PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU
ESCUELA DE POSGRADO

UN ESTUDIO DIDÁCTICO DE LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES Y SUS APLICACIONES A LA PROGRAMACION LINEAL

EN EL INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO PÚBLICO "SIMÓN BOLÍVAR"

TESIS
PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER EN EDUCACION
CON MENCION EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

PRESENTADA POR:

OLGA BEATRIZ MORENO SANCHEZ

ASESORA DE TESIS:

MG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

LIMA, 2011

Dedicatoria,

A mi MADRE, por su infinito amor e incomparable ejemplo.

Agradecimientos:

- A la **Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre** por su invalorable apoyo y asesoramiento especializado.
- A los maestros miembros del jurado, **Dr. Uldarico Malaspina** y **Mg. Miguel Gonzaga**, por sus oportunas y pertinentes observaciones y sugerencias.
- Al **Mg. Víctor Agapito Zavala**, bajo cuyo asesoramiento se iniciara el desarrollo del presente trabajo.
- Al **Dr. César Carranza** por su preocupación y esfuerzo permanente por elevar el nivel profesional de los docentes de matemática de nuestro país.
- A todos mis maestros, mi eterna gratitud.
- A mis familiares y amigos, infinitas gracias por su apoyo y aliento permanente.
- A mis queridos alumnos, y en especial a los que participaron en el presente estudio, gracias por su comprensión.

RESUMEN

El presente es un estudio didáctico de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal.

Siguiendo el proceso metodológico de la Ingeniería Didáctica se elaboró, aplicó y validó una secuencia didáctica, que permitió recoger información relevante acerca del desempeño de los estudiantes del Segundo Semestre Académico de la Carrera Técnico-Profesional de Tecnología de Análisis Químico del ISTP "Simón Bolívar", en el proceso de aprendizaje de este tópico de la matemática.

La secuencia didáctica fue diseñada teniendo como marco la Teoría de las Situaciones Didácticas, de manera que las actividades propuestas indujeran a los estudiantes a pasar por situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación, bajo la premisa de que solo la acción autónoma de los estudiantes es la que permite aprendizajes y comportamientos auténticamente matemáticos.

Con ese propósito y teniendo en cuenta el enfoque sistémico de la Didáctica de la Matemática en la que se inscribe la Teoría de Situaciones, se realizaron los análisis preliminares en los aspectos epistemológico, cognitivo y didáctico.

En la fase experimental, con la finalidad de que los estudiantes asumieran la responsabilidad de su aprendizaje y actuaran lo más independientemente posible de la acción del docente, la secuencia didáctica fue presentada a través de tres fascículos impresos, de modo que la intervención del docente se limitó a orientar, guiar, centrar y desbloquear la actividad de los alumnos.

En general, se pudo constatar que los estudiantes de TAQ II del ISTP "Simón Bolívar" tienen serias dificultades en el proceso de aprendizaje de la solución gráfica de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables; dificultades relacionadas a errores operativos y al manejo del plano coordenado principalmente. Dichas dificultades se agudizan en la resolución de problemas de Programación Lineal, puesto que muestran grandes limitaciones en la identificación de las variables y el uso de inecuaciones en la representación de situaciones formuladas en el registro verbal.

Sin embargo, la secuencia didáctica planteada ayudó significativamente a superar dichas dificultades. Por lo que esperamos que tanto las conclusiones como las recomendaciones del presente estudio sirvan a la realización de estudios similares con la finalidad de complementarlas y coadyuvar en el mejoramiento del proceso de aprendizaje de este tema tan importante y útil de la matemática.

ÍNDICE GENERAL

CONTENIDOS

CONTENIDOS		Página
Carátula	....	I
Resumen	....	III
Índice general	....	V
Índice de cuadros y gráficos	....	VIII
Introducción	....	X

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEÓRICOS

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Planteamiento del problema. 12
1.2 Antecedentes. 16
1.3 Perspectiva teórica. 21
1.4 Objetivos de la investigación. 23

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

2.1 La teoría de las situaciones didácticas. 24
2.1.1 Fundamentos. 24
2.1.2 Conceptos básicos. 25
2.1.3 Tipos de interacciones con el medio. 29
2.2 La ingeniería didáctica. 32
2.2.1 Fases de la ingeniería didáctica. 33

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA

CAPITULO III: ANÁLISIS PRELIMINAR

3.1 Análisis epistemológico. 38
3.1.1 Referencias históricas acerca de los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal. 38
3.1.2 Los sistemas de inecuaciones lineales. 39
3.1.3 Método gráfico de solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables. 44
3.1.4 Aplicación de los sistemas de inecuaciones lineales a la programación lineal. 46

3.2 Análisis didáctico. …………………..……………...... 52
3.2.1 La enseñanza de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables en el ISTP “Simón Bolívar”. ……...……..……………………… 53
3.2.2 Los sistemas de inecuaciones lineales en los libros de texto. ……….....…… 54

3.3 Análisis cognitivo. ………………..…..………….......... 55
3.3.1 Análisis de la Evaluación de Conocimientos Previos. ….….…..………….......... 55
a. Análisis de la Prueba sobre Inecuaciones Lineales con una variable. …… 56
b. Análisis de la Prueba sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales. …...…... 60
3.3.2 Análisis de la Prueba de Entrada. ………...……….……………… 63
3.3.3 Análisis de experiencias anteriores. ………...……….……………… 64
3.3.4 Análisis de investigaciones relacionadas. ………...……….……………… 65

3.4 Análisis del campo de restricciones. ………………………….….……….. 67

CAPITULO IV: CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI

4.1 Determinación de las hipótesis. ……………………...…………....... 69
4.2 Determinación de las variables. ……..………………..…………....... 70
4.2.1 Variables macro-didácticas. ……………………...…………....... 70
4.2.2 Variables micro-didácticas. ……………………...…………....... 70
4.2.3 Identificación de las variables en las Actividades de Aprendizaje. ...…………...... 71
4.3 Diseño de la secuencia didáctica. ……..…………………………...... 72
4.3.1 Identificación de los conocimientos previos. ….…….………………………...... 73
4.3.2 Formulación de los aprendizajes esperados. ...…………………………… 73
4.3.3 Situaciones didácticas e historias de clase. ....……………………………..… 74
4.3.4 Matriz de situaciones didácticas e historias de clase. ……………………….…… 76
4.4 Elaboración de la secuencia didáctica. ….…..……………………………… 81

CAPITULO V: FASE EXPERIMENTAL

5.1 Puesta en escena de las Situaciones Didácticas. …..………………………... 100
5.2 Resultados de la Evaluación de Salida. …….……………………….. 114
5.3 Valoración de la secuencia didáctica desde la perspectiva de los estudiantes. 119
5.3.1 Apreciación respecto al desarrollo de la secuencia didáctica. …..……………..… 120
a.- Apreciación respecto al desarrollo de las actividades. ……...……………..… 120
b.- Apreciación respecto al desarrollo de valores y actitudes. …..……………… 122
c.- Apreciación sobre el logro de los aprendizajes esperados. ………………… 123
5.3.2 Logros y dificultades encontrados en el desarrollo de las actividades. ………… 128

CAPITULO VI: ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

6.1 Análisis a posteriori de la Secuencia Didáctica. …………………………… 133
6.2 Análisis de los aprendizajes esperados. …………………………… 138
6.3 Validación de las hipótesis. …………………………………………… 141

CONCLUSIONES …………………………………………… 143
RECOMENDACIONES …………………………………………… 148
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS …………………………………………… 150

ANEXOS

Anexo Nº 01: Matriz de evaluación de conocimientos previos: Inecuaciones lineales. 154
Anexo Nº 02: Evaluación de conocimientos previos: Inecuaciones lineales. ……… 155
Anexo Nº 03: Matriz de evaluación de conocimientos previos: Sistemas de Ecuaciones lineales – Fila A. …………………………………… 156
Anexo Nº 04: Evaluación sobre Sistemas de Ecuaciones lineales – Fila A. ………… 157
Anexo Nº 05: Matriz de evaluación de conocimientos previos: Sistemas de Ecuaciones lineales – Fila B. …………………………………… 158
Anexo Nº 06: Evaluación sobre Sistemas de Ecuaciones lineales – Fila B. ………… 159
Anexo Nº 07: Matriz de evaluación de conocimientos previos: Sistemas de Ecuaciones lineales – Fila C. …………………………………… 160
Anexo Nº 08: Evaluación sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales – Fila C. ……… 161
Anexo Nº 09: Matriz de la Evaluación de Entrada. …………………………………… 162
Anexo Nº 10: Evaluación de Entrada. …………………………………… 163
Anexo Nº 11: Matriz de la Evaluación de Salida. …………………………………… 164
Anexo Nº 12: Evaluación de Salida - Fila A. …………………………………… 165
Anexo Nº 13: Evaluación de Salida - Fila B. …………………………………… 166
Anexo Nº 14: Evaluación de Salida - Fila C. …………………………………… 167
Anexo Nº 15: Cuestionario Nº 1, Informantes: Estudiantes de TAQ-II-diurno. ……… 168
Anexo Nº 16: Guía de entrevista Nº 1, Informantes: docentes de matemática del ISTP “Simón Bolívar”. …………………………………… 171
Anexo Nº 17: Ficha de Observación. …………………………………… 173
Anexo Nº 18: Ficha de Autoevaluación. …………………………………… 175
Anexo Nº 19: Ficha de Evaluación Grupal. …………………………………… 178

ÍNDICE DE CUADROS Y GRÁFICOS

Página Nº

Nº 01 Resultados del Examen de Admisión 2007-ISTP "Simón Bolívar". ……….. 13

Nº 02 Resultados de la Prueba sobre Inecuaciones Lineales con una variable. …... 56

Nº 03 Resultados de la Prueba sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales. ………..… 61

Nº 04 Cuadro de aprobados y desaprobados en la Prueba sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales. ……………………………………..… 61

Nº 05 Resultados del Examen de Admisión 2007: TAQ – Diurno. …..……….. 67

Nº 06 Situación Académica de los estudiantes de TAQ I - Diurno, en el Semestre 2007-I. …………………………………….. 68

Nº 07 Rendimiento Académico de los alumnos de TAQ I - Diurno, en la asignatura de Matemática I, en el Semestre 2007-I. …………………………………….. 68

Nº 08 Distribución de estudiantes de TAQ II – Diurno, según número de horas extracurriculares, de estudio por semana. …………………………………... 68

Nº 09 Resultados generales de la Evaluación de Salida. ………………………….. 114

Nº 10 Resultado porcentual de aciertos y errores en la Evaluación de Salida. …... 115

Nº 11 Apreciación de los estudiantes sobre si en las actividades se tomaron en cuenta sus aportes. ……………………………………. 120

Nº 12 Apreciación sobre la relación de las actividades con situaciones de la vida cotidiana. ……………………………………… 120

Nº 13 Apreciación sobre la importancia del trabajo en grupo en el desarrollo de las actividades. ……………………………………..… 121

Nº 14 Apreciación sobre la utilidad de las actividades en la comprensión de los conceptos. ………………………………………… 121

Nº 15 Apreciación sobre la utilidad del material usado en el desarrollo de la secuencia didáctica. …………………………………... 121

Nº 16 Valoración de la metodología empleada. ……………………………………. 122

Nº 17 Apreciación sobre el desarrollo de una actitud positiva frente al aprendizaje de la matemática. …………… ….………………..…… 122

Nº 18 Apreciación sobre el desarrollo de la actitud de responsabilidad y perseverancia. ………………………………..…… . 123

Nº 19 Apreciación sobre el desarrollo de la capacidad de aprender por sí mismos. 123

Nº 20 Apreciación respecto al aprendizaje esperado: *Graficar inecuaciones lineales con dos variables*. ………….…………………… 123

Nº 21 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables*. ………….………………………. 124

Nº 22 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Optimizar una función lineal*. 124

Nº 23 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Determinar la región factible*. 124
Nº 24 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *determinar los vértices de la región factible*. ...…………………………………….. 125
Nº 25 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Formular sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.* …..……………………...……… 125
Nº 26 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Formular inecuaciones lineales a partir de la gráfica del semiplano correspondiente*. ……………… 125
Nº 27 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Identificar las restricciones y la función objetivo en problemas de programación lineal*. ……………… 126
Nº 28 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: "*Expresar algebraicamente las restricciones y la función objetivo de un problema de programación lineal*. 126
Nº 29 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Interpretar las soluciones de problemas de programación lineal*. ..……………………………………..……. 126
Nº 30 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Formular conceptos y procedimientos*. ……………………..…………………...….. 127
Nº 31 Apreciación respecto el aprendizaje esperado: *Formular problemas de programación lineal*. ……………………….……………………. 127
Nº 32 Apreciación de los estudiantes sobre el desarrollo de la capacidad de *razonamiento y análisis*. ……………………..……………………. 127

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, presentamos un Estudio didáctico de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal llevado a cabo en el Instituto Superior Tecnológico Público “Simón Bolívar” del Callao en el Semestre Académico 2007-II.

El propósito del presente trabajo de investigación es diseñar, elaborar, aplicar y validar una secuencia didáctica bajo el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas y siguiendo el proceso metodológico de la Ingeniería Didáctica.

En la Primera Parte empezamos planteando el problema que dio inicio al presente trabajo y los objetivos que persigue; luego se presentan los planteamientos más relevantes de la Teoría de Situaciones y las ideas directrices de la Ingeniería Didáctica como método de investigación.

La Segunda Parte corresponde al desarrollo de la Ingeniería Didáctica, el que se inicia con el Análisis Preliminar, que abarca aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos acerca del proceso de enseñanza - aprendizaje de los Sistemas de Inecuaciones lineales, en concordancia con el enfoque sistémico que subyace tanto al marco teórico como al marco metodológico del presente estudio.

Dicho análisis se complementa con el análisis del campo de restricciones, referido a la descripción de rasgos característicos fundamentales y pertinentes de la población de estudiantes participantes en el presente estudio; en este caso de los estudiantes del Segundo Semestre Académico de la Carrera Técnico-Profesional de Tecnología de Análisis Químico - turno diurno, del ISTP “Simón Bolívar”.

A continuación se realiza el Análisis a Priori que incluye la determinación de las hipótesis y la identificación de las variables didácticas, los que constituyen los referentes de validación del presente estudio.

En el mismo capítulo se presenta la secuencia didáctica conformada por catorce actividades, elaboradas teniendo en cuenta el Análisis Preliminar, el Análisis a Priori, y los planteamientos fundamentales de la Teoría de situaciones Didácticas; de manera que en todo cuanto es posible los estudiantes transiten por situaciones de acción, formulación y validación en el proceso de construcción de sus conocimientos.

Luego, en lo que corresponde a la Fase experimental, se presentan los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica, describiendo de manera detallada las acciones y comportamientos de los estudiantes en el desarrollo de la misma, información que fue recogida a través de diversos instrumentos, como la Ficha de Observación, el Material Fílmico, las Ficha de Auto y Coevaluación, las carpetas de Trabajo, las pruebas Escritas y la Encuesta aplicada a los estudiantes.

En base a estos resultados, se llevó a cabo el proceso conocido como el Análisis a Posteriori de la Ingeniería Didáctica, el que a su vez nos permitió realizar la Validación de la propuesta en base a su contrastación con el Análisis a Priori, y más específicamente con las hipótesis planteadas.

Terminamos el estudio formulando las conclusiones y las recomendaciones que se desprenden directamente de los resultados obtenidos, y los que esperamos sirvan de base a la realización de estudios posteriores relacionados a los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y su aplicación a la programación lineal.

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEÓRICOS

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Planteamiento del problema

El proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática presenta desafíos permanentes tanto en la comunidad educativa nacional como internacional.

En el Perú, es de público conocimiento el bajo nivel de rendimiento de los alumnos tanto de primaria como de secundaria en las evaluaciones nacionales (1996, 1998, 2001 y 2004) e internacionales (UNESCO -1997 y PISA - 2001).

En el análisis que se realiza de la situación educativa en el Perú en el período 2000-2006, se concluye que los alumnos que lograron resultados satisfactorios en dichas evaluaciones fue la minoría (Díaz, 2006).

Por ejemplo, en la evaluación del 2001, sólo el 6,2% de los alumnos del 6° grado de primaria habría alcanzado un nivel satisfactorio en la ejecución de operaciones y la resolución de problemas; mientras que en la evaluación del 2004 los resultados lejos de mejorar habrían empeorado, tanto que sólo el 2,9% de los estudiantes del 5º grado de secundaria habría logrado un nivel óptimo; es decir, apenas 3 de cada 100 alumnos que concluyen el nivel secundario estaría obteniendo logros satisfactorios en el aprendizaje de la matemática.

Conclusiones similares se realizan respecto a la capacidad de los docentes de matemática; así se afirma que:

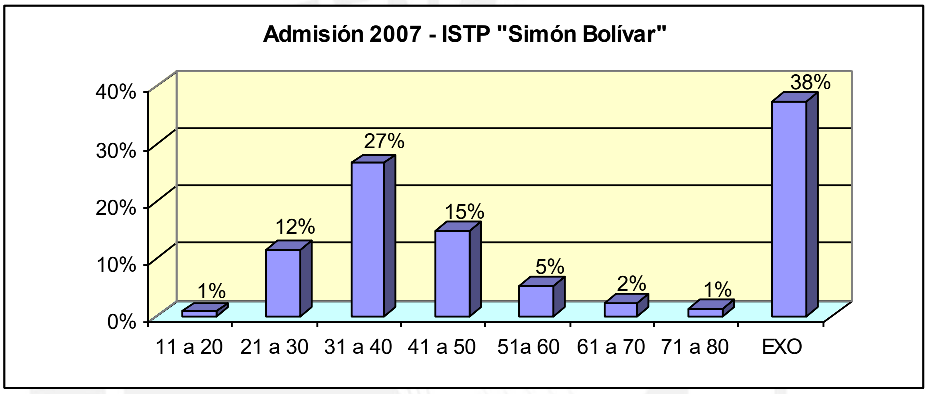
> La mayor parte de los docentes del área de matemática resuelve básicamente problemas rutinarios de carácter algorítmico, totalmente estructurados y definidos. (…) Tienen dificultades para resolver problemas indirectos de dos o tres etapas que exigen la construcción de estrategias novedosas, extraer información indirecta de gráficos, tomar decisiones a partir de los resultados obtenidos y formular modelos matemáticos”. (Díaz, 2006; p. 15)

Además, los mismos estudios han encontrado una alta correlación entre la capacidad docente y el nivel de logro de los estudiantes.

Esta situación deficitaria de la Educación Básica y en particular de la educación matemática en el nivel secundario, deviene en una gran problemática que afrontar en la Educación Superior.

En particular, en el Instituto Superior Tecnológico Público (ISTP) “Simón Bolívar” del distrito de Bellavista, Región Callao, el nivel académico de la mayoría de estudiantes al iniciar sus estudios presenta serias deficiencias; así lo demuestran los resultados de los Exámenes de Admisión[1], y los índices de repitencia y deserción estudiantil en los primeros semestres académicos. Como ejemplo tenemos los resultados del proceso de Admisión–2007:

Gráfico Nº 01



Fuente: Actas del Examen de Admisión 2007.

El gráfico muestra que de los 651 alumnos ingresantes el año 2007, más de la tercera parte (38%) fue exonerado del Examen de Admisión, algunos, por haber obtenido los primeros puestos en la educación secundaria, pero la gran mayoría por diversos convenios que tiene el Instituto con diferentes empresas privadas y entidades públicas.

Los estudiantes que rindieron el Examen de Admisión alcanzaron apenas un promedio de 38,89/100 (equivalente a 7,78 en la escala vigesimal) en un rango de 19 a 78 puntos y sólo el 12% logró superar los 50 puntos.

Respecto al rendimiento académico en las asignaturas de Matemática I y II, (asignaturas de Formación General, correspondientes a los dos primeros semestres académicos), se ha verificado que el promedio histórico del índice de desaprobados se encuentra alrededor del 30%; que evidencia las dificultades en el proceso de aprendizaje de la matemática en el ISTP “Simón Bolívar” y que se traducen en una falta de motivación que muestran muchos estudiantes y la escasa valoración de su capacidad para aprender matemática.

[1] El 40% de la Prueba de Admisión corresponde al Área de Matemática.

Las deficiencias operatorias tanto aritméticas como algebraicas son recurrentes, principalmente cuando involucran números negativos, fracciones o decimales. Las dificultades en la resolución de problemas son casi generalizadas y están asociadas a las limitaciones en la comprensión de textos, al manejo de conceptos matemáticos básicos y a la dificultad para pasar del registro verbal al algebraico u otras formas de representación matemática.

Igualmente, los niveles de razonamiento, tanto inductivo como deductivo alcanzado por los estudiantes no son los óptimos, se perciben serias dificultades para generalizar o encontrar patrones, lo mismo que para hacer uso de conceptos y propiedades al justificar o explicar sus procedimientos o respuestas.

Los "Sistemas de Inecuaciones Lineales y sus aplicaciones a la Programación Lineal", es un tema que casi ninguno de los estudiantes al iniciar estudios en el ISTP "Simón Bolívar" conoce, pese a haber sido incorporado al Currículo Oficial de Educación Secundaria[2] hace más de una década.

A lo que hay que añadir que a través de un sondeo realizado entre algunos docentes de matemática de educación secundaria de Lima y Callao, verificamos que tampoco ellos tienen dominio del tema.

Por otro lado, sabemos que una de las deficiencias de la enseñanza de la matemática en nuestro medio es la escasa relación que se establece entre los diferentes tópicos de la asignatura y el predominio de un enfoque eminentemente operatorio y mecanicista, limitando la comprensión, la interpretación y la aplicación de los conocimientos.

Así por ejemplo, la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales se realiza desde un enfoque eminentemente algebraico, dejando espacios muy limitados e insuficientes a la comprensión de los conceptos, la justificación de los procedimientos, la interpretación de los resultados, la representación gráfica y la contextualización. Al respecto Segura (2004) concluye:

> "…los alumnos tienen una tendencia por el uso del registro algebraico para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, … evaden los problemas dados en el registro verbal. … ocasionalmente recurren al pasaje del registro gráfico al algebraico…" (p. 60)

---

[2] En 1999 fue incluido en el Currículo del 3º grado, como "Sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales con dos y tres variables", y a partir del 2003 se incorpora al programa del 5º grado, dentro de la unidad denominada "Introducción a la Programación Lineal".

Esta situación dificulta el tratamiento de los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones a la programación lineal, puesto que el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo menos en los niveles introductorios, demanda de un tratamiento centrado en la perspectiva geométrica y basado en situaciones contextualizadas, para el que se requiere que los estudiantes hayan desarrollado la capacidad de pasar de un registro a otro, cuando menos en un nivel básico.

En el ISTP "Simón Bolívar", los sistemas de inecuaciones lineales fueron incorporados a la asignatura de Matemática II hace más de cinco años, sin embargo, el proceso de enseñanza-aprendizaje sigue presentando muchas dificultades.

En base a nuestra experiencia personal, podemos manifestar que abordando el tema desde un enfoque tradicional (basado en la exposición y explicación de los conceptos y procedimientos por parte del docente), los logros son muy limitados; los estudiantes no se involucran plenamente en el proceso de aprendizaje, no logran comprender los conceptos y procedimientos en los niveles que se espera y tampoco logran autonomía en la resolución de problemas.

Posteriormente desarrollamos el tema a través de un Módulo de Autoaprendizaje (impreso), obteniendo en general mejores resultados; se logró una mejor comprensión por la posibilidad que tenían de revisar el Módulo cada vez que lo creían necesario; sin embargo, por la misma naturaleza del material no se logró un aprendizaje totalmente autónomo, por el contrario se generó mucha dependencia del material y el desarrollo de capacidades tampoco fue óptimo.

Estas experiencias nos han permitido identificar las dificultades que con frecuencia presentan los estudiantes cuando aprenden a resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables por el método gráfico y al aplicarlos en la resolución de problemas de programación lineal; las mismas que a continuación señalamos:

- Tienen limitados conocimientos y escasa experiencia de trabajo con inecuaciones.
- Muestran serias deficiencias en el manejo del plano coordenado, por ejemplo no perciben la importancia de la graduación uniforme de los ejes, obteniendo gráficas completamente distorsionadas, que les dificulta, una correcta interpretación de las mismas.
- Pese a la relativa experiencia que tienen en la tabulación de valores para dos variables, se observan frecuentes errores en este proceso, relacionados principalmente a operaciones con números negativos o fraccionarios.

- Carecen de iniciativa o experiencia para organizar los datos y hacer un tratamiento ordenado de los mismos.
- Tienen dificultades en la identificación de las variables cuando la situación está expresada en forma verbal.

Estas dificultades observadas año tras año de manera recurrente, son las que motivaron realizar el presente estudio.

Formulación del problema de investigación

A través de este trabajo nos proponemos:

- Identificar cómo influye una secuencia didáctica elaborada en el marco de las Situaciones Didácticas y siguiendo la metodología de la ingeniería didáctica a lograr una mejor comprensión en el aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y la solución de los problemas de programación lineal.

- Constatar si la secuencia didáctica elaborada ayuda a superar las dificultades que generalmente se observan en el aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y la solución de los problemas de programación lineal.

1.2 Antecedentes

Aunque no encontramos estudios anteriores referentes a la enseñanza de los sistemas de inecuaciones lineales, consideramos de mucha utilidad los estudios realizados en el campo del álgebra, por ejemplo estudios sobre la enseñanza de las ecuaciones e inecuaciones de primer grado o los sistemas de ecuaciones lineales.

Otro criterio que hemos tenido en cuenta en la selección de estas investigaciones como antecedentes del presente trabajo es el marco teórico y el método de investigación que usan, que siendo nuevos en nuestro medio, han constituido referentes y guías muy útiles en la realización del presente estudio. A continuación señalamos los aspectos más relevantes de cada uno de ellos:

a.- "La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE", (2003) de Karly Barbosa de la Universidad Católica de Brasilia. [3]

Aquí se afirma que, no obstante que el concepto de inecuaciones se encuentra presente en diversas áreas de la ciencia, muchos estudiantes y también algunos

[3] Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. Relime Vol. 6, Nº 3, pp. 199-219.

docentes evidencian una comprensión limitada del concepto, lo que implicaría deficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Considera asimismo que el estudio de las inecuaciones requiere concatenar de manera coherente nociones como las de estructura de orden de los números reales, funciones, correspondencia uno a uno de los números reales y la recta numérica, análisis gráfico de funciones, relaciones de implicación, entre otros.

b.- "Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica" (2004) [4]; de Sandra Segura de la Universidad Nacional de Cuyo – Mendoza, Argentina.

Parte de la identificación de las deficiencias más frecuentes que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, como son las dificultades en las operaciones aritméticas elementales en problemas verbales, la no verificación de la solución, los errores en el pasaje del registro verbal al algebraico y la ausencia de prácticas de pasaje del registro gráfico al algebraico.

Respecto a los orígenes de tales dificultades se señalan aquéllos relacionados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición de los sistemas de ecuaciones lineales, otros, al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y otros, a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

En base a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, la Teoría de Situaciones de Brousseau; y usando la ingeniería didáctica como método de investigación; presenta la construcción de una secuencia didáctica que facilite el aprendizaje y solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales propiciando el manejo de diferentes registros de representación semiótica; como dice explícitamente:

> "El objetivo del trabajo consiste en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza de calidad que vuelva asequible el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los alumnos, haciendo que el tratamiento y pasaje de registros de representaciones sea el eje alrededor del cual gire la construcción de las actividades".

La secuencia de enseñanza se desarrolla con alumnas del tercer año de media del Instituto Santa María Goretti, Mendoza - Argentina, y concluye que se logró desarrollar en las alumnas comportamientos matemáticos y cognitivos que no sólo les

[4] Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Relime, Vol. 7, Núm. 1; pp. 49 - 78.

sirvieron para asimilar esos objetos, sino que se desarrolló otra forma de aprender matemática.

c.- "Ecuación de la recta: una ingeniería didáctica para su enseñanza" (2006); presentada por María Rey, Silvia Porcinito, Graciela Lazarte y Clarisa Hernández, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Jujuy – Argentina.[5]

En este estudio rescatamos la concepción y el diseño de las actividades que se enmarcan dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el proceso metodológico de investigación que se asume como es la ingeniería didáctica.

Basada en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo, el propósito de la secuencia didáctica es lograr que el alumno determine las distintas formas que adopta la ecuación de una recta en función a los datos que se conocen.

En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas (que responden a las "condiciones del buen problema" enunciadas por Douady) que evolucionan de manera que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para resolverlos, al mismo tiempo que las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad.

d.- "La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito", (1999); investigación realizada por Mabel Panizza, Patricia Sadovsky y Carmen Sessa, en los marcos de la teoría de situaciones y la ingeniería didáctica. [6]

El propósito de este trabajo es identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media; para ello se realiza el análisis de una entrevista a alumnos de tercer año, a través del enunciado de un problema que describía una relación entre los precios de dos objetos.

En los análisis previos se consideran los aportes de diferentes investigaciones tanto para caracterizar la ruptura que supone el pasaje de la aritmética al álgebra, como para describir los elementos esenciales de la actividad algebraica.

El estudio se realiza en torno al tratamiento que hacen los alumnos de una ecuación con dos variables, y la relación que establecen entre las soluciones de la ecuación con dos variables y las soluciones de los sistemas lineales.

---

[5] Rey Genicio, M. y otros. Ecuación de la recta: una ingeniería didáctica para su enseñanza. Relime, Vol. 19, pp. 48-54.

[6] Panizza, M. y otros. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. Universidad de Buenos aires.

Considerando que en la enseñanza actual, el álgebra se introduce a través de ecuaciones de primer grado con una incógnita; y que el estudio de la "ecuación lineal con dos variables" se aborda como la ecuación de la recta, o bien, como una de las componentes en un sistema lineal. La investigación termina con las siguientes conclusiones:

- ✓ Casi todos los alumnos enfrentan el problema extendiendo sus conocimientos sobre ecuaciones de una variable y sistemas lineales con dos variables. Además conservan en sus procedimientos fuertes marcas de su experiencia aritmética.

- ✓ Encuentran en el contexto del problema con ecuaciones una justificación a la unicidad de las soluciones.
- ✓ Al operar con una ecuación de dos variables y llegar a una igualdad numérica, asumen que los números involucrados, son el "resultado" o solución de la ecuación.
- ✓ Desde la perspectiva de los alumnos, "la ecuación con dos variables en un sistema" es un objeto diferente de "una ecuación con dos variables", y ésta última, no es reconocida como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.
- ✓ La concepción de las infinitas soluciones parece basarse en sus respectivas centraciones; por un lado, ubicándolo cerca de las funciones, o como un "conglomerado de soluciones únicas" provenientes de diferentes sistemas lineales.
- ✓ Cualquiera haya sido el tratamiento de la "ecuación de la recta", no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

Finalmente se afirma que: "Avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de *incógnita* y el de la noción de *variable* parece ineludible para desentrañar la compleja y desafiante relación entre la aritmética y el álgebra".

e.- "El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra lineal", estudio realizado por Ana Lucía Hurman, con alumnos de primer año de la Licenciatura en Administración en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Cuyo - Argentina. [7]

[7] Hurman, A. (2001). El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra.

El estudio toma en cuenta los aportes de diferentes investigadores que trabajan en torno a la didáctica del álgebra lineal en diferentes partes del mundo, como Jean Luc Dorier, Marlene Alves, Anna Sierpinska, Guershon Harel, Ed Dubinsky, entre otros.

Partiendo de la hipótesis: “Las aplicaciones a problemas concretos de algunos conceptos de álgebra lineal mejoraría el rendimiento de los alumnos”, se diseña el curso con una orientación matricial, en dos partes: clases teóricas, presentando los temas desde distintos puntos de vista, y la exposición del desarrollo de los ejercicios propuestos y problemas concretos por parte de los estudiantes.

Se manifiesta que en general se lograron gran parte de los objetivos propuestos. Las conclusiones relevantes para el presente trabajo son las siguientes:

- ✓ Se observó un cambio de actitud tanto de la docente como de los estudiantes, quienes mostraron un mayor compromiso, una participación más activa y satisfacción por una aplicación inmediata de los conceptos aprendidos.
- ✓ El tiempo necesario para madurar los diferentes lenguajes, registros y modos de representación del álgebra lineal en los estudiantes es bastante dispar.

  Al moverse entre varios lenguajes, puntos de vista y registros semióticos, la comprensión del álgebra lineal requiere una “flexibilidad cognoscitiva”; y pese a los esfuerzos realizados no se logró erradicar esta confusión de lenguaje.
- ✓ Al usar las interpretaciones geométricas para entender los conceptos más abstractos y construir los conceptos algebraicos, se encontraron dificultades con ciertos temas.
- ✓ Las horas de consulta o asesoría son muy importantes al posibilitar que los alumnos las usen para cumplir con los requerimientos de la materia.
- ✓ El tiempo asignado al curso (50 horas semestrales) es un factor limitante en el aprendizaje del álgebra lineal, porque éste es un proceso largo que requiere una maduración de pensamiento y una evolución de los puntos de vista.

Además se sugiere:

- ✓ Una seria reflexión acerca de si las exposiciones deben considerarse como situaciones didácticas o a-didácticas.

- ✓ Rescatar el valor del error en las exposiciones, pues permite saber el tipo de dudas y confusiones que aparecen; además que el intercambio de preguntas facilitan el logro de una buena aprehensión de los conceptos.
- ✓ Fomentar que los alumnos resuelvan los ejercicios prácticos antes de las exposiciones, para que éstas y las discusiones que puedan surgir resulten

provechosas. Asimismo, incentivar a que resuelvan los ejercicios propuestos, puesto que las encuestas muestran que el rendimiento de los que lo hicieron fue mejor.

f.- "Tres modelos de enseñanza: Obstructores que generan errores en la resolución de problemas que utilizan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en telesecundaria" (2005); que presenta Verónica Rosainz, para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.[8]

Esta investigación de carácter cualitativo, concluye que los alumnos al resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales, tuvieron errores que, indican la complejidad propia de algunos conceptos matemáticos como cantidades desconocidas, igualdad, incógnita, sustitución numérica y algebraica, variable, entre otros.

1.3 Perspectiva teórica

Frente al problema planteado, el propósito de este trabajo es diseñar, elaborar, aplicar y validar una secuencia didáctica sobre los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y su aplicación en la solución de problemas de programación lineal siguiendo los procesos que señala la Ingeniería Didáctica y bajo el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Asumimos la Teoría de Situaciones, como propuesta de una didáctica de la matemática que promueve una auténtica construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante, a la vez que permite acercar dichas construcciones al conocimiento matemático formal a través del proceso de institucionalización.

En base al principio fundamental de esta teoría, de que todo conocimiento matemático puede caracterizarse por una o más situaciones o problemas, cuya solución sea posible a través de la aplicación de dicho conocimiento, es que planteamos situaciones a modo de actividades que consideramos deben motivar y generar el conocimiento sobre los sistemas de inecuaciones lineales así como su aplicación a la solución de problemas de programación lineal.

[8] Rosainz, V. (2005). Tres modelos de enseñanza: Obstructores que generan errores en la resolución de problemas que utilizan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en telesecundaria". México, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPEN.

Dicha situación, llamada situación fundamental[9], debe, como dice Brousseau, obligar a que el alumno modifique sus conocimientos y esquemas previos, y que el nuevo conocimiento se evidencie por respuestas nuevas, las que en definitiva constituyen la prueba del aprendizaje.

En esta perspectiva el rol del docente es fundamental, ya que en primer lugar tiene la delicada y difícil labor de diseñar o seleccionar situaciones que generen los conocimientos que se quiere que los alumnos aprendan o construyan, a la vez que les resulten accesibles; y en segundo lugar tiene la gran tarea de lograr que los alumnos acepten la situación y asuman la responsabilidad de construir sus propios aprendizajes.

La construcción de los aprendizajes será posible sólo si los alumnos interactúan con el problema o situación de manera independiente, es decir sin la intervención del docente, estas interacciones como propone Brousseau pueden ser de acción, formulación y validación; que consisten respectivamente en interacciones no codificadas, individuales y directas sobre la situación; interacciones grupales, intercambio de informaciones y hallazgos a través de un lenguaje matemático; y un intercambio de aseveraciones o enunciados acompañados de una argumentación.

En este proceso la intervención del docente se limita a brindar orientaciones generales, centrar la actividad de los estudiantes o desbloquear cuando sea necesario; por lo que se dice que estas interacciones son de naturaleza a-didáctica.

En síntesis, la Teoría de las Situaciones Didácticas es una teoría de la Matemática Educativa en el que se toman en cuenta todas las relaciones y operaciones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Complementariamente, la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación nos proporciona pautas específicas para la realización de un estudio de caso en cuanto a la enseñanza de la matemática poniendo énfasis en los acontecimientos que ocurren en el aula.

---

[9] Se llama situación fundamental correspondiente a un conocimiento matemático concreto, a un conjunto mínimo de situaciones a-didácticas específicas a un conocimiento que permite engendrar, por manipulación de los valores de sus variables didácticas, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación del conocimiento en cuestión. (Chevalard y otros, 2005, p. 230).

1.4 Objetivos de la investigación

Objetivo General

A través del presente trabajo nos proponemos:

Diseñar, elaborar, aplicar y validar una secuencia didáctica sobre los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal, en el Instituto Superior Tecnológico Público “Simón Bolívar” con los estudiantes del Segundo Semestre Académico de la carrera técnico profesional de Tecnología de Análisis Químico-turno diurno.

Objetivos Específicos

Para alcanzar el Objetivo General, enunciado en el numeral anterior; se deben lograr los siguientes objetivos específicos:

a. Ubicar, analizar y seleccionar los planteamientos teórico-científicos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de los Sistemas de Inecuaciones Lineales y la Teoría de las Situaciones Didácticas.

b. Diseñar y elaborar una Secuencia Didáctica sobre los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación Lineal, basada en la teoría de situaciones y siguiendo el proceso metodológico de la ingeniería didáctica.

c. Aplicar y validar la secuencia didáctica propuesta en el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica; incorporando la valoración de la propuesta que hacen los estudiantes.

d. Proponer recomendaciones que contribuyan a mejorar el diseño, la elaboración y la aplicación de la secuencia didáctica propuesta.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

El propósito del presente capítulo es señalar los aspectos fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico, y la Ingeniería Didáctica como marco metodológico; que nos permitirán diseñar, implementar, ejecutar y validar la presente investigación.

2.1 La teoría de las situaciones didácticas

2.1.1 Fundamentos

La Teoría de las Situaciones Didácticas fue desarrollada por Guy Brousseau, dentro de un contexto de gran inquietud por descubrir, interpretar y explicar los fenómenos y procesos relacionados a la adquisición y transmisión del conocimiento matemático. Es decir, con la intención de construir e interpretar la didáctica de la matemática como un saber científico, en lugar de circunscribirlo a un mero saber técnico como concebía la didáctica tradicional.

Brousseau, junto a otros investigadores, se dio cuenta de la necesidad de usar -en didáctica de la matemática- un modelo propio de la actividad matemática. En esta idea se basa el principio metodológico fundamental de la teoría de situaciones: definir un ***conocimiento matemático*** mediante una ***"situación"***, que modela los problemas que sólo este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau, 1994).

Según la teoría psicogenética de Piaget, "el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios" (Sadovsky, 2005, p. 2); a lo que Brousseau acota, que si dicho medio careciese de intenciones didácticas resultaría insuficiente para inducir al alumno a la adquisición de los conocimientos que se quisiera que aprenda.

La preocupación de Brousseau se centra en la búsqueda de las condiciones de enseñanza que garanticen que los alumnos se involucren en actividades verdaderamente matemáticas; es decir, que regulen sus procesos de aprendizaje independientemente del criterio del docente, que no imiten procedimientos o rutinas de otros, y que el logro de sus aprendizajes no dependa de lo que el docente espera de ellos. Por lo que propone "un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar" (Sadovsky, 2005, p. 2).

Entendiendo que ***producir conocimientos*** significa establecer, transformar y reorganizar relaciones, y validarlos de acuerdo a las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática; además que:

> "Saber matemática" no significa solamente saber definiciones y teoremas, y reconocer situaciones donde aplicarlos; sino que exige que el alumno sea partícipe de la actividad matemática, es decir, que formule enunciados, que pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, y que verifique si son concordantes con la cultura matemática". (Chevallard y otros, 2005, p. 227)

La Teoría de Situaciones postula que para todo conocimiento matemático, es posible construir una "***situación fundamental***" que representa la problemática que permite que surja dicho conocimiento como la estrategia óptima para resolver dicho problema. En este contexto,

> Aprender un conocimiento matemático significa adaptarse a una situación a-didáctica específica de dicho conocimiento, lo que se manifiesta mediante un cambio de estrategia del alumno que le lleva a poner en práctica la estrategia óptima de manera estable en el tiempo, y estable respecto a los diferentes valores de las variables de la situación a-didáctica en cuestión. (Chevalard y otros, 2005, p. 230)

Por ello, se considera que ésta es una teoría de la enseñanza que busca las condiciones del "origen artificial" de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea. En este sentido, el rol del docente es fundamental en la selección y elaboración de situaciones que hagan posible que el conocimiento que se quiere que aprendan los alumnos surja como la mejor solución a la misma. Aunque además tiene el reto de hacer que el alumno acepte la situación y asuma la responsabilidad de la construcción de su aprendizaje.

2.1.2 Conceptos básicos

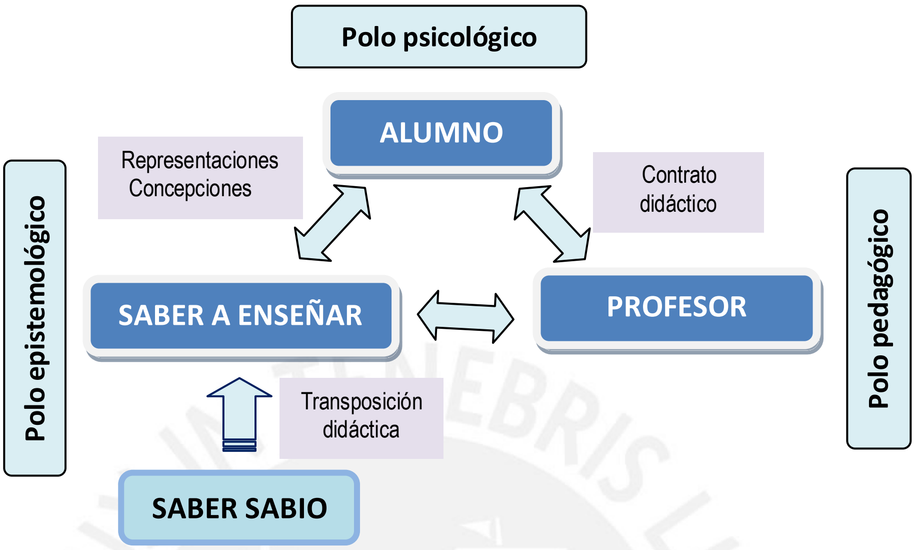
a.- Situación didáctica

La situación o problema elegido por el profesor, es un elemento que genera interacción entre el docente, el alumno y el mismo problema.[10] Este conjunto de

[10] En tal razón, se dice que la Teoría de Situaciones se ubica dentro de un enfoque sistémico, ya que considera a la didáctica de la matemática como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo, en el que se encuentra el docente, y los alumnos.

interacciones alrededor de estos tres elementos es lo que se denomina situación didáctica.

Enfoque sistémico de la didáctica de la matemática [11]



Es decir, una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (Brousseau, 1982 citado en Panizza, s.f., p. 3)

De manera que la situación didáctica es construida intencionalmente por el profesor con el propósito de facilitar a los alumnos la adquisición de un determinado conocimiento, teniendo en cuenta dos condiciones esenciales:

- *El carácter de necesidad de los conocimientos,* que significa que: la situación didáctica se organiza de manera que el conocimiento sea necesario para la resolución del problema, es decir que, la situación no puede ser abordada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos que se pretende que los alumnos aprendan.

