solo división o bien, una combinación de ambas (p.58)

En la tabla 10, podemos observar por cada tipo de problema unas celdas de color negro y blanco que representan cada uno de los términos de la estructura multiplicativa.

Tabla 10: Grado de dificultad según el tipo de problema

N°	Tipo de problema	cuaterna	Comentarios	dificultad
1	Si en una mesa caben cuatro personas ¿Cuántas personas cabrán en 3 mesas?		Solo intervienen números enteros. Se conoce la razón unitaria. Se resuelve multiplicando 4 por 3	baja
2	Si un litro de aceite pesa 857,5 gramos, entonces ¿Cuánto pesara 1,25 litros del mismo aceite?		Intervienen enteros y decimales Se conoce razón unitaria Se resuelve multiplicando 1,25 por 857,5	mediana
3	Si por cuatro mesas se pagó S/.1800 ¿Cuánto cuesta cada mesa?		Soló interviene números enteros Se conoce la razón unitaria Se resuelve dividiendo 1800 por 4	baja
4	Si por tres mesas se pagó S/.1650 ¿Cuántas mesas se podra comprar con S/.2750?		Solo intervienen números enteros No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 1650 por 3. El cociente se usa para dividir 2750.	mediana
5	En recorrer 80 km un automóvil consume 4,75 litros de gasolina. ¿Cuánta gasolina consumirá si desea recorrer 190 km?		Intervienen números enteros y decimales. No se conoce razón unitaria. Se resuelve dividiendo 80 por 4,75. El cociente obtenido se usa para dividir 190	alta

6	Se sabe que 23 botones idénticos pesan 36,8 gr. ¿Cuánto deberían pesar 37 botones del mismo tipo?		Intervienen números enteros y decimales No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 36,8 por 23. El cociente obtenido se multiplica por 37	alta
7	Si 3 sandías cuestan S/.7.000 ¿Cuánto debería pagarse por 8 sandías?		Intervienen enteros y decimales infinitos No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 7000 por 3. El cociente se multiplica por 8	Alta.

Fuente: Cubillos (2017, p. 58)

Por otro lado, Reyes (2016), en base a los trabajos realizados por Piaget e Inhelder (1977) resalta que la proporcionalidad tiene un inicio cualitativo y lógico antes que cuantitativo. Al respecto el autor expresa lo siguiente.

> En estas conclusiones, podemos observar, en primer lugar, que se diferencia entre un ***razonamiento cualitativo*** del pensamiento proporcional y uno cuantitativo. El primero se refiere al tipo de relación descriptiva entre dos magnitudes, mientras que el segundo, refiere a relaciones métricas (p.165)

Por ser intuitivo, una particularidad del razonamiento cualitativo proporcional es que su constante de proporcionalidad es positivo. Según Reyes (2016). “Suele ser una receta nemotécnica durante la educación básica, antes de trabajar con números enteros, pues en el campo de los naturales, no existe otra posibilidad”(p.168).

En la figura 8, podemos observar un ejemplo de razonamiento cualitativo proporcional.

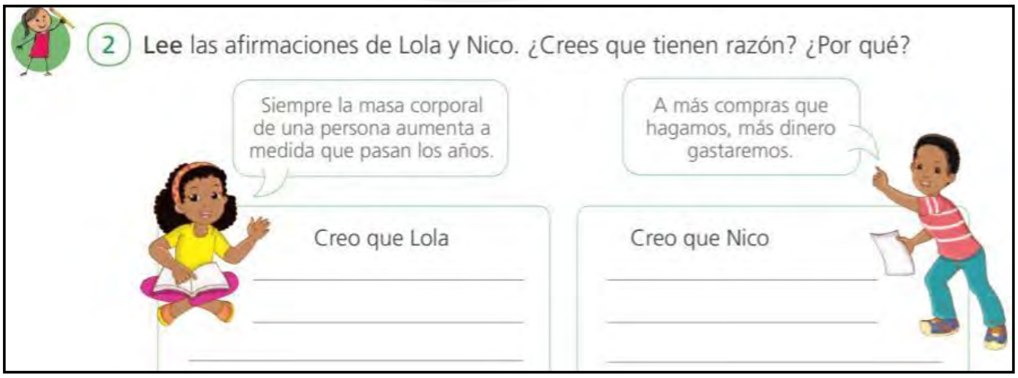


Figura 8: Ejemplo de tarea que promueve el razonamiento cualitativo
Fuente: MINEDU, cuaderno de trabajo, 5° primaria (2019, p.133)

En cuanto al razonamiento cuantitativo para Reyes (2016), el razonamiento aditivo es una primera aproximación en la determinación de las relaciones métricas. Al respecto el autor manifiesta. "En este momento, nos adentramos al razonamiento cuantitativo de la proporcionalidad, ya que comenzaremos a postular las relaciones métricas que los subyacen" (p.165). Debemos precisar que este tipo de estrategia (razonamiento aditivo) responde con éxito a cierto tipo de problemas sencillos pero para casos generales resulta insuficiente, además según la presencia o no del elemento unitario este tipo de razonamiento puede clasificarse en, razonamiento aditivo simple y razonamiento aditivo compuesto.

En la figura 9 se evidencia el modelo del razonamiento proporcional aditivo

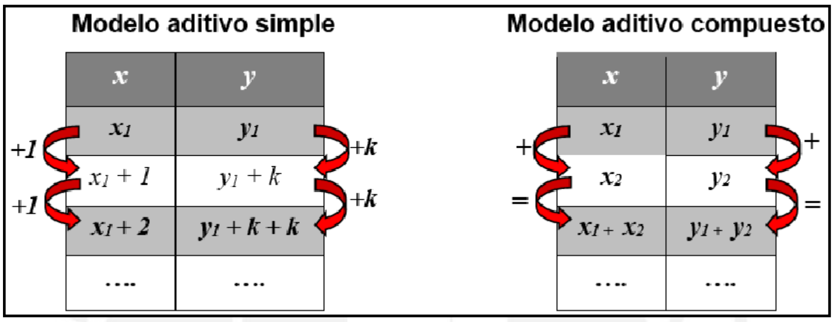


Figura 9: Tipo de modelo proporcional aditivo

Fuente: Adaptado de Reyes (2016, p.168)

A continuación en la figura 10 y 11 presentamos un ejemplo de situaciones donde se promueve el razonamiento proporcional de modelo aditivo simple y compuesto.

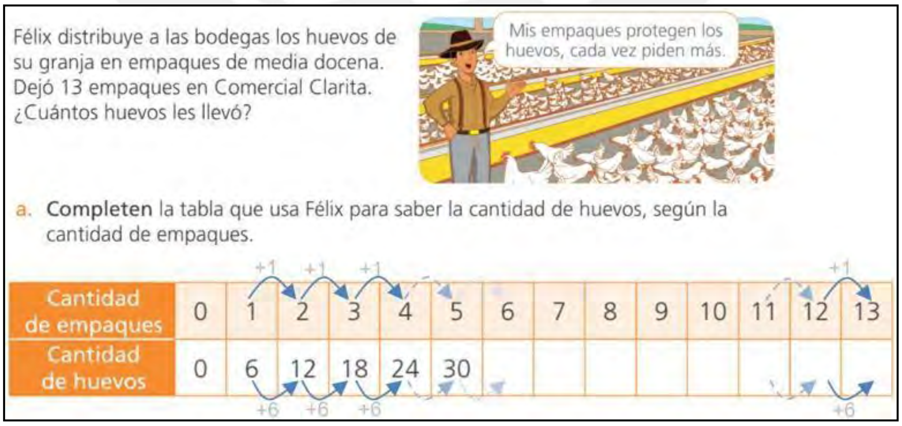


Figura 10: Ejemplo de Razonamiento aditivo simple

Fuente: MINEDU, cuaderno de trabajo, 6° primaria (2019, p.27)

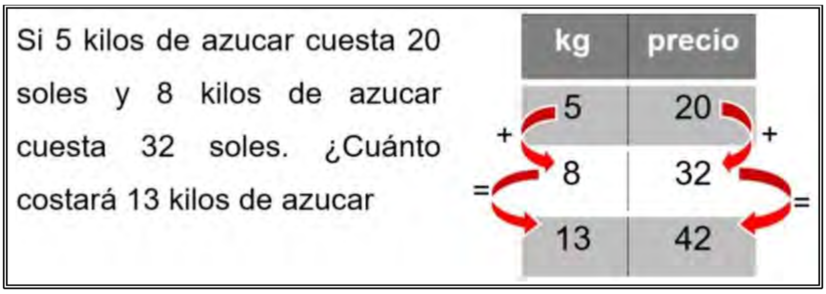


Figura 11: Ejemplo de razonamiento aditivo compuesto

Fuente: elaboración propia

Posterior al razonamiento aditivo, Reyes (2016) propone el propone el razonamiento multiplicativo de la proporcionalidad. Para esto Reyes considera los estudios realizados por Carretero (1989). Este a su vez justifica su trabajo en los diferentes tipos de estructuras multiplicativas propuesto por Vergnaud, relacionado con la adquisición de la noción de proporcionalidad, específicamente con el isomorfismo de medida. Posteriormente Lamon (1994) como consecuencia al análisis del razonamiento multiplicativo acuña el término razonamiento inter razonamiento intra (razonamiento multiplicativo escalar y funcional respectivamente)

En la figura 12, se puede observar los modelos del razonamiento proporcional referido al multiplicativo, Inter e Intra.

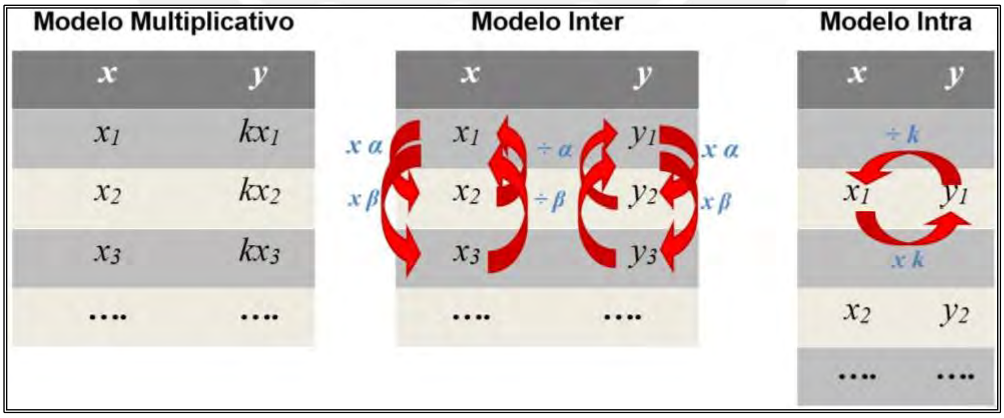


Figura 12: Modelo Multiplicativo, Inter e Intra

Fuente: Adaptado de Reyes (2016, p.168)

A continuación, se muestra un ejemplo correspondiente a cada modelo.

Razonamiento multiplicativo: “Dada la imagen del valor unitario, cualquier elemento del codominio será igual al producto de su correspondiente en el dominio por el valor unitario” (Reyes, 2016, p.169).
Ejemplo: si un kilo de azúcar cuesta 4 soles, entonces por 7 kilos de azúcar pago 28 (4x7) soles.

Razonamiento Inter: “Los elementos del dominio y el codominio varían de la misma manera. Este razonamiento es el que suele conocerse como «al doble le toca el doble»”. (Reyes, 2016, p.169).
Ejemplo: si por 3 kilos de azúcar pago 15 soles, por 12 (3x4) kilos de azúcar, pago 60 (15x4) soles.

Razonamiento Intra: “La razón entre el elemento del dominio y el elemento del codominio es siempre una constante”. (Reyes, 2016, p.169)
Ejemplo: si pago 40 soles por 8 kilos de azúcar, entonces, el precio de un kilo de azúcar es 5 soles (40 ÷ 8 = 5).

4.3 Estudio de organizaciones matemáticas propuestas

En esta sección revisamos el trabajo realizado por Hersant (2005), que propone una modelización de la proporcionalidad respecto a los saberes relacionados al cálculo de la cuarta proporcional. También consideramos a Wijayanti (2017) que construye una organización Matemática partiendo de la definición de proporción desde una perspectiva escalar. Ambos importante para la construcción de nuestra Organización Matemática, ya que el primero aporta elementos que justifican nuestra teoría y tecnología, y del segundo adaptamos sus tipos de tarea para nombrar las tareas presentes en los cuadernos de trabajo.

4.3.1 Organización matemática de Wijayanti (2017)

Con el propósito de crear un Modelo Epistemologico de Referencia, Wijayanti (2017) considera la teoría de las proporciones escalares y define la proporcionalidad como una relación entre, cantidades de un mismo espacio de medida; es decir, en la definición (líneas abajo),

- x_1 y x_2 son cantidades de la magnitud M_1
- y_1 e y_2, son cantidades de la magnitud M_2

Definición. Sean dos pares (x_1, x_2) y (y_1, y_2) se dice que son proporcionales si $x_1 \cdot y_2 = x_2 \bullet y_1$; de manera resumida se escribe como $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, generalizando, para dos n-duplas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n)$ se dice que son proporcionales si $(x_i, x_j) \sim (y_i, y_j)$ para todo $i,j = 1,\ldots,n$; luego escribiremos $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$.

En esta definición, el autor, representa a los número o cantidades reales y positivos por las letras (x_i, y_i, etc) para describir una teoría que involucra solo números y cantidades (y ocasionalmente solo letras, en el caso de “incognitas” por determinar). Además considera propiedades útiles de esta relación, donde, en aras de la brevedad, solo se formula los resultados para 2-duplas:

P1. Si definimos la relación interna de un par (x_1, x_2) como $\frac{x_1}{x_2}$, entonces $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ es lógicamente equivalente a la igualdad de las razones internas de $\frac{x_1}{x_2}$ y $\frac{y_1}{y_2}$.

P2. Similar, $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ se mantiene si y solo si las razones externas $\frac{x_1}{y_1}$ y $\frac{x_2}{y_2}$ son iguales (obseve que la razón externa se refiere a dos duplas, mientras que la razón interna depende solo de una)

P3. Si, $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ y $x_1 < x_2$, entonces $y_1 < y_2$.

P4. Si, $(x_1, x_2) \sim (1, r)$ si y solo si $\frac{x_2}{x_1} = r$, es decir, si y solo si $x_2 = r \bullet x_1$

Por último, para 2-duplas (x_1, x_2) y (y_1, y_2), la propiedad $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ aveces es llamado proporción inversa; cuando se sostiene, decimos que (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son inversamente proporcional. Esto corresponde a una relación de 2-duplas que, sin embargo, no es una relación de equivalencia (carece de transitividad); tampoco tiene generalización natural para n-duplas. Sin embargo como muestra la defnción, esta estrechamente relacionado con la proporción (a veces llamada “proporción directa” para distinguirlo de la proporción inversa)

Con esta base teórica, el autor desarrollo un modelo, que consta de dos temas, cada uno constituido por varios tipos de tarea.

• **Tema 1: Razón y escala**

La propiedad P4. Si, (x_1, x_2) ~ (1,r) si y solo si $\frac{x_2}{x_1} = r$, es decir, si y solo si x_2 = r• x_1, es un caso especial de la proporcionalidad, donde una dupla tiene la forma (1,r). En este caso existe una extrecha relación con la tecnología que involucra a la razón y escala. Ambos términos se refiere al número "r" en P4 (como consecuencia una propiedad de un solo par de números). Wijayanti, usa la escala en casos especiales donde "r" o "1/r" es un número entero y para un caso general es una relación. Si fuese el caso donde "r" es una fracción de números enteros m/n, la notación m:n, se usa a menudo, como una expresión alternativa derivado de la propiedad característica en P4, x_2:x_1=m:n. En la tabla 11 se presenta tres tareas (t_1, t_2, t_3) relativos a la proporcionalidad que reflejan algunos tipos de tarea relacionado a la razón y escala.

Tabla 11: Tareas que reflejan los tipos de tarea en el tema "relación y escala"

t_1	El precio de un kg de azúcar es 4. Pero el precio de azúcar aumentó 3:2 del precio original. ¿Cuál es el nuevo precio de un kg de huevo? Precio actual: Precio original = 3:2 Precio actual $\frac{3}{2}x4 = 6$
t_2	Una madre da S/.10 de propina a su pequeño hijo, si el hijo gasta los $\frac{2}{5}$ ¿Cuánto dinero le queda?
t_3	Lucy deposita S/30 000 en el banco y Kleider ahora S/.45 000. ¿Determina la proporción de ahorro de Lucy y el ahorro de Kleider? Razón=$\frac{30\,000}{45\,000} = \frac{2}{3}$

Fuente: adaptado de Wijayanti (2017, p.41)

Sobre esta tabla, que presenta características similares al desarrollado por Wijayanti (2017), el autor manifiesta.

La t_3 es claramente diferente ya que se pide al estudiante que calcule la razón. En tanto t_1 y t_2 parecen bastante similares al principio, pero son diferentes porque la razón dada debe aplicarse de manera diferente, en una de ellas se multiplica y en la otra se divide, siendo relevante para los estudiantes porque en este punto deben diferenciar y elegir entre esas opciones.

En las tareas se puede observar que, en la tabla no se incluyen tareas relacionados a la escala, de la forma como lo define Wijayanti (2017). Para el autor es cuestión de como se mire la tarea y brinda un ejemplo de escala de la tarea del mismo tipo que t_1.

> Un mapa tiene la siguiente escala 1:2000 y la distancia entre A y B es de 3,5cm. Determine la distancia real de A hacia B (Wijayanti, 2017, p.41)

El autor contrastó este análisis con muchas otras tareas presente en los libros de texto y definió tres tipos de tareas (T_1, T_2, T_3) y sus respectivas técnicas (τ_1, τ_2 y τ_3), como se muestra en la tabla 12. Además, la relación entre la tabla 11 y 12, es tal que, t1 es del tipo T_1 (i= 1, 2, 3).

Tabla 12: Tipos de tareas relacionado a la razón y la escala

Tip de tareas	Técnica
T_1: Dado x_1 y r, encontrar x_2, de modo que $(x_1, x_2) \sim (1,r)$	τ_1: $x_2 = r \bullet x_1$ (multiplicamos por la razón dada)
T_2: Dado x_2 y r, encontrar x_1, de modo que $(x_1, x_2) \sim (1,r)$	τ_2: $x_1 = \frac{x2}{r}$ (dividiendo por la razón dada)
T_3: Dado x_1 y x_2, encontrar r, de modo que $(x_1, x_2) \sim (1,r)$	τ_3: $r = \frac{x_2}{x_1}$ (encontrar la razón)

Adaptado de Wijayanti (2017, p.42)

- **Tema 2: Proporción directa e inversa**

En el apartado anterior se desarrolló tareas que involucran una sola dupla, mientras la dupla implícita (1, r) se identifica por completo con un número (la razón). En este apartado Wijayanti (2017) desarrolla un tema que está unificado por la tecnología de las relaciones entre dos duplas (con mayor frecuencia, pero no siempre son 2 duplas); estas pueden ser directamente o inversamente proporcional. Las relaciones se presentan en el quehacer cotidiano con ejemplos comunes e importantes. A continuación, en la tabla 13, mostramos ejemplos donde se identifica 4 tipos de tareas.

Tabla 13: tipos de tarea en el tema de "proporción directa e inversa"

t_4	En una proporción el orden de los números debe ser correcto. Indica cuál de las afirmaciones es falso: a. Edad del hijo: Edad del padre = 5:2 b. Población de los olivos: población de SMP = 1:2 c. Edad de José: edad del hermano menor de José = 3:2
t_5	En un supermercado, el precio de un paquete que contiene 2kg de arroz 8 soles y el precio de un paquete que contiene 5kg de arroz es 23 soles. ¿Qué paquete es más barato? ¿Qué harías para resolver el problema?
t_6	El precio de 3 metros de tela es 24 soles. ¿Cuánto cuesta 10 metros de tela? El precio de la tela de 3 m es 24 soles. Entonces el precio de 1m es = $\frac{24}{3} = 8$ Por lo tanto, el precio de 10 metros de tela es: 10•8 = 80
t_7	Se distribuyó un paquete de golosinas a 40 niños para que cada niño reciba 20 golosinas. ¿Cuántas golosinas recibiría cada niño, si el mismo paquete de dulces se distribuye a 100? 40 niños = 20 golosinas 100 niños = n cantidades Basado en la proporción inversa, uno consigue $\frac{40}{100} = \frac{n}{20} \Leftrightarrow$ 100• n = 40•20 $\Leftrightarrow$ n=4

Fuente: Adaptado de Wijayanti (2017, p.42)

Sobre los tipos de tareas que se muestran en la tabla 14, Wijayanti (2017) expresa que la τ_4 se justifica con la propiedad 3, que define la misma relación de orden en duplas proporcionales. En cuanto a la proporcionalidad directa e inversa, estos cuatro tipos de tarea agotan casi todos los ejercicios y ejemplo de muchos libros de texto. De manera general en la Tabla 14, se muestra los tipos de tarea relacionados con la proporción directa e inversa.

Tabla 14: Tipos de tarea relacionados con la "proporción directa e inversa"

Tipo de tareas	Técnica
t_4: dado los números a, b y dado que x>y están relacionados con a, b. ¿Puede ser cierto que (x, y) ~ (a,b)	τ_4: la respuesta es sí solo si a > b.

t_5: dado (x_1, x_2) y (y_1,y_2) comparar razones internas	τ_5: calcular $\frac{x1}{x_2}$ y $\frac{y1}{y_2}$, luego compare.
t_6: dado (x_1, x_2) e y_1 encontrar y_2 dado que (x_1, x_2) ~ (y_1,y_2)	τ_6: calcular $y_2 = \frac{x_2 \cdot y_1}{x_1}$
t_7: dado x_1, x_2 e y_1, encontrar y2 si son inversamente proporcional	τ_7: calcular $y_2 = \frac{x_1 \cdot y_1}{x_2}$

Fuente: Adaptado de Wijayanti (2017, p.43)

4.3.2 Organización matemática de Hersant (2005)

Hersant (2005) manifiesta que son dos las teorías que justifican la modelización de la proporcionalidad respecto al cálculo de la cuarta proporcional, estas teorías son: la teoría de las razones y proporciones y la teoría de la aplicación lineal. Respecto a la primera teoría, el punto de vista sobre la proporcionalidad es diferente en las primeras dos modelaciones (ver tabla 15), pues se enfatiza en las relaciones escalares.

Tabla 15: Saberes relacionados con el calculó de la cuarta proporcional

Teoría de razones y proporciones (relaciones, proporciones, extremos y medios)	**Teoría de la aplicación Lineal** (aplicaciones, función, imagen, antecedentes)
Sea **I** un subconjunto finito de N, las secuencias numéricas ($\boldsymbol{u_i}$) $_{i}\in N$ y ($\boldsymbol{v_i}$) $_{i}\in N$ con términos distintos de cero, son proporcionales, si se verifica una de las siguientes propiedades	f es una función definida de R en R. Sea I un subconjunto finito de N, las secuencias numéricas ($\boldsymbol{u_i}$) $_{i}\in N$ y ($\boldsymbol{v_i}$) $_{i}\in N$, son proporcionales, si se verifica una de las siguientes propiedades
1. Para todo i y j de I, $\frac{u_i}{u_j} = \frac{v_i}{v_j}$, (la secuencia de variación se mantiene)	
2. a) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 ... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ. 2. b) para todo *i, j, k* de **I**, si $u_i = u_j + u_k$ entonces $v_i = v_j + v_k$	8. a) para cualquier número entero *i* y *j* de **I** si el λ real es tal que $u_i = \lambda\, u_j$ entonces $v_i = f(u_i) = \lambda f(u_j) = \lambda v_j$ 8. b) para cualquier número entero *i, j, k* de **I** si $u_i = u_j + u_k$ entonces, $v_i = f(u_i) = f(u_j) + f(u_k) = v_j + v_k$
3. Para todo *i* y *j* de **I**, $u_i v_j = v_i u_j$ (el producto extremos es igual al producto de los medios)	
4. Para todo *i* y *j* de **I**, $\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_j}{v_j}$	
5. Para todo *i, j, k* de **I**, si λ y μ son números reales no nulos, de modo que $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$	8. Para cualquier número entero *i, j, k* de **I** si los reales λ y μ son tales que $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$, entonces $v_i = f(u_i) = \lambda f(u_j) + \mu f(u_k) = \lambda v_j + \mu v_k$

entonces $\frac{u_i}{v_i} = \frac{\lambda u_j + \mu u_k}{\lambda v_j + \mu v_k}$	8 *. cualquier combinación lineal de los dos columnas de la tabla es una nueva columna de la mesa
6. $\frac{u_i}{v_i}$ es un coeficiente de proporcionalidad, este es el número por el cual multiplicar u_i para obtener v_i.	7. Para todo *i* de **I**, v_i es la imagen de u_i por una aplicación lineal *f*, es decir, existe un real α distinto de cero tal que para cualquier número entero $_{i\in}$ N, $v_i = \alpha u_i$
	9. En un sistema de coordenadas, todos los puntos $(u_i, v_i)_{i\in}$ I está en una línea recta que pasa por el origen del punto de referencia.

Fuente: Hersant (2005, p.25)

Ambas teorías, "la teoría de las razones y proporciones" y la teoría de la aplicación lineal" consideran las mismas situaciones, la única diferencia entre ambas teorías es que la primera se adapta al campo de lo discreto y de las relaciones externas. En tanto la segunda teoría extiende la teoría de las proporciones hacia el campo de lo continuo.

Criterios a tomar en cuenta para el análisis de los cuadernos de trabajo

Antes de iniciar el análisis praxeológico de nuestro objeto de estudio, es necesario considerar la relación entre las cantidades homogéneas o heterogéneas. Esta relación se hace explicita en los cuadernos de trabajo, a través de los ostensivos que sugiere, en la mayoría de los problemas un análisis desde una perspectiva escalar y funcional. Tal como se muestra en la figura 13.

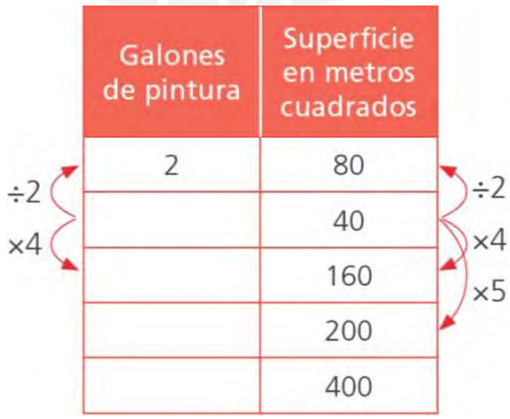


Figura 13: Ejemplo de ostensivo que sugiere relacionar cantidades homogéneas

Fuente: Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.163)

Para nuestra investigación, la importancia de este criterio se basa en la Organización Matemática propuesto por Hersant (2005) y que adaptamos para su consideración en la sección referido al análisis praxeológico.

Análisis escalar

El análisis escalar se refiere a las relaciones internas entre dos magnitudes, en palabras de Sánchez (2013) se analiza la variación que sufre una magnitud respecto a la variación que sufre una primera magnitud. Para Hersant (2005), García (2005), Sánchez (2009), Obando (2015). Las primeras dos propiedades de la función lineal es la base para el análisis escalar.

a) Homogeneidad con respecto a la suma: $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$
b) Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar: $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

Hersant (2005), relaciona estas dos propiedades con la definición de proporcionalidad al expresar lo siguiente: Dado dos cantidades homogéneas de la magnitud M y N dependientes entre sí, son proporcionales si las proporciones de las cantidades homogéneas correspondientes a las magnitudes "M" y "N" son iguales. Además, las cantidades proporcionales tienen las mismas propiedades, llamadas propiedad de linealidad:

- la suma de dos valores de la magnitud M está asociada con la suma de los valores correspondientes de la magnitud N;

- si un valor de la magnitud M se multiplica por 2, 3, 4 ... k (k es un real), el valor correspondiente de la magnitud B es multiplicado por 2, 3, 4, ... k.

En la tabla 3 (página 28) se observa las propiedades de la teoría de razones y proporciones propuesto por Hersant (2005). Para nuestra investigación solo mencionaremos dos propiedades que sustentan las técnicas relacionado a nuestro análisis escalar.

1) para todo i, j, k de **N**, si $u_i = u_j + u_k$ entonces $v_i = v_j + v_k$
2) para todo *i* de **N**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 ... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
3) de la segunda propiedad es lógico comprender que, si u_i se divide entre 2,3, 4 ... *n* ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), v_i se divide entre 2, 3, 4 ...n. Al cual incluiremos como una tercera propiedad. Aunque ambas expresiones son equivalentes, para nuestra

investigación es necesario ser explícito y diferenciar la multiplicación de la división ya que los textos de análisis corresponden al nivel de primaria.

4) de la segunda propiedad se puede deducir, si $u_j = nu_i$, entonces $\exists v_j / \frac{v_i}{n} = v_i, n \in \mathbb{N}$

Análisis funcional

"El análisis funcional son estrategias que consisten en comparar parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas" (Hurtado, 2019, p.49). En este caso se relaciona cantidades entre una magnitud y su respectivo valor correspondiente en la otra magnitud. En otras palabras, dado dos valores a_1 y $f(a_1)$, se cumple $f(a_1) = \lambda a$, donde λ, es llamado constante de proporcionalidad y es un número racional.

Hersant (2005), vincula la función lineal con las proporciones y establece propiedades de secuencias numéricas proporcionales a partir de las propiedades de la función lineal. En la tabla 3 (página 28), se observa las propiedades de la teoría de aplicación lineal propuesto por Hersant (2005). Para nuestra investigación solo mencionaremos una propiedad que sustentan las técnicas relacionado a nuestro análisis funcional.

1) existe una aplicación lineal *f* tal que, para todo i de **I**, v_i es la imagen de u_i por f, es decir, hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$

Respecto a la propiedad, se tiene que $v_i = r'u_i$, entonces, se puede decir que $u_i = v_i \div r'$, donde r' es un real al cual llamaremos factor funcional. Aunque ambas expresiones son equivalentes, para nuestra investigación es necesario ser explícito y diferenciar la multiplicación de la división ya que los textos de análisis corresponden al nivel de primaria. Por lo expuesto, la primera propiedad se puede definir de la siguiente manera.

1) hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$
2) hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $u_i = v_i \div r'$

Tecnología del análisis escalar (θ_e) y análisis funcional (θ_f)

Tomando como referencia los aportes de Hersant (2005). En la tabla 17, se observa la tecnología y teoría presente en los cuadernos de trabajo analizados.

Tabla 16: Saberes relacionado al tipo de análisis

θ_1: Teoría de razones y proporciones (relaciones, proporciones, extremos y medios)	**θ_2: Teoría de la aplicación Lineal (aplicaciones, función, imagen, antecedentes)**
Sea I un subconjunto finito de N, las secuencias numéricas $(u_i)_{i \in N}$ y $(v_i)_{i \in N}$ con términos distintos de cero, son proporcionales, si están correlacionadas directamente y su razón permanece constante. (Londoño et al., 1993, p. 245)	f es una función definida de R en R. Sea I un subconjunto finito de N, las secuencias numéricas $(u_i)_{i \in N}$ y $(v_i)_{i \in N}$, son proporcionales, si se verifica una de las siguientes propiedades
θ_1) para todo *i, j, k* de **I**, si $u_i = u_j + u_k$ entonces $v_i = v_j + v_k$	1) existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de **I**, v_i es la imagen de u_i por f, es decir: θ_6) hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$ θ_7) hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $u_i = v_i \div r'$
θ_2) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 ... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.	
θ_3) para todo *i* de **I,** sí ui se divide entre 2,3, 4 ... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), vi se divide entre 2, 3, 4 ...n	
θ_4) para todo *i, j* de **I,** si $u_j = nu_i$, entonces, $\exists v_j / \frac{v_i}{n} = v_i, n \in \mathbb{N}$	
θ_5) Para todo i, j de I, $\frac{u_i}{u_j} = \frac{v_i}{v_j}$ (la relación se mantiene)	

Fuente: Adaptado de Hersant (2005, p.25)

4.4. Modelo praxeológico de referencia de la proporcionalidad

En este apartado, se presenta una estructura de praxeologías en base a una revisión previa de los cuadernos de trabajo, que, a su vez, ha servido para una reiterada revisión. Asimismo, se ha tomado en cuenta los elementos considerados en el marco teórico, como son, el Generador de un Tipo de tarea *($\boldsymbol{GT}$)* y las variables didácticas *($\boldsymbol{V_i}$).* Al respecto, Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019) señalan que para organizar y estructurar una praxeología debe considerarse el generador de un tipo de tarea (GT_i) y las variables didácticas (V_i).

A continuación, se muestra las siguientes notaciones

$\boldsymbol{T_i}$: tipos de tareas

$\boldsymbol{GT_i}$: Generador de tipos de tareas i

$\boldsymbol{t_{i,j}}$: tareas, significa la tarea j del donde Tipo i

$\boldsymbol{V_i}$: Variables

$\tau_{i,j,k}$: Es la técnica. Donde i es el tipo de tarea; j indica el número de tarea; y k señala el número de la técnica de la tarea j

$\boldsymbol{\theta}_m$: Es la tecnología que justifica la técnica

$\boldsymbol{\Theta}_n$: Es la teoría que justifica la tecnología.

También, en esta investigación adaptamos el trabajo realizado por Wijayanti (2017) y consideramos la siguiente notación para diferenciar el análisis del tipo escalar o funcional que se realiza sobre los problemas presente en los cuadernos de trabajo.

$\mathbf{(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)}$: es una relación de proporcionalidad desde una perspectiva funcional, donde a_1, a_2 son cantidades de la magnitud M_1 y b_1, b_2 cantidades de M_2.

$\mathbf{[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]}$: en una relación de proporcionalidad desde una perspectiva escalar, donde a_1, a_2 son cantidades de la magnitud M_1 y b_1, b_2 cantidades de M_2.

Tipo de tarea $\boldsymbol{T_i}$

- **Tipo de tarea T_1**

$\boldsymbol{T_1}$: Hallar el cuarto valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$\boldsymbol{GT1}$: [Hallar el término desconocido en una relación escalar o funcional; V_1, V_2], en este tipo de tareas se presentan cuatro cantidades, por lo que las variables han sido definidas por las características de estos:

V_1: Un elemento es el 1, ningún elemento es 1.

V_2: Conjunto numérico de la medida de las cantidades (todos naturales, al menos uno es decimal, al menos uno es una fracción)

V_3: Múltiplos, no múltiplos, divisores, no divisores.

tareas relacionadas a T_1

$t_{1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$

- $t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$
- $t_{1,1,2}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde $a_2, b_2 \in N$ y r' es un número decimal.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y $r \in N$

$t_{1,4}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$

- $t_{1,4,1}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, y $r \in N$

- $t_{1,4,2}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde $r \in N$ y b_1 es decimal

$t_{1,5}$: dado b_1, b_2. Hallar r, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_2 es múltiplo de b_1

$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$t_{1,7}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 no divisor ni múltiplo de a_1

$t_{1,8}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es divisor a_1

$t_{1,9}$: Dado a_1, a_2 y b_1, hallar b_2, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, b_1 es múltiplo de a_1

$t_{1,10}$: Dado el estado (a_1, b_1), si $a_2=n_x a_1$. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$

- $t_{1,10,1}$: Dado el estado (a_1, b_1), si $a_2=n_x a_1$. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$ y a_1, b_1 y $n \in N$.

- $t_{1,10,2}$: Dado el estado (a_1, b_1), si $a_2 = n_x a_1$. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que [a_1, a_2] $\sim$ [b_1, b_2], a_1, n ∈ N y b_1 es decimal

$t_{1,11}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que [1, r] $\sim$ [b_1, b_2] y $r = 1\frac{1}{n}$, donde b_1 y n ∈ N

$t_{1,12}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que [1, r] $\sim$ [b1, b2] y $r = m\frac{1}{n}$, donde m, n, b_1 y n ∈ N

$t_{1,13}$: Dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2, de modo que [a_1, a_2] $\sim$ [b_1, b_2], donde $M_{(a_1)} \pm D_{(a_1)} = a_2$

técnicas relacionadas a T_1

$\tau_{1,1,1} = \tau_{1,1,2}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. ($r'.a_2=b_2$)

$\tau_{1,2}$: factor funcional unitario inverso

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para halla a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)

$\tau_{1,3}$. Factor escalar unitario inverso

1° paso: Identificamos el factor escalar entre las dos cantidades. (r)

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para hallar b_1. ($b_2 \div r = b_1$)

$\tau_{1,4,1} = \tau_{1,4,2}$: factor escalar unitario

1° paso: identificamos el factor escalar entre las dos cantidades. (r)

2° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_2=b_1.r$)

$\tau_{1,5}$: factor escalar múltiplo unitario.

1° paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° paso: dividimos a_2 entre a_1 para hallar r. ($\frac{a_2}{a_1} = r$)

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_2. (a_2/a_1)

3° paso: aplicamos el mismo aumento a b_1 para hallar b_2

$\tau_{1,7}$: factor escalar no entero

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: dividimos a_2 entre a_1 para hallar el factor escalar. ($\frac{a_2}{a_1}$)

3° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_1 \times \frac{a_2}{a_1} = b_2$)

$\tau_{1,8}$: factor escalar divisor.

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos en cuanto disminuye a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos la misma disminución en b_1 para hallar b_2.

$\tau_{1,9}$: Reducción a la unidad.

