PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO MEDIADO POR GEOGEBRA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

NICOLAS RODRIGUEZ EUSEBIO

ASESOR

MIHÁLY ANDRÉ MARTÍNEZ MIRAVAL

Diciembre, 2021

RESUMEN

El presente estudio tiene por objetivo analizar el razonamiento covariacional de los estudiantes de 5to de secundaria al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra. La investigación se realiza con dos estudiantes de 5to año de secundaria, quienes construyen la gráfica de la función coseno a partir de la movilización de un punto en la circunferencia trigonométrica, además se lleva a cabo un cuestionario y una entrevista de tipo semiestructurada, que permitirá recopilar información de cómo está pensando el estudiante ante una actividad de covariación. En relación a ello, se plantea responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo estudiantes de 5to de secundaria razonan covariacionalmente al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra?

Se plantea como objetivos específicos: Identificar los comportamientos de los estudiantes cuando construyen la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra y relacionar los comportamientos de los estudiantes con los niveles del razonamiento covariacional. Además, justificamos nuestro trabajo desde tres perspectivas, la relevancia, la pertinencia y el impacto al mostrar la necesidad de indagar sobre el razonamiento covariacional de los estudiantes al resolver problemas donde se da la coordinación de las variables longitud de arco y proyección de línea coseno sobre el eje x. Para fundamentar nuestra investigación, hemos tomado aspectos del constructo teórico del Razonamiento Covariacional de Thomson y Carlson. La investigación es de corte cualitativo y se han tomado aspectos de los procedimientos metodológicos para llegar a nuestro objetivo. En relación a los resultados, muestran que los estudiantes alcanzaron comportamientos del nivel cinco y seis del razonamiento covariacional.

Palabras clave: Razonamiento covariacional; Circunferencia trigonométrica; Gráfica de la función coseno.

ABSTRACT

The present study aims to analyze the covariational reasoning of 5th year high school students by constructing the graph of the cosine function from the trigonometric circumference mediated by GeoGebra. The research is carried out with two 5th year high school students, who construct the graph of the cosine function from the mobilization of a point in the trigonometric circumference, in addition a questionnaire and a semi-structured interview are carried out, which will allow collect information on how the student is thinking about a covariation activity. In relation to this, it is proposed to answer the following research question: How do 5th grade high school students reason covariationally when constructing the graph of the cosine function from the trigonometric circumference mediated by GeoGebra?

It is proposed as specific objectives: Identify the behaviors of the students when they construct the graph of the cosine function from the trigonometric circumference mediated by GeoGebra and relate the behaviors of the students with the levels of covariational reasoning. In addition, we justify our work from three perspectives, relevance, pertinence and impact by showing the need to inquire about the covariational reasoning of students when solving problems where the coordination of variables occurs. To support our research, we have taken aspects of the theoretical construct of Covariational Reasoning from Thomson and Carlson. The research is qualitative and aspects of the methodological procedures have been taken to reach our objective. In relation to the results, they show that the students achieved behaviors at levels five and six of covariational reasoning.

Keywords: Covariational reasoning; Trigonometric circumference; Graph of the cosine function.

DEDICATORIA

A Dios por darme la oportunidad de continuar mis estudios.
A mi madre y novia quienes me brindaron su apoyo incondicional en tiempos de pandemia.
A mi padre quien desde el cielo guía mis pasos para alcanzar mis metas.
A mis hermanos quienes quiero y extraño mucho

AGRADECIMIENTOS

De manera especial a mi asesor, Mg. Mihály André Martínez Miraval, por su apoyo incondicional, dedicación y paciencia en el proceso del desarrollo de mi investigación. Por sus aportes pertinentes y significativos que me permitieron desarrollar la tesis de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

A mis jurados, Dra. Daysi García y Mg. Magaly Campos, por sus recomendaciones que me ayudaron a mejorar la presente investigación.

A la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por sus enseñanzas impartidas durante el período de mi formación como magíster en Enseñanza de las Matemáticas.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática, por sus alcances que me brindaron a lo largo de mi formación como investigador.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La presente investigación tiene por objetivo analizar el razonamiento covariacional de los estudiantes de 5to de secundaria al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra. Nuestro interés por indagar sobre la circunferencia trigonométrica surge a raíz de la experiencia como docente de trigonometría en el nivel secundario al notar dificultades de comprensión de las funciones trigonométricas por parte de los estudiantes.

A continuación, se muestra la estructura de la tesis, que está conformada por tres capítulos que se describen seguidamente.

En el primer capítulo, se muestran investigaciones de referencias recopiladas de revistas indexadas y tesis de maestría, las cuales tienen relación con nuestro objeto matemático en estudio, luego realizamos la justificación con base en la relevancia académica y profesional, la pertinencia y el impacto que producirá nuestra investigación al mostrar la necesidad de indagar sobre el razonamiento covariacional de los estudiantes al resolver problemas donde se da la coordinación de las variables longitud de arco y proyección de la línea coseno sobre el eje x. Además, se plantea la pregunta y objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo, se presenta el estudio de nuestro objeto matemático circunferencia trigonométrica, para ello se consideran aspectos históricos, matemáticos y didácticos. Con relación a los aspectos históricos, se muestra información sobre la trigonometría en la antigüedad; respecto del aspecto matemático, se considera la definición y elementos que presenta la circunferencia trigonométrica, además de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno; por último, se presentan aspectos didácticos, donde se muestra como nuestro objeto en estudio está presente en los libros de texto del nivel secundario como situaciones de aprendizaje.

En el tercer capítulo, se muestra la parte experimental de nuestra investigación y el análisis de la información recolectada, se da a conocer la secuencia de actividades, y los resultados obtenidos.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presentan investigaciones que han sido recopiladas de revistas indexadas y tesis de maestría, las cuales guardan relación con la circunferencia trigonométrica, luego se muestra la justificación, y se plantean la pregunta y objetivos de nuestra investigación.

1.1. Investigaciones de referencia

La literatura relacionada al campo de la trigonometría muestra la necesidad de realizar estudios sobre la circunferencia trigonométrica, dado que informan sobre la importancia de lograr la comprensión de este concepto, ya sea porque está involucrado en procesos de construcción de otros conceptos de la trigonometría como las funciones trigonométricas, o por ser un elemento articulador, puesto que logra fortalecer las relaciones entre diferentes elementos de la trigonometría (Maknun *et al.,* 2019; Ordoñez, 2017; Martínez y Cruz, 2016; Altman y Kidron, 2016; Moore y Laforest, 2014; Moore, 2014), sin embargo, también se reportan errores o dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático.

A continuación, presentamos investigaciones las cuales hemos organizado según la siguiente clasificación: Relación entre la circunferencia trigonométrica y las razones trigonométricas, relación entre la circunferencia trigonométrica y las funciones trigonométricas, estudio de la circunferencia trigonométrica desde una perspectiva covariacional, y la circunferencia trigonométrica mediado por la tecnología.

Relación entre la circunferencia trigonométrica y las razones trigonométricas

Entre los investigadores que relacionan la circunferencia trigonométrica y las razones trigonométricas definidas en el triángulo rectángulo, figuran Altman y Kidron (2016) quienes realizaron un estudio para analizar el proceso de construcción de este objeto matemático a partir de triángulos rectángulos de hipotenusa igual a 1, este proceso permite la transición de la trigonometría triangular a la trigonometría circular. Los autores utilizaron el marco teórico de abstracción en contexto para analizar las diferentes fases en las que se construye el conocimiento relacionado a las funciones trigonométricas y su significado geométrico en la circunferencia trigonométrica.

Esta construcción pasó por diferentes etapas, la propuesta de los investigadores hizo que los estudiantes realizaran acciones como dibujar triángulos rectángulos de hipotenusa igual a la unidad medido por una regla y ubicarlos en el plano de modo que se construya una circunferencia trigonométrica por aproximación, este proceso busca que el estudiante conciba la idea que se pueden agregar un número ilimitado de triángulos, y que en un valor límite se construye una circunferencia de radio igual a uno, En la figura 1 se muestra la construcción de este objeto matemático.

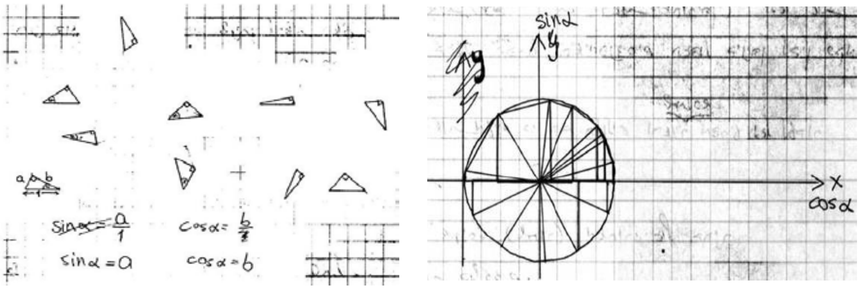


Figura 1. Construcción de la circunferencia trigonométrica
Fuente: Tomado de Altman y Kidron, 2016, p. 5 y 7.

Para la parte experimental, Altman y Kidron (2016) trabajaron con un solo estudiante que pasó por cinco etapas, las cuales se describen a partir de acciones relacionadas al proceso de construcción o de interpretaciones hechas por los investigadores con base en el desarrollo y comportamientos observados del estudiante: hallar la relación entre las longitudes de los lados adyacentes al ángulo recto y el ángulo α; la transición gradual de una situación específica a un modelo general; la transición gradual del "mundo real" (con el reloj) a los "significados matemáticos", especialmente el razonamiento geométrico (con la circunferencia trigonométrica); la circunferencia como el límite de una infinidad de segmentos que lo construyen; y la comprensión del uso de la circunferencia trigonométrica para obtener valores de funciones trigonométricas para ángulos dados.

Altman y Kidron concluyen que el estudiante logró la transición de la trigonometría del triángulo a la trigonometría de la circunferencia trigonométrica, al ser capaz de describir cómo puede hallar el seno y coseno de un nuevo ángulo 210°, mostrando confianza en su explicación y en el proceso de construcción, y de realizar conclusiones como “¡La circunferencia trigonométrica es el medio para saber cuál es el seno y el coseno de cada ángulo sin límite!”. De forma general, los investigadores resaltan la importancia de comprender conceptos trigonométricos como las relaciones que se dan entre los lados de un triángulo rectángulo, y cómo estas se asocian a la circunferencia trigonométrica, de modo que esto pueda favorecer luego a la transición de la trigonometría triangular a las funciones trigonométricas.

Por otro lado, Maknun, *et al*. (2019) proponen un diseño de enseñanza para introducir la noción de la circunferencia trigonométrica partiendo de triángulos rectángulos de hipotenusa igual a un valor arbitrario, para ello los investigadores iniciaron las actividades preguntando a manera de concientizar a los estudiantes cuál es el valor del sen 90^0 o el cos 200º, luego establecen un diseño didáctico de enseñanza que consta de dos partes, tareas de actividades prácticas y análisis.

En la primera actividad se le pide al estudiante que dibuje triángulos rectángulos de hipotenusa igual a cuatro y cinco centímetros, luego recortar estos triángulos y colocarlos en el plano cartesiano de tal forma que el ángulo recto tenga lados adyacentes verticales y horizontales. En la segunda actividad de análisis se espera que el estudiante pueda identificar las coordenadas de un punto de la circunferencia trigonométrica en relación a los lados y ángulo de un triángulo rectángulo. En la figura 2 se muestra una descripción del diseño instrucción de enseñanza para introducir esta noción partiendo de triángulos rectángulos.

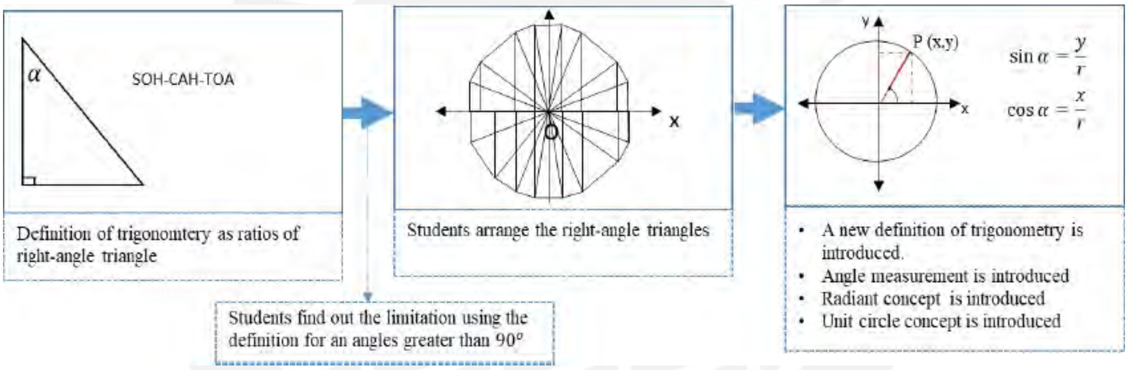


Figura 2. Descripción del diseño de instrucción.

Fuente: Tomado de Maknun *et al.*, 2019, p. 3.

De acuerdo a esta secuencia de actividades se buscó que el estudiante pudiera reconocer los valores del seno y coseno de ángulos menores y mayores a 90 grados, como también de ángulos cuadrantales, de esta forma el estudiante evidencia que independientemente del valor del radio y las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, los valores de las razones trigonométrica seno y coseno son constantes. Además, con la experiencia realizada, el estudiante reconoció que es necesario cambiar de contexto para poder hallar el valor del sen 90^0 como también el cos 200º. La investigación se realizó con 33 estudiantes de secundaria distribuidos en grupos de 4 a 5. Asimismo, los investigadores reportan que los estudiantes manifiestan dificultades al ubicar los triángulos rectángulos en el plano cartesiano, en especial en los cuadrantes II, III y IV, por otro lado, los estudiantes pudieron reconocer los cuadrantes donde las razones trigonométricas seno y coseno son positivos y negativos.

Relación entre la circunferencia trigonométrica y las funciones trigonométricas

Respecto al uso de la circunferencia trigonométrica en la construcción y comprensión de las funciones trigonométricas, investigaciones como la de Martínez y Cruz (2016) tratan de explicar cómo se da la comprensión de las funciones trigonométricas seno y coseno, para ello utilizan la circunferencia trigonométrica que lo consideran como "un organizador indispensable para una profunda comprensión sobre las funciones trigonométricas seno y coseno" (p. 112). Los investigadores trabajaron con 11 estudiantes universitarios que cursaban estudios de precálculo, quienes realizaron una secuencia de actividades para la construcción de la noción de las funciones trigonométricas seno y coseno, luego realizaron el proceso inverso para interpretar las funciones trigonométricas inversas. Como primera secuencia de actividades, se pidió al estudiante ubicar un número real en la circunferencia trigonométrica de tal forma que empiece en el par ordenado (1, 0), en esta actividad se trabajó con una cuadrícula, tal que el lado del cuadradito sea la 1/10 parte del radio, con ello el estudiante trabajó experimentalmente al momento de ubicar el número real 1,2 como un arco de esta circunferencia. En la figura 3 se muestra un limpiapipas para ubicar un punto P (1, 2) sobre esta circunferencia.

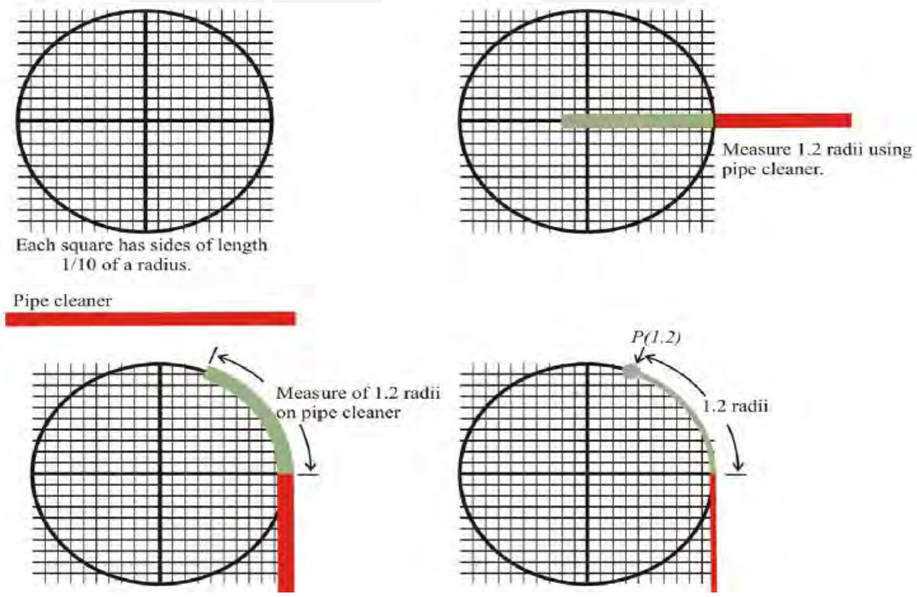


Figura 3. Un limpiapipas para ubicar el punto P (1, 2) en la circunferencia trigonométrica. Fuente: Tomado de Martínez y Cruz, 2016, p. 116.

Los estudiantes después de realizar varias acciones relacionadas a ubicar un punto en la circunferencia trigonométrica, llegan a reflexionar y pasan a la fase de proceso. En la segunda secuencia de actividades, se busca que el estudiante pueda darle una interpretación geométrica al punto que ha ubicado, luego establecer una conexión con las proyecciones de dicho punto con los ejes ordenados, de tal forma que, si la proyección es vertical, se construirá la noción de la función seno y si la proyección es horizontal, se construirá la noción de la función coseno.

Martínez y Cruz (2016) resaltan la importancia de tener clara la acción de ubicar un punto en la circunferencia trigonométrica y luego proyectarlo al eje adecuado. Los resultados obtenidos en la investigación ponen en evidencia que los estudiantes muestran dificultades al construir las nociones de funciones trigonométricas seno y coseno.

Circunferencia trigonométrica desde una perspectiva covariacional

El razonamiento covariacional se identifica como esencial para la comprensión de conceptos fundamentales de Cálculo, como es el caso de las funciones, dado que permite coordinar los cambios de una variable mientras imaginan los cambios en la otra, a fin de representar e interpretar sus características dinámicas (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008). La investigación realizada por Moore (2014) tiene por objetivo reconocer qué conocimientos sobre la función seno desarrolla un estudiante durante una secuencia focalizada en el razonamiento covariacional y cuantitativo. El autor menciona que la actividad de medir arcos en la circunferencia trigonométrica y coordinar las longitudes verticales que se direccionan a dicho punto partiendo del eje de abscisas, constituye una forma importante de razonar cuando se realiza el estudio de la función seno. En la figura 4 se muestra los cambios de la medida del ángulo y su longitud dirigida.

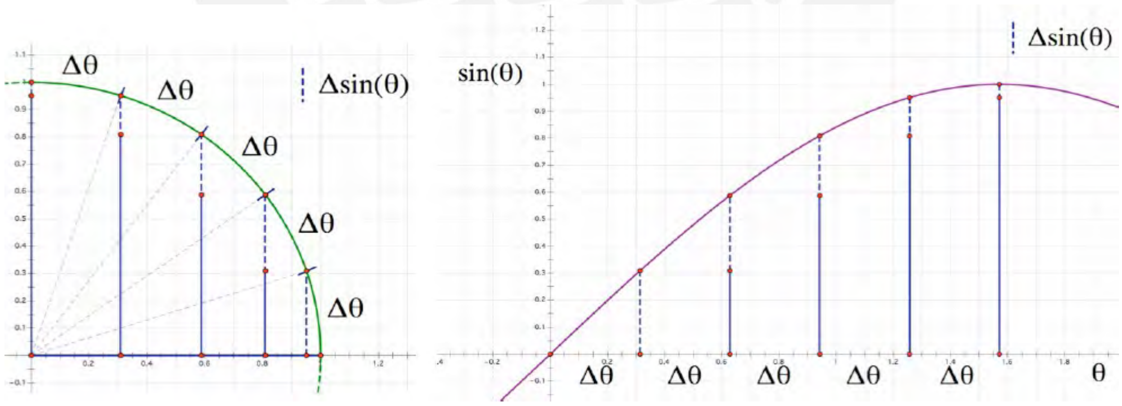
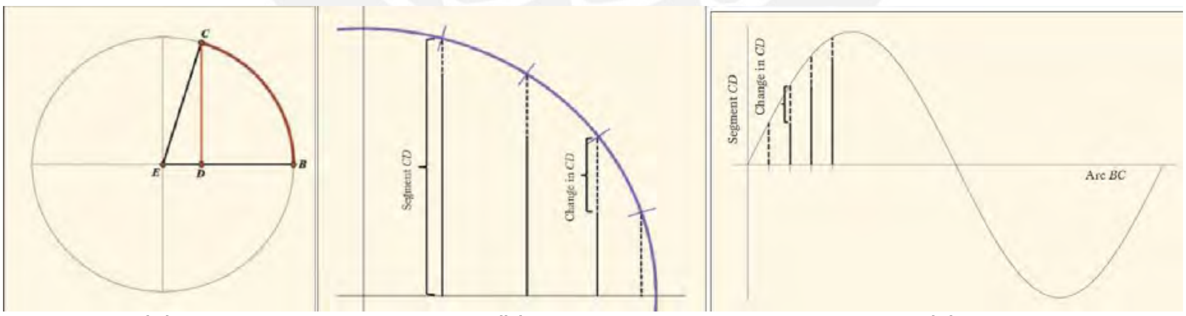


Figura 4. Cambios de la medida del ángulo y la longitud dirigida.
Fuente: Extraído de Moore, 2014, p. 111.

El estudiante resolvió una secuencia de actividades que consistía en construir una relación de covariación entre la longitud de arco y la distancia vertical dirigida hacia dicho arco y con ello lograr la construcción de la gráfica de la función seno, para ello se trabajó con la idea de circunferencia que modela a un ventilador circular, luego se considera a un mosquito en el extremo de la hélice, y analizamos el comportamiento que describe el mosquito cuando el ventilador está girando, después se pide al estudiante que realice un gráfico que describa el recorrido del mosquito con la intensión de identificar las acciones mentales que emergen en el estudiante en relación al razonamiento covariacional y a través de sus comportamientos manifestados clasificarlo en algún nivel. Moore (2014) señala que el progreso del estudiante fue fluido, y como tal, estableció una interpretación en dos contextos que son la trigonometría triangular y la circular cuando construyó la gráfica de la función seno. Asimismo, se alcanzó a identificar el desarrollo de varias acciones mentales en relación al razonamiento covariacional.

Por otro lado, Moore y Laforest (2014) realizan un estudio que tiene por objetivo lograr introducir coherentemente la medida de los ángulos hacia la función seno y coseno, de modo que se evidencie cómo las cuestiones de medición ayudan al estudiante a entender la circunferencia trigonométrica y las proporciones. Se utilizó el marco teórico del razonamiento covariacional desde la perspectiva de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002). Las actividades propuestas permiten la coordinación de los cambios entre las longitudes verticales (segmento CD) trazadas desde el eje de abscisas positiva y los arcos que se ubican en el primer cuadrante (arco BC) (ver figura 5a), se establece así una relación de variación donde si aumenta el segmento vertical (segmento CD) entonces también aumenta el arco en la circunferencia (arco BC) (ver figura 5b); esta coordinación se representa gráficamente en el plano (ver figura 5c).



(a) (b) (c)

Figura 5. (a) Longitud vertical CD (b) aumenta el arco y el segmento CD (c) coordinación de arco y segmento mediante un gráfico.

Fuente: Extraído de Moore y Laforest, 2014, p. 618 y 619.