- *La noción de "retroacción" o "sanción",* que quiere decir que: *l*a situación debe estar organizada de tal manera que el *medio* ofrezca al alumno información sobre su producción o elaboración.

[11] Lezama, F. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas; página 3.

b.- Medio

El medio es un elemento fundamental dentro de la noción de situación didáctica, y está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y puede emplear con seguridad, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el propósito de que pueda lograr el aprendizaje esperado. Es importante hacer señalar que el profesor forma parte del medio.

c.- Situación a-didáctica

Las interacciones entre el alumno y el medio se describen a partir del concepto teórico de *situación a-didáctica*, que modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación del docente". (Sadovsky, 2005, p. 3)

Es decir, una situación a-didáctica es una situación matemática específica a un conocimiento, que por sí misma genera aprendizajes en el alumno; aprendizajes que permanecen estables en el tiempo y respecto a las variables de la situación.

En la teoría de situaciones, el concepto de situación a-didáctica es fundamental, puesto que constituye una condición necesaria de una verdadera construcción del conocimiento por parte del estudiante.

La no intencionalidad de este concepto se refiere a que el alumno asume el compromiso y la responsabilidad de su aprendizaje lo más independientemente posible de la acción del docente. Debe relacionarse con el problema motivado por éste, movilizando los conocimientos y estrategias que crea convenientes y no por las intenciones del docente. Esta interacción es la que le permitirá modificar sus esquemas y producir conocimiento.

> El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, pues sólo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional". (Brousseau, 1986, 14)

Por lo tanto, es de suma importancia elegir situaciones que ofrezcan al alumno la posibilidad de construir el conocimiento, teniendo en cuenta que resulta muy útil un tipo de problemas con condiciones variables cuyas particularidades se vayan fijando progresivamente.

Las situaciones a-didácticas deben asimismo ofrecer al alumno la posibilidad de validar los resultados de su acción y conocer la pertinencia de sus decisiones de acuerdo a los resultados que obtenga, e intentar nuevas formas de solución si fueran necesarias.

d.- Variable didáctica

Las variables de una situación matemática son elementos susceptibles de tomar diferentes valores y capaces de generar cambios en las estrategias de solución. Precisando:

> Una variable de una situación a-didáctica se llama *variable didáctica* si sus valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor. Partiendo de un conocimiento concreto y de una situación a-didáctica específica de dicho conocimiento, la modificación de los valores de las variables didácticas de esta situación a-didáctica permite engendrar un tipo de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución. (Chevallard y otros, p. 230; 2005).

Significa que, con el propósito de asegurar que los alumnos logren realmente construir un conocimiento matemático específico, es necesario que lo aborde desde diversas perspectivas, lo que exige introducir cambios a la situación para obligar al alumno a poner en juego nuevas y diversas estrategias de solución.

e.- Devolución

La concepción de la situación a-didáctica como una fase de aprendizaje y no de enseñanza, implica la “no intervención” del docente; sin embargo la entrada a esta fase es gestionada por el mismo maestro.

> La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia. (Brousseau, 1998, citado en Panizza, s.f., p. 5)

Es decir, la devolución de una situación a-didáctica consiste, no sólo en presentar al alumno el problema y las reglas de juego, sino, además, en hacer que el alumno se sienta responsable de la búsqueda de la solución; sin que ello signifique que el maestro abandone sus propias responsabilidades, más por el contrario, es el responsable de que el alumno asuma un compromiso permanente con el problema y la construcción del conocimiento.

De manera que, en este contexto, “la enseñanza es la devolución al alumno de una situación a-didáctica correcta; y el aprendizaje es una adaptación a esta situación” (Brousseau, 1986, p. 15)

f.- El contrato didáctico

El contrato didáctico constituye un sistema de relaciones recíprocas entre el profesor y el alumno, determinado por un conocimiento matemático específico.

La labor del maestro no es comunicar el conocimiento, sino su responsabilidad es la devolución al alumno de un “buen problema”. Si el alumno no, acepta el problema o no lo puede resolver, tiene la obligación de ayudarlo o inclusive reconocer que formuló un problema complejo y reformularlo.

En esta mutua relación se define lo que el maestro y el alumno tienen la responsabilidad de hacer, y de aquello que cada uno debe asumir frente al otro. Así, “El contrato didáctico regula las relaciones que el maestro y los alumnos mantienen con el saber, establece derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar”. (Brousseau, 1986, p. 15)

Este contrato puede modificarse de acuerdo a la relación que establece el alumno con la situación; por ejemplo, si el estudiante se resistiera a la devolución de la situación, la acción del profesor tendría necesariamente que cambiar. Asimismo, tiene la delicada misión de saber y decidir en qué momento brindar información, formular preguntas, sugerir estrategias, y en qué otros momentos debe abstenerse de intervenir.

2.1.3 Tipos de interacciones con el medio

La teoría de situaciones distingue tres categorías de relaciones que se pueden establecer entre el alumno y el medio:

- ✓ Los intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje (***acción***).

- ✓ Los intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (***formulación***).
- ✓ Los intercambios de opinión (***validación***).

a.- Situaciones de acción

Toda situación de acción propone al alumno un problema en unas condiciones tales que la mejor solución se obtiene mediante el conocimiento a enseñar, y de tal forma que el alumno puede actuar sobre la situación y hacer elecciones durante esta acción, al tiempo que la situación le devuelve información sobre las consecuencias de su acción". (Chevalard y otros, 2005, p. 230)

Son situaciones en las que el alumno interactúa individualmente con el medio didáctico, intenta resolver el problema aplicando sus conocimientos previos. No se trata de una situación de manipulación libre, ni una acción con orientaciones preestablecidas, sino que son acciones guiadas por la misma situación, la que permite al alumno juzgar el resultado de sus acciones para corregir y mejorarlas.

Para tal efecto, la formulación de la situación debe ser tal, que despierte el interés del estudiante, y cuya respuesta no sea obvia; de modo que resulte un verdadero problema para el estudiante. Es un proceso generalmente no lingüístico y debe darse sin la intervención del docente.

b.- Situación de formulación

"Son situaciones centradas en la comunicación, en las que los estudiantes comunican los resultados de sus trabajos a otros estudiantes y al profesor". (Godino, s.f., diapositiva Nº 53).

En este tipo de situaciones los estudiantes explicitan sus modelos implícitos de la etapa anterior, comunican y comparten mensajes orales o escritos acerca de lo encontrado, sus experiencias y exploraciones respecto al problema planteado; y es conveniente que lo hagan usando el lenguaje matemático aunque sea incipiente. Es la etapa de interacción colectiva con el medio didáctico.

c.- Situación de validación

Es el momento en el que los estudiantes deben demostrar o justificar la validez (exactitud y pertinencia) de sus construcciones expresadas a modo de proposiciones o teoremas ante sus compañeros (o cualquier interlocutor) usando de preferencia argumentos teóricos más que empíricos.

"Las afirmaciones propuestas por cada grupo (*proponente)* son sometidas a la consideración del otro grupo *(oponente)*, que debe tener la capacidad de "sancionarlas"; es decir, aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, u oponer otras aserciones". (Panizza, s.f., p. 6).

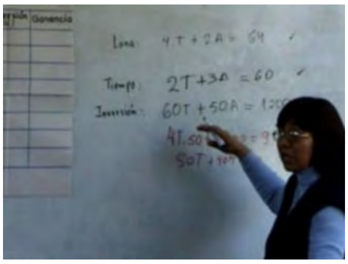
Aunque como es comprensible el proceso de validación dentro de la noción de a-didáctico es una acción permanente y transversal, pues en las situaciones de acción se validan acciones; en las situaciones de formulación se validan mensajes y, propiamente en las situaciones de validación se validan proposiciones o teoremas.

Si bien, una situación de validación supone la formulación de una proposición, y la formulación de una proposición supone una acción interiorizada, además que el orden como se presentan estas situaciones sea apropiado en la mayoría de los casos; es posible encontrar casos en los que este proceso no se dé necesariamente en ese orden. Como también podríamos encontrar conocimientos que funcionen implícitamente y cuya formulación explícita sea conveniente dejarla para después, o bien, conocimientos que se formulen explícitamente, cuya validación explícita no sea apropiada para el nivel de escolaridad.

d.- La institucionalización

Por lo general, los estudiantes no disponen aún de los medios para descontextualizar y darle un estatus científico y cultural a los nuevos conocimientos; esta es función de la institucionalización y responsabilidad del docente.

Es el momento de la formalización del conocimiento a partir de las producciones de los alumnos, de la confrontación de dichas construcciones y el saber cultural o científico; de ninguna manera debe reducirse a una presentación del saber cultural desvinculado de la producción de los alumnos.



La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. (Brousseau, 1994 citado en Panizza, p. 7)

Inversamente a la devolución, la institucionalización consiste en dar un estatuto cultural a las producciones de los alumnos; actividades, lenguajes, conocimientos expresados en proposiciones. Constituye, junto a la devolución, una de las actividades principales del profesor. (Chevalard y otros, 2005, p. 234).

La institucionalización del conocimiento es una actividad de suma importancia en el cierre de una situación didáctica. En esta etapa se sacan conclusiones, se sistematiza, se ordena, se vincula y se recapitula a partir de lo producido por los alumnos en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, centrando la atención sobre los hechos “importantes”, los procedimientos, las ideas y la terminología oficial.

La institucionalización es de alguna manera complementaria al proceso de devolución; en estos dos procesos, Brousseau reconoce los roles principales del maestro:

> “(…) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica ... En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones “libres” del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status”. (Brousseau, 1986 citado en Panizza, p. 7)

Como es evidente, las situaciones de enseñanza tradicionales carentes de situaciones a-didácticas, se reducen a actividades de institucionalización; pero, en las que no cuenta el aporte o producción de los estudiantes; sólo se expone, comunica y explica lo que se desea que el alumno “aprenda”; y luego se verifica el aprendizaje.

2.2 La ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica surge en la didáctica de la matemática francesa, a principios de los años ochenta del siglo pasado, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. Asume esta denominación por la analogía del trabajo didáctico con la actividad del ingeniero.

Una ingeniería didáctica consiste en concebir un proceso de enseñanza que responda a objetivos de aprendizaje determinados a priori en función de un marco teórico y el planteamiento de un conjunto de hipótesis, llevar a cabo dicho proceso, recabar observaciones y confrontar las observaciones con lo que se esperaba.

Según Douady, "(…) el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos." (1995, p. 61)

Mientras que como metodología de investigación:

> (…) la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza"; [además] "(…) se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es interna, basada en la confrontación del análisis a priori y el análisis a posteriori". (Artigue, 1995, p. 36).

Puesto que su sustento teórico proviene de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y la teoría de la transposición didáctica de Chevallard, la ingeniería didáctica tiene una visión sistémica de la didáctica de la matemática; es decir, la entiende como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos.

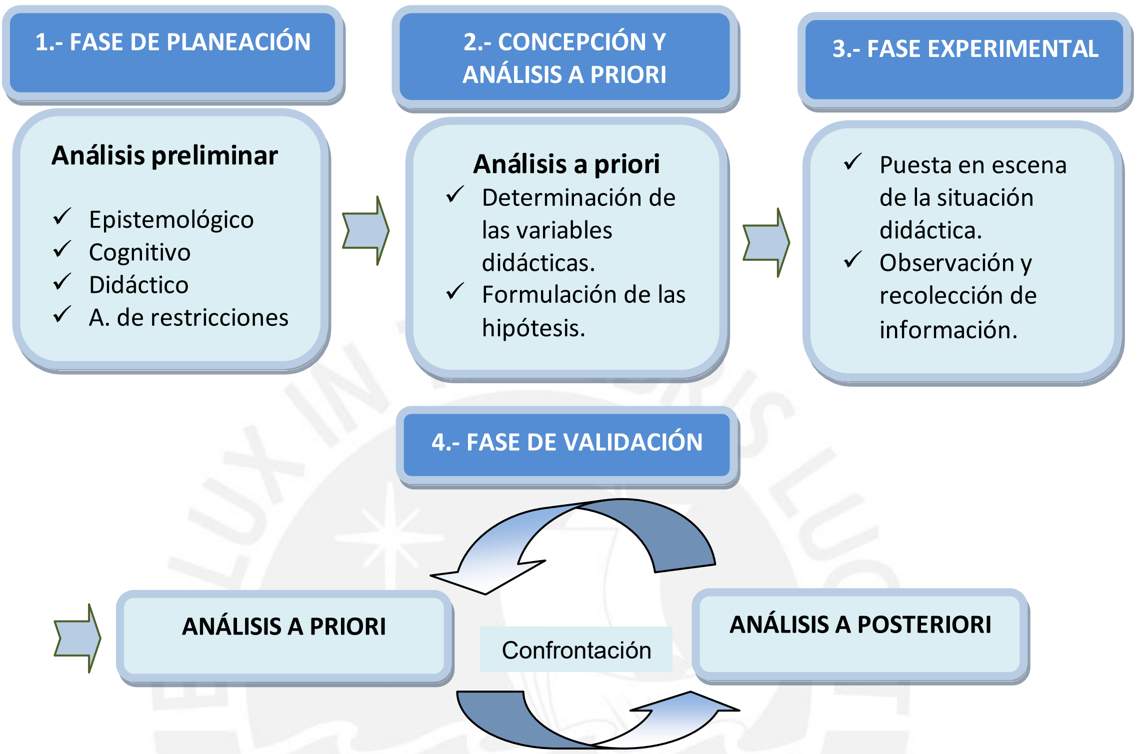
Por lo que, como afirma Artigue, en el proceso de construcción de ingenierías didácticas se distinguen tres dimensiones fundamentales; la dimensión epistemológica, asociada a las características del saber; la dimensión cognitiva, relacionada a las características cognitivas de los alumnos; y la dimensión didáctica, referida a las características del sistema de enseñanza.

2.2.1 Fases de la ingeniería didáctica

En el proceso de construcción de ingenierías didácticas se distinguen cuatro fases fundamentales; se inicia con un análisis preliminar, sigue la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, luego sigue la fase experimental, y se concluye con el análisis a posteriori y la validación.

INGENIERÍA DIDÁCTICA

Metodología de investigación e instrumento para la elaboración de productos para la enseñanza. (Lezama, 2003). (Modificado)



a.- Análisis preliminar

Para la concepción de una ingeniería didáctica es necesario realizar análisis preliminares respecto al aspecto teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos relacionados con el tema, en función de los objetivos específicos de la investigación; los que se van retomando y profundizando en las distintas fases.

Entre las diversas consideraciones dentro de un análisis preliminar, Artigue resalta básicamente las siguientes:

- ✓ El *análisis epistemológico,* referente a los contenidos contemplados en la enseñanza (***dimensión epistemológica***).
- ✓ El análisis del proceso de enseñanza del objeto matemático en estudio en la institución educativa, y sus efectos (***dimensión didáctica***).
- ✓ El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada (***dimensión cognitiva***).
- ✓ El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Así, en el análisis preliminar se pueden revisar programas, textos y libros de historia de la matemática para los análisis epistemológicos y didácticos, y elaborar cuestionarios para identificar las concepciones de los estudiantes respecto al objeto de estudio.

b.- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Es la etapa del diseño y elaboración de la ingeniería y el análisis a priori de las situaciones didácticas. En base al análisis de restricciones realizado en la etapa anterior, se deben tomar decisiones sobre el tipo de herramientas o estrategias a usar (informáticos u otros), sobre si se desarrollarán los prerrequisitos, sobre el nivel de tratamiento que se dará al tema, entre otros. Estas son las que Artigue denomina variables macrodidácticas que el investigador considera pertinentes respecto al problema en estudio.

Además de estas variables referidas a la organización global de la secuencia, se deben determinar también las variables microdidácticas, referidas a la organización de la secuencia.

Asimismo se establecen las hipótesis de trabajo, sobre lo que harán los estudiantes con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador.

Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, es decir, caracterizado el obstáculo que se desea confrontar, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, la cual debe crear un medio propicio para que el alumno acepte la responsabilidad de su propio aprendizaje y se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto en juego.

En la elaboración de las situaciones didácticas que serán aplicadas en la fase experimental es necesario considerar las distintas formas de interacción que tendrán los estudiantes con el medio didáctico (acción, formulación y validación).

Como se dijo, la validación en la ingeniería didáctica es interna; y se inicia desde la fase de concepción de la secuencia, a través del análisis a priori de las situaciones didácticas.

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir… que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones”. (Artigue, 1995, p. 44).

De esta manera el análisis a priori es descriptiva y predictiva a la vez, puesto que, en base a las características de la situación a-didáctica que se ha diseñado:

- Se describen las características de la situación didáctica.
- Se analiza aquello que podría estar en juego para los estudiantes, en función de las posibilidades de acción, selección, decisión, control y validación de las que dispone.
- Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar que los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento.

En suma, el propósito del **análisis a priori** es determinar si las restricciones consideradas sobre el sistema didáctico y las variables elegidas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y los significados construidos, basado en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes.

La validación de estas hipótesis se basa en la confrontación que se realiza entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (en la cuarta fase).

c.- Experimentación

Es la fase de la realización de la ingeniería, llamada también “puesta en escena” de la situación diseñada; se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor con la población de estudiantes que participan en la investigación; supone:

- La información de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes participantes.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones.

Con la finalidad de realizar el análisis posterior, es importante recoger información sobre el funcionamiento del sistema didáctico; es decir información referida a:

- *Actuación del profesor*: cómo estableció y manejó el contrato didáctico, cómo realizó la devolución de las situaciones y cómo realizó la institucionalización del conocimiento.
- *Actuación del estudiante*: cómo se involucró en el proceso didáctico, cómo reaccionó frente a las variables didácticas, etc.
- *Funcionamiento de la situación misma*: cómo su formulación permitió (o no) la devolución.

Durante esta etapa se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en el análisis a priori.

d.- Análisis a posteriori y validación

El análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos en la fase de experimentación a través de las observaciones realizadas y a partir de las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la aplicación de cuestionarios, entrevistas, u otros instrumentos.

Este proceso consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acontecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma.

Esta validación, a diferencia de otros, en los que el éxito se mide comparando los resultados del grupo experimental y los del grupo de control, es decir, entre los resultados externos a la situación planteada en sí misma, en la Ingeniería Didáctica, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma, lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, entre las conjeturas y expectativas que fueron explicitadas en el análisis a priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a posteriori, buscando lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado. Es decir: "…en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación". (Artigue, 1995, p. 48).

De las consideraciones realizadas, y del hecho que la validación de una Ingeniería Didáctica surge de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERIA

La investigación en el campo de la enseñanza de la matemática no se limita a la observación y análisis de los procesos que se producen en el aula, sino que como corresponde al propósito del presente trabajo, consisten también en el diseño de situaciones didácticas que se llevan al aula y se analizan para determinar las condiciones en las que se produce la construcción y apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

CAPITULO III: ANALISIS PRELIMINAR

El análisis preliminar que corresponde al presente estudio se desarrolla desde una perspectiva sistémica, es decir, considerando el saber matemático en juego, la situación de la enseñanza (donde se encuentra el profesor), el estudiante y las relaciones entre ellos.

3.1 Análisis epistemológico

Aquí presentamos los fundamentos de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y la programación lineal, que constituyen el sustento epistemológico disciplinar del presente trabajo.

3.1.1 Referencias históricas acerca de los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal

En la historia del álgebra existe poca información acerca del origen de las inecuaciones. Sin embargo, es evidente que su desarrollo aunque posterior, transcurriera ligado a la historia de las ecuaciones.

Las referencias más antiguas acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, las encontramos tanto en la matemática babilónica como en la matemática china; pero nada se dice respecto a los sistemas de inecuaciones.

Encontramos en cambio referencias explícitas respecto a la Programación Lineal, que a pesar que recién en el Siglo XX alcanzara su mayor desarrollo, las bases del método que actualmente se usa fueron desarrollados por Fourier en el siglo XVI; o más aún, como parte de la teoría de la optimización, sus orígenes se remontarían a épocas clásicas ligados a problemas de naturaleza geométrica y física principalmente.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal fueron desarrollados por J. von Neuman, en 1928 (relacionados a la teoría de juegos); luego Kantorovitch en 1939 plantea las ideas básicas de la teoría y los respectivos algoritmos (en base a la organización y planificación de la producción)

Pero fue G. Dantzig en 1947, quien le dio un mayor impulso a esta rama de la matemática al proponer uno de los métodos más importantes, como es el Método Simplex (ligado a estrategias militares). Éste, junto a los ordenadores y las técnicas de computación que evolucionaban en forma paralela en esa época, contribuyeron a simplificar significativamente la solución de los problemas de programación lineal.

Finalmente, en 1984 el matemático hindú Narendra Karmarkar a través de su obra "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", reactiva la investigación en esta área proponiendo un método que actualmente se usa para la resolución de problemas con un gran número de variables.

Actualmente, la utilidad de los métodos de la Programación Lineal es de tal magnitud que: "se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año"...[12]

3.1.2 Los sistemas de inecuaciones lineales

Dado el objeto matemático a tratar en la presente investigación, se considerarán como significados de referencia los siguientes:

a.- Inecuaciones lineales

"Ya se han estudiado las ecuaciones o igualdades lineales de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales, con A ≠ 0, ó, B ≠ 0. Si sustituimos el signo igual por cualquiera de los signos >, <, ≥ o ≤ se obtiene una desigualdad lineal". (Mizrahi y Sullivan, 1978, p. 183)

En general, si en la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ reemplazamos el signo igual (=) por cualquiera de los signos > , < , ≥ *o* ≤ se obtiene una **inecuación** (o desigualdad) **lineal**.

[12] Extraído de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/intro.html el 23/02/07

Así, $3x+2y<6$ y $x_1-4x_2+x_3-1\geq 0$ son ejemplos de inecuaciones lineales.

b.- Solución de inecuaciones lineales con dos variables

"El conjunto de puntos que pertenecen a la gráfica de una desigualdad lineal, generalmente se denomina un **semiplano**". (Mizrahi y Sullivan, 1978, p. 186)

El procedimiento para resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos variables de la forma $ax+by+c>0$; se basa en el siguiente teorema:

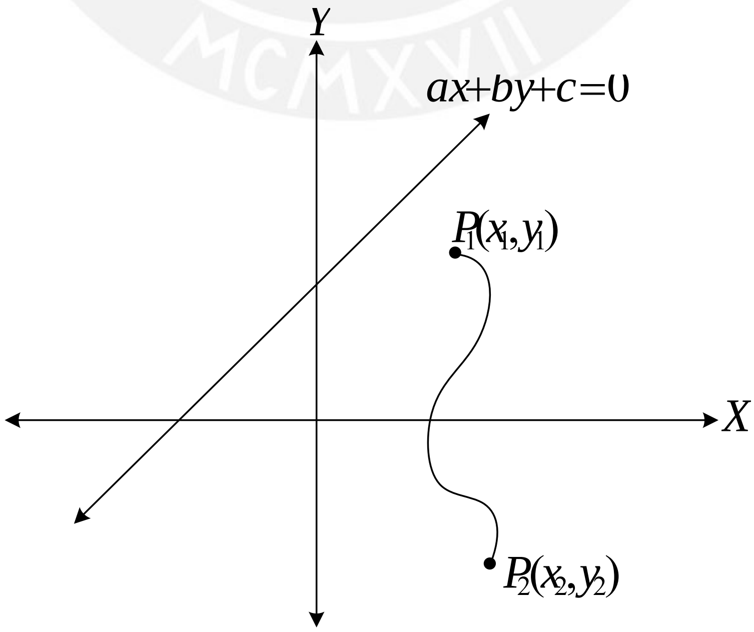
Teorema:

"Sea **P** un punto de uno de los semiplanos en que la gráfica de $ax+by+c=0$ divide al plano. Si $ax+by+c>0$ en P, entonces, $ax+by+c>0$ en todos los puntos del semiplano en que se encuentra P". (Allendoerfer, 1973, p. 211)

Demostración:

Sean los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$. Supongamos que ambos pertenecen a un mismo semiplano, pero que $ax+by+c>0$ en P_1 y que $ax+by+c<0$ en P_2; es decir que: $ax_1+by_1+c>0$ y $ax_2+by_2+c<0$

Sea la curva P_1P_2 contenida en el semiplano abierto $ax+by+c>0$, y supongamos que $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ se mueve a lo largo de esa curva, desde P_1 hasta P_2.



Entonces, en P_1, se cumple que: $a\bar{x}+b\bar{y}+c>0$, mientras que en P_2, $a\bar{x}+b\bar{y}+c<0$.

Luego, debe existir un punto sobre la curva P_1P_2 en el cual $a\bar{x}+b\bar{y}+c=0$, lo que significa que dicho punto tendría que pertenecer a la recta dada.

Pero, esto contradice lo asumido, pues la curva P_1P_2 no tiene puntos comunes con dicha recta.

Por lo tanto, el teorema queda demostrado.

Como resultado de este teorema, tenemos el siguiente **procedimiento** para trazar la gráfica del conjunto solución de una inecuación lineal.

1º Trácese la gráfica de la recta $ax+by+c=0$.

2º Tómese un punto de cada uno de los semiplanos determinados por esta recta y compruébese si verifican la inecuación dada**.**

3º Sombréese el semiplano o los semiplanos correspondientes a los puntos que verifican la inecuación.

Observación: Si $ax+by+c>0$ es un semiplano, entonces $ax+by+c<0$ es el otro semiplano.

Tomando en cuenta esta observación, el procedimiento para trazar la gráfica de una inecuación lineal se puede simplificar de la siguiente manera:

1º Graficar la ecuación lineal asociada $ax+by+c=0$.

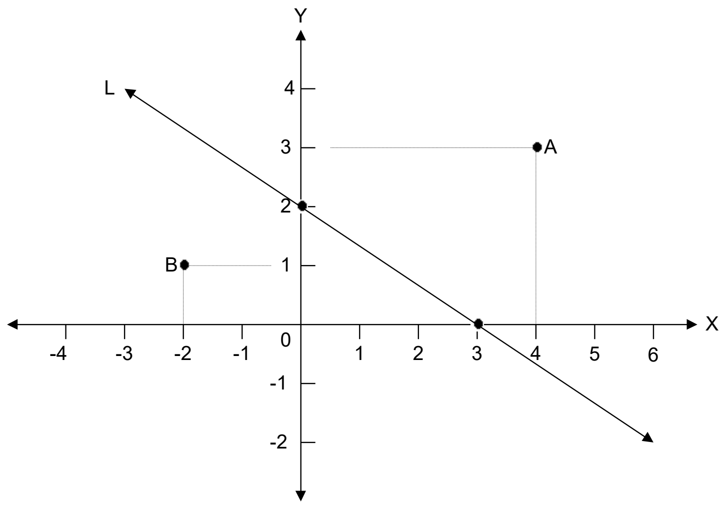
2º Tomar un punto en uno de los semiplanos determinados por esta recta y verificar si satisface la desigualdad $ax+by+c>0$.

3º Si el punto satisface la desigualdad, el semiplano donde se encuentra dicho punto es el conjunto solución de la inecuación; en caso contrario es el semiplano opuesto.

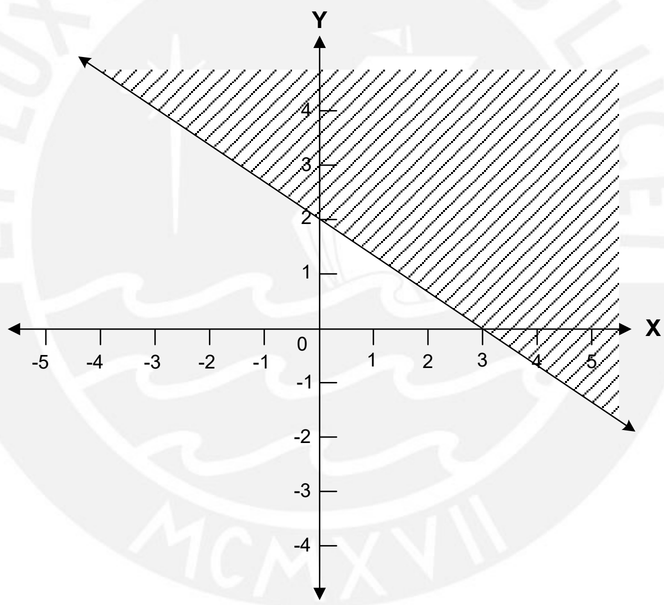
A través del siguiente ejemplo, se muestra la aplicación de estos resultados.

Sea la inecuación: $2x+3y\geq 6$

1. Al graficar la ecuación $2x+3y=6$ se tiene la recta **L** que muestra la siguiente figura.



2. Si tomamos el punto A (4,3) se comprueba que dicho punto satisface la desigualdad.
3. Lo que significa que la solución de la inecuación $2x+3y \geq 6$ es el semiplano donde se encuentra dicho punto, tal como aparece en el siguiente gráfico.



Observaciones:

- Si en lugar del punto A (4,3), se elije un punto del semiplano opuesto como el origen de coordenadas o el punto B (-2,1); se comprueba que no satisfacen la inecuación; lo que confirma que el semiplano solución es aquél en el que se encuentra el punto A.

- La recta **L** forma parte de la solución, puesto que los puntos como (3, 0) y (0, 2) satisfacen la inecuación. Si no fuera así se tendría que trazar en forma discontinua, o dejar indicado de alguna otra manera.

c.- Sistema de inecuaciones lineales

"Un sistema de ecuaciones lineales y n incógnitas tiene la siguiente representación algebraica:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

donde los a_{ij} son coeficientes conocidos, los b_i son constantes dadas y los x_j son las incógnitas del sistema". (De Lima, 1972, p. 7)

Además, "el conjunto solución del sistema es el conjunto de valores que son soluciones de cada una de las ecuaciones del sistema". (Sáenz, 1978, p. 210)

Definición

Extendiendo el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, un sistema de ***m*** inecuaciones lineales con ***n*** incógnitas tiene la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \qquad (*)$$

o lo que es lo mismo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$$, para *i = 1, 2, …, m.* (De Lima, 1972, p. 7)

En este caso, son válidas las mismas convenciones y definiciones usadas para los sistemas de ecuaciones lineales.

d.- Solución de sistemas de inecuaciones lineales

En general, los puntos que satisfacen una desigualdad lineal $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i$ definen un ***semi-espacio*** en el espacio R^n.

Luego, la **solución del sistema (∗)** es la intersección de dichos semi-espacios que constituye una **región convexa** [13].

[13] Sea C ⊂ R^n, C es convexo si y sólo si, el segmento determinado por cualquier par de puntos de C está incluido en C. (Rojo, 1978, p. 336).

Para resolver el sistema **(∗)** será necesario transformarlo en un sistema de ecuaciones lineales equivalente. Para ello, consideremos una inecuación (**i)** del sistema. Esta inecuación es equivalente a la ecuación:

$$a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \text{, donde } x_{n+i} \geq 0 \text{, para i = 1, 2, …, m.}$$

Es decir, el sistema de desigualdades **(∗)** puede transformarse en un conjunto de ecuaciones, sumando a cada desigualdad un número no negativo desconocido; adoptando la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{array}$$

"La variable x_{n+i} es conocida como la **variable de holgura** de la inecuación **i**". (De Lima, 1972, p. 30)

Análogamente, la inecuación $a_{ij}x_j \geq b_i$, se puede transformar en ecuación restando un número no negativo: $a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$; donde $x_{n+i} \geq 0$, para i = 1, 2,…, m.

Los métodos de solución de sistemas de inecuaciones lineales se basan en esta transformación; sin embargo, para los fines del presente trabajo nos limitaremos a la fundamentación del método gráfico para resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

3.1.3 Método gráfico de solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables

Dado un sistema de inecuaciones lineales con dos variables, se grafica cada una de ellas siguiendo el procedimiento expuesto anteriormente; luego, la solución del sistema es la intersección de los semiplanos determinados por todos ellos.

Ejemplo*: Resolvamos el sistema de inecuaciones*

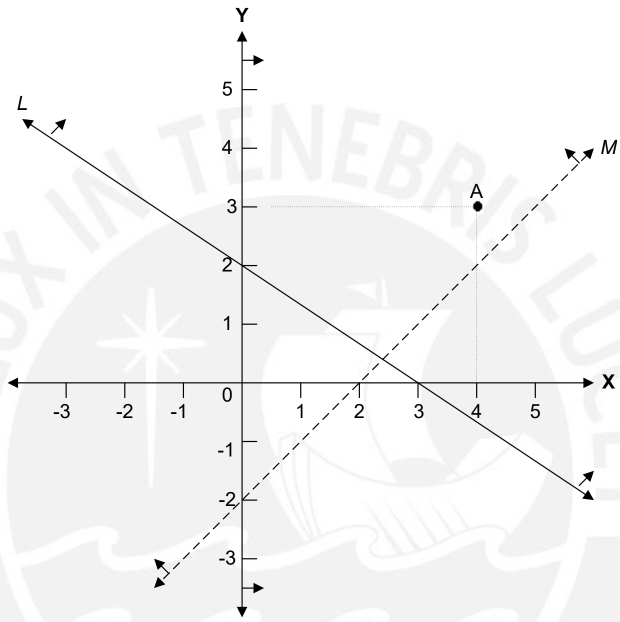
$$\begin{array}{l} 2x + 3y \geq 6 \\ x - y < 2 \\ x \geq 0 \end{array}$$

Para tal efecto, debemos graficar las tres desigualdades en un mismo plano coordenado.

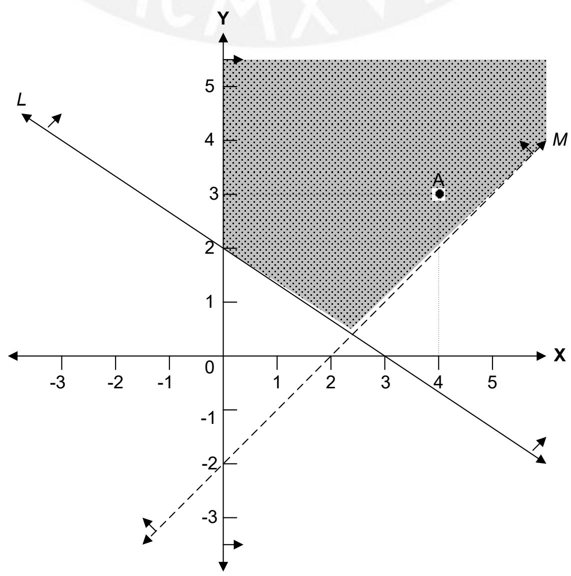
1º Al graficar la inecuación $2x+3y \geq 6$ se obtiene el **semiplano cerrado** que contiene al punto A (4; 3) y cuya frontera es la recta *L*.

2º La solución de la segunda inecuación es el **semiplano abierto** que también contiene al punto A, cuya frontera es la recta M.

3º Finalmente $x \geq 0$ determina el semiplano derecho respecto al eje Y, incluyendo a éste.



Luego, la **solución del sistema de inecuaciones** propuesto, es la región sombreada que representa la intersección de los tres semiplanos, como muestra el siguiente gráfico:



3.1.4 Aplicación de los sistemas de inecuaciones lineales a la programación lineal

La programación lineal consiste en la interpretación y solución de situaciones problemáticas aplicando modelos matemáticos lineales. En general, los problemas de programación lineal tratan del uso eficiente o la asignación racional de recursos limitados para alcanzar los objetivos deseados.

Las situaciones que se ajustan a estos modelos pertenecen a ámbitos muy diversos, que van desde el campo gubernamental, empresarial, industrial, económico, hasta situaciones de juego y estrategias militares.

En general, usando notación matricial, un problema de programación lineal con ***m*** restricciones (condiciones de vínculo) y ***n*** variables, puede expresarse de la siguiente manera (Rojo, 1978, p.352):

Minimizar (o maximizar) $f(X) = C^t X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ (función objetivo)

Sujeta a las restricciones:

$$AX \leq B \qquad \text{(Condiciones de vínculo)}$$

$$X \geq 0 \qquad \text{(Condiciones de no negatividad)}$$

donde $C \in R^{nx1}, X \in R^{nx1}, A \in R^{mxn}$ $y., B \in R^{mx1}$" .

Es decir, el objetivo de un problema de programación lineal consiste en minimizar o maximizar una función lineal, bajo ciertas condiciones expresadas mediante desigualdades lineales.

Una característica esencial de estos problemas es el gran número de soluciones que satisfacen las condiciones fundamentales o restricciones del problema, los que en su conjunto constituyen la región de las soluciones factibles o simplemente la región factible.

Teorema

"El conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo". (Gass, 1974, p.75) [Dicho conjunto puede ser abierto o cerrado].

La selección de una de estas soluciones, como la *mejor* solución o solución óptima dependerá de cierta meta u *objetivo* implícito en el planteamiento del problema.

De manera que, como sostiene Gass, “una solución que satisfaga tanto las condiciones del problema como el objetivo dado se denomina solución óptima” [del problema de programación lineal] (p. 19)

- **Ejemplo de solución de un problema de programación lineal.**

Si bien los problemas de programación lineal en contextos reales generalmente presentan muchas variables y las posibles formas de combinar los recursos disponibles son igualmente innumerables, la situación que presentamos a continuación, pese a tener sólo dos variables, resulta útil en el propósito de precisar los conceptos básicos y mostrar el proceso de solución.

Naranjos y manzanos…

“Alejandro, un pequeño agricultor, quiere plantar entre 600 y 1200m^2 de árboles frutales. Una parte de naranjos cuyas cepas cuestan S/. 5 cada una y otra parte de manzanos que cuestan S/. 10 cada una. Sus planes son destinar 2m^2 a cada cepa de naranjo y 1m^2 a cada manzano.

Pero, sólo dispone de S/. 7 000, de los cuales debe reservar S/. 1 000 para gastos de fertilizantes, insecticidas y otros. ¿Cuántas cepas de naranjos y manzanos le conviene plantar para maximizar su ganancia, si sabe que por cada planta madura de naranjo obtiene en promedio una ganancia de S/. 20 y por cada planta de manzano su ganancia es de S/. 25?”

Solución

Si designamos con x_1 la cantidad de cepas de naranjos y con x_2 las cepas de manzanos, las condiciones del problema quedarían expresadas por las siguientes inecuaciones:

- $600 \leq 2x_1 + x_2 \leq 1200$ *(Extensión de terreno que se dispone cultivar).*
- $5x_1 + 10x_2 \leq 6000$ *(El costo total de las cepas no puede exceder la cantidad disponible).*
- $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ *(Condiciones de no negatividad de las variables).*

Luego, tenemos el objetivo del problema, que consiste en obtener la *mayor ganancia* posible; por ello se debe **maximizar** [14] la función $G = 20x_1 + 25x_2$ bajo las condiciones dadas.

Como muestra el ejemplo, por lo general un problema de programación lineal trata de la **maximización** o **minimización** de una **función lineal**, llamada **función objetivo**, sujeta a un conjunto de condiciones expresadas a través de ecuaciones o **inecuaciones lineales** llamadas **restricciones** del problema.

Aunque una solución algebraica es matemáticamente más riguroso y formal, por lo tanto más eficiente; la solución geométrica es intuitivamente atractiva y ayuda a desarrollar una comprensión básica que luego se puede aplicar a problemas más complejos.

La solución geométrica de los problemas de Programación Lineal que no tengan más de dos variables, consiste en graficar las desigualdades de ***restricción*** para determinar la región de las *soluciones factibles* [15]; para luego determinar cuál de ellas optimiza [16] la función objetivo y por consiguiente es la solución del problema.

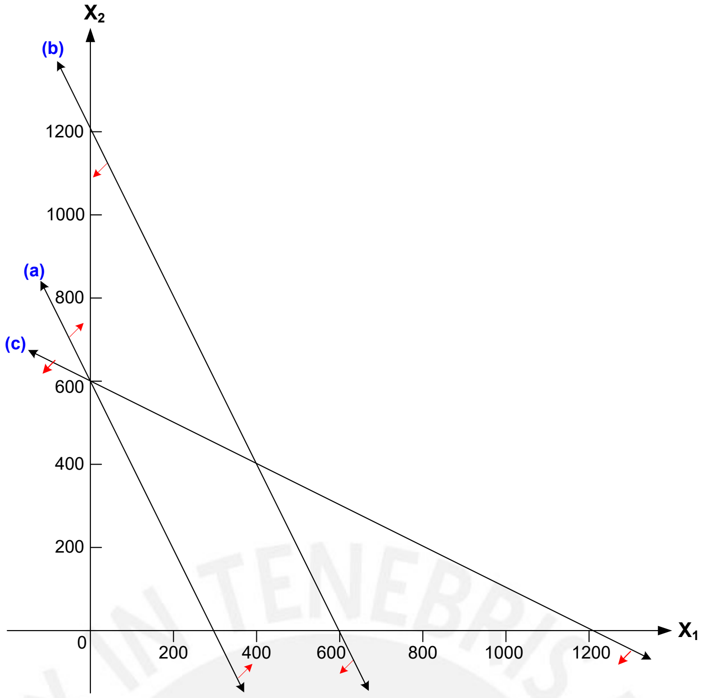
Organizando las *restricciones* del problema tenemos el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$2x_1 + x_2 \geq 600 \qquad \text{(a)}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 1200 \qquad \text{(b)}$$
$$5x + 10x_2 \leq 6000 \qquad \text{(c)}$$
$$x_1 \geq 0 \qquad \text{(d)}$$
$$x_2 \geq 0 \qquad \text{(e)}$$

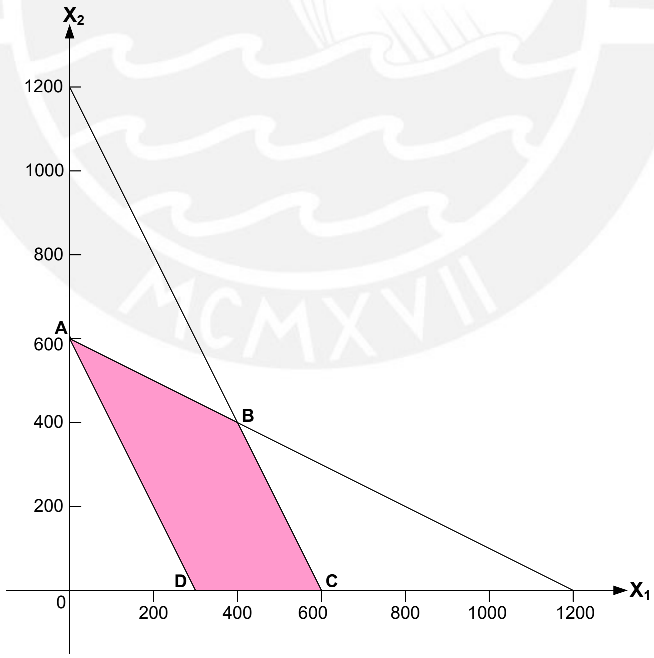
Al representar este sistema de inecuaciones en el plano coordenado, en primer lugar observamos que las dos últimas desigualdades restringen las soluciones al primer cuadrante. Luego al representar las tres primeras desigualdades en esta parte del plano, se obtiene el siguiente gráfico.

---

[14] Obtener la mayor ganancia posible.
[15] Una *solución* se dice *factible* si satisface todas las condiciones del problema
[16] Maximiza o minimiza.



