PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UN MODELO PRAXEOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

Tesis para optar el grado académico de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

AUTORA

Diana Carolina Flores Gallo

ASESOR

Elvis Bustamante Ramos

Octubre, 2021

RESUMEN

En este trabajo se busca identificar y analizar las praxeologías de la transformada de Laplace en la carrera de ingeniería mecatrónica, en la institución de la enseñanza de las matemáticas (E(M)), a través del curso de Ecuaciones Diferenciales, y en la institución intermediaria (E(DI)), a través del curso de Control Clásico; de manera que se puedan establecer conexiones, diferencias y la transposición entre dichas instituciones a través de la circulación de saberes. Para ello, desarrollamos una metodología cualitativa en dos etapas: en la primera etapa se hace un estudio epistemológico de la transformada de Laplace, revisión de la malla curricular del curso de Ecuaciones Diferenciales, descripción de libros de textos y la identificación de la praxeología en la E(M). En la segunda etapa se realiza una entrevista a un especialista (ingeniero mecatrónico), descripción de los libros de textos del curso de Control Clásico, la identificación de la praxeología de la E(DI) y la conexión entre las praxeologías de la E(M) y la E(DI). Como resultado de esta investigación se pudo ver la transposición entre la institución productora de saberes (P(M)) y la E(M) a través del uso del factor exponencial, ya que en la P(M) se utiliza dicho factor para reducir el orden de una ecuación diferencial y en la E(M) ese factor se utiliza para convertir una EDO en una ecuación algebraica. También se pudo ver la transposición entre la E(M) y la E(DI) a través de diversas técnicas que son validadas por una tecnología ajena a la otra institución, como por ejemplo una tarea en la E(DI) para hallar la estabilidad de un sistema usando transformada de Laplace que se puede resolver utilizando solo Matlab y es validada por su respectiva tecnología; sin embargo, en la E(M) dicha tarea se valida a través de las tecnologías propias de dicha institución como las tablas de transformada de Laplace. De esta manera, se puede identificar la razón de ser de la transformada de Laplace en estudiantes en formación de ingeniería mecatrónica y sirve para valorar la utilidad de la transformada de Laplace al resolver tareas que se puedan presentar en su entorno profesional.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, praxeología, Control Clásico

ABSTRACT

This research seeks to identify and analyze the praxeologies of the Laplace transform in the mechatronic engineering career, in the institution of mathematics teaching (E(M)), through the Differential Equations course, and in the institution intermediary (E(DI)), through the Classic Control course; so that connections, differences and transposition between these institutions can be established through the circulation of knowledge. To do this, we develop a qualitative methodology in two stages: in the first stage, an epistemological study of the Laplace transform is carried out, a review of the curricular mesh of the Differential Equations course, a description of textbooks and the identification of praxeology in the E(M). In the second stage, an interview is carried out with a specialist (mechatronic engineer), a description of the textbooks of the Classic Control course, the identification of the praxeology of E(DI) and the connection between the praxeologies of E(M) and the E(DI). As a result of this research, it was possible to see the transposition between the knowledge-producing institution (P(M)) and the E(M) using the exponential factor, since in the P(M) this factor is used to reduce the order of a differential equation and in E(M) that factor is used to convert an ODE into an algebraic equation. It was also possible to see the transposition between the E(M) and the E(DI) through various techniques that are validated by a technology foreign to the other institution, such as a task in the E(DI) to find stability of a system using Laplace transform that can be solved using only Matlab and is validated by its respective technology; however, in the E(M) this task is validated through the technologies of this institution, such as the Laplace transform tables. In this way, the reason for the Laplace transform can be identified in students in mechatronics engineering training and it serves to assess the usefulness of the Laplace transform when solving tasks that may arise in their professional environment.

Keywords: Differential equations, Laplace transform, praxeology, Classic Control

DEDICATORIA

A mis padres, Teresa y Elías.
A mis abuelos, María y Víctor.
A Sebastián.

AGRADECIMIENTO

Al profesor Elvis Bustamante, mi asesor, a los profesores Cecilia Gaita y Francisco Ugarte por su apoyo y consejos brindados a lo largo de este camino. A la profesora Cintya Gonzales por sus valiosas sugerencias para el trabajo realizado.

A todos los profesores de la maestría, en especial a la profesora Jesús Flores por sus enseñanzas y su gran apoyo.

A mis amigos que siempre estuvieron conmigo en este proceso, en especial a Yesenia, Max, Jesús, María, Tomás y Abraham.

Al profesor Daniel Barrera, por facilitarme su material de trabajo, sus clases y por toda la información brindada.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La enseñanza a nivel superior de temas avanzados de cálculo como funciones en varias variables, ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, entre otros, son de mucha importancia para la formación profesional de los estudiantes de ingeniería, según estudios realizados desde diversos marcos teóricos, especialmente de ingeniería mecatrónica, debido a que dichos temas son aplicados en diversas tareas del contexto disciplinar y en cursos de carrera como Control Clásico, Circuitos Electrónicos, entre otros.

Debido a la importancia de la transformada de Laplace en la carrera de ingeniería mecatrónica, en este trabajo se busca identificar las praxeologías presentes en dos cursos de dicha carrera estudiada en la Universidad Nacional de Ingeniería, establecer conexiones entre las praxeologías encontradas e identificar la razón de ser de la transformada de Laplace en la carrera de ingeniería mecatrónica.

De esta manera, presentamos una breve reseña del contenido de cada capítulo de este trabajo.

En el capítulo I se presentan los antecedentes que dan respaldo a nuestra investigación, desde diversos marcos teóricos y sobre todo, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, abordando las dificultades que presentan los estudiantes de diversas carreras de ingeniería, respecto al uso de la transformada de Laplace, debido a que no le encuentran un respectivo significado que se relacione de manera directa con su carrera. También abordamos la justificación respectiva de nuestra investigación, pregunta de investigación y objetivos que nos permitirán desarrollar la problemática planteada.

En el capítulo II estudiamos algunos conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que utilizaremos a lo largo de nuestro trabajo y la descripción detallada de la metodología, desarrollado en dos etapas. La primera etapa para el curso de Ecuaciones Diferenciales y la segunda etapa para el curso de Control Clásico.

Posteriormente, en el capítulo III se desarrolla la epistemología de la transformada de Laplace, parte esencial presente en la metodología, ya que, a través del estudio de la evolución de la transformada de Laplace se identifica la institución productora de las matemáticas (P(M)) que posteriormente se utilizará para analizar la transposición didáctica. También se desarrollan algunos conceptos de la transformada de Laplace que se utilizará posteriormente en el análisis de libros de Ecuaciones Diferenciales.

Luego, en el capítulo IV se presenta la descripción de dos libros del curso de Ecuaciones Diferenciales, siendo estos libros los que se utilizan en el curso del mismo nombre. Esta descripción es necesaria para luego realizar el análisis praxeológico del curso de Ecuaciones Diferenciales, identificando la praxeología de la institución de la Enseñanza de las Matemáticas (E(M)) utilizando las herramientas brindadas por la Teoría Antropológica de lo Didáctico, a través de tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría.

En el capítulo V se presenta la entrevista realizada al profesor del curso de Control Clásico, indicándonos las características principales del curso, la importancia de este en la profesión del ingeniero mecatrónico y la transformada de Laplace en el curso. Posteriormente se realiza la descripción de textos de tres libros del curso de Control Clásico, textos que el docente de curso nos indicó que usaban en el curso; y, finalmente en este capítulo se hace el análisis praxeológico para el curso en cuestión, identificando diversos tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías con ejemplos para cada tipo de tarea. Finalmente, en este capítulo se identifica la praxeología de la institución intermediaria (E(DI)) y se realiza la comparación entre las instituciones E(M) y E(DI) para encontrar la transposición entre ellas y de esta manera analizar la razón de ser de la transformada de Laplace.

Por último, en el capítulo VI se presentan las consideraciones finales, algunas observaciones, recomendaciones y posibles trabajos futuros que da pie esta investigación para que se pueda realizar.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES Y PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

A continuación, presentaremos los trabajos revisados que serán relevantes para nuestra investigación, donde se presenta a la transformada de Laplace como un objeto matemático que carece de significado en las carreras de ingeniería, debido a que los estudiantes no encuentran relación entre lo estudiado y lo aplicado en su cotidiano disciplinar. Dichos trabajos adoptan diversos marcos teóricos, incluyendo la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

1.1 Investigaciones realizadas con diversos marcos teóricos

En México, los autores Ruiz, Camarena y Del Rivero (2016) hicieron una investigación acerca de las deficiencias que presentan los estudiantes de ingeniería electrónica cuando estudian el tema de la transformada de Laplace en el curso de Ecuaciones Diferenciales, centrándose en los problemas que arrastran de cursos anteriores como cálculo diferencial y cálculo integral. Aquellas deficiencias actúan como distractores en el proceso de aprendizaje del objeto matemático en estudio transformada de Laplace, donde los estudiantes le dan mayor énfasis a la parte del cálculo, y dejan de lado el significado y uso que se le está dando en el contexto que se presenta.

Según los investigadores, el tema de la transformada de Laplace es amplio, donde, además se aplican muchos conceptos básicos de los primeros ciclos, como por ejemplo límites, integrales impropias, técnicas de integración, y, según los autores, cuando el estudiante llega a estudiar dicho objeto matemático, vuelve a sus errores iniciales, dejando de lado el foco de su aprendizaje (que es la transformada de Laplace), para centrarse en la parte del cálculo que no pueden resolver, y de esa manera, la transformada de Laplace pierde su significado como herramienta para resolver problemas con contexto.

En lo que respecta a investigaciones relacionadas al contexto social, Mendoza y Cordero (2018) hicieron una investigación con el objetivo de construir un marco de referencia del uso del conocimiento matemático en una Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Biónicos (CCM(IB)), estructurando el uso de la estabilidad, que se estudia en el curso de Sistemas de Control, en ciertas situaciones de la misma carrera universitaria, cuya problemática radica en que lo que se utiliza del conocimiento matemático en el cotidiano disciplinar es muy diferente a la matemática que se enseña en las aulas.

Por lo tanto, los investigadores tienen como objetivo hacer una conexión entre el conocimiento matemático cotidiano y el conocimiento disciplinar, mediante un diálogo en el aula y en la realidad del entorno CCM(IB) y para esto, dividen el trabajo en plantear la problemática, definir la modelización, investigar y establecer la epistemología de las herramientas que utiliza el ingeniero para poder modelar la estabilidad, de manera que pueda ser incluida en los diseños de clases en el aula.

Mendoza y Cordero (2018) mencionan en su trabajo que se pudo dar el significado de la transformada de Laplace en los estudiantes de ingeniería biónica a través de un experimento, para que el sujeto pueda darle la importancia necesaria para su estudio.

Este trabajo de los investigadores es relevante ya que nos presenta un panorama sobre los usos de la transformada de Laplace en el ámbito profesional del ingeniero biónico a través de diversas tareas que se realizan en su cotidiano disciplinar.

Por otro lado, Giacoleti y Cordero (2019) presentan un proyecto de investigación con base en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), para crear un marco de referencia acerca de los usos y significados de la transformada de Laplace en una Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos que diseñan Sistemas de Control (CCM(IE-SC)), enfocándose en recuperar al sujeto que construye su conocimiento a través de lo cotidiano (o de su entorno) y valorando toda clase de conocimiento matemático adquirido y usado.

Para esto, los investigadores utilizan el constructo de la función de "uso", que son situaciones que se manifiestan por las tareas que forman parte de la situación planteada y la forma de uso serán las clases o tipos de dichas tareas.

Para empezar con su investigación, los autores hacen una revisión de los libros de texto de la transformada de Laplace, donde se muestran ejemplos diversos, propiedades, teoremas adicionales y condiciones para la existencia de dicha transformada, observándose la manera en cómo se presenta este tema en la matemática educativa.

Por lo tanto, según los autores, lo que hacen solo es centralizar al objeto matemático sin ningún proceso significativo para el estudiante, convirtiéndolo en un proceso algorítmico y restándole importancia a las diversas funciones que podría tener en las aplicaciones de diversas situaciones de la vida cotidiana y en sus carreras universitarias. Esta idea que nos brindan los autores es importante ya que nos da un indicador sobre un problema que se presenta en la enseñanza de la transformada de Laplace y la desconexión que hay entre lo enseñado en las aulas y lo aplicado en el cotidiano disciplinar del ingeniero.

Posteriormente, los investigadores hacen una reinterpretación de la transformada de Laplace a través de una situación de transformación en los sistemas de control, como se muestra en la Figura 1.

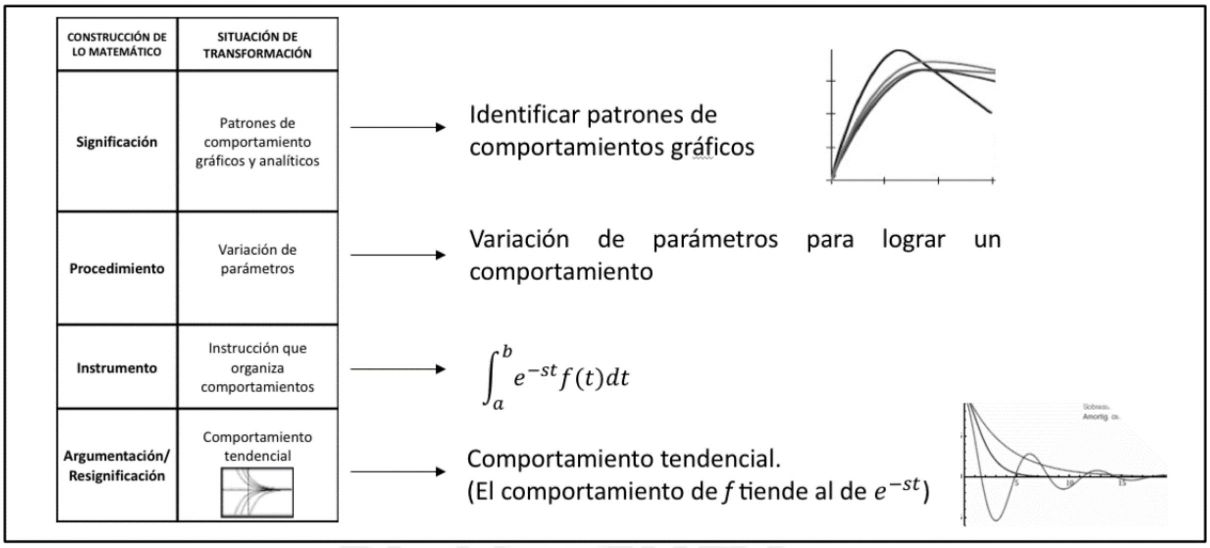


Figura 1: Reinterpretación de la epistemología a través de la situación de transformación.
Fuente: Giacoleti, 2019, p. 436.

Por ende, la situación específica que presentan Giacoleti y Cordero (2019), es una actividad típica del curso de sistemas de control debido a que es algo propio que realiza el ingeniero electrónico, y, lo que se busca es que los participantes puedan darle el significado respectivo a la transformada de Laplace analizando la manera en cómo interviene para resolver dicha situación específica y que sea aceptado en la CCM(IE-SC).

Finalmente, Giacoleti y Cordero (2020) realizan una investigación de corte cualitativo sobre la reproducción continua de comportamientos discontinuos usando la transformada de Laplace cuando diseñan un sistema de control, en una comunidad de ingenieros electrónicos en formación. Los estudiantes elegidos realizan un proyecto de automatización de un sistema de control, utilizando la función de transferencia (relacionado con la transformada de Laplace) de dicho sistema y también gráficos por tramos donde se pone en evidencia a la transformada de Laplace a través de comportamientos discontinuos, mostrando la funcionalidad de la transformada de Laplace.

Según los autores, el proyecto realizado por los estudiantes (situación específica) pone de manifiesto la epistemología de los usos de la transformada de Laplace, donde adquiere significado de instrucción que organiza comportamientos continuos.

1.2 Investigaciones realizadas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico

En México, Guzmán (2016) realizó una investigación con ingenieros mecatrónicos en formación, en la Universidad Tecnológica de Nayarit. Un análisis del plan de estudios de dicha carrera así como la experiencia de la investigadora dio cuenta que no hay una articulación entre las matemáticas impartidas y las necesarias para la carrera, por lo que concluye que dicha articulación se puede hacer a través de la modelación matemática. Considerando elementos de la TAD y el análisis del curso de Sistemas de Control Automático, permite identificar las ecuaciones diferenciales como modelo matemático en la descripción de los sistemas físicos. Gracias al Recorrido de Estudio e Investigación (REI) propuesto, aparece un modelo matemático en una actividad de control, permitiendo que se le dé sentido al uso de las ecuaciones diferenciales.

Una investigación similar realizó Silva (2017) en su tesis, donde emplea elementos de la TAD para diseñar un REI llamado Desfibrilador de Bajo Costo cuya pregunta generatriz es ¿cómo generar un desfibrilador de menor costo a los existentes en el mercado? Los estudiantes de ingeniería electromecánica industrial estudiaron dicha propuesta, encontrando que el circuito RC era un elemento esencial para la construcción de este.

Ambos trabajos mencionados anteriormente, utilizan elementos del modelo praxeológico extendido para poder llegar a su objetivo planteado.

El trabajo realizado por Castela y Romo (2011) es básico para nuestra investigación, debido a que analiza la enseñanza de la transformada de Laplace y a su vez, se comparan 3 tipos de enseñanza de esta: un curso de matemática sobre funciones holomorfas y dos cursos de automatización, uno de ellos es para estudiantes de ingeniería eléctrica e informática industrial (automatización 1), y el otro para licenciatura en Ciencia y Tecnología para Ingenieros (automatización 2). El objetivo de la investigación es estudiar la manera en cómo se relacionan los tres tipos de enseñanza con lo profesional. Para ello, las investigadoras utilizan elementos de la TAD para desarrollar un modelo praxeológico que permite analizar e identificar las diferentes opciones de transposición que están involucradas en los cursos mencionados.

Cuando las autoras analizan los cursos por separado, en el curso de matemática encuentran que desarrollan temas más avanzados y posteriores a la transformada de Laplace que no se estudia de manera rigurosa en los 2 cursos de automatización. En el curso de automatización 1, las autoras observan que una de las características es que los resultados de la transformada de Laplace se presentan siempre como fórmulas y al final de cada texto se presentan formularios que recomiendan siempre al estudiante que lo memorice. Este curso asegura la validez de cada resultado matemático dado, sin embargo, el estudiante no verifica dicha validez en algún contexto de aplicación. Por último, en el curso de automatización 2, observan que se ignora la convergencia de dicha integral de la transformada de Laplace. Con respecto a las técnicas para cada curso estudiado, las autoras identifican que solo en el curso de automatización 2 se realizan explicaciones referidas al contexto de control automático, ayudándose de validaciones netamente matemáticas.

De acuerdo con lo visto por las investigadoras, ellas analizan la transposición que existe entre las instituciones circulantes, es decir, entre la institución de enseñanza de las matemáticas con el curso de Matemáticas, la institución intermediaria con el curso de automatización 1, y la institución usuaria con el curso de automatización 2.

La investigación de Castela y Romo (2011) nos plantea una base para poder identificar y analizar las praxeologías encontradas en diferentes instituciones y de esta manera, realizar la transposición entre las mismas.

Por último, Gonzales (2020) realizó su tesis de maestría analizando la razón de ser de la integral definida en estudiantes de ingeniería química, identificando algunas praxeologías donde se encuentra la integral definida, que se desarrollan en la disciplina matemática y en la disciplina de profesión, analizando diversas organizaciones matemáticas y estableciendo conexiones entre sí, usando elementos de la TAD.

La investigación que realiza el autor es cualitativa, siguiendo diversos pasos que van desde hacer un análisis epistemológico, la descripción de libros de textos tanto del curso de matemática como del curso de carrera, entrevista a profesores especialistas y por último, plantea un modelo praxeológico que permite identificar la clase de teoría que se enseña en la formación del ingeniero químico respecto a la integral definida.

Es importante identificar en este trabajo su metodología, debido a que es la que utilizaremos en nuestra investigación, con ayuda de elementos de la TAD, para analizar la razón de ser de la transformada de Laplace.

Por los trabajos mencionados anteriormente, se evidencia la importancia del estudio de las praxeologías relacionadas a la transformada de Laplace, visto desde las instituciones de la enseñanza de las matemáticas y la institución intermediaria, ya que implican analizar las transposiciones involucradas a través de tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

1.3 Justificación

La transformada de Laplace es un objeto matemático que se suele presentar al estudiante de varias maneras: de forma algorítmica, como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y de manera netamente formal y abstracta, como lo menciona Miranda (2011) y Castela y Romo (2011).

También, se pudo observar en el trabajo de Giacoleti y Cordero (2019) que la transformada de Laplace se presenta de una manera simbólica como una integral y esto hace que los estudiantes lo tomen muchas veces de manera algorítmica y mecánica, como se evidencia en la investigación realizada en México con estudiantes de ingeniería electrónica.

Por otra parte, los estudiantes de la carrera de ingeniería mecatrónica perciben una desarticulación entre la transformada de Laplace y su especialidad a través de los cursos de ecuaciones diferenciales, teoría de control, automatización, entre otros, identificando una serie de dificultades que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de dicho objeto matemático según Guzmán (2016) y Silva (2017). Sin embargo, utilizando el modelo praxeológico extendido estudiado por la TAD, los estudiantes le dan sentido a la transformada de Laplace y la relacionan con su carrera, concluyendo la importancia de este concepto.

Además, Holmberg y Bernhard (2011) mencionan en su trabajo que la visión que tienen los profesores sobre la transformada de Laplace en ingeniería es esencial para la enseñanza, ya que a través de ellos se puede transmitir de diferentes maneras su uso y significado hacia los estudiantes. Por ejemplo, a menudo los estudiantes cuando llevan cursos de Circuitos Electrónicos se hacen esta pregunta: ¿Por qué tengo que usar la transformada de Laplace para resolver un circuito eléctrico? Este hecho nos lleva a que los estudiantes no le encuentran la razón de ser a la transformada de Laplace en los cursos de ingeniería, ya que, según los autores, esta pregunta surge debido a que a los estudiantes les cuesta mucho trabajo conceptualizar y comprender lo que hacen cuando utilizan la transformada de Laplace.

De acuerdo con Holmberg y Bernhard (2011), es muy importante el papel que juega el profesor al momento de enseñar la transformada de Laplace. Por este motivo, es importante poder entrevistar a los especialistas que enseñan cursos de ingeniería mecatrónica, ya que a través de ellos conoceremos qué usos se le da a la transformada de Laplace, qué significado tiene en su carrera, y la importancia de esta en el curso.

También, de acuerdo con los antecedentes presentados, el concepto de la transformada de Laplace es uno de los pilares en la formación académica de los estudiantes de ingeniería, en particular, de ingeniería mecatrónica, porque en el plan curricular de dicha carrera aparece el curso de Ecuaciones Diferenciales, y se observa por la Figura 2, que en el capítulo 5 estudian la transformada de Laplace. Uno de los objetivos del curso de ecuaciones diferenciales es definir la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace, propiedades, derivadas e integrales de una función real con creatividad, capacidad de análisis y visión constructiva.

5. CONTINUOUS FUNTIONS, LAPACE'S TRANSFORM / 16 HOURS

Continuous function in segments and of exponential order. Laplace's transform, properties, theorem, calculation methods and application of Laplace's transform. Inverse Laplace transform, calculation methods. Application of the inverse Laplace's transform. Application of the inverse Laplace's transform to differential equations with constant and variable coefficients, other applications. Systems of 2x2 linear differential equations. Matrix solution for Laplace's transform.

Figura 2: Sílabo del curso de Ecuaciones Diferenciales de Ingeniería Mecatrónica.
Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería, 2018.

En el sexto ciclo de la carrera de ingeniería mecatrónica, los estudiantes llevan el curso de Control Clásico, y en el capítulo 2 se menciona a la aplicación de la transformada de Laplace mediante la función de transferencia, como se muestra en la Figura 3.

2. SYSTEMS MODELING / 15 HOURS

Differential equations for physical systems / Linearization / Laplace transform application. Transfer function / Block diagram / Mechanical, electrical, hydraulic, pneumatic and thermal systems models / Multivariable systems and transfer matrix / Signal flow graphs.

Figura 3: Sílabo del curso de Control Clásico de Ingeniería Mecatrónica.
Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería, 2018.

Por los problemas expuestos en los trabajos anteriores acerca de la manera en cómo se enseña la transformada de Laplace de manera algorítmica carente de significado, la influencia de los profesores en la enseñanza de la transformada de Laplace y la importancia justificada a través del plan de estudio de la carrera de ingeniería mecatrónica, en esta investigación se busca identificar dos praxeologías presentes tanto en la institución de la enseñanza de las matemáticas (en el curso de Ecuaciones Diferenciales) como en la institución intermediaria (en el curso de Control Clásico) para poder mostrar la razón de ser de la transformada de Laplace, y analizar las transposiciones en cada institución, utilizando la TAD, específicamente el modelo praxeológico extendido, identificando tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que se encuentran en cada institución, para luego evidenciar la praxeología existente tanto en la E(M) como en la E(DI) y finalmente analizar cómo se van relacionando entre sí.

1.4 Pregunta de investigación y objetivos de investigación

Por lo expuesto anteriormente, planteamos la siguiente pregunta:

¿Cuál es la razón de ser de las praxeologías identificadas para la enseñanza de la transformada de Laplace en un curso de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería?

Para responder a dicha pregunta, se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general

Encontrar la razón de ser de las praxeologías identificadas para la enseñanza de la transformada de Laplace en un curso de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

Objetivos específicos

- Identificar la razón de ser de la transformada de Laplace en el curso de Ecuaciones Diferenciales de estudiantes de ingeniería mecatrónica.
- Identificar la razón de ser de la transformada de Laplace en el curso de Control Clásico de estudiantes de ingeniería mecatrónica.
- Analizar la transposición del conocimiento de la institución de la enseñanza de las matemáticas hacia la institución intermediaria a través de los cursos de Ecuaciones Diferenciales y Control Clásico, respectivamente.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO, METODOLOGÍA Y EPISTEMOLOGÍA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1 Aspectos teóricos utilizados en la investigación

Debido a que en este trabajo, haremos identificación de praxeologías presentes en los libros de textos tanto de ecuaciones diferenciales como libros de la especialidad, entonces utilizaremos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), propuesta por Chevallard (1999) y desarrollada por otros investigadores durante los últimos años, para poder lograr nuestro objetivo principal. Para esto, describiremos algunos términos propios de la teoría.

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Esta teoría, considera que todas las actividades involucradas por un individuo están determinadas por una serie de condiciones y limitaciones de carácter social. A continuación, definiremos algunos conceptos de la TAD que utilizaremos en este trabajo.

Praxeología

De acuerdo con Chevallard (1999), en toda actividad humana se considera que hay elementos prácticos (*praxis*) y elementos teóricos (*logos*) que están estrechamente relacionados entre sí, y sin embargo, se pueden estudiar por separado.

Una praxeología es un cuarteto $\boldsymbol{[T, \tau, \theta, \Theta]}$ llamado la unidad mínima de análisis, compuesto por un tipo de tarea T, una técnica τ, una tecnología θ, y una teoría Θ. La tarea es lo que se hace (expresado a través de un verbo), la técnica es la forma en la que se realiza dicha tarea, la tecnología es el recurso que se utiliza para justificar y explicar la técnica, y finalmente la teoría es la que puede justificar la tecnología. Dicha praxeología conforma dos principales bloques: el técnico – práctico ($\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{\tau}$) y el tecnológico – teórico ($\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\Theta}$) como se indica a continuación.

Tabla 1

Bloque de praxeología

Bloque técnico – práctico	Bloque tecnológico – teórico
Tipo de tarea (T): Engloba a todas las tareas que pertenecen a una clase determinada. Puede ser un ejercicio o actividad propuesta.	**Tecnología (θ):** Es el discurso que explica, justifica y valida la técnica. Este asegura que la tarea planteada se pueda realizar.
Técnica (τ): La manera que se realizan las tareas, no necesariamente un proceso algorítmico desde un punto de vista matemático.	**Teoría (Θ):** Es el discurso que justifica a la tecnología.

Fuente: Chevallard (1999).

Dado un tipo de tarea T y una técnica para realizarlo, se puede considerar una praxeología que reúna las tareas que se puedan realizar, justificadas por la tecnología que se valida por una teoría. Podemos tener varias técnicas para un mismo tipo de tareas.

También, Chevallard (1999) resalta que los cuatro elementos descritos anteriormente están estrechamente relacionados entre sí, ya que cuando se desarrollan nuevas técnicas, esto generará un nuevo tipo de tareas y a su vez se tendrá la necesidad de realizar otra clase de justificaciones o explicaciones.

Institución

Según Castela y Romo (2011), las instituciones, es decir, las organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y al mismo tiempo las hacen posibles a través de los recursos que estas instituciones ponen a disposición de los sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia. Entre las instituciones que menciona Romo (2014) tenemos las siguientes:

- Instituciones productoras de saberes: Son los que producen praxeologías con el objetivo de garantizar la pertinencia teórica. Se tienen dos tipos:
  - Instituciones productoras de saberes matemáticos (P(M)): Es la comunidad de matemáticos que produce y cuestiona respuestas en el ámbito matemático.
  - Instituciones productoras de saberes de ingeniería (P(DI)): Se desarrolla en el ámbito de la ingeniería.

- Instituciones de enseñanza: Su función principal es transmitir, mostrar y difundir las praxeologías. Son las encargadas de hacer operaciones necesarias para adaptarla a las condiciones particulares de enseñanza y hacer las transposiciones que se requieran. Se tienen dos tipos:
  - Instituciones de enseñanza de matemáticas (E(M)): Por ejemplo los cursos de matemáticas, curso de ecuaciones diferenciales.
  - Instituciones de disciplinas intermediarias (E(DI)): Son los cursos de disciplinas intermediarias, por ejemplo el curso de Control Clásico.

  En nuestra investigación, nos enfocaremos en estas instituciones para poder cumplir con nuestros objetivos planteados.

- Instituciones usuarias: Son las instituciones que hacen uso y ponen en funcionamiento las praxeologías matemáticas para atender la necesidad de la práctica profesional. Se tienen dos tipos:
  - Instituciones que representan la práctica profesional (Ip): Las que representan la práctica profesional del ingeniero, por ejemplo del ingeniero mecatrónico.
  - Instituciones que representan las actividades prácticas (Ap): Son las actividades que se llevan a cabo en el entorno de la formación del ingeniero, como los proyectos realizados por ellos mismos.

Cabe mencionar que las praxeologías son relativas y dependen de cada institución de referencia, es decir, lo que en una institución es considerado un tipo de tarea, en otra institución no necesariamente puede ser así. Lo mismo puede pasar con el tipo de discurso que se aplica para justificar la técnica, ya que cada institución valida el grado de racionalidad de este.

Modelo praxeológico extendido

Este modelo, propuesto por Castela y Romo – Vázquez (2011) considera dos componentes de la tecnología: teórica ($\boldsymbol{\theta^{th}}$) y práctica ($\boldsymbol{\theta^{p}}$). Dicho modelo se puede esquematizar de la siguiente manera:

$$\left[T, \tau, \begin{matrix}\theta^{th} \\ \theta^{p}\end{matrix}, \Theta\right] \begin{matrix}\longleftarrow P(S) \\ \longleftarrow Iu\end{matrix}$$

Figura 4: Esquema del modelo praxeológico extendido.
Fuente: Castela y Romo Vázquez, 2011, p. 88.

Donde $P(S)$ indica la institución productora de saberes e Iu indica la institución usuaria de dichos saberes. La componente teórica ($\boldsymbol{\theta^{th}}$) engloba las validaciones, justificaciones y explicaciones de la técnica utilizada (que puede ser de origen matemático); y la componente práctica ($\boldsymbol{\theta^p}$) se asocia con el uso de la técnica, es decir, la forma en cómo se adapta dicha técnica para resolver problemas no necesariamente matemáticos, pero que requieran de ellas. Las flechas que señalan cada institución con su respectiva componente hacen referencia a los procesos que genera cada institución para llegar a cada componente relacionada, es decir, de qué manera se valida el discurso de las instituciones en las tecnologías teóricas y prácticas.

