

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



Control Óptimo Estocástico de una Cuenta Individual de Capitalización en el Sistema Privado de Pensiones del Perú

Tesis para optar por el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas con mención en Procesos Estocásticos

Autor:

Ranú Castañeda Medina

Asesor:

Loretta Betzabe Rosa Gasco Campos

Co-asesor:

Luis Carlos Chávez Bedoya Mercado

LIMA-PERÚ

2021

“Puedes ser testigo ó puedes cambiar el sentido.”

EB



Agradecimientos

Mi más profundo agradecimiento a mis dos tutores, la Dra. Loretta Gasco Campos y mi amigo el Dr. Luis Carlos Chávez-Bedoya. Sin su enorme apoyo y paciencia, no habría sido posible concluir el presente trabajo.



Índice general

Agradecimientos	II
Índice de Figuras	V
Índice of Cuadros	VI
Resumen	VIII
Abstract	IX
1. Introducción	1
2. Teoría de control óptimo estocástico	3
2.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	3
2.2. Control óptimo estocástico	5
3. Modelo para la acumulación de riqueza de una cuenta individual de capitalización (CIC) bajo cargos administrativos constantes	9
3.1. Definiciones introductorias	10
3.2. Modelo general para la acumulación de riqueza en una CIC	10
3.3. Modelo general para la acumulación de riqueza en una CIC afecta de cargos administrativos	12
4. Modelo para la acumulación de riqueza de una cuenta individual de capitalización (CIC) bajo cargos administrativos variables	13
4.1. Definiciones introductorias	13
4.2. El problema con cargos y aportes variables	14
4.2.1. Portafolio óptimo	15
4.3. Portafolio óptimo utilizando determinadas funciones de utilidad	16
4.3.1. Utilidad potencia	16
4.3.2. Utilidad exponencial	22
4.4. Valor esperado de la riqueza del aportante $X^*(t)$	25
4.4.1. Utilidad potencia	25
4.4.2. Utilidad exponencial	27
4.5. Equivalentes de certeza	27
4.5.1. Utilidad potencia	27
4.5.2. Utilidad exponencial	28
4.6. Límites de los equivalentes de certeza	29

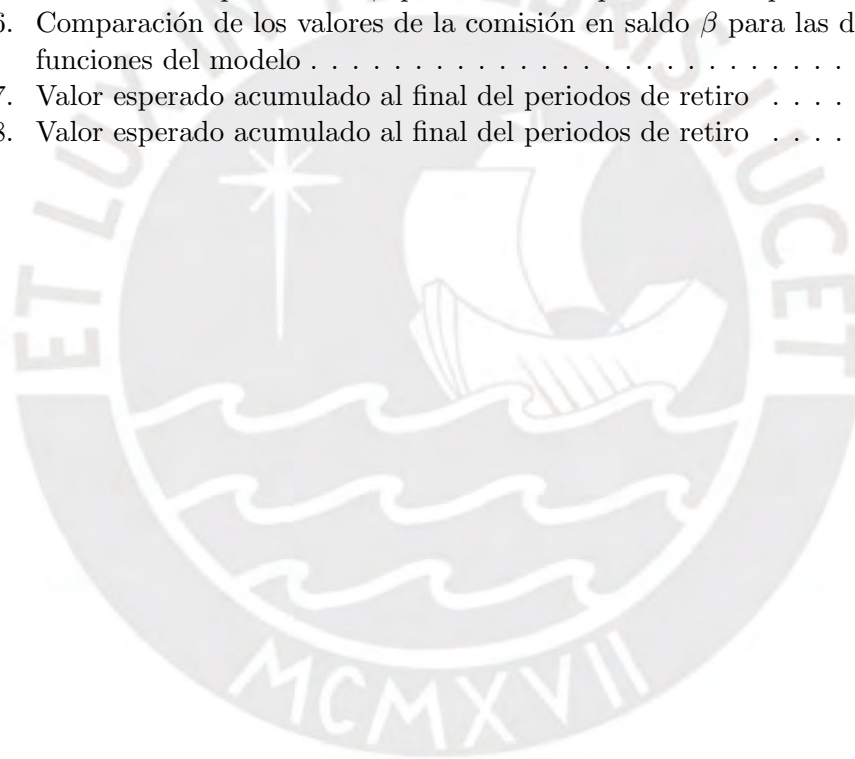
4.6.1.	Utilidad potencia	29
4.6.2.	Utilidad exponencial	30
4.7.	Comparación de cargos administrativos	31
4.7.1.	Utilidad potencia	31
4.7.2.	Utilidad exponencial	32
4.8.	Análisis de las funciones determinísticas del modelo	32
4.8.1.	Comisión por saldo $\beta(t)$	33
4.8.2.	Tasa de contribución mensual $\theta(t)$	35
4.9.	Análisis del valor esperado de la riqueza óptima del aportante en base a las funciones determinísticas propuestas	44
4.9.1.	Utilidad Potencia	44
4.9.2.	Utilidad Exponencial	45
5.	Aplicación numérica	46
5.1.	Aplicación numérica para la comisión por saldo	46
5.1.1.	Parámetros del modelo	46
5.1.2.	Aplicación numérica para $\beta_e(t)$	47
5.1.3.	Aplicación numérica para $\beta_f(t)$	47
5.1.4.	Comparación entre funciones candidatas $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$	48
5.2.	Aplicación numérica para la tasa de contribución	52
5.2.1.	Parámetros del modelo	52
5.2.2.	Aplicación numérica para $\theta_e(t)$	52
5.2.3.	Aplicación numérica para $\theta_r(t)$	53
5.2.4.	Comparación numérica de los valores de la comisión en saldo θ	56
5.3.	Aplicación numérica para la expeanza de la riqueza del aportante	56
5.3.1.	Parámetros del modelo	56
5.3.2.	Utilidad potencia	57
5.3.3.	Utilidad exponencial	58
Conclusiones		59
A. Anexo		61
B. Anexo		68
Bibliografía		70

Índice de figuras

4.1. Dinámica para la función candidata que modela la comisión en saldo . . .	34
4.2. Dinámica para la función candidata que modela la contribución mensual	37
4.3. Dinámica para la función candidata que modela la contribución mensual	42
5.1. β vs. T	47
5.2. c vs. T	48
5.3. Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=540$ meses	49
5.4. Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=480$ meses	49
5.5. Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=456$ meses	49
5.6. Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=420$ meses	50
5.7. Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=384$ meses	50
5.8. Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=348$ meses	50
5.9. Comisión por saldo β_e anual para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540	51
5.10. Comisión por saldo β_f anual para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540	52
5.11. Evolución de la tasa de contribución del aportante a , $\theta_r^a(t)$ ($\theta_0 = 85$) para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540 meses	54
5.12. Evolución de la tasa de contribución del aportante b , $\theta_r^b(t)$ ($\theta_0 = 200$) para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540 meses	55
5.13. Evolución del valor esperado de la riqueza del aportante $E[X(t)]$ para $T=420, 456, 480$ y 540 meses de aporte	57
5.14. Evolución del valor esperado de la riqueza del aportante $E[X(t)]$ para $T=420, 456, 480$ y 540 meses de aporte	58

Índice de cuadros

2.1. Resumen de condiciones para la aplicación del teorema de verificación . . .	8
5.1. Comisión por saldo: $\beta_e(t)$ para diferentes periodos de retiro	47
5.2. Comisión por saldo: $\beta_f(t)$ para diferentes periodos de retiro	48
5.3. Comisión por saldo: $\beta_c(t)$ para diferentes periodos de retiro	53
5.4. Valores de los parámetros θ para diferentes periodos de aporte	54
5.5. Valores de los parámetros β para diferentes periodos de aporte	55
5.6. Comparación de los valores de la comisión en saldo β para las diferentes funciones del modelo	56
5.7. Valor esperado acumulado al final del periodos de retiro	57
5.8. Valor esperado acumulado al final del periodos de retiro	58



A todos los que me animaron a retomar mi camino.



Resumen

El presente trabajo estudia los efectos de los cargos administrativos en saldo y/o en flujo que aplica una administradora de fondos de pensiones sobre una cuenta de retiro individual durante el periodo de acumulación. Los cargos administrativos y el aporte mensual del contribuyente son modelados a través de funciones determinísticas, continuas y acotadas en un intervalo de tiempo $[0, T]$ con $T \in \mathbb{R}$; y luego, haciendo uso de la teoría de control óptimo estocástico, se establece un problema de programación dinámica mediante el cual maximizamos la utilidad esperada de la riqueza terminal del aportante. La solución del problema antes mencionado nos permite obtener expresiones analíticas que relacionan los parámetros del modelo. Así mismo, se han propuesto funciones candidatas para cada uno de los parámetros que estamos modelando, los cuales fueron ajustados a la realidad de los sistemas pensionarios y que a su vez permitan la tractabilidad analítica del modelo. Particularmente, se abordó el caso de la comisión por saldo y de la tasa de contribución, llegando a proponer funciones que se ajustan a nuestros requerimientos teóricos y prácticos.

Finalmente, para la aplicación numérica del modelo se usó como caso particular al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP), tomando como punto de partida los actuales valores de las comisiones y ratios. Posteriormente, se muestra la dinámica de la comisión en saldo, ajustada a diferentes periodos de acumulación, en relación a la comisión en flujo. De esta manera, la aplicación de este trabajo en el SPP es muy útil como herramienta de *benchmarking*.

Abstract

In this investigation it is studied the effects of the administrative charges on balance and/or on flow which have been applied by the Pension Fund Administrator (PFA) over an individual retirement account (IA) during the accumulation phase. The administrative charges and the monthly contribution of the participant are modeling using deterministic functions which are continue and bounded in a time interval of time $[0, T]$ with $T \in \mathbb{R}$. Then, through the theory of optimal stochastic control it is defined a dynamic programming problem to maximize the terminal wealth of the participant. Then, the solution of the problem aforementioned provides analytical expressions which relate the parameters of our model. In addition, it was proposed some candidate functions for each one of the parameters that are being modeled. These parameters were adjusted in a practical way to the pension systems, allowing the analytical tractability of the model. Particularly, it was studied the case of the charge on balance and the contribution rate, proposing functions which are adjusted to our theoretical and practical requirements.

Finally, for the numerical application of the model, the Peruvian Private System (PPS) was used, taking as basis the current values of the commissions and rates. Later, it is showed the dynamic of the charge on balance, using different accumulation periods, in comparison to the charge on flow. In this way, the application of this investigation in the PPS is very useful as a benchmarking tool.

Keywords: Optimal control, Asset allocation, Asset and liability management

Capítulo 1

Introducción

En el Perú existen dos tipos de sistemas de administración de fondos de pensiones. El primero de ellos es el Sistema Nacional de Pensiones (SNP), cuyo servicio es brindado por el estado peruano a través de la Oficina de Normalización Previsional (ONP) y cuya principal característica es que los fondos administrados tienen un carácter solidario; es decir, que los aportes de todos los contribuyentes van a un fondo común, que es de propiedad de todos los aportantes y que será utilizado para asumir los costos pensionarios de cada uno de los aportantes que acceden a la jubilación. El segundo sistema de administración de fondos de pensiones, es el Sistema Privado de Pensiones (SPP), implantado en el año 1992, cuyo servicio es brindado a través de las Administradoras de Fondo de Pensiones (AFPs), cuya principal característica es que los aportes de cada contribuyente son individuales; es decir, van a una Cuenta Individual de Capitalización (CC), la cual es de propiedad única de cada aportante.

Dentro de los sistemas pensionarios vigentes se considera generalmente el esquema en el que los contribuyentes, a través de su empleador, realizan aportes mensuales que están en proporción directa a los ingresos que perciben como trabajadores dependientes. Para el caso del SPP estos aportes son invertidos por las AFPs en una serie de activos con distintos niveles de riesgo, con el objetivo de lograr que las ganancias que generen las inversiones de los activos produzcan una pensión razonable para el afiliado. Por otro lado, debemos tener en cuenta que esta riqueza es afectada por los cobros de comisiones que realizan las AFPs a manera de costos de administración. En el SPP actualmente coexisten dos tipos de comisiones, la comisión por saldo y la comisión por flujo. La aplicación de una u otra tiene un efecto directo sobre la riqueza del aportante y existe mucho debate sobre cual de las dos resulta más o menos beneficiosa.

El punto de partida para el presente trabajo de investigación es la maximización de la utilidad esperada de la riqueza terminal del aportante. Para ello, tomaremos como referencia a Devolder et al. (2012), quienes desarrollan un modelo para la acumulación de riqueza en una CIC, utilizando técnicas de la teoría de control óptimo estocástico. La segunda referencia fundamental es el trabajo de Chavez-Bedoya (2016), donde se analiza el impacto de las comisiones administrativas sobre la riqueza del aportante pero, cuando estas son constantes en el tiempo.

Nuestro principal objetivo es estudiar la dinámica de las comisiones administrativas cobradas por las AFPs, ya que el cobro de éstas, tiene un efecto directo sobre la riqueza del aportante. Entonces, el presente trabajo busca establecer funciones determinísticas, continuas y acotadas en un intervalo $[0, T]$, con $T \in \mathbb{R}$, que describan la dinámica de las comisiones de administración, sin dejar de lado la maximización de la utilidad esperada final del aportante. Tales funciones se convierten en una herramienta de *benchmarking* de gran utilidad ya que nos permite comparar las comisiones y estudiar cual de las dos es mas beneficiosa para el aportante.

Para alcanzar este objetivo, el trabajo de investigación inicia en el Capítulo 2, donde se presenta la teoría de control óptimo estocástico, que es la herramienta fundamental para el desarrollo del presente documento. En el Capítulo 3, se presenta el trabajo de Chavez-Bedoya (2016), que plantea el desarrollo del modelo para la acululación de la riqueza de un aportante considerando la aplicación de las comisiones cobradas por las AFPs. En el Capítulo 4, se realiza una generalización del trabajo de Chavez-Bedoya (2016), al definir las comisiones administrativas y los aportes al fondo como funciones y con ello planteamos la solución del problema de maximización de la utilidad esperada terminal. Posteriormente en el Capítulo 5, con la base del anterior, proponemos funciones que describen la dinámica real de las comisiones administrativas de acuerdo al panorama de pensiones actual, realizando una aplicación numérica de los resultados, tomando en cuenta los valores actuales del SPP.

Capítulo 2

Teoría de control óptimo estocástico

El Control Óptimo Estocástico es una técnica matemática que nos permite resolver problemas de optimización de sistemas dinámicos en el tiempo, los cuales son perturbados mediante variables de control en un entorno de incertidumbre. Particularmente, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es un método de programación dinámica, que se basa en la definición de una función, llamada *de valor*, la que es optimizada para lograr un valor mínimo o máximo según corresponda. Este principio es de vital importancia para nuestro estudio, puesto que lo trabajaremos usando funciones de valor que describirán la utilidad terminal de la CIC del afiliado con el objetivo de lograr la maximización de su utilidad esperada de riqueza terminal.

Este capítulo se ha desarrollado en base al capítulo 1 de (Kraft (2004)) y aborda dos temas importantes que constituyen la base matemática para nuestra investigación. El primer tema es el relacionado a las *Ecuaciones Diferenciales Estocásticas*, particularmente se especifica la *Existencia y Unicidad* y la *Estimación de Momentos*. El segundo tema considerado es el *Control Óptimo Estocástico* que incluye las *Condiciones de Control Admisible* y el *Teorema de Verificación*.

2.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ bajo las condiciones usuales. En este espacio y bajo esa filtración se define el proceso m -dimensional $\{(W(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0, \infty)}$ como movimiento Browniano.

Proposición 2.1. (*Variación de constantes*). Sean $x \in \mathbb{R}$ y A, \tilde{A}, B_j y $\tilde{B}_j, j = 1, \dots, m$, procesos estocásticos de valor real progresivamente medibles con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ que cumplen las condiciones de integrabilidad

$$\int_0^t (|A(s)| + |\tilde{A}(s)|) ds < \infty \text{ c.s. para todo } t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\int_0^t (|B_j(s)|^2 + |\tilde{B}_j(s)|^2) ds < \infty \text{ c.s. para todo } t \geq 0. \quad (2.2)$$

Entonces la EDE lineal no homogénea

$$dX(t) = (A(t)X(t) + \tilde{A}(t))dt + \sum_{j=1}^m (B_j(t) + \tilde{B}_j(t))dW_j(t) \quad (2.3)$$

con condición inicial $X(0) = x$ tiene la solución Lebesgue \otimes P-única $\{(X(t), \mathcal{F}_t)\}_{t \geq 0}$

$$X(t) = Z(t) \left(x + \int_0^t \frac{1}{Z(s)} (\tilde{A}(s) - \sum_{j=1}^m B_j(s)\tilde{B}_j(s)) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \frac{\tilde{B}_j(s)}{Z(s)} dW_j(s) \right), \quad (2.4)$$

donde

$$Z(t) = e^{\int_0^t (A(s) - \frac{1}{2}|B(s)|^2) ds + \int_0^t B(s)dW(s)} \quad (2.5)$$

es la solución de la EDE lineal homogénea

$$dZ(t) = Z(t)[A(t)dt + B(t)dW(t)] \quad (2.6)$$

con $Z(0) = 1$.

Demostración: la demostración puede ser encontrada en (Ralf Korn, 2001, p. 55).

Para el caso de una EDE no lineales de la forma

$$dX(t) = A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW(t), \quad (2.7)$$

donde $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$, $A : \bar{Q}_0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $B : \bar{Q}_0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k \times m}$, $m \in \mathbb{N}$, para $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$ y siendo $Q_0 = [t_0, t_1) \times \mathbb{R}^k$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. (*Existencia y Unicidad*). Suponga que para cada $x \in \mathbb{R}^k$, $A(\cdot, x, \cdot)$ y $B(\cdot, x, \cdot)$ son progresivamente medibles con respecto a $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, \infty)}$ sobre $[t_0, t_1]$. Suponga además que existe una constante K y procesos g y h tales que para todo $s \in [t_0, t_1]$, $x, y \in \mathbb{R}^k$, se cumplen las condiciones de Lipschitz globales

$$|B(s, x) - B(s, y)| \leq K|x - y|, \quad (2.8)$$

$$|A(s, x) - A(s, y)| \leq K^2|x - y|,$$

las condiciones de crecimiento

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|B(s, x)|^2 &\leq g(s)^2 + K^2|x|^2, \\ |A(s, x)| &\leq h(s)^2 + K^2|x|,\end{aligned}\tag{2.9}$$

y las condiciones de integrabilidad

$$E\left(\int_s^{t_1} g(s)^\rho + h(s)^\rho ds\right) < \infty, \text{ para todo } \rho > 0.\tag{2.10}$$

Entonces la ecuación (2.7) tiene una solución única, es decir para dos soluciones arbitrarias $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ se obtiene $P(X^{(1)}(t) = X^{(2)}(t), \forall t \in [t_0, t_1]) = 1$.

Demostración: la demostración puede ser encontrada en (Krylov, 1980, p. 85).

Teorema 2.2. (*Estimación de momentos*). Si se mantienen las condiciones del Teorema (2.1), entonces para cada solución de la ecuación (2.7) y cada $\rho \geq 2$ existe una constante $N = N(\rho, K) > 0$ tal que

$$E\left(\left(\sup_{s \in [t, t_1]} |X(s)|\right)^\rho\right) \leq N|x_0|^\rho + N(t_1 - t)^{\frac{1}{2}\rho-1} e^{N(t_1-t)} E\left(\int_t^{t_1} (|x_0|^\rho + g(s)^\rho + h(s)^\rho) ds\right),\tag{2.11}$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Demostración: la demostración puede ser encontrada en (Wendell H. Fleming, 2006, p. 397).

2.2. Control óptimo estocástico

Establecemos el problema general de control óptimo estocástico sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ bajo las condiciones usuales. Sea el proceso de estados $X = \{X_t, t \in [t_0, t_1]\}$, con $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$ fijos, definido en (Ω, \mathcal{F}, P) . La dinámica de este proceso depende de un movimiento Browniano estándar m -dimensional W respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y es controlado por un proceso u . Esta dinámica que comienza en $X_0 = x_0$ es descrita por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned}dX_t &= \Lambda(t, X_t, u_t)dt + \Sigma(t, X_t, u_t)dW_t, t \in [t_0, t_1] \\ X_0 &= x_0 > 0.\end{aligned}\tag{2.12}$$

El control $u = u(t), t \in [t_0, t_1]$ es un proceso progresivamente medible con valores en un conjunto cerrado $U \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Sea $Q_0 = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Asumimos que los coeficientes $\Lambda : \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Sigma : \bar{Q}_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, son funciones continuas y que para

todo $v \in U$, las funciones $\Lambda(\cdot, \cdot, v)$ y $\Sigma(\cdot, \cdot, v)$ pertenecen a $C^1(\bar{Q}_0)$.

La solución a la EDE controlada (2.12) para un control fijo u será denotada por X^u y el valor esperado con respecto a $P_{t,x}$, medida P condicionada al punto inicial (t, x) , mediante $E^{t,x}$.

Definición 2.1. (*Control admisible*). Diremos que el proceso de control $u = u(t), t \in [t_0, t_1]$ es un control admisible si

- I. Para cualquier punto inicial (t_0, x_0) la ecuación (2.12) admite una solución única.
- II. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple la condición de integrabilidad

$$E \left(\int_{t_0}^{t_1} |u(s)|^k ds \right) < \infty. \quad (2.13)$$

- III. El proceso X^u satisface

$$E^{t_0, x_0} \left(\sup_{s \in [t_0, t_1]} |X^u(s)|^k \right) < \infty \quad (2.14)$$

Denotaremos como \mathcal{U}^{t_0, x_0} al conjunto de todos los controles admisibles con punto inicial (t_0, x_0) .