De aquí, se concluye que la región de las soluciones factibles es la región limitada por el cuadrilátero ABCD, tal como se observa a continuación:



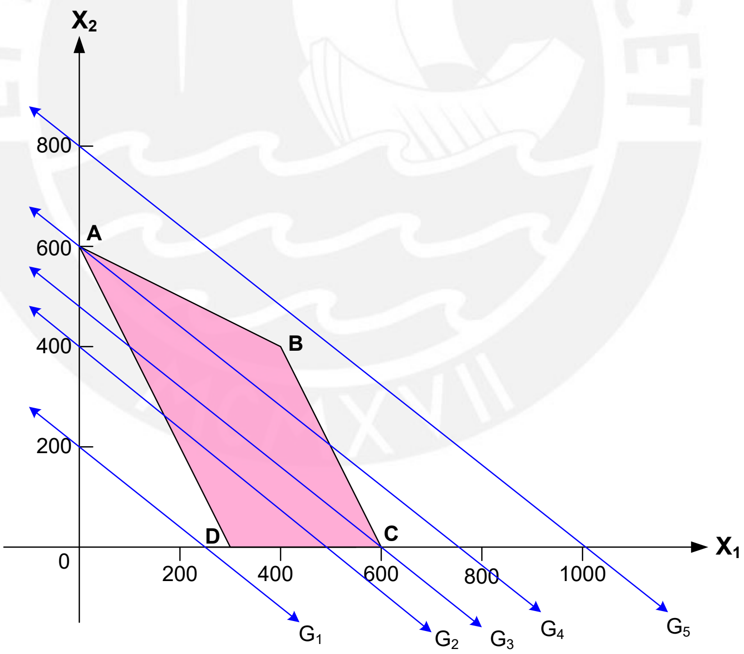
Según el Teorema 1, cualquier punto de la región sombreada podría ser la solución del problema; sin embargo, aún falta evaluar la función objetivo en cada uno de ellos. Pero esto es imposible puesto que los puntos a evaluar son infinitos.

Sólo para tener una idea de cómo varía dicha función ($G = 20x_1 + 25x_2$) en cada punto que se tome, veamos los siguientes casos:

- ☞ En el punto A (0; 600), obtenemos una ganancia de 15 000 soles.
- ☞ En el punto D (300; 0), la ganancia de 6 000 soles.
- ☞ En el punto (350; 250), la ganancia asciende a 13 250 soles.
- ☞ En el punto (250, 450) se obtiene una ganancia de 16 250 soles.
- ☞ En los puntos (400; 100) y (300; 180) la ganancia es de 10 500.

Entonces, surge la inquietud: ¿cómo saber que alguno de estos puntos es la solución del problema? Es decir, ¿alguno de los valores encontrados será la mayor ganancia que se pueda obtener?

Asignando a la función G los valores de 5 000, 10 000, 12 000, 15 000 y 20 000, y graficando cada una de ellas en el plano coordenado, obtenemos respectivamente las rectas G_1, G_2, G_3, G_4 y G_5; tal como se muestra a continuación:



Se trata de un conjunto de rectas paralelas, con pendiente $-\frac{4}{5}$, ***llamadas rectas de nivel,***[17] que a medida que el valor de la función G se incrementa, éstas se van alejando del origen de coordenadas.

[17] En general, las **rectas de nivel** asociadas a la función objetivo F = ax + by son las rectas ax + by = k, cuya pendiente es –a/b. Caro, A. en http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Programacion_lineal/program.htm.

Como el objetivo del problema es encontrar el mayor valor posible de G, con la ayuda de la gráfica podemos decir que dicho valor se debe encontrar en algún punto de la región factible comprendido entre las rectas G_4 y G_5, lo que significa que la máxima ganancia que se puede obtener está entre 15 000 y 20 000 soles.

Efectivamente, en puntos como (300, 420) y B (400, 400) que se encuentran en dicha región del plano obtenemos 17 250 y 18 000 de ganancia respectivamente. Pero, ¿cómo podemos tener la seguridad cuál de éstas es la solución?

Ante esta incertidumbre, el siguiente teorema nos permite determinar la solución óptima con precisión y mayor rapidez, pues reduce considerablemente el número de soluciones factibles a probar.

Teorema

*La función del objetivo alcanza su mínimo (o máximo) en un punto extremo del conjunto convexo **K**, generado por el conjunto de soluciones posibles al problema de programación lineal. Si alcanza este mínimo en más de un punto extremo, entonces toma el mismo valor para toda combinación convexa de estos puntos particulares*. (Gass, 1974, p.77).[18]

En otros términos, “si hay una única solución que maximiza o minimiza una función objetivo lineal, entonces esa solución debe ser un vértice del polígono de soluciones factibles; si hay más de una solución, por lo menos dos de las soluciones deben corresponder a vértices adyacentes del polígono de soluciones factibles”. (Draper, 1976, p. 618)

Entonces, aplicando este teorema bastará evaluar la función objetivo en los puntos A, B, C y D que son los vértices de la región de soluciones factibles.

VÉRTICE	FUNCIÓN OBJETIVO $G = 20x_1 + 25x_2$
A (0:600)	15 000
B (400;400)	**18 000**
C (600; 0)	12 000
D (300; 0)	6 000

[18] Para los propósitos del presente trabajo no se considera necesaria la demostración.

De esta manera concluimos que el punto **B** optimiza la función objetivo, lo que significa que plantando 400 cepas de naranjos y 400 de manzanos se obtendrá la máxima ganancia (S/. 18 000) bajo las condiciones establecidas.[19]

Glosario de términos básicos de la programación lineal

- ***Restricciones**:*
  Condiciones del problema, expresadas como ecuaciones o inecuaciones lineales.

- ***Función objetivo**:* Es la función lineal que representa el objetivo del problema.

- ***Solución posible o factible:***
  "…es todo vector de R^n que satisface las restricciones". (Rojo, 1978, p. 352).
  En nuestro caso son todos los pares de números reales que satisfacen las restricciones o condiciones del problema.

- ***Región de soluciones factibles:***
  Parte del plano donde se encuentran todas las soluciones factibles.

- ***Solución óptima:***
  "…es una solución posible que optimiza (minimiza o maximiza) la función objetivo". (Rojo, 1978, p. 352). Es decir, es un elemento de la región de soluciones factibles que maximiza o minimiza (según sea el caso) la función objetivo.

- ***Maximizar:*** Obtener el valor máximo.
- ***Minimizar:*** Obtener el valor mínimo.
- ***Optimizar:*** Obtener la mejor solución.

3.2 Análisis didáctico

3.2.1 La enseñanza de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con una variable en el ISTP "Simón Bolívar".

La enseñanza de los Sistemas de Inecuaciones Lineales y su aplicación a la Programación Lineal en el ISTP "Simón Bolívar" es reciente; fue incorporado a la asignatura de Matemática II a partir del 2002, por la necesidad de actualizar las Estructuras Curriculares.

[19] En la gráfica anterior se puede comprobar que la solución se encuentra en la recta $10x_1 + 15x_2 = 1800$.

Matemática II, es una asignatura de formación general que se desarrolla en el segundo semestre académico en tres horas pedagógicas semanales, cuya sumilla dice:

> "La asignatura de Matemática II por su contenido, complementa la formación brindada en la asignatura de Matemática I. Su naturaleza teórico-práctica tiene incidencia tanto en el aspecto operativo como en el aspecto formativo de los estudiantes de todas las carreras profesionales. Con esa finalidad se considera importante afianzar la capacidad de razonamiento lógico-matemático, el uso adecuado del lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas. La asignatura está organizada en dos unidades de formación: polinomios, ecuaciones, y vectores en el plano; y matrices, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales". [20]

El objetivo específico correspondiente al tema en estudio plantea: "Resuelve situaciones problemáticas aplicando los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, demostrando seguridad y perseverancia";[21] por lo que el desarrollo de la unidad se centra en actividades de resolución de problemas relacionados preferentemente al contexto inmediato y al ámbito de cada una de las carreras profesionales.

En general las experiencias en la enseñanza de los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal en el ISTP "Simón Bolívar" son limitadas; los docentes manifiestan que por las limitaciones de tiempo no logran desarrollar el tema con la profundidad y amplitud que quisieran hacerlo.

Aunque reconocen su importancia en la mayoría de las carreras, afirman que los logros han sido poco satisfactorios precisando que la mayor dificultad que tienen los estudiantes radica en la formulación de las inecuaciones a partir de las restricciones de los problemas de programación lineal.

Por otro lado, en el nivel de Educación Secundaria los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal se han incorporado al Currículo Oficial hace aproximadamente una década. Sin embargo, de un grupo de docentes de diferentes Instituciones Educativas Públicas de Lima y Callao que entrevistamos, menos del 30% manifiesta haber desarrollado el tema, y precisan que los logros alcanzados fueron poco satisfactorios.

Señalan asimismo que las mayores dificultades que tienen los estudiantes están relacionadas al reconocimiento de las restricciones y la función objetivo, además de la ubicación de puntos en el plano coordenado y la solución de sistemas de ecuaciones

[20] ISTP "Simón Bolívar". (2007). Silabo de Matemática II.
[21] Ídem a (18).

lineales para determinar los vértices de la región factible. Además, todos coinciden en la necesidad de ser capacitados en el tema.

En general, pese a todos los intentos de renovación y el conocimiento más o menos claro de los fundamentos de las corrientes pedagógicas constructivistas, en la enseñanza de la matemática aún predomina una didáctica centrada en la acción del docente y la transmisión del conocimiento.

En particular, la enseñanza de los sistemas de inecuaciones lineales y la solución de problemas de programación lineal generalmente se restringe a una mecanización de procesos sin la adecuada comprensión.

3.2.2 Los sistemas de inecuaciones lineales en los libros de texto

El desarrollo de los sistemas de inecuaciones lineales a nivel superior los encontramos en los textos de Programación Lineal, Matemática Finita y Matemática aplicada a las Ciencias Sociales, tal como aparecen citados en el análisis epistemológico.

Según los propósitos del presente estudio y teniendo en cuenta el nivel académico de los estudiantes del ISTP "Simón Bolívar" así como su accesibilidad, consideramos importante referirnos a los siguientes libros de texto:

- ***Matemática aplicada al Comercio y a la Economía*** de Robert Mason; por su carácter autoinstructivo y aplicativo resulta un texto muy útil tanto para el docente como para los estudiantes.

- ***Matemática Finita de Mizrahi y Sullivan***: presenta el tema con amplitud, sencillez y claridad. Es muy didáctico, a la vez que ofrece el fundamento matemático necesario.

- ***Matemática para el 5º grado de secundaria, del Ministerio de Educación*** (texto oficial); presenta el tema a un nivel básico y prescriptivo. Luego de una breve referencia histórica y una revisión de los conocimientos previos (ubicación de puntos en el plano coordenado, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y gráfica de rectas en el plano), inicia el estudio del tema con la gráfica de inecuaciones lineales con dos variables, hace una breve referencia a los sistemas de inecuaciones, y luego pasa a la resolución de problemas de programación lineal insertando en forma paralela algunos conceptos. En la parte práctica presenta problemas casi todas sobre maximización de utilidades.

- ***Matemática 1***, (texto oficial del Bachillerato peruano, 1999; escrito por el Dr. César Carranza y sus colaboradores): A pesar de la precisión conceptual, el tratamiento teórico del tema es muy breve. Pese a ello, consideramos interesante el aspecto práctico, por las situaciones contextualizadas y de dificultad gradual que presenta.

- Entre los materiales electrónicos, consideramos interesantes y útiles las ***Unidades Didácticas*** que presenta el Grupo Descartes [22] en coordinación con el Ministerio de Educación y Ciencia de España; puesto que constituyen actividades interactivas muy motivadoras y de fácil comprensión.

Sin embargo, valga la oportunidad de acotar que por diversos motivos los estudiantes no consultan bibliografía alguna.

3.3 Análisis cognitivo

A fin de lograr mayor comprensión respecto al aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales, consideramos importante incluir los resultados de la Evaluación de los Conocimientos Previos y la Evaluación de Entrada aplicada a los estudiantes que participaron en la presente investigación.

3.3.1 Análisis de la Evaluación de Conocimientos Previos

La evaluación de los conocimientos previos se realizó en torno a las inecuaciones lineales con una variable y los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables; dos temas que consideramos prerrequisitos básicos del tema en estudio.

a.- Análisis de la Prueba sobre inecuaciones lineales con una variable

Esta prueba denominada "Explorando Conocimientos Previos"…[23] se aplicó el 17 de noviembre del 2007. Consta de siete (07) preguntas; cinco de ellas de tipo abiertas, y las dos restantes con alternativas múltiples. El tiempo previsto fue de 45 minutos; sin embargo a algunos les tomó apenas media hora; y, por el contrario, otros, no lograron terminar el examen. El sistema de calificación fue vigesimal, con la distribución de puntajes que se indica en la prueba.

---

22 http://descartes.cnice.mecd.es/4b_eso/Inecuaciones/inec2_inc2.html
http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_2/Programacion_lineal/index.htm
23 Ver Anexo Nº 01.

De los 30 estudiantes que registraban una asistencia regular, el 57% (16 alumnos) aprobó el examen, el 23% (8 alumnos) desaprobó y el 20% (6 alumnos) no dio el examen. El promedio alcanzado fue de 12,17 puntos. [24]

Gráfico Nº 02

Fuente: Propia, a partir de la prueba "Explorando Conocimientos Previos".

A continuación detallamos la forma como los estudiantes abordaron cada una de las siete preguntas de dicha prueba.

En la **primera pregunta** se les presentó la situación: *"La profesora Daniela tiene 50 lápices para repartir entre sus "n" alumnos. Si todos los alumnos reciben por lo menos un lápiz, cuál de las siguientes relaciones es correcta: a) n < 50, b) n ≤ 50, c) n > 50, d) n ≥ 50.*

Ante esta pregunta, 16 estudiantes (67%) eligieron la alternativa correcta **(b)** ($n \leq 50$); 2, eligieron la alternativa (*a) (n < 50*); 4, la alternativa (d), y 2, no respondieron.

Pese a que no se les pidió justificar su respuesta, un grupo significativo de estudiantes lo hizo, aunque de manera imprecisa y con poca claridad. Una de las alumnas que mejor justificó su respuesta, escribió: "Nos dice que los alumnos han recibido por lo menos 1, quiere decir que de hecho a cada alumno le corresponde un lápiz o más"; y luego plantea: $\frac{50}{n} \geq 1$ de donde concluye correctamente que $50 \geq n$; pero al final se equivoca al elegir la alternativa $n \geq 50$.

En la **segunda pregunta,** en la que se les pide "*el menor número entero que satisface la inecuación 7(x – 2) > 21";* 14 alumnos (58%) resolvieron correctamente la inecuación, pero sólo 11 de ellos respondieron correctamente, los otros 3 no dieron la respuesta. De los 11 que respondieron, 6, justificaron su respuesta, pese a no habérseles pedido.

[24] En adelante, las referencias porcentuales corresponden sólo al total de alumnos que rindieron el examen.

Un número significativo de alumnos, hizo la representación gráfica de la solución (que tampoco se pidió); aunque pocos lo hicieron correctamente. En la mayoría de los casos observamos intervalos que representaban las inecuaciones: $x \geq 5$, $x \leq 5$, o $x \geq 6$, en lugar del intervalo correcto correspondiente a la inecuación $x > 5$.

Encontramos preocupante, que uno de los alumnos después de resolver la inecuación correctamente, escribiera $X = \langle -4.-3,-2,-1,0,1,2,3,4]$, y concluyera afirmando que "el número entero menor es cero", demostrando una interpretación incorrecta de la desigualdad y un error en la identificación de los números.

Otros alumnos en lugar de resolver la inecuación, buscaron previamente (al parecer por ensayo y error) un número (en este caso, 6) y procedieron a reemplazar la variable en la inecuación y mostraron que satisfacía. Este procedimiento es muy frecuente cuando resuelven ecuaciones.

Uno de los errores encontrados en el proceso de solución fue el siguiente:

$$7x > 35$$
$$x >= 35/7$$
$$x >= 5$$

A partir del cual concluyen que "la respuesta es 5". Es decir, terminan cambiando la inecuación por una ecuación. Este es un error que se observa con cierta frecuencia.

La **tercera pregunta** dice: *¿Cuál es la mayor cantidad de conejos que puede tener David, si se sabe que disminuido en 5 es menor que 16?* A partir del cual debían plantear y resolver la inecuación $x - 5 < 16$.

De los 14 alumnos (58%) que formularon y resolvieron correctamente la inecuación, sólo 11 dieron la respuesta correcta. Nos pareció interesante la forma cómo una de las alumnas explicó su respuesta, ella escribió: "la mayor cantidad de conejos que puede tener es 20, porque se trata de conejos, y no podemos tomar decimales; y no podemos tomar 21, porque es un intervalo abierto".

De los 10 estudiantes restantes, 3 no resolvieron la pregunta y en los otros 7 encontramos errores de planteamiento, puesto que en lugar de la inecuación $x - 5 < 16$, escribieron $x - 5 > 16$ ó $x - 5 = 16$; además de errores en el proceso de solución, específicamente en la transposición de términos.

Respecto a la **cuarta pregunta**, en la que se les pidió identificar la gráfica del conjunto solución de la inecuación $13 - x \leq 15$; sólo 11 alumnos resolvieron la inecuación correctamente e identificaron la gráfica correspondiente. Otros, habiendo resuelto correctamente, mostraron confusión en la identificación de la gráfica.

Entre los 12 alumnos que resolvieron de manera incorrecta, algunos, sin ninguna explicación cambiaron el signo negativo a positivo; y otros habiendo asumido el signo negativo, despejaron la variable como si fuera positivo. Sólo uno, no resolvió.

La **quinta pregunta** dice: *¿Cuántos números enteros satisfacen la inecuación:* $2y-5<y+3\leq 5y-7$ *?* Sólo la cuarta parte (6 alumnos) resolvió y respondió correctamente esta pregunta; otros tantos no resolvieron, y la otra mitad presenta alguno de los siguientes errores:

- Al pretender resolver ambas inecuaciones al mismo tiempo, llegaron a una situación que no supieron cómo concluirla.
- Otros separaron las inecuaciones, pero al final no concordaron ambas soluciones y tomaron valores sólo de una de ellas; por ejemplo, al resolver la primera parte llegaron a $y<8$, y dieron como solución el conjunto: $\{7,6,5,4,3,2,1,0\}$, dejando de lado los enteros negativos y las soluciones de la segunda inecuación.
- Persisten asimismo errores que se vieron en las preguntas anteriores, por ejemplo, teniendo $y<8$, asumen el 8 como valor de la variable; otros en cambio, toman un valor determinado para la variable y se limitan a comprobar las inecuaciones.

En la **sexta pregunta**, se les planteó la siguiente situación: *"Si al doble de la edad de Juan Carlos se le resta 17 años resulta menor que 35; pero si a la mitad de su edad se le suma 3 años el resultado es mayor que 15. ¿Cuál es la edad de Juan Carlos?"; que* conduce al sistema de inecuaciones: ($2x-17<35$ y $\frac{x}{2}+3>15$).

Aproximadamente los dos tercios de los estudiantes (15) planteó el sistema y lo resolvió correctamente; el resto presentó errores de formulación de las inecuaciones, así como errores operativos.

Entre los errores de formulación se observa que, como en la primera parte representaron "el doble de la edad" como $2x$, en la segunda inecuación para "la mitad de su edad" simplemente escribieron " x ". En el proceso operativo, se evidenciaron errores de despeje, así, a partir de la inecuación $\frac{x}{2}+3>15$ escribieron $x+3>30$. En otros casos, resolvieron correctamente la primera inecuación hasta llegar a $x < 26$, luego reemplazaron $x = 26$ en la segunda inecuación.

En la **séptima pregunta,** se les planteó: "*A Luis, por su trabajo de vendedor le pagan 90 soles semanales, más la séptima parte del importe total de su venta mensual. Si el mes pasado su sueldo superó los 920 soles; ¿el importe de ventas del mes pudo haber sido S/. 4 000?*"

Esta situación nos conduce a la inecuación $360 + \frac{x}{7} > 920$; sin embargo en su lugar encontramos expresiones como: $4\left(90 + \frac{1}{7}x\right) > 920$, $90 + \frac{x}{7} > 920$, $630 + \frac{x}{7} > 920$ y $90 + \frac{x}{7} < 920$.

La primera inecuación podría admitirse como otra forma de entender el problema; en cambio en el segundo caso, se evidencia error en la comprensión de la situación, además de comparar cantidades no homogéneas (los 90 soles semanales con los 920 soles que es el sueldo mensual). En el tercer caso, al error anterior se le suma un error operativo; y finalmente, en la última inecuación se evidencia un error de comprensión y manejo de los signos de desigualdad.

Encontramos también estudiantes que, en lugar de formular la inecuación, tomaron el número dado (4000) y procedieron a verificar los datos para dar la respuesta. Sólo 3 estudiantes resolvieron correctamente esta pregunta, consecuentemente aquí se encontró el mayor número de soluciones incorrectas (13) y preguntas en blanco.

En síntesis, a partir de esta Prueba concluimos que los estudiantes:

- ✓ Muestran confusión en la comprensión de los signos de desigualdad y por tanto en la determinación e interpretación del conjunto solución de inecuaciones con una variable.
- ✓ Tienen dificultades para representar situaciones expresadas en forma verbal a través de inecuaciones, sólo lo logran en situaciones sencillas.
- ✓ A pesar de que la gran mayoría resuelve correctamente inecuaciones sencillas, todavía se evidencian errores algebraicos elementales, así como procesos de solución más aritméticos que algebraicos (por ensayo y error).

- ✓ Tienen dificultades en la representación gráfica del conjunto solución de inecuaciones lineales con una variable (intervalos de números reales); así como en la identificación de las mismas cuando éstas son dadas.
- ✓ Se evidencia un inadecuado manejo del coeficiente negativo (pocos aplican la propiedad).
- ✓ La mayoría tiene dificultades para resolver inecuaciones de tres partes.
- ✓ Algunos muestran dificultades en la comprensión y representación de los datos cuando son referidos más de una vez.
- ✓ Se evidencian deficiencias en el manejo de inecuaciones simultáneas, además de la confusión en la determinación del orden de prioridad de las operaciones al despejar las variables.
- ✓ La mayoría de estudiantes tiene grandes dificultades al tratar de relacionar datos que tienen distintas referencias (semanales y mensuales).
- ✓ Se observan limitaciones en la comprensión de las preguntas e imprecisiones en la justificación de sus respuestas.
- ✓ Muestran confusión en la discriminación de las clases de números (enteros, reales).

En general, los estudiantes no se detienen a analizar la naturaleza de los objetos matemáticos, ni a pensar en las propiedades que justifican su procedimiento.

b.- Análisis de la Prueba sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales

Esta Prueba se aplicó una semana antes de comenzar la fase experimental del presente estudio (como prueba de salida del tema en mención). Se aplicaron tres pruebas (Filas A, B y C)[25], de cinco (5) preguntas cada una, de similar estructura pero con diferente grado de dificultad. El sistema de calificación fue vigesimal y la distribución de puntajes por preguntas se muestra en cada una de las Pruebas. Como en todas las evaluaciones aplicadas en el presente estudio consideramos 10,5 como el mínimo puntaje aprobatorio.

El examen fue previsto para 60 minutos, sin embargo sólo dos alumnos terminaron en el tiempo fijado; por lo que se consideraron 15 minutos adicionales.

[25] Ver Anexo Nº 02

Gráfico Nº 03

Fuente: Propia, a partir de la Prueba sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Como muestra el gráfico, los resultados son similares a los de la Evaluación anterior (sobre Inecuaciones Lineales). E 53% (16 alumnos) aprobó el examen, el 30% (9 alumnos) desaprobaron y el 17% restante (5 alumnos) no dio el examen. El promedio alcanzado en esta Prueba fue de 12,36 puntos.

En el siguiente cuadro mostramos los resultados por tipo de Prueba (A, B y C) y considerando solamente a los estudiantes que dieron el examen.

Cuadro Nº 04

Tipo de Prueba	Aprobados		Desaprobados		Total	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
A	01	04%	08	32%	09	36%
B	08	32%	01	04%	09	36%
C	07	28%	00	00%	07	28%
Total	**16**	**64%**	**09**	**36%**	**25**	**100%**

Fuente: Propia, a partir de la Prueba sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Como observamos, todos los alumnos (7) a quienes se les asignó la Prueba C aprobaron el examen; del grupo B, desaprobó sólo una alumna; mientras que del grupo A, aprobó sólo una.

Los estudiantes que dieron la **Prueba A** son los que tienen mayores dificultades en el aprendizaje de la Matemática, muestran dificultades en las operaciones con números enteros (cometen errores como $\frac{-10}{-5} = -2$); tienen deficiencias en el manejo conceptual, (es frecuente que en lugar de rectas digan líneas, en lugar de "sistema compatible" digan "sistema consecuente"); y son los que más dificultades tienen en el manejo del plano coordenado.

Les dificulta resolver situaciones sencillas como: *"La suma de dos números es 215 y su diferencia es 73. ¿Cuáles son dichos números?"* Encontramos planteamientos como: $x + y = 215 - 73$, del que concluyen que los números son 142 y 73; asimismo, dado un par ordenado de números reales, difícilmente pueden plantear un sistema de ecuaciones cuya solución sea dicho par ordenado.

De los estudiantes, a quienes se les aplicó la **Prueba B**, la mayoría resolvió y graficó correctamente los sistemas de ecuaciones propuestos; más de la mitad resolvió correctamente los problemas planteados en forma verbal, y un poco menos lograron formular el sistema de ecuaciones dado el conjunto solución.

Mostraron dificultades en el manejo conceptual, por ejemplo, les resultó difícil precisar el tipo de gráfica que correspondía a dos ecuaciones lineales con dos variables; asimismo ante dos rectas coincidentes concluyeron que el sistema era incompatible.

Los estudiantes a quienes se les asignó la **Prueba C,** demostraron un nivel satisfactorio en el manejo de los sistemas de ecuaciones lineales, tanto en el aspecto algebraico, gráfico como conceptual. Ellos son capaces de abordar situaciones más complejas que sus demás compañeros. Pese a que son casos aislados, también encontramos algunos errores de planteamiento como que, en lugar de $\mathbf{x + y = z + 70}$, alguien escribió $\mathbf{x + y = z - 70}$; así como errores operativos, por ejemplo que, a partir de: $\mathbf{2y = y}$ un alumno concluyó que $\mathbf{2 = 1}$ y que por lo tanto el sistema era incompatible. Se evidenciaron también errores aritméticos elementales como $\frac{25}{36} - \frac{16}{9} = \frac{13}{12}$, y en lugar de dar el valor de $b^2 - a^2$ dieron el valor de $b^2 + a^2$.

Aunque les resulta fácil resolver situaciones problemáticas sobre sistemas de ecuaciones expresadas en forma verbal, tienen dificultad para formularlas.

En conclusión, podemos afirmar que, respecto a los Sistemas de Ecuaciones Lineales, como en otros temas, los estudiantes presentan diversos grados de dificultad:

- En el grupo que tiene mayores dificultades están aquéllos que con frecuencia faltan a clases, no disponen de tiempo para resolver los ejercicios, y carecen de los prerrequisitos básicos. Ellos tienen mucha dificultad para pasar del lenguaje verbal al algebraico y serias deficiencias en el manejo del plano coordenado. Sólo algunos en base a su perseverancia logran superar sus dificultades en alguna medida.

- Los alumnos del segundo grupo, resuelven sistemas de ecuaciones sin mayor dificultad, pero muestran limitaciones en el análisis y en la identificación de las características de los sistemas según su representación gráfica. Resuelven problemas de un nivel de complejidad medio y manejan mejor situaciones de contexto real que de contexto matemático. Pocos pueden plantear sistemas de ecuaciones dado su conjunto solución y no les resulta fácil formular situaciones en forma verbal.

- Los estudiantes del tercer grupo, muestran destreza en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el manejo del plano coordenado; identifican tipos de sistemas ya sea por su gráfica o de acuerdo al criterio de consistencia. A pesar de ello, hay algunos que tienen dificultad al plantear las situaciones en forma verbal y al resolver situaciones problemáticas con cierto grado de complejidad.

Frente a las deficiencias encontradas se programaron dos sesiones de nivelación; que por las limitaciones de tiempo no se pudieron llevar a cabo en el horario normal del curso, sino en horarios alternos concertados con los propios alumnos. No obstante, por la interferencia con su horario de trabajo muchos no pudieron asistir.

3.3.2 Análisis de la Prueba de Entrada [26]

El propósito de la Prueba de Entrada fue determinar qué y cuánto conocían los estudiantes respecto a los sistemas de inecuaciones lineales y la solución de problemas de Programación Lineal. Se aplicó un mes antes del inicio de la Primera Sesión, con la finalidad de que los resultados nos sirvieran para reajustar y mejorar el diseño y la elaboración de la secuencia didáctica.

En términos generales, dicha Prueba nos muestra que los estudiantes de TAQ II turno diurno desconocen el tema; la mayoría dejó en blanco casi todas las preguntas, o contestó de manera incorrecta sin ofrecer justificación a su respuesta.

De los 28 alumnos, ninguno logró graficar la inecuación $2x + y < 5$; sólo 8, afirmaron que tenía infinitas soluciones y que el origen de coordenadas era una de ellas. Algunos intentaron despejar de la siguiente manera: $x =< \frac{5-y}{2}$; como no tenían idea de la gráfica de la inecuación, no pudieron establecer la relación entre dicha gráfica y la de la ecuación $2x + y = 5$ que también se les pidió**.** Tampoco lograron graficar la inecuación $y > 4$ en el plano coordenado, sólo tres alumnos lo hicieron en la recta.

En cuanto a la representación matemática de la expresión "*por lo menos 2*", hubo sólo 4 aciertos; 3 alumnos escribieron $x < 2$, otros, $x - 2$; pero la mayoría no respondió.

---

[26] Ver Anexo Nº 03.

Lo mismo sucedió al pedirles maximizar la función $F = 5x + 6y$ en la región determinada por el cuadrilátero de vértices (-5, 4), (-2, 0) (2, 3) (7, 7)? La mayoría se limitó a ubicar dichos vértices; sólo después de una breve aclaración, tres alumnos dieron la respuesta correcta, dos de ellos evaluando directamente en los puntos sin necesidad de graficar el cuadrilátero dado.

Lo que resulta destacable es que la mayoría mostró interés por resolver el siguiente problema propuesto: *"Se organiza un paseo al que han asegurado ir 600 personas, habiendo la posibilidad que se incorporen algunos más. Para tal efecto, se ha aprobado la oferta de una empresa de transportes que dispone de 8 ómnibus de 60 asientos y 12 de 40 asientos. El alquiler de un ómnibus grande cuesta S/ 480 y el de uno pequeño S/ 360. Nos interesa saber cuántos ómnibus hay que contratar de cada tipo para que dicho paseo resulte lo más económico posible."*

Casi la mitad de ellos (12 alumnos) dieron la respuesta correcta (8 ómnibus de 60 y 3 de 40); sólo uno había considerado la posibilidad de contratar 2 ómnibus de 60 y 12 de 40. El resto, sin hacer mayor análisis de la situación, respondió que era preferible contratar todos los ómnibus grandes y, contratar los chicos sólo para los pasajeros que se incorporaran después.

3.3.3 Análisis de experiencias anteriores

En nuestra experiencia personal de casi 10 años en el ISTP "Simón Bolívar, observamos que las dificultades más notorias y recurrentes que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales y la solución de problemas de programación lineal son las siguientes:

- Presentan errores operativos en el proceso de tabulación para construir la gráfica.

- Muestran un manejo inadecuado del plano coordenado; no valoran la importancia de la graduación uniforme de los ejes, lo que les dificulta visualizar correctamente las gráficas.

- Tienden a limitar las gráficas de la recta frontera sólo al segmento determinado por los puntos que toman en el proceso de tabulación.

- Presentan dificultad en la comprensión de la correspondencia biunívoca entre los números reales y la recta.

- Tienen dificultades en la identificación de las variables, así como en la organización y sistematización de los datos.

- Cuando tienen que resolver un problema generalmente proceden de manera desordenada, lo que les dificulta lograr su propósito.

- Pocos estudiantes evalúan si los datos que tienen son los necesarios o suficientes para resolver el problema.

- Presentan dificultades tanto en el pasaje del registro verbal al algebraico, como del gráfico al algebraico.

- Carecen de experiencia en el uso de inecuaciones en la resolución de problemas.

- Muestran dificultad para relacionar el tema con sus conocimientos previos; por ejemplo para encontrar los vértices de la región factible, no se dan cuenta que deben resolver los sistemas de ecuaciones lineales implicados.

Además muestran dificultades o limitaciones más generales como las siguientes:

- Tienen dificultad para seguir instrucciones.
- Se les hace difícil justificar sus procedimientos y respuestas.
- Pocas veces verifican, interpretan y evalúan los resultados.
- La mayoría tiene poca confianza en sus capacidades para aprender matemática.
- La mayoría no sabe trabajar en grupo, generalmente uno resuelve y los demás copian.

Un aspecto positivo que cabe resaltar es que los estudiantes muestran interés por resolver problemas contextualizados.

3.3.4 Análisis de investigaciones relacionadas

De las investigaciones realizadas relacionadas al tema en estudio, consideramos importante destacar los siguientes resultados:

- A pesar que el concepto de inecuaciones se encuentra presente en muchas áreas de la ciencia, muchos estudiantes y también algunos docentes evidencian una comprensión limitada del concepto, lo que mostraría deficiencias en el proceso de enseñanza - aprendizaje (Barbosa, 2003).

- El estudio de las inecuaciones implica varias nociones que deben concatenarse de forma coherente, tales como la estructura de orden de los números reales, funciones, correspondencia uno a uno de los números reales y la recta numérica, gráficos y análisis gráfico de funciones, entre otros. (Barbosa, 2003).

- Las deficiencias más frecuentes que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales son: dificultades en las operaciones aritméticas elementales en problemas verbales, la no verificación de la solución, los errores en el pasaje del registro verbal al algebraico y la ausencia de prácticas de pasaje del registro gráfico al algebraico (Segura, 2004); que consideramos igualmente válidas en el caso de los sistemas de inecuaciones lineales.

- Los orígenes de tales dificultades serían la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición de los sistemas de ecuaciones lineales, el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico (Segura, 2004).

- Al resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales los alumnos tienen errores que indican la complejidad propia de algunos conceptos matemáticos como cantidades desconocidas, igualdad, incógnita, sustitución numérica y algebraica, variable, entre otros. (Rosainz, 2005).

De la investigación sobre la ecuación lineal con dos variables (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999), rescatamos lo siguiente:

- Casi todos los alumnos conservan en sus procedimientos fuertes marcas de su experiencia aritmética.

- Encuentran en el contexto del problema con ecuaciones una justificación a la unicidad de las soluciones.

- Desde la perspectiva de los alumnos, “la ecuación con dos variables en un sistema” es un objeto diferente de “una ecuación con dos variables”, y ésta última, no es reconocida como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.

- Cualquiera haya sido el tratamiento de la “ecuación de la recta”, no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

  Por lo que se sugiere profundizar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de *incógnita* y el de *variable* para desentrañar la compleja y desafiante relación entre la aritmética y el álgebra.

Del estudio del papel que tienen las aplicaciones en el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra lineal realizado en educación superior (Hurman, 2001), destacamos:

- La aplicación inmediata de los conceptos aprendidos, genera mayor compromiso, una participación más activa y satisfacción de los estudiantes.

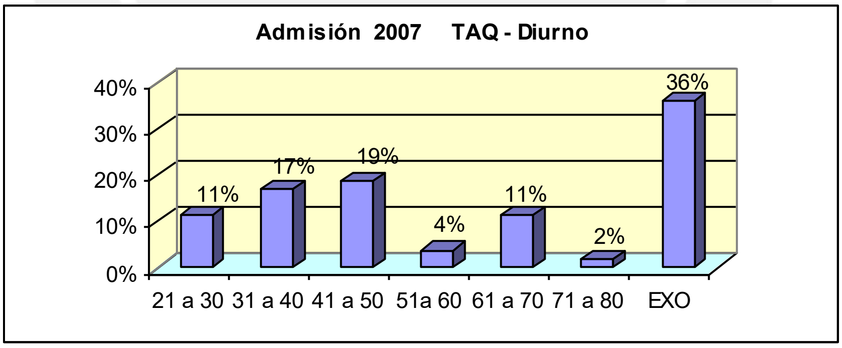
- El tiempo necesario para madurar los diferentes lenguajes, registros y modos de representación del álgebra lineal en los estudiantes es bastante dispar.

- El tiempo asignado al curso (50 horas semestrales) es un factor que limita el aprendizaje del álgebra lineal, porque éste es un proceso largo que requiere una maduración de pensamiento y una evolución de los puntos de vista.

3.4 Análisis del campo de restricciones

Como se señaló en el planteamiento del problema, el presente estudio se lleva a cabo con los estudiantes del II Semestre de la carrera de Tecnología de Análisis Químico (TAQ II) – Turno: diurno, del ISTP "Simón Bolívar"; que para efectos del diseño de las Situaciones Didácticas, pasamos a describir algunas características del grupo, incidiendo en el aspecto académico.

Gráfico Nº 05



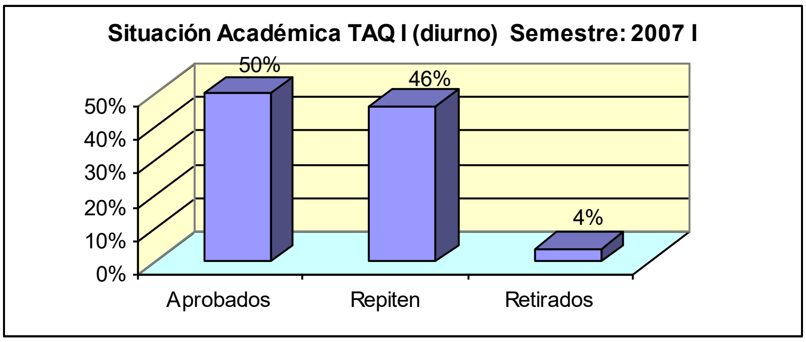
Fuente: Actas del Examen de Admisión 2007.

De los ingresantes a la carrera de TAQ–diurno el año 2007, sólo el 64% lo hizo a través del Examen de Admisión (el 36% restante fue exonerado de dicho examen), alcanzado un promedio de 45,5 puntos (sobre 100), en un rango de 25 a 78 puntos.

En el Primer Semestre Académico (2007-I), sólo la mitad de los estudiantes obtuvo un rendimiento satisfactorio[27]; el 50% restante desaprobó más de una asignatura o habían abandonado sus estudios.

[27] Se consideran aprobados a aquéllos estudiantes que luego de la Evaluación de Recuperación tiene a lo más un curso desaprobado.

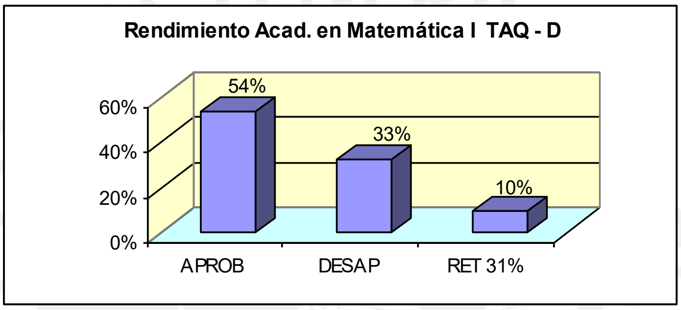
Gráfico Nº 06



Fuente: Acta de Evaluación Académica. 2007-I

En cuanto a Matemática I, el 54% aprobó la asignatura, el 33% desaprobó, y el promedio del aula fue de 10,96.

Gráfico Nº 07



Fuente: Registro Oficial de Evaluación 2007 – I

Entre los estudiantes aprobados y ocho alumnos repitentes (de la Promoción 2006), contamos con un total de 32 estudiantes (19 mujeres y 13 varones); que en su mayoría son jóvenes, solteros y provienen de los diferentes distritos de la Región Callao.

Estos jóvenes que casi en su totalidad (91%) proceden de Instituciones Educativas Públicas, tienen una situación socio-económica media-baja, por lo que en su mayoría trabaja y estudia al mismo tiempo; lo que explica asimismo la poca o ninguna preparación previa que tuvieron y el insuficiente tiempo que disponen para estudiar, fuera del horario de clases.

Gráfico Nº 08

Fuente: Propia, en base al Instrumento Nº 1.

CAPITULO IV: CONCEPCION Y ANALISIS A PRIORI

En base a las consideraciones epistemológicas, didácticas y cognitivas precedentes, en el presente capítulo elaboramos la secuencia didáctica cuya validez se evalúa en el presente estudio. Previamente definimos las hipótesis y las variables.

4.1 Determinación de las hipótesis

Las hipótesis que formulamos se basan en la observación de situaciones de aprendizaje en condiciones semejantes, considerando estudiantes de la misma carrera profesional y el mismo turno. En base a ello podemos decir que generalmente, los estudiantes cuando aprenden los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y su aplicación a la programación lineal, presentan las siguientes dificultades:

(a) Las deficiencias en la comprensión de textos dificulta que los estudiantes afronten las situaciones planteadas en forma autónoma.

(b) Presentan serias deficiencias para graficar en el plano coordenado, las que principalmente provienen de errores en el proceso de tabulación y la graduación de los ejes coordenados. En particular, tienen dificultad al graficar semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes.

(c) Dado un problema de programación lineal (en el registro verbal) tienen dificultades en la identificación de las variables, las que se relacionan con la poca práctica que tienen en la organización de los datos cuando resuelven problemas y la deficiencia en la comprensión de textos.

(d) Esta dificultad y las confusiones que tienen en el uso de los signos de desigualdad generan a su vez errores en la formulación algebraica de las restricciones y la función objetivo de los problemas de programación lineal.

(e) Dada una región del plano (y las ecuaciones de las rectas frontera) tienen dificultad para plantear el sistema de inecuaciones correspondiente.

(f) Muestran asimismo limitaciones para usar sus conocimientos previos, formular conceptos y procedimientos, y justificar o explicar sus respuestas.

4.2 Determinación de variables

4.2.1 Variables macro-didácticas

En la fase experimental del presente estudio se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- Con la intención de dinamizar la actividad dentro de los equipos, la organización de los estudiantes se realizará de manera intencional en grupos heterogéneos de 4 integrantes: uno, con rendimiento académico por encima del promedio, dos de rendimiento regular y uno con bajo rendimiento (en matemática).
- Las situaciones didácticas serán presentadas por escrito en tres partes que serán entregadas a cada alumno al inicio de cada una de las tres sesiones.
- Los prerrequisitos como consta en el Silabo, se han desarrollado en la misma asignatura con anterioridad a la aplicación de la presente secuencia didáctica.
- Respecto al nivel de tratamiento del tema: dadas las características del grupo y la naturaleza del tema, las actividades de aprendizaje se han diseñado a partir de situaciones concretas que involucran dos variables, y que permiten una adecuada comprensión conceptual y un pertinente manejo procedimental.

Si bien, el propósito principal es que los estudiantes resuelvan problemas aplicando los sistemas de inecuaciones lineales, sin embargo también es un propósito esencial que los problemas sirvan de pretexto para introducir, desarrollar y afianzar conceptos y procedimientos matemáticos relacionados a los sistemas de inecuaciones lineales. Además, el tema se aborda teniendo en cuenta los diferentes registros: verbal, algebraico y geométrico.

4.2.2 Variables micro-didácticas

Las variables que identificamos en la presente secuencia didáctica corresponden tanto al campo algebraico como geométrico.

a.- Variables asociadas al campo algebraico

- ✓ Tipo de inecuaciones lineales con dos variables: según el uso de los signos: $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.
- ✓ Número de inecuaciones que componen el sistema.
- ✓ Número de restricciones de un problema de programación lineal.
- ✓ Tipo de registro de formulación del problema: algebraico, verbal o gráfico.

- ✓ Tipo de optimización: maximización o minimización.
- ✓ Tipo de solución que admite el problema: enteros no negativos o reales.

b.- Variables asociadas al campo geométrico

- ✓ Clases de semiplanos.
- ✓ Número de semiplanos.
- ✓ Tipo de intersecciones de semiplanos.
- ✓ Tipo de regiones factibles.

