PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PROPUESTA DIDACTICA SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN CON BASE EN LAS TRANSFORMACIONES SEMIÓTICAS PARA QUINTO DE SECUNDARIA.

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Diego Alexander Díaz Sánchez

ASESORA

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Octubre, 2021

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo central analizar una propuesta didáctica basada en las trasformaciones semióticas del concepto de función para estudiantes de quinto de secundaria, esta propuesta está diseñada para poder ser implementada dentro de un ambiente virtual y tiene como característica el uso de algunos recursos virtuales tales como el software GeoGebra, y la plataforma interactiva Classroom. La investigación muestra inicialmente algunos antecedentes en torno a la problemática del concepto de función en los diferentes niveles de enseñanza y las principales dificultades que tienen los estudiantes al momento de apropiarse y comprender este concepto.

Una característica importante de la enseñanza actual es el constante predominio del álgebra y la visión mecánica que se tiene al abordar este concepto mostrando así una visión algorítmica que deja un reducido lugar a la idea matemática que está latente. Por otro lado, la importancia en la enseñanza y aprendizaje de este concepto se encuentra actualmente avalado por documentos nacionales como es el caso del currículo nacional y por documentos internacionales tales como los obtenidos en los congresos de la NTCM quienes resaltan la importancia de este concepto. Para el marco teórico utilizamos la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y la metodología que seguimos es la cualitativa.

Nuestra propuesta didáctica está basada en un conjunto de actividades que se espera puedan permitir llevar a cabo tratamientos y conversiones en los diferentes registros de representación semiótica que este objeto posee, para ello se plantea dos grandes partes dentro de la propuesta, las cuales se conforman por ítems que, de forma progresiva y guiada podrían permitir realizar transformaciones de representación semiótica en torno a este objeto matemático, tales como tratamientos dentro del registro algebraico y gráfico y conversiones del registro algebraico al gráfico y viceversa.

Una de las conclusiones es que la propuesta a la luz del marco teórico permitiría realizar transformaciones semióticas en torno al concepto de función.

Palabras claves: ambiente virtual, función, registro de representación, transformaciones semióticas, tratamiento, conversión, recurso virtual.

ABSTRACT

The main objective of this research is to analyze a didactic proposal based on the semiotic transformations of the concept of function for high school students, this proposal is designed to be implemented in a virtual environment and has as characteristic the use of some virtual resources such as the software GeoGebra and the interactive platforms named Classroom. Initially, the research shows some background to the problem of the concept of function at the different levels of education and the main difficulties that students have when it comes to appropriating and understanding this concept.

An important feature of today's teaching is the constant predominance of algebra and the mechanical vision that one has when approaching this concept showing an algorithmic vision that leaves little room for the latent mathematical idea. Moreover, the importance of this concept in teaching and learning is currently supported by national documents, such as the national curriculum, and by international documents such as those obtained at the NTCM congresses, which highlight the importance of this concept. For the theoretical framework we use Duval's theory of Semiotic Representation Records and the methodology we follow is the qualitative one.

Our didactic proposal is based on a set of activities that it is hoped will allow to carry out treatments and conversions in the different registers of semiotic representation that this object possesses. For this purpose, two main parts are proposed within the proposal, which are made up of items that, in a progressive and guided way, could allow to carry out transformations of semiotic representation around this mathematical object, such as treatments within the algebraic and graphical register and conversions from the algebraic register to the graph and vice versa.

One of the conclusions is that the proposal in the light of the theoretical framework would allow for semiotic transformations around the concept of function.

Keywords: virtual environment, function, representation register, semiotic transformations, treatment, conversion, virtual resource.

Dedicatoria:

A Dios y a la Virgen María que con su bendición siempre tuve la gracia de seguir adelante a mis padres quienes fueron mi fuente de Fortaleza y ayuda incondicional durante todo este trabajo de investigación.

Agradecimientos

A la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar quien con su gran ayuda y orientación permitieron mejorar y consolidar la presente investigación y cuya gratitud y aprecio quedará siempre presente para ella en mi memoria.

A la Dra. Verónica Neira Fernández y Mg. Flor Isabel Carrillo Lara quienes como miembros del jurado orientaron y guiaron la presente investigación, en busca de una mejora continua del trabajo.

A los profesores de la maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. En especial a la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre quien con sus clases motivaron el deseo de seguir investigando en las teorías del aprendizaje de las matemáticas, y al Dr. Alejandro Ortiz Fernández quien con su don de persona y capacidad orientadora pudo motivar a seguir profundizando en las matemáticas.

A la escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú de la maestría en enseñanza de las matemáticas.

A los profesores de la línea de tecnología en enseñanza de las matemáticas TecVEM quienes contribuyeron con sus aportes a la mejora de la investigación.

A mi familia a quienes llevo siempre en la mente y corazón y son mi soporte constante en cada decisión de mi vida.

A mis compañeros de la maestría, con quienes compartí momentos de aprendizaje y reflexión con respecto a las matemáticas.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

El concepto de función constituye uno de los temas fundamentales dentro de la matemática tanto en la educación básica como en la superior puesto que tiene la cualidad de modelar situaciones del mundo real y ser el cimiento en el que basan otros conceptos de la matemática en general. Asimismo, tiene la cualidad de estar presente a lo largo de los ciclos VI y VII correspondientes a la secundaria, lo que convierte su estudio en un aspecto de vital consideración.

La presente investigación busca presentar una propuesta didáctica en un ambiente virtual que promueva el uso de las transformaciones semióticas en torno al concepto de función. Para ello, se presenta la organización de lo investigado en diferentes capítulos a lo largo de la tesis.

Para una mejor comprensión presentamos, a continuación, los detalles de cada capítulo de manera breve.

En el primer capítulo, presentamos los antecedentes de la investigación donde damos a conocer la problemática que se viene dando en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, seguidamente se presenta la justificación académica y profesional de la investigación, la cual está basada en el currículo nacional (2016) y en los documentos del NTCM (2000) quienes avalan la pertinencia de estudiar el presente objeto matemático. Asimismo se analizan algunos aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica para luego dar a conocer la pregunta de investigación la cual plantea: ¿Una propuesta didáctica sobre el concepto de función dentro de una ambiente virtual podría promover el uso de las trasformaciones semióticas? Ante lo cual se plantea el objetivo general: Analizar como una propuesta didáctica sobre el concepto de función dentro de un ambiente virtual podría promover el uso de las transformaciones semióticas. Finalmente se presentan los objetivos específicos para luego dar a conocer la metodología que seguirá la investigación.

En el segundo capítulo, damos a conocer los aspectos históricos y epistemológicos del concepto de función. Aquí se realiza un recorrido histórico del concepto, su origen, evolución y la problemática que surgió en torno a esta idea, hasta la actual concepción que se tiene de este objeto matemático. Seguidamente se presenta los aspectos matemáticos. Para ello, nos basamos en aportes que se encuentran dentro de la literatura matemática tales como los de Apóstol (2002) y Spivak (1967), los cuales dan luces de las concepciones que se maneja como definición de una función. Asimismo, se analiza en este capítulo el texto escolar de la editorial Norma (2017) titulado “Construye” de quinto de secundaria, a partir del cual se obtendrá los lineamientos que se siguen al momento de enseñar este concepto. Este análisis, además, nos permitirá observar cómo se manejan las transformaciones semióticas que se llevan a cabo en las actividades propuestas y si estas (están aisladas o) se encuentran articuladas unas con otras o si están aisladas.

En el tercer capítulo, se dará a conocer la propuesta didáctica dentro de un ambiente virtual, la cual tendrá como soporte el uso de algunas plataformas educativas. Asimismo, se llevará a cabo el análisis de cada pregunta propuesta para cada actividad, mostrando aquellas que permiten realizar las transformaciones semióticas. Finalmente, se muestran las conclusiones donde se detallan los resultados a los que se llegó después del presente análisis y algunas perspectivas futuras.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

Para construir la problemática de la investigación, se presenta en este capítulo investigaciones de referencia que reportan cómo el concepto de función está siendo abordado en diversos contextos. De acuerdo con esta problemática revisaremos algunas investigaciones relacionadas al objeto función, las cuales se encuentran clasificadas por categorías para su mejor análisis. Además de ello, se explicará la justificación de la investigación, aspectos teóricos que la fundamentan, la pregunta y objetivos de la tesis y los aspectos metodológicos que se seguirán en el desarrollo de la misma.

Investigaciones de referencia

Como estamos interesados en realizar una propuesta didáctica en un ambiente virtual sobre el concepto de función presentamos investigaciones relacionadas con nuestro foco de interés, Por ello hemos organizado las investigaciones de referencia en las siguientes categorías, las que abordan el objeto matemático función, las relacionadas con la apropiación del concepto de función a través de un medio tecnológico e investigaciones que presentan aspectos históricos y epistemológicos del concepto de función.

1.1 Investigaciones relacionadas con el objeto matemático función.

Las investigaciones que se presentan a continuación están relacionadas con el objeto matemático, estas son las investigaciones de Núñez y Sánchez (2015), Llanos y Otero (2017) y Prada, Jaimes y Hernández (2017) y Pino, Parra y Castro (2019)

En la investigación de Núñez y Sánchez (2015) los autores llevaron a cabo un estudio sobre el rendimiento de un grupo mixto de 18 estudiantes de un curso de pensamiento matemático de la universidad Jorge Tadeo Lozano en la ciudad de Bogotá – Colombia con el objetivo de poder diseñar una secuencia didáctica que se encuentre basada en el modelamiento matemático y que permita afianzar y fortalecer el concepto de función. Los investigadores señalan que la modelación matemática, es la herramienta fundamental para abordar los conceptos que se encuentran relacionados con las ciencias exactas, además aseguran que esta, permitiría dar respuesta a la dificultad que vienen presentando los estudiantes en todos los niveles educativos en relación al aprendizaje de este concepto matemático. Así mismo afirman que el logro de obtener un cambio significativo al abordar este concepto implica necesariamente dejar atrás una metodología tradicional de enseñanza para poder implementar en su lugar actividades pensadas que permitan acercarse de forma adecuada al concepto de función.

Para este estudio los investigadores recogieron información a partir de una prueba diagnóstica sobre el concepto de función, así mismo realizaron una revisión detenida de notas y talleres.

Según Núñez y Sánchez (2015) los estudiantes forman un concepto de función que por lo general se encuentra asociado al uso de fórmulas y a los diversos tipos de funciones que se suelen estudiar en cada nivel. Además, se suma a ello los distintos modelos pedagógicos que utilizan los maestros para presentar dicho concepto, los cuales deslindan en cierta medida de la formalidad matemática que posee el objeto, lo que trae como consecuencia una incorrecta transposición didáctica. Los investigadores afirman: “Los conceptos dominio y rango son fuente de bastantes errores por parte de los estudiantes en el campo de las matemáticas en los cursos de pre calculo” (Núñez y Sánchez, 2015, p.41).

La metodología que se llevó a cabo en la investigación es de tipo mixto pues vincula algunos aspectos cualitativos y cuantitativos, tales como la aplicación de pruebas diagnósticas, la revisión de notas, talleres y el análisis de los resultados de manera descriptiva, comparativa e interpretativa, los cuales se vieron reflejados en el proceso de triangulación que se realizó a las variables que intervinieron en la investigación. Según los autores el llevar a cabo una investigación de esta naturaleza permite obtener un estudio más integral sobre el fenómeno que se aborda, además de poder llevar a cabo diversas formas de recolección de la información, tales como las ya mencionadas.

Una de las principales conclusiones a las que llegan los investigadores es que una adecuada enseñanza permite estimular el razonamiento y que si a esta se le añade una componente afectiva se podrá lograr un aprendizaje significativo enmarcado dentro del contexto de pensamiento matemático, es por esa razón que se debe incorporar nuevas estrategias en la enseñanza de funciones. Así mismo los investigadores concluyen que las actividades que hasta ahora se utilizan son formas rutinarias de volver calculistas a los estudiantes excluyendo de esta forma el pensamiento creativo y crítico propio del pensamiento matemático. Sin embargo se puede conseguir mejores resultados a través de la modelación matemática la cual debe darse a partir de una nueva propuesta que implique actividades que permitan articular un modelo matemático con el mundo real.

Por su parte en la investigación de Llanos y Otero (2017) los autores realizaron un estudio el cual tuvo por objetivo presentar los resultados de un trabajo experimental el cual inicio a partir del siguiente cuestionamiento: ¿Cómo realizar operaciones con cualquier curva si solo se conoce sus gráficas y sus ejes?, el marco con el que se analizó este fenómeno fue la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y estuvo dirigida a estudiantes de 4to año de secundaria, cuyas edades fueron de 14 a 16 años, esta investigación fue desarrollada en la ciudad de Buenos Aires.

La investigación se inicia con la implementación de un recorrido de estudio e investigación (REI) el cual es un dispositivo didáctico que permite obtener preguntas generatrices o generadoras de respuestas, cuya característica de acuerdo con el marco teórico es la de promover una construcción o reconstrucción de las obras matemáticas. Las preguntas generatrices que se realizaron fueron de utilidad pues facilitaron la identificación de las praxeologías que tenían los estudiantes, lo cual permitió en un paso posterior poder analizar la organización matemática de las funciones que se encontraban estudiando. De acuerdo con los autores una de las característica de los (REI) es que ellos permiten modificar o reestructurar un plan de estudio teniendo como fundamento o base una serie de preguntas generadoras, una de las que surgió fue la siguiente: Q_1: ¿Cómo hacer el producto de dos líneas si solo conocemos su representación gráfica?

Los autores resaltan que el REI depende de las modificaciones que se dan a tres elementos fundamentales dentro de su estudio, estos son las llamadas funciones didácticas, las cuales son: la mesogénesis, la topogénesis, la cronogénesis.

La metodología que sigue la investigación es exploratorio, longitudinal y cualitativo para ello se analiza las respuestas que emiten los estudiantes a las interrogantes que genera el profesor y aquellas que surgen de los estudiantes en el proceso de análisis.

Las conclusiones a las que llegan los investigadores son que los estudiantes al inicio presentaron problemas y caen en errores al intentar encontrar respuesta a los interrogantes planteadas por lo que se ven en la necesidad de la ayuda del profesor, esta parte está relacionada con el concepto de un tipo de función, este problema es superado con el paso del tiempo, mostrando así que la cronogénesis la cual de acuerdo con la teoría es el factor que cumple un rol regulador sobre los componentes que intervienen en el proceso de enseñanza, que para el caso del REI permite medir el tiempo real en que se da cada pregunta y poder diferenciar de este modo un tipo de REI de otros que se implementan a cada situación.

Llanos y Otero (2017) afirman finalmente que las modificaciones del REI contribuyen con la apropiación del concepto de operaciones entre funciones y que están relacionadas con el gesto didáctico de cuestionamiento del profesor, la cual hace referencia a la manera en como el profesor conduce y dirige las preguntas dentro de cada momento propio de la actividad, al modo socrático donde se produce una dialéctica dentro del dialogo, de acuerdo con el marco teórico, esto último conllevaría a promover un paradigma de cuestionamiento del mundo, que según los autores aún no está incorporado plenamente en las escuelas, lo que hace pensar que la incorporación de estos gestos de cuestionamiento los cuales se ven reflejados en la actuación del profesor en las intervenciones que se realiza al momento de formular las preguntas, traería consigo resultados positivos en la apropiación del concepto de operaciones entre funciones.

También la investigación realizada por Prada, Jaimes y Hernández (2017) quienes analizaron el nivel de comprensión del concepto función, que poseen los estudiantes del primer ciclo de la facultad de ingeniería de la Universidad Francisco de Paula (UFPS) en la ciudad de Cúcuta - Colombia, dentro de la asignatura de cálculo diferencial, en la cual identificaron problemas de aprendizaje en los estudiantes de dicha facultad con relación a este concepto, pese a que este no forma parte de un tema nuevo sino por el contrario sería parte de uno ya tratado dentro de la formación básica y media.

Los investigadores afirman que para lograr adquirir los conceptos del cálculo no es suficiente con dominar procesos esquemáticos y algorítmicos, ni cultivar un exagerado uso del álgebra ya que este solo, limitaría la comprensión de los conceptos, es por esta razón que los investigadores plantean que las actividades que deben ser planteadas en la enseñanza deberían estar enfocadas en tareas que permitan la conversión, ya que esta permitiría la articulación entre registros de representación semiótica. Según D´Amore (citado en Prada, Jaimes y Hernández 2017) una de las dificultades que se presenta al realizar representaciones se encuentra en el tránsito que pasa el concepto a través de estas últimas, afirmando de este modo que la adquisición conceptual pasa necesariamente por representaciones, de ahí que la distancia del concepto con su representación tendrá que ser necesariamente muy estrecha.

La metodología de la investigación es cuantitativa y de naturaleza descriptiva, para esto se trabajó con la respuesta de dos grupos de estudiantes de ingeniería de sistemas y electromecánica, los grupos se conformaron por ambos sexos y con un promedio de edad de 17 años, a los cuales se les aplicó un test inicial con el fin de medir la comprensión del concepto función, el diseño del instrumento consistió en nueve ítems que contenían representaciones semióticas, este instrumento se aplicó dos veces a la misma muestra, es decir en un primer momento se realizó un pre-test para identificar los problemas en torno al concepto, a partir de la cual se dio una intervención docente a través de un programa de talleres con una duración de cuatro semanas, tiempo en el cual se aplicó el pos-test, buscando con esto manifestar los efectos después de la intervención docente. La importancia que tiene esta investigación para nuestro trabajo está basada en las ideas que se utilizan dentro del test utilizado para formular las preguntas las cuales tienen que ver con los cambios de registros que dan lugar a procesos de conversión tales como del registro grafico al registro algebraico y viceversa, por otro lado consideramos también que las preguntas utilizadas podrían ser adaptadas considerando que la edad promedio a la que se aplicó al grupo en esta investigación es semejante a la de quinto de secundaria básica regular.

Los resultados a los que se llegó en la investigación, fueron que no se observó diferencia significativa entre los grupos trabajados, ya que inicialmente ambos grupos presentaron dificultades en relación al concepto de función, una observación importante que señalan los investigadores es que a pesar que los estudiantes provengan de instituciones acreditadas y que estos hayan pasado por pruebas estandarizadas, no constituye condición suficiente para conseguir comprender adecuadamente los conceptos matemáticos.

Otra idea que manifiestan Prada, Jaimes y Hernández (2017) es que el concepto de función es imprescindible en el desarrollo de conceptos más complejos del cálculo, así pues afirman que la frágil situación de este concepto en relación a su enseñanza se ve incrementada con las prácticas pedagógicas tradicionales en donde se sigue incidiendo únicamente en el aspecto algebrista. Por otra parte los autores identifican que el proceso que suele seguirse para aprender funciones se basa en manejar una expresión algebraica y poder evaluarla en determinados puntos para seguidamente conseguir unirlos a través de alguna curva o línea, asumiendo de antemano la continuidad de forma implícita lo cual incide en el trabajo algebraico, que según Artigue (como se citó en Prada, Jaimes y Hernández, 2017) conllevaría a observar una ruptura entre el álgebra y el cálculo.

Según Prada, Jaimes y Hernández, (2017) dentro del proceso de enseñanza del concepto de función se enfatiza en gran medida el registro algebraico dejando de lado otros tipos de registro y los procesos de articulación que entre estos se pueden dar, en ese sentido los investigadores plantean que se debería conceder el desarrollo de la visualización matemática la cual consideran que es un factor imprescindible para la adquisición de conceptos matemáticos complejos.

Otro aspecto que señalan los autores es que los estudiantes poseen variaciones conceptuales cuando intentan comprender el concepto de función, es decir que la idea matemática sobre función que adquieren los estudiantes suele encontrarse por lo general dentro de un proceso de construcción según Artigue (citado por Prada, Jaimes y Hernández, 2017) estas variaciones conceptuales se producen debido a que los estudiantes asocian las características de la función más que con su concepto, fundamentalmente cuando se visualiza en una representación gráfica.

Algunas de las conclusiones a las que llegan los investigadores son que la noción de función que poseen los estudiantes no corresponde con la definición formal que tiene el objeto, esto se logró evidenciar en las variaciones conceptuales que presentaron los estudiantes, lo cual permitió afirmar que estos se encuentran aun dentro de una etapa inicial o intuitiva del concepto, por otro lado los autores señalan que el registro predominante por los estudiantes es el algebraico, sin embargo el escaso nivel de comprensión del lenguaje algebraico que estos poseen impide que puedan construir diversas representaciones semióticas, finalmente los autores afirman que una adecuada formación y conocimiento de las representaciones del concepto de función favorecería la comprensión de la noción de función y como consecuencia su apropiación satisfactoria.

Por su parte, en la investigación de Pino, Parra y Castro (2019) los autores analizaron el currículo chileno con respecto al concepto de función sobre el significado holístico de referencia a través de una comparación entre ambos, tomando como marco teórico algunas nociones del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática en el sentido de Godino y Batanero (1994). Los investigadores realizaron un análisis al programa de estudio de la educación básica y media, en donde se apreció que el concepto de función aparece en el octavo año de la enseñanza básica y a su vez de

1ero a cuarto año de la enseñanza media, correspondiente a las edades de 13 a 17 años, lo cual es equivalente a los grados de segundo a quinto de secundaria para la educación en el Perú. Los autores encontraron además que la introducción del concepto de función se hace a partir de ciertas relaciones entre las variables dependiente e independiente, además de esto, los autores realizaron un análisis a los textos escolares, en los cuales lograron observar que estos muestran un manejo de diversas representaciones sobre el concepto de función tal como es el de relaciones entre variables, la función a partir de una regla de correspondencia, como una tabulación y como una forma gráfica.

La metodología empleada por Pino, Parra y Castro (2019) es aquella que sigue los siguientes criterios: La representatividad de los campos de problemas propuestos, asociado con la búsqueda de libros de texto, los tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de tareas asociadas a las formas de representación de una función tal como verbal, gráfica etc. La representatividad de los elementos regulativos y argumentativos, y la representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia.

Los autores afirman que el concepto de función es un concepto muy importante ya que posee la característica de ser unificante y modelizador además de ser complejo y tener una gran variedad de registros. Por otro lado manifiestan que el modo en cómo se ha ido enseñando este concepto ha sido de manera formal dando énfasis al álgebra, lo que ha conllevado a tener dificultades en su comprensión, en ese sentido señalan que un proceso algorítmico de este concepto conduciría a observar a la función y sus construcciones gráficas carentes de sentido. Asimismo manifiestan que las definiciones y/o concepciones que se forman los estudiantes cuando abordan esta temática son fuente de serios errores, lo que muestra que la noción matemática no encuentra el sentido exacto y por tanto su comprensión se ve limitada.

Por ello Pino, Parra y Castro (2019) se plantean la siguiente pregunta: ¿Los significados pretendidos por el currículo chileno sobre la noción de función, son representativos del significado holístico de referencia de este objeto? Para poder responder a esta pregunta, los autores basados en el referencial teórico analizaron los significados que tiene el objeto función, encontrando de este modo seis significados diferentes, el primero se basa en un significado de correspondencia el cual se corrobora en un recorrido histórico, el segundo se encuentra basado en un significado a partir de la relación entre magnitudes asociado a la dependencia entre ellas, el tercer significado se da a partir de una representación gráfica, apelando a la historicidad que poseen las representaciones figúrales con los fenómenos de la realidad, donde observaron la asociación que tiene cada curva con alguna expresión algebraica determinada, el cuarto significado se da como una expresión analítica considerando el desarrollo histórico y las definiciones de matemáticos del siglo XVIII, el quinto significado se da como una correspondencia arbitraria y finalmente el sexto significado se encuentra partir de la teoría de conjuntos.

Según Pino, Parra y Castro (2019) una forma de abordar el concepto de función es a través de situaciones contextualizadas analizando fenómenos reales asociados con el cambio, un aspecto importante que mencionan es que en muchas ocasiones la forma de enseñar funciones es a través del uso de metáforas lo que si bien facilita la comprensión también oculta otros aspectos.

Algunas de las conclusiones a las que llegan los investigadores son que los significados pretendidos en el currículo chileno alrededor de la noción de función no son representativos del significado holístico de referencia, así también el currículo chileno presenta funciones algebraicas y trascendentes, sin embargo no se establece una diferencia entre estas, lo que podría conllevar a confusiones futuras.

Los autores manifiestan que la clásica introducción llamada “la máquina” adoptada comúnmente por los profesores para enseñar el concepto de función diluye algunos aspectos de relación arbitraria lo que impide determinar si una relación es o no una función, esto apoya también al hecho de que el currículo no es representativo del significado de referencia. Así también las actividades propuestas en el currículo chileno no permiten esclarecer la representación gráfica ya que dichas actividades responden a una forma algorítmica. Finalmente, los investigadores sugieren que en lugar de iniciar con una definición formal sobre el concepto de función se proponga una aproximación a partir de conceptos que jueguen un doble papel de tal manera que le sea familiar y a la vez le sirva de base matemática, además afirman que la representatividad del significado de referencia debe ser el punto de partida para la elaboración de futuras propuestas curriculares.

1.2 Investigaciones relacionadas con la apropiación del concepto de función a través de un medio tecnológico.

Las investigaciones que se presentan a continuación están relacionadas con la apropiación del concepto a través de un medio tecnológico, estas son las investigaciones de Villamizar, Rincón Vergel (2018) y Costa y Del Rio (2019).

En primer lugar la investigación llevada a cabo por Villamizar, Rincón y Vergel (2018) quienes llevaron a cabo un estudio sobre la influencia que tiene la tecnología digital dentro de una secuencia didáctica en la solución y concepción de problemas de optimización de funciones las cuales estuvieron dirigidas a un grupo de profesores de matemática a partir de situaciones aplicativas. Una de las motivaciones que tuvieron los autores para llevar a cabo el estudio radicó fundamentalmente, en los modelos de enseñanza que se vienen dando actualmente que según ellos lejos de generar un aprendizaje buscan enfáticamente la memorización lo cual impide el aprendizaje adecuado de los conceptos. A partir de esta situación los autores buscan incorporar una sesión donde se pueda utilizar la tecnología digital, de este modo los investigadores se plantean la siguiente pregunta: ¿Cómo promover una mejor comprensión conceptual en matemática aplicada para hacer partícipe al estudiante en la construcción de conocimiento?

De acuerdo con La *National Council of Teachers of Mathematics*, NTCM (2000) las tecnologías digitales deben ser incluidas en los planes curriculares ya que estas permiten la visualización de las ideas matemáticas, la organización y el análisis de datos entre otras ventajas, además de ser una herramienta que facilita y permite el enfoque sobre los conceptos, razonamientos y la resolución de problemas, siempre que todos estos recursos tecnológicos se encuentren bajo una secuencia didáctica.

Los autores pretenden incorporar el uso de la tecnología digital a través de un escenario virtual el cual fue construido a partir del software de geometría dinámica GeoGebra y que tuvo como característica de presentar ciertas situaciones problemáticas del contexto para introducir un determinado concepto matemático, algunas de estas situaciones fueron la representación gráfica de una función a partir del volumen de una caja, la problemática de la optimización y la aplicación de máximos y mínimos en problemas, sin embargo advierten que estas situaciones podrían llevar a resultados insatisfactorios debido a la incomprensión del concepto de función.

La metodología adoptada en esta investigación fue de tipo cualitativa, esta se llevó a cabo a través de un taller de dos sesiones en el cual participaron cincuenta profesores de matemática, a quienes se les proporcionó un problema de optimización para que sea resuelto utilizando lápiz y papel para después poder contrastar sus respuestas a través del uso del software GeoGebra, lo que se buscó en esta situación fue presentar un problema de contexto real y a partir de este, lograr construir y explorar el concepto de dominio, raíz y máximos y mínimos de una función, la secuencia didáctica permitió poner en evidencia una resolución que se dio de manera analítica en donde se utilizaron criterios de cálculo, además lograron observar que algunos profesores no consideraron el significado de las raíces para poder acotar el dominio de la función, lo cual puso en evidencia la incomprensión que se puede dar cuando se resuelven este tipo de situaciones de manera memorística y bajo un esquema algorítmico desligando el contexto real dentro del cual se intentan solucionar el problema.

De acuerdo con Villamizar, Rincón y Vergel (2018) la incorporación de la tecnología digital en el planteamiento y resolución de las situaciones abordadas, fue de vital ayuda ya que permitió considerar ciertos parámetros a la solución de cada caso, los cuales estuvieron asociados al contexto real en la que se encontró enmarcada cada una de estas situaciones. Asimismo la incorporación de estos parámetros se pudo dar de manera fácil a través del uso de los comandos propios del software, tales como los deslizadores entre otros, los cuales ayudaron de cierto modo a recordar algunos conceptos matemáticos dentro de este escenario virtual. Además una de las ventajas que pudieron observar es que el uso de la tecnología digital permitió comprobar ciertas hipótesis que fueron manifestadas inicialmente por los profesores lo cual llevó a reflexionar y contrastar estas ideas posteriormente.

Finalmente los investigadores manifiestan que el uso de la tecnología digital por sí sola no facilita la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que su uso debe de estar basado dentro del diseño de secuencia didáctica que permita la interiorización de los conceptos y faciliten su comprensión, así también afirman que la simulación que se establece dentro de estos escenarios virtuales permitiría dinamizar los objetos matemáticos es decir poder moverlos y modificar ciertos valores con lo cual se podrá observar las posibilidades que estos puedan tener, además de ser un factor motivante, dentro del aprendizaje. Asimismo los autores afirman que el uso del software implica necesariamente una inversión de tiempo para su aprendizaje, sin embargo esta adaptación traería consigo una modificación a las estrategias y practicas docentes las cuales podrán permitir una práctica activa que dé lugar a desarrollar otras destrezas como el conjeturar construir, formular y visualizar situaciones parecidas así como el desarrollar competencias sociales y actitudinales.

En esa misma línea de pensamiento la investigación realizada por Costa y Del Rio (2019) buscó describir y analizar las praxeologías que se llevaron a cabo en un estudio sobre la noción de función a partir de un problema geométrico, esta investigación se enmarca dentro de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) en la que se presenta un análisis de cinco casos, en los que participaron docentes de matemática en un curso de formación, en la ciudad de Buenos Aires. Los autores analizaron la actividad de los participantes al movilizar sus conocimientos en torno al concepto de función, así pues dentro de su análisis presentaron aspectos relevantes tales como las praxeologías y el equipo praxeológico los cuales se pusieron en marcha con la finalidad de determinar el concepto de función a partir de un problema geométrico específicamente dentro del cálculo del área de triángulos. Para el primer análisis los investigadores presentaron la obtención de la altura de un triángulo con lápiz y papel, en el segundo análisis presentaron la determinación de la altura de un triángulo apoyado en el teorema de Pitágoras, como tercer análisis presentaron una expresión algebraica y/o analítica que permitió dar la gráfica de una función, en un cuarto momento analizaron algunas herramientas del cálculo las cuales se encuentran asociadas al trabajo con funciones, finalmente, en el quinto caso los investigadores analizaron la utilización del software GeoGebra en donde evidenciaron que el trabajo se llevó a cabo dentro de un contexto más dinámico donde pudo resaltar ante todo la parte conceptual del objeto matemático, dentro de una mayor libertad de construcción, más que la del cálculo de sus resultados.