Para garantizar la existencia de una solución única para la ecuación (2.12) las funciones Λ y Σ deben cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} |\Lambda_t| + |\Lambda_x| &\leq C, \\ |\Sigma_t| + |\Sigma_x| &\leq C, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} |\Lambda(t, x, v)| &\leq C(1 + |x| + |v|), \\ |\Sigma(t, x, v)| &\leq C(1 + |x| + |v|), \end{aligned} \quad (2.16)$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}$ y $v \in U$, donde $C > 0$ es una constante.

Si un control u cumple con estas condiciones y con (2.13), entonces u es un control admisible.

Dado el conjunto abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. En caso de que $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}^n$ se asume que la frontera $\partial\mathcal{O}$ es compacta, $(n-1)$ -dimensional variedad C^3 . Se define $Q := [t_0, t_1] \times \mathcal{O}$. Sean L and Ψ funciones a valores reales continuas definidas sobre $\bar{Q} \times U$ y \bar{Q} respectivamente, tales que para una constante $k \in \mathbb{N}$ y una constante $C > 0$ se cumplen las condiciones de crecimiento polinomial

$$|L(t, x, v)| \leq C(1 + |x|^k + |v|^k), \quad (2.17)$$

$$|\Psi(t, x)| \leq C(1 + |x|^k). \quad (2.18)$$

La función L la denominaremos función de pago en ejecución, la cual es de clase C^2 respecto a x y clase C^1 respecto a t ; la función Ψ será la función de utilidad en el estado final.

El propósito es determinar un control admisible u para un valor inicial fijo (t_0, x_0) tal que maximice el funcional de utilidad

$$J(t_0, x_0, u) = E^{t_0, x_0} \left[\int_{t_0}^T L(s, X_s^u, u_s) ds + \Psi(T, X_T^u) \right]. \quad (2.19)$$

Definimos la función valor $V(\cdot, \cdot)$ mediante

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}^{t,x}} J(t, x, u), \quad (2.20)$$

utilidad máxima dada la condición inicial (t, x) .

El problema de control óptimo dado el punto de inicio del proceso (t, x) está dado por

$$\sup_{u \in \mathcal{U}^{t,x}} E \left[\int_t^T L(s, X_s^u, u_s) ds + \Psi(T, X_T^u) \right] \quad (2.21)$$

sujeto a

$$\begin{cases} dX_s^u = \Lambda(s, X_s^u, u_s) ds + \Sigma(s, X_s^u, u_s) dW_s, s \in [t, T] \\ X_t^u = x. \end{cases} \quad (2.22)$$

Definimos el operador A del siguiente modo. Para cada $G \in C^{1,2}(Q)$ y cada $v \in U$, sea

$$A^v G(t, x) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \Sigma^2(t, v, x) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, x) + \Lambda(t, x, v) \frac{\partial G}{\partial x}(t, x), \quad (2.23)$$

donde $(t, x) \in Q$.

Teorema 2.3. (*Teorema de Verificación*). Supongamos que las funciones Λ y Σ de la EDE (2.22) controlada satisfacen las condiciones (2.15), (2.16) y las funciones L y Ψ satisfacen las condiciones (2.17) y (2.18). Sea $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$ una función que satisfice

I. Condición de crecimiento

$$|G(t, x)| \leq K(1 + |x|^k), K > 0 \text{ y } k \in \mathbb{N}, \text{ constantes.} \quad (2.24)$$

II. G resuelve la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\sup_{v \in U} \{A^v G(t, x) + L(t, x, v)\} = 0, (t, x) \in Q \quad (2.25)$$

$$G(T, x) = \Psi(T, x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

Entonces, se cumple que

1. $G(t, x) \geq J(t, x, u)$ para todo $(t, x) \in Q$ y $u \in \mathcal{U}^{t,x}$.
2. Si para cada $(t, x) \in Q$ existe un control $u^* \in \mathcal{U}^{t,x}$ con

$$u^*(s) \in \underset{v \in U}{\operatorname{argmax}} \left[A^v G(s, X^*(s)) + L(s, X^*(s), v) \right] \quad (2.27)$$

para $s \in [t, T]$, donde X^* es la solución de la ecuación diferencial estocástica controlada por u^* , entonces

$$G(t, x) = V(t, x) = J(t, x, u^*) \quad (2.28)$$

donde u^* es un control óptimo y G corresponde a la función valor del problema propuesto.

Demostración: la demostración puede ser encontrada en (Kraft, 2004, p. 11).

Kraft (2004) especifica un resumen de las condiciones que se deben cumplir para aplicar este teorema. Para nuestro estudio se ha tomado en cuenta las siguientes

TABLA 2.1: Resumen de condiciones para la aplicación del teorema de verificación

Parámetro	Condición
Requerimientos sobre Λ y Σ	I. Condiciones de crecimiento (2.15) y (2.16)
Control u^*	II. Progresivamente medible
	III. Propiedad (2.13) de control admisible
Candidata a solución G	IV. $C^{1,2}$ - solución de HJB
	V. Condición de crecimiento (2.24)

Capítulo 3

Modelo para la acumulación de riqueza de una cuenta individual de capitalización (CIC) bajo cargos administrativos constantes

En este capítulo presentamos el modelo de la acumulación de riqueza en una cuenta individual de capitalización (CIC) de un contribuyente que pertenece a un sistema de pensiones. Partimos estableciendo las siguientes premisas:

- Existe un contribuyente, quien realiza aportes mensuales a su CIC;
- El tiempo en el que el participante se afilia al sistema de pensiones (SPP) representa el punto de inicio, es decir $t = 0$ y siendo la edad E_a del participante;
- El tiempo de retiro se da en $t = T$ y a una edad E_r ($E_r = E_a + T$) del participante;
- La tasa de contribución del participante es constante $\theta > 0$;
- La política de inversión de la riqueza del participante es establecida por la empresa administradora del fondo de pensiones (AFP).

Iniciaremos presentando el modelo que considera la aplicación de cargos administrativos constantes, el cual sienta las bases para el planteamiento de nuestro problema de investigación.

3.1. Definiciones introductorias

En esta sección se definen conceptos que son necesarios para comprender el desarrollo realizado en el presente capítulo.

Definición 3.1. El cargo por flujo es la comisión administrativa que es cobrada mensualmente por la AFP sobre el ingreso salarial del aportante. En el Perú esta comisión actualmente se aplica a los aportantes afiliados antes de junio del año 2013 y que decidieron permanecer bajo esta modalidad. Si $\alpha \in [0, 1)$ es la comisión por flujo mensual y considerando que el contribuyente hace un aporte $\theta > 0$ en un determinado mes, entonces el valor abonado a la AFP será $\theta \times (1 - \alpha)$.

Definición 3.2. El cargo por balance ó saldo es la comisión administrativa, que es cobrada mensualmente sobre el fondo de la CIC. La aplicación de esta tasa, no afecta la remuneración del aportante. En el Perú están afectos los nuevos aportantes del SPP desde junio del año 2013. Sea X la riqueza del aportante en un determinado mes y β la comisión por saldo mensual, entonces el valor abonado a la AFP por esta comisión será $X \times \beta$.

Definición 3.3. Volatilidad de retorno logarítmico(σ), es el grado de variación en el precio de un activo en un determinado periodo de tiempo, el cual es medido mediante la desviación estándar de tasas de retorno de tipo logarítmico.

Ahora presentamos el modelo de acumulación de riqueza de una CIC de una manera general.

3.2. Modelo general para la acumulación de riqueza en una CIC

El principal objetivo de la AFP es la búsqueda de políticas que maximicen la esperanza de la utilidad de la riqueza del aportante al final del periodo de contribución. Para lograr esto, durante el periodo de aporte T , la AFP realiza inversiones en diferentes tipos de activos, los cuales pueden ser riesgosos y/o sin riesgo. Un activo libre de riesgo es aquel que tiene una rentabilidad conocida y volatilidad igual a cero. Por el contrario, un activo riesgoso es aquel cuyos rendimientos tienen volatilidad positiva.

En un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ se define el proceso de riqueza

del aportante $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ donde T es el final del periodo de aporte. La dinámica de X depende de un movimiento Browniano estándar W y la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ será la filtración natural del movimiento Browniano.

El contribuyente tiene una riqueza inicial $x_0 \geq 0$ y a lo largo del periodo de acumulación $[0, T]$, con $T < \infty$ fijo, irá haciendo aportes a una tasa mensual constante θ .

Se define el proceso estocástico $u = \{u(t), t \geq 0\}$ donde $u(t)$ es la proporción invertida en el activo riesgoso en el tiempo t . Denotamos por \mathcal{U}^{0, x_0} como la familia de portafolios de inversión admisibles u tales que u es $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adaptado y $E[\int_0^T |u(t)|^2 dt] < \infty$. Entonces la dinámica de la riqueza del aportante se describe mediante la siguiente EDE controlada

$$dX^u(t) = \underbrace{r(1 - u(t))X^u(t)dt}_{\text{Activo sin riesgo}} + \underbrace{\delta u(t)X^u(t) + \sigma X^u(t)u(t)dW(t)}_{\text{Activo riesgoso}} + \underbrace{\theta dt}_{\text{Tasa de contribución}}, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento mensual de libre riesgo, $\delta > 0$ es la tasa de crecimiento mensual de riesgo y $\sigma > 0$ es la volatibilidad mensual de retorno logarítmico. Asumimos $\delta > r$.

Sea U la función de utilidad, es decir $U : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U' > 0$ y $U'' < 0$. Por tanto, $U(X^u(T))$ representa la utilidad en la riqueza terminal del aportante, $X^u(T)$. La AFP debe maximizar la esperanza de la utilidad de la riqueza terminal del aportante, $E[U(X^u(T))]$, mediante la elección de un portafolio óptimo de inversión $u^* = \{u^*(t), t \in [0, T]\}$.

El problema de control óptimo (**M**) es el siguiente

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad \mathbb{E}[U(X^u(T))] \\ & \text{tal que} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}^{0, x_0}, \\ & \quad dX^u(t) = [X^u(t)(u(t)(\delta - r) + r) + \theta]dt + X^u(t)u(t)\sigma dW(t), t \in [0, T] \\ & \quad X^u(0) = x_0. \end{aligned}$$

3.3. Modelo general para la acumulación de riqueza en una CIC afecta de cargos administrativos

Incorporamos en el modelo anterior el cobro de comisiones administrativas. Estas comisiones pueden ser de dos tipos: cargo administrativo por flujo y cargo administrativo por saldo.

La ecuación de evolución de la riqueza para un tiempo t , sería la siguiente:

$$\begin{aligned} dX^u(t) &= [X^u(t)(u(t)(\delta - r) + r - \beta) + \theta(1 - \alpha)]dt + X^u(t)u(t)\sigma dW(t), 0 \leq t \leq T, \\ X^u(0) &= (1 - \alpha)x_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde β es el cargo mensual en saldo; θ es la tasa de contribución mensual; α es el cargo mensual en flujo; σ es la volatibilidad mensual de retorno logartímico; $(W(t))_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso Browniano estándar; x_0 es el valor inicial de la riqueza del aportante y T es el tiempo horizonte en meses. Denotamos con $\hat{x}_0 = (1 - \alpha)x_0$ y a $\mathcal{U}^{0, \hat{x}_0}$ como el conjunto de controles admisibles correspondientes a la condición inicial $(0, \hat{x}_0)$. Así el problema de control óptimo estocástico consiste en

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbb{E}[U(X^u(T))] \\ \text{tal que} \quad & u(\cdot) \in \mathcal{U}^{0, \hat{x}_0}, \\ & dX^u(t) = [X^u(t)(u(t)(\delta - r) + r - \beta) + \theta(1 - \alpha)]dt + X^u(t)u(t)\sigma dW(t), t \in [0, T] \\ & X^u(0) = \hat{x}_0. \end{aligned}$$

Es decir, encontrar el portafolio óptimo $u^* \in \mathcal{U}^{0, \hat{x}_0}$ tal que maximice el valor esperado de $U(X^u(T))$ bajo el modelo (3.2).

Lo desarrollado en este capítulo es el planteamiento del problema de optimización estocástica para la riqueza del aportante tomando en cuenta las comisiones administrativas cobradas por las AFPs como constantes. Este planteamiento, forma parte del trabajo de Chavez-Bedoya (2016) y es el punto de partida para el desarrollo de nuestra investigación, que es presentada en los siguientes capítulos.

Capítulo 4

Modelo para la acumulación de riqueza de una cuenta individual de capitalización (CIC) bajo cargos administrativos variables

En este capítulo extendemos el modelo de Chavez-Bedoya (2016), considerando que la dinámica de las comisiones de la AFP y el ingreso mensual del contribuyente corresponden a funciones determinísticas, continuas y acotadas en un intervalo de tiempo $[0, T]$ con $T > 0$.

4.1. Definiciones introductorias

En esta sección se definen algunos conceptos que son necesarios para el desarrollo del capítulo.

Definición 4.1. Valor futuro de una anualidad unitaria. Es el valor futuro en el tiempo s_1 de una cantidad unitaria a una tasa de interés $g \neq 0$, con punto inicial en el tiempo $s_0 < s_1$.

$$\bar{A}_{s_1-s_0|g} = \frac{e^{g(s_1-s_0)} - 1}{g}. \quad (4.1)$$

Definición 4.2. Valor futuro de una anualidad continua ($FVC_g(s)$). Es el valor futuro de cierta cantidad de dinero al que se añade los intereses acumulados, los intereses ganados en un periodo de tiempo se suman a la cantidad inicial y se vuelven a invertir. Si definimos un tiempo final s , una tasa anual continua α , un valor inicial θ_0 en el tiempo

inicial 0 con tasa de interés $g \neq 0$, entonces:

$$FVC_g(s) = \theta_0 e^{gs} + \alpha \bar{A}_{\overline{s}|g}. \quad (4.2)$$

Definición 4.3. Equivalente de certeza (CE). Es la cantidad de dinero necesaria para que una persona sea indiferente entre una cantidad segura y una cantidad esperada con riesgo que se recibiría en el mismo instante de tiempo. Se evalúa a través de una función de utilidad, por ejemplo si definimos a una variable aleatoria X , el CE debe cumplir con lo siguiente:

$$U(CE(X)) = E[U(X)] \quad (4.3)$$

Definición 4.4. Ratio de equivalentes de certeza ($\mathcal{R}_{sf}(T)$). Es el ratio que compara los equivalentes de certeza por saldo y por flujo en un determinado periodo de aporte (T), es decir:

$$\mathcal{R}_{sf}(T) = \frac{CE_s(X_T)}{CE_f(X_T)}, \quad (4.4)$$

donde X_T es una variable aleatoria evaluada en el tiempo T .

En la siguiente sección hacemos se plantea el problema de optimización estocástica, donde tanto las comisiones de cobro de las AFPs (α , β) como la tasa de contribución mensual (θ) son modeladas mediante funciones determinísticas. Luego se solucionará el problema planteado para algunas funciones de utilidad y se hará un análisis de las posibles funciones candidatas para las tasas mencionadas.

4.2. El problema con cargos y aportes variables

En nuestro estudio, los parámetros θ , β y α , mostrados en el capítulo anterior, son reemplazados por funciones determinísticas continuas y acotadas en $[0, T]$ con $T > 0$ dependientes del tiempo. De este modo la *ecuación de evolución de la riqueza* está dada mediante la expresión

$$\begin{aligned} dX(t) &= [X(t)(u(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t))]dt + X(t)u(t)\sigma dW(t), 0 \leq t \leq T, \\ X(0) &= (1 - \alpha(0))x_0 > 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la función para el cargo mensual en saldo, $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la función para la tasa de contribución y $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, 1)$ es la función para el cargo mensual en flujo, todas asumidas continuas y acotadas en el intervalo $[0, T]$. También consideramos que $X(t)$ es estrictamente positiva ya que $X(0) > 0$ y cero es la barrera natural para el proceso de riqueza (Bielecki et al. (2005)). Así mismo, σ es la volatibilidad mensual de retorno logartímico, $(W(t))_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso Browniano

estándar, x_0 : valor inicial de la riqueza del aportante, $\alpha(0)$: valor inicial del cargo mensual en flujo, T : tiempo horizonte en meses.

Entonces el problema **(M1)** a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \mathbb{E}[U(X^u(T))] \\ \text{tal que} \quad & u(\cdot) \in \mathcal{U}^{0,x_0}, \\ & dX^u(t) = [X^u(t)(u(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t))]dt + X^u(t)u(t)\sigma dW(t), t \in [0, T] \\ & X^u(0) = x_0(1 - \alpha(0)) > 0. \end{aligned}$$

Encontrar el portafolio óptimo $u^* \in \mathcal{U}^{0,x_0}$ que maximice el valor esperado $E[U(X^u(T))]$ bajo el modelo (4.5).

4.2.1. Portafolio óptimo

Definimos nuestra función de valor para el problema **(M1)** como $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$V(t, x) = \max_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E}[U(X(T))], \text{ donde } X(t) = x \quad (4.6)$$

Asumimos que existe un control admisible u progresivamente medible y que la función $J \in \mathcal{C}^{1,2}$. Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (2.25), para el problema **(M1)** es la siguiente:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda(t, x, u) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \Sigma^2(t, x, u) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right], \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x, u) &= (u(\delta - r) + r - \beta(t))x + \theta(t)(1 - \alpha(t)), \\ \Sigma(t, x, u) &= u\sigma x. \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones Λ y Σ en la expresión (4.7), tenemos:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + [(u(\delta - r) + r - \beta(t))x + \theta(t)(1 - \alpha(t))] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]. \quad (4.8)$$

Definimos el funcional:

$$\Phi(u) = \frac{\partial V}{\partial t} + [(u(\delta - r) + r - \beta(t))x + \theta(t)(1 - \alpha(t))] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

El control óptimo u^* debe cumplir simultáneamente con:

$$\Phi(u^*) = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u^*) = 0. \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}(u^*) < 0. \quad (4.11)$$

De las condición (4.10) obtenemos la siguiente forma explícita para la estrategia óptima de inversión:

$$u^*(t) = -\frac{(\delta - r)}{\sigma^2} \cdot \frac{\partial V / \partial x}{x \partial^2 V / \partial x^2}. \quad (4.12)$$

Reemplazando la expresión (4.12) en (4.9) obtenemos la ecuacion diferencial parcial que involucra a la función valor:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta - r}{\sigma} \right)^2 \frac{(\partial V / \partial x)^2}{\partial^2 V / \partial x^2} + [x(r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t))] \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (4.13)$$

con la condición $V(T, x) = U(x)$.

4.3. Portafolio óptimo utilizando determinadas funciones de utilidad

En esta sección buscaremos soluciones analíticas cuando se usan las funciones de utilidad potencia y exponencial.

4.3.1. Utilidad potencia

Utilizaremos la función utilidad de la forma:

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \gamma < 1, \gamma \neq 0. \quad (4.14)$$

Consideramos que la candidata a función objetivo tiene la siguiente forma:

$$V(t, x) = b(t) \frac{(x + a(t))^\gamma}{\gamma} \quad (4.15)$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son dos funciones determinísticas dependientes del tiempo, independientes de x y con las siguientes condiciones límite: $a(T) = 0$ y $b(T) = 1$.

Luego, obtenemos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = b'(t) \frac{(x + a(t))^\gamma}{\gamma} + b(t)(x + a(t))^{\gamma-1} a'(t); \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = b(t)(x + a(t))^{\gamma-1}; \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = b(t)(\gamma - 1)(x + a(t))^{\gamma-2}. \quad (4.18)$$

Reemplazando las expresiones (4.16), (4.17) y (4.18) en (4.13), se tiene:

$$\begin{aligned} b'(t) \frac{(x + a(t))^\gamma}{\gamma} + b(t) a'(t) (x + a(t))^{\gamma-1} - \frac{\lambda^2 b(t)}{2(\gamma - 1)} (x + a(t))^\gamma \\ + [x(r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t))] b(t) (x + a(t))^{\gamma-1} = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde el precio de mercado del riesgo $\lambda = \frac{\delta - r}{\sigma}$.