Estas actividades permiten al estudiante tener una mejor comprensión de la coordinación de dos cantidades variantes en la circunferencia trigonométrica. Según Moore y Laforest (2014), el estudio ha demostrado que la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría con frecuencia carece de conexión con las cantidades y la circunferencia trigonométrica. Asimismo, Moore y Laforest (2014) afirman que los estudiantes pueden comenzar a comprender las funciones trigonométricas como relaciones covariacionales aplicables a todas las circunferencias, siendo la circunferencia trigonométrica el medio más adecuado para un enfoque que se basa en la medida de ángulos y otros elementos.

La circunferencia trigonométrica mediado por la tecnología

El uso de la tecnología favorece la realización de cambios dinámicos entre dos o más cantidades, lo que puede ayudar a que un sujeto razone de forma continua ante los sucesos que ocurren en la realidad (Castillo-Garsow, 2012). Respecto al uso de tecnologías digitales en el estudio del razonamiento covariacional de los estudiantes, Ordoñez (2017) realiza una investigación que tiene por objetivo reconocer y describir los niveles del razonamiento covariacional que surgen cuando los estudiantes de licenciatura de matemáticas abordan situaciones relacionadas a la función seno mediados por GeoGebra. El investigador menciona que es indispensable considerar nociones de la trigonometría como la circunferencia trigonométrica y las traslaciones de medidas en la construcción de la función seno para lograr el objetivo planteado.

El investigador realiza una instrucción guiada hacia sus estudiantes con el fin de que ellos puedan manipular las herramientas que presenta GeoGebra, como también orientarlos a realizar la construcción de la gráfica de la función seno a través de una secuencia de pasos, luego mediante preguntas auxiliares se busca identificar los rasgos que manifiestan los estudiantes con el fin de clasificarlos en un nivel de razonamiento covariacional, también se realizó una entrevista a 3 estudiantes con el objetivo de identificar que comportamientos emergen en los estudiantes en relación a las acciones mentales establecidas en el razonamiento covariacional y clasificarlos en un nivel determinado. Por otro lado, la importancia de la investigación radica en explorar la covariación entre la longitud de arco en la circunferencia trigonométrica y la medida de la proyección vertical sobre el eje de ordenadas, también el investigador reporta que hay un descuido en su uso como medio para la construcción de la gráfica de la función seno.

Las investigaciones de referencia que se han presentado muestran la importancia que tiene el estudio de la circunferencia trigonométrica, dado que está involucrado en la comprensión de otros temas como las funciones trigonométricas y las razones trigonométricas. Además, las investigaciones reportan que existen dificultades en los estudiantes al momento de comprender este objeto matemático.

1.2. Justificación

La literatura en Educación Matemática pone en evidencia la importancia de estudiar la Circunferencia Trigonométrica por ser un concepto esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría tanto en los procesos de construcción de elementos como las funciones trigonométricas, como en sus características que favorecen a la articulación de conceptos como razones trigonométricas, identidades y funciones (Rosjanuardi y Jurpri, 2019; Ordoñez, 2017; Altman y Kidron, 2016; Martínez y Cruz, 2016; Moore, 2014; Moore y LaForest, 2014). Sin embargo, también se reportan dificultades en su uso y comprensión por parte de los estudiantes.

Su estudio es relevante porque permite comprender diferentes conceptos de la trigonometría, así como entender las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y cómo éstos se representan en la circunferencia trigonométrica. Altman y Kidron (2016) manifiestan que estas relaciones y representaciones favorecen a la transición de la trigonometría triangular a la trigonometría circular.

Otro aspecto que se distingue, es la comprensión de los elementos que componen la circunferencia trigonométrica, tales como los puntos, arcos, entre otros y los procesos que se dan relacionados a este objeto matemático como las proyecciones de los puntos hacia los ejes coordenados. Al respecto, Martínez y Cruz (2016) opinan que la comprensión de este objeto matemático, que incluyen los elementos y procesos que se dan dentro de la misma, es indispensable en comprensión de los procesos que se siguen para construir las funciones trigonométricas inversas, de modo que el estudiante adquiera un conocimiento de estas funciones y las utilice coherentemente en la resolución de problemas. Por otro lado, Bressoud (2010) señala que una manera más idónea de enseñar la trigonometría es a través de la introducción de las nociones de longitud de arco y cuerdas, puesto que, tienen su origen en la historia, tal es el caso del seno, que inicialmente nace de las relaciones entre cuerdas y longitudes de arcos, mientras tanto ingresar al estudio de la trigonometría empezando por los triángulos rectángulos, como tradicionalmente se realiza, implica dificultades cuando se quiere transitar desde las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas.

En relación al desarrollo del razonamiento covariacional del estudiante y cómo este está involucrado en la construcción de la función seno, Moore (2014) indica que la circunferencia trigonométrica es un concepto que permite o favorece la coordinación entre los arcos de su gráfica y los segmentos verticales en la construcción de la función seno, dotando al estudiante de herramientas tanto de análisis como habilidades de coordinar cantidades que varían.

Por otro lado, la circunferencia trigonométrica forma parte de los temas enseñados en 5to de secundaria de la educación básica regular, dentro de la competencia de resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, según el DCN 2016. Su estudio está dentro de las habilidades que se espera desarrolle el estudiante, como es lograr coordinar el cambio de una magnitud con respecto a la otra. Asimismo, dentro de los estándares de aprendizaje, el estudiante resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos y periódicos que se dan en este objeto matemático, por ello se puede ubicar al estudiante en los niveles 6 y 7 de estos estándares de aprendizaje. La figura 6 muestra los estándares de aprendizaje para los niveles 6 y 7.

Nivel 7	Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores, o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales, Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial; y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos, y propiedades matemáticas.
Nivel 6	Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos[41], progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín, y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algébrica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Expresa su comprensión de: la relación entre función lineal y proporcionalidad directa; las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones asi como de una función lineal, lineal afin con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacios en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige.

Figura 6*. E*stándares de aprendizaje.

Fuente: Extraído del DCN, 2016, p.74.

Por otro lado, el estudio de la circunferencia trigonométrica es relevante porque se emplea para el aprendizaje de otros temas relacionados con la matemática superior, como es el caso del estudio de funciones complejas, en las series de Fourier, entre otros.

La revisión bibliográfica permitió evidenciar dificultades y errores que presentan los estudiantes al trabajar la circunferencia trigonométrica, algunos de ellos son conceptuales y otros de carácter procedimental (Altman y Kidron, 2016). Respecto a las dificultades de índole procedimental, Ordoñez (2017) afirma que los estudiantes tienen poco desarrollo del razonamiento covariacional cuando se enfrentan a una secuencia de actividades en la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra. El investigador pone en evidencia que los estudiantes tuvieron dificultades para llegar al nivel 5 del razonamiento covariacional. Asimismo, en relación a las dificultades de coordinación de cantidades, Moore (2014) señala que los estudiantes muestran dificultad en coordinar los arcos y segmentos dirigidos cuando quieren interpretar la curva de la función seno. Por otro lado, Altman y Kidron (2016) ponen de manifiesto dificultades que presentan los estudiantes para encontrar valores exactos y aproximados en la circunferencia trigonométrica cuando quieren hallar el seno y coseno de ángulos que no son notables.

Respecto a las conexiones que se dan entre los conceptos de razón trigonométrica, la circunferencia trigonométrica y funciones trigonométricas, también se reportan dificultades. Moore y Laforest (2014) afirman que la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría carece con frecuencia de una conexión entre las cantidades, como los ángulos y las longitudes de arcos, y la circunferencia trigonométrica, cuando se quiere hacer un análisis covariacional entre dichas cantidades.

Estas dificultades y errores de los estudiantes al trabajar tareas, actividades, secuencias didácticas y situaciones covariacionales, muestra la pertinencia de investigar sobre este concepto importante de la trigonometría, y utilizar tecnologías digitales para abordar su estudio.

Dada la relevancia y pertinencia del estudio de la circunferencia trigonométrica, nuestra investigación pretende introducir este concepto desde una perspectiva del razonamiento covariacional, donde el estudiante pueda coordinar y articular sus elementos mediado por GeoGebra, para que le permita aproximarse a la comprensión de este concepto. Esta comprensión implica que el estudiante sea capaz de manipular dinámicamente las distintas representaciones e interpretaciones de los elementos relacionados con nuestro objeto matemático de interés.

1.3. Pregunta de investigación

¿Cómo estudiantes de 5to de secundaria razonan covariacionalmente al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra?

Objetivo general

Analizar el razonamiento covariacional de estudiantes de 5to de secundaria al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra**.**

Objetivos específicos

Se presentan los siguientes objetivos específicos:

- Prever y enunciar posibles comportamientos asociados a diferentes acciones mentales que los estudiantes pondrían en juego al construir la gráfica de la función coseno.

- Identificar comportamientos que exteriorizan los estudiantes al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra, y asociarlos con las acciones mentales previamente establecidas.

- Clasificar la habilidad de razonar covariacionalmente de los estudiantes en uno de los niveles de razonamiento covariacional propuesto por Thompson y Carlson (2017).

1.4. Marco teórico y metodológico

Se presenta a continuación aspectos del marco teórico del razonamiento covariacional propuesto por Thompson y Carlson (2017) y los procedimientos metodológicos seguidos en nuestra investigación desde la perspectiva de Hernández *et al.* (2014).

1.4.1. Razonamiento covariacional

La presente investigación tiene como fin analizar el razonamiento covariacional de los estudiantes de 5to año de secundaria al construir la gráfica de la función coseno a través de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra. Por tal motivo se ha elegido el marco teórico de Thompson y Carlson (2017) quienes establecen seis niveles del razonamiento covariacional para describir cómo los estudiantes conciben la coordinación entre los valores de dos cantidades, que en nuestro estudio son el arco en la circunferencia trigonométrica y la proyección de la misma sobre el eje x, y cómo esta coordinación se va desarrollando en cada estudiante.

A continuación, se presentan y describen algunos conceptos involucrados en este marco teórico, tomando como referencia los estudios realizados por Carlson et al. (2002), Martínez-Miraval (2020), Saldanha y Thompson (1998) y Thompson y Carlson (2017).

Covariación

Confrey y Smith (como se citó en Martínez – Miraval, 2020) afirman que la covariación implica poder "moverse operativamente de y_m a y_{m+1} coordinando con los cambios de x_m a x_{m+1}" (p. 137). Lo cual se puede observar en las tablas, cuando se analiza la coordinación de la variación de dos o más columnas a medida que uno se mueve hacia abajo (o hacia arriba) en la tabla.

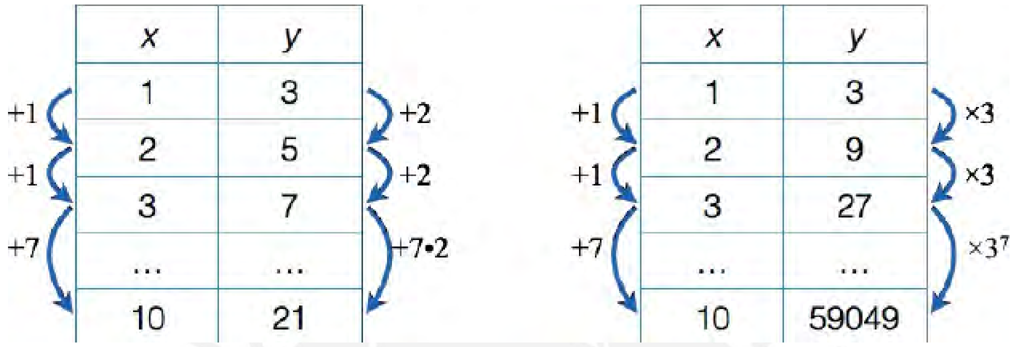


Figura 7. Dos ejemplos de covariación de Confrey y Smith: Los cambios de una variable se coordinan con los cambios en la otra.

Fuente: Tomado de Carlson y Thompson, 2017, p. 424.

Saldanha y Thompson (1998) describen que la covariación se da cuando un individuo "tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades (magnitudes) simultáneamente. Implica acoplar las dos cantidades, tal que, en el entendimiento de uno, se forme un objeto multiplicativo de los dos" (p.299).

Por ejemplo, la figura 8 muestra a una atleta y un cronómetro, una persona puede darse cuenta cómo la atleta varía su ubicación desde un punto de referencia y también cómo varía el tiempo que transcurre en un cronómetro, cuando se conciben ambas variaciones en el pensamiento de una persona, de modo que, es consciente de los cambios simultáneos entre dichas variables, se dice que una persona está razonando covariacionalmente (Thompson y Carlson, 2017).

Figura 8. Ejemplo de pensamiento covariacional.
Fuente: Extraído Thompson y Carlson, 2017, p. 426.

Objeto multiplicativo

Saldanha y Thompson (como se citó en Martínez – Miraval, 2020) indican que un estudiante genera un objeto multiplicativo entre dos magnitudes cuando “rastrea el valor de cualquiera de las cantidades con la comprensión inmediata, explícita y persistente de que, en todo momento, la otra cantidad también tiene un valor” (p. 299). Esto fue ejemplificado por los investigadores al proponer una actividad utilizando Sketchpad, que permite al estudiante simular el movimiento de un automóvil arrastrando un punto con el mouse de la computadora, de modo que el estudiante analice de qué forma el móvil se aleja de las ciudades A y B. El objeto multiplicativo se forma al pedir graficar la trayectoria del movimiento del móvil relacionando las distancias de las ciudades A y B, donde cada coordenada del punto presenta la variación de cada una de las variables que covarían.

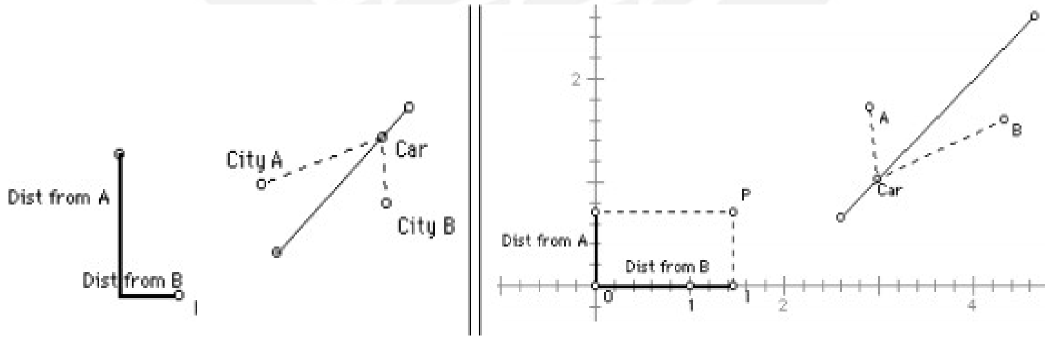


Figura 9. Ejemplo de objeto multiplicativo.
Fuente: Tomado de Saldanha y Thompson,1998, p. 300.

Acciones mentales e imagen de covariación

Carlson et al. (como se citó en Martínez – Miraval, 2020) señalan que las acciones mentales pueden asociarse con el conjunto de comportamientos observables de un sujeto que está involucrado en la resolución de un problema de covariación. Estas acciones mentales que se dan en un contexto dado forman una imagen global de covariación que permite clasificar a un individuo en un determinado nivel de covariación. Estas imágenes de covariación son dinámicas y funcionan como vehículos de operaciones mentales, las cuales se expresan a través de diferentes representaciones o impresiones de un individuo.

Covariación continua

Castillo-Garsow (como se citó en Martínez-Miraval, 2020) señalan que la variación continua de una cantidad puede ser concebida por un individuo de dos maneras: a trozos y suave. Según estos investigadores la variación a trozos implica pensar en la variación de fragmentos de igual medida, es decir poner atención en lo que ocurre en los extremos del intervalo y no tanto en los valores intermedios, por otro lado, la variación continua suave implica imaginar que los cambios se dan en progreso, es decir pensar en el cambio de los valores de las cantidades como una experiencia física del mundo real.

Razonamiento covariacional

Carlson et al. (2002) definen el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia respecto a la otra" (p.354). Los investigadores definen 5 acciones mentales y lo establecen en términos de coordinación asociados a comportamientos que se manifiestan cuando un estudiante se encuentra ante un determinado problema de covariación.

Thompson lo describe en términos de "conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como que varían simultáneamente" (Thompson y Carlson, 2017, p. 423).

Marco teórico del razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017)

Thompson y Carlson (2017) desarrollan el razonamiento convariacional como constructo teórico porque involucra al razonamiento cuantitativo y la noción de objeto multiplicativo, la coordinación de los cambios de los valores, y también la forma en la que un individuo concibe de como las cantidades varían, ya sea a trozos o de forma continua. La tabla 1 muestra los niveles de razonamiento covariacional y su respectiva descripción desarrollados por Thompson y Carlson.

Tabla 1.

Niveles del razonamiento covariacional

Nivel	Descripción
Sin coordinación	La persona no tiene una imagen de las variables que varían juntas. La persona se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores.
Pre-coordinación de valores	La persona visualiza los valores de dos variables que varían, pero de manera asincrónica: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente. La persona no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntos, como "esta cantidad aumenta mientras que la cantidad disminuye". La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos. En cambio, la persona visualiza un vínculo flexible y no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de dos cantidades.
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (X) con valores de otra variable (Y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y).
Covariación continua a trozos	La persona imagina que los cambios en el valor de una variable suceden simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, e imagina que ambas variables varían con una variación continua y gruesa.
Covariación continua suave	La persona visualiza aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como si ocurrieran simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona visualiza ambas variables variando suave y continuamente.

Fuente: Adaptado de Thompson y Carlson (2017, p. 435)

Tecnología

Según Ayil (2018) es importante emplear herramientas tecnológicas con el fin de apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como también captar la atención de los estudiantes al mostrarles contenidos que contribuyan a sus aprendizajes significativos.

Por otro lado, Camacho y Santos (citados en Gamboa, 2007) indican que los ejercicios relacionados con fenómenos de variación y cambio pueden ser trabajados con herramientas tecnológicas, y con ello propiciar un mejor proceso de resolución de problemas. También, resaltan la importancia del uso de tablas y gráficas para observar el comportamiento del fenómeno y lograr su comprensión.

Con relación al razonamiento covariacional, Castillo-Garsow (como se citó en Martínez-Miraval, 2020) señala que el uso de tecnologías digitales permite realizar cambios simultáneos entre dos o más magnitudes, lo que resulta acorde con la forma en que un sujeto percibe los cambios continuos en la realidad.

1.4.2. Metodología y procedimientos

La metodología empleada en nuestra investigación se ubica dentro de un enfoque cualitativo. Hernández *et al*. (2014) señalan que, en una investigación cualitativa, el investigador intenta comprender fenómenos que ocurren en un contexto determinado, explora e interpreta estos fenómenos desde la perspectiva de los participantes y cómo se relacionan con el contexto dado. En ese sentido, De Freitas, Lerman y Parks (2018) señalan que realizar una investigación cualitativa implica brindar un enfoque interpretativo al estudiar las cosas que suceden en el entorno natural del estudiante, intentando dar sentido a estos fenómenos a partir de los significados que las personas le otorguen. Por otro lado, Ñaupas *et al.* (2014) señalan que, en la investigación cualitativa, el investigador adopta un estilo en función del objeto de estudio, de los objetivos planteados, y hasta de situaciones concretas relacionadas con su área profesional.

En nuestra investigación, consideramos como entorno un lugar físico o virtual donde los estudiantes de forma individual utilizan herramientas tecnológicas para resolver un conjunto de problemas relacionados con la circunferencia trigonométrica y su uso en la construcción de la gráfica de la función coseno. Se trabajará con la circunferencia trigonométrica porque según la experiencia del investigador, se han observado dificultades en la manipulación de sus elementos como son las coordenadas de los puntos que pertenecen a su representación gráfica, o los arcos generados para diferentes ángulos centrales; así como también procesos relacionados con las proyecciones de los valores de las coordenadas de los puntos en los ejes coordenados y relacionar los cambios generados en estas proyecciones al manipular puntos a los largo de su gráfica. Estas dificultades se hacen presentes cuando se intentan utilizar la circunferencia trigonométrica para construir e interpretar gráficas de diferentes funciones trigonométricas, en particular de la función coseno.

Para investigar sobre estos fenómenos, se pretende investigar sobre el razonamiento covariacional de los estudiantes, como una posible causa de la falta de coordinación entre cantidades que varían simultáneamente en la circunferencia trigonométrica, por tal motivo, interpretaremos las respuestas y justificaciones de los estudiantes al resolver un problema de covariación relacionado con estos conceptos de la trigonometría, y a partir de los comportamientos observados y de la información recolectada ya sea de forma física, por audios, grabaciones y entrevistas, establecer una imagen global de covariación para poder clasificar a los estudiantes en un nivel de razonamiento covariacional del constructo teórico desarrollado por Thompson y Carlson (2017).

Procedimientos metodológicos de la investigación

Según Hernández *et al.* (2014) la investigación de enfoque cualitativo pasa por las siguientes fases: Idea, planteamiento del problema, Inmersión inicial en el campo, concepción del diseño de estudio, definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, recolección de datos, análisis de datos, interpretación de los resultados y elaboración del reporte de resultados.

En nuestro caso hemos adaptado estas fases a nuestro trabajo, a continuación, señalamos los procedimientos que se llevaron a cabo en la presente investigación.

1. Se realizó una búsqueda de investigaciones en revistas indexadas de alto impacto y otros, y en tesis de Maestría. De acuerdo con el objetivo propuesto en cada investigación, se clasificó las investigaciones relacionadas con el estudio de la circunferencia trigonométrica según los siguientes aspectos: i. relación entre la circunferencia trigonométrica y las razones trigonométricas, ii. relación entre la circunferencia trigonométrica y las funciones trigonométricas, iii. estudio de la circunferencia trigonométrica desde una perspectiva covariacional, y iv. estudio de la circunferencia trigonométrica mediado por la tecnología.

2. Esta revisión de la literatura permitió justificar nuestra investigación desde tres perspectivas: *pertinencia*, dada la importancia del estudio de la circunferencia trigonométrica al permitir abordar aspectos de la trigonometría de forma más integral, así como la relación entre las razones y funciones trigonométricas, temas presentes en los documentos oficiales del DCN, asimismo sus aplicaciones en problemas de contexto de la ingeniería, física, medicina, evidenciado en la literatura; *relevancia*, al hacer visible las dificultades que los estudiantes presentan al resolver problemas relacionados con nuestro objeto de estudio, pero también muestra las bondades del uso de tecnologías digitales para posibilitar el desarrollo intuitivo de los estudiantes y con ello fortalecer su aprendizaje de este tema; e *impacto*, al mostrar la necesidad de indagar sobre el razonamiento covariacional de los estudiantes al resolver problemas donde se da la coordinación de variables, lo cual hemos considerado en nuestro trabajo para profundizar en la manera en que los estudiantes razonan y evolucionan en su pensamiento matemático.

3. Planteamos la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos relacionados al análisis del razonamiento covariacional en los estudiantes de 5to año de

secundaria cuando se construye la gráfica de la función coseno a través de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra.

4. Con relación a los aspectos teóricos de la investigación, se presentaron elementos relacionados con el razonamiento covariacional, como los conceptos de covariación, objeto multiplicativo, acciones mentales, formas de ver los cambios continuos, y el marco teórico de seis niveles de razonamiento covariacional desarrollado por Thompson y Carlson (2017).

5. Luego, se llevó a cabo el estudio de la circunferencia trigonométrica desde los puntos de vista histórico, matemático y didáctico. Respecto de la parte histórica, se presentará la evolución de la trigonometría relacionada a la circunferencia trigonométrica y la función coseno; en los aspectos matemáticos, se presentarán la definición y los elementos relacionados con la circunferencia trigonométrica, así como las diferentes representaciones de las razones trigonométricas seno y coseno en la circunferencia trigonométrica, en los registros algebraico y gráfico; y desde el punto de vista didáctico, presentaremos problemas sobre aspectos de la trigonometría relacionados con la circunferencia trigonométrica propuestos en el libro de matemáticas para estudiantes de 5to año de secundaria de Editorial Santillana que promueve el estado.