En ese sentido los autores resaltan que abordar la noción de función, es de suma importancia dentro y fuera de las matemáticas ya que este concepto está asociado a muchos de los fenómenos comunes y a la idea básica de variación y cambio. Los investigadores refieren además que el concepto de función debería ser enseñado de tal manera que dicho concepto sea comprendido como una herramienta que permita describir fenómenos del entorno y no de una forma rigurosa y axiomática tal y como se ha venido realizando en la enseñanza tradicional. Asimismo, Chevallard (como se citó en Costa y Del rio 2019) afirma que la monumentalización de los saberes es la forma tradicional de presentación de conceptos matemáticos dentro de la cual se invita a los estudiantes a admirar y contemplar dichos conceptos como obras de arte, descuidando de este modo el aspecto histórico de aquellos objetos, perdiendo sentido de lo que se presenta a los estudiantes.

Ante esto Costa y Del Rio (2019) se plantean la siguiente pregunta: ¿Cuáles praxeologías se podrían poner en juego, y cuales efectivamente se ponen, cuando se estudia la noción de función a partir de un problema geométrico? ¿Y cuáles cuando se incorpora el saber asociado a la geometría dinámica?

Dentro de los aspectos que se tomaron en cuenta en relación al marco teórico fueron las praxeologías entendidas como actividades humanas, así también la distinción entre la dupla de niveles praxis y logos, y del concepto de equipamiento praxeológico. La metodología que tuvo la investigación fue de tipo descriptivo buscando explicar la actividad matemática.

Finalmente algunas conclusiones a las que llegan los investigadores son que la actividad presentada en los cinco casos dio a conocer una forma original de trabajar en la noción de función dejando de este modo una manera tradicional y monumentalista de enseñar este contenido. Por otro lado los autores resaltan que el área de la función de la base utilizada dentro de la secuencia didáctica sirvió como un modo de otorgar a la persona que aprende este concepto, la libertad de escoger las variables. Por otro lado, inciden que las praxeologías que se reconstruyen en el trabajo dependen del equipamiento praxeológico de aquellos que lo estudian, finalmente afirman que el software no determina el aprendizaje del concepto de función sin embargo el rol que puede aportar este medio dependerá de la actividad que se proponga, es en ese sentido que el diseño correcto de actividades permitirá la exploración de relaciones funcionales como la de dependencia.

1.3 Investigaciones que presentan aspectos históricos y epistemológicos del concepto de función.

Las investigaciones que se presentan a continuación están relacionadas con el concepto de función desde una perspectiva histórica y epistemológica del objeto función, estas son las investigaciones de, Cuevas y Díaz (2014) y Cuevas y Delgado (2016)

Presentamos en primer lugar la investigación de Cuevas y Díaz (2014) en la cual los autores se plantean realizar un estudio sobre el papel que cumple el desarrollo histórico del concepto de función y la influencia que este factor tiene en relación a la comprensión del concepto, así como la importancia del conocimiento histórico que se debe de considerar para poder establecer una propuesta didáctica. Esta investigación estuvo motivada a partir de la revisión que los investigadores realizaron del currículo de matemáticas del nivel medio - básico y superior en la ciudad de México.

Cuevas y Díaz (2014) junto a los investigadores del equipo de *The National Council of Techers of Mathematics* (NCTM) consideran que el concepto de función permite unificar muchas ramas de las matemáticas y de la ciencia, así pues afirman que este concepto no solo aparece en la educación básica, sino también en la superior, y es en ese tránsito en que las dificultades por comprender dicho concepto aparecen. Esto se debe en parte a la forma de presentación y la elección de la definición de función puesto que al optar por una en específico se deja de lado otras interpretaciones que deberían ser tomadas en cuenta si se quiere enseñar un concepto integral y adecuado.

Los autores utilizaron la metodología documental la cual esta basada en la recolección de la información a través de diversas fuentes bibliográficas, esta a su vez se encontró centrada en el objeto matemático función y en la evolución histórica que tuvo en el tiempo. Los investigadores dieron inicio a su investigación a partir de un recorrido histórico del concepto, en donde detallaron lo acontecido en distintos momentos históricos entre los cuales se destaca el periodo antiguo, la edad media, el periodo moderno, y las controversias históricas que surgieron alrededor del concepto de función que dieron lugar a las modificaciones de su definición resaltando en este proceso la contribución de diversos matemáticos, que permitieron afinar y formalizar de manera progresiva la definición de función que conocemos en la actualidad.

Una de las conclusiones a las que llegan los investigadores es que el concepto de función no fue una tarea sencilla para los matemáticos a lo largo del tiempo, puesto que estos tuvieron serias dificultades para llegar a la definición que conocemos actualmente. Por otro lado, la evolución del concepto de función pudo avanzar en la medida en que evolucionaron otros conceptos matemáticos tales como el de variable, el álgebra simbólica, la geometría analítica y el cálculo diferencial. Así también los autores afirman que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes al iniciar el concepto de función son similares a los que tuvieron los matemáticos del siglo XVIII y que además desde el punto de vista didáctico y epistemológico no se debería utilizar una descripción estructural para introducir una noción en matemáticas, tal como el concepto de función.

Por su parte en la investigación de Cuevas y Delgado (2016) los autores analizan la intervención del factor histórico en la determinación de la definición de función realizándose la siguiente pregunta ¿Por qué es difícil de comprender el concepto matemático de función? los autores de acuerdo con Artigue (como se citó en Cuevas y Delgado, 2016) consideran que el análisis epistemológico permite tomar distancia entre el saber sabio y el saber enseñado lo cual ineludiblemente dará razón de analizar la historia y el desarrollo conceptual del objeto para de esta manera poder observar su verdadera complejidad.

Los autores se apoyan de lo señalado por *The National Council of Techers of Mathematics* (NCTM, 1989/1991) quienes afirman la importancia de estudiar el concepto de función por ser un concepto unificador.

Asimismo los autores analizaron dentro de su investigación las distintas definiciones que se establecen del concepto de función, a partir de la revisión de varios libros de cálculo, resaltando dentro de este análisis el uso de diversos registros de representación semiótica que suelen emplear los profesores en la enseñanza de este concepto, de lo cual resaltan cuatro concepciones que según consideran, impide la total comprensión de este concepto, como primer punto se destacan las creencias personales sobre los objetos matemáticos, como segundo punto la creencia personal sobre el método matemático, como tercer punto los conocimientos de contenidos previos, y finalmente como cuarto punto la capacidad pedagógica de demostrar una situación observable.

Asimismo se destaca el análisis que realizan al antecedente histórico del problema de la cuerda vibrante a partir del cual se dieron las múltiples definiciones que antecedieron al actual definición del objeto función, por otro lado los autores resaltan también el concepto de visualización la cual es entendida como la creación de una representación visual de algo que bien podría tratarse de una idea u objeto, señalando que dentro del proceso de enseñanza la visualización que posee el profesor sobre el concepto de función difiere de la visualización del estudiante, lo cual exige el uso de determinadas representaciones semióticas para la comprensión de este objeto.

Algunas de las conclusiones a las que llegan los investigadores después de realizar el análisis epistemológico del concepto de función, es que este tardo varios siglos en evolucionar y obtenerse una definición formal, lo que da razón de su complejidad en su enseñanza. Asimismo plantean que este concepto debería enseñarse por etapas a modo que las propiedades surjan de forma necesaria. Además agregan que es importante que antes de enunciar una definición formal, se incida en ejemplos asociados a la vida real, y que inicialmente el trabajo con funciones se dé no solo con la regla sino también con su dominio explícito. Finalmente recomiendan que se utilice cualquier software que permita que el objeto función sea un objeto experimentable, donde se pueda visualizar la evaluación de este objeto y que permita de este modo utilizar diversos registros de representación semiótica.

1.4 Justificación

En nuestro trabajo estamos interesados en diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de función, es por ello que se presentaron las investigaciones de Núñez y Sánchez (2015) quienes afirman que los problemas que surgen en los diversos niveles educativos están en su mayoría asociados al aprendizaje y la enseñanza del concepto de función, los autores señalan además que la incorporación de nuevas propuestas didácticas deberían tener como base actividades pensadas que permitan articular modelos matemáticos con el mundo real.

Por otro lado Pino, Parra y Castro (2019) señalan en su investigación que el concepto de función es uno de los más importantes dentro de las matemáticas, ya que este posee la característica de unificar disciplinas y modelizar contextos reales y de tener además una variedad de registros por lo que vuelve complejo e interesante centrarse en su estudio, además recomiendan que la manera de enseñar este concepto pueda darse a través de conceptos que jueguen un doble papel, finalmente manifiestan que debe tenerse presente el significado de referencia de este objeto para diseñar nuevas propuestas.

Por otro lado, Costa y Del Río (2019) consideran también la importancia de abordar el objeto matemático función afirmando que muchos fenómenos de la naturaleza, así como la idea de variación y cambio están asociados a este concepto, además agregan que el concepto no debe ser enseñado de manera rigurosa sino como una herramienta de modelación de situaciones reales, enfatizando finalmente que el beneficio de la incorporación de la tecnología dentro de las propuestas didácticas dependerán de sus actividades. En ese mismo sentido, Cuevas y Díaz (2014) afirman también que este concepto transita los niveles básico y superior y se encuentra de forma constante como un tema recurrente en los diversos planes de estudio, así también manifiestan que desde el punto de vista epistemológico se debería considerar no introducir estructuralmente el concepto de función al momento de ser enseñado.

Por su parte en la investigación de Cuevas y Delgado (2016) resaltan la importancia y complejidad del concepto de función, señalando además que los aspectos históricos del concepto de función deberían tomarse en cuenta para la elaboración de futuras secuencias de enseñanza.

Como puede notarse existen numerosas investigaciones las cuales apoyan el interés de la comunidad científica por la enseñanza adecuada del concepto de función.

Así mismo es válido mencionar que dentro de los documentos curriculares oficiales se sustenta la importancia de enseñar este objeto matemático, función, es así que, dentro del Currículo Nacional de Educación básica regular, este objeto se encuentra específicamente dentro de la competencia resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio. El currículo nacional menciona que:

> […] esta competencia consiste en que el estudiante pueda lograr identificar características de equivalencias y pueda generalizar regularidades en el manejo de magnitudes encontrando reglas que le permitan encontrar valores desconocidos y realizar predicciones en torno a un determinado fenómeno para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones y la manipulación expresiones simbólicas. (MINEDU, 2016, p.136).

Al realizar una revisión del Currículo Nacional, el cual es un documento válido y que es difundido por el Ministerio de Educación del Perú, se encuentra que el objeto matemático función aparece en los ciclos VI y VII que corresponde a los cinco grados de educación secundaria, lo que hace importante abordar el estudio en torno a este objeto matemático, se observa en la siguiente tabla lo afirmado anteriormente. (Ver tabla 1).

Tabla 1

Tabla de ciclo, grado competencias, capacidades, desempeños y conocimientos.

Ciclo	Grado	Competencia	Capacidades	Desempeños	Conocimientos
VI	1°	Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio.	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	Traduce datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes; funciones lineales, a gráficos cartesianos; al plantear y resolver problemas.	Función, función lineal, gráficos
	2°		Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:	Expresa el significado de la relación entre la constante de cambio de una función lineal y el valor de la pendiente	Pendiente de una función lineal
VII	3°		Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:	Interpreta el significado del comportamiento gráfico de una función cuadrática al variar sus interceptos, sus valores máximos y mínimos, el eje de simetría, vértice y orientación; en el contexto de la situación, usando	Función cuadrática, intercepto con sus ejes
	4°		Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales	Interpreta el significado del dominio y rango de una función cuadrática, la relación entre la variación de sus coeficientes y su representación gráfica	Dominio y rango de una función cuadrática, interpretación geométrica
	5°		Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia:	Expresa el significado de la dilatación y contracción de una función cuadrática al variar sus coeficientes, y el crecimiento de la función exponencial; sus desplazamientos horizontales y verticales. Usa lenguaje algebraico y diversas representaciones.	Transformaciones de funciones cuadráticas, función exponencial

Fuente: Elaboración propia.

Además, investigadores del equipo de *The National Council of Teachers of Mathematics* 2000. (NCTM) consideran que el concepto de función es un concepto que permite unificar muchas ramas de las matemáticas y de la ciencia y en ese sentido su estudio es importante.

Por lo expuesto anteriormente, consideramos pertinente la presente investigación ya que en base a las investigaciones de referencia antes citadas se puede observar que existen problemas promovidos tal vez por una enseñanza formalista y rigurosa, y con un énfasis en un tipo de representación dejando de lado, interpretaciones importantes y aplicaciones que se conecten con el mundo real. En ese sentido, pensamos que una investigación que diseñe una propuesta didáctica en un ambiente virtual (como el software GeoGebra, la plataforma Google Meet, etc.) con base en la teoría de Registros de Representación Semiótica, podría promover las transformaciones semióticas del concepto de función en estudiantes de quinto de secundaria.
A continuación, presentamos los aspectos teóricos que sustentan la tesis.

1.5 Aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica

La presente investigación está enmarcada en la teoría de registros de representación semiótica de la cual, tomaremos algunos aspectos los cuales detallaremos a continuación:

1.5.1 Representación semiótica

De acuerdo con Duval (1995) la representación ha sido objeto y centro de reflexión para todo conocimiento cierto, y esto porque no es posible un conocimiento sin una actividad de representación. Los diferentes estudios que se han realizado en torno a la representación se han dado en tres momentos diferentes, el primero con las bases de Piaget quien afirmo que la representación se recoge de un sujeto a través de la entrevista, para esto se basó en una experiencia trabajando con niños, en un segundo momento Broadbent se interesa y cuestiona como en el sujeto ingresa o capta el conjunto de informaciones externas, de aquí que la representación juega un papel importante, y la tercera como representación semiótica en el marco de conocimiento matemáticos, y cómo estas representaciones pueden ser convertidas en otras equivalentes de otro sistema semiótico.

Así mismo el investigador manifiesta que la noesis y semiosis son actividades que se dan de manera conjunta y característica inseparable, el papel que cumple la semiosis no está en el uso de diversos signos sino en la variedad de signos que pueden ser usados, es decir recae en la posibilidad más que en la actividad misma, Peirce fue uno de los investigadores que planteó la importancia del papel de los signos clasificándolos en: iconos, símbolos e índices, sin embargo no se interesó en la profundización de la variedad de sistemas semióticos ni en las conversiones que se pueden dar con estos sistemas. Benveniste por su parte planteó que la semiosis implica una variedad y correspondencia de sistemas semióticos, su trabajo sin embargo se limitó a comparar, por ejemplo: lengua con arte, su trabajo no estuvo interesado en la diversidad de sistemas ni en los procesos de conversión.

Según Duval (2012) los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la mente humana, es decir no se puede tener una percepción o experiencia inmediata de ellos, la razón de esta imposibilidad descansa en que dichos objetos no poseen una cualidad física o real, por esa razón es fundamental y absolutamente necesario hacer uso de representaciones, para su tratamiento y manipulación posterior. También para el investigador las representaciones mentales son el conjunto de imágenes y conceptualizaciones que tiene el sujeto de un objeto una situación y de todo aquello con lo que puede estar relacionado. Por otro lado, las representaciones semióticas son aquel conjunto de producciones que realiza el sujeto basado en la utilización de signos, considerándose, así como una forma simple de externalizar las representaciones mentales del sujeto, con el fin de que estas sean comunicadas, lo que permite que las representaciones mentales sean visibles y accesibles.

Además, Duval (2012) señala que la actividad de las matemáticas se da en un contexto de representación es por eso que al conocer los objetos matemáticos generalmente conocemos las representaciones de estos, y es en ese sentido que un estudiante debe conocer las diversas formas de representar un objeto matemático y hacer uso de esas representaciones. También afirma que, dentro del procesamiento matemático común, se ve necesario el uso de transformaciones dentro del sistema semiótico que se utiliza, para ello será necesario tener en cuenta el sistema de representación en el que uno se encuentra trabajando. Por ello, manifiesta que es importante que al trabajar en variados registros de representación exista una coordinación entre ellos para un mismo objeto matemático, ya que sin esta condición se podría tener que dos representaciones distintas signifiquen objetos diferentes sin ninguna relación entre ambas.

El investigador menciona que existen dos tipos de aprehensiones la primera llamada *semiosis* que está referido al proceso de producción de representaciones semióticas. La segunda llamada *noesis* que está referida a la aprehensión conceptual de un objeto, de ahí que no puede haber *noesis* sin *semiosis* y viceversa. “La paradoja cognitiva del pensamiento matemático y las dificultades que resultan de su aprendizaje se deben al hecho de que no hay noesis sin semiosis mientras hay un deseo de enseñar matemáticas” (p.270). Así, las múltiples representaciones semióticas permiten poseer una variedad de representaciones para referirse a un mismo objeto, en consecuencia, esta variedad de representaciones será decisiva para la conceptualización. Sin embargo, el investigador advierte que se debe tener cuidado en marcar una diferencia entre el representante y representado, el problema de este punto radica en la posibilidad de asociar más representaciones para un mismo objeto y poder trabajar con ellas en un proceso de tratamiento, esta posibilidad no constituye una tarea sencilla sea cual fuese el registro y el nivel de desarrollo de la persona.

También considera importante y resalta que no debe confundirse el objeto matemático con su representación, de ahí que la distinción entre el objeto y su representación, es considerada un punto estratégico en la comprensión de las matemáticas. Por ello, propone dos condiciones para conseguir esta distinción, la primera es de disponer de al menos dos sistemas semióticos diferentes y la segunda de contar con una situación que naturalmente conlleva a realizar el cambio de un sistema a otro, la ausencia de estas dos condiciones conlleva a confundir el objeto con su representación.

1.5.2 Registros de Representación semiótica

Duval (1995) afirma que para que un sistema semiótico, entendiendo por sistema semiótico aquel conjunto de signos que tienen la característica de poseer significado y de poder ser representado, sea considerado un registro debe cumplir con tres actividades cognitivas fundamentales, las cuales son: la identificación, tratamiento y conversión, no todo sistema semiótico es considerado un registro. Es decir que un registro de representación es un sistema semiótico que permite tres actividades cognitivas fundamentales, estas son:

La formación de una representación identificable: puede ser una oración, esquema fórmula, figura geométrica, es decir aquello que pueda ser representado respondiendo a unas reglas establecidas para estas representaciones que permiten garantizar la identificación de esta.

El tratamiento de una representación: es una transformación que se desarrolla dentro del mismo registro, por lo general esta transformación implica una serie de manipulaciones de ahí la denominación de transformación interna.

La conversión de una representación: es una transformación en la que se realiza un cambio de un registro a otro manteniendo la totalidad o parte del contenido de la representación inicial, de ahí que para realizar la conversión es necesario mudar de registro en consecuencia, a la conversión se le denomina transformación externa.

El autor afirma que comúnmente el tratamiento y la conversión son actividades que se manejan sin distinción sin embargo es preciso separarlas para comprender mejor este proceso, el tratamiento es una transformación de tipo interna es decir se da en el mismo registro, la conversión es una transformación que permite el paso de un registro a otro, esta última actividad permitirá al sujeto que lo realiza la conexión que se da entre semiosis y noesis.

Según la teoría de Registros de Representación Semiótica la comprensión en matemáticas se establece a través de la “conexión” de registros de representación, pues esta se da cuando al menos se transita por dos tipos de registros a través de la conversión.

Siguiendo a Duval (2006) el tratamiento y la conversión son a menudo un todo al momento de resolver problemas matemáticos sin embargo su distinción y enfoque son distintos incluso se puede mencionar que, para el autor, la conversión constituiría un proceso más complejo que el tratamiento, de ahí que la conversión sea catalogada como el umbral que no se enseña, para muchos estudiantes.

1.5.3 Tipos de registros

Duval (1995) plantea que se establecen una diversificación de registros de representación semiótica, por ejemplo, las figuras geométricas y los gráficos cartesianos, constituyen sistemas de representación diferentes. Según el autor existen cuatro tipos de registros de representación semiótica, los cuales son: lengua natural, figural, gráfico y algebraico. A continuación, mostraremos algunos de ellos asociados con el objeto matemático función.

Registro de lengua natural: está dado por una expresión conformada por un conjunto de signos lingüísticos que producen una interpretación matemática, tal como se puede observar en la tabla 2.

Tabla 2

Ejemplo de función en el registro de lengua natural.

Ejemplo de registro de lengua natural de una función
" Dada una regla f que asocia a cada número natural su doble"

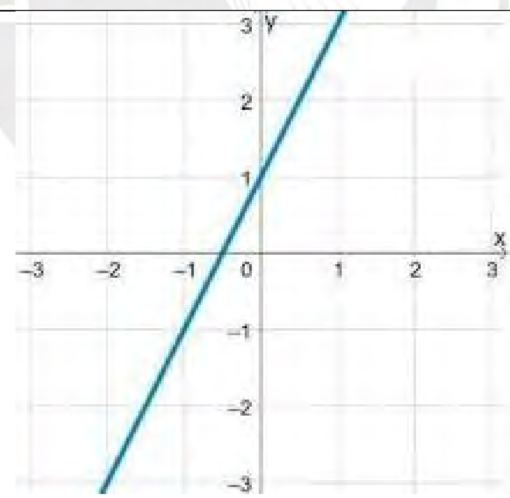
Fuente: Elaboración propia.

Registro gráfico: está dado en relación a la figura, los ejes y coordenadas que tiene la representación, tal como se puede apreciar en la tabla 3.

Tabla 3

Ejemplo de función en el registro gráfico.

Ejemplo de registro gráfico de una función



Fuente: Elaboración propia.

Registro algebraico: está dado por la relación de variables y símbolos que posee la representación, tal como se puede observar en la tabla 4.

Tabla 4

Ejemplo de una función en el registro algebraico.

Ejemplo de registro algebraico de una función
$f(x) = 4x + 9, x \in R$

Fuente: Elaboración propia.

Registro figural: está dado por la representación misma de la figura representada. Cabe aclarar que, en nuestra investigación, no utilizaremos este tipo de registro.

Cabe resaltar que, Janvier (como se citó en Font, 2001) hace uso de la representación tabular y de pares ordenados al desarrollar investigaciones sobre funciones. Por ello, como en la presente investigación también se harán uso de estas representaciones, en seguida explicamos lo afirmado por el investigador.

Con relación a la *representación tabular*, el investigador señala que la representación de una función en forma de tabla es aquella que se relaciona con el pensamiento numérico y según el autor, esta forma permitiría realizar lectura de las relaciones numéricas. En cuanto a la representación de *pares ordenados*, el investigador menciona que esta permitiría la identificación de pares de valores que corresponderían a una característica global de una función.

1.5.4 Transformaciones semióticas

De acuerdo con Duval (1995) las transformaciones que se establecen son de dos tipos la transformación interna, llamada tratamiento y la de transformación externa llamada conversión, presentaremos a continuación en la tabla 5 un ejemplo de tratamiento en el registro algebraico y, en la tabla 6 un ejemplo de conversión, del registro algebraico al gráfico.

Tabla 5

Tratamiento en el registro algebraico.

Registro Algebraico	Tratamiento en el registro algebraico
$f(x) = 4x^2 + 16x + 17$	$f(x) = 4x^2 + 16x + 17$ $f(x) = 4(x^2 + 4x) + 17$ $f(x) = 4(x^2 + 4x + 4 - 4) + 17$ $f(x) = 4(x^2 + 4x + 4) - 16 + 17$ $f(x) = 4(x + 2)(x + 2) + 1$ $f(x) = 4(x + 2)^2 + 1$

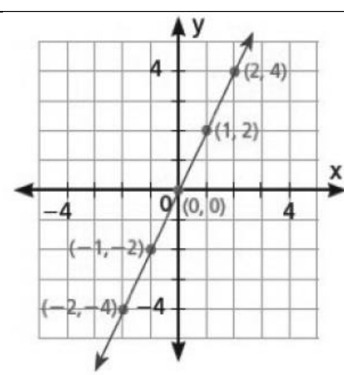
Fuente: Elaboración propia.

En el ejemplo de la tabla 5. Se muestra un tipo de tratamiento algebraico donde se manipula a través de las leyes del álgebra y del sistema de números reales, las variables obteniendo finalmente una representación que proporciona un significado diferente a la inicial, este despeje por ejemplo contribuiría a determinar algunas características de la función, como podrían ser la determinación de su representación gráfica o el rango de la misma.

Otro ejemplo, tomado de Pino, Parra y Castro (2019), que puede darse es entre otros tipos de registros que pueden suscitar una conversión entre estos, tal como se muestra en la tabla 6.

Tabla 6

Conversión entre registros del objeto función.

Registro algebraico	Registro grafico
$f(x) = 2x, \quad x \in R$	

Fuente: Tomado de Pino Parra y Castro (2019).

Se puede observar en el ejemplo de la tabla 6. La conversión que se da del objeto función entre los registros, algebraico y gráfico, realizando un tránsito que hace en cada uno de ellos, una versión distinta y a la vez amplificadora y comunicadora del mismo objeto.

Además, es importante señalar que se utiliza en el registro gráfico la representación de pares ordenados.

Con base en las investigaciones de referencia, la justificación y los aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica, a continuación, presentamos la pregunta y objetivos de la investigación.

1.6 Pregunta de investigación:

¿Una propuesta didáctica, en un ambiente virtual, sobre el concepto de función podría promover el uso de las transformaciones semióticas?

1.7 Objetivo general:

Analizar cómo una propuesta didáctica en un ambiente virtual sobre el concepto de función podría promover el uso de las transformaciones semióticas.

1.8 Objetivos específicos:

1. Analizar en las actividades de la propuesta didáctica en un ambiente virtual las posibles conversiones en los registros de lengua natural, algebraico y gráfico.
2. Analizar en las actividades de la propuesta didáctica en un ambiente virtual los posibles tratamientos en los registros algebraico y gráfico.

Para alcanzar los objetivos planteados, nos apoyaremos en la metodología cualitativa y detallaremos cada una de las fases que conforman los procedimientos metodológicos que seguiremos en la investigación.

1.9. Metodología y procedimientos metodológicos

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014) las investigaciones cualitativas tiene la característica de observar la realidad estudiada y partir de ella obtener conclusiones e ir modelando con esto teorías, teniendo con ello un proceder que va de lo particular a lo general lo cual se conoce como método inductivo, es así que estas investigaciones buscan explorar descubrir y generar perspectivas teóricas, es por ello que en el proceso de investigación se desarrolla una teoría que se ajusta a la realidad de los datos.

Así también Hernández et. al. (2014) afirman que este tipo de investigaciones tienen una forma dinámica y circular de analizar los fenómenos vinculando los hechos y su interpretación de manera constante por lo que no siguen una secuencia establecida.

> El investigador pregunta cuestiones abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe y analiza y los convierte en temas que vincula, y reconoce sus tendencias personales. Debido a ello, la preocupación directa del investigador se concentra en las vivencias de los participantes tal como fueron (o son) sentidas y experimentadas (Hernández et. al. 2014, p.41).

Teniendo presente lo que expresado por Hernández et. al. (2014) y considerando que lo que se pretende en esta investigación es diseñar una propuesta didáctica en un ambiente virtual sobre el concepto de función que promueva el uso de las transformaciones semióticas, declaramos que la presente investigación es cualitativa.

De acuerdo con ello, presentamos a continuación los procedimientos metodológicos que consideramos seguirá la presente investigación la cual se encuentra estructurada en cinco fases, las cuales detallaremos a continuación.

Fase 1: Planteamiento del problema

En esta primera fase definimos el objeto matemático que pretendemos investigar, el cual para nuestro estudio es el concepto de función. En base a esta elección se realiza la búsqueda y presentación de las investigaciones de referencia, además se presenta la justificación académica y profesional de la investigación, aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) la pregunta, objetivos y los aspectos metodológicos de la tesis.

Fase 2. Análisis del objeto matemático función

En esta fase analizamos el objeto matemático función, para este análisis se consideran aspectos históricos, matemáticos y didácticos.

Dentro del análisis histórico realizamos una breve revisión del proceso de evolución que ha tenido el concepto de función hasta su formalización con su actual definición, basados en los aportes de Youshkevitch (1976) Boyer (1987), y Kleiner (1989) así mismo para el análisis de los aspectos matemáticos nos basamos en los textos de Spivak (1967) y Apóstol (2002) los cuales corresponden a textos de análisis matemático y cálculo diferencial finalmente, para el análisis de los aspectos didácticos describimos el manejo que tiene el texto escolar de quinto de secundaria titulado “Construye” de la editorial Norma (2017) en torno al concepto de función.

Fase 3. Elaboración de la propuesta didáctica

Dentro de esta fase se presentara la propuesta didáctica dentro de un ambiente virtual sobre el concepto de función que conlleve el uso de las transformaciones semióticas. La propuesta didáctica está pensada para que pueda ser implementada dentro de un ambiente virtual en un contexto de aprendizaje a distancia, el cual se define como un “sistema y proceso de comunicación de estudiantes, maestros y recursos de aprendizaje cuando no están en el mismo lugar” Kramarae (como se citó en Jardines, 2009). Para la activación y uso del ambiente virtual nos valdremos de algunas plataformas educativas tales como el Google Meet, Google Classroom, Kahoot, software GeoGebra, los cuales explicaremos brevemente que se entiende por cada uno y como serán utilizados en el trabajo:

Google Meet

Google Meet es una plataforma educativa que permite un cómodo y seguro ambiente virtual la cual esta basada en una video llamada en vivo, a través de la cual un docente puede interactuar con sus estudiantes en tiempo real, lo que en términos tecnológicos se llamaría la fase sincrónica del aprendizaje, dentro de este ambiente los estudiantes pueden realizar preguntas a través del micrófono o chat así como utilizar opciones que le permita levantar la mano sin interrumpir a los demás participantes, además contiene la opción de presentar diapositivas y videos que suman a la explicación por parte del docente. Para nuestro trabajo esta plataforma será utilizada como aquel medio que permitirá la interacción entre el docente y estudiante, además será el ambiente donde se podrá brindar las sugerencias y orientaciones sobre las actividades planteadas así como poder compartir los links de GeoGebra y Kahoot.

Google Classroom

Es una plataforma que permite colocar tareas, archivos, PPT, videos, etc., avisos, y exámenes en línea, lo que constituye una forma efectiva de continuar con los aprendizajes convirtiéndose en un respaldo de las clases en línea, usualmente esta plataforma es utilizada dentro de la fase llamada asincrónica. Para nuestro trabajo el Google Classroom permitirá ser el soporte donde se compartirán los documentos de Word y publicaciones de las actividades.

Kahoot

Se trata de una plataforma que permite una interacción con los estudiantes en donde ellos participan de una prueba diseñada previamente por el docente la cual tiene como formato la de una competencia donde se obtiene ganancia de puntos en cada pregunta planteada, cada una de estas contiene un tiempo límite, que puede ser calibrado por el docente, los colores e imágenes despiertan el interés en jugar y aprender, al final de la prueba la plataforma presenta un podio con los tres primeros lugares, lo que motiva y resalta los aciertos, además proporciona al docente un Excel con los resultados de todos los estudiantes, en caso que el docente desee medir los aciertos obtenidos de cada estudiante. Para nuestro trabajo el juego de Kahoot será incorporado al final de la propuesta, de tal modo que pueda cerrar con las actividades planificadas reuniendo algunos de los puntos desarrollados a modo de juego –competencia, teniendo una duración aproximada de 10 minutos.

Software GeoGebra online

Se trata de un dispositivo tecnológico que permite la creación y promueve actividades que pueden ser usadas en una forma sincrónica y asincrónica dentro del aprendizaje, para la presente investigación será un aspecto necesario para interactuar con representaciones de funciones y generar tratamientos y transformaciones. Para nuestro trabajo el GeoGebra servirá para el planteamiento de dos actividades específicas, en la primera se presentará la variación de la medida del área del cuadrado a partir de la cual se realizará algunas trasformaciones semióticas, y la segunda a través de un ejemplo que permita dinamizar el comportamiento de una función a partir de su regla de correspondencia dada dentro de la actividad.