La expresión (4.19) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} b'(t) \frac{(x + a(t))^\gamma}{\gamma} + b(t) a'(t) (x + a(t))^{\gamma-1} - \frac{\lambda^2 b(t)}{2(\gamma - 1)} (x + a(t))^\gamma \\ + (r - \beta(t)) b(t) (x + a(t))^\gamma + [-(r - \beta(t)) a(t) + \theta(t)(1 - \alpha(t))] b(t) (x + a(t))^{\gamma-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Donde la expresión (4.20) se puede dividir en las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{b'(t)}{\gamma} + (r - \beta(t)) b(t) - \frac{\lambda^2}{2(\gamma - 1)} b(t) = 0 \\ b(T) = 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} a'(t) - (r - \beta(t)) a(t) + \theta(t)(1 - \alpha(t)) = 0 \\ a(T) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Resolviendo la ecuación (4.21) para $b(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{b'(t)}{\gamma} &= - \left(r - \beta(t) - \frac{\lambda^2}{2(\gamma - 1)} \right) b(t); \\ b'(t) &= - \gamma \left(r - \beta(t) - \frac{\lambda^2}{2(\gamma - 1)} \right) b(t); \\ b(t) &= e^{\gamma \int_t^T \left(r - \beta(s) - \frac{\lambda^2}{2(\gamma - 1)} \right) ds}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Resolviendo la ecuación (4.22) para $a(t)$:

$$a'(t) = (r - \beta(t)) a(t) - \theta(t)(1 - \alpha(t));$$

Lo cual implica que:

$$a(t) = \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_t^q (r - \beta(s))ds} dq. \quad (4.24)$$

Las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son continuas, acotadas en $[0, T]$, positivas y además son independientes de X , por lo que la solución es válida. La función valor queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= b(t) \frac{(x + a(t))^\gamma}{\gamma} \\ &= e^{\gamma \int_t^T \left(r - \beta(s) - \frac{\lambda^2}{2(\gamma-1)} \right) ds} \frac{\left(x + \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_t^q (r - \beta(s))ds} dq \right)^\gamma}{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

La expresión para la estrategia óptima es:

$$u^*(t) = -\frac{\lambda}{\sigma(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_t^q (r - \beta(s))ds} dq}{x} \right) \quad (4.26)$$

Reescribiendo la expresión (4.26) de la forma:

$$u^*(t)x = -\frac{\lambda}{\sigma(\gamma-1)} \left(x + \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_t^q (r - \beta(s))ds} dq \right) \quad (4.27)$$

Reemplazando (4.27) en (4.5) se tiene:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left[X(t) \left(r - \beta(t) + \frac{\lambda^2}{1-\gamma} \right) + \frac{\lambda^2}{1-\gamma} \int_t^T \pi(q)e^{-\int_t^q (r - \beta(s))ds} dq + \pi(t) \right] dt \\ &\quad + \left[\frac{\lambda}{1-\gamma} X(t) + \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_t^T \pi(q)e^{-\int_t^q (r - \beta(s))ds} dq \right] dW(t), \end{aligned} \quad (4.28)$$

con $X(0) = x_0(1 - \alpha)$ y $\pi(t) = (1 - \alpha(t))\theta(t)$.

Haciendo uso de la *Variación de constantes* del capítulo 2 identificamos a las funciones

$$A(s) = \frac{\lambda^2}{1-\gamma} + r - \beta(s), \quad (4.29)$$

$$\tilde{A}(s) = \frac{\lambda^2}{1-\gamma} \int_s^T \pi(q)e^{-\int_s^q (r - \beta(k))dk} dq + \pi(s), \quad (4.30)$$

$$B(s) = \frac{\lambda}{1-\gamma}, \quad (4.31)$$

$$\tilde{B}(s) = \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_s^T \pi(q)e^{-\int_s^q (r - \beta(k))dk} dq, \quad (4.32)$$

las cuales son determinísticas y continuas en $t \in [0, T]$ y cumplen con las condiciones (2.1) y (2.2). Por lo tanto podemos afirmar que la ecuación (4.28) tiene solución única y por el *Teorema de Estimación de Momentos*(2.2) para $t < T$ existe una constante C_T

tal que

$$E\left[\sup_{s \in [t, T]} |X^u(s)|^p\right] \leq C_T(1 + |x_0|^p) \text{ para } p > 1. \quad (4.33)$$

Para obtener la solución explícita, reemplazamos (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32) en (2.4) y (2.5) tenemos

$$Z(t) = \exp\left(\frac{(1-2\gamma)t}{2(1-\gamma)^2} + \int_0^t (r - \beta(k))dk + \frac{\lambda}{1-\gamma}W_t\right) \quad (4.34)$$

$$X(t) = Z(t) \left[x_0(1-\alpha) + \int_0^t Z^{-1}(s) \left(\frac{\lambda^2}{1-\gamma} \int_s^T \pi(q) e^{-\int_s^q (r-\beta(k))dk} dq + \pi(s) - \frac{\lambda^2}{(1-\gamma)^2} \int_s^T \pi(q) e^{-\int_s^q (r-\beta(k))dk} dq \right) ds + \int_0^t Z^{-1}(s) \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_s^T \pi(q) e^{-\int_s^q (r-\beta(k))dk} dq dW_s \right]. \quad (4.35)$$

Agrupando términos se tiene

$$X(t) = e^{\frac{(1-2\gamma)t}{2(1-\gamma)^2} + \int_0^t (r-\beta(k))dk + \frac{\lambda}{1-\gamma}W_t} \left[x_0(1-\alpha) + \int_0^t e^{-\frac{(1-2\gamma)s}{2(1-\gamma)^2} - \int_0^s (r-\beta(k))dk - \frac{\lambda}{1-\gamma}W_s} \pi(s) ds - \frac{\lambda^2\gamma}{(1-\gamma)^2} \int_0^t e^{-\frac{(1-2\gamma)s}{2(1-\gamma)^2} - \frac{\lambda}{1-\gamma}W_s} \int_s^T \pi(q) e^{-\int_s^q (r-\beta(k))dk} dq ds + \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_0^t e^{-\frac{(1-2\gamma)s}{2(1-\gamma)^2} - \frac{\lambda}{1-\gamma}W_s} \int_s^T \pi(q) e^{-\int_s^q (r-\beta(k))dk} dq dW_s \right] \quad (4.36)$$

Se puede apreciar que la riqueza del aportante $X(t)$ para valores $\gamma < 0$ siempre es positiva. Para el caso $0 < \gamma < 1$ se debe garantizar que $\tilde{A}(s) > B(s)\tilde{B}(s)$, es decir

$$\pi(s) - \frac{\lambda^2\gamma}{(1-\gamma)^2} \int_s^T \pi(q) e^{-\int_s^q (r-\beta(k))dk} dq > 0. \quad (4.37)$$

En nuestro caso se utilizó $\gamma < 0$.

Sumando y restando los valores $X(t)(\delta - r)k$ y $X(t)\sigma k$ en (4.5) se tiene

$$dX(t) = [X(t)(r - \beta(t)) + X(t)u^*(t)(\delta - r) + \pi(t) + X(t)(\delta - r)k - X(t)(\delta - r)k]dt + [X(t)u^*(t)\sigma + X(t)\sigma k - X(t)\sigma k]dW(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4.38)$$

donde $k = \frac{\lambda}{\sigma(1-\gamma)}$. Agrupando términos se tiene

$$dX(t) = [X(t)(r - \beta(t) + (\delta - r)k) + (\delta - r)X(t)(u^*(t) - k) + \pi(t)]dt + [\sigma X(t)k + \sigma X(t)(u^*(t) - k)]dW(t) \quad (4.39)$$

Haciendo

$$\hat{u}(t) = X(t)(u^*(t) - k), \quad (4.40)$$

la expresión queda de la siguiente forma

$$dX(t) = [X(t)(r - \beta(t) + (\delta - r)k) + (\delta - r)\hat{u}(t) + \pi(t)]dt + [\sigma X(t)k + \sigma\hat{u}(t)]dW(t) \quad (4.41)$$

siendo $\hat{u}(t) = a(t)$ una función determinística y continua en $t \in [0, T]$ tal que $E[\int_0^t |\hat{u}(s)|^k ds] < \infty \forall k = 1, 2, \dots$

Es necesario verificar que la función (4.25) es solución única del problema Q1, para ello haremos uso del teorema de verificación, expuesto en el capítulo 2. Las condiciones del teorema son las siguientes

- I. Las condiciones de crecimiento (2.15) y (2.16) sobre las funciones coeficientes se cumplen ya que las funciones que componen estos son acotadas y continuas en el intervalo $[0, T]$.
- II. \hat{u} es un progresivamente medible. El control \hat{u} definido en (4.40) es determinístico y acotado en $[0, T]$ por lo tanto progresivamente medible.
- III. \hat{u} es un control admisible. El control \hat{u} determinístico y acotado en $[0, T]$ cumple con la condición (2.13) por lo tanto es un control admisible.
- IV. De acuerdo a la definición de la función V , esta es de clase \mathcal{C}^1 en t y de clase \mathcal{C}^2 en x . Así mismo V satisface la ecuación HJB, de acuerdo al planteamiento del problema de maximización estocástica.
- v. Condiciones de crecimiento de V : siendo $a(t)$ y $b(t)$ funciones positivas, continuas y acotadas en el intervalo $[0, T]$, se tiene

$$|V(t, x)| = \left| b(t) \frac{(x + a(t))^\gamma}{\gamma} \right| = \left| \frac{b(t)a(t)^\gamma}{\gamma} \right| \left| 1 + \frac{x}{a(t)} \right|^\gamma \leq k_1 \left| 1 + \frac{x}{a(t)} \right|^\gamma, \quad (4.42)$$

donde $X(t) = x$ y $k_1 > 0$, constante.

Analizamos los escenarios para los distintos valores de $x/a(t)$

- Si $x/a(t) < 1$ y $0 < \gamma < 1$:

$$\left(1 + \frac{x}{a(t)} \right) < 2 \quad (4.43)$$

$$\left(1 + \frac{x}{a(t)} \right)^\gamma < 2^\gamma \quad (4.44)$$

Siendo $x > 0$ y siendo $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{x}{a(t)}\right)^\gamma < 2^\gamma + 2^\gamma x^n \quad (4.45)$$

$$\left(1 + \frac{x}{a(t)}\right)^\gamma < 2^\gamma(1 + |x|^n) \quad (4.46)$$

Entonces

$$|V(t, x)| \leq K_1(1 + |x|^n), \quad (4.47)$$

$K_1 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x/a(t) < 1$ y $\gamma < 0$:

$$\left(\frac{1}{\frac{x}{a(t)} + 1}\right) < 1 \quad (4.48)$$

$$\left(\frac{1}{\frac{x}{a(t)} + 1}\right)^{-\gamma} < 1 \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{x}{a(t)} + 1\right)^\gamma < 1 \quad (4.50)$$

$$\left(\frac{x}{a(t)} + 1\right)^\gamma < 1 + |x|^n \quad (4.51)$$

Entonces

$$|V(t, x)| \leq K_2(1 + |x|^n), \quad (4.52)$$

$K_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x/a(t) \geq 1$ y $0 < \gamma < 1$:

$$(x + a(t)) < 2x \quad (4.53)$$

$$(x + a(t))^\gamma < (2x)^\gamma \quad (4.54)$$

$$(x + a(t))^\gamma < (2x)^\gamma(1 + |x|^n) \quad (4.55)$$

Siendo $x < \infty$ Entonces

$$(x + a(t))^\gamma < k_3(1 + |x|^n) \quad (4.56)$$

y por lo tanto

$$|V(t, x)| \leq K_3(1 + |x|^n), \quad (4.57)$$

$K_3 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x/a(t) \geq 1$ y $\gamma < 0$:

$$\left(\frac{1}{\frac{x}{a(t)} + 1} \right) < 1 \quad (4.58)$$

$$\left(\frac{1}{\frac{x}{a(t)} + 1} \right)^{-\gamma} < 1 \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{x}{a(t)} + 1 \right)^{\gamma} < 1 \quad (4.60)$$

$$\left(\frac{x}{a(t)} + 1 \right)^{\gamma} < 1 + |x|^n \quad (4.61)$$

Entonces

$$|V(t, x)| \leq K_4(1 + |x|^n), \quad (4.62)$$

$K_4 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

Entonces se cumple las condiciones de crecimiento sobre V

Con estas condiciones cumplidas, aplicamos el teorema de verificación y concluimos que $V(t, x)$ es una función de valor óptimo y que existe una regla de control única $\hat{u} \in \mathcal{U}$ donde $X(t)$ alcanza el máximo.

4.3.2. Utilidad exponencial

Con $c > 0$, definimos la función utilidad exponencial como:

$$U(x) = -\frac{1}{c}e^{-cx}. \quad (4.63)$$

Consideramos que la candidata a función objetivo tiene la siguiente forma:

$$V(t, x) = -\frac{1}{c}e^{-c(a(t)+b(t)(x+d(t)))}, \quad (4.64)$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $d(t)$ son funciones determinísticas independientes de x , con las condiciones límite: $a(T) = 0$, $b(T) = 1$ y $d(T) = 0$. Por tanto, tenemos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (a'(t) + b'(t)(x + d(t))) + b(t)d'(t)e^{-c(a(t)+b(t)(x+d(t)))}; \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = b(t)e^{-c(a(t)+b(t)(x+d(t)))}; \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -cb(t)^2e^{-c(a(t)+b(t)(x+d(t)))}. \quad (4.67)$$

Reemplazando (4.65), (4.66) y (4.67) en la expresión (4.13), nos queda:

$$a'(t) + b'(t)x + b'(t)d(t) + b(t)d'(t) + x(r - \beta(t))b(t) + (\theta(t)(1 - \alpha(t)))b(t) + \frac{\lambda^2}{2c} = 0. \quad (4.68)$$

La expresión (4.68) se puede dividir en las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} a'(t) + \frac{\lambda^2}{2c} = 0 \\ a(T) = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

$$\begin{cases} b'(t)x + b(t)x(r - \beta(t)) = 0 \\ b(T) = 1 \end{cases} \quad (4.70)$$

$$\begin{cases} b'(t)d(t) + b(t)d'(t) + b(t)(\theta(t)(1 - \alpha(t))) = 0 \\ d(T) = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

Con las respectivas soluciones siguientes:

$$a(t) = -\frac{\lambda^2}{2c}(t - T); \quad (4.72)$$

$$b(t) = e^{\int_t^T (r - \beta(s)) ds}; \quad (4.73)$$

$$d(t) = \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q)) e^{-\int_t^q (r - \beta(s)) ds} dq. \quad (4.74)$$

Las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $d(t)$, son independientes de X por lo que la forma planteada para la función valor es válida. Por tanto, queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= -\frac{1}{c} e^{-c(a(t) + b(t)(x + d(t)))} \\ &= -\frac{1}{c} e^{-c\left(\frac{\lambda^2}{2c}(T - t) + e^{\int_t^T (r - \beta(s)) ds} (x + \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q)) e^{-\int_t^q (r - \beta(s)) ds} dq)\right)}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

La expresión para la estrategia óptima es:

$$u^*(t) = \frac{e^{-\int_t^T (r - \beta(s)) ds} (\delta - r) \frac{1}{c}}{x \sigma^2}. \quad (4.76)$$

Reescribimos (4.76) de la siguiente forma

$$u^*(t)x = \frac{\lambda}{c\sigma} e^{-\int_t^T (r - \beta(s)) ds}. \quad (4.77)$$

Reemplazando (4.77) en (4.5) se tiene

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left[X(t)(r - \beta(t)) + \pi(t) + \frac{\lambda^2}{c} e^{-\int_t^T (r - \beta(s)) ds} \right] dt + \frac{\lambda}{c} e^{-\int_t^T (r - \beta(s)) ds} dW(t) \\ X(0) &= x_0(1 - \alpha), \end{aligned} \quad (4.78)$$

Identificamos a las funciones

$$A(s) = r - \beta(s), \quad (4.79)$$

$$\tilde{A}(s) = \frac{\lambda^2}{c} e^{-\int_s^T (r-\beta(k))dk} + \pi(s), \quad (4.80)$$

$$B(s) = 0, \quad (4.81)$$

$$\tilde{B}(s) = \frac{\lambda}{c} e^{-\int_s^T (r-\beta(k))dk}, \quad (4.82)$$

las cuales son determinísticas y continuas en $t \in [0, T]$ y cumplen con las condiciones (2.1) y (2.2). Por lo tanto podemos afirmar que la ecuación (4.78) tiene solución única y para $t < T$ existe una constante C_T tal que

$$E\left[\sup_{s \in [t, T]} |X^u(s)|^p \right] \leq C_T (1 + |x_0|^p) \text{ para } p > 1. \quad (4.83)$$

Reemplazando (4.79), (4.80), (4.81) y (4.82) en (2.4) y (2.5) se obtiene

$$Z(t) = e^{\int_0^t (r-\beta(k))dk} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} X(t) = Z(t) & \left[x_0(1 - \alpha) + \int_0^t e^{-\int_0^s (r-\beta(k))dk} \left(\pi(s) + \frac{\lambda^2}{c} e^{-\int_s^T (r-\beta(k))dk} \right) ds \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{-\int_0^s (r-\beta(k))dk} \frac{\lambda}{c} e^{-\int_s^T (r-\beta(k))dk} dW_s \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

Agrupando terminos se tiene

$$\begin{aligned} X(t) = e^{\int_0^t (r-\beta(k))dk} & \left[x_0(1 - \alpha) + \int_0^t \pi(s) e^{-\int_0^s (r-\beta(s))dk} ds \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2 t}{c} e^{-\int_0^T (r-\beta(k))dk} + \frac{\lambda}{c} e^{-\int_0^T (r-\beta(k))dk} W(t) \right] \end{aligned} \quad (4.86)$$

Se puede apreciar que la riqueza del aportante $X(t)$ para cualquier valor de c siempre es positiva, reafirmando nuestra condición inicial en relación a la positividad de este termino.

Definimos el control

$$\hat{u}(t) = u^*(t)X(t) = b(t)^{-1} \frac{(\delta - r)}{c\sigma^2}, \quad (4.87)$$

siendo función determinística y continua en $t \in [0, T]$ se cumple que $E[\int_0^t |\hat{u}(t)|^k ds] < \infty \forall k = 1, 2, \dots$. Utilizando la misma metodología empleada para el caso de la utilidad potencia, verificamos la solución

1. Las condiciones de crecimiento (2.15) y (2.16) sobre las funciones coeficientes se

cumplen ya que las funciones que componen estos son acotadas y continuas en el intervalo $[0, T]$.

- II. \hat{u} es progresivamente medible. El control \hat{u} definido en (4.87) es determinístico y acotado en $[0, T]$, por lo tanto progresivamente medible.
- III. \hat{u} es un control admisible. El control \hat{u} determinístico y acotado en $[0, T]$ cumple con la condición (2.13) por lo tanto es un control admisible.
- IV. De acuerdo a la definición de la función V , esta es de clase \mathcal{C}^1 en t y de clase \mathcal{C}^2 en u . Así mismo V satisface la ecuación HJB, de acuerdo al planteamiento del problema de maximización estocástica.
- v. Condiciones de crecimiento de V : siendo $b(t)$, $X(t)$ y c positivos, se tiene

$$|V(t, x)| = \left| -\frac{1}{c} e^{-c(a(t)+b(t)(x+d(t)))} \right| \leq k_5 e^{-cb(t)x}, \quad (4.88)$$

donde $X(t) = x$ y $k_5 > 0$, constante.

$$|V(t, x)| \leq \frac{k_5}{e^{cb(t)x}} \leq \frac{k_5}{cb(t)x+1} \leq k_5 \leq k_5(|x|^n + 1), n \in \mathbb{N}.$$

Similar al caso anterior, concluimos que $V(t, x)$ es una función de valor óptimo y que existe una regla de control única $\hat{u}(t, x)$ donde se alcanza el máximo.

4.4. Valor esperado de la riqueza del aportante $X^*(t)$

4.4.1. Utilidad potencia

Para el cálculo de la esperanza óptima de la riqueza del aportante, utilizamos la expresión (4.5) haciendo $\pi(t) = \theta(t)(1 - \alpha(t))$, se tiene

$$dX^*(t) = [X^*(t)(u^*(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \pi(t)]dt + X^*(t)u(t)\sigma dW(t). \quad (4.89)$$

La forma integral de (4.89) es la siguiente

$$X^*(t) = X^*(0) + \int_0^T [X^*(t)(u^*(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \pi(t)]dt + \int_0^T X^*(t)u(t)\sigma dW(t). \quad (4.90)$$

Tomamos el valor esperado a ambos lados de la ecuación (4.90)

$$E[X^*(t)] = X^*(0) + E \left[\int_0^T [X^*(t)(u^*(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \pi(t)] dt \right] + E \left[\int_0^T X^*(t)u(t)\sigma dW(t) \right]. \quad (4.91)$$

Utilizando las propiedades de independencia y esperanza del movimiento browniano $W(t)$, la expresión (4.91) se simplifica a:

$$E[X^*(t)] = X^*(0) + \int_0^T E[X^*(t)(u^*(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \pi(t)] dt, \quad (4.92)$$

$$E[X^*(t)] = X^*(0) + \int_0^T E[X^*(t)u^*(t)](\delta - r) + E[X^*(t)](r - \beta(t)) + \pi(t) dt \quad (4.93)$$

Finalmente, derivando (4.93) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} dE(X^*(t)) &= ((\delta - r)E(X^*(t)u(t)) + (r - \beta(t))E(X(t)) + \pi(t))dt, \quad (4.94) \\ E(X^*(0)) &= x_0(1 - \alpha(0)). \end{aligned}$$

De la expresión (4.26) obtenemos el valor de $(X^*(t) \times u^*(t))$, el cual es reemplazado en (4.94) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dE(X^*(t))}{dt} &= (\delta - r)E\left(\frac{-\lambda}{\sigma(\gamma - 1)}(X^*(t) + \int_t^T \pi(q)e^{-\int_t^q(r-\beta(s))ds}dq)\right) + (r - \beta(t))E(X(t)) + \pi(t) \\ &= \frac{\lambda^2}{(1 - \gamma)}E\left(X + \int_t^T \pi(q)e^{-\int_t^q(r-\beta(s))ds}dq\right) + (r - \beta(t))E(X(t)) + \pi(t). \end{aligned}$$

Agrupando términos, tenemos:

$$\frac{dE(X^*)}{dt} = \frac{\lambda^2}{(1 - \gamma)} \int_t^T \pi(q)e^{-\int_t^q(r-\beta(s))ds}dq + E(X^*)\left(\frac{\lambda^2}{(1 - \gamma)} + r - \beta(t)\right) + \pi(t), \quad (4.95)$$

donde $X^* = X^*(t)$. Resolviendo (4.95) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E(X^*(t)) &= e^{\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)}t} e^{\int_0^t(r-\beta(k))dk} \left[X(0) + \int_0^t e^{-\int_0^g(r-\beta(k))dk} e^{-\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)}g} (\pi(g) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{(1-\gamma)} \int_g^T e^{-\int_g^q(r-\beta(s))ds} \pi(q) dq) dg \right], \\ E(X^*(t)) &= e^{\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)}t} e^{\int_0^t(r-\beta(k))dk} \left[X_0(1 - \alpha(0)) + \int_0^t e^{-\int_0^g(r-\beta(k))dk} e^{-\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)}g} (\theta(g)(1 - \alpha(g)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{(1-\gamma)} \int_g^T e^{-\int_g^q(r-\beta(s))ds} \theta(q)(1 - \alpha(q)) dq) dg \right]. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Las funciones que conforman la expresión anterior son todas determinísticas y continuas en $t \in [0, T]$ entonces $E[X^*(t)]$ también es determinística y acotada en $[0, T]$ y se cumple que $E[X^*(t)] < \infty$ y por lo tanto $X^*(t) < \infty$.