La componente práctica contempla seis funciones ligadas al uso de la técnica según Castela y Romo-Vázquez (2011) y explicadas en Romo (2014):

- **Describir el tipo de tarea y la técnica.** Se refiere a la elaboración de un discurso que caracteriza al tipo de tareas. Las acciones en juego y el contexto donde se sitúa la praxeología se puede identificar en la elaboración de un sistema de representaciones verbales y simbólicas. La producción de estos lenguajes y la descripción de estos es un componente esencial para la transmisión de la técnica.
- **Validar la técnica.** Corresponde a lo que se entiende como una justificación. Los saberes considerados establecen que la técnica produce bien lo que dice que produce, que los pasos que la componen permiten conseguir los objetivos que le son asignados. En nuestro caso de matemáticas, esta función es mayormente asegurada por los saberes justificados de las teorías matemáticas.
- **Explicar la técnica.** Son los saberes que permiten analizar de qué manera la técnica y sus diferentes pasos permiten conseguir los objetivos propuestos. Existen validaciones que no validan, porque estas no respetan completamente las normas de validación en la institución que fiscaliza la validez de esta.
- **Facilitar la aplicación de la técnica.** Los saberes considerados en esta función permiten a los usuarios utilizar con eficacia y efectividad la técnica descrita. Estos son portadores de mejoras, pero también de advertencias que permitirán evitar errores conocidos como frecuentes. Este dominio de saberes es el terreno privilegiado para las elaboraciones tecnológicas de los usuarios.
- **Motivar la técnica y los pasos que la componen.** Estos saberes están orientados hacia la práctica. Son los objetivos esperados que justifican racionalmente los pasos, mostrando su razón de ser. Se trata de escribir una historia de la técnica que sitúe sus componentes, los unos en relación con los otros: ¿por qué (o ¿para hacer qué?) se realiza tal paso en tal momento? Estos saberes de motivación son saberes frecuentemente relacionados con el tipo de tareas, ya que ellos analizan los objetivos y además pueden anticipar las etapas esperadas y juegan un papel importante cuando la técnica necesita adaptaciones.

- **Evaluar la técnica.** Los saberes considerados tienen que ver con el dominio, las condiciones y los límites de una técnica en relación con el tipo de tareas. Las funciones de evaluar, facilitar y motivar están a veces relacionadas: la puesta en evidencia de ciertas dificultades (evaluar) puede provocar en cierto tiempo la producción de mejoramientos (facilitar), la motivación está dada por la evaluación.

La relación entre el tipo de tareas y los subtipos de tareas

Chaachoua et. al. (2019), con base a la teoría de situaciones didácticas, presentan las nociones de variable y generador de un tipo de tareas, conceptos que utilizaremos en el modelo praxeológico que queremos proponer.

De acuerdo con el modelo praxeológico T4TEL (T4 hace referencia al tipo praxeológico de tareas – técnicas – tecnología – teoría y el TEL), desarrollado por Chaachoua et. al. (2019), se realizan conexiones entre el tipo de tareas y los subtipos de tareas.

En el modelo T4TEL, Chaachoua et. al. (2019) indica que un tipo de tareas está definido por un verbo de acción y los complementos. Dentro de una institución de enseñanza, se puede afirmar que los tipos de tarea incluidos en los conocimientos que se enseñan siempre va a contener al menos una técnica para llevarse a cabo. Si se tiene como notación a $P(\tau)$ denominado al conjunto de tareas que la técnica τ permite realizar en determinadas instituciones estables durante un determinado periodo. Para que se considere un tipo de tareas, un conjunto de tareas T debe contener al menos una tarea t que se pueda realizar con la técnica τ. Esto se puede enunciar como: Un conjunto de tareas T es un tipo de tareas si cumple la condición de que $\exists t \in T, \exists \tau$ con la que se consigue t tal que $P(\tau) \subset T$ o $T \subset P(\tau)$. Dicha definición nos dice que un conjunto de tareas puede definirse como un tipo de tareas, aunque ninguna técnica resuelva todas las tareas. Si se considera como un conjunto de tareas a T_a y T_b como dos tipos de tareas, tal que $T_a \subset T_b$, entonces, este tipo de tareas se considerará como un subtipo de tareas.

Variable y generador

Según Chaachoua, Bessot (2019), un generador de un tipo de tareas está definido por un tipo de tareas y un sistema de variables. Un sistema de variables es una lista de variables junto con ciertos valores que puede tomar. Las variables de un generador toman valores dentro del dominio de una disciplina. Estos valores generan tipos de tareas más específicos que el tipo de tareas T. La primera función de una variable es generar subtipos de tareas jugando con los valores de esta variable. La segunda función de una variable es permitir la caracterización de los alcances de la técnica.

Una variable epistemológica considera las variables de un tipo de tareas dentro de un determinado modelo praxeológico. En este caso, los valores de una variable es tal que, el cambio de un valor modifica el rango de las posibles técnicas de un tipo de tareas, y por lo tanto, la relación con un objeto de conocimiento.

Por ejemplo, en nuestra investigación, tomaremos más adelante un tipo de tareas sobre resolver una ecuación diferencial de la forma $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t)$, donde habrá dos variables V_1 y V_2 que será el orden de la ecuación diferencial y las diferentes condiciones iniciales. De ahí se puede realizar algunos subtipos de tarea como resolver una ecuación diferencial de segundo orden con dos condiciones iniciales.

La transposición didáctica

Según Chevallard (1999), un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado *transposición didáctica*.

La razón de ser

De acuerdo con Gascón (2011), se refiere a las cuestiones matemáticas o extramatemáticas a las que responde cada uno de los ámbitos de la actividad matemática.

Se trata de concientizar a determinada comunidad de estudio sobre la existencia de los componentes de la praxeología, y de las cuestiones que motivan su construcción y uso.

Pregunta generatriz

Según Otero & Corina (2013), como oposición a un trabajo matemático caracterizado por proponer a los estudiantes utilizar técnicas, sin haberse cuestionado su pertinencia, ni las razones de ser, surge la necesidad de realizar una pregunta generatriz, que se convierte en problemática, que al tratar de resolverla, genera una serie de tareas no rutinarias.

2.2 Aspectos metodológicos de la investigación

Damos a conocer la metodología que nos permitirá cumplir con nuestro principal objetivo de investigación. Para esto, se realizará una investigación cualitativa para poder identificar las praxeologías de la transformada de Laplace, tomando elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Se hará la descripción de los libros de textos del curso de Ecuaciones Diferenciales como del curso de Control Clásico para identificar los temas que predominan en la formación de ingenieros mecatrónicos. De acuerdo con lo hallado en los libros, y también, mediante una entrevista a un especialista de la carrera, se identificarán las praxeologías presentes en cada institución analizada para luego estudiar la transposición entre las instituciones de la enseñanza de las matemáticas y la institución intermediaria.

A continuación, presentaremos las etapas que nos permitirán cumplir con nuestro trabajo de investigación.

- **Etapa 1: Análisis de los libros de textos de matemática**
  Se considerarán los siguientes pasos:
  - **Paso 1: Estudio epistemológico de la transformada de Laplace**

    Para realizar el estudio epistemológico, haremos una revisión de distintos textos e investigaciones acerca de los problemas que dieron origen a la transformada de Laplace, hasta la definición formal que conocemos hoy en día.

  - **Paso 2: Revisar la malla curricular**

    Revisaremos el plan curricular de la carrera de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería para poder identificar el curso de Ecuaciones Diferenciales y qué cursos especialización están llevando. Posteriormente, revisaremos sus respectivos sílabos para conocer las referencias bibliográficas utilizadas.

  - **Paso 3: Descripción de los libros de textos del curso de Ecuaciones Diferenciales**

    Para realizar dicho paso, regresaremos a los sílabos encontrados en el paso 2, y seleccionaremos algunos textos básicos de dicho curso donde se pone en evidencia el estudio de la transformada de Laplace como su definición, propiedades, transformada inversa de Laplace, teoremas y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales.

- **Paso 4: Identificación del modelo praxeológico de la transformada de Laplace en la institución de la enseñanza de la matemática (E(M))**

  Del paso 3 realizado anteriormente, se podrá identificar la praxeología del objeto matemático en estudio, de acuerdo con el tipo de tareas, técnica, tecnología y teoría relacionado a la transformada de Laplace. Para realizar dicho paso, haremos uso de los elementos de la TAD.

- **Etapa 2: Análisis de los libros de textos de Control Clásico**

  En esta etapa se considerarán los siguientes pasos:

  - **Paso 1: Realizar entrevistas a profesores ingenieros mecatrónicos**

    Para realizar este paso, consultaremos con profesores cuya profesión es de ingeniería mecatrónica, para poder saber en qué parte de la especialidad se pone de manifiesto el uso de la transformada de Laplace, así como también, conocer de qué manera se aplican dichos conocimientos y qué tipo de tareas se realizan, evidenciando los argumentos que justifican las técnicas empleadas.

  - **Paso 2: Descripción de los libros de textos de Control Clásico**

    Así como en el paso 3 de la etapa 1 se hizo la descripción de los libros de textos de ecuaciones diferenciales, en este paso también se hará la descripción de libros del curso de Control Clásico que está presenten en la malla curricular de la carrera de ingeniería mecatrónica donde aparece la transformada de Laplace y se identificarán las notaciones, diversas interpretaciones y aplicaciones a dicha carrera.

  - **Paso 3: Identificación del modelo praxeológico de la transformada de Laplace en la institución intermediaria (E(DI))**

    De lo encontrado en la descripción de los libros de textos de la especialidad, se identificará una praxeología identificando el tipo de tareas, técnicas, tecnología y teoría, haciendo uso de algunos elementos de la TAD.

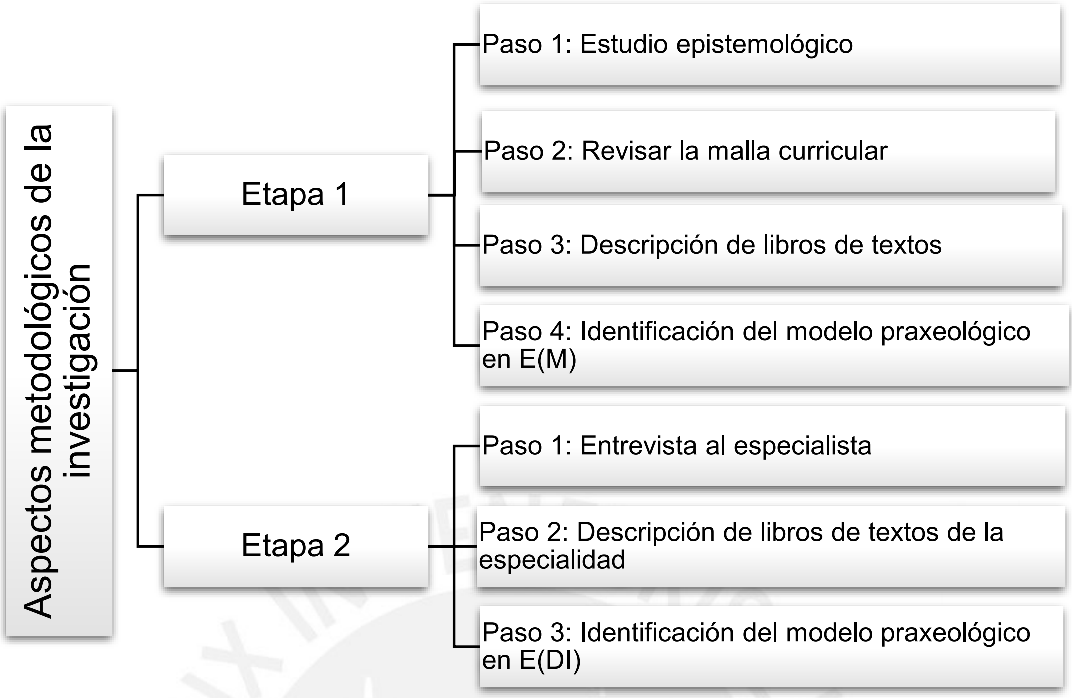


Figura 5: Esquema metodológico de la investigación.

Empezaremos con el paso 1 de la etapa 1 de nuestro aspecto metodológico mencionado, realizando el estudio epistemológico de la transformada de Laplace y su evolución a través de la contribución de algunos matemáticos cuyos trabajos relacionan las ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace.

2.3 Epistemología de la transformada de Laplace

A continuación, se presenta la evolución del concepto de la transformada de Laplace, enfocado a ecuaciones diferenciales, según el trabajo de tesis de Miranda (2001).

En el texto "Institutiones Calculi Integralis" vol. II, en el capítulo V "De Integratione a Equationum Differentialum Secundi Gradus…" Euler (1769) realiza diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante cambio de variable que transforma la ecuación diferencial en una de primer orden.

El método que Euler propone en los problemas 107 y 108 del texto mencionado es resolver una ecuación diferencial general, mediante factores integrantes. A continuación, se expondrá la traducción del problema 107.

Problema 107: Sea dx un elemento constante. Si en la ecuación

$$ddy + Adxdy + Byd^2x = Xd^2x$$

Donde X son funciones cualesquiera para cierto x, y se quiere encontrar funciones para cierto x, para las cuales dicha ecuación multiplicada se hace integrable.

Solución: Sea $dy = pdx$, reemplazando en la ecuación dada se tiene la diferencial de primer grado:

$$dp + Apdx + Bydx = Xdx$$

Que al ser multiplicado por una función que para cierto x se hace integrable e^{mx}:

$$e^{mx}dp + Ae^{mx}pdx + Be^{mx}ydx = e^{mx}Xdx \cdots (\alpha)$$

Se observa que $e^{mx}Xdx$ es integrable, entonces, necesariamente el primer miembro también lo será.

Luego, integrando ambos miembros de la expresión (α) se tiene:

$$\int e^{mx}dp + \int (Ae^{mx}p + Be^{mx}y)dx = \int Xe^{mx}$$

Haciendo convenientemente $\frac{Ap+By}{m} = 1$, se tiene:

$$e^{mx}p + S = \int Xe^{mx}$$

Derivando ambos lados:

$$e^{mx}dp + e^{mx}pmdx + dS = Xe^{mx} = e^{mx}dp + Ae^{mx}pdx + Be^{mx}ydx$$

De donde se tiene:

$$e^{mx}pmdx + dS = Ae^{mx}pdx + Be^{mx}ydx$$

y como $dy = pdx$ entonces

$$e^{mx}mdy + dS = Ae^{mx}dy + Be^{mx}ydx$$

$$dS = Ae^{mx}dy + Be^{mx}ydx - e^{mx}mdy = e^{mx}(A-m)dy + Be^{mx}ydx$$

$$\therefore S = e^{mx}(A-m)y$$

donde m debe ser aceptado y sería $Am - m^2 = B$, siendo $Am - m^2 - B = 0$

Por lo tanto, se tiene la expresión:

$$e^{mx}p + S = \int Xe^{mx} \quad o\ sea \quad e^{mx}p + (A-m)e^{mx}y = \int Xe^{mx}dx$$

Siendo $dy + (A-m)ydx = e^{-mx}dx \int Xe^{mx}\, dx$

La cual también debe ser multiplicada por $e^{(A-m)x}$ para ser integrable, de manera que:

$$e^{(A-m)x}y = \int e^{(A-m)x}dx \int Xe^{mx}\,dx$$

Siendo m una raíz de la ecuación $Am - m^2 - B = 0$, si ambas raíces son f y g, y si $m = f$, entonces $A - m = g$ quedando la ecuación integral:

$$e^{gx}y = \int e^{(g-f)x}dx \int e^{fx}Xdx$$

Finalmente, la solución es:

$$y = e^{-gx}\int e^{(g-f)x}dx \int e^{fx}Xdx = \frac{e^{-fx}}{g-f}\int e^{fx}Xdx - \frac{e^{-gx}}{g-f}\int e^{gx}Xdx \cdots (*)$$

Esto corresponde al razonamiento de Euler para llegar a la solución de la ecuación diferencial propuesta anteriormente.

Interpretando el problema anterior, en términos de notación actual, se puede ver que Euler resuelve una ecuación diferencial de segundo orden del tipo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = X \cdots (\beta)$$

El método que utiliza es reducir el orden de la ecuación multiplicando dicha ecuación diferencial por un factor de la forma e^{mx} que transforma la expresión:

$$e^{mx}\frac{d^2y}{dx^2} + Ae^{mx}\frac{dy}{dx} + Be^{mx}y = Xe^{mx} \cdots (\theta)$$

en una ecuación diferencial exacta, donde m es raíz de $Am - m^2 - B = 0$ (y para el análisis que se hará supondremos que las raíces son distintas).

El factor e^{mx} encontrado hace que la parte izquierda de la ecuación diferencial sea la derivada de la expresión $e^{mx}\frac{dy}{dx} + e^{mx}(A-m)y$, de manera que tiene como factor integrante a $e^{(A-m)x}$.

Si se analiza la manera de resolver la ecuación por este método, sin considerar el cambio de variable para la reducción de orden, se puede observar algunas características similares con el método de solución de ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace.

Por ejemplo, al resolver la ecuación diferencial propuesta usando la transformada de Laplace, se debe multiplicar a (β) por el factor e^{-sx} para obtener:

$$\frac{d^2y}{dx^2}e^{-sx} + A\frac{dy}{dx}e^{-sx} + Bye^{-sx} = Xe^{-sx} \cdots (\gamma)$$

lo cual es parecido a la relación (θ) hallada por Euler.

Luego, siguiendo con el método de la transformada de Laplace, después de multiplicar por e^{-sx} la ecuación (γ) se integra desde 0 hasta ∞:

$$\int_0^\infty \left\{\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By\right\} e^{-sx}dx = \int_0^\infty Xe^{-sx}$$

Como se observa, una de las principales diferencias con el método de la transformada de Laplace es que Euler utiliza integrales indefinidas.

Después de haber multiplicado por e^{mx} en el trabajo de Euler, se tiene que:

$$e^{mx}p + S = \int \left(e^{mx}\frac{d^2y}{dx^2} + Ae^{mx}\frac{dy}{dx} + Be^{mx}y\right) = \int Xe^{mx}dx$$

para valores de m que satisfacen la ecuación $m^2 - Am + B = 0$.

Por otra parte, la solución de la ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace continua de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By\right\} = \mathcal{L}\{X\}$$

entonces: $\mathcal{L}\{y\} = -\frac{sy(0)+y'(0)+Ay(0)}{s^2+As+B} + \frac{\int_0^\infty Xe^{-st}dx}{s^2+As+B}$

Ahora, si suponemos que la transformada de Laplace de X existe y se puede calcular por métodos comunes, entonces, si las raíces de $s^2 + As + B = 0$ son f y g (solo se utilizan estas letras para comparar el polinomio obtenido por Euler, siguiendo su notación), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\int_0^\infty Xe^{-sx}dx}{s^2 + As + B} = \frac{\int_0^\infty Xe^{-sx}dx}{(s-f)(s-g)}$$

y dado que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-f)(s-g)}\right\} = \frac{e^{-fx}-e^{gx}}{f-g}$, entonces, usando el teorema de convolución para encontrar la transformada inversa se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\int_0^\infty Xe^{-sx}dx}{(s-f)(s-g)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-g}\frac{1}{s-f}\int_0^\infty Xe^{-sx}dx\right\} = \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{f-g} * X$$

$$= \frac{1}{f-g}\int_0^t (e^{-f(t-u)} - e^{-g(t-u)})X(u)du = \frac{e^{-ft}}{f-g}\int_0^t e^{fu}X(u)du - \frac{e^{-gt}}{f-g}\int_0^t e^{gu}X(u)du$$

de este modo, la solución completa de la ecuación es:

$$y = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sy(0)+y'(0)+Ay(0)}{s^2+As+B}\right\} + \frac{e^{-ft}}{f-g}\int_0^t e^{fu}X(u)du - \frac{e^{-gt}}{f-g}\int_0^t e^{gu}X(u)du$$

Donde se observa que la última parte de esta expresión, que corresponde a la solución particular de la ecuación se puede comparar con la solución obtenida por Euler $(*)$.

Resumiendo lo anterior, se pudo ver que en los escritos de Euler aparecen elementos relacionados con la transformada de Laplace como la expresión $\int e^{fx}Xdx$ que es una forma que antecede a la de transformada de Laplace. También el origen de la multiplicación por la función exponencial e^{fx} para poder reducir el orden de la ecuación diferencial.

Por otro lado, Laplace (1812) escribió el libro "Théorie analytique des probabilités", donde muestra que la forma más importante de resolver problemas de probabilidad es expresar estos problemas en forma de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

En la sección 29 del libro mencionado, Laplace desarrolla un método general para resolver ecuaciones en diferencias y diferenciales lineales con coeficientes polinomiales, para lo cual se supone soluciones de la forma:

$$y_s = \int x^s \varphi dx \quad o \quad y_s = \int c^{-sx}\varphi dx$$

donde φ es una función de x independiente de s, c representa la constante e.

Si la solución es de la forma $y_s = \int x^s \varphi dx$, entonces a partir del cambio de variable $\delta y = x_s$ se encuentra la siguiente relación:

$$\Delta k y_s = \int \delta y (x-1)^k \varphi dx\,; \quad s x_s = x\frac{d}{dx}(\delta y); \quad s(s-1) = x^2\frac{d^2}{dx^2}(\delta y);\ \ etc.$$

y estas relaciones son sustituidas en $S = Ay_s + B\Delta y_s + C\Delta^2 y_s + etc.$ para poder escribir S de la siguiente manera:

$$S = \int \varphi dx\left(M\delta\mathrm{y} + \mathrm{N}\frac{d}{dx}(\delta\mathrm{y}) + P\frac{d^2}{dx^2}(\delta\mathrm{y}) + \mathrm{Q}\frac{d^3}{dx^3}(\delta\mathrm{y}) + etc.\right)$$

donde $M, N, P, Q,$ etc. son funciones de x.

Luego, Laplace indica que, *como* φ es independiente de s, y por consecuente de δy, entonces vamos a igualar separadamente a 0 la parte de esta ecuación afectada por el signo de la integral, esto va a partir la ecuación precedente en dos ecuaciones siguientes:

$$0 = M\varphi - \frac{d}{dx}(N\varphi) + \frac{d^2}{dx^2}(P\varphi) + \frac{d^3}{dx^3}(Q\varphi) + etc \ldots .(1)$$

y también:

$$S = C + \delta y \left(N\varphi - \frac{d}{dx}(P\varphi) + \frac{d^2}{dx^2}(Q\varphi) - etc. \right) + \frac{d}{dx}(\delta y)\left(P\varphi - \frac{d}{dx}(Q\varphi) + etc. \right) + \frac{d^3}{dx^3}(\delta y)(Q\varphi - etc.) + etc.$$

la primera de estas ecuaciones será para determinar la función φ y la segunda para determinar los límites de modo que la integral $\int (\delta y)\varphi dx$ se anule.

La ecuación (1) es la que servirá para encontrar el factor φ que haga que la función diferencial:

$$\left(M\delta y + N\frac{d}{dx}(\delta y) + P\frac{d^2}{dx^2}(\delta y) + Q\frac{d^3}{dx^3}(\delta y) + etc. \right)\varphi dx$$

sea una diferencial exacta, cualquiera que fuera δy.

Justamente, una aplicación de lo anterior aparece en la sección 33 del libro, donde se propone resolver $(s+1)y_s - y_{s+1} = 0$.

En este caso, se supone como solución a $y_s = \int x^s \varphi dx$ y se reemplaza:

$$(s+1)\int x^s \varphi dx - \int x^{s+1}\varphi dx = 0$$

Además, como $x_s = \delta y, sx_s = x\frac{d}{dx}\delta y, s(s-1) = x^2\frac{d^2}{dx^2}\delta y$ y resolviendo adecuadamente se tiene el sistema de ecuaciones:

$$0 = \varphi(1-x) - \frac{d}{dx}(x\varphi) \quad \text{y} \quad 0 = x_{s+1}\varphi$$

De la primera ecuación se obtiene φ:

$$0 = \varphi - \varphi x - x\frac{d}{dx}\varphi - \varphi = -\varphi x - x\frac{d}{dx}\varphi$$

donde $\varphi(x) = Ac^{-x}$, siendo A una constante.

Además, los límites de integración de $\int x^s \varphi dx$ son determinados por la segunda ecuación de la siguiente manera. Si:

$$x_{s+1}\varphi = x_{s+1}Ac^{-x} = 0 \rightarrow x_{s+1}c^{-x} = 0$$

entonces se tiene que los límites son $x = 0$ y $x = \infty$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación en diferencias es de la forma $y_s = A\int x^s c^{-x} dx$, con A constante y límites de integración entre 0 y ∞ ($y_s = A\int_0^\infty x^s e^{-x} dx$).

A modo de resumen, la función exponencial es importante en los desarrollos hechos por Laplace, ya que puede transformar una ecuación diferencial con coeficientes polinomiales en una ecuación con coeficientes constantes.

Por lo tanto, al igual que Euler, el factor e^{-sx} es un factor integrante de la ecuación diferencial que se quiere resolver, sin embargo, la diferencia es que Laplace trabaja con integrales definidas.

Además, la contribución que realiza Abel (1820) con respecto al desarrollo de la transformada de Laplace es que él estudia las propiedades de la expresión integral $\phi(x) = \int f(t)e^{xt}dt$, que fueron descritas en el volumen 2 de sus obras. En dichas obras, Abel menciona que la función $\phi(x)$ se denomina función generatriz de $f(t)$ y $f(t)$ es la función determinante de $f(x)$.

Según el autor, indica que para cada función $\phi(x)$ existe una función $f(t)$ que satisface la integral anterior y, además, aparece la primera notación para la expresión integral, simbolizada con fg de la siguiente manera:

$$\phi(x) = fg[f(t)] = \int f(t)e^{xt}dt$$

También aparece la notación de la relación inversa:

$$f(t) = D[\phi(x)]$$

El autor también demuestra que la fórmula integral satisface las siguientes propiedades:

Si $\phi(x) = fg[f(t)]$ y $\varphi(x) = fg[g(t)]$, entonces:

- $\phi(x) + \varphi(x) = fg[f(t) + g(t)]$ y $f(t) + g(t) = D[\phi(x) + \varphi(x)]$
- $fg[cf(t)] = cfg[f(t)]$ y $D[c\phi(x)] = cD[\phi(t)]$
- $fg[e^{ht}f(t)] = fg[e^{ht}D\phi(t)]$
- $fg[t^n f(t)] = fg[t^n D\phi(t)]$, etc.

De todo esto se desprende que Abel fue el primero que hace un estudio de las propiedades de la integral $\int f(t)e^{xt}dt$ y la aísla del contexto de la solución de las ecuaciones diferenciales. También, se puede decir que de aquí en adelante, diversos autores empiezan a escribir sobre el método de Laplace y se desliga de los distintos significados que pudiera tener la integral como una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales de orden k con coeficientes polinomiales de grado k.

Por otro lado, Boole (1859) publica el libro “A treatise on differential equations” donde el autor escribe un conjunto de técnicas para la solución de la ecuación diferencial. En el capítulo XVI titulado “métodos simbólicos”, se introduce la notación para el cálculo con operadores simbólicos.

También, se determinan las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales en forma semialgebrizada, por ejemplo, en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$$

tiene como solución a la expresión $y = \frac{f(x)}{D+a}$ y esta expresión es interpretada por Boole como:

$$\frac{f(x)}{D+a} = e^{-ax} \int f(x) e^{ax} dx$$

Boole acredita a Euler y Laplace como inventores del método que él utiliza, sin embargo, Boole realiza algunas modificaciones basándose en Laplace, y lo denomina como “método de Laplace (mL)”.

Finalmente, Bateman (1910) realizó una publicación de un artículo para exponer un método para resolver ecuaciones diferenciales utilizadas por Ruttherford para cálculos de cantidades de sustancias radioactivas.

El sistema de ecuaciones propuesto en el artículo de Bateman es:

$$\frac{dp}{dt} = \lambda_1 P;\ \frac{dQ}{dt} = \lambda_1 P - \lambda_2 Q;\ \frac{dR}{dt} = \lambda_1 Q - \lambda_2 R;\ \frac{dS}{dt} = \lambda_1 R - \lambda_2 T; \cdots$$

Para la solución de este sistema, se introduce las siguientes expresiones:

$$p(x) = \int_0^\infty e^{-xt} P(t) dt\,; q(x) = \int_0^\infty e^{-xt} Q(t) dt$$

Y para cada una de dichas soluciones, se puede demostrar que se cumple:

$$\int_0^\infty e^{-xt} \frac{dP}{dt} dt\ = -P(0) + \int_0^\infty e^{-xt} P(t) dt = -P(0) + xp(x)$$

Finalmente, Bateman usa la misma técnica para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales en casos en que las condiciones iniciales no son 0 para $t = 0$.

El autor emplea límites entre 0 y ∞ en un contexto donde se necesita saber el comportamiento en un tiempo muy grande. También, comienza a utilizar las propiedades de la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, ya que en el desarrollo de su artículo encuentra lo que es actualmente la transformada de Laplace de la derivada de una función.

Después de estudiar la evolución de la transformada de Laplace, podemos contestar algunas preguntas que se dieron de manera natural en este trabajo, como por ejemplo:

- ¿Por qué aparece en la integral el factor e^{-st} multiplicando a la función?

  Como se pudo observar en los trabajos de Euler y Laplace, lo que hace la exponencial es transformar una ecuación diferencial en una ecuación diferencial exacta con la multiplicación de la ecuación original por una función exponencial adecuada. A Laplace le preocupaba la convergencia de la integral, por ende, en la mayor parte de sus problemas resueltos la integral de Laplace aparece con la exponencial e^{-sx} en un intervalo $[0, +\infty[$, donde la integral es convergente, por lo que se puede deducir que dicha exponencial hace que la integral impropia sea convergente.

- ¿Qué problemas se resolvían con la transformada de Laplace?

  De acuerdo con la revisión de textos, se puede afirmar que, desde sus orígenes, la integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ estuvo relacionada con la búsqueda de métodos de soluciones de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Por ende, de acuerdo con los antecedentes presentados, esta integral fue creada implícitamente (en el caso de Euler) o explícitamente (en el caso de Laplace) con la finalidad de resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

En el curso de ecuaciones diferenciales también surge la necesidad de aplicar la transformada de Laplace como un método para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Dicho método no consiste en reducir el orden de la ecuación (como se vio anteriormente con Euler y Laplace), sino en aplicar la transformada de Laplace en cada término de la ecuación diferencial, y con ayuda de tablas de transformada de Laplace ya calculadas previamente, se pueda resolver la ecuación diferencial como una ecuación algebraica.

De acuerdo con este estudio realizado para la transformada de Laplace, podemos decir que estamos en la institución productora de saberes matemáticos (P(M)) debido a que este objeto matemático nació a raíz de una necesidad para resolver ecuaciones diferenciales, mediante cuestionamientos acerca de la convergencia de la integral, límites de integración y sus propiedades, es decir, se cuestionaron respuestas en el ámbito matemático hasta llegar a la definición que se conoce actualmente.

Veremos en los capítulos posteriores, si existe alguna transposición didáctica entre la institución productora de saberes matemáticos (P(M)) y la institución de enseñanza de las matemáticas (E(M)), que en nuestro caso lo haremos con el curso de Ecuaciones Diferenciales.

Por último, en nuestra investigación, haremos uso de algunas definiciones relacionadas a la transformada de Laplace, que nos serán de ayuda en la descripción de los libros y también, en el análisis de las praxeologías ya que serán nuestra referencia principal. Dichas definiciones fueron tomadas de los autores Zill, D. & Lopez, E. (2002). Cabe resaltar que el libro mencionado es utilizado en el capítulo posterior para hacer la descripción de este y para identificar la praxeología requerida en la primera etapa del aspecto metodológico de nuestra investigación.

- Transformada de Laplace: Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces, se dice que la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

  Es la transformada de Laplace de f, siempre que la integral converja.

- Función continua por tramos: Son funciones que están definidas por diversas funciones reales en distintas partes de su dominio.

- Condiciones iniciales de una ecuación diferencial: Son los valores de la solución de la ecuación diferencial $y(x)$ y de sus $n-1$ derivadas en un solo punto $x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0 \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

- Función periódica: Si una función periódica tiene periodo $T, T > 0$, entonces se cumple que $f(t+T) = f(t)$.