Fase 4. Análisis de la propuesta didáctica

En esta fase, se analizará a la luz de la teoría de Registros de Representación Semiótica, las transformaciones semióticas, específicamente las conversiones y tratamientos en los registros de lengua natural, algebraico y gráfico de cada una de las actividades de la propuesta didáctica.

Fase 5. Conclusiones y posibles investigaciones futuras.

En esta fase, se presentará las principales conclusiones a las que se ha llegado después del análisis y desarrollo de la Investigación con relación a los objetivos (generales y específicos), la pregunta de investigación el apoyo de los aspectos teóricos y metodológicos en los que se basa la investigación, la pertinencia del uso de las herramientas tecnológicas, entre otros.

Además, se presentarán las posibles investigaciones que se podrían realizar en base a la investigación ya sea ampliando o reformulando la propuesta didáctica.

CAPÍTULO II: ASPECTOS MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS SOBRE FUNCIÓN

En este capítulo realizamos la revisión de algunos aspectos más importantes en la historia de las matemáticas sobre el concepto de función, su desarrollo y la evolución que ha tenido a lo largo de tiempo basados en los aportes de grandes personajes en la historia de las matemáticas. Seguidamente, presentamos los aspectos didácticos, es decir, como se presenta actualmente este concepto en algunos libros de texto de quinto de secundaria.

2.1 Aspectos históricos

Kleiner (1989) señala que la noción de función se remonta a unos 4000 años antes de Cristo, donde los babilonios fueron los precursores de esta idea, manifestando que los matemáticos de esta época plasmaron en tablillas ciertas nociones de relación donde asociaban algunas cantidades con otras, lo que para la actualidad sería una idea muy básica de lo que se concibe como función.

Según Youshkevitch (1976) la primera idea de función que se tiene conocimiento se da con la cultura babilonia, aquella que dio a conocer ciertos registros que realizaban los matemáticos de esa época los cuales dentro de tablillas y valiéndose de un sistema con unidades sexagesimales, plasmaron ciertas relaciones tales como los cuadrados de números y sus raíces cuadradas, los cubos de ciertos números y sus raíces cúbicas, todo esto con la finalidad de llevar un control del tiempo, anotando el efemérides del sol y la luna, lo que significó un control a manera de tabulación de ciertas posiciones de los cuerpos celestes, todo esto con una finalidad astronómica, esto sentaba las bases de la matemática de aquella época y el posterior desarrollo de la astronomía

De acuerdo con Boyer (1987) las tablillas de los babilonios en la antigua cultura mesopotámica fueron realizados en arcilla blanda y escritos con unas varillas, y puestas a cocer en un horno o simplemente puestas a secar en el incesante sol de la región, con lo cual consiguieron que lo plasmado se conserve por más tiempo, a diferencia de los jeroglíficos de la cultura egipcia que con el pasar del tiempo se deterioraron con mayor fuerza, así pues cerca de 50 000 tablillas se han recogido por diversas universidades tales como Columbia, Pennsylvania Yale y otras, sin embargo su lectura ha sido descifrada a partir del siglo XIX y segundo cuarto del siglo XX.

Según Boyer (1987) una tablilla de la época mesopotámica se encuentra en la universidad de Yale donde se observó que incluye el cálculo de la raíz cuadrada de 2 en el sistema sexagesimal. Muchos matemáticos de la época destacan aquí, tal como Arquitas (428 – 365 a. C.), por otro lado, es válido mencionar que las tablillas babilónicas contenían soluciones a casos concretos de la época y no contenían una forma generalizada de las relaciones matemáticas que iban mostrando, tal como se muestra en la figura 1.

***Figura* 1:** Imagen de tablilla mesopotámica Plimton 322.

Fuente: Boyer,1987, p.61.

Kleiner (1989) afirma que la idea de función es muy antigua y que esta ha ido evolucionando con el pasar del tiempo su origen se concatena con problemas surgidos en la antigüedad, sin embargo el concepto que tenemos de función actualmente, es moderno y marca el punto de partida de las llamadas matemáticas modernas. Así pues la idea de función tal como la conocemos es una idea nueva que ninguna cultura había desarrollado antes.

Po otro lado, Pedersen afirma que, si se concibe a la función no como una fórmula sino como una relación general de asociación de elementos de un conjunto con otro, entonces es válido afirmar que los matemáticos babilonios sí desarrollaron esta asociación cuando relacionaban valores de tiempo con valores angulares de los planetas. (Pedersen citado por Youshkevitch 1976 p. 42).

A pesar de esto Youshkevitch (1976) plantea que las relaciones que se establecieron en dicha época, no tenían la idea de función generalizada, además en la literatura matemática antigua no se dio un término que se pueda aludir a dicha idea, inclusive la idea abstracta y general que relaciona variables independientes con dependientes no estaba presente.

Según Kleiner (1989) el concepto de función ha tenido tres escenarios en los que se ha presentado su desarrollo, el primero, asociado a la idea geométrica de curva, la segunda, a una forma algebraica o analítica, lo que comúnmente se puede entender como fórmula, y la tercera como una correspondencia asociando la imagen mental de una máquina con valores de entrada y de salida.

El autor señala que el siglo XVII fue el siglo en el que se dio de manera mucho más sostenida el concepto de función, en esa época surgía la geometría analítica, así pues la geometría y el álgebra conducían un papel preponderante en este estudio lo que permitió tener una mejor posición frente al concepto de función. El empleo de las variables permitió que se estudien las curvas, sin embargo aún quedaba pendiente la importante asignación a estas variables con un tipo de rol, tal como el de ser variable dependiente o independiente, asociando la idea de dinamismo a diferencia de la visión estática que podían tener estas variables antes de este siglo. Durante el siglo XVII las curvas fueron resultados de esta geometría analítica, algunas de estas curvas eran funciones en potencia lo que se podría decir es que en esta época no se estableció claramente el rol de variable dependiente e independiente.

Según Kleiner (1989) en la época de Newton y Leibniz el cálculo que se desarrolló no fue un cálculo como el que hoy se conoce es decir un cálculo de funciones, sino por el contrario fue un cálculo aplicado a curvas, como por ejemplo el cicloide, de aquí que todo el análisis de dicha época se centró en desarrollar métodos que den solución a problemas relacionados a curvas tal como encontrar la tangente a dichas curvas o encontrar áreas bajo esas curvas, longitudes de curvas, velocidades de puntos, con lo que daban soluciones a problemas geométricos y físicos, aun en esa época no se manejaba la distinción de variables en el sentido actual, tuvo que pasar tiempo para reformular el cálculo de forma algebraica.

De acuerdo con Kleiner (1989) Leibniz en su manuscrito refiere por primera vez la palabra función para designar “un objeto que está asociado con otro”, por ejemplo, en dicho manuscrito expresa que: una tangente es una función de una curva.

Newton por su parte concibe en forma similar la utilidad del cálculo, pero en un sentido geométrico. Uno de los principales aportes que Newton realizó en esta época se vió reflejado en la serie de potencias.

De acuerdo con Boyer (1987) la geometría analítica de Descartes dio lugar al estudio de funciones sin embargo distinto al sentido actual que se tiene del concepto, ya que no era la prioridad dentro del estudio de la geometría analítica analizar el concepto de función sino por el contrario conocer las curvas que se obtienen a partir de expresiones variables.

Además, Leibniz no fue el que planteó una notación funcional moderna sin embargo fue el que utilizó el término función en su obra en un sentido cercano al actual.

Kleiner (1989) afirma que durante la época de 1694 y 1698 los matemáticos Bernoulli y Leibniz mantuvieron correspondencias en los que trataban asuntos relacionados al manejo de ecuaciones y expresiones variables que daban lugar a las curvas, la tendencia dirigía a centrar la atención en las expresiones que relacionan las variables dejando de lado a las curvas en sí, es así que Bernoulli en 1718 utiliza la siguiente definición de función *"Se llama función de una variable a una cantidad compuesta de cualquier manera por esta variable y por constantes"* (Kleiner 1989 p. 284). Sin embargo, esta definición necesita de precisar la expresión "compuesto de cualquier manera", quedando así una definición que no se asocia al sentido moderno. Según el autor en el siglo XVIII Euler en su obra clásica Introducción al análisis infinitesimal de 1748 plantea otra definición la que se enuncia de esta forma:

"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera por esa cantidad variable y números o cantidades constantes" (Kleiner 1989 p. 284).

Un detalle es que Euler no precisa a que se refiere con "expresión analítica" lo que sí manifiesta es que esta expresión está ligada a las cuatro operaciones fundamentales, raíces, exponenciales, logaritmación, diferenciación y uso de expresiones trigonométricas e integración, en su tratado clasifica las funciones como algebraicas y trascendentes así también en toda su obra concibe un enfoque algebraico y por tanto dentro de ella no se encuentra representación gráfica alguna. El autor afirma que en esta época se da una formalización del concepto de función, lo que conlleva a dar la visión del cálculo como una teoría formal de funciones. Según el autor, el problema de la cuerda vibrante fue un punto clave para la evolución del concepto de función ya que este problema dio lugar a una ruptura de la concepción que se tenía, para tener posteriormente una idea más general, El problema se plantea de la siguiente manera: se tiene una cuerda atada a dos puntos fijos, seguidamente se estira y se le hace vibrar, lo que se busca es encontrar una función que describa la forma de la cuerda en el tiempo t. Las soluciones que llevaron dar a este problema llevo casi todo el siglo XVIII analizando la teoría de funciones, el álgebra, la continuidad de la línea y la convergencia de series, pero fundamentalmente el concepto de función, vale decir que en aquella época se concebía la siguiente afirmación: Si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo entonces coinciden en todas sus partes. La representación gráfica del problema de la cuerda vibrante es tal como se muestra en la figura 2.

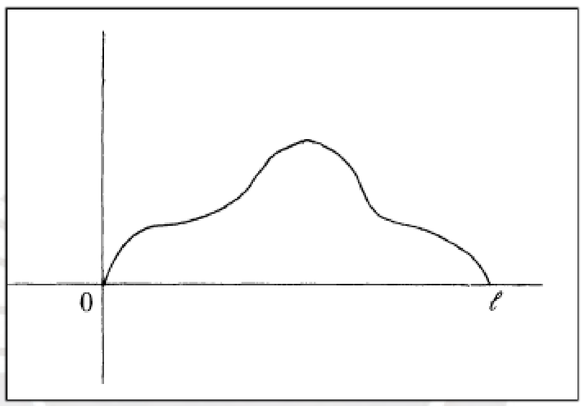


***Figura* 2:** Cuerda vibrante.

Fuente: Kleiner, 1989, p. 285.

Así pues este período se caracterizó por un cambio de concepción del objeto función donde se planteó un proceso de desgeometrización del análisis manifestándose así un sentido más algebraico del mismo, de aquí que Euler plantee en aquella época que el centro del análisis matemático sean las variables y sus funciones.

Kleiner (1989) señala que D¨Ambert en 1747 resolvió el problema de la cuerda vibrante manifestando que su movimiento está descrito por la siguiente ecuación diferencial parcial, conocida como ecuación de onda, tal como se muestra en la figura 3.

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (a \text{ is a constant})}$$

***Figura* 3:** Ecuación diferencial parcial**.**

Fuente: Kleiner, 1989, p. 286.

De acuerdo con Kleiner (1989) Bernoulli en 1753 basado en algunas referencias físicas sobre los principios de las ondas sonoras y musicales acompañado de alguna idea matemática presento la siguiente solución: (Ver figura 4).

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi a t}{\ell}.}$$

***Figura* 4:** Solución presentada por Bernoulli 1753.

Fuente: Kleiner, 1989, p. 287.

Lo que significa que se puede escribir como una serie en el intervalo (0, l) de la siguiente forma: (Ver figura 5).

$$\boxed{y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}.}$$

***Figura* 5:** Solución equivalente presentada por Bernoulli 1753.

Fuente: Kleiner, 1989, p. 287.

Las soluciones mostradas fueron rechazadas por Euler señalando ciertas características de las expresiones tales como su paridad o no y sobre todo la posibilidad de que solo una expresión analítica pueda representar a la curva que buscan describir, esto último era la esencia del problema, lo que llevó a los matemáticos de la época a redefinir lo que se entiende por función considerando que una función puede estar definida por tramos, y por varias expresiones analíticas, lo que se conoce actualmente como una función por tramos. La controversia originada llevó fundamentalmente a ampliar el concepto de función asociado a la dependencia funcional y como esta dependencia puede ser expresada mediante una fórmula, o aquellas que podrían ser definidas por partes lo que conduciría por ejemplo a una actualmente conocida función por tramos, tal como es el caso de la actual conocida función valor absoluto, este proceso trajo la ampliación progresiva del concepto de función el cual tuvo que redefinirse con Lagrange en el siguiente siglo lo cual contrajo cambios.

De acuerdo con Boyer (1987) Euler es considerado el fundador del análisis, con su gran obra de 1748 titulado *Introductio in analysin infinitorum*, trabajo considerado como la piedra angular del análisis, es en esta obra y en adelante que el centro del análisis giró alrededor de la idea de función.

Kleiner (1989) Señala que Cauchy amplió la definición de función en los siguientes términos:

> Cuando las magnitudes variables se vinculan entre sí de tal manera que, cuando se da el valor de ellas, podemos inferir los valores de todas las demás, ordinariamente concebimos que varias magnitudes se expresan por medio de una de ellas que luego toma la variable independiente, y las cantidades restantes, expresadas mediante la variable independiente, son las que se denominan funciones (Kleiner, 1989 p. 291).

Más adelante se anunciaría la definición de Dirichlet de función modificando lo que se tenía como idea de función nuevamente:

"**y** es una función de una variable **x**, definida en el intervalo **a <x <b,** si a cada variable de valor **x** en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable **y**. irrelevante de qué manera se establezca esta correspondencia" (Kleiner, 1989 p. 291).

Pero esta definición tenía la característica de ser muy general y de no precisar la expresión: "*irrelevante de qué manera se establezca esta correspondencia"* lo que produjo gran asombro y controversia. Siguiendo a Kleiner (1989) Bourbaki en 1939 dio una definición de función, que es la más aceptada hasta nuestros días, este matemático llega a caracterizar el dominio y rango de una función y plantea una formulación general de lo que se conoce como regla de correspondencia entre dos conjuntos arbitrarios.

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama relación funcional en y si, para todo x que pertenece a E, existe un único y en F que está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que de esta manera asocia a cada elemento x de E el elemento y en F que está en la relación dada con x; Se dice que y es el valor de la función en el elemento x y se dice que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función (Kleiner, 1989 p. 299).

La formación que tuvo el concepto de función en el desarrollo visto anteriormente nos permite considerar que esta idea matemática no se arraigó de manera inmediata sino que paso por un largo proceso de definir y redefinir este objeto matemático, lo que permite reconocer que no fue una tarea sencilla para los pensadores de los siglos anteriores y que lo que conocemos actualmente es el resultado de aportes de grandes matemáticos que a lo largo del tiempo fueron delimitando mejor este concepto matemático.

2.2 Aspectos matemáticos

Los aspectos matemáticos del concepto de función están establecidos en los textos de análisis matemático y cálculo diferencial para esto nos basaremos en los aportes de Apóstol (2001). Una función está definida de la siguiente manera:

> Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto *Y,* una *función* es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en *Y.* El conjunto X se denomina el *dominio* de la función. Los objetos de *Y,* asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el *recorrido* de la función. Este puede ser todo el conjunto *Y,* pero no es necesario (Apóstol 2001, p.62).

De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica, se podría afirmar que Apóstol (2001), utiliza el registro de lengua natural para expresar la definición del objeto función, es decir se vale de un conjunto de signos lingüísticos que enuncien las características del objeto que quiere mostrar.

De acuerdo con el autor, el concepto de función se puede esquematizar de muchas maneras, la primera en un sentido conjuntista que une elementos del primer conjunto con elementos de otro conjunto, otra manera podría ser en un sentido de una máquina donde se ingresan valores x y se producen valores (x), tal como se muestra en la figura 6.

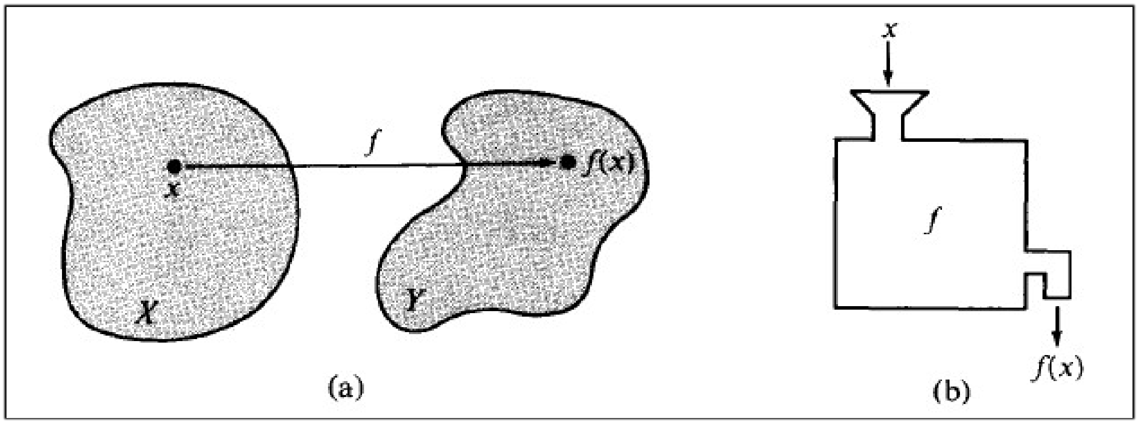


***Figura* 6:** ideas de esquematización del concepto de función, conjuntista y maquina respectivamente.

Fuente: Apóstol, 2001, p.63.

Por otro lado, Spivak (1967) plantea en su obra la siguiente idea de función la cual llama definición provisional: “Una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real” (p.49).

Luego de realizar un manejo sencillo con la definición provisional que consistió en asignaciones con la idea inicial, el autor pasa a otra definición que asocia pares ordenados de la siguiente manera:

> Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la misma colección entonces b = c, en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento (Spivak, 1967 p. 60).

Seguidamente, el autor plantea la siguiente definición:

> Si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f, si a está en el dominio de f se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a, b) está en f, este b único se designa como f(a) (Spivak, 1967 p. 60).

De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica, el autor utiliza el registro de lengua natural para dar a conocer en sus tres definiciones la idea de función, que si bien ambas conllevan a una visión distinta, se resalta aquí el registro empleado para realizar la descripción conceptual del objeto.

Spivak (1967) señala que no existe una mejor definición de función ya que el lector podría escoger cualquiera, y representar en su mente la idea más conveniente, sin embargo, es necesario para este fin realizar dibujos lo que constituiría trabajar todo un capítulo, esto daría una razón de que estos objetos matemáticos necesitan de un apoyo visual para ser comprendidos.

2.3 Aspectos didácticos

Se seleccionó para el estudio didáctico, el texto de quinto de secundaria denominado Construye de la editorial Norma (2017) que utilizan por lo general los estudiantes para su educación básica regular, en la tabla 7 se muestra una descripción básica, referida al autor, unidad en la que se aborda el tema de función, las páginas en las que se desarrolla la temática, y el título del libro.

Tabla 7

Libro de consulta de educación básica nivel secundario.

Editorial	Unidad	Páginas	Título
Norma	3 Funciones	72 -75 Libro de texto 80 – 81 Libro de actividades	Construye Matemática 5

Fuente: Elaboración propia.

Dentro del texto, se podrá encontrar una clasificación de las temáticas por unidades, dentro de las cuales encontraremos que a partir de la sección de función se desprenden algunos temas, tal como se muestra en la tabla 8.

Tabla 8

Temas de funciones de texto de Matemática 5 Norma.

Matemática 5		
Unidad	**Sección**	**Temas**
III	Funciones	Función real
		Clases de funciones
		Estudio de la función
		Operaciones con funciones

Fuente: Elaboración propia.

El texto titulado, Construye de Norma (2017) consta de dos tomos en su presentación, el primer tomo corresponde a un libro de texto, es decir un referente teórico que aborda y desarrolla los conceptos que se trabajan dentro de las unidades de su plan didáctico, y tiene un segundo tomo que incide en el aspecto práctico es decir manejar la teoría a través de ejercicios que afiancen lo aprendido, lo que significa que el estudiante consta de dos fuentes teórico práctico para su aprendizaje en este grado. En el texto de teoría, se interpreta a la función como una máquina que toma elementos de entrada y los convierte en otros elementos al salir de dicha máquina. La interpretación antes mencionada correspondería en el sentido de Duval (1995) al uso del registro de lengua natural a partir del cual se puede describir las características de un objeto matemático. Tal como se puede observar en figura 7.

Función real

Una función puede interpretarse como una "máquina" que toma como entrada un valor *x* y produce una salida *f*(*x*). Cada valor de entrada se corresponde con un valor, y solo uno, de salida.

***Figura* 7:** Interpretación de función como máquina.

Fuente: Norma, 2017, p.72.

La interpretación que maneja el texto de Norma (2017) se asemeja a lo propuesto por Apóstol (2001) quien afirma que el concepto de función se puede interpretar con la imagen de una máquina que recibe elementos de entrada y da al finalizar otros elementos de salida. De acuerdo a la teoría de registros de representación semiótica se podría afirmar que esta interpretación generaría una imagen mental en el sujeto del objeto que quiere ser representado. De ahí que los elementos expuestos anteriormente los cuales son utilizados en dicha interpretación corresponderían a una representación del objeto función en el registro de lengua natural, ya que se está realizando un discurso verbal referido a un concepto matemático.

El texto de Norma (2017) seguido de la definición anteriormente presentada coloca una nota importante que asocia lo manifestado por Spivak (1967) quien plantea dentro de las definiciones de función, la idea que una función es un conjunto o colección de pares ordenados, donde dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente. Tal como se muestra en la figura 8.

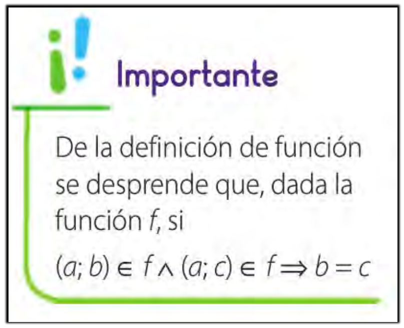


***Figura* 8:** Observación importante presentada por el texto de Norma.

Fuente: Norma, 2017, p.72.

De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica, esta observación correspondería a una versión simplificada de lo que fue anunciado anteriormente por Spivak (1967) en el registro de lengua natural, vale aclarar que esta observación dada por Norma (2017) resalta el uso de la representación de pares ordenados y su correcta interpretación.

En el texto de Norma (2017) se añade finalmente que, si los conjuntos de partida y de llegada son subconjuntos de números reales, entonces se puede afirmar que la función es real de variable real. Por otro lado, se presenta otra definición de función en su texto de práctica, la cual define a la función como una correspondencia entre dos conjuntos lo que lleva a observar una idea conjuntista de este objeto matemático. Seguidamente se asocia la idea de dominio y rango de dichos conjuntos, realizando más adelante algunos ejercicios para entender la idea.

Tema 6 **Función real**

Una **función** es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde como máximo un único valor del conjunto final.

La variable independiente, x, la forman los valores del conjunto inicial que se fijan previamente.

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar esta variable: se representa por $D(f)$.

La variable dependiente, y, la forman los valores del conjunto final que se obtienen al aplicar la función a la variable independiente. El rango es el conjunto de todos los valores que puede tomar esta variable: se representa por $R(f)$.

La regla de correspondencia de una función se expresa como $y = f(x)$.

***Figura* 9:** Imagen de la definición de función de libro de texto.

Fuente: Norma, 2017, p.80.

Siguiendo la definición de Apóstol (2001) este concepto es totalmente válido, y posee a diferencia de la anterior una visión conjuntista, contiene características más abstractas que la anterior además de tener una mayor precisión en referencia a los conjuntos de partida y llegada, así como al dominio y rango que los caracteriza. De acuerdo con Duval (1995), esta definición correspondería al uso del registro de lengua natural, el cual emplea un conjunto de signos lingüísticos que buscan dar a conocer características propias de los objetos matemáticos, cuyo fin es el de proporcionar una imagen conceptual del objeto en referencia.

En el texto Construye de Norma (2017) presenta una serie de ejercicios resueltos donde se indica cómo se debe encontrar el dominio de las siguientes funciones: (ver figura 10.)

Determina el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x + 1$ b. $h(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$ c. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

***Figura* 10:** Ejercicios del libro de texto donde se solicita encontrar en dominio de las funciones.

Fuente: Norma, 2017, p.72.

Un aspecto interesante en esta parte del análisis del texto Norma (2017) es que esta primera actividad no está asociada a trabajar y socavar la idea misma de función, sino al cálculo de uno de los elementos de este objeto matemático es decir del dominio, mostrando de este modo una visión analítica para su cálculo, de esta manera Norma (2017) emplea el registro algebraico para realizar algunas transformaciones internas, las cuales son denominadas dentro de la teoría de registros como tratamientos. Tal solución se muestra en la figura 11.

Solución

a. Como no hay restricción para los valores de x entonces, $D(f) = \mathbb{R}$.

b. $x - 2 \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \rightarrow 2 \leq x \leq 5$; por tanto, $D(h) = [2; 5]$

c. $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 2$; luego, $D(g) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

***Figura* 11:** Solución de ejercicios del libro de texto donde se solicitó encontrar el dominio de las funciones.

Fuente: Norma, 2017, p.72.

Así pues, el texto de la editorial Norma (2017) plantea tres ítems con ejercicios en cada uno, en estos, se solicita calcular el dominio de diferentes funciones, así pues en el primer ítem a. se muestra una función lineal para la cual no se evidencia ninguna restricción para su dominio, en el ítem b. se muestra una función representada a partir de expresiones que involucran radicales para la variable “x” generándose como consecuencia ciertas desigualdades para los subradicales, y en la tercera, una función racional en donde se debe tener en cuenta las restricciones para expresiones fraccionarias cuyo denominador deberá ser distinto de cero. Las soluciones mostradas siguen una línea analítica pudiéndose observar en los casos b y c tratamientos que conducen al uso de ciertas propiedades y relaciones que se cumplen para los axiomas y teoremas de los números reales. A continuación, se muestra en la figura 12. Un ejercicio que en la línea del anterior se pide encontrar el valor del rango o recorrido de la siguiente función:

Sea la función f: $]-5; -1[\rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = -x^2 - 4x + 1$. Halla el rango de f.

***Figura* 12:** Ejercicio del libro de texto donde se solicita encontrar el rango de o recorrido de la función.

Fuente: Norma, 2017, p.72.

Se puede observar en la figura 13 que no se plantea ejemplos de la idea misma de función, sino que se busca trasladar las actividades a un escenario de cálculo de expresiones o elementos asociados a la idea de función tal como es el rango de la función.

Solución

Completando cuadrados, $f(x) = -(x + 2)^2 + 5$.

Por dato, $-5 < x < -1 \rightarrow -3 < x + 2 < 1 \rightarrow 0 \leq (x + 2)^2 < 9 \rightarrow -9 < -(x + 2)^2 \leq 0$ $\rightarrow -4 < -(x + 2)^2 + 5 \leq 5$, es decir, $-4 < f(x) \leq 5$.

Por tanto, $R(f) =]-4; 5]$.

***Figura* 13:** Solución del libro de texto donde se solicitó encontrar el rango o recorrido de la función.

Fuente: Norma (2017, p.72)

La solución planteada en la figura 13, incide en el trabajo dentro de registro algebraico, realizando convenientemente los tratamientos a través de la técnica de completar cuadrados y finalizando con una conclusión analítica dada por intervalos, sin embargo, no se observa para esta actividad alguna conversión de registro, que podría bien ser otra forma de dar solución al problema en cuestión.

Por otro lado, en el análisis del libro de actividades, este presenta preguntas iniciales que, si buscan la internalización del concepto de función, a diferencia del libro de texto que en un primer momento lo que solicitaba era solo determinar el dominio y rango de cada una de las funciones planteadas, tal como se vio anteriormente. A continuación, presentamos la pregunta planteada por el texto de actividades. (ver figura 14).

1. Completa los espacios en blanco.

a. Una relación que asigna a cada elemento, x, de un conjunto de entrada, o ________ exactamente un elemento, y, de un conjunto de salida, o __________, se denomina una __________.

b. Si $f(2) = 3$, entonces el punto (____; ____) está sobre la gráfica de f.

c. Para graficar $f(x) = x^3 + 2$, localizamos los puntos (x; ____). Por lo que el punto (2; ____) está sobre la gráfica de f.

***Figura* 14:** Pregunta 1 del libro de actividades donde se solicita completar ideas asociadas al concepto de función.

Fuente: Norma, 2017, p.80.

En esta actividad inicial planteada por el libro de actividades, se busca el manejo del concepto de función y su significado, para esto el autor en la pregunta 1.a solicita completar la idea de la relación específica que debe cumplir una función, de acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica, es posible afirmar que este primer ejemplo permitiría movilizar el uso del registro de lengua natural, así también la definición que se busca manejar sería la definición dada por Apóstol (2001) quien señala la idea de relación de elemento de salida y de llegada para referirse a una función.

El ítem 1b plantea el uso de la nomenclatura funcional para la determinación de un punto en específico lo cual supone que esta representación permita identificar los puntos que pueden pertenecer a la gráfica, asociando de esta manera los pares ordenados (x; y) con la notación y=f(x), es decir se busca los nexos entre la representación funcional con la representación de pares ordenados que de esta se desprende. Asimismo, el ítem 1c continua insistiendo en el uso de la nomenclatura funcional asociando nuevamente la representación funcional y = f(x) con la representación de pares ordenados (x; y) pero esta vez de manera general, lo que implica la plena identificación de la pre imagen e imagen de una función dada su representación funcional dentro del ejercicio planteado.

En la pregunta 2a. del libro de actividades se plantea el concepto de función a través de la asociación de pares ordenados, tal como se muestra en la figura 15.

2. ¿Qué conjunto de pares ordenados representa una función de A en B? Explica.

a. $A = \{0; 1; 2; 3\}$ y $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

A. $\{(0; 1); (1; -2); (2; 0); (3; 2)\}$

B. $\{(0; -1); (2; 2); (1; -2); (3; 0); (1; 1)\}$

C. $\{(0; 0); (1; 0); (2; 0); (3; 0)\}$

D. $\{(0; 2); (3; 0); (1; 1)\}$

***Figura* 15:** Pregunta 2 del libro de actividades donde se solicita identificar qué conjunto es una función.

Fuente: Norma, 2017, p.80.

En esta pregunta se busca el manejo del concepto de función a través de una representación de un conjunto de pares ordenados, que de acuerdo a las condiciones antes brindadas por el texto se podría determinar que sea o no un caso de función, además esta pregunta permite movilizar la idea antes planteada por Spivak (1967) quien plantea en su segunda definición que una función es un conjunto de pares ordenados donde, la condición es que no pueden existir dos pares distintos con la misma primera componente, esta definición aunque no está textualmente referenciada en el texto de actividades si se encuentra como una consecuencia que se desprende de la definición conjuntista dada inicialmente por el libro de texto.