6. Luego, se diseñó una secuencia de actividades que permita identificar los comportamientos que exteriorizan los estudiantes cuando resuelven un problema de covariación que involucra la coordinación de dos variables: el ángulo y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, al manipular ciertas herramientas del GeoGebra para construir la gráfica de la función coseno. Además, se acondicionará un ambiente remoto para realizar estas actividades que consistirá de videoconferencias mediante Zoom, el programa GeoGebra, y computadoras equipadas con micrófonos y cámara.

7. En función a lo mencionado en el ítem anterior, se implementó la secuencia de actividades con estudiantes de 5to año de secundaria. Se desea que los estudiantes lleven a cabo una serie de acciones, guiadas por las recomendaciones que señale el investigador, con el objetivo de que se realice de forma ordenada todo el proceso, y que los estudiantes puedan analizar y generar conjeturas. Luego de recolectar la información de forma escrita y en video, se elegirá un número de estudiantes con los que se realizará una entrevista semiestructurada de forma individual, utilizando un cuestionario previamente elaborado, y puntualizando en aspectos de lo desarrollado por los estudiantes.

8. Luego, se realizó el análisis de las actividades desarrolladas de forma escrita, de los videos recogidos y de las respuestas en la entrevista semiestructurada brindadas por los estudiantes de 5to año de secundaria de una institución educativa privada de Lima-Perú, considerando los aspectos teóricos del razonamiento covariacional.

9. Por último, se dieron a conocer los resultados, las conclusiones de la investigación y las recomendaciones.

CAPÍTULO II: CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

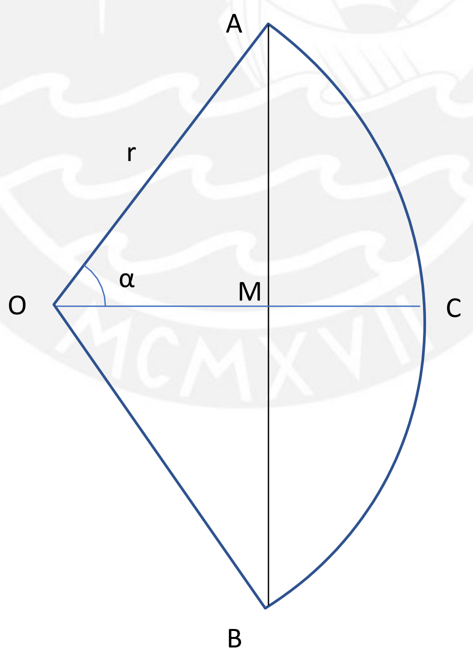
En este capítulo presentamos aspectos históricos y didácticos sobre el objeto matemático circunferencia trigonométrica, empezando por la evolución y relevancia que ha ido tomando la trigonometría, para ello usaremos el libro de Esteban, *et al.* (1998), titulado: "*Educación Matemática en secundaria*".

2.1. Aspectos históricos y matemáticos

Se presentan aspectos históricos y matemáticos relacionados con la circunferencia trigonométrica.

Aspectos históricos

A inicios del siglo VI **la cultura india** desarrolla conceptos de funciones trigonométricas, usaron los términos cuerda y semicuerda para referirse a la función seno. También mostraron interés por la astronomía. Los matemáticos indios definieron y desarrollaron la teoría de tres funciones. En la figura 10 se muestra las funciones trigonométricas según la cultura india.



Jya(α) = AM = rsen (α)

Kojya(α) = OM = rcos(α)

Ukramajya(α) = MC = OC -OM = r(1-cos[α])

Figura 10. Funciones trigonométricas según la cultura india.

Fuente: Tomado de Esteban *et al.*, 1998, p. 61-62.

Otro de los aportes de la cultura india hacia las matemáticas son las relaciones entre las funciones trigonométricas seno y coseno, tenemos:

$$\operatorname{sen}((u+1)\alpha) - sen(n\alpha) = sen(n\alpha) - sen((n-1)\alpha) - \frac{1}{125} sen(n\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = sen(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$sen^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$1 - sen^2(\alpha) = cos^2(\alpha) = sen^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$se(A \pm B) = sen(A)\cos(B) \pm \cos(A)\, sen(B)$$

Uno de los aportes de **la cultura árabe** a la trigonometría la encontramos en el siglo IX por el astrónomo Al-Hasib, quien realiza el cálculo de la sombra de una varilla mediante funciones trigonométricas tangente y cotangente. En la figura 11 se muestra la aplicación de las funciones trigonométricas tangente y cotangente.

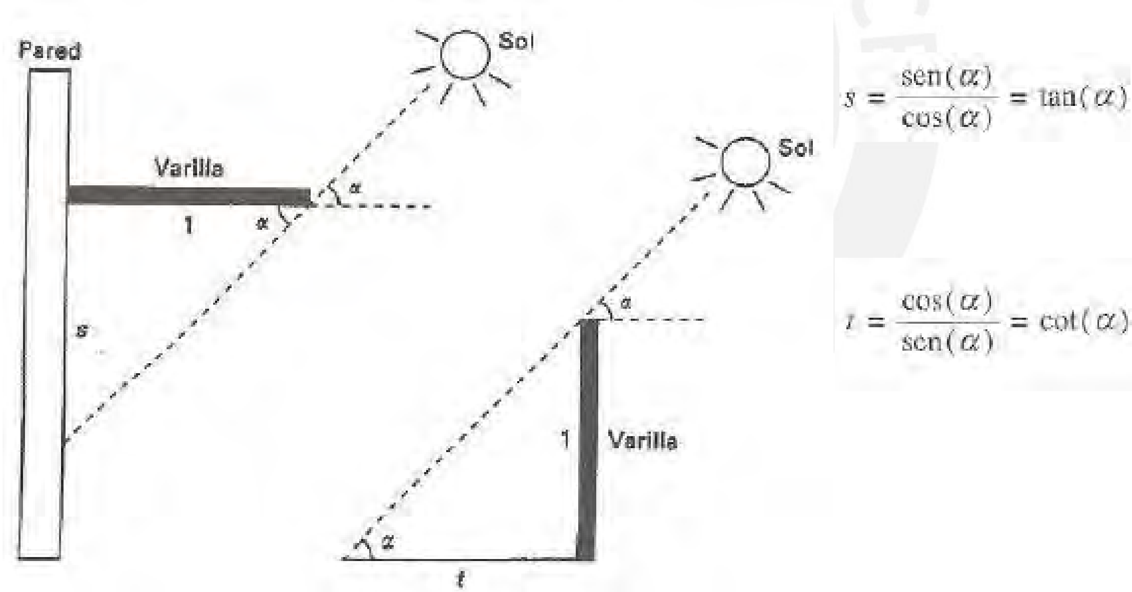


Figura 11. Aplicación de las funciones trigonométricas tangente y cotangente.
Fuente: Tomado de Esteban *et al.*, 1998, p.65.

Según la figura 11, la proyección de la sombra sobre la pared se denota con **s** y se obtiene calculando la tangente del ángulo α, en el otro caso, la proyección de la varilla sobre el suelo la llamaremos **t** y se calcula hallando la cotangente del ángulo α.

Otro de los aportes de los árabes a la trigonometría es la “Regla del seno” establecido por Nasir al Dinal – Tusi durante el siglo XIII, en ella se establece una relación de los lados y ángulos de un triángulo ABC, y el circunradio:

$$\frac{b}{c} = \frac{r.sen\,B}{r.sen\,C}$$

La trigonometría en la segunda mitad del siglo XI, cobró relevancia con las tablas de valores que proporcionaban las posiciones angulares de los astros, esta tabla se la debemos a Azarquiel, quién se dedicó a construir instrumentos astronómicos. En la figura 12 se muestra las tablas alfonsinas.

Los aportes de España fueron enfocados en la construcción de tablas, entre ellas tenemos: las tablas alfonsinas, las tablas del Almanach perpetuun celestium de Zacuto, las tablas de Nebrija, las tablas de declinación del sol.

Figura 12. Tablas Alfonsinas.

Fuente: Tomado de Esteban *et al.*, 1998, p.70.

Aspectos matemáticos

Se define la circunferencia trigonométrica y los conceptos matemáticos relacionados a ella como las líneas trigonométricas y las funciones trigonométricas, relevantes para nuestra investigación. Estos aspectos matemáticos se definen tomando como referentes los trabajos de Stewart *et al*. (2012), Zill y Dewar (2012) y Alva (2000).

Circunferencia trigonométrica

Stewart *et al.* (2012) señalan que la circunferencia trigonométrica es el conjunto de puntos que equidistan 1 unidad del origen de coordenadas. En la figura 13 se muestra la este objeto matemático.

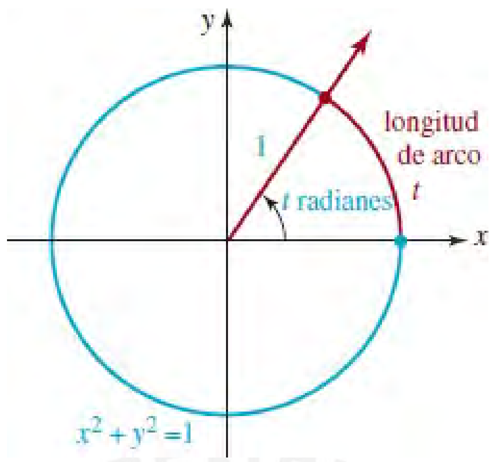


Figura 13. Circunferencia trigonométrica.
Fuente: Tomado de Zill y Dewar, 2012, p. 390.

Según la figura 13, para lograr la transición de ángulos a números reales se debe identificar que a cada número real *t* le corresponde un ángulo que mide *t* radianes. Además, su ecuación se puede expresar como la ecuación canónica de una circunferencia cuya expresión es $x^2+y^2=1$. La figura 14 muestra la circunferencia trigonométrica y sus elementos.

O(0,0) : Origen

A(1,0) : Origen de arcos

B(0,1) : Origen de complementos

A’(-1,0) : Origen de suplementos

B’(0,-1) : Sin nombre especial

P: Extremos del arco AP

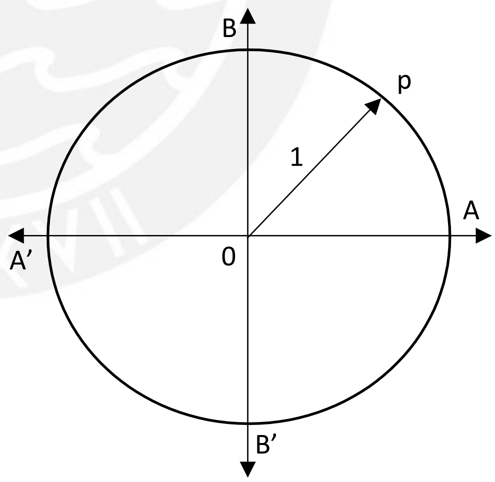


Figura 14. Elementos de la circunferencia trigonométrica.
Fuente: Adaptado de Alva, 2000, p. 128

Líneas trigonométricas

La **línea seno** es el segmento perpendicular trazado desde el extremo del arco al diámetro AA’. En la figura 15 se muestra la representación de la línea seno.

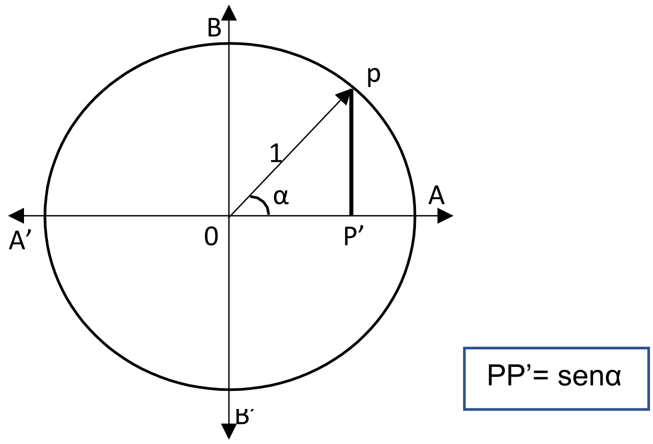


Figura 15. Representación de la línea seno.

Fuente: Adaptado de Alva, 2020, p. 129.

La **línea coseno** es el segmento perpendicular trazado desde el extremo de arco al diámetro BB’. En la figura 16 se muestra la representación de la línea coseno.

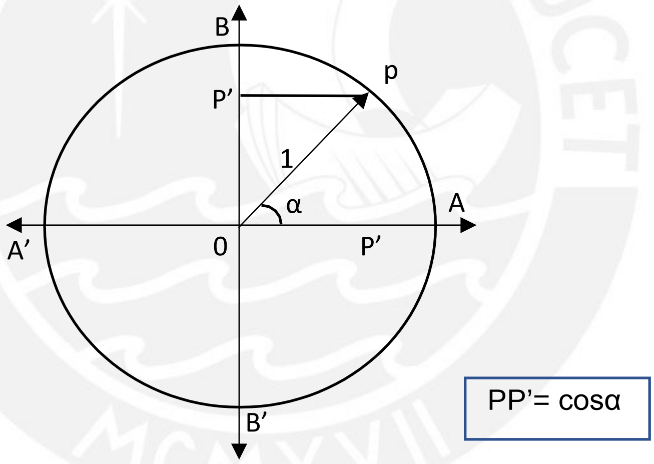


Figura 16. Representación de la línea coseno.

Fuente: Adaptado de Alva, 2020, p. 129.

Funciones trigonométricas de los números reales

Zill y Dewar (2012) señalan que la circunferencia trigonométrica es muy útil para describir las funciones trigonométricas de los números reales.

Definición: Sea t cualquier número real y P(t)=P(x,y), el punto de intersección en la circunferencia trigonométrica con el lado terminal del arco positivo. Entonces, las funciones trigonométricas seno y coseno son: sent=y, cost=x.

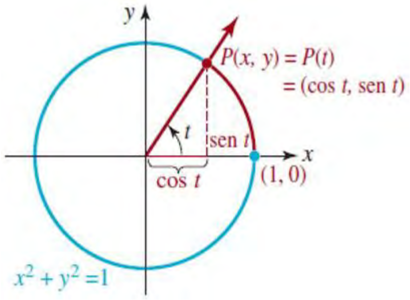


Figura 17. Las coordenadas de P(t)=(cost, sent).
Fuente: Tomado de Zill y Dewar, 2012, p. 391.

Según la figura 17, para cualquier número real t, el coseno y seno de t son las coordenadas x e y, respectivamente, del punto P de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes con la circunferencia trigonométrica.

Dominio y rango: dado que P(t)=P (x, y) podemos desprender lo siguiente:

$-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$

Puesto que x=cost y y=sent, tendríamos:

$-1 \leq \cos t \leq 1$ y $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$.

Esto nos indica que tanto el valor de cost como sent están comprendidos en el intervalo de [-1, 1]. Por lo tanto, las funciones seno y coseno, f(t)=sent y g(t)=cost, tienen como dominio al conjunto R de todos los números reales y el rango es el intervalo [-1,1].

Signos de las funciones trigonométricas: los signos de los valores de las funciones trigonométricas sent y cost quedan determinados por el cuadrante en el que está situado el punto P(t). En la figura 18 se muestra el signo de las funciones trigonométricas en los cuadrantes.

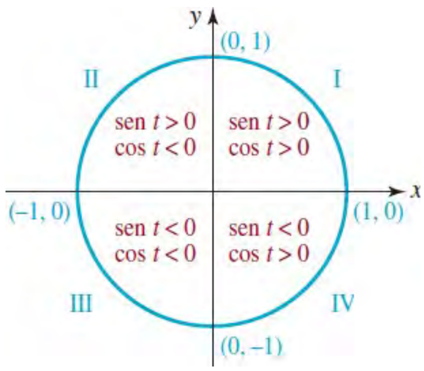


Figura 18. Signo de las funciones trigonométricas en los cuadrantes.
Fuente: Tomado de Zill y Dewar, 2012, p. 392.

Según la figura 18, el $sent\ y\ cost$ son positivos en el I cuadrante y negativos en el III cuadrante, mientras que en el cuadrante II y IV presentan signos diferentes.

Periodicidad: Se dice que una función no constante *f* es periódica si hay un número positivo *p* tal que

f(*t*) = *f*(*t*+*p*), para cada *t* en el dominio de *f* ….(1).

Si p es el número positivo más pequeño para el cual la expresión (1) es verdadero, entonces p se llama periodo de la función f.

En resumen, la función seno f(t)=sent y la función coseno g(t)= cost son periódicas con periodo 2π; es decir, f(t)=f(t+2π) y g(t)=g(t+2π), respectivamente. Por lo tanto, sen(t+2π) = sent y cos(t+2π) = cost, para cada número real t

Gráficas de las funciones seno y coseno

Stewart *et al.* (2012) afirman que para graficar las funciones trigonométricas seno y coseno, primero debemos de considerar que estas funciones repiten sus valores de forma regular. Entonces para ver exactamente cómo ocurre la gráfica consideremos que la circunferencia trigonométrica es 2π. Cuando el punto P se mueve en esta curva el valor de la ordenada del punto P varía. En la figura 19 se muestra el punto P sobre la circunferencia trigonométrica y su representación en el plano cartesiano.

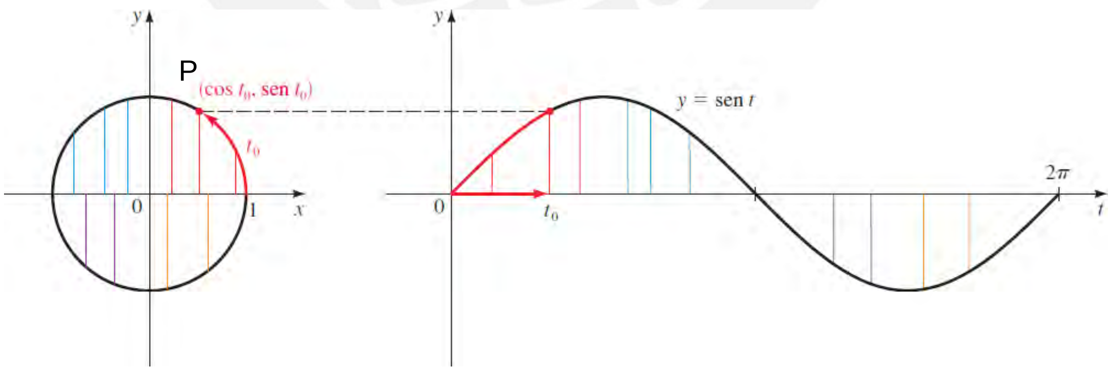


Figura 19. El punto P en la circunferencia trigonométrica y su representación en el plano cartesiano

Fuente: Tomado de Stewart, Redlin y Watson. 2012, p 387.

Según Zill y Dewar (2012), **la gráfica de la función seno** se obtiene trazando repetidamente un ciclo (color rojo) de su gráfica. En la figura 20 que se muestra a continuación, la función y=senx repite su ciclo en los intervalos [-2π,0] y [2π, 4π], además la gráfica de la función seno es simétrica respecto al origen de coordenadas, puesto que sen(-x) = -senx, cumple la definición f(-x) =-f(x) lo que indica que es una función impar.

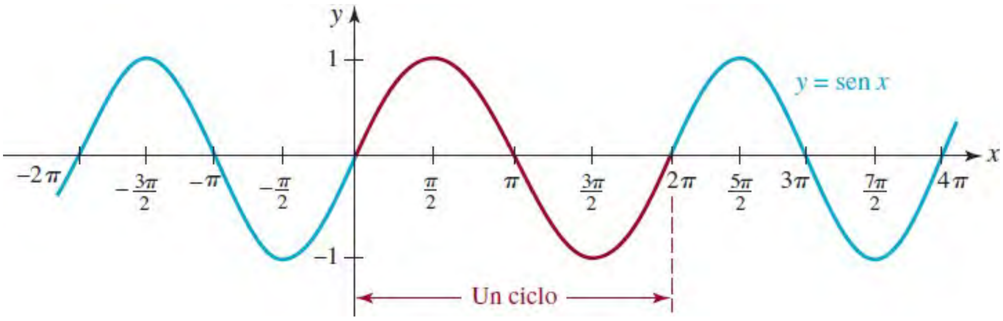


Figura 20. Gráfica de la función seno

Fuente: Tomado de Zill y Dewar, 2012, p. 398.

La figura 20 muestra la gráfica de la función seno y su simetría respecto al origen de coordenadas, además a este tipo de función se le denomina también sinusoide.

Según Zill y Dewar (2012), **la gráfica de la función coseno** se obtiene trazando repetidamente un ciclo (color rojo) de su gráfica. En la figura 21 que se muestra a continuación, la función y=cosx repite su ciclo en los intervalos [-2π,0] y [2π, 4π], además la gráfica de la función coseno es simétrica respecto al eje y, puesto que cos(-x) = cosx, cumple la definición f(-x) =f(x) lo que indica que es una función par.

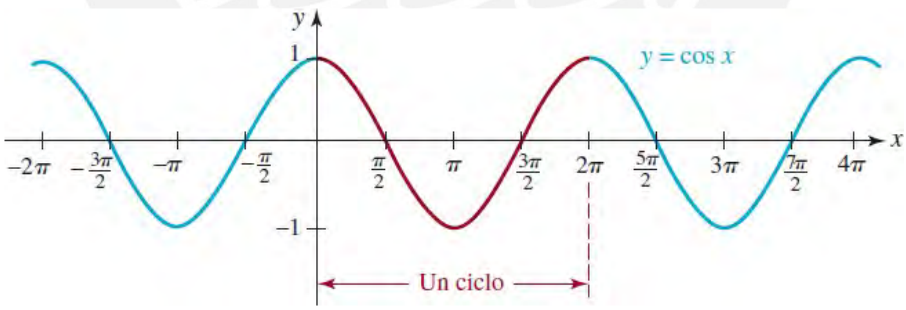


Figura 21. Gráfica de la función coseno

Fuente: Tomado de Zill y Dewar, 2012, p. 398.

La figura 21 muestra la gráfica de la función coseno y su simetría respecto al eje y, además a este tipo de función se le denomina también cosinusoide.

2.2. Aspectos didácticos

Hemos seleccionado el libro mi cuaderno de trabajo matemática 5, donde se manifiestan actividades relacionadas a la circunferencia trigonométrica y la construcción de la gráfica de las funciones seno y coseno, además, estas actividades tienen como objetivo el desarrollo de competencias y capacidades que establece el MINEDU.

En el libro mi cuaderno de trabajo matemática 5, se presenta la siguiente situación relacionado a los cambios que sufre la gráfica de la función trigonométrica seno. En la figura 22 se muestra el ejercicio 4 del libro de texto.

Grafica las funciones $f(x) = 3\text{sen } x$ y $g(x) = 3 \text{ sen } (2x)$ para visualizar lo que implican a y b. Tu entorno gráfico debe parecerse a este:

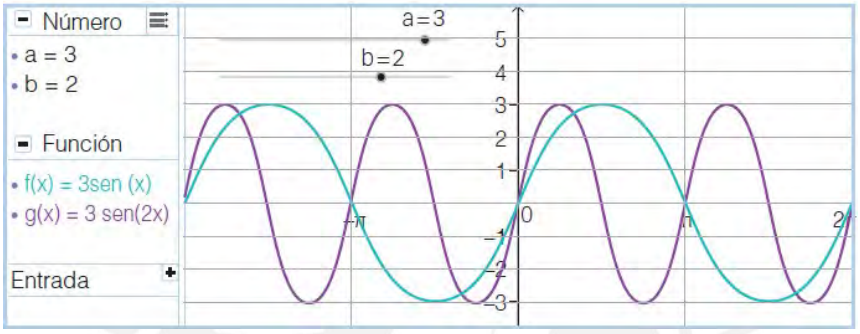


Figura 22. Ejercicio 4 del libro de texto

Fuente: Perú, Ministerio de Educación, 2016, p. 234.