- Propiedad de linealidad: Para α y β constantes reales se cumple las transformaciones:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

  siempre que las integrales existan.

- Transformada inversa de Laplace: Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se escribe $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

- Transformada de una derivada: Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty[$, son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty[$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'^{(0)} - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

- Primer teorema de traslación: Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

- Función escalón unitario: Se define como:

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

- Segundo teorema de traslación: Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

- Teorema de convolución: Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty[$ y de orden exponencial, entonces:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

- Transformada de una integral: Cuando $g(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s}$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

y su forma inversa es:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$$

- Transformada de una función periódica: Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty[$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

- Función impulso unitario: La función $\delta_a(t-t_0)$ se llama impulso unitario porque tiene la propiedad de integración $\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt = 1$ y se define de la siguiente manera:

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a \end{cases}$$

- Función delta de Dirac: En algunos ejercicios es necesario trabajar con otro tipo de impulso unitario, una "función" que aproxima $\delta_a(t-t_0)$ y se define por el límite:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t-t_0)$$

- Transformada de la función delta de Dirac: Para $t_0 > 0$ se tiene:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$$

CAPÍTULO III: ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN TEXTOS DEL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

El objetivo de esta primera parte es identificar qué contenidos se relacionan con la transformada de Laplace, como las definiciones usadas, teoremas, ejemplos, y algunas técnicas que estén presentes, y, para esto haremos una revisión de los textos que se utilizan en el curso de Ecuaciones Diferenciales, llevado en la carrera de ingeniería mecatrónica. Posteriormente, se identificará una praxeología para el curso mencionado, a través de tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Para esto, se tomarán algunos libros de textos vistos en las referencias bibliográficas del curso de Ecuaciones Diferenciales, según la malla curricular de la carrera. Este curso pertenece al quinto ciclo de la carrera y es prerrequisito del curso de Variable Compleja y Análisis de Fourier y de Mecánica de Fluidos. El primer curso a su vez es prerrequisito del curso de Control Clásico y del curso de Dinámica de Sistemas Multicuerpo. Esta conexión de los cursos se observa en la Figura 6, que es una parte del plan curricular de la carrera de ingeniería mecatrónica.

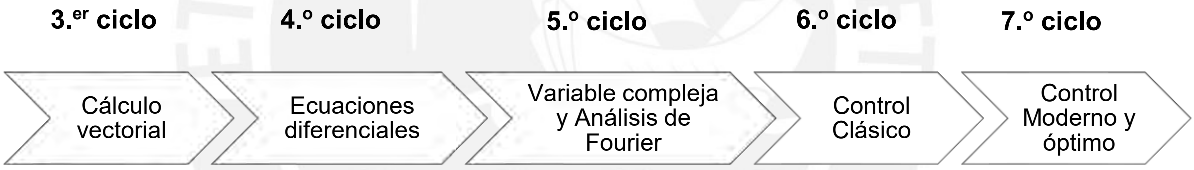


Figura 6: Parte del plan curricular de la carrera de Ingeniería Mecatrónica.
Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería, 2018.

3.1. Descripción de los libros de textos de Ecuaciones Diferenciales

Los libros de Ecuaciones Diferenciales utilizados como referencia bibliográfica en el curso del mismo nombre, en la carrera de ingeniería mecatrónica del cuarto ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería, de acuerdo con sílabo son:

- Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning
- O'Neil, P. V. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Nelson Education.

Escogemos dichos libros debido a que, de acuerdo con algunos profesores que dictan el curso de Ecuaciones Diferenciales, son los libros más utilizados en la última parte del curso.

Cabe resaltar que el libro guía para Ecuaciones Diferenciales es el Zill (2002), y es utilizado para los ejercicios y problemas; y el libro de consulta es el O'Neil (2011) que es utilizado en la parte teórica del curso. De estos libros utilizaremos el Zill (2002) para realizar nuestro análisis praxeológico ya que, según lo dicho por algunos profesores del curso este libro es más usado por los estudiantes y también para resolver ejercicios de acuerdo con los objetivos del curso.

A continuación, se presentará la descripción de los dos textos de Ecuaciones Diferenciales, donde está presente la transformada de Laplace.

Libro de texto de Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera

Este libro, cuyos autores son Zill, Cullen, Hernández & López (2002), en su versión traducida, presenta 9 capítulos ordenados desde una introducción a las ecuaciones diferenciales, hasta soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En el capítulo 7, se presenta el tema de la transformada de Laplace y contiene 6 secciones (p. 255 – 295).

Detallaremos los contenidos que se relacionan con la transformada de Laplace y sus usos que se pueden relacionar con otros temas que se estudian posteriormente.

Tabla 2

Contenidos que tratan sobre la transformada de Laplace

Capítulo 7: Transformada de Laplace (p. 255 – 295)	
7.1. Definición de la transformada de Laplace	• Transformada integral • Definición y ejemplos de la transformada de Laplace • Linealidad de la transformada de Laplace • Transformada de algunas funciones básicas • Condiciones suficientes para la existencia de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ • Comportamiento de $F(S)$ conforme $s \rightarrow \infty$
7.2. Transformada inversa y transformadas de derivadas	• Transformadas inversas • Algunas transformadas inversas • Linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ • Transformadas de derivadas • Solución de EDO lineales

Capítulo 7: Transformada de Laplace (p. 255 – 295)	
7.3. Propiedades operacionales I	• Traslación en el eje s • Primer teorema de traslación • Traslación en el eje t • Segundo teorema de traslación
7.4. Propiedades operacionales II	• Derivadas de una transformada • Transformadas de integrales • Teorema de convolución • Ecuación integral de Volterra • Transformada de una función periódica

Fuente: Zill (2002).

En las primeras secciones del libro mencionado hacen una breve introducción sobre el significado de una transformada, mencionando como la derivada e integral como transformadas, y luego mencionan la propiedad de linealidad de una transformada. Luego mencionan el concepto de una transformada integral, definiéndola como una integral impropia y mencionando la convergencia o divergencia de la integral. La definición es la siguiente:

Una integral definida como $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ transforma una función f de la variable t en una función F de la variable s, poniendo atención en una transformada de integral donde el intervalo de integración es no acotado $[0,\infty[$, entonces la integral se define como

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)dt$$

Donde, la función $K(s,t)$ se llama Kernel o núcleo de la transformada, eligiendo $K(s,t) = e^{-st}$nos proporciona una transformada integral importante, llamada transformada de Laplace.

Luego, después de la presentación de la transformada de Laplace, se desarrollan algunos ejemplos, donde, utilizando la definición formal de la transformada, se evalúa en varias funciones dadas. Se ve el teorema de condiciones suficientes para la existencia y se hace una demostración, para luego hacer un ejemplo con una función continua por tramos.

Para la transformada inversa no se hace preámbulo, solo se muestra una tabla donde se compara la transformada de Laplace y su inversa, y otra tabla donde solo se muestra algunas transformadas inversas de funciones conocidas, para luego ver ejemplos de aplicación, algunos utilizando fracciones parciales (tema visto en los primeros cursos de cálculo). Finalmente, se hace la conexión entre la transformada y su inversa para resolver ecuaciones diferenciales y el procedimiento se resume en el siguiente diagrama:

Figura 7: Procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales.
Fuente: Zill, 2002, p. 266.

En la sección de los dos teoremas de traslación, ambos se demuestran solo en una línea de manera sencilla y se hacen ejemplos aplicativos con ecuaciones diferenciales con valores iniciales y problemas de valores en la frontera.

Por último, se ve el teorema de convolución, haciendo una demostración de dicho teorema y ejemplos aplicativos, así como también ejercicios de aplicación de voltaje periódico, y circuitos.

En la Tabla 3 se presentan algunos temas relacionados con aplicaciones de la transformada de Laplace.

Tabla 3

Temas que se relacionan con la transformada de Laplace

7.5. La función delta de Dirac	• Impulso unitario – Función delta de Dirac • Transformada de la función delta de Dirac
7.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	• Resortes acoplados • Redes • Péndulo doble

Fuente: Zill (2002).

En estas secciones se aplica la transformada de Laplace para resolver ejercicios, utilizando la función delta de Dirac y con problemas de valores iniciales, a través de modelado para describir movimiento de una masa en un resorte, despreciando el amortiguamiento.

Para culminar el capítulo dedicado a la transformada de Laplace, se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, con problemas de modelado y aplicando la transformada inversa. En el caso de los resortes acoplados se utiliza la segunda ley de Newton y no hay fuerza de amortiguamiento. En la Figura 8 se puede observar el sistema resorte / masa acoplada.

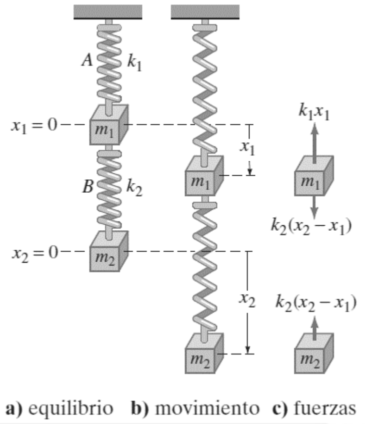


Figura 8: Sistema resorte - masa acoplado.
Fuente: Zill, 2002, p. 296.

En el caso de problemas con redes, se estudian circuitos que contienen un inductor, resistor y capacitor, como se observa en la Figura 9, utilizando la transformada de Laplace.

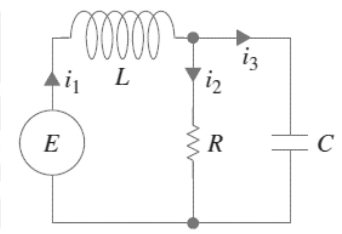


Figura 9: Red eléctrica estudiada en esta sección.
Fuente: Zill, 2002, p. 297.

Por último, se consideran los problemas del péndulo doble (un péndulo unido a otro como se muestra en la Figura 10) que oscila en un plano vertical bajo la gravedad, donde la fuerza de amortiguamiento es despreciable.

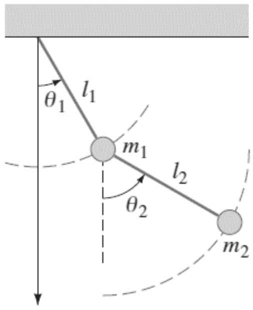


Figura 10: Péndulo doble.
Fuente: Zill, 2002, p. 298.

Para hallar las ecuaciones de los desplazamientos θ_1 y θ_2 respecto a t, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$(m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2 l_1 l_2 \theta_2'' + (m_1 + m_2)l_1 g\theta_1 = 0$$

$$m_2 l_2^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_2 \theta_1'' + m_2 l_2 g\theta_2 = 0$$

Por lo tanto, colocando las condiciones iniciales de acuerdo con diversos ejercicios, se llega a las ecuaciones de desplazamiento.

De acuerdo con la descripción realizada, el concepto de la transformada de Laplace se aborda a partir de la definición formal, con teoremas, algunas demostraciones básicas, y ejemplos prácticos aplicativos (como la resolución de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace, los teoremas de traslación, con la función delta de Dirac). Recién en la última parte del capítulo se ven algunas aplicaciones a problemas físicos a través de ecuaciones diferenciales y modelado con distintas condiciones iniciales (como los problemas de circuitos, péndulo y sistemas de masa - resorte).

Libro de texto Advanced Engineering Mathematics

El libro titulado Advanced Engineering Mathematics, cuyo autor es Peter V. O'Neil está conformado por seis partes, con un total de 23 capítulos. En cada parte se abordan temas diferentes que van desde Ecuaciones diferenciales ordinarias (parte 1) hasta funciones complejas (parte 6).

La parte 1 será de nuestro interés, ya que hay un capítulo donde se aborda el tema de transformada de Laplace. A continuación describiremos cada contenido del capítulo relacionado con la transformada de Laplace y los diferentes usos que se conectan con otros temas matemáticos. Cabe resaltar que este libro que utilizan está en inglés, sin embargo, se utilizará la traducción respectiva de cada definición, teorema o lo que se crea conveniente, sin perder la esencia del libro.

Tabla 4

Contenido del capítulo 3 – parte 1

Parte 1 - Capítulo 3: La transformada de Laplace (p. 77 – 114)	
3.1. Definición y notación	• Ejemplos aplicativos de la definición • Tabla de la transformada de Laplace de funciones seleccionadas
3.2. Solución de problemas de valores iniciales	• Transformada de la derivada • Transformada de una derivada superior

Fuente: O'Neil (2011).

En la primera sección de este capítulo, el autor presenta a la transformada de Laplace como una herramienta muy útil para resolver ciertos problemas de valores iniciales, indicando que dicha transformada de Laplace convierte algunos problemas de valores iniciales en problemas algebraicos, de la siguiente manera:

Initial value problem $\Longrightarrow$ algebra problem
$\Longrightarrow$ solution of the algebra problem
$\Longrightarrow$ solution of the initial value problem.

Figura 11: Procedimiento para ir de un problema de valor inicial a la solución.
Fuente: O'Neil, 2011, p. 77.

Luego, se presenta la definición de la transformada de Laplace y su respectiva simbología como $\mathcal{L}[f] = F$, y después, con un ejemplo aplicativo y la respectiva tabla de la transformada de algunas funciones. En la sección 3.2 se estudia la transformada de la derivada y de la derivada superior. Luego realizan ejemplos aplicativos a la solución de ecuaciones diferenciales.

En la Tabla 5 se presentan algunos teoremas de desplazamiento y de convolución, relacionados con la transformada de Laplace.

Tabla 5

Teoremas que relacionan funciones especiales y la transformada de Laplace

3.3. Función de traslación y función de Heaviside	• El primer teorema de desplazamiento • La función de Heaviside y pulsos • El segundo teorema de desplazamiento • La fórmula de Heaviside
3.4. Convolución	• El teorema de convolución • Un problema de reemplazo planificado

Fuente: O'Neil (2011).

En la sección 3.3 se describe el primer teorema de desplazamiento con algunos ejemplos aplicativos de dicho teorema. Luego, se definen la función de Heaviside y la función de traslación de la siguiente manera:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & para\, t < 0 \\ 1 & para\, t \geq 0 \end{cases} \qquad H(t-a) = \begin{cases} a & para\, t < a \\ 1 & para\, t \geq a \end{cases}$$

Función de Heaviside — Función de desplazamiento

También se estudia a través de gráficos de estas funciones como se muestra en la Figura 12.

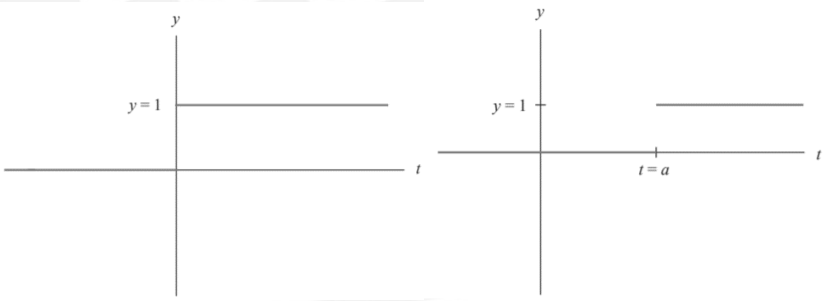


Figura 12: Función de Heaviside (izquierda) y función de desplazamiento (derecha).
Fuente: O'Neil, 2011, p. 87.

Utilizando la función de Heaviside se define la función pulso y se presentan algunas gráficas. Luego, se menciona el segundo teorema de desplazamiento, colocando varios ejemplos aplicativos donde se utiliza las funciones antes vistas y la transformada de Laplace y su inversa. Finalmente, se define la fórmula de Heaviside que se usa para tomar la transformada inversa de un cociente de polinomios. En este último tema se toma un ejemplo para utilizar dicha fórmula y se toman elementos de variable compleja y la fórmula de Euler para llegar a un resultado que en capítulos posteriores se presenta como $\mathcal{L}^{-1}[F]$ como una suma de residuos de $e^{iz}F(z)$ a singularidades de $F(z)$.

En la sección 3.4 se estudia la convolución y el teorema del mismo nombre con una serie de ejemplos aplicativos. Finalmente, en esta sección se ve el problema de reemplazo planificado, donde se estudia una ecuación integral que surge en el contexto de la planificación de reemplazo de artículos diversos (como equipos que se desgastan o medicinas almacenadas que pierden su eficacia con el tiempo). Este problema es una aplicación precisa, donde aparte de la transformada se usa otros elementos matemáticos como sumatorias, fracciones parciales y diferenciales. Finalmente, se obtiene un modelo matemático que relaciona la manera en que se debe reponer las medicinas para mantener la dosis de acuerdo con el tiempo. Se hace un gráfico que se muestra en la Figura 13, donde se observa que es una función creciente en el tiempo.

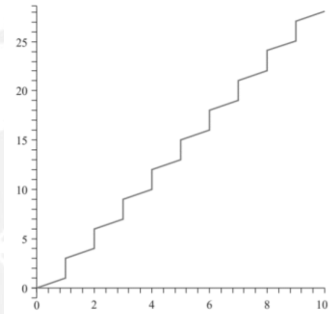


Figura 13: Gráfica que relaciona la función de un reemplazo planificado.
Fuente: O'Neil, 2011, p. 101.

En la Tabla 6 se presentan las aplicaciones de la transformada de Laplace, utilizando otras herramientas matemáticas que complementan dichas secciones.

Tabla 6

Secciones del libro donde se aplica la transformada de Laplace

3.5. Impulso y la función delta	• Propiedad de "filtrado" de la función delta
3.6. Solución de sistemas	• Ejemplos de modelación de sistemas físicos

Fuente: O'Neil (2011).

En estas últimas secciones se estudian diversos problemas de modelación matemática utilizando la transformada de Laplace, solución de sistemas de ecuaciones (sistema de masa resorte y problemas de circuitos).

Se puede observar que ambos libros tienen una organización parecida, ya que ambos muestran las definiciones, teoremas, y ejemplos clásicos. Sin embargo, el primer libro no pone su foco de atención en los aspectos matemáticos muy formales (como las demostraciones de los teoremas y propiedades), ya que hay varios problemas de modelación matemática; pero en el segundo libro, la teoría matemática es más demostrativa, y tiene aplicaciones más intramatemáticas. Sin embargo, una característica importante de ambos libros es que todas las ecuaciones diferenciales que se presentan para su resolución están dadas con condiciones iniciales conocidas.

Debemos resaltar que en el libro escrito por O'Neil, en la sección donde se estudia la transformada de Laplace hay capítulos finales sobre funciones de Bessel y ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales donde también se utiliza la transformada de Laplace; sin embargo, no lo hemos tomado en cuenta en este análisis ni en la descripción de libros debido a que dichos temas no están presentes en el sílabo del curso de Ecuaciones Diferenciales que se lleva en la UNI.

3.2. Análisis praxeológico de la transformada de Laplace en textos del curso de Ecuaciones Diferenciales

Las descripciones que se hicieron anteriormente de los dos libros de ecuaciones diferenciales presentan a la transformada de Laplace y sus propiedades, como los teoremas de traslación, teorema de convolución, que servirán para realizar la praxeología con los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Con base a todo lo que describimos, se realizará el modelo praxeológico, donde se considera la pregunta generatriz: *¿De qué manera podemos dar solución a una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace?* Esta pregunta planteada se fundamenta en los trabajos realizados anteriormente por Euler, Laplace, Abel, y otros matemáticos vistos en la parte epistemológica, y nos ayudará a analizar la transposición existente entre la institución productora de saberes (P(M)) y la institución de la enseñanza de las matemáticas (E(M)). Para dar respuesta a esta pregunta, se consideran diversas técnicas que se estudian en los libros de ecuaciones diferenciales, dichos textos son los descritos inicialmente.

Para realizar el modelo praxeológico respecto a la transformada de Laplace, se considerará los siguientes criterios: los procedimientos que se necesitan para resolver las tareas indicadas, las justificaciones que respalda cada procedimiento y la teoría matemática que engloba los procedimientos y justificaciones.

Presentaremos las notaciones que utilizaremos a continuación:

- $\boldsymbol{T_i}$: tipos de tareas, donde $i = 1,2,3,4,5,6$
- $\boldsymbol{t_{i,j}}$: subtipo de tareas

- $\boldsymbol{GT_i}$: generador de tipos de tareas
- $\boldsymbol{V_i}$: variables

Tipo de tarea ($\boldsymbol{T_1}$)

$\boldsymbol{T_1}$**:** Resolver la ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(t)$$

donde a_2, a_1, a_0, y_0, y_1 son constantes y con condiciones iniciales dadas.

$\boldsymbol{GT_1}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal: V_1, V_2, V_3.

- V_1: orden de la ecuación diferencial (primer orden, segundo orden).
- V_2: condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_0$ o $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$, donde y_0, y_1 y y_2 son constantes reales.
- V_3: la función $g(t)$ que puede ser del tipo $\sin kt, e^{kt}, \cos kt$, donde k es una constante real distinta de 0, o de tipo polinomial de grado 1 o 2.

- Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{1j}}$)

  $\boldsymbol{t_{11}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden con condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_0$, con $g(t) = \sin kt$.

  $\boldsymbol{t_{12}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$, con $g(t)$ polinomial de grado 1.

  $\boldsymbol{t_{13}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$, con $g(t)$ polinomial de grado 2.

  $\boldsymbol{t_{14}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$, con $g(t) = e^{kt}$.

  $\boldsymbol{t_{15}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$, con $g(t) = \cos kt$.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_1}$)

  Para los 5 subtipos de tarea se utiliza la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$.

  Paso 1: Aplicar la transformada de Laplace de cada miembro de la ecuación diferencial utilizando la linealidad.

  Paso 2: Luego, aplicar la transformada de una derivada.

  $$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'^{(0)} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

  Donde n toma valores de 1 o 2.

  Paso 3: De la tabla de las transformadas de Laplace de las funciones mencionadas en la variable V_3, identificar cuál se utilizará para el tarea del subtipo de tarea dado y reemplazar.

Paso 4: Despejar $Y(s)$.

Paso 5: Aplicar la transformada inversa para hallar el valor $y(t)$.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_1}$)

Para la técnica usada anteriormente ($\boldsymbol{\tau_1}$), se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$.

Para el paso 1 se utilizó lo siguiente: Propiedad de linealidad para la transformada de Laplace: Para una combinación lineal de funciones podemos escribir:

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

Siempre que ambas integrales converjan para $s > c$ y α y β constantes. Por lo que se tiene:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Para el paso 2 se utilizó lo siguiente: Teorema de la transformada de la derivada: Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'^{(0)} - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Para el paso 3 se utiliza la siguiente tabla de transformadas de Laplace:

Tabla 7

Tabla de transformadas de algunas funciones básicas

Transformada de algunas funciones básicas	
$\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, n = 1,2,3, \dots$	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$	

Fuente: Zill (2002).

Para el paso 5 se utilizó lo siguiente: Propiedad de linealidad para la transformada inversa de Laplace: Dicha transformada también es una transformación lineal para las constantes α y β.

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

También se aplica en este paso la tabla para la transformada inversa de Laplace:

Tabla 8

Tabla de algunas transformadas inversas

Transformada inversa de algunas funciones básicas	
$1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$	$\sin kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\}$
$t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, n = 1,2,3, \ldots$	$\cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\}$
$e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\}$	

Fuente: Zill (2002).

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_1}$)

  $\boldsymbol{\Theta_1}$**:** Ecuaciones Diferenciales.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_1}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{11}}$.

Tabla 9

Solución PVI de primer orden para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{11}}$

Resolver la ecuación diferencial de primer orden con valores iniciales:

$$y' + 3y = 13 \sin 2t, \quad y(0) = 6$$

Donde $\boldsymbol{V_1}$ toma el valor de 1 debido a que es el orden de la ecuación diferencial y en el caso de esta tarea se considera de primer orden; $\boldsymbol{V_2}$ es la variable de condiciones iniciales tipo $y(0) = y_0$, donde $y_0 = 6$.

Para la resolución de esta tarea se realiza lo siguiente:

- Se aplica la transformada de Laplace en cada miembro de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 13\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

- Aplicando $\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$ (Teorema de la transformada de la derivada) y de la tabla de transformadas $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$ se tiene la expresión:

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} \to Y(s) = \frac{8}{s + 3} + \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}$$

- Finalmente, se aplica la transformada inversa y se tiene:

$$y(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}$$

- Luego, la solución del PVI es $y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3 \sin 2t$.

Fuente: Zill (2002).

Como se puede observar, en la resolución del PVI, se utiliza como tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ en cada paso descrito, que justifica la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$, cuya teoría son las Ecuaciones Diferenciales.

Tipo de tarea (T_2)

$\boldsymbol{T_2}$: Resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales de la forma:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = h(t)g(t),\ \ y(0) = y_0, y'(0) = y_1$$

Donde a_2, a_1, a_0, y_0, y_1 son constantes.

$\boldsymbol{GT_2}$: Resolver la ecuación diferencial lineal: V_1, V_2.

- V_1: clase de función polinomial de $h(t)$ que puede ser de grado 1 o 2.
- V_2: clase de función de $g(t)$ que puede ser de la forma $e^{kt}, \sin kt, \cos kt$ siendo k una constante real distinta de 0.

▪ Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{2j}}$)

$\boldsymbol{t_{21}}$: Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya función $h(t)$ es de grado 1 y $g(t) = e^{kt}$.

$\boldsymbol{t_{22}}$: Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya función $h(t)$ es de grado 1 y $g(t) = \sin kt$.

$\boldsymbol{t_{23}}$: Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya función $h(t)$ es de grado 1 y $g(t) = \cos kt$.

$\boldsymbol{t_{24}}$: Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya función $h(t)$ es de grado 2 y $g(t) = e^{kt}$.

$\boldsymbol{t_{25}}$: Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya función $h(t) = e^{kt}$ y $g(t) = \sin kt$.

$\boldsymbol{t_{26}}$: Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya función $h(t)$ es de grado 2 y $g(t) = \cos kt$.

▪ Técnica ($\boldsymbol{\tau_2}$)

Para los seis subtipos de tareas descritos anteriormente se tiene la técnica $\boldsymbol{\tau_2}$ cuyos pasos son los siguientes:

Paso 1: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ descrito para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_1}$ hasta el paso 2.
Paso 2: Aplicar el primer teorema de traslación.
Paso 3: Despejar $Y(s)$.
Paso 4: Aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener $y(t)$ (paso 5 de $\boldsymbol{\tau_1}$).
Paso 5: Finalmente, aplicar la forma inversa del primer teorema de traslación en los términos necesarios donde se observa traslación en s.

▪ Tecnología ($\boldsymbol{\theta_2}$)

Para la técnica $\boldsymbol{\tau_2}$ se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_2}$.

Para el paso 1 se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ visto en el tipo de tareas 1 hasta el paso 2.

Para el paso 2 se aplica el primer teorema de traslación: Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Para el paso 4 se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ visto en el tipo de tareas 1 en el paso 5.

Para el paso 5 se aplica la forma inversa del primer teorema de traslación: Este procedimiento se resume con símbolos de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t)$$

Donde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_2}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_2}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{24}}$.

Tabla 10

Problema con valores iniciales para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{24}}$

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 17$$

Donde $\boldsymbol{V_1}$ es la variable de la clase de función de $h(t)$ que en nuestro caso es de grado 2; $\boldsymbol{V_2}$ es la variable de la clase de función de $g(t)$ que en nuestro caso es exponencial.

Para la resolución de esta tarea se realiza lo siguiente:

- Primero, utilizamos la linealidad:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$$

- Luego, aplicamos el teorema de la transformada de la derivada y el primer teorema de traslación se tiene:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

- Resolviendo y reemplazando las condiciones iniciales se tiene:

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

- Aplicando la transformada inversa se tiene:

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}$$

- Por último, aplicando la forma inversa del primer teorema de traslación en los dos últimos términos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s-3}\right\} = te^{3t} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\bigg|_{s\to s-3}\right\} = t^4e^{3t}$$

Por lo que $y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \frac{1}{12}t^4 3^{3t}$.

Fuente: Zill (2002).

Vemos de qué manera se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_2}$ en cada paso descrito (usando $\boldsymbol{\theta_1}$), mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, cuya teoría son las Ecuaciones Diferenciales.

<u>Tipo de tarea (T_3)</u>

$\boldsymbol{T_3}$**:** Resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales de la forma:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t), \ \ y(0) = y_0, y'(0) = y_1$$

Donde a_2, a_1, a_0, y_0, y_1 son constantes y $f(t)$ es una función definida por tramos de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & m \leq t \leq r \\ h(t), & t \geq r \end{cases}$$

$\boldsymbol{GT_3}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal: V_1, V_2.

- V_1: clase de función de $g(t)$ (constante, lineal).
- V_2: clase de función de $h(t)$ (lineal, constante).

- Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{3j}}$)

  $\boldsymbol{t_{31}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con $f(t)$ función por tramos, donde $g(t)$ es una constante y $h(t)$ es una función lineal.

  $\boldsymbol{t_{32}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden $f(t)$ función por tramos, donde $g(t)$ y $h(t)$ son funciones lineales.

  $\boldsymbol{t_{33}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con $f(t)$ función por tramos, donde $g(t)$ y $h(t)$ son funciones constantes.

  $\boldsymbol{t_{34}}$**:** Resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con $f(t)$ función por tramos, donde $g(t)$ es una lineal y $h(t)$ es una función constante.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_3}$)

  Para los cuatro subtipos de tareas descritos anteriormente se tiene la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ cuyos pasos son los siguientes:
  Paso 1: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ descrito para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_1}$ hasta el paso 2.
  Paso 2: Aplicar el segundo teorema de traslación.
  Paso 3: Despejar $Y(s)$.
  Paso 4: Aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener $y(t)$ (paso 5 de $\boldsymbol{\tau_1}$).
  Paso 5: Finalmente, aplicar la forma inversa del segundo teorema de traslación.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_3}$)

  Para la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_3}$:

  Para el paso 1 se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ visto en el tipo de tareas 1 hasta el paso 2.

Para el paso 2 se aplica lo siguiente: Considere una función general $y = f(t)$ definida para $t \geq 0$. Se define la función definida por tramos:

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ f(t-a) & t \geq a \end{cases}$$

Donde $a > 0$ es una constante, y $\mathcal{U}(t-a)$ es la función escalón unitario definida por:

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

Segundo teorema de traslación: Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Para el paso 4 se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ visto en el tipo de tareas 1 en el paso 5.

Para el paso 5 se aplica la forma inversa del segundo teorema de traslación: Si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del segundo teorema es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$$

Donde $a > 0$ es una constante.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_3}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_3}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{33}}$.

Tabla 11

Problema propuesto N.º 66 de la sección 7.3

Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y = f(t),\ y(0) = 0;\ y'(0) = -1$, donde:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{V_1}$ es la variable de la clase de función de g(t) que en nuestro caso es constante; $\boldsymbol{V_2}$ es la variable de la clase de función de $h(t)$ que en nuestro caso también es constante.

Para la resolución de esta tarea se realiza lo siguiente:

- Primero, aplicamos la linealidad a la ecuación diferencial y el teorema de la transformada de la derivada:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow (s^2+4)Y(s) + 1 = \mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow Y(s) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\} - 1}{s^2+4}$$

- Para calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ usamos el segundo teorema de traslación. Desde que $f(t) = 1 - \mathcal{U}(t-1)$ podemos escribir:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-1)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

- Reemplazando en la primera expresión se tendrá lo siguiente:

$$Y(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} - e^{-s}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}\right]$$

- Aplicando la transformada inversa y la forma inversa del segundo teorema de traslación se tiene:

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2(t-1))\right]\mathcal{U}(t-1)$$

Fuente: Zill (2002).

Vemos de qué manera se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_3}$ en cada paso descrito (usando $\boldsymbol{\theta_1}$), mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$, cuya teoría son las Ecuaciones Diferenciales.

<u>Tipo de tarea (T_4)</u>

$\boldsymbol{T_4}$**:** Resolver una ecuación integral de la forma:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$\boldsymbol{GT_4}$**:** Resolver la ecuación integral para V_1 y V_2.

- V_1: $h(t)$ es una función exponencial o trigonométrica.
- V_2: $g(t)$ es una función lineal, cuadrática o trigonométrica.

- Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{4j}}$)

  $\boldsymbol{t_{41}}$: Resolver la ecuación integral cuando $h(t)$ es exponencial y $g(t)$ es lineal.