De aquí que podemos establecer que en ambos textos se evidencian varias definiciones del objeto matemático función, que según Spivak (1967) todas serían adecuadas ya que se trata de un mismo objeto matemático, sin embargo es necesario establecer un orden de complejidad, en esa línea de pensamiento se puede afirmar que el libro de texto y el de actividades difieren o no contemplan el orden antes mencionado, es decir no conducen gradualmente al estudiante a adecuarse de manera sencilla a la idea de función, solo se limitan a brindar definiciones dentro de sus dos textos sin establecer el nexo o idea trasversal que las une, ya que se podría pensar en objetos diferentes, al leer cada definición por separado, por tanto este sería un punto notable y de digna atención. Según Duval (1995) en los distintos niveles de enseñanza de las matemáticas el paso de un sistema de representación a otro no es evidente o espontáneo, para la mayoría de estudiantes por lo general no logran reconocer el mismo objeto a través de diversas representaciones que están en sistemas semióticos diferentes, además señala que los tratamientos que puedan darse dependerán del registro utilizado.

Más adelante el texto plantea una pregunta, sobre el cálculo del dominio de una función, tal como se presenta en la figura 16.

3. Encuentra el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a. $F = \{(-3; 0); (-1; 4); (0; 2); (2; 3); (4; -1)\}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$

c. $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

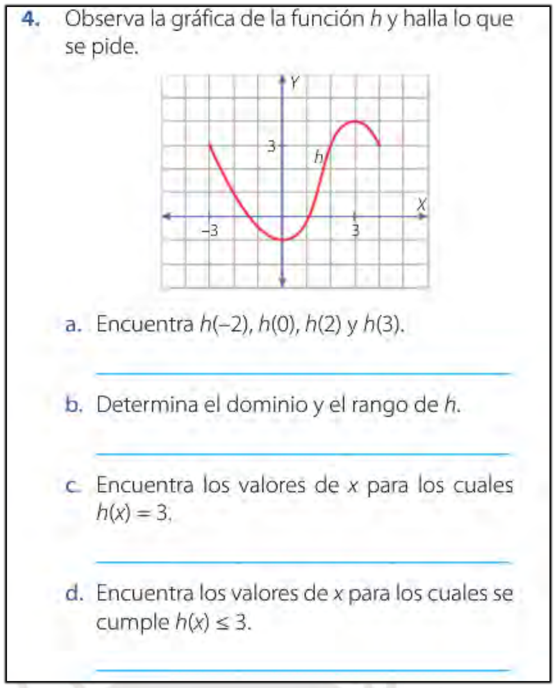
***Figura* 16:** Pregunta 3 del libro de actividades donde se solicita calcular el dominio de una función.

Fuente: Norma, 2017, p.80.

Duval (1995) afirma que por lo general los aprendizajes se enfatizan y se quedan en un contante mono registro, es decir en el afianzamiento y dominio de un solo registro, y aun así se hayan trabajado una serie de actividades entre diversos registros esto no traería como consecuencia necesaria su coordinación sino por el contrario un desconocimiento del accionar cuando se encuentren fuera del contexto donde se pudo dar mencionado aprendizaje, de esta forma se deja de lado así una transformación importante la cual es la conversión que trae por su parte una ampliación de un nuevo dominio.

En esa línea de pensamiento se presenta la pregunta 3 la cual al igual que en las primeras actividades planteadas por el libro de texto, se solicita el cálculo del dominio, para esto en el ítem a, el estudiante deberá movilizar, la idea de dominio de una función, como el conjunto de las primeras componentes de un conjunto de pares ordenados, esta idea estaría asociada a lo planteado anteriormente por Spivak (1967) en su tercera definición. En los siguientes casos b y c el estudiante deberá identificar aquellas situaciones en las que la variable x estará bien definida de acuerdo a las propiedades de los números reales, realizando para esto tratamientos dentro del registro algebraico.

Así mismo el texto plantea también una siguiente actividad en la que solicita la identificación de puntos a partir de la gráfica, tal como se muestra a continuación: (ver la figura 17).


4. Observa la gráfica de la función h y halla lo que se pide.

a. Encuentra $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.

b. Determina el dominio y el rango de h.

c. Encuentra los valores de x para los cuales $h(x) = 3$.

d. Encuentra los valores de x para los cuales se cumple $h(x) \leq 3$.

***Figura* 17:** Pregunta 4 del libro de actividades donde se solicita determinar ciertos puntos de la gráfica de una función.

Fuente: Norma, 2017, p.80.

En esta cuarta actividad, en el texto de Norma (2017), se solicita que el estudiante evalué ciertos elementos de una función a partir de su representación gráfica, para ello en el ítem a, se solicita el cálculo de algunas imágenes a partir de las abscisas que se dan como dato teniendo como referencia además la cuadricula dada lo cual permitirá establecer la relación que existe entre la abscisa y la imagen de los puntos que pertenecen a la gráfica de la función. Por otro lado en el ítem b, se solicita determinar el dominio de una función utilizando intervalos a partir de la gráfica dada, de acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica esta actividad conllevaría a una conversión del registro grafico al registro algebraico ya que se expresaría la información gráfica del dominio en una expresión analítica, así también en el ítem c se solicita la determinación de los valores de las preimágenes para los que la imagen seria 3, lo que conduce a establecer la correspondencia que existe entre los puntos (2,3) y (-3,3) los cuales están asociados por ser parte de una misma gráfica. Se observa en esta parte del análisis que dichos puntos podrían generar una interrogante en relación a la segunda componente 3, ya que se puede pensar que la condición de unicidad de la segunda componente implica necesariamente que esta no se pueda repetir, por esta razón es necesario en este punto atender a la definición de una función como pares ordenados donde la segunda componente podría repetirse sin ninguna restricción. El ítem d al igual que el ítem b se solicita la determinación del dominio como intervalos lo que implica una conversión del registro grafico al registro algebraico.

Siguiendo con el análisis en la pregunta 7 del texto de actividades Norma (2017) plantea la siguiente cuestión en relación al dominio y rango: (ver figura 18).

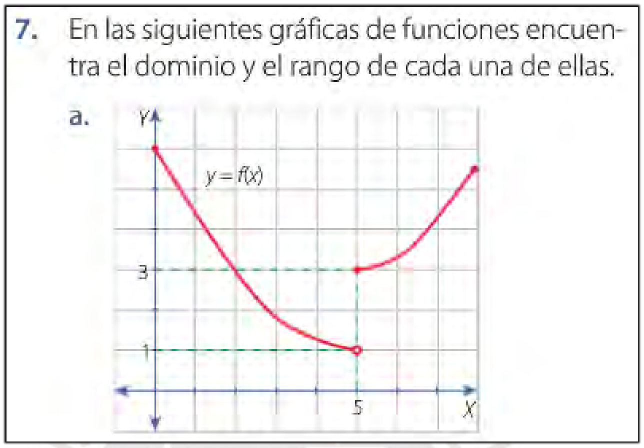


***Figura* 18:** Pregunta 7 donde se solicita determinar el dominio y rango de una función a partir de su gráfica.

Fuente: Norma, 2017, p.81.

Para esta pregunta se busca que se movilice el concepto de dominio y rango como intervalos a partir de una gráfica dada, para ello y de acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica el estudiante realizará una conversión del registro gráfico al registro algebraico para así determinar el intervalo donde quedará definido el dominio y rango a partir de la gráfica dada.

Como se puede observar en el análisis anterior, las actividades planteadas por el texto de Norma (2017), buscan de cierto modo que estas, puedan ser resueltas utilizando diversas estrategias, las cuales se encuentran enmarcadas en el uso de tres tipos de registros, tal es el de lengua natural, el algebraico y el gráfico. Se destaca el uso del registro de lengua natural cuando se solicita completar alguna idea acerca de las características y definición de función en párrafos, así también el uso del registro algebraico cuando se ve necesario recurrir al aspecto procedimental, esto se logró observar en aquellas actividades donde se solicitó el cálculo del dominio o rango de una función, y el de la representación gráfica, en donde se destaca actividades de interpretación y ubicación en el plano cartesiano los conceptos de dominio y rango de una función en donde se realizaron determinadas conversiones. Estos aspectos si bien son importantes y necesarios para adquirir el manejo y dominio del concepto de función, carecen, por un lado, de una conexión entre las distintas representaciones que se utilizan, es decir no se contempla ni se detienen en los tránsitos de conversión de una representación a otra, por lo general se observa que cada actividad es independiente una de otra sin destacar un nexo importante. Además vale resaltar que las definiciones que se manejan sobre función en los textos de uso, tanto del libro de texto como el de actividades difieren notoriamente no observándose ante esto alguna actividad que involucre el nexo entre ambas definiciones o al menos alguna que permita aclarar su diferencia, lo que podría generar ciertas dificultades al momento de comprender este concepto, además no se observa alguna actividad en la que involucre el uso de la tecnología como medio de aprendizaje para la comprensión de función.

CAPÍTULO III: PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo presentaremos la propuesta didáctica a la luz de las investigaciones de referencia, los aspectos teóricos, metodológicos, matemáticos y didácticos. Las actividades de la propuesta que se presentan en este capítulo buscan promover los tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas sobre el concepto de función.

A continuación, se presenta la organización de la propuesta y su respectivo análisis.

3.1 Organización de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica está diseñada pensando que pueda ser utilizada en un ambiente virtual, por ello, es necesario tener en cuenta algunos aspectos necesarios para el adecuado uso de este ambiente, en primer lugar poseer una cuenta de Gmail estándar o en su defecto tener una cuenta institucional que será proporcionada por el centro de estudios al cual pertenece el estudiante, así mismo el docente deberá contar con una cuenta Gmail también en cualquiera de las versiones antes mencionadas, una vez observado este punto el docente podrá acceder a la opción Classroom, que se encuentra dentro de las aplicaciones que se despliegan en los nueve puntos que aparecen en el lado superior derecho de su cuenta, en ese punto podrá crear un aula virtual, con un nombre específico para su curso, seguidamente podrá crear la clase incorporando en ella, avisos generales, mensajes públicos y privados, subir materiales en formatos PDF y Word, subir videos de las clases, enlaces de YouTube y crear tareas con fecha y hora de entrega, y organizar por semanas el avance que va teniendo su curso, finalmente podrá observar el avance y entrega de trabajos de cada estudiante en una lista.

Además, se utilizará la plataforma interactiva Kahoot y el software GeoGebra, al finalizar la creación del aula en Classroom se podrá observar que en el tablón de clase se genera un enlace para el aula virtual, de tal forma que se pueda acceder directamente a ella con tan solo dar un clic, por otro lado, el docente podrá ocultar y refrescar el enlace cuando lo considere conveniente.

Así también es válido resaltar que el momento actual que vive el mundo en general, bajo la circunstancia sanitaria acontecida por el COVID 19, que nos enmarca en un contexto de pandemia mundial hace que sea necesario que las clases se den en una modalidad virtual y a distancia, de ahí que nuestra propuesta estará diseñada y pensada mediante el uso de las plataformas virtuales antes mencionadas, Google Meet, Google Classroom y el uso de algunas herramientas virtuales tales como el software GeoGebra.

Además se deberá contar con un adecuado soporte tecnológico por consiguiente será necesario tener a disposición una laptop y una señal de internet estable, así también con ciertos materiales de escritorio tales como lapiceros y un cuadernillo de hojas que servirán para tomar nota o apuntes cuando se requiera comprobar determinados resultados o resolver ciertos ejercicios. La propuesta didáctica en un ambiente virtual consta de 2 actividades conformadas por 2 sesiones cada una, además, se ha pensado que estas sesiones podrían tener una duración de 45 a 50 minutos lo cual es considerado un tiempo prudente para realizar las actividades planteadas. Por otro lado, es importante precisar que los lineamientos de cada actividad están acorde a las competencias y capacidades planteadas en el currículo nacional, así mismo se recomienda que el docente al final de cada actividad pueda desarrollar una actividad de cierre que permita retroalimentar los conceptos trabajados y conseguir de este modo una consolidación de lo aprendido. A continuación, se presenta la propuesta de acuerdo con la estructura explicada en la Tabla 9.

Tabla 9

Organización de la propuesta didáctica.

Actividad	Sesión	Objetivo	Recursos	Tiempo estimado
1 Exploremos nociones fundamentales	Sesión 1	• Identificar conocimientos previos al concepto de función.	• Laptop • Señal de Internet • Lapicero papel	15 minutos
	Sesión 1	• Realizar conversiones del concepto de función del registro algebraico al gráfico.		20 minutos
2 Profundizando en el concepto de función	Sesión 1	• Realizar conversiones del concepto de función del registro de lengua natural al registro algebraico.		15 minutos
	Sesión 2	• Desarrollar tratamientos del concepto de función en el registro gráfico.		10 minutos
	Sesión 2	• Desarrollar tratamientos del concepto de función en el registro algebraico		10 minutos
	Sesión 2	• Realizar conversiones del concepto de función del registro grafico al algebraico y viceversa.		30 minutos

Fuente: Elaboración propia.

Cada actividad busca conseguir un fin específico, por eso se presenta a continuación la tabla 10 donde se precisa una descripción.

Tabla 10

Descripción de las partes de la propuesta:

Nombre de la Actividad	Descripción de la actividad
Sesión 1 Exploremos nociones fundamentales	La primera sesión tiene por finalidad movilizar algunas nociones previas al concepto de función para ello se dispondrá de 4 preguntas las cuales deberán ser desarrolladas utilizando lápiz y papel o bien la pizarra virtual Jamboard, además se podrá utilizar la plataforma Classroom para subir las evidencias de lo trabajado. Esta primera actividad dará énfasis a la identificación de nociones fundamentales previas a la noción de función, tales como la ubicación de puntos en el plano cartesiano, la igualdad de pares ordenados, la identificación de patrones en progresiones, así como el manejo de operaciones arbitrarias dada una regla de formación dada, se presenta además un formulario de Google, a través del cual se incidirá en algunas nociones previas al concepto de función, seguidamente se plantearan algunos ejemplos cotidianos que permitan identificar y manejar el concepto de función, a través de la idea de variabilidad para algunas de las variables indicadas, finalmente se presentarán actividades que permitan convertir enunciados del registro de lengua natural al registro algebraico.
Sesión 2 Profundizando en el concepto de función	La segunda sesión tiene por finalidad el manejo del dominio y rango de una función para ello, se presentará actividades asociadas a su cálculo lo cual permitirá realizar tratamientos dentro del registro algebraico, y a su vez explorar otros caminos ligados a la utilización del software GeoGebra que permitan dar solución a una misma situación, así mismo se presentarán tratamientos dentro del registro gráfico, se presentarán casos en los que a partir del registro gráfico se pida identificar el dominio y rango realizando para ello una conversión al registro algebraico.

Fuente: Elaboración propia.

3.2 Análisis de la propuesta

Se realizará en este apartado el análisis de la propuesta didáctica en un ambiente virtual que tiene por finalidad promover las transformaciones semióticas del concepto de función. Con relación a las transformaciones semióticas, se espera que las actividades de la propuesta favorezcan las conversiones entre los registros de lengua natural y registro algebraico y, viceversa; así mismo del registro algebraico al registro gráfico. Así también, de poder realizar los diferentes tratamientos de las representaciones semióticas en torno al concepto de función.

Sesión 1: Exploremos nociones fundamentales

La sesión 1 cuyo título de la actividad es “exploremos nociones fundamentales” tiene como finalidad explorar y movilizar nociones sobre: ubicación de puntos en el plano cartesiano, igualdad de pares ordenados, identificación de patrones en secuencias numéricas y el manejo de operaciones dada una regla de formación. Vale decir que las nociones presentadas anteriormente no forman parte del concepto de función, sin embargo, consideramos que son fundamentales ya que servirán como herramientas que permitirán comprender el concepto de función, se complementará además un formulario de Google, a través del cual se incidirán en las nociones previas al concepto de función. En esta sesión se plantearan también algunos ejemplos cotidianos que permitan identificar y manejar el concepto de función, así mismo a través de la idea de variabilidad se mostrara la función como una relación entre variables dependientes e independientes, finalmente se presentarán enunciados en registro de lengua natural para ser convertidos al registro algebraico.

Se planifica que esta actividad se desarrolle utilizando lápiz y papel, para luego poder ser compartida como una actividad de tarea en clase a través de una foto que podrá ser subida a la plataforma Classroom dentro de la cual se encontrará el aula virtual llamada “Aprendiendo funciones”. (Ver Figura 19).

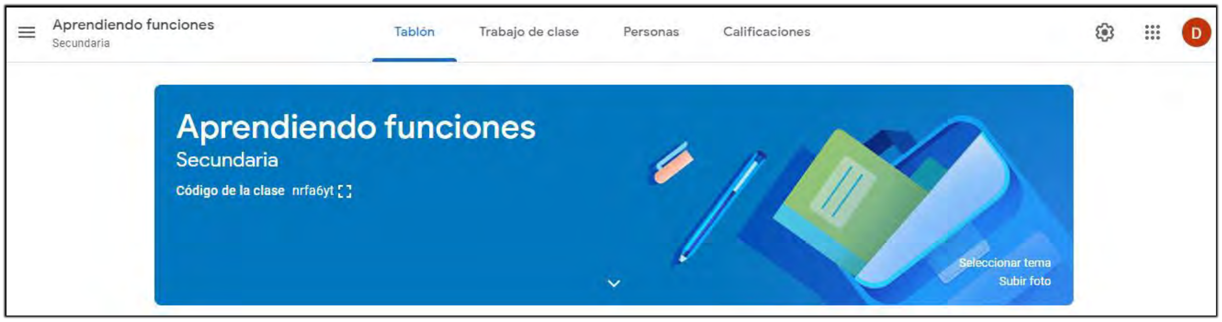


***Figura* 19:** Aula virtual de Classroom – Aprendiendo funciones.

A continuación, en la figura 20, se muestra la primera pregunta de la actividad "Exploremos nociones fundamentales"

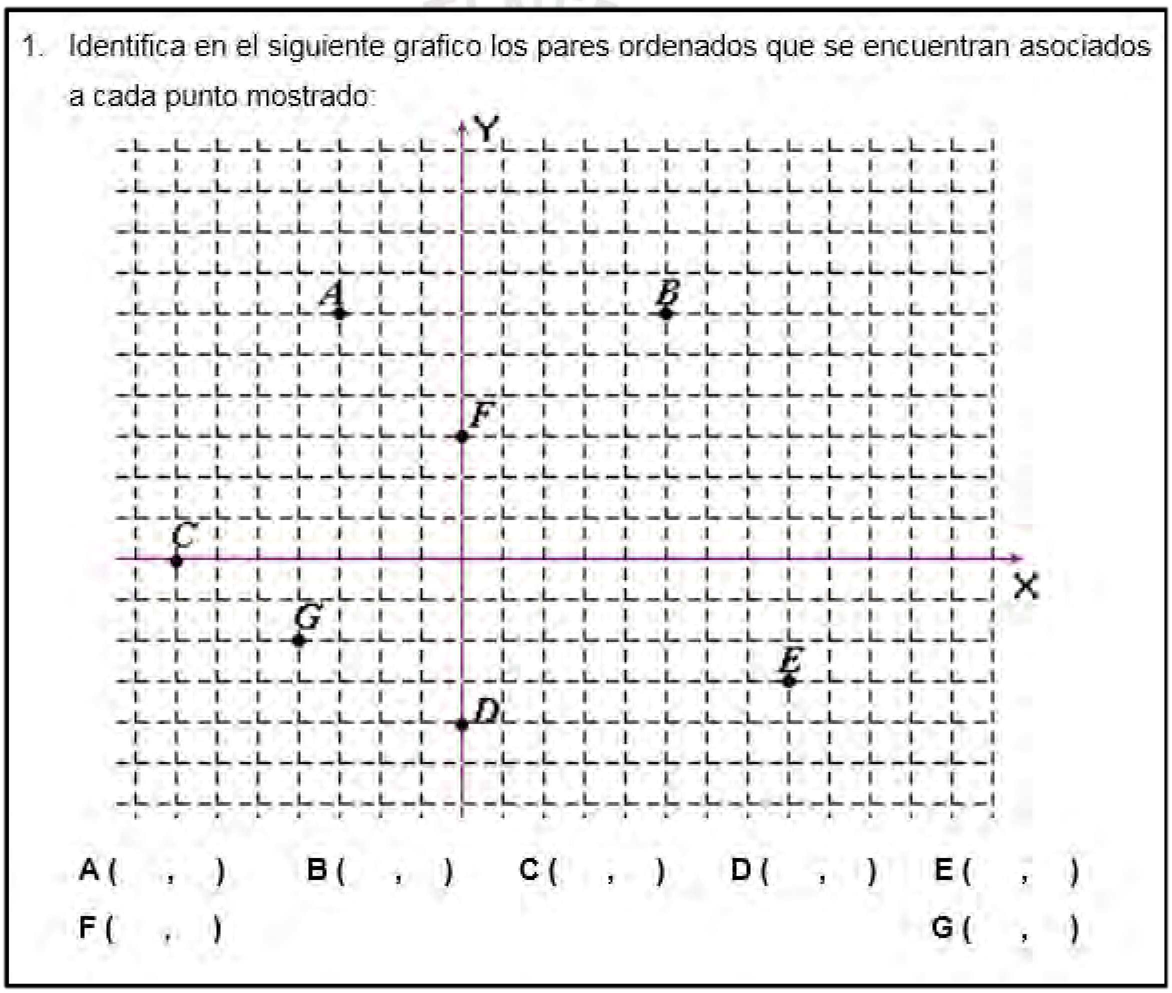


***Figura* 20:** Pregunta 1 – Exploremos nociones fundamentales.

La pregunta 1 tiene por finalidad explorar conocimientos que servirán de base para acercarnos progresivamente al concepto de función, para esto en la pregunta número 1 se solicita la identificación de los pares ordenados que se encuentran asociados a cada punto en el plano cartesiano mostrado, ante lo cual se espera que esta pregunta permita el reconocimiento de las abscisas y ordenadas en cada coordenada, tomando como referencia de unidad cada lado de las cuadriculas mostradas en el plano. Esta pregunta permite el uso de la representación de pares ordenados al momento que se pide identificar cada coordenada señalada con una letra en el gráfico mostrado, realizando de este modo una correspondencia entre la representación gráfica de los puntos y la representación de pares ordenados que se encuentran asociados. Para esta pregunta se espera estas posibles respuestas tales como: A (-3; 6) B (5; 6) C (-7; 0) D (0;-4) E (8;-3) F (0; 3) G (-4;-2)

La pregunta 2 tiene por finalidad movilizar el concepto de par ordenado y la propiedad de igualdad para dos pares, para ello se espera que ambas coordenadas sean comparadas componente a componente (abscisa con abscisa y ordenada con ordenada) dando lugar así a resolver dos ecuaciones lineales y, de esta forma poder determinar los valores de las variables **a** y **b** para luego justificar su resultado verificando la igualdad (Ver figura 21).

2. Aplica el concepto de pares ordenados y determina lo solicitado en cada caso:
   a) Si los pares ordenados $(5; a-4)$ y $(b+1;12)$ son iguales determine el valor de las variables "a" "b" justifique su respuesta.

***Figura* 21:** Pregunta 2 – Exploremos nociones fundamentales**.**

Una posible solución para esta pregunta sería la que sigue a continuación:

$$\begin{aligned}&(5; a-4) = (b+1;12)\\&5 = b+1 \wedge a-4 = 12\\&5-1 = b \wedge a = 12+4\\&4 = b \wedge a = 16\end{aligned}$$

La pregunta se validaría de la siguiente manera ya que a = 16 y b = 4 entonces se puede afirmar que ambos pares ordenados son iguales ya que al ser reemplazados satisfacen la igualdad, es decir: $(5;16-4)$ = $(4+1;12)$ lo cual conduce afirmar lo siguiente:

$(5;12) = (5;12)$ Al finalizar la pregunta el profesor formaliza el concepto de par ordenado y la igualdad de dos pares ordenados, de la siguiente manera:

Un par ordenado es una dupla de elementos donde el orden interesa, sea: $(x;y)$ *un par ordenado donde:* x *se denomina primera componente o abscisa la cual se encuentra sobre el eje x,* y *se denomina segunda componente u ordenada la cual se encuentra sobre el eje y.*

Dos pares ordenados serán iguales si cada componente es respectivamente igual uno a uno, es decir: si $(x;y) = (m;n)$ *entonces debe cumplirse que:* $x = m$ *y* $y = n$

Para la pregunta 3 se solicita que se determine la razón de la progresión mostrada así como el término de lugar 8, la finalidad que persigue esta interrogante es de poder reconocer determinados patrones numéricos o ciertas regularidades que podrían ser generalizadas, esta actividad es alusiva al tratamiento que se da cuando se busca la regularidad o comportamiento de un determinado fenómeno registrado en una tabla o lista de valores, de acuerdo a la teoría de Registros de Representación Semiótica esta actividad permitiría realizar tratamientos dentro del registro algebraico, tal como la determinación de un término de lugar general, esta actividad facilitaría en futuras actividades los tratamientos con expresiones generales a partir de ciertas secuencias numéricas que conllevarían a la deducción de reglas de correspondencia para actividades de la parte de profundización (ver figura 22).

3. Determine en el siguiente caso cuál es la razón, y el término de lugar 8, justifique su respuesta.
   a) 2; 7; 12 ; 17; ….

***Figura* 22:** Pregunta 3 – Exploremos nociones fundamentales.

Para esta pregunta se espera que pueda ser resuelta recurriendo a conocimientos derivados de temas abordados en los ciclos V y VI del currículo nacional, referidos a la temática de progresiones aritméticas. Consideramos importante este tipo de ejercicios ya que la noción de sucesión o progresión aritmética se conecta en el fondo con la noción de función, cuando se busca establecer una determinada relación a partir de las regularidades que presentan sus elementos. Una solución esperada seria como la que sigue a continuación:

2; 7; 12; 17; …….

+5 +5 +5 +5

La razón de la progresión es r = 5

Relacionando cada término a partir de la razón encontrada se obtiene:

$$2 = 5(1) - 3$$
$$7 = 5(2) - 3$$
$$12 = 5(3) - 3$$
$$17 = 5(4) - 3$$

Deduciendo una regla general se puede afirmar que cada número de la progresión tiene la forma: $T_n = 5n - 3$ donde n = un número natural. A partir de aquí se puede decir:

$$T_8 = 5(8) - 3$$

$$T_8 = 37$$

A continuación, se presenta la pregunta 4, la cual solicita determinar el valor de una figura doble cuadrada con el número 2 en su interior a partir de un operador arbitrario y una regla de como operar, tal como se muestra en la figura 23. La finalidad de esta pregunta es poder manejar la regla de formación explicita a partir de un operador cualquiera, buscando de este modo realizar acciones que comúnmente se desarrollan cuando se tiene una función con una regla de correspondencia de forma analítica.

4. Se define la siguiente operación matemática:

$\boxed{x} = 2x^2 + 2$

Determine el valor de $\boxed{\boxed{2}}$

***Figura* 23:** Pregunta 4 - Exploremos nociones fundamentales.

De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica, esta pregunta conllevaría a realizar tratamientos dentro del registro algebraico tales como operaciones fundamentales a partir de una regla de correspondencia dada, una respuesta que se espera para este caso sería como la que sigue a continuación:

Analizando la regla de como operar a partir del operador cuadrado:

$$\boxed{x} = 2x^2 + 2$$

El operador cuadrado plantea explícitamente, de modo algebraico, que toda cantidad x, que es afectada por este operador, tiene como resultado el cuadrado de dicha cantidad multiplicada por dos y sumado dos unidades.

Aplicando la definición que plantea el operador cuadrado, se tendría:

$$\boxed{} = 2\boxed{2}^2 + 2$$

Aplicando la definición del operador cuadrado nuevamente:

$$= 2\,[2(2^2) + 2]^2 + 2$$

$$= 2\,[2(4) + 2]^2 + 2$$

$$= 2\,[8+2]^2 + 2$$

$$= 2\,[10]^2 + 2$$

$$= 202$$

La pregunta 5 tiene por finalidad relacionar determinados datos del contexto cotidiano, ya sea países, ciudades, números, ciudadanos, etc. que mantengan una asociación implícita, y que a través de estas asociaciones se pueda establecer criterios pertinentes que den lugar a relaciones adecuadas que permitan activar la noción de correspondencia entre elementos a través de un criterio, consideramos importante la justificación en el criterio a ser utilizado es por esta razón que se pide explicar la relación que existe en cada caso mostrado (ver figura 24).

5. Relacione los datos que se muestran a través de algún criterio adecuado y explique cuál es la posible relación existente entre ellos.

a) Se tiene los países: Perú, Colombia y Venezuela y las ciudades de: Arequipa, Maracay, Bogotá, Lima, Medellín y Caracas**.** Explique la relación que existe.

b) Se tiene los siguientes conjuntos A: {1, 2, 3, 4} y B: {1, 4, 9, 16} Explique la relación existente.

c) Se tiene el conjunto de todos los ciudadanos peruanos y se tiene el conjunto de datos que contiene el número de DNI de cada peruano, Explique la relación existente.

***Figura* 24:** Pregunta 5. Exploremos nociones fundamentales.

Desde la teoría de Registros de Representación semiótica esta actividad promovería el uso del registro de lengua natural el cual permite justificar las posibles relaciones que se establecen a partir de los conjuntos mostrados, estableciendo un criterio pertinente a partir del cual se podrá reconocer algunas relaciones propiamente, de otras que se caracterizan por la unicidad para sus elementos. Consideramos que es importante plantear este tipo de situaciones pues ponen en evidencia la diferencia entre una relación en general y un tipo de relación especial a la cual denominaremos función.

Pensamos, además, que es importante no brindar la definición de función de forma automática sino de un modo progresivo pues de acuerdo con Ugalde (2013) las actividades que implican la noción de función deben darse en determinados niveles de enseñanza de manera que puedan utilizarse palabras para establecer una determinada relación o poder insinuar como el segundo elemento está en función del primero. Para esta pregunta se esperan acciones tales como:

Para el ítem a se podrá establecer el criterio: nombre de país – ciudad correspondiente este criterio permitirá determinar la relación que conecta cada nombre de un país con su ciudad, una posible respuesta es relacionar: Perú – Arequipa, Perú – Lima, Colombia – Bogotá, Colombia – Medellín, Venezuela – Caracas, Venezuela – Maracay, Para el ítem b se presentan dos conjuntos cuyos elementos guardan la siguiente relación: “número” – “cuadrado del número” de esa forma el número 1 estará asociado con el 1 ya que el cuadrado de 1 es 1, el número 2 estará asociado al 4 y así sucesivamente, Para el ítem c se tiene la relación: ciudadano peruano – número de DNI, de esta manera se puede establecer que dicha asociación es biunívoca ya que a cada peruano le deberá corresponder un único número de DNI distinto en cada caso. Consideramos que estas situaciones permitirían formar asociaciones implícitas que podrían conllevar a distinguir a las relaciones en general con aquellas que tienen una característica particular que es la de la unicidad.

Seguidamente se presenta dentro de la misma actividad algunas preguntas que permitirán ahondar en las características de las relaciones mostradas anteriormente en los ítems a, b y c, tal como se muestra en la figura 25.

¿Las relaciones antes presentadas guardan alguna característica en común? ¿Cuál?

***Figura* 25:** Pregunta 5.1 Exploremos nociones fundamentales.

Para esta pregunta se espera que se dé una explicación basada en las asociaciones realizadas anteriormente, para ello se utilizará el registro de lengua natural para describir alguna característica que se haya podido notar, se espera que se responda de la siguiente manera: las situaciones presentadas anteriormente corresponden a relaciones de las cuales se puede notar que en dos de ellas se comparte la característica de ser uno a uno, estas corresponden a los casos de cada número con su cuadrado correspondiente, y cada número de DNI con cada peruano, mientras que en una tercera relación se puede notar que esta posee más de una asociación para cada primer elemento, este el caso de cada país con su ciudad correspondiente.