4.4.2. Utilidad exponencial

Para calcular la esperanza de la riqueza óptima del aportante utilizamos la misma metodología usada en el caso de la utilidad potencia. Para ello reemplazamos el valor de $(X^* \times u^*(t))$ obtenido de la expresión (4.76) en (4.94), entonces

$$\begin{aligned} \frac{dE(X^*)}{dt} &= (\delta - r)E\left(\frac{\lambda}{c\sigma}e^{-\int_t^T(r-\beta(s))ds}\right) + (r - \beta(t))E(X^*) + \pi(t) \\ &= \frac{\lambda^2}{c}e^{-\int_t^T(r-\beta(s))ds} + (r - \beta(t))E(X^*) + \pi(t), \end{aligned}$$

donde $X^* = X^*(t)$. Resolviendo tendremos:

$$\begin{aligned} E(X^*(t)) &= e^{\int_0^t(r-\beta(k))dk} \left[x_0(1 - \alpha(0)) + \int_0^t e^{-\int_0^g(r-\beta(k))dk} \left(\frac{\lambda^2}{c}e^{-\int_g^T(r-\beta(s))ds} + \pi(g) \right) dg \right] \\ &= e^{\int_0^t(r-\beta(k))dk} \left[x_0(1 - \alpha(0)) + \int_0^t e^{-\int_0^g(r-\beta(k))dk} \left(\frac{\lambda^2}{c}e^{-\int_g^T(r-\beta(s))ds} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(g)(1 - \alpha(g)) \right) dg \right]. \end{aligned} \tag{4.97}$$

De igual modo para esta utilidad se cumple que $E[X^*(t)]$ es determinística y acotada en $[0, T]$ y se cumple que $E[X^*(t)] < \infty$ y por lo tanto $X^*(t) < \infty$.

4.5. Equivalentes de certeza

El equivalente de certeza (CE) juega un papel protagónico en la presente investigación, puesto que el concepto de este término nos permite realizar comparaciones de la riqueza terminal de aportante dependiendo del tipo de comisión a la que esta expuesta la correspondiente CIC. De estas comparativas se van a desprender expresiones que nos van a permitir encontrar expresiones analíticas con las que más adelante se evaluarán candidatas para las diferentes tasas que se están modelando en el presente trabajo.

4.5.1. Utilidad potencia

Definimos la función $S : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ como los aportes en el intervalo $[t, T]$ traídos a tiempo presente, mediante la expresión:

$$S(t, x) = x + \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_t^q(r-\beta(s))ds} dq, \tag{4.98}$$

donde $X(t) = x$. Desarrollamos la expresión para la estrategia óptima:

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -\left(\frac{\delta - r}{\sigma^2}\right) \frac{b(t)(x + a(t))^{\gamma-1}}{xb(t)(\gamma - 1)(x + a(t))^{\gamma-2}} \\
&= \left(\frac{\delta - r}{\sigma^2}\right) \frac{(x + a(t))}{x(1 - \gamma)} \\
&= \left(\frac{\delta - r}{\sigma^2}\right) \frac{(x + \int_t^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_t^q (r-\beta(s))ds} dq)}{x(1 - \gamma)}. \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Luego, calculamos el valor de la función objetivo para las condiciones iniciales:

$$J^*(0, (1 - \alpha(0))x_0) = \frac{e^{\gamma \int_0^T (r-\beta(s) + \frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)})ds}}{\gamma} [S(0, (1 - \alpha(0))x_0)]^\gamma. \tag{4.100}$$

En terminos de X , llamamos estrategia óptima a la función $X^*(t)$, cuando se utiliza el control óptimo $u^*(t)$. La máxima utilidad esperada de la riqueza final es $E[U(X^*(T))] = V^*(0, (1 - \alpha(0))X_0)$. Por definición, el equivalente de certeza (CE) cumple:

$$E[U(X^*(T))] = U(CE(X^*(T))). \tag{4.101}$$

Entonces, aplicando la función utilidad sobre $CE(X^*(T))$, tenemos:

$$\begin{aligned}
U(CE(X^*(T))) &= \frac{CE(X^*(T))^\gamma}{\gamma} \\
&= \frac{e^{\gamma \int_0^T (r-\beta(s) + \frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)})ds}}{\gamma} [S(0, (1 - \alpha(0))x_0)]^\gamma. \tag{4.102}
\end{aligned}$$

Si igualamos (4.101) con (4.102), obtenemos:

$$CE(X^*(T)) = e^{\int_0^T (r-\beta(s) + \frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)})ds} [S(0, (1 - \alpha(0))x_0)] \tag{4.103}$$

4.5.2. Utilidad exponencial

Para este caso se obtuvo lo siguiente:

$$CE(X^*(T)) = \frac{T\lambda^2}{2c} + e^{\int_0^T (r-\beta(s))ds} \left((1 - \alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-\int_0^q (r-\beta(s))ds} dq \right). \tag{4.104}$$

Podemos escribir la expresión (4.104) como:

$$CE(X^*) = \frac{T\lambda^2}{2c} + e^{\int_0^T (r-\beta(s))ds} (S(0, (1 - \alpha(0))x_0)). \tag{4.105}$$

4.6. Límites de los equivalentes de certeza

Para determinar si las expresiones de los equivalentes de certeza para ambas utilidades son correctas, vamos a realizar un cálculo de los límites a los que éstas tienden cuando el cargo en el flujo tiende a cero y a un valor constante. Para ello vamos a considerar el caso en el que tanto las funciones $\theta(t)$ y $\alpha(t)$ son las constantes θ y α respectivamente, asimismo consideramos que no existe riqueza inicial, i.e., $x_0 = 0$.

4.6.1. Utilidad potencia

Tomando en cuenta lo señalado en el párrafo anterior, la expresión (4.103), nos queda de la siguiente forma:

$$CE(X^*(T)) = (1 - \alpha)\theta e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} e^{\int_0^T (r-\beta(s))ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r-\beta(s))ds} dq, \quad (4.106)$$

(a) $\beta(s) \rightarrow 0$ es el caso en el que se considera que la comisión en saldo no existe.

$$\lim_{\beta(s) \rightarrow 0} CE(X^*(T)) = \lim_{\beta(s) \rightarrow 0} \theta(1 - \alpha(0)) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} e^{\int_0^T (r-\beta(s))ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r-\beta(s))ds} dq \quad (4.107)$$

$$= \lim_{\beta(s) \rightarrow 0} \theta(1 - \alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{\int_q^T (r-\beta(s))ds} dq \quad (4.108)$$

$$= \lim_{\beta(s) \rightarrow 0} \theta(1 - \alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{r(T-q)} e^{-\int_q^T (\beta(s))ds} dq \quad (4.109)$$

$$= \theta(1 - \alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{r(T-q)} \lim_{\beta(s) \rightarrow 0} e^{-\int_q^T (\beta(s))ds} dq \quad (4.110)$$

$$= \theta(1 - \alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{r(T-q)} dq. \quad (4.111)$$

Por tanto,

$$\lim_{\beta(s) \rightarrow 0} CE(X^*(T)) = \theta(1 - \alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \frac{(e^{rT} - 1)}{r} \quad (4.112)$$

$$= \theta \bar{A}_{T|r} (1 - \alpha(0)) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \quad (4.113)$$

$$= FVC_r(T) (1 - \alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \quad (4.114)$$

El limite representa el valor futuro en el tiempo T de las contribuciones hechas a una tasa r , afectadas por la comisión en flujo α , cuyo valor es multiplicado por la contribución hecha por la AFP por el manejo activo de la CIC, $e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T}$.

(b) $\beta(s) \rightarrow \beta_0$ es el caso en el que se considera que la comisión en flujo tiene un valor constante β_0 .

$$\lim_{\beta(s) \rightarrow \beta_0} CE(X^*(T)) = \lim_{\beta(s) \rightarrow \beta_0} \theta(1-\alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{\int_0^q (r-\beta(s))ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r-\beta(s))ds} dq \quad (4.115)$$

$$= \theta(1-\alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{r(T-q)} \lim_{\beta(s) \rightarrow \beta_0} e^{-\int_0^q (\beta(s))ds} dq \quad (4.116)$$

$$= \theta(1-\alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \int_0^T e^{(r-\beta_0)(T-q)} dq \quad (4.117)$$

Por tanto,

$$\lim_{\beta(s) \rightarrow \beta_0} CE(X^*(T)) = \theta(1-\alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T} \frac{(e^{(r-\beta_0)T} - 1)}{r - \beta_0} \quad (4.118)$$

$$= FVC_{r-\beta_0}(T) (1-\alpha) e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T}. \quad (4.119)$$

Similar al caso anterior, el limite (4.119) representa el valor futuro en el tiempo T de las contribuciones hechas a una tasa $r-\beta_0$, afectadas por la comisión en flujo α , multiplicado por la contribución de la AFP, $e^{\frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)}T}$.

4.6.2. Utilidad exponencial

Tomando en cuenta lo señalado anteriormente, la expresión (4.104), toma la siguiente forma:

$$CE(X^*(T)) = \frac{T\lambda^2}{2c} + \theta(1-\alpha) e^{\int_0^T (r-\beta(s))ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r-\beta(s))ds} dq \quad (4.120)$$

(a) $\beta(s) \rightarrow 0$: aplicando el mismo procedimiento del caso anterior, se llega a la expresión siguiente:

$$CE(X^*(T)) = \frac{T\lambda^2}{2c} + FVC_r(T) (1-\alpha) \quad (4.121)$$

El limite (4.121) representa el valor futuro en el tiempo T de las contribuciones hechas a una tasa r , afectadas por la comisión en flujo α , cuyo valor es sumado al valor agregado por la AFP a la CIC, $\frac{T\lambda^2}{2c}$.

(b) $\beta(s) \rightarrow \beta_0$: aplicando el mismo procedimiento del caso anterior, se llega a la expresión siguiente:

$$CE(X^*(T)) = \frac{T\lambda^2}{2c} + FVC_{r-\beta_0}(T)(1-\alpha)$$

Similar al caso anterior, el limite representa el valor futuro en el tiempo T de las contribuciones hechas a una tasa $r - \beta_0$, afectadas por la comisión en flujo α , cuyo valor es sumado a la contribución de la AFP a la CIC, $\frac{T\lambda^2}{2c}$.

4.7. Comparación de cargos administrativos

Tomando en cuenta que un aportante solamente puede estar afecto a un tipo de cargo administrativo, por saldo o por flujo. Definimos $X_s(t)$ como la riqueza del aportante cuando solamente es afecta a cargos administrativos por saldo ($\beta(t), \alpha(t) = 0$), y $X_f(t)$, como la riqueza del aportante afecta solamente a cargos por flujo ($\alpha(t), \beta(t) = 0$).

4.7.1. Utilidad potencia

Utilizando la expresión (4.103), establecemos el equivalente de certeza para $X_s^*(T)$:

$$\begin{aligned} CE(X_s^*(T)) &= e^{\int_0^T r - \beta(s) + \frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)} ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r - \beta(s)) ds} dq \right) \\ &= e^{\frac{\lambda^2 T}{2(1-\gamma)}} e^{rT - \int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r - \beta(s)) ds} dq \right). \end{aligned} \quad (4.122)$$

Para $X_f^*(T)$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} CE(X_f^*(T)) &= e^{\int_0^T r + \frac{\lambda^2}{2(1-\gamma)} ds} \left((1 - \alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-qr} dq \right) \\ &= e^{\frac{\lambda^2 T}{2(1-\gamma)}} e^{rT} \left((1 - \alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1 - \alpha(q))e^{-qr} dq \right). \end{aligned} \quad (4.123)$$

La comparación de las expresiones anteriores, nos dan una idea de cual es el cargo administrativo más beneficioso para el aportante. Para nosotros esto es importante ya que nos permitirá establecer relaciones entre las funciones determinísticas $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\theta(t)$, lo que nos ayudará a definir su comportamiento en el tiempo.

Para realizar la comparación, utilizamos el ratio de equivalentes de certeza \mathcal{R}_{sf} , cuyo valor indica cual de los dos cargos administrativos genera mayor riqueza en la CIC del aportante. De este modo, establecemos las siguientes relaciones:

1. $\mathcal{R}_{sf} > 1$, el cargo en saldo es más beneficioso que el cargo por flujo.
2. $\mathcal{R}_{sf} < 1$, el cargo en flujo es más beneficioso que el cargo en balance.
3. $\mathcal{R}_{sf} = 1$, ambos cargos son indiferentes óptimos.

Entonces,

$$\mathcal{R}_{sf} = \frac{CE(X_s^*(T))}{CE(X_f^*(T))}. \quad (4.124)$$

Reemplazando las expresiones (4.122) y (4.123) en (4.124), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{sf} &= \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2(1-\gamma)}} e^{rT - \int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq \right)}{e^{\frac{\lambda^2 T}{2(1-\gamma)}} e^{rT} \left((1-\alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1-\alpha(q))e^{-qr} dq \right)} \\ &= \frac{e^{rT - \int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq \right)}{e^{rT} \left((1-\alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1-\alpha(q))e^{-qr} dq \right)}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Cabe resaltar que la expresión (4.125) es independiente del parámetro γ de la función utilidad potencia que ha sido utilizada.

4.7.2. Utilidad exponencial

Utilizamos la misma metodología que en el caso anterior, usando la expresión (4.103), establecemos los equivalentes de certeza para $X_s(T)$ y $X_f(T)$, los cuales vienen dados por,

$$CE(X_s(T)) = \frac{T\lambda^2}{2c} + e^{rT - \int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq \right), \quad (4.126)$$

$$CE(X_f(T)) = \frac{T\lambda^2}{2c} + e^{rT} \left((1-\alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1-\alpha(q))e^{-rq} dq \right). \quad (4.127)$$

La expresión para el ratio entre los equivalentes de certeza queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_{sf} = \frac{\frac{T\lambda^2}{2c} + e^{rT - \int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq \right)}{\frac{T\lambda^2}{2c} + e^{rT} \left((1-\alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1-\alpha(q))e^{-rq} dq \right)}. \quad (4.128)$$

Al igual que en el caso anterior la expresión (4.128) es independiente del parámetro c de la función utilidad exponencial que ha sido utilizada.

4.8. Análisis de las funciones determinísticas del modelo

Vamos a tomar como un caso particular de estudio al SPP, el cual se caracteriza por tener dos esquemas de cargos, cargo por saldo y cargo por flujo, los cuales coexisten simultáneamente. Como es de nuestro conocimiento, a diferencia de la comisión por flujo que es cobrada del salario del aportante, la comisión por saldo se cobra sobre el fondo acumulado y su monto está en incremento conforme el valor de la riqueza aumenta. Resulta lógico suponer que para maximizar la riqueza del aportante, esta comisión debería ser la que disminuya a lo largo del periodo de aporte (T) y si

consideraríamos un que el periodo de aporte tiende a infinito, entonces esta comisión deberá tender ser cero. Vamos a centrar nuestro estudio sobre el comportamiento de la función $\beta(t)$ y adicionalmente haremos un análisis de la tasa de tasa de contribución mensual $\theta(t)$, ambas determinísticas y continuas.

4.8.1. Comisión por saldo $\beta(t)$

Partimos analizando el ratio de equivalentes de certeza entre cargos administrativos \mathcal{R}_{sf} , particularmente en el caso en el que su valor es 1, es decir que el beneficio del aportante es independiente del tipo de comisión que haya elegido para su CIC.

- Utilidad potencia: $\mathcal{R}_{sf} = 1$, resolviendo tenemos la siguiente expresión:

$$e^{rT} e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq \right) = e^{rT} \left((1-\alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1-\alpha(q))e^{-qr} dq \right) \quad (4.129)$$

- Utilidad exponencial: similar al caso anterior, obtenemos:

$$e^{rT} e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \left(x_0 + \int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq \right) = e^{rT} \left((1-\alpha(0))x_0 + \int_0^T \theta(q)(1-\alpha(q))e^{-rq} dq \right) \quad (4.130)$$

Las expresiones (4.129) y (4.130) son iguales, por lo que nuestro análisis es independiente del tipo de utilidad que hemos usado para modelar la riqueza del aportante. Este resultado también lo habíamos remarcado en las secciones 4.5.1 y 4.5.2.

Como nuestro análisis está centrado en la comisión por saldo $\beta(t)$, vamos a suponer inicialmente que el cargo en flujo $\alpha(t)$ y el aporte del contribuyente $\theta(t)$, son constantes; es decir, $\alpha(t) = \alpha$, $\alpha > 0$ y $\theta(t) = \theta$, $\theta > 0$, como la riqueza inicial del aportante es cero $F_0 = 0$, obtenemos lo siguiente:

$$e^{rT} e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \int_0^T \theta e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq = e^{rT} \int_0^T \theta(1-\alpha)e^{-qr} dq, \quad (4.131)$$

$$e^{rT} e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq = e^{rT} (1-\alpha) \int_0^T e^{-qr} dq. \quad (4.132)$$

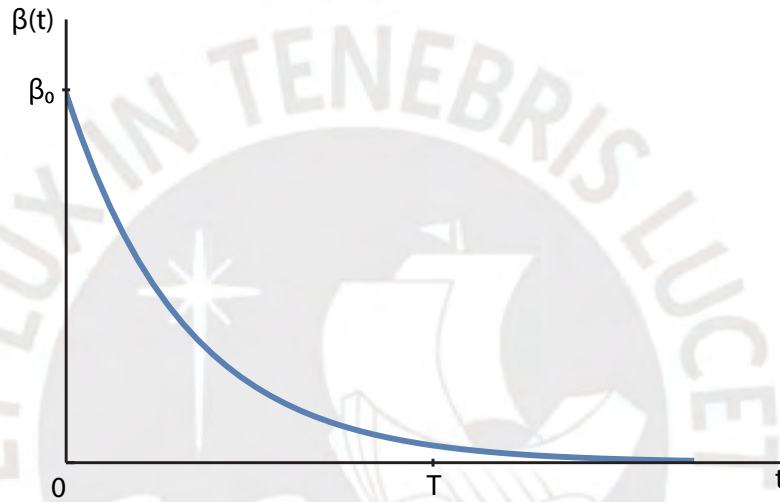
Entonces,

$$e^{rT} e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r-\beta(s)) ds} dq = e^{rT} (1-\alpha) \frac{(1-e^{-rT})}{r}. \quad (4.133)$$

En este punto, vamos a proponer funciones determinísticas y continuas candidatas que solucionen la expresión (4.133) y que tengan una dinámica que se ajuste a la situación del SPP, es decir que cumplan con lo siguiente:

- En el instante $t = 0$ deberán tener un valor conocido, el cual será determinado por su valor actual en el SPP.
- La dinámica a través del tiempo deberá ser de tipo decreciente.
- Deberá tender a cero conforme el periodo de acumulación va en aumento.

FIGURA 4.1: Dinámica para la función candidata que modela la comisión en saldo



Funcion candidata #1: definimos la funcion candidata $\beta_e : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, mediante:

$$\beta_e(t) = \beta_0 e^{-\beta t}, \quad t \in [0, T], \quad (4.134)$$

donde $\beta_0, \beta > 0$ son constantes y $\beta_e(0) = \beta_0$. Se aprecia que la funcion propuesta (4.134) cumple con los requerimientos establecidos anteriormente. Para obtener información de cada uno de sus parámetros, reemplazamos la función candidata en (4.133) y obtenemos lo siguiente:

$$e^{rT} e^{-\int_0^T (\beta_0 e^{-\beta s}) ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r - \beta_0 e^{-\beta s}) ds} dq = e^{rT} (1 - \alpha) \frac{(1 - e^{-rT})}{r}. \quad (4.135)$$

Resolviendo (4.135), la ecuación que debe cumplir β_0 y β es:

$$e^{rT} e^{\frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T}} \left(\frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{r}{\beta}} \left[\Gamma \left(\frac{r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T} \right) - \Gamma \left(\frac{r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right] - (1 - \alpha) \frac{(e^{rT} - 1)}{r} = 0 \quad (4.136)$$

Funcion candidata #2: definimos la funcion candidata $\beta_f(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ mediante:

$$\beta_f(t) = \frac{1}{ct + k}, \quad t \in [0, T], \quad (4.137)$$

donde $c, k > 0$ son constantes y $\beta_f(0) = 1/k$. Esta función también se cumple con los requerimientos que se establecieron anteriormente. Reemplazamos la función candidata en (4.133) y obtenemos:

$$e^{rT} e^{-\int_0^T (\frac{1}{cs+k}) ds} \int_0^T e^{-\int_0^q (r - \frac{1}{cs+k}) ds} dq - (1 - \alpha) \frac{(e^{rT} - 1)}{r} = 0. \quad (4.138)$$

Resolviendo (4.138), encontramos la ecuación que deben cumplir k y c :

$$e^{\frac{kr}{c}} \left(\frac{c}{r(cT + k)} \right)^{1/c} \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{c}, \frac{rk}{c} \right) - \Gamma \left(1 + \frac{1}{c}, \frac{r(Tc + k)}{c} \right) \right] - (1 - \alpha)(1 - e^{-rT}) = 0. \quad (4.139)$$

Es importante mencionar que además de las funciones anteriormente mencionadas, fueron propuestas como posibles candidatas, las siguientes funciones:

- $\beta_3(t) = \frac{1}{t+k}, k > 0$
- $\beta_4(t) = \frac{c}{t+k}, c, k > 0$
- $\beta_5(t) = \beta_0 e^{-t}, \beta_0 > 0$
- $\beta_6(t) = \frac{c}{(t+k)^2}, c, k > 0$

Estas funciones fueron descartadas debido a que tienen pocos parámetros para controlarlas o en otros casos no fue posible establecer expresiones analíticas de solución.