Según la figura 22, la actividad demanda un análisis del comportamiento de los parámetros a y b, los cuales mediante un deslizador permiten al estudiante tener un panorama de los cambios que presenta la función seno.

En la figura 23 se muestra otra actividad que está relacionada con la gráfica de las funciones trigonométricas, es el ejercicio 10 del libro de texto

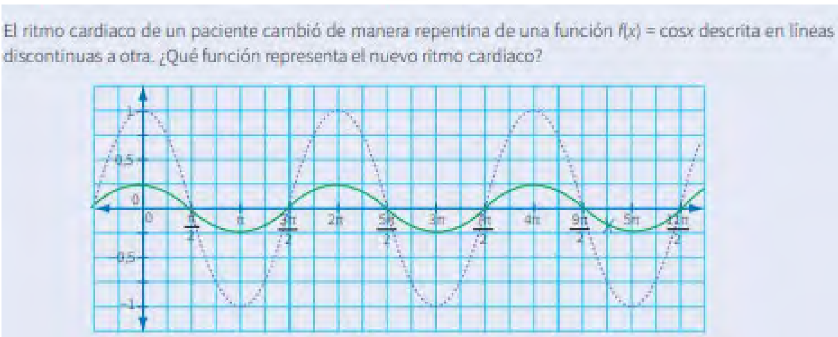
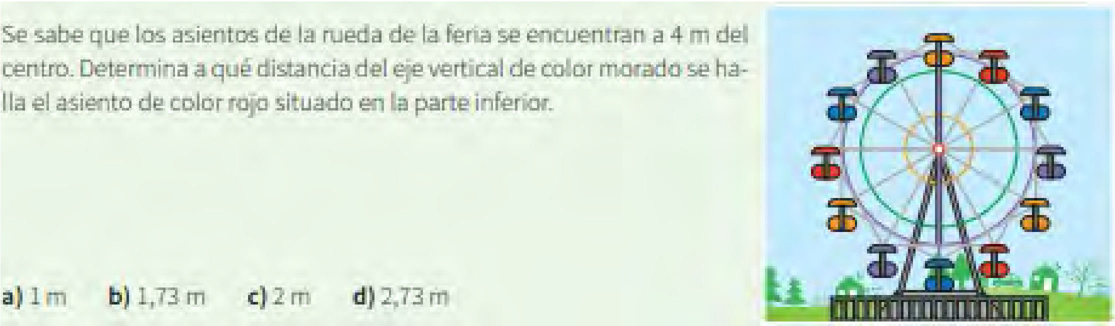


Figura 23. Ejercicio 10 del libro de texto

Fuente: Perú, Ministerio de Educación, 2016, p. 154.

De acuerdo a la figura 23, la situación relaciona la función coseno y los cambios que se dan entre su amplitud y el período, además muestra la importancia de conocer el ritmo cardíaco de una persona haciendo uso de la función trigonométrica coseno.

En la figura 24 se muestra otra actividad que está relacionada con la circunferencia trigonométrica, es el ejercicio 3 del libro de texto.


Se sabe que los asientos de la rueda de la feria se encuentran a 4 m del centro. Determina a qué distancia del eje vertical de color morado se halla el asiento de color rojo situado en la parte inferior.

a) 1 m **b)** 1,73 m **c)** 2 m **d)** 2,73 m

Figura 24. Ejercicio 3 del libro de texto
Fuente: Perú, Ministerio de Educación, 2016, p. 150.

Según la figura 24, la actividad relaciona la línea trigonométrica coseno en una circunferencia trigonométrica de radio 4 metros, además en este ejercicio se busca que el estudiante encuentre el arco de separación entre los asientos azul y rojo ubicados en la parte inferior, y con ello encontrar el valor numérico de la línea coseno para el asiento rojo.

A continuación, se presenta en la figura 25 una situación donde se relaciona la rueda de una bicicleta con la circunferencia trigonométrica del libro de texto.


Rueda de bicicleta

⊕ Familiarización ⊕ Traducción simple ⊕ Traducción compleja ⊕ Interpretación, aplicación y valoración

Imagina una rueda de bicicleta cuyo radio es la unidad, con un marcador fijo en el neumático de la rueda trasera, tal como se muestra en la fotografía. ¿Cómo verías la trayectoria del marcador?

⊕ **Nos familiarizamos con la situación**

¿Qué tipo de movimiento se genera en cada una de las ruedas de la bicicleta? ¿En qué sentido giran las ruedas de una bicicleta al avanzar: horario o antihorario?

1. Al girar la rueda, ¿entre qué valores varía la altura h(t) de la marca sobre el centro de la rueda?

2. ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia de la rueda (distancia a su alrededor)?

3. Si el ciclista se desplaza a la velocidad de una unidad por segundo, la rueda de la bicicleta tardará 2π segundos en dar una revolución completa. Por lo tanto, la rueda se encontrará en el mismo punto en el que comenzó. Divide la rueda en 16 partes. ¿Cuánto mide el arco de una de esas partes?

4. Interpreta y completa la siguiente tabla:

t	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
h(t)																

5. Representa la gráfica de h(t) = sen t y compara la tabla con la gráfica. Ayúdate de algún *software* de geometría dinámica: http://web.geogebra.org/app o www.desmos.com/calculator

Figura 25. Situación significativa del libro de texto
Fuente: Perú, Ministerio de Educación, 2016, p. 244.

Según la figura 25, se busca que el estudiante pueda modelar mediante representaciones gráficas las funciones trigonométricas seno y coseno.

De lo descrito en este capítulo, creemos que es importante el estudio de la circunferencia trigonométrica en la Educación Básica Regular, dado que no muestra las distintas aplicaciones que tiene en situaciones cotidianas, además se propicia el uso de la tecnología en algunos ejercicios para mostrar al estudiante los cambios que realiza las funciones trigonométricas.

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo se presentan las etapas del desarrollo de las actividades a realizar, como primer punto se realiza una instrucción guiada de la gráfica de la función coseno mediante la circunferencia trigonométrica y mediado por GeoGebra, como segundo paso se aplicó un cuestionario que permitió reforzar la construcción guiada, y como tercer punto se realizó una entrevista de tipo semiestructurada, la cual permitió generar un diálogo fluido entre el estudiante y el investigador con el fin de comprender los procedimientos y respuestas desarrolladas por los estudiantes de forma escrita, de modo que tengamos una idea más clara de su forma de razonar para abordar el problema.

3.1. Construcción guiada de la gráfica de la función coseno con base en el software GeoGebra

Se presenta a los estudiantes 8 pasos para que realicen una construcción de la gráfica de la función coseno, de modo que, al mover un punto sobre la circunferencia trigonométrica en una de las vistas gráficas del GeoGebra, se dibuje un punto cuyo rastro dé el gráfico de la función coseno, pero en una vista gráfica distinta.

En esta construcción no se hace mención de las variables involucradas en el problema ni de cómo se coordinan los cambios en sus valores para lograr la gráfica del coseno, por lo que se plantea luego una serie de preguntas que nos permitirá analizar los comportamientos y respuestas de los estudiantes, asociadas a su forma de pensar para abordar el problema, y a la manera de coordinar los valores de las variables, a fin de indagar sobre su razonamiento covariacional y clasificar dicho razonamiento en uno de los niveles propuestos por Thompson y Carlson (2017).

A continuación, se presenta la construcción guiada propuesta para el desarrollo de la investigación.

Pasos:

1. Colocar el punto A en el origen del sistema de coordenadas cartesianas, es decir, A=(0,0) y el punto B=(1,0). En la figura 26 se muestra la ubicación del punto A y B.

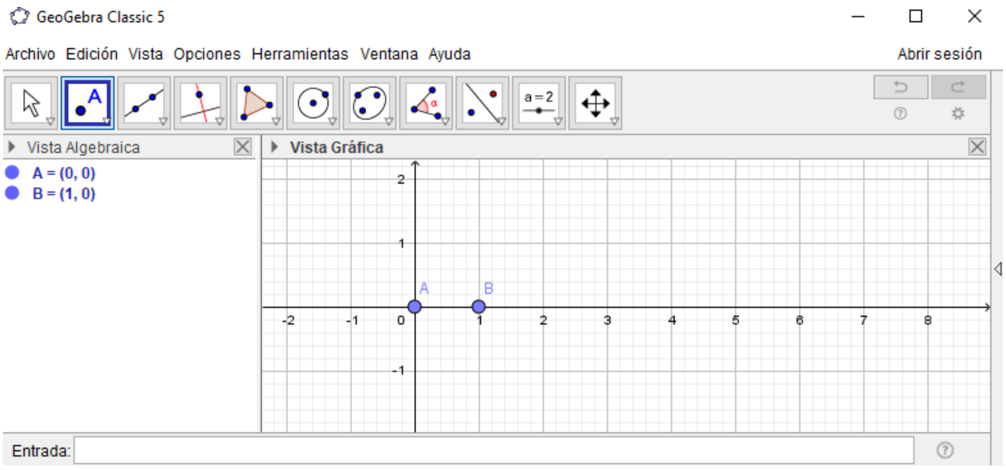


Figura 26. Ubicación del punto A y B

2. Construir una circunferencia de radio igual a 1 de centro en el punto A y que pase por B. Utilizar para ello la herramienta "circunferencia (centro, punto)". En la figura 27 se muestra una circunferencia con centro en el punto A y que pasa por el punto B.

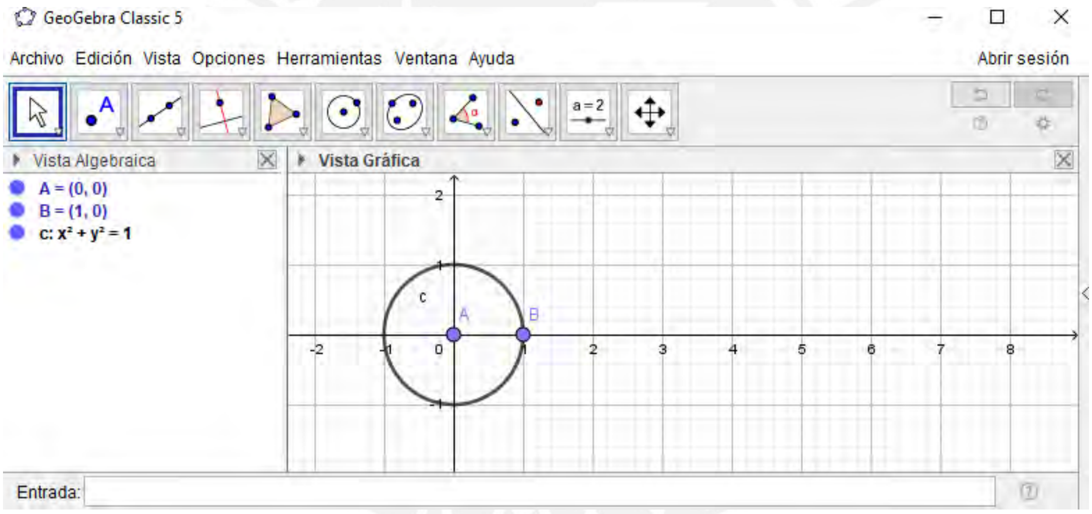


Figura 27. Circunferencia con centro en el punto A y pasa por el punto B

3. Marcar un punto sobre la circunferencia al que llamaremos C y trazar una recta paralela al eje *y* por dicho punto. En la figura 28 se muestra la recta que pasa por C y que es paralela al eje Y

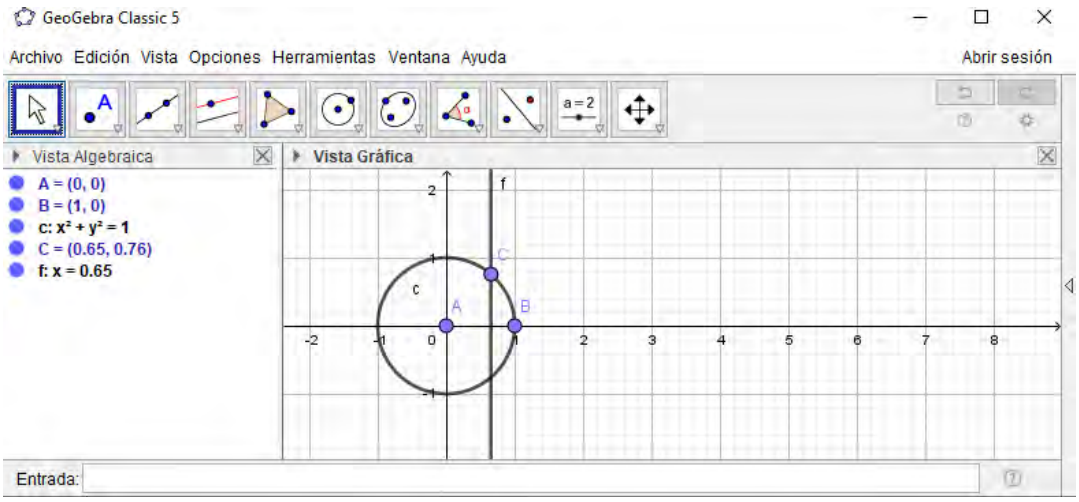


Figura 28. La recta que pasa por C es paralela al eje y

4. Utilizar la herramienta "arco de circunferencia" para trazar el arco BC. Primero se marca el ícono de la herramienta, luego dar clic izquierdo en A, después en B y por último en C. En la vista algebraica aparecerá la medida con una letra (*d* por ejemplo). En la figura 29 se muestra el arco de circunferencia BC=d.

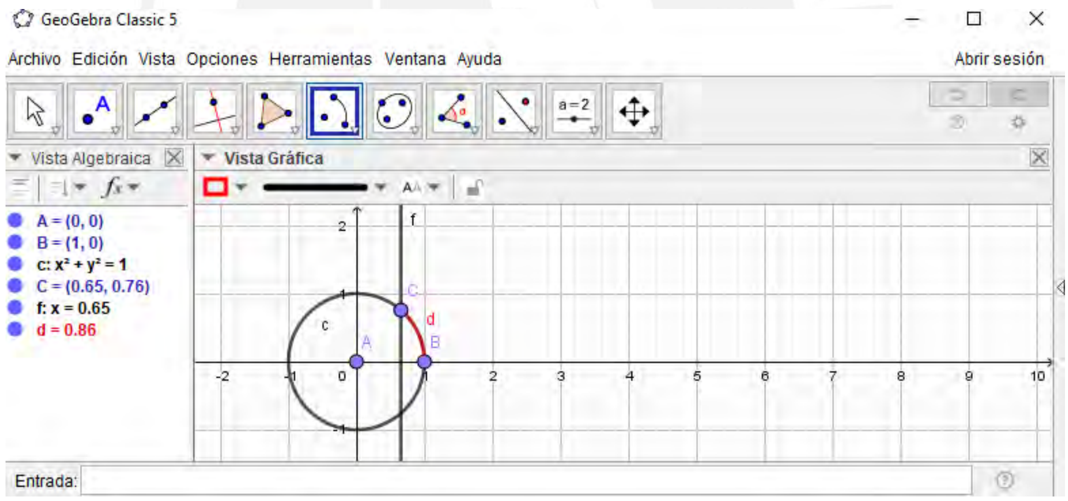


Figura 29. Arco de circunferencia BC=d

5. Usamos la herramienta "intersección" para ubicar el punto D. Dar clic izquierdo en la recta vertical, después dar clic en el eje x. En la figura 30 se muestra la ubicación del punto D sobre el eje X.

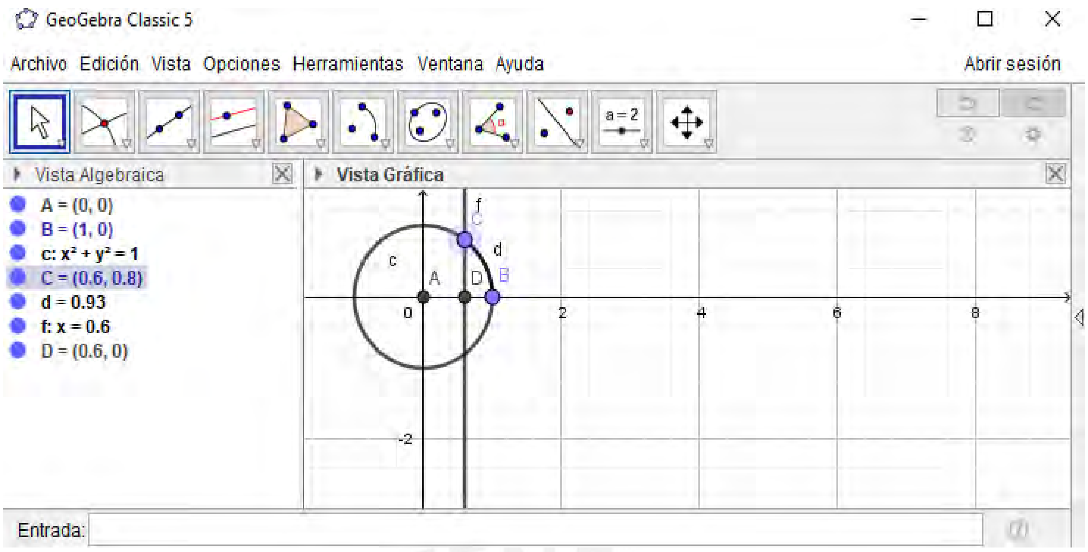


Figura 30. Se ubica el punto D sobre el eje X

6. En la barra de entrada de GeoGebra escribir x(D), para que en la vista algebraica aparezca el valor de la abscisa del punto D (por defecto GeoGebra le asigna una letra, *a* por ejemplo). En la figura 31 se muestra la barra de entrada en la parte inferior. Cabe mencionar que este paso 6 se planificó de esta manera, para obtener valores positivos, negativos y cero de la posición D respecto del origen, que es la proyección de la línea coseno en el eje *x*.

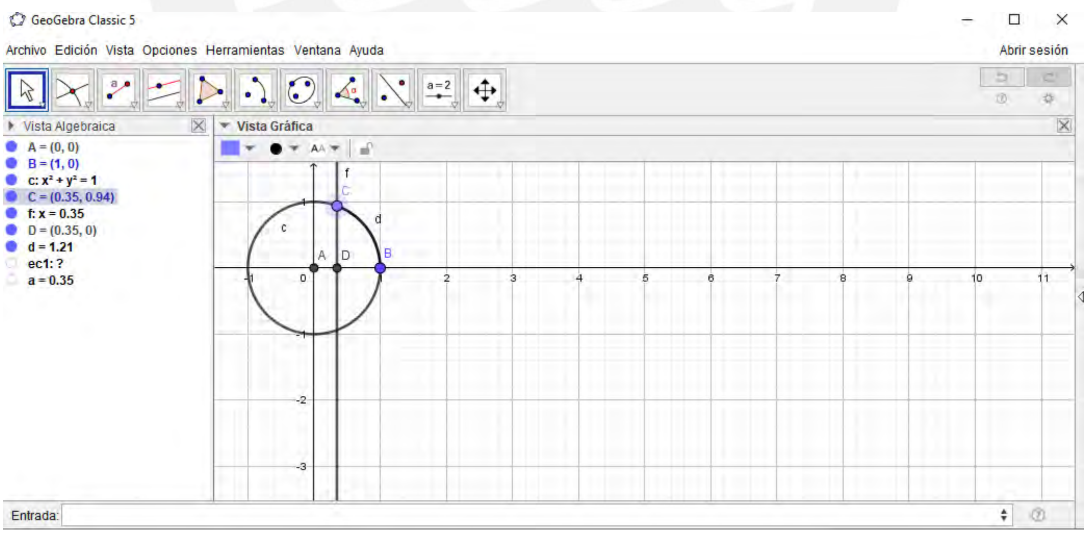


Figura 31. Se escribe x (D) en la barra de entrada.

7. En el menú principal buscamos la opción “Vista”. Dar clic izquierdo en vista gráfica 2. En la figura 32 se muestra la vista gráfica 2.

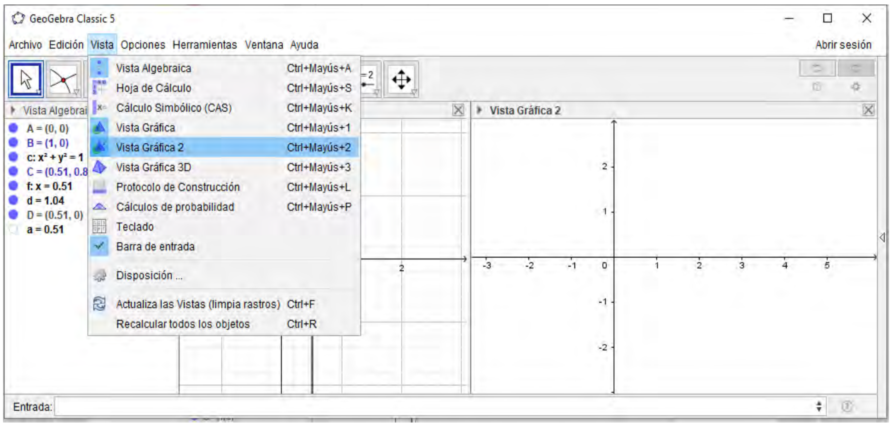


Figura 32. Vista Gráfica 2

8. En la barra de entrada de GeoGebra escribir **(d, a)**, de modo que aparezca en la vista gráfica 2 el punto E. La figura 33 muestra el punto E en la vista gráfica 2. Al activar el rastro del punto E y mover el punto C sobre la circunferencia trigonométrica, se dibuja la función coseno.

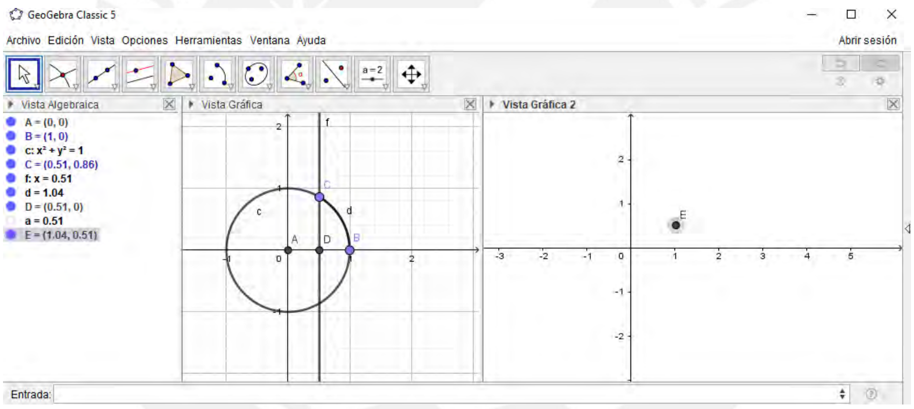


Figura 33. Se ubica el punto E en la vista gráfica 2

Esta construcción es una lista de pasos que el estudiante debe seguir, y nos interesa saber si es consciente de qué magnitudes varían, entré qué valores varían, si las variables covarían, si cada punto de la gráfica es reconocido como un objeto multiplicativo, o si la gráfica resultante es continua. Para ello, se ha diseñado un cuestionario que intenta dar respuesta a estos cuestionamientos.

3.2. Cuestionario sobre el proceso de construcción

Al terminar la construcción guiada de la gráfica de la función coseno, los estudiantes debían responder una serie de preguntas orientadas a investigar cómo coordina los valores de dos variables involucradas en la representación gráfica de la función coseno.