A continuación se presenta la siguiente pregunta la cual va en sintonía de la anterior y cuya finalidad es la de poder describir con mayor precisión las relaciones anteriores, tal como se muestra en la figura 26.

¿Todas las relaciones mostradas anteriormente tienen correspondencia uno a uno? Explique

***Figura* 26:** Pregunta 5.2 de la parte de profundización.

Para esta pregunta se espera que se pueda justificar a través del uso del Registro de lengua natural la correspondencia uno a uno, y que pueda ser resuelta de la siguiente manera: No todas las relaciones mostradas tienen la característica de tener correspondencia uno a uno, el único caso que no cumple con esta condición es el caso del ítem “a” donde se puede notar más de una asociación para cada primer elemento, en este ítem la asociación se podría dar de la siguiente manera: Perú – Arequipa y Perú – Lima, con lo que se nota que la asociación del ítem mencionado no se caracteriza por tener correspondencia uno a uno.

Para la siguiente pregunta se pide plantear dos ejemplos a partir de lo analizado anteriormente, el primero que contenga una correspondencia uno a uno y otro donde esta característica no se vea reflejada, la finalidad de esta pregunta es diferenciar las relaciones en general con aquellas cuya característica sea la unicidad para sus elementos, de aquí que sea importante realizar preguntas que permitan progresivamente realizar esta distinción (ver figura 27).

Plantea un ejemplo de una relación que tenga una correspondencia uno a uno y otro ejemplo en el cual no se cumpla la correspondencia uno a uno.

***Figura* 27:** Pregunta 5.3 de la parte de profundización.

Según Udalge (2013) el concepto de función no debería introducirse de manera general, sino progresivamente, el presentarlo de forma general sería desconocer el largo camino que ha recorrido esta noción, al mismo tiempo que se perdería su real significado convirtiéndose en un instrumento de escaza validez. Así mismo este investigador afirma que el concepto de función está latente en muchas situaciones y eso no se puede evadir.

Se espera que esta pregunta pueda ser resuelta planteando algunos ejemplos cotidianos y bajo las condiciones dadas en la pregunta, para este fin se esperan respuestas tal como las que se muestran a continuación: Un ejemplo de correspondencia uno a uno podría ser: Sea “A” conjunto de todos los autos del Perú y “B” el conjunto de números de placa de auto. Se puede afirmar que a cada auto le corresponde un único número de placa, ya que no existirán dos autos distintos con el mismo número de placa. Un ejemplo de una asociación que no se caracterice por una correspondencia uno a uno seria como la que sigue: sea M el conjunto total de juguerías del Perú y B el conjunto de frutas, se puede afirmar que a cada juguería le correspondería más de una fruta, para esta relación se puede observar que la correspondencia no es uno a uno, ya que cada juguería podría asociarse con más de una fruta diferente para la elaboración de sus jugos.

A continuación, el profesor formalizará los conceptos de relación y función, que buscaba dar a conocer y aproximarse con los ejemplos anteriores.

"*Una relación es toda correspondencia o asociación de elementos, en donde cada elemento del primer conjunto, se encuentra asociado con al menos otro elemento del segundo conjunto"*

"Una función es una relación con la característica que cada elemento del primer conjunto está asociado con un único elemento del segundo conjunto"

De esta manera se definen los conceptos de relación y función con la finalidad de poder utilizarlos posteriormente en situaciones donde se necesite realizar transformaciones semióticas en torno a este concepto.

La pregunta 6 plantea un conjunto de ítems los cuales parten de una situación geométrica en base a la relación que guarda el valor de la medida del área de la región cuadrada, con uno de sus lados a través de las variaciones que se realizan a este último. Esta pregunta implica el uso del software GeoGebra, recurriendo de este modo a la tecnología digital, la cual permitirá observar las variaciones tanto para la longitud del lado como para la medida del área de la región cuadrada, dinamizando así la noción de variabilidad que podrá dar paso al concepto de función y como consecuencia a sus transformaciones semióticas. Para ello se comparte un enlace tal como se observa en la figura 37.

6. Ingresa al siguiente enlace de GeoGebra https://www.geogebra.org/m/zqyx84uz

a) ¿Qué sucede con el valor del área de la región cuadrada a medida que se hace variar la longitud de uno de sus lados? Sugerencia: utilice el deslizador para realizar variaciones a la longitud del lado del cuadrado.

***Figura* 28:** Situación medida del área de la región cuadrada – pregunta 6.

La finalidad de esta pregunta es activar la noción de variabilidad la cual consideramos importante para dar paso al concepto de función el cual será entendido para esta situación, como una relación entre magnitudes dependiente e independiente, donde a cada valor de la magnitud independiente le corresponderá una única magnitud dependiente. De acuerdo con la historia de las matemáticas el proceso de evolución del concepto de función transitó necesariamente de una noción de correspondencia a una noción de variabilidad. Esta pregunta busca por tanto dar una nueva mirada que permita, comprender el concepto de función como una relación entre magnitudes, en las que unas dependen de otras.

Según Rey et. al. (2009) Uno de los elementos por los que se constituye la noción de función en la línea de tratarla como instrumento modelizador, es el de dependencia lo que implica un vínculo entre cantidades lo cual a su vez permite tener la idea de que el cambio que se de en algunas de ellas conllevaran a un efecto sobre las otras. Sin embargo, la noción de dependencia es difícilmente identificable sin otra noción que constituye un punto importante que es la variabilidad.

Al ingresar al enlace de GeoGebra se podrá observar una ventana virtual dentro de la cual se apreciará los siguientes elementos: Una región cuadrada, un deslizador cuyo rango de valores comprende de 0 a 5, el cual a su vez permitirá variar el valor del lado del cuadrado en cuestión. En este punto es conveniente mencionar que para una longitud cuyo valor sea 0 el valor de la medida del área será 0, este resultado nos indicaría que en la realidad la mencionada área no existiría ya que el elemento lado del cuadrado el cual permite la existencia del área, no se encuentra. Por otro lado encontramos también pequeñas ventanas que indican las variaciones de los valores tanto de la medida del área, como del valor de uno de los lados del cuadrado. (Ver figura 29).

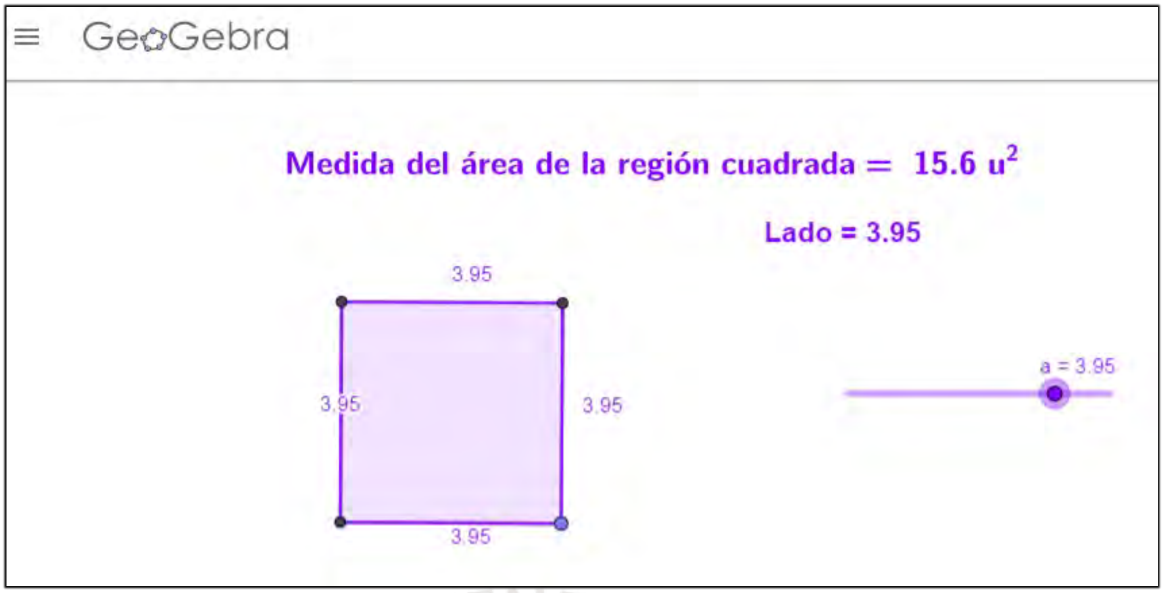


***Figura* 29**: Ventana de GeoGebra "Variación de la medida del área de la región cuadrada" – pregunta 6.

El ítem "a" de la pregunta 2 plantea la siguiente interrogante: ¿Qué sucede con el valor del área de la región cuadrada a medida que se hace variar la longitud de uno de sus lados? La finalidad de este ítem es el de identificar la variabilidad del área de la región cuadrada a medida que se varia la longitud de uno de sus lados.

Para este ítem se espera una respuesta como la que sigue: A medida que se varía la longitud de uno de los lados del cuadrado con la ayuda del deslizador se consigue variar la medida del área de la región cuadrada, provocando de este modo distintas medidas del área de la región cuadrada a determinados valores de longitud del lado del cuadrado. Tal como se muestra en la figura 30.

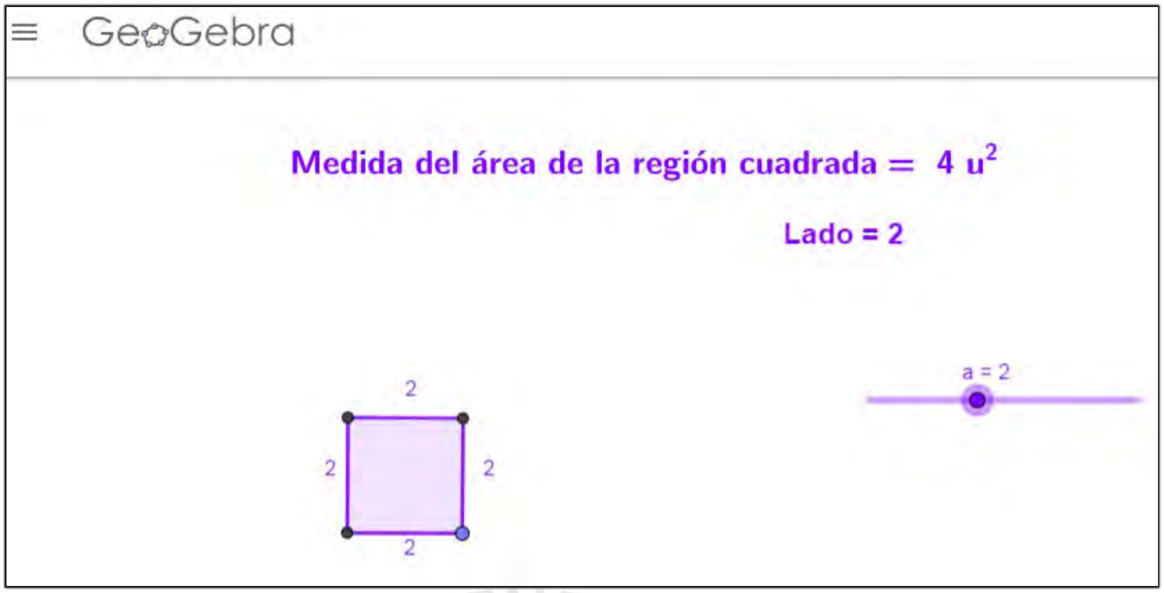


***Figura* 30**: Ventana del GeoGebra "Variación del lado del cuadrado – pregunta 6.

Con la ayuda del software GeoGebra el proceso de visualizar y reconocer la variación de la medida del área se vuelve más sencilla ya que esta interacción virtual propicia una manera dinámica de trabajo y por tanto permite generar aquella respuesta que se espera conseguir, así mismo permite observar los cambios que se da en el valor de la medida del área de cuadrado. (Ver figura 31).

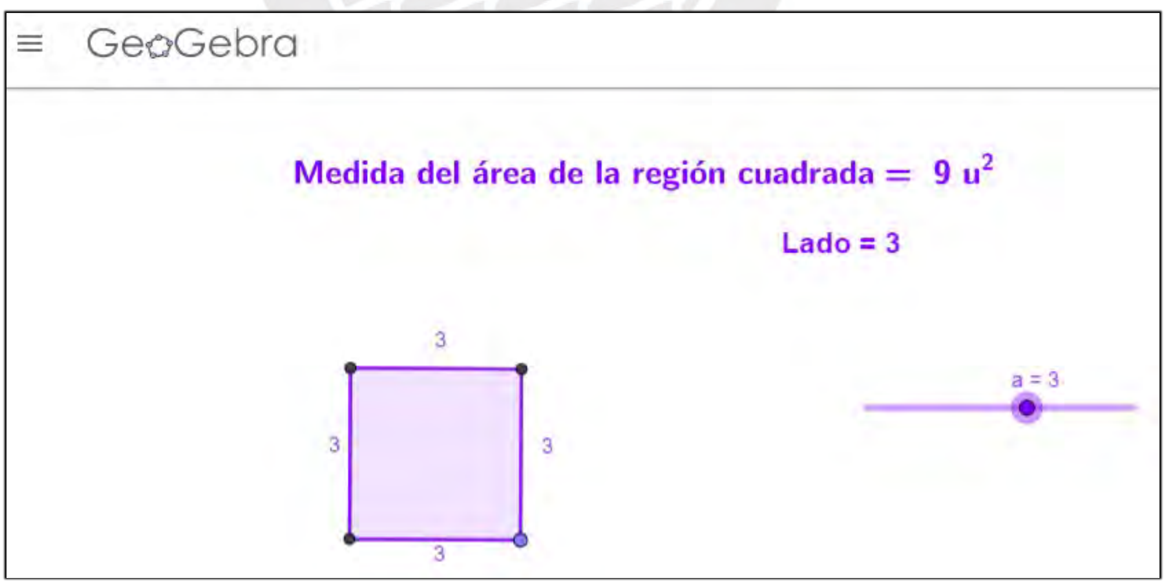


***Figura* 31**: Variación de la medida del área de la región cuadrada – pregunta 6.

De esta manera se puede observar la variedad de valores que se pueden asignar al lado del cuadrado de tal manera que su área varía en cada momento, tal como se puede observar en la figura 32.

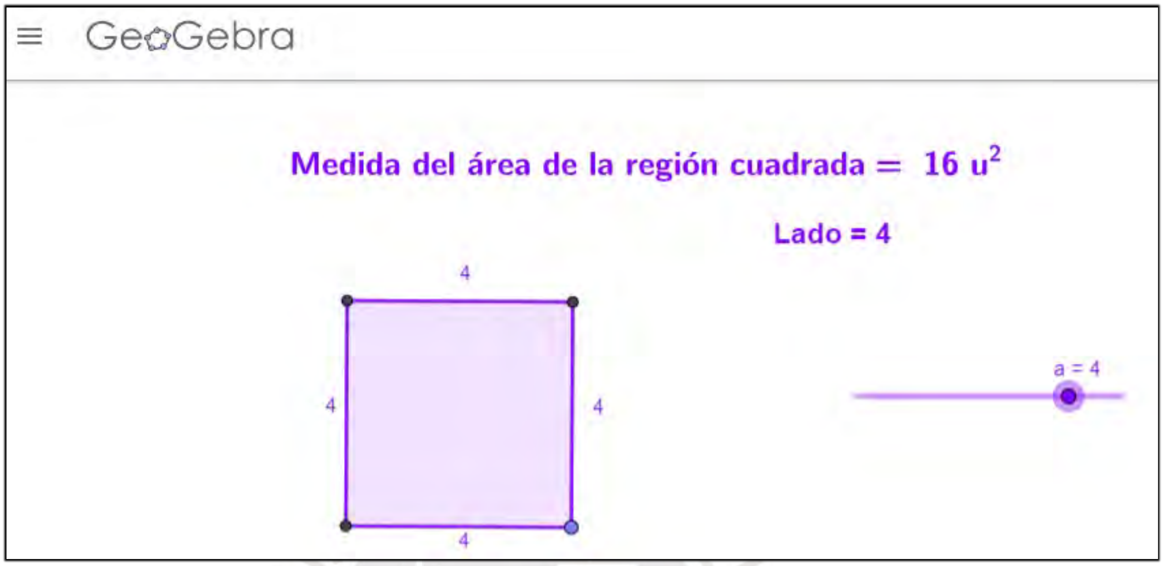


***Figura* 32**: Variación de la medida del área de la región cuadrada - pregunta 6.

Para el ítem “b” se plantea la interrogante sobre la dependencia que presenta la medida del área de la región cuadrada, pidiendo una justificación para la respuesta, tal como se muestra en la figura 33.

b) ¿De qué depende la variación de la medida del área de la región cuadrada? Justifique.

***Figura* 33**: Identificación de la variable dependiente e independiente - pregunta 6.

La finalidad del ítem b es justificar sobre aquello que provoca la variación que presenta la medida del área de la región cuadrada. Se espera una respuesta como la que sigue: la variación de la medida del área de la región cuadrada depende de la variación de la longitud de uno de los lados del cuadrado, lo que trae como consecuencia que a medida que se asignen valores distintos al lado del cuadrado se podrá obtener medidas de áreas distintas.

Para el ítem “c” se plantea la interrogante sobre la identificación de la variable dependiente e independiente del caso mostrado anteriormente, tal como se muestra en la figura 34.

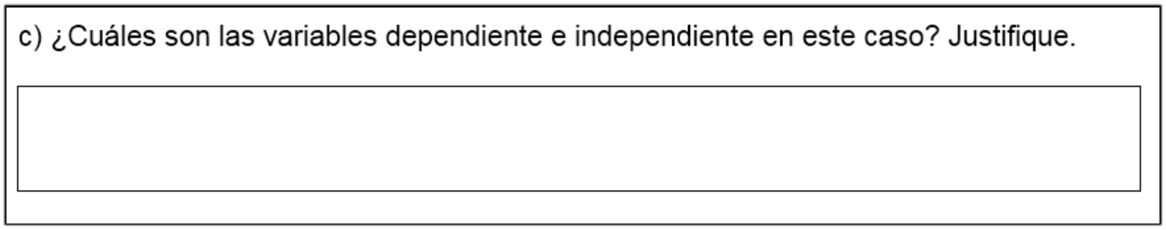

c) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente en este caso? Justifique.

***Figura* 34**: Identificación de la variable dependiente e independiente - pregunta 6.

Para este ítem se espera una respuesta como la que sigue: a partir de la observación anterior se puede afirmar que la variable independiente es la longitud del lado del cuadrado, ya que es aquella variable que es factible de poder ser controlada y manipulada para esta situación, la variable dependiente correspondería a la medida del área de la región cuadrada ya que esta variará de acuerdo a las diferentes longitudes que se asigne a la longitud de uno de los lados del cuadrado. De acuerdo con la teoría de Registros de Representación Semiótica este ítem permitiría utilizar el registro de lengua natural para justificar la dependencia e independencia de las variables que intervienen en la situación presentada.

A continuación, el profesor formalizará el concepto de variable independiente y dependiente, así como el concepto de función, comprendido como una relación entre magnitudes, lo cual se buscaba aproximar con la situación anterior.

***Variable independiente**: una variable independiente es aquella que representa una cantidad que tiene la cualidad de poder modificarse, manipularse, cambiarse o controlarse dentro de un experimento o situación, por lo general se utiliza la letra **x**, para representar esta variable.*

***Variable dependiente:** una variable dependiente es aquella que representa una cantidad que depende o varía de acuerdo a como se modifica la variable independiente, por lo general se utiliza la letra **y** para representar esta variable.*

Una función** es una relación de dependencia entre dos variables, de modo que a cada valor de la variable independiente le corresponda un único valor de la variable* *dependiente, con lo que se puede afirmar que:* ***y está en función de x *pudiendo simbolizarse* $y = f(x)$

De esta manera se definen los conceptos de variable independiente y dependiente, así como el concepto de función comprendido como una relación entre magnitudes, esto con la finalidad de poder utilizarlos posteriormente en situaciones donde se necesite realizar transformaciones semióticas en torno a este concepto.

Para la pregunta 7 se presenta una tabla, la cual deberá ser completada a través de la manipulación del comando deslizador realizando para ello un arrastre que permita posicionarse en los lados que indica la tabla obteniendo de esta manera la medida del área buscada, para ello se deberá utilizar el enlace anterior el cual fue brindado en la pregunta 6. (Ver figura 35).

7. Utilizando el enlace de la pregunta 6 manipula el deslizador realizando un arrastre y completa la siguiente tabla partir de los datos que se indica.

Longitud del lado	Valor del área de la región cuadrada
1.00	
1.10	
1.30	
1.60	
2.20	
2.60	
4.10	

***Figura* 35**: Tabla de valores Longitud del lado – valor del área de la región cuadrada, pregunta 7.

La finalidad de la pregunta 7 es que se pueda organizar los datos que se obtienen al realizar el arrastre y de esta manera lograr identificar las regularidades que guardan las magnitudes que participan en el caso mostrado. Se espera por tanto que los datos que se obtengan en la tabla permitan reconocer ciertas regularidades que dé lugar a identificar la relación implícita que existe entre estas. De acuerdo a la historia de las matemáticas el uso de tablas o recurso tabular fue el más utilizado para analizar la información y el punto de inicio para acercarse a la idea de función.

Según Ruiz Higueras (citado por Pino, Parra y Castro 2019) el estudiar las tablas numéricas que muestran valores cambiantes de magnitudes permitió conducir a primeras aproximaciones de las relaciones funcionales, lo que lleva a decir pasar de una tabulación simple a la búsqueda de ciertas regularidades acercándonos a un “instinto de funcionalidad”.

Se espera la siguiente respuesta a medida que se usa el deslizador: (Ver figura 36).

Longitud del lado	Valor del área del pentágono regular
1.00	1.00
1.10	1.21
1.30	1.69
1.60	2.56
2.20	4.84
2.60	6.76
4.10	16.81

***Figura* 36:** Solución de la tabla de valores – pregunta 7.

La pregunta se acompaña de un ítem que solicita determinar si la tabla anterior corresponde a una función. La finalidad de esta pregunta es sondear si con la formalización del concepto de función anteriormente presentada es posible identificar una función a partir de la tabla y datos mostrados. (Ver figura 37).

a) Se puede afirmar que la situación anterior corresponde a una función? ¿Por qué?

***Figura* 37:** Ítem a – pregunta 7 - identificación de una función.

Se espera para este ítem una respuesta como la que sigue a continuación: la tabla mostrada la cual corresponde a la situación geométrica del área de la región cuadrada presentada anteriormente, si corresponde a una función ya que para cada valor de la variable independiente la cual corresponde a la longitud de uno de los lados del cuadrado mostrado, le corresponde un único valor para la variable dependiente la cual corresponde a la medida del área de la región cuadrada.

El ítem "b" plantea trasladar la información de la tabla a un conjunto de pares ordenados, para ello se proporciona el siguiente conjunto para ser completado: (Ver figura 38).

b) Coloca los pares ordenados que se obtienen a partir de la tabla de la pregunta 7.

{ (1.00,   ); (1.10,   ) ; (1.30,   ) ; (2.50,   ) ; (1.60,   ) ; (2.20,   ) (2.60,   ); (4.10,   )}}

***Figura* 38:** Ítem b - pregunta 7 – Pares ordenados obtenidos a partir de la tabla.

La finalidad de este ítem es conseguir una presentación diferente al de la tabla utilizando para ello pares ordenados. (Ver figura 39).

Para este ítem se espera las siguientes respuestas:

A= {(1.00, 1.00); (1.10, 1.21); (1.30, 1.69); (1.60, 2.56); (2.20, 4.84); (2.60, 6.76); (4.10, 16.81)}

***Figura* 39:** Posible solución al ítem b – Pares ordenados obtenidos a partir de la tabla.

A continuación, el profesor formalizará el concepto de relación y función, a partir de pares ordenados, lo cual se buscaba aproximar con el ítem anterior, vale decir que la formalización que a continuación se presentará difiere en cierta medida con la formalización anteriormente presentada ya que para este caso la función es presentada como un conjunto de pares ordenados.

*Una **relación** es todo conjunto de pares ordenados (x; y) en donde cada elemento del primer componente está asociado con **al menos un elemento** del segundo componente.*

*Una **función** es un relación con la característica que cada primer componente está asociado con un **único valor** para la segunda componente, la consecuencia de esta condición permite afirmar que una **función es todo conjunto de pares ordenados** con la propiedad que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente, matemáticamente esta relación se puede simbolizar de la siguiente manera:*

Si $(x;y)\in f \wedge (x;z)\in f \rightarrow y=z$ *además cada par ordenado de la función podría ser denotado así* $(x;f(x))$

De acuerdo con Spivak (1967) el orden gradual de complejidad en la presentación del concepto de función es de suma importancia y es necesario tenerlo en cuenta.

El ítem de la “c” de la pregunta 7 concluye realizando con una pregunta fundamental para la situación, la cual es si los pares ordenados corresponden a una función (Ver figura 40).

> c) ¿Los pares ordenados obtenidos se corresponden con la definición de función? ¿Por qué?

***Figura* 40:** Ítem c – pregunta 5 – identificación de una función a partir de sus pares ordenados.

Para este ítem se espera que la respuesta sea como la que sigue: A partir de los pares ordenados obtenidos y dada la formalización de función anterior se puede afirmar que el conjunto formado por pares ordenados, si corresponde a una función, ya que este conjunto se caracterizan porque cada primera componente se encuentra asociada con una única segunda componente, además en el conjunto de pares ordenados mostrados no se encuentran dos pares ordenados distintos con la misma primera componente.

La pregunta 8 plantea expresar algebraicamente una fórmula que generalice los resultados obtenidos de la tabla anterior, para ello se presenta la mencionada tabla de resultados donde se podrá observar las diferentes longitudes para los lados del cuadrado y el valor de la medida del área que produce cada lado, de esta manera se podrá determinar las regularidades que guardan las magnitudes que intervienen y de esta manera conseguir una generalización a través de una expresión algebraica. La finalidad de esta pregunta es provocar un tratamiento dentro del registro algebraico a partir de las posibles regularidades que presenta la tabla y/o recurriendo a conocimientos geométricos que asocien componentes geométricos que participen en la obtención de una expresión general. De acuerdo a la teoría de Registros de Representación Semiótica esta actividad promovería realizar tratamientos dentro del registro algebraico, permitiendo de este modo conseguir uno de los objetivos que persigue la investigación que es la de realizar tratamientos dentro de la representación algebraica en torno al concepto de función. (Ver figura 41).

8. A partir de la tabla mostrada complete los ítems a y b.

a) Exprese algebraicamente una fórmula que generalice a la información de la tabla.

Representación Tabular	Representación algebraica
(see table below)	

Longitud del lado	Valor del área de la región cuadrada
1.00	
1.10	
1.30	
1.60	
2.20	
2.60	
4.10	

***Figura* 41:** Formulación de una expresión generalizada – pregunta 8.

Se espera que esta pregunta pueda ser desarrollada a partir de las regularidades que ofrecen los datos de la tabla o bien con conocimientos de geometría plana en torno a la temática de áreas de regiones cuadradas. Se espera que este trabajo permita utilizar expresiones que conduzcan a tratamientos dentro del registro algebraico que den como resultado una fórmula que generalice y exprese la medida del área de la región cuadrada en función de su lado. (Ver figura 42).

<table>
<tr><th>Representación tabular</th><th>Representación algebraica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Longitud del lado</th><th>Valor del área de la región cuadrada</th></tr>
<tr><td>1.00</td><td>1.00</td></tr>
<tr><td>1.10</td><td>1.21</td></tr>
<tr><td>1.30</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>1.60</td><td>2.56</td></tr>
<tr><td>2.20</td><td>4.84</td></tr>
<tr><td>3.50</td><td>6.76</td></tr>
<tr><td>4.10</td><td>16.81</td></tr>
</table>
</td><td>
A partir de la tabla se puede observar la siguiente regularidad
$(1.00)^2 \rightarrow 1.00$
$(1.10)^2 \rightarrow 1.21$
$(1.30)^2 \rightarrow 1.69$
$(4.00)^2 \rightarrow 16.81$
A partir de lo cual se puede deducir que:
$(l)^2 \rightarrow Área$
$f(l) = l^2$
</td></tr>
</table>

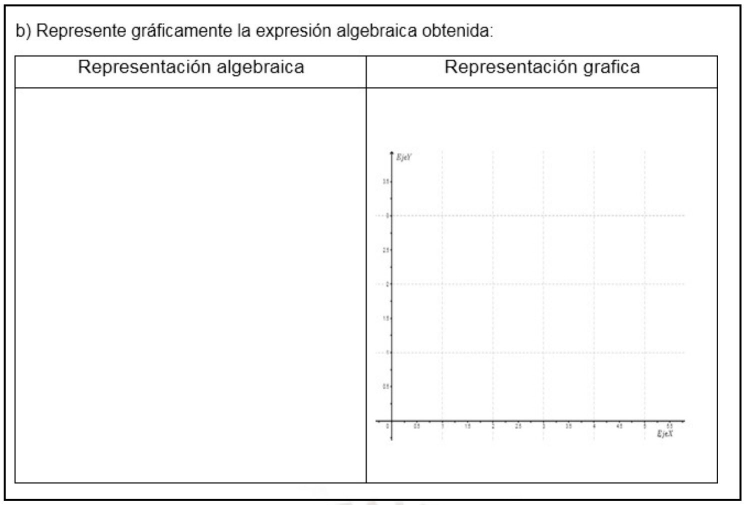
***Figura* 42:** Tratamiento en el registro algebraico – pregunta 8.

Obteniendo finalmente dos representaciones del mismo objeto matemático, las cuales permiten observar ciertas características particulares de la función.

<table>
<tr><th>Representación tabular</th><th>Representación algebraica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Longitud del lado (l)</th><th>Valor del área de la región cuadrada f(l)</th></tr>
<tr><td>1.00</td><td>1.00</td></tr>
<tr><td>1.10</td><td>1.21</td></tr>
<tr><td>1.30</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>1.60</td><td>2.56</td></tr>
<tr><td>2.20</td><td>4.84</td></tr>
<tr><td>3.50</td><td>6.76</td></tr>
<tr><td>4.10</td><td>16.81</td></tr>
</table>
</td><td>
$f_{(l)} = l^2$ y $0 \leq l \leq 5$
</td></tr>
</table>

Figura 43: Representación tabular y algebraica de una función.

El siguiente ítem “b” plantea representar gráficamente la expresión general obtenida en el ítem anterior, tal como se muestra en la figura 44. La finalidad de este ítem es provocar una conversión del registro algebraico al registro gráfico, buscando alcanzar de esta manera uno de los objetivos de esta investigación en torno a las transformaciones semióticas sobre el concepto de función, las cuales son las conversiones del registro algebraico al registro gráfico.


b) Represente gráficamente la expresión algebraica obtenida:

Representación algebraica	Representación grafica

Figura 44: Ítem b –Pregunta 8.

Para este ítem se espera una respuesta la cual permita utilizar la tabulación de los puntos para ir construyendo poco a poco a partir de ellos una curva para realizar finalmente un trazo continuo de la misma. Por otro lado, es posible también que el desarrollo de esta actividad se pueda dar utilizando el software GeoGebra, para ello se deberá ingresar en el comando inferior de la pantalla la expresión algebraica obtenida teniendo como resultado la representación gráfica. (Ver figura 45).