1° paso: Identificamos las cantidades a utilizar. (a_1 y b_1)

2° paso: Calculamos el correspondiente a la unidad dividiendo $\frac{b1}{a_1}$

3° paso: Multiplicamos el correspondiente de la unidad con a_2 para hallar b_2. ($a_2\, x \frac{b_1}{a_1} = b_2$)

$\tau_{1,10}$: ampliación del estado

1° paso: Identificar el estado a utilizar. (a_1,b_1)

2° paso: multiplicar a_1 por un número natural mediante el discurso: “Sí a_1 aumenta en el doble, el triple, el cuádruple…”

3° paso: multiplicar por el mismo número natural a b_1, mediante el discurso: Sí a_1 aumento en el doble, el triple, el cuádruple…, entonces b_1 también aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, …”

$\tau_{1,11}$: serie unitario simple

1° paso: ubicamos la cantidad homogénea $\frac{1}{n}$

2° paso: identificamos cuantas veces disminuye 1 respecto a "$\frac{1}{n}$".(disminuye n veces)

3° paso: dividimos b_1 entre "n" mediante el discurso: si la unidad disminuye "n" veces entonces b_1 también disminuye "n" veces.

4° paso: sumamos b_1 con $\frac{b_1}{n}$ para hallar b_2. ($b_1 + \frac{b_1}{n} = b_2$)

$\tau_{1,12}$: serie unitario compuesto

1° paso: ubicamos la cantidad homogénea $\frac{1}{n}$

2° paso: identificamos cuantas veces disminuye 1 respecto a "$\frac{1}{n}$".(disminuye n veces)

3° paso: dividimos b_1 entre "n" mediante el discurso: si la unidad disminuye "n" veces entonces b_1 también disminuye "n" veces.

4° paso: ubicamos la cantidad homogénea "m"

5° paso: identificamos cuantas veces aumenta 1 respecto a "m". (aumenta m veces)

6° paso: multiplicamos b_1 por "m" mediante el discurso: si la unidad aumenta "m" veces entonces b_1 también aumenta "m" veces.

7° paso: sumamos $\frac{b_1}{n}$ con b1.m para hallar b2. ($\frac{b_1}{n} + b_1 . m = b_2$)

$\tau_{1,13}$: serie compuesto

1° paso: identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° paso: identificamos en cuanto disminuye y/o aumenta a_1 respecto a_3.

3° paso: realizamos la misma disminución y/o aumento en c_1 para hallar c_3.

4° paso: repetimos el primer paso.

5° paso: repetimos el segundo paso.

6° paso: realizamos la misma disminución y/o aumento en d_1 para hallar d_2.

7° paso: sumamos c_2 y d_2 para hallar b_2. ($c_2+d_2=b_2$)

Tecnología y la Teoría asociada a las técnicas

- factor funcional unitario ($\tau_{1,1,1}= \tau_{1,1,2}$).

  $\boldsymbol{\theta}_6$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de **I**, v_i es la imagen de u_i por f, es decir: hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$

$\boldsymbol{\Theta}_2$: teoría de aplicación lineal

- factor funcional inverso unitario ($\tau_{1,2}$)

  $\boldsymbol{\theta}_7$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de **I**, v_i es la imagen de u_i por f, es decir hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $u_i = v_i \div r'$

  $\boldsymbol{\Theta}_2$: teoría de aplicación lineal

- factor escalar unitario inverso ($\tau_{1,3}$)

  $\boldsymbol{\theta}_4$: para todo *i, j* de **I,** si $u_j = nu_i$, entonces, $\exists v_j / \frac{v_i}{n} = v_i, n \in \mathbb{N}$

  $\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

- factor escalar unitario ($\tau_{1,4}$), factor escalar múltiplo unitario ($\tau_{1,5}$), factor escalar múltiplo ($\tau_{1,6}$), factor escalar no entero ($\tau_{1,7}$)

  $\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.

  $\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

- factor escalar divisor ($\tau_{1,8}$)

  $\boldsymbol{\theta}_3$: para todo *i* de **I,** sí ui se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), vi se divide entre 2, 3, 4 ...n

  $\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

- Reducción a la unidad ($\tau_{1,9}$)

  $\boldsymbol{\theta}_3$) para todo *i* de **I,** sí ui se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), vi se divide entre 2, 3, 4 ...n

  $\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.

  $\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

- Ampliación del estado ($\tau_{1,10}$)

  $\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.

$\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

- Serie unitario simple ($\tau_{1,11}$), Serie unitario compuesto compuesta ($\tau_{1,12}$) y Serie compuesta ($\tau_{1,13}$)

  $\boldsymbol{\theta}_1$) para todo *i, j, k* de **I**, si $u_i = u_j + u_k$ entonces $v_i = v_j + v_k$

  $\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.

  $\boldsymbol{\theta}_3$) para todo *i* de **I,** sí u_i se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), v_i se divide entre 2, 3, 4 ...n

  $\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

Tipo de tarea T_2

T_2: Identificar la correlación entre cantidades

GT_2: [Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes proporcionales o no proporcionales]

$t_{2,1}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes no proporcionales

$t_{2,2}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes proporcionales

técnicas relacionadas a T_2

$\tau_{2,1}$: correlación de no proporcionalidad

1° paso identificar las magnitudes

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos el correspondiente de una cantidad en la otra magnitud

4° paso: identificamos el aumento simultaneo no proporcional de las cantidades

$\tau_{2,2}$: correlación de proporcionalidad

1° paso: identificar las magnitudes que se va relacionar.

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos la relación de cambio entre las dos magnitudes justificado en el primer modelo del razonamiento cualitativo proporcional.

Tecnología y la Teoría asociada a las técnicas

$\tau_{2,1}$ y $\tau_{2,2}$ (correlación de no proporcionalidad y correlación de proporcionalidad)

$\boldsymbol{\theta}_5$: Dos magnitudes X y Y tienen una correlación directa, cuando para todo $x_i,\ x_j$ de X con $x_i <\ x_j$ entonces $y_i <\ y_j$. De manera similar, se establece que tienen correlación inversa, si para todo x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_j < y_i$.

$\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

Tipo de tarea T_3

T_3: Reconocer una relación entre dos magnitudes.

$t_{3,1}$: Reconocer una relación directamente proporcional entre dos magnitudes

técnicas relacionadas a T_3

$\tau_{3,1}$: técnica discursiva

1° paso: Identificamos las magnitudes que intervienen en el problema.

2° paso: comprobamos la existencia de la relación entre las magnitudes, justificado en el modelo de razonamiento proporcional cualitativo

3° paso: Comprobamos la existencia de una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes, es decir si uno aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc., su valor correspondiente en la otra magnitud también aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc.

Tecnología y la Teoría asociada a las técnicas

$\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones

$\boldsymbol{\theta}_2$: para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.

A continuación, desarrollamos los elementos praxeológicos encontrados en los cuadernos de trabajo

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LOS MATERIALES

En este capítulo presentaremos la descripción y análisis de la Organización Matemática del objeto “proporcionalidad” presente en los cuadernos de trabajo que el Ministerio de Educación del Perú distribuyó en las zonas urbanas a estudiantes del nivel primaria el año 2019 y que actualmente es usado en las instituciones educativas del estado.

5.1. Descripción de los cuadernos de trabajo

Los textos elegidos llevan por título “Cuaderno de trabajo Matemática 3”, “Cuaderno de trabajo Matemática 4”, “Cuaderno de trabajo Matemática 5” y “Cuaderno de trabajo Matemática 6” que corresponde al grado de 3°, 4°, 5° y 6° de primaria respectivamente. Los cuadernos son editados por el Ministerio de Educación y cada uno presenta 8 unidades, a su vez, cada unidad está dividida en sesiones. Respecto a los cuadernos de 3° y 4° de primaria, la presencia de la proporcionalidad se encuentra desarrollado en distintas unidades, en 5° de primaria ubicamos nuestro objeto matemático de estudio en la unidad 7 y en 6° de primaria lo encontramos en la unidad 8. A continuación en la tabla 16, se describe las sesiones relacionado a nuestro objeto matemático de estudio, que resaltaremos en negrita.

Tabla 17: Ubicación de la proporcionalidad en sus respectivas unidades

Cuaderno de trabajo 3	Cuaderno de trabajo 4
➢ Unidad 3 • Resolvemos problemas de dos etapas • Usamos el doble y el triple. • Multiplicamos a partir de la suma • **Resolvemos problemas de multiplicación** • Usamos reglas para multiplicar • Aprendemos con las formas geométricas ➢ Unidad 5 • Combinamos y multiplicamos • Separamos y dividimos • Dividimos para repartir • **Resolvemos problemas de división** • Reconocemos figuras simétricas • Aprendemos con las formas geométricas ➢ Unidad 6	➢ Unidad 2 • Aplicamos estrategias de cálculo mental • Resolvemos problemas de cambio • Resolvemos problemas de comparación • Resolvemos problemas de igualación • Resolvemos problemas aditivos de dos etapas • **Conocemos los múltiplos de un número** • Describimos patrones multiplicativos • Elaboramos gráficos de barras ➢ Unidad 3 • Multiplicamos formando filas y columnas • Aplicamos la propiedad conmutativa • **Multiplicamos de diversas formas** • Resolvemos problemas multiplicativos de comparación • Exploramos los cuerpos geométricos

• Jugamos con figuras geométricas • Organizamos información en un pictograma • **Usamos estrategias para dividir** • Medimos la duración de las actividades • Estimamos el tiempo ➢ Unidad 8 • Resolvemos problemas de distintas formas •Resolvemos problemas usando distintas operaciones • Describimos camino usando el plano • **Cambiamos con el paso del tiempo** • Elaboramos gráficos estableciendo una escala	• Organizamos e interpretamos la información en gráficos ➢ Unidad 4 • Representamos fracciones • Buscamos equivalencia entre fracciones • Comparamos fracciones • **Cambiamos con el paso del tiempo** • Completamos patrones • Descubrimos ejes de simetría ➢ Unidad 5 • Estimamos el tiempo • Medimos el tiempo • Resolvemos problemas con fracciones • Resolvemos problemas usando la propiedad distributiva • **Relacionamos magnitudes** • Conocemos los polígonos • Trasladamos figuras en una cuadrícula ➢ Unidad 6 • **Dividimos de diversas formas** • Resolvemos problemas de división con residuo • Resolvemos problemas con fracciones equivalentes • Medimos y comparamos longitudes • Medimos el perímetro • Estimamos y medimos la capacidad de los recipientes •Recogemos información de nuestros compañeros.
Cuaderno de trabajo 5	**Cuaderno de trabajo 6**
➢ Unidad 7 • Jugamos con experimentos aleatorios • **Relacionamos magnitudes** • **La proporcionalidad en situaciones diarias** • Calculamos perímetros de diferentes objetos y lugares • Medimos superficies	➢ Unidad 8 • Resolvemos problemas con fracciones y decimales • Reconocemos cuantas partes son de cada cien • Resolvemos problemas con descuentos • Resolvemos problemas de igualación • **Resolvemos diversos problemas** • **Buscamos proporciones en nuestro entorno**

Fuente: elaboración propia

5.2 Análisis de los cuadernos de trabajo

En esta sección se describe y analiza los elementos encontrados tomando el Modelo praxeológico descrito en la sección anterior.

5.2.1 Cuaderno de trabajo – Matemática 3

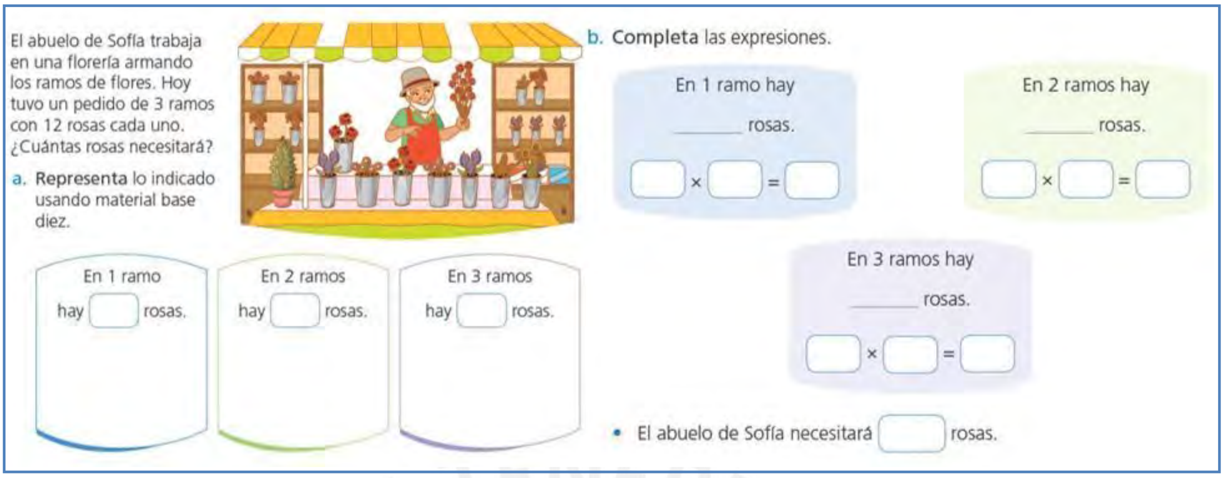


Figura 14: Problema 1 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.57)

En el texto está implícito hallar un cuarto valor desconocido en una situación que ya se asume de proporcionalidad. Se observa una primera estrategia que consiste en agrupar la cantidad de rosas que se necesita para un ramo, para dos ramos y finalmente para tres ramos. Esto promueve una segunda estrategia relativo factor multiplicativo funcional que se usa para comparar cantidades de distintos espacios de medida. En palabras de Reyes (2016) se estimula el razonamiento del modelo proporcional Intra. También, desde la perspectiva del isomorfismo de medida planteado por Vergnaud (1981), existe una relación de proporcionalidad simple entre dos magnitudes (n° de ramos y cantidad de rosas), representado en el siguiente esquema:

n° ramos	n° de rosas
1 →	12
3 →	x

Donde x representa la cantidad de rosas para preparar 3 ramos. Para Vergnaud el problema del texto es del tipo multiplicativo

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r’)

2° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. $(r'.a_2=b_2)$

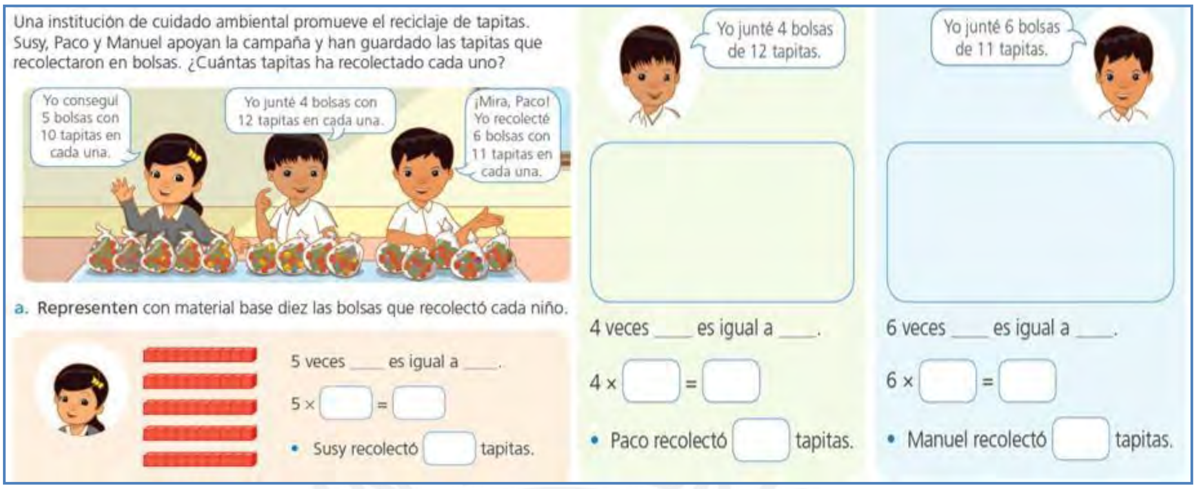


Figura 15: Problema 2 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.58)

El problema del texto establece una relación entre dos espacios de medida (número de bolsas y número de tapitas), en la estrategia de solución se puede observar la formación de grupo de barras con la misma cantidad de unidades, luego corresponde sumar todas las unidades para obtener la respuesta. Para Ivars y Ceneida (2016) este tipo de estrategia se acostumbra utilizar en los problemas del tipo isomorfismo de medida de multiplicación. Además, se deduce como consecuencia de la estrategia un acercamiento al modelo multiplicativo Intra.

n° ramos	n° de rosas
1	10
5	x

Donde x representa el total de tapitas que se recolecto. Para Vergnaud el problema del texto es del tipo multiplicativo

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

3° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. $(r'.a_2=b_2)$

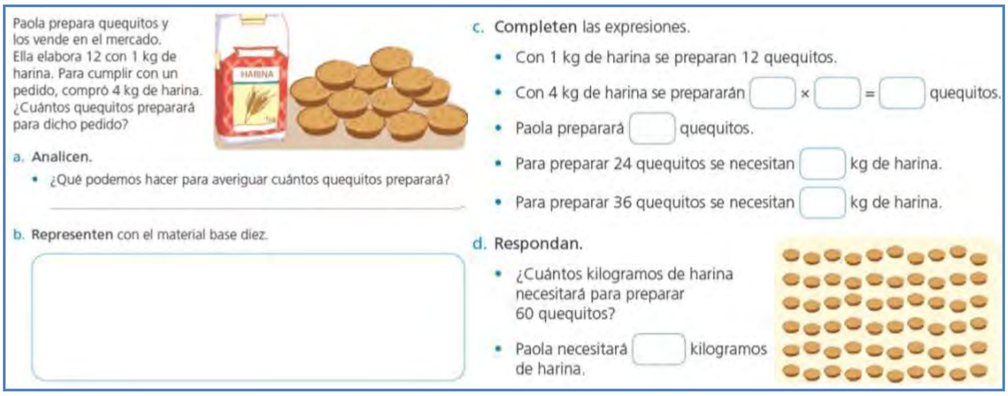


Figura 16: Problema 3 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.59)

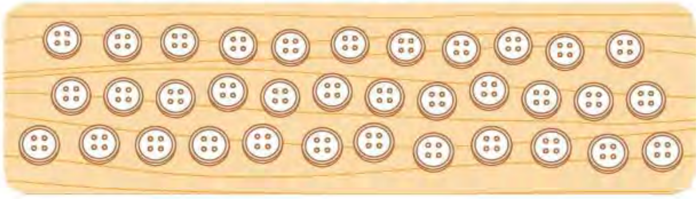
El texto plantea un problema cuya estrategia de solución explicita consiste en agrupar material de base diez, luego se suma las unidades para obtener la respuesta. Además, se promueve una segunda estrategia relacionado al factor multiplicativo funcional, en palabras de Reyes (2016) se propicia un modelo de razonamiento proporcional Intra y según Vergnaud (1981) el problema corresponde a un isomorfismo de medida de multiplicación. Representado en el siguiente esquema

Kg de harina	n° de quequitos
1 →	12
*	
4 →	x

Donde “x” representa el número el total de quequitos. Además, Según Cubillos (2017) es un problema con dificultad baja. Por lo expuesto planteamos el T_1, $t_{1,1}$ y $\tau_{1,1}$.

Cristina es costurera y tiene 35 botones. Debe coser 5 botones en cada camisa. ¿Para cuántas camisas le alcanzará?

a. **Encierren** los botones que se necesitan para cada camisa.



b. **Completen** las expresiones.

- Hay 35 botones y cose ☐ botones en cada camisa.
- Se han formado ☐ grupos.
- Luego, 35 ÷ ☐ = ☐.
- Le alcanza para ☐ camisas.

Figura 17: Problema 4 – Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.94)

En el texto está implícito calcular un cuarto término. Como estrategia se forma grupos de 5 botones cada uno, esto permite conocer el total de camisas, que se refleja en la cantidad de grupos formados. Según Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida de división media. También es explícito la solución, que corresponde a la relación de dos cantidades heterogéneas. Esto promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra.

n° de camisas	n° botones
1	5
x	35

$$1 \xrightarrow{*} 5$$

$$x \xleftarrow{\div} 35$$

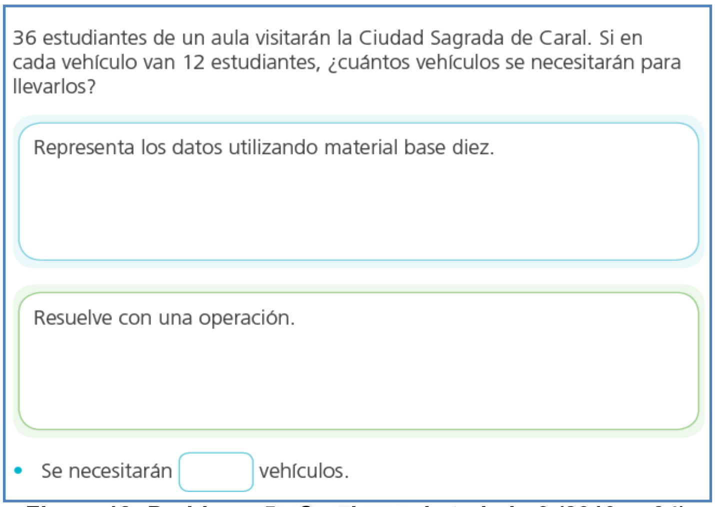
T_1: Hallar el término desconocido en una situación de proporcionalidad.

$T_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para halla a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)



36 estudiantes de un aula visitarán la Ciudad Sagrada de Caral. Si en cada vehículo van 12 estudiantes, ¿cuántos vehículos se necesitarán para llevarlos?

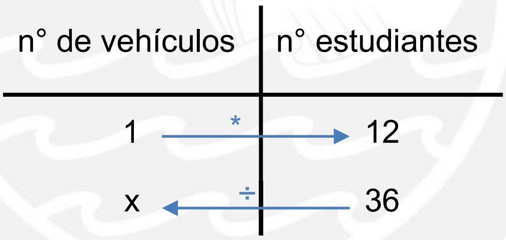
Representa los datos utilizando material base diez.

Resuelve con una operación.

- Se necesitarán ______ vehículos.

Figura 18: Problema 5 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.94)

Para la solución del problema es explicito el empleo de material concreto (base diez) para formar grupo de una decena y dos unidades cada uno. Esto permite conocer el total de Vehículos que se refleja en la cantidad de grupos formados. Para Vergnaud (1981) este problema corresponde a un isomorfismo de medida con división media, que se puede representar con el siguiente esquema



Donde "x" representa el total de vehículos. Además, el texto es explicito en brindar solución mediante una operación. Se puede decir que sugiere dividir dos cantidades de heterogéneas, esto promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra. Por lo expuesto declaramos la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que (1, r') $\sim$ (a_2, b_2), donde a_2, b_2 y r' $\in$ N

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para halla a_2. (b_2÷r'=a_2)

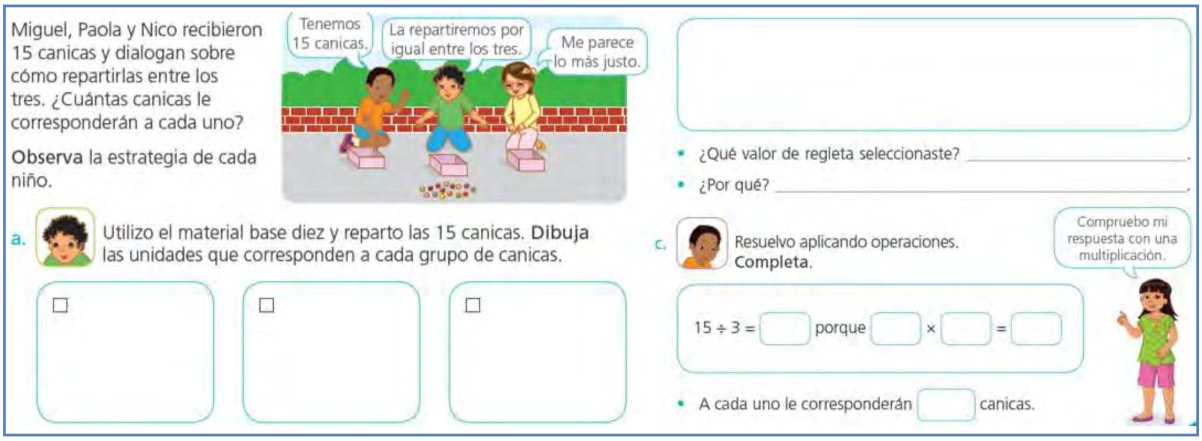
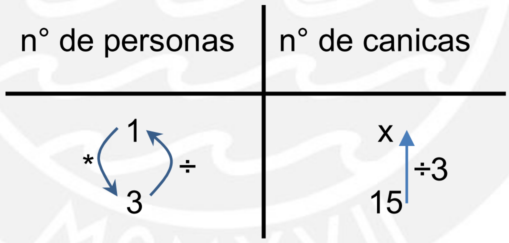


Figura 19: Problema 6 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.95)

Para la solución del problema esta explícito la estrategia del reparto, que consiste en formar grupos que representa a cada persona y en cada grupo se va colocando uno tras uno cada unidad de la regleta hasta que no quede unidad alguna, luego, cuentan cuantas unidades de la regleta hay en cada grupo y dan como respuesta 5 cada uno. Esta estrategia para Ivars y Ceneida (2016), se utiliza en los problemas de isomorfismo de medida del tipo división partitiva, representado en el siguiente esquema.



Por último, en el texto se observa una solución que relaciona dos cantidades de un mismo espacio de medida (1 y 3). Esto implícitamente promueve un razonamiento proporcional relacionado con el modelo multiplicativo Inter. Al respecto como praxeología declaramos lo siguiente:

T_1: Hallar el cuarto valor desconocido en una situación proporcional.

$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y $r \in N$

$\tau_{1,3.}$ Factor escalar unitario inverso

1° paso: Identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para hallar b_1. ($b_2 \div r = b_1$)

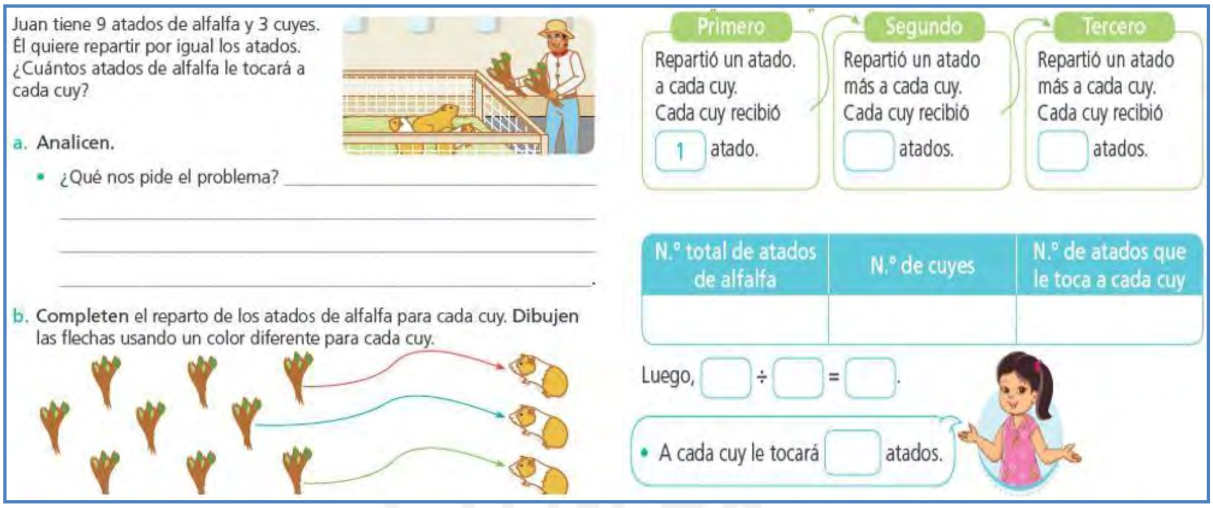
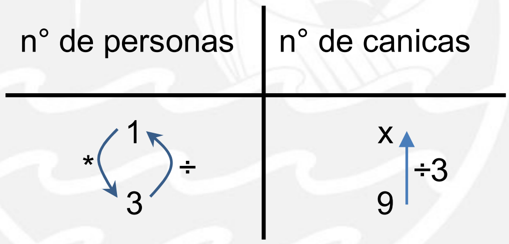


Figura 20: Problema 7 -Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.91)

En el texto está explicito la estrategia de reparto, para Ivars y Ceneida (2016), esta estrategia se utiliza en los problemas de isomorfismo de medida del tipo división partitiva representado en el siguiente esquema



También, en el problema se observa una solución que relaciona dos cantidades homogéneas (1 y 3). Esto sugiere un tránsito por el razonamiento multiplicativo Inter. Respecto a la praxeología declaramos lo siguiente.

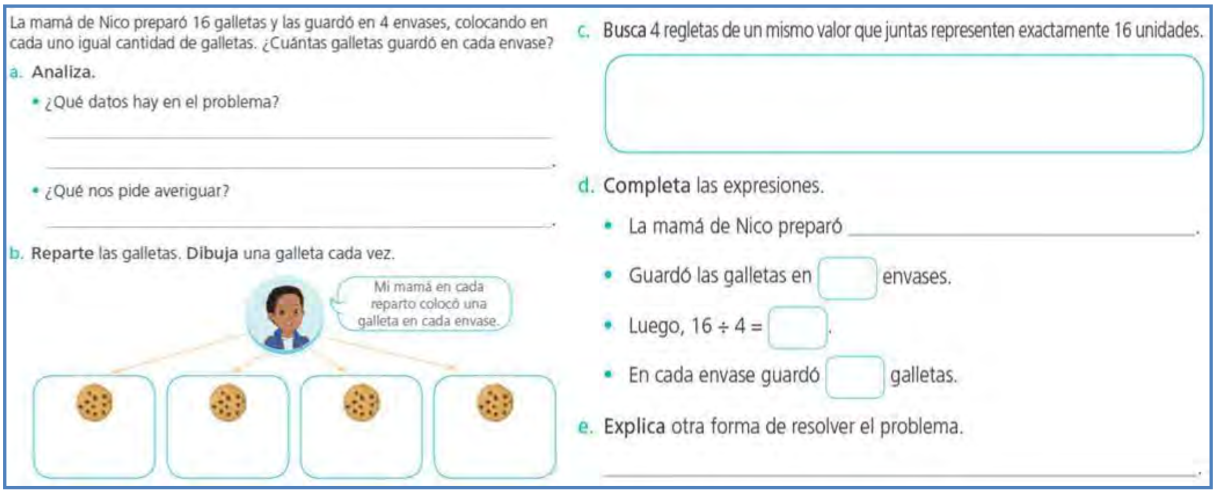
T_1: Hallar el cuarto valor desconocido en una situación proporcional.

$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y $r \in N$

$\tau_{1,3.}$ Factor escalar unitario inverso.

1° paso: Identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para hallar b_1. ($b_2 \div r = b_1$)



La mamá de Nico preparó 16 galletas y las guardó en 4 envases, colocando en cada uno igual cantidad de galletas. ¿Cuántas galletas guardó en cada envase?

a. Analiza.

- ¿Qué datos hay en el problema?
- ¿Qué nos pide averiguar?

b. Reparte las galletas. Dibuja una galleta cada vez.

Mi mamá en cada reparto colocó una galleta en cada envase.

c. Busca 4 regletas de un mismo valor que juntas representen exactamente 16 unidades.

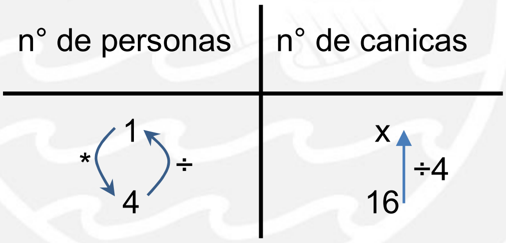
d. Completa las expresiones.

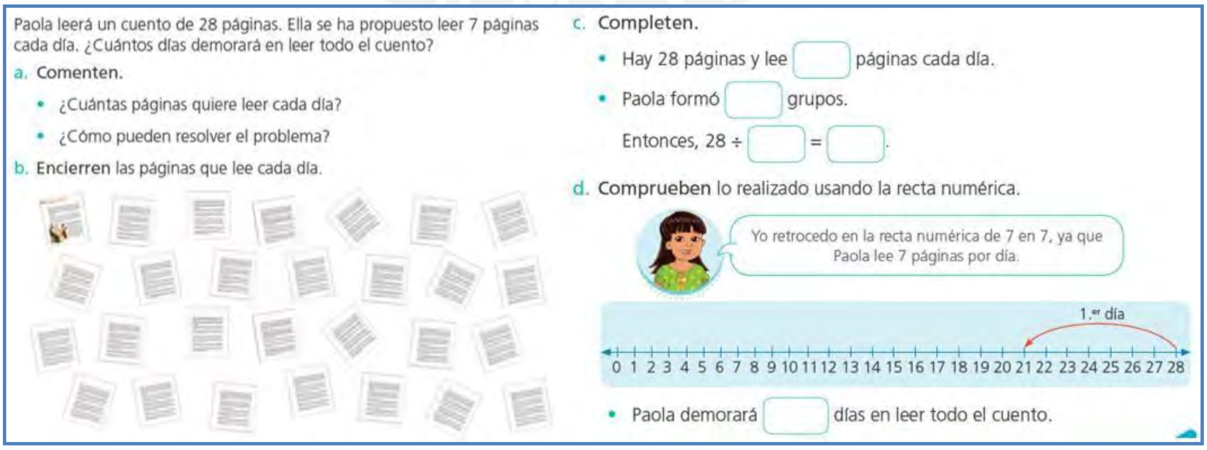
- La mamá de Nico preparó ___.
- Guardó las galletas en ☐ envases.
- Luego, 16 ÷ 4 = ☐.
- En cada envase guardó ☐ galletas.

e. Explica otra forma de resolver el problema.

Figura 21: Problema 8 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.92)

El texto está implícito la estrategia de reparto, utilizado en los problemas de isomorfismo de medida del tipo división partitiva. También se observa una relación entre dos cantidades del mismo espacio de medida que promueve el tránsito por un razonamiento multiplicativo escalar representado en el siguiente esquema. Por lo expuesto la praxeología es la siguiente: T_1, $t_{1,3}$ y $\tau_{1,3}$





Paola leerá un cuento de 28 páginas. Ella se ha propuesto leer 7 páginas cada día. ¿Cuántos días demorará en leer todo el cuento?

a. Comenten.

- ¿Cuántas páginas quiere leer cada día?
- ¿Cómo pueden resolver el problema?

b. Encierren las páginas que lee cada día.

c. Completen.

- Hay 28 páginas y lee ☐ páginas cada día.
- Paola formó ☐ grupos.

Entonces, 28 ÷ ☐ = ☐.

d. Comprueben lo realizado usando la recta numérica.

Yo retrocedo en la recta numérica de 7 en 7, ya que Paola lee 7 páginas por día.

1.er día

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28

- Paola demorará ☐ días en leer todo el cuento.

Figura 22: Problema 9 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.93)

En el texto está implícito calcular un cuarto término. Como estrategia se forma grupos de 7 páginas cada uno, esto permite conocer en cuantos días Paola termina de leer su cuento, que se refleja en la cantidad de grupos formados. Según Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida de división media. También es explícito la solución, que corresponde a la relación de dos cantidades heterogéneas (1 y 7).

n° de cajas	n° de toritos
$1 \xrightarrow{*}$	7
$x \xleftarrow{\div}$	28

Donde "x" representa el total de cajas. Al respecto la praxeología es la siguiente.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$.

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario

1° paso: identificamos el factor funcional (r').

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para halla a_2. ($b_2 \div r' = a_2$).