Estas preguntas presentan cierta jerarquía, desde identificar dos variables y sus respectivos valores, reconocer que los valores individuales de estas variables están relacionados, hasta reconocer que la gráfica es un conjunto de puntos que forman una gráfica continua. Las preguntas fueron diseñadas para reconocer en los comportamientos y respuestas de los estudiantes, distintas maneras de pensar y de ver la coordinación de los valores de las variables, es decir, tratar de que el estudiante exteriorice en sus acciones, sus acciones mentales, las cuales guardan relación con las descripciones hechas por Thompson y Carlson (2017) de cada uno de los niveles de razonamiento covariacional.

La tabla 2 muestra las preguntas del cuestionario (preguntas auxiliares) que están relacionadas con diferentes tipos de acciones mentales: Acción mental 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que resulta de un análisis previo realizado por el investigador. Estas acciones mentales pensamos que pueden ser activadas a partir de cada una de las preguntas auxiliares. Cabe resaltar que según Carlson et al (2002), si un estudiante logra razonar covariacionalmente en un nivel determinado, eso implica que exterioriza una acción mental asociado a ese nivel, y todas las acciones mentales de los niveles inferiores.

Tabla 2

Análisis previo y preguntas del cuestionario según cada acción mental

Acciones mentales	Análisis previo	Preguntas del cuestionario
Acción mental 1	El estudiante hace referencia a la variación de las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, pero sin coordinar los valores de ambas.	Identifique qué elementos se pueden considerar como variables al mover el punto C sobre la circunferencia.
Acción mental 2	El estudiante hace referencia a los posibles valores que toman las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, pero de forma asíncrona, es decir, se fija primero en los cambios de una variable, luego en los cambios de la otra, y así sucesivamente.	Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿qué valores podrían tomar las variables descritas en la pregunta anterior?
Acción mental 3	El estudiante coordina los cambios entre los valores que toman las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, en términos de aumentos o disminuciones, en cada cuadrante del plano cartesiano.	Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿se puede identificar alguna relación entre los cambios de las variables descritas en los ítems anteriores? Describa cómo se da esa relación.
Acción mental 4	El estudiante coordina los cambios individuales entre un número discreto de valores que toman las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, y los representa como pares ordenados, en tablas, o lo indica verbalmente.	¿Qué representa la abscisa y la ordenada del punto E? Describa el comportamiento del punto E al mover el punto C en sentido antihorario. Justifique su respuesta indicando algunas posiciones del

		punto E.
Acción mental 5	El estudiante hace referencia a cambios simultáneos entre los valores de la longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, que le permiten representar una gráfica continua del coseno. Sin embargo, reconoce solo la existencia de puntos para arcos de ángulos conocidos, y no para otros arcos del dominio.	Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿el punto E generaría una gráfica? Si su respuesta es afirmativa, realice un esbozo de la gráfica que se generaría. Explique su procedimiento.
Acción mental 6	El estudiante hace referencia a que los valores de la longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X varían de forma simultánea y continua, considerando que, para todos los valores del dominio, existe una proyección de la línea coseno sobre el eje X.	¿Cuántos puntos cree usted que se necesitan para realizar el gráfico que genera el punto E? Explique.

3.3. La entrevista

En nuestra investigación emplearemos entrevistas de tipo semiestructurada. Al respecto Hernández, Fernández y Baptista (2014) señalan que este tipo de entrevista se basa en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de agregar preguntas que permitan aclarar ideas y conseguir una mayor información, mientras que, en las entrevistas estructuradas el entrevistador sigue una serie de preguntas específicas y rígidas en la cual se debe respetar un orden. Por otro lado, las entrevistas abiertas o no estructuradas se basan en una guía general donde el entrevistador tiene mayor flexibilidad para realizar las preguntas.

Preguntas realizadas en la entrevista

1. ¿Qué gráfica logra reconocer del desarrollo de la construcción?, explique detalladamente su respuesta

2. ¿Qué varía al mover el punto C en sentido antihorario en la circunferencia trigonométrica?

4. Si el punto C lo movemos en sentido antihorario, existe una relación entre las variables descritas en el problema anterior

3. ¿Cómo describiría el movimiento del punto E, al mover el punto C en sentido antihorario?, ¿cómo cambian las coordenadas del punto E?

4. Cuando el punto C se mueve en sentido antihorario, ¿qué puede inferir de los cambios que se dan en las coordenadas del punto E: ¿aumentan, disminuyen o se mantienen constantes?

5. ¿En qué momento de la construcción fue posible observar los valores máximos y mínimos que toma el punto E? ¿Se pueden identificar los puntos donde la gráfica corta a

los ejes coordenados?

6. ¿Existe algún valor de *x* donde *y* sea igual a 2; 0.5 ó 0.75? Explique.

7. ¿Qué pasaría con el punto E, si el punto C diera una vuelta más?

8. ¿Los cambios de las coordenadas del punto E se dan de forma simultánea, cuando muevo el punto C en la circunferencia trigonométrica?

9. ¿Existe algún cambio y/o arreglo en relación al movimiento del punto C para desarrollar la gráfica en los números negativos?

3.4. Relación de la entrevista y las preguntas del cuestionario para la construcción respecto a las acciones mentales del razonamiento covariacional

A partir de la construcción guiada de la gráfica de la función coseno y de las respuestas dadas en el cuestionario, se pudo indagar acerca de los conocimientos que tenían los estudiantes, lo cual hizo posible tener una conversación fluida en la entrevista. De acuerdo con esto, se construyó una tabla que permite observar cómo se relacionan las preguntas con los niveles del razonamiento covariacional de Thompson y Carlson. Si el estudiante responde con claridad a las preguntas hechas, podemos ubicarlo en un nivel determinado de razonamiento covariacional, según la acción mental que exteriorice en sus comportamientos, es decir, a modo de ejemplo, que si un estudiante responde con coherencia y precisión hasta las preguntas del nivel *coordinación de valores*, significa que ha mostrado comportamientos asociados a una acción mental 4 (AM4) y por ende, se asume que desarrolla comportamientos asociados a las acciones mentales inferiores AM1, AM2 y AM3, por más no hayan sido evidenciadas.

Tabla 3.

Relación entre la entrevista y el cuestionario con el razonamiento covariacional

Acciones mentales conseguidas	Nivel	Preguntas
AM1	Sin coordinación	Identifique qué elementos se pueden considerar como variables al mover el punto C sobre la circunferencia. ***(cuestionario)*** Describa con sus propias palabras la construcción que desarrollo en la sesión anterior. ¿Qué varía al mover el punto C en sentido antihorario en la circunferencia trigonométrica? ***(entrevista)***
AM2 AM1	Pre coordinación de valores	Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿qué valores podrían tomar las variables descritas en la pregunta anterior? ***(cuestionario)*** Si el punto C lo movemos en sentido antihorario, existe una relación entre las variables descritas en el problema anterior ***(entrevista)***
AM3	Coordinación	Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario,

AM2 AM1	gruesa de valores	¿se puede identificar alguna relación entre los cambios de las variables descritas en los ítems anteriores? Describa cómo se da esa relación. ***(cuestionario)*** ¿Cómo describiría el movimiento del punto E, al mover el punto C en sentido antihorario?, ¿cómo cambian las coordenadas del punto E? Cuando el punto C se mueve en sentido antihorario, ¿qué puede inferir de los cambios que se dan en las coordenadas del punto E: ¿aumentan, disminuyen o se mantienen constantes? ¿Los cambios de ambas coordenadas se dan de forma simultánea? ***(entrevista)***
AM4 AM3 AM2 AM1	Coordinación de valores	¿Qué representa la abscisa y la ordenada del punto E? Describa el comportamiento del punto E al mover el punto C en sentido antihorario. Justifique su respuesta indicando algunas posiciones del punto E. ***(cuestionario)*** ¿En qué momento de la construcción fue posible observar los valores máximos y mínimos que toma el punto E? ¿Se pueden identificar los puntos donde la gráfica corta a los ejes coordenados?, ¿Existe algún valor de *x* donde *y* sea igual a 2, 0.75, 0.3? Explique. ***(entrevista)***
AM5 AM4 AM3 AM2 AM1	Covariación continua a trozos	¿Qué necesita para graficar una curva? Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿el punto E generaría una gráfica? Si su respuesta es afirmativa, realice un esbozo de la gráfica que se generaría. Explique su procedimiento. ***(cuestionario)*** ¿Qué gráfica logra reconocer del desarrollo de la construcción?, explique detalladamente su respuesta ***(entrevista)***
AM6 AM5 AM4 AM3 AM2 AM1	Covariación continua suave	¿Cuántos puntos cree usted que se necesitan para realizar el gráfico que genera el punto E? Explique***. (cuestionario)*** ¿Los cambios de ambas coordenadas se dan de forma simultánea?, ¿Qué pasaría con el punto E, si el punto C diera una vuelta más?, ¿Existe algún cambio y/o arreglo en relación al movimiento del punto C para desarrollar la gráfica en los números negativos? ***(entrevista)***

Según la tabla 3 se realizaron preguntas a dos estudiantes de forma escrita y oral con la intensión de identificar sus comportamientos que exteriorizan ante problemas de covariación, luego interpretar como está pensando el estudiante mediante sus respuestas y asociar dichos comportamientos a un nivel del razonamiento covariacional.

3.5. Análisis de los resultados

A continuación, se presenta el análisis de las preguntas realizadas en el cuestionario y en la entrevista que se aplicaron a dos estudiantes, los cuales permitieron identificar y describir los niveles de Razonamiento Covariacional que emergen cuando los estudiantes se encuentran en situaciones de variación asociadas a la construcción de la gráfica de la función coseno. En nuestro análisis resaltamos los comportamientos que presentan dos sujetos que a partir de ahora se reconocerán como estudiante **A** y estudiante **B**, el investigador – entrevistador con la letra **S.**

3.5.1. Acción Mental 1

Para este tipo de acción mental, se ha considerado aspectos relacionados a la identificación de las variables al mover el punto C en la circunferencia trigonométrica. Los estudiantes debían reconoce la longitud de arco y la proyección de la línea coseno al eje X. La figura 34 muestra cómo se observan los cambios en la vista gráfica del GeoGebra.

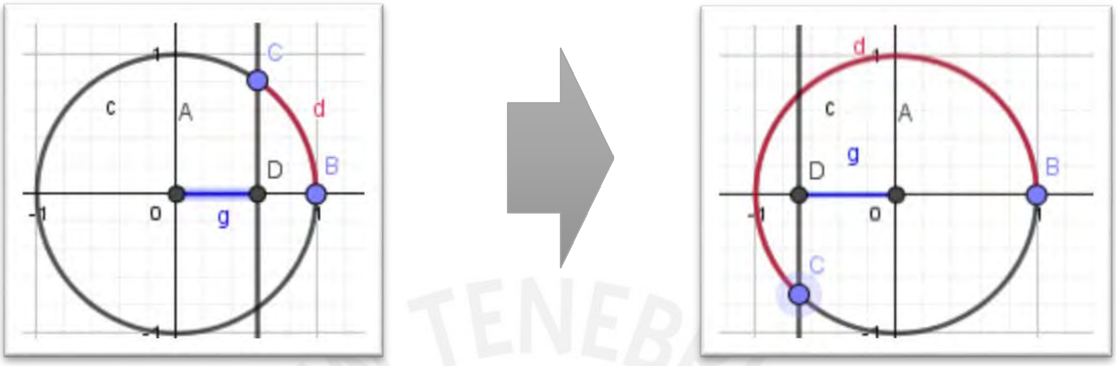


Figura 34*.* Identificación de las variables: Longitud de arco y la proyección de la línea coseno

En la figura 34 se observa una curva de color rojo que determina la longitud de arco y un segmento en azul sobre el eje X que determina la proyección de la línea coseno. El objetivo de la actividad es reconocer las variables longitud de arco y proyección del punto C sobre el eje X. Sin embargo, puede ser considerado como variable el segmento CD o DB, pero lo que esperábamos como respuesta del estudiante eran las dos primeras variables señaladas, producto de la construcción hecha.

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes *A* y *B.*

Estudiante A:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante identifique las variables que se generan en el proceso de construcción. La primera pregunta del cuestionario fue: *Identifique qué elementos se pueden considerar como variables al mover el punto* C *sobre la circunferencia*. La figura 35 muestra las construcciones realizadas por el estudiante para dar respuesta.

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista.

S: Cuando muevo el punto C en la circunferencia ¿qué varía o cambia?

A: En la circunferencia lo que varía es el arco d y el punto C que sería el ángulo

S: El punto C tiene una proyección sobre el eje X ¿estaría variando?

A: Lo considerado como si fuera a las coordenadas del punto C en el eje de abscisas y ordenadas, así que no lo considero como una variable en sí.

g, d, D, E
siendo g y D las coordenadas del punto c, el arco d varía de acuerdo a la posición de punto c y el punto E siendo el ángulo también varía según la posición del punto c

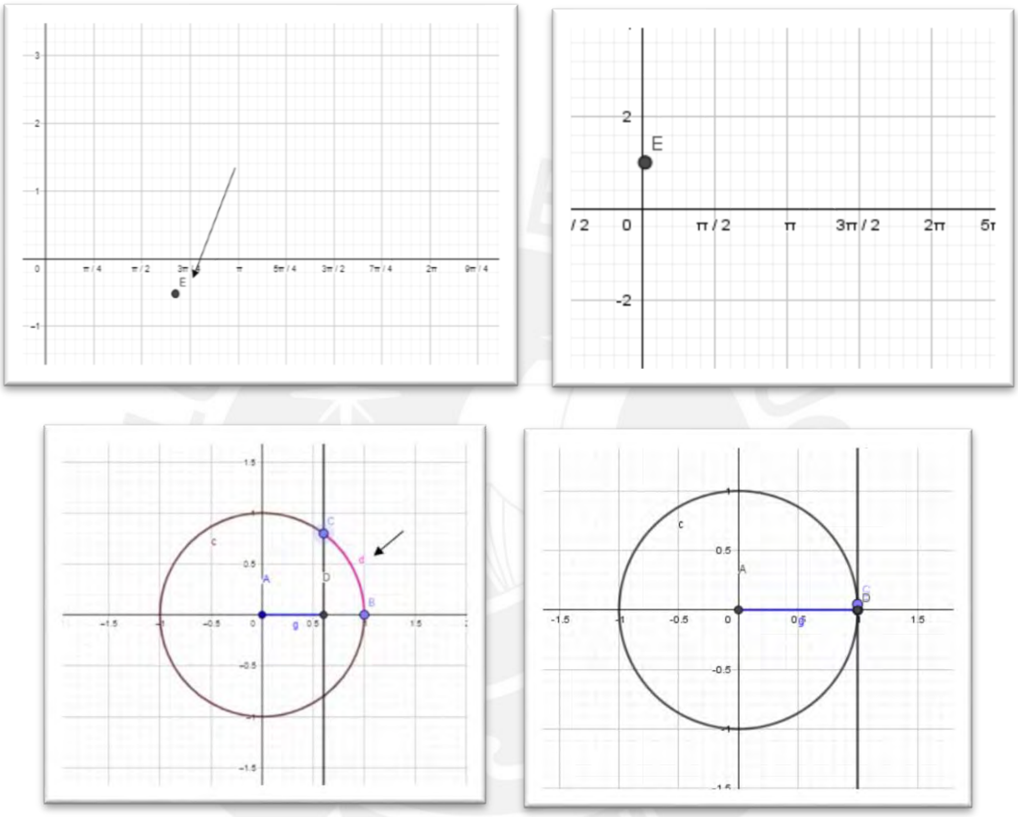


Figura 35. Construcciones realizadas por el estudiante A para dar respuesta a la pregunta 1 del cuestionario

La figura 35 muestra como el estudiante reconoce a través de GeoGebra los cambios que se dan entre las variables.

De las respuestas dadas por el estudiante A, observamos que reconoce distintos elementos que varían al escribir o expresar frases como "*el arco d varía de acuerdo a la posición del punto* C", "*el punto* E *siendo el ángulo también varía según la posición del punto* C". El estudiante expresa de forma escrita que *g* y *D* son las coordenadas del punto C, pensamos que lo hace guiándose en la ubicación de las letras *g* y *D* en la vista gráfica del GeoGebra, donde *g* aparece sobre un segmento horizontal y *D* aparece al lado de un segmento vertical (ver figura 36), sin embargo, se comete un error porque *D* es un punto ubicado en el eje X de coordenadas (g, 0).

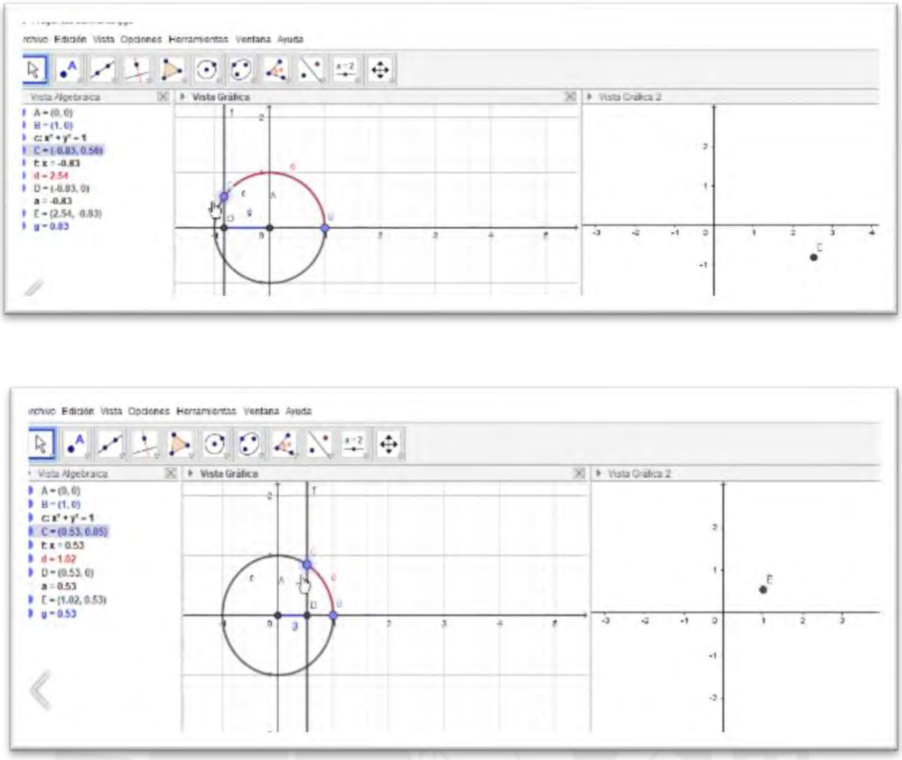


Figura 36. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante A

Por otro lado, el estudiante relaciona los puntos C y E con el ángulo BOC. Se puede interpretar que relaciona los cambios del punto C con la variación del ángulo BOC porque el punto C es uno de sus extremos y relaciona los cambios del punto E con la variación del ángulo BOC porque la abscisa del punto E es el valor del ángulo BOC.

Al consultarle por la proyección del punto C sobre el eje X, el estudiante reconoce que se trata del valor de g (valor del coseno del ángulo BOC) que varía al mover el punto C, sin embargo, el estudiante no lo considera como una variable, lo considera solo como uno de los componentes del punto C. El estudiante parece evidenciar una ausencia de coordinación entre los valores de las variables longitud de arco y proyección del punto C sobre el eje X. Por lo tanto, se observan comportamientos asociados a una AM1, lo que no significa que, en otras preguntas más puntuales, los estudiantes puedan evidenciar un cierto nivel de coordinación entre estas variables.

Estudiante B:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante identifique las variables que se generan en el proceso de construcción. La primera pregunta del cuestionario fue:

Identifique qué elementos se pueden considerar como variables al mover el punto C sobre la circunferencia. La figura 37 muestra la construcción hecha por el estudiante y las imágenes del GeoGebra que justificaron su respuesta.

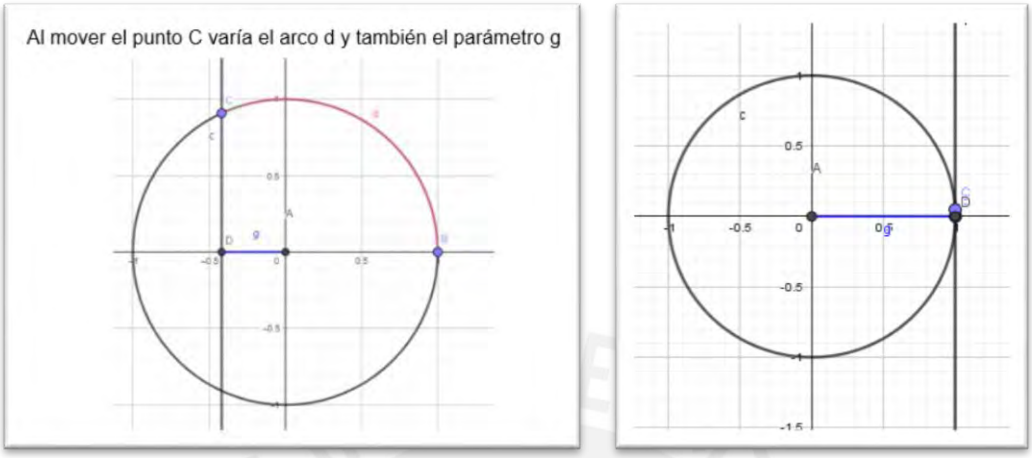


Figura 37. Construcciones realizadas por el estudiante B para dar respuesta a la pregunta 1 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista.

S: ¿Qué varía al mover el punto C en sentido antihorario?

B: Mire como puedo observar, según el gráfico representado por GeoGebra los parámetros que varían en dicha figura son el *d* y el *g*, en este caso el *g* representaría un radio que se va haciendo más pequeño cada vez.

S: ¿Y el valor de *d*?

B: Es un arco que va creciendo cada vez que el punto C va moviéndose.

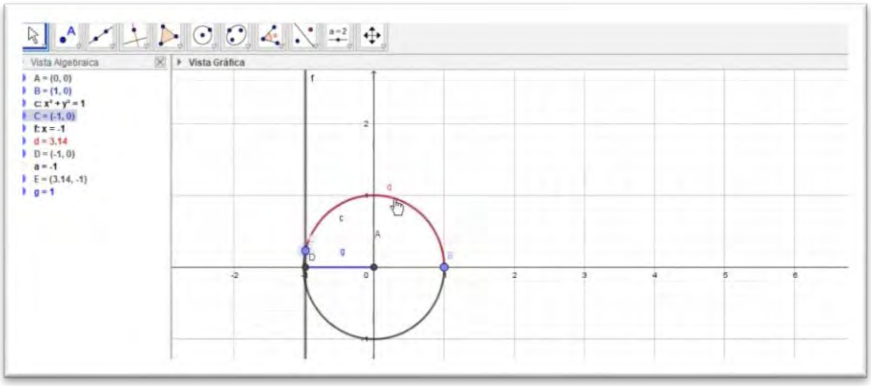
S: ¿Tendrá un nombre en particular el valor de g?

B: En este caso si hablamos de la C.T. como tal podemos asociarlo, si realizamos ahí un trazo de las coordenadas y realizamos una operación podemos darnos cuenta que es la línea coseno, ahí se forma un triángulo rectángulo y trazamos una diagonal hacia el punto C y en este caso sería el cateto adyacente sobre la hipotenusa, sería el coseno de nuestra figura, porque en este caso la hipotenusa viene a ser uno, porque es el radio de la circunferencia.

S: ¿Y el valor de *d* ?

B: El valor de *d* con el arco, en este caso se puede relacionar también con el ángulo, ya que va girando 360 grados.

La figura 38 muestra como el estudiante señala a través de GeoGebra los cambios que se dan entre las variables.