4.2.3 Identificación de variables en las Actividades de Aprendizaje

El siguiente cuadro muestra el tipo de variables que se presentan en cada una de las actividades de aprendizaje que forman parte de la secuencia didáctica.[28]

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	VARIABLES DIDÁCTICAS
A$_1$: Identificación de problemas de Programación Lineal: Textilería peruana.	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Número de restricciones: tres, además de las restricciones de no negatividad. ✓ Tipo de desigualdades: ≤ ✓ Soluciones admisibles: enteros no negativos. ✓ Tipo de optimización: maximización.
A$_2$: Solución gráfica de la inecuación lineal: **2x – 3y < 6**.	✓ Tipo de registro: algebraico. ✓ Tipo de inecuación: < ✓ Tipo de semiplano: abierto. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_3$: Representación gráfica de los puntos que satisfacen la relación: "La ordenada disminuido en cinco es como mínimo el triple de la abscisa.	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Tipo de inecuación: ≥. ✓ Tipo de semiplano: cerrado. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_4$: Formulación del procedimiento para resolver gráficamente una inecuación lineal con dos variables; y aplicación de dicho procedimiento en la solución de la inecuación: **4x + 5y - 30 > 0**.	✓ Tipo de registro: algebraico. ✓ Tipo de inecuación: >. ✓ Tipo de semiplano: abierto. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_5$: Dado un semiplano formulan la inecuación correspondiente.	✓ Tipo de registro: gráfico. ✓ Tipo de frontera: rectas paralelas a los ejes. ✓ Tipo de semiplano: abierto. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_6$: Identifican la solución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.	✓ Tipo de registro: gráfico. ✓ Número de semiplanos: dos. ✓ Tipo de intersección de semiplanos: región del plano limitado por dos rayos don origen común. ✓ Soluciones admisibles: reales.

[28] Se omite la variable didáctica "número de variables", puesto que en el presente estudio se ha fijado trabajar sólo con dos variables.

A$_7$: Solución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.	✓ Tipo de registro: algebraico. ✓ Número de inecuaciones: dos. ✓ Tipo de intersección de semiplanos: región del plano limitado por dos rayos don origen común. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_8$: Formulación de SIL dadas las ecuaciones de dos rectas paralelas y la descripción de la región solución.	✓ Tipo de registro: algebraico. ✓ Número de ecuaciones: dos. ✓ Tipo de intersección de semiplanos: una franja, un semiplano y vacío (determinado por dos semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_9$: Solución gráfica de un sistema de tres inecuaciones lineales con dos variables y determinación de los vértices de la región solución.	✓ Tipo de registro: algebraico. ✓ Número de inecuaciones: tres. ✓ Tipo de intersección: polígono cerrado. ✓ Soluciones admisibles: reales.
A$_{10}$: Solución del problema planteado en la Actividad Nº 01, graficando la función objetivo sobre la región factible determinada por las restricciones del problema.	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Número de restricciones: tres, además de las condiciones de no negatividad. ✓ Soluciones admisibles: enteros no negativos. ✓ Tipo de región factible: polígono cerrado. ✓ Tipo de optimización: maximización.
A$_{11}$: Solución de un problema de **maximización** con cinco restricciones, que determinan una región factible cerrada.	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Número de restricciones: tres, además de las condiciones de no negatividad. ✓ Soluciones admisibles: enteros no negativos. ✓ Tipo de región factible: polígono cerrado. ✓ Tipo de optimización: maximización.
A$_{12}$: Solución de un problema de minimización cuya región de soluciones factibles es abierta. .	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Número de restricciones: tres. ✓ Soluciones admisibles: enteros no negativos. ✓ Tipo de región factible: región abierta. ✓ Tipo de optimización: minimización.
A$_{13}$: Solución de un problema de PL aplicando la propiedad.	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Número de restricciones: dos, además de las condiciones de no negatividad. ✓ Soluciones admisibles: enteros no negativos. ✓ Tipo de región factible: polígono cerrado. ✓ Tipo de optimización: maximización.
A$_{14}$: Plantean y resuelven un problema de programación lineal relacionado a situaciones de su especialidad.	✓ Tipo de registro: verbal. ✓ Número de restricciones: libre. ✓ Soluciones admisibles: libre. ✓ Tipo de región factible: libre. ✓ Tipo de optimización: libre.

4.3 Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica que proponemos ha sido diseñada en base al marco teórico, el análisis preliminar, y las consideraciones previas del análisis a priori.

4.3.1 Identificación de los conocimientos previos

Los aprendizajes que los estudiantes necesitan haber logrado previamente al desarrollo de las actividades propuestas son:

a. Graficar ecuaciones lineales con dos variables.
b. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
c. Resolver problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
d. Resolver inecuaciones lineales con una variable.
e. Resolver problemas aplicando inecuaciones lineales con una variable.

4.3.2 Formulación de los aprendizajes esperados

A través de la secuencia didáctica que planteamos se pretende que el estudiante logre los siguientes aprendizajes:

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES
▪ Resuelve gráficamente inecuaciones lineales con dos variables demostrando un adecuado manejo del plano coordenado.	✓ Reconoce que las soluciones de una inecuación lineal con dos variables son infinitas. ✓ Identifica el semiplano como solución de una inecuación lineal con dos variables. ✓ Grafica la ecuación asociada para determinar el semiplano solución. ✓ Formula inecuaciones lineales con dos variables a partir de la descripción verbal de los puntos que la satisfacen. ✓ Sistematiza el proceso de solución gráfica de una inecuación lineal con dos variables. ✓ Identifica en qué casos la recta frontera es parte de la solución de una inecuación lineal. ✓ Formula la inecuación del semiplano opuesto. ✓ Formula inecuaciones a partir de las gráficas de semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes.
▪ Resuelve gráficamente Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables.	✓ Identifica la solución de un SIL como la intersección de semiplanos. ✓ Define Sistemas de Inecuaciones Lineales. ✓ Formula SIL introduciendo variantes en las inecuaciones dadas. ✓ Formula SIL conociendo las ecuaciones de las rectas frontera.
▪ Resuelve problemas de programación lineal aplicando los sistemas de inecuaciones lineales.	✓ Identifica la estructura de un problema de programación lineal. ✓ Identifica las variables en un problema de programación lineal. ✓ Expresa las restricciones de un problema de programación lineal usando SIL. ✓ Expresa algebraicamente la función objetivo de un problema de programación lineal. ✓ Identifica la gráfica de la función objetivo como una familia de rectas paralelas. ✓ Determina la región de soluciones factibles. ✓ Determina los vértices de la región factible. ✓ Infiere que la función objetivo toma su valor óptimo (máximo o mínimo) en uno de los vértices de la región factible. ✓ Resuelve problemas de PL aplicando en forma adecuada el procedimiento práctico. ✓ Formula problemas de programación lineal.

4.3.3 Situaciones didácticas e historias de clase

El desarrollo de la secuencia didáctica implica un conjunto continuo de **acciones**, **formulaciones y validaciones,** así como una permanente **toma de decisiones** que el estudiante debe realizar en relación a la respuesta que reciba del medio.

Ante la complejidad de poder observar la situación didáctica bajo la concepción de continuo, se han seleccionado actividades que constituyen su concretización**;** el conjunto de las cuales nos dan la **historia de clase** (Lezama, 2003).

Consideramos conveniente que el estudiante transite por cada una de ellas, puesto que cada una tiene un propósito específico que se complementa con el de las demás; aunque es posible que en algunos casos rompa el orden establecido.

La secuencia didáctica está compuesta por catorce (14) actividades propuestas a través de instrucciones y preguntas que ubican al estudiante frente a situaciones problemáticas a resolver, pasando por situaciones de acción, formulación y validación.

La secuencia didáctica comienza y termina con problemas de programación lineal; al inicio con la finalidad de generar la necesidad de usar las inecuaciones para representar situaciones verbales y aprender a resolver los sistemas de inecuaciones lineales; y al terminar para mostrar su aplicabilidad y utilidad en la solución de diversas situaciones contextualizadas.

De esta manera, la situación inicial (situación fundamental) está destinada a generar el conocimiento que deseamos que los estudiantes aprendan. Luego, siguen cuatro actividades destinadas a que los estudiantes aprendan a graficar inecuaciones lineales con dos variables, presentando las situaciones en los registros algebraico, verbal y gráfico; y haciendo variar el signo de desigualdad con el fin de favorecer una mejor comprensión de las soluciones.

Así, en base a la necesidad generada en la Actividad 1, en la Actividad 2, deben representar en el plano coordenado una inecuación lineal con dos variables e identificar el semiplano como la solución de la misma; en la Actividad 3 (dada en el registro verbal) se espera que diferencien un semiplano cerrado de uno abierto identificando el tipo de inecuación que lo genera. En base a estas actividades y la propiedad dada[29], en la

[29] Sea **P** un punto cualquiera de uno de los semiplanos en los que la gráfica de la ecuación $ax+by+c=0$ divide al plano. Si el punto **P** satisface la inecuación $ax+by+c<0$, entonces, todos los puntos del semiplano donde se encuentra **P**, satisfacen también la inecuación $ax+by+c<0$.

Actividad 4 deben sistematizar un procedimiento práctico. Finalmente, la Actividad 5 (dada en forma gráfica), pretende que los estudiantes refuercen la capacidad formulando la inecuación correspondiente a un semiplano dado.

La segunda parte, denominada ***"Buscando puntos comunes"***, consta de cuatro actividades destinadas a que los estudiantes logren *conceptualizar y resolver los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables por el método gráfico;* con este propósito se presentan las situaciones en los diversos registros, y se hace variar el número y sentido de las inecuaciones.

De esta manera, en la Actividad 6, dadas las gráficas de dos inecuaciones lineales con dos variables, se les pide identificar y definir un **Sistema de Inecuaciones Lineales** con dos variables; en la Actividad 7, deben lograr sistematizar un procedimiento de solución y en la Actividad 8, dadas las ecuaciones de dos rectas paralelas se les pide formular sistemas de inecuaciones para determinadas regiones. Luego, en la Actividad 9, se pretende que transfieran sus conocimientos a la solución de un sistema de tres inecuaciones.

La secuencia didáctica concluye con cinco problemas de programación lineal, bajo el título de ***"Gastando menos para ganar más"***, cuyas variables didácticas son el número y tipo de restricciones, así como el tipo de optimización (maximización o minimización). Cabe señalar que la Actividad 10 es la misma que se planteó al inicio de la Secuencia didáctica, con el propósito de que esta vez resuelvan determinando la región factible a través de la gráfica de las restricciones del problema, lo que les permitirá darse cuenta y valorar sus ventajas. Por otra parte, en la Actividad 14, en lugar de proponer el problema, se pide que el estudiante lo proponga y resuelva.

Después de cada uno de los tres bloques que conforman la secuencia didáctica, se presentan actividades bajo la denominación "Aplico lo aprendido", destinadas a que los estudiantes en forma individual o grupal refuercen y evalúen sus aprendizajes, después de concluidas las actividades en el aula.

A continuación, para cada actividad se establece el contenido matemático que se pone en juego, la naturaleza de las situaciones que la componen, es decir, el tipo de interacción con el medio, y finalmente, se realiza un esbozo de lo que sería la historia de clase ideal, es decir, lo que se espera que los estudiantes realicen.

4.3.4 MATRIZ DE SITUACIONES DIDÁCTICAS E HISTORIAS DE CLASE

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	CONTENIDO MATEMÁTICO EN JUEGO	ELEMENTOS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA	HISTORIA DE CLASE IDEAL
A₁: Identificación de problemas de Programación Lineal: Textilería peruana y solución preliminar.	• Organización de datos. • Identificación de variables. • Manejo de valores de dos variables de acuerdo a tres condiciones. • Determinación de los rangos de variabilidad de dos variables. • Pasaje del registro verbal al algebraico.	✓ Situación de acción: evalúan posibilidades de producción, manejando tres condiciones a la vez. Buscan valores que satisfagan a la vez las tres condiciones. ✓ Situación de formulación: expresan algebraicamente los datos del problema. ✓ Situación de validación: explican sus formulaciones usando argumentos matemáticos. ✓ Institucionalización: de las características y estructura de un problema de PL.	• Dado que inmediatamente antes de la aplicación de la Secuencia Didáctica se han desarrollado los SEL con dos variables, se espera que los estudiantes sistematicen los datos identificando correctamente las variables para abordar convenientemente la actividad. • Que todos los estudiantes evalúen correctamente las condiciones del problema para responder los primeros tres ítems; y que en base al sentido que tienen las preguntas se den cuenta que no hay necesidad de agotar los recursos disponibles. • Todo ello debe permitirles expresar dichas restricciones a través de desigualdades, identificando correctamente las variables. • Sin embargo sabemos que para la mayoría no será fácil identificar las variables, ni mucho menos expresar las restricciones del problema a través de desigualdades, principalmente por la poca experiencia que tienen en este tipo de actividades. Por lo que será necesario orientarlos durante el proceso e incidir en estos aspectos en la fase de institucionalización.
A₂: Solución gráfica de la inecuación lineal: **2x – 3y < 6**.	• Ubicación de puntos en el plano coordenado. • Representación de la ecuación 2x – 3y = 6 en el plano coordenado. • Concepto de: separación del plano, semiplano y recta frontera. • Determinación de soluciones de una inecuación lineal.	✓ Situación de acción: buscan pares de números reales que satisfagan la inecuación. Tabulan valores y ubican puntos en el plano coordenado para graficar la recta. ✓ Situación de formulación: reconocen el semiplano como solución de la inecuación, formulan la inecuación del semiplano opuesto y la ecuación de la recta frontera. ✓ Institucionalización: de la gráfica de la inecuación lineal.	• Se espera que los estudiantes reconozcan que las soluciones de una inecuación lineal con dos variables son infinitas, y que forman un semiplano. • Que comprendan la importancia de graficar la ecuación asociada para determinar dicho semiplano. • Es posible que los estudiantes aún no sean capaces de formalizar el procedimiento para graficar una inecuación lineal, por lo que será necesario seguir reforzando con las siguientes actividades.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	CONTENIDO MATEMÁTICO EN JUEGO	ELEMENTOS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA	HISTORIA DE CLASE IDEAL
A$_3$: Representación gráfica de los puntos para los cuales: "La ordenada disminuido en cinco es como mínimo el triple de la abscisa".	• Paso del registro verbal al algebraico. • Representación gráfica de una inecuación lineal con dos variables.	✓ Situación de acción: expresan algebraicamente la situación descrita y grafican la inecuación. ✓ Situación de formulación: comparten sus propuestas en grupos y describen el procedimiento empleado para graficar la inecuación. ✓ Situación de validación: explican el procedimiento propuesto a través de ejemplos. ✓ Institucionalización: de la expresión algebraica de la situación descrita y de su respectiva gráfica.	• Se espera que los estudiantes a partir de la descripción verbal formulen la inecuación lineal correspondiente y teniendo como ejemplo la actividad anterior la representen gráficamente. • Además, esperamos que identifiquen los procesos claves para resolver gráficamente una inecuación lineal con dos variables. • Es probable que tengan dificultades para representar la expresión "es como mínimo", pues tienen dificultades para discriminar y representar expresiones que indican desigualdad.
A$_4$: Formulación del procedimiento para resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos variables; y aplicación de dicho procedimiento en la solución de la inecuación: **4x + 5y - 30 > 0**.	• Gráfica de la ecuación asociada a la inecuación lineal. • Semiplano solución. • Semiplano abierto.	✓ Situación de acción**:** resuelven gráficamente la inecuación. ✓ Situación de formulación: de un procedimiento práctico para graficar inecuaciones lineales con dos variables teniendo en cuenta el Teorema 1. ✓ Institucionalización: del procedimiento de solución gráfica de una inecuación lineal con dos variables.	• Se espera que los estudiantes grafiquen la inecuación sin mayores dificultades y determinen en qué casos la recta frontera forma parte de la solución. • Además que planteen la inecuación del semiplano opuesto. • Finalmente que reformulen el procedimiento para graficar una inecuación lineal con dos variables teniendo en cuenta el **Teorema 1**. •
A$_5$: Dado un semiplano formulan la inecuación correspondiente.	• Ecuación de una recta paralela al eje Y. • Gráfica de rectas paralelas a los ejes. • Gráfica de semiplanos cuya recta frontera es paralela a los ejes coordenados.	✓ Situación de acción: Analizan las características del semiplano y grafican semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes. ✓ Situación de formulación: de la inecuación cuya frontera es la recta x = 3 y que contiene el origen de coordenadas. ✓ Situación de validación: justifican las inecuaciones propuestas. ✓ Institucionalización: de la solución de inecuaciones definidas en una sola variable.	• Se espera que guiados por el punto (cuyas coordenadas aparecen en la gráfica) de la recta frontera formulen primero la ecuación de dicha recta para luego plantear la inecuación que se pide. • Es posible que presenten dificultades, tanto por el tipo de registro que se usa (infrecuentes en clase) como por el tipo de inecuación que corresponde (el coeficiente de y es 0), por lo que será necesario hacerles ver lo que sucede gráficamente con la variable que "no aparece".
A$_6$: Identifican la solución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales (SIL) con dos variables.	• Intersección de semiplanos. • Sistema de inecuaciones lineales. • Solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.	✓ Situación de acción: identifican la solución de cada una de las inecuaciones lineales y la solución común. ✓ Situación de formulación: definen el concepto de sistemas de inecuaciones lineales. ✓ Institucionalización: del concepto de SIL.	• Se espera que a partir de la gráfica identifiquen la solución de un SIL como la intersección de semiplanos y que formulen una definición relacionando con el concepto de SEL. • Además, a modo de verificación esperamos que realicen cambios en los sentidos de dichas desigualdades para formular un SIL para otra región del plano.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	CONTENIDO MATEMÁTICO EN JUEGO	ELEMENTOS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA	HISTORIA DE CLASE IDEAL
A7: Solución gráfica del sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+3y<4 \\ 2x-y>1 \end{cases}$. .	• Gráfica de inecuaciones lineales con dos variables. • Variantes de un SIL.	✓ Situación de acción: resuelven el sistema y plantean otro, dada una región del plano. ✓ Situación de formulación: del procedimiento para resolver gráficamente SIL con dos variables. ✓ Situación de validación: explican el procedimiento propuesto en el plenario. ✓ Institucionalización: de la solución del sistema.	• En base a la actividad anterior se espera que los estudiantes resuelvan el sistema graficando cada una de las inecuaciones, y justifiquen por qué algunos puntos son solución del sistema y otros no. • Para evidenciar su comprensión deben plantear un nuevo sistema cambiando convenientemente los sentidos de las desigualdades. • Además, esta actividad debe permitirles sistematizar sus acciones y proponer un procedimiento para resolver SIL.
A8: Formulación de sistemas de inecuaciones en base a las ecuaciones: $x-y+3=0$ y $x-y+5=0$ y la descripción de la región solución.	• Ecuaciones de rectas paralelas. • Formulación de SIL dadas las características de su conjunto solución.	✓ Situación de acción: grafican rectas paralelas e identifican las regiones determinadas. ✓ Situación de formulación: plantean SIL que correspondan a las regiones determinadas. ✓ Situación de validación: justifican los sistemas planteados. ✓ Institucionalización: de las regiones determinadas por rectas paralelas.	• Con esta actividad esperamos que los estudiantes identifiquen las diversas soluciones que puede presentar un SIL asociado a dos rectas paralelas. • Para ello esperamos que grafiquen correctamente las ecuaciones y formulen los SIL correspondientes a las regiones descritas, verificando y explicando sus propuestas. • En caso de dificultad, se debe orientar a que los mismos alumnos corrijan sus errores y mejoren sus propuestas.
A9: Solución gráfica del sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x+y-3>0 \\ x-2y+1<0 \\ y-3<0 \end{cases}$.	• Solución de SIL. • Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables. • Intersección de rectas.	✓ Situación de acción: resuelven gráficamente un sistema de tres inecuaciones y determinan los vértices de la región solución. ✓ Situación de formulación: proponen sus soluciones a sus compañeros de grupo. ✓ Situación de validación: explican la solución del sistema. ✓ Institucionalización: de la solución de un sistema formado por tres inecuaciones.	• Se espera que resuelvan el SIL que contiene tres inecuaciones, transfiriendo el procedimiento planteado para un sistema de dos inecuaciones. • Que se den cuenta que para hallar el vértice de la región solución deben resolver los SEL correspondientes a las rectas que se cortan en dicho punto. • Es probable que persista la dificultad para graficar la inecuación $y-3<0$, por lo que será necesario que vuelvan a revisar la actividad 5.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	CONTENIDO MATEMÁTICO EN JUEGO	ELEMENTOS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA.	HISTORIA DE CLASE IDEAL
A10: Solución del problema planteado en la Actividad Nº 01, graficando la función objetivo sobre la región factible determinada por las restricciones del problema. .	• Restricciones de un problema de PL. • Función objetivo. • Procedimiento de solución de SIL con dos variables. • Región factible. • Vértices de la región factible. • Rectas de nivel. • Solución óptima.	✓ Situación de acción: grafican las restricciones del problema y determinan la región factible. Sobre dicha región representan la función objetivo. ✓ Situación de formulación: del procedimiento usado en la solución del problema. ✓ Situación de validación: explican la solución del problema y el procedimiento usado. ✓ Institucionalización: de la solución del problema y el procedimiento usado.	• En esta actividad esperamos que los estudiantes resuelvan la situación presentada en la primera actividad aplicando la solución de SIL. • Se espera que grafiquen correctamente las restricciones del problema y determinen la región factible. • Que identifiquen la gráfica de la función objetivo como una familia de rectas paralelas. • Que analicen y hagan una primera formalización del procedimiento para resolver problemas de PL gráficamente.
A11: **“Venta de productos naturales”.** Solución de un problema de **maximización** con cinco restricciones, que determinan una región factible cerrada.	• Esquemas y cuadros de organización de datos. • Identificación de variables. • Pasaje del registro verbal al algebraico. • Restricciones y función objetivo de un problema de PL. • Maximización de una función.	✓ Situación de acción: identifican las variables, organizan los datos y expresan algebraicamente las restricciones y la función objetivo del problema. Resuelven el problema. ✓ Situación de formulación: proponen el SIL a sus compañeros de grupo, y la solución del problema. ✓ Situación de validación: explican el sistema propuesto y la solución del problema. ✓ Institucionalización: del sistema de inecuaciones que representan las restricciones y de la solución del problema.	• En base a la actividad anterior se espera que los estudiantes identifiquen las variables y organicen adecuadamente los datos para facilitar la formulación algebraica tanto de las restricciones como de la función objetivo. • Que grafiquen las restricciones para determinar la región de soluciones factibles, que grafiquen la función objetivo para valores sugeridos y aproximar la solución. • Que determinen con exactitud las coordenadas de los vértices de la región factible para precisar la solución del problema. • Que en base a ésta y la actividad anterior se den cuenta que la función objetivo toma su máximo valor en uno de los vértices de la región factible y sistematicen el proceso de solución.
A12: **Viviendas o alimentos…??** Solución de un problema de **minimización** cuya región de soluciones factibles es abierta.	• Pasaje del registro verbal al registro simbólico. • Restricciones y función objetivo de un problema de PL. • Procedimiento para determinar la región factible. • Minimización de una función. • Rectas de nivel.	✓ Situación de acción: identifican las variables y expresan algebraicamente las restricciones y la función objetivo, y resuelven el problema. ✓ Situación de formulación: comparten sus soluciones con sus compañeros de grupo. En grupos proponen un procedimiento para resolver problemas de PL incorporando el Teorema 2. ✓ Situación de validación: presentan sus soluciones y explican el procedimiento al plenario. ✓ Institucionalización: del procedimiento de solución de problemas de PL.	• Teniendo en cuenta las actividades anteriores esperamos que logren formular algebraicamente las restricciones y la función objetivo. • Que determinen con precisión la región factible y las coordenadas de sus vértices, y evalúen la función objetivo en dichos puntos. • Que reformulen y expliquen el procedimiento planteado incorporando el Teorema 2 (sobre la ubicación de la solución óptima de un problema de PL). .

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	CONTENIDO MATEMÁTICO EN JUEGO	ELEMENTOS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA.	HISTORIA DE CLASE IDEAL
A_{13}: **Alimentos para mascotas.** Solución de un problema de PL aplicando el teorema 2.	• Restricciones y función objetivo de un problema de PL. • Procedimiento práctico de solución de problemas de PL. • Región factible. • Vértices de la región factible. • Solución óptima.	✓ Situación de acción: resuelven el problema planteado. ✓ Situación de formulación: proponen sus soluciones a su grupo. ✓ Situación de validación: presentan y explican sus soluciones al plenario. ✓ Institucionalización: de la solución del problema.	• En esta actividad esperamos que los estudiantes en forma individual resuelvan el problema propuesto aplicando en forma adecuada el procedimiento institucionalizado. • Que sean capaces de explicar su solución en el plenario y responder a las preguntas que se formulen.
A_{14}: **Formulación de un problema de programación lineal.** Plantean y resuelven un problema de programación lineal relacionado a situaciones de su especialidad.	• Estructura de un problema de PL. • Manejo adecuado del registro verbal. • Verificación de que los datos correspondan a situaciones reales. • Manejo del rango de valores de las variables.	✓ Situación de acción: plantean un problema de PL relacionado a su contexto. ✓ Situación de formulación: comparten en pares el problema, expresando algebraicamente las restricciones y la función objetivo. ✓ Situación de validación: explican la solución del problema propuesto. ✓ Institucionalización: de las características y estructura de problemas de PL.	• La formulación de problemas es una de las mejores formas de verificar que los alumnos han aprendido a resolverlos. Por eso, para concluir la secuencia didáctica, esperamos que los estudiantes formulen un problema de PL relacionado a su contexto de manera original (que no consista simplemente en sustituir los datos de alguno de los problemas resueltos). • Que resuelvan el problema para que ellos mismos evalúen su calidad y realicen los reajustes de ser necesarios. • Que valoren la utilidad de la programación lineal en la solución de diversos tipos de problemas.

4.4 Elaboración de la secuencia didáctica

Iniciando nuestras actividades

Aquí empezamos una serie de actividades que estamos seguros te resultarán muy útiles e interesantes. Solo tienes que ponerle muchas ganas.

Actividad N° 01

Textilería peruana

La empresa peruana URPI, confecciona tapices y abrigos de lana de alpaca. Para elaborar un tapiz usa 4 kg de lana de alpaca, necesita 2 horas de trabajo y una inversión de S/. 60 para gastos adicionales.

Mientras que para confeccionar un abrigo utiliza 2 kg de lana de alpaca, 3 horas de trabajo y S/. 50 para otros gastos.

La empresa dispone de 64 kg de lana de alpaca, S/. 1200 para gastos adicionales y de un equipo humano capaz de trabajar 60 horas.

a. ¿Es posible confeccionar 20 tapices? ¿Por qué?
   ¿Y 20 abrigos?
b. Si se elaboran 6 tapices, ¿cuántos abrigos como máximo se podrán confeccionar?
   ¿Y si se elaboran 15 tapices?
c. Si se confeccionan 8 abrigos, ¿cuántos tapices como máximo se podrán elaborar?
   ¿Y si se confeccionan 14 abrigos?

Con tus compañeros de grupo

d. Busquen una expresión para calcular los kilogramos de lana de alpaca usados para confeccionar los tapices y los abrigos.
e. Busquen una expresión para calcular las horas trabajadas según el número de tapices y abrigos confeccionados.
f. Busquen una expresión para calcular la inversión en gastos adicionales según el número de tapices y abrigos confeccionados.
g. Queremos saber cuántos tapices y abrigos se deben producir para obtener la máxima ganancia posible, si se sabe que por la venta de cada tapiz se gana S/. 50 y por cada abrigo la ganancia es de S/. 40. ¿Cómo se expresaría la ganancia a obtener?

Actividad N° 02

Representa gráficamente la inecuación $2x - 3y < 6$.

Si tienes dificultad para hacerlo, te proponemos la siguiente secuencia de actividades:

- ✓ Encuentra por lo menos 5 pares ordenados (x, y) que satisfagan la inecuación y otros 5 que no la satisfagan.
  ¿Será posible encontrar más pares ordenados que satisfagan la inecuación? Explica tu respuesta.
- ✓ Representa gráficamente la ecuación $2x - 3y = 6$.
  ¿En cuántas regiones divide al plano dicha gráfica?
- ✓ Si en un mismo plano coordenado representas los pares de números que encontraste en la parte (a) (tanto los que satisfacen la inecuación como aquéllos que no la satisfacen); ¿qué puedes concluir?

Con tus compañeros de grupo

a. ¿Los puntos de la recta son solución de la inecuación? ¿Por qué?
b. ¿Cómo representarías los puntos ubicados en el semiplano opuesto?

Actividad N° 03

Representa en el plano coordenado el conjunto de puntos para los cuales:
"La ordenada disminuido en cinco es como mínimo el triple de la abscisa".

a. ¿El origen de coordenadas pertenece a dicho conjunto?
   ¿Y los puntos de la recta frontera? Explica tu respuesta.
b. Enumera los pasos para resolver gráficamente una inecuación lineal con dos variables.

Actividad N° 04

Con tus compañeros de grupo

Siguiendo dicho procedimiento grafiquen la inecuación $4x + 5y - 30 > 0$.

a. ¿Los puntos de la recta frontera son soluciones de la inecuación? ¿Por qué?

b. Escriban la inecuación del semiplano opuesto pero que no contenga los puntos de su frontera.

c. Describan un procedimiento práctico que permita resolver gráficamente una inecuación lineal con dos variables, tomando en cuenta la siguiente propiedad.

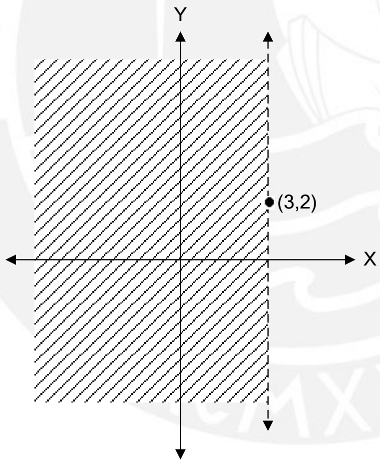
Propiedad 1:

- Sea **P** un punto cualquiera de uno de los semiplanos en los que la gráfica de la ecuación $ax+by+c=0$ divide al plano.
- Si el punto **P** satisface la inecuación $ax+by+c<0$, entonces, todos los puntos del semiplano donde se encuentra **P**, satisfacen también la inecuación $ax+by+c<0$.

Del mismo modo se pueden establecer propiedades similares para determinar soluciones de las inecuaciones: $ax+by+c>0$, $ax+by+c\leq 0$, y $ax+by+c\geq 0$.

Actividad N° 05

Escribe la inecuación correspondiente al siguiente semiplano.



Con tus compañeros de grupo

a. ¿Cómo representarían el semiplano derecho respecto al eje Y?

b. ¿Cuál sería la inecuación si la gráfica fuera el semiplano superior a la recta $y=5$?

Aplico lo aprendido Nº 1

Felicitaciones por tu esfuerzo. Ahora, es necesario que resuelvas las siguientes situaciones para reforzar y evaluar tus aprendizajes. Lee con mucha atención y pide apoyo sólo cuando lo hayas intentado lo suficiente. Tú puedes…!!!

1. Resuelve en el plano cartesiano las siguientes inecuaciones.

   a) $x + y > 3$ b) $2x - 5y + 7 \leq 0$ c) $5x - y \geq 5$

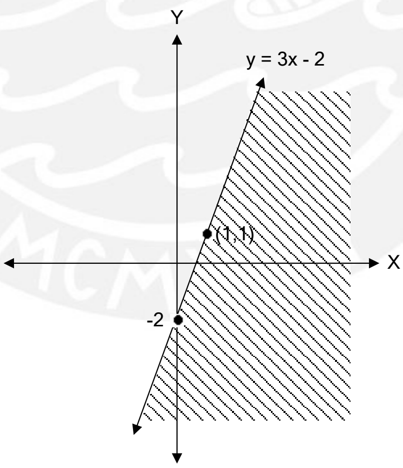
   d) $4y - x > 0$ e) $y < 0$

   ✓ Indica en cada caso si la recta frontera es o no parte de la solución.

   ✓ Indica en cada caso si el origen de coordenadas es parte de la solución.

2. Una conferencia al que asistieron tanto estudiantes como profesionales, se llevó a cabo en un Auditorio cuya capacidad es de 500 personas.
   a. Busca una expresión para representar el número total de asistentes (distinguiendo entre estudiantes y profesionales).
   b. Representa gráficamente las posibles soluciones de la situación planteada.

3. Escribe la inecuación correspondiente al siguiente semiplano.



4. Grafica en un mismo plano coordenado las inecuaciones lineales dadas en cada caso, y señala la intersección de dichas regiones.

a. $\begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ y - 2x > 0 \end{array}$ *b.* $\begin{array}{l} y \geq 2x \\ y \leq 2x + 3 \end{array}$ *c.* $-1 \leq y \leq 4$

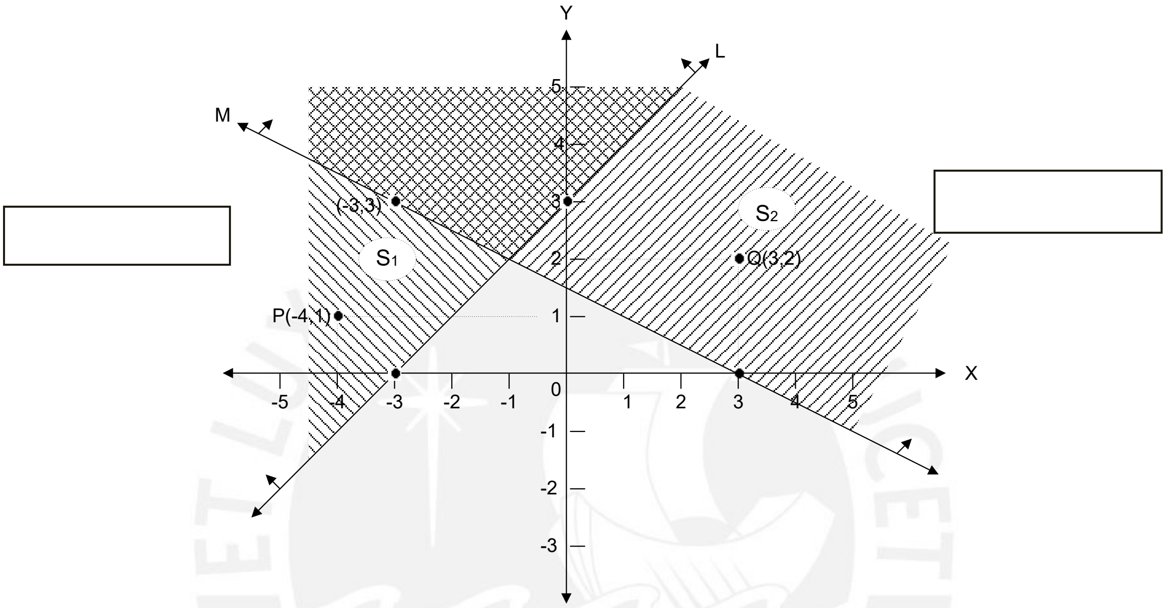
"El éxito de la vida no está en vencer siempre, sino en no desanimarse nunca".

Buscando puntos comunes...!!!

Las siguientes actividades son mucho más prácticas, seguramente lo harás en menos tiempo. Sigue con el mismo entusiasmo. Supera tus propias metas. !!!

Actividad N° 06

A continuación se observan las gráficas de las inecuaciones: $x - y + 3 \leq 0$ y $x + 2y > 3$.



a. Como se observa en el gráfico, S_1 es el semiplano cuya frontera es la recta L, y S_2 es el semiplano cuya frontera es la recta M. Escribe en los recuadros adjuntos la inecuación que corresponda.

b. ¿Hay puntos que satisfacen a ambas inecuaciones a la vez? Toma por lo menos dos de esos puntos y verifica tu respuesta.

c. Señala en el gráfico la región donde se encuentran dichos puntos (puedes colorear) y representa simbólicamente dicho conjunto (usando S_1 y S_2).

Con tus compañeros de grupo

d. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la intersección de los semiplanos S_1 y S_2:

i) $x - y + 3 \leq 0 \;\wedge\; x + 2y > 3$, ***ii)*** $x - y + 3 \leq 0 \;\vee\; x + 2y > 3$?

e. En base al gráfico presentado, plantea un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región donde se encuentra el origen de coordenadas.

f. ¿Cómo definirían un **Sistema de Inecuaciones Lineales** con dos variables? (Recuerden el concepto de sistema de ecuaciones lineales).

Actividad N° 07

Resuelve gráficamente el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x+3y<4 \\ 2x-y>1 \end{cases}$

a. Verifica si el origen de coordenadas y los puntos (1, 4) y (2, -2) son o no, solución del sistema. Explica tus respuestas.
b. ¿Las fronteras son solución del sistema? ¿Por qué?

Con tus compañeros de grupo

c. Modifiquen el sistema anterior de manera que la solución del nuevo sistema contenga el punto (5, 2), e incluya sus fronteras.
d. Indiquen el procedimiento que hay que seguir para resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos variables por el método gráfico.

Actividad N° 08

Dadas las ecuaciones $x-y+3=0$ y $x-y+5=0$.

a. Represéntalas en un mismo plano coordenado y describe las gráficas que obtienes. ¿En cuántas regiones dividen al plano dichas gráficas?
b. Teniendo como referencia las ecuaciones dadas, plantea un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región comprendida entre las dos rectas.
c. En base a las mismas ecuaciones formula un sistema de inecuaciones cuya solución sea uno de los semiplanos limitados por la recta x – y + 5 = 0.

d. ¿Cuál es la solución del sistema $\begin{array}{l} x-y+3>0 \\ x-y+5<0 \end{array}$? Explica tu respuesta.

Actividad N° 09: Determina el conjunto solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{array}{l} 2x+y-3>0 \\ x-2y+1<0 \\ y-3<0 \end{array}.$$

a. Halla los vértices de la región solución.
   ¿Dichos vértices son solución del sistema? ¿Por qué?

Con tus compañeros de grupo

b. Formula un nuevo sistema de manera que su solución sea la región triangular cuyos vértices son los puntos (0, ½), (0, 3) y (1,1).

Aplico lo aprendido Nº 2

Felicitaciones... es un gran avance. Evalúa tú mismo tus aprendizajes resolviendo las siguientes actividades. Después puedes discutirlo con tu grupo.

1.- Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

i) $\begin{array}{l} 3x-2y \leq 5 \\ 4x+y \geq 3 \end{array}$ *ii)* $\begin{array}{l} x+y<5 \\ y-x<-2 \end{array}$ *iii)* $\begin{array}{l} x-y+4 \geq 0 \\ x+2>0 \end{array}$

a. Indica en cada caso si las fronteras forman parte de la solución.

b. En el sistema **(i)** incluye la inecuación $y \leq 2$ y resuelve el nuevo sistema.
¿Cuáles son los vértices de la región determinada?

2.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones; luego, observa con atención y describe el conjunto solución de cada uno.

a) $\begin{array}{l} 4x-7y \geq -28 \\ 2x-y \leq 2 \\ 4x+3y \leq 24 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 4x-5y \leq 2 \\ 3x+y \leq 11 \\ 2x-y \geq 4 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 2x-y \geq 4 \\ 4x-2y \leq 8 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 5x-6y \leq -30 \\ 3x+4y \leq 0 \\ 5x+3y \geq 15 \\ y \leq 0 \end{array}$

3.- Grafica los siguientes sistemas:

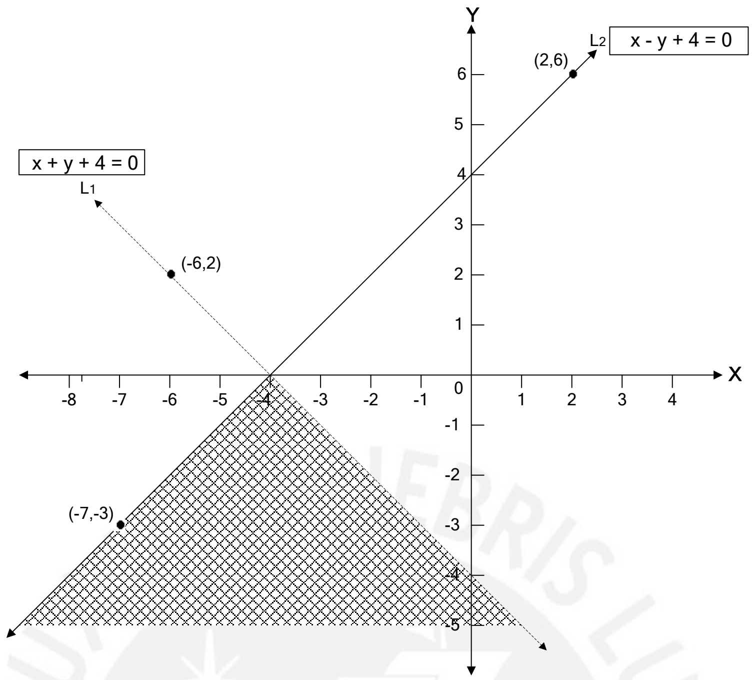
i) $\begin{array}{l} x-y \geq -3 \\ x+2y<3 \\ y+1 \geq 0 \end{array}$ **ii)** $\begin{array}{l} x+y-2 \geq 0 \\ -2x-2y+10>0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$ **iii)** $\begin{array}{l} x+y \leq 9 \\ x-3y \geq -15 \\ 3x-2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$

a. En cada caso determina los vértices de la región solución e indica si dichos vértices pertenecen o no a la solución del sistema correspondiente.

b. La solución del sistema **(iii)** es una región limitada por un trapecio isósceles. Modifica alguna de las inecuaciones del sistema para que la nueva solución adopte una forma triangular.

c. Evalúa la función $C=5x+9y$ en los vértices del conjunto solución del tercer sistema, ¿cuál es el mayor valor que toma? ¿En cuál de los vértices sucede este hecho?

4.- Plantea un sistema de inecuaciones cuya gráfica sea la siguiente.



a. Realiza las modificaciones necesarias, de manera que el origen de coordenadas y las fronteras sean parte de la solución.

b. Plantea un nuevo sistema de modo que la solución contenga al punto (-4, 2).

5. Formula un sistema de inecuaciones que permita determinar el primer cuadrante del plano coordenado.

a. En esta parte del plano grafica las inecuaciones: $20x + 24y \leq 480 \quad 15x + 12y \leq 300$

b. Halla los vértices de la región determinada.

c. Sobre esta región grafica la función $f = x + 2y$, para f = 10, 16, 20, 32 y 40.

d. Describe las gráficas que obtienes.

e. ¿Qué sucede con la gráfica de la función a medida que sus valores aumentan?

No es suficiente querer, se debe también hacer.
No basta saber, se debe también aplicar.

Gastando menos para ganar más...!!!

Ya estamos por llegar a la meta. Aquí te darás cuenta, cómo los sistemas de inecuaciones lineales son tan útiles para resolver diversas situaciones problemáticas de la vida diaria. Este tipo de situaciones se conocen como problemas de **programación lineal** y verás que son fáciles de resolver.

Actividad N° 10:

Volvamos al problema de la "Textilería peruana" ...!!!

a. En un mismo plano coordenado representa gráficamente las restricciones del problema de la Actividad Nº 01 (sobre la elaboración de tapices y abrigos, ¿recuerdas?

La región del plano determinada al representar gráficamente las restricciones de un problema de programación lineal se denomina la región de soluciones factibles o, simplemente la **región factible**.

b. Trata de encontrar todas las soluciones posibles de producción de tapices y abrigos, que permita obtener una determinada ganancia. Pongamos 400, es decir busca pares de números *(x, y)* para los cuales la ganancia sea 400 (G = 400). Para ayudarte, puedes usar tablas como la siguiente.

x	y	G = 50x + 40y
0	10	400
	0	400
4		400

✓ Ubica dichos puntos sobre la región factible y observa cómo están dispuestos.

c. Haz lo mismo para G = 200, G = 600, G = 800, G = 1000 y G = 1200.
Describe las gráficas que obtienes.

d. ¿Qué sucede con el valor de *G* a medida que las rectas se alejan del origen de coordenadas?

e. ¿Es posible ganar S/. 1200? ¿Por qué?

f. ¿Cuál es la máxima ganancia que se puede obtener?
¿Cuántos tapices y abrigos se deben producir para obtener dicha ganancia?

> Dicho par ordenado que representa el máximo número de piezas que se deben elaborar para obtener la máxima ganancia posible se denomina la **solución óptima** del problema.

Con tus compañeros de grupo

g. Analicen el procedimiento de solución de este problema y describe los pasos que se deben seguir para resolver un problema de programación lineal.