  $\boldsymbol{t_{42}}$**:** Resolver la ecuación integral cuando $h(t)$ es exponencial y $g(t)$ es trigonométrica.

  $\boldsymbol{t_{43}}$**:** Resolver la ecuación integral cuando $h(t)$ es exponencial y $g(t)$ es cuadrática.

  $\boldsymbol{t_{44}}$**:** Resolver la ecuación integral cuando $h(t)$ es trigonométrica y $g(t)$ es lineal.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_4}$)

  Para los cuatro subtipos de tareas descritos anteriormente se tiene la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ cuyos pasos son los siguientes:

  Paso 1: Se identifica la función $h(t-\tau)$ como una función de traslación conocida para aplicar la tabla de transformada de Laplace.

  Paso 2: Luego se aplica la linealidad para tomar la transformada de Laplace a cada término (paso 1 de $\boldsymbol{\tau_1}$).

  Paso 3: Despejar $F(s)$.

  Paso 4: Finalmente, tomar la transformada inversa de Laplace para hallar la solución pedida.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_4}$)

  Para la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_4}$**:**

  Para el paso 1 se aplica lo siguiente:

  Teorema de convolución: si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Para el paso 2 se aplica la transformada de una integral: Cuando $g(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Y la forma inversa de la expresión anterior es:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$$

Para el paso 4 se aplica la inversa del teorema de convolución: El teorema de convolución, a veces es útil para encontrar la transformada de Laplace inversa del producto de dos transformadas de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$$

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_4}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_4}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{43}}$.

Tabla 12

Problema modificado para aplicar la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{43}}$

Resolver la ecuación integral usando la transformada de Laplace: $$f(t) = 3t^2 + \int_0^t f(t)e^{t-\tau}d\tau$$ Donde $\boldsymbol{V_1}$ es la variable de la clase de función de $h(t)$ que en nuestro caso es exponencial; $\boldsymbol{V_2}$ es la variable de la clase de función de $h(t)$ que en nuestro caso es cuadrática.
Para la resolución de esta tarea se realiza lo siguiente: - Se identifica la función $h(t-\tau) = e^{t-\tau}$ por lo que $h(t) = e^t$. - Se toma la transformada de Laplace para cada término (linealidad) y se aplica la inversa del teorema de convolución, donde $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$. $$F(s) = 3\cdot\frac{2}{s^3} - F(s)\cdot\frac{1}{s-1} \rightarrow F(s) = \frac{6}{s^2} - \frac{6}{s^3}$$ - Finalmente, tomar la transformada inversa, donde se tiene que la solución es: $$f(t) = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{6}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} \rightarrow f(t) = 6t - 3t^2$$

Fuente: Zill (2002).

Vemos de qué manera se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_4}$ en cada paso descrito, mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$, cuya teoría son las Ecuaciones Diferenciales.

<u>**Tipo de tarea (T_5)**</u>

$\boldsymbol{T_5}$**:** Resolver la ecuación diferencial de la forma:

$$a_2y'' + a_1y' = a_0\delta(t - t_0) + a\delta(t - t_1)$$

Donde $t_0, t_1 > 0$; a_1, a_2, a_0, a son constantes y $\delta(t - t_0), \delta(t - t_1)$ son funciones delta de Dirac.

$\boldsymbol{GT_5}$**:** Resolver la ecuación integral para V_1, V_2, V_3.

- V_1: con condiciones iniciales de tipo $y(0) = y_0$ o $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$, donde y_0, y_1 y y_2 son constantes reales.
- V_2: a es una constante real o $a = 0$.
- V_3: de primer orden y segundo orden.

▪ Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{5j}}$)

$\boldsymbol{t_{51}}$: Resolver la ecuación diferencial de primer orden cuando a es constante y con condiciones iniciales tipo $y(0) = y_0$.

$\boldsymbol{t_{52}}$: Resolver la ecuación diferencial de primer orden cuando $a = 0$ y con condiciones iniciales tipo $y(0) = y_0$.

$\boldsymbol{t_{53}}$: Resolver la ecuación diferencial de segundo orden cuando a es constante y con condiciones iniciales tipo $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$.

$\boldsymbol{t_{54}}$: Resolver la ecuación diferencial de segundo orden cuando $a = 0$ y con condiciones iniciales tipo $y(0) = y_1, y'(0) = y_2$.

▪ Técnica ($\boldsymbol{\tau_5}$)

Para los cuatro subtipos de tareas descritos anteriormente se tiene la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$ cuyos pasos son los siguientes:
Paso 1: Identificar la función delta de Dirac.
Paso 2: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ descrito para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_3}$ hasta el paso 3.
Paso 3: Aplicar la transformada de la función delta de Dirac.
Paso 4: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ descrito para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_3}$ (paso 4 y 5).

▪ Tecnología ($\boldsymbol{\theta_5}$)

Para la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$ se aplican la tecnología $\boldsymbol{\theta_5}$ cuyos pasos son los siguientes:

Para el paso 1 se aplica la función delta de Dirac: Es un tipo de impulso unitario, una “función” que se define de la siguiente manera:

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)$$

Donde $\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \frac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$ y $a>0, t_0>0$.

Para el paso 2 se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_3}$ visto en $\boldsymbol{T_3}$ (hasta el paso 3).

Para el paso 3 se aplica la transformada de la función delta de Dirac: Para $t_0>0$ se tiene:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$$

Para el paso 4 se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_3}$ visto en $\boldsymbol{T_3}$ (paso 4 y 5).

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_5}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_5}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{54}}$.

Tabla 13

Problema con valores iniciales para aplicar la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{54}}$

Resuelva la ecuación diferencial:

$$y''+y=4\delta(t-2\pi),\quad y(0)=1, y'(0)=0$$

Donde $\boldsymbol{V_1}$ son las condiciones iniciales de tipo $y(0)=y_1, y'(0)=y_2$; $\boldsymbol{V_2}$ es la variable de la constante cuando $a=0$ y $\boldsymbol{V_3}$ es la variable de segundo orden de la ecuación diferencial.

Para la resolución de esta tarea se realiza lo siguiente:

- Aplicamos la linealidad de la transformada de Laplace, la transformada de la derivada, y por último la transformada de Laplace de la función delta de Dirac.

$$s^2Y(s)-s+Y(s)=4e^{-2\pi s}\rightarrow Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

- Aplicamos la forma inversa del segundo teorema de traslación y se tiene:

$$y(t)=\cos t+4\sin(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$$

También se puede escribir como una función por tramos de la siguiente manera:

$$y(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t<2\pi\\ \cos t+4\sin t, & t\ge 2\pi\end{cases}$$

Fuente: Zill (2002).

Vemos de qué manera se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_5}$ en cada paso descrito (usando $\boldsymbol{\theta_1}$), mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$, cuya teoría son las Ecuaciones Diferenciales.

<u>Tipo de tarea ($\boldsymbol{T_6}$)</u>

$\boldsymbol{T_6}$**:** Resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_1x''+a_2x+a_3y+a_4y'+a_5x'+a_6y''=0$$

$$b_1y'' + b_2y + b_3x + b_4x' + b_5y' + b_6x'' = 0$$

Sujeto a $x(0) = x_0, x'(0) = x_1, y(0) = y_0, y'(0) = y_1$; donde $a_i, b_i, x_0, x_1, y_0, y_1$ son constantes y $i = 1, \dots, 6$.

$\boldsymbol{GT_6}$**:** Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para V_1, V_2.

- V_1: $a_2 = a_3 = 0$ y $b_1 = b_3 = 0$ o $a_2 \neq a_3 \neq 0$ y $b_1 \neq b_3 \neq 0$.
- V_2: $a_4 = a_5 = 0$ y $b_4 = b_5 = 0$ o $a_4 = a_5 \neq 0$ y $b_4 = b_5 \neq 0$.

▪ Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{6j}}$)

$\boldsymbol{t_{61}}$: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_1x'' + a_4y' + a_5x' = 0$$
$$b_2y + b_4x' + b_5y' = 0$$

$\boldsymbol{t_{62}}$: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_1x'' + a_2x + a_3y = 0$$
$$b_1y'' + b_2y + b_3x = 0$$

$\boldsymbol{t_{63}}$: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_3y + a_5x' = 0$$
$$b_2y + b_3x + b_5y' = 0$$

$\boldsymbol{t_{64}}$: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_1x'' + a_2x + a_6y'' = 0$$
$$b_1y'' + b_2y + b_6x'' = 0$$

▪ Técnica ($\boldsymbol{\tau_6}$)

Para los cuatro subtipos de tareas descritos anteriormente se tiene la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$ cuyos pasos son los siguientes:

Paso 1: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ descrito para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_1}$ hasta el paso 2, para cada ecuación diferencial.

Paso 2: Se forma un sistema de ecuaciones algebraicas y se resuelve para despejar una de las variables $x(s)$ e $y(s)$.

Paso 3: A la variable despejada (que puede ser $x(s)$ o $y(s)$) se le aplica la transformada inversa de Laplace para hallar la solución.

Paso 4: Finalmente, se realiza el mismo proceso para la otra variable, regresando al paso 3 y se halla la solución pedida.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_6}$)

  Para la técnica descrita $\boldsymbol{\tau_6}$ se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ hasta el paso 2, que se hizo en $\boldsymbol{T_1}$, con la diferencia que se hace para cada variable por separado en el sistema de ecuaciones diferenciales.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_6}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_6}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{62}}$.

Tabla 14

Problema de resortes acoplados usando sistema de ecuaciones diferenciales

Resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$x_1'' + 10x_1 - 4x_2 = 0$$
$$-4x_1 + x_2'' + 4x_2 = 0$$

Sujeta a $x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2(0) = 0, x_2'(0) = -1.$

Donde $\boldsymbol{V_1}: a_4 = a_5 = a_6 = 0$ y $\boldsymbol{V_2}: b_4 = b_5 = b_6 = 0$

Para la resolución de esta tarea se realiza lo siguiente:

- Calculamos la transformada de Laplace de cada ecuación:

$$s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0$$
$$-4X_1(s) + s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) = 0$$

  Donde $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$.

- Resolviendo el sistema anterior y despejando una de las variables se tiene:

$$X_1(s) = -\frac{1/5}{s^2+2} + \frac{6/5}{s^2+12}$$

- Tomando la transformada inversa de Laplace se tiene:

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\sin 2\sqrt{3}\,t$$

- Sustituyendo la expresión para $X_1(s)$ en el primer sistema se tiene:

$$X_2(s) = -\frac{2/5}{s^2+2} - \frac{3/5}{s^2+12} \;\rightarrow\; x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5}\sin\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin 2\sqrt{3}t$$

Fuente: Zill (2002).

Vemos de qué manera se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_6}$ en cada paso descrito (usando $\boldsymbol{\theta_1}$), mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$, cuya teoría son las Ecuaciones Diferenciales.

3.3. Resumen de lo hallado

Del análisis hecho anteriormente, basándonos en Zill (2002), se identifica una praxeología para la transformada de Laplace, asociada a la institución de enseñanza de las matemáticas E(M), que parte de la pregunta generatriz: *¿De qué manera podemos dar solución a una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace?* Para responder a dicha pregunta, identificaremos la manera en cómo se relacionan los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

La Figura 14 muestra la manera en cómo se relacionan las técnicas con los tipos de tarea encontrados anteriormente. De acuerdo con esquema planteado, vemos que algunos pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$ se utiliza en las técnicas $\boldsymbol{\tau_2}, \boldsymbol{\tau_3}$ y $\boldsymbol{\tau_6}$, señalado con líneas punteadas, porque la relación entre las técnicas es parcial, es decir, solo se utilizan algunos pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$ en $\boldsymbol{\tau_2}, \boldsymbol{\tau_3}$ y $\boldsymbol{\tau_6}$; lo mismo sucede con $\boldsymbol{\tau_3}$ donde se utiliza en $\boldsymbol{\tau_5}$ hasta el paso 3, identificando previamente la función delta de Dirac. También, podemos ver una línea punteada en la pregunta generatriz que se relaciona con $\boldsymbol{T_4}$ de manera parcial, ya que en este tipo de tarea no se resuelve una ecuación diferencial, sino una ecuación integral, pero usando la transformada de Laplace y, de acuerdo con la tarea dada, el primer o segundo teorema de traslación.

En el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$, relacionada a resolver una ecuación diferencial lineal se toma como base para obtener un generador de tareas $\boldsymbol{GT_1}$, donde las variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$ tienen como objetivo de generar subtipos de tareas más específicas, como lo es el orden de la EDO, las condiciones iniciales, cómo es la función $g(t)$. Hacemos hincapié en por qué tomamos solo cuatro funciones básicas (polinomial, exponencial, seno y coseno) que puede tomar $g(t)$, y se debe a que en el libro del cual nos basamos para realizar el análisis presentan en la tabla de transformada de Laplace (calculado en las secciones iniciales del mismo capítulo) dichas funciones. Sin embargo, si función $g(t)$ no fuera ninguna de las funciones antes mencionadas, la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ seguiría funcionando, lo único que cambiaría sería el paso 3, ya que no se utilizaría la tabla de transformada de Laplace, en ese caso se tendría que hacer un cálculo previo de la transformada de Laplace de la función $g(t)$, mediante la definición mencionada en el capítulo anterior, a través de la integral impropia.

También, podemos ver que la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ y la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ se utilizan en los tipos de tarea $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_3}$, que también se relacionan con resolver una ecuación diferencial, pero no se utilizan todos los pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$ ya que en $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_3}$ los términos de las ecuaciones diferenciales se trasladan en s o en t y surge la necesidad de aplicar otra tecnología (primer y segundo teorema de traslación) para complementar $\boldsymbol{\theta_1}$ y poder justificarla.

Hay que tener en cuenta que la restricción de la función $g(t)$ en $\boldsymbol{T_1}$ es importante, ya que, si no se define bien (o no se define), entonces tendríamos que $\boldsymbol{T_2} \subset \boldsymbol{T_1}$, porque podríamos tener el caso que $g(t) = h(t) \cdot f(t)$ y como no se especifica dicha función, entonces se podría resolver con la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$. Sin embargo, en los dos libros descritos inicialmente dichos tipos de tarea se resuelven con distintas técnicas, por eso es necesario definir correctamente la función $g(t)$.

Por otro lado, vemos que $\boldsymbol{T_2}$ posee más subtipos de tareas que $\boldsymbol{T_1}$, y, si la variable didáctica $\boldsymbol{V_2}$ no tuviera como restricción a la constante $k \neq 0$, se podría formar un subtipo de tarea para $\boldsymbol{T_1}$ y en ese caso, se podría decir que el alcance de la técnica $\boldsymbol{\tau_2}$ es mayor a la de $\boldsymbol{\tau_1}$ porque resolvería más tareas (como la multiplicación de dos funciones) que $\boldsymbol{\tau_1}$.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$ se relaciona con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$ por la técnica que utilizan. Vemos que $\boldsymbol{\tau_5}$ necesita de la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ (todos los pasos pero en diferente orden) para poder ejecutar los tipos de tareas de $\boldsymbol{T_5}$; incluso podemos observar que $\boldsymbol{\tau_5}$ necesita implícitamente a $\boldsymbol{\tau_1}$ porque la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ llama a $\boldsymbol{\tau_1}$ (hasta el paso 2) para ejecutar el tipo de tarea. Sin embargo, si tenemos en cuenta que la función delta de Dirac se obtiene a través de la función impulso unitario, esta es una función por tramos y cada tramo es constante, entonces estaríamos hablando de un subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{33}}$ de $\boldsymbol{T_3}$, es decir, la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ se puede aplicar para resolver el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$. Por lo tanto, la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ tiene más alcance que la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$. Este alcance también se puede ver a través de las tecnologías empleadas para los tipos de tareas mencionados, con la diferencia que para $\boldsymbol{T_5}$ tenemos como tecnología principal a la transformada de la función delta de Dirac.

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$ que se pide resolver una ecuación integrodiferencial, se aplican herramientas propias de la transformada de Laplace, como el teorema de convolución, incluso se puede observar que la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ necesita implícitamente casi todos los pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$ (excepto el paso 2 de aplicar la transformada de la derivada), y esto debido justamente a la tecnología $\boldsymbol{\theta_5}$ que aplica la convolución de funciones y también la traslación de funciones (usado en $\boldsymbol{\tau_2}$) para justificar la técnica. Sin embargo, no podemos hablar del alcance de la técnica debido a que los tipos de tareas realizadas por $\boldsymbol{T_4}$ son diferentes a los demás tipos de tareas encontrados ($\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \boldsymbol{T_3}, \boldsymbol{T_5}$ y $\boldsymbol{T_6}$).

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$ se presenta para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, donde las dos variables didácticas $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}$ generan cuatro subtipos de tareas. Estas variables didácticas se diseñaron de acuerdo con los ejercicios del libro que se utilizó para el análisis praxeológico, pero cabe resaltar que se pueden generar muchas más variables didácticas con diversas condiciones y aun así, la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$ funcionaría para los subtipos de tarea que se puedan generar, ya que la tecnología $\boldsymbol{\theta_6}$ que justifica a la técnica es la misma.

Debemos resaltar que en el paso 2 de la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$ se resuelve un sistema de ecuaciones lineales, que se estudia en cursos de matemática elemental a nivel escolar, porque se debe despejar una de las variables (usando métodos vistos en álgebra sobre sistemas de ecuaciones lineales) y continuar con el proceso de la transformada de Laplace; por ende la tecnología $\boldsymbol{\theta_6}$ para dicho paso se justificaría con técnicas ya aceptadas en otra teoría, que en ese caso sería la teoría $\boldsymbol{\Theta}$ del álgebra.

Cabe resaltar que todas las tareas encontradas tienen como teoría a las Ecuaciones Diferenciales, ya que es la rama de las matemáticas que justifica cada tecnología encontrada en dicho análisis.

A continuación, en la Figura 14 se muestra el esquema praxeológico de la transformada de Laplace (EPTL) que relaciona la pregunta generatriz con los tipos de tareas encontradas en el libro de texto y sus respectivas técnicas.

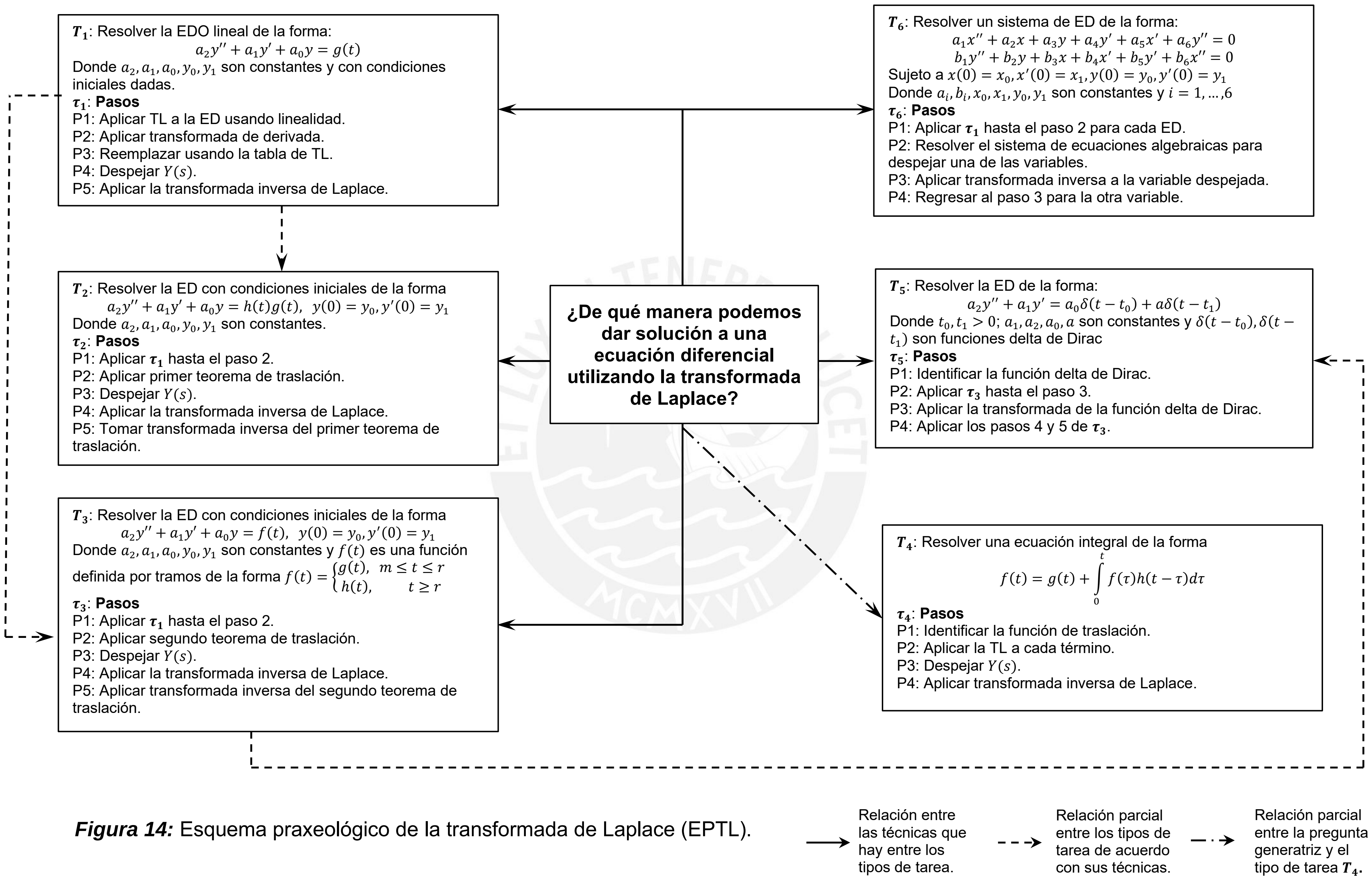


Figura 14: Esquema praxeológico de la transformada de Laplace (EPTL).

Podemos concluir, que de acuerdo con la descripción de la praxeología, se puede brindar una perspectiva general de cómo los textos de ecuaciones diferenciales abordan el tema de la transformada de Laplace mediante técnicas específicas de resolución de ecuaciones diferenciales.

Las técnicas vistas en los tipos de tarea se relacionan entre sí utilizando algunos pasos, por ejemplo en las técnicas $\boldsymbol{\tau_2}, \boldsymbol{\tau_3}$ y $\boldsymbol{\tau_6}$ se utilizan 2 pasos de la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ y, de manera implícita las técnicas $\boldsymbol{\tau_4}$ y $\boldsymbol{\tau_5}$ utilizan algunos pasos de $\boldsymbol{\tau_1}$.

Los ejemplos de tareas dados en cada tipo de tarea, nos da una idea general de cómo funciona la técnica descrita para cada $\boldsymbol{T_i}$ encontrada, de acuerdo con las tecnologías que validan dichas técnicas, con definiciones y teoremas de la transformada de Laplace, donde la rigurosidad matemática solo se menciona al inicio mediante la convergencia de la integral impropia, y en las siguientes secciones ya no lo mencionan.

Por otro lado, en el tipo de tareas $\boldsymbol{T_3}$ donde se usan las funciones por tramos para resolver ecuaciones diferenciales, en Zill (2002) se pueden ver aplicaciones en problemas de vigas donde la deflexión estática $y(x)$ de una viga uniforme de longitud L con carga $w(x)$ se determina a partir de una ecuación diferencial de orden 4, y la función de la carga $w(x)$ se da a través de una función por tramos.

Resaltamos en esta aplicación de $\boldsymbol{T_3}$ que, a pesar de que se tiene una ecuación diferencial de orden 4 y este orden no corresponde a dicho tipo de tarea, $\boldsymbol{T_3}$ se puede generalizar a cualquier orden de la ecuación diferencial, y la técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ empleada funcionará, debido a que los pasos de dicha técnica no dependen del orden, sobre todo cuando se aplica la linealidad y la transformada de la derivada.

También, podemos mencionar a los tipos de tarea $\boldsymbol{T_4}$ y $\boldsymbol{T_5}$ que tienen aplicaciones a circuitos RLC y voltajes periódicos; pero, hay que tener en cuenta que previo a reconocer qué técnica se debe aplicar, primero se debe modelar el sistema con conocimientos previos de física (curso llevado también en la carrera de ingeniería mecatrónica en el tercer ciclo llamado Física III).

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$ donde se resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales también se mencionan aplicaciones de redes eléctricas, sistemas de resortes acoplados y problemas de péndulo doble; incluso, en Zill (2002) se observa que la sección de sistemas de ecuaciones diferenciales lo presentan desde el inicio con aplicaciones, sin preámbulo alguno. Debido a eso, en el ejemplo de la tarea colocado en $\boldsymbol{T_6}$ se puede ver en la leyenda que es un problema de resortes acoplados. Cabe resaltar que, en el mismo caso de $\boldsymbol{T_4}$ y

$\boldsymbol{T_5}$ el estudiante debe modelar antes el sistema físico mediante conocimientos previos de física.

Finalmente, y de acuerdo con el estudio epistemológico visto en el capítulo anterior (indicado como la institución productora de saberes P(M)), podemos ver que las técnicas de los tipos de tarea que se presentan en esta praxeología identificada (a través de la resolución de ecuaciones diferenciales), son diferentes a las tareas que dieron origen al concepto actual de la transformada de Laplace, donde si bien es cierto, también se buscaba resolver ecuaciones diferenciales, las técnicas empleadas para este fin eran distintas, porque Euler y Laplace buscaban inicialmente reducir el orden de la ecuación diferencial multiplicando el factor de la exponencial; además en sus estudios realizados no mencionaban las funciones por tramos ni condiciones iniciales.

En cambio en nuestra praxeología identificada, lo que se busca es resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, sin necesidad de multiplicarla por un factor integrante y tampoco calculando la transformada de Laplace de cada expresión en la ecuación diferencial, ya que para eso se utilizan las tablas dadas en la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$.

De lo dicho anteriormente, podemos ver que hay una transposición entre P(M) y E(M) ya que, lo que se empezó con Euler y Laplace multiplicando el factor exponencial e^{mx} a toda la ecuación diferencial para reducir el grado de esta (estudiado en la epistemología de la transformada de Laplace), en la E(M) se busca la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando de manera directa la transformada de Laplace a cada elemento de la ecuación diferencial y utilizando la tablas 7 y 8 para las transformadas de Laplace y sus inversas, de manera que se puede dar solución a la ecuación diferencial; es decir: P(M) → E(M).

Como conclusión de este capítulo tenemos que la praxeología identificada puede generar diversos tipos de tarea, por ejemplo, generalizando el orden de las ecuaciones diferenciales para aplicar la transformada de Laplace. La importancia de esta praxeología radica en poder aplicarla en tareas de modelación matemática y seguir los pasos de las técnicas dadas para poder resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN TEXTOS DEL CURSO DE CONTROL CLÁSICO

Uno de los cursos considerados como pilares en la ingeniería mecatrónica es el de Control Clásico, llevado en el plan curricular de dicha carrera, a veces con diversos nombres pero con el mismo contenido; la importancia de este curso radica en que un egresado de ingeniería mecatrónica, según la presentación de la Escuela Profesional de Ingeniería Mecatrónica de la UNI, debe estar capacitado para desarrollar competencias profesionales de manera que pueda ser capaz de diseñar, construir y operar productos inteligentes como robots, máquinas, herramientas, sistemas autónomos, entre otros; y este curso es elemental para poder desarrollar dicha competencia porque los temas que se estudian (como sistemas de control clásico, modelado de sistemas, análisis de control) dan las herramientas necesarias para llevar cursos posteriores como Control Moderno y Óptimo y Diseño de Sistemas en Tiempo Real llevados en ciclos posteriores (sétimo y octavo ciclo respectivamente). La elección de este curso también se debe a que se estudian temas relacionados a la transformada de Laplace que se evidencian de manera explícita en los primeros temas que se desarrolla en el curso.

Por esa razón, en esta parte realizaremos una revisión de textos del curso de Control Clásico que llevan los ingenieros mecatrónicos de la Universidad Nacional de Ingeniería en su formación profesional, identificando qué clase de contenido matemático relacionado a la transformada de Laplace se utilizan.

Primero, se hará una descripción de los temas que se estudian en dos de los libros de textos que aparecen en las referencias bibliográficas del curso de Control Clásico, donde se evidencia la transformada de Laplace de manera explícita, a través de diferentes notaciones, interpretaciones en su contexto de especialidad y aplicaciones en diferentes contextos de la ingeniería mecatrónica.

Se entrevistará a un docente especialista del curso de Control Clásico que dicta en la carrera de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería y se le consultará sobre el material que se utiliza en el dictado de dicho curso.

Por último, se identificará una praxeología sobre los usos de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica, para poder identificar los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que justifican los procedimientos que se realizan, utilizando las herramientas brindadas por la TAD.

4.1. Entrevista al especialista del curso de Control Clásico

Siguiendo con la secuencia del aspecto metodológico planteado inicialmente, se procedió a realizar una entrevista a un profesor cuya profesión es ingeniero mecatrónico y dicta el curso de Control Clásico. El profesor dictante nos concedió una entrevista mediante la plataforma *Meet*, donde se realizaron las preguntas que se muestran a continuación:

D: Buenas tardes, profesor Daniel, muchas gracias por acceder a la entrevista, en primer lugar me gustaría tener una descripción general del curso de Control Clásico.

P: Buenas tardes Diana, el curso de Control Clásico es un curso obligatorio del sexto ciclo de la carrera, es un curso muy importante y uno de los pilares de la ingeniería mecatrónica debido que la mayoría de trabajos en el área de mecatrónica tienen una parte de sistemas de control. Además que se pueden hacer maestrías y especializaciones en ingeniería de control.

D: Debido a la pandemia y a las clases que se han vuelto virtuales, ¿cómo se está llevando el curso actualmente, ya que tengo entendido que hay laboratorios que se incluyen en la nota del curso?

P: Las clases se dan una vez por semana de manera sincrónica, cuya duración es de 2 horas, y también se colocan videos de clases asincrónicas. La plataforma que se utiliza para compartir el material de clase como los libros, videos de clase tanto sincrónica como asincrónica es el drive. Con respecto a los laboratorios, este ciclo se está llevando de una manera distinta, ya que el ciclo pasado (2020-2) algunos alumnos se contagiaron por COVID por hacer reuniones y poder hacer un mejor trabajo de laboratorio.

D: Con respecto a los programas utilizados en el curso, ¿qué tanta importancia se le da a dichos softwares en el curso?

P: El software que se utiliza es el Matlab y el Simulink que es un paquete del Matlab. Es un programa muy importante ya que les permite simplificar muchos cálculos que ven a lo largo del curso, además de poder hacer simulaciones con sistemas que, o no pueden ser construidos en la vida cotidiana, o requeriría de un elevado costo y tiempo poder hacerlo.

D: ¿Ese software se les enseña previamente en algún curso anterior, o es que tienen que aprenderlo por su cuenta?

P: Yo les brindo el software para que ellos lo puedan instalar, además les doy un tutorial y algunos videos de YouTube para que se puedan familiarizar con el programa.

D: Respecto a la transformada de Laplace en específico, según su experiencia como profesor de curso y como ingeniero mecatrónico, ¿dónde se puede evidenciar el uso que se le da a este objeto matemático, tanto en la formación, como en el cotidiano disciplinar o campo de ejecución del ingeniero mecatrónico?

P: La transformada de Laplace se utiliza en este curso de manera muy somera, es decir, no se le da la profundidad matemática que ellos ven cuando llevan cursos de ecuaciones diferenciales. En este curso se busca más que nada que los alumnos interpreten lo que hacen a través de una función de transferencia que hallan, y a partir de eso, poder hallar la estabilidad de un sistema. Es más, cuando ellos aprenden a utilizar el Matlab ya no les es necesario agarrar un papel para hacer una transformada de Laplace. Lo que tienen que hacer obligatoriamente es hacer el modelado matemático del sistema, y lo demás lo puede hacer el Matlab.

D: ¿Hay algunos ejemplos clásicos donde se vea lo que usted me comentó anteriormente?

P: Sí, por ejemplo los sistemas de amortiguación de los automóviles, lo que se hace es que, a través de mecanismos específicos, inyectar una fuerza para compensar ese efecto del movimiento, entonces, a través de la transformada de Laplace se modela y en base a esa función de transferencia se grafica el comportamiento del sistema en el tiempo y se proponen soluciones para poder modificar la dinámica del sistema y mejorarlo para que se mantenga la variación dentro de un rango aceptable (objetivo de control). Básicamente eso es lo que se hace en teoría de control, en la parte de automatización.