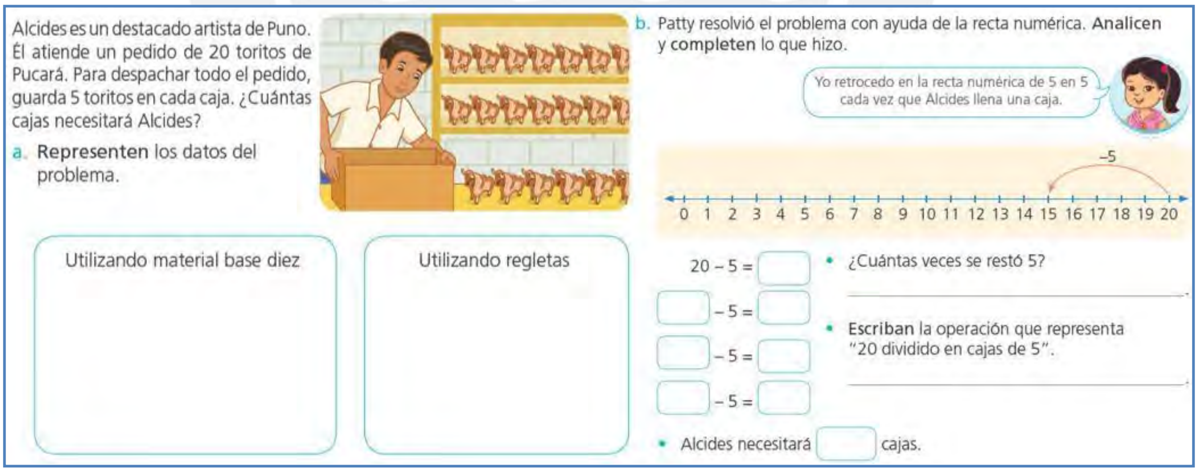


Figura 23: Problema 10 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.96)

En el texto está implícito calcular un cuarto término. Como estrategia se forma grupos de 5 botones cada uno, esto permite conocer el total de camisas, que se refleja en la cantidad de grupos formados. Según Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida de división media. También es explícito la solución, que corresponde a la relación de dos cantidades heterogéneas (1 y 5). Esto promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra.

n° de cajas	n° de toritos
1	5
x	20

Donde “x” representa el total de cajas. Al respecto la praxeología es la siguiente.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r’. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional. (r’)

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para halla a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)

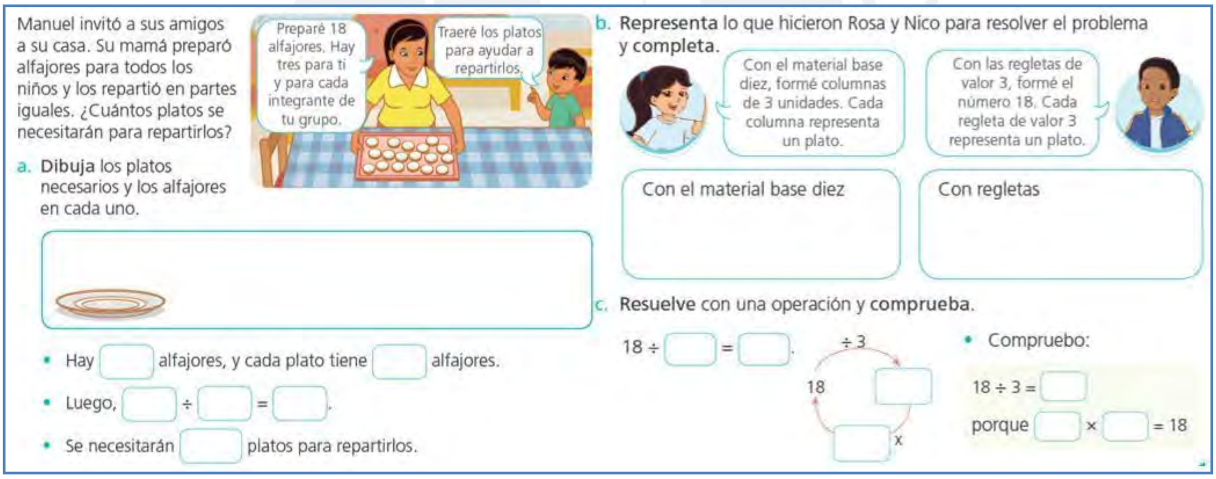


Figura 24: Problema 11 - Cuaderno de trabajo3 (2019, p.97)

Para la solución del problema es explicito el empleo de material concreto (platos) para formar grupo de tres alfajores por cada plato. Esto permite conocer el total de platos que se refleja en la cantidad de grupos formados. Para Vergnaud (1981) este problema corresponde a un isomorfismo de medida con división media, que se puede representar con el siguiente esquema

n° de platos	n° alfajores

$$\begin{array}{c|c} 1 \longrightarrow & 3 \\ x \longleftarrow & 18 \end{array}$$

Donde “x” representa el total de platos. Además, se observa una relación entre cantidades heterogéneas que promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra. Por lo expuesto declaramos la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el término desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r’. Hallar a_2, de modo que (1, r’) $\sim$ (a_2, b_2), donde a_2, b_2 y r’ $\in$ N

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional. (r’)

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)

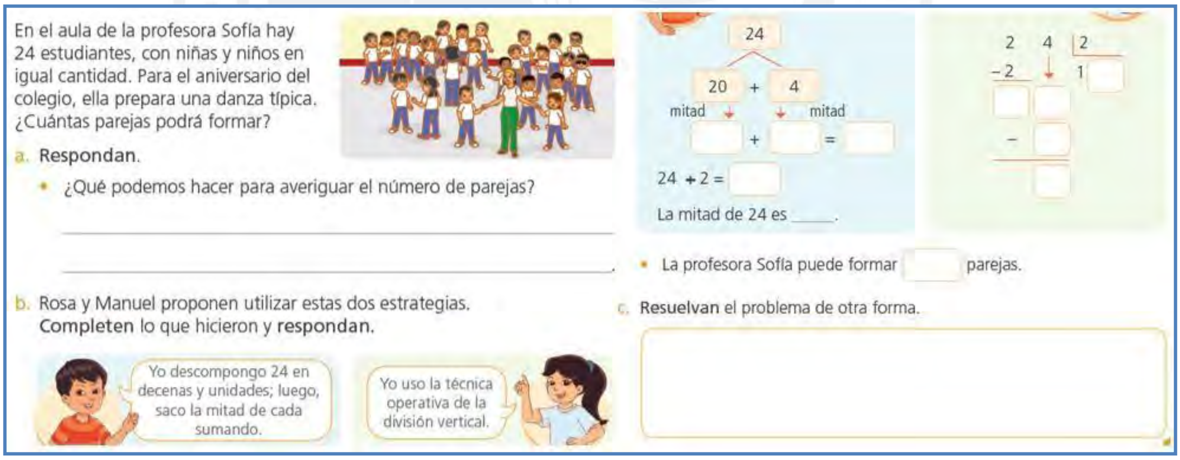


Figura 25: Problema 12 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.111)

En el problema se observa una relación entre cantidades heterogéneas que promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra. Por lo expuesto declaramos la siguiente praxeología. Para Vergnud (1981) por las características de las cantidades que intervienen, el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división media que se representa con el siguiente esquema.

n° de parejas	n° de personas
1	2
x	24

Donde “x” representa el total de parejas. Por lo expuesto declaramos la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r’. Hallar a_2, de modo que (1, r’) $\sim$ (a_2, b_2), donde a_2, b_2 y r’ $\in$ N

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor. (r’)

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)

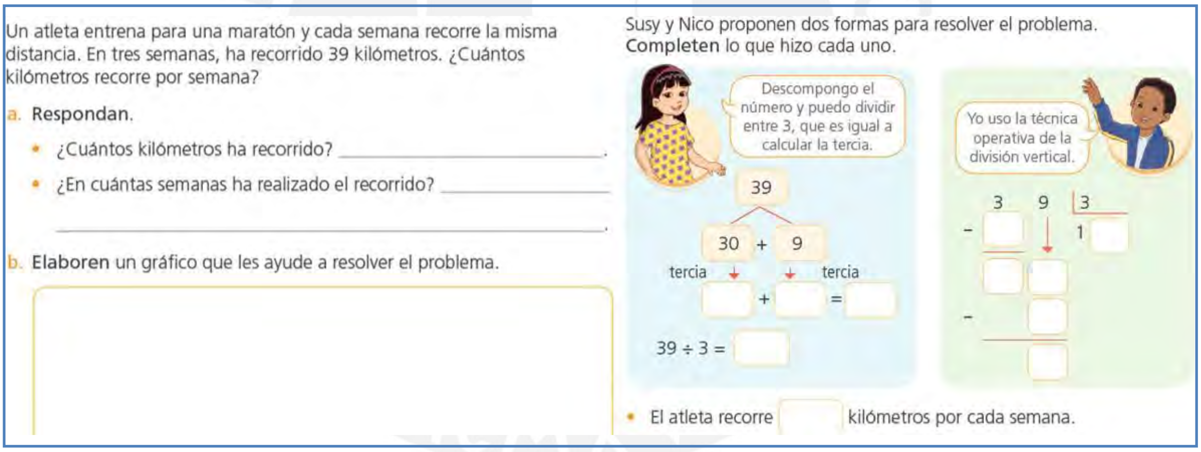


Figura 26: Problema 13 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.112)

En el problema está implícito buscar el valor que le corresponde a la unidad, conociendo la relación entre dos cantidades homogéneas. Según Vergnaud (1981) el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división partitiva, que se representa en el siguiente esquema.

n° de semanas	distancia (km)
1 ÷	x ÷ 3

* 3	39

Se observa una relación entre cantidades del mismo espacio de medida que implícitamente promueve el razonamiento proporcional correspondiente al modelo multiplicativo Inter. Como praxeología declaramos lo siguiente.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional.

$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y $r \in N$

$\tau_{1,3}$: factor escalar unitario inverso.

2° paso: Identificamos el factor. (r)

3° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para hallar b_1. ($b_2 \div r = b_1$)

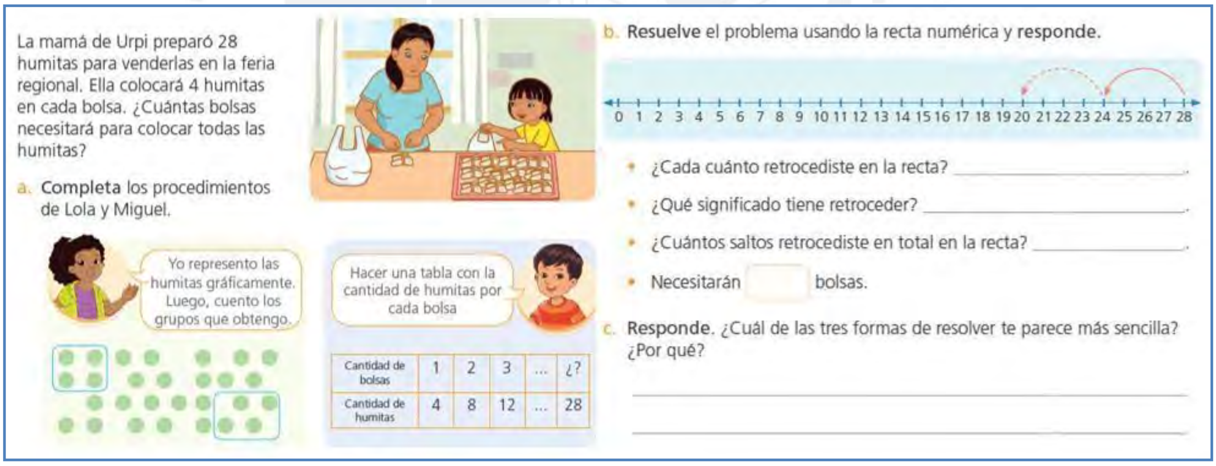


Figura 27: Problema 14 - Cuaderno de trabajo3 (2019, p.113)

En el ítem a) del texto se observa una estrategia de solución que consiste en formar grupos de 4 humitas cada uno y el total de grupos que se forme representa la cantidad de bolsas que se necesita, los ostensivos que emplean son el figural y la tabla. Además, por los datos del problema, según Vergnaud (1981) corresponde a un isomorfismo de medida del tipo División media, que se caracteriza por la relación entre sus cantidades heterogéneas, el cual promueve un tipo de razonamiento proporcional, Según Lamon (1994, citado en Reyes 2016) corresponde al modelo multiplicativo Intra. Por lo expuesto declaramos el T_1, $t_{1,2}$ y $\tau_{1,2}$.

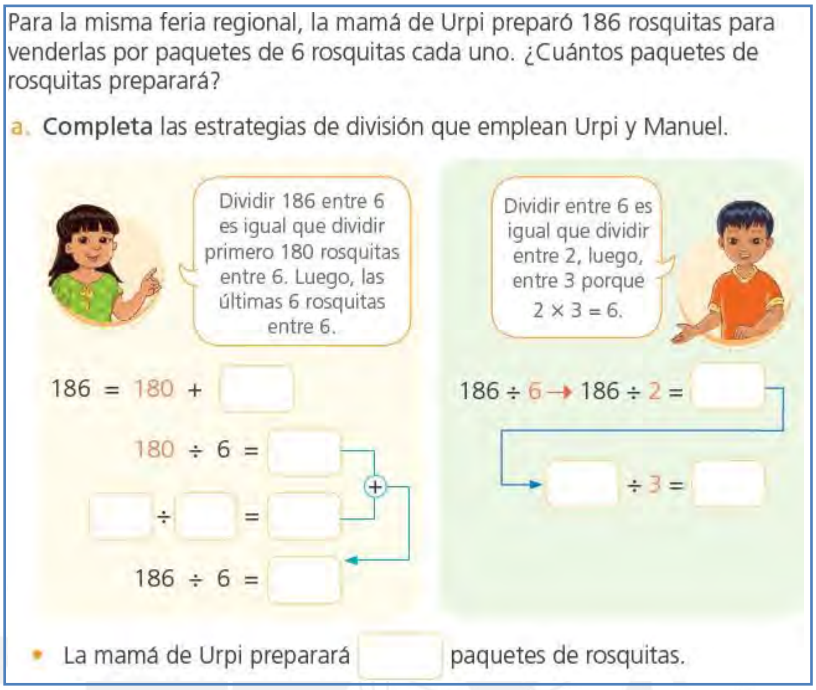
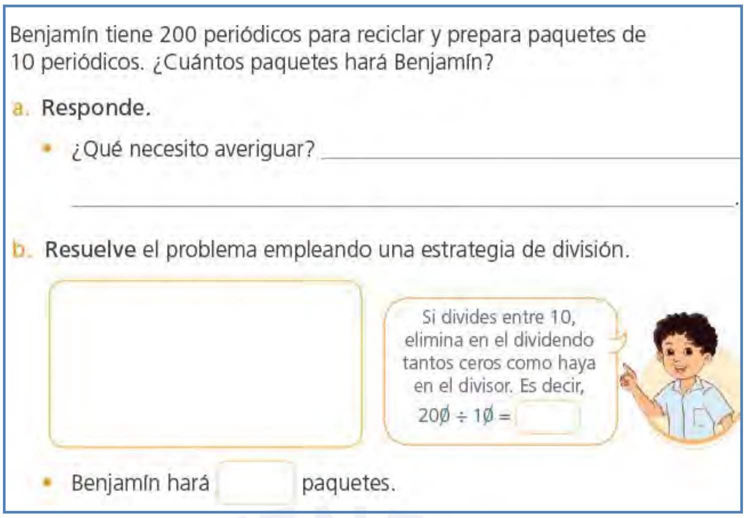


Figura 28: Problema 15 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.114)

En el texto esta, presente de forma implícita la unidad con su correspondiente y la estrategia de solución es la división. Para Vergnaud (1981) existe una relación de proporcionalidad simple entre los datos del problema y la incógnita que pertenece a un isomorfismo de medida del tipo división media. Además, se relacionan dos cantidades que pertenecen a distintos espacios de medida que promueve un razonamiento proporcional relativo al modelo multiplicativo Intra. Por lo expuesto declaramos el T_1, $t_{1,2}$ y $\tau_{1,2}$


Benjamín tiene 200 periódicos para reciclar y prepara paquetes de 10 periódicos. ¿Cuántos paquetes hará Benjamín?

a. **Responde.**

- ¿Qué necesito averiguar? ______________________________

b. **Resuelve** el problema empleando una estrategia de división.

- Benjamín hará ____ paquetes.

Figura 29: Problema 16 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.114)

El problema brinda 3 cantidades como dato, dos explícitos y la unidad como dato implícito, siendo 10 el valor que le corresponde a la unidad y se usa como estrategia la división para calcular un cuarto término. Al respecto para Vergnaud (1981) estas características corresponden a un Isomorfismo de medida del tipo división media que promueve un razonamiento proporcional relacionado al modelo multiplicativo Intra. Por lo expuesto declaramos el T_1, $t_{1,2}$ y $\tau_{1,2}$


En la granja del tío Mario, las vacas producen 120 litros de leche diariamente. Si él recolecta la leche en porongos de 8 litros de capacidad cada uno, ¿cuántos porongos utilizará?

a. **Representen** con un gráfico los datos del problema.

b. **Apliquen** una estrategia para resolver el problema.

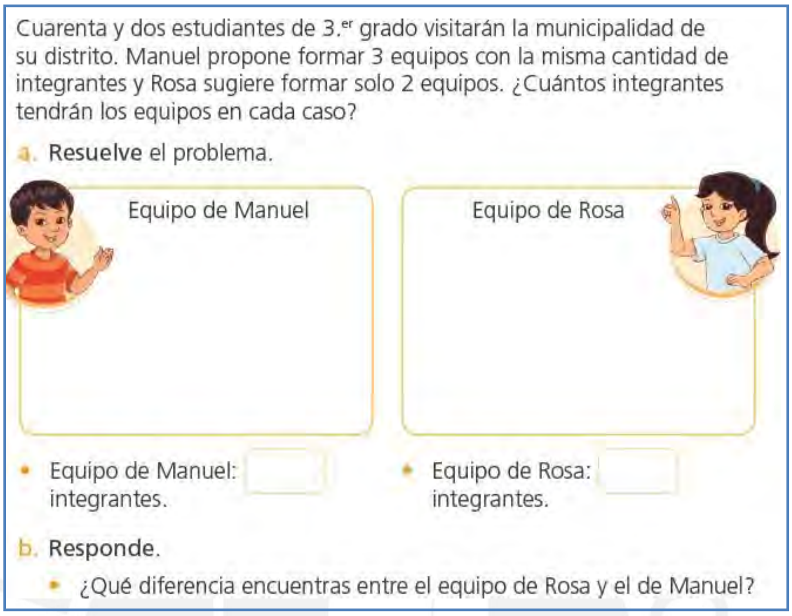
- El tío Mario utilizará ____ porongos.

c. **Completen** las estrategias que usaron Benjamín y Rosa.

d. **Respondan**. ¿Cuál de las estrategias les parece más sencilla? ¿Por qué?

Figura 30: Problema 17 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.115)

Como estrategia de solución se puede formar grupos que contiene 8 L cada uno, luego la respuesta se refleja en el total de grupos que se forma. El texto también brinda como dato la unidad con su correspondiente y nos muestra como estrategia la división entre dos cantidades. Para Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división media, donde es necesario el tránsito por un modelo proporcional multiplicativo Intra para hallar la respuesta. Por lo expuesto declaramos el T_1, $t_{1,2}$ y $\tau_{1,2}$.


Cuarenta y dos estudiantes de 3.er grado visitarán la municipalidad de su distrito. Manuel propone formar 3 equipos con la misma cantidad de integrantes y Rosa sugiere formar solo 2 equipos. ¿Cuántos integrantes tendrán los equipos en cada caso?

a. **Resuelve** el problema.

Equipo de Manuel

Equipo de Rosa

- Equipo de Manuel: integrantes.
- Equipo de Rosa: integrantes.

b. **Responde.**

- ¿Qué diferencia encuentras entre el equipo de Rosa y el de Manuel?

Figura 31: Problema 18 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.116)

El problema presenta una estrategia de solución que consiste en formar grupos, luego distribuir cada estudiante en un grupo y finalmente se cuenta cuantos estudiantes hay en un grupo. Esta estrategia para Ivars y Ceneida (2016), se utiliza en los problemas de isomorfismo de medida del tipo división partitiva, representado en el siguiente esquema.

n° de equipos	n° de estudiantes
1	x
3	42

En el esquema, se observa una relación entre dos cantidades que pertenecen a un mismo espacio de medida. Esto promueve un razonamiento proporcional relacionado al factor escalar. Para Lamon (1994, citado en Reyes 2016) el razonamiento corresponde a un modelo multiplicativo Inter.

T_1: Hallar el cuarto término desconocido en una situación proporcional.

$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y $r \in N$

$\tau_{1,3}$: factor escalar unitario inverso.

1° paso: Identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para hallar b_1. ($b_2 \div r = b_1$)

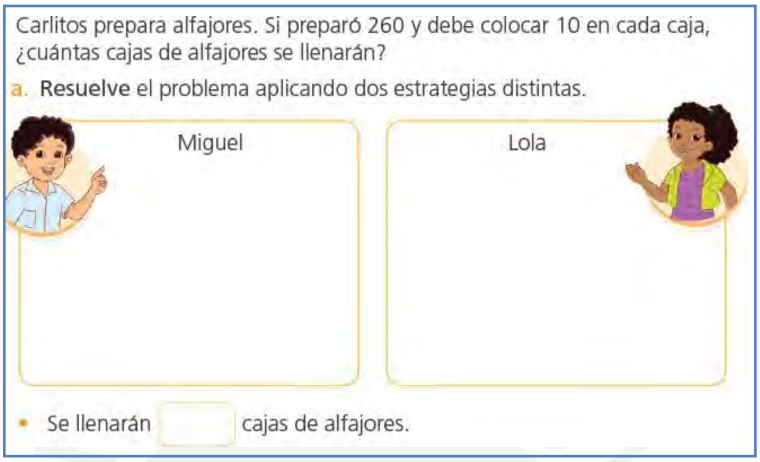


Figura 32: Problema 19 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.116)

El texto presenta un problema sobre división, implícitamente nos dan como dato la unidad y su correspondiente. Para Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división media, representado en el siguiente esquema.

n° de cajas	n° alfajores
1 $\xrightarrow{*}$	10
x $\xleftarrow{\div}$	260

Donde "x" representa el total de cajas. Por otro lado, en la primera fila existe una relación entre sus cantidades que promueve un razonamiento proporcional, según Lamon (1994, citado en Reyes 2016) corresponde al modelo multiplicativo Intra. Respecto a la praxeología

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)

Manuel anotó en una tabla los datos que leyó en su cartilla de control "Niño sano". ¿Qué cambios observan en la masa corporal y la talla de Manuel con relación a su edad?

Edad	Masa corporal (kg)	Talla (cm)
Recién nacido	3	50
3 meses	6	60
6 meses	8	67
9 meses	9	72
12 meses	10	76
15 meses	11	79

a. Respondan.

- ¿La masa corporal y la talla de Manuel aumentan o disminuyen cuando aumenta su edad?

  ____________________.

- ¿Cuál era la masa corporal y la talla de Manuel a los 12 meses?

Figura 33: Problema 20 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.146)

El problema muestra una situación no proporcional que promueve un primer acercamiento al modelo de razonamiento proporcional cualitativo. Se observa que las cantidades de la magnitud masa corporal y talla aumenta conforme aumenta la magnitud edad. Además, las preguntas formuladas están orientadas a observar el comportamiento de las cantidades. Por esto declaramos lo siguiente.

T_2: identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas

$t_{2,1}$: identificar la correlación entre cantidades de dos magnitudes absolutas no proporcionales.

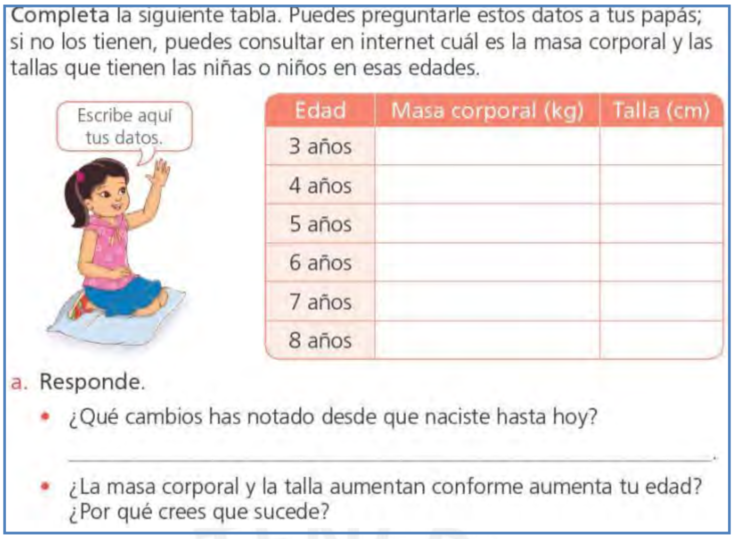
$\tau_{2,1}$: correlación de no proporcionalidad de magnitudes absolutas

1° paso identificar las magnitudes

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos el correspondiente de una cantidad en la otra magnitud

4° paso: identificamos el aumento simultaneo no proporcional de las cantidades


Completa la siguiente tabla. Puedes preguntarle estos datos a tus papás; si no los tienen, puedes consultar en internet cuál es la masa corporal y las tallas que tienen las niñas o niños en esas edades.

Edad	Masa corporal (kg)	Talla (cm)
3 años		
4 años		
5 años		
6 años		
7 años		
8 años		

a. Responde.

- ¿Qué cambios has notado desde que naciste hasta hoy?
- ¿La masa corporal y la talla aumentan conforme aumenta tu edad? ¿Por qué crees que sucede?

Figura 34: Problema 21 - Cuaderno de trabajo 3 (2019, p.146)

En el texto está implícito una relación de cantidades correspondiente a magnitudes no proporcionales que promueve un primer acercamiento al modelo de razonamiento proporcional cualitativo. Según Reyes (2016), es lógico e intuitivo. Al respecto declaramos la siguiente praxeología T_2, $t_{2,1}$ y $\tau_{2,1}$.

A continuación, en la tabla 18, mostramos el resumen de los tipos de tarea y su cantidad de tareas, técnicas y tecnologías. Así también su ubicación en el cuaderno de trabajo de matemática 3 (2019)

Tabla 18: Praxeología encontrada en el cuaderno de trabajo 3

Tipo de tarea (T)	Tarea (**t**)	Técnica (τ)	Tecnología (θ)	Preg
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad	$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que (1, r') $\sim$ (a_2, b_2), donde a_2, b_2 y r' ∈ N	$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario	θ_5: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i es la imagen de u_i por f, es decir: hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$	1, 2, 3
	$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que (1, r') $\sim$ (a_2, b_2), donde a_2, b_2 y r' ∈ N	$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario	θ_6: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i es la imagen de u_i por f, es decir hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $u_i = v_i \div r'$	4, 5, 9, 10, 12, 14, 15, 17,19
	$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que [1, r] $\sim$ [b_1, b_2], donde b_1, b_2 y r ∈ N	$\tau_{1,3.}$ Factor escalar unitario inverso	θ_4: para todo *i*, *j* de **I,** si $u_j = nu_i$, entonces, $\exists v_j / \frac{v_i}{n} = v_i, n \in \mathbb{N}$	6, 7, 8, 13, 18
T_2: Identificar la	$t_{2,1}$: identificar la correlación entre cantidades de dos	$\tau_{2,1}$: correlación de no	$\theta 5$: Dos magnitudes X y Y tienen una correlación directa, cuando para todo	20, 21

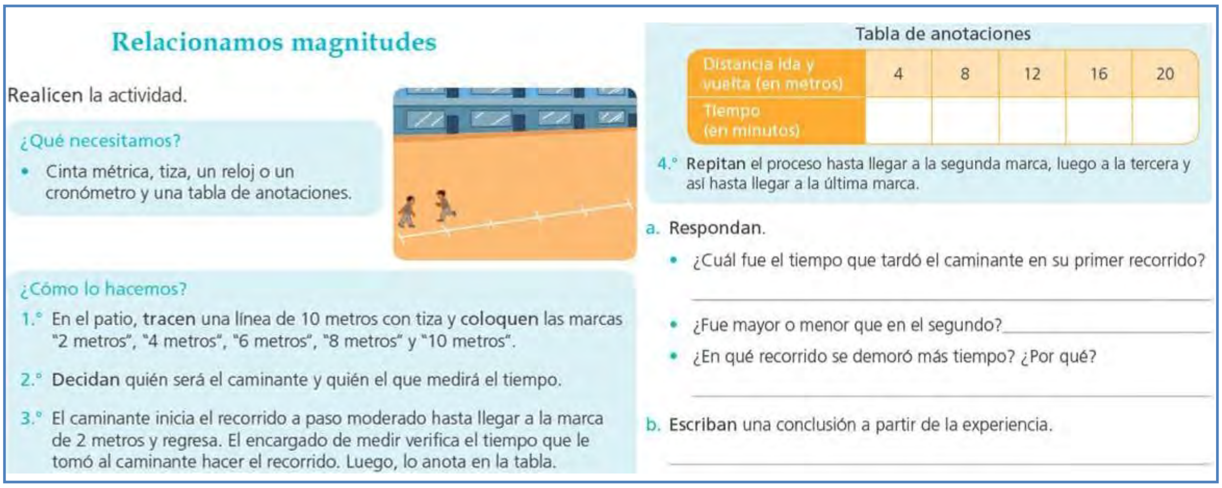
correlación entre cantidades de magnitudes absolutas	magnitudes absolutas no proporcionales	proporcionalidad para magnitudes absolutas	x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_i < y_j$. De manera similar, se establece que tienen correlación inversa, si para todo x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_j < y_i$.	
2 tipos	4 tareas	4 técnicas	5 tecnologías	

Fuente: elaboración propia

En la tabla anterior se puede apreciar que la organización matemática del cuaderno de trabajo de 3º grado de primaria (2019) presenta dos tipos de tarea (T_1 y T_2) y casi la totalidad de los problemas resueltos (19 en total) corresponden a los tipos de tarea (T_1) que exige hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad y solo dos problemas corresponden al tipo (T_2). Al respecto se puede intuir que la tarea correspondiente al tipo T_2 no se potencializa en el cuaderno de trabajo.

Por otro lado, en T_1 encontramos tres tareas ($t_{1,1,1}$, $t_{1,2}$ y $t_{1,3}$) siendo la tarea ($t_{1,2}$) la que mayor presencia tiene en los problemas resueltos. También las magnitudes presentes en las tareas mencionadas son del tipo discreto a excepción de 3 problemas (figura 16, 26 y 30) que presentan magnitudes continuas, sin embargo, sus cantidades correspondientes son números enteros. Además, en el tipo de tarea (T_2) encontramos la tarea ($t_{2,1}$), que permite describir la relación entre dos magnitudes no proporcionales. Asimismo, las tareas relacionadas a T_1 promueven un razonamiento proporcional multiplicativo (inter e intra). En este sentido Reyes (2016) expresa lo siguiente “Por tanto, de este análisis […], nos encontramos con un ***razonamiento aditivo***, que precede al *razonamiento multiplicativo escalar*, el cual, se asume ser menos complejo que el *razonamiento multiplicativo funcional*” (p.167). Al respecto en la sección de resultados proponemos una organización de las tareas presente en el texto analizado, para esto consideramos establecer la relación existente entre sus respectivas técnicas y lo expresado por Reyes (2016)

5.2.2 Cuaderno de trabajo – Matemática 4



Relacionamos magnitudes

Realicen la actividad.

¿Qué necesitamos?

- Cinta métrica, tiza, un reloj o un cronómetro y una tabla de anotaciones.

¿Cómo lo hacemos?

1.° En el patio, **tracen** una línea de 10 metros con tiza y **coloquen** las marcas "2 metros", "4 metros", "6 metros", "8 metros" y "10 metros".

2.° **Decidan** quién será el caminante y quién el que medirá el tiempo.

3.° El caminante inicia el recorrido a paso moderado hasta llegar a la marca de 2 metros y regresa. El encargado de medir verifica el tiempo que le tomó al caminante hacer el recorrido. Luego, lo anota en la tabla.

Tabla de anotaciones

Distancia ida y vuelta (en metros)	4	8	12	16	20
Tiempo (en minutos)					

4.° **Repitan** el proceso hasta llegar a la segunda marca, luego a la tercera y así hasta llegar a la última marca.

a. **Respondan.**

- ¿Cuál fue el tiempo que tardó el caminante en su primer recorrido? ____
- ¿Fue mayor o menor que en el segundo? ____
- ¿En qué recorrido se demoró más tiempo? ¿Por qué? ____

b. **Escriban** una conclusión a partir de la experiencia. ____

Figura 35: Problema 1 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.95)

El problema plantea una estrategia que promueve el uso de conocimientos a priori como recursos para construir nuevos saberes. En este caso la relación entre magnitudes, mediante un registro tabular representado en una tabla con dos magnitudes. Por otro lado, las preguntas del texto propicia un acercamiento al primer modelo de razonamiento proporcional cualitativo. Según Reyes (2016) es lógico e intuitivo.

T_2: Identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas

$t_{2,2}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes proporcionales absolutas.

$\tau_{2,2}$: correlación de proporcionalidad de magnitudes absolutas

1° paso: identificamos las magnitudes que se relacionan.

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes absolutas relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos la relación de cambio entre dos magnitudes justificado en el primero modelo de razonamiento cualitativo proporcional

La familia de Manuel se va de viaje de Lima a Huaraz. Ellos viajan en automóvil manteniendo una velocidad de 60 km por hora. ¿Qué ocurre con la distancia recorrida y las horas de viaje?

a. **Respondan.**

- ¿Cuál es la velocidad del automóvil? ______________
- ¿Qué se quiere averiguar? ______________

b. **Registren** la distancia según el tiempo transcurrido y **respondan**.

Tiempo de viaje (en horas)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (en kilómetros)	0	60	120	180			

- ¿Cuántos kilómetros recorrieron en una hora? ______________
- ¿Cuántos kilómetros recorrieron durante las 4 primeras horas de viaje? ______________
- Después de 4 horas de recorrido, ¿más cerca de qué ciudad se encontrarán? ______________
- ¿En cuántas horas estarán cerca de la ciudad de Huaraz? ______________
- ¿Qué ocurre con la distancia recorrida y las horas de viaje? ______________

c. **Completen** con las palabras mayor o menor.

- A mayor tiempo de viaje, __________ es la distancia recorrida.
- A __________ tiempo de viaje, __________ es la distancia recorrida.

Figura 36: Problema 2 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.96)

El texto se observa tres ítems a, b y c. Respecto al ítem (a) las respuestas están explicitas en el texto. En el ítem (b) se observa dos preguntas que corresponden a distintas tareas y que llamaremos ítem b_1 y b_2 y lo editamos del modo siguiente:

Ítem b_1: ¿Cuántos kilometros recorrieron durante las cuatro primeras horas de viaje?

Se pide calcular el cuarto término y está explicito la tabla de proporcionalidad como ostensivo donde se debe registrar la distancia según el tiempo transcurrido. Esto sugiere un análisis del tipo escalar y promueve en palabras de Ryes (2016) un modelo de razonamiento multiplicativo Inter.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,4,1}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, y $r \in N$

$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario

1° paso: identificamos el factor escalar entre las dos cantidades. (r)

2° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_2=b_1.r$)

Ítem b_2: ¿Qué ocurre con la distancia y las horas de viaje?

El texto sugiere analizar el comportamiento al relacionar dos magnitudes que tiene como ostensivo la tabla de proporcionalidad. Por otro lado, las preguntas del texto propicia un acercamiento al primer modelo discursivo de García (2005) que se caracteriza por su convención social.

T_2: Identificar la correlación entre cantidades de magntudes absolutas.

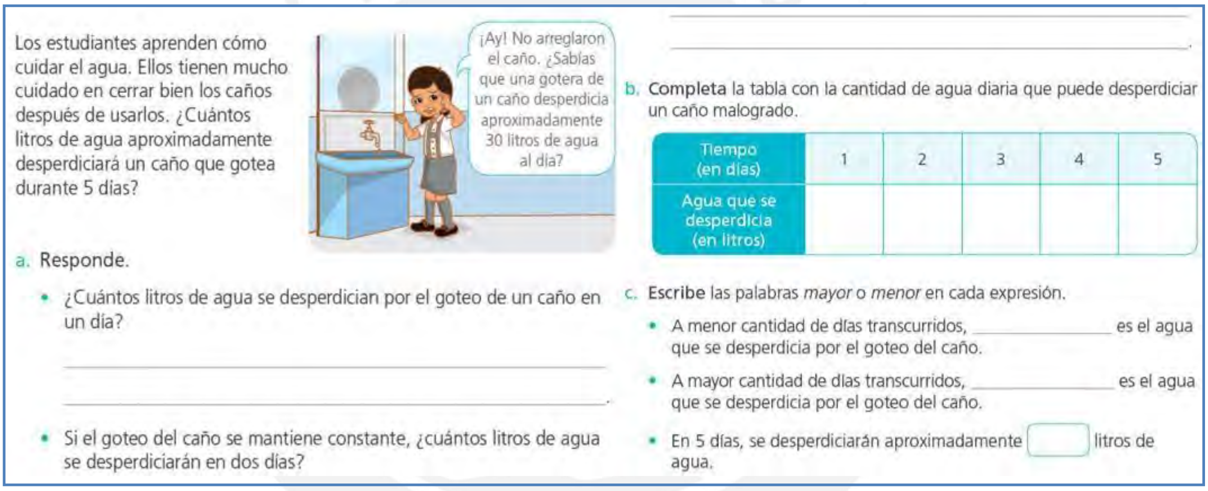
$t_{2,2}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes proporcionales absolutas.

$\tau_{2,2}$: correlación de proporcionalidad de magnitudes absolutas

1° paso: identificamos las magnitudes que se relacionan.

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos la covariación entre las dos magnitudes absolutas, justificado en el modelo de razonamiento cualitativo proporcional.



Los estudiantes aprenden cómo cuidar el agua. Ellos tienen mucho cuidado en cerrar bien los caños después de usarlos. ¿Cuántos litros de agua aproximadamente desperdiciará un caño que gotea durante 5 días?

a. Responde.

- ¿Cuántos litros de agua se desperdician por el goteo de un caño en un día?
- Si el goteo del caño se mantiene constante, ¿cuántos litros de agua se desperdiciarán en dos días?

b. **Completa** la tabla con la cantidad de agua diaria que puede desperdiciar un caño malogrado.

Tiempo (en días)	1	2	3	4	5
Agua que se desperdicia (en litros)					

c. **Escribe** las palabras *mayor* o *menor* en cada expresión.

- A menor cantidad de días transcurridos, ______ es el agua que se desperdicia por el goteo del caño.
- A mayor cantidad de días transcurridos, ______ es el agua que se desperdicia por el goteo del caño.
- En 5 días, se desperdiciarán aproximadamente ☐ litros de agua.

Figura 37: Problema 3 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.97)

El problema se genera desde un contexto real. Se considera como intención consolidar la noción de proporcionalidad. En el texto se pide calcular un cuarto término y esta explicito la tabla de proporcionalidad como ostensivo. Esto promueve una solución que corresponde al factor multiplicativo funcional, en palabra de Reyes (2016), un razonamiento proporcional intra. Además, según Floriani (2004), es un problema del tipo unitario diferente unidad y según Cubillos (2017) es un problema de dificultad baja.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. ($r'.a_2=b_2$)

Juana vende papayas en el mercado. Cada kilogramo de papaya cuesta S/ 4 soles. José fue al mercado y compró el lunes 3 kg y el viernes 12 kg. ¿Cuánto pagó José?

a. **Responde**. ¿Qué datos hay en el problema?