Aplica dicho procedimiento en la siguiente situación, y piensa cómo hacerlo de manera más práctica.

Actividad N° 11

Venta de productos naturales

Uriel es un estudiante que para cubrir sus gastos dedica parte de su tiempo a la venta de productos naturales.
Esta semana cuenta con 150 frascos de Noni y 180 frascos de Uña de gato. Pero por experiencia sabe que a lo más vende 250 frascos semanales. ¿Cuántos frascos de cada tipo tendría que vender para que su ganancia sea la mayor posible, sabiendo que por cada frasco de Noni gana S/. 5 y por cada frasco de Uña de gato gana S/. 6?

a. ¿Es posible que venda 120 frascos de Noni y 150 frascos de Uña de gato? Explica tu respuesta.
b. Sobre la región de soluciones factibles, grafica las ***rectas de nivel*** [30] que representen algunas ganancias que se pueden obtener. Por ejemplo: G =300, G =900 y G =1200. ¿Es posible que la ganancia sea de S/. 1 500? ¿Por qué?
c. ¿Da lo mismo vender 180 frascos de Noni y 70 frascos de uña de gato, que vender 70 frascos de Noni y 180 frascos de uña de gato? Explica tu respuesta.
d. Dados los puntos A (150, 100) y B (70, 180), ¿en cuál de ellos se gana más?
e. ¿Cuál es la solución óptima? ¿Qué representa gráficamente?
f. ¿En qué punto corta al eje Y la recta de nivel que contiene la solución óptima?

Con tus compañeros de grupo

Compartan y evalúen sus respuestas.

---

30 Rectas paralelas que resultan de graficar la función objetivo.

Propiedad 2:

> - Si hay una única solución que maximiza o minimiza una función objetivo lineal, entonces esa solución es un vértice de la región de soluciones factibles.
> - Si hay más de una solución, por lo menos dos de las soluciones corresponden a vértices adyacentes de la región de soluciones factibles".

<u>Actividad N° 12</u>

Viviendas o alimentos …???

Un proyecto de mejoramiento de tierras se encuentra con ciertas dificultades respecto a los requerimientos de los propietarios. Un grupo pide que por lo menos 4000 hectáreas se destinen a usos urbanos.

El segundo grupo está dedicado a la agricultura y solicita que se destinen al menos 5000 hectáreas para uso agrícola. Por último, un tercer grupo dice que al menos se deben mejorar 10 000 hectáreas de tierra, sin importarles el uso que se les de.
Si el mejoramiento de tierras para uso urbano cuesta 400 dólares por hectárea y para uso agrícola 300 dólares; ¿cuántas hectáreas de tierras para cada uso se deben considerar en el proyecto, de manera que el **costo** sea el **mínimo** posible y se satisfagan los requerimientos de todos los propietarios?

¿Son necesarias las restricciones de no negatividad? ¿Por qué?

a. ¿Es posible asignar 5 000 hectáreas de tierras para uso urbano y 4 500 para uso agrícola? ¿Y, 6 000 hectáreas para uso urbano y 8 000 para uso agrícola?
   Justifica tus respuestas.
b. ¿Cuál es la solución óptima? Explica su significado.

Con tus compañeros de grupo

En base a la Propiedad N° 2, describan un procedimiento práctico para resolver problemas de programación lineal.

Usa dicho procedimiento para resolver la siguiente situación.

Actividad N° 13

Alimentos para mascotas

La empresa “NUTRICAN” elabora alimentos caninos. A pedido de los clientes hace mezclas especiales para canes adultos y para cachorros, agregando a la carne y los cereales, concentrados de vitaminas C y D.

Cada paquete de alimento para perros adultos debe contener 3 kg de vitamina C y 1 kg de vitamina D; mientras que el paquete de alimento para cachorros contendrá 6 kg de vitamina C y 4 kg de vitamina D. La compañía recibe diariamente los concentrados vitamínicos en cajas de 120 kilogramos, dos de vitamina C y una de vitamina D.

La ganancia por cada paquete de alimento para canes adultos es de S/. 12, y de S/. 30 por cada paquete de alimento para cachorros. Si la empresa desea obtener la máxima ganancia posible, ¿cuántos paquetes de alimento para canes adultos y cuántos paquetes para cachorros debe producir?

a. ¿Cuál es la máxima ganancia que se puede obtener?
b. ¿Es posible elaborar 40 paquetes de alimentos para perros adultos y 10 para cachorros? ¿Cuál es la ganancia? En qué otro caso se obtiene la misma ganancia.
c. ¿Por qué no se puede elaborar 25 paquetes para perros adultos y 25 para cachorros?
d. ¿Es posible obtener una ganancia de S/ 1 000?
   En caso afirmativo, indica dos casos en los que se puede obtener esta utilidad.
e. ¿Qué pasaría si la empresa decidiera elaborar solamente alimentos para cachorros?

Actividad N° 14

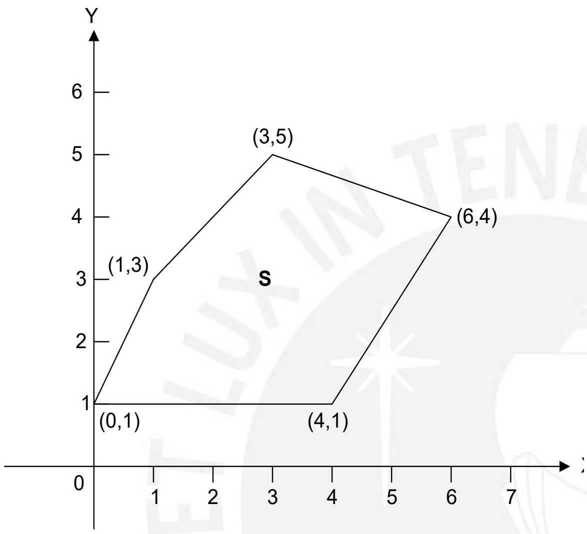
Pensando, pensando…

- Plantea un problema de programación lineal relacionado a situaciones de tu especialidad o de tu interés y resuelve.
- Comparte y evalúa con tus compañeros de grupo.

Aplico lo aprendido Nº 3

Ya llegamos a la meta. Felicitaciones por tus logros. Para terminar dedica un poco de tu tiempo a resolver las siguientes actividades que te permitirán reforzar y evaluar tus aprendizajes. Recuerda, que para ampliar el tema puedes consultar la **bibliografía** propuesta.

1.- Dada la región poligonal S:



a. Determina el mínimo valor que toma la función $H = 7x - 2y$ en dicha región.

b. ¿En qué punto de S, la función $K = 3x + 10y$ se maximiza?

2.- ¿En qué punto de la región determinada por el sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 10 \\ x + 2y &\geq 10 . \\ x + y &\leq 10 \end{aligned}$$

Se maximiza la función $G = 3x + y$?

3.- Dado el sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6 \\ 3x + 5y &\leq 30 \\ 0 \leq x &\leq 7 \\ 0 \leq y &\leq 4 \end{aligned}$$

a. ¿En qué punto de la región determinada por el sistema se maximiza la función $Z = 9x + 5y$?

b. Al eliminar la desigualdad $0 \leq x \leq 7$ del sistema anterior, las demás desigualdades determinan una región limitada por un paralelogramo. ¿Qué punto de esta nueva región minimiza la función $Z = 60x - 40y$?

4.- Venta de madera

La compañía maderera "EL PINO" puede producir tablones para construcción, o láminas para ebanistería. La capacidad de producción semanal de la fábrica es de 400 unidades; de las cuales, necesariamente 100 deben ser tablones y 150 deben ser láminas, para satisfacer la demanda de ciertos clientes fijos.

La ganancia en cada tablón es de 20 soles y en cada lámina es de 30 soles. ¿Cuántos tablones y cuántas láminas se deben producir semanalmente para lograr la máxima utilidad?

a. ¿Cuál es la ganancia al producir 100 tablones y 280 láminas?
b. ¿En qué casos se gana lo mismo que al producir 250 tablones y 150 láminas?
c. Bajo las mismas condiciones, ¿cuál sería la *producción mensual* que maximice la ganancia?
d. ¿Cuál sería la solución del problema si la demanda de los clientes fijos fuera de: 100 láminas y 150 tablones?
e. Según las demás condiciones del problema inicial, ¿qué producción maximiza la ganancia, si la capacidad de producción semanal de la empresa es de 500 unidades?

5.- El Comerciante de frutas

El señor Genaro viaja a Huaral a comprar mandarinas con un capital de S/. 1 200. Compra mandarinas de primera clase a S/. 3 el kilogramo y mandarinas de segunda clase a S/. 2 el kilogramo; los que a su vez vende a S/. 5 y S/. 3 el kilogramo respectivamente.
¿Cuántos kilogramos de mandarinas de cada clase deberá comprar y vender para que su utilidad sea la mayor posible, sabiendo además que dispone de una camioneta cuya capacidad máxima es de 500 kilogramos?

a. ¿Cuántos kilogramos de cada clase debe comprar si necesariamente debe incluir 150 kilogramos de primera clase para satisfacer la demanda de algunos clientes fijos?
¿Tendría alguna ventaja respecto a la situación inicial?
b. ¿Cuánto podría ganar como máximo si los precios de venta por kilogramo fuesen el doble de los respectivos precios de costo?
c. Según los precios establecidos en la situación inicial, ¿cuál sería la máxima ganancia si tuviera una camioneta de 600 kilogramos de capacidad y un capital de S/.1 500?

6.- Jóvenes emprendedores

Un grupo de jóvenes arma pequeñas calculadoras electrónicas en dos modelos MX y MZ.

Hay tres etapas básicas en la producción: producción de partes, montaje final, y, control y embalaje. La siguiente tabla indica la cantidad de horas-hombre necesarias para hacer cada operación y la cantidad total disponible hoy, por cada sección:

Modelos	MX	MZ	Horas-hombre disponibles
Producción de Partes	3	7	210
Control y embalaje	1	1	40
Montaje	8	3	240

a. ¿Cuántos aparatos de cada modelo le conviene producir hoy a la compañía, sabiendo que la utilidad es de S/. 30 por cualquiera de los modelos?
b. ¿Cuántos aparatos de cada modelo se tendría que producir para obtener una **utilidad** total de S/. 900? Dar dos combinaciones posibles.
c. ¿Es posible producir 15 calculadoras del modelo MX y 25 del modelo MZ? ¿Por qué?

7.- Una dieta saludable

Una dieta debe contener por lo menos 400 unidades de vitaminas, 500 unidades de minerales y 1000 calorías. Hay dos alimentos disponibles: A_1 y A_2 que cuestan S/. 0,50 y S/. 0,30 por unidad respectivamente.

Una unidad de alimento A_1 contiene 2 unidades de vitaminas, una unidad de minerales y 2 calorías. Una unidad del alimento A_2 contiene una unidad de vitaminas, 2 unidades de minerales y 4 calorías.

Determina el costo **mínimo** de una dieta que consista en una mezcla de estos dos alimentos y reúna los elementos nutritivos mínimos.

8.- Productos andinos

Una familia en Cerro de Pasco tiene un terreno de 20 hectáreas, y este año han decidido sembrar papas y maca. Para tal fin han conseguido un préstamo de S/. 60 000.

La siguiente tabla muestra el costo promedio estimado por hectárea en esta región del país, en los tres rubros más importantes, así como el presupuesto asignado por la familia a cada uno de ellos.

Rubros	Papa	Maca	Presupuesto asignado
Mano de obra	1 200	1 400	21 000
Insumos	3 000	1 200	30 000
Maquinaria	600	400	7 200

De acuerdo a los estudios del Ministerio de Agricultura se sabe que el rendimiento promedio por hectárea en esta zona para una tecnología de nivel medio es de 12 000 Kg. en el caso de la papa y de 1 800 Kg. en el caso de la maca. Además, se sabe que la ganancia promedio por kilogramo de papa es de S/. 0,30 y de S/. 0.80 por kilogramo de maca.

La inquietud de la familia es saber cuántas hectáreas deben destinar a cada uno de estos productos, de manera que les permita obtener la mayor ganancia posible.

Además quisiéramos saber:

- ✓ ¿Cuál es el capital invertido en cada uno de los tres rubros? (mano de obra, insumos y maquinaria).
- ✓ Invierte todo el dinero asignado a cada uno de ellos?

Felicitaciones por tus logros...!!!

"Una persona que ha recibido formación matemática durante cierto tiempo, es una persona que razona para siempre de otra manera".

LECTURA

¿Qué es la programación lineal?

En el mundo de los negocios, es frecuente escuchar que los productores y empresarios están siempre interesados en obtener las **máximas** ganancias posibles. Para lograr ese propósito deben **minimizar** sus costos de producción, lo que significa que deben organizar y usar las materias primas, el tiempo, la maquinaria, y otros recursos disponibles, de la mejor manera posible.

La solución de este tipo de situaciones corresponde al ámbito de la Programación Lineal. Es decir, entre otros, la programación lineal se ocupa de problemas de **maximización** de ganancias o **minimización** de costos.

Matemáticamente dichos problemas se expresan a través de funciones lineales, los cuales obviamente están sujetos a una serie de condiciones o restricciones dadas por el requerimiento, disponibilidad o limitación de los recursos, los cuales se suelen expresar a través de desigualdades lineales.

Si bien, las situaciones en contextos reales generalmente presentan muchas variables y las posibles formas de combinar los recursos disponibles son igualmente innumerables, las situaciones que estudiamos presentan sólo dos variables y un número muy limitado de restricciones; sin embargo, pese a ello son muy útiles para entender la naturaleza, los conceptos básicos y la lógica de solución de este tipo de problemas.

Así, podemos decir que:
Un problema de **programación lineal** consiste en **optimizar** (maximizar o minimizar) una función **f = ax + by**, llamada **función objetivo**, sujeta a ciertas **condiciones** expresadas como desigualdades lineales.

Rastreando los orígenes de la programación lineal

En la historia del álgebra existe poca información sobre el origen de las inecuaciones; aunque seguramente surge ligado a la historia de las ecuaciones. Las referencias históricas más antiguas acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, las encontramos tanto en la matemática babilónica (2500 años AC), como en la matemática china (1500 años AC), pero nada se dice respecto a los sistemas de inecuaciones.

En cambio, encontramos referencias muy concretas respecto a los orígenes de la Programación Lineal. Así, se dice que históricamente, el problema de programación lineal, fue desarrollado y aplicado por primera vez en 1947 por George B. Dantzig, Marshall Word y sus asociados del Departamento de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos (en el contexto de la Segunda Guerra Mundial).

Sin embargo, es justo reconocer que las bases del método que actualmente se aplica a la programación lineal ya habían sido desarrolladas por Fourier (1768–1830). Igual reconocimiento merecen Newton, Leibnitz, Lagrange, entre otros, quienes en los siglos XVII y XVIII, habían logrado grandes avances en la obtención de máximos y mínimos de determinadas funciones.

Por otro lado, considerando que la programación lineal forma parte de la teoría de la optimización, debemos mencionar que los precursores aún más antiguos son aquéllos que trabajaron en la búsqueda de soluciones óptimas; que para entonces estaban referidos principalmente a problemas geométricos y físicos.

Evidentemente, fueron las situaciones complejas propias del contexto social del Siglo XX, las que dieron el verdadero impulso a esta nueva rama de la matemática. Así, en 1928, **J. von Neuman,** basado en la teoría de juegos desarrolla los fundamentos matemáticos de la programación lineal; luego en 1939, **Kantorovitch,** en base a su experiencia en la organización y planificación de la producción plantea las ideas básicas de la teoría y los algoritmos de solución; a la vez que plantea y resuelve por primera vez los conocidos problemas "del transporte" y "la dieta".

En 1947, Dantzig en la aplicación de la programación lineal a estrategias militares, desarrolla el Método Simplex (uno de los métodos más importantes), que junto al uso de los ordenadores y las técnicas de computación (que evolucionaban paralelamente), contribuyeron significativamente a simplificar la solución de estos problemas.

En 1984 el matemático hindú Narendra Karmarkar a través de su obra "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", retoma la investigación en esta área proponiendo un método que actualmente se usa para la resolución de problemas con un gran número de variables.

De esta manera la programación lineal se ha convertido en una herramienta muy útil en la solución de diversos problemas propios de nuestra época; desde situaciones de juego, estrategias militares, pasando por los de carácter económico, administrativo, de transporte, nutrición, hasta situaciones de estrategia de desarrollo nacional.

Por ello, creemos que no es exagerado afirmar que la utilidad de los métodos de la Programación Lineal en los contextos actuales es de tal magnitud que: "Se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PBI) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año" [31].

[31] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/intro.html, accedido el 23/02/07

Para ampliar tus conocimientos

Puedes consultar la siguiente **BIBLIOGRAFÍA:**

Allendoerfer, Carl. (1973). Fundamentos de matemáticas universitarias; México DF: McGraw-Hill, 3ª edición.

Carranza, César. (1999). Matemática 1, Bachillerato peruano. Lima: Ministerio de Educación.

Draper, Jean y Jane Klingman. (1976). Matemática para Administración y Economía.

Espinosa, Héctor. (1975). Programación Lineal. México: Editorial Páx.

Gass, Saúl. (1974). Programación Lineal. México. Compañía Editorial Continental.

Lipschutz, Seymour. (1985). Álgebra Lineal. México: Editorial Mc Graw Hill.

Mizrahi, Abe y M. Sullivan. (1978). Matemáticas Finitas. México: Editorial Limusa.

Rojo, Armando. (1978). Álgebra II. Buenos Aires: Editorial El Ateneo.

Sáenz, Rolando. (1978). Álgebra Lineal. Quito: Universidad Central.

También son muy útiles los siguientes materiales electrónicos:

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/intro.html

http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/programacion/historia/historia

http://descartes.cnice.mecd.es/Algebra/prog_lineal_lbc/historia_pl.htm

"Los libros son amigos que siempre esperan".

CAPITULO V: FASE EXPERIMENTAL

La Fase Experimental del presente estudio consiste en la aplicación de la secuencia didáctica, y el recojo de información respecto al desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas.

5.1 Puesta en escena de las Situaciones Didácticas

La fase experimental se llevó a cabo en cuatro sesiones de tres horas de 45 minutos cada una, los días miércoles, 28 de noviembre, y 5, 12 y 19 de diciembre del 2007, según el horario de la asignatura.

Con la finalidad de recoger la mayor y mejor información posible de la interacción de los estudiantes con las situaciones planteadas, usamos una Ficha de Observación[26] por actividades, proceso en el que contamos con el invalorable apoyo de una profesora titulada en Matemática y Computación.

Dichas observaciones fueron complementadas y enriquecidas con el material fílmico, en el que tuvimos el apoyo técnico de un egresado de la carrera de Computación e Informática del Instituto. A propósito, cabe mencionar que la presencia de personas extrañas en el aula y principalmente el hecho de la filmación limitó en alguna medida la participación de algunos alumnos en la primera sesión.

Otros recursos igualmente importantes fueron las carpetas de trabajo de los estudiantes, cuya revisión diaria nos permitió lograr una mejor comprensión del avance e identificar los aspectos que se debían mejorar en las siguientes sesiones.

A toda esta información se sumó la valoración personal y grupal de los propios estudiantes realizada al término de cada Sesión y recogida a través de las Fichas de Autoevaluación[27] y Evaluación Grupal[28]. Si bien, en términos generales las actividades se desarrollaron tal como se habían previsto, no obstante, de acuerdo al avance o a las dificultades observadas se fueron introduciendo los reajustes necesarios.

En base a la información recogida a través de los Instrumentos mencionados, damos cuenta del proceso de aplicación de la Ingeniería Didáctica, por actividades.

[26] Ver Anexo Nº 07
[27] Ver Anexo Nº 09
[28] Ver Anexo Nº 10

Actividad Nº 01: Textilería peruana

Inicialmente la situación que se presenta en esta Actividad tenía sólo dos condiciones: una, acerca de la distribución y disponibilidad de la lana, y la otra respecto a la distribución y disponibilidad del tiempo. Sin embargo al proponerles a los estudiantes de Electrónica en una sesión previa, la resolvieron sin mayor dificultad a través de un sistema de ecuaciones lineales; por esa razón se introdujo la tercera condición respecto a la inversión de dinero.

El ausentismo de estudiantes en esta primera sesión fue del 25% (8 alumnos), por lo que se organizaron sólo 6 grupos.

El desarrollo de la actividad tomó aproximadamente dos horas. Al principio, algunos estudiantes que tienen un rendimiento académico aceptable mostraron cierta resistencia a trabajar en grupos; mientras que aquéllos que tienen mayores dificultades mostraron inseguridad para desarrollar la actividad por sí mismos.

En general, el ritmo de trabajo en esta primera actividad, tanto en forma individual como grupal, fue lento. La mayoría intentó resolver la situación por ensayo y error; así lo hicieron con las tres primeras preguntas (a, b y c), verificando cada una de las tres condiciones del problema.

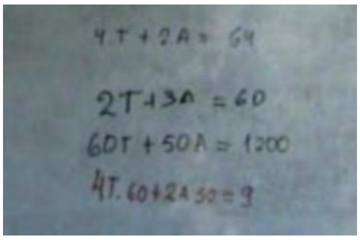
La mayoría evidenció procedimientos desordenados y una actitud poco reflexiva al buscar la solución del problema; así como una carencia de hábitos para organizar los datos y sistematizar el procedimiento. Daban respuestas erradas y no podían justificarlas.

En los ítems d), e) y f) en los que se pedía expresar algebraicamente las condiciones del problema, se evidenció confusión en la identificación de las variables. Así, muchos habían asumido los kilogramos de lana y las horas de trabajo como las variables del problema. Cabe mencionar, que éste (identificación de variables) fue uno de los bloqueos más fuertes que presentaron los estudiantes en ésta y las demás actividades.

Ante la dificultad que mostraban y el excesivo tiempo que llevaban, se les sugirió que previamente organizaran los datos en tablas o cuadros, consiguiendo propuestas como la siguiente (otros construyeron una tabla en orden invertido):

	Lana	Tiempo	Inversión
Tapices	4	2	60
Abrigos	2	3	50
Total disponible	64	60	1200

A partir de ellas formularon las condiciones del problema a través de las siguientes **ecuaciones**:



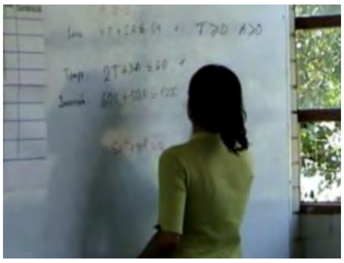
$$E_1 : 4T + 2A = 64$$
$$E_2 : 2T + 3A = 60$$
$$E_3 : 60T + 50A = 1200$$

Precisamente, tomando dos a dos estas ecuaciones ($E_1 \wedge E_2$), ($E_2 \wedge E_3$) y ($E_1 \wedge E_3$) algunos grupos lograron responder correctamente la pregunta principal del problema; concluyendo que para que la ganancia sea máxima se debía confeccionar 10 tapices y 12 abrigos (que es la solución del tercer sistema: $E_1 \wedge E_3$).

Con estos logros pasamos a formalizar lo avanzado contando con la participación activa de los estudiantes. El objetivo era promover la confrontación y el análisis de las diversas propuestas y conclusiones de los grupos; para que a partir de ellos se fueran construyendo e institucionalizando los conceptos y procedimientos.

En primer lugar, como algunos grupos al resolver el problema, habían comprobado que no se usaban todos los recursos disponibles, aprovechamos para analizar la necesidad y la pertinencia de expresar las condiciones del problema a través de desigualdades (en lugar de las ecuaciones que ellos plantearon).

Asimismo se reflexionó sobre la condición de no negatividad de las variables; que en un primer momento algunos estudiantes expresaron como $T + A \geq 0$; sin embargo, fueron ellos mismos que casi de inmediato corrigieron la propuesta y en su lugar plantearon las desigualdades: $T \geq 0$ y $A \geq 0$. Inclusive una de las alumnas observó que las variables

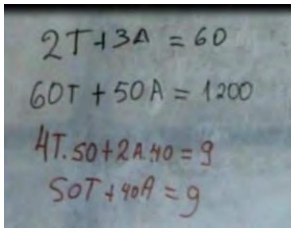


no sólo debían ser positivas, sino que además debían ser enteras, proponiendo la expresión $\begin{cases} T = Z^+ \\ A = Z^+ \end{cases}$; propuesta que a su vez fue mejorada por otro alumno, quien escribió $\begin{cases} T \in Z^+ \\ A \in Z^+ \end{cases}$.

De esta manera ya se tenía el sistema de inecuaciones que representa las restricciones del problema:

$$\begin{aligned} &4T + 2A \leq 64 \\ &2T + 3A \leq 60 \\ &60T + 50A \leq 1200 \\ &T \geq 0 \\ &A \geq 0 \end{aligned}$$

Respecto a la función objetivo, no todos los grupos llegaron a plantearlo, principalmente porque se tomaron mucho tiempo en las otras preguntas. Una de las integrantes del Grupo 2, propuso la siguiente expresión $4T.50+2A.40=g$, en la que como podemos observar **g** varía en función de la cantidad de lana usada, y no en función de la cantidad de tapices y abrigos como debe ser. Ante esta propuesta otros estudiantes manifestaron su desacuerdo, pero les sirvió para escribir la expresión correcta: $50T+40A=g$.



Sin embargo, cuando se les preguntó sobre el objeto matemático que representaba dicha expresión, la mayoría respondió que se trataba de una ecuación; luego, cuando se les hizo ver que el valor de **g** iba cambiando de acuerdo a los valores que tomaban **T** y **A**, dijeron que era una variable; no fue fácil que entendieran que se trataba de una función.

De esta manera se logró el propósito de esta actividad, que fue planteada con la finalidad de que los estudiantes se familiarizaran con la estructura básica que tienen los problemas de programación lineal, vieran la necesidad de usar las inecuaciones lineales para expresar situaciones cotidianas y aprender a resolverlos.

Actividad Nº 02: Representación gráfica de la inecuación $2x-3y<6$.

En el desarrollo de la actividad nos dimos cuenta que los ítems a), b) y c) debían ser propuestos sólo después de que los estudiantes hubieran intentado resolver la inecuación por sus propios medios. Pese a ello, muchos intentaron resolver por su cuenta antes de seguir la secuencia de la actividad.

Al inicio, casi todos pensaban que la gráfica debía ser una recta, por lo que buscaban puntos que más o menos estuvieran alineados. Nos llamó la atención por ejemplo que la intención de uno de los alumnos fuera graficar la ecuación $2x-3y=5$ (aunque no escribió de manera explícita), y decía: "porque si tomo otros valores me estaría alejando mucho".

Como en la primera actividad se habían restringido los valores de las variables sólo al conjunto de los números positivos, algunos pensaban que también en esta actividad había que trabajar sólo con valores positivos.

No tuvieron dificultades para encontrar los puntos que satisfacían la inecuación y otros que no. Graficaron la ecuación $2x-3y=6$ con cierta facilidad, sin embargo tuvieron dudas respecto al número de regiones que determinaba dicha gráfica en el plano, tampoco conocían el nombre de dichas regiones, se limitaron a nombrarlos como las regiones A y B; también les resultó nueva la expresión "semiplano opuesto" y pocos lograron plantear correctamente la inecuación correspondiente.

En general los alumnos más destacados son los que más aportan, tanto dentro de los grupos, como en el momento de la institucionalización. Sin embargo debemos destacar que varios alumnos que antes se sentían ajenos, inseguros e incapaces de aportar a sus grupos, en estas dos primeras actividades se involucraron con mayor interés y se sentían satisfechos de sus "pequeños" avances; decían *"estoy entendiendo"*, *"siempre copiaba sin entender nada"*.

En síntesis, las dificultades que tuvieron los estudiantes en estas dos primeras actividades fueron la identificación de variables, la organización de los datos y la formulación de las inecuaciones. En opinión de los coordinadores de grupo que coinciden con lo observado por los docentes; a las que añaden los siguientes comentarios: “en forma individual se tienen más problemas”, “algunos, están pendientes de la hora porque tienen que irse a trabajar”, “se trabajó con cierta dificultad, pero se pudo vencer los obstáculos y aprendimos”, “el grupo avanzó rápido al inicio pero se fue quedando conforme avanzó el tiempo”.

Pese a las múltiples dificultades, es meritorio el esfuerzo de todos los estudiantes en estas primeras actividades, que demostrando bastante interés y perseverancia lograron desarrollarlas. Cabe mencionar que el horario no fue el más adecuado (pasado el mediodía) y tampoco las condiciones del aula (muy cerrado y poca ventilación).

Actividad Nº 03: Representación en el plano coordenado del conjunto de puntos para los cuales: *“La ordenada disminuido en cinco es como mínimo el triple de la abscisa”*.

Esta actividad tuvo una duración aproximada de 25 minutos; junto a las actividades 4 y 5, fue desarrollada en la Segunda Sesión de clases, en la que la inasistencia alcanzó el 19%. Fue desarrollada en su mayor parte en forma individual; sólo se agruparon al finalizar para validar y consolidar sus resultados.

Se observaron confusiones y dudas conceptuales; por ejemplo entre los términos *"ordenada"* y *"abscisa"*, el significado de *"origen de coordenadas"*, la interpretación de la expresión *"es como mínimo"* como sinónimo de *"es menor que"*; además encontramos que alguien representó *"el triple de"* como "x + 3". Por estas razones la mayoría necesitó apoyo y orientación para plantear la inecuación en forma correcta.

Para graficar la inecuación, empezaron a tomar varios puntos que satisfacían la inecuación y otros tantos que no la satisfacían (como se había propuesto en la actividad anterior); no se dieron cuenta de la importancia de graficar previamente la recta frontera, como se esperaba que lo hicieran.

Frente a esta dificultad, se realizó una actividad de desbloqueo. Se fijaron algunos valores para "x" y se analizaron los valores que tomaba "y", los que fueron representados en el plano coordenado, a partir del cual percibieron la gráfica de la recta frontera, y pudieron determinar si ésta y el origen de coordenadas formaban o no parte del semiplano solución. Actividad que además nos permitió conceptualizar un semiplano cerrado.

La formulación del procedimiento para graficar inecuaciones lineales con dos variables, según lo planificado debía realizarse en la siguiente actividad, pero frente a las dificultades observadas, se vio la necesidad de que lo hicieran en esta actividad. La mayoría propuso un procedimiento muy extenso, detallando minuciosamente cada una de las acciones realizadas; pero, al tomar conocimiento de la Propiedad Nº 1[29], los mismos estudiantes simplificaron dicho procedimiento.

Actividad Nº 04: Solución gráfica de la inecuación $4x+5y-30>0$ aplicando el procedimiento práctico.

Luego de la institucionalización del procedimiento, la actividad fue desarrollada de manera individual. Tabularon y ubicaron correctamente los puntos de la recta frontera, aunque no se dieron cuenta que debían trazarla en forma discontinua hasta cuando tuvieron que determinar si los puntos de dicha recta formaban o no parte de la solución de la inecuación. Nos llamó la atención que algunos estudiantes para graficar esta recta despejaran "y" en la inecuación y no en la ecuación como corresponde.

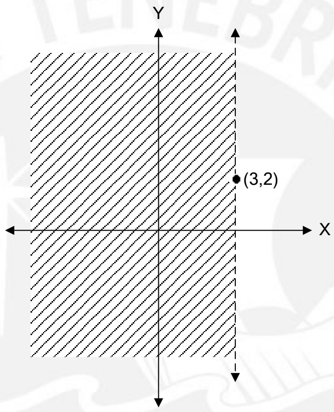
Luego de trazar la recta, algunos tuvieron dudas respecto al punto que debían tomar para verificar si satisfacía o no la inecuación; se observaba que su propósito era tomar un punto que la satisficiera; pese a la propiedad que ya conocían tomaron más de un punto, que como decían les daba mayor seguridad de la solución.

[29] Sea P un punto cualquiera de uno de los semiplanos en los que la gráfica de la ecuación $ax + by = c$ divide al plano. Si el punto P satisface la inecuación $ax + by < c$, entonces todos los puntos del semiplano donde se encuentra P, satisfacen también la inecuación $ax + by < c$.

Un tercer grupo, luego de graficar la recta, procedió a construir dos tablas de valores, una para los puntos que satisfacían la inecuación y otra para los que no la satisfacían; después, usando plumones de diferentes colores los ubicaron a cada lado de la recta, escribiendo las frases "si cumplen" y "no cumplen", y recién procedían a sombrear el semiplano solución.

Mostraron dudas respecto a la inecuación del semiplano opuesto, algunos sobre el concepto mismo, y otros, respecto a la inecuación correspondiente, pues luego de plantearla, tomaron varios puntos para verificar su respuesta.

Actividad Nº 05: Se les pidió formular la inecuación correspondiente al siguiente semiplano.



Esta fue una de las actividades de mayor dificultad; ningún estudiante logró formular la inecuación correctamente. La mayoría no sabía qué hacer, sólo unos pocos se animaron a decir o hacer algo, por ejemplo un estudiante dijo que "x siempre es 3", otros escribieron $x < y$, y otros propusieron $x + y < 0$.

Ante esta dificultad, se les sugirió que escribieran las coordenadas de algunos puntos más de la recta frontera y que formularan la respectiva ecuación; pero fueron pocos los que a partir de dicha ecuación lograron plantear la inecuación pedida.

Como la dificultad persistía en la mayoría de estudiantes, se decidió realizar la siguiente actividad: en primer lugar, se les pidió que graficaran la ecuación "y = 4", luego, teniendo dicha recta graficaron la desigualdad "y > 4", sin mayor dificultad.

A partir de esta actividad, casi de inmediato, la mayoría de estudiantes logró plantear la inecuación $x < 3$, correspondiente al semiplano propuesto.

En cuanto al ítem (a), en el que se les pedía la inecuación del semiplano derecho respecto al eje Y, algunos alumnos escribieron $x > 3$, en lugar de $x > 0$ cambiando solamente el sentido de la inecuación anterior; lo que muestra la tendencia a repetir o seguir ejemplos, antes de detenerse a leer y comprender bien lo que se les pide. Sólo después de las observaciones y reflexiones realizadas casi todos plantearon la inecuación $x > 0$; ninguno propuso la inecuación $x \geq 0$. Finalmente, sin mayor dificultad plantearon la inecuación correspondiente al "semiplano superior respecto a la recta $y = 5$", que fue lo que se les pidió en el ítem (b).

Actividad Nº 06: Conceptualización de sistemas de inecuaciones lineales, a partir de la gráfica de dos semiplanos que tienen una parte común.

Con esta actividad iniciamos la tercera sesión. Por las actividades propias de fin de año (evaluaciones y trabajos en todas las asignaturas), la mayoría no había desarrollado las actividades de refuerzo. Además se incorporaron varios alumnos que habían faltado a las sesiones anteriores, por lo que la inasistencia fue sólo del 6% (2 alumnos).

Un buen grupo de estudiantes logró relacionar cada inecuación con el semiplano correspondiente tomando algunos puntos y reemplazando en cada una de las inecuaciones; sin embargo, algunos procedieron a graficar nuevamente las inecuaciones.

La mayoría mostró dificultad al relacionar la intersección de los semiplanos con la notación conjuntista y el conectivo lógico correspondiente ($\wedge$), hubo necesidad de usar gráficos y ejemplos más sencillos para ayudarles a recordar los conceptos.

Pese a la dificultad de la mayoría, algunos formularon conceptos como los siguientes: "conjunto de inecuaciones que buscan soluciones comunes", "conjunto de dos o más inecuaciones cuyo objetivo es encontrar sus puntos en común o intersección".

Un número significativo de estudiantes realizó las modificaciones convenientes en el sistema propuesto para obtener un nuevo sistema cuyo conjunto solución incluyera al origen de coordenadas. Nos llamó la atención que un alumno formulara un sistema que no tenía relación alguna con el sistema anterior, pero satisfacía la condición dada.

En esta actividad observamos que, cuando los estudiantes asumen las actividades en forma individual muestran mayor interés, se preocupan por preguntar y pedir apoyo, comparan sus avances con sus compañeros; mientras que cuando trabajan en grupo, tienen una actitud más pasiva y se apoyan mucho en sus compañeros que demuestran mayor dominio del tema. Además, les es más fácil trabajar en pares y consultar con sus compañeros de mayor confianza.

Actividad Nº 07: Solución gráfica del sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+3y<4 \\ 2x-y>1 \end{cases}$.

En esta actividad tuvieron grandes dificultades los estudiantes que no desarrollaron las actividades de refuerzo; pero mucho más aquéllos que no asistieron a las dos primeras sesiones. En su mayoría, fueron los que al final no alcanzaron los aprendizajes previstos en la presente secuencia didáctica, pese al esfuerzo realizado.

Se volvieron a repetir los errores que se vieron en las primeras actividades, por ejemplo el estudiante que en las primeras sesiones graficaba la inecuación tabulando valores como si fueran rectas volvió a hacer lo mismo.

Dados dos puntos verificaron fácilmente si pertenecían o no al conjunto solución de la inecuación (aunque algunos tuvieron dudas respecto a las coordenadas del punto de origen) y determinaron con facilidad que las rectas frontera no formaban parte de la solución.

Al pedirles reformular el sistema de tal manera que el punto (3, 2) fuera parte del nuevo conjunto solución, pocos lo hicieron correctamente, la mayoría (siguiendo el ejemplo de la actividad anterior) cambiaron el sentido de ambas desigualdades, cuando en este caso bastaba sólo modificar el sentido de una de ellas.

Una dificultad casi generalizada está relacionada a la capacidad de justificar sus respuestas (validación); inclusive aquéllos que logran desarrollar correctamente las actividades muestran limitaciones al tratar de explicar, justificar o argumentar sus procedimientos o respuestas. Lo mismo sucede cuando tienen que sistematizar procedimientos (formulación), a la mayoría les resulta difícil establecer el orden y explicitar las acciones que realizan.

Actividad Nº 08: Formulación de sistemas de inecuaciones en base a las ecuaciones de dos rectas paralelas.

A la mayoría les llamó la atención esta actividad, pensaban que había un error en la formulación (al ver las ecuaciones en lugar de inecuaciones). Con la finalidad de agilizar la actividad se distribuyeron los ítems por grupos (cada grupo desarrolló sólo un ítem, pero cada ítem fue desarrollado por dos grupos, con la finalidad de contrastar soluciones).

Antes de construir las gráficas, algunos resolvieron el sistema de ecuaciones y al ver que se eliminaban las variables se dieron cuenta que se trataba de rectas paralelas.

El ítem (c), en el que se les pedía resolver el sistema $\begin{cases} x-y+3>0 \\ x-y+5<0 \end{cases}$ cuya solución es vacía, fue resuelto con mayor facilidad, se dieron cuenta rápidamente que no tenía solución, sin embargo no supieron representar simbólicamente ($S=\Phi$). Aquí, como en algunos otros casos, para tabular valores despejaron **x** en función de **y**.

El siguiente en orden de dificultad fue el ítem (a), que dadas las ecuaciones $x-y+3=0$ *y* $x-y+5=0$, pedía plantear un sistema de inecuaciones cuya solución fuera la región comprendida entre las dos rectas.

Después de varios intentos, ambos grupos propusieron el sistema $\begin{cases} x-y\leq -3 \\ x-y\geq -5 \end{cases}$, justificando que los semiplanos para tener la intersección pedida tenían que ser "opuestos".

Los grupos que desarrollaron el ítem (b) tuvieron más dificultades; en este caso se pedía plantear un sistema cuya solución fuera el semiplano limitado por la recta cuya ecuación es $x-y+5=0$. En un primer momento uno de los grupos propuso sólo la inecuación $x-y\leq -5$, pero al aclararles que se pedía un sistema, (por lo que debía contener por lo menos dos inecuaciones), procedieron por ensayo y error (planteaban el sistema y verificaban tomando un punto) hasta conseguir el sistema:

$$\begin{cases} x-y+3\leq 0 \\ x-y+5\leq 0 \end{cases} \text{, o } \begin{cases} x-y\leq -3 \\ x-y\leq -5 \end{cases}.$$

Actividad Nº 09: Solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{array}{l} 2x+y-3>0 \\ x-2y+1<0 \\ y-3<0 \end{array}.$$

Por las limitaciones de tiempo esta actividad no se pudo desarrollar en clase, lo hicieron los alumnos como parte de las Actividades de Refuerzo; pero, sólo algunos lograron resolverla correctamente.

En esta actividad, cometieron errores en el proceso de tabulación para graficar la recta frontera del semiplano correspondiente a la inecuación $y-3<0$. Encontramos tablas como la siguiente:

x	1	0	-1
y	4	3	2

Donde se observa que la alumna asume la ecuación $y-3=0$ como la función $f(y)=y-3$ en la que da valores a y, opera, y el valor que obtiene le asigna a x. Estos errores se vuelven a repetir al intentar graficar la ecuación $2x+y-3=0$ (frontera de la inecuación $2x+y-3>0$); por ejemplo alguien elaboró la siguiente tabla:

x	1	0	2
y	-5	-3	-7

que más bien corresponde a la ecuación $2x+y=-3$.

Actividad Nº 10: Solución del problema de la Actividad Nº 01, aplicando la solución de Sistemas de Inecuaciones Lineales.

Con esta actividad iniciamos la cuarta sesión en la que se registró una inasistencia del 16% (5 alumnos). El objetivo fue que los estudiantes resolvieran el problema aplicando el procedimiento de solución de sistemas de inecuaciones lineales, en lugar de proceder por ensayo y error como lo hicieron antes.

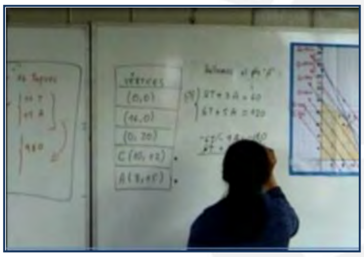
Se inició con la gráfica del sistema de inecuaciones (correspondiente a las restricciones del problema) sistematizado en la primera actividad. Se observó que, pese a las restricciones de no negatividad ampliamente discutidas, la gran mayoría trabajó en todo el plano coordenado; situación que sumado al hecho de graduar los ejes de uno en uno, no sólo demoró el proceso, sino que hizo imperceptible la región factible.

Otros alumnos obtuvieron figuras abiertas, pues los valores que tomaron en la tabulación no les permitieron visualizar las intersecciones de las rectas con los ejes coordenados. También persistió el error en la graduación de los ejes, lo que generó gráficas completamente distorsionadas.

Después de realizar las correcciones necesarias, pudieron determinar la región factible, en la comprensión de cuyo significado también mostraron dificultades. Siguió el proceso de gráfica y análisis de la función objetivo (como rectas paralelas), que lo hicieron sin mayores dificultades, respondiendo con facilidad a las preguntas planteadas.

Para los estudiantes que ya habían resuelto el problema en la Primera Actividad la solución (980 soles) que encontraron a través de la gráfica de la función objetivo sobre la región factible fue evidente. Mientras que el resto, en base a la familia de rectas trazadas, sólo estaban seguros de que la solución tendría que ser mayor que 800 y menor que 1200. Luego, tomando algunos puntos de la región factible ubicados entre las rectas $50x+40y=800$ y $50x+40y=1200$ (entre los que se encontraban los vértices de la región factible), dieron valores más próximos a la solución.

No obstante, se generaron dudas respecto a las razones que justificaban la certeza de la solución encontrada; por lo que se hizo necesario formular el Teorema Nº 2…[30], que estuvo prevista hacerla en la siguiente actividad (sólo después de que los estudiantes hubieran comprendido el significado de la función objetivo y luego de que hubieran visto la necesidad de abreviar el procedimiento).



Si bien, un buen grupo de alumnos ya venía trabajando con dos de los vértices de la región factible, sólo aquéllos que habían resuelto el problema en la primera actividad determinaron correctamente las coordenadas de los cinco vértices. El resto, observando la gráfica, dieron aproximaciones enteras de dos de los vértices, evidenciando que no les resulta fácil transferir sus conocimientos previos (en este caso la solución de sistemas de ecuaciones lineales para determinar cada vértice).