Gracias a la entrevista con el profesor, nos dio un panorama para poder analizar el curso de Control Clásico y poder saber en qué temas se puede evidenciar la transformada de Laplace.

4.2. Descripción de los libros de textos del curso de Control Clásico

El curso de Control Clásico es llevado en el sexto ciclo de la carrera de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería, y tiene como prerrequisito el curso de Variable Compleja y Análisis de Fourier, que a su vez es prerrequisito del curso de Ecuaciones Diferenciales, que se analizó en el capítulo anterior, y donde se estudia la transformada de Laplace.

Los textos utilizados que se encuentran en las referencias bibliográficas del sílabo del curso de Control Clásico son los siguientes:

- Hernández Gaviño, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab*. Pearson Educación.

- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.

Utilizaremos dichos textos para realizar la descripción debido a que en la entrevista con el docente, nos comentó que en el curso se utilizan al menos 5 textos, pero en los primeros capítulos (que son los capítulos donde se estudian los sistemas de control, modelamiento y función de transferencia) se utilizan los mencionados anteriormente porque presentan más ejercicios para que el estudiante pueda practicar.

Cabe resaltar que para el análisis praxeológico utilizaremos los libros de Hernández (2010) y Ogata (2010) porque son los libros guías y donde se encuentran más ejercicios (según lo comentado por el profesor de curso). El libro de Dorf (2005) no se utilizará debido a que se utiliza en la parte teórica, siendo el libro de consulta.

Antes de hacer la descripción de los textos, mencionaremos algunos términos recurrentes propios del curso de Control Clásico que utilizaremos a lo largo de nuestra investigación.

Conceptos previos relacionados al curso de Control Clásico

Los siguientes conceptos y nociones dados en este apartado son los mismos que cualquier libro de Sistemas de Control. En particular, tomaremos los conceptos dados en Ogata (2003).

- Proceso: Está constituido por una serie de operaciones coordinadas sistemáticamente para producir un resultado final que puede ser un producto.

Figura 15: Descripción gráfica de un proceso.

- Sistema: Combinación de componentes físicos que actúan conjuntamente para cumplir un determinado objetivo.
- Sistema de control: Es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que dicho arreglo pueda comandar, dirigir o regularse así mismo o a otro sistema.

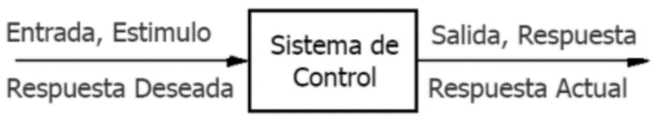


Figura 16: Diagrama de un sistema de control.

- Sistema de control de procesos: La regulación y manipulación de variables que influencian en el comportamiento de un proceso de una forma determinada para obtener un producto con una calidad y cantidad deseada de una manera eficiente.

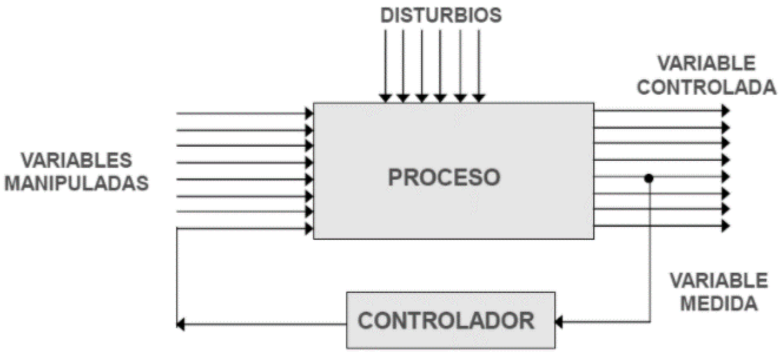


Figura 17: Sistema de control de procesos.

- Modelo matemático: Expresa el comportamiento del proceso en el tiempo (condiciones iniciales, cambios de parámetros, disturbios, etc.), frecuentemente en la forma de ecuaciones matemáticas (ecuaciones diferenciales).

Figura 18: Esquema de un modelo matemático.

- Sistemas lineales: Son los sistemas representados por ecuaciones diferenciales de orden n.
- Función de transferencia: Es la relación de la transformada de Laplace de la salida al de la entrada, de un proceso con condiciones iniciales igual a cero. En general, el modelo de función de transferencia de un sistema lineal físicamente realizable es la relación de dos polinomios en s con el orden del numerador menor o igual que el denominador.
- Respuesta al impulso: La respuesta al impulso $\delta(t)$ de un sistema lineal invariante en el tiempo es la respuesta al sistema a un impulso unitario aplicado en el tiempo $t = 0$ cuando todas las condiciones iníciales son cero.
- Diagrama de bloques: Representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales, mostrando las relaciones existentes entre cada los diversos componentes.

- Bloque funcional (bloque): Símbolo para representar la operación matemática que, sobre la señal de entrada, hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar el flujo de señales.

Figura 19: Elementos de un diagrama de bloques.

Fuente: Ogata, 2010, p. 17.

- Punto de suma: En un diagrama de bloques, se representa por un círculo con una cruz que indica la operación suma. El signo más o menos en cada punta de la flecha indica si la señal debe sumarse o restarse.

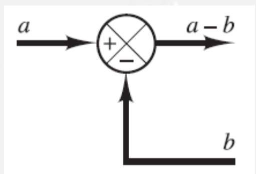


Figura 20: Punto de suma.

Fuente: Ogata, 2010, p. 18.

- Estado: Conjunto de variables más pequeño (llamado variables de estado) de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$ determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.
- Vector de estado: Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector $\boldsymbol{x}$ y dicho vector se denomina vector de estado. Por ende, un vector de estado determina unívocamente el estado del sistema $\boldsymbol{x}(t)$ en cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$ una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.
- Espacio de estados: El espacio n- dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1, eje x_2,…, eje x_n, donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados.
- Integrador: En un sistema de control en tiempo continuo, estos sirven como un dispositivo de memoria, y las salidas de tales integradores se pueden considerar

como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico (que varía con el tiempo).

- Observación: Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$. Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Entonces el sistema se puede describir mediante:

$$
\begin{gathered}
x_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
x_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
\vdots \\
x_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)
\end{gathered}
$$

  Las salidas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante:

$$
\begin{gathered}
y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
\vdots \\
y_n(t) = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)
\end{gathered}
$$

- Sistema de control en lazo cerrado: En este sistema se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de retroalimentación, con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado.

- Resistencia eléctrica: Se define como la relación entre la diferencia de potencial aplicado a un conductor entre la corriente que pasa por el mismo. Su unidad es el ohm (Ω).

$$R = \frac{\Delta \mathrm{V}}{I}$$

- Amortiguador: Elemento que se deforma bajo la acción de una fuerza. Este ejerce una fuerza de reacción que es función de la velocidad con la que el elemento se deforma. Un amortiguador se denomina lineal cuando la fuerza de reacción a la deformación es proporcional a la velocidad.

- Segunda ley de Newton: Establece que la relación entre las fuerzas que actúan sobre un objeto cualquiera y la aceleración se da mediante la siguiente expresión:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

A continuación, se presentará la descripción de los textos de Control Clásico, donde está presente la transformada de Laplace.

Libro de texto de Introducción a los sistemas de control

El autor de este libro, Hernández (2010) nos presenta un texto que tiene un total de 9 capítulos y 2 apéndices sobre introducción a Matlab y a Simulink, programas que se utilizan en este texto. La transformada de Laplace aparece en el capítulo 2, y contiene 11 secciones (p. 23 – 70), donde aparte de estudiar sus principales propiedades, se hacen relaciones respecto a temas propios de teoría de control, donde previamente, en el capítulo 1 se hace la introducción a los sistemas de control.

Algunas interpretaciones importantes que el texto utiliza, y que también es de mucha utilidad a lo largo del curso de Control Clásico son las siguientes, según Hernández (2010).

- En una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes:

$$\underbrace{\left(a_n\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d}{dt}+a_0\right)}_{sistema}\underbrace{\gamma}_{salida}=\underbrace{b_0r(t)}_{entrada}$$

  El término que hace a la ecuación no homogénea es de suma importancia en los sistemas de control, ya que $b_0r(t)$ se interpreta como la entrada que se le aplica al sistema y la interacción entrada – sistema produce la salida $\gamma(t)$.

- La transformada de Laplace convierte la función $g(t)$ del dominio del tiempo, definida para tiempos mayores o iguales a cero, en una función $G(s)$ propia del domino s mediante la integral impropia (de la definición de transformada de Laplace vista en el capítulo 3). El factor s es un número complejo de la forma $s = s + j\omega$, y por ende, la función $G(s)$ se puede representar en el plano cartesiano s como se muestra en la Figura 21.

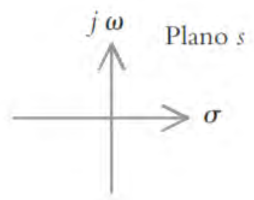


Figura 21: Plano s compuesto por un eje real σ y un eje imaginario $j\omega$.
Fuente: Hernández, 2010, p. 26.

Si un sistema $g(t)$ es lineal, su correspondiente función racional polinomial $G(s)$, denominada función de transferencia tendrá la forma:

$$G(s)=K\frac{(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

Donde K es la constante del sistema.

- La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial de orden n en una ecuación algebraica de grado equivalente al orden de la ecuación diferencial. Entonces, la ecuación anterior se puede representar como:

$$G(s) = K\frac{(s+z_0)(s+z_1)\cdots}{(s+p_0)(s+p_1)\cdots}$$

A las raíces de este polinomio del numerador se le denomina *ceros*, los cuales se representan por pequeños círculos en el plano s. A las raíces del polinomio del denominador se les denomina *polos* y se representan por un símbolo a manera de cruz en el plano s.

- Cada transformada de Laplace tiene su gráfica en el tiempo y su gráfica en el plano s, donde se indican los polos y los ceros.

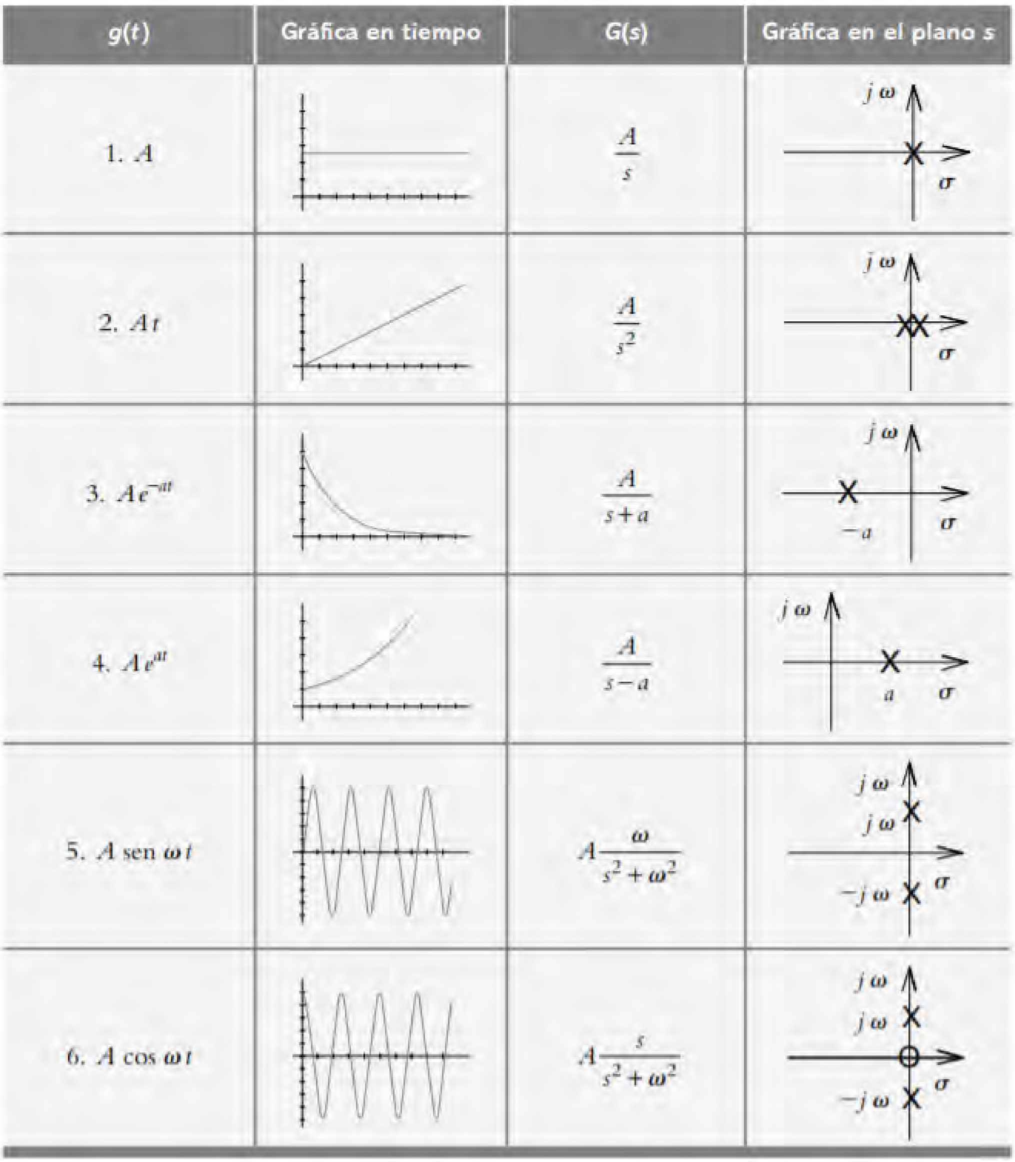


Figura 22: Diagrama de polos y ceros de funciones G(s).
Fuente: Hernández, 2010, p. 27.

- El concepto de estabilidad de un sistema se visualiza más fácilmente en el dominio s, ya que un sistema siempre será *estable* si todos sus polos están a la izquierda del eje $j\omega$, o bien, si existe un polo simple en el origen (imagen 1 y 3 de la Figura 22).

  Un sistema es *inestable* si tiene cuando menos un polo a la derecha del eje $j\omega$, polos complejos repetidos dos o más veces en el eje $j\omega$, o dos o más polos en el origen (imagen 2 y 4 de la Figura 22).

  Un sistema es *marginalmente estable* si tiene polos complejos conjugados simples en el eje $j\omega$, es decir, polos imaginarios conjugados o con parte real igual a cero (imagen 5 y 6 de la Figura 22).
- Al polo más cercano al eje $j\omega$ se le denomina *polo dominante*, porque es el elemento que ejerce más efecto en el sistema analizado. La posición del polo dominante es un indicativo de la velocidad de respuesta del sistema, esto es, cuanto más cerca esté el polo dominante del eje $j\omega$, más lento será el sistema y cuando está más alejado hacia la izquierda del eje $j\omega$, más rápido será el sistema.
- En el primer teorema de traslación (corrimiento de la frecuencia), la interpretación que se le da con respecto al dominio del tiempo, el hecho de multiplicar una función no exponencial por una función exponencial, en el dominio s equivale a recorrer los polos y ceros del sistema un número a veces hacia la izquierda o la derecha, según corresponda al signo la exponencial asociada e^{-at} o e^{at} respectivamente sobre el eje real del plano s.
- En el segundo teorema de traslación (corrimiento del tiempo), esta propiedad tiene importancia especial por el efecto que presenta el atraso en tiempo de hacer menos estable o incluso inestable a un sistema.

En esta parte del capítulo 2 del libro, también hay ejercicios de transformada de Laplace utilizando el software Matlab y diversos comandos para poder aplicarlos a su resolución.

Cabe resaltar que, al entrevistar a uno de los docentes principales del curso de Control Clásico, nos comentó que dicho software no es familiar al estudiante de ingeniería mecatrónica hasta el sexto ciclo que se lleva este curso, donde obligatoriamente tienen que aprenderlo para poder hacer simulaciones de sistemas de control. Entonces, como una manera introductoria, los estudiantes que llevan el curso de Control Clásico realizan algunos ejemplos, guiados por el profesor, de algunas funciones que realiza Matlab respecto a la transformada de Laplace, como por ejemplo: determinar raíces de polinomios de grado n, obtener polinomios a través de sus raíces, convolución, representación de polinomios como función racional, representación de polos y ceros en el plano s, descomposición en fracciones parciales, transformada de Laplace, transformada inversa de Laplace y solución de ecuaciones diferenciales.

En el capítulo 3 se estudian los modelos matemáticos de sistemas físicos, contiene 14 secciones (p. 75 – 132), donde se presenta los principios para realizar modelos matemáticos (expresados en ecuaciones diferenciales lineales) que pueden describir algunos sistemas físicos.

En la Tabla 15 se presenta un modelo de un sistema eléctrico RLC (resistencia – inductancia – capacitancia), donde la ecuación de equilibrio del sistema eléctrico se define por la ley de Kirchhoff (suma de voltajes igual a cero).

Tabla 15

Aplicación de la transformada de Laplace en un sistema eléctrico RLC

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 3: Modelos matemáticos de sistemas físicos (p. 75 – 132)</th></tr>
<tr><td>3.3. Sistemas físicos definidos por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden (p. 77 – 85)</td><td>

Respecto al circuito RLC de la Figura 23, se le aplica un voltaje $V_i(t)$ y se considera como la salida la corriente $i(t)$.

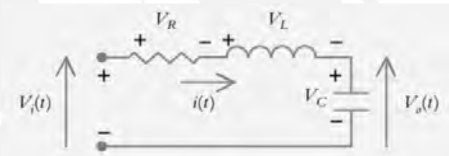


Figura 23: Circuito RLC.
Fuente: Hernández, 2010, p. 77.

Los voltajes en la resistencia, la inductancia y el capacitor son:

$$V_R = Ri, \quad V_L = L\frac{di}{dt}, \quad V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du$$

De acuerdo con la ley de Kirchhoff, la suma de los voltajes $V_L + V_R + V_C$ es igual a $v_i(t)$:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,du = v_i(t) \ldots (15.1)$$

Al tomar la transformada de Laplace, se tiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{I(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{sC}}\frac{1/s}{1/s} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

La ecuación (15.1) se puede expresar en términos de la corriente i y la carga q de la forma $i = \frac{dq}{dt}$ y al integrar se tiene:

$$q(t) = \int_0^t i(u)du$$

</td></tr>
</table>

	Que al sustituirlo en la ecuación (15.1) queda expresada como una ecuación diferencial de segundo orden en términos de la carga $q(t)$. $$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=v_i(t)\ \ldots(15.2)$$ Y al transformarlo al dominio s usando la transformada de Laplace, la función de transferencia es: $$G(s)=\frac{Q(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}$$

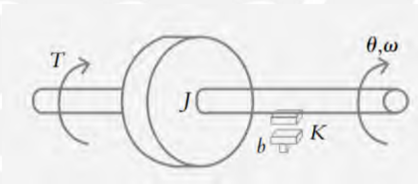
Fuente: Hernández (2010).

Entonces, se puede ver que las ecuaciones (15.1) y (15.2) no son iguales, pero sí son equivalentes, debido a que si se resuelve la ecuación (15.1) se obtiene una expresión para $i(t)$ y, si se integra dicha variable, el resultado se expresa en función de $q(t)$.

En la Tabla 16 se muestra el sistema mecánico de rotación. Estos sistemas mecánicos de traslación y rotación son muy semejantes, y solo se consideran variables de rotación.

Tabla 16

Aplicación de la transformada de Laplace en un sistema mecánico de rotación

Capítulo 3: Modelos matemáticos de sistemas físicos (p. 75 – 132)	
3.3. Sistemas físicos definidos por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden (p. 77 – 85)	 ***Figura 24:*** Sistema mecánico de rotación. Fuente: Hernández, 2010, p. 85. Las ecuaciones mostradas se expresan en función del desplazamiento angular, y la velocidad angular $$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt}+k\theta=\tau(t)$$ $$J\frac{d\omega}{dt}+b\omega+K\int_0^t\omega(u)du=\tau(t)$$ Donde θ es el desplazamiento angular (rad), ω es la velocidad angular(rad/s), τ es el torque (N.m), J es el momento de inercia (Kg.m^2), b es el coeficiente de amortiguamiento (rad/s) y K es la constante de torsión (N.m/rad).

	Tomando la transformada de Laplace para sacar la función de transferencia: $$G(s)=\frac{\Theta(s)}{\mathrm{T}(s)}=\frac{1}{Js^2+bs+K} \ \wedge \ G(s)=\frac{\Omega(s)}{\mathrm{T}(s)}=\frac{s}{Js^2+bs+K}$$

Fuente: Hernández (2010).

Este libro del curso de Control Clásico, los docentes lo utilizan para que el estudiante se familiarice con los términos de Control y además para que el estudiante, a través de ejemplos y el modelado en Simulink, pueda darle el significado respectivo a la transformada de Laplace.

El tema de la transformada de Laplace no se estudia de manera directa en este curso, se le obliga al estudiante a que pueda repasar esos temas que se vieron en ciclos pasados en el curso de Ecuaciones Diferenciales, sin embargo, sí se evalúa a través del modelado de sistemas físicos.

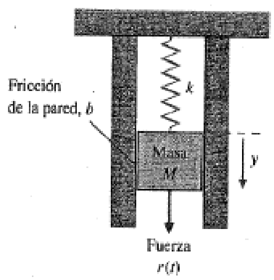
Libro de texto de Sistemas de Control Moderno

Los autores de este libro, Dorf, R. & Bishop, R. (2005) nos presentan un libro que tiene un total de 13 capítulos. Nuestro interés se centrará en el capítulo 2 (p. 37 - 128), donde se verán modelos matemáticos de sistemas. Este capítulo contiene 11 secciones, donde en los tres primeros capítulos se hace una introducción al tema de ecuaciones diferenciales en sistemas físicos y aproximaciones lineales; en la tercera sección (p. 46 - 52) se hace la transformada de Laplace y a partir de dicha sección se ven aplicaciones de dicha transformada a distintos modelos.

A continuación, detallaremos los ejemplos que se relacionan con la transformada de Laplace y sus respectivos usos en el curso de Control Clásico.

Tabla 17

Aplicación de la transformada de Laplace en un sistema resorte – masa amortiguador

CAPÍTULO 2: MODELOS MATEMÁTICOS DE LOS SISTEMAS (P. 37 – 128)	
2.4. La transformada de Laplace (p. 46 – 52)	Para ilustrar los pasos necesarios para el análisis de sistemas donde se utilizará la transformada de Laplace, se considera el sistema resorte – masa amortiguador.  ***Figura 25:*** Sistema amortiguador resorte – masa. Fuente: Dorf, 2005, p. 41. $$M\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+ky=r(t)\ldots(17.1)$$ Se quiere obtener la respuesta, y, como una función del tiempo. Tomando la transformada de Laplace se tiene: $$M\left(s^2Y(s)-s(0^-)-\frac{dy(0^-)}{dt}\right)+b\big(sY(s)-y(0^-)\big)+kY(s) = R(s)$$ Cuando $r(t)=0, y(0^-)=y_0$ y $\left.\frac{dy}{dt}\right\vert_{t=0^-}=0$ se tiene: $$Ms^2Y(s)-Msy_0+bsY(s)-by_0+kY(s)=0$$ Resolviendo para $Y(s)$ se obtiene: $$Y(s)=\frac{(Ms+b)y_0}{Ms^2+bs+k}=\frac{p(s)}{q(s)}\ldots(2.21)$$ Como ejemplo específico, se considera el sistema cuando $k/M=2$ y $b/M=3$, entonces, de la ecuación (2.21) se tiene: $$Y(s)=\frac{(s+3)y_0}{(s+1)(s+2)}$$ Tomando $y_0=1$ y desarrollando la expresión por fracciones parciales: $$Y(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$ Por último, tomando la transformada inversa a la expresión anterior: $$y(t)=2e^{-t}-1e^{-2t}$$

Fuente: Dorf (2005).

En la Tabla 17 se muestra el uso de la transformada de Laplace relacionado con un problema físico de un sistema resorte – masa amortiguador. Para este problema se considera un modelo matemático descrito en la sección inicial del mismo capítulo y escrito en la ecuación (17.1), donde se toma la masa del cuerpo (M), la fricción de la pared (b), la fuerza de resistencia del resorte $(r(t))$ y la variable de elongación del resorte (y) que depende del tiempo. Para resolver dicha ecuación diferencial se procede a utilizar la transformada de Laplace para llegar a la expresión (17.1) y a partir de ahí, tomar la transformada inversa para hallar la solución pedida. Para un caso especial del ejercicio se dan valores fijos a las constantes k/M y b/M y se aplica el mismo proceso.

Tabla 18

La función de transferencia de un sistema

Capítulo 2: Modelos matemáticos de los sistemas (p. 37 – 128)	
2.5. La función de transferencia de sistemas lineales (p. 52 – 63)	Sea el sistema dinámico representado por la ecuación diferencial $\frac{d^n y}{dt^n} + q_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + q_0 y = p_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} + p_{n-2}\frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}} + \cdots + p_0 r$ Donde $y(t)$ es la respuesta y $r(t)$ es la entrada o función forzante. Si las condiciones iniciales son todas ceros, entonces la función de transferencia es: $Y(s) = G(s)R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}R(s) = \frac{(p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \cdots + p_0)}{(s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_0)}R(s)$ La respuesta de salida consiste en una respuesta natural (determinada por las condiciones iniciales) más una respuesta forzada determinada por la entrada. Ahora se tiene: $Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}R(s)$ Donde $q(s) = 0$ es la ecuación característica, Si la entrada tiene la forma natural: $R(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ Entonces: $Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}\frac{n(s)}{d(s)} = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)$ Donde $Y_1(s)$ es el desarrollo en fracciones simples de la respuesta natural, $Y_2(s)$ es el desarrollo en fracciones simples de los términos que contienen factores $q(s)$, e $Y_3(s)$ es el desarrollo en fracciones simples de los términos que contienen factores $d(s)$. Por último, tomando la transformada inversa de Laplace se tiene $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ La respuesta transitoria es $y_1(t) + y_2(t)$ y la respuesta en estado estacionario es $y_3(t)$. Como ejemplo, se considera el sistema representado por la ecuación diferencial:

	$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2r(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, r(t) = 1, t \geq 0$ Tomando la transformada de Laplace $$[s^2Y(s) - sy(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = 2R(s)$$ Como $R(s) = 1/s$ e $y(0) = 1$ entonces $$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+4s+3)} + \frac{2}{s(s^2+4s+3)}$$ Donde $q(s) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) = 0$ es la ecuación característica y $d(s) = s$. Entonces, el desarrollo en fracciones simples $$Y(s) = \left[\frac{3/2}{(s+1)} + \frac{-1/2}{(s+3)}\right] + \left[\frac{-1}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+3)}\right] + \frac{2/3}{s} = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)$$ Por lo tanto, la respuesta es $$y(t) = \left[\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right] + \left[-1e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right] + \frac{2}{3}$$

Fuente: Dorf (2005).

En la Tabla 18 se muestra la función de transferencia y una breve introducción, que la define como una función que describe la entrada y salida del comportamiento de un sistema, y servirá para proponer ejercicios posteriores, utilizando la transformada de Laplace.

Según Dorf (2005), la función de transferencia solo se puede definir para un sistema lineal y estacionario (parámetro constante). Cuando el sistema no cumple con dichas condiciones, es decir, es un sistema que depende del tiempo, no se puede usar la transformada de Laplace. Hay que tener en cuenta que la descripción que realiza la función de transferencia no da ninguna información acerca de la estructura interna del sistema y su comportamiento.

Tabla 19

La función de transferencia de un actuador hidráulico

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 2: Modelos matemáticos de los sistemas (p. 37 – 128)</th></tr>
<tr><td>

2.5. La función de transferencia de sistemas lineales (p. 52 – 63)

</td><td>

Un actuador útil para el posicionamiento lineal de una masa es el actuador hidráulico que se muestra a continuación:

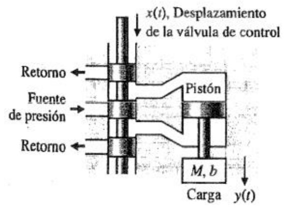


Figura 26: Actuador hidráulico.

Fuente: Dorf, 2005, p. 65.

El actuador hidráulico proporciona gran amplificación de potencia. Se supondrá que el fluido hidráulico se obtiene de una fuente de presión constante y que su compresibilidad es despreciable. Un desplazamiento descendente de entrada mueve x la válvula de control; por lo tanto, el fluido pasa a la parte superior del cilindro y el pistón se fuerza hacia abajo. Un pequeño desplazamiento de baja potencia de $x(t)$ ocasiona un mayor desplazamiento $y(t)$ de alta potencia. El caudal volumétrico de fluido Q se relaciona con el desplazamiento de entrada $x(t)$ y la presión diferencial a través del pistón como $Q = g(x, P)$. Usando la linealización por serie de Taylor se tiene:

$$Q = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0 P_0} x + \left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_{P_0 x_0} P = k_x x - k_p P \;\dots (19.1)$$

Donde $g = g(x, P)$ y (x_0, P_0) es el punto de operación. La fuerza realizada por el pistón actuador es igual a la superficie del pistón A multiplicada por la presión P. Esta fuerza se aplica a la masa y se tiene:

$$AP = M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} \;\dots (19.2)$$

Así pues, sustituyendo (19.1) en (19.2) se tiene:

$$\frac{A}{k_p}(k_x - Q) = M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} \;\dots (19.3)$$

El caudal volumétrico se relaciona con el movimiento del pistón por:

$$Q = A\frac{dy}{dt} \;\dots (19.4)$$

Reemplazando (19.4) en (19.3) se tiene:

$$\frac{Ak_x}{k_p}x = M\frac{d^2y}{dt^2} + \left(b + \frac{A^2}{k_p}\right)\frac{dy}{dt} \;\dots (19.5)$$

Finalmente, tomando la transformada de Laplace a (19.5).

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \quad K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left(b + \frac{A^2}{k_p}\right)$$

</td></tr>
</table>

Fuente: Dorf (2005).

En la Tabla 19 se mostró un ejemplo aplicativo de la transformada de Laplace para hallar la función de transferencia de un actuador hidráulico. Según Dorf (2005), en este caso se ve que una de las condiciones de dicho actuador, la compresibilidad, era despreciable; sin embargo si el actuador a analizar opera a niveles de alta presión y requiere que la respuesta a la carga sea rápida, entonces dicha compresibilidad del fluido sí se toma en cuenta.

El concepto de función de transferencia es muy importante para el analista y diseñador de un modelo matemático de los elementos del sistema a utilizar. Esta función es de gran ayuda para tratar de modelar sistemas dinámicos a partir de un sistema lineal.

Tabla 20

Aplicación de la transformada de Laplace en un acelerómetro mecánico

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 2: Modelos matemáticos de los sistemas (p. 37 – 128)</th></tr>
<tr><td>2.9. Ejemplos de diseño (p. 79 – 88)</td><td>

Un acelerómetro mecánico se utiliza para medir la aceleración de una bancada de prueba levitada, tal como se muestra en la Figura 27.

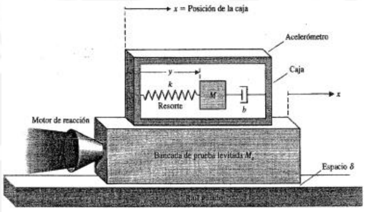


Figura 27: Acelerómetro mecánico.

Fuente: Dorf, 2005, p. 82.

La bancada de prueba está levitada magnéticamente por encima de un raíl guiado una pequeña distancia δ. El acelerómetro proporciona una medida de la aceleración $a(t)$ de la bancada, ya que la posición y de la masa M respecto a la caja del acelerómetro es proporcional a la aceleración de la caja (y de la bancada). El objetivo es diseñar un acelerómetro con una respuesta dinámica apropiada. Se desea diseñar un acelerómetro con un tiempo aceptable para que la característica de la medida deseada $y(t) = qa(t)$ se logre (q es una constante).