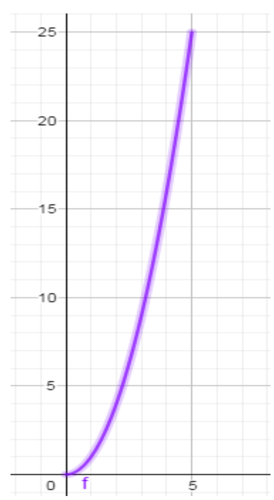
Representación algebraica	Representación grafica
$f_{(l)} = l^{2}$ y $0 \leq l \leq 5$	

Figura 45: Conversión del registro algebraico al registro gráfico – ítem b pregunta 8.

El siguiente ítem “c” plantea una interrogante sobre los puntos que se obtuvieron en la tabla y que fueron trasladados a la gráfica obtenida, cuestionando si los puntos tabulados fueron los únicos que se pudieron representar. Tal como se puede ver en la figura 46.

c) ¿Los puntos obtenidos en la tabla fueron los únicos que se pudieron representar en la gráfica? ¿Por qué?

***Figura* 46:** Ítem c – pregunta 8

La finalidad de este ítem es que permita asociar la idea dominio de una función y la continuidad de la misma ya que para este caso se deberá considerar los valores permitidos que puede tomar la variable independiente, así como determinar cuál deberá ser la naturaleza de estos valores que permitan una representación gráfica continua.

Se espera la siguiente respuesta: Los puntos que se encuentran en la tabla no fueron los únicos puntos que se pudieron considerar, existen aún muchos números más, es decir a medida que se tomen valores reales no negativos pertenecientes al intervalo dado, se podrán representar más puntos en la gráfica y esta tendrá la característica de ser continua, tal como se pudo observar en la representación gráfica anterior.

El ítem “d” plantea que condición debe darse para considerar un trazo continuo de la representación gráfica, tal como se muestra en la figura 47.

d) ¿Qué se debería considerar para poder realizar un trazo continuo en la gráfica dada?

***Figura* 47:** Ítem d – pregunta 8.

Para esta pregunta se espera una respuesta como la que sigue: Para realizar un trazo continuo de la gráfica se debe considerar valores reales no negativos comprendidos en el intervalo dado, de la variable independiente “l”, lo que traerá como consecuencia que la representación gráfica será continua.

El ítem “e” plantea la interrogante, ¿los puntos de la gráfica satisfacen la condición de función? (Ver figura 48).

e) ¿Los puntos de la representación gráfica satisfacen la condición de función?

***Figura 48*:** Ítem e – pregunta 8.

La finalidad de este ítem es por un lado reiterar la identificación de función, pero esta vez desde una representación gráfica que permita a través de un proceso de observación basado en las formalizaciones anteriores establecer un criterio que pueda reconocer una función en general a partir de su gráfica.

Para este ítem se espera una respuesta tal como se muestra: Los puntos que contiene la gráfica, si satisfacen la condición de función, ya que para cada valor de la abscisa se le asocia un único punto en la ordenada, y no se encuentra el caso que a una abscisa le corresponda dos o más valores de la ordenada.

El ítem “f” plantea adoptar un criterio que permita determinar para cualquier representación gráfica la posibilidad de ser o no una función. (Ver la figura 49).

f) ¿Cuál sería el criterio para determinar si una gráfica en general es o no función?

***Figura* 49:** Ítem f – pregunta 8.

La finalidad de este ítem es propiciar al uso de un criterio que permita determinar si una gráfica en general es o no una función, lo que conllevaría conocer o descubrir la técnica de la prueba de la recta vertical, la cual podría ser deducida a partir de la condición de una función. Este ítem permitiría realizar tratamientos dentro del registro grafico para determinar si una gráfica representa o no una función.

Se espera para este ítem una respuesta tal como se muestra: Si una gráfica es considerada una función debe cumplir dentro de su representación gráfica la condición de que cada abscisa debe estar asociada a una única ordenada.

A continuación, el profesor formalizará el criterio de la prueba de la recta vertical, a partir de representaciones gráficas en general, lo cual se buscaba aproximar con el ítem anterior.

Dada una gráfica en general se dirá que dicha grafica representa una función si y solo si al trazarse una recta vertical a la gráfica, está la corta solo en un punto, si la recta corta en más de un punto a la gráfica, se dirá que dicha grafica no representa una función.

De esta manera se formaliza el criterio de la prueba de la recta vertical para la identificación de una función dada una representación gráfica en general, esto con la finalidad de poder utilizar esta técnica posteriormente en situaciones donde se necesite probar si una representación es o no una función.

La técnica señalada permitirá de manera más sencilla reconocer si una gráfica en general es una función si la recta vertical corta a la gráfica en un punto o si se trata de una relación si dicha recta lo corta en más de un punto.

La pregunta 9 plantea conectar las representaciones obtenidas a partir de la función trabajada, y realizar algunas cuestiones en torno a ellas, la finalidad del ítem es vincular las tres representaciones que se han obtenido y establecer un nexo entre ellas mostrando que se trata de un mismo objeto matemático. (Ver figura 58).

9. Completa cada columna con la representación correspondiente, luego contesta adecuadamente a los ítems.

Representación Tabular	Representación algebraica	Representación grafica

Longitud del lado	Valor del área de la región cuadrada
1.00	
1.10	
1.30	
1.60	
2.20	
2.60	
4.10	

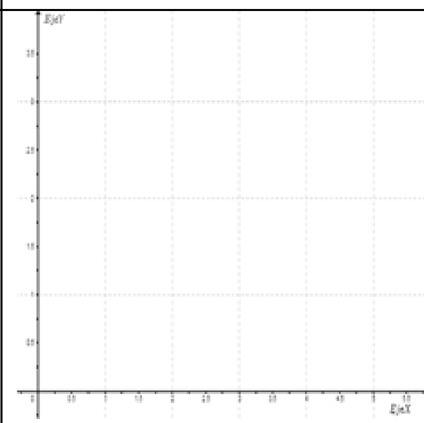


***Figura* 50:** Pregunta 7 – Completar las columnas con su representación respectiva.

Se espera una respuesta como se muestra en la figura 59.

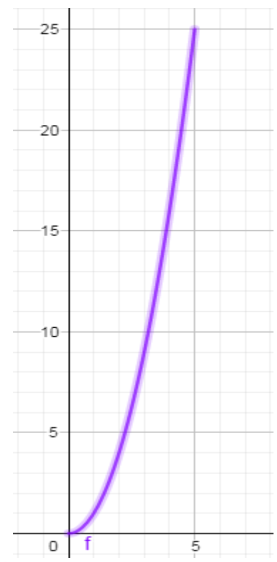
<table>
<tr><th>Representación tabular</th><th>Representación algebraica</th><th>Representación grafica</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>Longitud del lado</th><th>Valor del área del pentágono regular</th></tr>
<tr><td>1.00</td><td>1.00</td></tr>
<tr><td>1.10</td><td>1.21</td></tr>
<tr><td>1.30</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>1.60</td><td>2.56</td></tr>
<tr><td>2.20</td><td>4.84</td></tr>
<tr><td>3.50</td><td>6.76</td></tr>
<tr><td>4.00</td><td>16.81</td></tr>
</table>
</td>
<td>$f_{(l)} = l^2$ y
$0 \leq l \leq 5$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

***Figura* 51:** Representaciones del concepto de función.

A esta actividad se le añade algunas interrogantes que se muestran a continuación con el fin de promover una concientización sobre las representaciones obtenidas. (Ver figura 60).

a) ¿Te fue sencillo pasar de una representación a otra? ¿Por qué?

b) ¿Qué diferencias encuentras en las representaciones obtenidas?

***Figura* 52:** Ítems de la actividad 7.

Las preguntas planteadas exigen una respuesta personal, sin embargo, estas pueden ser monitoreadas e institucionalizadas por el docente. Teniendo como base que cada representación por sí misma brinda una información que es de por si limitada del objeto al cual representa sin embargo cada representación da a conocer ciertos aspectos o información que la otra representación no puede realizar.

Para la pregunta 10 se plantea poder expresar a través de una formula o algoritmo algunas relaciones que se mencionan en el siguiente cuadro tal como se muestra en la figura 61.

10. Expresa mediante una formula o algoritmo las siguientes relaciones:

La cantidad total de sangre que tiene una persona representa un treceavo del peso total de su cuerpo.	
El índice de masa corporal de una persona es el cociente entre el peso en kilogramos y la estatura al cuadrado en metros.	

***Figura* 53:** Pregunta 10 – Enunciados en lengua natural para ser convertidos a expresiones algebraicas.

La finalidad de esta pregunta es provocar una conversión del registro de lengua natural al registro algebraico buscando de este modo realizar una interpretación a partir de la lectura que se da a las relaciones mostradas en el cuadro. De esta manera se estaría consiguiendo alcanzar otro de los objetivos de la investigación la cual plantea realizar transformaciones semióticas del concepto de función, que para el presente caso sería llevar a cabo conversiones del registro de lengua natural al algebraico.

Se espera una respuesta como la que sigue: (Ver figura 54.)

La cantidad total de sangre que tiene una persona representa un treceavo del peso total de su cuerpo.	Sea x el peso de una persona, entonces S(x) representa la cantidad de sangre. $S(x) = \frac{1}{13}x$
El índice de masa corporal de una persona es el cociente entre el peso en kilogramos y la estatura al cuadrado en metros.	Sea p y t el peso y la talla de una persona, entonces I(p;t) representaría el índice de masa corporal. $I(p;t) = \frac{p}{t^2}$

***Figura* 54:** Conversión del registro de lengua natural al registro algebraico.

Análisis de la actividad 2

Profundizando el concepto de función

El análisis que se realizará en esta parte está enfocado en alcanzar el segundo objetivo específico trazado en la presente investigación para ello nos basaremos en la parte aplicativa del concepto de función, para ello presentaremos una serie de actividades que permitan formalizar el concepto de función y realizar tratamientos dentro de cada registro a partir de sus representaciones.

La primera actividad plantea reconocer algunas funciones a partir de sus representaciones gráficas, esta pregunta tiene una conexión importante con las actividades desarrolladas en la primera parte de profundización como por ejemplo el criterio de la recta vertical. (Ver figura 55).

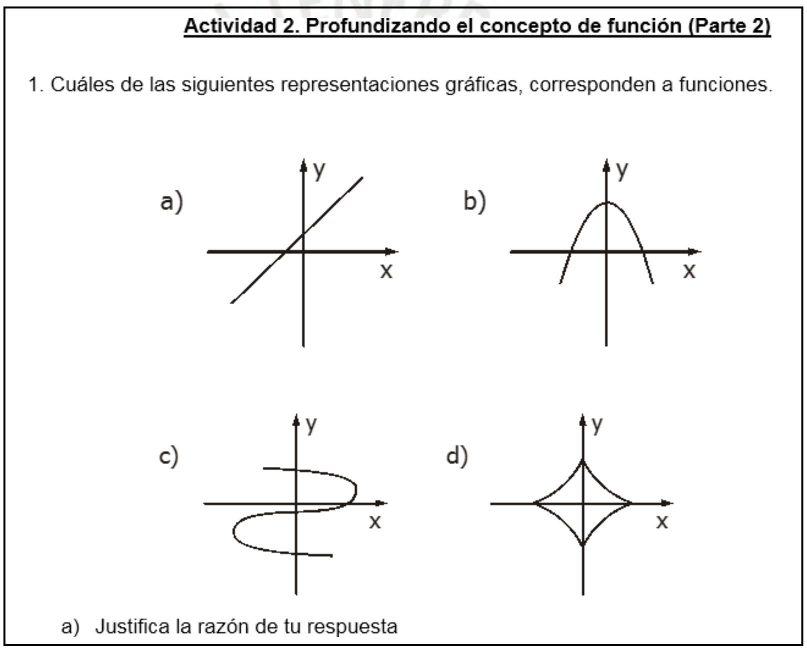


***Figura* 55:** Identificación de una función a partir de su representación gráfica - Pregunta 1 profundización.

La finalidad de esta pregunta es realizar tratamientos dentro del registro gráfico, para ello será necesario poder hacer uso de la prueba de la recta vertical como criterio general para determinar si un gráfico representa o no una función.

Para este ítem se espera una respuesta como sigue a continuación. (Ver figura 56).

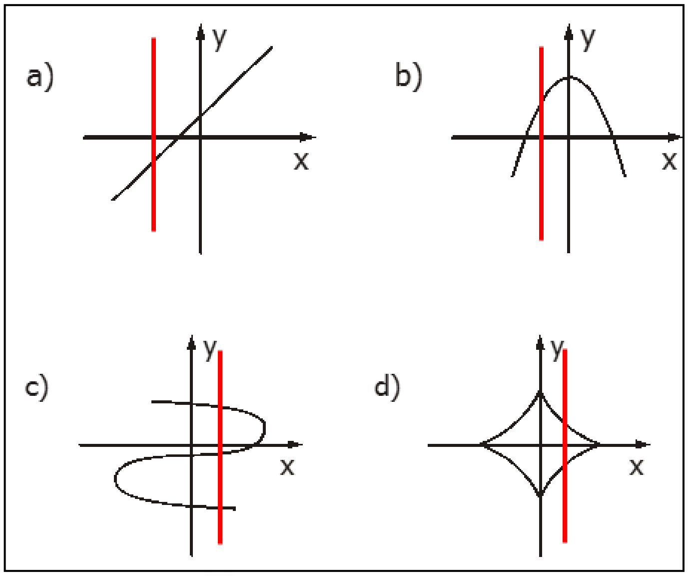


***Figura* 56:** Tratamiento en el registro grafico – pregunta 1 profundización.

Se espera para este ítem una respuesta como la que sigue: A partir de los gráficos mostrados se puede observar que las representaciones gráficas a y b si corresponden a unas funciones ya que al trazar una recta vertical estas, dichas gráficas se cortan solo en un punto sin embargo el caso c y d no corresponden a funciones ya que al trazar la recta vertical esta la corta en más de un punto.

La pregunta 2 plantea una interrogante de carácter cotidiano basado en la función principal que desempeña una lavadora, esta pregunta buscará enlazar la actividad que cumple una máquina en general con la manera de actuar que presenta regularmente una función. Ver figura 57.

2. Observa la siguiente imagen y responde a los siguientes items:

a. ¿Cuál es la función principal que desempeña una lavadora? Explique.

Figura 57: Funcionamiento de la lavadora – ítem a de la pregunta 2 de profundización.

Se espera una respuesta tal como sigue: la función principal que desempeña una lavadora es la de lavar ropa.

El ítem b de la pregunta 2 tiene la misma línea del ítem anterior, planteando una interrogante sobre lo que podría ocurrir cuando se introduce un polo sucio dentro de la lavadora, tal como se observa en la figura 58.

b. ¿Qué transformación realizaría la lavadora a un polo sucio que ingrese en ella, cuando esta se encuentra en funcionamiento? Explique.

Figura 58: Funcionamiento de la lavadora – ítem b de la pregunta 2 de profundización.

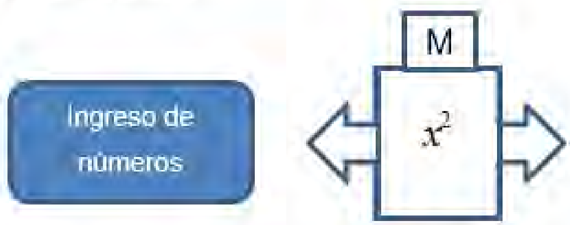
La finalidad de esta pregunta es de preparar una idea que tenga lugar a una comparación sutil, entre la función que cumple una lavadora común, que es la de ingresar prendas sucias, procesarlas y tener como salida prendas limpias, con el objeto función que tiene una característica similar cuando se presenta con una regla de correspondencia dada, así mismo este ítem dará lugar a realizar preguntas adicionales que permitan indagar sobre las características o condiciones que deben tener los elementos que ingresan a una maquina en funcionamiento, dando así indirectamente un paso a la comprensión de lo que significa el dominio de una función.

Se espera una respuesta tal como se muestra a continuación: si se coloca un polo sucio dentro de la lavadora en funcionamiento esta realizará su lavado respectivo y se obtendrá al finalizar el proceso un polo limpio.

Para la pregunta 3 se plantea analizar la transformación que realizan un par de máquinas A y B y la condición que deben cumplir los números que ingresan en ellas tal como se muestra en la imagen 59.

3. Las siguientes imágenes que se muestran a continuación, corresponden a máquinas las cuáles realizan transformaciones a los números que ingresan en ellas, tal como indica la operación de su portada.

Observe el siguiente ejemplo:



P1: ¿Qué característica o naturaleza deben tener los números que podrían ingresar a la maquina M? P2: ¿Cuál es la característica de los números que salen de la maquina M?

Respuesta 1: Se puede notar que los números que pueden ingresar a la maquina "M" corresponden a todos los números reales, ya que la operación potencia puede darse sin ningún tipo de restricción para ellos.

Respuesta 2: Para la salida de números se puede notar que los números que se eleven al cuadrado continuaran formando parte de los números reales, lo que significa que los números de la salida corresponden a todos los números reales.

***Figura* 59:** Transformaciones que realizan las maquinas – pregunta 3 de profundización.

Seguidamente se muestran algunos ítems que acompañan a la imagen mostrada las cuales buscan indagar sobre la naturaleza que deben cumplir los números que ingresan a estas máquinas. (Ver figura 60.)

a. ¿Qué condición debe cumplir los números que ingresan en la maquina A, para que esta pueda procesarlos de manera adecuada? ¿Cómo son los que salen?

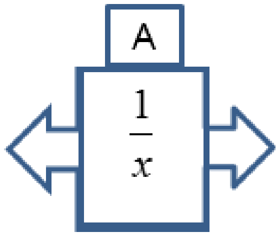


Figura 60: Condición que deben cumplir los números de la máquina A – ítem a – pregunta 3 de profundización.

La finalidad de este ítem es analizar la regla de transformación que tiene la máquina A en su portada y a partir de esta regla poder determinar la naturaleza que deben cumplir los números que ingresan en ella. Esta pregunta permitiría asociar la idea de dominio que se encuentra implícita en la regla que posee esta máquina.

Se espera la siguiente respuesta: la maquina A admitirá solo aquellos números los cuales al ser procesados permitan obtener resultados posibles y que tengan sentido. De acuerdo con esto la máquina A cuya transformación que realiza a los números es $\frac{1}{x}$ admitiría todos los números reales excepto el cero ya que la división por cero no está permitida o no tiene sentido realizarla. Por tanto, los valores para x se podrán escribir de la siguiente manera: $x \in R \wedge x \neq 0$. Así mismo los números que se obtendrán en la salida serán todos los números reales menos el cero.

El ítem b plantea una interrogante similar a la anterior y busca indagar sobre la naturaleza y condición que deben cumplir los números que ingresan a la maquina B, tal como se puede observar en la figura 61.

b. ¿Qué condición debe cumplir los números que ingresan en la maquina B, para que esta pueda procesarlos de manera adecuada? ¿Cómo son los que salen?

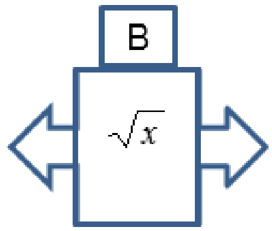


Figura 61: Condición que deben cumplir los números de la máquina B – pregunta 3 de profundización.

Se espera una respuesta como se muestra: la maquina B solo admitirá números los cuales permitan que al ser procesados permitan obtener resultados posibles y que tengan sentido. De acuerdo con esto la maquina B cuya transformación que realiza a los números es $\sqrt{x}$ admitiría a todos los números reales no negativos, es decir a todos aquellos que son mayores o iguales a cero, ya que la operación de radicación se define para cantidades positivas que incluyen al cero. Por tanto, los valores para x se podrían escribir de la siguiente manera: $x \in R \wedge x \geq 0$. Así mismo los números que se podrá encontrar en la salida corresponderían únicamente a todos los números reales no negativos.

A continuación, el profesor formalizará la interpretación sobre el concepto de función comprendido como una máquina, así como las características que este objeto posee las cuales son de dominio y rango, lo cual se buscaba aproximar con los ítems anteriores.

Una función *puede interpretarse como una máquina en la cual ingresan objetos de un conjunto A, se transforman para producir objetos de un conjunto B, cuando un objeto x es transformado por una máquina con una actuación "f", resulta al final del proceso el objeto f(x)*

Dominio de una función: *corresponde a todas las posibles entradas permitidas que puede tomar la variable x (variable independiente) que pueden ser evaluados por la regla que define a la maquina o función.*

Rango de una función: *corresponde a todas las salidas que puede tomar la variable f(x) (variable dependiente) que origina la maquina o función como consecuencia de evaluar las entradas permitidas.*

De esta manera se formaliza la interpretación de una función comprendida como una máquina, así como las características de dominio y rango que este objeto tiene, esto con la finalidad de poder amplificar la mirada que se tiene de este objeto y poder utilizar esta interpretación que en situaciones donde se necesite utilizar la presente idea.

La pregunta 4 plantea la situación de una maquina tragamonedas que tiene un funcionamiento particular de acuerdo a la información que anoto Miguel en la tabla. La pregunta solicita en su primer ítem sobre cuál es la transformación que produce la maquina al dinero que se ingresa, tal como se puede observar en la figura 62.

4. Se tiene la siguiente maquina tragamonedas la cual realiza ciertas entregas de dinero de acuerdo a la cantidad que en ella se deposite, Miguel tomo nota del dinero ingresado en cada momento a la máquina y escribió lo siguiente:

Dinero ingresado	Dinero recibido
1	2
3	6
4	8
6	12

a. ¿Qué transformación realiza la máquina al dinero ingresado?

***Figura* 62:** Situación de la maquina tragamonedas – ítem a de la pregunta 4 de profundización.

La finalidad de la pregunta 4 es indagar sobre la actuación o regla que sigue la maquina tragamonedas con el dinero que se ingresa en ella, para ello se espera que a partir de la información brindada en la tabla se pueda observar la regularidad que presentan los datos recogidos por Miguel y de esta manera establecer la regla que permita la transformación del dinero. Así mismo esta actividad promovería el uso de la representación tabular para presentar los datos recogidos por Miguel, además esta información permitirá también utilizar la representación algebraica la cual permitirá realizar una generalización de la transformación que produce la máquina.

Al observar la transformación que presenta el dinero ingresado se podrá verificar que cada monto ingresado a la maquina tragamonedas esta la duplica.

$$
\begin{array}{ll}
1 \xrightarrow{f(x)} 2 & \qquad 1 \xrightarrow{x2} 2 \\
3 \xrightarrow{f(x)} 6 & \qquad 3 \xrightarrow{x2} 6 \\
4 \xrightarrow{f(x)} 8 & \qquad 4 \xrightarrow{x2} 8 \\
6 \xrightarrow{f(x)} 12 & \qquad 6 \xrightarrow{x2} 12
\end{array}
$$

Se puede deducir que cada monto ingresado a la maquina tragamonedas se duplica al salir.

El ítem b plantea deducir una expresión algebraica que represente esta transformación, tal como se muestra en la figura 63.

b. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta transformación?

***Figura* 63:** Ítem b de la pregunta 4 de profundización.

Se espera la siguiente respuesta: después de observar las regularidades que presentan los datos se puede generalizar la situación a través de siguiente regla o transformación que sigue la maquina $f(x) = 2x$ donde x representa el dinero ingresado.

El ítem c plantea utilizar la expresión algebraica obtenida en el ítem anterior para evaluarla en lo que se pide, tal como se observa en la figura 64.

c. Si Miguel ingresa 10 soles ¿cuánto dinero saldrá de la máquina?

***Figura* 64:** Ítem c de la pregunta 4 de profundización.

La finalidad de este ítem es realizar tratamientos dentro del registro algebraico que permitan evaluar la expresión para un caso particular.

Se espera una respuesta como la que sigue: a partir de la regla que sigue la maquina tragamonedas la cual es: $f(x) = 2x$ se puede evaluar para el caso particular de ingresar 10 soles a la maquina por lo que se tendría: $f(10) = 2(10)$ obteniendo finalmente $f(10) = 20$ dando como respuesta: Si Miguel ingresa 10 soles a la maquina tragamonedas entonces este obtendrá 20 soles.

El siguiente ítem d, plantea determinar el dominio y rango de la función anterior, para ello se deberá observar las entradas y salidas que tuvo anotas Miguel en su cuadro inicial. (Ver figura 65).

> d. ¿Cuál es el dominio y rango de la función anterior?

***Figura* 65:** Ítem d de la pregunta 4 de profundización.

Se espera que este ítem pueda ser resuelto de la siguiente manera: sabemos que el dominio estará conformado por todas las entradas de dinero que tuvo la máquina, es decir el dominio: Df = {1; 3; 4; 6} y el rango lo conforman las salidas de dinero que tuvo la máquina, es decir: Rf= {2; 6; 8; 12}

La pregunta 5 plantea determinar el dominio y rango a partir de un conjunto de pares ordenados, teniendo como condición que el mencionado conjunto representa una función, se plantea por tanto realizar un tratamiento algebraico aplicando la condición de función y a partir de esa condición determinar el dominio de la función, tal como se muestra en la figura 66.

> 5. Si G representa una función calcule el dominio y rango de G y los valores de a y b.
>   Si: G = {(2; 6), (1; a-b), (1; 4), (2; a+b), (3; 4}

***Figura* 66:** Determinación del dominio y rango de una función – pregunta 5 de profundización.

Se espera que esta pregunta pueda ser resulta recurriendo a conocimientos anteriormente formalizados en especial la concepción de función como un conjunto de pares ordenados, se espera además que este ítem permita reconocer las características del dominio y rango con las ideas antes desarrolladas. Esta actividad promueve además el uso de pares ordenados y el tratamiento algebraico que da al momento de simplificar y resolver los sistemas de ecuaciones que surgirán en el proceso.

Se espera una solución como la que se muestra a continuación:

Si: G = {(2; 6), (1; a-b), (1; 4), (2; a+b), (3; 4}

6 = a+b ∧ a-b = 4

Resolviendo el sistema:

a = 5 ∧ b =1

Por lo que el conjunto quedaría:

G = {(2; 6), (1; 4), (1; 4), (2; 6), (3; 4}

G = {(2; 6), (1; 4), (3; 4}

Quedando como dominio el siguiente conjunto:

DomG = {2; 1; 3} y RanG = {6; 4}

A continuación, el profesor formalizará las características del dominio y rango de una función a partir de su representación como pares ordenados lo cual se buscaba aproximar con el ítem anterior.

Dominio de una función: *corresponden a todas las* ***primeras componentes*** *de los pares ordenados que forman parte de la función.*

Rango de una función: *corresponden a todas las* ***segundas componentes*** *de los pares ordenados que forman parte de la función*

Para la pregunta 6 se presenta una regla de correspondencia de una función junto a un conjunto de ítems que tienen relación con la mencionada regla. (Ver figura 67).

6. Dada la función definida por: $f(x) = x + 2$, $x \in [0,4]$

a) Realice la proyección ortogonal de la representación gráfica de la función f sobre el eje x, Explique cuál es el procedimiento que siguió e indique el nombre que recibe la proyección que se obtiene.

***Figura* 67:** Función dada su regla de correspondencia – ítem a de la pregunta 6 de profundización.

Se espera que el ítem “a” permita realizar una conversión del registro algebraico al registro gráfico y que este proceso permita identificar de acuerdo al procedimiento, solicitado la proyección ortogonal de la representación gráfica de la función sobre el eje x.

Se espera una respuesta como la que sigue:

Se busca organizar algunos valores en la tabla que permitan observar posteriormente el comportamiento que tendrá la representación gráfica. (Ver figura 68 y 69).

$x \in [0,4]$	$f(x) = x + 2$
0	2
1	3
2	4
4	6

***Figura* 68:** Organización de algunos valores – pregunta 6 de profundización.

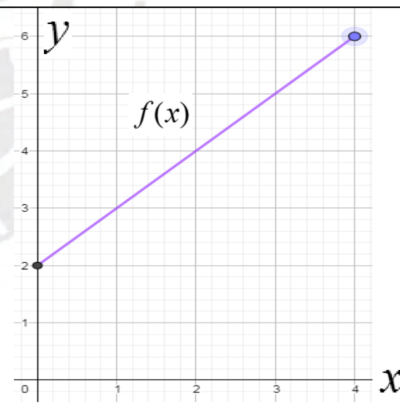
Representación algebraica	Representación gráfica
$f(x) = x + 2$, $x \in [0,4]y$	

***Figura* 69:** Representación algebraica y grafica de la función obtenida - pregunta 6 de profundización.

Se espera que se responda de la siguiente manera: la proyección ortogonal sobre el eje x se obtiene trazando segmentos perpendiculares a partir de los puntos extremos de la gráfica de la función sobre el eje x, además esta proyección ortogonal corresponde a los valores de x que definen a la función, por tanto, esta proyección se llama dominio de la función.

Para el ítem b se plantea la interrogante que busca justificar la relación que tiene la proyección ortogonal con la función f. (Ver figura 70).

b) ¿Cómo se relaciona la proyección ortogonal que se obtuvo en la parte “a” con la función f? Explique.

***Figura* 70:** Relación entre la proyección de la gráfica sobre el eje x con la función f – ítem b la pregunta 6 de profundización.

Para este ítem se espera que se responda que la relación que tiene la proyección con la función f es que la proyección permite definir la función.

Para el ítem “c” pregunta se plantea que se explique cuál es el procedimiento que se siguió para conseguir la proyección de la representación gráfica sobre el eje y. (Ver figura 71.)

c) Realice la proyección ortogonal la representación gráfica de f sobre el eje y. Explique cuál fue su procedimiento que siguió e indique el nombre que recibe la proyección que se obtuvo.

***Figura* 71:** Ítem c de la pregunta 6 de la parte de profundización.

Para esta pregunta se espera que la proyección de la representación gráfica sobre el eje y se obtiene trazando segmentos perpendiculares sobre al eje y a partir de los puntos extremos de la gráfica de la función f. el nombre que corresponde a esta proyección es el de rango de la función f.

Para el ítem d se plantea una interrogante que busca indagar sobre la relación que tiene esta proyección con la función f. (Ver figura 72).

d) ¿Cómo se relaciona la proyección ortogonal obtenida en la parte “c” con la función f? Explique.

***Figura* 72:** Relación entre la proyección de la gráfica sobre el eje y con la función f – ítem d pregunta 6 de profundización.

Se espera una respuesta como la que sigue: la relación que guarda la proyección de la representación gráfica de la función f sobre el eje “y” es que esta proyección corresponde a los valores de salida o los que procesa la función por tanto recibe el nombre de rango de la función f.

A continuación, el profesor formalizará las características del dominio y rango de una función a partir de su representación gráfica lo cual se buscaba aproximar con el ítem anterior.

Dada una representación gráfica de una ***función*** *f, se afirma:*

Dominio de una función*: Corresponde a la proyección de la representación gráfica sobre el eje x.*

Rango de una función*: Corresponde a la proyección de la representación gráfica sobre el eje y.*

La pregunta 7 plantea una representación gráfica a partir del cual se debe determinar el dominio y rango de una función para lo cual se debe utilizar la formalización anterior así como la nomenclatura de intervalos para delimitar la información que da el grafico en relación a sus proyecciones sobre los ejes coordenados. La finalidad de este ítem es provocar una conversión del registro grafico al registro algebraico para esto será necesario tener en cuenta el reflejo que proyecta la representación gráfica. (Ver figura 73).