Para evaluar la función objetivo en el vértice $\left(\frac{15}{2},15\right)$ algunos alumnos redondearon por exceso y propusieron considerar 8 tapices y 15 abrigos, sin tener en cuenta que la cantidad de lana sería insuficiente. Por lo que hubo necesidad de orientarlos a través de algunas preguntas; luego del cual procedieron a resolver los dos sistemas de ecuaciones determinando formalmente las coordenadas de dichos vértices. Nuevamente la mayoría mostró dificultades al sistematizar sus ideas y formular el procedimiento de solución; pocos lo hicieron correctamente.

[30] Si hay una única solución que maximiza o minimiza una función objetivo lineal, entonces esa solución es un vértice de la región de soluciones factibles.
Si hay más de una solución, por lo menos dos de las soluciones corresponden a vértices adyacentes de la región de soluciones factibles.

Actividad Nº 11: Venta de productos naturales.

En la situación presentada, la mayoría de estudiantes identificó correctamente las variables, pero tuvieron serias dificultades al plantear las inecuaciones.

En lugar del sistema $\begin{cases} x \leq 150 \\ y \leq 180 \\ x + y \leq 250 \end{cases}$ que representa las restricciones del problema, y la función objetivo $G = 5x + 6y$; plantearon expresiones como $150x + 180y = 250$; donde relacionando todas las cantidades involucradas en las restricciones sin sentido alguno.

También encontramos la expresión $5x + 6y \leq 250$, donde se confunden los datos de las restricciones con los de la función objetivo.

Otros estudiantes plantearon el sistema $\begin{cases} x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{cases}$, evidenciando algún avance respecto a las anteriores, pero, mostrando error (frecuente en muchos de ellos) en el sentido de las desigualdades.

En general, los estudiantes muestran mucha dificultad al pasar los datos planteados en forma verbal a la forma algebraica, más aún cuando éstos se refieren a las variables en forma independiente. La dificultad con este tipo de desigualdades también se percibe en la gráfica, en alguna medida les resulta más fácil graficar desigualdades en las que aparecen relacionadas en forma explícita ambas variables.

Persisten los errores en el proceso de graficación, a pesar de las observaciones y orientaciones dadas en las actividades anteriores y habiendo planteado las restricciones de no negatividad, varios alumnos siguieron considerando todo el plano coordenado, además de los errores en la graduación de los ejes.

Finalmente, a pesar de conocer la Propiedad Nº 2, según la cual para resolver el problema basta evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible, todos los estudiantes siguieron la secuencia planteada, en la que se incluía graficar la familia de rectas correspondientes a la función objetivo.

Actividad Nº 12: Viviendas o alimentos.

Antes de empezar esta actividad, se institucionalizó el procedimiento para resolver problemas de Programación Lineal. Se observaron menos errores que en las actividades anteriores, identificaron las variables y plantearon las inecuaciones con mayor facilidad.

Aunque la mayoría planteó el sistema $\begin{cases} x \geq 4000 \\ y \geq 5000 \\ x + y \geq 10000 \end{cases}$, otros prefirieron plantearlo de la forma $\begin{cases} 4000 \leq x \\ 5000 \leq y \\ 10000 \leq x + y \end{cases}$. Muchos consideraron las condiciones de no negatividad de las variables, cuando en este caso no era necesario.

Mejoró significativamente el proceso de graficación; sin embargo algunos de los que plantearon el sistema de la segunda forma tuvieron errores al determinar las soluciones de las dos primeras inecuaciones (sombrearon los semiplanos opuestos).

Otros, habiendo graficado correctamente las dos primeras desigualdades, tuvieron errores al graficar la tercera inecuación, puesto que al observar que la recta asociada a esta inecuación y la solución de las dos primeras desigualdades formaban una región triangular, procedieron a sombrear dicha región, sin verificar que la solución de dicha desigualdad era el semiplano opuesto.

Después de corregir dicha gráfica y al observar la región abierta, un alumno dijo: "No hay vértices, porque no es un polígono"; pero, casi de inmediato él mismo se dio cuenta de los dos vértices de la figura.

La evaluación de la función objetivo en los vértices facilitó la búsqueda de la solución del problema (aunque algunos alumnos se tomaron el trabajo de trazar la familia de rectas correspondiente a la función objetivo); y casi todos respondieron correctamente las preguntas planteadas.

Actividad Nº 13: Alimentos para mascotas.

En esta situación, la mayoría de estudiantes identificó correctamente las variables y logró plantear algebraicamente tanto las restricciones como la función objetivo, aunque algunos todavía muestran cierta inseguridad. Pese a que se tomaron más tiempo del previsto, resolvieron correctamente el problema y respondieron las preguntas planteadas.

No obstante, entre los alumnos que tuvieron frecuentes inasistencias observamos que en lugar del sistema $\begin{cases} 2x + 4y \leq 240 \\ x + 4y \leq 120 \end{cases}$ alguien escribió $\begin{cases} x \leq 240 \\ y \leq 120 \end{cases}$.

Actividad Nº 14: Plantea un problema de programación lineal.

Por las limitaciones de tiempo, no se pudo desarrollar la actividad en clase. Algunos estudiantes la desarrollaron como parte de las actividades de refuerzo; siguiendo los ejemplos de los problemas propuestos.

5.2 Resultados de la Evaluación de Salida

La Evaluación de Salida[31] se realizó a través de una Prueba Escrita conformada por cuatro (04) preguntas abiertas, dos de las cuales presentan subpreguntas adicionales.

En la primera pregunta se les pide graficar una inecuación lineal con dos variables; en la segunda, se les plantea optimizar una función lineal en una región del plano que previamente debían determinar graficando un sistema de inecuaciones lineales. En la tercera pregunta, se les pide formular un sistema de inecuaciones para el que se les proporciona las ecuaciones de las rectas frontera, y, finalmente en la cuarta pregunta debían resolver un problema de programación lineal.

Con el propósito de que los resultados reflejaran lo más objetivamente posible lo que cada estudiante había logrado, la evaluación se realizó por medio de tres pruebas, con la misma estructura y similar grado de dificultad. La prueba A se les asignó a los estudiantes que generalmente tienen un rendimiento académico por debajo del promedio, la prueba B a los que tienen un rendimiento aceptable, y la prueba C, a los que tienen un rendimiento por encima del promedio.

La Prueba se aplicó el día 27 de diciembre de 2007, a un total de 28 alumnos, y tuvo una duración de 80 minutos (participaron también los alumnos que tuvieron una asistencia bastante irregular).[32]

El siguiente cuadro muestra los resultados obtenidos (por tipo de Prueba):

Cuadro Nº 09: Resultados generales de la Evaluación de Salida

PRUEBAS	APROBADOS		DESAPROBADOS		TOTAL	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
A	03	10,71%	10	35,71%	13	46,43%
B	06	21,43%	03	10,71%	09	32,14%
C	06	21,43%	00	00	06	21,43%
Total	**15**	**53,57%**	**13**	**46,43%**	**28**	**100%**

Fuente: Propia, en base a los resultados de la Evaluación de Salida.

[31] Ver Anexo Nº 04.

[32] Antes del inicio de la prueba, a pedido de los mismos alumnos se resolvió el problema del *"El comerciante de frutas"* (de las Actividades de Refuerzo). El nivel de participación y las inquietudes que plantearon evidenciaron un gran interés por aclarar sus dudas además de un significativo avance en el conocimiento del tema.

En general, se percibe una ligera ventaja de los alumnos que aprobaron el examen (53,57%) sobre aquellos que desaprobaron (46,43%). Observamos asimismo que, todos los estudiantes que desarrollaron la Prueba C aprobaron el examen; de los 9 alumnos del grupo B, aprobaron 6; mientras que de los 13 alumnos del grupo A, aprobaron sólo 3.

Cuadro Nº 10: Resultado porcentual de aciertos y errores en la Evaluación de Salida[33]

PREGUNTAS		CORRECTO		REGULAR		INCORRECTO		EN BLANCO		TOTAL	
N°	**ESPECIFICACIONES**	**N°**	**%**	**N°**	**%**	**N°**	**%**	**N°**	**%**	**N°**	**%**
1	Graficar inecuaciones lineales	20	72%	4	14%	4	14%	--	--	28	100%
	Recta frontera	21	75%	1	4%	4	14%	2	7%	28	100%
	Formular inecuación de semiplano opuesto	23	82%	--	--	3	11%	2	7%	28	100%
2	Graficar SIL	14	50%	12	43%	2	7%	--	--	28	100%
	Determinar vértices de Región Factible	12	43%	5	18%	5	18%	6	21%	28	100%
3	Determinar en el plano la región descrita	16	57%	8	29%	2	7%	2	7%	28	100%
	Plantear SIL	6	21%	12	43%	5	18%	5	18%	28	100%
4	Formular el SIL y la función objetivo	12	43%	7	25%	3	11%	6	21%	28	100%
	Determinar la región factible	11	39%	7	25%	2	7%	8	29%	28	100%
	Pregunta principal	11	39%	--	--	8	29%	9	32%	28	100%
	Subpregunta	10	36%	--	--	4	14%	14	50%	28	100%

Fuente: Propia, en base a los resultados de la Evaluación de Salida.

Como podemos ver en el gráfico, un porcentaje significativo de estudiantes respondió correctamente la primera pregunta; así, el mayor porcentaje de respuestas correctas (82%) corresponde al subítem (1c) que pide *"escribir la inecuación del semiplano opuesto"*; el siguiente (75%) corresponde al subítem (1b) donde se les pregunta *si la recta frontera forma parte de la solución de la inecuación*; en tercer lugar, encontramos el subítem (1a) con el 72% de aciertos, que pide *representar gráficamente una inecuación lineal con dos variables*.

La pregunta N° 3, referente a *"plantear un sistema de inecuaciones lineales"* dadas las ecuaciones de las rectas frontera, es la que presenta el más bajo porcentaje de aciertos (21%); mientras que la pregunta 4 (problema de programación lineal) es la que

[33] Consideramos **correcto**, sólo cuando la pregunta es desarrollada completa y correctamente; **regular**, cuando el avance en el desarrollo de la pregunta es casi total pero falta precisar la respuesta o existe algún error no muy significativo. Consideramos **incorrecto**, cuando hay error en el proceso de solución o la respuesta no corresponde a lo que se pide.

tiene el más alto porcentaje de respuestas incorrectas (29%), además que la subpregunta de la misma, es la que más alumnos dejó en blanco (el 50% no desarrolló la pregunta).

A continuación señalamos los aspectos más relevantes en el desarrollo de cada una de las preguntas.

Pregunta 1:

Pedía resolver gráficamente una inecuación lineal con dos variables. Si bien casi las tres cuartas partes de los estudiantes lo hizo correctamente, dentro de la cuarta parte restante encontramos: errores de tabulación **(*)**, de ubicación de puntos (7/2 como 7,5) o de transposición de términos (de $2x-y=7$ pasan a $2x+7=y$); mientras que otros, habiendo trazado la recta no indicaron el semiplano solución.

(*) Para la ecuación $2x-y=7$, inexplicablemente elaboraron la siguiente tabla (que más bien corresponde a la ecuación $x-y=-2$).

x	0	1	-1
y	2	3	1

A pesar de que la mayoría respondió correctamente la pregunta de "si la recta frontera era parte de la solución de la inecuación", pocos justificaron su respuesta, y de ellos una mínima cantidad ofreció argumentos coherentes.

Pregunta 2:

Se les pidió optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal en una región del plano que debían determinar al graficar un sistema de inecuaciones lineales.

La mitad de los estudiantes resolvió correctamente; la otra mitad presenta errores relacionados a la gráfica de las inecuaciones cuyas fronteras son los ejes coordenados o rectas paralelas a ellos. Por ejemplo, graficaron $x=7$ en lugar de $y=7$, lo que implica que en lugar de graficar la inecuación $y\leq 7$ graficaron $x\leq 7$, o que en lugar de $0\leq y\leq 4$ representaron $0\leq x\leq 4$; además algunos alumnos, en inecuaciones como estas últimas, obviaron la gráfica de $y\geq 0$ (ó $x\geq 0$). Por ejemplo de la inecuación $0\leq y\leq 5$ sólo graficaron $y\leq 5$. También encontramos errores gráficos relacionados al sentido de la desigualdad, por ejemplo, en lugar de $x\geq 2$ representaron $x\leq 2$.

Otros alumnos, habiendo determinado correctamente las soluciones de cada inecuación, cometieron errores en la identificación de la solución del sistema, y como consecuencia en la determinación de los vértices.

Asimismo se evidenciaron errores algebraicos elementales; por ejemplo, un estudiante al tener que resolver el sistema $\begin{cases} x = 7 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases}$ para encontrar uno de los vértices de la región factible, no se dio cuenta que ya tenía el valor de x, y multiplicó por (-3) la primera ecuación con la intención de eliminar dicha variable; y luego escribió $5y = 7$ en lugar de $5y = 9$, lo que obviamente lo condujo a error en el cálculo de las coordenadas del vértice. Además se siguieron presentando errores en la tabulación.

Pregunta 3:

Dadas dos ecuaciones se les pidió plantear un sistema de inecuaciones lineales cuya solución fuera la región limitada por ambas rectas y alguno de los ejes coordenados.

La mayoría determinó correctamente la región descrita; algunos tuvieron dificultad al graficar el semiplano cuya frontera era uno de los ejes coordenados, mientras que otros no lo tomaron en cuenta. La dificultad con esta clase de semiplanos se acrecentó en la formulación del sistema de inecuaciones, pues inclusive los estudiantes que habían determinado correctamente la región descrita, obviaron la inecuación relacionada al eje coordenado, y otros, en lugar de $y \geq 0$ escribieron $x \geq 0$ (o viceversa).

Otros, en lugar de formular la inecuación $y - 2x \leq 0$ escribieron $y - 2x \geq 0$. Persisten los errores de tabulación y de manejo del plano coordenado.

Pregunta 4:

Se les pidió resolver un problema de programación lineal. Alrededor de un tercio de estudiantes no resolvió esta pregunta, sin embargo es destacable que el 39% (11 alumnos) resolvió correctamente.

La mayoría identificó correctamente las variables y organizó adecuadamente los datos, pero cometió errores en la formulación algebraica de las restricciones del problema.

Por ejemplo, en lugar de plantear el sistema $\begin{cases} x + y \leq 60 \\ 30x + 10y \leq 1500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, propusieron sistemas como los siguientes:

$$\begin{cases} D+N \leq 60 \\ 30D+10N \leq 1500 \\ 0 \leq D \leq 60 \\ 0 \leq N \leq 60 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=60 \\ x \leq 60 \\ y \leq 60 \\ 30x+10y \leq 1500 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x+y \leq 60 \\ x \leq 60 \\ y \leq 60 \\ 30x+10y \leq 1500 \end{cases}$$

En los tres casos, se incluyen las inecuaciones $x \leq 60$, $y \leq 60$ innecesariamente; no obstante, la solución del problema no se vio afectada.

En la segunda propuesta, el hecho de considerar la ecuación $x+y=60$ en lugar de la inecuación $x+y \leq 60$ tampoco afectó la solución del problema, puesto que al momento de graficar asumen como si fuera una inecuación.

En la Prueba A, en lugar del sistema: $\begin{cases} 6x+4y \leq 120 \\ 3x+10y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, algunos plantearon el sistema

$\begin{cases} 6x+4y=120 \\ 3x+10y=180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, que otra vez, pese al error, lo graficaron correctamente.

En cambio, otros formularon el sistema $\begin{cases} 6x+4y \geq 120 \\ 3x+10y \geq 180 \end{cases}$, invirtiendo el sentido correcto de las desigualdades; en la que como se vio antes, se interpreta la expresión *“tiene un máximo”* como sinónimo de *“mayor que”*, o en otros casos, por la confusión que tienen algunos estudiantes con los signos de desigualdad. Además, omiten las desigualdades de no negatividad de las variables, que en este caso sí son necesarias.

Sin embargo, fue más preocupante encontrar el sistema: $\begin{cases} x \geq 120 \\ y \geq 180 \\ x+y \geq 300 \end{cases}$ que evidencia serias dificultades en la comprensión del problema.

Otros errores, son de concentración en los datos, por ejemplo escribieron $6x+3y \leq 120$ en lugar de $6x+4y \leq 120$, o, $3x+4y \leq 180$ en lugar de $3x+10y \leq 180$; además de las confusiones en la tabulación (asignaron a “ y ” los valores de “ x ”).

Por otro lado, pese a los esfuerzos realizados, persistieron errores en el manejo del plano coordenado, por ejemplo, habiendo considerado las restricciones de no negatividad, algunos siguieron tomando valores negativos para tabular; o, de manera inversa, debiendo trabajar en todo el plano trabajaron sólo con valores positivos. Además de las dificultades en adecuar los ejes coordenados y las unidades de medida al contexto de cada situación; muchos gradúan los ejes coordenados tomando unidades muy pequeñas, lo que genera que la región factible no se visualice adecuadamente, dificultando a su vez el análisis.

En el caso de la Prueba C prácticamente no se encontraron errores, todos los alumnos resolvieron correctamente, solamente uno, dejó de responder el subítem (b).

En síntesis, respecto a cada una de las preguntas podemos afirmar que:

Pregunta 1: La mayoría de estudiantes grafica correctamente inecuaciones lineales con dos variables; aunque muestran deficiencias en la justificación de sus respuestas.

Pregunta 2: Los estudiantes muestran dificultad al representar semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes coordenados o cuando corresponden a inecuaciones de tres partes.

Pregunta 3: Los estudiantes tienen dificultad al plantear sistemas de inecuaciones lineales en las que intervienen desigualdades que corresponden a semiplanos cuya frontera es una recta paralela a los ejes coordenados.

Pregunta 4: Los estudiantes identifican correctamente las variables y organizan adecuadamente los datos de un problema de programación lineal; sin embargo muchos tienen dificultad para expresar algebraicamente las restricciones del problema.

5.3 Valoración de la secuencia didáctica desde la perspectiva de los estudiantes

Por la naturaleza de la presente investigación, consideramos importante complementar las observaciones y apreciaciones realizadas, con las opiniones y apreciaciones de los estudiantes, recogidas a través de diversos instrumentos. Entre estos, la Ficha de Autoevaluación[34] que nos permitió conocer los logros y las dificultades de cada estudiante, la Ficha de Evaluación Grupal[35] que nos acercó a una reflexión grupal

[34] Ver Anexo Nº 08
[35] Ver Anexo Nº 09

sobre las actividades y el desempeño de los grupos; complementadas con la valiosa información recogida a través de la Encuesta[36] aplicada al finalizar la aplicación de la secuencia didáctica.

5.3.1 Apreciación respecto al desarrollo de la secuencia didáctica

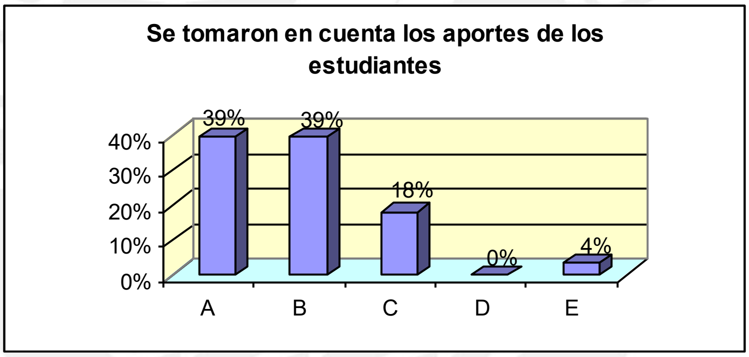
Recogidas a través de la Encuesta, están referidas a las actividades desarrolladas, al logro de los objetivos propuestos y al desarrollo de ciertas habilidades y actitudes.

a.- Apreciación respecto a las actividades desarrolladas

Presentamos los aspectos valorados de mayor a menor grado.

1.- El aspecto más valorado por los estudiantes es que en el desarrollo de las situaciones didácticas se tomaron en cuenta sus aportes; comparten esta opinión más de las tres cuartas partes (78%) de los estudiantes.

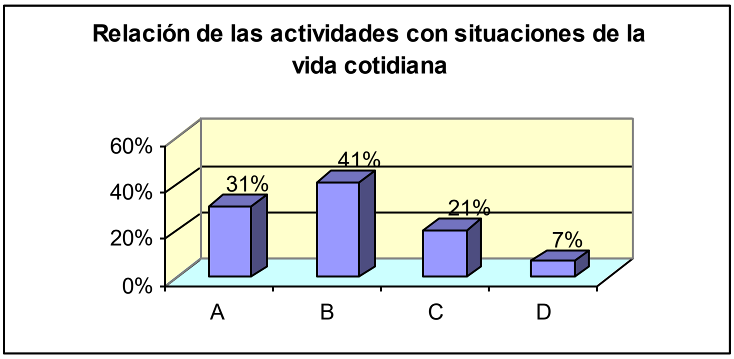
Gráfico Nº 11



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01

2.- En segundo lugar valoran la relación de las actividades planteadas y las situaciones de la vida cotidiana (72%).

Gráfico Nº 12



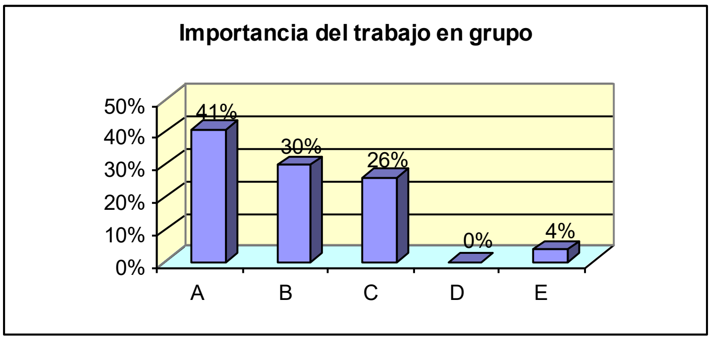
Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01

---

36 Ver Anexo Nº 05

3.- En tercer lugar valoran la importancia del trabajo en grupo en el logro de los aprendizajes, así como el apoyo y las orientaciones brindadas por la profesora (71%).

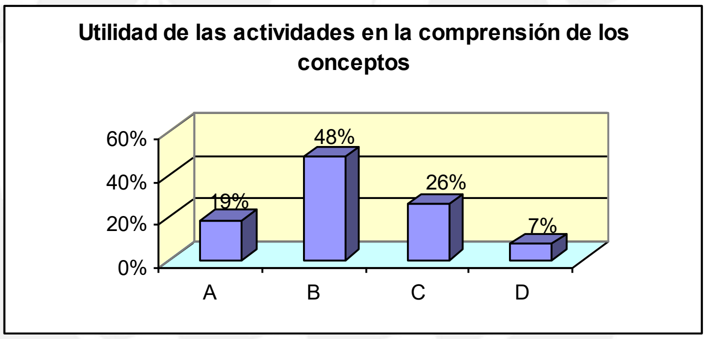
Gráfico Nº 13



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

4.- Más de los dos tercios de estudiantes (68%) considera que las actividades fueron pertinentes para el logro de los aprendizajes y útiles en la comprensión de los conceptos.

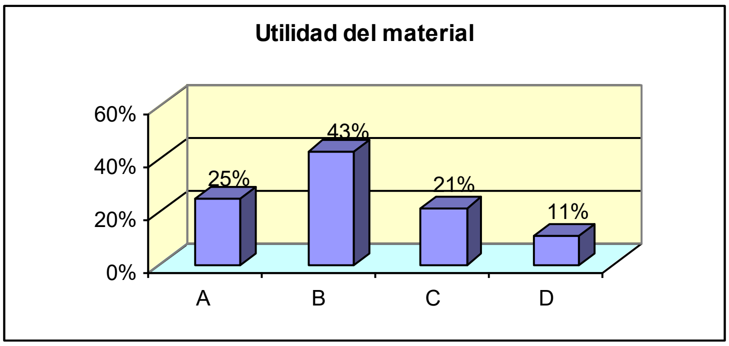
Gráfico Nº 14[37]



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

5.- Reconocen asimismo la importancia del material usado.

Gráfico Nº 15

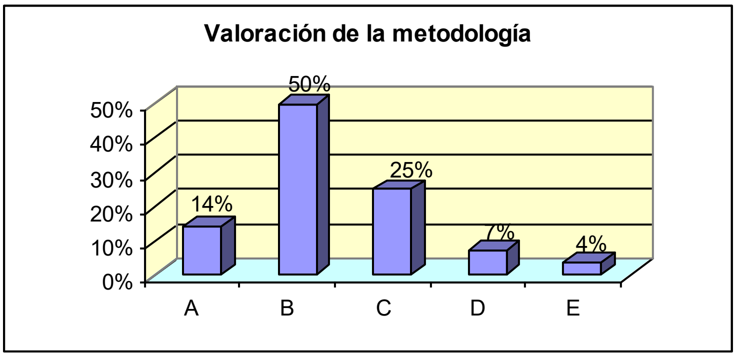


Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01

[37] Por las restricciones del programa usado para realizar los gráficos, se vio la necesidad de cambiar la escala de valoración usada en la Encuesta. Por lo tanto en éste y los siguientes gráficos, se asumen las siguientes equivalencias: A ≡5, B≡4, C≡3, D≡2 y E≡1.

6.- Cerca de los dos tercios (64%) de los estudiantes manifiesta satisfacción respecto a la metodología aplicada y considera que la secuencia de actividades fue adecuada.

Gráfico Nº 16



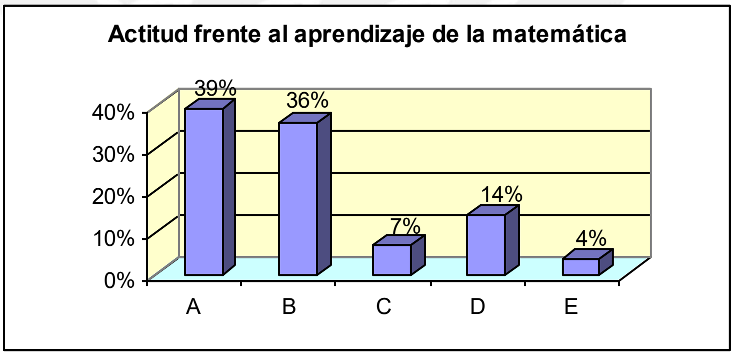
Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

7.- Más de la mitad (57%) de los estudiantes, considera que el tema desarrollado es aplicable a su carrera.

b.- Apreciación respecto al desarrollo de valores y actitudes

1.- Un significativo 83% de los estudiantes reconoce que la secuencia didáctica logró motivar su **deseo de superación**, el 76% dice que favoreció el **trabajo en equipo,** mientras que el 75%, considera que favoreció el desarrollo de una **actitud positiva frente al aprendizaje de la matemática**.

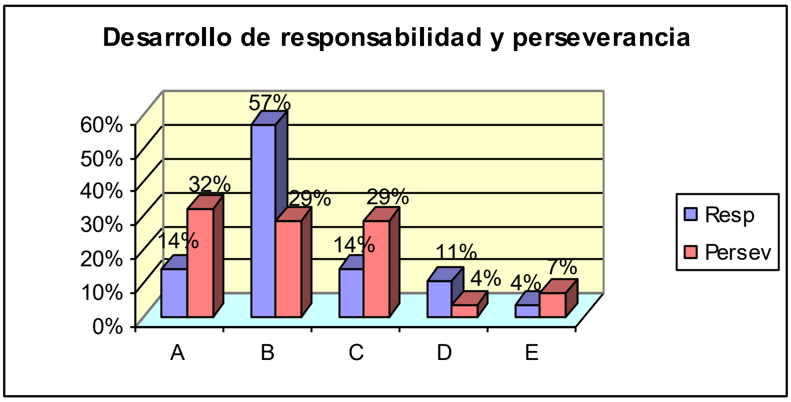
Gráfico Nº 17



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

2.- También reconocen que las actividades les permitieron desarrollar su sentido de **responsabilidad** (71%), y **perseverancia** (61%).

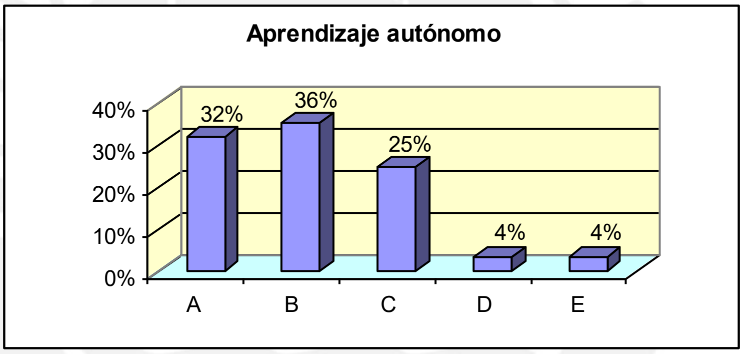
Gráfico Nº 18



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01

3.- También consideran que las actividades les permitieron desarrollar su **capacidad para seguir instrucciones** (70%), **aprender por sí mismos** (68%) y asumir un mayor **compromiso con su aprendizaje (**64%).

Gráfico Nº 19

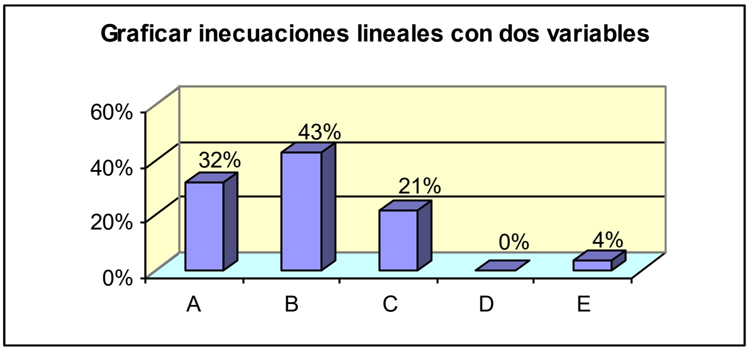


Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

c.- Apreciación sobre el logro de los aprendizajes esperados

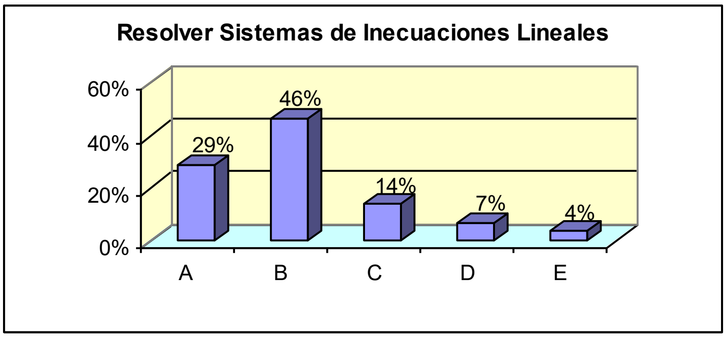
1.- Según los estudiantes, los aprendizajes mejor logrados fueron: "**graficar inecuaciones lineales con dos variables"** y "**resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables"** (75%).

Gráfico Nº 20



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

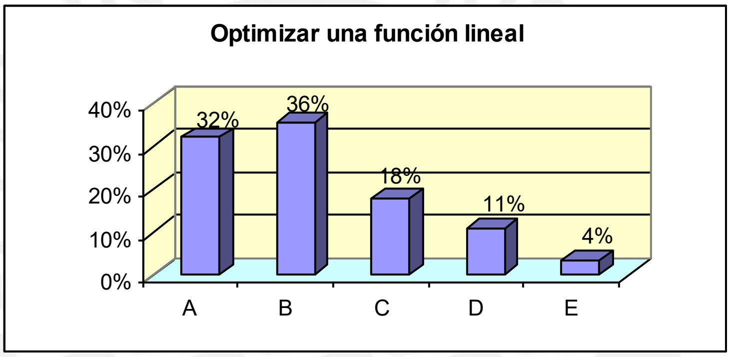
Gráfico Nº 21



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

2.- En segundo lugar, consideran haber aprendido a "**optimizar una función lineal"** (68%).

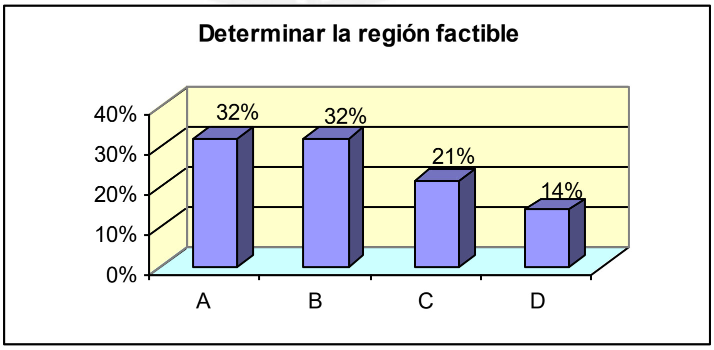
Gráfico Nº 22



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

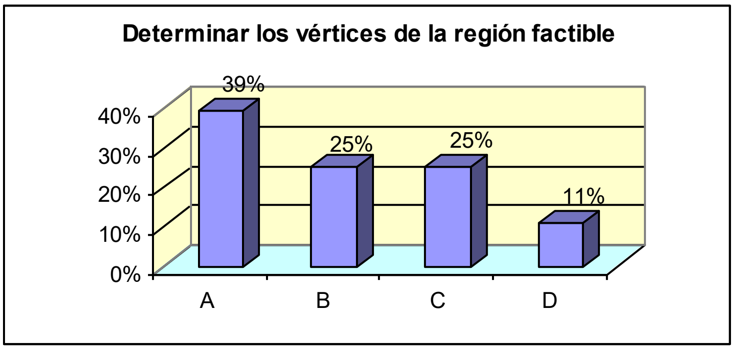
3.- Luego, ubican la capacidad para **determinar la región factible y sus respectivos vértices** (64%).

Gráfico Nº 23



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

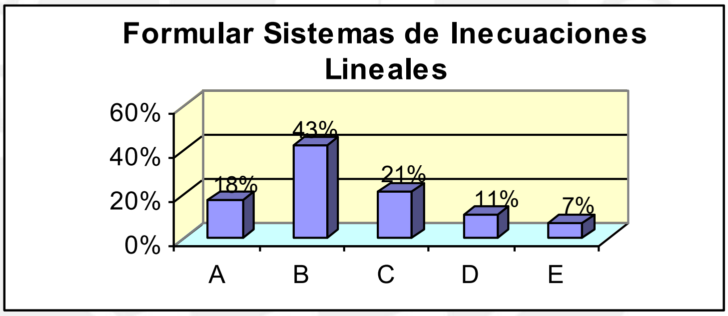
Gráfico Nº 24



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

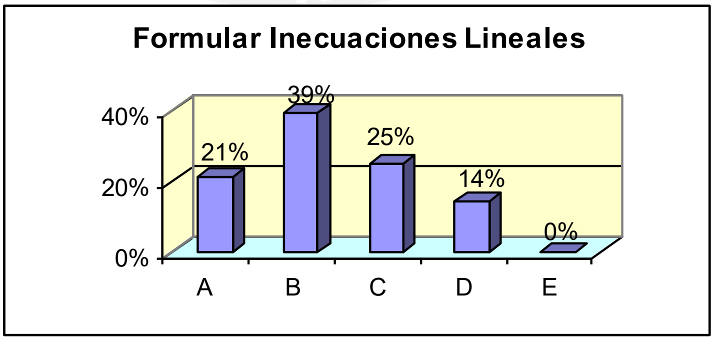
4.- El 61% considera haber aprendido a **formular sistemas de inecuaciones lineales con dos variables** correspondiente a una región del plano, dadas las ecuaciones de las rectas frontera, y **formular inecuaciones lineales** a partir de la gráfica del semiplano, conociendo la ecuación de la recta frontera un 60%.

Gráfico Nº 25



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

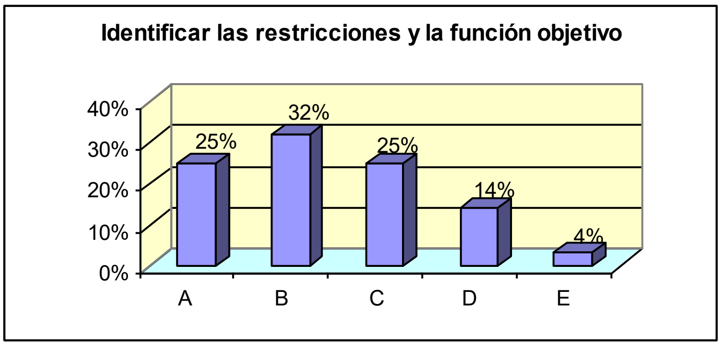
Gráfico Nº 26



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

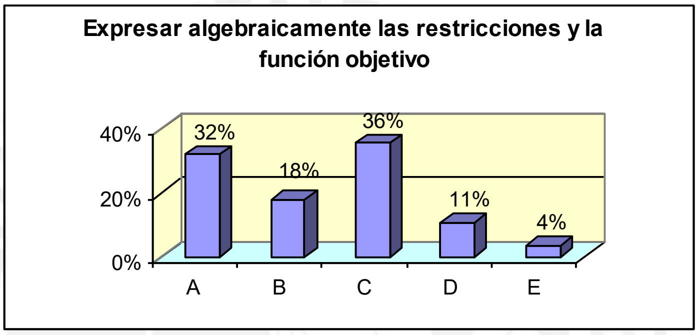
5.- Más de la mitad de los estudiantes (57%) consideran que pueden **identificar las restricciones y la función objetivo en un problema de programación lineal**, mientras que sólo el 50% considera que es capaz de **expresarlos algebraicamente**.

Gráfico Nº 27



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

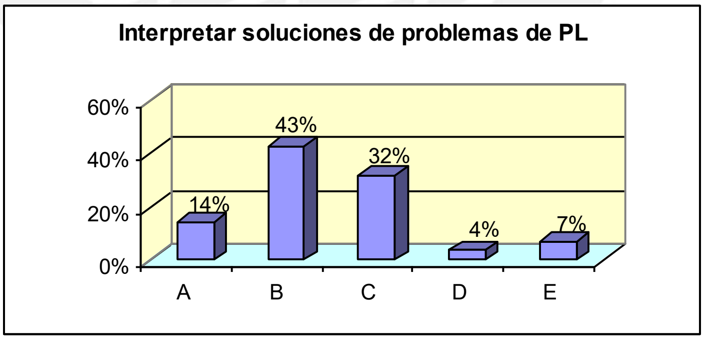
Gráfico Nº 28



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

Más o menos los mismos consideran que pueden **interpretar las soluciones de este tipo de problemas** (57%).

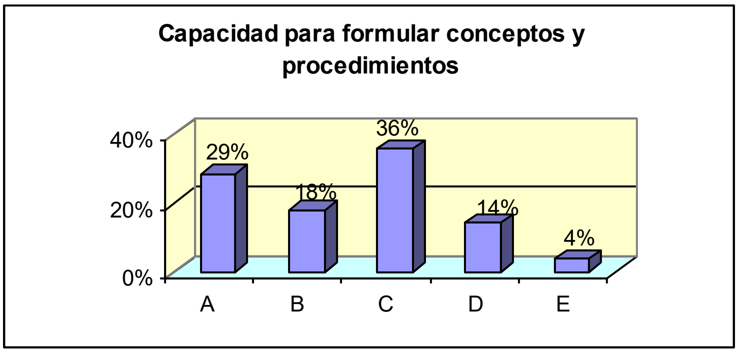
Gráfico Nº 29



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

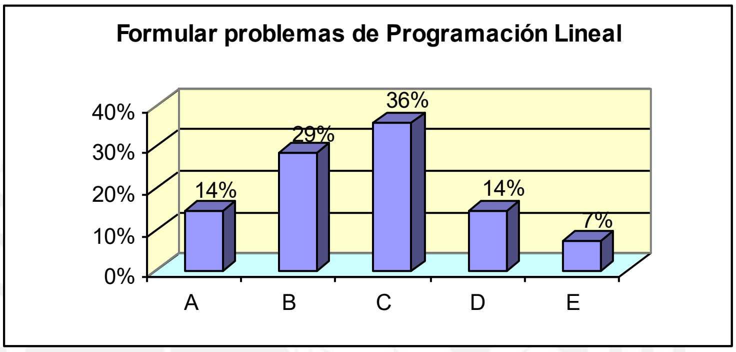
6.- Mientras que aprendizajes como "**definir conceptos** y **formular procedimientos** relacionados a los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal"; así como "**formular problemas de programación lineal",** no alcanzan el 50%.

Gráfico Nº 30



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

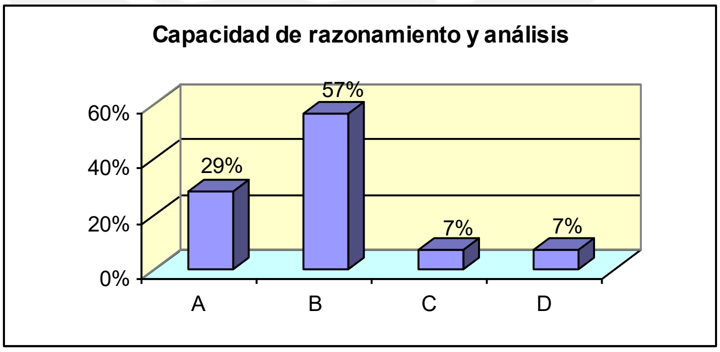
Gráfico Nº 31



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

7.- Finalmente, el 86% valora la secuencia didáctica porque favoreció el desarrollo de las **capacidades de razonamiento y análisis.**

Gráfico Nº 32



Fuente: Propia, en base al Cuestionario Nº 01.

5.3.2 Logros y dificultades encontrados en el desarrollo de las actividades

Aquí presentamos, de lo que a criterio de los estudiantes constituyeron sus logros y sus dificultades en cada una de las Actividades, coincidiendo en gran medida con los resultados recogidos a través de la Ficha de Observación. También son interesantes sus comentarios.

ACTIVIDAD	LOGROS	DIFICULTADES	COMENTARIOS
1.- Textilería peruana.	✓ Identificar las variables. ✓ Evaluar las diferentes posibilidades de producción.	✓ Expresar algebraicamente las restricciones y la función objetivo. ✓ Responder a la pregunta general del problema.	✓ Un poco complicada pero interesante. ✓ Aplicable a la vida cotidiana. ✓ Ayuda a desarrollar la capacidad de razonamiento. ✓ El avance es lento.
2.- Solución gráfica de la inecuación $2x-3y<6$.	✓ Tabular valores para graficar la recta. ✓ Determinar los puntos que satisfacen la inecuación, y aquéllos que no la satisfacen.	✓ Identificar puntos del "semiplano opuesto". ✓ Identificar el número de regiones que determina una recta en el plano y su denominación. ✓ Deducir las conclusiones.	✓ Permite relacionar los temas anteriores. ✓ Fácil de entender.
3.- Representación en el plano coordenado del conjunto de puntos para los cuales: *"La ordenada disminuido en cinco es como mínimo el triple de la abscisa"*.	✓ Graficar la recta.	✓ Formular la inecuación. ✓ Uso de los signos ≤ ó ≥. ✓ Identificar el semiplano solución. ✓ Determinar si el origen de coordenadas y la recta frontera son o no solución de la inecuación.	✓ Un poco difícil pero interesante. ✓ Ayuda a desarrollar habilidades y a ser perseverantes. ✓ La actividad individual fue más provechosa. ✓ Se necesita más práctica.
4.- Solución gráfica de la inecuación $4x+5y-30>0$ aplicando el procedimiento práctico.	✓ Identificar la ecuación de la recta frontera. ✓ Graficar dicha recta.	✓ Formular la inecuación del semiplano opuesto. ✓ Describir el procedimiento de solución.	✓ Comprensible, interesante y práctico. ✓ Estamos aprendiendo.
5.- Formular la inecuación correspondiente a un semiplano dado.	--	✓ Formular la inecuación. ✓ Formular la ecuación de la recta frontera.	✓ Es el más difícil de todos. ✓ Necesitamos mucha ayuda.