La suma de las fuerzas que actúan sobre la masa es

$$-b\frac{dy}{dt} - ky = M\frac{d^2}{dt^2}(y + x) \to M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = -M\frac{d^2x}{dt^2}$$

Como $M_s\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$ se tiene

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = -\frac{M}{M_s}F(t) \rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = -\frac{F(t)}{M_s}$$

Se seleccionan los coeficientes donde $b/M = 3$, $k/M = 2$, $F(t)/M_s = Q(t)$ y se consideran las condiciones iniciales $y(0) = -1$ e $\dot{y}(0) = 2$. Se obtiene entonces la transformada de Laplace, cuando la fuerza y por tanto $Q(t)$ es una función escalón, como sigue

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = -Q(s)$$

Como $Q(s) = P/s$, donde P es la magnitud de la función escalón, se obtiene

$$(s^2Y(s) + s - 2) + 3(sY(s) + 1) + 2Y(s) = -\frac{P}{s}$$

Así pues, haciendo operaciones con fracciones, la transformada de salida es

$$Y(s) = \frac{-(s^2 + s + P)}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-(s^2 + s + P)}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 1} + \frac{k_3}{s + 2}$$

Entonces, desarrollando por fracciones parciales se tiene:

$$k_1 = \left.\frac{-(s^2 + s + P)}{(s + 1)(s + 2)}\right|_{s=0} = -\frac{P}{2}$$

Análogamente se tiene $k_2 = P$ y $k_3 = (-P - 2)/2$. Entonces

$$Y(s) = \frac{-P}{2s} + \frac{P}{s + 1} + \frac{-P - 2}{2(s + 2)}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa para hallar la medida de salida

$$y(t) = \frac{1}{2}[-P + 2Pe^{-t} - (P + 2)e^{-2t}], \; t \geq 0$$

</td>
</tr>
</table>

Fuente: Dorf (2005).

En la sección 2.9 del libro se presentan ejemplos de diseño para ciertos casos como el acelerómetro mecánico. La finalidad de este acelerómetro es detectar la fuerza sobre un cuerpo cuando se produce aceleración. La medición que realiza es a través de resortes y galgas extensiométricas, y depende de la fabricación, puede tener sistema de amortiguamiento para disminuir las oscilaciones en las mediciones y de esta manera, tener menos margen de error.

Para el diseño de este acelerómetro, se modela una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones iniciales para poder aplicar la transformada de Laplace, se halla la función de transferencia y finalmente se toma la transformada inversa para hallar la medida de salida. Cabe resaltar que una de las funciones descritas en la ecuación diferencial, $Q(t)$, es una función escalón, y por ende, al momento de tomar la transformada inversa, se tendrá que aplicar el segundo teorema de traslación visto en el capítulo anterior.

En el capítulo 3 del libro, cuyo tema es Modelos en Variables de Estado (p. 130 – 190) se estudia un modelo alternativo de modelado de sistemas utilizando métodos en el dominio del tiempo, ya que sirven para sistemas no lineales que varían en el tiempo y son multivariables; además este tema es fundamental para la teoría de control moderno (curso llevado en el sétimo ciclo de la carrera de ingeniería mecatrónica UNI). En este capítulo también se consideran modelos físicos que se describen por ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n.

En la Tabla 21 se muestra a la transformada de Laplace aplicada a la ecuación diferencial del estado.

Tabla 21

Aplicación de la transformada de Laplace para el estado de un sistema

Capítulo 3: Modelos en variables de estado (p. 130 – 190)	
3.3. La ecuación diferencial del estado (p. 134 – 137)	El estado de un sistema se describe por el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden escritas en función de las variables de estado $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de la forma: $$\begin{gathered} \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m \end{gathered}$$ Escrito de forma matricial se tiene $$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nm} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}}$$ Donde el vector columna x conformado por las variables de estado se denomina vector de estado y u es el vector de señales. Este sistema se puede representar mediante la notación compacta de la ecuación diferencial de estado como: $$\dot{x} = Ax + Bu$$ Para hallar la solución de dicha ecuación diferencial del vector estado, consideremos la ecuación de primer orden como: $$\dot{x} = ax + bu$$ Donde $x(t)$ y $u(t)$ son funciones escalares del tiempo. Se espera una solución exponencial de la forma e^{at}. Tomando la transformada de Laplace en la ecuación anterior se tiene: $$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \rightarrow X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s)$$ Tomando la transformada inversa de Laplace se tiene:

	$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{d(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \ldots (21.1)$$ Para hallar la solución de la ecuación diferencial vectorial de estado se considera a la función exponencial como: $$e^{At} = \exp(At) = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^kt^k}{k!} + \cdots$$ Que converge para todo t finito y cualquier A. Luego, la ecuación (21.1): $$x(t) = \exp(At)\,x(0) + \int_0^t \exp\,[A(t-\tau)]Bu(\tau)\,d\tau$$ Tomando la transformada de Laplace se tiene: $$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s) \ldots (21.2)$$ Donde $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$ es la transformada de Laplace de $\Phi(t) = \exp\,(At)$ y tomando la transformada inversa a (21.2). $$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Fuente: Dorf (2005).

Finalmente en el capítulo 5, cuyo título es “Comportamiento de los sistemas de control con retroalimentación”, está formado por 14 secciones (p. 244 – 295). El objetivo de este capítulo, según Dorf (2005), es estudiar las especificaciones del diseño de un sistema de control de acuerdo con sus medidas de comportamiento, ya sea en el dominio temporal, tiempo de subida, tiempo pico, y otras medidas que van a regular y caracterizar el comportamiento de un determinado sistema.

En la sección 3.2 se estudia el tema de señales de entrada de prueba, donde señala que las especificaciones del comportamiento del sistema en el dominio del tiempo son datos muy importantes. De acuerdo con esto y según el autor, el estado transitorio del sistema o el comportamiento con respecto al tiempo es una respuesta que requiere mucho interés para los sistemas de control, siendo necesario determinar inicialmente la estabilidad del sistema, pero como mayormente no se puede saber dicho dato, entonces se escoge una señal estándar como una entrada de prueba.

Estas entradas de prueba generalmente son la escalón, la de rampa y la parabólica. Además, también resulta útil la función de impulso unitario. Veamos la Tabla 22.

Tabla 22

Señal en entrada de prueba

Capítulo 5: Comportamiento de los sistemas de control con retroalimentación (p. 244 – 295)	
5.2. Señales de entrada de prueba (p. 245 – 247)	El impulso unitario se basa en una función rectangular tal que: $$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$ Donde $\epsilon > 0$. A medida que ϵ se aproxima a cero, la función $f_{\epsilon}(t)$ se aproxima a la función de impulso $\delta(t)$, la cual tiene las siguientes propiedades: $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)g(t)dt = g(a)$$ La entrada de impulso es útil cuando se considera la integral de convolución para la salida $y(t)$ en términos de una entrada $r(t)$, la cual se escribe como: $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)r(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)R(s)\}$$ Evidentemente, si la entrada es una función de impulso de amplitud unitaria, se tiene: $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$ Donde la integral solo tiene un valor en $\tau = 0$ y por lo tanto: $$y(t) = g(t)$$ La respuesta del sistema $G(s)$ al impulso. La señal de prueba de respuesta al impulso a menudo puede usarse para un sistema dinámico.

Fuente: Dorf (2005).

En esta última parte vemos cómo se pone en uso la función impulso unitario para hallar la transformada de Laplace y llevar al sistema de control al dominio del tiempo, mencionando que, dependiendo de la entrada, se puede considerar también la convolución.

Como se pudo ver en la descripción del texto, la transformada de Laplace lo utilizan en la primera parte del libro como una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales en el dominio de la frecuencia, calcular la función de transferencia de cierto sistema en cuestión, y finalmente llevarlo al dominio del tiempo para analizar su comportamiento.

Se evidencia que se utilizan funciones por tramos en algunos ejercicios y también la ecuación integral. Finalmente, también se menciona a los sistemas que se modelan con un sistema de ecuaciones diferenciales, donde este sistema se puede resolver de manera matricial, pero llegando a un expresión general que se puede solucionar con la transformada de Laplace.

Libro de texto de Ingeniería de Control Moderna

El autor de este libro, Katsuhiko Ogata (2010) nos presenta un libro que tiene un total de 10 capítulos. Nuestro interés se centrará en el capítulo 2 (p. 13 - 60), donde se estudia el modelado matemático de sistemas de control. Este capítulo contiene 7 secciones, donde en la primera sección se hace una introducción con definiciones de términos que se utilizarán en dicho capítulo. En la sección 2 se estudia la función de transferencia y de respuesta – impulso; en esta sección se dan definiciones de la integral de convolución y se menciona explícitamente a la transformada de Laplace como una herramienta potente para poder desarrollar los problemas acerca de función de transferencia. En la sección posterior se estudian los sistemas de control automático, los diagramas de bloques y una pequeña introducción a Matlab para calcular la función de transferencia.

A continuación, detallaremos los ejemplos que se relacionan con la transformada de Laplace y sus respectivos usos en el curso de Control Clásico.

Tabla 23

Integral de convolución

Capítulo 2: Modelado matemático de sistemas de control (p. 13 – 60)	
2.2. Función de transferencia y de respuesta – impulso (p. 15 – 17)	Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, la función de transferencia $G(s)$ es: $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$ Donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada e $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida, y se supone que las condiciones iniciales involucradas son cero. De aquí se obtiene que la salida $Y(s)$ se escribe como el producto de $G(s)$ y $X(s)$, o bien: $$Y(s) = G(s)X(s) \dots (23.1)$$ La multiplicación en el dominio complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo, por lo que la transformada inversa de Laplace de la ecuación (23.1) se obtiene por la integral de convolución: $$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$ Donde tanto $g(t)$ como $x(t)$ son 0 para $t < 0$.

Fuente: Ogata (2010).

También, se señala la respuesta – impulso, como una función importante $g(t)$, denominada ponderación del sistema. Esta respuesta – impulso, es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero.

Tabla 24

Respuesta – impulso de un sistema

Capítulo 2: Modelado matemático de sistemas de control (p. 13 – 60)	
2.2. Función de transferencia y de respuesta – impulso (p. 15 – 17)	Considere la salida (respuesta) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Como la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace de la salida del sistema es: $$Y(s) = G(s)$$ La transformada inversa de Laplace de la salida obtenida mediante la ecuación anterior proporciona la respuesta – impulso del sistema. La transformada inversa de Laplace de $G(s)$, o bien $$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$ Se denomina respuesta – impulso. La transformada de Laplace de la función $g(t)$ proporciona la función de transferencia, por tanto, la función de transferencia y la respuesta – impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo contienen la misma información sobre la dinámica del sistema.

Fuente: Ogata (2010).

En la misma sección se describe el procedimiento para dibujar un diagrama de bloques, utilizando la transformada de Laplace, de la siguiente manera:

- Escribir las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente.
- Tomar la transformada de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo condiciones iniciales cero.
- Representar individualmente en forma de bloques cada ecuación transformada por el método de Laplace.
- Integrar los elementos en un diagrama de bloques completo.

Tabla 25

Ejemplo para graficar un diagrama de bloques de un sistema

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 2: Modelado matemático de sistemas de control (p. 13 – 60)</th></tr>
<tr><td>2.2. Función de transferencia y de respuesta – impulso (p. 15 – 17)</td><td>

Como ejemplo de los pasos anteriores, se considera un circuito RC de la siguiente figura:

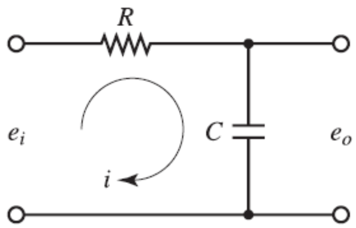


Figura 28: Circuito RC.

Fuente: Ogata, 2010, p. 27.

Las ecuaciones para el circuito son:

$$i = \frac{e_i - e_0}{R} \qquad e_0 = \frac{\int i dt}{C}$$

Las transformadas de Laplace de las ecuaciones anteriores, con condiciones iniciales iguales a cero, resultan:

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_0(s)}{R} \dots (25.1) \qquad E_0(s) = \frac{I(s)}{C_s} \dots (25.2)$$

La ecuación (25.1) representa una operación de suma, y se representa en la Figura 29.

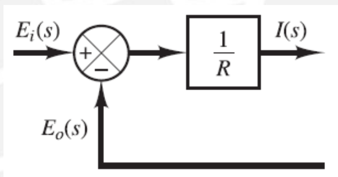


Figura 29: Diagrama de bloques de la ecuación (25.1).

Fuente: Ogata, 2010, p. 27.

La ecuación (25.2) representa el bloque de la Figura 30.

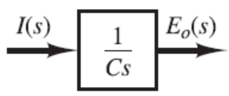
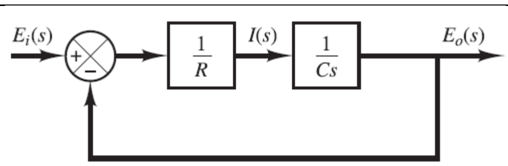


Figura 30: Diagrama de bloques de la ecuación (25.2)

Fuente: Ogata, 2010, p. 27.

Si se integran estos dos elementos se obtiene el diagrama de bloques general para el sistema, tal como aparece en la Figura 31.

</td></tr>
</table>

	 ***Figura 31:*** Diagrama de bloques del circuito RC. Fuente: Ogata, 2010, p. 27.

Fuente: Ogata (2010).

En el capítulo 5 se estudia el análisis de la respuesta transitoria y estacionaria, donde se ven sistemas de primer y segundo orden. En los capítulos anteriores se había estudiado la manera de obtener los modelos matemáticos para un sistema de control. En este capítulo se estudian algunos métodos para el análisis del comportamiento del sistema que se quiere analizar. Para el análisis y diseño de sistemas de control se debe tener una base para hacer comparaciones del comportamiento de diversos sistemas de control. Dicha base se obtiene con señales de entrada de pruebas particulares y haciendo comparaciones con las respuestas de varios sistemas a los que se le aplican dichas señales de entrada.

Para sistemas de primer orden (cuyas ecuaciones diferenciales son de primer orden), se considera el sistema de la Figura 32:

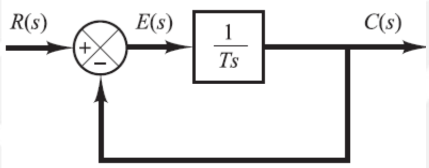


Figura 32: Diagrama de bloques de un sistema de primer orden.
Fuente: Ogata, 2010, p. 161.

Físicamente, este sistema representa un circuito RC, un sistema térmico, o algo similar. La relación entrada – salida se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \dots (26.1)$$

Para obtener la respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden se procede utilizando la ecuación anterior.

Tabla 26

Respuesta escalón unitario para un sistema de primer orden

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 5: Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria (p. 159 – 263)</th></tr>
<tr><td>5.2. Sistemas de primer orden (p. 161 – 164)</td><td>
Como la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $1/s$, sustituyendo en la ecuación (26.1) se obtiene:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

Si se desarrolla $C(s)$ en fracciones simples se obtiene:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\left(\frac{1}{T}\right)} \ldots (26.2)$$

Si se toma la transformada inversa de Laplace de la ecuación (26.2) se tiene:

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \qquad para\ t \geq 0 \ldots (26.3)$$

Esta ecuación plantea que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $c(t)$ es que, para $t = T$, el valor es 0.632 o, que la respuesta $c(t)$ alcanzó el 63.2% de su cambio total. También se puede apreciar a través del gráfico de la curva como se muestra en la Figura 33.

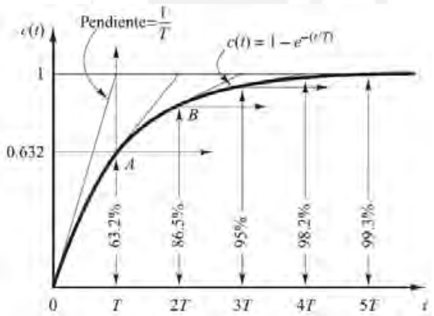


Figura 33: Curva de respuesta exponencial.

Fuente: Ogata, 2010, p. 162.

Debe observarse que, mientras más pequeña es la constante de tiempo T, más rápida es la respuesta del sistema.

En una constante de tiempo, la curva de respuesta exponencial ha ido de 0 a 63.2% del valor final. En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza 86.5% del valor final. Por tanto, para $t \geq 4T$, la respuesta permanece dentro del 2% del valor final.

De la ecuación (26.3), el estado estacionario se alcanza matemáticamente solo después de un tiempo infinito, pero en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva para alcanzar la línea del 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.
</td></tr>
</table>

Fuente: Ogata (2010).

La respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden también se estudia en esta sección de la siguiente manera:

Tabla 27

Respuesta rampa unitaria para un sistema de primer orden

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 5: Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria (p. 159 – 263)</th></tr>
<tr><td>5.2. Sistemas de primer orden (p. 161 – 164)</td><td>

Como la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $1/s^2$, se obtiene la salida del sistema de la Figura 30 como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2}$$

Desarrollando $C(s)$ en fracciones simples se obtiene:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad para\ \ t \geq 0$$

De este modo, la señal de error $e(t)$ es:

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T}$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestra en la Figura 34.

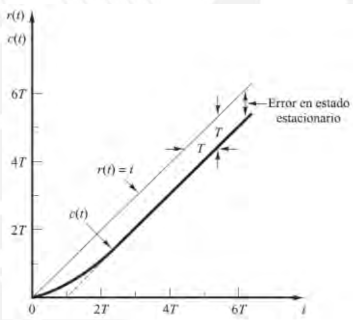


Figura 34: Respuesta a rampa unitaria del sistema mostrado en la Figura 32.

Fuente: Ogata, 2010, p. 163.

Conforme t tiende a infinito, $e^{-t/T}$ se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error $e(t)$ se aproxima a T o $e(\infty) = T$

Cuanto más pequeña es la constante de tiempo T, menor es el error en estado estacionario después de la entrada rampa.

</td></tr>
</table>

Fuente: Ogata (2010).

Por último, también se estudia la respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden de la siguiente manera:

Tabla 28

Respuesta impulso unitario para un sistema de primer orden

<table>
<tr><th colspan="2">Capítulo 5: Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria (p. 159 – 263)</th></tr>
<tr><td>5.2. Sistemas de primer orden (p. 161 – 164)</td><td>Para la entrada impulso unitario, $R(s) = 1$ y la salida del sistema de la Figura 32 pueden obtenerse como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior produce:

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}, \qquad para \quad t \geq 0$$

La curva de respuesta obtenida mediante la ecuación anterior aparece en la Figura 35.

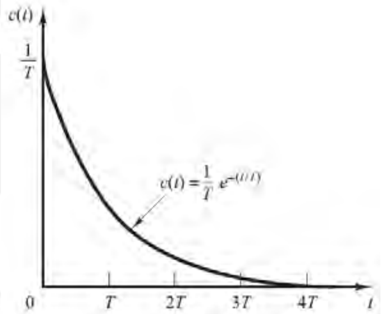


Figura 35: Respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 32.

Fuente: Ogata, 2010, p. 163.</td></tr>
</table>

Fuente: Ogata (2010).

Según Dorf (2005), haciendo la comparación con los análisis anteriores para cada respuesta, se observa que la respuesta para la integral de la señal original se obtiene integrando la respuesta del sistema para la señal original y determinando las constantes de integración a partir de la condición inicial de salida cero. Esta es una propiedad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

De acuerdo con la descripción del libro hecha anteriormente, se puede observar que la teoría donde se aplica la transformada de Laplace es presentada de manera parecida en los libros anteriores. También, este libro descrito presenta un anexo final donde está la transformada de Laplace y colocan sus propiedades y su relación con los sistemas de control, es decir, lo contextualizan al curso en cuestión. Por último, también realizan ejercicios utilizando el programa Matlab y Simulink, sobre todo para hallar la función de transferencia y los diagramas de bloques.

4.3. Análisis praxeológico de la transformada de Laplace en textos del curso de Control Clásico

En esta parte del trabajo se utilizarán las descripciones hechas anteriormente en tres libros que se utilizan en el curso de Control Clásico para hacer una análisis praxeológico de los distintos usos de la transformada de Laplace encontrados en dichos textos. Cabe resaltar que la estructura de ambos textos es parecida, sin embargo, el texto de Hernández (2010) tiene una parte más completa de la transformada de Laplace donde realiza la interpretación y la conexión al curso y además, presenta diversos ejercicios que el estudiante realiza con el Matlab y Simulink, ya que son softwares esenciales para su carrera.

Para poder organizar los diversos tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías utilizaremos el modelo praxeológico extendido dado por Chaachoua, Bessot, Romo & Castela (2019) y tendremos en cuenta los siguientes criterios:

- Procedimientos necesarios para resolver las tareas planteadas.
- Justificaciones que van a garantizar el procedimiento que se emplee en la resolución de la tarea planteada.
- Procedimientos que se toman en cuenta desde la matemática o la de Control Clásico.
- Teoría que justifica los procedimientos.

Tipo de tarea (T_1^*)

T_1: Para el sistema masa – resorte amortiguador dado en la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$, donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, obtener una expresión del desplazamiento $X(s)$ de la masa m, cuando se le aplica una entrada a manera de fuerza $f(t)$.

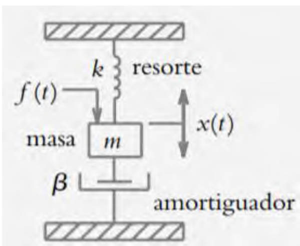


Figura 36: Sistema masa – resorte amortiguador.
Fuente: Hernández, 2010, p. 35.

$\boldsymbol{GT_1}$: De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y el desplazamiento $X(s)$: V_1.

- V_1: clase de función de $f(t)$ (constante, polinómica, exponencial, seno, coseno)

▪ Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{1j}}$)

$\boldsymbol{t_{11}}$: De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y el desplazamiento $X(s)$, donde $f(t)$ es una constante.

$\boldsymbol{t_{12}}$: De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y el desplazamiento $X(s)$, donde $f(t)$ es función polinómica de grado n.

$\boldsymbol{t_{13}}$: De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y el desplazamiento $X(s)$, donde $f(t)$ es una función exponencial.

$\boldsymbol{t_{14}}$: De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y el desplazamiento $X(s)$, donde $f(t)$ es la función seno.

$\boldsymbol{t_{15}}$: De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y el desplazamiento $X(s)$, donde $f(t)$ es la función coseno.

▪ Técnica ($\boldsymbol{\tau_1}$)

Paso 1: Realizar el modelo matemático de acuerdo un sistema masa – resorte amortiguado para obtener la ecuación diferencial de segundo orden.
Paso 2: Reemplazar los datos dados de la masa, la fuerza y las constantes k y β.
Paso 3: Aplicar los pasos 1, 2 y 3 de técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ del EPTL.
Paso 4: Despejar $X(s)$.
Paso 5: La salida $X(s)$ es igual al producto de la entrada $F(s)$ por el sistema $G(s)$.

▪ Tecnología ($\boldsymbol{\theta_1^p}$)

Para el paso 1 se utiliza la ecuación diferencial de un sistema masa – resorte amortiguado se representa por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Donde m: masa del cuerpo que está unido al resorte, β es la constante que indica la intensidad de la fuerza disipada, k es la constante del resorte y $f(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre la masa m.
Dicha ecuación diferencial tiene como fundamento la segunda ley de Newton, que se enuncia en la primera parte de este capítulo (5.2.) y se denomina movimiento forzado.

Para el paso 3 se utiliza la tecnología vista en el EPTL del capítulo anterior, específicamente la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ usada en el paso 1, 2 y 3.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_1}$)

  $\boldsymbol{\Theta_1}$**:** Ecuaciones Diferenciales, Teoría de control.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_1}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{11}}$.

Tabla 29

Ejemplo modificado para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{11}}$

Para el sistema masa – resorte amortiguado mostrado en la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$, donde todas las condiciones iniciales son cero. Además, obtener una expresión del desplazamiento $X(s)$ de la masa $m = 5\ kg$, cuando se le aplica una entrada a manera de fuerza $f(t) = 100N$. Tener en cuenta los valores $k = 0{,}1\ N/m$ y $\beta = 10N \cdot s/m$.

Vemos que la tarea pertenece al subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{11}}$ porque la variable $\boldsymbol{V_1}$ toma como valor a $f(t)$ que es una constante igual a 100.

Para resolver esta tarea, se identifica el sistema masa – resorte amortiguado mediante la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Reemplazando los datos dados en la tarea se tiene:

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 0{,}1x = 100$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$5[s^2X(s) - sX(0) - x'(0)] + 10[sX(s) - x(0)] + 0{,}1X(s) = \frac{100}{s}$$

Como las condiciones iniciales son cero, entonces, reordenando la ecuación para despejar $X(s)$:

$$5s^2X(s) + 10sX(s) + 0{,}1X(s) = \frac{100}{s} \rightarrow X(s) = \frac{100}{s(5s^2 + 10s + 0{,}1)}$$

Donde $G(s) = \frac{1}{5s^2+10s+0{,}1}$

Fuente: Adaptación de Hernández (2010).

Se puede ver que los pasos de la técnica están explicitados en cada proceso que se lleva a cabo, y de acuerdo con eso, se obtiene la expresión $X(s)$ y la función de transferencia $G(s)$.

Tipo de tarea ($\boldsymbol{T_2^*}$)

$\boldsymbol{T_2}$**:** Para el sistema masa – resorte amortiguador de la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$, donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, determine una expresión de la velocidad $V(s)$ cuando se le aplica una fuerza $F(s)$, donde el modelo matemático aplicado es:

$$m\frac{dv}{dt} + \beta v + k\int_0^t v(u)du = f(t)$$

$\boldsymbol{GT_2}$**:** De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y la velocidad $V(s)$: V_1.

- V_1: clase de función de $f(t)$ (constante, polinómica, exponencial, seno, coseno).

- Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{2j}}$)

  $\boldsymbol{t_{21}}$**:** De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y la velocidad $V(s)$, donde $f(t)$ es una constante.

  $\boldsymbol{t_{22}}$**:** De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y la velocidad $V(s)$, donde $f(t)$ es función de grado n.

  $\boldsymbol{t_{23}}$**:** De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y la velocidad $V(s)$, donde $f(t)$ es una función exponencial.

  $\boldsymbol{t_{24}}$**:** De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y la velocidad $V(s)$, donde $f(t)$ es la función seno.

  $\boldsymbol{t_{25}}$**:** De la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$ y la velocidad $V(s)$, donde $f(t)$ es la función coseno.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_2}$)

  Paso 1: Reemplazar los datos dados de la masa, la fuerza y las constantes k y β.
  Paso 2: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ (paso 1 y 2) del EPTL.
  Paso 3: Despejar $V(s)$.
  Paso 4: La salida $V(s)$ es igual al producto de la entrada $F(s)$ por el sistema $G(s)$.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_2^p}$)

  Para el paso 1, aplicar la tecnología $\boldsymbol{\theta_4}$ del paso 2.
  Para la ecuación integrodiferencial dada en el ejercicio propuesto, se define la velocidad respecto de la posición de una partícula para obtener la ecuación diferencial en función de la velocidad.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t), \ \ v = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \int_0^t v(u)du$$

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_2}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_2}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{21}}$.

Tabla 30

Ejemplo modificado para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{21}}$

Para el sistema masa – resorte amortiguador de la Figura 36, obtener la función de transferencia $G(s)$, donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, determine una expresión de la velocidad $V(s)$ cuando se le aplica una fuerza $F(s)$, donde $m = 10kg, \beta = 85N \cdot \frac{s}{m}, k = 0{,}5N/m, f(t) = 500N$.

$$m\frac{dv}{dt} + \beta v + k\int_0^t v(u)du = f(t)$$

Vemos que la tarea pertenece al subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{21}}$ porque la variable $\boldsymbol{V_1}$ toma como valor a $f(t)$ que es una constante igual a 500.

Entonces, primero, reemplazamos los valores dados para esta tarea y se aplica la transformada de Laplace utilizando la transformada de integrales:

$$10[sV(s) - v(0)] + 85V(s) + \frac{0{,}5}{s}V(s) = \frac{500}{s}$$

Reordenando la expresión, considerando las condiciones iniciales como cero y despejando $V(s)$ se tiene:

$$V(s) = \left[10s + 85 + \frac{0{,}5}{s}\right]\frac{500}{s}$$

$$V(s) = \frac{500}{s}\frac{1}{\left[10s + 85 + \frac{0{,}5}{s}\right]}\frac{s}{s} = 500\frac{1}{10s^2 + 85s + 0{,}5}$$

Donde $G(s) = \frac{1}{10s^2+85s+0{,}5}$.

Fuente: Adaptación de Hernández (2010).

Debemos tener en cuenta, de la definición dada en la sección 5.2 de este capítulo, que para la función de transferencia es el cociente entre dos polinomios con el orden del numerador menor o igual al denominador. Por ese motivo, se multiplica y se divide entre $\boldsymbol{s}$ en el último paso, para hallar la función de transferencia.

Tipo de tarea ($\boldsymbol{T_3^*}$)

$\boldsymbol{T_3}$**:** Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la Figura 37.

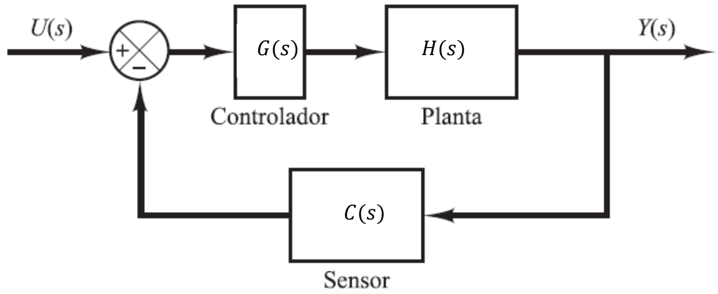


Figura 37: Sistema de control.
Fuente: Ogata, 2010, p. 54.

GT_3: Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la Figura 37: V_1, V_2, V_3.

- V_1: $G(s) = \frac{a}{s}$, donde $a \neq 0$ o $G(s) = 0$.
- V_2: $H(s) = \frac{b}{s+c}$, donde $b, c \neq 0 \in \mathbb{R}$ o $H(s) = \frac{1}{s^2}$.
- V_3: , $C(s) = \frac{1}{s+k}$, donde $k \in \mathbb{R}$ o $C(s) = \frac{1}{s^2+k}$.

▪ Subtipo de tareas (t_{3j})

t_{31}: Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la Figura 37, donde $G(s) = \frac{a}{s}, H(s) = \frac{b}{s+c}, C(s) = \frac{1}{s+k}$.

t_{32}: Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la Figura 37, donde $G(s) = 0, H(s) = \frac{b}{s+c}, C(s) = \frac{1}{s+k}$.

▪ Técnica (τ_3)

Paso 1: Reconocer el sistema de control dado a través de sus salidas y establecer la relación entre dichas salidas a través del diagrama de bloques.
Paso 2: Reordenar las ecuaciones planteadas en el paso 1.
Paso 3: Aplicar la transformada inversa de Laplace para cada ecuación.
Paso 4: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para obtener el modelo en el espacio de estados del sistema.

▪ Tecnología (θ_3^p)

Para el paso 1 tenemos que usar la reducción de los diagrama de bloques, ya que pueden conectarse en serie o en paralelo de la siguiente manera:

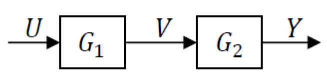
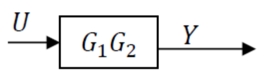
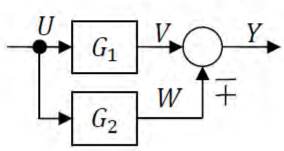
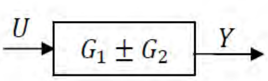
Diagrama de Bloque	Diagrama de bloque equivalente	Ecuación
1 Combinación de bloques en cascada		
		$V = G_1U; \quad Y = G_2V$ $Y = (G_1G_2)U$
2 Combinación de bloques en paralelo		
		$V = G_1U; \quad W = G_2U$ $Y = V \pm W$ $Y = (G_1 + G_2)U$

Figura 38: Reducción de bloques.

Donde U es la entrada del sistema, y Y es la salida del sistema.