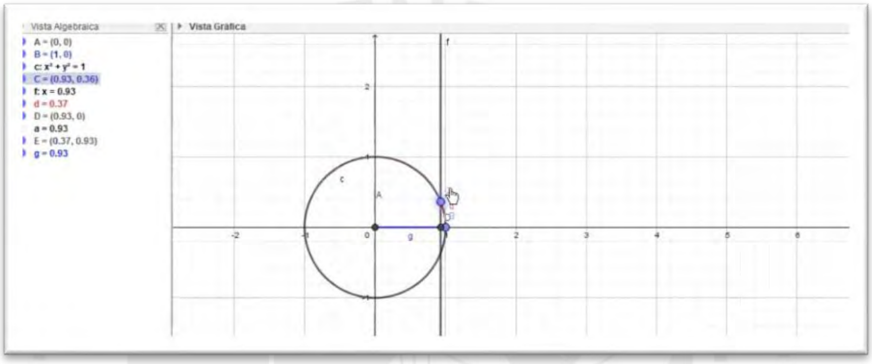


Figura 38. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante B

Se puede inferir de las respuestas dadas por el estudiante B, que reconoce dos elementos que varían: el arco *d* y el parámetro *g* de acuerdo a la posición del punto C. Cuando el estudiante expresa de forma escrita que el arco *d* y el parámetro *g* varían al mover el punto C, pensamos que se guía por la manipulación del punto C en la circunferencia al notar los cambios que se dan en la gráfica, guiándose de las posiciones que toman estos elementos.

Por otro lado, en la entrevista cuando se le pregunta ¿qué varía al mover el punto C en sentido antihorario?, el estudiante afirma que los parámetros *d* y *g*, pero observamos que relaciona *g* con el radio de la circunferencia trigonométrica y además afirma que va disminuyendo, interpretamos que el estudiante da estas respuestas porque uno de los extremos del segmento *g* inicia en el centro de la circunferencia (0,0) y el otro extremo coincide con la circunferencia, luego, como g cambia al mover el punto C, el estudiante considera el segmento *g* como variable. Mientras que, al preguntarle por el valor de *d* el estudiante afirma que es un arco y que va creciendo a medida se mueve el punto C, esto nos hace pensar que también lo considera como variable.

El estudiante hace referencia a cambios en las variables longitud de arco y la proyección del punto C sobre el eje X, sin embargo, no se observa que haya una coordinación entre los cambios de estas variables, por lo que se evidencian comportamientos asociados a una AM1, lo que no significa que, en otras preguntas más puntuales, los estudiantes puedan evidenciar un cierto nivel de coordinación entre estas variables.

3.5.2. Acción mental 2

Para este tipo de acción mental, se han considerado aspectos relacionados al reconocimiento de los valores que toman las variables longitud de arco y la proyección dirigida al eje X del punto C, al variar 360° el punto C de forma antihoraria. Es probable que el estudiante luego de mover el punto C una vuelta completa en sentido antihorario, indique que los valores que toma el arco van de 0 a 360°, fijándose solo en los valores de la variable arco; luego, vuelva a girar 360° el punto C y se fije solo en los posibles valores que toma la proyección dirigida al eje X del punto C e indique que varía entre -1 y 1, sin considerar a la variable arco, y así sucesivamente, hasta empezar a ver cierta coordinación entre los valores de ambas variables por cuadrantes, implicaría una coordinar asíncrona entre las variables antes mencionadas

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes A y B.

Estudiante A:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre reconocer una posible coordinación de manera asíncrona sobre las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno. La segunda pregunta del cuestionario fue: *Si el punto* C *da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿qué valores podrían tomar las variables descritas en la pregunta anterior?* La figura 39 muestra la construcción realizada por el estudiante y las imágenes del GeoGebra que justificaron su respuesta.

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

S: Puedes identificar los puntos donde la gráfica de la circunferencia trigonométrica corta al eje de coordenadas

A: Si se puede identificar, se da cuando llega a noventa grados, diré pi medios, pi, tres pi medios, y dos pi.

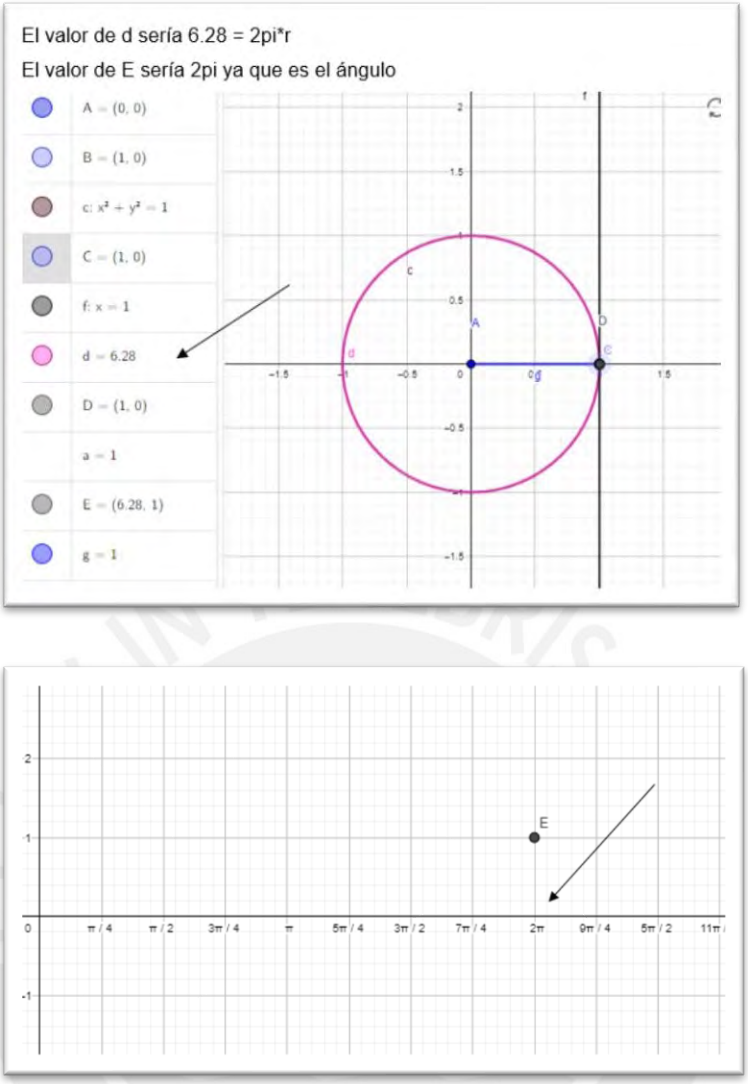


Figura 39. Construcciones realizadas por el estudiante A para dar respuesta a la pregunta 2 del cuestionario

La figura 40 muestra como el estudiante explica a través de GeoGebra el punto donde el arco *d* corta al eje Y.

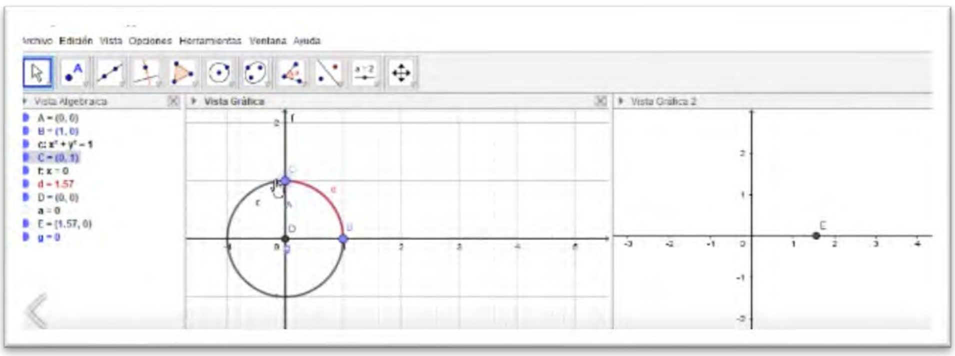


Figura 40. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante A

El estudiante A da su respuesta con base en las variables *d* (arco) y E (punto que tiene por coordenadas al valor del arco *d* como abscisa y a la proyección sobre el eje X de la línea coseno como ordenada). Respecto al arco *d*, el estudiante A reconoce los distintos valores que puede tomar dicha variable cuando expresa verbalmente: *"se da cuando llega a noventa grados, diré pi medios, pi, tres pi medios, y dos pi"*, y la frase *"cuando llega a"* da la idea de movimiento; además, el estudiante muestra conocimientos de trigonometría cuando plantea cómo hallar el valor del arco, que viene a ser la longitud de un arco de la circunferencia, cuando se ha dado una vuelta completa: *"el valor de d seria 6,28=-2pi*r"*, suponemos que el signo negativo – se colocó por el sentido antihorario de la vuelta.

Respecto al punto E, punto que cambia de ubicación en la vista gráfica 2 del GeoGebra al mover el punto C, el estudiante no lo considera en esta parte como un objeto multiplicativo compuesto por dos coordenadas que representa cada una a una variable distinta, evidenciando que el estudiante no coordina todavía los valores de las variables arco y proyección sobre el eje X de la línea coseno. Para el estudiante el punto E es un ángulo que varía de 0 a 2pi, valor al que llega luego de que el punto C da una vuelta entera.

Inferimos de las respuestas del estudiante, que este pensó que se le preguntaba por los valores finales que tendrían las variables luego de dar una vuelta, y no sobre todos los valores que podría tomar la variable en el recorrido del punto C, es por esto que no se evidenciaron comportamientos asociados a la acción mental 2. Por otro lado, no quisimos interferir y mencionar en esta pregunta a la variable proyección sobre el eje X de la línea coseno, porque queríamos saber cómo interpretaba el estudiante los elementos cambiantes.

Estudiante B:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre reconocer una posible coordinación de manera asíncrona sobre las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno. La segunda pregunta del cuestionario fue: *Si el punto* C *da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿qué valores podrían tomar las variables descritas en la pregunta anterior?* En la figura 41 se muestra las construcciones realizadas por el estudiante para dar respuesta y las imágenes del GeoGebra que la justificaron.

Figura 41. Construcciones realizadas por el estudiante B para dar respuesta a la pregunta 2 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante B se muestran en el siguiente extracto de la entrevista.

S: Si el punto C lo movemos en sentido antihorario, existe una relación entre las variables descritas en el problema anterior.

B: Sí, si existe una relación entre ellas, puesto que, cuando vemos que el arco y la distancia *d* se van moviendo, nuestra variable *g* disminuye ¡bueno!, decrece y crece respectivamente, mientras vemos que se va moviendo el punto C, en este caso como le digo podemos relacionar con el ángulo y el coseno, si estuviera en el primer cuadrante, podríamos asociarlo con el ángulo de 45 grados, en este caso trazando una diagonal podríamos formar un triángulo rectángulo y obtendríamos mediante el teorema de Pitágoras el valor de la variable *g*.

S: ¿En qué momento del proceso de construcción es posible observar los valores máximos y mínimos que puede tomar el punto E? ¿se puede identificar los puntos donde la gráfica corta a los ejes coordenados?

B: Claro, en el primer punto y gira en el cero cuando todavía no hemos realizado el giro, podemos observar que la gráfica toma un máximo pues en ese momento es el valor más alto, a medida se va desplazando el punto C, cuando termina el primer cuadrante en 90 grados, vemos que realiza un corte con el eje x, ahí toma un valor de cero, si seguimos desplazando hasta pi o 180 grados, es decir la mitad de la circunferencia, podemos observar que en este caso tomaría un valor mínimo, entonces si seguimos desplazando en la circunferencia hasta 3pi medios podemos observar que regresa de nuevo a una intersección con el eje X, y finalmente si damos una vuelta entera hasta 2pi, podemos observar que toma un valor máximo otra vez, entonces este valor va repitiéndose, es una función periódica, ¡se repite! ¡se repite!

La figura 42 muestra como el estudiante reconoce la posición del punto C para que el ángulo sea 45 grado y hace uso de sus conocimientos de razones trigonométricas para afirmar que el cateto adyacente es el coseno.

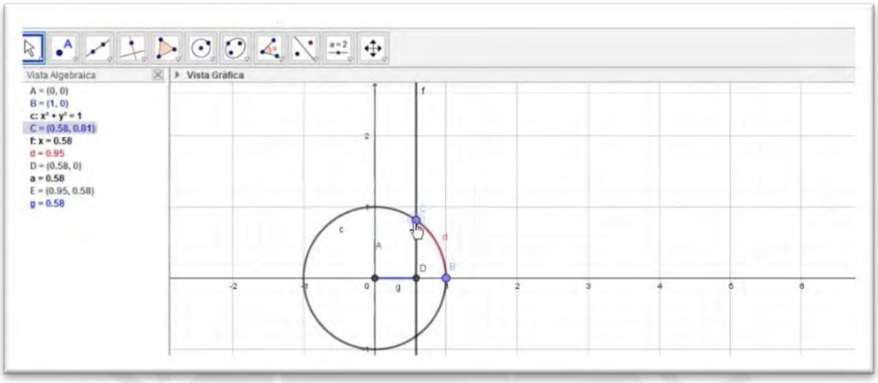


Figura 42. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante B

El estudiante B da su respuesta con base en las variables *d* (arco) y *g* (coseno). Con relación al arco *d*, el estudiante reconoce de forma escrita que toma valores desde 0 hasta 6,24, esto se debe a que al manipular el punto C en sentido antihorario, no llegó a dar una vuelta completa, además se evidencia en las capturas de pantalla que el estudiante coloca. Con respecto a la variable g, el estudiante manifiesta que éste cambia de -1 a 1, pensamos que se debe a que cuando empezó a mover el punto C, el estudiante observó estos valores. Respecto a la entrevista cuando se le consulta por la relación que hay entre las variables, éste se da cuenta que el arco aumenta y los valores de g crecen o decrecen, pero específica que en el primer cuadrante se puede formar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 45 grados, luego calcular el valor de *g* mediante la resolución de triángulos rectángulos, el cual viene a ser el coseno, podemos notar que el estudiante muestra conocimientos de trigonometría cuando plantea cómo hallar el valor de g, que viene a ser el coseno del ángulo de 45.

Respecto al punto E, punto que cambia de ubicación en la vista gráfica 2 del GeoGebra al mover el punto C, el estudiante logra identificar ciertas posiciones donde cortaría a los ejes coordenados, además de reconocer los valores máximos y mínimos, interpretamos que el estudiante se fija en el cambio de la primera variable *d* y luego observa la posición que se da en E, no lo considera en esta parte como un objeto multiplicativo compuesto por dos coordenadas que representa cada una a una variable distinta, evidenciando que el estudiante no coordina todavía los valores de las variables arco y proyección sobre el eje X de la línea coseno.

Inferimos de las respuestas del estudiante, que pensó en el cambio del arco, luego señaló los valores del punto E, es decir percibió los cambios de forma asincrónica, por esto se evidencia comportamientos asociados a la acción mental 2.

3.5.3. Acción mental 3

Para este tipo de acción mental, se ha considerado aspectos relacionados a los cambios de cantidades entre las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, al mover el punto C sobre la circunferencia trigonométrica en sentido antihorario, además, esperamos que el estudiante pueda reconocer los cambios de las cantidades de las variables en términos de aumento o disminución, que se dan en los cuadrantes, esto nos indicaría una posible forma de identificar como el estudiante está coordinando las variables.

La figura 43 muestra lo que presenta el GeoGebra al mover el punto C y variar el arco desde 0 a pi/2.

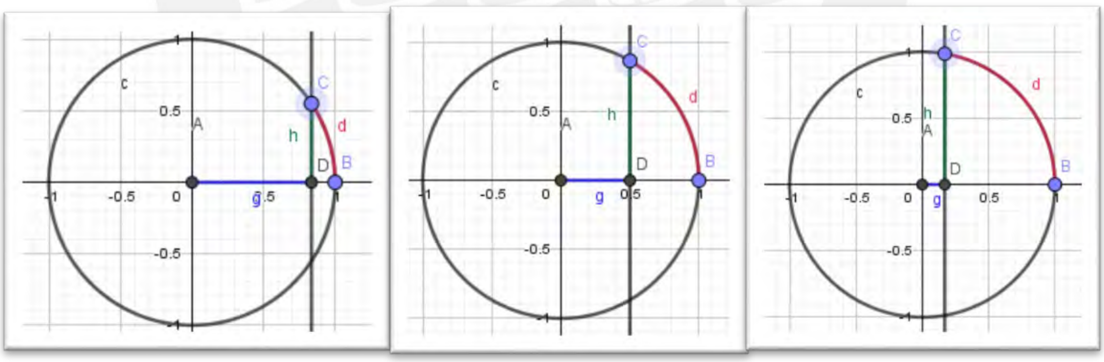


Figura 43. Representación gráfica de los cambios de las variables longitud de arco y proyección de la línea coseno sobre el eje X en el primer cuadrante

Según la figura 43, se espera que el estudiante pueda identificar que la longitud de arco aumenta mientras que la proyección de la línea coseno disminuye al mover el punto C en sentido antihorario, y que esta manera de coordinar los cambios se dé en los demás cuadrantes del plano cartesiano.

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes A y B.

Estudiante A:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre coordinar los cambios de las cantidades de las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La tercera pregunta del cuestionario fue: *Si el punto* C *da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿se puede identificar alguna relación entre los cambios de las variables descritas en los ítems anteriore*s? *Describa cómo se da esa relación.* La figura 44 muestra la respuesta dada por el estudiante.

Al dar una vuelta completa en sentido antihorario el arco d y el punto E aumentarían ya que ya que estos dependen de c

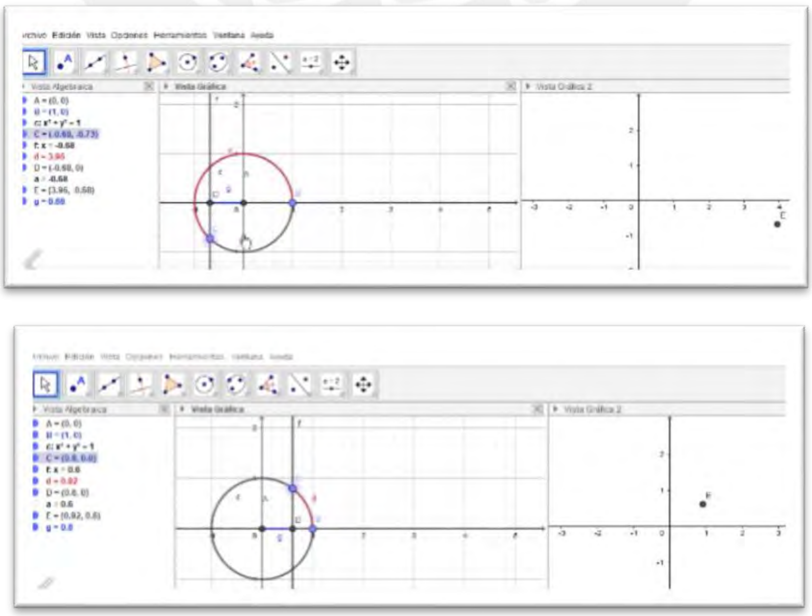
Figura 44. Respuesta del estudiante A en la pregunta 3 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

S: Cuando el punto C se mueve en el sentido antihorario ¿qué puedes decir de los cambios que se dan entre las coordenadas del punto E?, ¿aumentan, disminuyen o se mantienen constantes?

A: Ah bueno las coordenadas estarían aumentando ya que es como el ángulo

La figura 45 muestra como el estudiante A explica los cambios que se dan entre las coordenadas del punto E



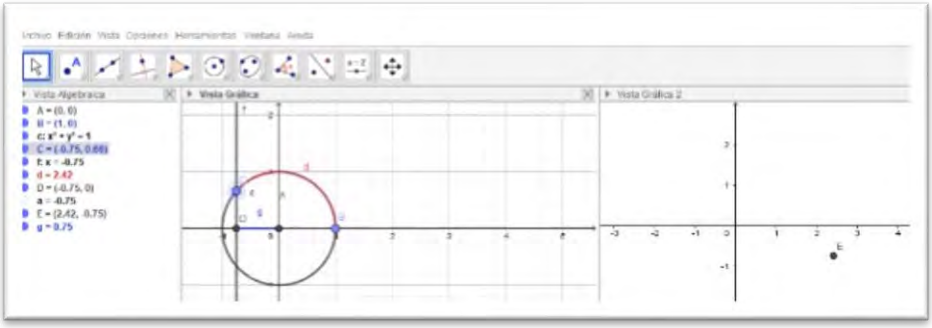


Figura 45. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante A

De las respuestas dadas por el estudiante A, podemos notar que se logra identificar ciertos cambios y dependencias entre los elementos que varían, esto se evidencia cuando el estudiante expresa de forma escrita: *"Al dar una vuelta completa en sentido antihorario el arco d y el punto* E *aumentarían ya que ya que estos dependen de* C*".* Esto refleja que existe una relación entre ambos elementos, y esta relación se expresa en términos de aumentos. Inferimos que el estudiante reconoce que cuando el punto C gira en sentido antihorario de 0 a 2pi, los valores de la medida del arco aumentan, y estos valores hacen que el punto E aumente horizontalmente desde 0 hasta 2pi; sin embargo, el estudiante parece ignorar que el punto E también tienen un desplazamiento vertical, debido a la proyección sobre el eje X de la línea coseno.

Dado que el estudiante considera al punto E como un ángulo, lo que en realidad se está evidenciando es cómo cambia el valor de la medida del arco en la circunferencia trigonométrica en la vista gráfica del GeoGebra, y la misma medida del arco representada como la abscisa del punto E, es decir solo la distancia horizontal en el plano cartesiano. Esta relación no conduce a construir la gráfica de la función coseno, por lo que no se evidenciaron comportamientos asociados a la acción mental 3.

Estudiante B:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre coordinar los cambios de las cantidades de las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La tercera pregunta del cuestionario fue: *Si el punto* C *da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿se puede identificar alguna relación entre los cambios de las variables descritas en los ítems anteriore*s? *Describa cómo se da esa relación.* La figura 46 muestra la respuesta dada por el estudiante.

Podemos relacionar el cambio de g como el radio de una circunferencia trigonométrica en este caso nos describe la línea COSENO, mientras que d se relaciona con el arco de una circunferencia

Figura 46. Respuesta del estudiante B en la pregunta 3 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante B se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

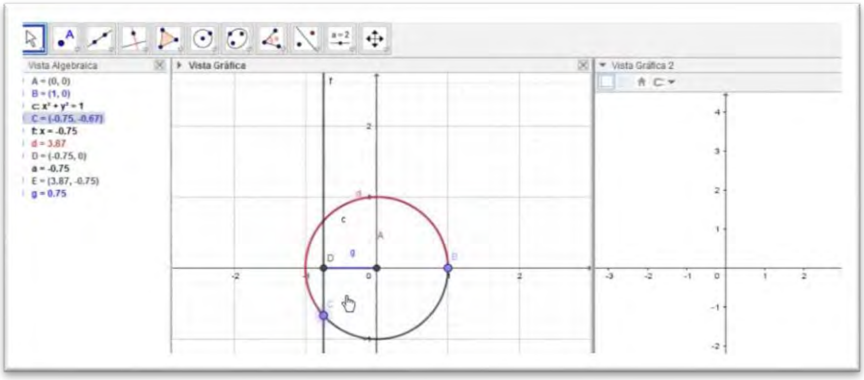
S: Cuándo el punto C se mueve en el sentido antihorario ¿qué puedes inferir de los cambios que se dan de las coordenadas del punto E? ¿aumentan, disminuyen o se mantienen constantes?