ACTIVIDAD	LOGROS	DIFICULTADES	COMENTARIOS
6.- Conceptualización de sistemas de inecuaciones lineales, a partir de la gráfica de dos semiplanos que tienen una parte común.	✓ Identificar la inecuación de cada semiplano.	✓ Justificar las respuestas. ✓ Relacionar la solución del sistema con notaciones y conceptos lógicos y conjuntistas. ✓ Definir el concepto de sistemas de inecuaciones. ✓ Formular un nuevo sistema de inecuaciones.	✓ Comprensible e interesante. ✓ Mucha actividad. ✓ Didáctico.
7.- Resolución gráfica del sistema de inecuaciones $\begin{matrix} x+3y<4 \\ 2x-y>1 \end{matrix}$.	✓ Graficar las inecuaciones.	✓ Determinar si las fronteras son solución del sistema. ✓ Formular un nuevo sistema de inecuaciones. ✓ Explicar las respuestas.	✓ Muy importante, interesante y ágil. ✓ Permite desarrollar habilidades y actitudes.
8.- Formulación de sistemas de inecuaciones en base a las ecuaciones de dos rectas paralelas.	✓ Resolver un sistema de inecuaciones (cuya solución es vacía).	✓ Formular los sistemas de inecuaciones. ✓ Uso de los signos: <, >, ≤ ó ≥.	✓ Muy interesante pero difícil. ✓ Ayuda a reforzar otros temas.
9.- Solución del sistema de inecuaciones: $\begin{matrix} 2x+y-3>0 \\ x-2y+1<0 \\ y-3<0 \end{matrix}$.	✓ En algunos casos, permitió trabajar en grupo.	✓ Decidir qué parte se sombreaba. ✓ Determinar los vértices. ✓ Modificar las inecuaciones para plantear el sistema que se pide.	✓ Un poco difícil, requiere mayor esfuerzo, pero cada vez aprendemos más. ✓ En algunos casos, nos ayudamos mutuamente, pero en la mayoría de los casos no fue posible reunirnos. ✓ Fue un reto.
10.- Solución del problema de la Actividad Nº 01, aplicando la solución de Sistemas de Inecuaciones Lineales.	✓ Determinar la región factible.	✓ Analizar y escribir el procedimiento de solución. ✓ Tabular y graficar la función objetivo. ✓ Determinar los vértices de la región factible.	✓ Un poco difícil pero interesante. ✓ Requiere mucha paciencia y concentración. ✓ Nos hace pensar.
11.- Venta de productos naturales.	✓ Verificar si un punto es parte de la región factible. ✓ Graficar la función objetivo.	✓ Identificar las variables. ✓ Reconocer y expresar algebraicamente las restricciones. ✓ Calcular el espacio adecuado para graficar.	✓ Se aprende porque se participa. ✓ Un poco difícil, interesante y muy importante. ✓ Permite desarrollar nuestra capacidad de razonamiento.

ACTIVIDAD	LOGROS	DIFICULTADES	COMENTARIOS
12.- Resolver la situación "Viviendas o alimentos".	✓ Determinar la región factible. ✓ Plantear y evaluar la función objetivo.	✓ Identificar las variables. ✓ Formular las restricciones. ✓ Determinar los vértices.	✓ Muy útil, pero requiere mucha concentración. ✓ Interesante y hace pensar mucho.
13.- Resolver la situación "Alimentos para mascotas".	✓ Graficar las restricciones. ✓ Hallar los vértices. ✓ Evaluar la función objetivo.	✓ Identificar las variables y organizar los datos. ✓ Plantear las restricciones. ✓ Determinar los vértices.	✓ Es interesante y comprensible. ✓ Pudimos comprender mejor y desarrollarlo con mayor rapidez. ✓ Se requiere concentración y pensar bastante.
14.- Plantear un problema de programación lineal.		✓ Tenía que pensar cómo formular un problema que estuviera "bien planteado". ✓ Tuve que pensar en las inecuaciones que debía escribir.	✓ Se necesita mucho razonamiento. ✓ Muy interesante porque teníamos que crear. ✓ Se hizo muy difícil.
Actividad de Refuerzo Nº 1	✓ Graficar las rectas frontera. ✓ Graficar las inecuaciones.	✓ Graficar las restricciones de la Actividad 1. ✓ Actividad 2: Formular algebraicamente las restricciones del problema. ✓ Actividad 5.	✓ Interesante pero un poco complicado, porque no tuvimos ayuda y no pudimos debatir con nuestros compañeros. ✓ Nos ayudó a reforzar lo aprendido. ✓ Vimos nuestros logros, pero nos tomó mucho tiempo.
Actividad de Refuerzo Nº 2	✓ Graficar sistemas de inecuaciones lineales.	✓ Determinación de los vértices de la región factible. ✓ Formular el SIL dado el respectivo gráfico. ✓ Modificar el SIL dadas determinadas condiciones.	✓ Aplicamos lo aprendido en clase. ✓ Permitió aprender más. ✓ Necesitamos la ayuda de los compañeros del aula. ✓ Un tanto complejo y extenso.
Actividad de Refuerzo Nº 3	✓ Aprendimos a resolver problemas de programación lineal.	✓ Identificar las restricciones. ✓ Determinar las regiones factibles. ✓ Algunos problemas.	✓ Estos problemas son muy interesantes; podemos aplicarlos a la carrera. ✓ Debemos aplicar todo lo aprendido. ✓ Permite el desarrollo de nuestras habilidades, tuvimos que razonar bastante. ✓ Algunos problemas son difíciles. ✓ No pudimos practicar mucho por falta de tiempo.

En forma general, los estudiantes al evaluar la secuencia didáctica señalan algunos aspectos positivos, aspectos que se deben mejorar, y proponen algunas sugerencias para superarlas.

OBSERVACIONES GENERALES

ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS A MEJORAR	SUGERENCIAS
- Son actividades muy útiles. - Promueven la participación de los alumnos. - Permiten que cada uno razone a su manera. - El método es muy bueno ya que nos permite avanzar a nuestro propio ritmo. - Favorece el desarrollo de nuestras capacidades de razonamiento. - Aprendimos mucho de este tema, hemos mejorado bastante. - El trabajo en grupo ayudó bastante, pues pudimos despejar dudas y contar con el apoyo de nuestros compañeros. Además, ayuda a perder el miedo o la vergüenza a preguntar. - Superamos muchas dificultades. - Las clases fueron de gran ayuda.	- Se necesita entender bien lo que leemos. - Necesitamos practicar más y dedicarle más tiempo. - Debemos mejorar el manejo de los conceptos para no tener dificultades en su uso posterior. - Hace falta mayor coordinación en los grupos. - Algunos coordinadores no tienen paciencia ni voluntad de ayudar a sus compañeros de grupo. - El tiempo fue insuficiente. - Resulta difícil avanzar porque no todos tenemos las mismas capacidades y tampoco avanzamos al mismo ritmo.	- Debemos poner mayor interés y dedicación en el desarrollo de las prácticas. - Mejorar la coordinación dentro de los grupos. - Los coordinadores no sólo deben saber el tema sino también tener más paciencia para ayudar a sus compañeros. - Promover un mayor número de exposiciones de los trabajos.

Como se observa, los estudiantes valoran el hecho de que las actividades les permiten una mayor participación en el proceso de aprendizaje, así como la posibilidad que tienen de avanzar a su propio ritmo. También valoran el hecho de que las actividades favorezca el desarrollo de sus capacidades y el trabajo en equipo.

Entre las dificultades identifican la insuficiencia de sus conocimientos previos así como el poco tiempo del que disponen. Entre las sugerencias, destacamos que es necesario generar mejores mecanismos de trabajo grupal y un mayor número de exposiciones y debates.

Califican las situaciones didácticas de interesantes y aplicables a situaciones reales, que ayudan a desarrollar el análisis y el razonamiento; sin embargo, consideran que necesitan más tiempo para desarrollar las Actividades de Refuerzo y más apoyo de los coordinadores de grupo.

Desde la percepción de los estudiantes, los aprendizajes mejor logrados fueron las capacidades para “graficar inecuaciones lineales con dos variables” y “resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables”.

En segundo lugar, ubican las capacidades para “optimizar una función lineal” (68%), “determinar la región factible y sus respectivos vértices” (64%). Más o menos en el mismo nivel sitúan la capacidad para “formular inecuaciones lineales dado el semiplano y la recta frontera”, así como la capacidad de “formular sistemas de inecuaciones lineales dada la región del plano y las ecuaciones de las rectas frontera”.

Sin embargo, sólo un poco más de la mitad manifiesta que puede identificar las restricciones y la función objetivo en un problema de programación lineal así como interpretar sus soluciones.

Las demás capacidades, como son: definir conceptos, describir procedimientos, expresar algebraicamente las restricciones y la función objetivo de un problema de programación lineal, así como formular problemas de programación lineal, no superan el 50%, por lo que se considerarían como las capacidades de mayor dificultad.

CAPITULO VI: ANALISIS A POSTERIORI Y VALIDACION

El análisis a posteriori y la validación son procesos que se llevan a cabo teniendo como base los resultados de la fase experimental de la ingeniería didáctica.

6.1 Análisis a posteriori de la secuencia didáctica

El análisis a posteriori se basa en la comparación del análisis a priori y los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica.

ACTIVIDAD	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS	COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS
Actividad Nº 01: Identificación del problema de programación lineal: "Textilería peruana", y solución preliminar.	✓ Dado que inmediatamente antes de la aplicación de la Secuencia Didáctica se habían desarrollado los SEL con dos variables, se esperaba que los estudiantes sistematizaran los datos identificando correctamente las variables. ✓ Que todos los estudiantes lograran evaluar correctamente las condiciones del problema para responder los primeros tres ítems; y que en base al sentido que tienen las preguntas se dieran cuenta que no había necesidad de agotar todos los recursos disponibles, lo que les llevaría a expresar dichas restricciones a través de desigualdades. ✓ Sin embargo sabíamos que para la mayoría no será fácil identificar las variables, ni mucho menos expresar las restricciones del problema a través de desigualdades, principalmente por la poca experiencia que tienen en este tipo de actividades.	✓ Ante las tres primeras interrogantes todos procedieron a comprobar una a una las condiciones del problema procediendo por ensayo y error. ✓ La mayoría tuvo dificultades para identificar las variables y organizar los datos, tal como habíamos anticipado en la hipótesis. Los que lo hicieron, llegaron a formular las restricciones del problema a través de ecuaciones; cuyas gráficas les permitieron encontrar la solución a la pregunta principal del problema. ✓ En general, los alumnos en esta actividad demostraron que les resulta difícil aprender solos, mostraron cierta resistencia y demoraron mucho. También les resultó difícil relacionar el tema con sus conocimientos previos. Sin embargo, cuando se les orienta aportan ideas interesantes y participaron con mucho interés en la fase de institucionalización.
Actividad Nº 02: Solución gráfica de la inecuación $2x-3y<6$.	✓ Esperamos que los estudiantes reconozcan que las soluciones de una inecuación lineal con dos variables son infinitas, y que comprendan la necesidad de graficar la ecuación asociada para determinar el semiplano solución.	✓ Nos sorprendió que al inicio todos pensaban que la gráfica debía ser una recta. ✓ La mayoría mostró dificultades en el manejo del plano coordenado así como para sacar conclusiones a partir de sus observaciones. ✓ A pesar de haber tomado varios puntos en cada semiplano no fue fácil que concluyeran que con los demás puntos de dicho semiplano sucedería lo mismo. Además, que no recordaban la denominación de "semiplano" (ni semiplano opuesto), que son conceptos que se manejan en la educación secundaria. ✓ También observamos dificultades para seguir instrucciones y asumir la responsabilidad de aprender por sí mismos.

ACTIVIDAD	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS	COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS
Actividad Nº 03: Representación en el plano coordenado del conjunto de puntos para los cuales: *"La ordenada disminuido en cinco es como mínimo el triple de la abscisa"*.	✓ En esta actividad se esperaba que los estudiantes formularan la inecuación sin mayores dificultades y en base a la actividad anterior graficaran previamente la recta frontera para identificar el semiplano solución. ✓ En general se esperaba que mejoraran el procedimiento identificando procesos claves. ✓ Sin embargo, era previsible que la mayoría tendría dificultad para representar la expresión "es como mínimo", por la poca experiencia que tienen para discriminar y representar expresiones que indican desigualdad y las recurrentes confusiones que tienen con dichos signos.	✓ Tal como se había previsto tuvieron dificultad para representar simbólicamente la expresión "es como mínimo" (lo tomaron como sinónimo de "es menor que"), pero sorprendentemente también presentaron errores en la representación de los conceptos de "ordenada" (confundieron con el de "abscisa") y "el triple de"; además mostraron dudas respecto al significado de "el origen de coordenadas". ✓ Se les hizo difícil transferir las conclusiones implícitas de la actividad anterior. Pensamos que habían comprendido la importancia de graficar la recta frontera, pero volvieron a repetir el proceso exploratorio realizado en la actividad anterior. ✓ En lugar de identificar los procesos claves propusieron una secuencia de acciones muy detallada, haciendo perder de vista lo esencial.
Actividad Nº 04: Solución gráfica de la inecuación $4x+5y-30>0$ aplicando el procedimiento práctico.	✓ Se esperaba que los estudiantes graficaran la inecuación sin mayores dificultades y determinaran en qué casos la recta frontera forma parte de la solución. ✓ Además que planteen la inecuación del semiplano opuesto y reformulen el procedimiento para graficar una inecuación lineal con dos variables teniendo en cuenta el Teorema 1.	✓ Los estudiantes mostraron inseguridad respecto al procedimiento a seguir; si bien todos graficaron la recta, muchos tuvieron dudas respecto a la suficiencia de tomar un solo punto para determinar el semiplano solución. ✓ También pasaron por alto el hecho de que el trazo de la recta debía ser discontinua; y se mostraron inseguros respecto a la inecuación del semiplano opuesto, después de formularla la verificaron tomando varios puntos.
Actividad Nº 05: Debieron plantear la inecuación $x<3$ a partir de su gráfica.	✓ Este tipo de actividades (pasar de la gráfica al registro simbólico) son infrecuentes en clases, por lo que esperábamos que ocasionaría dificultades. Sin embargo, pensamos que conociendo un punto de la recta frontera podrían darse cuenta de la ecuación correspondiente y a partir de ella formular la inecuación.	✓ Los alumnos mostraron serias limitaciones en esta actividad, inclusive los más destacados no lograron plantear la inecuación (algunos decían "x siempre es 3", otros, escribían $x < y$, ó $x + y < 0$). ✓ La dificultad con este tipo de inecuaciones (cuando el coeficiente de una de las variables es cero) no sólo se presenta para formular la inecuación a partir del semiplano, sino también para graficarlas (dada las inecuaciones).

ACTIVIDAD	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS	COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS
Actividad Nº 06: Conceptualización de sistemas de inecuaciones lineales, a partir de la gráfica de dos semiplanos que tienen una parte común.	✓ Se esperaba que a partir de la gráfica identificaran la solución de un SIL como la intersección de semiplanos y que formularan una definición relacionando con el concepto de SEL. ✓ Además, a modo de verificación esperamos que realicen los cambios necesarios en los sentidos de dichas desigualdades para formular un SIL para una región del plano indicado.	✓ Sorprendió que muchos alumnos procedieran a graficar las inecuaciones nuevamente cuando bastaba verificar en un punto para identificar el semiplano correspondiente. ✓ Mostraron dificultad para recordar, relacionar y usar sus conocimientos previos; puesto que, se habían previsto las condiciones para que relacionaran el tema con la intersección de conjuntos y la conjunción de proposiciones, también mostraron dificultad para definir conceptos y expresar sus ideas por escrito.
Actividad Nº 07: Solución gráfica del sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+3y<4 \\ 2x-y>1 \end{cases}$.	✓ En base a la actividad anterior se esperaba que los estudiantes resuelvan el sistema graficando cada una de las inecuaciones, y justifiquen por qué algunos puntos son solución del sistema y otros no. ✓ Para evidenciar su comprensión debían plantear un nuevo sistema cambiando convenientemente los sentidos de las desigualdades. ✓ Además, debían sistematizar sus acciones y proponer un procedimiento para resolver SIL.	✓ Pese a la conceptualización de los SIL y la solución gráfica de inecuaciones lineales realizadas en las actividades anteriores, los estudiantes mostraron cierta incertidumbre ante lo que se les pedía. ✓ En base a algunas orientaciones, la mayoría graficó correctamente el sistema; pero tuvieron dificultad al tener que introducir variantes al sistema para generar uno nuevo, así como al explicitar el procedimiento usado y justificar sus respuestas.
Actividad Nº 08: Formulación de sistemas de inecuaciones en base a las ecuaciones: $x-y+3=0$ y $x-y+5=0$ y la descripción de la región solución.	✓ Se esperaba que los estudiantes graficaran las ecuaciones sin mayores dificultades y formularan los SIL correspondientes a las regiones descritas verificando y explicando sus propuestas. ✓ Aunque se había previsto que tendrían alguna dificultad para formular el sistema correspondiente al semiplano limitado por una de las rectas, pensamos que con algunas orientaciones ellos mismos podían corregir sus errores y mejorar sus propuestas.	✓ A la mayoría les sorprendió el modo de formulación de esta actividad, pensaban que había un error en el uso de la igualdad. ✓ Luego, antes de graficar las ecuaciones resolvieron el sistema y se dieron cuenta que se trataba de rectas paralelas. ✓ Identificaron con mucha facilidad la solución vacía que corresponde al ítem (c), pero tuvieron dificultad para representar simbólicamente ese hecho. ✓ Como se había previsto tuvieron mucha dificultad al plantear el SIL correspondiente al semiplano limitado por la recta de ecuación $x-y+5=0$, algunos propusieron sólo la inecuación asociada; muchos procedieron por ensayo y error. ✓ Aunque les demandó mucho tiempo y esfuerzo, lograron una suficiente comprensión que les permitió explicar adecuadamente sus respuestas.

ACTIVIDAD	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS	COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS
Actividad Nº 09: Solución gráfica del sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x+y-3>0 \\ x-2y+1<0 \\ y-3<0 \end{cases}$.	✓ Se esperaba que resolvieran el SIL generalizando el procedimiento planteado para un sistema de dos inecuaciones. ✓ Que hallaran las coordenadas de los vértices de la región solución resolviendo los SEL correspondientes. ✓ Era previsible que persistiera la dificultad para graficar la inecuación $y-3<0$, por lo que debían revisar la actividad 5.	✓ Por limitaciones de tiempo la actividad no se desarrolló en clase. Aunque algunos alumnos resolvieron correctamente, en otros observamos errores no sólo al graficar la inecuación $y-3<0$ como se había previsto, sino también se observaron errores en la tabulación de valores para graficar la recta $2x+y-3>0$. ✓ Nadie determinó los vértices ni formularon el nuevo sistema que se pedía.
Actividad Nº 10: Solución del problema de la Actividad Nº 01, aplicando la solución de Sistemas de Inecuaciones Lineales y graficando la función objetivo.	✓ Se esperaba que los estudiantes resolvieran el problema graficando sus restricciones para determinar la región factible. ✓ Además que identifiquen la gráfica de la función objetivo como una familia de rectas paralelas. ✓ Que analicen y hagan una primera formalización del procedimiento para resolver problemas de PL gráficamente.	✓ Los errores persistentes de la mayoría de estudiantes en el manejo del plano coordenado generó dificultades en la determinación de la región factible; además no tomaron en cuenta las condiciones de no negatividad de las variables, a pesar de haber sido explicitadas. ✓ Aproximaron bastante bien la solución del problema graficando con cierta facilidad la función objetivo (se dieron cuenta que cuanto más se alejaba la recta del origen de coordenadas mayor era la ganancia); pero tuvieron dificultad para determinar los vértices de la región factible para precisar dicha solución (evidenciando una vez más que no les es natural relacionar la situación con sus conocimientos previos). Para darles mayor seguridad se adelantó la formulación del Teorema 2. ✓ También tuvieron dificultad al sistematizar el procedimiento para resolver el problema.
Actividad Nº 11: **"Venta de productos naturales".** Solución de un problema de **maximización** con cinco restricciones, que determinan una región factible cerrada.	✓ En base a la actividad anterior se esperaba que los estudiantes identificaran las variables y organizaran adecuadamente los datos para formular algebraicamente tanto las restricciones como la función objetivo. ✓ Que graficaran las desigualdades para determinar la región factible y sobre ella la función objetivo, de manera que pudieran aproximar la solución del problema. ✓ Que se dieran cuenta que la función objetivo toma su máximo valor en uno de los vértices de la región factible; por lo que debían determinar las coordenadas de dichos vértices para precisar la solución propuesta.	✓ Identificaron correctamente las variables, pero mostraron muchos errores en la formulación algebraica tanto de las restricciones como de la función objetivo (particularmente consideramos debido a que las restricciones hacen referencia a cada variable por separado). ✓ Aquí se evidenció también que persisten los errores al graficar desigualdades donde el coeficiente de una de las variables es cero. ✓ En lugar de aplicar la propiedad que ya se había formulado en la actividad anterior, según la cual bastaba evaluar la función objetivo en los vértices, graficaron la función objetivo como estaba propuesto. ✓ Pese a las orientaciones dadas en las actividades anteriores, persisten las deficiencias en el manejo del plano coordenado, y en este caso pasaron por alto las condiciones de no negatividad.

ACTIVIDAD	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS	COMPORTAMIENTOS OBSERVADOS
Actividad Nº 12: **Viviendas o alimentos…??** Solución de un problema de **minimización** cuya región de soluciones factibles es abierta.	✓ Teniendo en cuenta las actividades anteriores esperamos que logren formular algebraicamente las restricciones y la función objetivo. ✓ Que determinen con precisión la región factible y las coordenadas de sus vértices, y evalúen la función objetivo en dichos puntos. ✓ Que reformulen y expliquen el procedimiento planteado incorporando el Teorema 2 (sobre la ubicación de la solución óptima de un problema de PL).	✓ Aquí nuevamente se da el caso de que dos de las tres restricciones se formulan en una sola variable, pero a pesar de ello la mayoría de estudiantes logró formularlas correctamente, superando en gran medida las dificultades presentadas en las actividades anteriores. ✓ Lo mismo en la parte gráfica, sólo algunos de los que formularon inecuaciones como $4000 \leq x$ en lugar de $x \geq 4000$ cometieron errores al determinar la región factible. La mayoría consideró innecesariamente las condiciones de no negatividad. ✓ En general, para determinar la solución prefieren graficar la función objetivo en lugar de evaluarla sólo en los vértices., pese a que frente a las dificultades observadas en la actividad anterior ya se había institucionalizado el procedimiento tomando en cuenta el teorema 2.
Actividad Nº 13: **Alimentos para mascotas.** Solución de un problema de PL aplicando el teorema 2.	✓ En esta actividad esperamos que los estudiantes en forma individual resolvieran el problema propuesto aplicando en forma adecuada el procedimiento institucionalizado. ✓ Que sean capaces de explicar su solución en el plenario.	✓ Pese a que se tomaron más tiempo del previsto, la mayoría demostró seguridad y autonomía en el proceso de solución, respondiendo correctamente las preguntas planteadas. Sólo unos pocos evidenciaron dudas en la identificación de las variables e inseguridad en el proceso de solución.
Actividad Nº 14: Formulación de un problema de programación lineal.	✓ Considerando que la formulación de problemas es una de las mejores formas de verificar que los alumnos han aprendido a resolverlos, esperamos que para concluir la secuencia didáctica, los estudiantes debían formular un problema de PL relacionado a su contexto de manera original. ✓ Que resuelvan el problema para evaluar su calidad y realizar los reajustes de ser necesarios. ✓ Que valoren la utilidad de la programación lineal en la solución de diversos tipos de problemas.	✓ Por las limitaciones de tiempo no fue posible desarrollar esta actividad en clase. Algunos estudiantes formularon problemas similares a los desarrollados. ✓ Por lo que consideramos una tarea pendiente para futuros estudios.

6.2 Análisis de los aprendizajes esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES	RESULTADOS	CONCLUSIÓN
▪ Resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos variables demostrando un adecuado manejo del plano coordenado.	✓ Reconocen que las soluciones de una inecuación lineal con dos variables son infinitas.	✓ Desde la Actividad 2 sabían que las soluciones eran infinitas por asociación con las ecuaciones lineales con dos variables, además por la actividad de encontrar puntos que satisfacían la inecuación.	✓ Por sus conocimientos de ecuaciones lineales con dos variables esta idea la tenían clara desde el inicio.
	✓ Identifican el semiplano como solución de una inecuación lineal con dos variables.	✓ Al inicio muchos pensaban que la gráfica de la inecuación tendría que ser una recta. El concepto de semiplano fue nuevo para todos.	✓ Teniendo a la vista la gráfica de la primera inecuación, sorprendió que los estudiantes no recordaran la denominación de "semiplano".
	✓ Grafican la ecuación asociada para determinar el semiplano solución.	✓ Pese a haberse institucionalizado el procedimiento para graficar las inecuaciones destacando la importancia de graficar la recta frontera, muchos alumnos hasta en la 4ª actividad seguían repitiendo el proceso exploratorio realizado en la 2ª actividad.	✓ Se logró después de varias actividades; lo que nos lleva a afirmar que una o dos actividades resultan insuficientes para generalizar un procedimiento, se necesita más tiempo y un mayor número de actividades.
	✓ Formulan inecuaciones lineales con dos variables a partir de la descripción verbal de los puntos que la satisfacen.	✓ Confunden los conceptos de "ordenada" y "abscisa", asumen la expresión "como mínimo" como sinónimo de "menor que". Algunos no tienen claro el significado de "origen de coordenadas" y muestran dificultades para matematizar expresiones como "el triple de".	✓ Las deficiencias en el manejo conceptual dificultan la representación algebraica. Es necesario aclarar los conceptos involucrados en cada actividad.
	✓ Sistematizan el proceso de solución gráfica de una inecuación lineal con dos variables.	✓ Sólo algunos estudiantes toman conciencia de la secuencia de pasos y son capaces de sistematizar el proceso para graficar una inecuación lineal con dos variables.	✓ El logro parcial de esta capacidad se explica por las insuficientes actividades para generalizar y la poca práctica en explicitar procesos que tiene la mayoría de estudiantes.
	• Identifican en qué casos la recta frontera es parte de la solución de una inecuación lineal.	✓ Lo lograron con cierta facilidad, sin embargo tienden a trazar la recta siempre continua.	✓ Lo hacen cuando se les pregunta o se les pide explícitamente.
	• Formulan la inecuación del semiplano opuesto.	✓ La mayoría lo hizo sin mayor dificultad, aunque al principio el concepto de "semiplano opuesto" no fuera tan obvio para muchos.	✓ Lo hacen sin mayor dificultad.
	• Formulan inecuaciones a partir de las gráficas de semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes.	✓ Esta fue una de las mayores dificultades que mostraron los alumnos. Hubo necesidad de plantear actividades de desbloqueo.	✓ Es necesario afianzar el trabajo con ecuaciones de rectas paralelas a los ejes; además de plantear situaciones en todos los registros permanentemente en nuestras clases.

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES	RESULTADOS	CONCLUSIÓN
▪ Resolver gráficamente Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables.	• Identifican la solución de un SIL como la intersección de semiplanos.	✓ No tuvieron mayor dificultad en identificar la solución del sistema.	✓ Lo lograron con cierta facilidad.
	• Definen Sistemas de Inecuaciones Lineales.	✓ Mostraron dificultades en la conceptualización, y en la representación simbólica. Necesitaron ayuda.	✓ Muestran dificultad para usar sus conocimientos previos. Se esperaba que relacionaran con el concepto de sistema de ecuaciones.
	• Formulan SIL introduciendo variantes en las inecuaciones dadas.	✓ Algunos lo hacen muy bien, pero la mayoría muestra inseguridad. ✓	✓ Les resulta difícil coordinar las soluciones de dos o más inecuaciones a la vez.
	• Formulan SIL conociendo las ecuaciones de las rectas frontera.	✓ Mostraron dificultad y les demandó mucho tiempo. La mayoría procede por ensayo y error, es decir proponían el sistema y lo verificaban. El trabajo en grupo ayudó para discutir sus propuestas.	✓ Lo logran con ciertas dificultades, casi todos proceden por ensayo y error; a pesar de ello muestran bastante interés por este tipo de actividades.
▪ Resolver problemas de programación lineal aplicando los sistemas de inecuaciones lineales.	• Identifican la estructura de un problema de programación lineal.	✓ Entre otros, la 1ª actividad tuvo este propósito, principalmente los tres primeros ítems fueron útiles para entender la idea de restricciones, en base al análisis de esta actividad se introdujeron los conceptos de restricciones y función objetivo.	✓ Se introdujo en la 1ª actividad y se reforzó en las últimas.
	• Identifican las variables en un problema de programación lineal.	✓ La mayoría de estudiantes tiene dificultades en la identificación de las variables, tienden a confundirlas con los otros elementos del problema; la organización de los datos ayuda mucho a que ellos mismos corrijan sus errores.	✓ La comprensión de la pregunta del problema y la organización de los datos ayuda mucho a que ellos mismos verifiquen si las variables identificadas son las que corresponden.
	• Expresan las restricciones de un problema de programación lineal usando SIL.	✓ Las deficiencias en la comprensión del problema y la identificación de las variables genera confusión al relacionar los datos y formular algebraicamente las restricciones del problema. A esto se suma la constante confusión que tienen con los signos de desigualdad y su uso para representar expresiones verbales. ✓ En particular la dificultad es mayor cuando los datos hacen referencia a cada variable de manera independiente.	✓ La dificultad está relacionada a la comprensión del problema, la identificación de las variables y el uso de desigualdades para representar situaciones verbales.

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES	RESULTADOS	CONCLUSIÓN
▪ Resolver problemas de programación lineal aplicando los sistemas de inecuaciones lineales.	• Expresa algebraicamente la función objetivo de un problema de programación lineal.	✓ En la primera actividad tuvieron dificultad para identificarlo como función, pensaban que era una ecuación. Asimismo en las actividades donde las restricciones aparecen dadas en una sola variable tomaron los datos como parte de las restricciones. Pero luego no tuvieron mayores problemas.	✓ La formulación algebraica de la función objetivo no genera mayores dificultades.
	• Identifican la gráfica de la función objetivo como una familia de rectas paralelas.	✓ De acuerdo a la secuencia de actividades lograron trazar las rectas sin mayor dificultad.	✓ A pesar que se logró sin mayores dificultades, hubiera sido mejor que resolvieran más actividades graficando dichas rectas.
	• Determinan la región de soluciones factibles.	✓ Las primeras actividades (gráfica de inecuaciones y SIL) fueron muy útiles para que los alumnos graficaran las restricciones del problema y determinen la región de soluciones factibles.	✓ La secuencia de actividades planteadas hizo posible que los alumnos determinen la región factible sin mayor dificultad.
	• Determinan los vértices de la región factible.	✓ Hizo falta orientarlos y ayudar a recordar lo que se consigue al resolver SEL.	✓ Se observa dificultad para transferir sus conocimientos previos.
	• Infieren que la función objetivo toma su valor óptimo (máximo o mínimo) en uno de los vértices de la región factible.	✓ La mayoría se dio cuenta de este hecho, pero hubiera sido mejor que graficaran la función objetivo en algunas actividades más.	✓ Se pudo mejorar los logros enunciando el teorema[78] sólo después de que los alumnos se dieran cuenta de ello o vieran la necesidad de abreviar el proceso.
	• Resuelven problemas de PL aplicando en forma adecuada el procedimiento práctico.	✓ Algunos necesitaron apoyo, principalmente para identificar las variables y expresar algebraicamente las restricciones del problema.	✓ La mayoría muestra inseguridad en la identificación de las variables y pasar del registro verbal al algebraico.
	• Formulan problemas de programación lineal.	✓ Por las limitaciones de tiempo no se pudo realizar la actividad en el aula. Sólo algunos lograron formular problemas siguiendo el planteamiento de los problemas propuestos o resueltos en clase.	✓ Hay necesidad de retomarlo en futuros estudios.

[78] "Si hay una única solución que maximiza o minimiza una función objetivo lineal, entonces esa solución debe ser un vértice del polígono de soluciones factibles; si hay más de una solución, por lo menos dos de las soluciones deben corresponder a vértices adyacentes del polígono de soluciones factibles". (Draper, 1976, p. 618)

6.3 Validación de las hipótesis

HIPÓTESIS	RESULTADOS	VALIDACIÓN
(a) Las deficiencias en la comprensión de textos dificulta que los estudiantes afronten las situaciones planteadas en forma autónoma.	✓ La naturaleza del material usado y la metodología aplicada puso en evidencia esta dificultad de la mayoría de estudiantes. Con frecuencia preguntaban sobre lo que tenían que hacer, lo que les dificultó avanzar más rápidamente principalmente en las primeras actividades y en los problemas de programación lineal.	✓ Los hechos observados en el desarrollo de las actividades validan la hipótesis, aunque muchos superaron la dificultad paulatinamente en el transcurso de la secuencia didáctica.
(b) Presentan serias deficiencias para graficar en el plano coordenado, las que principalmente provienen de errores en el proceso de tabulación y la graduación de los ejes coordenados. En particular, tienen dificultad al graficar semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes.	✓ En el proceso de aplicación de la secuencia didáctica han sido recurrentes los errores en el proceso de tabulación, principalmente cuando involucran números negativos, fracciones y decimales. Estos errores a su vez generaron errores en el proceso de graficación y en el posterior análisis, interpretación y solución de los problemas. ✓ Dado el enfoque eminentemente gráfico que tuvo la secuencia didáctica, se evidenció que la mayoría de estudiantes presenta serias deficiencias en el manejo del plano coordenado. En las primeras actividades se pudo percibir la poca valoración que le daban al aspecto gráfico, por lo que les resultó difícil asumir la magnitud de sus errores. Pese que en el transcurso de la aplicación de la secuencia didáctica muchos fueron superando esta dificultad, aún persisten deficiencias en la elección de la escala adecuada a cada situación (no evalúan la situación antes de graficar). ✓ En particular les dificulta graficar inecuaciones en una sola variable, (incluyendo a los estudiantes que tienen altos niveles de rendimiento), demostraron serias limitaciones en las Actividades 5, 9 y 11; ellos mismos lo reconocen en el proceso de Autoevaluación.	✓ Puesto que los errores de tabulación y graficación en el plano coordenado son recurrentes, consideramos que la hipótesis queda validada, aunque muchos estudiantes lograron superar en gran medida esta dificultad. ✓ Consideramos asimismo que por las limitaciones que genera en la resolución de problemas de programación lineal es necesario revisar y reforzar este aspecto antes de iniciar el estudio de este tópico.
(c) Dada una región del plano (y las ecuaciones de las rectas frontera) tienen dificultad para plantear el sistema de inecuaciones correspondiente.	✓ En las actividades 5 y 8 que específicamente se planteó con ese propósito, lograron formular el sistema (trabajando en equipos) con mucha dificultad. El ítem respectivo se incluyó en las actividades 4, 6 y 7, además en las actividades de refuerzo. Por centrarse en las primeras tareas que proponían dichas actividades algunos dejaron de lado dicho ítem.	✓ Por las evidencias observadas la hipótesis se valida, por lo que reiteramos la necesidad de abordar los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones a la programación lineal planteando las actividades en los diversos registros.

HIPÓTESIS	RESULTADOS	VALIDACIÓN
(d) Dado un problema de programación lineal (en el registro verbal) muestran dificultades en la identificación de las variables, las que se relacionan con la poca práctica que tienen en la organización de los datos cuando resuelven problemas y la deficiencia en la comprensión de textos.	✓ La identificación de variables ocasiona grandes dificultades a los estudiantes, así se observó en la primera actividad. Aunque un grupo considerable de estudiantes volvió a evidenciar la misma deficiencia en las últimas actividades (11, 12 y 13), la mayoría logró superar por las orientaciones respecto a la importancia de la comprensión conveniente de la situación y el uso de cuadros o tablas para organizar los datos.	✓ Aunque en la última actividad (13) casi todos los estudiantes habían logrado superar la dificultad, la hipótesis se valida en el sentido de que se tome en cuenta y se puedan realizar actividades previas para minimizar sus consecuencias en la resolución de problemas de programación lineal.
(e) La dificultad en la identificación de las variables y las confusiones que tienen en el uso de los signos de desigualdad generan errores en la formulación algebraica de las restricciones y la función objetivo de los problemas de programación lineal.	✓ Se observó en la primera actividad, cuando en lugar de formular un sistema de desigualdades plantearon un sistema de ecuaciones; en la actividad 11 se agudizó el problema porque había que plantear desigualdades con una sola variable; en las actividades 12 y 13 la mayoría superó esta dificultad. Sin embargo, algunos volvieron a mostrar errores en la Evaluación de Salida. ✓ La poca claridad en el uso de los signos de desigualdad para representar situaciones verbales en particular se evidenció en la actividad 3.	✓ Por los recurrentes errores que presentó la mayoría de estudiantes en la formulación del sistema de inecuaciones (en particular en casos en los que la desigualdad involucra una sola variable), consideramos que la hipótesis se valida, pese a que muchos alumnos lograron superarla al finalizar la secuencia didáctica.
(f) Muestran limitaciones al usar sus conocimientos previos, formular conceptos y procedimientos, y justificar o explicar sus respuestas.	✓ A lo largo de la secuencia didáctica estas dificultades fueron generalizadas y persistentes. Por ejemplo, en la Actividad 6 (debían relacionar la solución de SIL con los conceptos de intersección de conjuntos y conjunción), y en la Actividad 10 (donde tuvieron que determinar los vértices de la región factible resolviendo SEL); no fue fácil que encontraran la relación que se requería y que podría parecer obvia. ✓ Por otro lado, pese a que al desarrollar las actividades demostraban que ya manejaban el concepto o aplicaban el procedimiento les resultaba difícil expresarlo verbalmente; la misma dificultad mostraron al justificar o explicar sus respuestas pese a haberlo resuelto correctamente.	✓ La hipótesis queda validada, pues son dificultades recurrentes en la mayoría de estudiantes, y difíciles de superar en un corto plazo.

CONCLUSIONES

Dada la complejidad de la actividad humana como son las interacciones en el aula, los resultados del presente estudio pueden ser muy particulares; sin embargo, también es cierto que existen comportamientos humanos que se reproducen en determinados contextos, como son los comportamientos de los estudiantes cuando aprenden determinado objeto matemático. Por lo que, y en relación a las hipótesis planteadas y validadas[79], consideramos conveniente señalar los siguientes resultados, con la finalidad de que sirvan de referencia en la realización de futuras investigaciones, así como en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y su aplicación a la programación lineal tanto en el nivel secundario como en el nivel superior.

Hipótesis (a): *Las deficiencias en la comprensión de textos dificulta que los estudiantes afronten las situaciones planteadas en forma autónoma.*

1.- Teniendo en cuenta que en el desarrollo de la secuencia didáctica se usaron fundamentalmente materiales educativos impresos, podemos afirmar que las deficiencias que muestran la mayoría de estudiantes en la comprensión de textos, dificultan que cada uno interactúe con el material de manera independiente y autónoma, por lo que recurren constantemente al docente y a sus compañeros.

Hipótesis (b): *Los estudiantes presentan serias deficiencias para graficar en el plano coordenado, las que principalmente provienen de errores en el proceso de tabulación y la graduación de los ejes coordenados. En particular, tienen dificultad al graficar semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes.*

2.- Los errores operativos tanto con números negativos como fraccionarios y decimales son persistentes en muchos estudiantes, lo que genera errores en el proceso de graficación de las inecuaciones lineales con dos variables y en el posterior análisis e interpretación de las gráficas.

3.- Además, se evidenció que la mayoría de estudiantes presenta serias deficiencias en el manejo del plano coordenado, fundamentalmente relacionado a la graduación de los ejes (la elección de la unidad o escala), generando distorsiones en las gráficas y dificultando la solución de los sistemas de inecuaciones y los problemas de programación lineal.[80]

---

[79] Ver Pág. 149-150

[80] Muchos estudiantes asumieron la importancia del proceso sólo cuando resolvieron los problemas de programación lineal.

4.- Estas dificultades generales que tienen con las gráficas, se agudiza en el caso de inecuaciones definidas en una sola variable (que corresponden a semiplanos cuyas fronteras son rectas paralelas a los ejes), haciéndose persistente y difícil de superar en un corto tiempo.

Hipótesis (c): *Dada una región del plano (y las ecuaciones de las rectas frontera) tienen dificultad para plantear el sistema de inecuaciones correspondiente.*

5.- Formular la expresión algebraica (inecuación o sistema de inecuaciones) a partir de la gráfica, es una de las mayores dificultades que muestran los estudiantes[81] (inclusive aquéllos que generalmente tienen un rendimiento académico por encima del promedio); situación que como afirma Segura[82] se podría atribuir a la ausencia de actividades de esta naturaleza en nuestras clases.

Hipótesis (d): *Dado un problema de programación lineal (en el registro verbal) muestran dificultades en la identificación de las variables, las que se relacionan con la poca práctica que tienen en la organización de los datos cuando resuelven problemas y la deficiencia en la comprensión de textos.*

6.- Una de las mayores y persistentes dificultades que se presenta cuando resuelven problemas de programación lineal es el error en la identificación de las variables, con frecuencia las confunden con otros elementos del problema o no las definen explícitamente. Sin embargo, muchos logran superar esta dificultad organizando los datos en tablas o cuadros, que en general, son de gran utilidad en la comprensión del problema.

Hipótesis (e): *La dificultad en la identificación de las variables y las confusiones que tienen en el uso de los signos de desigualdad generan errores en la formulación algebraica de las restricciones y la función objetivo de los problemas de programación lineal.*

7.- Los estudiantes muestran persistente dificultad en la formulación de las desigualdades que representan las restricciones de problemas verbales de programación lineal, más aún cuando las condiciones del problema se refieren a cada una de las variables de manera independiente. Como es comprensible esta dificultad está asociada a las deficiencias en la identificación de las variables y a las dificultades en la comprensión del problema en general, a las que cabe añadir las confusiones en el uso de los signos de desigualdad para representar situaciones verbales. En cambio, tienen menos dificultades en la formulación de la función objetivo.

---

[81] Ver Actividad N° 5 y 8, páginas 83 y 86; e ítem 3 de las Evaluaciones de Salida, páginas 170 - 172.
[82] Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica; página 52.

Hipótesis (f): *Muestran limitaciones para usar sus conocimientos previos, formular conceptos y procedimientos, y justificar o explicar sus respuestas.*

8.- La limitación que tienen los estudiantes para aplicar sus conocimientos previos (ya sea a nivel conceptual, operatorio o de estrategias) es frecuente y generalizada; haciéndose necesaria la intervención del docente a través de preguntas u otras estrategias.

9.- Por otro lado, muestran inseguridad y escasa experiencia en la formulación de conceptos y procedimientos; están acostumbrados a recibirlos (copiar) elaborados y sistematizados. Tampoco tienen costumbre de explicar sus procedimientos y respuestas, al hacerlo muestran inseguridad y poca coherencia. Es evidente que estas dificultades se deben a que en nuestras aulas todavía prevalece una enseñanza centrada en la acción del docente.

Pese a que las hipótesis inciden en las dificultades o limitaciones más frecuentes y recurrentes que la mayoría de estudiantes presenta en el proceso de aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones a la programación lineal, es necesario señalar que en mayor o menor grado dichas deficiencias se fueron superando en el proceso de desarrollo de las actividades.

Respecto a los procesos fundamentales que propone la Teoría de Situaciones Didácticas, llegamos a las siguientes conclusiones:

10.- Al inicio de la secuencia didáctica el proceso de ***devolución*** al estudiante de la responsabilidad del aprendizaje confronta algunas resistencias, principalmente porque están acostumbrados a un aprendizaje por recepción y en segundo lugar por la dificultad en el uso de material impreso.

11.- La actitud de dependencia de la acción del docente tan arraigada en los estudiantes, así como la limitación en el uso de sus conocimientos previos y las deficiencias en la comprensión de textos dificultan que los procesos de ***acción, formulación y validación*** sean completamente a-didácticas**,** es decir, que como propone Brousseau, sean interacciones autónomas e independientes de la intervención del docente.

12.- Las situaciones de **acción** se favorecen cuando los estudiantes trabajan en pares.