4.8.2. Tasa de contribución mensual $\theta(t)$

Para este caso aplicamos la metodología utilizada para el estudio de la comisión por saldo. Hacemos uso de la expresión (4.130) y vamos a tomar en cuenta las siguientes consideraciones: $x_0 = 0$, $\alpha(t) = \alpha$, $\alpha > 0$ y constante. Para el caso de la comisión sobre el saldo, por cuestiones de simplicidad en los cálculos, usaremos la función $\beta(t) = \beta_0 e^{-\beta t}$, con β_0 y $\beta > 0$ constantes. Reemplazando las variables del modelo en la expresión (4.130), obtenemos lo siguiente:

$$e^{rT - \int_0^T \beta(s) ds} \left(\int_0^T \theta(q) e^{-\int_0^q (r - \beta(s)) ds} dq \right) = e^{rT} \left(\int_0^T \theta(q) (1 - \alpha) e^{-rq} dq \right) \quad (4.140)$$

Función candidata #1: definimos la función $\theta_c : [0, T] \rightarrow R_+$, mediante:

$$\theta_c(t) = \theta_1 e^{\theta t}, \quad (4.141)$$

donde $\theta_1, \theta > 0$, constantes.

Reemplazamos la expresión (4.141) en (4.140) y obtenemos:

$$e^{rT - \int_0^T \beta_0 e^{-\beta s} ds} \left(\int_0^T \theta_1 e^{\theta q} e^{-\int_0^q (r - \beta_0 e^{-\beta s}) ds} dq \right) = e^{rT} \left(\int_0^T \theta_1 e^{\theta q} (1 - \alpha) e^{-r q} dq \right) \quad (4.142)$$

Resolviendo la expresión (4.142), obtenemos:

$$\frac{e^{rT + \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T}}}{\beta} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{r-\theta}{\beta}} \left[\Gamma \left(\frac{r-\theta}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T} \right) - \Gamma \left(\frac{r-\theta}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right] - (1-\alpha) e^{rT} \left(\frac{1 - e^{-(r-\theta)T}}{r-\theta} \right) = 0 \quad (4.143)$$

Nota: la dinámica de la función (θ_c) diverge de las características actuales del crecimiento salarial. Si tomamos el caso particular de un aportante, esta función supondría un crecimiento mantenido en el tiempo, que no alcanza una cota superior. Por esto, recalamos que su uso es de caracter primordialmente didáctico e ilustrativo.

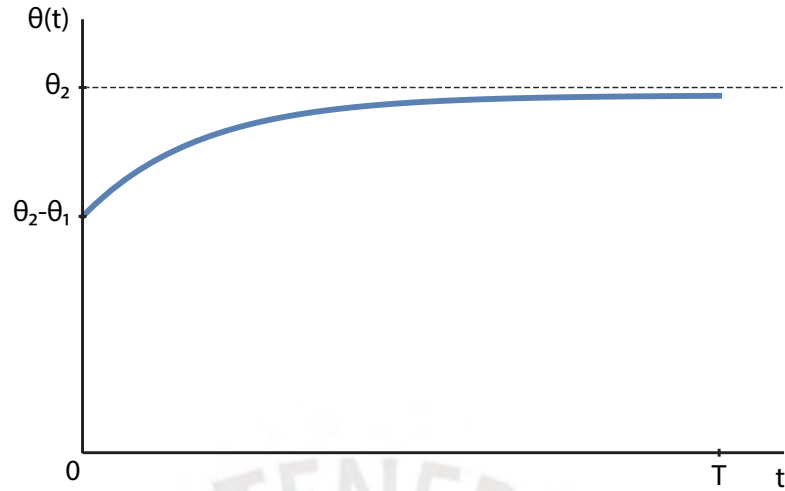
Función candidata #2: definimos la función $\theta_r : [0, T] \rightarrow R_+$, mediante:

$$\theta_r(t) = \theta_2 - \theta_1 e^{-\theta t}, \quad (4.144)$$

donde $\theta_2, \theta_1, \theta > 0$, constantes y $\theta_2 > \theta_1$.

Se ha elegido la expresión (4.144) como candidata, debido a que su dinámica se adapta a las condiciones que buscamos para este parámetro. Por un lado, parte de un valor conocido $\theta_2 - \theta_1$ ($t = 0$) y si hacemos que $t \rightarrow \infty$ la función tenderá al valor de θ_2 . Esto guarda mucho sentido con el comportamiento real de la remuneración de un aportante, parte de un valor conocido y conforme pasa el tiempo tiende a estabilizarse en un valor θ_2 determinado.

FIGURA 4.2: Dinámica para la función candidata que modela la contribución mensual



Vamos a encontrar relaciones entre los parámetros de la ecuación, mediante las siguientes expresiones:

- Valor inicial (θ_0): el valor inicial de la tasa de aportación es un valor conocido, para ello evaluamos la función candidata en 0:

$$\theta_r(0) = \theta_2 - \theta_1 = \theta_0. \quad (4.145)$$

- Tasa de crecimiento inicial (k_2): es el valor instantaneo del crecimiento de los ingresos del aportante en el tiempo 0, lo que determinará la rapidez del crecimiento. Primeramente encontramos la expresión general para la tasa de crecimiento (ρ):

$$\rho(t) = \frac{\theta'_r(t)}{\theta_r(t)} = \frac{\theta\theta_1 e^{-\theta t}}{\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta t}}. \quad (4.146)$$

Entonces:

$$k_2 = \rho(0) = \frac{\theta\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}. \quad (4.147)$$

- Tasa de crecimiento promedio mensual (k_1): es el valor promedio de crecimiento de los ingresos del aportante, el cual puede ser fijado a un valor conocido. Usando la expresión (4.146), encontramos la expresión que la determina:

$$k_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(t) dt = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta t}}{\theta_2 - \theta_1} \right). \quad (4.148)$$

Para el final del periodo T , el valor de k_1 será:

$$k_1(T) = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta T}}{\theta_2 - \theta_1} \right) \quad (4.149)$$

Analizamos el comportamiento de las ecuaciones (4.145), (4.147) y (4.149) cuando existe una variación del valor inicial de la tasa de aporte (θ_0). Para ello, definimos las expresiones:

$$\theta^a(t) = \theta_2^a - \theta_1^a e^{-\theta^a T}, \quad (4.150)$$

$$\theta^b(t) = \theta_2^b - \theta_1^b e^{-\theta^b T}. \quad (4.151)$$

Considerando que la tasa de crecimiento inicial (k_2) y la tasa de crecimiento promedio mensual (k_1) y el periodo de aporte (T) son iguales para ambas expresiones, usando la expresión (4.147) con (4.150) y (4.151), establecemos las siguientes ecuaciones:

$$k_2 = \frac{\theta^a \theta_1^a}{\theta_2^a - \theta_1^a}, \quad (4.152)$$

$$k_2 = \frac{\theta^b \theta_1^b}{\theta_2^b - \theta_1^b}. \quad (4.153)$$

De donde se deduce lo siguiente:

$$\theta^a = \frac{k_2(\theta_2^a - \theta_1^a)}{\theta_1^a}, \quad (4.154)$$

$$\theta^b = \frac{k_2(\theta_2^b - \theta_1^b)}{\theta_1^b}. \quad (4.155)$$

Por otro lado, usando la expresión (4.149) con (4.150) y (4.151), obtenemos:

$$k_1(T) = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\theta_2^a - \theta_1^a e^{-\theta^a T}}{\theta_2^a - \theta_1^a} \right), \quad (4.156)$$

$$k_1(T) = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\theta_2^b - \theta_1^b e^{-\theta^b T}}{\theta_2^b - \theta_1^b} \right). \quad (4.157)$$

De las expresiones (4.156) y (4.157), obtenemos la igualdad:

$$\frac{\theta_2^a - \theta_1^a e^{-\theta^a T}}{\theta_2^a - \theta_1^a} = \frac{\theta_2^b - \theta_1^b e^{-\theta^b T}}{\theta_2^b - \theta_1^b}. \quad (4.158)$$

Simplificando obtenemos:

$$\theta_1^a (\theta_2^b - \theta_1^b) (\theta^b e^{-\theta^a T} - \theta^a e^{-\theta^b T}) + \theta^b (\theta_2^a \theta_1^b - \theta_1^a \theta_2^b) = 0, \quad (4.159)$$

con $\theta_1^a > 0$, $\theta_2^b - \theta_1^b > 0$ y $\theta^b > 0$. Para que se cumpla la igualdad de la expresión (4.159) establecemos las siguientes ecuaciones:

$$\theta^b e^{-\theta^a T} = \theta^a e^{-\theta^b T}, \quad (4.160)$$

$$\theta_2^a \theta_1^b = \theta_1^a \theta_2^b. \quad (4.161)$$

Si suponemos que:

$$\theta^a = \theta^b = \theta, \quad (4.162)$$

entonces las igualdades (4.160) y (4.161) se cumplen simultáneamente. Con este resultado concluimos que el valor de θ no depende del valor inicial ($\theta_0 = \theta_2 - \theta_1$) de la tasa de contribución, sino que su valor queda determinado únicamente por la tasa de crecimiento instantánea inicial k_1 , la tasa de crecimiento promedio mensual k_2 y el periodo de acumulación de riqueza T .

Una vez establecidas las características de la función candidata, procedemos a dar solución al problema de maximización. Para ello, reemplazamos la expresión (4.144) en (4.140) y obtenemos:

$$e^{rT - \int_0^T \beta_0 e^{-\beta s} ds} \left(\int_0^T (\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta q}) e^{-\int_0^q (r - \beta_0 e^{-\beta s}) ds} dq \right) = e^{rT} \left(\int_0^T (\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta q}) (1 - \alpha) e^{-rq} dq \right) \quad (4.163)$$

Resolviendo, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{rT + \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T}}}{\beta} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{r}{\beta}} \left\{ \theta_2 \left[\Gamma \left(\frac{r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T} \right) - \Gamma \left(\frac{r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \theta_1 \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{\theta}{\beta}} \left[\Gamma \left(\frac{\theta + r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T} \right) - \Gamma \left(\frac{\theta + r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right] \right\} \\ & - e^{rT} (1 - \alpha) \left[\frac{\theta_2}{r} (1 - e^{-rT}) - \frac{\theta_1}{r + \theta} (1 - e^{-(r+\theta)T}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.164)$$

Al igual que para el caso de las ecuaciones que definen los parámetros de la tasa de contribución (θ), vamos a analizar el comportamiento de la ecuación (4.164) cuando varían los mismo parámetros. Partimos usando las expresiones (4.150) y (4.151) anteriormente definidas, de lo cual se desprende el cumplimiento de (4.161) y (4.162).

Definimos las ecuaciones:

$$\beta_1(t) = \beta_0 e^{-\beta^a t}, \quad \beta_0 > 0 \text{ y } \beta^a > 0, \quad (4.165)$$

$$\beta_2(t) = \beta_0 e^{-\beta^b t}, \quad \beta^b > 0. \quad (4.166)$$

Utilizando la expresión (4.164), tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{rT + \frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a T}}}{\beta^a} \left(\frac{\beta_0}{\beta^a} \right)^{-\frac{r}{\beta^a}} \left\{ \theta_2^a \left[\Gamma \left(\frac{r}{\beta^a}, \frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a T} \right) - \Gamma \left(\frac{r}{\beta^a}, \frac{\beta_0}{\beta^a} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - \theta_1^a \left(\frac{\beta_0}{\beta^a} \right)^{-\frac{\theta}{\beta^a}} \left[\Gamma \left(\frac{\theta+r}{\beta^a}, \frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a T} \right) - \Gamma \left(\frac{\theta+r}{\beta^a}, \frac{\beta_0}{\beta^a} \right) \right] \right\} \\
& - e^{rT} (1-\alpha) \left[\frac{\theta_2^a}{r} (1 - e^{-rT}) - \frac{\theta_1^a}{r+\theta} (1 - e^{-(r+\theta)T}) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{rT + \frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b T}}}{\beta^b} \left(\frac{\beta_0}{\beta^b} \right)^{-\frac{r}{\beta^b}} \left\{ \theta_2^b \left[\Gamma \left(\frac{r}{\beta^b}, \frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b T} \right) - \Gamma \left(\frac{r}{\beta^b}, \frac{\beta_0}{\beta^b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - \theta_1^b \left(\frac{\beta_0}{\beta^b} \right)^{-\frac{\theta}{\beta^b}} \left[\Gamma \left(\frac{\theta+r}{\beta^b}, \frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b T} \right) - \Gamma \left(\frac{\theta+r}{\beta^b}, \frac{\beta_0}{\beta^b} \right) \right] \right\} \\
& - e^{rT} (1-\alpha) \left[\frac{\theta_2^b}{r} (1 - e^{-rT}) - \frac{\theta_1^b}{r+\theta} (1 - e^{-(r+\theta)T}) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.168}$$

Suponiendo que $\beta^a = \beta^b = \beta$, hacemos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{e^{rT + \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T}}}{\beta} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{r}{\beta}}, \\
G_2 &= \Gamma \left(\frac{r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T} \right) - \Gamma \left(\frac{r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} \right), \\
G_3 &= \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{\theta}{\beta}} \left[\Gamma \left(\frac{\theta+r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T} \right) - \Gamma \left(\frac{\theta+r}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta} \right) \right], \\
G_4 &= e^{rT} (1-\alpha) \frac{(1 - e^{-rT})}{r}, \\
G_5 &= e^{rT} (1-\alpha) \frac{(1 - e^{-(r+\theta)T})}{r+\theta}.
\end{aligned}$$

Reescribimos las ecuaciones (4.167) y (4.168) de la siguiente manera:

$$G_1[G_2\theta_2^a - G_3\theta_1^a] - [G_4\theta_2^a - G_5\theta_1^a] = 0, \tag{4.169}$$

$$G_1[G_2\theta_2^b - G_3\theta_1^b] - [G_4\theta_2^b - G_5\theta_1^b] = 0. \tag{4.170}$$

Simplificando las expresiones (4.169) y (4.170), tenemos:

$$\frac{\theta_2^a}{\theta_1^a} = \frac{\theta_2^b}{\theta_1^b} = \frac{G_1G_3 - G_5}{G_1G_2 - G_4}. \tag{4.171}$$

De donde se deduce que: $\theta_2^a \theta_1^b = \theta_1^a \theta_2^b$, que coincide con lo obtenido en la expresión (4.161).

- Para el otro sentido, partimos de las ecuaciones (4.167) y (4.168), definimos las funciones:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{e^{rT + \frac{\beta_0}{x} e^{-xT}}}{\beta} \left(\frac{\beta_0}{x}\right)^{-\frac{r}{x}}, \\ G_2(x) &= \Gamma\left(\frac{r}{x}, \frac{\beta_0}{x} e^{-xT}\right) - \Gamma\left(\frac{r}{x}, \frac{\beta_0}{x}\right), \\ G_3(x) &= \left(\frac{\beta_0}{x}\right)^{-\frac{\theta}{x}} \left[\Gamma\left(\frac{\theta+r}{x}, \frac{\beta_0}{x} e^{-xT}\right) - \Gamma\left(\frac{\theta+r}{x}, \frac{\beta_0}{x}\right) \right], \end{aligned}$$

Reescribimos las ecuaciones (4.167) y (4.168) de la siguiente manera:

$$G_1(\beta^a)[G_2(\beta^a)\theta_2^a - G_3(\beta^a)\theta_1^a] - [G_4\theta_2^a - G_5\theta_1^a] = 0, \quad (4.172)$$

$$G_1(\beta^b)[G_2(\beta^b)\theta_2^b - G_3(\beta^b)\theta_1^b] - [G_4\theta_2^b - G_5\theta_1^b] = 0. \quad (4.173)$$

Definimos $f_1(x) = G_1(x)G_2(x) - G_4$ y $f_2(x) = G_1(x)G_3(x) - G_5$, entonces:

$$\theta_2^a f_1(\beta^a) = \theta_2^a f_2(\beta^a), \quad (4.174)$$

$$\theta_2^b f_1(\beta^b) = \theta_2^b f_2(\beta^b). \quad (4.175)$$

Con la condición $\theta_2^a \theta_1^b = \theta_1^a \theta_2^b$, obtenemos:

$$\frac{\theta_2^a}{\theta_1^a} = \frac{\theta_2^b}{\theta_1^b} = \frac{f_2(\beta^a)}{f_1(\beta^a)} = \frac{f_2(\beta^b)}{f_1(\beta^b)} \quad (4.176)$$

De donde se deduce que $\beta^a = \beta^b$. Concluimos que el valor de β tampoco depende del valor inicial ($\theta_0 = \theta_2 - \theta_1$) de la tasa de contribución, sino únicamente por la tasa de crecimiento inicial (k_1), la tasa de crecimiento promedio mensual k_2 y el periodo de acumulación de riqueza (T).

Nota: en caso se considere a la comisión en flujo como una función $\alpha(t)$, las ecuaciones (4.167) y (4.168) tendrán, respectivamente los siguientes términos adicionales:

$$\dots - \theta_2^a \int_0^T e^{-rq} \alpha(q) dq + \theta_1^a \int_0^T e^{-(r+\theta)q} \alpha(q) dq = 0,$$

$$\dots - \theta_2^b \int_0^T e^{-rq} \alpha(q) dq + \theta_1^b \int_0^T e^{-(r+\theta)q} \alpha(q) dq = 0.$$

Ya que la función $\alpha(t)$ es independiente de θ_2^a , θ_1^a , θ_2^b y θ_1^b entonces la demostración se

puede extender agregando estos términos y obteniendo el mismo resultado.

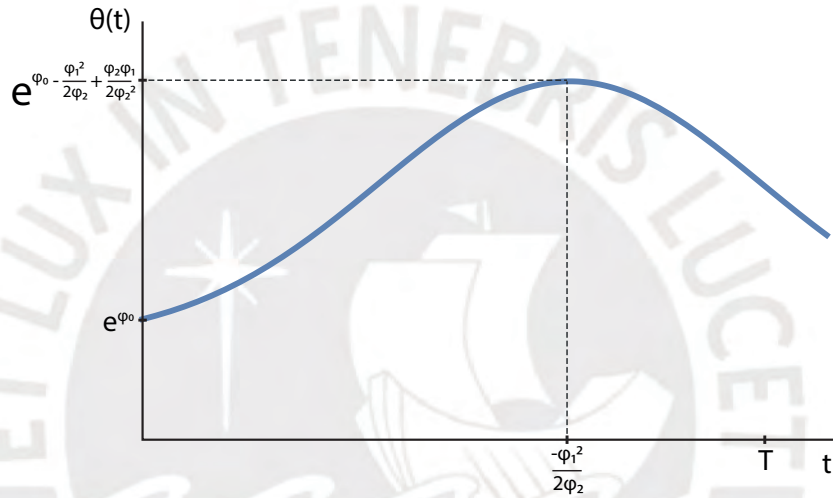
Función candidata #3: definimos la función $\theta_g(t) : [0, T] \rightarrow R_+$ mediante:

$$\theta_g(t) = e^{\varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2}, \quad (4.177)$$

donde $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ constantes.

Dinámica de la función $\theta_g(t)$

FIGURA 4.3: Dinámica para la función candidata que modela la contribución mensual



Al igual que con la función candidata #2 vamos a calcular los parámetros:

- Valor inicial (θ_0): el valor inicial de la tasa de aportación es un valor conocido, para ello evaluamos la función candidata en 0:

$$\theta_g(0) = e^{\varphi_0}. \quad (4.178)$$

- Tasa de crecimiento inicial (k_2): valor instantáneo del crecimiento de los ingresos del aportante en el tiempo 0. La expresión general para la tasa de crecimiento (ρ):

$$\rho(t) = \frac{\theta'_g(t)}{\theta_g(t)} = \frac{(\varphi_1 + 2\varphi_2 t)e^{\varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2}}{e^{\varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2}} = \varphi_1 + 2\varphi_2 t. \quad (4.179)$$

Entonces:

$$k_2 = \rho(0) = \varphi_1. \quad (4.180)$$

- Tasa de crecimiento promedio mensual (k_1): valor promedio de crecimiento de los ingresos del aportante, fijado a un valor conocido. Usando la expresion (4.179), encontramos la expresión que la determina:

$$k_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(t) dt = \varphi_1 + \varphi_2 t^2. \quad (4.181)$$

Para el final del periodo T , el valor de k_1 será:

$$k_1(T) = \varphi_1 + \varphi_2 T^2. \quad (4.182)$$

Analizamos el comportamiento de las ecuaciones (4.178), (4.180) y (4.182) cuando existe un variación del valor inicial de la tasa de aporte (θ_0) definiendo:

$$\theta^a(t) = e^{\varphi_0^a + \varphi_1^a t + \varphi_2^a t^2}, \quad (4.183)$$

$$\theta^b(t) = e^{\varphi_0^b + \varphi_1^b t + \varphi_2^b t^2}, \quad (4.184)$$

Assumiendo que las tasas k_1 y k_2 son iguales en tiempo $t = T$, se tiene:

$$k_1 = \varphi_1^a + \varphi_2^a T^2 = \varphi_1^b + \varphi_2^b T^2 \quad (4.185)$$

$$k_2 = \varphi_1^a = \varphi_1^b \quad (4.186)$$

Se concluye que $\varphi_1^a = \varphi_1^b$ y $\varphi_2^a = \varphi_2^b$, entonces podemos decir que dado cualquier valor inicial (e^{φ_0}), fijando la tasa de crecimiento instantánea k_1 , la tasa de crecimiento promedio mensual k_2 y el periodo de acumulación T definimos el comportamiento de la tasa de contribución.