B: Ahí podemos ver que el punto E va creciendo y decreciendo en un rango de -1 a 1, en este caso va subiendo y bajando si hablamos en cuanto al eje X, y con respecto al eje Y también va creciendo hacia el infinito y si le diéramos varias vueltas, pues pensaría en el infinito. Pero si hablamos del eje Y vemos que se desplaza de -1 a 1, entonces efectivamente podríamos darnos cuenta que vendría a ser la función coseno, puesto que el coseno varía en el eje Y, la función varía de -1 a 1 cuando hablamos de la CT y bueno podríamos darle varias vueltas a esa circunferencia, podría llegar hasta el infinito, pero la CT por lo general va de 0 a 2pi, que es una vuelta entera que es 360 grados.

S: En relación a los cambios que realiza E ¿habrá una relación con las variables que ha indicado en la primera pregunta?

B: Sí, claro existe una relación, vemos que *d* crece y el *g* crece y decrece, los valores del punto E van variando también, van creciendo y decreciendo dependiendo el coseno como sea en cada punto que estamos ubicando C, en este caso si ubicamos C en la parte más alta del primer cuadrante, es decir 90º, podemos observar que nuestro punto E se ubicaría justo en la intersección con el eje X y si eso lo vemos en radianes, sería pi medios y el coseno de pi medios viene a ser cero.

La figura 47 muestra como el estudiante B observa los cambios de las coordenadas del punto E.



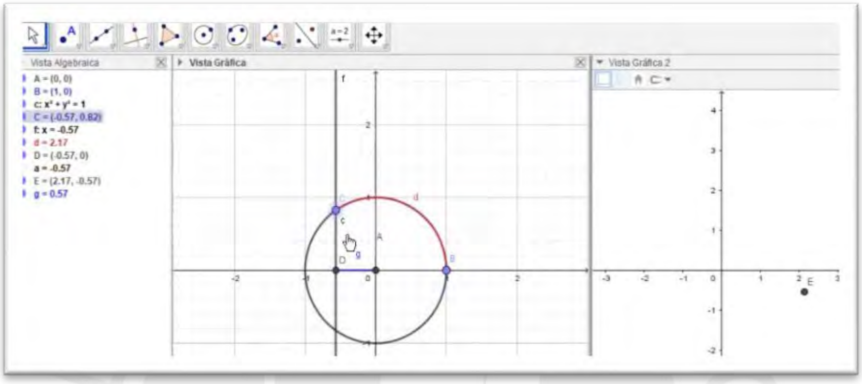


Figura 47. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante B

De las respuestas dadas por el estudiante B, podemos observar que se logra identificar ciertos cambios entre los elementos que varían, esto se evidencia cuando el estudiante expresa de forma escrita: *"podemos relacionar el cambio de g como el radio de una circunferencia, en este caso nos describe la línea coseno, mientras que d se relaciona con el arco de la circunferencia"* esto nos muestra que el estudiante está pensando en una relación entre ambas variables.

Por otro lado, al consultarle en la entrevista sobre los cambios que se dan en las coordenadas del punto E, el estudiante expresa de forma verbal: *"podemos ver que el punto* E *crece y decrece en el rango de -1 a 1",* esto evidencia que el estudiante reconoce que existe cambios en la posición del punto E, pero también manifiesta la variación del punto E en términos de crece o decrece. Cuando se le repregunta sobre si existe una relación entre las variables, en esta parte de la entrevista el estudiante reafirma: "*d* crece y *g* crece y decrece", pensamos que el estudiante analiza estos cambios debido a que observa la posición del punto E en el eje X, cuando C se ubica en 90 grados y después calcula el coseno de ese ángulo para así obtener la segunda componente.

Por lo tanto, el estudiante coordina los cambios entre los valores que toman las variables longitud de arco (*d*) y la proyección de la línea coseno sobre el eje X (*g*), en términos de aumentos (crece) o disminuciones (decrece). El estudiante evidencia comportamientos asociados a una AM3.

3.5.4. Acción mental 4

Para este tipo de acción mental, se han considerado aspectos relacionados al reconocimiento de valores discretos que toman las variables longitud de arco y la proyección dirigida de la línea coseno sobre el eje X, al mover el punto C de 0 a 360 grados de forma antihoraria. Es probable que el estudiante identifique un conjunto de pares ordenados del punto E, además indique el valor máximo y mínimo que puede tomar el coseno. El estudiante podría justificar su respuesta, si analiza los valores que toma el arco para ciertos valores de la línea coseno.

La figura 48 muestra un número discreto de puntos que los estudiantes podrían identificar al resolver la actividad. Las coordenadas de cada punto tienen como abscisa a la longitud de arco y como ordenada a la proyección sobre el eje X de la línea coseno.

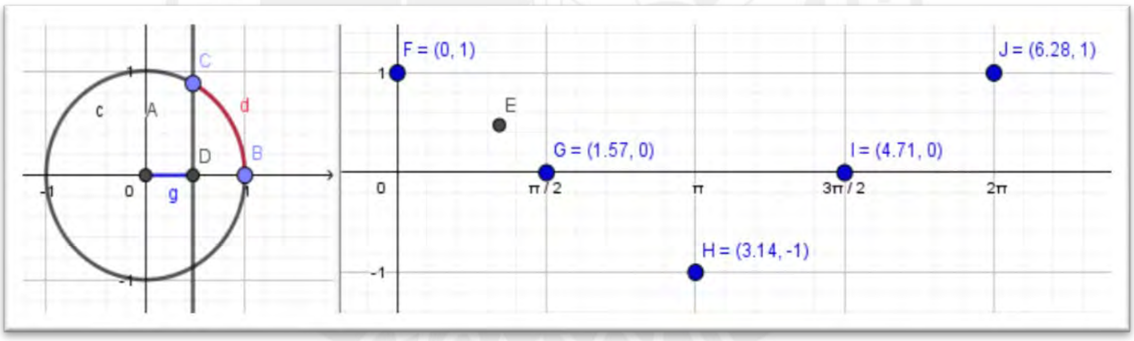


Figura 48. Número discreto de puntos compuesto por las variables longitud de arco y proyección de la línea coseno sobre el eje X

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes A y B.

Estudiante A:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre coordinar los valores que toman las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La cuarta pregunta del cuestionario fue: *¿Qué representa la abscisa y la ordenada del punto* E*? Describa el comportamiento del punto* E *al mover el punto* C *en sentido antihorario. Justifique su respuesta indicando algunas posiciones del punto* E*.* La figura 49 muestra la respuesta dada por el estudiante y las imágenes del GeoGebra que justificaron su respuesta.

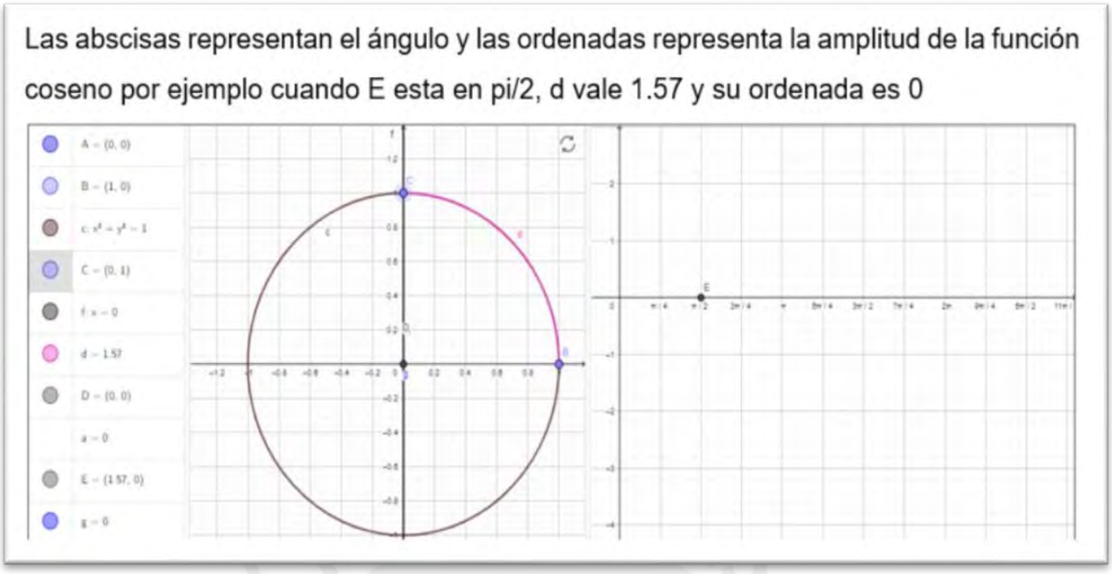


Figura 49. Respuesta del estudiante A en la pregunta 4 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

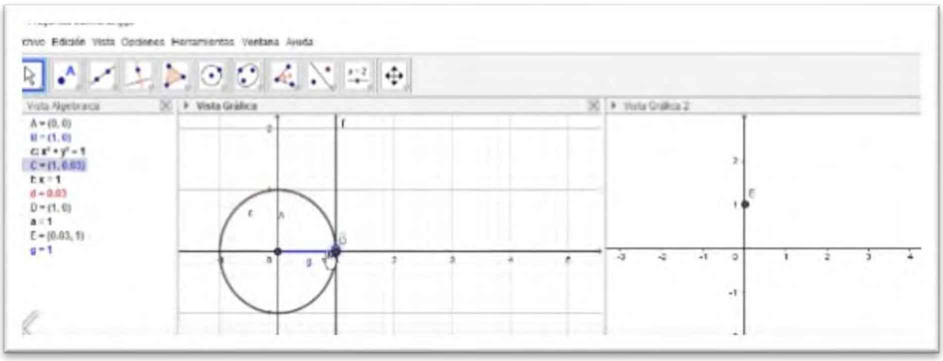
S: ¿Existe algún valor de *x* donde *y* sea igual a 2? Explique.

A: No existiría, porque es una circunferencia trigonométrica y su radio es uno o sea que el máximo podría tomar el valor de uno

S: ¿Existe algún valor de *x* donde *y* sea igual a 0,5? Explique.

A: Bueno no lo puedo señalar, pero he ahí por donde está el punto C, ajá ahí sería cero punto cinco, entonces sí existe un x que ahí de cero coma cinco.

La figura 50 muestra como el estudiante observa el máximo mínimo valor que toma el coseno.



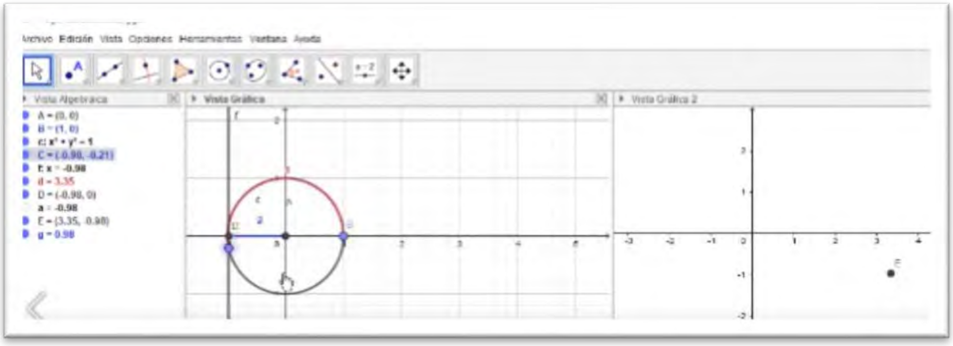


Figura 50. Capturas de pantalla durante la entrevista con el estudiante A

A partir de la pregunta puntual sobre las coordenadas del punto E, el estudiante A logra identificar qué representa cada una de estas coordenadas y hasta fue capaz de dar valores numéricos. Cuando expresa de forma escrita: "*Las abscisas representan el ángulo y las ordenadas representa la amplitud de la función coseno por ejemplo cuando* E *está en pi/2, d vale 1.57 y su ordenada es 0*", está asignando a la abscisa el valor de la variable *d* (medida del arco) y a la ordenada el valor de la amplitud de la función coseno (proyección en el eje X de la línea coseno). Al parecer, cuando el estudiante señalaba que el punto E era un ángulo, lo hacía porque en la vista gráfica 2 del GeoGebra, el eje x está expresado en radianes. Sin embargo, es consciente que el punto E tiene dos coordenadas y estas son las variables que esperamos que el estudiante coordine sus valores.

La respuesta del estudiante sobre la pregunta de si existe un valor de *x* para que *y* = 2, al considerar un punto E de coordenadas (*x*; *y*), enunciada así: "*No existiría, porque es una circunferencia trigonométrica y su radio es uno o sea que el máximo podría tomar el valor de uno*", reafirma que el estudiante relaciona la ordenada del punto E con la proyección sobre el eje X de la línea coseno, indicando el valor máximo que puede tomar esta variable. Por otro lado, al reconocer la existencia de un valor de *x* (medida del arco) para el cual la ordenada es igual a 0,5, al expresar: *"he ahí por donde está el punto c, ajá ahí sería cero punto cinco, entonces sí existe un x que ahí de cero coma cinco"*, el estudiante encuentra otro punto que pertenece a la gráfica del coseno, que presenta valores individuales de las variables medida del arco y proyección sobre el eje X de la línea coseno.

En esta pregunta observamos que el estudiante reconoce la existencia de las variables medida del arco y proyección sobre el eje X de la línea coseno y valores asociados a ellos (AM1); asimismo, para responder a las preguntas sobre la existencia de medidas de arco para ciertos valores del coseno, el estudiante pensó primero en si el coseno podía tomar dichos valores, luego, se centró en valores de medidas de arco que den la ordenada pedida, lo que muestra una coordinación asíncrona entre ambas variables (AM2); por otro lado, las frases *“cuando E está en pi/2, d vale 1.57 y su ordenada es 0”* y *“por donde está el punto c”* denotan movimiento y variación de las variables en cuestión, lo que muestra una coordinación general entre ellas (AM3); y, finalmente, observamos que el estudiante reconoce valores individuales de ambas variables, las cuales muestran una coordinación entre ellas al ser representadas como puntos en el plano, que dan la idea de la formación de un objeto multiplicativo compuesto por las variables medida de arco y proyección sobre el eje X de la línea coseno (AM4). Por lo tanto, es observan comportamientos asociados a las acciones mentales AM1, AM2, AM3 y AM4.

Estudiante B:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre coordinar los valores que toman las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La cuarta pregunta del cuestionario fue: *¿Qué representa la abscisa y la ordenada del punto* E*? Describa el comportamiento del punto* E *al mover el punto* C *en sentido antihorario. Justifique su respuesta indicando algunas posiciones del punto* E*.* La figura 51 muestra la explicación dada por el estudiante y las imágenes del GeoGebra que justificaron su respuesta.

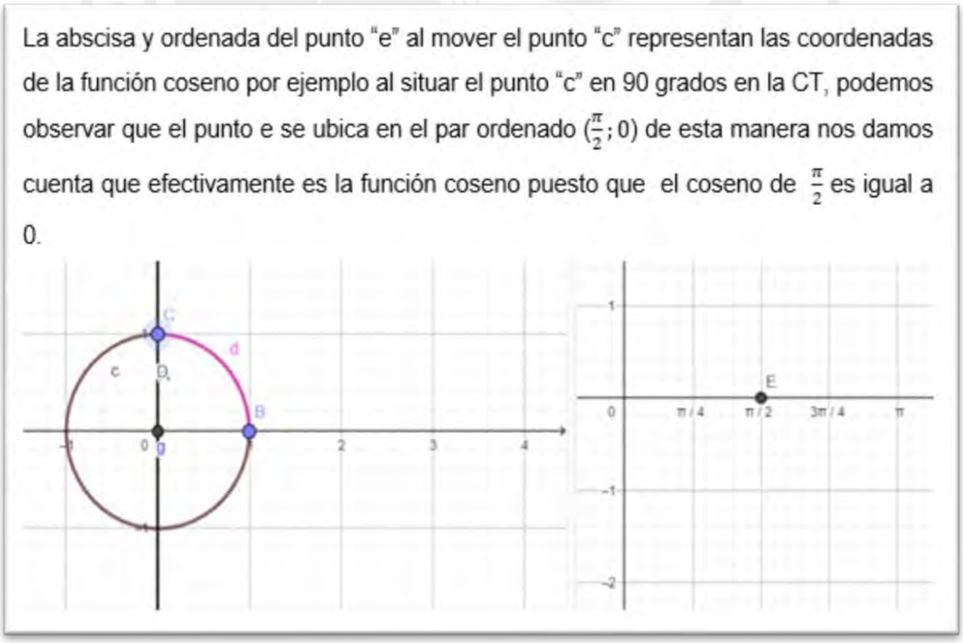

La abscisa y ordenada del punto “e” al mover el punto “c” representan las coordenadas de la función coseno por ejemplo al situar el punto “c” en 90 grados en la CT, podemos observar que el punto e se ubica en el par ordenado $(\frac{\pi}{2}; 0)$ de esta manera nos damos cuenta que efectivamente es la función coseno puesto que el coseno de $\frac{\pi}{2}$ es igual a 0.

Figura 51. Respuesta del estudiante B en la pregunta 4 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante B se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

S: ¿Existirá un valor en x donde y sea igual a 2? Explique

B: No existe ningún punto en el que pueda ser dos y esto es porque cuando hablamos de la circunferencia trigonométrica el radio de la circunferencia siempre es 1, entonces el valor máximo va ser de 1 y el valor mínimo de -1, entonces no llegamos hasta dos.

S: ¿Existirá un valor en x donde el valor de y sea igual a 0,5?

B: Claro, sí existe, porque en este caso nosotros desplazamos hasta la intersección que sería 90 grados, ¿0,5 me dice?

S: Sí

B: Antes de 90 grados, entre la mitad pues no, 45 grados por decir, claro 45 grados sería. No, me estoy equivocando, más o menos por la mitad podríamos observar que se encuentra entre 0 y el 1, entonces si podría tomar el valor de 0,5, porque se encuentra en el rango de -1 a 1. Sí podría tomarlo.

S: ¿Existirá un valor en x donde y sea igual a 0,75?

B: Claro también, porque se encuentra en el rango de -1 a 1, mientras no supere el número 1, ósea, por ejemplo: 1,75 o 1,002, mientras no supere el número 1 van a existir valores entre el rango de -1 a 1.

La figura 52 muestra la posición donde el valor en x (longitud de arco) es 45º, teniendo en cuenta que el valor en y (proyección de la línea coseno) es 0.5

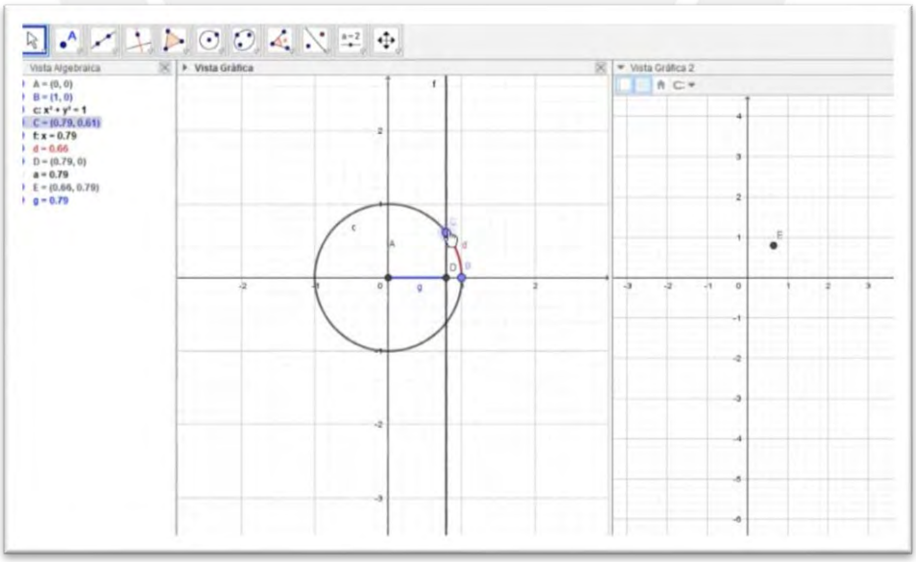


Figura 52. Captura de pantalla durante la entrevista con el estudiante B ante la pregunta ¿Existirá un valor en x donde el valor de y sea igual a 0,5?

Al analizar las respuestas del estudiante B podemos notar que logra reconocer una serie de valores discretos que toma las coordenadas del punto E, el estudiante expresa de forma escrita: “al ubicar el punto C en 90º en la circunferencia trigonométrica podemos observar que el punto E se ubica en el par ordenado ($\frac{\pi}{2}; 0$)”, pensamos que el estudiante relaciona los atributos de las variables longitud de arco y proyección de la línea coseno y lo representa como un punto.

Además, cuando se le pregunta de forma verbal: ¿existe un valor de x para que y sea 2?, el estudiante afirma que *“no existe, dado que en la circunferencia trigonométrica el radio es igual a 1, entonces el valor máximo va ser 1 y el valor mínimo -1*. De la respuesta dada inferimos que el estudiante relaciona la ordenada con la proyección de la línea coseno, puesto que manifiesta su variación. Por otro lado, cuando se le pregunta por el valor en x para que y sea igual a 0,5, el estudiante manifiesta que “sí existe, porque en este caso nosotros desplazamos hasta antes de 90 grados, entre la mitad, 45 grados por decir sería (…) más o menos por la mitad, podríamos observar que se encuentra entre 0 y 1, entonces si se podría tomar 0,5 porque se encuentra en el rango de 0 a 1”, interpretamos que el estudiante al conocer la variación del coseno en la circunferencia trigonométrica, expresa que el valor x (medida del arco) sí existe porque 0,5 está entre 0 a 1.

A continuación, reconoce la existencia de otro valor en x cuando y es 0,75 al expresar verbalmente: “claro también, porque se encuentra en el rango de -1 a 1, mientras no supere el número 1, ósea por ejemplo: 1,75 ó 1,002, mientras no supere el número 1 van a existir valores entre el rango de -1 a 1”, de las respuestas del estudiante, pensamos que ha generado la idea de rango de la función coseno, por lo tanto coordina los cambios individuales entre un número discreto de valores que toman las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X, y los representa como pares ordenados, o lo indica verbalmente. El estudiante B manifiesta comportamientos de una acción mental 4.

3.5.5. Acción mental 5

Para este tipo de acción mental, se ha tomado en cuenta aspectos relacionados a construcción de la gráfica del coseno, la cual es continua y tiene una forma suave y ondulante, sin embargo, muchos estudiante tienen la idea de que una gráfica consiste en tabular un número finito de puntos y luego unirlos, a veces con segmentos de rectas o con curvas que no representan la manera en la que coordinan las variables medida del arco y proyección sobre el eje X de la línea coseno, las cuales se ven representadas como coordenadas del punto E. Es probable que el estudiante realice un esbozo de una gráfica al unir un conjunto discreto de puntos de arcos conocidos, que marcan la trayectoria que recorre el punto E, pero sin tener la seguridad de la existencia de otros puntos de arcos no conocidos que pertenecen al intervalo [0; 2pi]. La figura 54 muestra una posible respuesta de los estudiantes al resolver la actividad.

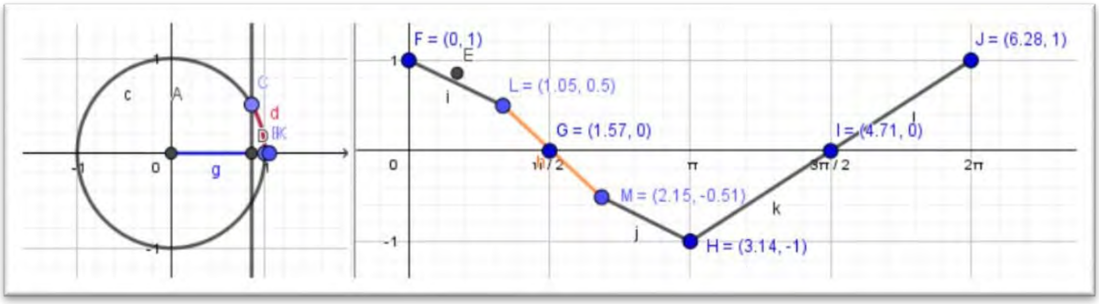


Figura 53. Esbozo de la gráfica de la función coseno

La figura 53 nos da una idea de que el estudiante considera que la gráfica es continua, que existe la proyección sobre el eje x de la línea coseno, para toda medida de arco desde 0 hasta 2pi, sin embargo, solo presta atención a los puntos extremos de cada intervalo en los que ha dividido el intervalo [0; 2pi], sin considerar la densidad de puntos que existen entre los puntos. A continuación, se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes A y B.