13.- Los procesos de **formulación y validación**, generalmente lo logran uno o dos alumnos por grupo (de cinco integrantes), quienes luego socializan con el resto.

14.- Lograr que estos procesos sean cada vez más a-didácticos es lento y paulatino; implica en primer lugar que los alumnos comprendan bien su responsabilidad dentro del contrato didáctico, lo cual es también progresivo y depende mucho de sus propios logros; en segundo lugar depende de la actitud y el nivel de intervención del docente; y por último, requiere una mayor flexibilidad del tiempo, de manera que se ajuste al avance de los alumnos y no a la inversa.

15.- Pese a las dificultades presentadas en los procesos a-didácticos, en el proceso de **institucionalización** de los conocimientos se logró un nivel satisfactorio de participación de los estudiantes, aportaron ideas interesantes ya sea en forma personal o a manera de conclusiones de equipo, se logró un aceptable nivel de confrontación de opiniones demostrando un adecuado manejo conceptual y criterio argumentativo, plantearon inquietudes demostrando interés y conocimiento del tema, y sistematizaron los conocimientos y procedimientos usando el lenguaje matemático en un nivel aceptable.

En cuanto al logro de los ***aprendizajes esperados***, concluimos que:

16.- El aprendizaje esperado con un mejor nivel de logro fue: ***"Resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos variables demostrando un manejo adecuado del plano coordenado"***, sólo persiste la dificultad cuando la ecuación asociada corresponde a una recta paralela a alguno de los ejes.

17.- La mayoría de estudiantes ***"Resuelve gráficamente Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables"*** satisfactoriamente; salvo que contengan inecuaciones asociadas a rectas paralelas a los ejes.

18.- En cuanto a la tercera capacidad ***"Resolver problemas de programación lineal con dos variables aplicando los sistemas de inecuaciones lineales"***; el logro fue parcial, la mayor dificultad radica en la formulación algebraica de las restricciones del problema.

Por último, respecto a los ***objetivos*** que nos planteamos al inicio de la presente investigación, concluimos que:

19.- La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, hizo posible abordar la enseñanza de los Sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones a la programación lineal desde un enfoque sistémico, es decir, integrando la perspectiva epistemológica, didáctica y cognitiva.

20.- Los planteamientos de la Teoría de Situaciones Didácticas, nos han permitido diseñar y elaborar una Secuencia Didáctica sobre los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal, incorporando actividades que favorecieron la construcción del conocimiento por parte del estudiante, propiciando situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación.

21.- El hecho de que el estudio se realizara con nuestros propios alumnos, favoreció el análisis de restricciones, lo que a su vez permitió que la secuencia didáctica respondiera mejor a sus intereses y necesidades de aprendizaje.

En síntesis, el presente trabajo de investigación realizada en el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica y basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de G. Brousseau nos ha permitido diseñar, elaborar, aplicar y validar una secuencia didáctica sobre los ***"Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal"*** y aportar conclusiones y recomendaciones específicas para futuras investigaciones, así como para ser tomadas en cuenta en el proceso enseñanza-aprendizaje tanto en la educación secundaria como en el nivel superior.

Además, el estudio realizado presenta evidencias sobre las ventajas de la Teoría de Situaciones Didácticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pues permite diseñar situaciones que favorecen que los estudiantes construyan sus propios conocimientos y participen en actividades verdaderamente matemáticas. Así lo reconocen los propios estudiantes[83] que se resume en un comentario de uno de los alumnos que tenía mucha dificultad para aprender matemática y cuyo rendimiento estaba siempre por debajo del promedio del aula: "Ahora estoy entendiendo, antes copiaba sin entender nada".

Por su parte, la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación o como medio de producción de secuencias didácticas resulta pertinente a la necesidad urgente de mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en todos los niveles educativos; pues nos involucra a nosotros los maestros en acciones y reflexiones permanentes en la búsqueda de soluciones concretas y viables a los problemas específicos que afrontamos día a día en las aulas.

[83] Ver Pág. 121-139

RECOMENDACIONES

Las conclusiones a las que hemos llegado, nos permiten formular las siguientes recomendaciones:

1.- Consideramos necesario apoyar desde la enseñanza de la matemática el desarrollo de la capacidad de comprensión lectora, que resulta fundamental para lograr una ***acción*** más independiente de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y una mayor autonomía en la resolución de problemas.

2.- Reforzar permanentemente la capacidad operativa de los estudiantes principalmente con números negativos, fracciones y decimales.

3.- Rescatar el valor no sólo didáctico sino fundamentalmente cognitivo del aspecto gráfico en la enseñanza de la matemática desde los niveles educativos más elementales, incidiendo en el manejo del plano coordenado.

4.- Reforzar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos variables, incidiendo en su representación gráfica y en aquéllas definidas en una sola variable.

5.- Abordar la solución de problemas verbales de manera sistemática y a la vez creativa desde los niveles de educación básica, de modo que se favorezcan diversas estrategias de organización de los datos que ayuden a la comprensión y la identificación de las variables.

6.- Promover la enseñanza de las inecuaciones desde el nivel básico en forma paralela y complementaria al estudio de las ecuaciones, relacionadas en lo posible a situaciones contextualizadas y destacando la representación gráfica de su conjunto solución.

7.- Con la finalidad de que los alumnos logren aprendizajes matemáticos significativos y funcionales y no acumulen conocimientos inconexos, es necesario asumir la didáctica de la matemática desde una perspectiva científica. Específicamente, a partir del presente estudio podemos afirmar que resulta muy importante abordar la enseñanza de la matemática tomando en cuenta los puntos de vista epistemológico, didáctico y cognitivo; diseñar situaciones didácticas que favorezcan la construcción de los aprendizajes, propiciando las diferentes formas de representación (verbal, gráfico, algebraico) del conocimiento matemático.

8.- Si bien la aplicación de una secuencia didáctica como la que se elaboró en el presente estudio, toma más tiempo de lo que normalmente se prevé, es necesario reforzar las actividades de aprendizaje con un mayor número de exposiciones grupales, para favorecer un mejor nivel de análisis y confrontación de ideas, pues es una de las mejores formas de consolidar los aprendizajes.

9.- Replantear la enseñanza de las funciones, polinomios, ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una variable y sistemas de ecuaciones lineales incorporando teorías que permitan construir y comprender mejor estos objetos matemáticos estableciendo conexiones entre ellos, como pre-requisitos de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal.

10.- Finalmente, reconociendo las limitaciones naturales y comprensibles del presente estudio, queremos motivar a realizar estudios que amplíen y profundicen los resultados encontrados y que permitan mejores logros en el proceso de aprendizaje de los sistemas de inecuaciones lineales y la solución de los problemas de programación lineal, tanto en el nivel de educación secundaria como en el nivel superior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allendoerfer, C. (1973). *Fundamentos de matemáticas universitarias*; México DF: McGraw-Hill, 3ª edición.

Artigue, M. y otros. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A. (2001). *El maestro y el contrato en la Teoría brousseauniana*. Educación Matemática Vol. 13, Editorial Iberoamérica. http://descartes.ajusco.upn.mx/varios/piem/publicaas01.html

Barbosa, K. (2003). *La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE*. Relime Vol. 6, Núm. 3, julio 2003, pp. 199-219. http://www,google.com.pe/search?hl=es&q=Barbosa+Karly%2C+La+ense%C3%B1anza+de+inecuaciones&meta=

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros

Caro, A. (2001). Programación Lineal. Ministerio de Educación de España. Proyecto Descartes. http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Programacion_lineal/program.htm (18/03/06)

Carranza, C. y otros. (1999). *Matemática 1*, Bachillerato peruano. Lima: Ministerio de Educación.

Chavarría, J. (2006). La *Teoría de las Situaciones*. Transcripción editada de la conferencia del 25 de marzo de 2006.

http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%203.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Lima: Empresa Editora El Comercio, S.A. (Colección para educadores, Tomo 15).

De Lima, A. (1972). *Introdução à programação linear*. Rio de Janeiro, Brasil: Ao livro técnico S.A.

Draper, J. (1976). *Matemática para Administración y Economía*. México: Editorial Harla.

Díaz, Hugo (2006). *Panorama actual de la educación peruana*. Una visión del período 2000-2006 y su proyección al 2011. http://www.educared.edu.pe/directivos/ .

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Espinosa, H. (1975). *Programación Lineal*. México: Editorial Páx.

Gass, S. (1974). *Programación Lineal*. México: Compañía Editorial Continental.

Godino, J. (s.f.). *Fundamentos ontológicos y epistemológicos sobre la cognición matemática*. Universidad de Granada, España. http://www.ugr.es/~jgodino/doctorado/diapositivas/2_Marcos%20te%F3ricos%20de%20referencia.ppt

Hurman, A. (2001). *El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra lineal*. Universidad de Cuyo. http://fce.uncu.edu.ar/investigacion/Jornadas/jornadas2002/Matematicas/24/T24.pdf

Lezama, F. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Lipschutz, S. (1985). *Álgebra Lineal*. México: Editorial Mc Graw Hill.

Mizrahi, A. y Sullivan, M. (1978). *Matemáticas Finitas*. México: Editorial Limusa.

Panizza, M. (s.f.). *Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas*. http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1995). *Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática*. Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina – REM. Universidad de Buenos Aires, Argentina. http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/articulo/pss_1995.doc

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). *La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito*. Universidad de Buenos Aires, Argentina. http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/21603/21437

Perú, Ministerio de Educación. (1983). *Estructura Curricular Básica de los ISTP*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación. (1986). *Programas de Asignaturas y Actividades de Formación General*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación. (1999). *Matemática 1*. (Texto Oficial del Bachillerato Peruano). Lima: Editorial Metrocolor.

Perú, Ministerio de Educación. (1999) *Estructura Curricular Básica de Educación Secundaria*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación. (2003) *Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria.* Lima.

Perú, Ministerio de Educación. (2006). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima.

Programación lineal. (s.f.). Extraído el 23 de febrero de 2007 de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/intro.html

Programación lineal. (s.f.). Extraído el 23 de febrero de 2007 de http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2003/programacion/historia/historia.htm

Programación lineal. (s.f.). Extraído el 23 de marzo de 2007 de http://descartes.cnice.mecd.es/Algebra/prog_lineal_lbc/historia_pl.htm

Ramírez, C., Oktac, A. y García, C. (2002). *Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales*. Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19. pp. 413-418. http://eclipse.red.cinvestav.mx/publicaciones/anuario05/matedu.pdf

Rey, M., S. Porcinito, S., Lazarte, G. y Hernández, C. (2006). *Ecuación de la recta: una ingeniería didáctica para su enseñanza*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19, pp. 48-54. http://www.matedu.cicata.ipn.mx/Publicaciones/alme19.pdf

Rojo, A. (1978). *Álgebra II*. Buenos Aires: Editorial El Ateneo.

Rosainz, V. (2005). "*Tres modelos de enseñanza: Obstructores que generan errores en la resolución de problemas que utilizan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en telesecundaria*". México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Sadovsky, P. (2005). *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires. http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/teoria_situaciones.pdf

Sáenz, R. (1978). *Álgebra Lineal*. Quito, Ecuador: Universidad Central.

Segura, S. (2004). *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica*. Relime Vol. 7, Núm. 1, marzo 2004, pp. 49-78. http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095347

ANEXOS DE LA TESIS

ANEXO Nº 01

MATRIZ DE EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	Nº Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
a. Representa situaciones expresadas en forma verbal a través de inecuaciones de primer grado con una incógnita.	✓ Identifica la inecuación que corresponde a una situación expresada en forma verbal.	10%	2p	1 - Ítem de alternativa múltiple	• Prueba Escrita.
b. Resuelve inecuaciones de primer grado con una incógnita.	✓ Resuelve una inecuación lineal con una incógnita que contiene signos de agrupación e identifica el menor número entero que la satisface.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve una inecuación lineal e identifica gráficamente su conjunto solución.	15%	3p	1 - Ítem de alternativa múltiple.	
	✓ Resuelve una inecuación lineal con una incógnita de tres partes e identifica la cantidad de números enteros que la satisfacen.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
c. Resuelve problemas de contexto real aplicando inecuaciones de primer grado con una incógnita.	✓ Resuelve un problema de traducción simple que involucra una inecuación de primer grado con una incógnita.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve un problema sobre edades que implica la solución de un sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve un problema de traducción compleja que implica relacionar datos semanales y mensuales a través de una inecuación de primer grado con una incógnita.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N º 02

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS: INECUACIONES LINEALES

EXPLORANDO CONOCIMIENTOS

ALUMNO(A): ____ **FECHA:** ____/____/____

Revisa brevemente lo que ya conoces sobre inecuaciones de primer grado con una incógnita. Lee con mucha atención las informaciones que se dan antes de resolver. (Tienes 45 minutos).

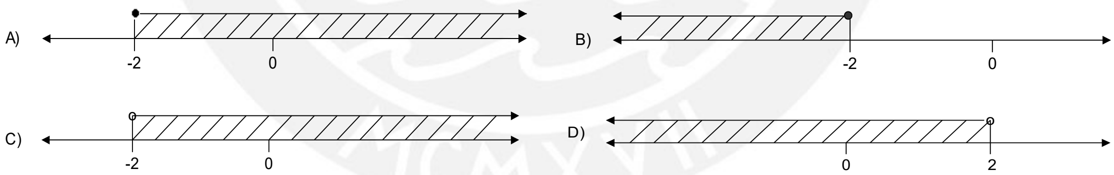
1.- La profesora Daniela tiene 50 lápices para repartir entre sus “n” alumnos. Si todos los alumnos reciben por lo menos un lápiz, ¿cuál de las siguientes relaciones es correcta? Explica tu respuesta. **(2p)**

a) $n < 50$ b) $n \leq 50$ c) $n > 50$ d) $n \geq 50$

2.- ¿Cuál es el *menor número entero* que satisface la inecuación $7(x-2) > 21$? **(2p)**

3.- ¿Cuál es la mayor cantidad de conejos que puede tener David, si se sabe que disminuido en 5 es menor que 16? **(2p)**

4.- Si x es un número real y $13 - x \leq 15$, ¿en qué conjunto se encuentra x? **(3p)**



5.- ¿Cuántos números enteros satisfacen la inecuación $2y - 5 < y + 3 \leq 5y - 7$? **(3p)**

6.- Si al doble de la edad de Juan Carlos se le resta 17 años resulta menor que 35; pero si a la mitad de su edad se le suma 3 años el resultado es mayor que 15. ¿Cuál es la edad de Juan Carlos? **(4p)**

7.- A Luis, por su trabajo de vendedor le pagan 90 soles semanales, más la séptima parte del importe total de su venta mensual.

Si el mes pasado su sueldo superó los 920 soles; ¿el importe de ventas del mes pudo haber sido S/ 4 000? **(4p)**

ANEXO N º 03

MATRIZ DE EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **FILA A**

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	Nº Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
a. Reconoce las soluciones de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Determina si un par ordenado es o no solución de una ecuación lineal con dos variables.	5%	1p	1 - Ítem de Verdadero y Falso.	• Prueba Escrita.
	✓ Determina la posición de la gráfica de una ecuación lineal respecto al eje de las abscisas.	10%	2p	1 - Ítem de Verdadero y Falso.	
b. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Resuelve algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Determina si un sistema de ecuaciones lineales con dos variables es o no compatible.	5%	1p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Formula un sistema de ecuaciones lineales con dos variables dado su conjunto solución.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
c. Resuelve problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Resuelve un problema de traducción simple que involucra un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve un problema de contexto real que involucra un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N º 04

ISTP "Simón Bolívar"
Matemática II

A

EVALUACIÓN SOBRE S.E.L.

ALUMNO(A): ____ FECHA: ____/____/____

A continuación tienes algunas preguntas acerca de los SEL Lee con atención antes de resolver, y no olvides explicar tus respuestas. (Tienes 60minutos).

1.- Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. **(3p)**

a) El par ordenado (2;-5) es una solución de la ecuación $3x+2y+4=0$. ( )

b) La gráfica de la ecuación $x-y+3=0$ es una recta paralela al eje de las abscisas. ( )

2.- La suma de dos números es 215 y su diferencia es 73. ¿Cuáles son dichos números? **(3p)**

3.- Plantea un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, cuyo conjunto solución sea: $S=\{(1,3)\}$. **(3p)**

4.- De compras ... **(4p)**

Una ama de casa compra 2 kg de quinua y 3 kg de soya, por S/. 36,50. Ante la necesidad de aprovechar la oferta, vuelve al día siguiente y compra 3 kg de quinua y 2 kg de soya por S/. 38,50.

a) ¿Cuánto cuesta el kilogramo de cada uno de estos productos?
b) Si lleva 20 soles, ¿cuántos kilogramos de quinua y soya puede comprar si desea tener la menor cantidad de vuelto posible?

5.- Dado el sistema de ecuaciones: **(7p)**

$$x+y=9$$
$$2x-3y-8=0$$

a) Resuelve algebraica y gráficamente el sistema.
b) Explica si el sistema es compatible.

ANEXO N º 05

MATRIZ DE EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS

TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **FILA B**

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	Nº Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
a. Reconoce las soluciones de inecuaciones lineales con dos variables.	✓ Determina si un par ordenado es o no solución de una inecuación lineal con dos variables.	5%	1p	1 - Ítem de Verdadero y Falso.	• Prueba Escrita.
	✓ Determina la posición relativa de las gráficas de dos inecuaciones lineales con dos variables.	10%	2p	1 - Ítem de Verdadero y Falso.	
b. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Resuelve algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Determina si un sistema de ecuaciones lineales con dos variables es o no compatible.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Formula un sistema de ecuaciones lineales con dos variables dado su conjunto solución.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
c. Resuelve problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Resuelve un problema de contexto matemático que implica la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve un problema de contexto real que involucra un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N º 06

ISTP "Simón Bolívar"
Matemática II

EVALUACIÓN SOBRE S.E.L.

B

ALUMNO(A): ____ FECHA: ____/____/____

A continuación tienes algunas preguntas acerca de los SEL Lee con atención antes de resolver, y no olvides explicar tus respuestas. (Tienes 60minutos).

1.- Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados. **(3p)**

a) El par ordenado (-3;10) es una solución de la ecuación $3x+2y=11$. ( )

b) Las gráficas de las ecuaciones $5x-y+3=0$ **y** $5x-y+5=0$ son rectas secantes.

2.- Rodrigo trabaja con su Mamá en la cafetería de una empresa. Ayer, conversando con sus amigos sobre los precios de sus productos, les mostró las siguientes boletas de pago:

4 hamburguesas 5 vasos de jugo Total: S/. 20	3 hamburguesas 4 vasos de jugo Total: S/. 15,50

a) Queremos saber cuánto pagaríamos por una hamburguesa y un vaso de jugo en la cafetería de Rodrigo.

b) Con 10 soles ¿cuántas hamburguesas y cuántos vasos de jugo podríamos comprar?

(4p)

3.- Dado el sistema de ecuaciones: **(6p)**

$$2x-y=5$$
$$4x-10=2y$$

a) Resuelve algebraica y gráficamente el sistema.

b) ¿Qué representa gráficamente la solución del sistema?

c) Determina si el sistema es compatible.

4.- Plantea un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, cuyo conjunto solución sea: $S=\{(-2,1)\}$. **(3p)**

5.- Buscando una fracción

Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción sería ½; pero, si a ambos términos se le resta 1, se obtendría 1/3. ¿Cuál es la fracción?

(4p)

ANEXO N º 07

MATRIZ DE EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **FILA C**

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	N° Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
a. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Determina si un sistema de ecuaciones lineales con dos variables es o no compatible.	15%	3p	1 - Ítem de V o F. 1 – Ítem de desarrollo	• Prueba Escrita.
	✓ Determina el número de soluciones que admite un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	10%	2p	1 - Ítem de Verdadero y Falso.	
	✓ Resuelve algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	25%	5p	2 – Ítem de desarrollo **(*)**	
	✓ Resuelve gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
b. Resuelve problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	✓ Resuelve un problema de traducción simple que involucra un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Resuelve un problema de contexto real que involucra un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	
c. Resuelve problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales con tres variables.	✓ Resuelve un problema de contexto real que involucra un sistema de ecuaciones lineales con tres variables.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Formula un problema que puede ser resuelto aplicando sistemas de ecuaciones lineales (con dos o tres variables).	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo**(*)** [84]	

[84] Entre las dos preguntas eligen sólo una de ellas.

ANEXO N º 08

ISTP "Simón Bolívar"
Matemática II

EVALUACIÓN SOBRE S.E.L.

FILA: C

ALUMNO(A): ____ FECHA: _____/_____/_____

A continuación tienes algunas preguntas acerca de los SEL Lee con atención antes de resolver, y no olvides explicar tus respuestas. (Tienes 60minutos).

1.- Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados. **(4p)**

a) El siguiente sistema de ecuaciones es compatible: ( )

$$x_1 - 2x_2 - 4 = 0$$
$$x_1 - 6x_2 - 12 = 0$$

b) Dado el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + ny = 6 \end{cases}$.

Si **n = 1** el sistema tiene infinitas soluciones.
( )

2.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - \dfrac{7y}{2} - 5 = 0 \end{cases}$.

(5p)

a) Determina su conjunto solución.
b) ¿Es compatible? ¿Por qué?
c) Describe su gráfica.

3.- Dado el sistema: **(3p)**

$$\frac{a+b-2}{3} = \frac{2a-3b+1}{5} = \frac{5a+2b}{6}$$

Calcula: $b^2 - a^2$.

4.- Un vagón lleno de cal pesa 27 toneladas.

Pero, lleno sólo hasta los 3/5 pesa los 7/4 del vagón vacío.

a) ¿Cuánto pesa el vagón vacío?
b) ¿Cuántos de esos vagones se necesitan para transportar 60 toneladas de cal? **(4p)**

5.- El año pasado, el señor Mendoza invirtió $ 5 000 a tres tasas de interés: al 6%, 7% y 8% anual respectivamente, obteniendo una utilidad total anual de $ 358. Si la utilidad de sus dos primeras inversiones fue $ 70 más que el de la tercera; ¿cuánto invirtió al 8%? **(4p)**

6.- Formula un problema que se pueda resolver usando sistemas de ecuaciones lineales. **(4p)**

ANEXO N º 09

MATRIZ DE LA EVALUACIÓN DE ENTRADA

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	N° Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
a. Resuelve inecuaciones lineales con dos variables.	✓ Representa gráficamente una inecuación lineal con dos variables.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	Prueba Escrita
	✓ Determina el número de soluciones que admite una inecuación lineal con dos variables.	5%	1p	1 – Ítem de desarrollo.	
	✓ Determina si un punto dado es o no solución de una inecuación lineal con dos variables.	5%	1p	1 – Ítem de desarrollo.	
	✓ Establece relación entre la solución de una inecuación lineal con dos variables y la ecuación asociada.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Expresa situaciones verbales a través de inecuaciones lineales.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Identifica la representación gráfica de una inecuación lineal.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
b. Maximiza funciones con dos variables en una región dada.	✓ Encuentra el máximo valor que alcanza una función en una región del plano coordenado.	15%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
c. Resuelve problemas de programación lineal.	✓ Resuelve un problema de programación lineal con dos variables y tres restricciones (además de las restricciones de positividad).	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Explica la solución encontrada.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N º 10

EVALUACIÓN DE ENTRADA

¿Qué conoces acerca de las inecuaciones lineales?

ALUMNO(A): ____ FECHA: ____/____/____

Intenta resolver la siguiente evaluación. Lee con mucha atención y resuelve con cuidado. (Tienes 60 minutos).

1.- Representa gráficamente la inecuación $2x + y < 5$.

a) ¿Cuántas soluciones tiene dicha inecuación?

b) ¿El origen de coordenadas es solución de la inecuación?

c) ¿Qué relación hay entre la gráfica de la ecuación $2x + y = 5$ y la de la inecuación $2x + y < 5$?

2.- Busca una expresión matemática que represente la expresión "*por lo menos 2*"?

3.- ¿Qué representa la inecuación $y > 4$ en el plano coordenado?

4.- Dado el cuadrilátero determinado por sus vértices (-5, 4), (-2, 0) (2, 3) (7, 7); ¿en qué punto de la región cuadrangular se maximiza la función $F = 5x + 6y$?

5.- **Un día de paseo…**

Se organiza un paseo al que han asegurado ir 600 personas, habiendo la posibilidad que se incorporen algunos más.

Para tal efecto, se ha aprobado la oferta de una empresa de transportes que dispone de 8 ómnibus de 60 asientos y 12 de 40 asientos.

El alquiler de un ómnibus grande cuesta S/. 480 y el de uno pequeño S/. 360. Nos interesa saber cuántos ómnibus hay que contratar de cada tipo para que dicho paseo resulte lo más económico posible.

ANEXO N º 11

MATRIZ DE LA EVALUACIÓN DE SALIDA

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	N° Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
a. Resuelve gráficamente inecuaciones lineales con dos variables demostrando un adecuado manejo del plano coordenado.	✓ Representa gráficamente una inecuación lineal con dos variables.	10%	4p	1 – Ítem de desarrollo	Prueba Escrita.
	✓ Determina si la recta frontera es o no parte de la solución de una inecuación lineal con dos variables.	2,5%	1p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Identifica la inecuación del semiplano opuesto.	2,5%	1p	1 – Ítem de desarrollo	
b. Resuelve gráficamente Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables.	✓ Representa gráficamente un sistema de inecuaciones lineales con dos variables.	15%	6p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Formula un sistema de inecuaciones lineales dada una región del plano y conociendo las ecuaciones de las rectas frontera.	20%	8p	1 – Ítem de desarrollo	
c. Resuelve problemas de programación lineal aplicando los sistemas de inecuaciones lineales.	✓ Identifica las variables y organiza los datos del problema.	7,5%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Expresa algebraicamente las restricciones y la función objetivo.	12,5%	5p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Determina la región factible.	7,5%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Determina los vértices de la región factible.	7,5%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Optimiza (maximiza o minimiza) una función lineal con dos variables conociendo los vértices de la región factible.	7,5%	3p	1 – Ítem de desarrollo	
	✓ Interpreta y explica la solución encontrada.	7,5%	3p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N º 12

ISTP “Simón Bolívar”
Matemática II

EVALUACION DE SALIDA

A

ALUMNO(A): ____ FECHA: ____/____/____

Lee con atención antes de resolver y dar la respuesta. (Tienes 60 minutos).

1.- Dada la inecuación $2x - y \leq 7$. **(6p)**

a. Representa gráficamente dicha inecuación.
b. ¿La recta frontera es parte de la solución? ¿Por qué?
c. Escribe la inecuación correspondiente al semiplano opuesto.

2.- Calcula el mínimo valor que toma la función $C = 5x - y$ en la región determinada por el sistema de inecuaciones: **(10p)**

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ 5x + 4y \leq 40 \end{cases}$$

3.- Dadas las ecuaciones $3x + y - 6 = 0$ y $3x + 4y + 8 = 0$.

Plantea un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región del plano comprendida entre estas dos rectas y el eje Y. **(8p)**

4.- **Tecnología peruana….!!!!** **(16p)**

La empresa “EL CHASQUI”, produce bicicletas y motocicletas, cada una de las cuales se procesa en dos centrales de máquinas.
La central de máquinas A tiene un máximo de 120 horas disponibles a la semana, mientras que la central de máquinas B, tiene un total de 180 horas disponibles por semana.

La manufactura de una bicicleta requiere 6 horas en la central de máquinas A y 3 horas en la central de máquinas B. Mientras que, la manufactura de una motocicleta requiere 4 horas en la central de máquinas A y 10 horas en la central de máquinas B.
Si la utilidad por bicicleta es de 45 soles y por motocicleta es de 55 soles; ¿cuántas bicicletas y motocicletas debería manufacturar la empresa, para obtener la máxima ganancia posible?

- ¿Es posible producir 20 bicicletas y 10 motocicletas semanales?
  Explica tu respuesta.

ANEXO N º 13

ISTP “Simón Bolívar”
Matemática II

EVALUACION DE SALIDA

B

ALUMNO(A): ______________________________ FECHA: ____/____/____

Lee con atención antes de resolver y dar la respuesta. (Tienes 60 minutos).

1.- Dada la inecuación $3x+2y<13$. **(6p)**

a. Representa gráficamente dicha inecuación.
b. ¿La recta frontera es parte de la solución? ¿Por qué?
c. Escribe la inecuación correspondiente al semiplano opuesto.

2.- ¿En qué punto de la región determinada por el siguiente sistema de inecuaciones, la función $P=4x+7y$ toma su mínimo valor. **(10p)**

$$\begin{aligned} &2x+3y\geq 6\\ &3x+5y\leq 30\\ &0\leq x\leq 7\\ &0\leq y\leq 4 \end{aligned}$$

3.- Grafica las ecuaciones $x+y=6$ y $y-2x=0$ en un mismo plano coordenado y plantea un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región triangular comprendida entre las dos rectas y el eje X. **(8p)**

4.- Conociendo el Perú **(16p)**

Una empresa de turismo ofrece pasajes de S/ 150 al Cuzco y permite llevar un equipaje de hasta 30 kilogramos.

Además realiza una promoción especial para deportistas ofreciendo el pasaje a S/. 100, pero con un equipaje máximo de 10 kilogramos.

Si los ómnibus de esta empresa tienen 60 asientos y una capacidad máxima de 1500 kilogramos de equipaje, ¿cuántos pasajes de cada clase le conviene ofrecer para optimizar su ganancia?
- ¿Cuál sería la oferta de pasajes si la capacidad del ómnibus fuera de 80 asientos?

ANEXO N º 14

ISTP "Simón Bolívar"
Matemática II

EVALUACION DE SALIDA

C

ALUMNO(A): ____ FECHA: ____/____/____

Lee con atención antes de resolver y dar la respuesta. (Tienes 60 minutos).

1.- Dada la inecuación $y \leq 3x + 4$. **(6p)**

a. Representa gráficamente dicha inecuación.
b. ¿La recta frontera es parte de la solución? ¿Por qué?
c. Escribe la inecuación correspondiente al semiplano opuesto.

2.- Calcula el mínimo valor que toma la función $G = 2x + 7y$ en la región determinada por el siguiente sistema de inecuaciones: **(10p)**

$$\begin{aligned} x + y &\leq 2 \\ 4x - 3y &< 12 \\ 7x - 2y + 5 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.- Dadas las ecuaciones $x + y - 5 = 0$ y $2x - y - 4 = 0$.
Plantea un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región del plano comprendida entre estas dos rectas y ambos ejes coordenados. **(8p)**

4.- **Naranjos y manzanos…** **(16p)**

Alejandro, un pequeño agricultor, quiere plantar entre 600 y 1 200 metros cuadrados de árboles frutales. Una parte de naranjos, cuyas cepas cuestan S/ 5 cada una, y otra parte de manzanos, cuyas cepas cuestan S/ 10 cada una.

Sus planes son destinar dos metros cuadrados a cada cepa de naranjo y un metro cuadrado a cada manzano. Además sólo dispone de S/ 7 000, de los cuales debe reservar S/ 1 000 para gastos de fertilizantes, insecticidas y otros.

a) ¿Cuántas cepas de naranjos y manzanos le conviene plantar para maximizar su ganancia, si sabe que por cada planta madura de naranjo obtiene en promedio una ganancia de 50 soles y por cada planta de manzano su ganancia es de 60 soles?

b) ¿Cuál sería la mayor ganancia que obtenga, si sólo le aprueban un préstamo de S/. 5 000, de los cuales sólo puede disponer de S/. 4 500?

ANEXO N º 15

CUESTIONARIO N° 01

EVALUACION DEL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Tu opinión respecto al desarrollo de las Actividades de Aprendizaje sobre los **"Sistemas de Inecuaciones Lineales y sus aplicaciones en la resolución de problemas de programación lineal"** es muy valiosa, porque nos permitirá mejorar la propuesta en el futuro, haciendo cada vez más significativo el aprendizaje de este tema. Por lo que te pedimos que contestes las preguntas con sinceridad y mucha seriedad.

I. INFORMACION PERSONAL: **Escriba una (x) para indicar su situación:**

1.1 Sexo:
a) Masculino ( ) b) Femenino ( )

1.2 Edad:
a) Hasta 17 años ( )
b) De 18 a 22 ( )
c) De 23 a 27 ( )
d) De 28 a 32 ( )
e) De 33 a más ( )

1.3 Estado civil:
a) Soltero ( )
b) Casado o conviviente ( )
c) Otro: ________________________

1.4 Lugar de domicilio:
a) Bellavista ( )
b) Callao - Cercado ( )
c) Ventanilla ( )
d) Carmen de la Legua ( )
e) Otro: ________________________

1.5 Lugar de nacimiento:
a) Callao ( )
b) Lima ( )
c) Otro: ________________________

1.6 Tipo de Institución Educativa donde terminó la secundaria:
a) Público ( ) b) Privado ( )

1.7 Para ingresar al Instituto, se preparó:
a) En la Academia del Instituto ( )
b) En otros Centros Pre-universitarios ( )
c) Por su cuenta ( )
d) No se preparó. ( )

1.8 Si se preparó en alguna Institución, ¿cuánto tiempo duró su preparación?
a) De 1 a 3 meses ( )
b) Medio año ( )
c) Un año ( )
d) Más de un año ( )

1.9 Forma de Ingreso al Instituto:
a) Examen de Admisión. ( )
b) Exonerado por Primeros puestos. ( )
c) Exonerado por Título Profesional. ( )
d) Exonerado por convenio. ( )
e) Otra. ¿Cuál?___________________

1.10 Número de asignaturas desaprobadas en el semestre anterior:
a) Uno o ninguno ( ) b) De 2 a 4 ( )
c) 5 ó más ( ) d) Repite ( )

1.11 Tiempo dedicado al estudio fuera de clase (por semana).
a) No dispone de tiempo ( )
b) Hasta 5 horas ( )
c) De 6 a 10 ( )
d) De 11 a 15 ( )
e) De 16 a más ( )

1.12 Actividad que realiza, en forma paralela a sus estudios:
a) Trabaja ( )
b) Estudia otra carrera ( )
c) Estudia Idiomas ( )
d) Ninguna actividad específica ( )
e) Otra. ¿Cuál? ___________________

II.- Califique las preguntas marcando un aspa (x) en el casillero correspondiente. Utilice la escala del 1 al 5, en la que 1 es el mínimo puntaje y 5 es el máximo.

A.- ¿Cuál es su apreciación respecto a las actividades desarrolladas?

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	¿Las actividades planteadas fueron interesantes y motivadoras?					
2	¿Las actividades propuestas fueron pertinentes y suficientes para lograr los objetivos planteados?					
3	¿Las actividades planteadas fueron útiles en la comprensión de los conceptos?					
4	¿La secuencia de las actividades ha sido adecuada?					
5	¿Las actividades propuestas se relacionan con situaciones de la vida cotidiana?					
6	¿Se tomaron en cuenta los aportes de los alumnos para elaborar los conceptos y los procedimientos?					
7	¿Los temas se trataron con amplitud y profundidad?					
8	¿El trabajo en equipo ha sido importante en tu aprendizaje?					
9	¿El material que se usó en clase te ayudó a desarrollar las actividades y lograr los objetivos?					
10	¿Las orientaciones para desarrollar las actividades fueron claras?					
11	¿El tiempo asignado a cada actividad fue suficiente?					
12	¿El apoyo de la profesora fue adecuada y oportuna?					
13	¿Los conocimientos que tenías fueron suficientes para desarrollar estas actividades?					
14	¿Piensas que las actividades de refuerzo propuestas fueron útiles para afianzar los conocimientos adquiridos en el aula?					
15	¿Consideras que las evaluaciones han sido útiles para identificar y corregir tus errores oportunamente?					
16	¿La bibliografía recomendada te ha sido útil?					
17	¿Consideras que el tema desarrollado es aplicable a tu carrera profesional?					
18	¿Estas actividades te han permitido asumir un mayor compromiso con tu aprendizaje?					
19	¿En qué nivel crees haber logrado los objetivos?					
20	¿Cuál es tu valoración respecto a la forma de desarrollo del tema?					

B. ¿En qué medida estas actividades te han permitido desarrollar las siguientes actitudes y habilidades?

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Compromiso con tu aprendizaje.					
2	Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas establecidas.					
3	Perseverancia en la solución de los problemas.					
4	Actitud positiva frente al aprendizaje de la matemática.					
5	Deseos de Superación.					
6	Capacidad de razonamiento y análisis.					
7	Capacidad de aprender por ti mismo.					

C. ¿En qué medida cree haber logrado los objetivos de las actividades desarrolladas?

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos variables.					
2	Plantear la inecuación correspondiente a un semiplano conociendo la ecuación de su frontera.					
3	Resolver gráficamente Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables.					
4	Plantear sistemas de inecuaciones lineales con dos variables correspondientes a determinadas regiones del plano, conociendo sus fronteras.					
5	Identificar las restricciones y la función objetivo en un problema de programación lineal.					
6	Expresar algebraicamente las restricciones y la función objetivo.					
7	Determinar la región de soluciones factibles.					
8	Determinar los vértices de la región factible.					
9	Optimizar una función lineal.					
10	Formular problemas de programación lineal.					
11	Interpretar la solución de un problema de programación lineal.					
12	Definir conceptos relacionados a los sistemas de inecuaciones lineales y a la programación lineal.					

OBSERVACIONES O SUGERENCIAS:

____
____
____
____
____
____
____

ANEXO N º 16

GUIA DE ENTREVISTA Nº 01

UN ESTUDIO DIDACTICO DE LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES A LA PROGRAMACION LINEAL EN EL ISTP "SIMON BOLIVAR"

Estimado(a) colega:
Le agradeceremos responder a esta breve entrevista, que tiene como propósito obtener datos que ayuden a identificar los logros y dificultades en la enseñanza de los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal, que sirvan de base para proponer estrategias de enseñanza que permitan mejorar el aprendizaje de este tópico de la matemática.

Muchas gracias por su colaboración.

I.- Generalidades.- Informantes: Docentes de matemática del ISTP "Simón Bolívar".

1.1 **Sexo**:
a) Masculino ( ) b) Femenino ( )

1.2 **Edad**:
a) Hasta 30 años ( )
b) De 31 a 40 ( )
c) De 41 a 50 ( )
d) De 51 a más. ( )

1.3 **Condición laboral**:
a) Nombrado 40h ( )
b) Nombrado 30h ( )
c) Contratado TC ( )
d) Contratado TP ( )

1.4 **Tiempo de servicios en la docencia**:
a) De 0 a 5 años ( )
b) De 6 a 10 ( )
c) De 11 a 15 ( )
d) De 16 a 20 ( )
e) 21 ó más ( )

1.5 Tiempo de servicios en educación superior:
a) De 0 a 5 años ( )
b) De 6 a 10 ( )
c) De 11 a 15 ( )
d) De 16 a 20 ( )
e) 21 ó más ( )

1.6 Título profesional:
a) Profesor ( )
b) Lic. en Educación ( )
c) Ingeniero ( )
d) Otro ( ) ¿Cuál? _______________

1.7 Estudios de postgrado:
a) Diplomado ( )
b) Segunda especialización ( )
c) Maestría ( )
d) Doctorado ( )
e) Otro ( ) ¿Cuál? _____________

II.- Sobre la enseñanza de los sistemas de inecuaciones lineales y la programación lineal.

2.1.- ¿La programación lineal formó parte del Plan de estudios de su carrera?
a) Sí ( ) b) No ( )

2.2.- En el caso que no, ¿en qué circunstancias lo estudió?
____
____

2.3.- ¿Ha tenido la oportunidad de desarrollar el tema de Sistemas de Inecuaciones Lineales y Programación Lineal con sus alumnos?
a) Totalmente como está programado ( ) b) Sólo parcialmente ( )
c) No lo desarrolló ( )

2.4.- Si no ha desarrollado el tema, ¿cuál fue la razón?

a) Por las limitaciones de tiempo ( )

b) Porque considera que el tema no es muy importante. ( )

c) Porque es un tema difícil para los alumnos. ( )

d) Otra razón. ¿Cuál? ……………………………………………………………………

En caso de haber desarrollado el tema:

2.5.- En general, considera que el desarrollo del tema fue:

a) Fácil ( ) b) Medianamente fácil ( ) c) Difícil ( )

2.6.- Los logros alcanzados en el aprendizaje de la programación lineal por parte de sus alumnos, en general, considera que fueron:

a) Satisfactorios ( ) b) Algo satisfactorios ( ) c) Insatisfactorios ( )

2.7.- ¿Qué dificultades presentan los alumnos en el aprendizaje de la programación lineal?

____

____

2.8.- Según su criterio, ¿qué conocimientos previos necesitan los alumnos para desarrollar la programación lineal?

____

____

2.9.- ¿Qué bibliografía recomendó a sus alumnos sobre el tema?

____

____

2.10.- ¿Considera que la bibliografía de consulta sobre el tema es accesible al docente?

a) Sí ( ) b) No ( )

2.11.- ¿Y a los estudiantes? a) Sí ( ) b) No ( )

2.12.- Según su criterio, ¿cuál es la utilidad de la programación lineal en la formación de los estudiantes del Instituto?

____

____

2.13.- ¿Considera que el tema es especialmente importante para los alumnos de alguna(s) especialidad(es) en particular?

____

____

2.14.- ¿Considera pertinente la permanencia de la programación lineal en el Silabo de Matemática II, o cree que debería reemplazarse por otro? Explique su respuesta.

____

____

- Le agradeceremos hacer un comentario adicional respecto a la enseñanza de la programación lineal.

____

____

ANEXO N º 17

FICHA DE OBSERVACION

TEMA: SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SU APLICACIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

SESIÓN 1: ___/___/___ SESIÓN 2: ___/___/___/ SESIÓN 3: ___/___/___ SESIÓN 4: ___/___/___/

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad logran desarrollar los alumnos sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitan apoyo)	OBSERVACIONES
01			
02			
03			
04			
05			
06			
07			

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad logran desarrollar los alumnos sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitan apoyo)	OBSERVACIONES
08			
09			
10			
11			
12			
13			
14			

OBSERVACIONES GENERALES O SUGERENCIAS:

………

………

………

Responsable de la observación: ______________________________

ANEXO N º 18

FICHA DE AUTOEVALUACION

ALUMNO(A): ____ GRUPO Nº: __________ TAQ II - D

TEMA: SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SU APLICACIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	COMENTARIOS (Qué te pareció la actividad)
01			
02			
03			
04			
05			
Aplico lo aprendido Nº 1			

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	COMENTARIOS (Qué te pareció la actividad)
06			
07			
08			
09			
Aplico lo aprendido N° 2			
10			
11			
12			
13			

ACTIVIDAD	**LOGROS** (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	**DIFICULTADES** (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	**COMENTARIOS** (Qué te pareció la actividad)
14			
Aplico lo aprendido N°3			

OBSERVACIONES GENERALES

ASPECTOS POSITIVOS:

……

……

……

ASPECTOS A MEJORAR:

……

……

……

SUGERENCIAS:

……

……

Fecha: ____/____/____

ANEXO N º 19

ISTP "SIMON BOLIVAR" - 2007-II

FICHA DE COEVALUACION

ESCALA	VALORACIÓN
2	SI
1	A VECES
0	NO

GRUPO N° __________ **SESIÓN N°:** ____________________ **FECHA:** ___/___/___

N°	INDICADORES	INTEGRANTES					
1	Muestra interés en la organización del grupo.						
2	Muestra iniciativa en el desarrollo de las actividades.						
3	Demuestra responsabilidad en el trabajo de grupo.						
4	Es perseverante en la búsqueda de la solución.						
5	Demuestra originalidad al plantear soluciones.						
6	Comparte sus conocimientos con sus compañeros.						
7	Muestra seguridad en la solución de las situaciones planteadas.						
8	Respeta y valora la opinión de sus compañeros.						
9	Expresa sus ideas sin agredir a los demás.						
10	Cumple con las tareas asignadas.						
PUNTAJE							

COMENTARIOS:

A: Acerca del desempeño del grupo

…….

……

……

……

……

B: Acerca de las Actividades de Aprendizaje

……

……

……

……

……

Coordinador de grupo: ____