Retomando el problema de maximización, reemplazando la expresión (4.177) en (4.140) y utilizando la función $\beta_e(t)$ se tiene:

$$e^{rT - \int_0^T \beta_0 e^{-\beta s} ds} \left(\int_0^T e^{\varphi_0 + \varphi_1 q + \varphi_2 q^2} e^{-\int_0^q (r - \beta_0 e^{-\beta s}) ds} dq \right) = e^{rT} \left(\int_0^T e^{\varphi_0 + \varphi_1 q + \varphi_2 q^2} (1 - \alpha) e^{-rq} dq \right) \quad (4.187)$$

Resolviendo tenemos:

$$e^{\frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T}} \int_0^T e^{(\varphi_1 - r)q + \varphi_2 q^2 - \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta q}} dq = (1 - \alpha) \int_0^T e^{(\varphi_1 - r)q + \varphi_2 q^2} dq \quad (4.188)$$

$$e^{\frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta T}} \int_0^T e^{(\varphi_1 - r)q + \varphi_2 q^2 - \frac{\beta_0}{\beta} e^{-\beta q}} dq = (1 - \alpha) \frac{e^{-\frac{(\varphi_1 - r)^2}{4\varphi_2}} \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\varphi_2}} \left[-erfi\left(\frac{\varphi_1 - r}{2\sqrt{\varphi_2}}\right) + erfi\left(\frac{2T\varphi_2 + \varphi_1 - r}{2\sqrt{\varphi_2}}\right) \right] \quad (4.189)$$

Analizamos que sucede con la ecuación (4.188) cuando existe una variación en los parámetros, para lo cual definimos utilizamos las funciones (4.165) en la expresión

antes mencionada. Entonces se tiene:

$$e^{\frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a T}} \int_0^T e^{(\varphi_1^a - r)q + \varphi_2^a q^2 - \frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a q}} dq = (1 - \alpha) \int_0^T e^{(\varphi_1^a - r)q + \varphi_2^a q^2} dq \quad (4.190)$$

$$e^{\frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b T}} \int_0^T e^{(\varphi_1^b - r)q + \varphi_2^b q^2 - \frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b q}} dq = (1 - \alpha) \int_0^T e^{(\varphi_1^b - r)q + \varphi_2^b q^2} dq \quad (4.191)$$

Sabiendo que $\varphi_1^a = \varphi_1^b = \varphi_1$ y $\varphi_2^a = \varphi_2^b = \varphi_2$, entonces

$$e^{\frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a T}} \int_0^T e^{(\varphi_1 - r)q + \varphi_2 q^2 - \frac{\beta_0}{\beta^a} e^{-\beta^a q}} dq = e^{\frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b T}} \int_0^T e^{(\varphi_1 - r)q + \varphi_2 q^2 - \frac{\beta_0}{\beta^b} e^{-\beta^b q}} dq, \quad (4.192)$$

de donde se deduce que $\beta^a = \beta^b$.

4.9. Análisis del valor esperado de la riqueza óptima del aportante en base a las funciones determinísticas propuestas

Un aspecto importante a conocer es el valor esperado de la riqueza del aportante $E[X(t)]$, esto nos brindará información importante sobre el comportamiento del proceso acumulativo de la riqueza del aportante. Para realizar este análisis, se seguirá la metodología desarrollada por Vigna (2014) y por cuestiones de simplicidad, vamos a utilizar las ecuaciones que describen a la comisión por saldo $\beta_e(t)$ y la tasa de contribución $\theta_r(t)$ las que reemplazaremos en las expresiones obtenidas para el valor esperado de la riqueza del aportante.

4.9.1. Utilidad Potencia

Partimos reemplazando las expresiones (4.134) y (4.144) en la ecuación (4.96). Siendo $\alpha(t) = \alpha$, se tiene

$$E[X^*(t)] = e^{\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)t}} e^{\int_0^t (r - \beta_0 e^{-\beta k}) dk} \left[X_0(1 - \alpha) + \int_0^t e^{-\int_0^g (r - \beta_0 e^{-\beta k}) dk} e^{-\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)g}} \left((\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta g})(1 - \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda^2}{(1-\gamma)} \int_g^T e^{-\int_g^q (r - \beta_0 e^{-\beta s}) ds} (\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta q})(1 - \alpha) dq \right) dg \right]. \quad (4.193)$$

Resolviendo, se obtiene

$$\begin{aligned}
E[X^*(t)] = & (1-\alpha)e^{(r+m)t+be^{-\beta t}} \left\{ X_0 e^{-b} + \frac{1}{\beta} \left(-\theta_2 b^{-\frac{r+m}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{r+m}{\beta}, b\right) - \Gamma\left(\frac{r+m}{\beta}, be^{-\beta t}\right) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \theta_1 b^{-\frac{r+m+\theta}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{r+m+\theta}{\beta}, b\right) - \Gamma\left(\frac{r+m+\theta}{\beta}, be^{-\beta t}\right) \right] \right) \right\} \\
& + \frac{m}{\beta} \left[-\theta_2 b^{-\frac{r}{\beta}} \int_0^t e^{-ms} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}, be^{-\beta s}\right) ds + \theta_1 b^{-\frac{r+\theta}{\beta}} \int_0^t e^{-ms} \Gamma\left(\frac{r+\theta}{\beta}, be^{-\beta s}\right) ds \right. \\
& \left. + \frac{\theta_2}{m} b^{-\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta}, be^{-\beta T}\right) (1 - e^{-mt}) - \frac{\theta_1}{m} b^{-\frac{r+\theta}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r+\theta}{\beta}, be^{-\beta T}\right) (1 - e^{-mt}) \right],
\end{aligned} \tag{4.194}$$

donde $b = \frac{\beta_0}{\beta}$ y $m = \frac{\lambda^2}{1-\gamma}$.

4.9.2. Utilidad Exponencial

Reemplazamos las expresiones (4.134) y (4.144) en la ecuación (4.97) y con $\alpha(t) = \alpha$, se tiene

$$\begin{aligned}
E[X^*(t)] = & e^{\int_0^t (r-\beta_0 e^{-\beta k}) dk} \left[X_0 (1-\alpha) + \int_0^t e^{-\int_0^g (r-\beta_0 e^{-\beta k}) dk} \left(\frac{\lambda^2}{c} e^{-\int_0^T (r-\beta_0 e^{-\beta s}) ds} \right. \right. \\
& \left. \left. + (\theta_2 - \theta_2 e^{-\theta g}) (1-\alpha) \right) dg \right].
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Resolviendo, se tiene

$$\begin{aligned}
E[X^*(t)] = & e^{rt+be^{-\beta t}} \left[X_0 (1-\alpha) e^{-b} + \frac{\lambda^2}{c} e^{-rT-be^{-\beta T}} t - (1-\alpha) \frac{\theta_2}{\beta} b^{-\frac{r}{\beta}} \left(\Gamma\left(\frac{r}{\beta}, b\right) - \Gamma\left(\frac{r}{\beta}, be^{-\beta t}\right) \right) \right. \\
& \left. + (1-\alpha) \frac{\theta_1}{\beta} b^{-\frac{r+\theta}{\beta}} \left(\Gamma\left(\frac{r+\theta}{\beta}, b\right) - \Gamma\left(\frac{r+\theta}{\beta}, be^{-\beta t}\right) \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.196}$$

donde $b = \frac{\beta_0}{\beta}$.

Cada uno de los casos que han sido modelados en el presente capítulo, han dado como resultado la obtención de expresiones analíticas, mediante las cuales se vinculan cada uno de los parámetros que las conforman. Para el caso de la comisión por saldo se obtuvieron las expresiones (4.136) y (4.139) para las funciones candidatas #1 y #2 que fueron propuestas. Por otro lado cuando se trató el caso de la tasa de contribución, se obtuvieron las expresiones (4.143) y (4.163) para las funciones candidatas #1 y #2 que fueron propuestas para ese caso. Tal como se verá en el siguiente capítulo, estos resultados hacen posible la realización de simulaciones numéricas en concordancia con la realidad del SPP.

Capítulo 5

Aplicación numérica

En este capítulo presentamos una aplicación numérica de los resultados teóricos obtenidos en el capítulo anterior, esto nos brindará un mayor panorama acerca de los alcances de nuestra investigación y como estos pueden ser una guía para personas que están involucradas con el SPP. Primeramente, vamos a utilizar expresiones analíticas de $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$ en las que iremos variando el periodo de jubilación (T), para estudiar la dinámica que debe seguir la comisión en saldo que ayude a la acumulación de riqueza terminal del aportante.

5.1. Aplicación numérica para la comisión por saldo

5.1.1. Parámetros del modelo

Para realizar la simulación de nuestro modelo, es necesario definir los valores de algunos parámetros que actualmente son usados por las AFPs. De este modo, consideramos lo siguiente:

- (a) Comisión por saldo inicial: $\beta(0) = 1.2\%$ anual = 0.0995% mensual.
- (b) Tasa de libre riesgo: $r = 0.33\%$ mensual.
- (c) Comisión por flujo: $\alpha = 0.1717$.
- (d) Periodo de acumulación: $T = (65 - E) \times 12$ meses, donde E es la edad de ingreso del contribuyente al SPP. Para los propósitos de nuestro estudio vamos a utilizar los periodos de acumulación en meses $T=540, 480, 456, 420, 384, 348$.

Los valores iniciales de las comisiones y tasas, han sido establecidos en base a los parámetros que rigen el sistema pensionario actual. Los periodos de jubilación en meses de $T = 540, 480, 456, 420, 384, 348$, que corresponden en años de 45, 41, 38, 35, 32

y 29 respectivamente. Esto a su vez corresponde a edades de ingreso (E) al sistema pensionario de: 20, 25, 27, 30, 33 y 36 años respectivamente. Asimismo, consideramos que no existe, en términos prácticos, una edad de inicio de aporte por encima de los 37 años ($T=336$ meses).

5.1.2. Aplicación numérica para $\beta_e(t)$

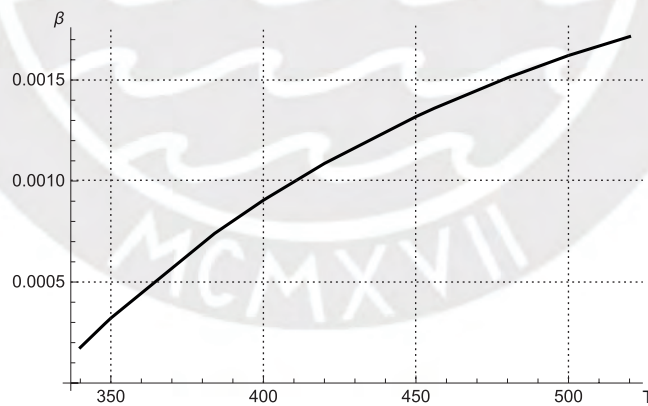
Para este análisis, reemplazamos los valores de los parámetros de la sección anterior en la expresión (4.136), de este modo definimos la función $\beta_e(t)$ para periodos de jubilación (T) en meses. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos.

TABLA 5.1: Comisión por saldo: $\beta_e(t)$ para diferentes periodos de retiro

T (meses)	T (años)	β	$\beta_e(t)$ mensual	$\beta_e(T)$ % anual
540	45	0.001808218	$0.000995e^{-0.001808218t}$	0.449721
480	40	0.001511138	$0.000995e^{-0.001511138t}$	0.578083
456	38	0.001360143	$0.000995e^{-0.001360143t}$	0.642161
420	35	0.001086964	$0.000995e^{-0.001086964t}$	0.756377
384	32	0.000740513	$0.000995e^{-0.000740513t}$	0.898483
348	29	0.000292930	$0.000995e^{-0.000292930t}$	1.070728

Con los datos obtenidos en la Tabla 5.1 podemos establecer que existe una relación entre el valor de β y el periodo de jubilación T , la cual se muestra en la Figura 5.1.

FIGURA 5.1: β vs. T



5.1.3. Aplicación numérica para $\beta_f(t)$

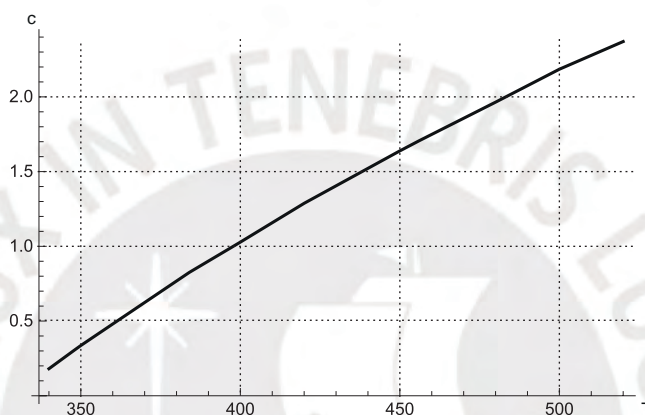
Siguiendo la metodología anterior, hacemos lo mismo para $\beta_f(t)$ utilizando la formula (4.139), obtenemos la Tabla 5.2:

Del mismo modo, con los datos obtenidos en la Tabla 5.1 establecemos que existe una relación entre el valor de c y el periodo de jubilación T , la cual se muestra en la figura 5.2.

TABLA 5.2: Comisión por saldo: $\beta_f(t)$ para diferentes periodos de retiro

T (meses)	T (años)	c	$\beta_f(t)$ mensual	$\beta_f(T)$ % anual
540	45	2.5555054	$(2.5555054t + (0.000995)^{-1})^{-1}$	0.503145
480	40	1.9645220	$(1.9645220t + (0.000995)^{-1})^{-1}$	0.616018
456	38	1.7058455	$(1.7058455t + (0.000995)^{-1})^{-1}$	0.673064
420	35	1.2877783	$(1.2877783t + (0.000995)^{-1})^{-1}$	0.776251
384	32	0.8252976	$(0.8252976t + (0.000995)^{-1})^{-1}$	0.907757
348	29	0.3056155	$(0.3056155t + (0.000995)^{-1})^{-1}$	1.072660

FIGURA 5.2: c vs. T



5.1.4. Comparación entre funciones candidatas $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$

Las funciones candidatas nos brindan información importante sobre la dinámica de decrecimiento que debe tener la comisión por flujo $\beta(t)$, que optimiza el valor del fondo acumulado en una CI. Las Figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 comparan las dos funciones candidatas para la comisión mencionada, para los periodos de acumulación (T) de 40, 38, 35, 32 y 29 años respectivamente. Las comisiones de flujo $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$ de las Tablas (5.1) y (5.2) están expresadas en meses, para esta sección hemos transformado estas tasas a valores anuales.

FIGURA 5.3: Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=540$ meses

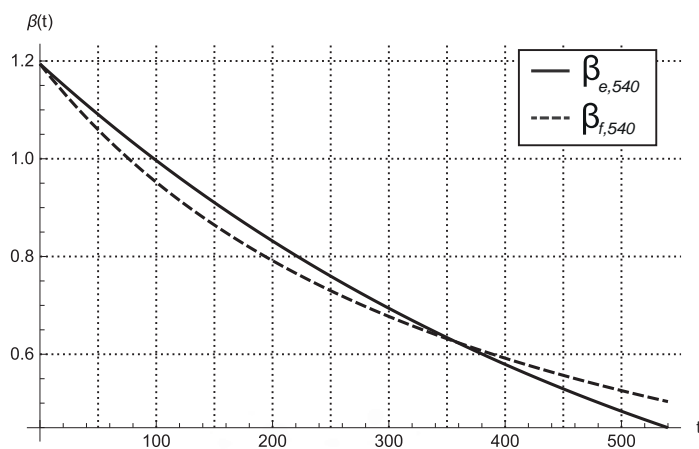


FIGURA 5.4: Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=480$ meses

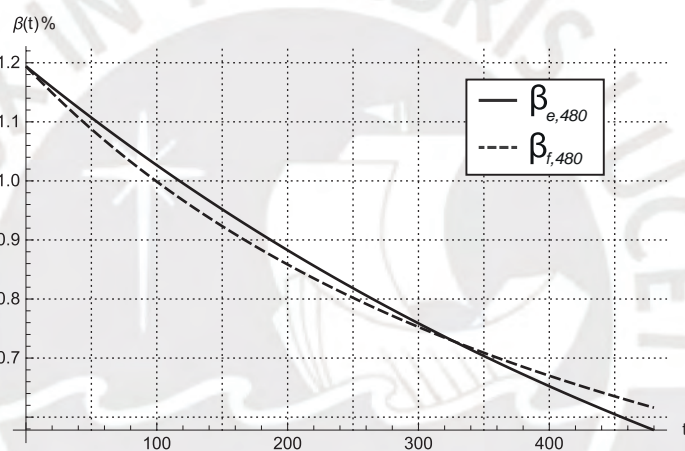


FIGURA 5.5: Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=456$ meses

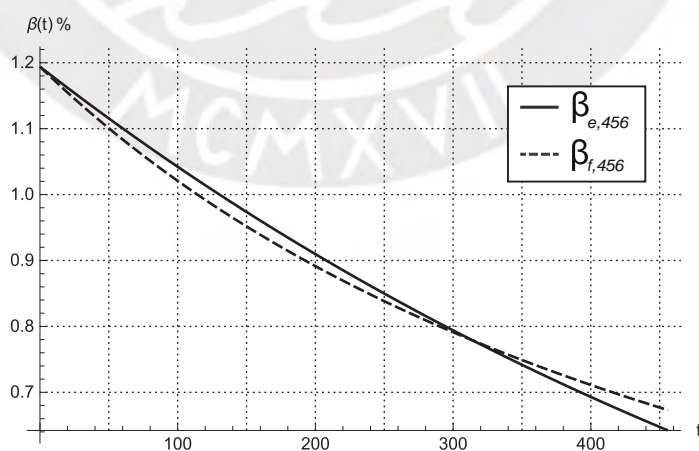


FIGURA 5.6: Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=420$ meses

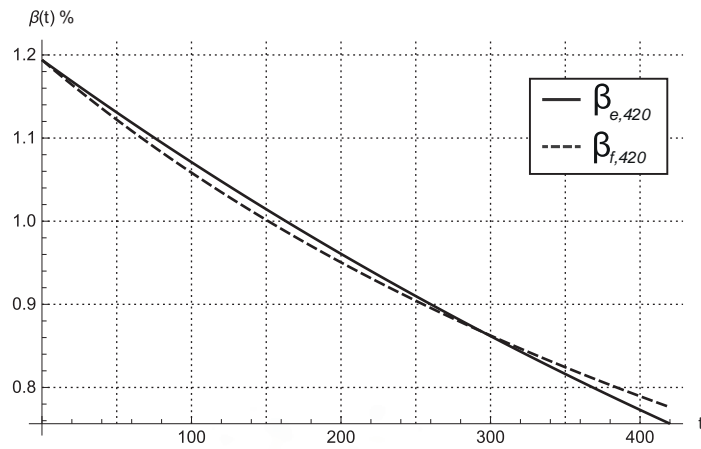


FIGURA 5.7: Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=384$ meses

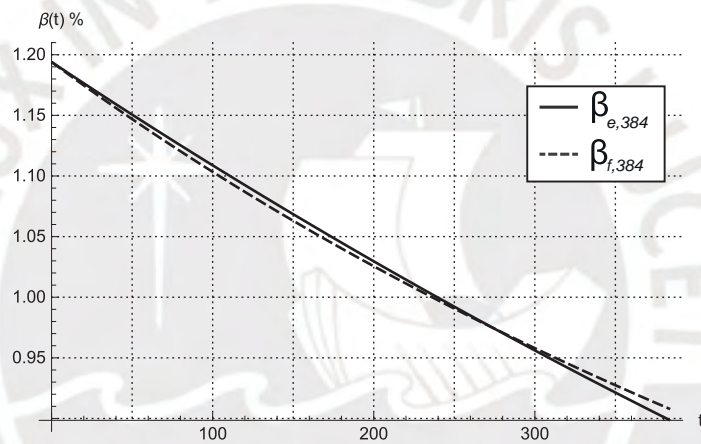
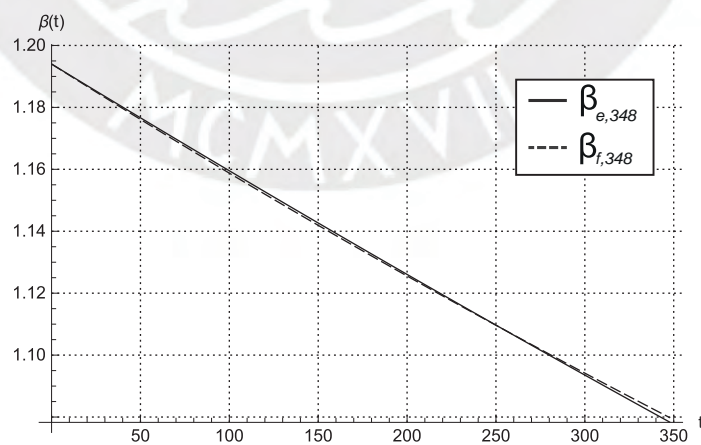


FIGURA 5.8: Comisión por saldo β_e y β_f anual para $T=348$ meses



De las figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 es posible observar un patrón de comportamiento entre ambas funciones, cuando es fijado el periodo de acumulación (T). De ello podemos establecer lo siguiente:

- La función $\beta_f(t)$ inicialmente tiene una caída más rápida que la función $\beta_e(t)$.
- Existe un punto en el cual ambas funciones igualan sus valores.
- Después del punto de intersección, la caída de la función $\beta_f(t)$ se vuelve más lenta que la pendiente de $\beta_e(t)$.
- La diferencia entre las funciones $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$ es proporcional al periodo de retiro (T), es decir que a medida que este es menor, las funciones se aproximan una a la otra.
- La función $\beta_e(t)$ tiene una tasa de decrecimiento de $-\beta$. Para el caso de $\beta_f(t)$, no es posible establecer un valor concreto.