7. Determina el dominio y rango de la siguiente función f a partir de la representación gráfica mostrada.

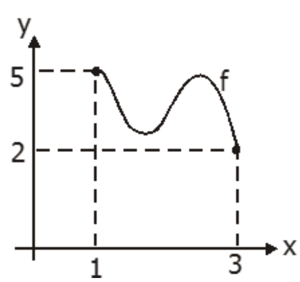


***Figura* 73:** Determinación del dominio y rango a partir de una representación gráfica de una función.

Para este ítem se espera que se observe la proyección que produce la representación gráfica de la función f sobre el eje “x” y que esta proyección permita encontrar el intervalo que se encuentra asociado, una respuesta que se espera podría ser la siguiente:

El Domf = [1; 3] y Ranf = [2; 5] logrando de este modo una conversión del registro grafico al registro algebraico.

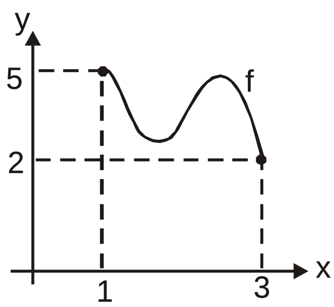
Representación gráfica	Representación algebraica
	$Df = [1;3]$ y $Rf = [5;2]$

***Figura* 74:** Conversión del registro grafico al registro algebraico – pregunta 7 de profundización.

La pregunta 8 plantea una expresión analítica para la función seguida de una condición para los posibles valores de “x” ante lo cual se solicita el cálculo de su dominio y rango.

El ítem tiene por finalidad realizar tratamientos en el registro algebraico que permitan obtener el rango a partir de la condición de valores admisibles para la variable “x” (Ver figura 75).

8. Determina el dominio y rango de la siguiente función: $f(x) = 2x + 4, \forall x \in [-6;5]$

***Figura* 75:** Determinación del dominio y rango de una función dada su regla de correspondencia – pregunta 8 de la parte II de profundización.

Una posible respuesta esperada seria como la que se muestra:

$$f(x) = 2x + 4, \forall x \in [-6;5]$$
$$-6 \leq x \leq 5$$
$$-12 \leq 2x \leq 10$$
$$-12 + 4 \leq 2x + 4 \leq 10 + 4$$
$$-8 \leq 2x + 4 \leq 14$$
$$-8 \leq f(x) \leq 14$$

Para lo cual se concluye que el Domf =[-6; 5] y Ranf =[-8; 14]

El ítem “a” de la pregunta plantea recurrir al software GeoGebra y trabajar la función anterior analizando una posible alternativa de solución diferente a la mostrada anteriormente. (Ver figura 76).

a) Abra el siguiente enlacehttps://www.geogebra.org/m/uqjk4472

a.1 En la casilla “**función concepto”** digite la regla de correspondencia de la función f: $2x+4$ luego arrastre el deslizador. $\boxed{a=2}$

a.2. Observe lo que sucede con el cuadro de valores para su función

a.3. Utilice la animación y observe lo que sucede con la representación gráfica que se forma.

a.4. ¿Cuál es el valor de la expresión $F=f(1)+f(-4)+f(5)+f(0)$

***Figura* 76:** Aplicación del Software GeoGebra para solucionar la pregunta – ítem a de la pregunta 8 de profundización.

Al ingresar al enlace de GeoGebra se abrirá la siguiente ventana tal como se muestra en la figura 77.

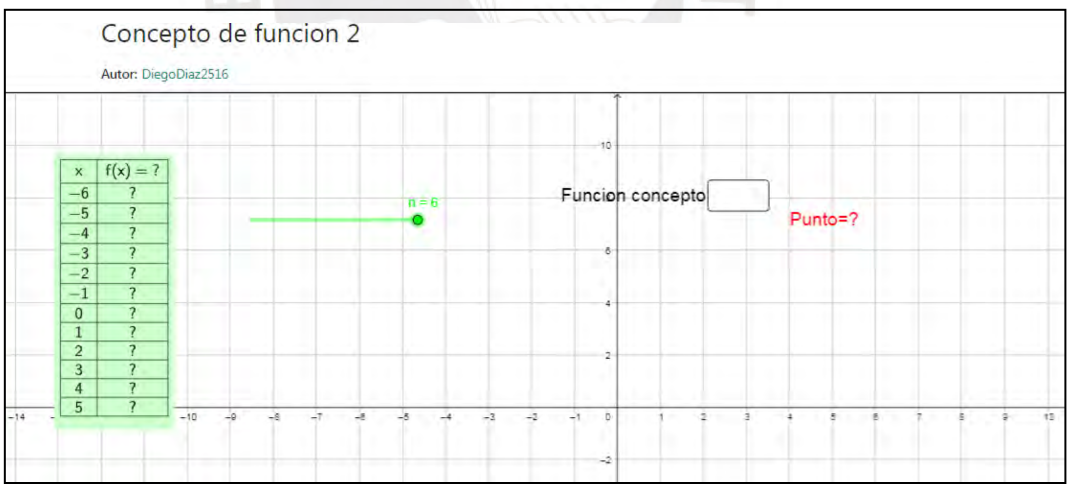


***Figura* 77:** Ventana del GeoGebra para resolver el ejercicio – ítem a pregunta 8 de profundización.

La ventana muestra una tabla de valores, un deslizador con un dominio programado de acuerdo al intervalo anteriormente planteado, una celda donde se podrá digitar arbitrariamente cualquier función particularmente allí se digitará la expresión planteada, así mismo se activa un punto de color rojo que servirá para señalar alguna coordenada de la gráfica analizada.

La finalidad de este ítem es trabajar haciendo uso de la tecnología, y poder visualizar de manera dinámica los puntos, dominio, rango y grafica que se forma al momento de digitar la función y utilizar el deslizador o animación propia del software, para representar la función planteada.

Para el ítem “a” se espera que se pueda digitar la función y observar que luego de utilizar el deslizador se generan ciertos puntos los cuales no son continuos uno de otro, sin embargo, con la ayuda del botón de animación permitirá visualizar una continuidad los puntos de la gráfica de la función, una respuesta como muestra la figura 78.

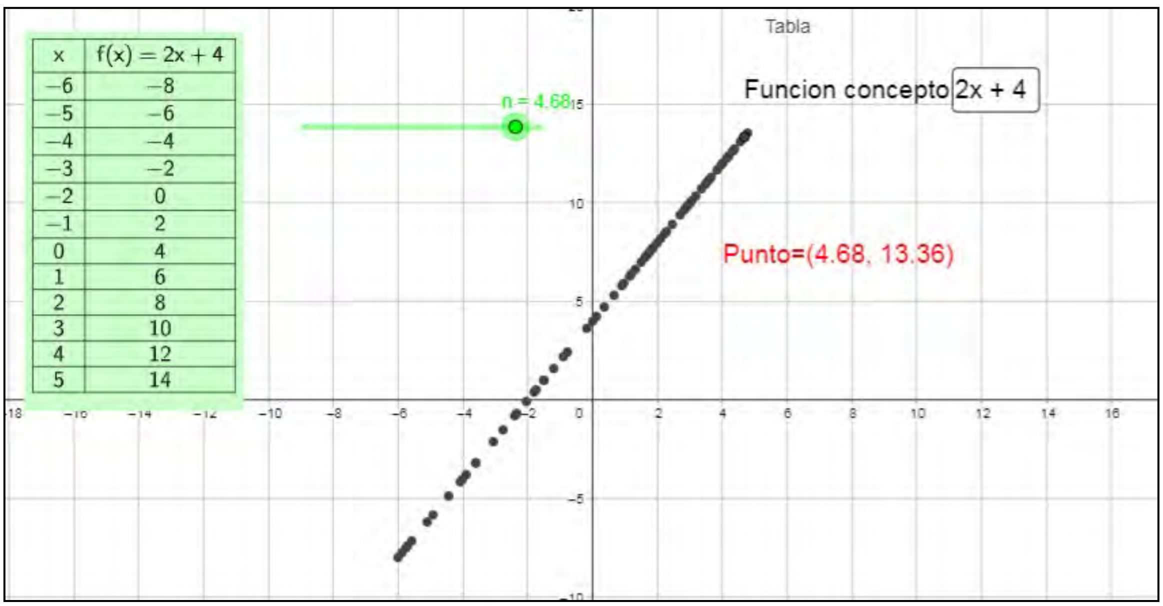


***Figura* 78:** Deslizando valores para la variable “x” GeoGebra – ítem a de la pregunta 8 de profundización

Al utilizar dar clic al botón de animación se visualizará un comportamiento continuo para la función tal como se muestra en la figura 79.

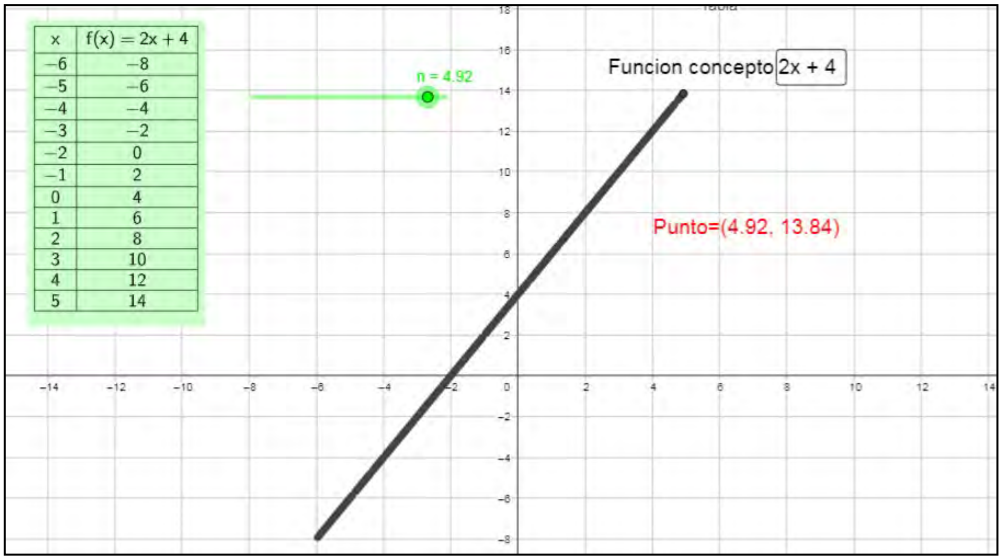


***Figura* 79:** Animación del trazo continuo para los puntos de la representación gráfica – ítem a de la pregunta 8 de profundización.

Con esta actividad se intenta mostrar que la tecnología permita observar de una manera dinámica los procesos que ocurren al momento de representar gráficamente una función, consideramos importante este punto ya que se presenta una alternativa visual la cual permite mostrar al registro, gráfico y algebraico actuando conjuntamente en la construcción de las transformaciones semióticas de la función mostrada. Finalmente, con la ayuda de la tabla formada en el software se puede dar respuesta a la pregunta planteada para esto se espera una respuesta como la que sigue:

$$F = f(1) + f(-4) + f(5) + f(0)$$
$$F = 6 + (-4) + 14 + 4$$
$$F = 2 + 18$$
$$F = 20$$

El ítem “b” plantea la siguiente interrogante. (Ver figura 80).

b) ¿Se puede determinar el dominio y rango de la función antes mencionada con solo observar su grafica? En caso afirmativo diga cuál es el dominio y rango solicitado.

***Figura* 80:** Ítem b de la pregunta 8 de profundización.

La finalidad de esta pregunta es realizar una conversión del registro gráfico, al registro algebraico a través del uso de una nomenclatura por intervalos, de esta forma se podrá reconocer que a partir de una representación gráfica de una función se puede determinar su dominio y rango con tan solo la proyección que produce la gráfica sobre los ejes coordenados x e y.

La respuesta que se espera para este ítem, es la que se muestra a continuación: Domf = [-4; 5] y Ranf = [-8; 14], se debe advertir adicionalmente que esta pregunta podría desarrollarse con tan solo evaluar los extremos del dominio en la función para poder encontrar los límites del rango, ya que la función que se analiza es una función lineal.

La pregunta 9 plantea representar algebraicamente la representación gráfica mostrada tal como se muestra en la figura 81.

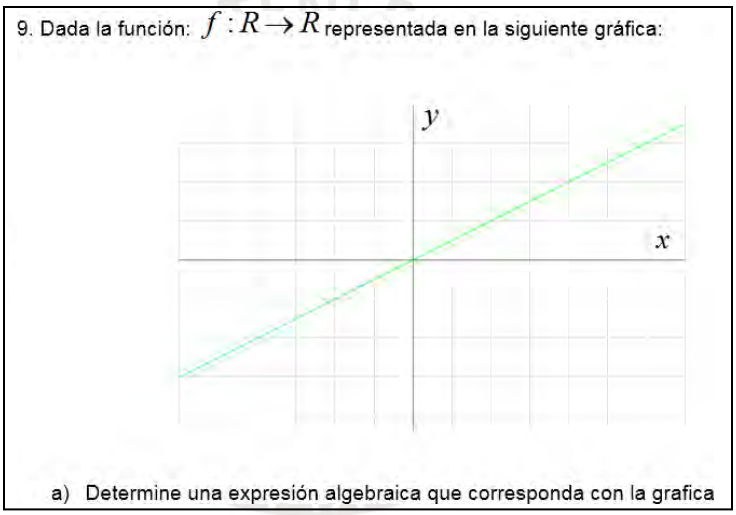


***Figura* 81:** Determinación de una expresión algebraica que corresponda con la gráfica – ítem a pregunta 9 de profundización.

La finalidad de la pregunta 9 es realizar una conversión del registro grafico al registro algebraico esta transformación implica observar regularidades que se encuentran en la gráfica y a partir de ella plantear una expresión que la represente.

Una posible solución es la que se muestra a continuación:

Tomando ciertas coordenadas a partir de la información a través de la representación de pares ordenados de la función dada, tenemos:

(-4;-2) (-2; -1) (2; 1) (4; 2) a partir de estas coordenadas se puede observar una regularidad particular que el valor de la abscisa es dos veces el valor de la ordenada.

Es decir: dado: (x; f (x)) se cumple: x = 2 f(x)

Tenemos los puntos (0; 0) y (2; 1) ambos pertenecen a la gráfica entonces a partir de

$$\frac{x}{2} = f(x)$$

Otra manera de obtener la expresión algebraica a partir de la gráfica es observando que por cada cuadricula que se avanza en x, se sube media cuadricula en y, con lo cual se puede deducir que $\frac{x}{2} = f(x)$

El ítem “b” plantea identificar cuáles de las coordenadas mostradas pertenecen a la función. (Ver figura 82).

b) ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados son elementos de la función dada?

{(0;1) ; (1;1/2) ; (1;5) ; (2;2) ; (4;2) ; (5,4) }

***Figura* 82:** Ítem b de pregunta 9 de profundización.

La finalidad de esta pregunta es por un lado corroborar cada par ordenado presentado a través de la regla de correspondencia obtenida, que bien podría ser una manera adecuada o por otro lado corroborarlos a través de una inspección a la gráfica, en ambos casos se manifiesta una intención de comprobar la información dado en la representación de pares ordenados y contrastarlo con la información dada en el registro ya sea este algebraico o gráfico.

Una posible solución sería probar cada par ordenado tal como se muestra:

$$\frac{x}{2} = f(x)$$

Para (0; 1) se tendría 0 = 2(1) no cumple.

Para (1; 1/2) se tendría 1 = 2(1/2) si cumple.

Para (1; 5) se tendría 1= 2(5) no cumple.

Para (2; 2) se tendría 2 = 2(2) no cumple.

Para (4; 2) se tendría 4 = 2(2) si cumple.

Para (5; 4) se tendría 5 = 2(4) no cumple.

La pregunta 10 plantea identificar el dominio y rango de una función en una de las cuatro gráficas que se presentan a partir de su expresión analítica que implica una notación algebraica y el uso de desigualdades seguidamente. La finalidad de esta pregunta es realizar una conversión que vaya del registro algebraico al registro gráfico, tomando como criterio la proyección que tiene la gráfica sobre los ejes coordenados. (Ver figura 83).

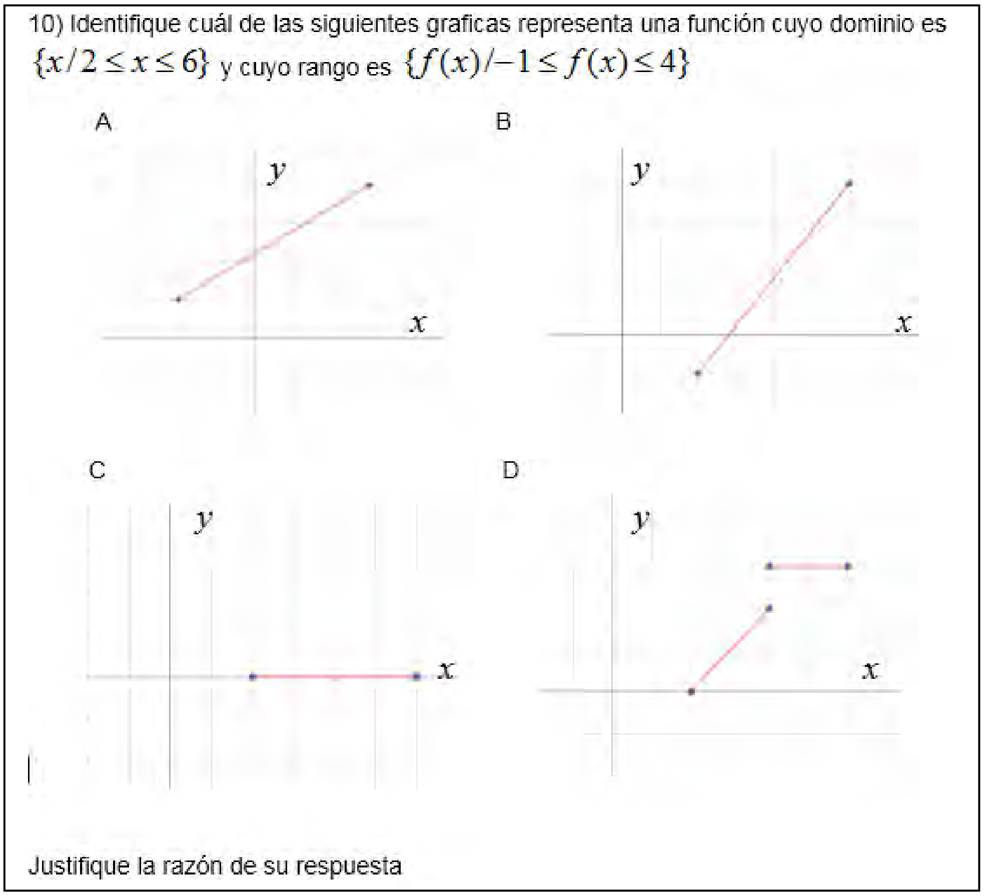


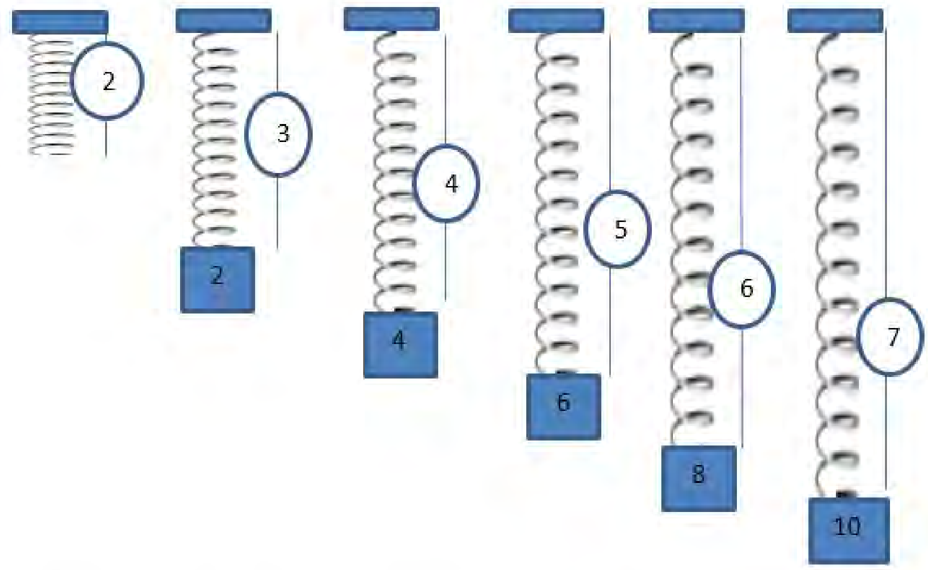
***Figura* 83:** Actividad de conversión del registro algebraico al registro gráfico. Pregunta 10 de profundización.

Se espera una respuesta como la que sigue:

A partir de la expresión algebraica cuyo dominio es: $\{x/2 \leq x \leq 6\}$ y cuyo rango es $\{f(x)/-1 \leq f(x) \leq 4\}$ y observando las gráficas planteadas se tomará aquella que reúna las condiciones del dominio en la proyección del eje "x" y como rango la proyección de la gráfica sobre el eje "y", ante lo cual se tomará como alternativa de solución la gráfica correspondiente a la letra b, la cual reúne las condiciones antes mencionadas del dominio y rango dados para esta pregunta planteada.

La siguiente pregunta 11 plantea una situación de resortes los cuales se presentan en la imagen donde se puede observar las longitudes que estos adoptan a medida que se colocan ciertos pesos tal como se puede ver en la imagen 84.

11. La siguiente figura muestra las diferentes longitudes que adopta un resorte medido en centímetros, a medida que sostiene bloques de diferente masa en gramos:



a) Determine la función que modele la situación anterior

***Figura* 84:** Actividad de conversión del registro algebraico al registro gráfico – pregunta 11 de profundización.

La pregunta 11, tiene por finalidad utilizar los conocimientos trabajados para sobre el concepto de función para poder modelar la situación presentada. Además esta situación permitiría realizar una representación tabular a partir de la imagen mostrada y luego modelar la situación a través del registro algebraico.

Una posible solución podría ser la siguiente:

Observando la imagen de los resortes junto a los bloques se puede denotar de la siguiente manera: (Ver figura 85).

Longitud del resorte (cm)	2	3	4	5	6	7
Masa del bloque (kg)	0	2	4	6	8	10

***Figura* 85:** Representación tabular de los datos – pregunta 11 de profundización.

Además de esta representación tabular se podría establecer que la longitud del resorte dependerá de la masa del bloque, de aquí que se pueda pasar a una representación funcional tal como se muestra:

La función se puede denotar de la siguiente manera mostrando de esta manera la relación que se establece entre la longitud del resorte y el peso del bloque.

$$(0) = 2$$
$$(2) = 3$$
$$(4) = 4$$
$$(6) = 5$$
$$(8) = 6$$
$$(10) = 7$$

A partir de este paso, se deberá observar las regularidades que guardan los elementos de la variable independiente con la variable dependiente, en ese sentido se puede notar que la variable independiente tiene la forma: 2n

De esta manera se puede reescribir la siguiente relación funcional de la siguiente manera:

$$(2(0)) = 2$$
$$(2(1)) = 3$$
$$(2(2)) = 4$$
$$(2(3)) = 5$$
$$(2(4)) = 6$$
$$(2(5)) = 7$$

Analizando los valores que conforman la función se puede notar lo siguiente: que si se pudiera simplificar el factor 2 de la variable independiente dividiendo por 2, quedaría un número tal que al sumarle 2 se podrá obtener el resultado señalado. El proceso de generalización seguiría de tal manera que se podrá obtener lo siguiente:

$$f\left(\frac{2(0)}{2}\right) = 2$$
$$f\left(\frac{2(1)}{2}\right) = 3$$
$$f\left(\frac{2(2)}{2}\right) = 4$$
$$f\left(\frac{2(3)}{2}\right) = 5$$
$$f\left(\frac{2(4)}{2}\right) = 6$$
$$f\left(\frac{2(5)}{2}\right) = 7$$

Observando la siguiente regularidad:

$f(0) = 2$	$0 + 2 = 2$
$f(1) = 3$	$1 + 2 = 3$
$f(2) = 4$	$2 + 2 = 4$
$f(3) = 5$	$3 + 2 = 5$
$f(4) = 6$	$4 + 2 = 6$
$f(5) = 7$	$5 + 2 = 7$

De lo que se deduce que cada valor de la variable dependiente se obtiene sumando 2 unidades a la variable dependiente.

De lo cual se puede generalizar la siguiente regla de correspondencia para la función f: (Ver figura 86).

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2$$

<table>
<tr><th>Representación tabular</th><th>Representación algebraica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Masa</th><th>longitud</th></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>6</td></tr>
<tr><td>10</td><td>7</td></tr>
</table>
</td><td>$f(x) = \frac{x}{2} + 2$</td></tr>
</table>

***Figura* 86:** Representación tabular y algebraica de una función – ítem a de la pregunta 11 de profundización.

El siguiente ítem b plantea realizar una conversión del registro algebraico al registro gráfico tal como se muestra en la imagen 87 y 88.

b) A partir de la representación obtenida realice su representación gráfica:

***Figura* 87:** Actividad de conversión del registro algebraico al registro grafico – ítem b de la pregunta 11

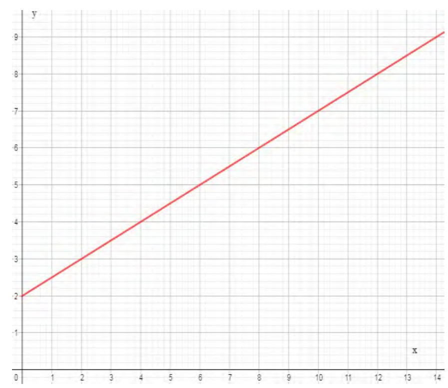
Representación algebraica	Representación gráfica
$$f(x)=\frac{x}{2}+2$$	

***Figura* 88:** Conversión del registro algebraico al registro grafico – ítem b de la pregunta 11 de la parte II de profundización.

Se espera que la actividad de profundización pueda cerrar a través de un formulario de Google y con un juego a través de la plataforma kahoot con la cual se buscara medir cuanto se aprendió durante la sesión, para eso se compartirá un link que se encontrara dentro de Classroom, con lo que abrirá una ventana tal como se muestra en la imagen 89.https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdWJMNqosRgk5tjw_hObCu6Yt36NFR1ElpFrUOrf6BeNCqFnw/viewform y https://play.kahoot.it/v2/?quizId=849ffa80-bee0-42aa-a5f4-ada716c2e039

Figura 89: ¿Cuánto sabes del concepto de función – Kahoot?

La plataforma kahoot permitirá de una manera lúdica corroborar algunas preguntas sobre la temática abordada además se fomentará la participación de todo un grupo, este recurso será de utilidad ya que generará al finalizar la actividad un Excel donde se podrá observar los aciertos y desaciertos que tuvo cada estudiante que pudo participar en la actividad.

CONCLUSIONES

La presente investigación buscó analizar el concepto de función y la problemática que se suscita actualmente en referencia a su enseñanza y aprendizaje, a partir de este análisis, se llevó a cabo una propuesta didáctica que buscó reunir y tener en consideración las alternativas de solución que se recogieron de diversas investigaciones de referencia y de las pautas de varios investigadores teóricos, que con sus aportes, permitieron dar un panorama más claro para presentar nuestra propuesta la cual se basó en dos actividades las cuales estuvieron conformadas por algunas preguntas e ítems a partir de los cuales se buscó promover el uso de trasformaciones semióticas en torno al concepto de función.

Así pues de acuerdo a los antecedentes e investigaciones de referencia así como de los documentos oficiales y artículos científicos consideramos que la presente investigación tuvo una pertinencia y relevancia importante fundamentada en razones de tipo académica las cuales señalaron y reportaron la problemática de la enseñanza del concepto de función y por razones profesionales las cuales reportaron la importancia de este contenido.

Con respecto a la metodología cualitativa seguida, podemos afirmar que esta nos permitió realizar una organización general del recorrido de nuestro trabajo, la cual estuvo fundamentada en 5 fases las cuales permitieron no perder de vista cada uno de los puntos relevantes de nuestra investigación.

Con respecto al marco teórico seguido, el cual fue la teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval (1995), podemos afirmar que esta permitió dar luces a nuestro trabajo ya que la importancia que tiene su teoría la cual se fundamenta en los procesos de representación que tiene un sujeto al momento de trabajar con los objetos matemáticos así como el de las trasformaciones semióticas que se suscitan en el proceso, fueron de notable y vital importancia para nuestras actividades matemáticas, ya que bien afirma Duval que no se puede realizar una actividad matemática sin una actividad de representación. Por otro lado esta teoría permitió que nuestra propuesta se fundamente no solo en actividades articuladas, sino también en mostrar pasajes en donde las conversiones que se llevan a cabo, se presentan de manera consciente lo cual permitiría potencialmente a los sujetos que las desarrollen momentos de reflexión sobre la importancia de los tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas las cuales son utilizadas al momento de resolver un problema de funciones.

Dentro de nuestra investigación nos propusimos responder la siguiente pregunta de investigación: ***¿Una propuesta didáctica, en un ambiente virtual, sobre el concepto de función podría promover el uso de las transformaciones semióticas?*** La cual buscamos responder a través de nuestro objetivo general el cual se planteó: ***Analizar cómo una propuesta didáctica en un ambiente virtual sobre el concepto de función podría promover el uso de las transformaciones semióticas.*** Este objetivo general a su vez dependía de responder nuestros objetivos específicos trazados los cuales pasaremos a detallar a continuación:

Primer objetivo específico:

Nuestro primero objetivo específico, consistió en ***Analizar en las actividades de la propuesta didáctica dentro de un ambiente virtual, las posibles conversiones en los registros de lengua natural, algebraico y gráfico.*** Consideramos que se alcanzó este primer objetivo específico porque dentro de la propuesta planteamos actividades que promovieron y plantearon la necesidad de realizar el tránsito de un representación a otra, ya es el caso de la pregunta 6 y 8 correspondiente a la primera sesión, en la cual se solicitó realizar una conversión del registro algebraico al registro gráfico a partir del análisis de una situación geométrica la cual consistió en observar las regularidades que presenta la medida del área de la región de la región cuadrada, por otro lado se resalta que esta actividad guarda una conexión gradual en su complejidad y no tiende a situar preguntas aisladas sino que se basa en una pregunta que contiene otras interrogantes que permiten transitar por distintas representaciones del objeto matemático función. En sintonía con lo anterior la pregunta 9 de la primera sesión muestra un panorama de tres representaciones del mismo objeto matemático, entre ellas destacamos la representación algebraica y gráfica, cabe resaltar que esta pregunta se detiene en la toma de conciencia y reflexión, que conlleva trabajar con una variedad de representaciones, y no obvia estos detalles los cuales son importantes al momento de desarrollar actividades con este objeto matemático. La pregunta 10 de la primera sesión planteo llevar a cabo una conversión del registro de lengua natural al registro algebraico, a partir de situaciones cotidianas y físicas lo que provoca además una actividad en la que se puede modelar a partir del uso de variables situaciones del mundo real. Asimismo, en la pregunta 9 de la sesión de profundización se planteó realizar una conversión del registro grafico al registro algebraico, se observaron regularidades que presenta la representación gráfica para luego poder formular algebraicamente una expresión que la represente. Así también en la pregunta 10 de la sesión de profundización se planteó una conversión del registro algebraico al registro gráfico, para ello se presentó una expresión matemática dada por intervalos en la cual se pidió identificar dentro de un grupo de expresión algebraica la adecuada. Finalmente, la pregunta 11 de la sesión de profundización planteo una situación cotidiana donde se analizó el peso que generan algunos bloques y de lo cual se pide modelar algebraicamente la situación presentada, para luego a partir de esta modelación realizar una conversión al registro gráfico. Con lo cual podemos afirmar que, dadas estas actividades antes mencionadas las cuales se analizaron a la luz de la teoría de Registros de Representación Semiótica se pudo dar respuesta y alcanzar de este modo el primer objetivo específico.