______________________________________.

b. Juana elabora una tabla para calcular el precio de sus ventas. **Complétala**.

Papaya (kilogramo)	1	2	3	4	5	6	12	15	20
Costo (S/)	4								

- José pagó el lunes S/ ☐ y el viernes S/ ☐.

Figura 38: Problema 4 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.98)

Al igual que el problema anterior este problema presenta una solución que promueve el razonamiento multiplicativo intra. Así mismo, según Floriani (2004), es un problema del tipo unitario diferente unidad y según Cubillos (2017) es un problema de dificultad baja.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r'. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

3° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. ($r'.a_2=b_2$)

Ruperto vende una docena de flores a S/ 6. ¿Cuántas docenas de flores podrá comprar Rosa con S/ 30?

a. Responde.

- ¿De qué trata el problema?

____

- ¿Qué me piden averiguar?

____

b. **Elabora** una tabla para resolver el problema.

- Rosa podrá comprar ☐ docenas de flores.

Figura 39: Problema 5 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.98)

El texto pide hallar un cuarto término y considera como ostensivo la tabla de proporcionalidad. Como dato nos dan la unidad y su correspondiente. Al respecto, Según Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida de división media que se caracteriza por promover un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra, representado en la figura 39.

n° de docenas	1	2	3	4	5
	x6	x6	x6	x6	÷6
Costo (S/)	6	12	18	24	30

Figura 40: Tabla proporcional que promueve el modelo multiplicativo intra

Fuente: Elaboración propia

Asi mismo, según Cúbillos (2017), el problema es de dificultad baja. Por lo expuesto presentamos la siguiente praxeología.

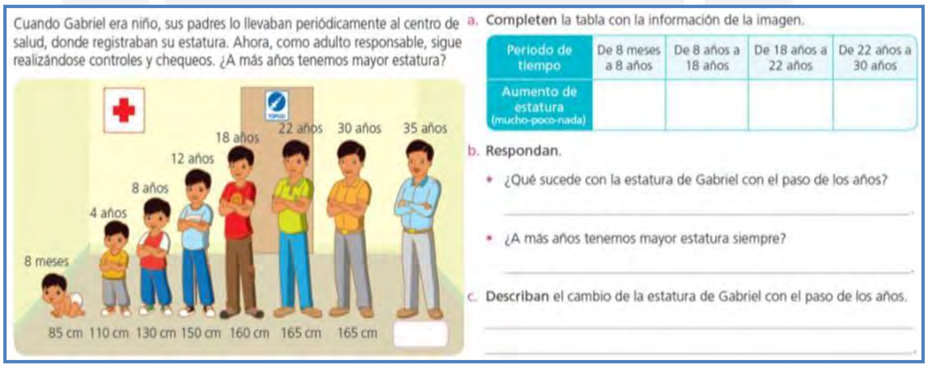
T_1: Hallar el término desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,2}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)


Cuando Gabriel era niño, sus padres lo llevaban periódicamente al centro de salud, donde registraban su estatura. Ahora, como adulto responsable, sigue realizándose controles y chequeos. ¿A más años tenemos mayor estatura?

a. **Completen** la tabla con la información de la imagen.

Periodo de tiempo	De 8 meses a 8 años	De 8 años a 18 años	De 18 años a 22 años	De 22 años a 30 años
Aumento de estatura (mucho-poco-nada)				

b. **Respondan.**

- ¿Qué sucede con la estatura de Gabriel con el paso de los años?
- ¿A más años tenemos mayor estatura siempre?

c. **Describan** el cambio de la estatura de Gabriel con el paso de los años.

Figura 41: Problema 6 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.77)

En el texto intervienen dos magnitudes, la edad con la estatura y es claro que no es un problema proporcional, sin embargo, permite una primera aproximación a la proporcionalidad.

Observamos que las cantidades correspondientes a la magnitud Edad va en aumento, mientras que la cantidad relativa a la estatura lo hace hasta una determinada cantidad de años. También las preguntas del ítem b y c están orientadas a reflexionar sobre la relación entre las cantidades. Por esto formulamos la siguiente praxeología.

T_2: identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas

$t_{2,1}$: identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes absolutas no proporcionales

$\tau_{2,1}$: correlción de no proporcionalidad de magnitudes absolutas

1° paso identificar las magnitudes

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos el correspondiente de una cantidad en la otra magnitud

4° paso: identificar el aumento simultáneo no proporcional de las cantidades

Nicolasa prepara galletas de quinua para venderlas en el mercado. Si en 10 minutos ella hornea 30 galletas, ¿cuántas galletas horneará en 60 minutos?

a. **Completen** las expresiones.

- En 10 minutos, hornea ___ galletas.
- En 40 minutos, horneará ___ galletas.
- En 60 minutos, horneará ___ galletas.

Tiempo	Cantidad de galletas horneadas
10 minutos	30
20 minutos	60
30 minutos	
40 minutos	
50 minutos	
60 minutos	

Figura 42: Problema 7 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.78)

En el texto se observa una multiplicidad entre las cantidades de la magnitud tiempo. Esto promueve un razonamiento multiplicativo del tipo Inter y sugiere una solución justificado en el modelo discursivo de García (2005).

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

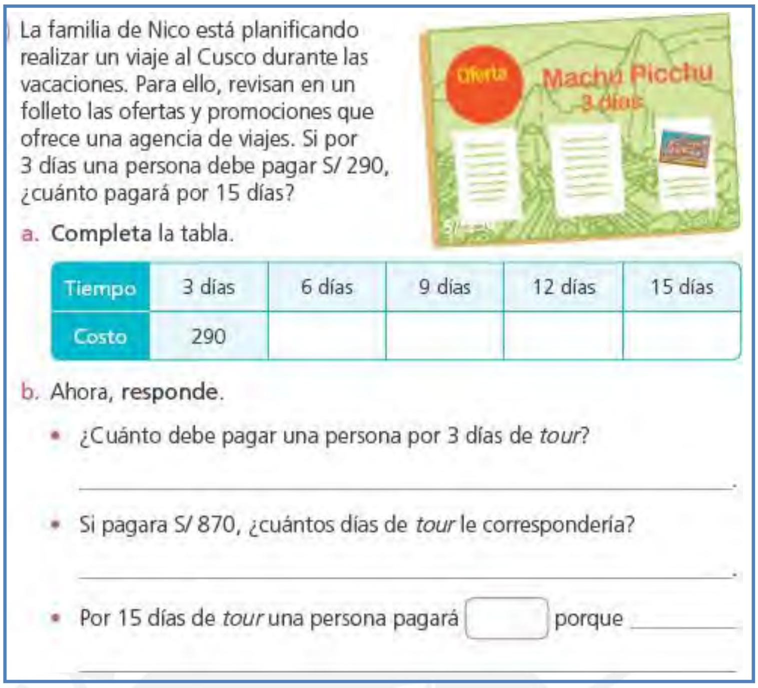
$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos el mismo aumento en b_1 para hallar b_2



La familia de Nico está planificando realizar un viaje al Cusco durante las vacaciones. Para ello, revisan en un folleto las ofertas y promociones que ofrece una agencia de viajes. Si por 3 días una persona debe pagar S/ 290, ¿cuánto pagará por 15 días?

a. Completa la tabla.

Tiempo	3 días	6 días	9 días	12 días	15 días
Costo	290				

b. Ahora, responde.

- ¿Cuánto debe pagar una persona por 3 días de *tour*?
- Si pagara S/ 870, ¿cuántos días de *tour* le correspondería?
- Por 15 días de *tour* una persona pagará ☐ porque

Figura 43: Problema 8 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.78)

En el texto se observa la multiplicidad entre las cantidades de la magnitud tiempo, que sugiere trabajar una estrategia promovido desde una perspectiva escalar donde se usa las relaciones internas con la técnica $\tau_{1,5}$. Aunque también es posible generar una estrategia de solución relativo al factor funcional. En este caso se sugiere la conservación de las razones internas. Al respecto Amaro (2017) manifiesta.

> Este procedimiento, basado en la propiedad según la cual las razones internas se conservan puede ser accesible e intuitivo en ciertos casos (cuando la razón interna corresponde a un número de veces entero y pequeño): la mitad, el doble, 10 veces. Pero cuando la razón interna no se puede expresar mediante un número sencillo y, sobre todo, cuando no se puede expresar mediante un número entero, este procedimiento se dificulta. (p.18)

Por lo tanto, la solución se justifica mediante el modelo discursivo de García (2005) y promueve un tipo de razonamiento multiplicativo Inter. Por lo expuesto se considera la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo.

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos el mismo aumento en b_1 para hallar b_2

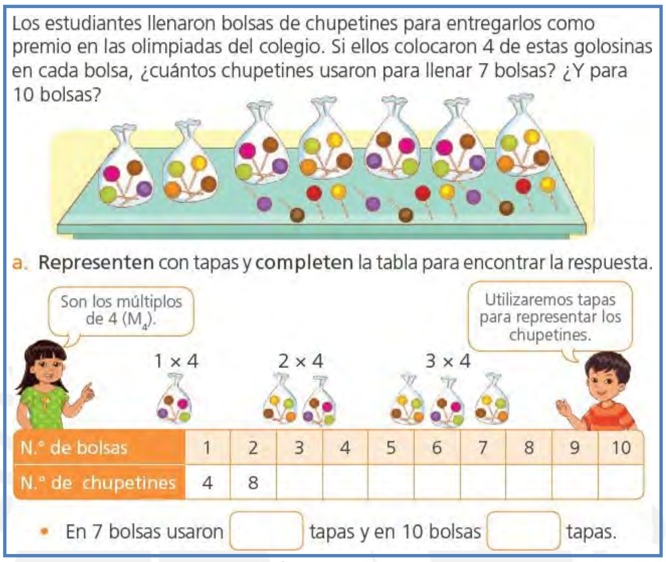


Figura 44: Problema 9 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.37)

En la tabla se observa una relación entre la cantidad de bolsa y el número de chupetines, siendo 4 un factor funcional constante que promueve el razonamiento multiplicativo Intra. Para Vergnaud (1981) el problema es un isomorfismo de medida del tipo multiplicativo

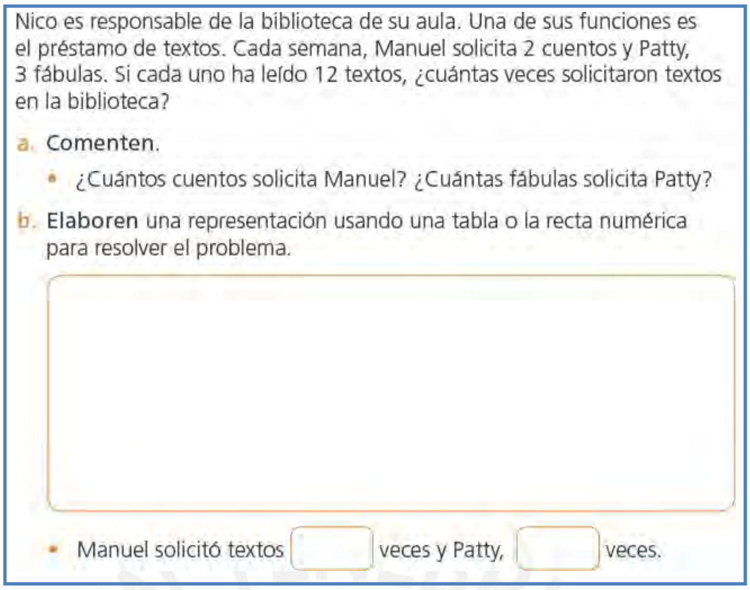
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. ($r'.a_2=b_2$)


Nico es responsable de la biblioteca de su aula. Una de sus funciones es el préstamo de textos. Cada semana, Manuel solicita 2 cuentos y Patty, 3 fábulas. Si cada uno ha leído 12 textos, ¿cuántas veces solicitaron textos en la biblioteca?

a. **Comenten.**

- ¿Cuántos cuentos solicita Manuel? ¿Cuántas fábulas solicita Patty?

b. **Elaboren** una representación usando una tabla o la recta numérica para resolver el problema.

- Manuel solicitó textos ___ veces y Patty, ___ veces.

Figura 45: Problema 10 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.38)

En el problema se observa una relación entre cantidades heterogéneas que promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra. Para Vergnud (1981) por las características de las cantidades que intervienen, el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división media que se representa con el siguiente esquema.

n° de parejas	n° de personas
1 $\xrightarrow{*}$	2
x	$\xleftarrow{\div}$ 12

Donde “x” representa el total de parejas. Por lo expuesto declaramos la siguiente praxeología.

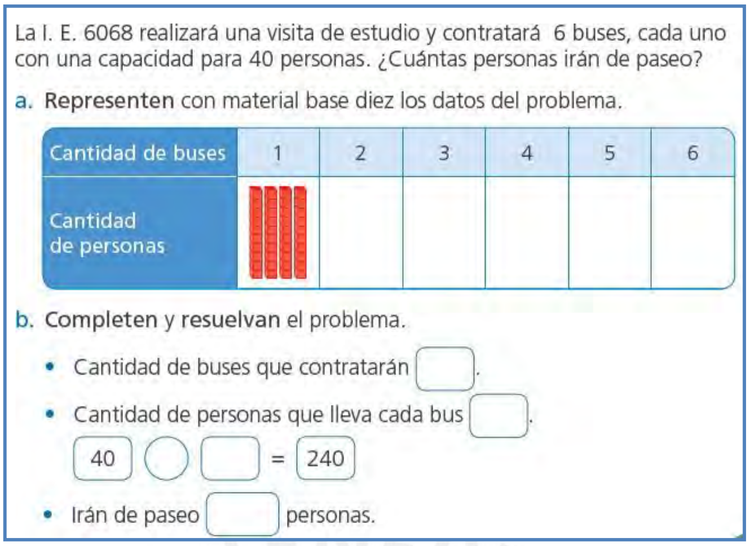
T_1: Hallar el término desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r’. Hallar a_2, de modo que (1, r’) $\sim$ (a_2, b_2), donde a_2, b_2 y r’ $\in$ N

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r’)

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)



La I. E. 6068 realizará una visita de estudio y contratará 6 buses, cada uno con una capacidad para 40 personas. ¿Cuántas personas irán de paseo?

a. **Representen** con material base diez los datos del problema.

Cantidad de buses	1	2	3	4	5	6
Cantidad de personas						

b. **Completen y resuelvan** el problema.

- Cantidad de buses que contratarán ☐.
- Cantidad de personas que lleva cada bus ☐.

40 ○ ☐ = 240

- Irán de paseo ☐ personas.

Figura 46: Problema 11 - Cuaderno de trabajo 4 (2019. 47)

La estrategia que presenta el texto como solución genera que la cantidad de personas representado por 4 decenas se multiplique por la cantidad de buses, es decir, las decenas aumente 6 veces. Esto promueve un razonamiento proporcional relacionado al factor escalar un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Inter. Para Lamon (1994, citado en Reyes 2016) el razonamiento corresponde a un modelo multiplicativo Inter y Para Vergnaud (1981) el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo multiplicativo, reflejado en el siguiente esquema.

	cantidad de buses	cantidad de personas	
x6	1	40	x6
	6	x	

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,4,1}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, y $r \in N$

$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario

1° paso: identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_1.r = b_2$)

Figura 47: Problema 12 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.48)

El ítem (b) del texto muestra una relación entre dos magnitudes de diferentes espacios de medida, que promueve un razonamiento multiplicativo Intra. También para Cubillos (2017) el problema presenta una dificultad baja. Por último, para Vergnaud (1981) el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo multiplicativo que representa en el siguiente esquema.

n° de sombrilla	Precio total
1 →	24
250 →	x

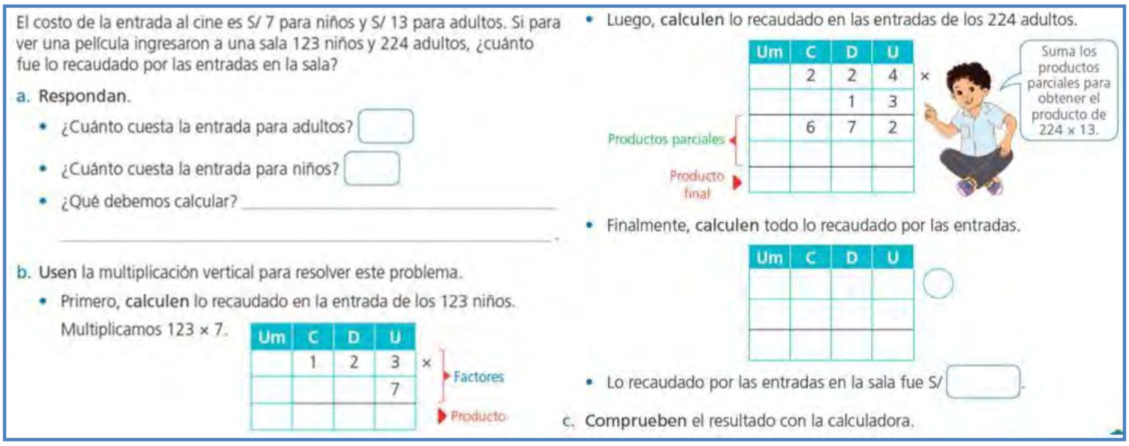
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional (r’).

2° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2 ($r'.a_2=b_2$).


El costo de la entrada al cine es S/ 7 para niños y S/ 13 para adultos. Si para ver una película ingresaron a una sala 123 niños y 224 adultos, ¿cuánto fue lo recaudado por las entradas en la sala?

a. Respondan.

- ¿Cuánto cuesta la entrada para adultos?
- ¿Cuánto cuesta la entrada para niños?
- ¿Qué debemos calcular?

b. Usen la multiplicación vertical para resolver este problema.

- Primero, calculen lo recaudado en la entrada de los 123 niños.

Multiplicamos 123 × 7.

Um	C	D	U	
	1	2	3	×
			7	

Factores

Producto

- Luego, calculen lo recaudado en las entradas de los 224 adultos.

Um	C	D	U	
	2	2	4	×
		1	3	
	6	7	2	

Productos parciales

Producto final

Suma los productos parciales para obtener el producto de 224 × 13.

- Finalmente, calculen todo lo recaudado por las entradas.

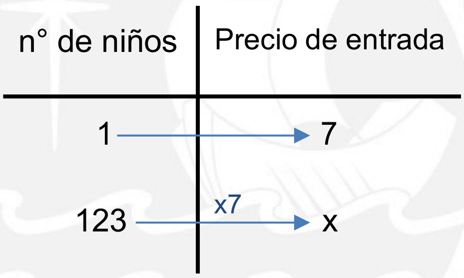
Um	C	D	U

- Lo recaudado por las entradas en la sala fue S/

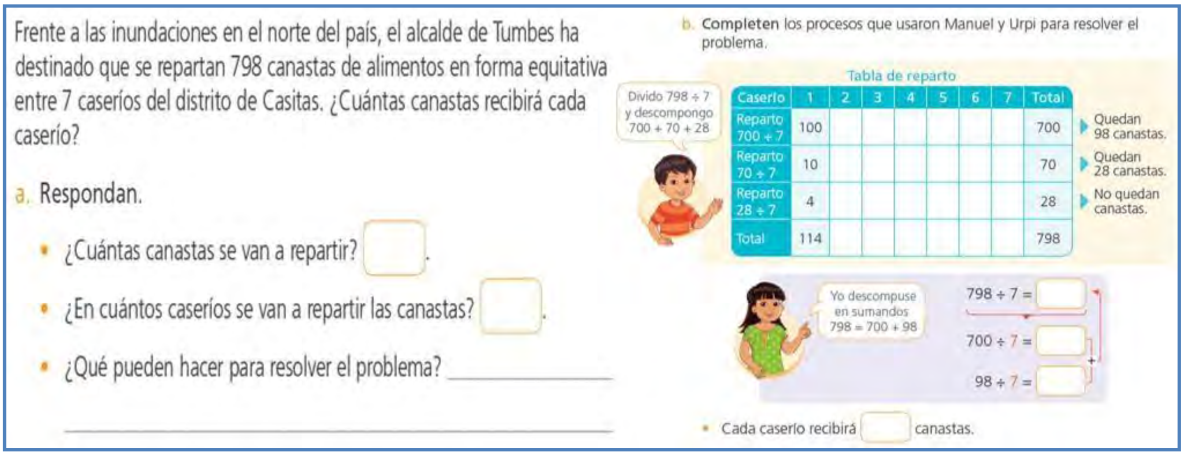
c. Comprueben el resultado con la calculadora.

Figura 48: Problema 13 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.51)

En el problema está explícito hallar el cuarto término y la solución del ítem (b) promueve un razonamiento del tipo multiplicativo Intra que se representa en el siguiente esquema.



Para Vergnaud (1981) el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo multiplicativo y para cubillas (2017) presenta una dificultad baja. Por lo expuesto consideramos la siguiente praxeología: T_1, $t_{1,1,1}$ y $\tau_{1,1}$


Frente a las inundaciones en el norte del país, el alcalde de Tumbes ha destinado que se repartan 798 canastas de alimentos en forma equitativa entre 7 caseríos del distrito de Casitas. ¿Cuántas canastas recibirá cada caserío?

a. Respondan.

- ¿Cuántas canastas se van a repartir?
- ¿En cuántos caseríos se van a repartir las canastas?
- ¿Qué pueden hacer para resolver el problema?

b. Completen los procesos que usaron Manuel y Urpi para resolver el problema.

Divido 798 ÷ 7 y descompongo 700 + 70 + 28

Tabla de reparto

Caserío	1	2	3	4	5	6	7	Total	
Reparto 700 ÷ 7	100							700	Quedan 98 canastas.
Reparto 70 ÷ 7	10							70	Quedan 28 canastas.
Reparto 28 ÷ 7	4							28	No quedan canastas.
Total	114							798	

Yo descompuse en sumandos 798 = 700 + 98

798 ÷ 7 =

700 ÷ 7 =

98 ÷ 7 =

- Cada caserío recibirá canastas.

Figura 49: Problema 14 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.103)

En el problema está implícito buscar el valor que le corresponde a la unidad, conociendo la relación entre dos cantidades homogéneas. Según Vergnaud (1981) el problema corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división partitiva, que se representa en el siguiente esquema.

	n° canastas	n° caseríos	
x7	1	x	÷ 7
	7	798	

Se observa una relación entre cantidades del mismo espacio de medida que implícitamente promueve el razonamiento proporcional correspondiente al modelo multiplicativo Inter. Como praxeología declaramos lo siguiente.

T_1: Hallar el cuarto término desconocido en una situación proporcional.

$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y $r \in N$

$\tau_{1,3}$: factor escalar unitario inverso.

1° paso: Identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: dividimos b_2 por el factor escalar para hallar b_1. ($b_2 \div r = b_1$)

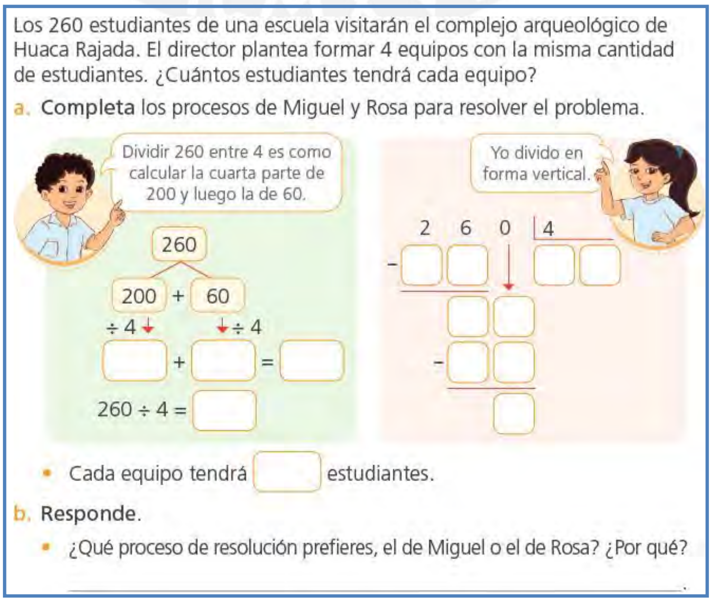


Figura 50: Problema 15 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.104)

Se puede observar en el texto la presencia implícita de la unidad y nos piden calcular su valor correspondiente. Esta característica para Vergnaud (1981), corresponde a un isomorfismo de medida del tipo división partitiva, además, se promueve un razonamiento proporcional del tipo Inter. También se puede justificar la solución con el modelo discursivo de García (2005). Al respecto se considera la siguiente praxeología. T_1, $t_{1,3}$ y $\tau_{1,3}$.

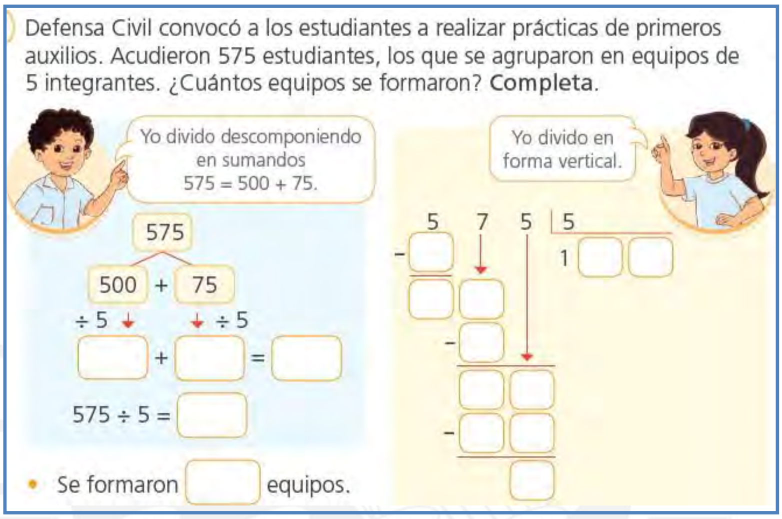


Figura 51: Problema 16 - Cuaderno de trabajo 4 (2019, p.104)

En el problema se observa la presencia implícita de la unidad y su correspondiente. Para Vergnaud (1981) esta característica corresponde a un Isomorfismo de medida de tipo división media, representado en el siguiente esquema.

n° de equipos		n° de personas
1	$\xrightarrow{x5}$	5
x	$\xleftarrow{\div 5}$	575

El esquema muestra una relación entre cantidades heterogéneas que promueve un tipo de razonamiento proporcional que corresponde al modelo multiplicativo Intra. Donde "x" representa el total de equipos formados. Por lo expuesto declaramos la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario.

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. ($b_2 \div r' = a_2$)

A continuación, en la tabla 19, mostramos el resumen de los tipos de tarea y su cantidad de tareas, técnicas y tecnologías. Así también su ubicación en el cuaderno de trabajo de matemática 4 (2019).

Tabla 19: Praxeologías en el cuaderno de trabajo 4

Tipo de tarea (T)	Tarea (**t**)	Técnica (τ)	Tecnología (θ)
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad	$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y r' ∈ N	$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario	$\boldsymbol{\theta}_5$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i es la imagen de u_i por f, es decir: hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$
	$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y r' ∈ N	$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario	$\boldsymbol{\theta}_6$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i es la imagen de u_i por f, es decir hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $u_i = v_i \div r'$
	$t_{1,4,1}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, y r ∈ N	$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario	$\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
	$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1	$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo	
	$t_{1,3}$: Dado b_2 y r. hallar b_1, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, b_2 y r ∈ N	$\tau_{1,3}$: factor escalar unitario inverso	$\boldsymbol{\theta}_4$: para todo *i, j* de **I,** si $u_j = nu_i$, entonces, $\exists v_j / \frac{v_i}{n} = v_i, n \in \mathbb{N}$
T_2: Identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas	$t_{2,1}$: identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes no proporcionales	$\tau_{2,1}$: correlación de no proporcionalidad de magnitudes absolutas	$\boldsymbol{\theta}_5$: Dos magnitudes X y Y tienen una correlación directa, cuando para todo x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_i < y_j$. De manera similar, se establece que tienen correlación inversa, si para todo x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_j < y_i$.

	$t_{2,2}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{2,2}$: correlación de proporcionalidad de magnitudes absolutas	
2 tipos	7 tareas	7 técnicas	4 tecnologías

Fuente: elaboración propia

Del análisis realizado y de la tabla mostrada, se puede apreciar que se analizó un total de 16 tareas, con 32 magnitudes, de los cuales 17 son discreta y 15 continuas; sin embargo, las cantidades correspondiente a las magnitudes continuas son números enteros. También sé observa que la organización matemática del cuaderno de trabajo de 4to grado de primaria (2019) presenta dos tipos de tarea (T_1 y T_2) y casi la totalidad de los problemas resueltos (14 en total) corresponden a los tipos de tarea (T_1). Además, el texto sugiere la forma de resolver (técnicas) los problemas (tareas); es decir se privilegia el saber – hacer.

Por otro lado, las tareas asociadas a T_1 son ($t_{1,1,1}$, $t_{1,2}$, $t_{1,4,1}$, $t_{1,6}$ y $t_{1,3}$), siendo la tarea ($t_{1,1,1}$, $t_{1,2}$) la que mayor presencia tiene en los problemas resueltos. En tanto, en el tipo de tarea (T_2) se generan las tareas ($t_{2,1}$ y $t_{2,2}$). Al respecto se puede observar una diversificación de las tareas con respecto al cuaderno de trabajo de 3ero de primaria.

También en el análisis praxeológico se puedo identificar que el estudio de nuestro objeto matemático inicia de forma secuencial con las tareas ($t_{1,1,1} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{1,4,1} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{2,2} \rightarrow t_{1,3}$); es decir, se inicia el estudio de la proporcionalidad con problemas relacionados en hallar un término desconocido en una situación de proporcionalidad y que a su vez promueven un razonamiento proporcional multiplicativo inter y/o intra. Sobre esto, si se considera el grado al cual está dirigido nuestra investigación, es importante resaltar lo expresado por Reyes (2016) en cuanto a la gradualidad del razonamiento proporcional. En ese sentido en la sección de resultados proponemos una organización matemática que permite un avance gradual de las tareas como de sus respectivas técnicas.

5.2.3 Cuaderno de trabajo – Matemática 5

El cuaderno de trabajo, Matemática 5 está organizado en 8 unidades, siendo la unidad 7, donde se desarrolla explícitamente nuestro objeto matemático de investigación. Con respecto a la unidad 7, encontramos los siguientes temas.

- Jugamos con experimentos aleatorios.
- Relacionamos magnitudes
- La proporcionalidad en situaciones diarias.
- Calculamos perímetros de diferentes objetos y lugares.
- Medimos superficies.

A continuación, presentamos un análisis y descripción minuciosa de la organización matemática respecto a los temas relacionado con las magnitudes y la proporcionalidad. Para esto mostramos las figuras correspondientes a los problemas planteados en el libro.


Relacionamos magnitudes

1 La mamá de Ricardo registró en una tabla la estatura de su hijo. Posteriormente, él continuó haciéndolo a lo largo de los años. ¿Qué ha sucedido con su estatura a medida que se hace adulto?

a. **Observen** los datos de la tabla y **respondan**.

- ¿Cuánto creció Ricardo desde que nació hasta cumplir los 18 años?
- ¿Entre qué edades se observa mayor crecimiento? ¿Por qué?
- ¿Cuál crees que será la estatura de Ricardo a los 24 años? ¿Por qué?
- ¿Llegará una edad en la que Ricardo ya no crezca? **Expliquen**.
- Podemos concluir que, a medida que ha pasado el tiempo, la estatura de Ricardo ______, pero ______

Edad de Ricardo	Estatura
Recién nacido	50 cm
3 años	95 cm
6 años	115 cm
9 años	125 cm
12 años	140 cm
15 años	160 cm
18 años	170 cm
21 años	170 cm
24 años	

b. **Investiguen y comenten.**

- ¿Cuál fue tu estatura cuando naciste? ¿Cómo ha cambiado hasta que llegaste a la estatura que tienes hoy? ¿Qué puedes concluir?

Figura 52: Problema 1 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.133)

El tema “relacionamos magnitudes” inicia con una situación donde intervienen dos magnitudes (edad y estatura), sin embargo, es un problema no proporcional que pensamos tiene la intención de aproximar al estudiante a la noción de proporcionalidad a la que el texto hace referencia implícitamente en posteriores problemas.

Observamos que las cantidades correspondientes a la magnitud Edad va en aumento, mientras que la cantidad relativa a la estatura lo hace hasta una determinada cantidad de años. También todas las preguntas formuladas están orientadas a, observar el comportamiento de las cantidades. Por esto formulamos la siguiente praxeología.

T_2: identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas

$t_{2,1}$: identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes absolutas no proporcionales

$\tau_{2,1}$: correlación de no proporcionalidad de magnitudes absolutas

1° paso identificar las magnitudes

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos el correspondiente de una cantidad en la otra magnitud

4° paso: identificamos el aumento simultaneo no proporcional de las cantidades

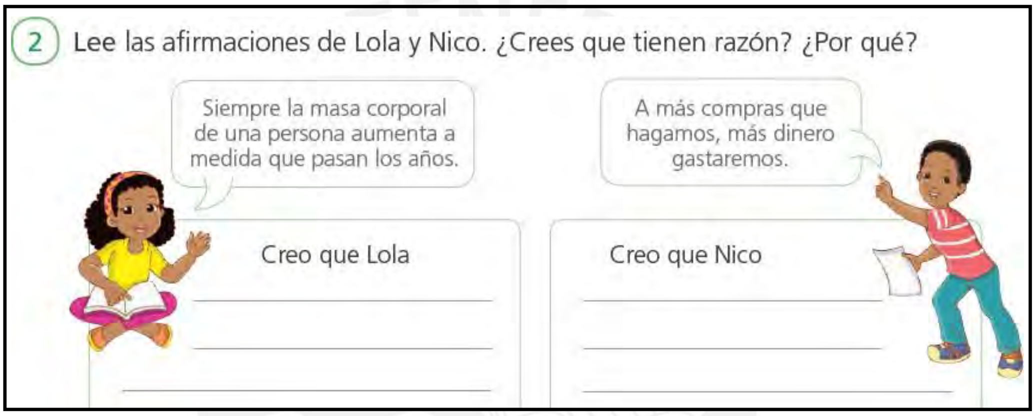


Figura 53: Problema 2 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.133)

Este problema, propicia un primer acercamiento al razonamiento proporcional. Para Reyes (2016), este tipo de afirmaciones se caracteriza por tener un inicio intuitivo y lógico antes que cuantitativo. También es importante resaltar que según Inhelder y Piaget (1972, citado en Reyes 2016) las afirmaciones del problema corresponderían a un modelo cualitativo del pensamiento proporcional que justifica el siguiente discurso, “si una magnitud cambia la otra también cambia”. En ambas afirmaciones, “si uno aumenta la otra también aumenta”. Por lo tanto, establecemos

T_2: Identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas

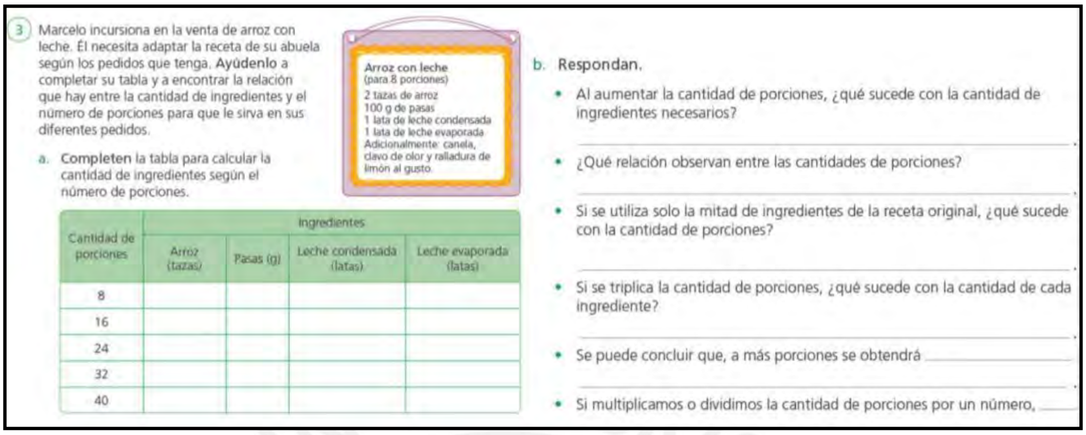
$t_{2,2}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes absolutas proporcionales

$\tau_{2,2}$: correlación de proporcionalidad de magnitudes absolutas

1° paso: identificar las magnitudes que se va relacionar.

2° paso: identificamos las cantidades (explícitamente o implícitamente) de las magnitudes relacionadas entre sí.

3° paso: identificamos la relación de cambio entre dos magnitudes justificado en el primer modelo de razonamiento cualitativo proporcional



3 Marcelo incursiona en la venta de arroz con leche. Él necesita adaptar la receta de su abuela según los pedidos que tenga. **Ayúdenlo** a completar su tabla y a encontrar la relación que hay entre la cantidad de ingredientes y el número de porciones para que le sirva en sus diferentes pedidos.

Arroz con leche
(para 8 porciones)
2 tazas de arroz
100 g de pasas
1 lata de leche condensada
1 lata de leche evaporada
Adicionalmente: canela, clavo de olor y ralladura de limón al gusto.

a. **Completen** la tabla para calcular la cantidad de ingredientes según el número de porciones.

Cantidad de porciones	Ingredientes			
	Arroz (tazas)	Pasas (g)	Leche condensada (latas)	Leche evaporada (latas)
8				
16				
24				
32				
40				

b. Respondan.