Las figuras 5.9 y 5.10 muestran una comparativa entre de cada función β de manera independiente cuando se varia el tiempo de aporte (T). Igualmente que en el caso anterior, los periodos de acumulación (T) son los mismos.

FIGURA 5.9: Comisión por saldo β_e anual para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540

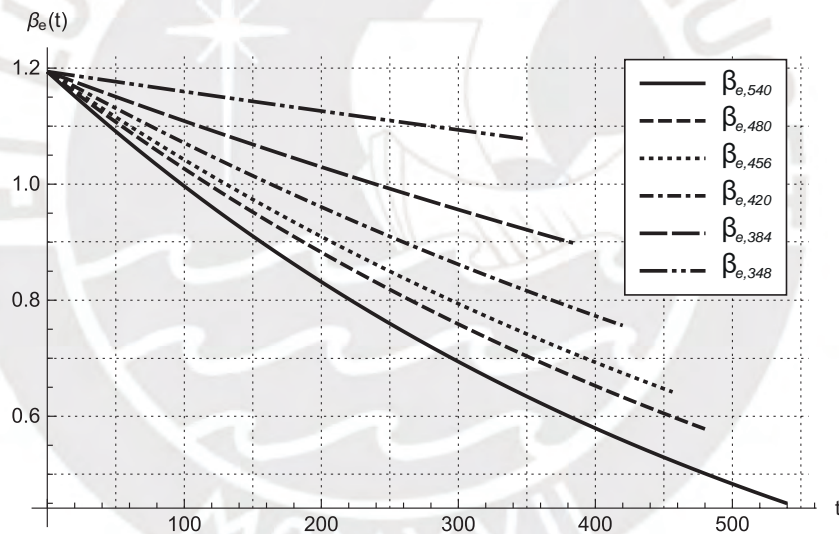
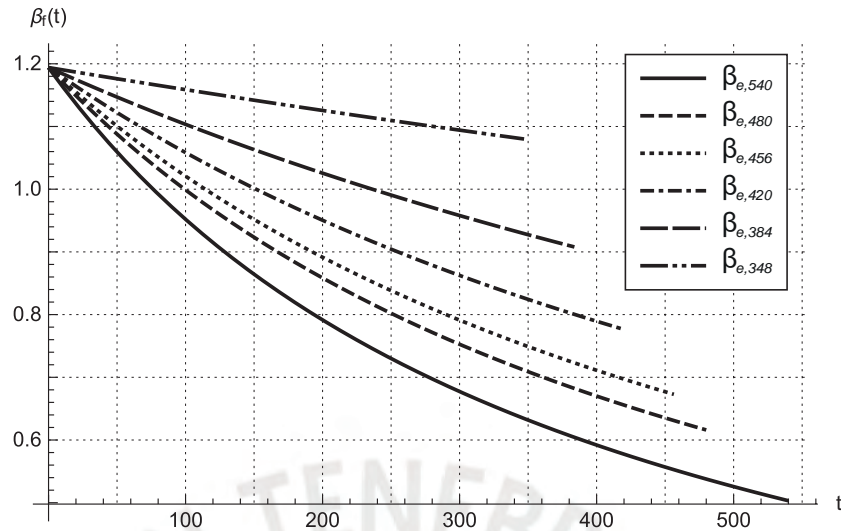


FIGURA 5.10: Comisión por saldo β_f anual para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540



Del análisis de las figuras 5.9 y 5.10, podemos considerar lo siguiente:

- El valor de la comisión por flujo es menor cuanto mayor sea el tiempo de aporte (T).
- La dinámica de ambas funciones candidatas $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$ es bastante similar.

5.2. Aplicación numérica para la tasa de contribución

5.2.1. Parámetros del modelo

Utilizaremos varios de los parámetros utilizados en la Sección 5.1:

- (a) Comisión en balance inicial: $\beta(0) = 1.2\%$ anual = 0.0995% mensual.
- (b) Tasa de libre riesgo: $r = 0.33\%$ mensual.
- (c) Comisión por flujo: $\alpha = 0.1717$.
- (d) Tasa de crecimiento de contribución: 3% anual = 0.25% mensual.
- (e) Periodo de acumulación: $T = (65 - E) \times 12$ meses, donde E es la edad de ingreso del contribuyente al SPP. Para los propósitos de nuestro estudio vamos a utilizar los periodos de jubilación en meses $T=540, 480, 456, 420, 384, 348$.

5.2.2. Aplicación numérica para $\theta_c(t)$

Para obtener los resultados numéricos, reemplazamos los valores de los parámetros de la sección anterior en la expresión (4.143), de este modo definimos la función $\beta_e(t)$ para

periodos de jubilación (T) en meses. Asimismo, utilizamos el valor de 3% para la tasa de crecimiento de contribucion mensual. Los resultados obtenidos son los siguientes:

TABLA 5.3: Comisión por saldo: $\beta_e(t)$ para diferentes periodos de retiro

T (meses)	T (años)	β	$\beta_e(t)$ mensual	$\beta_e(T)$ % anual
540	45	0.0011310	$0.000995e^{-0.0011310t}$	0.6482
480	40	0.0008593	$0.000995e^{-0.0008593t}$	0.7904
456	38	0.0007190	$0.000995e^{-0.0007190t}$	0.8602
420	35	0.0004625	$0.000995e^{-0.0004625t}$	0.9832
384	32	0.0001336	$0.000995e^{-0.0001336t}$	1.1342
348	29	∅	∅	∅

5.2.3. Aplicación numérica para $\theta_r(t)$

Nuestra aplicación se basará en la comparación de los valores obtenidos para dos aportantes del SPP (θ_r^a, θ_r^b) con sueldo inicial diferente, pero con la tasa de crecimiento inicial, promedio y el periodo de aporte iguales. Entonces tenemos las siguientes expresiones:

$$\theta_r^a(t) = \theta_2^a - \theta_1^a e^{-\theta^a t}, \quad (5.1)$$

$$\theta_r^b(t) = \theta_2^b - \theta_1^b e^{-\theta^b t}. \quad (5.2)$$

Primeramente vamos a determinar los valores de los parámetros que componen la función $\theta_r^a(t)$ y $\theta_r^b(t)$, sin considerar que $\theta^a = \theta^b$. Para esto, utilizaremos las expresiones (4.145), (4.147) y (4.149), tomando en cuenta lo siguiente:

- Valor inicial de la tasa de aporte: $\theta_0^a = 85$, $\theta_0^b = 200$ soles (representa el 10% del salario de los aportantes, 850 y 2,000 soles respectivamente). Entonces:

$$\theta_2^a - \theta_1^a = 85, \quad (5.3)$$

$$\theta_2^b - \theta_1^b = 200. \quad (5.4)$$

- Tasa de crecimiento inicial (k_2): 1%. Entonces:

$$\frac{\theta^a \theta_1^a}{\theta_2^a - \theta_1^a} = 0.01, \quad (5.5)$$

$$\frac{\theta^b \theta_1^b}{\theta_2^b - \theta_1^b} = 0.01. \quad (5.6)$$

- Tasa de crecimiento promedio mensual (k_1): 3 % anual = 0.25 % mensual. Entonces:

$$\frac{1}{T} \ln \left(\frac{\theta_2^a - \theta_1^a e^{-\theta^a T}}{\theta_2^a - \theta_1^a} \right) = 0.0025, \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{T} \ln \left(\frac{\theta_2^b - \theta_1^b e^{-\theta^b T}}{\theta_2^b - \theta_1^b} \right) = 0.0025. \quad (5.8)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones conformado por las expresiones (5.3),(5.5), (5.7) y (5.4),(5.6), (5.8) respectivamente, para diferentes periodos de aporte (T), obtenemos:

TABLA 5.4: Valores de los parámetros θ para diferentes periodos de aporte

T (meses)	T (años)	$\theta_r^a(\theta_0 = 850)$			$\theta_r^b(\theta_0 = 2,000)$		
		θ_2^a	θ_1^a	θ^a	θ_2^b	θ_1^b	θ^b
540	45	402.926	317.926	0.00267357	948.061	748.061	0.00267357
480	40	327.089	242.089	0.00351110	769.622	569.622	0.00351110
456	38	302.271	217.271	0.00391216	711.226	511.226	0.00391216
420	35	269.583	184.583	0.00460497	634.313	434.313	0.00460497
384	32	241.396	156.396	0.00543492	567.992	367.992	0.00543492
348	29	216.888	131.888	0.00644486	510.327	310.327	0.00644486

Con los valores obtenidos, comprobamos que el valor de θ^a y θ^b es el mismo para ambos aportantes. Es posible determinar la evolución de la tasa de contribución para cada uno de los aportantes, mediante las siguientes figuras.

FIGURA 5.11: Evolución de la tasa de contribución del aportante a , $\theta_r^a(t)(\theta_0 = 85)$ para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540 meses

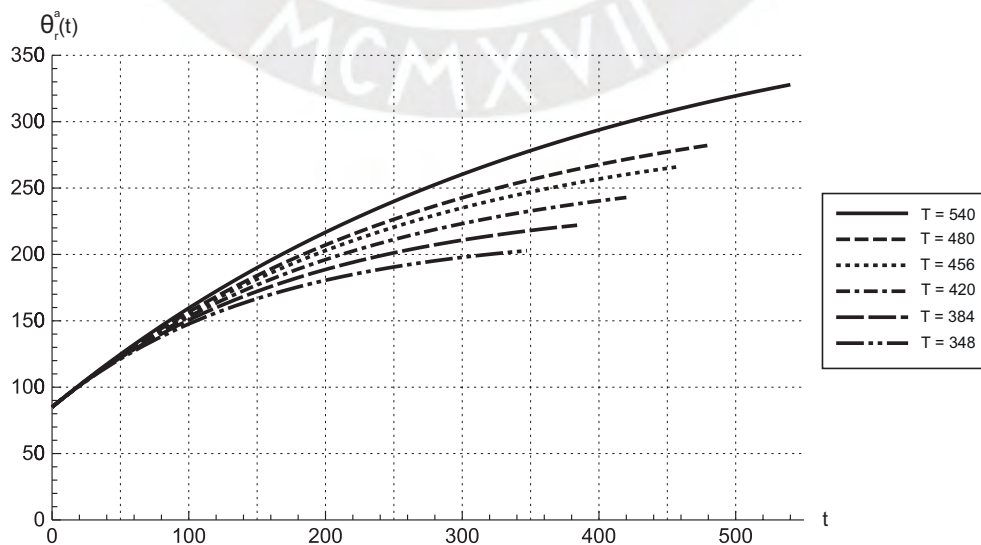
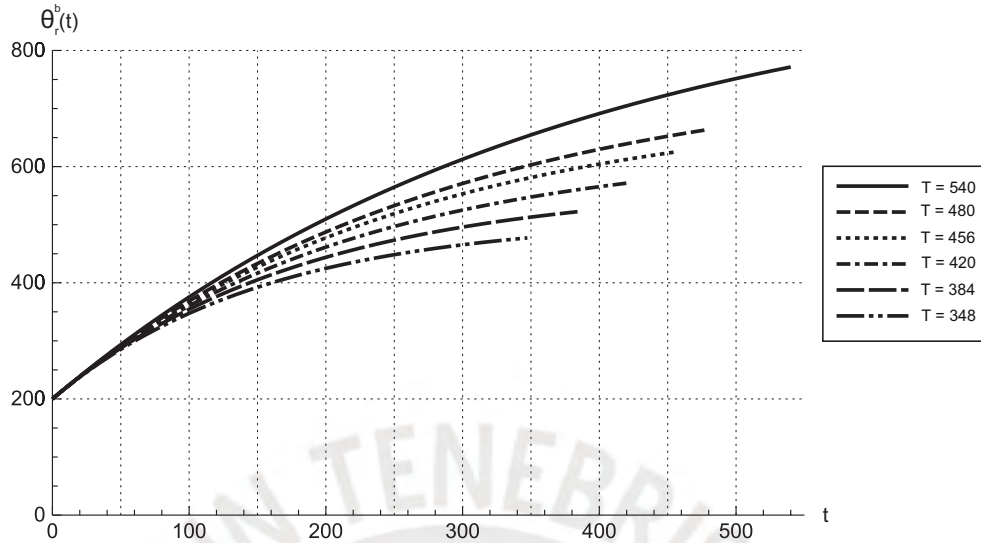


FIGURA 5.12: Evolución de la tasa de contribución del aportante b , $\theta_r^b(t)(\theta_0 = 200)$ para $T=348, 384, 420, 456, 480$ y 540 meses



Conocidos los valores de las tasas de aporte de cada uno de los aportantes, vamos a encontrar los valores de los parámetros de la comisión por saldo $\beta_e(t)$.

TABLA 5.5: Valores de los parámetros β para diferentes periodos de aporte

T (meses)	T (años)	$\theta_0 = 85$		$\theta_0 = 200$	
		β^a	$\beta_e^a(T)$ % anual	β^b	$\beta_e^b(T)$ % anual
540	45	0.00121484	0.619583	0.00121484	0.619583
480	40	0.00094749	0.757685	0.00094749	0.757685
456	38	0.00080896	0.825653	0.00080896	0.825653
420	35	0.00055516	0.945669	0.00055516	0.945669
384	32	\nexists^a	\nexists	\nexists	\nexists
348	29	\nexists^a	\nexists	\nexists	\nexists

^aIndica que la comisión por saldo resulta más beneficiosa para el aportante

Los resultados de la Tabla 5.5 comprueban que los valores de β^a y β^b son iguales. Lo cual refuerza nuestra afirmación de que dicho valor solamente depende del periodo de retiro T , la tasa de contribución inicial y la promedio. Se aprecia que para los periodos de jubilación de 384 y 348 meses no es posible encontrar esta tasa, en otras palabras la comisión por saldo resulta siempre mejor que la de flujo. Para periodos de aporte más largos la comisión por flujo es más atractiva que la comisión por saldo.

5.2.4. Comparación numérica de los valores de la comisión en saldo θ

Después de obtener los valores numéricos de los modelos usados, el primero que considera la tasa de contribución θ constante y el segundo variable $\theta(t)$, resulta importante hacer un comparativo de los valores anuales de la comisión por saldo β que alcanza para los diferentes periodos de aporte T .

TABLA 5.6: Comparación de los valores de la comisión en saldo β para las diferentes funciones del modelo

T (meses)	T (años)	$\beta(T)$ % anual			
		$\beta_f(\theta \text{ cte})$	$\beta_e(\theta \text{ cte})$	$\theta_c(\beta_e)$	$\theta_r(\beta_e)$
540	45	0.503145	0.449721	0.648200	0.619583
480	40	0.616018	0.578083	0.790400	0.757685
456	38	0.673064	0.642161	0.860200	0.825653
420	35	0.776251	0.756377	0.983200	0.945669
384	32	0.907757	0.898483	1.134200	‡ ^a
348	29	1.072660	1.070728	‡	‡

^aIndica que la comisión por flujo resulta más beneficiosa para el aportante

Según lo mostrado en la Tabla (5.6), podemos determinar que los valores más bajos de la comisión por saldo, β , se obtienen cuando se considera constante a la tasa de contribución θ y usando la candidata β_e . Esto nos indica que el beneficio generado por la comisión en flujo α es más fácil de igualar con la elección de θ constante y β_e , que lo generado mediante θ_r y β_e u otra combinación de la tabla.

5.3. Aplicación numérica para la esperanza de la riqueza del aportante

5.3.1. Parámetros del modelo

Debido a que se utilizan las funciones $\beta_e(t)$ y $\theta_r(t)$, los parámetros requeridos para esta simulación son los siguientes:

- Comisión por saldo inicial: $\beta(0) = 1.2\%$ anual = 0.0995% mensual.
- Tasa de libre riesgo: $r = 0.33\%$ mensual.
- Comisión por flujo: $\alpha = 0$, ya que sólo se considera la comisión por saldo.
- Tasa de crecimiento de contribución: $k_1 = 3\%$ anual = 0.25% mensual.

- (e) Valor inicial de la tasa de contribución: $\theta_0 = 85$
- (f) Precio de mercado del riesgo $\lambda = 0.07$.
- (g) Periodo de acumulación: $T = (65 - E) \times 12$ meses, donde E es la edad de ingreso del contribuyente al SPP. Para los propósitos de nuestro estudio vamos a utilizar los periodos de jubilación en meses $T=540, 480, 456, 420, 384, 348$.

5.3.2. Utilidad potencia

Para el caso particular de la utilidad potencia, utilizamos el parámetro $\gamma = -2$, con lo que obtenemos la evolución de la riqueza del aportante y el valor esperado acumulado al final de cada periodo de aporte T .

FIGURA 5.13: Evolución del valor esperado de la riqueza del aportante $E[X(t)]$ para $T=420, 456, 480$ y 540 meses de aporte

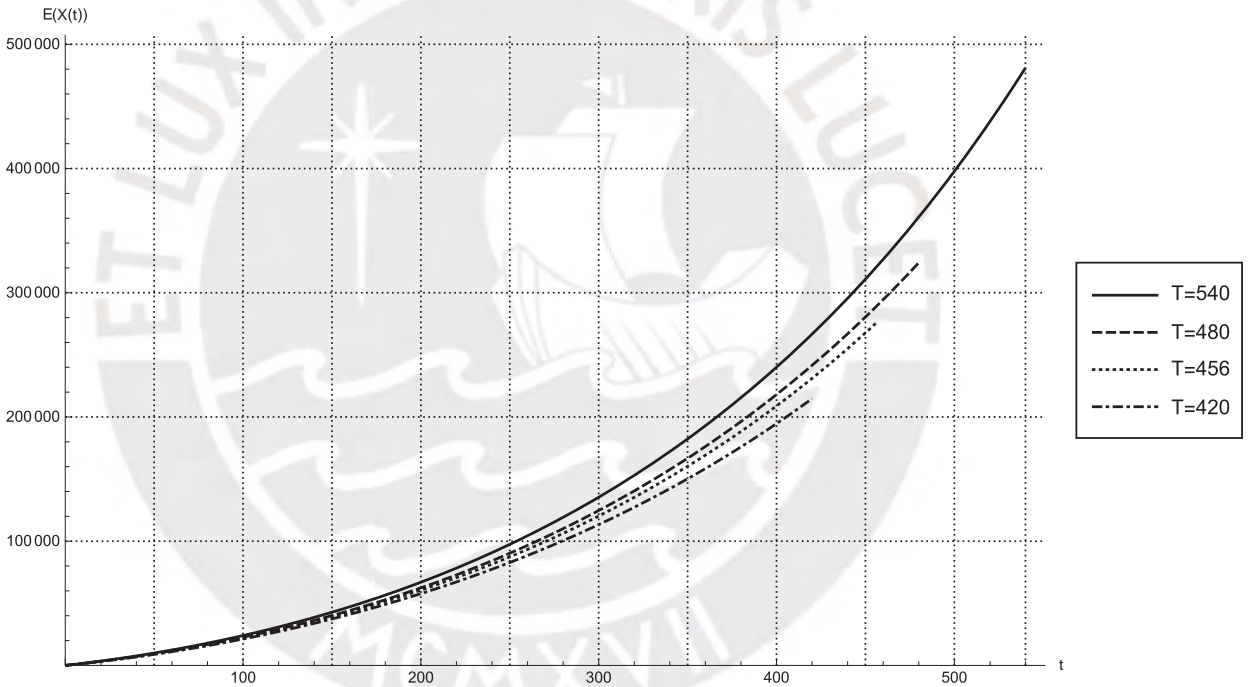


TABLA 5.7: Valor esperado acumulado al final del periodos de retiro

T (meses)	T (años)	$E[X(T)]$
540	45	481 033.58
480	40	324 139.96
456	38	275 543.19
420	35	214 739.18

5.3.3. Utilidad exponencial

De manera similar al caso anterior, utilizamos el parámetro $c = 0.00008$, con lo que obtenemos la evolución de la riqueza del aportante y el valor esperado acumulado al final de cada periodo de aporte T .