Segundo objetivo especifico

Nuestro segundo objetivo específico, consistió**: *Analizar en las actividades de la propuesta didáctica dentro de un ambiente virtual, los posibles tratamientos en los registros algebraico y gráfico.*** Consideramos que se alcanzó el segundo objetivo específico ya que en la propuesta planteamos en la pregunta 6 de la primera parte de profundización realizar un tratamiento algebraico que muestre una expresión general a partir de la regularidad que se suscita con los datos geométricos brindados, la situación presentada busco que se pueda llevar a cabo procesos de generalización a partir de las regularidades que presentaban los datos de la tabla, o en su defecto poder recurrir a conocimientos de la geometría plana. Asimismo, en la pregunta 1 de la parte de profundización se planteó identificar cuáles de las representaciones graficas mostradas corresponden a funciones, para lo cual se recurrió a la prueba de la recta vertical lo que implicó llevar a cabo un tratamiento gráfico que permitió realizar trazos verticales a las representaciones mostradas con el fin de comprobar cuál de ellas es una función. Tomando en consideración lo anteriormente expresado podemos afirmar que se pudo alcanzar el segundo objetivo específico.

Teniendo en cuenta que los objetivos específicos antes mencionados se lograron desarrollar y responder a la luz del marco teórico, podemos afirmar que el objetivo general trazado se pudo lograr.

Con relación al uso de la tecnología la propuesta se valió de la plataforma Classroom dentro de la cual se implementó un aula virtual, donde se pudo almacenar los recursos y materiales que se utilizaron en las actividades, asimismo se utilizaron algunas herramientas virtuales tales como formularios en línea, pizarra Jamboard, plataforma Kahoot, y el Software GeoGebra.

Perspectivas futuras

En cuanto a las perspectivas futuras, consideramos que, la presente propuesta didáctica en un ambiente virtual sobre el concepto de función podría ser adaptada para ser utilizada en otros niveles de enseñanza, teniendo en consideración que la secuencia de actividades debería implementarse de manera progresiva en los conceptos, y no de manera mecánica. Por otro lado consideramos que la presente propuesta podría servir de modelo para realizar algunas adaptaciones para otras investigaciones similares, ya sea de conceptos como los de función lineal o afín, en las que se podría estudiar además de las transformaciones, las coordinaciones de sus representaciones apoyándose de algunos soportes tecnológicos tales como el GeoGebra o calculadora científica.

REFERENCIAS

Apóstol (2001). *Calculus, Volumen I Calculo con funciones de una variable y una introducción al algebra lineal.* Editorial Reverte. Recuperado de: https://www.freelibros.me/matematicas/calculus-volumen-2-2da-edicion-tom-m-apostol

Boyer C. (1987) Historia *de la matemática.* Editorial Alianza. Recuperado de: https://doku.pub/download/historia-de-la-matematica-carl-boyer-4lo93enoyrlx

Costa, A., Del Río L. (2019). *Contributions of Dynamic Geometry to the notion of function study starting from a geometrical problem: A praxeological analysis.* - Bolema - Mathematics Education Bulletin. doi: 10.1590/1980-4415v33n63a04

Cuevas A., Díaz J. (2014). *La historia de matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función.* Cinvestav –IPN, México. v5. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/14907/1/Cuevas2014La.pdf

Cuevas C., Delgado M. (2016). *¿Por que el concepto de función causa tanta difícultad en el estudiante?.* Departamento de matemática educativa – Departamento de matemáticas fundamentales. México –Francia. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/14909/1/Cuevas2016Por.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.Recuperado de:

file:///C:/Users/A.C.SYSTEM%20SOLUTIONS/Downloads/lectura%203_Duval_registros%20de%20representacion.pdf

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Font, V. (2001). *Expresiones simbólicas a partir de las gráficas.* El caso de la parábola. Revista de innovación en educación matemática (EMA). 6(2), pp. 180 – 200. Recuperado de http://www.pagvf.esy.es/index_archivos/(04)RD.pdf

García J. (2013). *El concepto de función como una integración de los registros de representación.* Universidad Nacional de Colombia. Medellín. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/11925/15447487.2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). México D.F., México: McGraw-Hill / Interamericana. Recuperado: https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Jardines, F. (2009). *Desarrollo histórico de la educación a distancia*, (*Historical development of distance education).* México UANL. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/315829091_Desarrollo_historico_de_la_educacion_a_distancia_Historical_development_of_distance_education

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300. doi:10.2307/2686848

Llanos, C., y Otero, R. (2017). *Caractérisation des fonctions didactiques topogenèse, mésogenèse et chronogenèse dans un parcours d'Étude et recherche (PER) monodisciplinaire dans l'École secondaire.* Jornal Internacional De Estudos Em Educacao Matemática, 10(3), 220-227. http://dx.doi.org.ezproxybib.pucp.edu.pe:2048/10.17921/2176-5634.2017v10n3p220-227

MINEDU (2016). *Currículo nacional de la educación básica.* Lima – Perú, Ministerio de Educación. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Monje A. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa, guía didáctica.* Universidad Surcolombiana. Recuperado de: https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf

Norma (2017). *Construye matemática de quinto de secundaria.* Lima - Perú. Editorial Norma.

Núñez, J., y Sánchez. (2015). *Modelamiento matemático como herramienta de articulación de la matemática universitaria en estudiantes de pre cálculo.* Revista De Ingeniería, Matemáticas y Ciencias De La Información, *3*(5). doi:http://dx.doi.org.ezproxybib.pucp.edu.pe:2048/10.21017/rimci.2016.v3.n5

Pino, L., Parra, Y., y Castro, W. (2019). *Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno.* http://dx.doi.org.ezproxybib.pucp.edu.pe:2048/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Prada R., Jaimes L., Hernández C. (2017). *Representación semiótica de la noción de función: Concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad.* Recuperado de: https://journal.poligran.edu.co/index.php/panorama/article/view/1008

Rey, G., Boubbe, C., Sastre, P. et.alt. (2009). *Ideas para enseñar, Aportes didácticos para abordar el concepto de función.* Revista Unión. Recuperado de: http://inst-mat.utalca.cl/~cdelpino/16-seminario/tema04a/Union_020_019.pdf

Spivak (1967). *Calculo infinitesimal*, Segunda Edición, Editorial Reverte. Recuperado de: https://www.freelibros.me/matematicas/calculo-infinitesimal-2da-edicion-michael-spivak

Ugalde, W. (2013). *Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje*. Universidad de Costa Rica Recuperado de: https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_Ugalde_V14_n1_2013/RevistaDigital_Ugalde_V14_n1_2013.pdf

Villamizar F., Rincón O., Vergel M. (2018). Diseño de escenarios virtuales para problemas de optimización en software de geometría dinámica. Universidad Francisco de Paula Santander – Colombia. Recuperado de: https://www.redalyc.org/jatsRepo/5177/517758004008/html/index.html

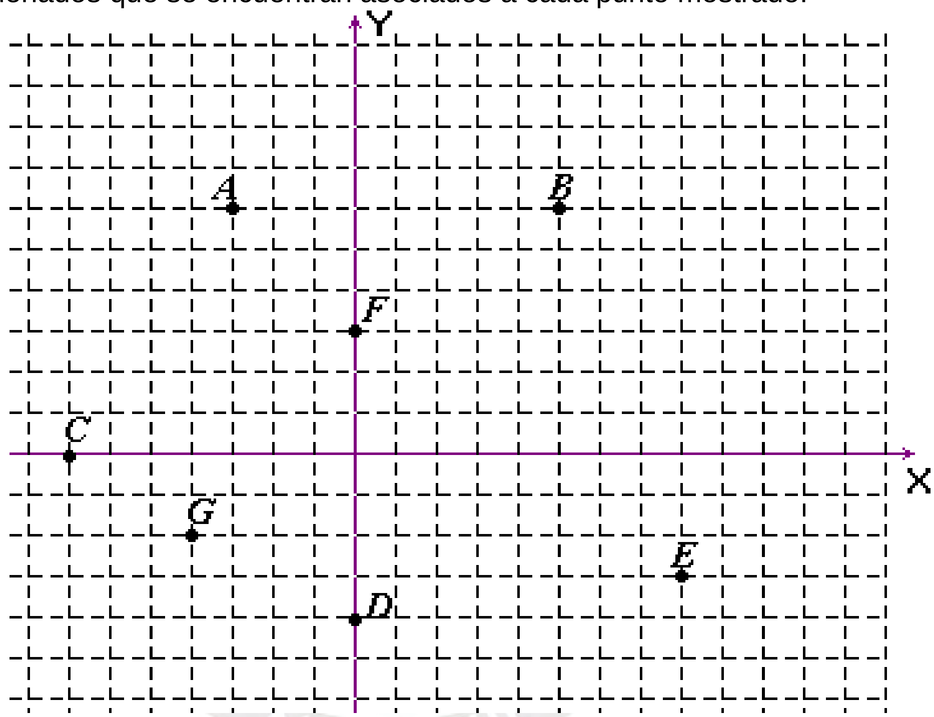
Youschkevitch, A. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. Archive for History of Exact Sciences, 16(1), 37-85. Retrieved April 13, 2021, fromhttp://www.jstor.org.ezproxybib.pucp.edu.pe:2048/stable/41133460

ANEXOS

Actividad 1. “Exploremos nociones fundamentales”

Nombre y apellidos: ____

1. **Identifica** en siguiente representación gráfica los pares ordenados pares ordenados que se encuentran asociados a cada punto mostrado:



A (,)   B (,)   C (,)   D (,)   E (,)

F (,)   G (,)

2. **Aplica** el concepto de pares ordenados y determina lo solicitado en cada caso:

   a) Si los pares ordenados $(5; a-4)$ y $(b+1;12)$ son iguales determine el valor de las variables “a” “b” justifique su respuesta.

3. **Determine** en el siguiente caso cuál es la razón, y el término de lugar 8, justifique su respuesta.

   a) 2; 7; 12; 17; ….

4. Se define la siguiente operación matemática:

   $\boxed{x} = 2x^2 + 2$

   Determine el valor de $\boxed{\boxed{2}}$

5. Relacione los datos que se muestran a través de algún criterio adecuado y explique cuál es la posible relación existente entre ellos.

a) Se tiene los países: Perú, Colombia y Venezuela y las ciudades de: Arequipa, Maracay, Bogotá, Lima, Medellín y Caracas**.** Explique la relación que existe.

b) Se tiene los siguientes conjuntos A: {1, 2, 3, 4} y B: {1, 4, 9, 16} Explique la relación existente.

c) Se tiene el conjunto de todos los ciudadanos peruanos y se tiene el conjunto de datos que contiene el número de DNI de cada peruano, Explique la relación existente.

¿Las relaciones antes presentadas guardan alguna característica en común? ¿Cuál?

¿Todas las relaciones mostradas anteriormente tienen correspondencia uno a uno? Explique

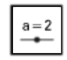
Plantea un ejemplo de una relación que tenga una correspondencia uno a uno y otro ejemplo en el cual no se cumpla la correspondencia uno a uno.

6. Ingresa al siguiente enlace de GeoGebra https://www.geogebra.org/m/zqyx84uz

a) ¿Qué sucede con el valor del área de la región cuadrada a medida que se hace variar la longitud de uno de sus lados? Sugerencia: utilice el deslizador para realizar variaciones a la longitud del lado del cuadrado.

b) ¿De qué depende la variación de la medida del área de la región cuadrada? Justifique.

c) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente en este caso? Justifique.

7. Utilizando el enlace de la pregunta 6 manipula el deslizador 

realizando un arrastre y completa la siguiente tabla partir de los datos que se indica.

Longitud del lado	Valor del área de la región cuadrada
1.00	
1.10	
1.30	
1.60	
2.20	
2.60	
4.10	

a) ¿Se puede afirmar que la situación anterior corresponde a una función? ¿Por qué?

b) Coloca los pares ordenados que se obtienen a partir de la tabla de la pregunta 7.

{ (1.00,); (1.10,) ; (1.30,) ; (2.50,) ; (1.60,) ; (2.20,) (2.60,); (4.10,)}}

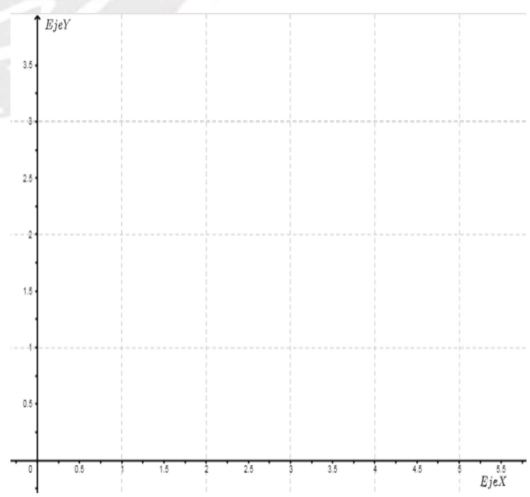
c) ¿Los pares ordenados obtenidos se corresponden con la definición de función? ¿Por qué?

8. A partir de la tabla mostrada complete los ítems a y b.

a) Exprese algebraicamente una fórmula que generalice a la información de la tabla.

<table>
<tr><th>Representación Tabular</th><th>Representación algebraica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Longitud del lado</th><th>Valor del área de la región cuadrada</th></tr>
<tr><td>1.00</td><td></td></tr>
<tr><td>1.10</td><td></td></tr>
<tr><td>1.30</td><td></td></tr>
<tr><td>1.60</td><td></td></tr>
<tr><td>2.20</td><td></td></tr>
<tr><td>2.60</td><td></td></tr>
<tr><td>4.10</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

b) Represente gráficamente la expresión algebraica obtenida:

<table>
<tr><th>Representación algebraica</th><th>Representación grafica</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

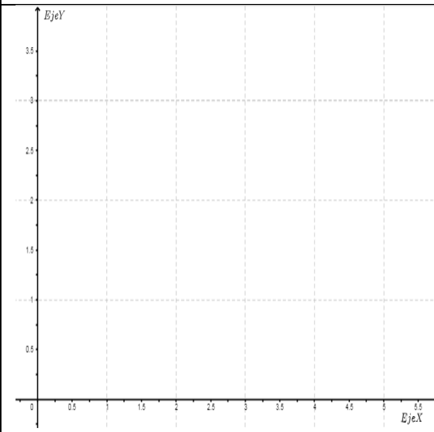
c) ¿Los puntos obtenidos en la tabla fueron los únicos que se pudieron representar en la gráfica? ¿Por qué?

d) ¿Qué se debería considerar para poder realizar un trazo continuo en la gráfica dada?

e) ¿Los puntos de la representación gráfica satisfacen la condición de función?

f) ¿Cuál sería el criterio para determinar si una gráfica en general es o no función?

9. Completa cada columna con la representación correspondiente, luego contesta adecuadamente a los ítems.

<table>
<tr><th>Representación Tabular</th><th>Representación algebraica</th><th>Representación grafica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Longitud del lado</th><th>Valor del área de la región cuadrada</th></tr>
<tr><td>1.00</td><td></td></tr>
<tr><td>1.10</td><td></td></tr>
<tr><td>1.30</td><td></td></tr>
<tr><td>1.60</td><td></td></tr>
<tr><td>2.20</td><td></td></tr>
<tr><td>2.60</td><td></td></tr>
<tr><td>4.10</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

a) ¿Te fue sencillo pasar de una representación a otra? Explique.

b) ¿Qué diferencias encuentras en las representaciones obtenidas?

10. Expresa mediante una formula o algoritmo las siguientes relaciones:

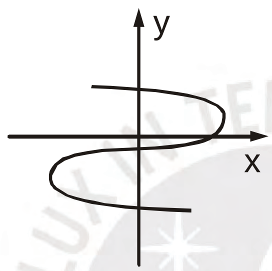
La cantidad total de sangre que tiene una persona representa un treceavo del peso total de su cuerpo.	
El índice de masa corporal de una persona es el cociente entre el peso en kilogramos y la estatura al cuadrado en metros.	

Actividad 2.

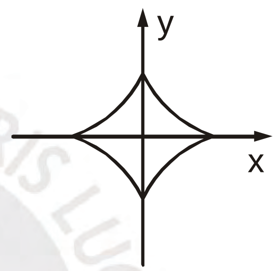
Profundizando el concepto de función

1. Cuáles de las siguientes representaciones gráficas, corresponden a funciones.

c)



d)



a) Justifica la razón de tu respuesta

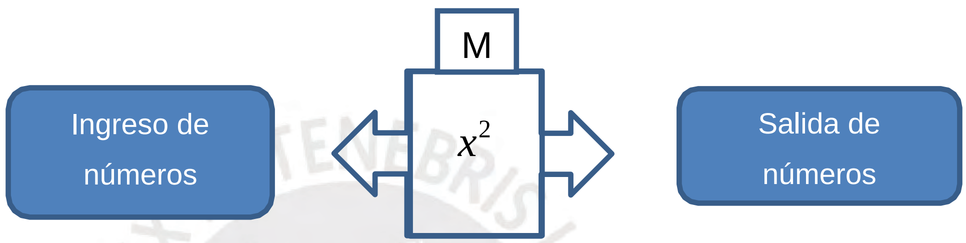
2. Observa la siguiente imagen y responde a los siguientes items:

a. ¿Cuál es la función principal que desempeña una lavadora? Explique.

b. ¿Qué transformación realizaría la lavadora a un polo sucio que ingrese en ella, cuando esta se encuentra en funcionamiento? Explique.

3. Las siguientes imágenes que se muestran a continuación, corresponden a máquinas las cuáles realizan transformaciones a los números que ingresan en ellas, tal como indica la operación de su portada.

Observe el siguiente ejemplo:

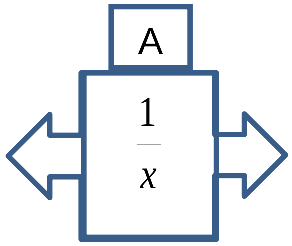


P1: ¿Qué característica o naturaleza deben tener los números que podrían ingresar a la maquina M? P2: ¿Cuál es la característica de los números que salen de la maquina M?

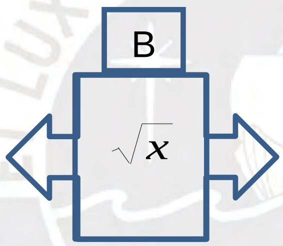
Respuesta 1: Se puede notar que los números que pueden ingresar a la maquina “M” corresponden a todos los números reales, ya que la operación potencia puede darse sin ningún tipo de restricción para ellos.

Respuesta 2: Para la salida de números se puede notar que los números que se eleven al cuadrado continuaran formando parte de los números reales, lo que significa que los números de la salida corresponden a todos los números reales.

a. ¿Qué condición debe cumplir los números que ingresan en la maquina A, para que esta pueda procesarlos de manera adecuada? ¿Cómo son los que salen?



b. ¿Qué condición debe cumplir los números que ingresan en la maquina B, para que esta pueda procesarlos de manera adecuada? ¿Cómo son los que salen?



4. Se tiene la siguiente maquina tragamonedas la cual realiza ciertas entregas de dinero de acuerdo a la cantidad que en ella se deposite, Miguel tomo nota del dinero ingresado en cada momento a la máquina y escribió lo siguiente:

Dinero ingresado	Dinero recibido
1	2
3	6
4	8
6	12

a. ¿Qué transformación realiza la máquina al dinero ingresado?

b. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta transformación?

c. Si Miguel ingresa 10 soles ¿cuánto dinero saldrá de la máquina?

d. ¿Cuál es el dominio y rango de la función anterior?

5. Si G representa una función calcule el dominio y rango de G:

Si: G = {(2; 6), (1; a-b), (1; 4), (2; a+b), (3; 4}

6. Dada la función definida por: $f(x) = x + 2$, $x \in [0,4]$

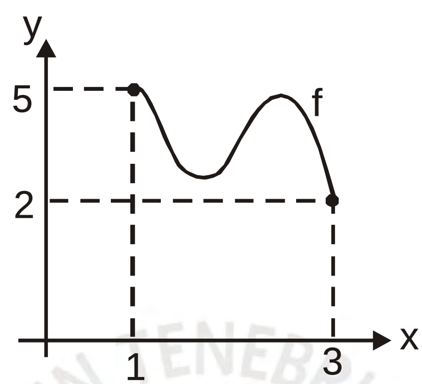
a) Realice la proyección ortogonal de la representación gráfica de la función f sobre el eje x, Explique cuál es el procedimiento que siguió e indique el nombre que recibe la proyección que se obtiene.

b) ¿Cómo se relaciona la proyección ortogonal que se obtuvo en la parte “a” con la función f? Explique.

c) Realice la proyección ortogonal la representación gráfica de f sobre el eje y. Explique cuál fue su procedimiento que siguió e indique el nombre que recibe la proyección que se obtuvo.

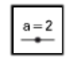
d) ¿Cómo se relaciona la proyección ortogonal obtenida en la parte “c” con la función f? Explique.

7. Determina el dominio y rango de la siguiente función f a partir de la representación gráfica mostrada.



8. Determina el dominio y rango de la siguiente función: $f(x) = 2x + 4, \forall x \in [-6;5]$

a) Abra el siguiente enlacehttps://www.geogebra.org/m/uqjk4472

a.1 En la casilla “**función concepto”** digite la regla de correspondencia de la función f: $2x+4$ luego arrastre el deslizador. 

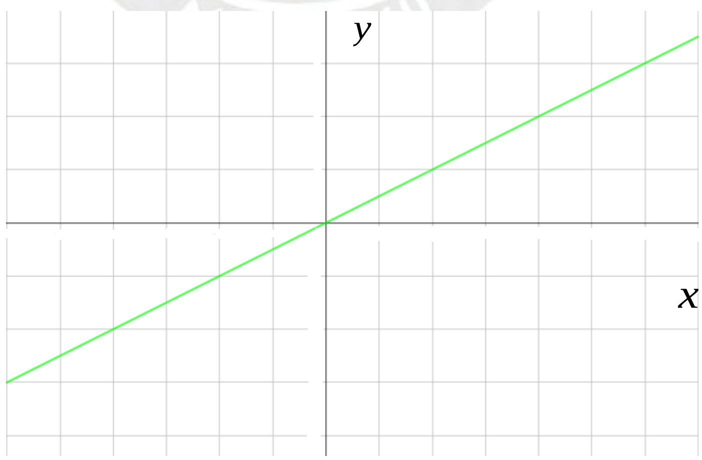
a.2. Observe lo que sucede con el cuadro de valores para su función

a.3. Utilice la animación y observe lo que sucede con la representación gráfica que se forma.

a.4. ¿Cuál es el valor de la expresión $F = f(1) + f(-4) + f(5) + f(0)$

b)¿Se puede determinar el dominio y rango de la función antes mencionada con solo observar su representación gráfica? En caso afirmativo diga cuál es el dominio y rango solicitado de la función f.

9. Dada la siguiente representación gráfica de una función, responda los siguientes ítems. Justifique su respuesta en cada caso.



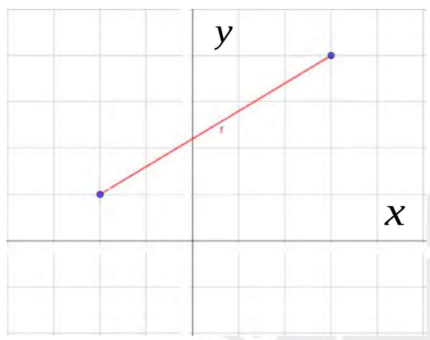
a) Determine una expresión algebraica que corresponda con la representación gráfica mostrada.

b) ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados son elementos de la función f dada?

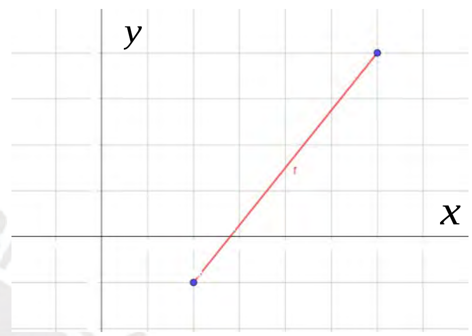
{(0;1); (1;1/2); (1;5); (2;2); (4;2); (5,4)}

10. Identifique cuál de las siguientes representaciones graficas corresponden una función cuyo $Df = \{x / 2 \le x \le 6\}$ y cuyo $Rf = \{ f(x) / -1 \le f(x) \le 4\}$

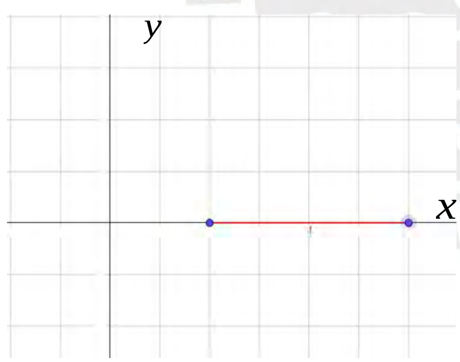
A



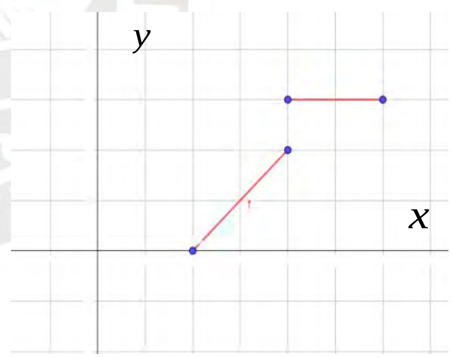
B



C

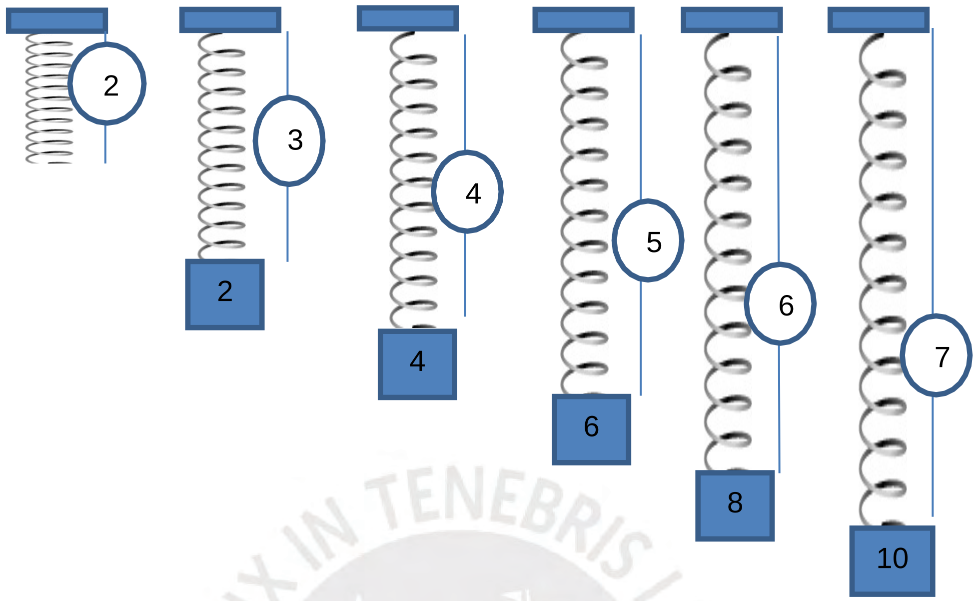


D



Justifique la razón de su respuesta

11. La siguiente figura muestra las diferentes longitudes que adopta un resorte medido en centímetros, a medida que sostiene bloques de diferente masa en gramos:



a) Determine la función que modele la situación anterior

b) A partir de la representación obtenida realice su representación gráfica:

CUESTIONARIO VIRTUAL DE LA PLATAFORMA KAHOOT.

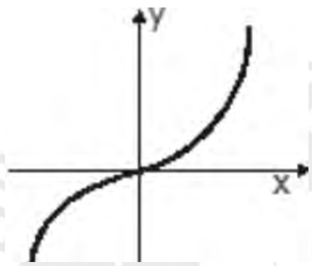
1. Una función es:

Un tipo de relación | Un número real | Un conjunto | Una fracción

2. Una función es una regla que asocia un número real x con otro número real y

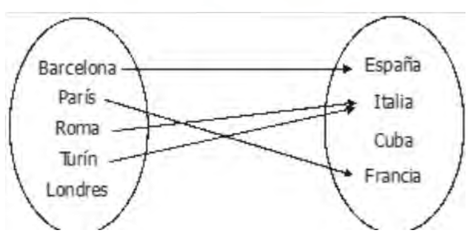
Verdadero | Falso

3. ¿La siguiente representación corresponde a una función?



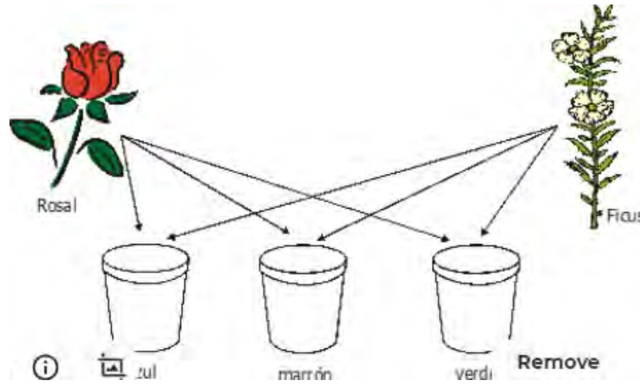
Tal vez | No de ninguna manera | Si es una función | No se puede determinar

4. La siguiente figura en la que se asocia ciudades con países, ¿corresponde a una función?



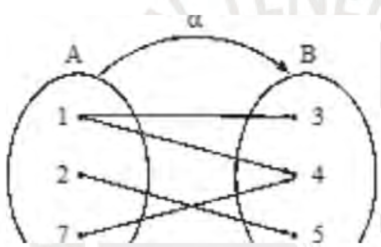
Verdadero | Falso

5. La siguiente figura asocia tipos de plantas con sus macetas, ¿la figura corresponde a una función?



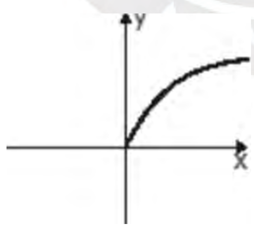
Verdadero Falso

6. ¿La siguiente figura corresponde a una función?



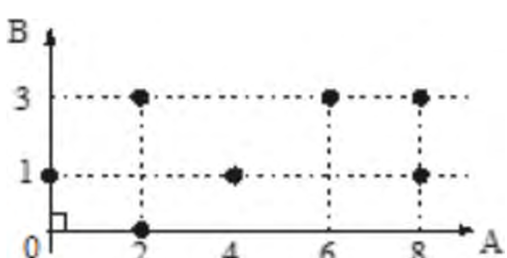
Verdadero Falso

7. ¿La siguiente figura corresponde a una función?



Verdadero Falso

8. ¿La siguiente figura corresponde a una función?



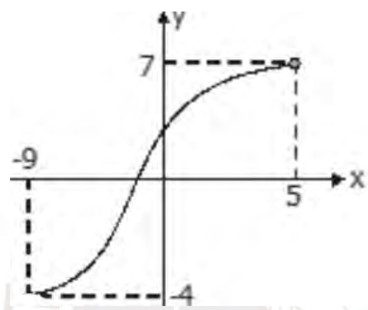
Verdadero Falso

9. ¿La siguiente figura corresponde a una función?

$$\alpha = \{(1;3);(1;4);(2;5);(7;4)\}$$

Verdadero Falso

10. Determine el intervalo al cual pertenece el dominio de la siguiente función:



[-9,5] [5,7] [-4,7] [-9,7]