Estudiante A:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante identifique una covariación continua entre las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La quinta pregunta del cuestionario fue: *Si el punto* C *da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿el punto* E *generaría una gráfica? Si su respuesta es afirmativa, realice un esbozo de la gráfica que se generaría. Explique su procedimiento.* La figura 54 muestra la respuesta del estudiante A.

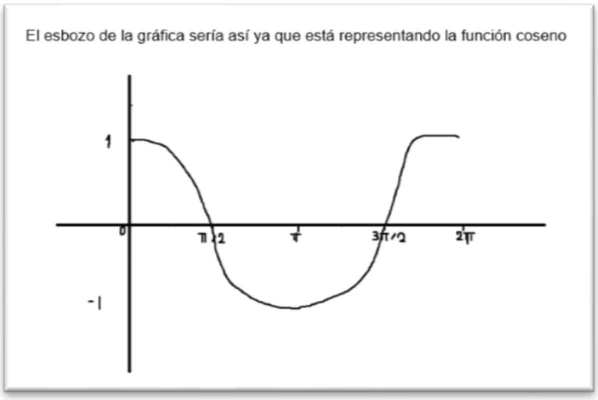


Figura 54. Respuesta del estudiante A en la pregunta 5 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

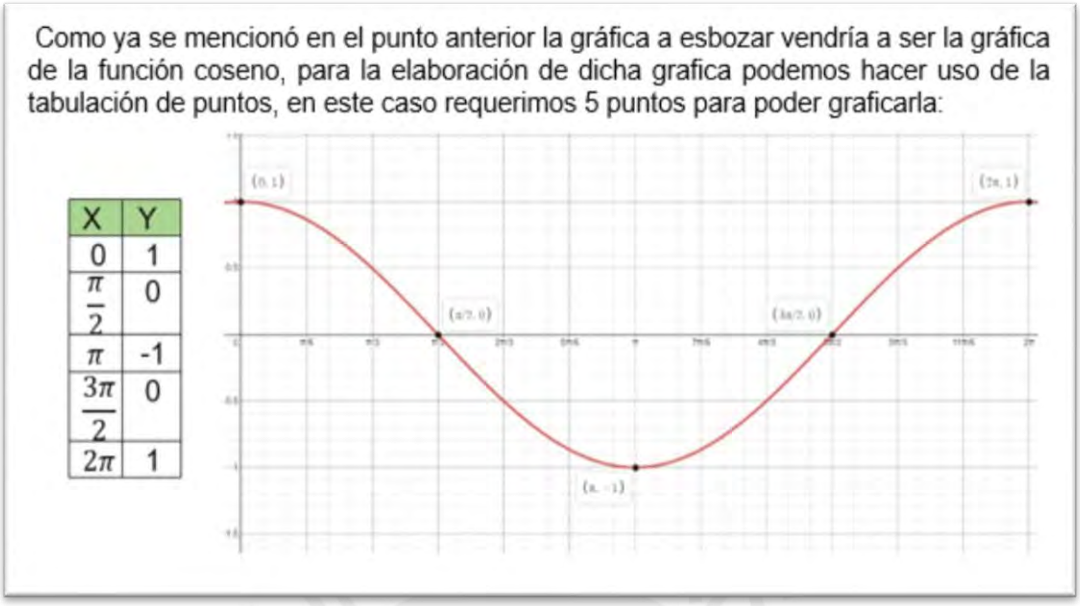
S: Cuando el punto C se mueve en sentido antihorario, ¿qué gráfica describe el punto E? ¿con que tipo de gráfica la puedes asociar?
A: Bueno ahí podría asociar una gráfica en la cual la recta del eje horizontal son los valores que toma el ángulo que se va a formar a partir de la circunferencia trigonométrica y en el eje vertical los valores que puede tomar el radio de la circunferencia.

A partir del esbozo de la gráfica realizado por el estudiante A, podemos decir que el estudiante consideró que para cada medida de arco existe una proyección sobre el eje X de la línea coseno respetando la concavidad de la gráfica, lo cual es un indicador que se tomó en consideración los cambios en el valor de una variable sucediendo simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, sin embargo, al expresar su respuesta de forma escrita: *"El esbozo de la gráfica sería así ya que está representando la función coseno"*, nos hace pensar que para el estudiante ya era conocida la gráfica de la función coseno. Su respuesta expresada verbalmente en la entrevista: "*Bueno ahí podría asociar una gráfica en la cual la recta del eje horizontal son los valores que toma el ángulo que se va a formar a partir de la circunferencia trigonométrica y en el eje vertical los valores que puede tomar el radio de la circunferencia"*, evidencia una falta de coherencia entre la gráfica y la forma en la que coordinó los cambios entre los valores de ambas variables, dado que el radio de circunferencia es igual a 1, y no varía.

La gráfica presentada por el estudiante es continua, suave y ondulante, muy semejante a la gráfica real, sin embargo, no surge de una apropiada coordinación de los valores de las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno, pensamos que el estudiante ubicó puntos en el plano y únicamente los unió, recordando la gráfica de la función coseno, o siguiendo la trayectoria del punto E. Por lo tanto, se observan comportamientos asociados a una AM5.

Estudiante B:
Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante identifique una covariación continua entre las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La quinta pregunta del cuestionario fue: *Si el punto* C *da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿el punto* E *generaría una gráfica? Si su respuesta es afirmativa, realice un esbozo de la gráfica que se generaría. Explique su procedimiento.* La figura 55

muestra la respuesta del estudiante ***B***



Como ya se mencionó en el punto anterior la gráfica a esbozar vendría a ser la gráfica de la función coseno, para la elaboración de dicha grafica podemos hacer uso de la tabulación de puntos, en este caso requerimos 5 puntos para poder graficarla:

X	Y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Figura 55. Respuesta del estudiante B en la pregunta 6 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante B se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

S: Cuando el punto C se mueve en sentido antihorario, ¿qué gráfica describe el punto E? ¿con qué tipo de gráfica la puedes asociar?

B: Podría relacionar con la función coseno, porque cumple con esas características, se desplaza en su rango de -1 a 1 y en su dominio, si hablamos de la CT de 0 a 2pi , entonces empieza en el 1, porque sería que el coseno de 0 en la CT, es decir ahí nos da una línea horizontal que es igual al radio de la circunferencia y el radio es 1, mediante nos vamos moviendo, ese punto va ir bajando hasta el punto mínimo, que sería por ejemplo pi en este caso y así sucesivamente cumple con todos los requisitos para relacionarlo o asociarlo con la función coseno.

De la respuesta escrita por el estudiante B y el esbozo de su gráfica realizada, podemos observar que elaboró la gráfica de la función coseno, sin embargo, el estudiante afirma: "*que para su elaboración se requiere hacer uso de la tabulación de puntos, en este caso 5 puntos*", pensamos que el estudiante tiene saberes previos sobre las funciones trigonométricas, además en su tabulación coloca los valores de (0;1), ($\frac{\pi}{2}$;0), (π;-1), ($\frac{3\pi}{2}$;0), (2π;1), en el sistema de coordenadas rectangulares, luego piensa que la gráfica de la función coseno pasa por dichos puntos, creemos que el estudiante posee saberes previos sobre la función coseno, por ello, al unir los puntos deduce la forma de la gráfica. En la entrevista realizada el estudiante expresa de forma verbal que la gráfica que describe el punto E es: “la función coseno, porque cumple con sus características”, creemos que el estudiante tiene saberes previos sobre trigonometría, esto lo evidenciamos al dar sus respuestas, sin embargo, no se observa una adecuada coordinación entre todos los valores de las variables longitud de arco y proyección de la línea coseno, Por lo tanto, presenta comportamientos de una acción mental 5.

3.5.6. Acción mental 6

Para este tipo de acción mental, se ha tomado en cuenta aspectos relacionados a construcción de la gráfica del coseno, la cual es continua y tiene una forma suave y ondulante. Para ello, el estudiante debe ser consciente de cómo se comportan las variables representadas en las coordenadas del punto E, que existe proyección sobre el eje x de la línea coseno para toda medida de arco, tomando en cuenta los infinitos valores que existen en el recorrido del punto E, y que los cambios que se dan entre estas variables son simultáneos.

La figura 56 muestra una posible gráfica del estudiante A al resolver la actividad.

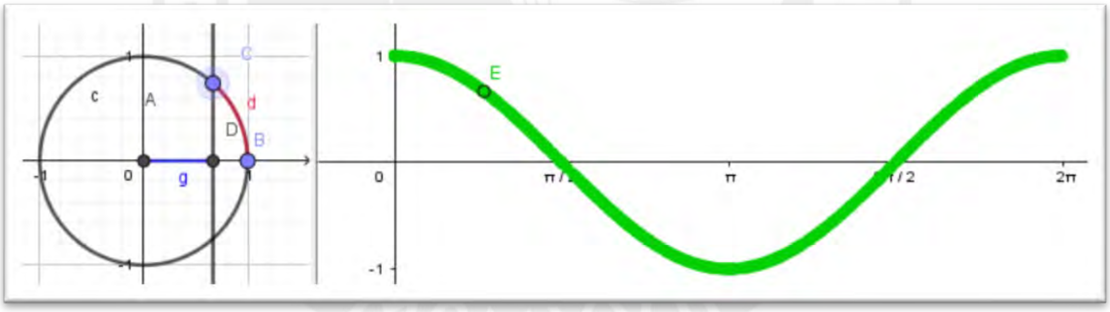


Figura 56. Gráfica continua y suave de la función coseno

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes *A* y *B.*

Estudiante A:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre coordinar de forma simultánea los cambios que toman los valores de las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La sexta pregunta del cuestionario fue: *¿Cuántos puntos cree usted que se necesitan para realizar el gráfico que genera el punto* E*? Explique.*

La figura 57 muestra la respuesta del estudiante A.

Se necesitan infinitos puntos a pesar de que el dominio presenta un límite, existen infinitos puntos dentro de esta recta

Figura 57. Respuesta del estudiante A en la pregunta 6 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

S: ¿Los cambios del punto E se dan de forma simultánea cuando muevo el punto C?
A*:* Sí, ya que representa su ángulo y el coseno x
S: Existe algún arreglo en la construcción para desarrollar la gráfica en los números negativo
A*:* sí se podría tomando valores como menos pi medios, menos pi y se podría realizar un esbozo.

De las respuestas dadas por el estudiante A, podemos observar que logra reconocer la existencia de infinitos puntos que puede tomar el punto E, para lo cual el estudiante manifiesta: "*se necesitan infinitos puntos a pesar de que el dominio presenta un límite, existen infinitos puntos dentro de esta recta*". Pensamos que el estudiante considera que el dominio de la gráfica de la función coseno presenta un límite, pero al final afirma que existen infinitos puntos en esta recta, además en la entrevista cuando se le pregunta por los cambios simultáneos que se dan por el punto E, el estudiante afirma que sí existe, además, pensamos que considera el ángulo y la proyección de la línea coseno sobre el eje X como las componentes del punto E.

Por otro lado, cuando queremos extender la gráfica hacia la parte negativa, el estudiante señala que sí se puede, para ello menciona ciertos valores negativos para el ángulo. Por lo tanto, es observan comportamientos asociados a una AM6.

Estudiante B:

Las preguntas estuvieron orientadas a que el estudiante logre coordinar de forma simultánea los cambios que toman los valores de las variables longitud de arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. La sexta pregunta del cuestionario fue: *¿Cuántos puntos cree usted que se necesitan para realizar el gráfico que genera el punto* E*? Explique.* La figura 58 muestra la respuesta del estudiante ***B***

Se necesitan 5 puntos como mínimo, estos puntos serian el máximo, el mínimo y los puntos de corte con el eje x

Figura 58. Respuesta del estudiante B en la pregunta 6 del cuestionario

Las preguntas hechas en la entrevista semiestructurada y las respuestas del estudiante A se muestran en el siguiente extracto de la entrevista:

S: ¿Qué pasaría con el punto E, si en la circunferencia el punto C diera una vuelta más?
B: Bueno si diera una vuelta más, en este caso, en nuestro eje x terminaría de dar toda la circunferencia, desde 0 a 2pi, de ahí continuaría con el mismo trayecto, pero ya sería una segunda vuelta, es decir en x serían valores mayores a 2pi, que es todo una vuelta en la circunferencia, es decir crece en x porque en sí podríamos dar infinitas vueltas, ya que, en este caso el dominio de la función coseno es todos los reales y el rango es de -1 a 1.
S: ¿Los cambios de las coordenadas del punto E se dan de forma simultánea, cuando muevo el punto C en sentido antihorario?
B: Sí se dan de forma simultánea, ahí podemos observar que mientras vamos moviendo el punto C, nuestro punto E va desplazándose desde -1 a 1 y el valor de cero al infinito en x, ahí podemos observar

De las respuestas dadas por el estudiante B, observamos que logra reconocer la existencia de algunos puntos para el punto E, para lo cual el estudiante expresa de forma escrita “se necesita 5 puntos como mínimo, estos puntos sería el máximo, el mínimo y los puntos de corte con eje X”, pensamos que el estudiante considera por saberes previos que la gráfica de la función coseno pasará por esos puntos, pero aún no es consciente de los diversos puntos que existen entre los valores que ha señalado.

Además, en la entrevista cuando se le pregunta por los cambios simultáneos de las coordenadas del punto E, el estudiante expresa de forma verbal: “Sí se dan de forma simultánea, ahí podemos observar que mientras vamos moviendo el punto C, nuestro punto E va desplazándose desde -1 a 1 y el valor de cero al infinito en x, ahí podemos observar”, por ello interpretamos que el estudiante reconoce el dominio y rango de la gráfica de la función coseno, pero no es consciente sobre la infinidad de puntos y los cambios continuos que se dan entre las variables longitud de arco y proyección de la línea coseno, por lo tanto, el estudiante no evidencia comportamientos de la AM6.

CONSIDERACIONES FINALES

Para lograr nuestro objetivo general *analizar el razonamiento covariacional de estudiantes de 5to de secundaria al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra* se planteó la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo estudiantes de 5to de secundaria razonan covariacionalmente al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra?* Para poder responderla nos orientamos en los objetivos específicos de nuestra investigación.

Como primer objetivo específico se planteó *prever y enunciar posibles comportamientos asociados a diferentes acciones mentales que los estudiantes pondrían en juego al construir la gráfica de la función coseno*. La tabla 2 se desarrolló a partir de un análisis previo relacionado con la construcción que los estudiantes realizaron con GeoGebra, y de las posibles respuestas y comportamientos que podrían exteriorizar los estudiantes, esto con el fin de interpretar y entender su manera de pensar a partir de las acciones mentales que pone en juego al resolver un problema de covariación. Del mismo modo, se clasificaron las preguntas del cuestionario asociadas a cada acción mental.

La tabla 3 asocia los comportamientos que podrían tener los estudiantes al desarrollar un problema de covariación, en particular un problema relacionado con la construcción de la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica, con las descripciones hechas en el marco teórico de razonamiento covariacional.

Ambas tablas son productos de la realización de un análisis previo, que fue fundamental para realizar luego el análisis de la información recolectada. Estas tablas 2 y 3 evidencian el cumplimiento del primer objetivo específico.

Como segundo objetivo específico se planteó *identificar comportamientos que exteriorizan los estudiantes al construir la gráfica de la función coseno a partir de la circunferencia trigonométrica mediado por GeoGebra, y asociarlos con las acciones mentales previamente establecidas.* El análisis de la información recolectada del trabajo de dos estudiantes, que fueron llamados estudiante A y estudiante B, se hizo tomando como referencia a las tablas 2 y 3. Para ello, se identificaron en las respuestas escritas, capturas de pantalla, y en entrevistas semiestructuradas, comportamientos variados de cómo los estudiantes coordinaron los valores de dos variables: longitud de arco y proyección de la línea coseno sobre el eje X, por cada acción mental. Estas acciones mentales son descritas individualmente por cada estudiante en el análisis realizado.

Como tercer objetivo específico se planteó *clasificar la habilidad de razonar covariacionalmente de los estudiantes en uno de los niveles de razonamiento covariacional propuesto por Thompson y Carlson.* Los comportamientos que exhibió el estudiante *A* al desarrollar la actividad y en el diálogo sostenido en la entrevista, sugieren una habilidad en razonamiento covariacional de Covariación continua suave del marco teórico desarrollado por Thompson y Carlson (2017), sustentada por indicios de haber conseguido una acción mental 6 (asociada a este nivel), y por consiguiente a las acciones mentales asociadas a los niveles anteriores. Los comportamientos que exhibió el estudiante *B* al desarrollar la actividad y en el diálogo sostenido en la entrevista, sugieren una habilidad en razonamiento covariacional de Covariación continua suave a trozos del marco teórico desarrollado por Thompson y Carlson (2017), sustentada por indicios de haber conseguido una acción mental 5.

Dado que se alcanzaron los tres objetivos específicos, afirmamos que se logró el objetivo general y por consiguiente se ha dado respuesta a la pregunta de nuestra investigación. Lograr identificar el nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes con base en las acciones mentales que pusieron en juego los estudiantes, responde a la pregunta sobre cómo razonan covariacionalmente los estudiantes.

Consideramos que el uso del software GeoGebra favorece a la comprensión de la construcción de la gráfica de la función trigonométrica coseno, además permite mostrar los cambios que se dan entre el arco y la proyección de la línea coseno sobre el eje X. Por otro lado, la presente investigación puede ser considerada para trabajar otras funciones trigonométricas como el seno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Finalmente, consideramos que este trabajo de investigación y sus resultados pueden dar luces a trabajos futuros relacionados con la enseñanza de las funciones trigonométricas mediante el uso de tecnologías digitales, por ejemplo, analizar las técnicas que podrían emplear los estudiantes para esbozar las gráficas de las funciones trigonométricas con tecnologías desde una perspectiva instrumental, analizar el razonamiento covariacional de los estudiante al modificar otros elementos como amplitud, período, entre otros. Del mismo modo, esperamos sea de utilidad a docentes del nivel secundario el diseño de situaciones en un contexto a distancia o remoto para la enseñanza de este tipo de funciones donde se potencialice el razonamiento covariacional de los estudiantes.

Referencias

Alva, R.(2000). *Trigonometría*. Jesús María, Perú: San Marcos

Altman, R. y Kidron, I. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47(7), 1048-1060. doi: 10.1080/0020739X.2016.1189005

Ayil, J. (2018). Entorno virtual de aprendizaje: una herramienta de apoyo para la enseñanza de la matemática, *RITI Journal, 6*(11), 34-39.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, *104*(2), 106-112

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5) 352-378.

Castillo Garsow,C.C.(2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonilla,. L. Hatfield y S. Beibase (eds.). *Quantitative reasoning : Current state of understanding*, WISDOMe Monographs (vol2,pp. 55-73)

De Freitas, E., Lerman, S. Parks, N. (2017) Qualitative Methods. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 159-182).

Esteban, M., Ibañes, M. y Ortega, T. (1998). *Educación matemática en secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de la matemática. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* (3), 11-44.

Hernández, R. Fernández, C. & Batista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición, México, Mc Graw Hil.

Maknun, C., Rosjanuardi, R. & Jurpri, A. (2019). From ratios of right triangle to unit circle: an introduction to trigonometric functions. *Journal of Physics: Conference Series,* 1157(2), 1-6. doi: 10.1088 / 1742-6596 / 1157/2/022124

Martínez-Miraval, M. [Maestría en Enseñanza de las Matemáticas Irem-PUCP] (28 de noviembre de 2020). *Razonamiento covariacional: Una perspectiva teórica para investigaciones en Educación Matemática* [Archivo de video]. Youtube. https://youtu.be/lupnRCv42fI.

Martínez, R. y Cruz, A. (2016). The unit circle approach to the constrution of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. *Journal of mathematical behavior,* 43(2016), 111-133.

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Diseño Curricular Nacional 2016*. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf

Moore, K. y LaForest, K. (2014). A connected introduction of angle measure and the sine function entails quantitative reasoning. *National Council of Teachers of Mathematics.* 107(8), 616-623. doi:10.5951/mathteacher.107.8.0616

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education,* 45(1), 102-138. doi: 10.5951 / jresematheduc.45.1.0102

Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E. & Villagómez, A. (2014). *Metodología de la investigación* cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis. Cuarta edición, Bogotá, Ediciones de la U.

Ordoñez, J. (2017). *Razonamiento Covariacional en estudiantes de nivel superior: el caso de la función seno.* (Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México)

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics, MAA Notes* (Vol. 73, pp. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Saldanha, L. y Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. In Berenson, S. B., Dawkins, K. R., Blanton, M., Coulombe, W. N., Kolb, J.,Norwood, K. & Stiff, L. (Eds.) *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, pp. 298-304.Columbis, OH: ERIC.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012) Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Santa Fe. Colombia. Cengage Learning.

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456).

Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). Algebra, trigonometría y geometría analítica. McGraw Hill.

ANEXOS

Anexo 1

Cuestionario

Apellidos y nombres:
...

Nota: para las respuestas que dé en cada una de las preguntas, adjunte capturas de pantalla del trabajo en GeoGebra.

1- Identifique qué elementos se pueden considerar como variables al mover el punto C sobre la circunferencia.

2- Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿qué valores podrían tomar las variables descritas en la pregunta anterior?

3- Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿se puede identificar alguna relación entre los cambios de las variables descritas en los ítems anteriores? Describa cómo se da esa relación.

4. ¿Qué representa la abscisa y la ordenada del punto E? Describa el comportamiento del punto E al mover el punto C en sentido antihorario. Justifique su respuesta indicando algunas posiciones del punto E.

5. Si el punto C da una vuelta completa en sentido antihorario, ¿el punto E generaría una gráfica? Si su respuesta es afirmativa, realice un esbozo de la gráfica que se generaría. Explique su procedimiento.

6. ¿Cuántos puntos cree usted que se necesitan para realizar el gráfico que genera el punto E? Explique.

Anexo 2

Entrevista

1. ¿Qué gráfica logra reconocer del desarrollo de la construcción?, explique detalladamente su respuesta

2. ¿Qué varía al mover el punto C en sentido antihorario en la circunferencia trigonométrica?

4. Si el punto C lo movemos en sentido antihorario, existe una relación entre las variables descritas en el problema anterior

3. ¿Cómo describiría el movimiento del punto E, al mover el punto C en sentido antihorario?, ¿cómo cambian las coordenadas del punto E?

4. Cuando el punto C se mueve en sentido antihorario, ¿qué puede inferir de los cambios que se dan en las coordenadas del punto E: ¿aumentan, disminuyen o se mantienen constantes?

5. ¿En qué momento de la construcción fue posible observar los valores máximos y mínimos que toma el punto E? ¿Se pueden identificar los puntos donde la gráfica corta a los ejes coordenados?

6. ¿Existe algún valor de x donde y sea igual a 2, 0.5 ó 0.75? Explique.

7. ¿Qué pasaría con el punto E, si el punto C diera una vuelta más?

8. ¿Los cambios de las coordenadas del punto E se dan de forma simultánea, cuando muevo el punto C en la circunferencia trigonométrica?

9. ¿Existe algún cambio y/o arreglo en relación al movimiento del punto C para desarrollar la gráfica en los números negativos?