FIGURA 5.14: Evolución del valor esperado de la riqueza del aportante $E[X(t)]$ para $T=420, 456, 480$ y 540 meses de aporte

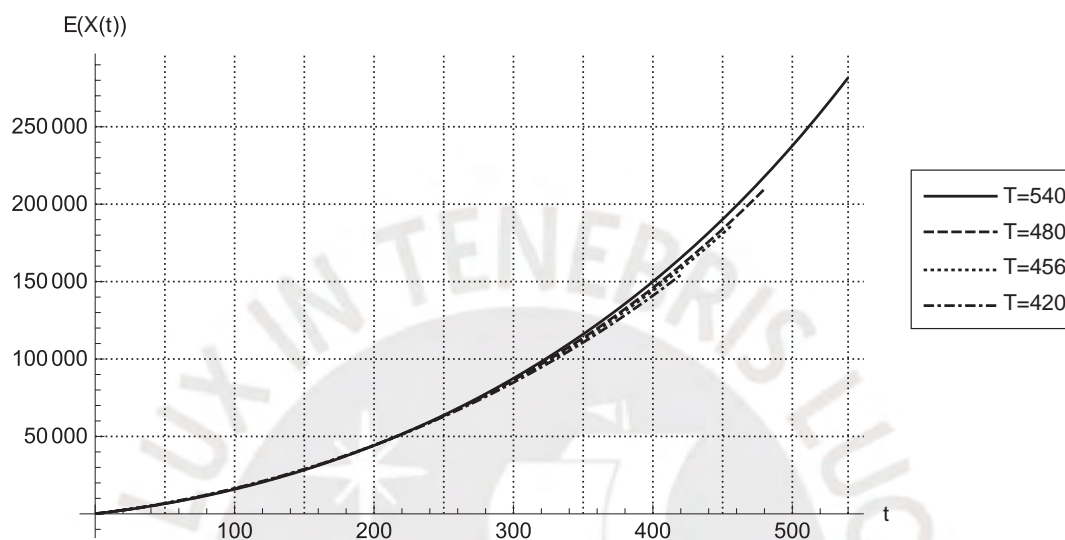


TABLA 5.8: Valor esperado acumulado al final del periodos de retiro

T (meses)	T (años)	$E[X(T)]$
540	45	281 665.76
480	40	209 721.62
456	38	185 805.18
420	35	154 330.01

Con los resultados mostrados en este capítulo se verifica la utilidad de las distintas funciones candidatas de $\beta(t)$, como herramientas de *benchmarking*. Partiendo de la maximización de la utilidad esperada del aportante, ha sido posible determinar de una manera muy directa los valores de decrecimiento que debe aplicar a la comisión por saldo en relación al periodo de jubilación de los aportantes y tomando en cuenta cada uno de los escenarios propuestos.

Conclusiones

1. Ha sido posible solucionar el problema de maximización de la riqueza terminal del aportante con cargos administrativos variables y cuyo resultado se aprecia en (4.130).
2. Se ha comprobado que los ratios de equivalentes de certeza obtenidos a partir de la utilidad potencia (4.125) y la utilidad exponencial (4.128) cuando son igualados a 1, generan el mismo resultado. De este punto concluimos que el análisis de las funciones determinísticas de los parámetros del modelo, son independientes de las funciones de utilidad que han sido empleadas en el presente trabajo.
3. Para modelar la función $\beta(t)$ se propusieron una serie de funciones candidatas, que teóricamente se comportaban de acuerdo a las características deseables dentro del panorama actual del SPP. Cada una de estas funciones fueron evaluadas en la expresión (4.133), pero solamente las funciones $\beta_e(t)$ y $\beta_f(t)$ generaron expresiones analíticas basadas en funciones conocidas. Asimismo, la aplicación numérica realizada a partir de ellas, generó resultados que están acorde con los actuales parámetros del SPP.
4. Para el caso donde se modela la tasa de contribución $\theta(t)$ se propusieron las funciones $\theta_c(t)$ y $\theta_r(t)$, dadas por (4.141) y (4.144). La principal característica de la primera función es que su dinámica de crecimiento no está acotada y esto no se ajusta a la realidad del SPP, por lo que su estudio tuvo fines didácticos. La segunda función propuesta tiene una dinámica característica que se ajusta de mejor manera a la realidad, siendo de mayor utilidad para el modelo presentado.
5. Durante el análisis del modelo utilizando la tasa de contribución $\theta_r(t)$, bajo las definiciones de los parámetros de tasa de crecimiento inicial k_2 y tasa de crecimiento promedio k_1 , se ha demostrado que el parámetro θ no depende del valor inicial de la función, solamente se ve afectada por el periodo de aporte T , y los valores de k_2 y k_1 .

6. Tomando en cuenta las condiciones anteriores, también se comprobó que el valor de la tasa de crecimiento β tampoco depende del valor inicial de la tasa de contribución, solamente del periodo de contribución T y el parámetro θ . Este resultado resulta importante, ya que el modelo se vuelve independiente del aporte inicial del contribuyente y dependiendo únicamente de los valores de los parámetros k_1 , k_2 y el periodo de aporte T , los cuales pueden ser establecidos a través de observación y estudio del SPP peruano.
7. Las funciones que modelan la comisión por saldo $\beta(t)$ que se presentan en este trabajo se pueden utilizar como una herramienta de *benchmarking* de real importancia para el análisis del comportamiento del SPP. A través de esas expresiones, es posible determinar de una manera directa y práctica, la dinámica de la comisión por saldo para un determinado periodo de aporte T , en escenarios que consideran la tasa de contribución como constante o variable.
8. La comisión por saldo más baja se produce cuando se utiliza el modelo considerando a la tasa de contribución θ constante y la comisión por flujo como la función $\beta_e(t)$. Bajo esas condiciones, es el que puede igualar a los efectos de la comisión por flujo de una manera por la cual la comisión por saldo disminuye de una manera más lenta.
9. El presente trabajo es una generalización del modelo planteado por Chavez-Bedoya (2016). En ese sentido, si hacemos que las funciones que modelan a las comisiones en balance y por flujo $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ y la remuneración del aportante $\theta(t)$ sean constantes, obtendremos exactamente los resultados del trabajo de Chavez-Bedoya (2016).
10. Existe la posibilidad de extender la metodología propuesta en el presente estudio, mediante la búsqueda de nuevas funciones candidatas para modelar la comisión por flujo y por saldo, $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, y los ingresos mensuales del aportante $\theta(t)$, de manera independiente y también de manera conjunta. Finalmente, es posible analizar otros tipos de función de utilidad o procesos extocásticos para los activos, con el fin de lograr un mayor grado de generalidad.

Apéndice A

Anexo

En este anexo se incluyen las definiciones necesarias para los temas desarrollados en el capítulo 2.

Definición A.1. (*Función de clase C^k*). Sea una función f , definida sobre un conjunto U abierto en \mathbb{R} y $k \in \mathbb{Z}_+$. Decimos que f es de clase C^k si sus derivadas $f', f'', \dots, f^{(k)}$ existen y son continuas en U .

Definición A.2. (*Espacio muestral*). Se define como espacio muestral al conjunto Ω que contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Definición A.3. (*Sigma álgebra*). Se define a \mathcal{F} como una σ -álgebra sobre Ω , si es una colección de subconjuntos de Ω que cumple las siguientes condiciones:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- Si $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
- Si $A_k \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Definición A.4. (*Espacio medible*). Se define como espacio medible al par ordenado (Ω, \mathcal{F}) , donde Ω es el espacio muestral y \mathcal{F} una σ -álgebra sobre Ω .

Definición A.5. (*Conjunto medible*). Se dice que el conjunto A es medible en (Ω, \mathcal{F}) si $A \in \mathcal{F}$.

Definición A.6. (*Función de probabilidad*). Sea el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Una función de probabilidad sobre el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, que cumple

- $P(\Omega) = 1$,
- $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$,
- Dados los conjuntos $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$, entonces:

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$$

Definición A.7. (*Espacio de probabilidad*). Se define como espacio de probabilidad a la terna ordenada (Ω, \mathcal{F}, P) , donde (Ω, \mathcal{F}) es el espacio medible y P es la función de probabilidad definida sobre (Ω, \mathcal{F}) .

Definición A.8. (*σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R}^n*). Se define como σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R}^n a la mínima σ -álgebra \mathcal{B}^n generada por los abiertos de \mathbb{R}^n , es decir generada por los intervalos abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición A.9. (*Vector aleatorio*). Se denomina vector aleatorio definido en (Ω, \mathcal{F}) a la función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, si para todo conjunto $B \in \mathcal{B}^n$ se cumple que $B^{-1} \in \mathcal{F}$.

Definición A.10. (*Proceso estocástico*). Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y el espacio de estados (E, \mathcal{E}) . $X = \{X_t, t \in T\}$ es un proceso estocástico definido en (Ω, \mathcal{F}) y con valores en (E, \mathcal{E}) , si

$$\begin{aligned} X(.,.) : T \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

es tal que para cada t , $X(t)$ es una variable aleatoria de Ω en E y para cada ω , $X(\omega)$ es una función de T en E que se denomina trayectoria ó camino muestral. Al conjunto T se le denomina espacio de parámetros.

Definición A.11. (*Filtración*). Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Decimos que $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es una filtración en \mathcal{F} si $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, siendo $s \leq t$ con \mathcal{F}_s y \mathcal{F}_t σ -álgebras. El espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ se denomina espacio filtrado.

Definición A.12. (*Hipótesis usuales para una filtración*). Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisface las hipótesis usuales si:

- \mathcal{F}_0 contiene todos los conjuntos nulos con respecto a \mathcal{F} ,
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es continua por derecha, es decir $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ para todo $t \geq 0$.

Definición A.13. (*Espacio de probabilidad completo*). Se dice que un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es completo si dados los conjuntos A y B con las condición $A \subseteq B$, $B \in \mathcal{F}$ y $P(B) = 0$, entonces también se cumple que $A \in \mathcal{F}$ y $P(A) = 0$.

Definición A.14. (*Proceso estocástico continuo*). Sea el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. Se dice que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico continuo si X es continuo como función del “tiempo” ó parámetro del conjunto de índices de dicho proceso.

Definición A.15. (*Proceso estocástico adaptado*). Sea el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. Se dice que el proceso estocástico definido por la familia de variables aleatorias $X = (X_t)_{t \geq 0}$ es adaptado si X_t es $\{\mathcal{F}_t\}$ -medible para todo $t \geq 0$.

Definición A.16. (*Proceso estocástico simple*). Sea el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. Se dice que el proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ es simple si existen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$, $p \in \mathbb{N}$ y variables aleatorias cuadrado integrables $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p-1}$ \mathcal{F}_{t_i} -medibles $i = 1, \dots, p$, tal que $X_t(\omega)$ se pueda escribir como:

$$X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} \phi_i(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\{[t_i, t_{i+1})\}}(t), t \geq 0. \quad (\text{A.1})$$

Definición A.17. (*Espacio $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^p$*). Sea el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$. Se denomina espacio $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^p([0, T], \mathbb{R})$, al conjunto de todos los procesos estocásticos $\{h(t), t \in [0, T]\}$ definidos en (Ω, \mathcal{F}, P) con valores en \mathbb{R} , $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptados, tales que $E \left[\int_0^T |h(t)|^p dt \right] < \infty$, con $T > 0$ fijo.

Definición A.18. (*Esperanza condicional*). Sean el espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) , X una variable aleatoria integrable y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub- σ -álgebra. La esperanza condicional de X dada la σ -álgebra \mathcal{G} es cualquier variable aleatoria Y \mathcal{G} -medible, integrable que satisfice:

$$\int_A Y dP = \int_A X dP, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Definición A.19. (*Movimiento Browniano*). Sea $(W_t)_{0 \leq t < \infty}$ un proceso estocástico que toma valores reales sobre un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) . Decimos que $(W_t)_{0 \leq t < \infty}$ es un movimiento Browniano si satisface las tres condiciones siguientes:

- $W_0 = 0$.
- $W_t(\omega)$ es continua en t y casi seguramente en ω .
- Para cualquier $0 \leq s < t$, los incrementos $W_t - W_s$ son independientes con una distribución normal $N(0, t - s)$.

Definición A.20. (*Martingala*). Sean el espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) y el proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Decimos que X es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si:

- X_t es integrable para todo $t \geq 0$,
- X_t es $\{\mathcal{F}_t\}$ -medible para todo $t \geq 0$,
- Si $s \leq t$,

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \text{ c.s.}$$

Definición A.21. (*Integral de Itô de un proceso estocástico simple*). Sea el espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) . Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtración natural del movimiento Browniano $(W_t)_{0 \leq t < \infty}$. Sean $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$ un proceso estocástico simple definido como en (A.1) y $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ una partición en el intervalo $[0, T]$. La integral de Itô de X sobre $[0, T]$ se define mediante

$$I(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Definición A.22. (*Integral de Itô de un proceso estocástico*). Sea $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$ un proceso estocástico. Decimos que una sucesión de procesos aleatorios simples $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ con $X_n \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$ aproxima a X en $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T |X(t) - X_n(t)|^2 dt \right) = 0.$$

Entonces, definimos a $I(X)$ como la integral estocástica de Itô de X en $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (|I(X) - I(X_n)|^2) = 0, \quad (\text{A.2})$$

para cualquier sucesión aproximante $\{X_n\}$ de X en $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R})$. También se puede escribir

$$I(X) = \int_0^T X(t) dW(t).$$

Definición A.23. (*Proceso estocástico progresivamente medible*). Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Se define al proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ como progresivamente medible si para cualquier $t \geq 0$, $(s, \omega) \mapsto X(s, \omega)$ es una función medible de $[0, t] \times \Omega$, con la σ -álgebra $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$, a \mathbb{R} . $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{F}$ es la σ -álgebra producto sobre $[0, t] \times \Omega$, que es la mínima σ -álgebra que contiene a los conjuntos de la forma $A \times B$, donde $A \subset [0, t]$ es un conjunto de Borel de $[0, t]$ y $B \in \mathcal{F}$.

Definición A.24. (*Proceso de Itô*). Sean el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtración natural del movimiento Browniano $(W_t)_{0 \leq t < \infty}$. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$, un proceso estocástico $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado y que tiene caminos continuos casi seguramente. Diremos que X es un proceso de Itô si podemos expresar X_t como

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \text{ c.s. } \forall t \geq 0, \quad (\text{A.3})$$

donde $\sigma(t, X_t) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un proceso progresivamente medible, tal que

$$E \left(\int_0^T |\sigma(t, X_t)|^2 dt \right) < \infty, \forall T > 0,$$

y $\mu(t, X_t) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un proceso \mathcal{F}_t -adaptado, tal que

$$\int_0^T |\mu(t, X_t)| dt < \infty \text{ c.s.}, \forall T \geq 0.$$

Por convención, la forma diferenciada de la expresión anterior, es la siguiente:

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \forall t \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Definición A.25. Función Gamma incompleta $(\Gamma(a, x))$. Dados $x > 0$ y $a \geq 0$, la función gamma incompleta se define por la siguiente expresión:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \quad (\text{A.5})$$

Lema A.1. (*Lema de Itô*). Sean el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtración natural asociada al movimiento Browniano $(W_t)_{0 \leq t < \infty}$. Sean $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Itô que satisface la ecuación (A.4), $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano y $f(t, x)$ una función de clase \mathcal{C}^1 respecto a t y \mathcal{C}^2 respecto a x y con valores en \mathcal{R} .

Entonces, se cumple:

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu^2(t, X_t) \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dW_t. \quad (\text{A.6})$$

Demostración. Haciendo el desarrollo de Taylor de la función $f(x, t)$ en x y t , se tiene:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + R, \quad (\text{A.7})$$

donde R es el término complementario de Lagrange. Si X satisface la ecuación diferencial estocástica (A.4), entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\mu_t^2 dt \cdot dt + 2\mu_t \sigma_t dt \cdot dW_t + \sigma_t^2 dW_t \cdot dW_t) + R. \quad (\text{A.8})$$

Haciendo que $dt \rightarrow 0$, por variación cuadrática tenemos que $dt \cdot dt = 0$, $dt \cdot dW_t = 0$ y $dW_t \cdot dW_t = dt$ y R tenderá a cero. Agrupando tenemos:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dW_t. \quad (\text{A.9})$$

Con lo cual queda demostrado el lema de Itô. \square

Teorema A.1. (*Existencia y unicidad EDE*). Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtración natural del movimiento Browniano estándar $(W_t)_{0 \leq t < \infty}$. Sean $\mu(t, X_t) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma(t, X_t) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles que cumplen las siguientes condiciones

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq D_1 |x - y| \quad (\text{A.10})$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D_2 |x - y| \quad (\text{A.11})$$

$$|\mu(t, x)| \leq C_1 (1 + |x|) \quad (\text{A.12})$$

$$|\sigma(t, x)| \leq C_2 (1 + |x|) \quad (\text{A.13})$$

Para cada $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$, siendo D_1, D_2, C_1 y C_2 constantes. Dada Z una variable aleatoria independiente de $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, con $s \geq 0$, tal que $E(|Z|^2) < \infty$. Entonces, la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = Z$$

tiene una única solución $X_t(\omega)$ t -continua, con la propiedad que $X_t(\omega)$ es \mathcal{F}_t^Z -adaptada, siendo \mathcal{F}_t^Z la filtración generada por Z y W_s , con $s \leq t$ y

$$E\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) < \infty.$$

Demostración. La demostración puede ser encontrada en Oksendal (2003).



Apéndice B

Anexo

EDE a resolver

$$\begin{aligned} dX(t) &= [X(t)(u(t)(\delta - r) + r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t))]dt + X(t)u(t)\sigma dW(t), t \in \llbracket \mathbf{0}, \mathbf{T} \rrbracket \\ X(0) &= X_0(1 - \alpha(0)). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

rescribiendo (B.1)

$$dX(t) = [X(t)u(t)(\delta - r) + X(t)(r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t))]dt + X(t)u(t)\sigma dW(t) \quad (\text{B.3})$$

Para el caso de la utilidad exponencial sabemos que

$$u^*(t)x = \frac{(\delta - r)}{c\sigma^2} e^{\int_t^T (r - \beta(s))ds} \quad (\text{B.4})$$

Reemplazando (B.4) en (B.3), tenemos

$$dX(t) = \left[\frac{\lambda^2}{c} e^{\int_t^T (r - \beta(s))ds} + X(t)(r - \beta(t)) + \theta(t)(1 - \alpha(t)) \right] dt + \frac{\lambda}{c} e^{\int_t^T (r - \beta(s))ds} dW(t), \quad (\text{B.5})$$

donde $\lambda = \frac{\delta - r}{\sigma}$. Según KLOEDN, la EDE de coeficientes variables

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t))dt + c(t)dW_t$$

tiene como solución

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s)ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s)dW_s \right)$$

siendo

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s)ds \right)$$

Aplicando a nuestro caso tenemos

$$X_t = \Phi_{t,0} \left(X_0(1 - \alpha) + \int_0^t \frac{\left(\frac{\lambda^2}{c} e^{\int_t^T (r - \beta(s)) ds} + \theta(s)(1 - \alpha) \right)}{\Phi_{s,0}} ds + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \frac{e^{\int_t^T (r - \beta(s)) ds}}{\Phi_{s,0}} dW_s \right).$$

Siendo

$$\Phi_{t,0} = \exp \left(\int_0^t (r - \beta(s)) ds \right), \quad (\text{B.6})$$

y asumiendo que $\beta(s) = \beta_0 e^{-\beta s}$, resolviendo (B.6), tenemos

$$\Phi_{t,0} = e^{rt + b(e^{-\beta t} - 1)}, \quad (\text{B.7})$$

Reemplazando (B.6) en (B.7) Considerando α constante se tiene

$$X_t = e^{rt + b(e^{-\beta t} - 1)} \left(X_0(1 - \alpha) + \int_0^t \frac{\left(\frac{\lambda^2}{c} e^{\int_t^T (r - \beta(s)) ds} + \theta(s)(1 - \alpha) \right)}{\Phi_{s,0}} ds + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \frac{e^{\int_t^T (r - \beta(s)) ds}}{\Phi_{s,0}} dW_s \right).$$

Considerando $\theta(s) = \theta_2 - \theta_1 e^{-\theta s}$ y resolviendo se tiene

$$X_t = e^{rt + b(e^{-\beta t} - 1)} \left(X_0(1 - \alpha) + \frac{\lambda^2 e^{rT + be^{-\beta T}}}{c} \int_0^t e^{-2rs - 2be^{-\beta s}} ds + (1 - \alpha) \int_0^t (\theta_2 - \theta_1 e^{-\theta s}) e^{-rs - b(e^{-\beta s} - 1)} ds + \frac{\lambda e^{-rT - be^{-\beta T}}}{c} \int_0^t e^{-rs - be^{-\beta s}} dW_s \right) \quad (\text{B.8})$$

Bibliografía

- Bielecki, T. R., Jin, H., Pliska, S. R., and Zhou, X. Y. (2005). Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition. *Mathematical Finance*, 15(2):213–244.
- Bjork, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2nd edition.
- Cepeda, E. (2011). Portafolio de consumo: problema de merton. *Revista Analítica*, 2(1):33–47.
- Chavez-Bedoya, L. (2016). Administrative charges on balances and contributions in individual account pension systems: How do they impact individual welfare? *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 21(1):2–7.
- Devolder, P., Janssen, J., and Manca, R. (2012). *Stochastic Methods for Pension Funds*, volume 1. John Wiley.
- Kraft, H. (2004). *Optimal Portfolios with Stochastic Interest Rates and Defaultable Assets*. Springer, 2nd edition.
- Krylov, N. V. (1980). *Controlled Diffusion Processes*. Stochastic Modelling and Applied Probability 14. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition.
- Merton, R. (1969). Portafolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3):247–257.
- Oksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag Heidelberg, 6th edition.
- Ralf Korn, E. K. (2001). *Option pricing and portfolio optimization: Modern methods of financial mathematics*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.
- Vigna, E. (2014). On efficiency of mean-variance based portfolio selection in defined contribution pension schemes. *Quantitative Finance*, 14(2):237–258.

Wendell H. Fleming, H. M. S. (2006). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Applications of mathematics 25. Springer, 2nd ed edition.

Zuñiga, M. and Del Aguila, O. (2015). Stochastic optimal control of annuity contracts. *Revista de Derecho*, 44(1):247–268.