Función de transferencia lazo cerrado: Para el sistema que aparece en la Figura 39:

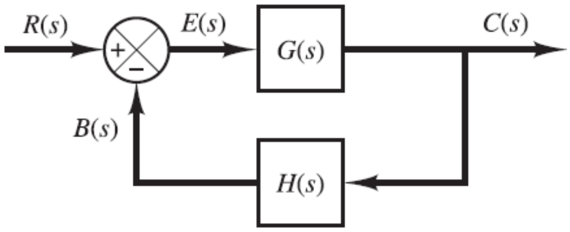


Figura 39: Sistema en lazo cerrado adaptado.
Fuente: Ogata, 2010, p. 19.

La salida $C(s)$ y la entrada $R(s)$ se relacionan del modo siguiente:

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - \underbrace{B(s)}_{H(s)C(s)}$$

Eliminando $E(s)$ de estas ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Para el paso 3 de aplicar la transformada inversa de Laplace, se aplica la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ vista en el EPTL (solo la tecnología del paso 5 donde se utiliza la tabla de transformada inversa).

Para el paso 4 utilizamos la ecuación diferencial del estado: Se tiene el conjunto de EDO's que describen al sistema de la manera:

$$\begin{gathered} \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m \end{gathered}$$

Escrito de forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nm} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}}$$

Donde el vector columna x conformado por las variables de estado se denomina vector de estado y u es el vector de señales.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_3}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_3}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{31}}$.

Tabla 31

Ejemplo para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{31}}$

Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema de la Figura 40.

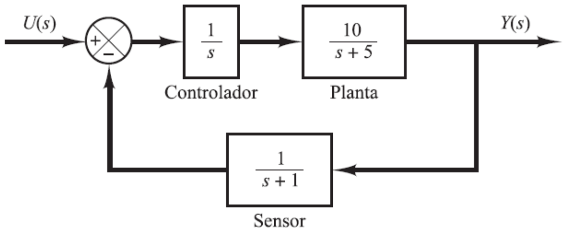


Figura 40: Sistema en lazo cerrado.

Fuente: Ogata, 2010, p. 19.

Vemos que la tarea pertenece al subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{11}}$ porque la variable $\boldsymbol{V_1}$ toma como valor a $G(s) = \frac{1}{s}, H(s) = \frac{10}{s+5}, C(s) = \frac{1}{s+1}$.

Primero, debemos reconocer el sistema de control dado. Este sistema contiene un integrador y dos integradores con retardo. La salida de cada integrador o integrador con retardo puede ser variable en el estado. Se define la salida de la planta como x_1, la salida del controlador como x_2 y la salida del sensor como x_3. Entonces, de acuerdo con diagrama de bloques se tiene:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{10}{s+5}, \quad \frac{X_2(s)}{U(s) - X_3(s)} = \frac{1}{s}, \quad \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1}, \quad Y(s) = X_1(s)$$

Dichas ecuaciones pueden reescribirse como:

$$sX_1(s) = -5X_1(s) + 10X_2(s) \qquad sX_2(s) = -X_3(s) + U(s)$$

$$sX_3(s) = X_1(s) - X_3(s) \qquad Y(s) = X_1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de las cuatro ecuaciones anteriores se tiene:

$$\dot{x_1} = -5x_1 + 10x_2$$

$$\dot{x_2} = -x_3 + 10x_2$$

$$\dot{x_3} = x_1 - x_3$$

$$y = x_1$$

Por lo tanto, un modelo en el espacio de estados del sistema en la forma estándar se obtiene mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Se debe considerar que esta no es la única representación en el espacio de estados del sistema, puede haber más casos, pero el número de variables de estado es igual en cualquier representación en el espacio de estados del mismo sistema (permanece invariable).

Fuente: Ogata (2010).

<u>Tipo de tarea (T_4^*)</u>

$\boldsymbol{T_4}$**:** La Figura 41 muestra un circuito eléctrico que contiene un amplificador operacional. Obtener la salida e_o.

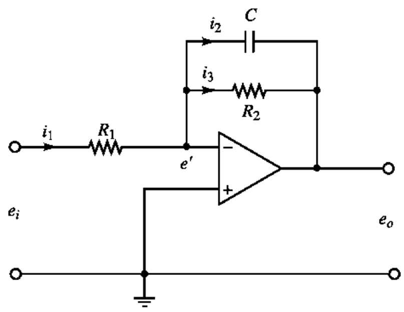


Figura 41: Circuito de retardo de primer orden utilizando un amplificador operacional.
Fuente: Ogata, 2010, p. 80.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_4}$)

  Paso 1: Obtener las corrientes entrantes y salientes respectivas y aplicar la ley de Kirchhoff para el circuito.

  Paso 2: Aplicar el paso 3 de la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$.

  Paso 3: Reemplazar los valores asignados a cada resistencia y capacitador.

  Paso 4: Despejar $E_0(s)$.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_4^p}$)

  Para el paso 1 aplicamos la ley de Kirchhoff que se enuncia de la siguiente manera: en una unión, la suma de corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{unión} I = 0$$

Donde I representa las intensidades de corrientes involucradas en el circuito.

Como el circuito dado tiene un capacitador, debemos tener en cuenta la siguiente definición:

Capacitancia: En un condensador, la capacitancia se representa en una ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

Amplificador operacional (amp ops): Se utilizan para amplificar señales de los circuitos sensores. La Figura 42 muestra un amp ops, donde la entrada e_1 hacia la terminal negativa del amplificador está invertida y la entrada e_2 hacia la terminal positiva no lo está. Por tanto, la entrada total al amplificador se convierte en $e_2 - e_1$.

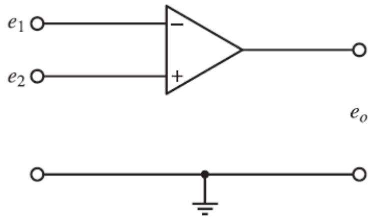


Figura 42: Amplificador operacional.
Fuente: Ogata, 2010, p. 78.

Entonces, para el circuito de la Figura 42, se tendrá que:

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2).$$

Para el paso 2 se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_1^p}$ vista en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_4}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_4}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_4}$.

Tabla 32

Adaptación del problema de amplificador para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_4}$

De la Figura 41 donde se muestra un circuito eléctrico que contiene un amplificador operacional, obtener la salida e_o, sabiendo que $R_1 = 10\Omega, R_2 = 50\Omega, C = 100F$.
Del circuito mostrado en la Figura 41 se obtienen las corrientes entrantes y salientes de acuerdo con los nudos para cada corriente: $$i_1 = \frac{e_1 - e'}{R_1}, \quad i_2 = C\frac{d(e' - e_0)}{dt}, \quad i_3 = \frac{e' - e_0}{R_2}$$ Considerando la ley de Kirchhoff, tal que el flujo de la corriente hacia el amplificador es insignificante, se tiene que: $$i_1 = i_2 + i_3 \rightarrow \frac{e_1 - e'}{R_1} = C\frac{d(e' - e_0)}{dt} + \frac{e' - e_0}{R_2}$$ Como $e' \doteqdot 0$, se tiene: $$\frac{e_1}{R_1} = -C\frac{de_0}{dt} - \frac{e_0}{R_2}$$ Aplicando la transformada de Laplace y teniendo condiciones iniciales cero, se tiene: $$\frac{E_1(s)}{R_1} = -\frac{R_2C_s + 1}{R_2}E_o(s) \rightarrow \frac{E_1(s)}{100} = -\frac{5000 + 1}{50}E_0(s)$$ Reordenando la ecuación para obtener la salida que nos piden $E_0(s)$: $$\frac{E_o(s)}{E_1(s)} = -\frac{5}{5001} \rightarrow E_0(s) = -E_1(s)\ \frac{5}{5001}$$

Fuente: Adaptación de Ogata (2010).

Tipo de tarea (T_5^*)

$\boldsymbol{T_5}$**:** Obtener la función de transferencia $X_0(s)/X_1(s)$ de un sistema de suspensión de un automóvil dado en la Figura 43, donde el movimiento x_1 en un punto P del sistema es la entrada, y el movimiento vertical x_0 del sistema es la salida.

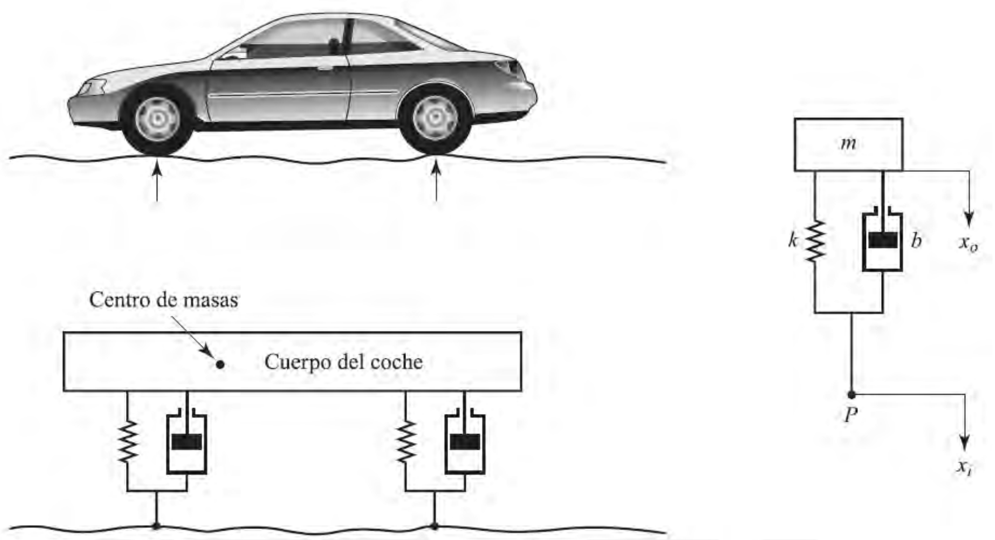


Figura 43: Sistema de suspensión de un automóvil-sistema de suspensión simplificado.
Fuente: Ogata, 2010, p. 86.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_5}$)

  Paso 1: De acuerdo con el diagrama del sistema de suspensión, obtener la ecuación diferencial del movimiento para el sistema.

  Paso 2: Aplicar el paso 3 de $\boldsymbol{\tau_1}$.

  Paso 3: Reemplazar los valores dados de la masa y las constantes k y b.

  Paso 4: Reacomodar la ecuación obtenida en el paso 2 para obtener la expresión $X_0(s)/X_1(s)$.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_5^p}$)

  Para el paso 1 debemos tener en cuenta las siguientes definiciones:

  Movimiento libre amortiguado: En un resorte se observa que la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo, debido a que hay pérdida de energía, y por ende la oscilación está amortiguada. Para analizar este amortiguamiento, se supone que además de la fuerza elástica, también actúa una fuerza disipativa que se opone a la velocidad de la forma:

$$F_d = bv$$

  Donde b es una constante que indica la intensidad de la fuerza disipativa.

Aplicamos la segunda ley de Newton para el movimiento amortiguado:

$$-kx - bv = ma \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Para el paso 2 se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_1^p}$ vista en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_5}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_5}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_5}$.

Tabla 33

Problema de suspensión de un cuerpo con valores conocidos

La Figura 43 muestra un diagrama esquemático de un sistema de suspensión de un automóvil. Conforme el automóvil avanza por un camino, los desplazamientos verticales de llantas funcionan como una excitación de movimiento para el sistema de suspensión del automóvil. El movimiento de este sistema consiste en un desplazamiento del centro de masa y un giro alrededor del centro de masa. El modelado matemático del sistema completo es bastante complicado. Una versión muy simplificada del sistema de suspensión aparece en la Figura 43. Suponiendo que el movimiento x_1 en el punto P es la entrada al sistema y el movimiento vertical x_0 del cuerpo es la salida, obtenga la función de transferencia $X_0(s)/X_1(s)$. Considere el movimiento del cuerpo solo en la dirección vertical. El desplazamiento x_0 se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de la entrada x_1 y se tiene que $m = 450kg, k = 1000\ N/m, b = 140N \cdot s/m$.
De acuerdo con el movimiento amortiguado y la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación diferencial del movimiento para el sistema de la Figura 43. $m\ddot{x}_0 + b(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + k(x_0 - x_1) = 0 \rightarrow m\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + kx_0 = b\dot{x}_1 + kx_1$ Se aplica la transformada de Laplace para la ecuación hallada y se suponen condiciones iniciales cero, se obtiene: $(ms^2 + bs + k)X_0(s) = (bs + k)X_1(s)$ Reemplazando los datos dados de la masa y las constantes k y b: $\rightarrow (450s^2 + 140s + 1000)X_0(s) = (140s + 1000)X_1(s)$ Reacomodando la expresión se tiene la función de transferencia pedida: $\frac{X_0(s)}{X_1(s)} = \frac{140s + 1000}{450s^2 + 140s + 1000}$

Fuente: Ogata (2010).

<u>Tipo de tarea ($\boldsymbol{T_6^*}$)</u>

$\boldsymbol{T_6}$**:** Obtener la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ de un determinado sistema de dos masas, donde la entrada u es un desplazamiento.

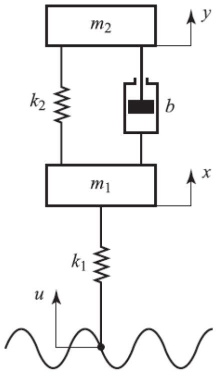


Figura 44: Sistema de suspensión.
Fuente: Ogata, 2010, p. 87.

- Técnica ($\boldsymbol{\tau_6}$)

  Paso 1: De acuerdo con el diagrama del sistema de suspensión, obtener la ecuación diferencial del movimiento para cada masa del sistema.
  Paso 2: Aplicar el paso 3 de $\boldsymbol{\tau_1}$.
  Paso 3: Aplicar los pasos 1 y 2 de la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$ del EPTL.
  Paso 4: Reemplazar los valores dados para las masas y las constantes.
  Paso 5: Reacomodar y despejar la expresión pedida $Y(s)/U(s)$.
- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_6^p}$)

  Se utiliza la misma tecnología $\boldsymbol{\theta_5^p}$ que se usó para la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$.
- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_6}$)

  La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_6}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_6}$.

Tabla 34

Ejercicio con valores determinados para la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_6}$

Obtener la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ del sistema de la Figura 44. La entrada u es un desplazamiento, donde $m_1 = 400\ kg, m_2 = 500\ kg, k_1 = 710\frac{N}{m}, k_2 = 560\frac{N}{m}, b = 1000\ \ N \cdot s/m.$

Como no nos dan la entrada u, entonces suponemos la ausencia de u, también los desplazamientos x e y se miden respectivamente a partir de las posiciones en estado estacionario. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema se obtiene:

$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x})$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2y + k_1u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2y = b\dot{x} + k_2x$$

Aplicando la transformada de Laplace de cada una de las ecuaciones y suponiendo condiciones iniciales cero, se obtiene:

$$[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

$$[m_2s^2 + bs + k_2]Y(s) = (bs + k_2)X(s)$$

Eliminando $X(s)$ de las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)\frac{m_2s^2 + bs + k_2}{bs + k_2}Y(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

Reemplazando los datos dados:

$$(400s^2 + 1000s + 1270)\frac{500s^2 + 1000s + 560}{1000s + 560}Y(s) = (1000s + 560)Y(s) + 710U(s)$$

Reordenando la ecuación se tiene lo pedido:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{710(1000s + 560)}{200000s^4 + 900000s^3 + 859000s^2 + 710000s + 397600}$$

Fuente: Ogata (2010).

<u>Tipo de tarea ($\boldsymbol{T_7^*}$)</u>

$\boldsymbol{T_7}$**:** Dado un circuito del tipo:

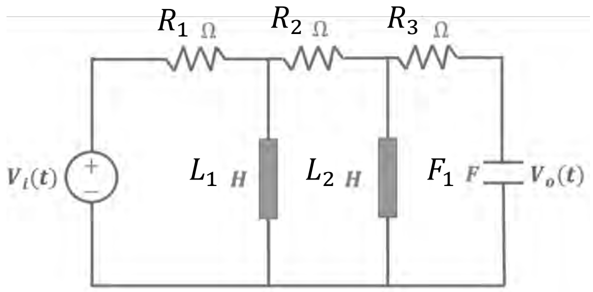


Figura 45: Circuito RLC.

Donde $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, F_1$ son constantes reales. Hallar la función de transferencia $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$, graficar los polos del sistema en el plano s y determinar si el sistema es estable.

$\boldsymbol{GT_7}$**:** Hallar la función de transferencia $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$ para V_1, V_2, donde:

- V_1: donde las resistencias R_1, R_2, R_3 están en serie y L_1, L_2 en paralelo.
- V_2: donde las resistencias R_1, R_2, R_3 están en paralelo y L_1, L_2 en serie.

▪ Subtipo de tareas ($\boldsymbol{t_{7j}}$)

$\boldsymbol{t_{71}}$: Hallar la función de transferencia $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$, graficar los polos del sistema en el plano s y determinar si el sistema es estable en el circuito:

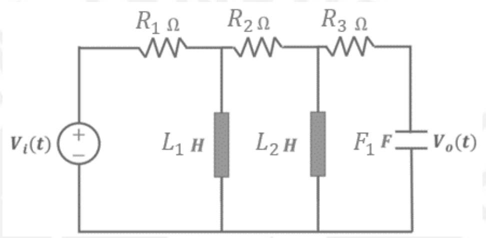


Figura 46: Circuito RLC para $\boldsymbol{t_{71}}$.

$\boldsymbol{t_{72}}$: Hallar la función de transferencia $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$, graficar los polos del sistema en el plano s y determinar si el sistema es estable en el circuito:

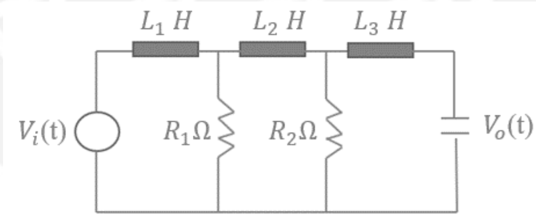


Figura 47: Circuito RLC para $\boldsymbol{t_{72}}$.

▪ Técnica ($\boldsymbol{\tau_7}$)

Paso 1: De acuerdo con el circuito, aplicar la ley de Kirchoff en cada malla en el dominio de s con la transformada de Laplace.
Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones.
Paso 3: Del sistema de ecuaciones, despejar la expresión pedida $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$.

Paso 4: Utilizar el Matlab para hallar los polos del sistema siguiendo los siguientes pasos:

- Ejecutar el Matlab.

- Colocar en la ventana del script los comandos clear y clc. Esto para limpiar las variables del espacio de trabajo.
- Realizar el siguiente proceso en código Matlab:

  >> *num = [Coeficientes del numerador];*

  >> *den = [Coeficientes del denominador];*

  >> *polos = roots(den);*

  >> *subplot(211), pzmap(num,den)*

Paso 5: Analizar el gráfico de salida de Matlab y observar dónde se ubican los polos para determinar la estabilidad.

- Tecnología ($\boldsymbol{\theta_7^p}$)

Para el paso 1 se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_4^p}$, la ley de Kirchoff, la definición de capacitancia y la definición de inductor que se verá a continuación:

Inductancia: según Hewitt (2007), la inductancia mide la tendencia de una bobina a resistir un cambio de corriente debido al magnetismo producido por una parte de ella que se opone al cambio de corriente en las demás partes.

Para el paso 2 y 3 se utiliza la tecnología $\boldsymbol{\theta_6}$ del EPTL, teniendo en cuenta que no se utilizará la transformada inversa de Laplace para regresar al dominio del tiempo.

Para el paso 4 se utiliza el software Matlab como tecnología. Para ello, primero se tiene que instalar Matlab y el paquete Control System Toolbox. Este paquete proporciona algoritmos y aplicaciones para analizar, diseñar y ajustar sistemáticamente sistemas de control lineal; permite calcular la función de transferencia de un sistema, espacio de estado, polos y ceros de una función. También permite visualizar comportamientos del sistema en el dominio del tiempo y frecuencia.

Finalmente, para el paso 5, el concepto de estabilidad en el dominio del tiempo se ve de la siguiente manera:
Si un sistema $g(t)$ es estable entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) \neq \infty$.
Este concepto de estabilidad se puede visualizar de manera más sencilla en el dominio s, ya que un sistema siempre será estable si todos sus polos están a la izquierda del eje $i\omega$, o si existe un polo simple en el origen; caso contrario lo hará un sistema inestable.

- Teoría ($\boldsymbol{\Theta_7}$)

La teoría utilizada es la misma que $\boldsymbol{\Theta_1}$.

Como ejemplo para el tipo de tareas $\boldsymbol{T_7}$ consideramos la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{71}}$.

Tabla 35

Ejercicio propuesto del examen parcial 2019-2 en el curso de Control Clásico

Dado un circuito del tipo:

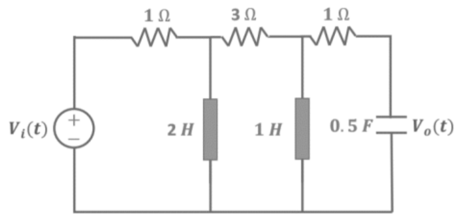


Figura 48: Circuito RLC perteneciente al subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{71}}$.

Hallar la función de transferencia $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$, graficar los polos del sistema en el plano s y determinar si el sistema es estable.

Vemos que las resistencias están en serie y los inductores están en paralelo, por lo tanto corresponde a la tarea del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{71}}$.

Aplicando la ley de Kirchoff para cada malla en el dominio s se tiene:

$$V_i(s) = I_1(2S + 1) - I_2(2S)$$

$$0 = -I_1(2S) + I_2(3S + 3) - I_3(S)$$

$$0 = -I_2(S) + I_3\left(S + 1 + \frac{2}{S}\right)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $I_3 = V_i(s)\left(\frac{2S^3}{10S^3+16S^2+21S+6}\right)$.

En el condensador: $V_o(S) = I_3 * \frac{2}{S}$ y aplicando convolución:

$$V_0(S) = V_i(S)\left(\frac{2S^3}{10S^3 + 16S^2 + 21S + 6}\right) * \frac{2}{s} \rightarrow \frac{V_0(S)}{V_i(S)} = \frac{4S^3}{10S^3 + 16S^2 + 21S + 6}$$

Para hallar los polos y graficarlos se utiliza Matlab de la siguiente manera:

```
>> num = [4 0 0];
>> den = [10 16 21 6];
>> polos = roots(den)
polos =
  -0.6182 + 1.1262i
  -0.6182 - 1.1262i
  -0.3635 + 0.0000i
>> subplot(211), pzmap(num,den)
```

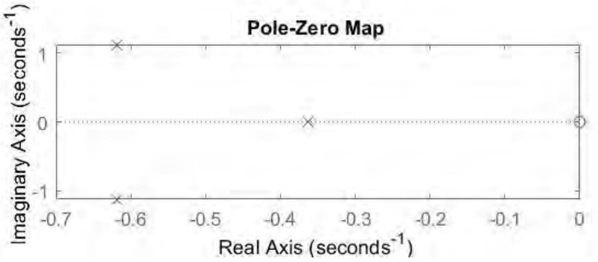


***Figura 49**:* Gráfico de los polos del sistema de control.

Finalmente, como se observa que los polos se encuentran en el lado izquierdo de la Figura 49, se puede decir que el sistema es estable.

Fuente: Facultad de Ingeniería Mecánica – Universidad Nacional de Ingeniería.

4.4. Resumen de lo hallado

De lo hallado en la sección anterior a través de los libros descritos se observó que la transformada de Laplace está presente en la resolución de los tipos de tareas con respecto al curso de Control Clásico, utilizándolo de manera directa, es decir, aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales hallados a través de los modelos matemáticos de los sistemas de control, y con ayuda de otras herramientas de física, como por ejemplo, utilizando la ley de Kirchoff y movimiento amortiguado, para poder hallar la función de transferencia de un sistema de control.

De esta manera, se identifica una praxeología sobre los usos de la transformada de Laplace que se relaciona con la pregunta generatriz: *¿Cómo aplicar la transformada de Laplace en el curso de Control Clásico?*, utilizando tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías encontradas, asociada a la E(DI), que en nuestro caso, es el curso de Control Clásico llevado en la carrera de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

De acuerdo con esto, tenemos que los diferentes tipos de tareas encontrados están relacionados con hallar la función de transferencia de un sistema de control. Dichos sistemas son modelos desarrollados en distintos cursos de física llevados en los primeros ciclos de la carrera de ingeniería mecatrónica. Por ejemplo, en el curso de Física 1 (curso llevado en el primer ciclo) los estudiantes llevan temas de equilibrio, dinámica, movimiento amortiguado, que son temas que componen la tecnología de los tipos de tarea $\boldsymbol{T_1^*}, \boldsymbol{T_2^*}, \boldsymbol{T_5^*}$ y $\boldsymbol{T_6^*}$. En el curso de Física 3 (curso llevado en el tercer ciclo) los estudiantes llevan temas de electrostática y magnetismo, que son temas que componen la tecnología de los tipos de tarea $\boldsymbol{T_4^*}, \boldsymbol{T_6^*}$ y $\boldsymbol{T_7^*}$.

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1^*}$ se tiene un generador de tareas $\boldsymbol{GT_1}$ cuya variable didáctica $\boldsymbol{V_1}$ se genera a partir de la fuerza $f(t)$ que hace que el movimiento sea amortiguado. La razón por la que solo se puede tomar las cinco funciones es porque son funciones conocidas y básicas, que se estudiaron en el EPTL, y que se dan en la tabla de transformadas usando en la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$. Cabe resaltar que $f(t)$ se forma como la combinación lineal de algunas de las 5 funciones básicas, también se puede aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ con su tecnología respectiva, ya que al aplicar la transformada de Laplace a toda la ecuación diferencial, se aplica la linealidad de la transformada en $f(t)$ y, debido a que solo se utilizan las 5 funciones conocidas y como es una combinación lineal, no es necesario aplicar otro método (convolución).

En el ejemplo podemos observar que los valores de la masa y las constantes β y k se reemplazan luego de modelar la ecuación diferencial, sin embargo, estos valores se pueden reemplazar cuando se reemplazan las condiciones iniciales.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_2^*}$ utiliza el sistema masa – resorte amortiguador del tipo de tarea $\boldsymbol{T_1^*}$ y a pesar de que se pide hallar la función de transferencia en ambos, la diferencia es que en $\boldsymbol{T_2^*}$ se pide hallar la velocidad $V(s)$ y en $\boldsymbol{T_1^*}$ se pide hallar el desplazamiento $X(s)$, y justamente es lo que diferencia la técnica y la tecnología que se utiliza.

Cabe resaltar que, sabiendo que $v = \frac{dx}{dt}$ (visto en $\boldsymbol{\theta_2^p}$) entonces, hay una relación entre $\boldsymbol{T_1^*}$ y $\boldsymbol{T_2^*}$, pero, las técnicas son diferentes, ya que en $\boldsymbol{T_2^*}$ se aplica la tecnología del EPTL para resolver una ecuación integrodiferencial. Debemos tener en cuenta que, para la función $f(t)$ sucede el mismo caso que en $\boldsymbol{T_1^*}$, ya que puede tomar las cinco funciones básicas conocidas por el mismo motivo explicado anteriormente.

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3^*}$ se pide el modelo en el espacio de estados del sistema a través de un sistema de control en lazo cerrado con diagrama de bloques. Este modelo de espacio de estados es un sistema dinámico con varias variables, que si bien es cierto, se menciona en los libros de Control Clásico, no es un tema que se ahonde porque el curso al que pertenece dicho tema es a Control Moderno y Óptimo, un curso que se lleva en el sétimo ciclo de la carrera de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

Cabe resaltar en este tipo de tarea que gracias a las variables didácticas $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}$ y $\boldsymbol{V_3}$, las funciones para cada bloque no solo pueden ser del tipo especificado, pueden ser cualquier función de transferencia (recordando que el grado del denominador tiene que ser mayor que el numerador), pero si dicha función de transferencia es más compleja, el cálculo se hace más tedioso y eso se será reflejado en el paso 1 y 2 de $\boldsymbol{\tau_3}$. También, se debe ver que esta técnica $\boldsymbol{\tau_3}$ utilizada no se observa en ninguno de los 7 tipos de tarea identificados.

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4^*}$ se hacen tareas sobre circuitos eléctricos, donde la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ utiliza herramientas del curso de Física 3 llevado en el tercer ciclo de la carrera de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería. Vemos que, a diferencia de los tipos de tareas $\boldsymbol{T_1^*}, \boldsymbol{T_2^*}$ y $\boldsymbol{T_3^*}$ donde se evidencian generadores de tareas, en este tipo de tarea no hay variables didácticas; esto debido a que si se aumentan o eliminan resistencias, capacitador o se incluye un inductor, se generaría un tipo de tarea adicional que, si bien es cierto se podría resolver aplicando el paso 2 y 3 de $\boldsymbol{\tau_4}$, el paso 1 de dicha técnica necesitaría de otra tecnología (de circuitos RLC) y el cálculo se haría más complicado. Además, que en el curso de Control Clásico no se le da énfasis a esta clase de circuitos.

El tipo de tareas $\boldsymbol{T_5^*}$ y $\boldsymbol{T_6^*}$ son parecidos, ya que ambos tipos de tareas son sistemas de suspensión, la diferencia es que $\boldsymbol{T_5^*}$ solo toma en cuenta una masa en su sistema de suspensión, y $\boldsymbol{T_6^*}$ toma dos masas. Al tomar dos masas se formarán dos ecuaciones diferenciales (una para cada masa).

Sin embargo, a pesar de que dichos tipos de tareas son parecidos, las técnicas son distintas, pero, si suponemos que en $\boldsymbol{T_6^*}$ una de las masas es despreciable, entonces estaríamos en el caso de $\boldsymbol{T_5^*}$ donde la relación entre la entrada y salida del sistema de dos masas $Y(s)/U(s)$ (en $\boldsymbol{T_6^*}$), se convertiría en $X_0(s)/X_1(s)$ que es la relación entre la entrada y salida de una sola masa ($\boldsymbol{T_5^*}$).

Por último, para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_7^*}$ el generador de tareas $\boldsymbol{GT_7}$ se forma gracias a las distintas ubicaciones que pueden tomar las resistencias y los inductores, ya que de acuerdo con eso, la malla que se forma para aplicar la ley de Kirchoff toma una forma distinta (es decir, en las ecuaciones formadas pueden cambiar los signos, y las corrientes involucradas). Cabe resaltar que este tipo de tarea no se tomó de Hernández (2010) ni de Ogata (2010), nuestra fuente fue el material de la clase de Control Clásico que nos compartió el docente principal del curso; y este tipo de tarea fue tomado en un examen parcial. La solución del estudiante que lo hizo era la correcta y el profesor lo explicó en una de sus clases sincrónicas que tuvo durante el ciclo 2021-1. Justamente, también comentó la posibilidad de formar diversas tareas variando las ubicaciones de las resistencias e inductores, incluso se puede colocar solo resistencias y capacitadores y $\boldsymbol{\tau_7}$ sería la misma.

Por otro lado, la técnica para este tipo de tarea ($\boldsymbol{\tau_7}$) se realiza a través del Matlab, ya que dicho programa puede realizar el gráfico de los polos con solo tipear los coeficientes de la función de transferencia que se obtiene del modelo matemático, y de acuerdo con el gráfico se puede saber, mediante la teoría que hacen previamente sobre la interpretación de la transformada de Laplace, si el sistema es estable o no.

También, de acuerdo con el profesor entrevistado para esta parte del trabajo, en el curso de Control Clásico no se realiza el tema de transformada de Laplace, ya que es un tema que se ha hecho en el curso de Ecuaciones Diferenciales, sin embargo ponen énfasis en su interpretación a través de los polos y ceros que son hallados gracias a la función de transferencia que se calcula en el tipo de tarea $\boldsymbol{T}_7^*$.

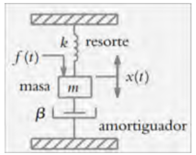
Según lo investigado gracias al profesor de curso y los libros del curso de Control Clásico, la importancia de la interpretación de la transformada de Laplace radica en que, cuando se estudian los sistemas de control, es imprescindible saber cómo es la estabilidad de dicho sistema para poder mejorarlo o ver qué tanto puede cambiar su estabilidad cuando se le agregan o eliminan ciertas condiciones (iniciales, finales o perturbaciones en el sistema).

Por otra parte, como el software Matlab es muy importante en su carrera, el docente les deja como tarea investigar sobre sus funciones y cómo obtener la función de transferencia con la ayuda de Matlab. Estas tareas incluso están en los libros analizados como ejemplos y son muy didácticos, ya que incluso tienen un apéndice especial sobre el uso del Matlab y el Simulink, donde se realizan los diagramas de bloques.