- Al aumentar la cantidad de porciones, ¿qué sucede con la cantidad de ingredientes necesarios?
  ______.
- ¿Qué relación observan entre las cantidades de porciones?
  ______.
- Si se utiliza solo la mitad de ingredientes de la receta original, ¿qué sucede con la cantidad de porciones?
  ______.
- Si se triplica la cantidad de porciones, ¿qué sucede con la cantidad de cada ingrediente?
  ______.
- Se puede concluir que, a más porciones se obtendrá ______
  ______.
- Si multiplicamos o dividimos la cantidad de porciones por un número, ______

Figura 54: Problema 3 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.134)

Respecto al contexto del problema, sugiere que nos formulemos las siguientes preguntas ¿Es importante la cantidad de los ingredientes para mantener el mismo sabor, que el arroz con leche de la abuela? ¿Con más ingredientes obtendremos más o menos porciones? ¿Qué relación hay entre la cantidad de ingredientes?, Si quiero preparar el doble de porciones ¿Qué sucederá con los ingredientes?

Por las preguntas del texto, se considera como tipo de tarea, reconocer una relación de magnitudes directamente proporcionales.

Además, la intención es que el estudiante reconozca si existe una relación entre las magnitudes y luego determinar si esta relación es de proporcionalidad directa.

Sobre lo expuesto, se considera desarrollar primero el Ítem (b) al cual le corresponde el T_3, y al Ítem (a) le corresponde la T_1.

T_3: Reconocer una relación entre dos magnitudes.

$T_{3,1}$: Reconocer una relación directamente proporcional entre dos magnitudes

$\tau_{3,1}$: conociendo magnitudes directamente proporcionales.

1° paso: Identificamos las magnitudes que intervienen en el problema.

2° paso: comprobamos la existencia de la relación entre las magnitudes, justificado en el modelo de razonamiento proporcional cualitativo

3° paso: Comprobamos la existencia de una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes, es decir si uno aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc., su valor correspondiente en la otra magnitud también aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc.

Al respecto, para García (2005), este tipo de discurso del 2° y 3° paso constituye un primero modelo discursivo de sistemas lineales.

En el texto, también piden completar la tabla y esto promueve hallar un cuarto término, cuya solución corresponde según Lamon (1994, citado en Reyes) a un modelo de razonamiento proporcional Inter. Sobre esto encontramos dos tareas, la primera cuando las cantidades homogéneas son diferentes a la unidad y en la segunda tarea un término es la unidad. Al respecto para Floriani (2004) por las características que presentan las cantidades en la primera tarea, corresponde a un tipo de problema múltiplo diferente unidad y para Cubillos (2017) su grado de dificultad es mediana.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos el mismo aumento en b_1 para hallar b_2

Cantidad de porciones	Ingredientes			
	Arroz (tazas)	Pasas (g)	Leche condensada (latas)	Leche evaporada (latas)
8	2	100	1	1
16	4	200		
24	6	300		
32	8	400		
40	10	500		

Figura 55: Problema 4 - Desarrollo del problema propuesto en la figura 53

Fuente: Elaboración propia

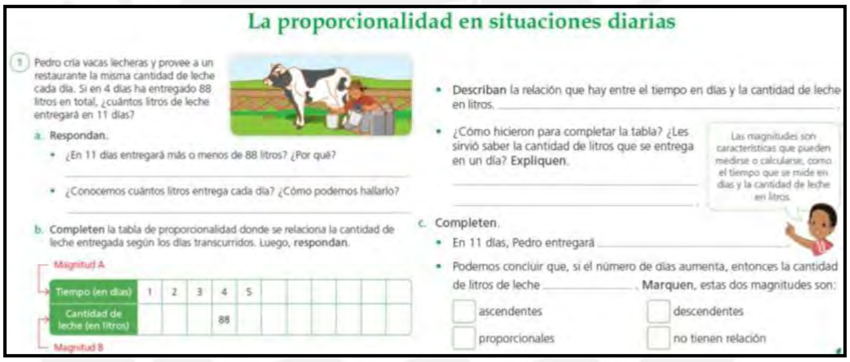
La **$t_{1,6}$** nos permite encontrar el valor faltante cuando los tres términos son diferentes a la unidad y además múltiplos. Por lo tanto, es necesario introducir una tarea que permita completar la tabla cuando un término es la unidad. Esta tarea según Floriani (2004) por las características que presentan las cantidades, es un tipo de problema unitaria diferente unidad y para Cubillos (2017) representa un problema con nivel de dificultad bajo.

$t_{1,5}$: dado a_1, a_2. Hallar r, de modo que $[1, r] \sim [a_1, a_2]$, donde b_2 es múltiplo de b_1

$\tau_{1,5}$: factor escalar múltiplo unitario.

1° paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° paso: dividimos a_2 entre a_1 para hallar r.$(\frac{a_2}{a_1} = r)$



La proporcionalidad en situaciones diarias

1 Pedro cría vacas lecheras y provee a un restaurante la misma cantidad de leche cada día. Si en 4 días ha entregado 88 litros en total, ¿cuántos litros de leche entregará en 11 días?

a. **Respondan.**

- ¿En 11 días entregará más o menos de 88 litros? ¿Por qué?
- ¿Conocemos cuántos litros entrega cada día? ¿Cómo podemos hallarlo?

b. **Completen** la tabla de proporcionalidad donde se relaciona la cantidad de leche entregada según los días transcurridos. Luego, **respondan**.

Magnitud A

Tiempo (en días)	1	2	3	4	5						
Cantidad de leche (en litros)				88							

Magnitud B

- **Describan** la relación que hay entre el tiempo en días y la cantidad de leche en litros.
- ¿Cómo hicieron para completar la tabla? ¿Les sirvió saber la cantidad de litros que se entrega en un día? **Expliquen.**

Las magnitudes son características que pueden medirse o calcularse, como el tiempo que se mide en días y la cantidad de leche en litros.

c. **Completen.**

- En 11 días, Pedro entregará
- Podemos concluir que, si el número de días aumenta, entonces la cantidad de litros de leche . **Marquen**, estas dos magnitudes son:

☐ ascendentes ☐ descendentes
☐ proporcionales ☐ no tienen relación

Figura 56: Problema 5 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.135)

La primera pregunta del, texto (a) sugiere una respuesta de carácter discursivo (ostensivo lenguaje natural) donde se reconoce la existencia de una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes que promueve establecer una relación entre cantidades de un mismo espacio de medida. Por otro lado, en (b) se muestra la tabla de proporcionalidad como ostensivo y presenta la unidad como una cantidad de la magnitud tiempo, esto sugiere la reducción a la unidad como técnica. Por último, según Floriani (2004) el tipo de problema planteado es múltiplo con diferente unidad y para Cubillos (2017) es un problema con dificultad mediana.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional.

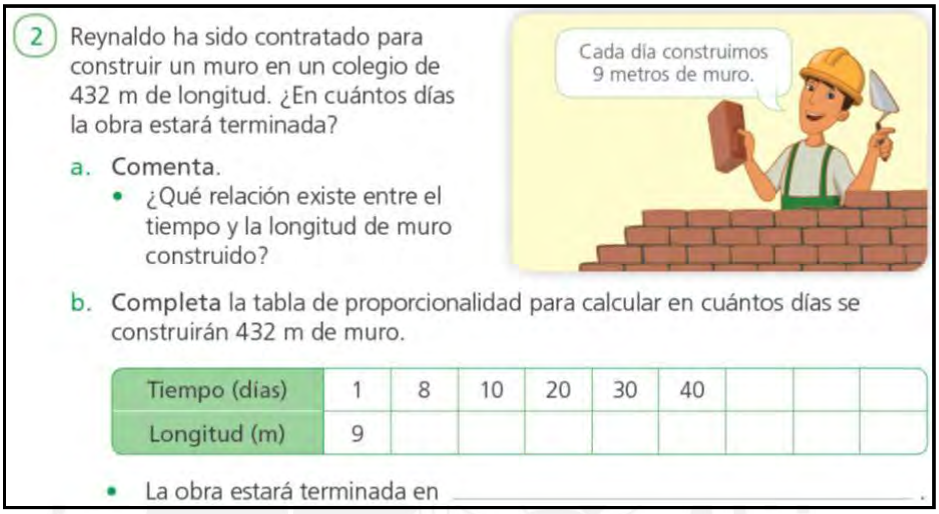
$t_{1,9}$: Dado a_1, a_2 y b_1, hallar b_2, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, b_1 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,9}$: Reducción a la unidad.

1° paso: Identificamos las cantidades heterogéneas a utilizar. (a_1 y b_1)

2° paso: Calculamos el correspondiente a la unidad dividiendo $\frac{b1}{a_1}$ $(1, \frac{b1}{a_1})$

3° paso: Multiplicamos el correspondiente de la unidad con a_2 para hallar b_2. $(a_2\, x \frac{b_1}{a_1} = b_2)$



2 Reynaldo ha sido contratado para construir un muro en un colegio de 432 m de longitud. ¿En cuántos días la obra estará terminada?

a. Comenta.
- ¿Qué relación existe entre el tiempo y la longitud de muro construido?

b. Completa la tabla de proporcionalidad para calcular en cuántos días se construirán 432 m de muro.

Tiempo (días)	1	8	10	20	30	40			
Longitud (m)	9								

- La obra estará terminada en ______.

Figura 57: Problema 6 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.136)

Al igual que la situación anterior, se parte de un contexto real para reforzar la noción de proporcionalidad. En el texto se pide calcular el cuarto término y esta explicito el uso de la tabla de proporcionalidad como ostensivo. Por la presencia de la unidad y su correspondiente. Según Vergnaud (1981), el problema corresponde a un isomorfismo de medida de división media. También es explícito la relación entre cantidades heterogéneas. Al respecto esto promueve una solución que corresponde a un razonamiento proporcional en términos de un factor funcional, en palabras de Reyes (2016) un razonamiento proporcional intra. según Cubillos (2017) es un problema de baja dificultad. Respecto a la praxeología, declaramos lo siguiente.

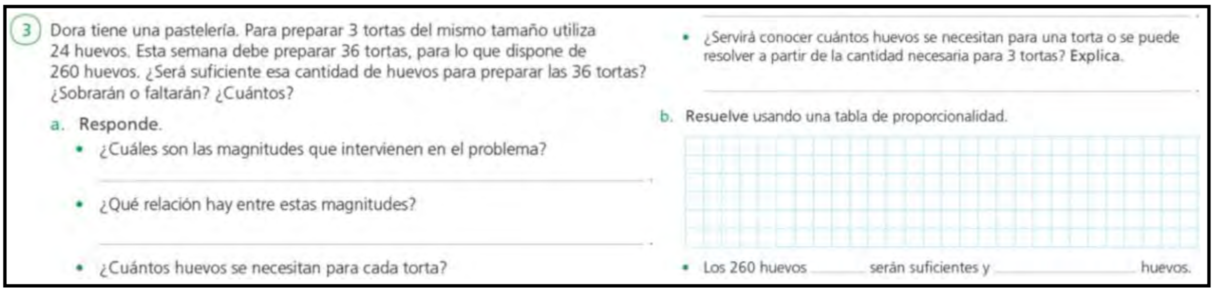
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y r' ∈ N

$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: dividimos b_2 por el factor funcional para hallar a_2. $(b_2 \div r' = a_2)$



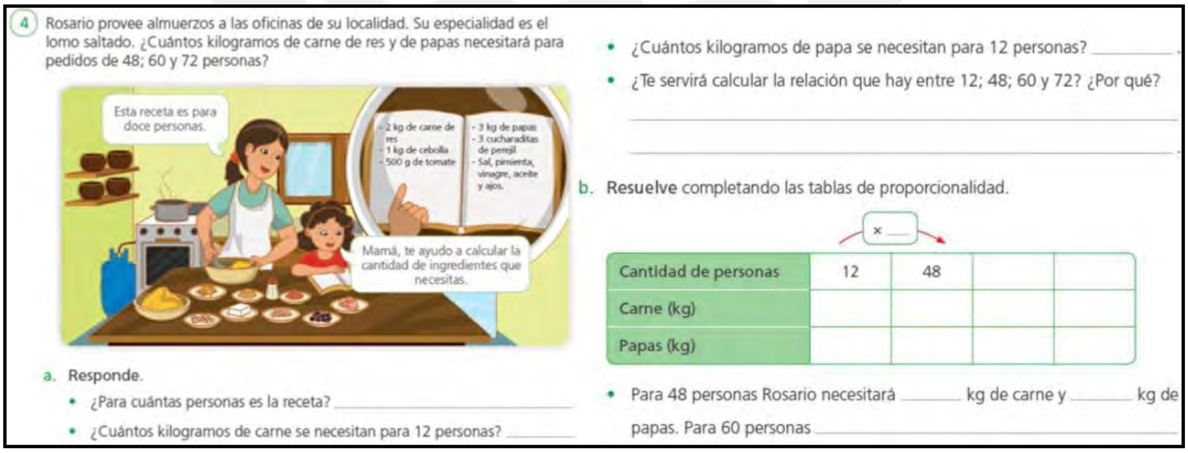
3 Dora tiene una pastelería. Para preparar 3 tortas del mismo tamaño utiliza 24 huevos. Esta semana debe preparar 36 tortas, para lo que dispone de 260 huevos. ¿Será suficiente esa cantidad de huevos para preparar las 36 tortas? ¿Sobrarán o faltarán? ¿Cuántos?

a. Responde.
- ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en el problema?
- ¿Qué relación hay entre estas magnitudes?
- ¿Cuántos huevos se necesitan para cada torta?
- ¿Servirá conocer cuántos huevos se necesitan para una torta o se puede resolver a partir de la cantidad necesaria para 3 tortas? Explica.

b. Resuelve usando una tabla de proporcionalidad.
- Los 260 huevos ______ serán suficientes y ______ huevos.

Figura 58: Problema 7 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.136)

La tarea está, dividido en dos preguntas (a y b). Respecto a las preguntas propuestos en (a), merece respuestas discursivas en cuanto a determinar la proporcionalidad directa entre las magnitudes que se relacionan, es decir “para preparar más torta se necesita más huevos”. Respecto a la pregunta (b) notamos que el ostensivo es la tabla de proporcionalidad para hallar un cuarto valor faltante. También es un problema que sugiere emplear la técnica de la reducción a la unidad. Respecto a las características numéricas que presentan las cantidades podemos afirmar que es un tipo de problema múltiplo diferente unidad, según Floriani (2004) y según Cubillos (2017) el grado de dificultad es mediana. Por lo expuesto la praxeología es la siguiente: T_1, $t_{1,9}$ $\tau_{1,9}$



4 Rosario provee almuerzos a las oficinas de su localidad. Su especialidad es el lomo saltado. ¿Cuántos kilogramos de carne de res y de papas necesitará para pedidos de 48; 60 y 72 personas?

a. Responde.
- ¿Para cuántas personas es la receta? ______
- ¿Cuántos kilogramos de carne se necesitan para 12 personas? ______
- ¿Cuántos kilogramos de papa se necesitan para 12 personas? ______
- ¿Te servirá calcular la relación que hay entre 12; 48; 60 y 72? ¿Por qué?

b. Resuelve completando las tablas de proporcionalidad.

× ___

Cantidad de personas	12	48		
Carne (kg)				
Papas (kg)				

- Para 48 personas Rosario necesitará ______ kg de carne y ______ kg de papas. Para 60 personas ______

Figura 59: Problema 8. - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.137)

En este contexto, se emplea la tabla como ostensivo para calcular valores desconocidos y establecer una relación de proporcionalidad directa entre cantidades homogéneas. A sí mismo, se considera que la solución se justifica mediante la modelización discursiva de García (2005), también es explicito que se promueve el tránsito por un razonamiento multiplicativo escalar, en otras palabras, según Lamon (1994, citado en Reyes, 2016), el problema promueve un modelo multiplicativo Inter. Así mismo para Floriani (2004) es un tipo de problema múltiplo diferente unidad y según Cubillos el grado de dificultad es mediana.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

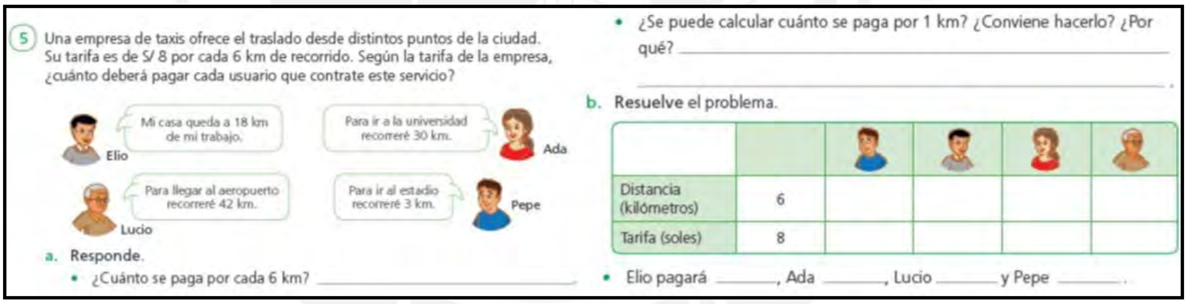
$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos el mismo aumento en b_1 para hallar b_2



5 Una empresa de taxis ofrece el traslado desde distintos puntos de la ciudad. Su tarifa es de S/ 8 por cada 6 km de recorrido. Según la tarifa de la empresa, ¿cuánto deberá pagar cada usuario que contrate este servicio?

Elio: Mi casa queda a 18 km de mi trabajo.

Ada: Para ir a la universidad recorreré 30 km.

Lucio: Para llegar al aeropuerto recorreré 42 km.

Pepe: Para ir al estadio recorreré 3 km.

a. Responde.

- ¿Cuánto se paga por cada 6 km? ____________
- ¿Se puede calcular cuánto se paga por 1 km? ¿Conviene hacerlo? ¿Por qué? ____________

b. Resuelve el problema.

Distancia (kilómetros)	6				
Tarifa (soles)	8				

- Elio pagará ______, Ada ______, Lucio ______ y Pepe ______.

Figura 60: Problema 9 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.138)

En el problema podemos encontrar dos estrategias para su solución, el primero centrado en el uso de la razón externa, es decir, se considera un enfoque funcional. y la segunda estrategia promovido desde una perspectiva escalar donde se usa las relaciones internas para el desarrollo de la técnica $\tau_{1,6}$ y $\tau_{1,8}$. Al respecto se observa, el valor de la razón externa no es un entero en tanto la razón interna tiene un valor entero, sobre esto Block (2006) expresa que los niños se inclinan al uso de las razones internas sobre la externa, cuando el valor de la primera es un entero.

Por lo tanto, se deduce que se optara por un razonamiento del tipo multiplicativo inter debido a la multiplicidad de las cantidades correspondientes a la magnitud distancia.

También esta explícito el uso de la tabla de proporcionalidad como ostensivo para calcular los valores que faltan justificado en lo expuesto por García (2005) relacionado a su modelo proporcional discursivo. Por otro lado, si se considera los datos presentes en el problema podemos afirmar, según Floriani (2004) que es un tipo de problema múltiplo diferente unidad y según Cubillos (2017) la dificultad que presenta es mediana.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos el mismo aumento en b_1 para hallar b_2

Así mismo, es necesario una técnica que permita calcular un cuarto termino cuando las cantidades homogéneas son divisores.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

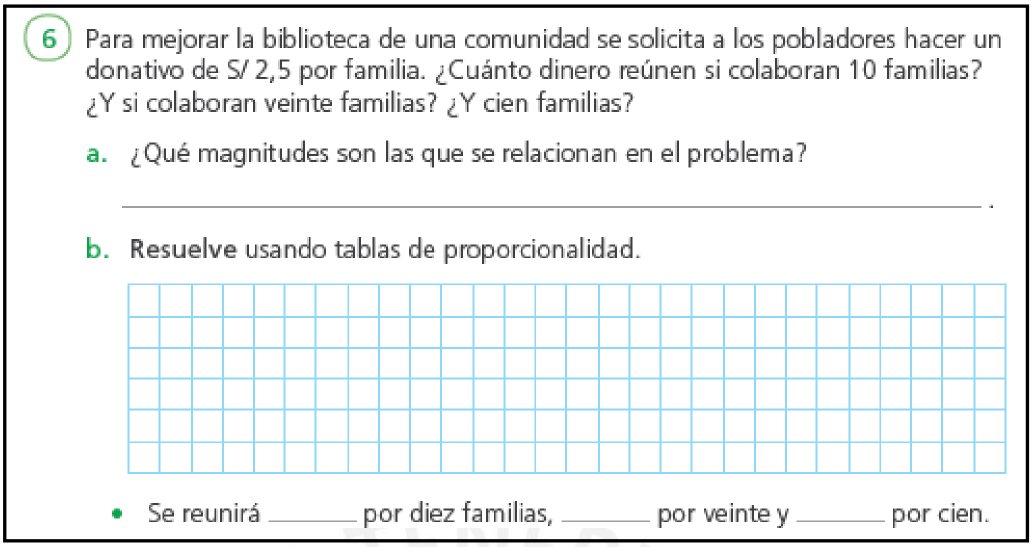
$t_{1,8}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es divisor a_1

$\tau_{1,8}$: factor escalar divisor.

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos en cuanto disminuye a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos la misma disminución en b_1 para hallar b_2



6 Para mejorar la biblioteca de una comunidad se solicita a los pobladores hacer un donativo de S/ 2,5 por familia. ¿Cuánto dinero reúnen si colaboran 10 familias? ¿Y si colaboran veinte familias? ¿Y cien familias?

a. ¿Qué magnitudes son las que se relacionan en el problema?

____ .

b. **Resuelve** usando tablas de proporcionalidad.

- Se reunirá ______ por diez familias, ______ por veinte y ______ por cien.

Figura 61: Problema 10 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.138)

Por los datos que presenta según la subcategoría de Floriani (2004) es un tipo de problema de proporcionalidad directa unitaria diferente unidad y según Cubillos (2017) la dificultad que presenta es mediana puesto que se conoce la razón unitaria e intervienen números enteros y decimales. En este contexto se busca emplear la tabla como un ostensivo para hallar cantidades desconocidas que justificamos mediante el modelo discursivo de García (2005). Respecto a su praxeología, declaramos lo siguiente.

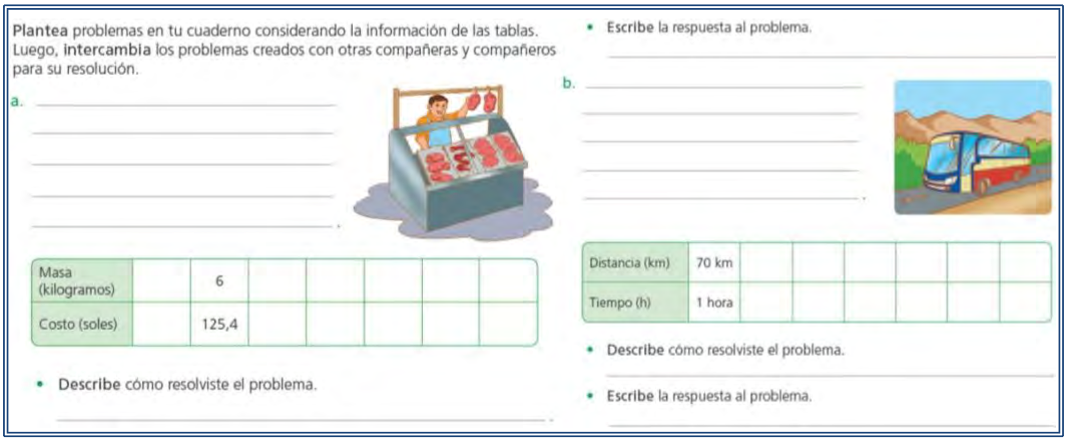
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,4,2}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde $r \in N$ y b_1 es decimal

$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario.

2° paso: identificamos el factor. (r)

3° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_2=b_1.r$)



Plantea problemas en tu cuaderno considerando la información de las tablas. Luego, **intercambia** los problemas creados con otras compañeras y compañeros para su resolución.

a.

Masa (kilogramos)		6				
Costo (soles)		125,4				

- **Describe** cómo resolviste el problema.
- **Escribe** la respuesta al problema.

b.

Distancia (km)	70 km					
Tiempo (h)	1 hora					

- **Describe** cómo resolviste el problema.
- **Escribe** la respuesta al problema.

Figura 62: Problema 11 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p. 139)

En el problema del texto se observa un estado y se le pide crear otros estados. Al respecto, si se considera las magnitudes relacionadas a la imagen que son cercanos al quehacer cotidiano, se puede deducir la presencia implícita de dos aspectos de carácter proporcional, que son, el modelo de razonamiento cualitativo proporcional, es decir si una magnitud aumenta la otra también aumenta, esto según Reyes (2016) es un pensamiento intuitivo y lógico. El otro aspecto es la presencia implícita del modelo discurso de García (2005), esto quiere decir, si una magnitud aumenta en el doble, el triple, etc. La otra magnitud también aumenta en el doble, el triple, etc. Sobre este discurso García manifiesta, que es una convención social y también permite crear nuevos estados

Por lo expuesto, se deduce que el texto promueve buscar la cantidad que le corresponde a una magnitud cuando su correspondiente aumenta en el doble, el triple, etc. Por lo tanto, planteamos la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcional

$t_{1,10}$: Dado el estado (a_1, b_1), si $a_2=n_x a_1$. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$

En esta tarea se observa que b_1 asume una cantidad entera y otra decimal, que llamaremos ítem b, ítem a respectivamente. Al respecto declaramos dos sub tareas con la misma tecnología.

- $t_{1,10,1}$: Dado el estado (a_1, b_1), si $a_2=n_x a_1$. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_1, $n \in N$ y b_1 es decimal

- $t_{1,10,2}$: Dado el estado (a_1, b_1), si a_2=n×a_1. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que [a_1, a_2] $\sim$ [b_1, b_2], a_1, b_1 y n ∈ N

$\tau_{1,10}$: ampliación del estado

1° paso: Identificar el estado a utilizar. (a_1, b_1)

2° paso: multiplicar a_1 por un número natural mediante el discurso: “Sí a_1 aumenta en el doble, el triple, el cuádruple …”

3° paso: multiplicar por el mismo número natural a b_1, mediante el discurso: Sí a_1 aumento en el doble, el triple, el cuádruple …, entonces b_1 también aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, …”

Sin embargo, si se fórmula la siguiente cuestión, cual es el costo para 5 kg de carne y, por otro lado, cual es el tiempo para un recorrido de 80 km, el alcance de la técnica se hace insuficiente, por lo que se deduce la intención del texto de generar otros estados que sean múltiplo de sus correspondientes homogéneos.

8 La ecoeficiencia comienza por casa. Gustavo se informa sobre la electricidad que consumen los aparatos de su casa en una hora. Con estos datos, calcula: ¿Cuántos watts consume durante media hora, $1\frac{1}{2}$ hora y $6\frac{1}{2}$ horas una TV, una computadora y una refrigeradora?

TV 100 Wh

Plancha 1000 Wh

Computadora 300 Wh

Refrigeradora 350 Wh

a. Lee el problema y responde.

- Si aumenta el tiempo encendido, ¿qué sucede con la energía consumida?
- ¿Qué harás para saber cuánta energía consume la TV en una hora y media? ¿Es correcto sumar la electricidad consumida en una hora y en media hora? ¿Por qué?

b. Completa la tabla.

Tiempo (hora)		$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	6	$6\frac{1}{2}$
Energía (W-hora)	TV		100					
	PC		300					
	Refrigeradora		350					

Figura 63: Problema 12 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.140)

Del texto, se deduce que se promueve el razonamiento cualitativo proporcional, es decir, ante la pregunta. Si aumenta el tiempo encendido, ¿Qué sucede con la energía consumida? Se dará como respuesta que, también aumenta el consumo de energía. Al respecto, este tipo de respuesta intuitivo y lógico, según Reyes (2016), se le atribuye al primer modelo del razonamiento proporcional. Luego en la pregunta ¿Qué harás para saber cuánta energía consume la TV en una hora y media? ¿Es correcto sumar la electricidad consumida en una hora y media hora?, el texto sugiere una solución que promueva el razonamiento proporcional aditivo compuesto. Siendo esto, según Reyes (2016), una primera aproximación al razonamiento cuantitativo de lo proporcional. También el texto es explícito en hallar el cuarto término y sugiere una solución desde una perspectiva escalar con dos tareas que desarrollaremos de forma independiente.

Primera tarea. Si Gustavo consume 100watts por una hora. ¿Cuánto consume en $1\frac{1}{2}\,horas$?.

T_1: Hallar el término desconocido en una situación proporcional

$t_{1,11}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que [1, r] $\sim$ [b1, b2] y $r = 1\frac{1}{n}$ donde "n" es un número natural.

A continuación, se muestra un esquema que ilustra nuestra técnica, que llamaremos ***técnica serie unitario simple*** que consiste en establecer una secuencia que vincule un estado inicial con una relación multiplicativa y otra aditiva.

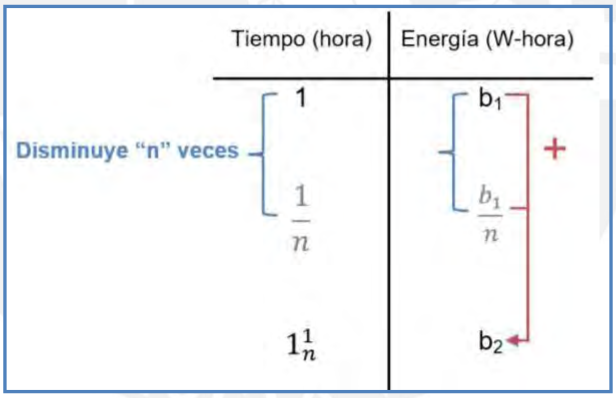


Figura 64: Esquema de la técnica serie aditivo simple

Fuente: elaboración propia

$\tau_{1,11}$: técnica: serie unitario simple

1° paso: ubicamos la cantidad homogénea $\frac{1}{n}$

2° paso: identificamos cuantas veces disminuye 1 respecto a "$\frac{1}{n}$".(disminuye n veces)

3° paso: dividimos b_1 entre "n" mediante el discurso: si la unidad disminuye "n" veces entonces b_1 también disminuye "n" veces.

4° paso: sumamos b_1 con $\frac{b_1}{n}$ para hallar b_2. ($b_1 + \frac{b_1}{n} = b_2$)

Tiempo (hora)		$\frac{1}{2}$	**1**	$1\frac{1}{2}$	**2**	**3**	**6**	$6\frac{1}{2}$
Energía (W-hora)	TV	50	**100**	150	200	300	600	650
	PC	150	**300**	450	600	900	1800	1950
	Refrigeradora	175	**350**	525	700	1050	2100	2275

Figura 65: Explicación gráfica al problema de la figura 63

Fuente: Elaboración propia

Segunda tarea. Si Gustavo consume 100watts por una hora. ¿Cuánto consume en $6\frac{1}{2}\,horas$?

T_1: Hallar el término desconocido en una situación proporcional

$t_{1,12}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que [1, r] $\sim$ [b1, b2] y $r = m\frac{1}{n}$, donde "m" y "n" son números naturales.

A continuación, se muestra un esquema que ilustra nuestra técnica, que llamaremos ***técnica serie unitario compuesto*** que consiste en establecer una secuencia que vincule un estado inicial con una diversas series multiplicativas y aditivas.

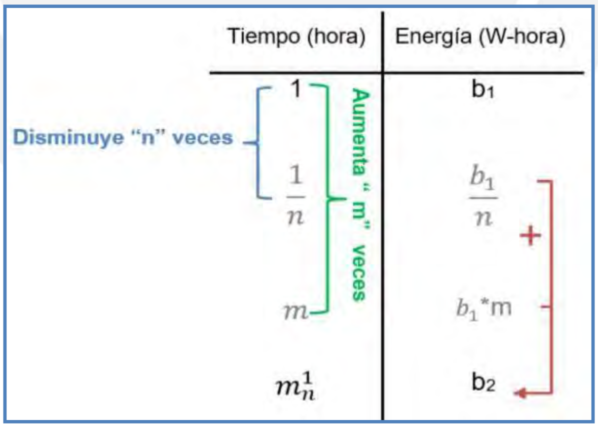


Figura 66: Esquema de la técnica serie aditivo compuesto

Fuente: Elaboración propia

$\tau_{1,12}$: técnica serie unitario compuesto

1° paso: ubicamos la cantidad homogénea $\frac{1}{n}$

2° paso: identificamos cuantas veces disminuye 1 respecto a "$\frac{1}{n}$".(disminuye n veces)

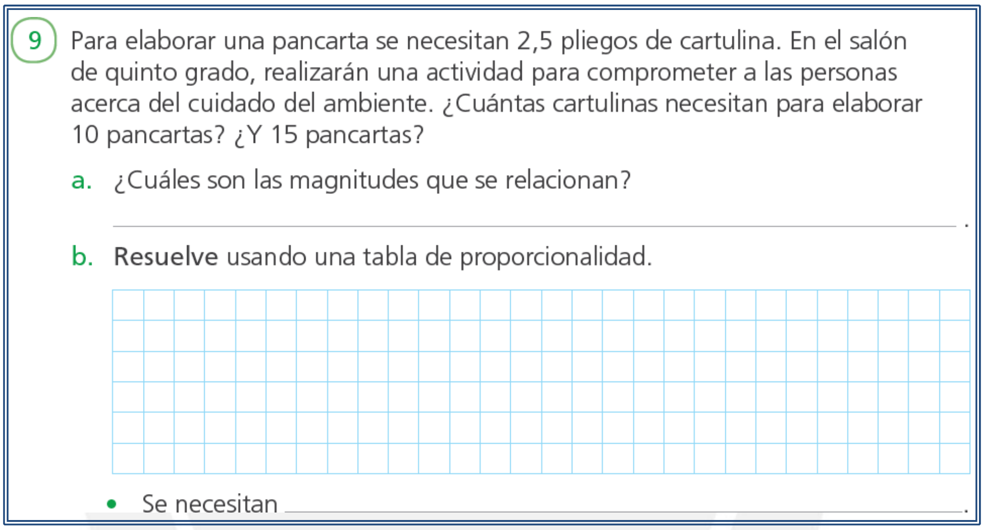
3° paso: dividimos b_1 entre “n” mediante el discurso: si la unidad disminuye “n” veces entonces b_1 también disminuye “n” veces.

4° paso: ubicamos la cantidad homogénea “m”

5° paso: identificamos cuantas veces aumenta 1 respecto a “m”. (aumenta m veces)

6° paso: multiplicamos b_1 por “m” mediante el discurso: si la unidad aumenta “m” veces entonces b_1 también aumenta “m” veces.

7° paso: sumamos $\frac{b_1}{n}$ con b1.m para hallar b2. ($\frac{b_1}{n} + b_1 . m = b_2$)



9 Para elaborar una pancarta se necesitan 2,5 pliegos de cartulina. En el salón de quinto grado, realizarán una actividad para comprometer a las personas acerca del cuidado del ambiente. ¿Cuántas cartulinas necesitan para elaborar 10 pancartas? ¿Y 15 pancartas?

a. ¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan?

b. **Resuelve** usando una tabla de proporcionalidad.

- Se necesitan

Figura 67: Problema 13 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.140)

El texto, según Floriani (2004) presenta un problema del tipo unitario diferente unidad y según Cubillos (2017) es un problema de dificultad media. Además, el ostensivo presente en este problema es la tabla de proporcionalidad que permite hallar el cuarto valor faltante, en este caso la solución se justifica mediante el modelo discurso de García (2005). Respecto a la praxeología, declaramos lo siguiente

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,4,2}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde $r \in N$ y b_1 es decimal

$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario

1° paso: identificamos el factor escalar. (r)

3° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_2 = b_1 . r$)

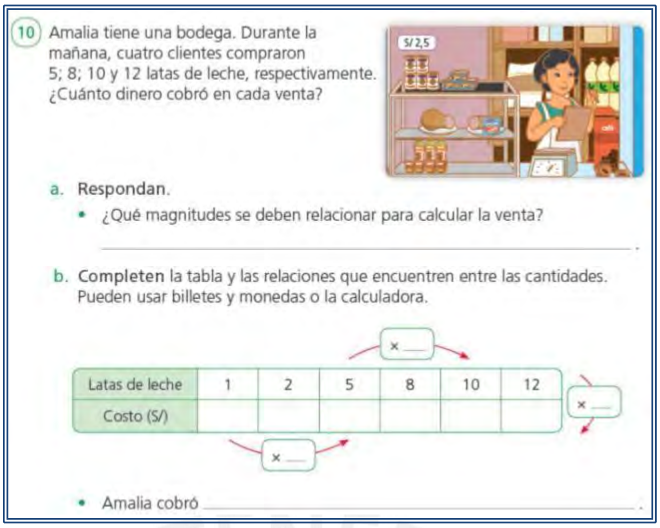


Figura 68: Problema 14 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p141)

En el problema el ostensivo es la tabla de proporcionalidad que promueve el uso de dos técnicas, relacionados al razonamiento multiplicativo escalar y funcional, en palabras de Reyes (2016) modelo multiplicativo Inter e Intra respectivamente. También según Floriani (2004), es un tipo de problema unitario diferente unidad y para Cubillos (2017), el problema tiene un grado de dificultad mediano. Si se considera la primera técnica, decimos que se presenta la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,4,2}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde $r \in N$ y b_1 es decimal

$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario

1° paso: identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_2=b_1.r$)

El texto también promueve una segunda tarea y técnica, relacionado al factor funcional que permite dar solución al problema. Siendo esta.

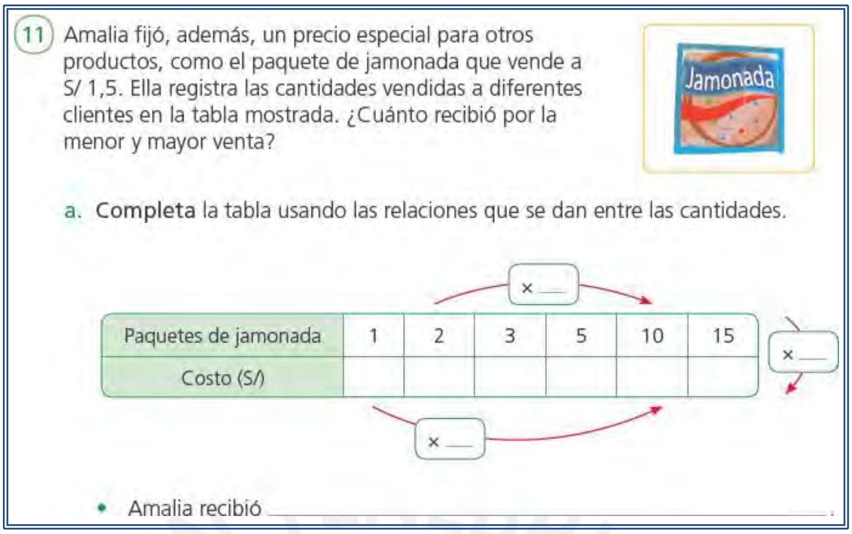
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1,2}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde $a_2, b_2 \in N$ y r' es un número decimal.

$\tau_{1,1}$: Factor funcional unitario

2° paso: identificamos el factor funcional. (r')

3° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. ($r'.a_2=b_2$)



11 Amalia fijó, además, un precio especial para otros productos, como el paquete de jamonada que vende a S/ 1,5. Ella registra las cantidades vendidas a diferentes clientes en la tabla mostrada. ¿Cuánto recibió por la menor y mayor venta?

a. **Completa** la tabla usando las relaciones que se dan entre las cantidades.

× ___

Paquetes de jamonada	1	2	3	5	10	15
Costo (S/)						

× ___

× ___

• Amalia recibió ___

Figura 69: Problema 15. - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.141)

El problema presenta características similares al análisis que se hizo del problema que le antecedió, pensamos que el objetivo es retroalimentar la noción de proporcionalidad directa desde un razonamiento multiplicativo escalar y funcional. Al respecto desde un modelo de razonamiento proporcional Inter consideramos la siguiente praxeología. T_1, $t_{1,4,2}$ y $\tau_{1,4}$

También, el texto sugiere una segunda tarea y técnica considerando el tránsito por un razonamiento Intra, donde la división entre los valores correspondientes de dos magnitudes es una constante, llamado constante de proporcionalidad y se considera la siguiente praxeología. T_1, $t_{1,1,2}$ y $\tau_{1,1}$

12 Camilo y Valeria son niños muy observadores. Con ayuda de su regla midieron la altura de los peldaños de las escaleras de su colegio. Si ellos anotaron en la tabla la altura de 3 peldaños, considerando que todos los peldaños tienen la misma medida, ¿cuántos centímetros habrá hasta el peldaño 16 y hasta el peldaño 21?

a. ¿Te ayudará conocer la altura de un peldaño para completar la tabla? ¿Por qué?

____

____.

b. **Completa** la tabla.

N.° de peldaños	1	3	6	11	15	16	21
Altura (cm)		51					

- Hasta el peldaño 16 hay ____________ y hasta el 21, ____________.

c. **Comenta** la estrategia que utilizaste.

____

____.

Figura 70: Problema 16 - Cuaderno de trabajo5 (2019, p.142)

El problema sugiere la técnica de reducción a la unidad y también promueve el razonamiento multiplicativo Intra con la tabla de proporcionalidad como ostensivo. Respecto al tipo de problema, Floriani (2004) lo considera del tipo múltiplo diferente unidad y para Cubillos (2017), es un problema con dificultad media.

A continuación, indicamos el tipo de tarea, la tarea y la técnica.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional.

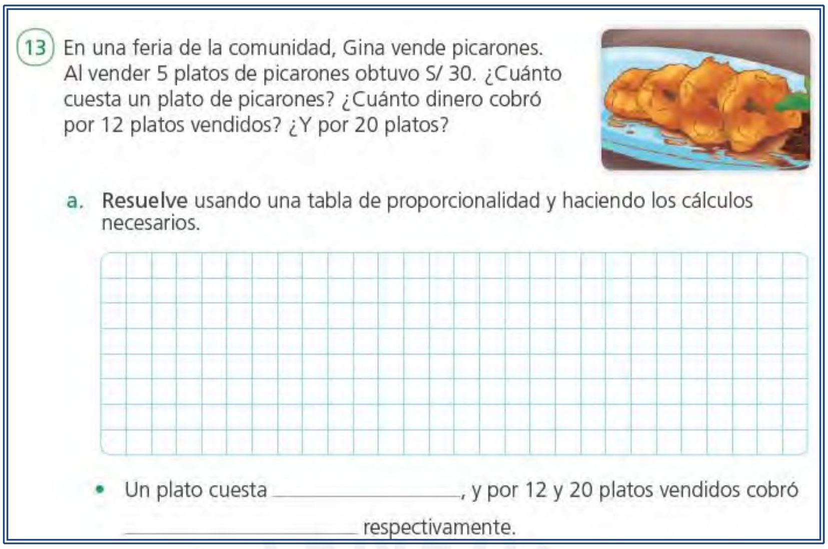
$t_{1,9}$: Dado a_1, a_2 y b_1, hallar b_2, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, b_1 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,9}$: Reducción a la unidad.

1° paso: Identificamos las cantidades a utilizar. (a_1 y b_1)

2° paso: Calculamos el correspondiente a la unidad, dividiendo $\frac{b1}{a_1}$

3° paso: Multiplicamos el correspondiente de la unidad con a_2 para hallar b_2. ($a_2 \, x \frac{b_1}{a_1} = b_2$)



13 En una feria de la comunidad, Gina vende picarones. Al vender 5 platos de picarones obtuvo S/ 30. ¿Cuánto cuesta un plato de picarones? ¿Cuánto dinero cobró por 12 platos vendidos? ¿Y por 20 platos?

a. **Resuelve** usando una tabla de proporcionalidad y haciendo los cálculos necesarios.

- Un plato cuesta ____________, y por 12 y 20 platos vendidos cobró ____________ respectivamente.

Figura 71: Problema 17 - Cuaderno de trabajo 5 (2019, p.142)

El texto plantea una situación donde la tabla de proporcionalidad es el ostensivo para hallar el cuarto valor faltante. También se observa que no todas las cantidades respecto a la magnitud número de platos son múltiplos o divisores. Por otro lado, los elementos del estado (5,30) son múltiplos. Esto sugiere usar la técnica de reducción a la unidad. Al respecto declaramos la siguiente praxeología: T_1, $t_{1,9}$ y $\tau_{1,9}$

A continuación, en la tabla 20, mostramos el resumen de los tipos de tarea y su cantidad de tareas, técnicas y tecnologías. Así también su ubicación en el cuaderno de trabajo de matemática 5 (2019)

Tabla 20: Praxeología encontrada en el cuaderno de trabajo 5

Tipo de tarea (T)	Tarea (**t**)	Técnica (τ)	Tecnología (θ)
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad	$t_{1,1,2}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde $a_2, b_2 \in$ N y r' es un número decimal.	$\tau_{1,1}$: Factor funcional unitario	$\boldsymbol{\theta}_5$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i es la imagen de u_i por f, es decir: hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$
	$t_{1,2}$: Dado b_2 y r'. Hallar a_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y r' ∈ N	$\tau_{1,2}$: factor funcional inverso unitario	$\boldsymbol{\theta}_6$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i es la imagen de u_i por f, es decir hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $u_i = v_i \div r'$
	$t_{1,4,2}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde r ∈ N y b_1 es decimal	$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario	$\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 …λ (λ

	$t_{1,5}$: dado b_1, b_2. Hallar r, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_2 es múltiplo de b_1	$\tau_{1,5}$: factor escalar múltiplo unitario	real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
	$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1	$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo	
	$t_{1,8}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es divisor a_1	$\tau_{1,8}$: factor escalar divisor	$\boldsymbol{\theta}_3$: para todo *i* de **I,** sí ui se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), vi se divide entre 2, 3, 4 ...n
	$t_{1,9}$: Dado a_1, a_2 y b_1, hallar b_2, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, b_1 es múltiplo de a_1	$\tau_{1,9}$: Reducción a la unidad	$\boldsymbol{\theta}_3$: para todo *i* de **I,** sí ui se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), vi se divide entre 2, 3, 4 ...n $\boldsymbol{\theta}_2$: para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 … λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
	$t_{1,10,1}$: Dado el estado (a_1,b_1), si a_2=nxa_1. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_1, n ∈ N y b_1 es decimal	$\tau_{1,10}$: ampliación del estado	$\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 … λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
	$t_{1,10,2}$: Dado el estado (a_1, b_1), si a_2=nxa_1. Hallar la cantidad asociada a b_1, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_1, b_1 y n ∈ N		
	$t_{1,11}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$ y $r = 1\frac{1}{n}$, donde b_1 y n ∈ N	$\tau_{1,11}$: técnica: serie unitario simple	$\boldsymbol{\theta}_1$: para todo *i, j, k* de **I**, si $u_i = u_j + u_k$ entonces $v_i = v_j + v_k$ $\boldsymbol{\theta}_2$: para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4 … λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ. $\boldsymbol{\theta}_3$: para todo *i* de **I,** sí u_i se divide entre 2,3, 4 … n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), v_i se divide entre 2, 3, 4 ...n
	$t_{1,12}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b1, b2]$ y $r = m\frac{1}{n}$, donde m, n, b_1 n ∈ N	$\tau_{1,12}$: técnica serie unitario compuesto	
T_2: Identificar la correlación entre cantidades de magnitudes absolutas	$t_{2,1}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes absolutas no proporcionales	$\tau_{2,1}$: correlación de no proporcionalidad de magnitudes absolutas	$\boldsymbol{\theta}_5$: Dos magnitudes X y Y tienen una correlación directa, cuando para todo x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_i < y_j$. De manera similar, se establece que tienen correlación inversa, si para todo x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ entonces $y_j < y_i$.
	$t_{2,2}$: Identificar la correlación entre cantidades, de dos magnitudes absolutas proporcionales	$\tau_{2,2}$: correlación de proporcionalidad de magnitudes absolutas	

T_3: Reconocer una relación entre dos magnitudes.	$t_{3,1}$: Reconocer una relación directamente proporcional entre dos magnitudes	$\tau_{3,1}$: conociendo magnitudes directamente proporcionales	$\boldsymbol{\theta}_2$) para todo i de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
3 tipos	14 tareas	13 técnicas	5 tecnologías

Fuente: elaboración propia

De la tabla mostrada y el análisis realizado, se aprecia un total de 23 tareas, donde la presencia de las magnitudes continuas y discretas esta, muy distribuida, siendo un total de 16 magnitudes discretas y 24 continuas. Respeto a estas últimas, en 4 magnitudes se muestra la presencia de cantidades decimales y solo en una, la presencia de cantidades fraccionarias. Al respecto se puede concluir que hay una tendencia marcada a discretizar las magnitudes continuas. También sé observa que la organización matemática del cuaderno de trabajo de 5to grado de primaria (2019) presenta tres tipos de tarea (T_1, T_2 y T_3) y casi la totalidad de los problemas resueltos (20 en total) corresponden a los tipos de tarea (T_1). Además, el texto sugiere la forma de resolver (técnicas) los problemas (tareas); es decir se privilegia el saber – hacer, y respecto a las tareas generadas por T_1 y T_2, se aprecia una diversificación respecto a los cuadernos de trabajo antes analizados. Por otro lado, en el tratamiento de la proporcionalidad se pudo identificar de forma secuencial las siguientes tareas ($t_{2,1} \rightarrow t_{2,2} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{1,5} \rightarrow t_{1,9} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,4,2} \rightarrow t_{1,10,1} \rightarrow t_{1,10,2} \rightarrow t_{1,11} \rightarrow t_{1,12} \rightarrow t_{1,1,2}$); es decir, se inicia el estudio de la proporcionalidad con las tareas ($t_{2,1}$, $t_{2,2}$ y $t_{3,1}$), en adelante lo llamaremos tareas base (T.B). Respecto a las tareas relacionadas a (T_1), en comparación con sus semejantes encontradas en 3ero y 4to de primaria, se evidencia un desprendimiento de tareas que tienen como dato la unidad ($t_{1,4,1}$, $t_{1,3}$ y $t_{1,1,1}$). Así también, las tareas generadas por T_1, se caracterizan porque involucran problemas que promueven el uso de la propiedad aditiva y multiplicativa de la linealidad, excepto ($t_{1,2}$). Por lo tanto, se puede deducir que el cuaderno de trabajo analizado presenta una dura tendencia hacia el análisis del tipo escalar.

Por último, en el cuaderno de trabajo analizado, se observa el inicio de tares con un término decimal ($t_{1,4,2}$ y $t_{1,10,2}$) y tareas con mayor dificultad ($t_{1,9}$, $t_{1,10}$, $t_{1,11}$ y $t_{1,12}$). Sin embargo, es evidente que no existe una gradualidad según el modelo de razonamiento proporcional propuesto por Reyes (2016). En este sentido, en la sección de resultados proponemos una organización matemática de las tareas que permita una apropiación gradual de nuestro objeto de estudio.

5.2.4 Cuaderno de trabajo – Matemática 6


Juan vende queso fresco en el Mercado Central. Hoy tiene $8\frac{1}{2}$ kg de queso para vender el kilogramo a S/ 24. Durante la mañana, vende a un cliente 750 g y a otro, $2\frac{1}{4}$ kg de queso. ¿Cuánto dinero recibe Juan por cada venta?

a. Encierra los datos del problema.

b. Resuelve el problema. ¿Qué unidades de medida usa Juan para despachar el queso?

- Elige una sola unidad de medida para resolver el problema:

☐ kilogramo, kg ☐ gramo, g

c. Completa la tabla.

Queso (gramos)	250	500	750	1000	2000	2250
Costo (S/)				24		

- Juan recibirá ______

Figura 72: Problema 1 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.161)

El texto muestra problemas donde La magnitud kilogramos en la tabla de proporcionalidad se expresan en gramos. Esto sugiere trabajar el problema con la magnitud gramos. También en la tabla se observa cantidades (250g, 500g y 2000g) que no se mencionan en el texto, sin embargo, facilita la solución de la misma cuando sumamos dichas cantidades. Esto nos sugiere el desarrollo de una técnica que promueva el razonamiento aditivo compuesto. Así también es necesario justificar parte de nuestro desarrollo mediante el modelo discursivo de García (2005).

Por lo expuesto para hallar los valores correspondientes 2250 g y 750 presentamos la siguiente secuencia que se muestra en la imagen 73, que llamaremos técnica serie compuesta porque vincula un estado con las relaciones multiplicativas y aditivas.

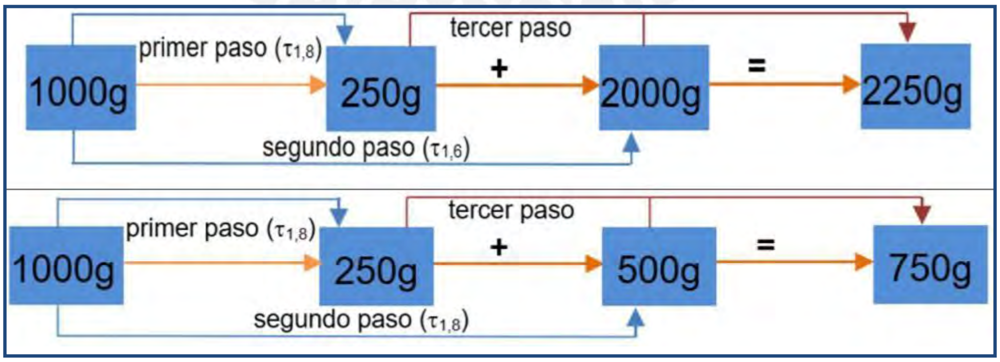


Figura 73: Secuencia de la técnica serie compuesta
Fuente: elaboración propia

Al respecto declaramos la praxeología relacionado a calcular el valor correspondiente a 2250 g que es equivalente a la praxeología que permite hallar el valor correspondiente a 750 g ya que el vínculo de las relaciones multiplicativas alcanza a factores múltiplos y/o divisores.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

$t_{1,13}$: Dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, donde $M_{(a_1)} \pm D_{(a_1)} = a_2$

$\tau_{1,13}$: Serie compuesta ($\tau_{1,8}$ y $\tau_{1,6} \subset \tau_{1,13}$)

$t_{1,8}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, y a_2 es divisor de a_1

$\tau_{1,8}$: factor escalar divisor

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_3)

2° Paso: Identificamos en cuanto disminuye a_1 respecto a_3.

3° paso: realizamos la misma disminución en b_1 para hallar b_3

Luego para hallar el correspondiente a 2000 g, presentamos la $t_{1,6}$ y la $\tau_{1,6}$

$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$:

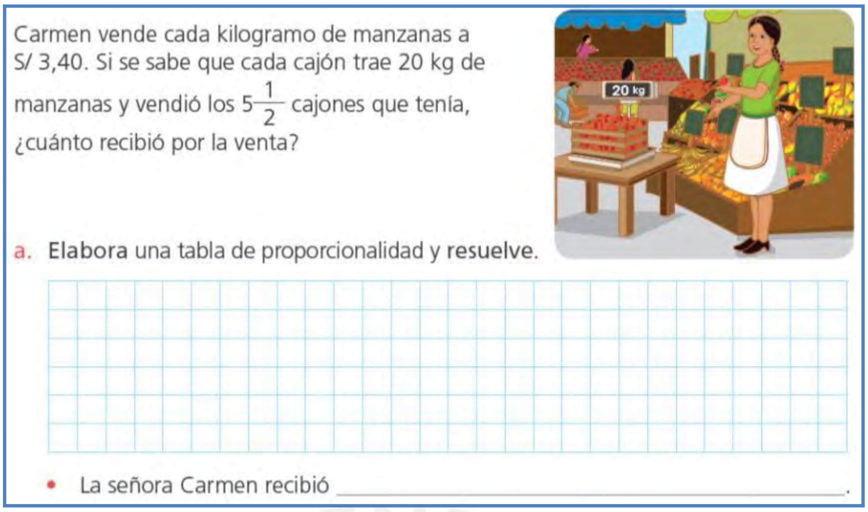
4° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_4)

5° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto a_4.

6° paso: realizamos el mismo aumento en d_1 para hallar d_4

Luego de emplear la $\tau_{1,8}$ y la $\tau_{1,6}$ se considera necesario transitar, según Lamon (1994, Citado en Reyes) por un razonamiento aditivo compuesto para completar los estados en la tabla de proporcionalidad. Esto genera una técnica al cual llamaremos técnica aditiva.

7° paso: sumamos c_3 con d_4 para hallar b_2. ($c_3 + d_4 = b_2$)



Carmen vende cada kilogramo de manzanas a S/ 3,40. Si se sabe que cada cajón trae 20 kg de manzanas y vendió los $5\frac{1}{2}$ cajones que tenía, ¿cuánto recibió por la venta?

a. **Elabora** una tabla de proporcionalidad y **resuelve**.

- La señora Carmen recibió ____________________.

Figura 74: Problema 2 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p .161)

En el texto se distingue dos problemas secuenciales, el primero relaciona la magnitud peso vs la cantidad de cajón de manzana y el segundo relaciona la magnitud kg vs el precio. Ambos pueden ser entendidos del siguiente modo:

- Si cada cajón trae 20 kg de manzanas, ¿Cuánto pesa $5\frac{1}{2}$ cajones?
    - Si 1 kg de manzana se vende a S/3,40. ¿A cuánto se vende $5\frac{1}{2}$ cajones?

Como se observa, es necesario conocer la cantidad de kg de manzana que hay en $5\frac{1}{2}$ cajones para calcular cuánto dinero se recibió por la venta. En ambos el ostensivo es la tabla de proporcionalidad. Respecto al primer problema se puede expresar los $5\frac{1}{2}$ cajones como $(5 + \frac{1}{2})$ cajones, aunque el texto no es explicito, se considera, como un procedimiento en razón del problema que le antecedió. Así en el primer problema se amplía la tabla considerando otros estados. Esto permite que el estudiante transite por un razonamiento aditivo compuesto y llegar a la respuesta. A continuación, en la figura 75, se muestra la tabla de proporcionalidad y un esquema que facilita la comprensión de la técnica

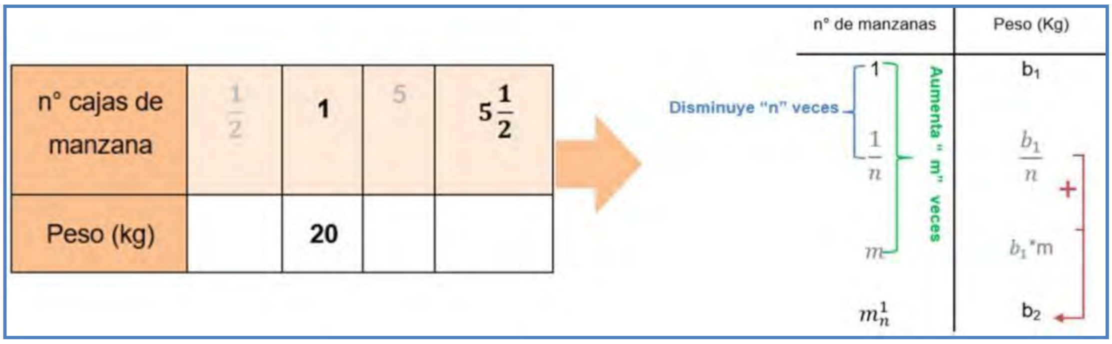


Figura 75: Esquema de la técnica τ1,11
(elaboración propia)

T1: Hallar el término desconocido en una situación proporcional

t1,12: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que [1, r] $\sim$ [b1, b2] y $r = m\frac{1}{n}$, donde "m" y "n" son números naturales.

A continuación, se muestra un esquema que ilustra nuestra técnica.

τ1,2: serie unitario compuesto

1° paso: ubicamos la cantidad homogénea $\frac{1}{n}$

2° paso: identificamos cuantas veces disminuye 1 respecto a "$\frac{1}{n}$".(disminuye n veces)

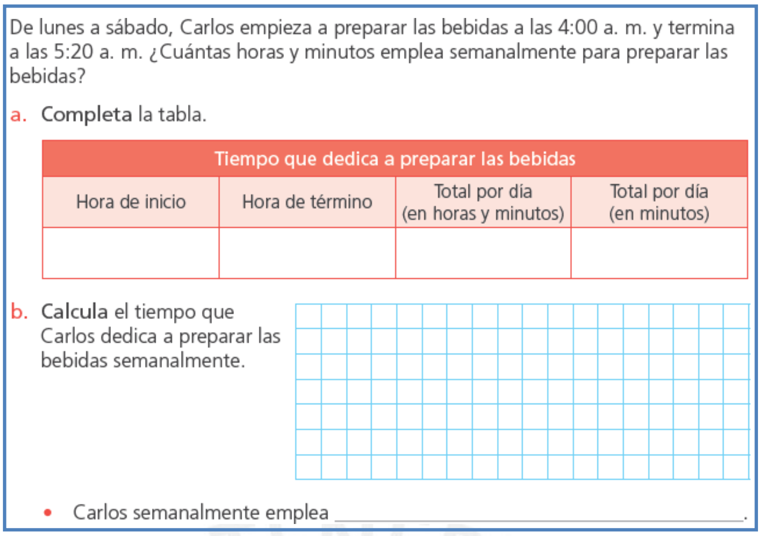
3° paso: dividimos b_1 entre "n" mediante el discurso: si la unidad disminuye "n" veces entonces b_1 también disminuye "n" veces.

4° paso: ubicamos la cantidad homogénea "m"

5° paso: identificamos cuantas veces aumenta 1 respecto a "m". (aumenta m veces)

6° paso: multiplicamos b_1 por "m" mediante el discurso: si la unidad aumenta "m" veces entonces b_1 también aumenta "m" veces.

7° paso: sumamos $\frac{b_1}{n}$ con b_1.m para hallar b2. ($\frac{b_1}{n} + b_1 . m = b_2$)



De lunes a sábado, Carlos empieza a preparar las bebidas a las 4:00 a. m. y termina a las 5:20 a. m. ¿Cuántas horas y minutos emplea semanalmente para preparar las bebidas?

a. **Completa** la tabla.

Tiempo que dedica a preparar las bebidas			
Hora de inicio	Hora de término	Total por día (en horas y minutos)	Total por día (en minutos)

b. **Calcula** el tiempo que Carlos dedica a preparar las bebidas semanalmente.

- Carlos semanalmente emplea ____________________.

Figura 76: Problema 3 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.162)

En el Item (a) es explícito convertir 1h20min a minutos, luego se relaciona la magnitud tiempo (días) con el tiempo (en minutos) y en el Item (b) se puede hacer uso de una tabla de proporcionalidad o algún otro esquema como ostensivo para solucionar el problema. Sobre esto, si se considera los problemas antes analizados, se puede suponer la tabla de proporcionalidad representado en la siguiente figura.

	Tiempo (en días)	Tiempo (en minutos)	
x6	1	80	x6
	6		

Figura 77: tabla de proporcionalidad

(elaboración propia)

Del ostensivo, se observa dos posibles estrategías. El primero considera un enfoque funcional con la técnca del factor funcional unitario ($\tau_{1,1}$) y una segunda estrategia promovido desde una perspectiva escalar donde se usa las relaciones internas con la técnica $\tau_{1,4}$. En este caso se sugiere la conservación de las razones internas. Al respecto Amaro (2017) manifiesta.

> Este procedimiento, basado en la propiedad según la cual las razones internas se conservan puede ser accesible e intuitivo en ciertos casos (cuando la razón interna corresponde a un número de veces entero y pequeño): la mitad, el

doble, 10 veces. Pero cuando la razón interna no se puede expresar mediante un número sencillo y, sobre todo, cuando no se puede expresar mediante un número entero, este procedimiento se dificulta. (p.18)

Por lo tanto, la solución se justifica mediante el modelo discursivo de García (2005) y promueve un tipo de razonamiento multiplicativo Inter. Además, según Floriani (2004), es un problema del tipo unitario diferente unidad y según Cubillos (2017) es un problema de dificultad baja. Por lo expuesto se considera la siguiente praxeología.

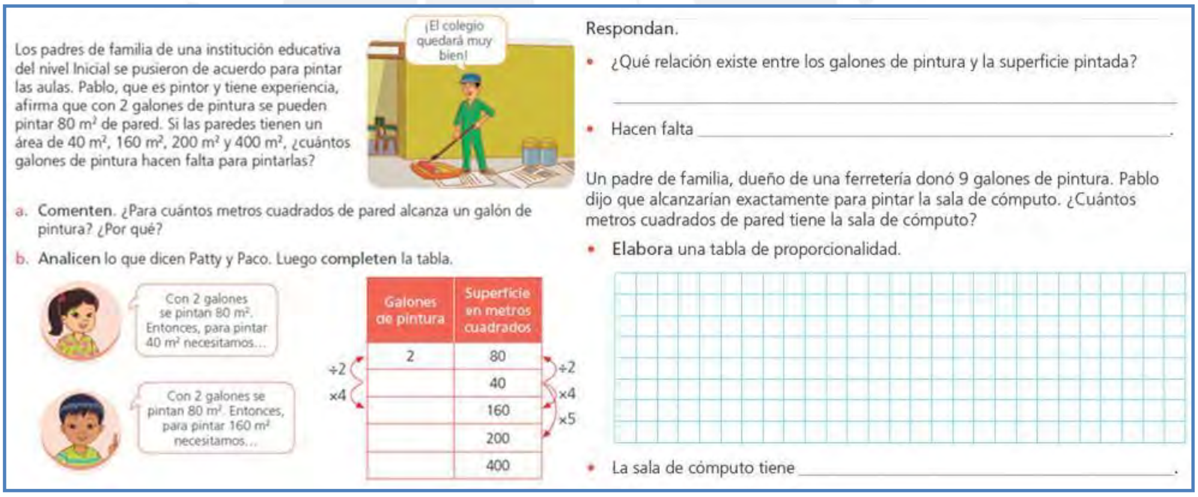
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,4,1}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, y $r \in N$

$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario

1° paso: identificamos el factor escalar. (r)

2° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. ($b_2=b_1 1r$)



Los padres de familia de una institución educativa del nivel Inicial se pusieron de acuerdo para pintar las aulas. Pablo, que es pintor y tiene experiencia, afirma que con 2 galones de pintura se pueden pintar 80 m² de pared. Si las paredes tienen un área de 40 m², 160 m², 200 m² y 400 m², ¿cuántos galones de pintura hacen falta para pintarlas?

a. Comenten. ¿Para cuántos metros cuadrados de pared alcanza un galón de pintura? ¿Por qué?

b. Analicen lo que dicen Patty y Paco. Luego completen la tabla.

Galones de pintura	Superficie en metros cuadrados
2	80
	40
	160
	200
	400

Respondan.

- ¿Qué relación existe entre los galones de pintura y la superficie pintada?
- Hacen falta

Un padre de familia, dueño de una ferretería donó 9 galones de pintura. Pablo dijo que alcanzarían exactamente para pintar la sala de cómputo. ¿Cuántos metros cuadrados de pared tiene la sala de cómputo?

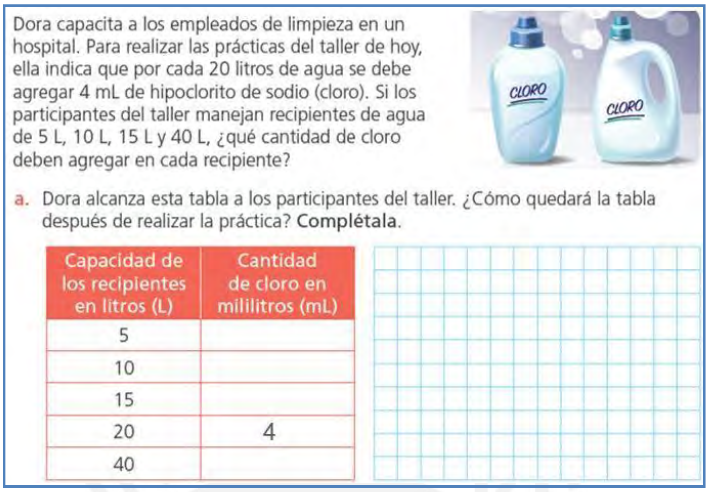
- Elabora una tabla de proporcionalidad.
- La sala de cómputo tiene

Figura 78: Problema 4 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.163)

El problema muestra la tabla proporcional como ostensivo para calcular los valores faltantes justificado en lo expuesto por García (2005) relacionado a su modelo proporcional discursivo. Por otro lado, si se considera los datos presentes en el problema podemos afirmar, según Floriani (2004) que es un tipo de problema múltiplo diferente unidad y según Cubillos (2017) la dificultad que presenta es mediana.

Por último, declaramos que encontramos un tipo de tarea, dos tareas con su respectiva técnica.

Al respecto las praxeologías sería la siguiente: T_1, $t_{1,8}$ y $\tau_{1,8}$. También encontramos la praxeología. T_1, $t_{1,6}$ y $\tau_{1,6}$.



Dora capacita a los empleados de limpieza en un hospital. Para realizar las prácticas del taller de hoy, ella indica que por cada 20 litros de agua se debe agregar 4 mL de hipoclorito de sodio (cloro). Si los participantes del taller manejan recipientes de agua de 5 L, 10 L, 15 L y 40 L, ¿qué cantidad de cloro deben agregar en cada recipiente?

a. Dora alcanza esta tabla a los participantes del taller. ¿Cómo quedará la tabla después de realizar la práctica? **Complétala.**

Capacidad de los recipientes en litros (L)	Cantidad de cloro en mililitros (mL)
5	
10	
15	
20	4
40	

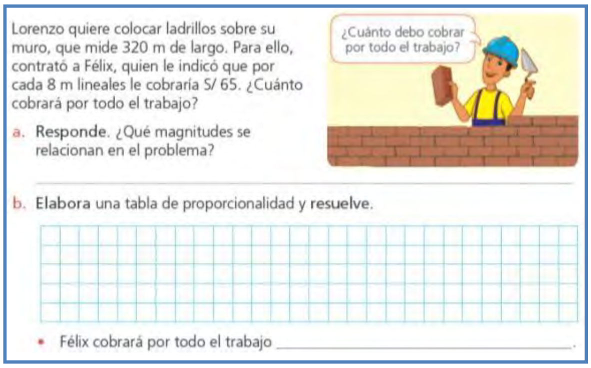
Figura 79: Cuaderno de trabajo 6 (2019, p. 164)

En el problema presenta un tipo de tarea y dos tareas y se observa la tabla de proporcionalidad como ostensivo para hallar el valor faltante. También en las dos tareas sus valores homogéneos son múltiplos o divisores. Esto promueve un razonamiento multiplicativo Intra con una solución que se justifica en el modelo discursivo de García (2005). También, la tabla promueve una tarea del tipo y declarado en la siguiente praxeología.

- Cuando las cantidades homogéneas son múltiplos T_1, $t_{1,6}$ y $\tau_{1,6}$

- Cuando las cantidades homogéneos son divisores T_1, $t_{1,8}$ y $\tau_{1,8}$.

Por último, para calcular la cantidad de cloro que le corresponde a 15L de agua, la tabla como ostensivo sugiere la praxeología. T_1, $t_{1,13}$ y $\tau_{1,13}$



Lorenzo quiere colocar ladrillos sobre su muro, que mide 320 m de largo. Para ello, contrató a Félix, quien le indicó que por cada 8 m lineales le cobraría S/ 65. ¿Cuánto cobrará por todo el trabajo?

a. **Responde.** ¿Qué magnitudes se relacionan en el problema?

b. **Elabora** una tabla de proporcionalidad y **resuelve**.

- Félix cobrará por todo el trabajo ______.

Figura 80: Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.164)

En este contexto se busca emplear la tabla como un ostensivo para hallar cantidades desconocidas que justificamos mediante el modelo discursivo de García (2005). Respecto a su praxeología, declaramos un tipo de tarea, una tarea y una técnica

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos cuantas veces aumenta a_1 respecto en a_2.

3° paso: realizamos el mismo aumento en b_1 para hallar b_2

En la cocina de un hotel elaboran diversos pasteles. Hoy prepararán una nueva receta para agasajar a 720 profesores por su día. Según la receta, ¿qué cantidad de cada ingrediente debe considerar el pastelero para preparar los pasteles?

Pastel de chocolate
(para 36 porciones)

300 gramos de chocolate
4 tazas de harina
2 cucharaditas de polvo para hornear
450 g de mantequilla
750 g de azúcar
8 huevos
1 cucharadita de extracto de vainilla

a. **Calculen** la cantidad de ingredientes necesarios.

Ingredientes	Cantidad de porciones		
	36	72	720
Chocolate			
Harina			
Polvo para hornear			
Mantequilla			
Azúcar			
Huevos			
Extracto de vainilla			

b. **Expliquen**, a un compañero o compañera, el procedimiento que siguieron para calcular las cantidades de cada ingrediente.

Figura 81: Problema 5 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.165)

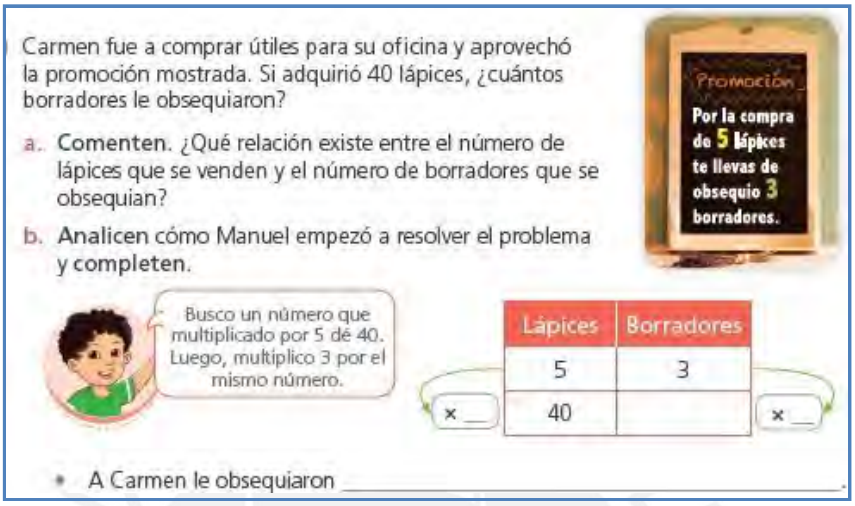
En este problema se sugiere emplear la tabla como un ostensivo para hallar cantidades desconocidas que justificamos mediante el modelo discursivo de García (2005). Respecto a su praxeología declaramos un T_1, $t_{1,6}$, y $\tau_{1,6}$. Luego, en la última magnitud se observa la unidad como dato. Esto sugiere la siguiente praxeología.

$t_{1,5}$: dado a_1 y a_2. Hallar r, de modo que $[1, r] \sim [a_1, a_2]$, a_2 es múltiplo de a_1

$\tau_{1,5}$: factor escalar múltiplo unitario.

1° paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° paso: dividimos a_2 entre a_1 para hallar r. ($\frac{a_2}{a_1} = r$)


Carmen fue a comprar útiles para su oficina y aprovechó la promoción mostrada. Si adquirió 40 lápices, ¿cuántos borradores le obsequiaron?

a. **Comenten**. ¿Qué relación existe entre el número de lápices que se venden y el número de borradores que se obsequian?

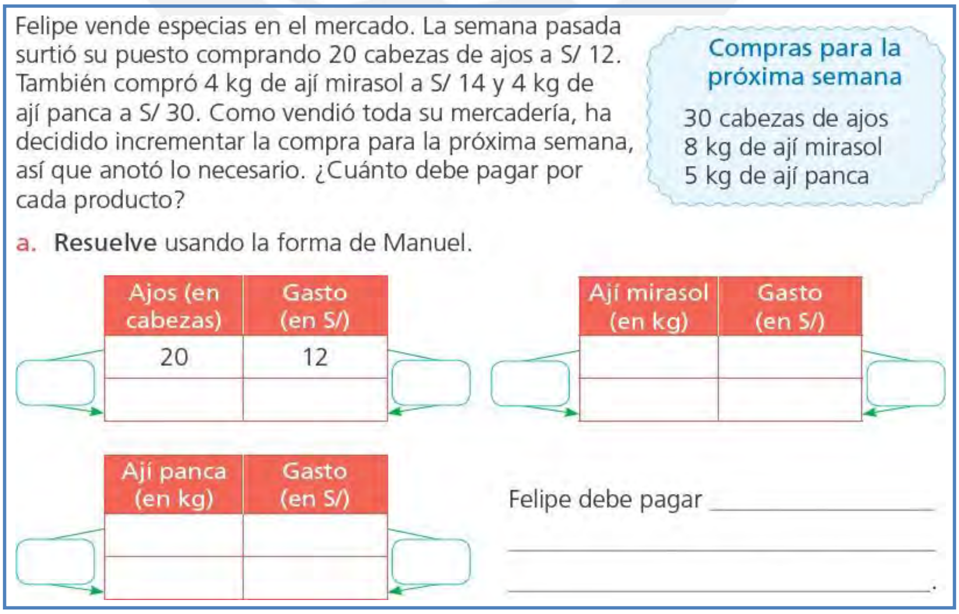
b. **Analicen** cómo Manuel empezó a resolver el problema y **completen**.

Lápices	Borradores
5	3
40	

- A Carmen le obsequiaron ______.

Figura 82: Problema 6 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.165)

El texto es explico en el uso de la tabla de proporcionalidad como ostensivo, también promueve el modelo de razonamiento multiplicativo Inter y la solución se justica en el modelo discurso de García (2005). A respecto declaramos la siguiente praxeología T_1, $t_{1,6}$ y $\tau_{1,6}$


Felipe vende especias en el mercado. La semana pasada surtió su puesto comprando 20 cabezas de ajos a S/ 12. También compró 4 kg de ají mirasol a S/ 14 y 4 kg de ají panca a S/ 30. Como vendió toda su mercadería, ha decidido incrementar la compra para la próxima semana, así que anotó lo necesario. ¿Cuánto debe pagar por cada producto?

Compras para la próxima semana
30 cabezas de ajos
8 kg de ají mirasol
5 kg de ají panca

a. **Resuelve** usando la forma de Manuel.

Ajos (en cabezas)	Gasto (en S/)
20	12

Ají mirasol (en kg)	Gasto (en S/)

Ají panca (en kg)	Gasto (en S/)

Felipe debe pagar ______

Figura 83: Problema 7 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.166)

En el texto es explícito la tabla de proporcionalidad como ostensivo para hallar el cuarto valor faltante y sugiere una solución desde una perspectiva escalar. Además, se encuentra dos tipos de tarea, la primera donde sus cantidades homogéneas son múltiplos y otra tarea donde no lo son. Respecto a la primera tarea planteamos la siguiente praxeología T_1, $t_{1,6}$ y $\tau_{1,6}$ y en la segunda tarea se encontró lo siguiente.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,7}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 no es divisor ni múltiplo de a_1

$\tau_{1,7}$: factor escalar no entero

1° paso: identificamos las cantidades homogéneas. (a_1, a_2)

2° paso: dividimos a_2 entre a_1 para hallar el factor escalar. $(\frac{a_2}{a_1} = r)$

3° paso: multiplicamos b_1 por el factor escalar para hallar b_2. $(b_1 \; x \frac{a_2}{a_1} = b_2)$

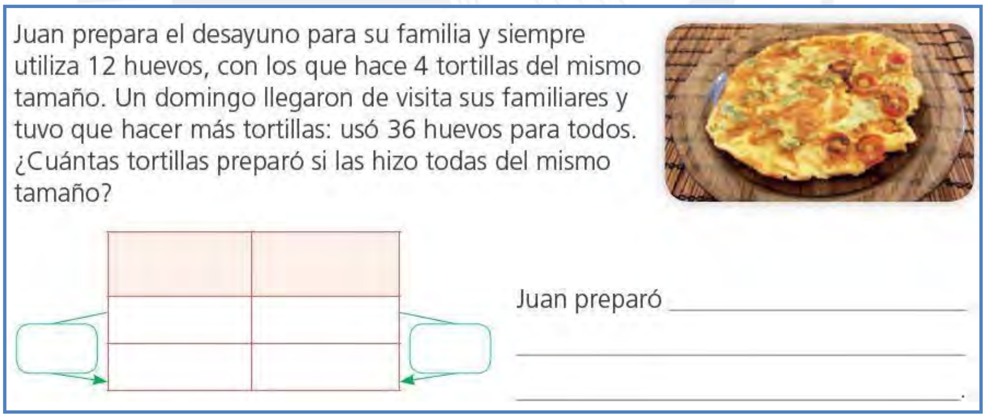


Figura 84: Problema 8 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.166)

El problema es explícito en cuanto usar la tabla de proporcionalidad como ostensivo y promuevo el razonamiento multiplicativo Inter, además la solución se justifica con el modelo discursivo de García (2005). Al respecto plantemos lo siguiente. T_1, $t_{1,6}$ y $\tau_{1,6}$

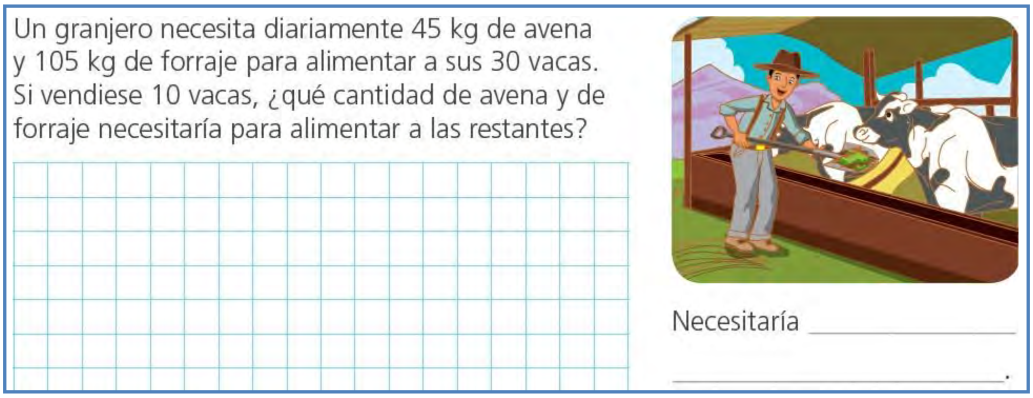


Figura 85: Problema 9 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, 166)

En el problema está explicito calcular el cuarto término, también se observa una relación de multiplicidad entre las cantidades homogéneas que promueve el tránsito hacia el razonamiento multiplicativo Inter. Respecto al ostensivo se considera la tabla de proporcionalidad, aunque el texto no hace referencia alguna, pero si se considera que dicho ostensivo esta, presente en todos los problemas antes analizados, se puede deducir el uso de la tabla de proporcionalidad. Tak como se muestra en la figura 86.

n° vacas	Cantidad de avena (kg)	Cantidad de forraje (kg)
30	45	105
10		

÷ 3

÷ 3

Figura 86: Ostensivo del problema

Fuente: elaboración propia

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación proporcional

$t_{1,8}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, y a_2 es divisor de a_1

$\tau_{1,8}$:

1° Paso: Identificamos las medidas de las cantidades homogéneas. (a_1 y a_2)

2° Paso: Identificamos en cuanto disminuye a_1 respecto a_2.

3° paso: realizamos la misma disminución en b_1 para hallar b_2

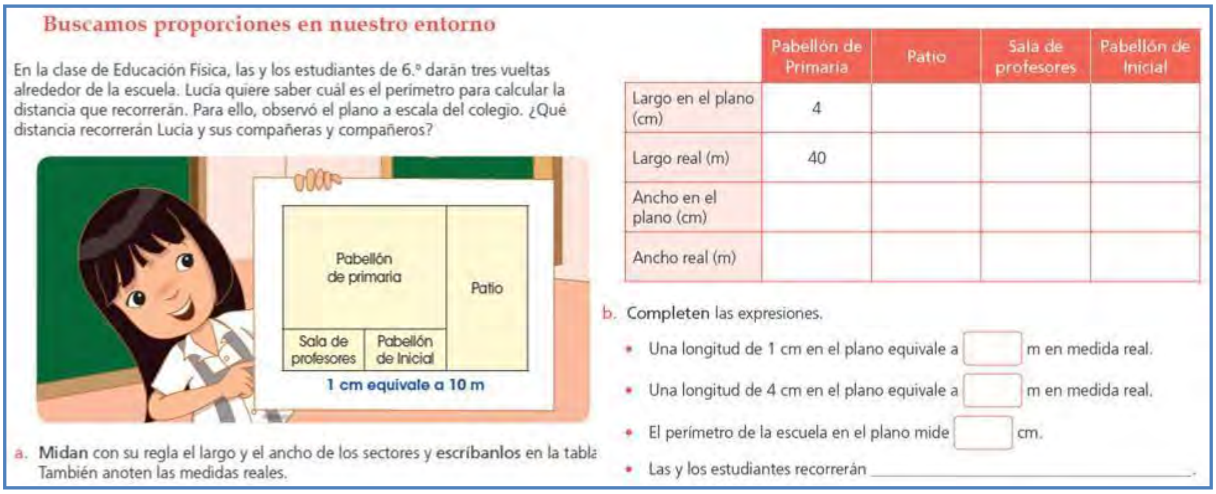


Figura 87: Problema 10 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, p.167)

En el texto está implícito hallar el cuarto término y como ostensivo se usa la tabla de proporcionalidad que promueve un tipo de razonamiento proporcional multiplicativo Inter. Al respecto para Floriani (2004) el problema es del tipo unitario misma unidad y para Cubillos (2017), el problema presenta un grado de dificultad bajo. Al respecto declaramos la siguiente praxeología.

T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad.

$t_{1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$

$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y $r' \in N$

$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario

1° paso: identificamos el factor funcional. (r')

2° paso: multiplicamos el factor funcional por a_2 para hallar b_2. ($r'.a_2=b_2$)

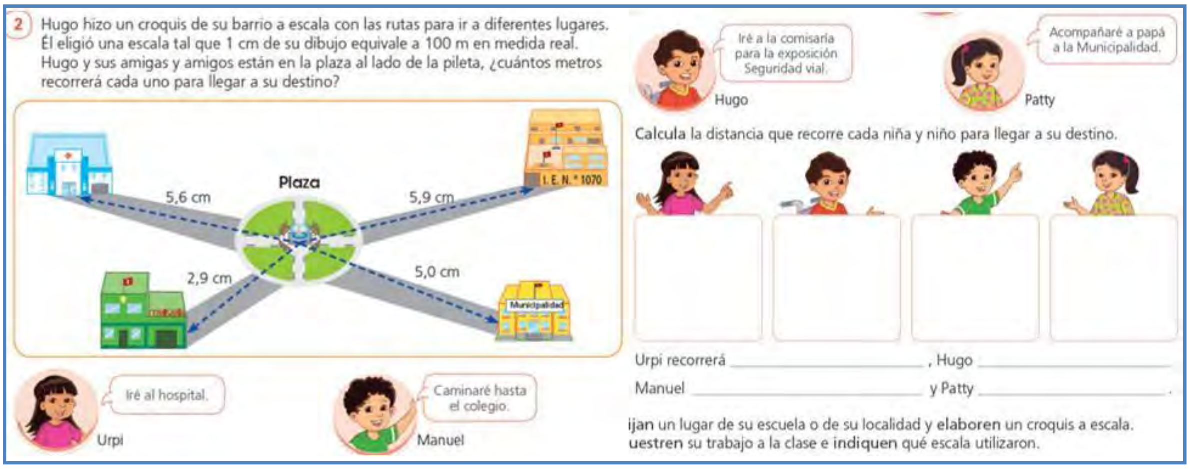


Figura 88: Problema 11 - Cuaderno de trabajo 6 (2019, 168)

Este problema al igual que su antecesor promueve una estrategia de solución relativo al factor funcional, en otras palabras, se evidencia un razonamiento proporcional del tipo multiplicativo Inter, donde es necesario considerar las relaciones externas para su solución. Al respecto declaramos como praxeología, lo siguiente: T_1, $t_{1,1,1}$ y $\tau_{1,1}$

A continuación, en la tabla 21, mostramos el resumen de los tipos de tarea y su cantidad de tareas, técnicas y tecnologías. Así también su ubicación en el cuaderno de trabajo de matemática 6 (2019)

Tabla 21: Praxeologías en el cuaderno de trabajo 6

Tipo de tarea (T)	Tarea (**t**)	Técnica (τ)	Tecnología (θ)
T_1: Hallar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad	$t_{1,13}$: Dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2, de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, donde $M_{(a_1)} \pm D_{(a_1)} = a_2$	$\tau_{1,13}$: Serie compuesta ($\tau_{1,8}$ y $\tau_{1,6} \subset \tau_{1,13}$)	$\boldsymbol{\theta}_1$: para todo *i, j, k* de **I**, si $u_i = u_j + u_k$ entonces $v_i = v_j + v_k$ $\boldsymbol{\theta}_2$: para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ. $\boldsymbol{\theta}_3$: para todo *i* de **I,** sí u_i se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), v_i se divide entre 2, 3, 4 ...n
	$t_{1,12}$: Dado b_1 y r. hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b1, b2]$ y $r = m\frac{1}{n}$, donde "m" y "n" son números naturales	$\tau_{1,12}$: serie unitario compuesto	
	$t_{1,4,1}$: Dado b_1 y r. Hallar b_2, de modo que $[1, r] \sim [b_1, b_2]$, donde b_1, y r ∈ N	$\tau_{1,4}$: factor escalar unitario	$\boldsymbol{\theta}_2$) para todo *i* de **I**, si u_i se multiplica por 2,3, 4... λ (λ real), v_i se multiplica por 2, 3, 4 ...λ.
	$t_{1,6}$: dado a_1, a_2 y b_1. Hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es múltiplo de a_1	$\tau_{1,6}$: factor escalar múltiplo	
	$t_{1,5}$: dado a_1 y a_2. Hallar r, de modo que $[1, r] \sim [a_1, a_2]$, a_2 es múltiplo de a_1	$\tau_{1,5}$: factor escalar múltiplo unitario	
	$t_{1,7}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 no es divisor ni múltiplo de a_1	$\tau_{1,7}$: factor escalar no entero	
	$t_{1,8}$: dado a_1, a_2 y b_1. hallar b_2 de modo que $[a_1, a_2] \sim [b_1, b_2]$, a_2 es divisor a_1	$\tau_{1,8}$: factor escalar divisor	$\boldsymbol{\theta}_3$: para todo *i* de **I,** sí ui se divide entre 2,3, 4... n ($n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), vi se divide entre 2, 3, 4 ...n
	$t_{1,1,1}$: Dado a_2 y r´. Hallar b_2, de modo que $(1, r') \sim (a_2, b_2)$, donde a_2, b_2 y r' ∈ N	$\tau_{1,1}$: factor funcional unitario	$\boldsymbol{\theta}_5$: existe una aplicación lineal f tal que, para todo i de I, v_i

			es la imagen de u_i por f, es decir: hay un real distinto de cero $r' = f(1)$ tal que para todo $i, v_i = r'u_i$
1 tipo	8 tareas	8 técnicas	4 tecnologías

Fuente: Elaboración propia

Del análisis realizado y de la tabla mostrada, se puede apreciar 18 tareas y 38 magnitudes distribuidos entre las diversas tareas, los cuales 13 son discretas y 25 son continuas; sin embargo, solo en 3 problemas se evidencia la presencia de cantidades no enteras, por lo que se puede concluir que hay una tendencia marcada a discretizar las magnitudes continuas. También en la organización matemática se observa un único tipo de tarea (T_1), siendo la tarea ($t_{1,6}$) la que mayor presencia tiene. Además, el cuaderno de trabajo sugiere la forma de resolver (técnicas) los problemas (tareas); es decir se privilegia el saber – hacer. Por otro lado, se privilegia la tabla de proporcionalidad como ostensivo. Respecto al campo numérico se evidencia que abarca los números naturales y fraccionarios. Este último con poca frecuencia; sin embargo, debido a la técnica sugerida en el cuaderno de trabajo se deduce una reutilización de las propiedades aditivas y multiplicativas de la linealidad en los problemas que presentan cantidades fraccionarias evitando los cálculos operativos (multiplicación y/o división) entre números fraccionarios.

Finalmente, en el análisis praxeológico se identificó que el estudio de nuestro objeto matemático inicia de forma secuencial con las tareas ($t_{1,13} \rightarrow t_{1,12} \rightarrow t_{,1,4,1} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{1,5} \rightarrow t_{1,7} \rightarrow t_{1,1,1}$). Sobre esto, el campo numérico de la tarea ($t_{1,13}$ y $t_{1,12}$) abarca los números naturales y fraccionarios, y su respectiva técnica conjugan las propiedades de la linealidad (adición y multiplicación). Al respecto en la sección de resultados se propone iniciar el estudio de la proporcionalidad con tareas cuyo campo numérico abarque los números naturales y promueva un uso exploratorio y secuencial de las propiedades de linealidad.

RESULTADOS

1. Con las herramientas que nos proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico se analizó 74 problemas y se identificó 3 tipos de tarea, 13 tareas, 13 técnicas. Al considerar los resultados, podemos decir que hay una variedad de tareas. Sin embargo, en la mayoría de los casos es explícito el uso de la tabla de proporcionalidad como ostensivo para desarrollar el T_1, sobre todo en 5° y 6° donde el uso del ostensivo representa el 90.5% y 94% respectivamente.

2. Respecto a la $t_{1,1}$ se puedo observar que en 3°, 4° y 6° de primaria se mantiene el tratamiento con los números naturales, en tanto en 5° de primaria un término es un número decimal, esto quiere decir, según Cubillos (2017) que hasta quinto de primaria la tarea paso de un problema de dificultad baja a dificultad mediana, sin embargo, en sexto de primaria el grado de dificultad de los problemas relativos a $t,_{1,1}$ fue baja.

3. Similar situación se presenta con la $t_{1,4}$. De 4° a 5° de primaria. Según Cubillos (2017) la dificultad del problema evoluciona de baja a mediana, sin embargo, en 6° de primaria el grado de dificultad es bajo.

4. En tercero y cuarto de primaria las tareas promueven un modelo de razonamiento proporcional cualitativo, multiplicativo Inter e Intra. En tanto en sexto de primaria se promueve un razonamiento proporcional multiplicativo Inter e Intra. Sin embargo, en las tareas de 5° de primaria se pudo identificar que se promueve todos los modelos de razonamiento proporcional, que son el cualitativo, el multiplicativo Inter e Intra y el aditivo simple y compuesto. En este sentido Ceneida y Salvador (2010) manifiestan que esta estrategia, suelen usar los estudiantes de primaria cuando las relaciones multiplicativas entre sus cantidades no son enteros y concluyen que la estrategia influye en su pensamiento, como consecuencia lo sistematizan. “Es decir, cuando un estudiante emplea la estrategia aditiva en un problema tiende a emplearla en todos los demás sin discriminar su carácter aditivo o lineal”. (Ceneida y Salvador, 2010, p.19). Aunque en la mayoría de los problemas, el texto sugiere una determinada técnica, es importante que el docente en primaria tenga un claro

conocimiento del concepto de proporcionalidad, así también debe conocer distintas técnicas y, las implicancias que conlleva que una razón sea entera o no. Esto permite no limitarse solo a la técnica sugerida por el texto sino también sugerir otro procedimiento, para que el estudiante no sistematice solo una técnica.

5. En la mayoría de los problemas de quinto y sexto de primaria se identificó la presencia de tareas, técnicas y discursos tecnológicos relacionados, según García (2005) a su modelización discursiva. Las tareas son presentadas bajo el supuesto de ser proporcionales, y se asume que se conoce el concepto de magnitud. Además, el uso desmedido de la tabla de proporcionalidad como ostensivo y en ellas líneas o pequeñas flechas que sugieren un tratamiento de la técnica desde una perspectiva de las relaciones internas y en algunos casos externas. Esto permite definir dos conceptos implícitos de la proporcionalidad. El primero relaciona cantidades de un mismo espacio de medida ($\frac{x_j}{x_i} = \frac{y_j}{y_i}$), y el segundo relaciona cantidades de dos magnitudes ($\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_j}{x_j}$).

6. Respecto a los tipos de problemas de proporcionalidad mencionado por Rivas (2013), se identificó que la mayoría son tareas de termino desconocido. Sin embargo, en todos los cuadernos de trabajo, se echa en falta la existencia de técnicas progresivas que vincule el razonamiento proporcional aditivo y multiplicativo. Asu vez, se puede notar que en los 4 cuadernos de trabajo los problemas, en muchos casos solicitan hallar el término desconocido infiriendo que sucede con una magnitud cuando la otra aumenta en el doble, el triple, etc. o disminuye a la mitad, tercera parte, etc.

7. Como resultado de nuestra investigación, proponemos. Primero una Organización Matemática por cada grado, relacionado a una secuencia de las tareas en el tratamiento de la proporcionalidad. Luego a raíz de estas propuestas, se propone una OM respecto al Tipo de tarea, finalmente, a modo de conclusión se propone una OM sobre todas las tareas encontradas en los cuadernos de trabajo.

Propuesta de organización de tareas para tercero de primaria.

Como se ha podido evidenciar en el análisis praxeológico referido al Cuaderno de Trabajo de 3er grado de primaria, las tareas propuestas en el tratamiento de la proporcionalidad tienen la siguiente secuencia ($t_{1,1,1} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{,1,3} \rightarrow t_{2,1}$). Sobre esto proponemos considerar tareas adicionales ($t_{1,4,1}$, $t_{1,14}$, $t_{2,2}$ y $t_{3,1}$) y un reajuste en la secuencia de las tareas, que finalmente concluye en esta propuesta ($t_{2,2} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{1,14} \rightarrow t_{1,4,1} \rightarrow t_{1,3} \rightarrow t_{1,1,1} \rightarrow t_{1,2}$). A continuación, argumentamos nuestra propuesta.

Consideramos iniciar el tratamiento de la proporcionalidad con la tarea $t_{2,2}$ (fig. 53), por lo mismo que propicia un primer acercamiento al razonamiento proporcional cualitativo que se caracteriza. Según Reyes (2016), por ser lógico e intuitivo y reconoce el cambio de una magnitud cuando cambia la otra, en otras palabras "si uno aumenta la otra también aumenta". Luego, relacionamos la tarea ($t_{2,2}$) con la tarea ($t_{2,1}$). Esto permite reconocer que dos magnitudes que aumentan simultáneamente, pueden no ser proporcionales, como es el caso de la edad y la talla (fig. 33)

La tarea ($t_{2,2}$) permite reconocer el aumento y/o disminución simultanea entre dos magnitudes de manera intuitiva, en tanto la tarea ($t_{2,1}$) permite dar cuenta que dicho aumento entre dos magnitudes, no siempre propician situaciones de proporcionalidad. Razón por lo cual, se hace necesario preguntarse ¿Qué características adicionales debe reunir dos magnitudes que aumentan a la vez para propiciar una relación de proporcionalidad directa? En ese sentido, es necesario continuar con problemas que promuevan el desarrollo de la tarea ($t_{3,1}$). Esta tarea, que tienen como último paso en su respectiva técnica el siguiente discurso: "*Comprobamos la existencia de una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes, es decir si uno aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc., su valor correspondiente en la otra magnitud también aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc*." Al respecto, para García (2005), el discurso vendría hacer una convención social que va permitir la construcción de otras técnicas discursivas que favorecen el desarrollo de problemas que promuevan las tareas ($t_{1,1,1}$, $t_{1,2}$ y $t_{1,3}$, $t_{1,4,1}$ y $t_{1,14}$).

Por otro lado, la tarea ($t_{1,14}$) está ausente en las praxeologías encontradas en el cuaderno de trabajo. Sin embargo, dado el nivel al cual va dirigido nuestra investigación se hace necesario considerarlo como parte de la propuesta en la OM, ya que promueve el uso de la propiedad aditiva de la linealidad ($\boldsymbol{\theta}_1$). Al respecto, Simard A. (2018), expresa que desde los menores grados se debe transitar por el principio aditivo de la linealidad e institucionalizarse de manera no formal, considerando solo ejemplos con cantidades que pertenezcan a los números enteros.

A continuación, brindamos un problema que promueve la de tarea ($t_{1,14}$) y su respectiva técnica.

Si 1kg de azúcar cuesta S/.4 y 3kg de azúcar cuesta S/.12. ¿Cuál es el precio de 4kg de azúcar?

Peso (Kg)	$a_1 = 1$	$a_2 = 3$	$a_3 = 1 + 3$
Precio (S/.)	$b_1 = 4$	$b_2 = 12$	$b_3 = 4 + 12$

$\tau_{1,14}$:

1° paso: identificamos las cantidades a utilizar (a_1 y a_2)

2° paso: identificamos que a_1 y a_2 suman a_3

3° paso: sumamos b_1 y b_2 para hallar b_3

Respecto a las tareas correspondientes a T_1, se debe señalar que el texto sugiere un análisis de tipo escalar para la tarea ($t_{1,3}$ y $t_{1,4,1}$) en tanto para la tarea ($t_{1,1,1}$ y $t_{1,2}$) se sugiere un análisis del tipo funcional. En este sentido Reyes (2016) expresa lo siguiente "Por tanto, de este análisis […], nos encontramos con un *razonamiento aditivo*, que precede al *razonamiento multiplicativo escalar*, el cual, se asume ser menos complejo que el *razonamiento multiplicativo funcional*" (p.167), razón por lo cual, en nuestra OM, se considera necesario relacionar $t_{3,1}$ con $t_{1,14}$ para luego dar paso a los problemas que promuevan la tarea ($t_{1,3}$ y $t_{1,4,1}$). Por otra parte, para Carretero (1989) "la división, es evidentemente, una operación más difícil que la multiplicación, a pesar de la estructura multiplicativa subyacente" (p.95). En este sentido se prioriza iniciar con la tarea ($t_{1,4,1}$) y luego relacionarlo con la tarea ($t_{1,3}$). Por último, se desarrolla problemas que promueven la tarea ($t_{1,1,1}$) y lo relacionamos con la tarea ($t_{1,2}$). Tal como se observa en la figura 89

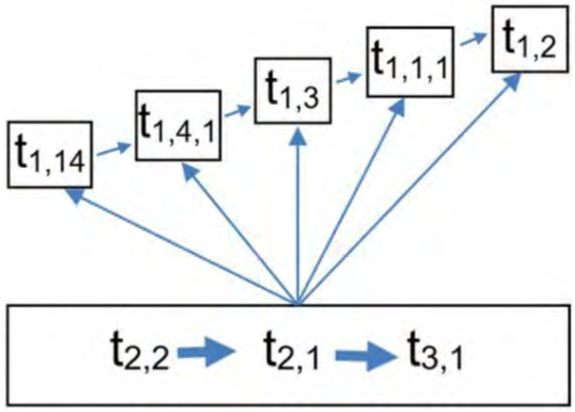


Figura 89: Propuesta de organización de tarea en 3er grado
Fuente: Elaboración propia

Como conclusión, en la figura 89, se puede observar una secuencia entre las tareas ($t_{2,2}$, $t_{2,1}$ y $t_{3,1}$) y debido a su carácter intuitivo y lógico lo llamaremos tareas base (T.B). A su vez, estas tareas contribuyen al desarrollo secuencial de tareas relacionadas a T_1. Estas tareas promueven en el orden siguiente, el razonamiento aditivo y multiplicativo de la proporcionalidad.

Finalmente, es preciso mencionar que en el dominio digital de las tareas generadas por T_1, se considera números naturales y pequeños, con la unidad como dato explícito y/o implícito. Esto genera una técnica que se limita a identificar dos cantidades para proceder con la multiplicación o división de los mismos.

Propuesta de organización de tareas para cuarto de primaria.

En el análisis praxeológico del cuaderno de trabajo, se puedo identificar que el estudio de nuestro objeto matemático inicia de forma secuencial con las tareas ($t_{1,1,1} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{1,4,1} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{2,2} \rightarrow t_{1,3}$); es decir, el tratamiento de la proporcionalidad comienza con problemas para hallar un término desconocido en una situación de proporcionalidad que, a su vez, promueve un razonamiento proporcional multiplicativo inter y/o intra y no se considera tareas que promuevan el razonamiento aditivo de la proporcionalidad. Al respecto, si consideramos el grado al cual está dirigido nuestra investigación, se hace importante resaltar lo expresado por Reyes (2016) en cuanto a la gradualidad del razonamiento proporcional “Por tanto, de este análisis […], nos encontramos con un *razonamiento aditivo*, que precede al *razonamiento multiplicativo escalar*, el cual, se asume ser menos complejo que el *razonamiento multiplicativo* *funcional*" (p.167). En ese sentido proponemos una organización matemática que permite un avance gradual de las tareas.

Por otro lado, en nuestra propuesta consideramos ampliar la diversidad de tareas relacionados a (T_1) e integramos las tareas ($t_{1,14}$, $t_{3,1}$, $t_{1,5}$, $t_{1,6}$ y $t_{1,8}$), que involucran problemas con números enteros que se desprenden de la unidad (excepto $t_{1,5}$) y se incorpora la variable relacionado a múltiplos y divisores entre cantidades. Esto permite incorporar un nuevo discurso, como "aumenta el doble, el triple y disminuye a la mitad, la tercera parte). Respecto al dominio digital, al igual que la OM propuesto para 3^{ero} de primaria se considera números enteros y pequeños, la mayoría de una cifra.

Iniciamos nuestra propuesta de la OM, con las tareas ($t_{2,2} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{3,1}$) y en el orden mencionado, ya que se pueden considerar "tareas base" porque permite construir desde una idea intuitiva, la noción proporcionalidad hasta identificar las condiciones que deben reunir dos magnitudes que aumentan a la vez para propiciar una relación de proporcionalidad directa. Esto favorece el desarrollo de problemas que promuevan las tareas del tipo (T_1). Además, para este tipo de tarea consideramos iniciar de forma secuencial con las tareas ($t_{1,14} \rightarrow t_{1,4,1} \rightarrow t_{1,3} \rightarrow t_{1,1,1} \rightarrow t_{1,2}$). Al respecto, la justificación a lo mencionado esta declarado en la OM elaborado para 3^{ero} de primaria.

Luego de la tarea ($t_{1,2}$) proponemos resolver problemas que promuevan el uso de la propiedad del principio multiplicativo de la linealidad e iniciamos con la tarea ($t_{1,5}$) que tiene como dato la unidad sin embargo entre las cantidades homogéneas contraria a la unidad se presenta relaciones de multiplicidad que permite introducir otros discursos (como aumenta en el doble, el triple, el cuádruple, etc.). A partir de la tarea ($t_{1,5}$) nos desprendemos de la unidad y lo vinculamos con $t_{1,6}$. Lo que permite reforzar el discurso que se desprende de la tarea ($t_{1,5}$) y por último se propone la tarea ($t_{1,8}$) que introduce un discurso contrario (la mitad de un número, la tercera parte, la cuarta parte, etc.) sin embargo no se desprende del principio multiplicativo de la unidad.

En la figura 90, se muestra la secuencia de las tareas respecto a lo que consideramos puede adaptarse a cuarto grado de primaria.

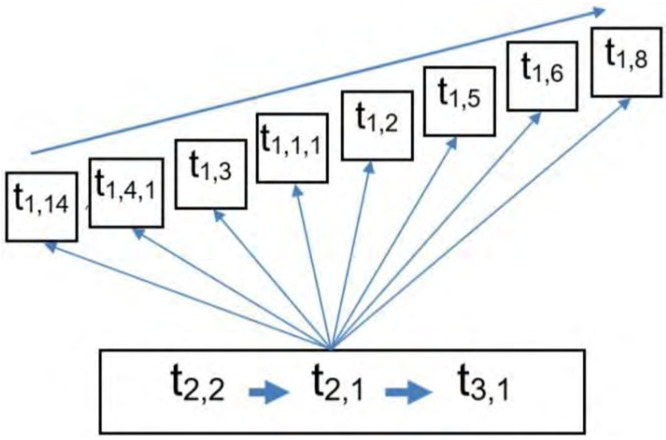


Figura 90: Propuesta de organización de tareas en 4º grado
Fuente: Elaboración propia

Como conclusión, en la figura 90, se puede observar una secuencia entre las tareas ($t_{2,2}$, $t_{2,1}$ y $t_{3,1}$) y debido a su carácter intuitivo y lógico lo hemos llamado tareas base. A su vez, estas tareas contribuyen al desarrollo de las tareas generadas por T_1, que se caracterizan porque involucran problemas de proporcionalidad en las que aparece el valor unitario como dato explícito y/o implícito. Esto genera una técnica que se limita a identificar dos cantidades para proceder con la multiplicación o división de los mismos. También hay tareas que promueven el uso de la propiedad aditiva y multiplicativa de la linealidad. Sobre esto, Simard A. (2012), expresa que los problemas de proporcionalidad que promueven las propiedades aditivas y multiplicativa son característicos de la noción de proporcionalidad.

Propuesta de organización de tareas para quinto de primaria.

En el análisis praxeológico del cuaderno de trabajo, se pudo identificar que el tratamiento de la proporcionalidad, respecto a las tareas presenta la siguiente secuencia ($t_{2,1} \rightarrow t_{2,2} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{1,5} \rightarrow t_{1,9} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,4,2} \rightarrow t_{1,10,1} \rightarrow t_{1,10,2} \rightarrow t_{1,11} \rightarrow t_{1,12} \rightarrow t_{1,1,2}$); es decir, se inicia el estudio de la proporcionalidad con las “tareas base” ($t_{2,1}$, $t_{2,2}$ y $t_{3,1}$) que promueven la construcción sobre una idea intuitiva de proporcionalidad hasta identificar las condiciones que deben reunir dos magnitudes que aumentan a la vez para propiciar una relación de proporcionalidad directa, que favorecen el desarrollo de tareas del tipo (T_1). Respecto a este tipo de tarea, en comparación con las tareas encontradas en 3^{ero} y 4to de primaria, se observa el desprendimiento de algunas tareas que tienen como dato la unidad ($t_{1,4,1}$, $t_{1,3}$ y $t_{1,1,1}$), también se evidencia el inicio de tares con un término decimal ($t_{1,4,2}$ y $t_{1,10,2}$) y tareas con mayor dificultad ($t_{1,9}$, $t_{1,10}$, $t_{1,11}$ y $t_{1,12}$). Sin embargo, es evidente que no existe una gradualidad según el modelo de razonamiento proporcional propuesto por Reyes (2016). En este sentido proponemos una organización matemática de las tareas que permita una apropiación gradual de nuestro objeto de estudio. Para esto se considera necesario añadir la tarea ($t_{1,14}$ y $t_{1,4,1}$). Así también consideramos apropiado añadir una nueva tarea ($t_{,15}$) y generar un vínculo con el tema de fracciones, ampliamente desarrollado en el cuaderno de trabajo de 4^{to} de primaria. Además, se trata de problemas que promuevan el uso de las fracciones en caso sencillos que sugieren el discurso “se reduce a la mitad”, “se reduce en su tercera parte”, “se reduce en su cuarta parte”, etc. Por ejemplo:

$t_{,15}$: *La ecoeficiencia comienza por casa. Si David se entera que la electricidad que consume su televisor en una hora es 1000 watts, ¿Cuánto consume durante media hora?*

Nuestra propuesta sobre la organización de las tareas, presenta la siguiente secuencia. ($t_{2,2} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{1,14} \rightarrow t_{1,4,1} \rightarrow t_{1,4,2} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{1,5} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,15} \rightarrow t_{1,9} \rightarrow t_{1,10,1} \rightarrow t_{1,10,2} \rightarrow t_{1,11} \rightarrow t_{1,12}$). Al respecto la tarea ($t_{2,2}$) promueve un primer acercamiento al razonamiento proporcional cualitativo. Según Reyes (2016), se caracteriza por ser lógico e intuitivo y reconoce el cambio de una magnitud cuando cambia la otra, luego la tarea ($t_{2,1}$) promueve reconocer que no toda relación de aumento entre dos magnitudes genera situaciones de proporcionalidad, en tanto la tarea ($t_{3,1}$) permite reconocer que condiciones deben cumplir dos magnitudes para ser considerados directamente proporcionales y tiene como último paso de su respectiva técnica el siguiente discurso: “si uno aumenta el doble, el triple, etc. Su valor correspondiente en la otra magnitud también aumenta el doble, el triple, etc. Para García (2005), este discurso es una convención social que propicia la construcción de técnicas que favorecen el desarrollo de problemas que promueven las tareas del tipo T_1.

Respecto a las tareas correspondiente a T_1, se propone iniciar con la tarea ($t_{1,14}$) ya que promueve el uso de la propiedad aditiva de la linealidad. Sobre esto, Simard A. (2018) manifiesta que es necesario transitar por el principio aditivo de la linealidad desde los grados menores e institucionalizarse de manera no formal, considerando solo cantidades que pertenezcan a los números enteros. Luego se sugiere continuar con las tareas ($t_{1,4,1} \rightarrow t_{1,4,2} \rightarrow t_{1,2} \rightarrow t_{1,5}$), que se caracterizan por la presencia de la unidad como un dato explícito y/o implícito. Esto genera una técnica que se limita a identificar dos cantidades para luego proceder con la multiplicación o división de los mismos. Además, la técnica para la tarea ($t_{1,4,1}$ y $t_{1,4,2}$) promueve un análisis de tipo escalar en tanto la tarea ($t_{1,2}$) sugiere un análisis del tipo funcional, y la tarea ($t_{1,5}$) propicia un primer acercamiento al discurso “el doble, el triple, etc.”. En ese sentido Reyes (2016) manifiesta que el razonamiento multiplicativo escalar es menos complejo que el razonamiento multiplicativo funcional. Luego de resolver la tarea ($t_{1,5}$) sugerimos resolver problemas que promuevan las tareas ($t_{1,6} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,15} \rightarrow t_{1,9}$), que tiene como principal característica el desprendimiento de la unidad como dato, excepto ($t_{1,15}$). Sin embargo, la técnica ($\tau_{1,8}$) resuelve la tarea ($t_{1,15}$). Además, la tarea ($t_{1,6}$ y $t_{1,8}$) incorpora variables relacionado a múltiplos y divisores entre cantidades. Esto permite incorporar un nuevo discurso (el doble, el triple, la mitad, la tercera parte, etc). continuamos la propuesta con el desarrollo de la tarea ($t_{1,15}$), que, a su vez, genera un vínculo con los números fraccionarios y refuerza el discurso de “la mitad, la tercera parte, etc. de un número”; en tanto la técnica relacionada a la tarea ($t_{1,9}$) es la unión de la técnica de la tarea $t_{1,6}$ y $t_{1,8}$.

Finalmente, se sugiere continuar con problemas que promuevan la tarea ($t_{1,10,1} \rightarrow t_{1,10,2} \rightarrow t_{1,11} \rightarrow t_{1,12}$). Sobre esto, la tarea ($t_{1,10,1}$ y $t_{1,10,2}$) se caracteriza por la presencia de dos cantidades que forman un único estado y moviliza de manera tácita el discurso relacionado a los múltiplos y divisores entre cantidades (el doble, el triple, la mitad, tercera parte, etc.) y la tarea ($t_{1,11}$ y $t_{1,12}$) en su desarrollo movilizan los procedimientos de la tarea ($t_{1,14}$ y $t_{1,15}$), es decir ($\tau_{1,14}$ y $\tau_{1,15} \subset \tau_{1,11}$ y $\tau_{1,12}$).

En la figura 91, se muestra la secuencia de las tareas respecto a lo que consideramos puede adaptarse a quinto grado de primaria.

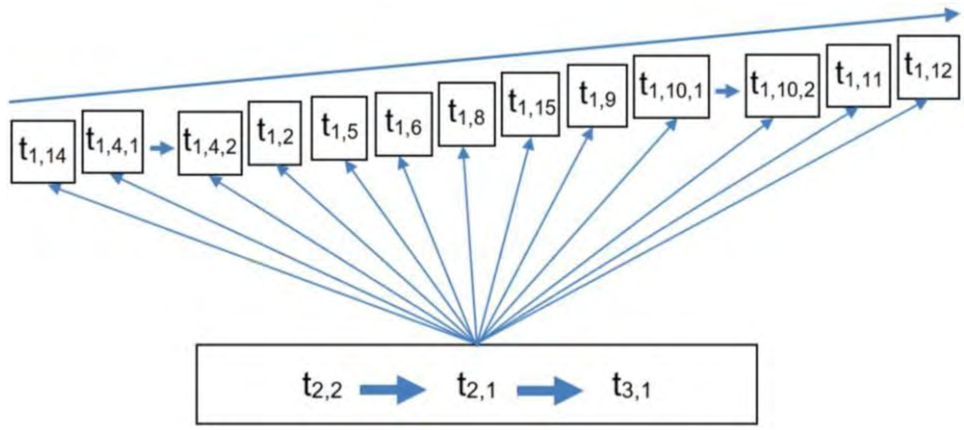


Figura 91: Propuesta de organización de tareas en 5º grado
Fuente: Elaboración propia

Como conclusión, en la figura 91, se puede observar una secuencia entre las Tareas Base ($t_{2,2}$, $t_{2,1}$ y $t_{3,1}$). Esto debido a su carácter intuitivo y lógico. A su vez, estas tareas contribuyen al desarrollo de tareas generadas por T_1, que se caracterizan porque involucran problemas que promueven el uso de la propiedad aditiva y multiplicativa de la linealidad, excepto ($t_{1,2}$). Por lo tanto, se puede concluir que el cuaderno de texto de 5to de primaria presenta una dura tendencia hacia el análisis del tipo escalar.

Propuesta de organización de tareas para sexto de primaria.

En el análisis praxeológico del cuaderno de trabajo de 6to grado de primaria, se identificó que el tratamiento de la proporcionalidad inicia de forma secuencial con las tareas ($t_{1,13} \rightarrow t_{1,12} \rightarrow t_{,1,4,1} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{1,5} \rightarrow t_{1,7} \rightarrow t_{1,1,1}$). Sobre esto, el campo numérico de la tarea ($t_{1,13}$ y $t_{1,12}$) abarca los números naturales y fraccionarios y su respectiva técnica conjugan las propiedades de la linealidad (adición y multiplicación). Al respecto consideramos necesario iniciar el estudio con tareas cuyo campo numérico abarque los números naturales y promueva un uso exploratorio de las propiedades de linealidad, como es el caso de la tarea ($t_{1,8}$ y $t_{1,6}$), también es necesario añadir y promover la tarea ($t_{1,14}$) dado que ($\boldsymbol{\tau_{1,14} \subset \tau_{1,12} \subset \tau_{1,13}}$). De esta forma se puede vincular la tarea ($t_{1,8}$, $t_{1,6}$ y $t_{1,14}$) con la tarea ($t_{1,13}$ y $t_{1,12}$). También consideramos necesario añadir una nueva tarea ($t_{1,16}$) y generar un vínculo con el tema de porcentaje, con casos simples (10%, 25%, 50%, 75%) que implícitamente tiene relación con las fracciones. Por ejemplo:

$t_{1,16}$: un pintor tarda 8 horas en pintar una superficie de $40m^2$. ¿En cuántas horas pinta otra superficie equivalente al 25% de la superficie anterior?

Por otro lado, no se encuentra tareas en las que se discrimine si una situación es o no de proporcionalidad directa e implícitamente se asume que toda situación tiene una relación directa. Al respecto se sugiere añadir las tareas bases ($t_{2,1}$, $t_{2,2}$ y $t_{3,1}$) cuyo propósito bien podría responder a la pregunta ¿Qué características determinan si una relación es de proporcionalidad directa o no?

Nuestra propuesta sobre la organización de las tareas presenta la siguiente secuencia ($t_{2,2} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{1,14} \rightarrow t_{1,4,1} \rightarrow t_{,1,5} \rightarrow t_{1,1,1} \rightarrow t_{1,6} \rightarrow t_{1,8} \rightarrow t_{1,15} \rightarrow t_{1,7} \rightarrow t_{1,16} \rightarrow t_{1,12} \rightarrow t_{1,13}$). En principio la tarea ($t_{2,2}$) promueve un primer acercamiento al razonamiento cualitativo, en palabras de Reyes (2016) se caracteriza por ser lógico e intuitivo, la tarea ($t_{2,1}$) permite conocer que dos magnitudes que aumentan simultáneamente pueden no ser proporcionales, como es el caso de la edad con la masa corporal y la tarea ($t_{3,1}$) permite conocer que características adicionales debe reunir dos magnitudes que aumentan a la vez para propiciar una relación de proporcionalidad directa. En tanto los problemas que promueven la tarea ($t_{1,14}$) hacen uso de la propiedad aditiva de la linealidad y autores como Simard A. (2018) sugiere institucionalizar de manera no formal la propiedad aditiva y multiplicativa de la linealidad desde grados menores, luego se sugiere continuar con la tarea ($t_{,1,5}$ y $t_{1,1,1}$) ya que promueve el razonamiento multiplicativo escalar y funcional respectivamente. En este sentido, Reyes (2016), expresa. "Por lo tanto, de este análisis […], nos encontramos con un razonamiento aditivo que precede al razonamiento multiplicativo escalar, el cual se asume ser menos complejo que el razonamiento multiplicativo funcional". (p.167). luego, comenzamos a desprendernos de la unidad sin desligarnos del campo de los naturales y sugerimos continuar con la ($t_{1,6}$ y $t_{1,8}$), que se caracteriza por promover el uso de la propiedad multiplicativa de la linealidad e incorpora la variable relacionado a múltiplo y divisores entre cantidades movilizando el discurso "aumenta en el doble, el triple, disminuye en su mitad, tercera parte, etc." La tarea ($t_{1,15}$) se deslinda del campo numérico de los naturales e introduce el vínculo con las fracciones con problemas sencillos que permite reforzar el discurso "se reduce a la mitad, a la tercera parte, etc." y la tarea ($t_{1,7}$) se caracteriza porque las cantidades de sus magnitudes son números enteros; sin embargo, reutiliza la noción de fracción al determinar el factor escalar. Luego sugerimos vincular la $t_{1,7}$ con la $t_{1,16}$, ya que este último promueve un primer acercamiento con la noción de porcentaje, con problemas sencillos que se vinculan con la noción de fracción y culminamos con el desarrollo de la tarea ($t_{1,12} \rightarrow t_{1,13}$) que promueve la reutilización de los números naturales y fraccionarios. Además, en su procedimiento se conjugan las propiedades aditivas y multiplicativas de la linealidad.

En la figura 92, se muestra la secuencia de las tareas respecto a lo que consideramos puede adaptarse a sexto grado de primaria.

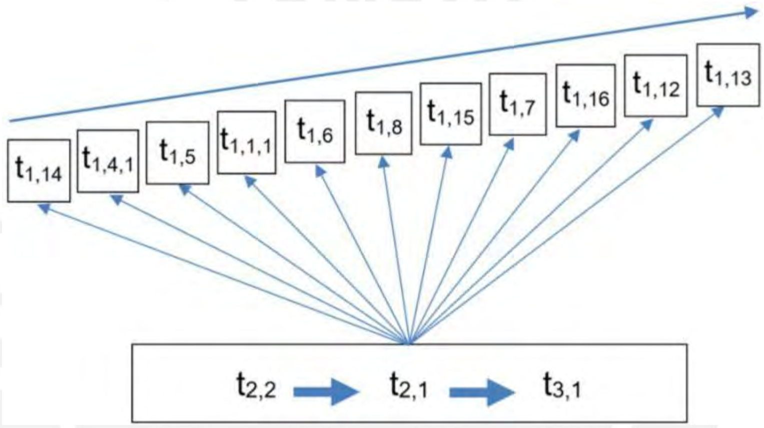


Figura 92: Propuesta de organización de las tareas en 6to grado
Fuente: Elaboración propia

Como conclusión, en la figura 92, se puede observar una secuencia entre las tareas base ($t_{2,2}$, $t_{2,1}$ y $t_{3,1}$) que a diferencia de la organización propuesta en los grados anteriores habría que considerar el tamaño en cuanto al digito de las cantidades. A su vez, estas tareas contribuyen al desarrollo secuencial de tareas relacionadas a T_1, que inicia con tareas que promueven el uso de la propiedad aditiva y multiplicativa de la linealidad y culmina en tareas cuyas técnicas conjugan las propiedades de la linealidad (adición y multiplicación)

Propuesta de integración de los tipos de tarea

De manera global, en la OM de los textos analizados se pudo observar que la proporcionalidad inicia con tareas del tipo T_1, relacionado a calcular el término desconocido en una situación de proporcionalidad, seguido de tareas del T_2 que permite identificar la correlación entre cantidades y finaliza con tareas del tipo T_3, relacionado a reconocer una relación directamente proporcional entre dos magnitudes. Al respecto se considera necesario una OM que inicie con las tareas del tipo T_2, seguido de tareas del tipo T_3 y culminar con las tareas del T_1, por razones que a continuación justificamos.

A partir de las Tareas del tipo T_2 se obtiene un generador de tareas GT_2, donde sus variables didácticas v_i están relacionados a la proporcionalidad o no de las magnitudes, sean estas explicitas o implícitas y se obtuvo las tareas $t_{2,1}$ y $t_{2,2}$. Al respecto un ejemplo de la tarea $t_{2,2}$ lo podemos ver en la figura 53. La $t_{2,2}$ propicia un primer acercamiento al razonamiento proporcional que se caracteriza por ser lógico e intuitivo y reconoce el cambio de una magnitud cuando cambia la otra, en otras palabras “si uno aumenta la otra también aumenta”.

Sin embargo, es necesario que la tarea $t_{2,2}$ lo relacionemos inmediatamente con tareas $t_{2,1}$. Está relación permite reconocer que existen relaciones entre cantidades de las magnitudes que aumentan a la vez, pero necesariamente no son proporcionales. Como ejemplo tenemos, la figura 33. Ahora, al considerar el nivel al cual esta, dirigido nuestra investigación, es necesario que los estudiantes confronten situaciones que les permita diferenciar relaciones entre cantidades proporcionales y no proporcionales que más allá de poder establecer dicha diferencia, pueda generar un propósito mayor que promueva una discusión sobre que, características determinan que una situación sea de proporcionalidad directa. Por ejemplo:

> *Una empresa de telefonía fija promociona la instalación de teléfono a un costo mensual de S/.50 soles con llamadas ilimitadas a teléfonos fijos de cualquier operador y llamada controlada por 60min a cualquier operador móvil (celulares) y pasado los 60min se recarga S/.0.40 por minuto. Si José, en su facturación mensual observa que debe pagar S/.80 por 135min en llamadas a operadores móviles. Entonces ¿tendrá que abonar el doble, si hace uso del teléfono para llamar a celulares por el doble de tiempo?*

Como se puede observar en el ejemplo, resulta ser cierto la afirmación “a mayor tiempo de llamada, mayor será el costo a pagar”, sin embargo, el costo fijo aplicado al servicio de telefonía deslinda de la proporcionalidad.

Después de tener claro que no toda magnitud que aumentan o disminuyen a la vez propician situaciones de proporcionalidad, es necesario preguntarnos. ¿Qué otra característica(s) debe reunir dos magnitudes que aumentan a la vez para ser considerado una situación de proporcionalidad directa? Motivo por el cual, consideramos relacionar T_2 con T_3. Al respecto las tareas del Tipo T_3 promueven reconocer una situación de relación directamente proporcional entre dos magnitudes basados en dos características. El primero en reconocer una relación entre magnitudes justificado en el modelo de razonamiento proporcional cualitativo, en otras palabras, transitamos por $t_{2,2}$, en el sentido siguiente "si una magnitud aumenta la otra también aumenta". Una segunda característica es que dicho aumento debe mantener una relación entre sus cantidades homogéneas, quiere decir que, si uno aumenta el doble, el triple, etc. la otra cantidad también aumenta en el doble, el triple, etc. Al respecto para García (2005), estás características vendría hacer parte de su modelo discursivo proporcional, lo cual se justifica como una convención social y permite la construcción de técnicas discursivas que bien pueden facilitar el desarrollo de las tareas del tipo T_1. Esta relación entre los tres tipos de tarea lo podemos apreciar en la figura 93.

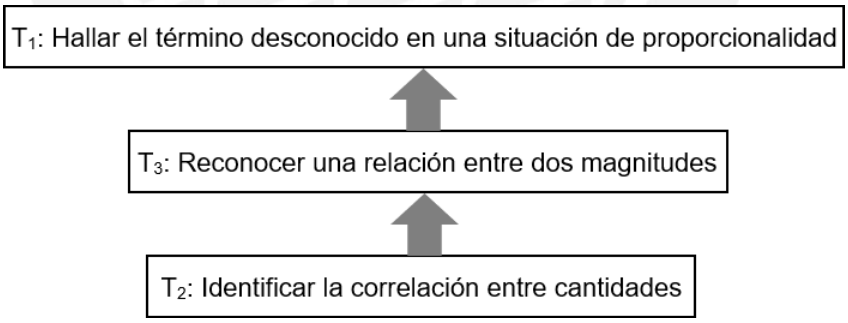


Figura 93: Relación entre los tipos de tarea

Propuesta de integración de tareas

En las propuestas de la organización de tareas desarrollada para los cuadernos de trabajo de 3ero, 4to, 5to y 6to de primaria esta explícito la necesidad del empoderamiento de las tareas base. Asimismo, en cada grado se justifica su respectiva secuencia ($t_{2,2} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{3,1}$) y desarrollo previo a las tareas generadas por T_1. Razón el cual, este apartado lo dedicaremos a desarrollar una integración de todas las tareas relacionados a T_1.

Del tipo de tarea T_1, relacionada con Hallar el término desconocido en una situación de proporcionalidad se obtiene 13 subtipos de tareas a partir del generador GT_1, donde sus variables didácticas v_i se relacionan con el conjunto numérico, la multiplicidad o no entre las cantidades y si son divisores o no. Al respecto cada sub tipo de tarea presenta su propia técnica, la gran mayoría sugerido de manera explicito o implícito por los cuadernos de trabajo analizados.

Al considerar el nivel al cual está dirigido nuestra investigación, es necesario proponer una organización de las tareas del tipo T_1 que promuevan el conocimiento y apropiación de diversas técnicas de manera progresiva. Siendo el primer objetivo permitir que el estudiante disponga de una gama de procedimientos que le permita calcular el valor faltante en una relación de proporcionalidad y también poder comparar las técnicas y elegir la más eficiente (en el sentido de tiempo y esfuerzo) dependiendo de las variables didácticas involucradas.

Por otro lado, es necesario declarar una tarea adicional (que llamaremos $t_{1,14}$) no propuesto en los cuadernos de trabajo. Sin embargo, su técnica es un paso para técnicas superiores. En cuanto a la tarea $t_{1,14}$, que se refiere al uso de la propiedad aditiva de la linealidad ($\boldsymbol{\theta}_1$), para Simard A. (2018), es necesario que en grados menores debe hacerse explicita e institucionalizar de manera no formal haciendo uso de ejemplos con cantidades que pertenecen a los números enteros.

$t_{1,14}$: Si sabemos que 3kg de azúcar cuesta S/6 y 4kg cuesta S/8. ¿Cuál es el precio de 7kg de azúcar?

Cantidad (kg)	$3=a_1$	$4=a_2$	$7=a_3$
Precio (S/)	$6=b_1$	$8=b_2$	$b_3=$

$\tau_{1,14}$:

1° paso: identificamos que a_1 y a_2 suman a_3

2° paso: sumamos b_1 y b_2 para hallar b_3

También ha sido necesario Crear otras tareas no presentes en los cuadernos de trabajo ($t_{1,14}$, t_{15} y t_{16}). El primero manipula la propiedad aditiva de la linealidad y permite generar vínculos con tareas que conjugan el principio aditivo y multiplicativo de la linealidad, el segundo genera un vínculo con la noción de fracción y el tercer con la de porcentaje.

En la figura 94, se puede apreciar que las técnicas $\tau_{1,14}$, $\tau_{1,1,1}$, $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ y $\tau_{1,4}$ pertenece al grupo de técnicas que denominaremos organización matemática inicial (OMI) y se caracterizan por describir situaciones de carácter multiplicativo y/o división y su variable didáctica relacionado al campo numérico pertenecen a los números naturales y son en su mayoría de uno o dos dígitos, con presencia implícita o explicita de la unidad como dato. Respecto a la tarea $\tau_{1,14}$ compartimos lo expresado por Simard A. (2018), en cuanto a lo privilegiado que es la propiedad aditiva de la linealidad en el sentido que favorece el inicio en la apropiación progresiva de técnicas relacionadas a tareas del tipo T_1. En este sentido se sugiere iniciar con tareas que promueva la técnica $\tau_{1,14}$ seguido de $\tau_{1,1,1}$, $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ **y** $\tau_{1,4}$.

La necesidad de construir un empoderamiento progresiva de las técnicas propicia la construcción de la misma al ampliar las características de las variables didácticas relacionadas a tareas que determinan las técnicas inmersas en la OMI. Al respecto en la figura 93, se observa las técnicas $\tau_{1,5}$, $\tau_{1,6}$, $\tau_{1,8}$, $\tau_{1,9}$ $\tau_{1,1,2}$ y $\tau_{1,4,2}$ que pertenece al grupo que denominaremos organización matemática media (OMM). Asimismo, en el desarrollo de los pasos de la técnica $\tau_{1,1,2}$ y $\tau_{1,4,2}$ se observa la presencia de la unidad y los mismos procedimientos de las técnicas que la preceden, es decir ($\tau_{1,1,2}=\tau_{1,1,1}$ y $\tau_{1,4,2}=\tau_{1,4,1}$) el cambio de la OMI a OMM obedece a la dificultad multiplicativa que genera la ampliación de la variable didáctica relacionado al campo numérico donde uno de sus datos deja de ser natural para ser un número decimal. Por otro lado, las situaciones que generan las tareas $\mathbf{t}_{1,5}$, $\mathbf{t}_{1,6}$, $\mathbf{t}_{1,8}$ y $\mathbf{t}_{1,9}$ conservan su campo numérico natural, pero se desprenden de la unidad (a excepción de $\mathbf{t}_{1,5}$) e incorporan otra variable relacionado a múltiplos y divisores entre cantidades, que exige incorporar otros discursos (como aumenta en el doble, el triple y disminuye a la mitad, tercera parte) que integran los pasos de sus respectivas técnicas provocando que la $\tau_{1,4,1}$ este incluido de manera implícita en la técnica $\tau_{1,6}$ ($\tau_{1,4,1} \subset \tau_{1,6}$). También la técnica ($\tau_{1,8}$) resuelve la tarea ($\mathbf{t}_{1,15}$). Este a su vez, dado su campo numérico (números fraccionarios) permite vincularlo con la noción de porcentaje presenten en la tarea ($t_{1,16}$).

Por otro lado, las técnicas $\tau_{1,7}$, $\tau_{1,11}$, $\tau_{1,12}$ y $\tau_{1,13}$ pertenecen al grupo que llamaremos organización matemática final (OMF). Si suponemos que las cantidades correspondientes a las tareas **$t_{1,6}$ y $t_{1,8}$** no fuesen múltiplos ni divisores, es lógico encontrar una razón no entera que promueve la creación de la técnica $\tau_{1,7}$. Siendo esta técnica de un alcance superior pues permite del desarrollo de otras tareas como la **$t_{1,6}$ y $t_{1,8}$**. En cuanto a la tarea **$t_{1,11}$** es explicito que $\tau_{1,14} \subset \tau_{1,11}$ y la técnica $\tau_{1,13}$ se genera al considerar los pasos de las técnicas $\tau_{1,6}$, $\tau_{1,8}$ y $\tau_{1,14}$, es decir ($\tau_{1,13}=\tau_{1,6} \cup \tau_{1,8} \cup \tau_{1,14}$). Finalmente, la técnica $\tau_{1,12}$ transita por la técnica $\tau_{1,6}$, $\tau_{1,8}$ y $\tau_{1,14}$, es decir ($\tau_{1,6} \subset \tau_{1,12}$, $\tau_{1,8} \subset \tau_{1,12}$ y $\tau_{1,14} \subset \tau_{1,12}$).

En la figura 94, se aprecia la relación entre todas las tareas.

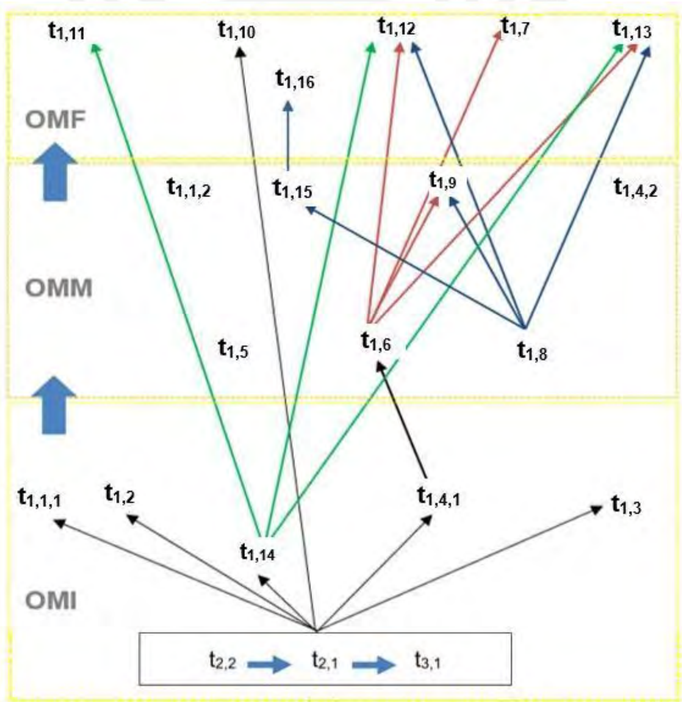


Figura 94: Articulación de todas las tareas

CONSIDERACIONES FINALES

Las herramientas que nos brinda la Teoría Antropológica de lo Didáctico nos ha, permitido describir y analizar cuestiones relacionadas al estudio del objeto matemático proporcionalidad en los documentos curriculares y cuadernos de trabajo analizados.

La metodología elegida ha sido del tipo cualitativo y bibliográfico. Siendo la más pertinente porque el procedimiento metodológico hizo posible alcanzar los objetivos trazados.

Con relación al primer objetivo específico: *Realizar un estudio epistemológico y ecológico de la proporcionalidad*. Se reviso la presencia y comportamiento de la proporcionalidad en los programas curriculares y se observó que nuestro objeto matemático de estudio ganaba notoriedad conforme se modificaba los documentos curriculares, es decir en el DCN 2005 el estudio de la proporcionalidad iniciaba en 5° primaria, luego en el DCN 2009 inicia con 4° primaria y en el CN 2016 (actualmente vigente) la presencia de la proporcionalidad inicia desde 3° de primaria hasta 5to de secundaria y se ubica en la competencia *resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio*.

En cuanto a los aspectos teóricos de la TAD, los generadores de un tipo de tarea GT, hizo posible identificar los subtipos de tareas y las variables didácticas V_I que hace posible relacionar lo especifico con lo genérico. Esto ha contribuido a cumplir con nuestro segundo objetivo específico relacionado a *determinar los elementos praxeológicos de la proporcionalidad en los cuadernos de trabajo oficiales del nivel primario*. Al respecto en 3° de primaria se identificó 2 tipos de tarea, 4 tareas y 4 técnicas, en 4° grado se encontró 2 tipos de tarea, 7 tareas y 7 técnicas, en 5° grado se identificó 3 tipos de tarea, 14 tareas y 13 técnicas. Finalmente, en 6° grado se encontró un tipo de tarea 8 tareas y 8 técnicas. Se identifico una diversificación de tareas y técnicas en 5° grado, en cuanto a sexto las tareas y técnicas no evolucionaron (a excepción de $t_{1,7}$) motivo por lo cual no se construyeron nuevas técnicas (excepto $\tau_{1,7}$)

Respecto al tercer objetivo específico relacionado a caracterizar el modelo dominante encontrado y hacer una propuesta didáctica. Se observo que el modelo dominante son tareas ya establecidas de proporcionalidad directa, es decir no existe tareas que cuestione si la situación planteada es o no de proporcionalidad. Además, se prioriza calcular el cuarto valor faltante y en la mayoría de las situaciones es explicito el uso de la tabla de proporcionalidad como ostensivo para desarrollar tareas del t_1. Sobre todo, en los dos últimos grados, donde el uso del ostensivo representa el 90.5% y 94% respectivamente.

Al cumplir los objetivos específicos, se puede confirmar que se cumplió con el objetivo general de nuestra investigación. *Construir una organización praxeológica de la proporcionalidad a partir de un estudio epistemológico y ecológico, para así determinar, describir y caracterizar la presencia de este objeto matemático en el nivel primario y proponer propuesta de articulación con otros sectores y disciplinas*

Finalmente, con nuestro estudio dejamos abierta la posibilidad para que futuras investigaciones consideren lo siguiente:

Realizar estudios que promuevan tareas que permitan la apropiación del coeficiente de proporcionalidad y poder articularlo con la noción de función lineal.

Realizar estudios experimentales con estudiantes que estén culminando el nivel primario y describir la praxeología que presentan al confrontar situaciones de proporcionalidad.

REFERENCIAS

Almouloud, S. (2015). Teoría Antropológica do Didáctico: metodología de análisis de materiales didácticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNIÓN*. 42, 09-34. Recuperado de Recuperado de https://goo.gl/n4GTNs

Amaro, G. (2017). *La Proporcionalidad en los libros de texto Mexicanos de Educación Básica*. (Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México). Recuperado de: https://bit.ly/34tm8LS

Artifon E. (2008). *pensamento proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas*, (Tesis de maestría en educación).Universidad Tuiuti de Paraná – UTP/PR, Brasil.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Revista de Educación Matemática de Sao Paulo*, 15(1), pp. 1-28.

Becerra, A. (2015). Análisis de una organización matemática asociadad al objeto cuadriláteros que se presenta en un libro de texto de quinto grado de primaria(Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Facultad de Educación. Lima: Perú). Recuperado de: https://bit.ly/2J2DAyp

Block, D. (2006). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados,* 19(1), 675-680. Recuperado de: https://bit.ly/35wYDRl

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, N. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La ense anza de la proporcionalidad en la educaci n b sica*. México: SM de ediciones S.A. de C.V., Somos Maestr@s. Enseñar y aprender, 128pp.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. (Tesis Doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona). Recuperado de https://bit.ly/34OAKUT

Bosch, M; y Gascón, J. (2003). *25 años de transposición didáctica*. Recuperado de https://bit.ly/3nCunwB

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.) Balises en Didactique des Mathématiques (pp. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 89-113. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1636/

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

Bourgade, J. (2020). Formación docente: el caso de la proporcionalidad. *X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, Lima, Perú.

Camacho, A. (2010). Utilización del modelo praxeológico para el desarrollo de las organizaciones didácticas. *Revista digital Matemática, Educación e internet, 10* (2). Recuperado de https://bit.ly/3jNn7eV

Cano, M. (2011). *Análisis del uso de conceptos y procedimientos de proporcionalidad en la resolución de problemas de física, y propuestas didácticas con la tecnología*. (Tesis de maestría, Instituto politécnico nacional, departamento de Matemática. México). Recuperado de https://bit.ly/3iLIa08

Cárcamo, D. (2012). *Uso de los Libros de Texto de matemática en el proceso de enseñanza: Un análisis de casos comparado*. (Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Honduras: Tegucigalpa). Recuperado de https://bit.ly/3755Km6

Carretero, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología, 42*(3), 85–101. Recuperado de: https://bit.ly/2HzSfR7

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación matemática*, *28*(2). 9-29. recuperado de: https://bit.ly/37vMY7T

Cenaida, V. & Salvador, C. (2010). Relaciones entre el pensamiento auditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales, 15* (1), 11-22. Recuperado de: https://bit.ly/2Hwrayc

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. (Tesis de doctorado, Universidad de Bordeax I, Bordeaux, Francia). Recuperado de https://bit.ly/3nHb8lt

Cubillos, L. (2017). *Conocimiento del profesor para enseñar proporcionalidad: del diagnóstico a la superación entre pares*. (Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaiso. Valparaiso: Chile). Recuperado de: https://bit.ly/3dWSq4T

Chaachoua, H., Comiti, C. (2010). *L' analyse des manuels dans l' aproche anthropologique*. Actes du 2e congrès pour la Theorie Anthropologique du Didactique, p. 771-789.

Chaachoua, H. (2014). Le role de l'analyse des manuels dans la theorie anthropologique du didactique. Recuperado de: https://bit.ly/37pPFrz

Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A., & Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. In M. Bosch, Y. Chevallard , J. Garcia, & J. Monaghan, *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook*. In press.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona. Recuperado de https://bit.ly/2SKbo4U

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *19*(2), 221-266. Recuperado de https://bit.ly/2IhJP0J

Floriani, E. (2004). *Resolução de Problemas de Proporcionalidade: um Estudo com Alunos do Ensino Fundamental e Médio*. (Tesis doctoral, Universidade do Vale do Itajaí). Recuperado de: https://bit.ly/3jt6HHJ

Font, V.; Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, *8*(1), 67-98.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativo, 14*(2), 203 – 231

Gascon, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación. *Educación matemática.* 99-123.

Gil, A. (2002). *Cómo elaborar proyectos de pesquisa*. 4°. Ed. Sao Paulo: Atlas S/A. Recuperado de: https://bit.ly/3dm6rJ4

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaución. *Sigma*, 101-129.

Gonzáles, M.; Sierra, M. La enseñanza del Análisis Matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. Historia de la educación, Salamanca, v. 21, p. 177- 198, 2004a.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Facultad de Educación. Lima: Perú). Recuperado de https://bit.ly/3dn8QD6

Guacaneme, E. (2001). Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. (Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Cali: Colombia). Recuperado de: https://bit.ly/34kQnEF

Guacaneme, E. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. En O. L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99-135). Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repéres*, IREM, 59(Avril), 5-41.

Ivars, P. & Ceneida, F. (2016). Problemas de estructura multiplicativa. Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. Educación matemática, 28(1), 9-38. Recuperado de: https://bit.ly/3dVLqVI

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). La matemática de la enseñanza media. Lima: IMCA.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas (Memoria de investigación de Diploma de Estudios Avanzados*, (Universidad de Vigo). Recuperado de https://bit.ly/2SMFRiH

Lucas, C. (2015). Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional. (Tesis de doctorado, Universidad de Vigo). Recuperado de: https://bit.ly/31AZRtl

Mendoza, T. y Block D. (2010). El porcentaje: Lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*, *13*(4),177-190. Recuperado de: https://bit.ly/31wz8hP

Motta, J. (2017). *La proporcionalidad en la solución de problemas de medición, variación y aleatoriedad*. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Exacta y Naturales. Colombia). Recuperado de https://bit.ly/3lBoFcs

Munzón, N; Bosch, M. y Gascón J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. *Centre de Recerca Matemática*, *10*(3), 743-765.

Najarro, L. (2018). *Caracterización del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación secundaria*. (Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Facultad de Educación. Lima: Perú). Recuperado de: https://bit.ly/3nCtq7v

Newton, D., Newton, L. (2007). Could Elementary Mathematics Textbooks Help Give Attention to Reasons in the Classroom? Educ Stud Math 64, p. 69–84.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución* *educativa de la Educación Básica*. (Tesis de doctorado, Universidad del Valle. Calí: Colombia). Recuperado de: https://bit.ly/37DYNJi

Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: *estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. Sistema de información Científica Redalyc, 22*(34), 57-79

Oller Marcén, A., & Gairín Sallán, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 317-338.

Perú, Ministerio de Educación (2005). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular. Proceso de articulación*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica* regular. Lima.

Perú, Ministerio de Educación. *Rutas de aprendizaje* (2015). Lima.

Perú, Ministerio de Educación. *Currículo Nacional*. (2017). Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2019). Cuaderno de trabajo de tercer grado de primaria. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2019). Cuaderno de trabajo de cuarto grado de primaria. lima

Perú, Ministerio de Educación (2019). Cuaderno de trabajo de quinto grado de primaria. lima

Perú, Ministerio de Educación (2019). Cuaderno de trabajo de sexto grado de primaria. lima

Quentasi, E. (2015). *Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú) Recuperado de https://bit.ly/36WkZhf

Quispe, M. (20018). *Análisis de una organización matemática sobre los significados asociados a las fracciones en una colección de cuadernos de trabajo de educación básica*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del

Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú) Recuperado de https://bit.ly/3keBlpn

Reyes, D. (2013). La transversalidad de la proporcionalidad. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Departamento de Matemática Educativa, México.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente desde la visión socioepistemológica: Una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. (Tesis doctoral en ciencias). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del instituto politécnico Nacional, México

Rivas, M (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (tesis de doctorado, Universidad de Granda). Recuperado de: https://bit.ly/31DGeBd

Rodríguez G., Gil J. García E. (1996); Metodología de la investigación científica Recuperado de: https://bit.ly/3nSyaWK

Rommevaux, S. (1999). La proportionalité numérique dans le Libre VII del Éléments de Campanus. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, *5* (1), 83-126. Recuperado de https://bit.ly/2SLcWLR

Sánchez, E. (2013) Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 16, núm. 1. Recuperado de https://bit.ly/30TU16f

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. (Tesis Doctoral, Universitat Ramón Llull). Recuperado de https://bit.ly/34Nqa0h

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas*. (Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación. Madrid: España) Recuperado de: https://bit.ly/3mo3bQv

Simard, A. (2018, marzo 18). *Formation des enseignants de CM1 et CM2 LA PROPORTIONNALITÉ*. [Diapositivas de PowerPoint]. Recuperado de: https://bit.ly/3ku6vJy

Vergnaud, G. (1990). La teoria de los campos conceptuales. *Recherchers en Didactiques des Mathématiques 10*(2), 133 – 170.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative Structures*.In Lesh, R. and Landau, M. (Ed.) Acquision of Mathematics concepts and processes.Academia Press, New York, 127-174.

Wijayanti, D. (2017). *A Praxeological Study of Proportionality in Mathematics Lower Secondary Textbooks*. (Tesis doctoral, University of Copenhagen. Facultad de Educación, Indonesia)