Finalmente, de acuerdo con todo lo dicho anteriormente, se presenta el esquema praxeológico sobre los usos de la transformada de Laplace (EPSUTL) de la Figura 50 que relaciona los tipos de tareas y las técnicas encontradas.

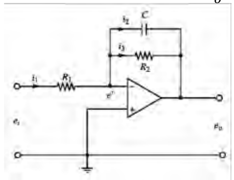
¿Cómo aplicar la transformada de Laplace en el curso de Control Clásico?

$\boldsymbol{T_1^*}$: Para el sistema masa – resorte amortiguador dado en la siguiente figura, obtener la función de transferencia $G(s)$, donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, obtener una expresión del desplazamiento $X(s)$ de la masa m, cuando se le aplica una entrada a manera de fuerza $f(t)$.



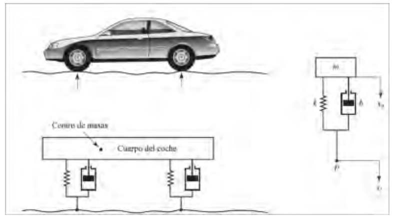
$\boldsymbol{\tau_1}$: Pasos
Paso 1: Realizar el modelo matemático.
Paso 2: Reemplazar los datos dados de $m, f(t), k$ y β.
Paso 3: Aplicar los pasos 1, 2 y 3 de técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ del EPTL.
Paso 4: Despejar $X(s)$.
Paso 5: La salida $X(s)$ es igual al producto de la entrada $F(s)$ por el sistema $G(s)$.

$\boldsymbol{T_4^*}$: La figura muestra un circuito eléctrico que contiene un amplificador operacional. Obtener la salida e_o.



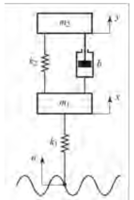
$\boldsymbol{\tau_4}$: Pasos
Paso 1: Obtener las corrientes entrantes y salientes respectivas y aplicar la ley de Kirchoff.
Paso 2: Aplicar el paso 3 de la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$.
Paso 3: Reemplazar los valores de cada resistencia y capacitador.
Paso 3: Despejar $E_0(s)$.

$\boldsymbol{T_5^*}$: Obtener la función de transferencia $X_0(s)/X_1(s)$ de un sistema de suspensión de un automóvil, donde el movimiento x_1 en un punto P del sistema es la entrada, y el movimiento vertical x_0 del sistema es la salida.



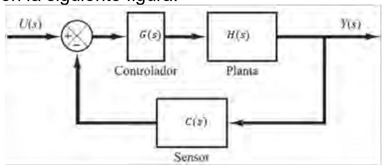
$\boldsymbol{\tau_5}$: Pasos
Paso 1: Obtener la ecuación diferencial para el sistema.
Paso 2: Aplicar el paso 3 de $\boldsymbol{\tau_1}$.
Paso 3: Reemplazar los datos dados de m, k y β.
Paso 4: Reacomodar la ecuación obtenida en el paso 2 para obtener la expresión $X_0(s)/X_1(s)$.

$\boldsymbol{T_6^*}$: Obtener la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ de un determinado sistema de dos masas, donde la entrada u es un desplazamiento.



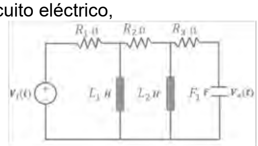
$\boldsymbol{\tau_6}$: Pasos
Paso 1: Obtener la ecuación diferencial del movimiento para cada masa del sistema.
Paso 2: Aplicar el paso 3 de $\boldsymbol{\tau_1}$.
Paso 3: Aplicar los pasos 1 y 2 de la técnica $\boldsymbol{\tau_6}$ del EPTL.
Paso 4: Reemplazar los valores dados para las masas y las constantes.
Paso 5: Reacomodar y despejar la expresión pedida $Y(s)/U(s)$.

$\boldsymbol{T_3^*}$: Obtener el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la siguiente figura.



$\boldsymbol{\tau_3}$: Pasos
Paso 1: Reconocer el sistema de control a través del diagrama de bloques.
Paso 2: Reordenar las ecuaciones planteadas en el paso 1.
Paso 3: Aplicar la transformada inversa de Laplace para cada ecuación.
Paso 4: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

$\boldsymbol{T_7^*}$: Dado un circuito eléctrico,



Donde $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, F_1$ son constantes reales. Hallar la función de transferencia $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$, graficar los polos del sistema en el plano s y determinar si el sistema es estable.

$\boldsymbol{\tau_7}$: Pasos
Paso 1: Aplicar la ley de Kirchoff con la transformada de Laplace.
Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones.
Paso 3: Despejar la expresión pedida $\frac{V_0(s)}{V_i(s)}$.
Paso 4: Utilizar el Matlab para hallar los polos del sistema.
Paso 5: Analizar el gráfico de salida de Matlab y observar dónde se ubican los polos para determinar la estabilidad.

$\boldsymbol{T_2^*}$: Para el sistema masa – resorte amortiguador de $\boldsymbol{T_1}$, obtener la función de transferencia $G(s)$, donde se supone cero en todas las condiciones iniciales. Además, determine una expresión de la velocidad $V(s)$ cuando se le aplica una fuerza $F(s)$.

$$m\frac{dv}{dt} + \beta v + k\int_0^t v(u)du = f(t)$$

$\boldsymbol{\tau_2}$: Pasos
Paso 1: Reemplazar los datos dados de $m, f(t), k$ y β.
Paso 2: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_4}$ (paso 1 y 2) del EPTL.
Paso 3: Despejar $V(s)$.
Paso 4: La salida $V(s)$ es igual al producto de la entrada $F(s)$ por el sistema $G(s)$.

⟶ Relación directa entre los tipos de tarea $\boldsymbol{T_i}$ y $\boldsymbol{T_j}$

- - → Relación parcial entre los tipos de tarea $\boldsymbol{T_i}$ y $\boldsymbol{T_j}$

Figura 50: Esquema praxeológico sobre los usos de la transformada de Laplace (EPSUTL).

Las flechas continuas el esquema nos indica que hay una relación directa entre la pregunta generatriz y los tipos de tareas encontradas, es decir, de acuerdo con la pregunta generatriz: *¿cómo aplicar la transformada de Laplace en el curso de Control Clásico?*, los tipos de tareas encontrados dan respuesta a esta pregunta de la siguiente manera: "*se puede aplicar en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1^*}$ y $\boldsymbol{T_2^*}$ para calcular la función de transferencia, en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3^*}$ para obtener el modelo de estados del sistema, en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4^*}$ para obtener la salida e_0, para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5^*}$ y $\boldsymbol{T_6^*}$ para obtener la función de transferencia de un sistema de suspensión de masas y para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_7^*}$ para determinar la estabilidad del sistema*".

Las flechas punteadas en la Figura 50 nos indican que hay una relación parcial entre las técnicas de los tipos de tareas señaladas, es decir, por ejemplo la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ se utiliza en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4^*}$, pero no todos los pasos, solo el paso 3. Algo similar sucede con los tipos de tareas $\boldsymbol{T_5^*}$ y $\boldsymbol{T_6^*}$ y la relación con la técnica $\boldsymbol{\tau_1}$.

Por lo tanto, el análisis de libros de textos del curso de Control Clásico nos da una visión sobre cómo se utiliza el concepto de la transformada de Laplace, a través de la función de transferencia, estabilidad de un sistema y espacio de estados del sistema; gracias a estos conceptos del curso, se le da un significado a la transformada de Laplace.

De la misma manera, estos temas, tanto descritos como analizados en la praxeología, son importantes porque se encuentran en el sílabo del curso de Control Clásico, que forma parte del plan curricular que estudian los ingenieros mecatrónicos como parte de su formación. Además de ser un curso obligatorio en dicha carrera, les brinda las herramientas necesarias para llevar cursos posteriores, incluso, dicho curso puede servir para que los estudiantes vean un panorama general sobre la especialización en ingeniería de control.

4.5. Conexiones y diferencias entre las praxeologías identificadas en las diversas organizaciones analizadas

Del análisis de libros realizado en las secciones anteriores en el curso de Ecuaciones Diferenciales (institución de la enseñanza de las matemáticas E(M)) y en el curso de Control Clásico (institución de disciplinas intermediaria E(DI)), se puede verificar que en ambas organizaciones matemáticas se identifican praxeologías cuyo foco de atención es la resolución de tareas aplicativas, como por ejemplo en los tipos de tareas del EPTL se pedía resolver ecuaciones diferenciales utilizando diversas técnicas que dependían de las funciones involucradas para aplicar tecnologías específicas (como en el caso de $\boldsymbol{T_2}$ cuya $\boldsymbol{\theta_2}$ implicaba utilizar el primer teorema de traslación). En el caso de los tipos de tareas del

EPSUTL, a través de diversas situaciones familiares para un ingeniero mecatrónico en formación, se pedía obtener funciones de transferencia, ecuación de estado, o la estabilidad del sistema, haciendo uso de tecnologías propias del curso de la institución intermediaria (Teoría de control) como modelado de sistemas resorte – amortiguado, circuitos electrónicos, y también de tecnologías de la institución de enseñanza de las matemáticas (Ecuaciones Diferenciales) como los teoremas de traslación, el teorema de convolución y sistemas de ecuaciones diferenciales.

Esa relación descrita entre las técnicas del EPTL y del EPSUTL se pueden observar en los pasos de algunos tipos de tareas de la Figura 50.

Cabe resaltar que, los ingenieros mecatrónicos en formación solo hacen uso de la transformada de Laplace en el cálculo de la función de transferencia de un sistema en los primeros capítulos del curso. Sin embargo, más adelante cuando estudian los temas de análisis de la respuesta transitoria y estacionaria de un sistema de control y diagramas de Bode se vuelve a ver la función de transferencia pero a través de gráficos e interpretación de los ceros y los polos de dicha función para analizar comportamientos y estabilidad de sistemas (utilizando Matlab y la técnica $\boldsymbol{\tau_7}$). Dichos temas también son calculados con Matlab y, aunque no llevan un curso previo para utilizar dicho software, los estudiantes tienen que realizar prácticas usando dicha herramienta.

Por otro lado, el curso de Control Clásico se coloca frente al desafío de encontrar un punto de equilibrio relevante entre instituciones de enseñanza e intermediaria cuyos estándares y objetivos son diferentes. El componente tecnológico ($\boldsymbol{\theta^p}$) de la praxeología del EPSUTL es un objeto particularmente sensible al proceso transpositivo debido a que los discursos que lo componen están en constante circulación, se recomponen en relación con las limitaciones que tienen, por ejemplo, en $\boldsymbol{T_1^*}$ vemos que $\boldsymbol{\theta_1^p}$ hace uso de modelos físicos preestablecidos, sin embargo, si en dicho modelo físico se cambia a varias masas colocadas en serie o paralelo, dicho modelo físico se recompone de acuerdo con las del problema, y esto hace que la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$ que se utiliza también cambie de resolver una EDO a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales.

Con respecto a las funciones de la tecnología que se asocian al uso de la técnica en la componente práctica, que se describen en el modelo praxeológico extendido dado por Castela y Romo (2011) podemos ver lo siguiente:

- Cuando describimos el tipo de tarea y la técnica para cada $\boldsymbol{T_i^*}$ se tomaron tareas específicas de acuerdo con la institución intermediaria para poder realizar representaciones verbales y simbólicas que describan el contexto disciplinario del ingeniero mecatrónico en formación, de manera que el lenguaje que se presente le sea familiar y conocido.

- Para validar la técnica que se utiliza en cada $\boldsymbol{T_i^*}$ se toman como saberes predeterminados a las tecnologías vistas en el EPTL ($\boldsymbol{\theta^{th}}$) y también conceptos previos de cursos llevados en los primeros ciclos (Física 1 y Física 3), de manera que se pueda conseguir el objetivo planteado por el tipo de tarea específico. Hay que tener en cuenta que para justificar los $\boldsymbol{\theta^{th}}$ no se necesita de una formalidad matemática rigurosa como se estudia en la institución productora de saberes P(M), ya que cada institución toma como válido distintas justificaciones de acuerdo con el contexto dado.

- Cuando se explica la técnica, se hace con el mayor detalle posible, ya que hay casos donde persona que va a aplicar dicha técnica puede ser neófita y por ende se explica paso a paso, como en el caso de $\boldsymbol{\tau_7}$ donde se explica el uso del Matlab para personas que no tienen conocimiento de ello y la validación se realiza explicando qué paquetes son necesarios para poder resolver dicha tarea y porqué necesariamente utilizando dichos comandos. Hay pasos de las técnicas (como por ejemplo resolver un sistema de ecuaciones) que no se validan de manera explícita como se hace en otros casos, y eso debido a que dicha validación viene de temas básicos de álgebra elemental ya llevados en la etapa escolar.

- Para facilitar y motivar la aplicación de la técnica se debe tener en cuenta las tecnologías que se desarrollan en cada tipo de tarea, ya que, si bien es cierto en algunos tipos de tareas las técnicas que se aplican son parecidas, en otras su razón de ser es distinta, por ejemplo en el caso de $\boldsymbol{T_3^*}$. Este tipo de tarea se presenta con diagrama de bloques que se estudia como una técnica específica para hallar funciones de transferencia sin necesidad de aplicar la transformada de Laplace, y también para hallar el modelo de espacios de estado. No hemos hecho como tipo de tarea hallar la función de transferencia utilizando el diagrama de bloques porque no se usa la transformada de Laplace, la técnica que se utiliza escapa del objetivo que tenemos en esta investigación.

- Y, para evaluar la técnica para saber si funciona con diversas tareas, debemos tener en cuenta las limitaciones de las técnicas. Por ejemplo, en $\boldsymbol{T_1^*}$ y $\boldsymbol{T_2^*}$ se debe considerar que la función $f(t)$ tiene que ser conocida (algunas de las de la Tabla 7). Si dicha función no cumple con la condición dada, la tecnología que se aplica sería diferente, y de acuerdo con la complejidad de dicha función, la tecnología y la técnica deberían variar.

De acuerdo con todo lo dicho anteriormente, se puede ver que el esquema del modelo praxeológico extendido dado por Castela y Romo (2011), la componente teórica $\boldsymbol{\theta^{th}}$ se da en la E(M) con el curso de Ecuaciones Diferenciales, y la componente práctica $\boldsymbol{\theta^{p}}$ se da en la E(DI) con el curso de Control Clásico.

Por lo tanto, de acuerdo con los EPTL y EPSUTL podemos ver que hay una transposición didáctica entre los conocimientos usados de la institución de la enseñanza de las matemáticas y la institución intermediaria, ya que en diferentes formas encontramos que los dos cursos de Ecuaciones Diferenciales y Control Clásico desarrollan un discurso tecnológico sobre técnicas matemáticas enseñadas con el fin de aplicarlas en cursos posteriores como el de Control Clásico. Los objetos matemáticos (como impulso de Dirac, producto de convolución) se interpretan en la institución intermediaria y, los parámetros como la masa, resistencias, inductores son contextualizados de acuerdo con el tipo de tarea, por ende, la técnica en sí puede ser adaptada. Todas las funciones de la tecnología se ponen en cuestión para establecer la transposición entre las instituciones estudiadas; aparte de la validación, si consideramos que para una técnica matemática dicha validación se realiza respetando los conocimientos que se producen en la E(M); sin embargo, se puede suponer que en la E(DI), ciertas explicaciones sirven como validación, por ejemplo en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_7^*}$, la tecnología $\boldsymbol{\theta_7^p}$ presenta al Matlab como justificación para la técnica $\boldsymbol{\tau_7}$, y dicha validación no proviene de P(M) ni de E(M), sin embargo, se considera como válida en el ámbito de los ingenieros mecatrónicos en formación.

Entonces, en la Figura 51 se presenta un esquema praxeológico para la enseñanza de la transformada de Laplace (EPESTL) en estudiantes de ingeniería mecatrónica en formación de la Universidad Nacional de Ingeniería.

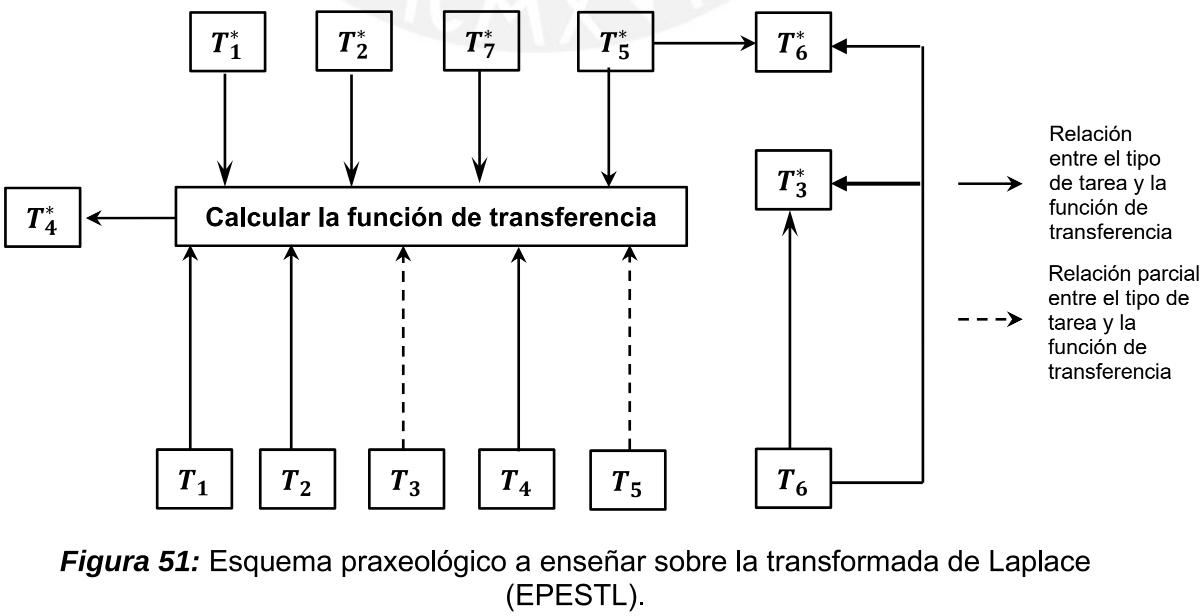


Figura 51: Esquema praxeológico a enseñar sobre la transformada de Laplace (EPESTL).

En la Figura 51 vemos las relaciones existentes entre los tipos de tareas del EPSUTL y el EPTL. La línea punteada indica que los tipos de tareas $\boldsymbol{T_3}$ y $\boldsymbol{T_5}$ se relacionan de manera indirecta para calcular la función de transferencia, es decir, en algunos tipos de tareas se da una función de transferencia que proviene de una función por tramos, ya sea de escalón unitario, de rampa, o función de Dirac. Sin embargo, no se resuelve de manera directa, se utilizan tablas para aplicar la inversa de la transformada de Laplace y regresarlo al dominio del tiempo.

También, los tipos de tarea del EPTL $\boldsymbol{T_3}$ y $\boldsymbol{T_5}$ que hacen referencia a las funciones por tramo, no se utilizan de manera tan directa cuando se hace la relación entre ambos modelos praxeológicos, por ejemplo: se da la función de transferencia en el dominio de la frecuencia, y esta función es conocida (como por ejemplo, la función de Heaviside), y mediante tablas, se pasa al dominio del tiempo, no es necesario calcularlo de manera directa como si se quisiera hallar la solución de alguna ecuación diferencial.

Una observación importante respecto a $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_4}$ y $\boldsymbol{T_5}$ en la EPTL es que los tipos de tarea son dados con funciones específicas como seno, coseno, constantes, exponenciales o polinomiales de grado 1 y/o 2. Dichas funciones son utilizadas porque en los libros Zill y O'Neil se utilizan las tablas de transformadas de dichas funciones. Estas funciones son básicas, porque se pueden dar combinaciones lineales y formar nuevas ecuaciones diferenciales para aplicar las técnicas respectivas y resolverlas, sin embargo, también se pueden utilizar otras funciones más complicadas, o de mayor grado, y la técnica utilizada sería la misma, ya que se pueden encontrar tablas de transformadas de la mayoría de las funciones que son conocidas.

Estas funciones también son utilizadas en el curso de Control Clásico, en los tipos de tareas de la EPSUTL para la función de transferencia y, al igual que en el caso anterior con la EPTL, también es posible utilizar otras funciones más complejas, sobre todo en los sistemas de control más elaborados y con un modelo matemático que requiera de logaritmos, funciones hiperbólicas, etc. En estos casos, la técnica también es válida y se puede utilizar para desarrollar la tarea pedida.

Por último, en el tipo de tarea $\boldsymbol{T_7^*}$ hemos podido ver que se hace uso del Matlab para poder desarrollar dicha tarea. Cabe resaltar que en la carrera de ingeniería mecatrónica no se dicta el curso de inducción a Matlab ni Simulink (que también es usado en el curso de Control Clásico), sin embargo, sí se les brinda a los estudiantes algunas pautas para que lo puedan utilizar en sus evaluaciones y en sus prácticas. Cabe resaltar que la técnica y tecnología que se usa en $\boldsymbol{T_7^*}$ no proviene de la tecnología teórica, es propia de la componente práctica.

En resumen, podemos decir que todos los pasos de la técnica que se realizan en los tipos de tarea ($\boldsymbol{T_i}$) del EPTL no se utilizan en los tipos de tarea ($\boldsymbol{T_j^*}$) del EPSUTL, ya que solo se llega a aplicar la transformada de Laplace pero no la inversa, como en todos los tipos de tarea del EPTL. Además, en la Figura 50 pudimos observar que todos los tipos de tarea ($\boldsymbol{T_j^*}$) se relacionan con la pregunta generatriz, ya que esta pregunta es amplia y cada tipo de tarea encontrado da una respuesta directa a dicha pregunta; algo que no sucede en la EPTL de la Figura 14, ya que el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$ tiene una relación parcial con su pregunta generatriz debido a que a diferencia de los demás tipos de tareas encontradas, dicho tipo de tarea plantea resolver una ecuación integrodiferencial, pero dicha relación parcial no vuelve a este tipo de tarea aislada, ya que, de todas maneras se utilizan herramientas vistas en el curso de ecuaciones diferenciales para dar solución a dicha tarea y más aún, dicho tipo de tarea es usada también en $\boldsymbol{T_2^*}$ para obtener la función de transferencia.

CAPÍTULO V: CONSIDERACIONES FINALES

En este último capítulo veremos las consideraciones finales acerca de las praxeologías identificadas en las instituciones analizadas respecto a la transformada de Laplace en estudiantes de ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería. También presentaremos algunas sugerencias y futuros trabajos que se pueden realizar.

De acuerdo con los objetivos que se plantearon inicialmente para nuestra investigación, los cuales se centraban en describir e identificar las praxeologías en la E(M) analizando el curso de Ecuaciones Diferenciales y la E(DI) analizando el curso de Control Clásico, pudimos identificar que los tipos de tareas que se hacen en la E(M) son de carácter intramatemático, algunas veces con la ayuda de las tablas de transformadas de Laplace y transformada inversa de Laplace, tomando como foco la resolución de ecuaciones diferenciales y finalmente, se estudian problemas de modelación matemática, es decir, su razón de ser.

También, se pudo identificar que para el curso de Ecuaciones Diferenciales, las tecnologías dadas se fundamentan desde la P(M) y en el curso de Control Clásico, fundamentado en la E(DI) se desarrollan praxeologías que hacen uso de las praxeologías dadas en la E(M), identificando la transposición didáctica de manera que puedan ejercer los ejercicios propios del entorno de formación profesional. Por ende, la transformada de Laplace se utiliza como una herramienta para resolver problemas dentro del contexto profesional.

En la base de los análisis presentados se identifica una propuesta praxeológica sobre la enseñanza de la transformada de Laplace, mediante la transposición que se realiza entre las instituciones analizadas a través de la TAD. La contribución de la E(M) se encuentra principalmente en el nivel del desarrollo de las tecnologías que validan las técnicas, según los criterios específicos para el área de la Teoría de Control. La E(DI), que en nuestro caso es el curso de Control Clásico produce y valida sus conocimientos a través del uso eficiente de la técnica empleada para cada tipo de tarea.

Este esquema permite analizar las opciones disponibles para la enseñanza de una praxeología matemática como parte de un formación profesional que articule los tipos de instituciones presentes, para hacer que los estudiantes reconstruyan el concepto de la transformada de Laplace a través de sus usos y tipos de tareas que hacen posible que se use de manera adecuada, con su componente teórico original de la institución de la enseñanza (y este a través de la institución productora de saberes) y su componente práctico, asociado a los usos en campos no matemáticos.

El estudio de un curso relacionado a la institución de la enseñanza de las matemáticas reveló la importancia de una teoría que pueda validar completamente las técnicas involucradas tanto en el EPTL como en el EPSUTL.

También, hemos podido ver que los tipos de tareas considerados en el EPSUTL se relacionan con los tipos de tarea del EPTL a través de algunas técnicas como se observó en el esquema de la conexión entre las praxeologías. Sin embargo, esta relación no es tan directa, debido a que en los problemas de Control Clásico no se les pide explícitamente resolver una ecuación diferencial, pero sí se utiliza la transformada de Laplace para analizar el sistema en el dominio de la frecuencia, ya que a veces es más sencillo manipular operaciones y gráficos en dicho dominio.

Para que los estudiantes de ingeniería mecatrónica puedan considerar y valorar la utilidad de la transformada de Laplace en su entorno profesional se debe analizar qué praxeologías matemáticas son importantes para la ingeniería y su cotidiano disciplinar, y también analizar el discurso matemático que haga que la técnica matemática sea necesaria y entendible.

También, en el curso de Control Clásico, se puede observar en la praxeología encontrada que en la mayoría de problemas que se resuelven en el curso no se utiliza la definición formal de la transformada de Laplace a través de la integral impropia, tampoco se resuelve de manera explícita una ecuación diferencial, ya que lo único que se necesita en algunos problemas es hallar la función de transferencia tomando la transformada de Laplace en cada término y ya no buscar la solución específica, sino que trabajando solo en "s", se busca las características del sistema (estabilidad) sin necesidad de llegar, en algunos casos, a la solución del sistema en el dominio del tiempo. También podemos ver que, incluso en el curso de Control Clásico, hay ejercicios donde ya no se utiliza la transformada de Laplace, sino que se hace a través de Matlab.

Se ha podido identificar que el concepto de la transformada de Laplace no solo tiene su foco de atención como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, sino también como un instrumento potente para la interpretación del comportamiento básico de un sistema de control. Por tal motivo, se sugiere que en el curso de ecuaciones diferenciales se deban considerar más tipos de tareas basadas en modelación matemática, de modo que el estudiante se adapte a las técnicas y tecnologías que se aplican, como en los tipos de tareas $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \boldsymbol{T_4}, \boldsymbol{T_5}, \boldsymbol{T_6}$ y $\boldsymbol{T_7}$ donde se modelan sistemas que requieren conocimientos básicos de física y con ayuda de la E(M).

La importancia de encontrar la razón de ser de la transformada de Laplace en la carrera de ingeniería mecatrónica es que, según la entrevista que nos brindó el profesor del curso, es de gran utilidad cuando se trabajan con sistemas automatizados. Hoy en día con el avance de la tecnología, la mayoría de las empresas grandes tienen un área de automatización, donde puede trabajar un ingeniero mecatrónico, y puede automatizar cosas sencillas que van desde un brazo robótico, hasta un automóvil, gracias a modelos matemáticos cuya base es dada por la transformada de Laplace y la función de transferencia.

El curso de Control Clásico llevado en la carrera (a veces llevado con otro nombre) es la base de cursos más avanzados como Control Moderno y Óptimo, Diseño de Sistemas en Tiempo Real. Incluso, el ingeniero mecatrónico puede estudiar maestrías y cursos de especialización en automatización, llevando como base el curso de Control Clásico.

Por último, cabe resaltar que este trabajo da pie a investigaciones futuras donde se puede proponer una praxeología articulada. Debido a que en este trabajo se identifican las praxeologías existentes, defectos y virtudes que existe en cada una de estas, un futuro trabajo podría ser una praxeología que se diseñe de manera que se puedan relacionar los elementos encontrados. Un ejemplo en dicha praxeología podría ser hacer ejercicios con Matlab antes o al inicio del curso de ecuaciones diferenciales o ver dónde se puede articular un taller o introducción de dicho software.

REFERENCIAS

Carstensen, A., & J. Bernhard. (2009). *Student Learning in an Electric Circuit Theory Course: Critical Aspects and Task Design*. European Journal of Engineering Education 34 (4):389-404. doi: 10.1080/03043790902990315

Castela, C. & Romo, A. (2011). *Des Mathématiques A L'Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 31(1), 79-130.

Castela, C. (2016). *Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing"*. Educación Matemática, 28(2), 9-29.

Chaachoua , H., & Bessot, A. (2019). *La notion de variable dans le modèle praxéologique*. Educação Matemática Pesquisa *(EMP), 21*(4), 234-247.

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19*(2), 221-266.

Cordero, F., Valle, T. & Morales, A. (2019). *Uses of the optimization of engineers in training: the role of mechatronic engineering and the work of Lagrange*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 22(2). 185-2012.

Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson.

Gascón, J. (2011). *Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14(2), 203-231.

Giacoleti, F. & Cordero, F. (2019). *Usos y significados de la transformada de Laplace en una comunidad de ingenieros electrónicos*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (32-2), 429 - 438. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/14079/1/Giacoleti2019Usos.pdf

Giacoleti, F. & Cordero, F. (2020). *Reproducción continua de comportamientos discontinuos de la Transformada de Laplace a la continuidad de la reproducción de comportamientos [Artículo no publicado].* Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Golnaraghi, F. & Kuo, B. (2017), *Automatic Control Systems*, 10ma Ed. – McGraw-Hill Education.

Gonzales, W. O. (2020). *Praxeologías sobre la integral definida en la formación de un ingeniero químico* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional – Pontificia Universidad Católica del Perú.

Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.

Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab*. Pearson Educación.

Holmberg, M., & Bernhard, J. (2011). *University Teacher's perspectives on the role of the Laplace transform in engineering education*. doi: 10.1080/03043797.2016.1190957

Mendoza, J., & Cordero, F. (2018). *La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad.* Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11(1), 36-61. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/12910/1/Mendoza2018La.pdf

Miranda, E. (1999). *El entendimiento de la transformada de Laplace: Caso de una descomposición genética* [Tesis de Maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional.

Miranda, E. (2011). *Epistemología de la Transformada de Laplace y sus Implicaciones en la Didáctica de las Matemáticas*. Didac, (56-57), 76-81. Recuperado de https://biblat.unam.mx/es/revista/didac/articulo/epistemologia-de-la-transformada-de-laplace-y-sus-implicaciones-en-la-didactica-de-las-matematicas

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Quinta Edición. Madrid: Pearson Educación, S.A.

O'neil, P. V. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Nelson Education.

Otero, M., & Corica, A. (2013). *Diseño de un modelo proxeológico de referencia para el análisis de prácticas universitarias sobre cálculo*. In M. Otero, A. Corica, M. Fanaro, V. LLanos, P. Sureda, & V. Parra, La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática (pp. 85-100). Buenos Aires: BUNKEN.

Pineda, W., Hernández, C., & Avendaño, W. (2020). *Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada con Derive*. Praxis & Saber, *11*(26), e9845. https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9845

Romo, A. (2009). *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*. Paris: IREM de Paris.

Romo A. (2010). *Projets d'ingénierie: étude d'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 15, 201-218.

Romo, A. (2014). *La modelización matemática en la formación de ingenieros*. Educación Matemática, 314-338

Ruiz, L., Camarena, P., & Rivero, S. (2016). *Prerrequisitos Deficientes con Software Matemático en Conceptos Nuevos: Transformada de Laplace*. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 21(69), 349-383. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662016000200349

Ruiz, S. & Ciancio, M. & Correa-Otto, Se. (2018). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo integral y el empleo adecuado de TIC´s*. 20.

Silva, L. T. (2017). *El diseño de un desfibrilador: una actividad de modelización matemática para la formación de ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.

Vázquez, R. X. (2017). *Diseño de actividades didácticas basadas en modelización para la formación matemática de futuros ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.

Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning