PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

MOVILIZACIÓN DEL CONCEPTO SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS EN ESTUDIANTES DE CUARTO DE SECUNDARIA POR MEDIO DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta:

Luis Alberto Masgo Lara

Asesora:

Dra. Jesus Victoria Flores Salazar

Lima, 2021

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tuvo por objetivo analizar cómo estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de la semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas. Se realizó con estudiantes de cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa privada de Lima cuyas edades estuvieron comprendidas entre 14 y 15 años. La problemática que dio origen a este estudio se fundamentó en la dificultad que tienen los estudiantes para movilizar el concepto de semejanza de triángulos en la solución de problemas, dificultad generada por la enseñanza a través del uso directo de la proporción de semejanza, sin el tiempo adecuado para desarrollarlo en clase y sin el empleo de algún software que facilite el planteamiento de los problemas. Se utilizó como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica y como referente teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, dando énfasis en el registro figural, en sus diversas aprehensiones. Con respecto a la parte experimental de la investigación, se realizó una secuencia de tres actividades con la intención que los estudiantes movilicen el concepto de semejanza de triángulos en la resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando tanto lápiz y papel y el GeoGebra. En la primera actividad se abordó dos problemas con registro figural y apoyados por el GeoGebra, en la segunda actividad se propuso un problema sin registro figural pero apoyado por el GeoGebra y en la tercera actividad se planteó un problema sin registro figural y sin apoyo del GeoGebra. Asimismo, se identificó los cambios de registro de representación semiótica, así como la aprehensión perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva que movilizaron los estudiantes en la secuencia de actividades y se concluyó que los estudiantes de cuarto grado de secundaria lograron movilizar el concepto de semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas y el GeoGebra.

Palabras clave: Movilización de la semejanza de triángulos, Registros de representación semiótica, aprehensiones, GeoGebra.

ABSTRACT

The objective of this research work was to analyze how high school fourth grade students mobilize the concept of the similarity of triangles through different semiotic representations. It was carried out with fourth-grade students of secondary education from a private educational institution in Lima whose ages ranged from 14 to 15 years. The problem that gave rise to this study was based on the difficulty that students have in mobilizing the concept of similarity of triangles in solving problems, a difficulty generated by teaching through the direct use of the similarity ratio, without time suitable to develop it in class and without the use of some software that facilitates the approach of the problems. Aspects of Didactic Engineering were used as a methodology and the Theory of Registers of Semiotic Representation as a theoretical reference, emphasizing the figural register, in its various apprehensions. Regarding the experimental part of the research, a sequence of three activities was carried out with the intention that students mobilize the concept of similarity of triangles in solving problems of everyday life using both pencil and paper and GeoGebra. In the first activity two problems with figural registration and supported by GeoGebra were addressed, in the second activity a problem was proposed without figural registration but supported by GeoGebra and the third activity raised a problem without figural registration and without GeoGebra support. Likewise, the changes in the register of semiotic representation were identified, as well as the perceptual, sequential, operative and discursive apprehension that the students mobilized in the sequence of activities and it was concluded that the fourth-grade students of secondary school managed to mobilize the concept of similarity of triangles by medium of different semiotic representations and GeoGebra.

Key words: Mobilization of the similarity of triangles, Registers of semiotic representation, apprehensions, GeoGebra

A mi padre, el Dr. José Masgo que está en el cielo

y a mi madre Alcira Lara, que este año se nos fue al cielo,

por sus enseñanzas y apoyo constante

a lo largo de toda mi vida

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar por su apoyo constante, buenos consejos, sugerencias y críticas al trabajo, por su innegable labor docente, por ser maestra, por enseñar el camino con su ejemplo y por su dedicación a lo que hace; que condujeron a lograr nuestro propósito.

A los miembros del jurado, a la Dra. Verónica Neira y a la Mg. Flor Carrillo por la revisión de la tesis, por sus valiosos aportes, sugerencias y observaciones, las cuales ayudaron a mejorar mi trabajo.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú, por acogerme en sus aulas desde mi licenciatura y luego en mi paso por la maestría para poder desarrollarme como profesional.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por apoyarme para desarrollar mi investigación.

A los profesores de la Escuela de Posgrado de la especialidad de Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú; cuyas valiosas enseñanzas, condujeron a lograr nuestro propósito.

A mis compañeros de la maestría, por compartir conmigo sus experiencias docentes.

A mis amigos y colegas Robert Montoya, Teodoro Aquisse y Jesús Olivares, por ser ejemplos a seguir y por su apoyo constante a lo largo de la investigación

A mi querida familia, en primer lugar, a mis padres Alcira Lara de Masgo y al Dr. José Masgo Cubas que ya no están con nosotros, por el ejemplo de ambos a lo largo de toda mi vida y; en segundo lugar, a mis hermanos Mirtha, Lita y José por su comprensión, paciencia y consejos, por estar a mi lado en los momentos más difíciles e importantes en mí vida.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En el currículo escolar, la semejanza de triángulos constituye uno de los temas de gran relevancia en el ámbito geométrico, porque involucra reconocer elementos de correspondencia entre dos triángulos a partir de sus características y propiedades, por ser base para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos y por las diversas aplicaciones en la vida diaria. Observamos que el poco tiempo que se le asigna para la enseñanza del concepto en mención, la práctica docente sin uso de tecnología, la resolución de problemas de corte algebraico, siguiendo una misma técnica resolutiva y el escaso o nulo uso de este concepto en problemas de la vida diaria, no favorecen su aprendizaje. Esta problemática se refleja en diferentes investigaciones que en el área de Educación Matemática se hacen del tema, así por ejemplo, Ferreira (2016), señala que la enseñanza de la geometría ha experimentado algunas dificultades por una enseñanza predominantemente tradicional donde el libro de texto aparece como la principal o única herramienta metodológica utilizada por los profesores en aula o como señala Gualdrón y Gutiérrez (2006), que los bajos niveles de comprensión de los estudiantes en relación al concepto de semejanza se debe a que su enseñanza se realiza de manera intuitiva y básica.

Teniendo en cuenta esta realidad, presentamos esta investigación que tiene por objetivo general analizar cómo estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas en una secuencia de tres actividades. Para tal fin, utilizamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) como marco teórico, que nos permitió describir y analizar las acciones realizadas por los estudiantes sobre los diversos registros como el registro algebraico, el figural y el figural dinámico proporcionado por el GeoGebra, la movilización entre ellas, y la articulación de sus respectivas aprehensiones, provocando en el desarrollo de la secuencia de actividades, un proceso deductivo que permitió solucionarlos.

Escogemos como metodología de investigación algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) que a través de una secuencia de actividades permite validar o no nuestros supuestos, a partir de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. La secuencia de actividades estuvo compuesta por tres actividades cuya aplicación estuvo a cargo del profesor de Matemática quién a su vez fue el investigador y el análisis de las producciones de los estudiantes se realizó mediante la ficha de actividades que resolvieron los estudiantes. Por todo ello, consideramos estructurar la presente investigación de la siguiente manera:

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación, esto es, estudiamos algunas investigaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de triángulos, hacemos la justificación del tema y por último la pregunta y los objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo, indicamos los elementos teóricos y metodológicos de la investigación, esto es, mencionamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1995), en donde describiremos de manera especial al registro figural y algunos aspectos del registro figural dinámico. También tomaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), como metodología de nuestra investigación

En el tercer capítulo analizamos la evolución histórica del concepto de la semejanza de triángulos, su definición actual y cómo lo desarrollan en los textos de consulta del cuarto año de secundaria para su enseñanza y aprendizaje.

En el cuarto capítulo, describimos a los sujetos de la investigación, organizamos la secuencia de actividades que se trabajará con los estudiantes y por último efectuamos el análisis a priori y a posteriori de la secuencia de actividades propuestas en la investigación.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación en relación al marco teórico y metodológico, a la pregunta de investigación, al objetivo general y a la experimentación. Enseguida damos recomendaciones para futuras investigaciones que surgirán a raíz de nuestra investigación.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En esta parte de la investigación detallamos el problema de investigación, para ello; presentamos diferentes estudios que abordan el concepto de semejanza de triángulos en relación a las dificultades de los estudiantes para aprenderla, la forma como los docentes lo desarrollan en aula, a la utilización de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y al uso del software GeoGebra. Seguidamente, presentaremos la justificación del tema de investigación y la formulación de la pregunta de investigación con sus respectivos objetivos.

1.1 Investigaciones de referencia

Las investigaciones consideradas de referencia para esta investigación fueron organizadas por tres ejes temáticos: investigaciones relacionadas a la forma como se presenta, logros y dificultades del concepto de semejanza de triángulos y/o temas afines, como el teorema de Thales; investigaciones relacionadas con la teoría de registros de representación semiótica para la enseñanza y aprendizaje de la Semejanza de triángulos y otros conceptos matemáticos y por último; investigaciones relacionadas con el uso del GeoGebra.

- **Investigaciones relacionadas al concepto de semejanza de triángulos y/o afines**

En relación a este eje temático, presentamos en primer lugar los trabajos de investigación de Mrabet en los años 2010 y 2015. Mrabet (2010) , realizó un trabajo de investigación sobre la enseñanza del teorema de Thales en la educación tunecina, en relación a la forma en que los textos desarrollan el Teorema de Thales dentro de las instituciones educativas tunecinas, así como el aprendizaje real del concepto. Para su análisis, tomó como referencia la educación francesa y se interesó en la transición del Teorema de Thales en dos puntos: la transición de primaria a secundaria que coincide, además, con un cambio de idioma en la enseñanza de las matemáticas y la transición de primero a segundo de secundaria, que coincide además con un cambio a la geometría vectorial.

El investigador complementó su investigación con pruebas ofrecidas a estudiantes tunecinos y franceses, entrevistas a algunos profesores tunecinos y franceses y observaciones sobre la enseñanza del Teorema de Thales. Al término de su investigación señaló, que una mirada a la historia de las matemáticas y su enseñanza, le permitió comprender mejor la organización del conocimiento matemático, así como la consistencia de la enseñanza de la geometría en diferentes momentos. Por otro lado, encontró dificultades vinculadas a la demostración para primero de secundaria y dificultades de reconocimiento del Teorema de Thales en forma vectorial, para estudiantes de segundo de secundaria; sin embargo, identificó modelos de posible coherencia en relación con el Teorema de Thales que le sirvió de referencia para analizar la enseñanza tunecina actual.

En relación con su segundo trabajo, Mrabet (2015) siguió estudiando el concepto del Teorema de Thales; tomó como referencia su trabajo anterior y trabajos de investigación que consultó, encontrando que el mayor problema para aprender dicho concepto es la inconmensurabilidad. La mayoría de las explicaciones del Teorema de Thales en la secundaria y en textos de consulta, se hace usando segmentos conmensurables, usando incluso materiales concretos para su verificación, sin embargo, en las evaluaciones se usa muchas veces segmentos inconmensurables, lo que, en palabras del investigador, se convierte en un obstáculo para la enseñanza de una demostración de dicho teorema.

El investigador analizó las diversas demostraciones del Teorema de Thales que algunos autores realizaron en diferentes momentos de la historia de las matemáticas, empezando por aquellos que dieron las primeras pautas de este concepto matemático. Analizó primero los estudios de Euclides en su libro *“Los elementos de Euclides”,* destacando el método de áreas que consiste en cortar y recomponer para comparar áreas y la teoría de las proporciones desarrollada para resolver el problema de la igualdad de dos relaciones inconmensurables. Luego realizó un análisis del Teorema de Thales de acuerdo con Euclides, el estudio de la geometría de Chez Arnauld, etc. Es decir, analizó la forma de cómo se desarrolló la génesis histórica del Teorema de Thales, para ver la implicancia y utilidad que tiene con su enseñanza a nivel secundario.

Al final de su estudio, el investigador señaló que las condiciones de cómo apareció el concepto del Teorema de Thales y las diversas demostraciones asociadas a él, nos proporciona elementos de reflexión sobre el razonamiento geométrico, y por lo tanto sugiere estudiarlo y enseñarlo para lograr un mejor aprendizaje del concepto. Sugiere además que el tema debería ser tratado en la formación de los futuros docentes de matemáticas.

Asimismo, Fernandes (2017), realizó una investigación sobre el aprendizaje significativo del Teorema de Thales y la Semejanza de Triángulos en Jóvenes y Adultos (EJA) de una escuela estatal en la ciudad de Campos dos Goytacazes, estado de Rio de Janeiro, Brasil. Esta investigación fue realizada con estudiantes conformada por adultos y trabajadores mayores de 18 años, del segundo módulo del programa Nova EJA, que es compatible con la enseñanza media y que, al haber llevado el primer módulo, se trata entonces de estudiantes con experiencia y conocimiento sobre el Teorema de Thales y Semejanza de Triángulos. El objetivo principal de esta investigación fue presentar una metodología y un sistema de enseñanza que favoreciera el aprendizaje de los temas propuestos, para ello el investigador tomó como base la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel (1986). La investigación la dividió en tres etapas: verificación del conocimiento de los estudiantes sobre los temas propuestos (pre test), aplicación de dos secuencias didácticas elaboradas según la teoría del aprendizaje significativo y, finalmente, la verificación aprendizaje (post test).

Luego del pretest, el investigador se dio cuenta de las dificultades que tenían los estudiantes en relación a la proporcionalidad, al desconocimiento del Teorema de Thales, al reconocimiento de figuras semejantes y peor aún, en el uso de estos conceptos en preguntas contextualizadas.

Al inicio de la aplicación de las secuencias didácticas, los estudiantes evidenciaron a través de sus respuestas, un conocimiento de la noción de proporcionalidad, al aplicarlo en situaciones cotidianas no relacionadas con las matemáticas. Por ello, luego de la aplicación de ambas secuencias didácticas, el investigador señaló que el valorar y usar el conocimiento previo de los estudiantes sobre la idea de proporcionalidad, favoreció el aprendizaje del Teorema de Thales y la semejanza de triángulos.

Después de la prueba post test, Fernandes (2017) señaló, que existió un avance significativo de los estudiantes en relación con el aprendizaje del teorema de Thales y la Semejanza de Triángulos. Señala, además, que el aprendizaje en los estudiantes fue significativo, porque las preguntas y problemas colocados en las secuencias didácticas requirieron de la máxima transformación de un conocimiento existente en los estudiantes y que las pruebas de comprensión fueron por lo menos, redactadas de manera diferente a la encontrada originalmente en el material de instrucción, logrando que los estudiantes lo perciban de una manera más comprensible.

Finalmente, el investigador analizó los resultados obtenidos en la prueba del post test, afirmando luego, que los estudiantes jóvenes y adultos lograron un aprendizaje significativo del Teorema de Thales y de la Semejanza de Triángulos y que el uso de la Teoría de Ausubel favoreció a la educación de jóvenes y adultos en el aprendizaje de estos dos conceptos matemáticos.

En el mismo país también tenemos la investigación de Ferreira (2016), investigador que propuso una secuencia didáctica para contribuir a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas en estudiantes de 15 años en promedio, de una escuela de la red estatal que se encuentra en la ciudad de Vigia, interior del estado de Pará, de 9° de enseñanza básica, Brasil. Para lograr su propósito, el investigador elaboró una secuencia didáctica guiado con base a dos hipótesis; la primera de ellas, era que la enseñanza de la semejanza de triángulos de figuras planas por medio de actividades de redescubrimiento permitirá que los estudiantes, al manipular figuras semejantes descubran regularidades, propiedades y proporcionalidad entre estas figuras, sin que el docente tenga que participar de manera directa, y la segunda, que el trabajo pedagógico con estudiantes de 9° de enseñanza básica por medio de actividades de redescubrimiento genera un desempeño superior al promedio, en la resolución de problemas que involucran la semejanza de figuras planas. Para comprobar sus supuestos el investigador adoptó como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica

Las actividades contenidas en la secuencia didáctica parten de conceptos simples como la idea de ampliación y reducción de figuras para introducir conceptos de proporcionalidad entre figuras planas, razón de proporcionalidad de semejanza y el concepto de semejanza de triángulos. Ferreira (2016) indicó que las actividades que propuso le permitieron explorar la producción del pensamiento geométrico de los estudiantes por medio de la resolución de problemas, visualización y manipulación de figuras por medio de la construcción con regla, transportador y papel cuadriculado. También señala que la enseñanza por medio de actividades por redescubrimiento, permitieron en los estudiantes actitudes de observación e investigación de las propiedades inmersas en la semejanza de triángulos, favoreciendo su aprendizaje.

Por su parte Herrera (2018), quien preocupada por la forma algorítmica de enseñar el Teorema de Thales en las escuelas, el no desarrollo de este concepto muchas veces en aula por parte de los docentes y la poca muestra de interés que tienen los estudiantes por aprenderlo, al no encontrarlo relevante, propuso una nueva estrategia de enseñar dicho teorema en la secundaria a través de una Socioepistemología del Teorema de Thales, que se apoya en el contexto de la construcción de tubos de conducción hidráulica tipo “T” realizada en la industria de la Pailería (encargada de la fabricación de sistemas de conducción de fluidos) por la comunidad de paileros. El objetivo general de su investigación fue entender cómo se lleva a cabo la comprensión del Teorema de Thales en el nivel educativo de 3er año de secundaria, tomando en cuenta el saber matemático que se encuentra en el contexto cotidiano de la construcción de tubos T en Pailería.

La investigadora realizó su trabajo de investigación con 22 estudiantes mujeres del tercer grado de secundaria de 15 años de edad, en la escuela Secundaria Técnica No. 1 del estado de San Luis Potosí, México y dividió su trabajo en 5 etapas; en la primera etapa realizó una evaluación diagnóstica y presentación del problema, en la segunda etapa los estudiantes trabajaron en la construcción de la plantilla del tubo T1, en el análisis del tubo e identificación de los triángulos, en la tercera etapa los estudiantes trabajaron en la construcción de la plantilla del tubo T2; en la cuarta etapa los estudiantes trabajaron en la construcción de la plantilla del tubo T3, en el análisis del tubo y tomaron medidas y en la quinta etapa se realizó el análisis de los tubos T3 y T4, se tomaron medidas, se realizó una reflexión de la pregunta escrita, los estudiantes enunciaron el teorema y mostraron la solución del problema.

A través de esta estrategia, Herrera (2018) analizó la comprensión del Teorema de Thales a través de un camino distinto al de la enseñanza tradicional que realizan los libros de texto de Matemáticas y los profesores en el aula, es decir; buscó problematizar al saber matemático situándolo en el entorno de la vida del estudiante, buscando el conocimiento matemático que está vivo en él, para que el nuevo conocimiento aparezca a partir de la actividad realizada por el estudiante con sus saberes previos, es decir, los estudiantes deben aprender haciendo funcionar el saber, de manera que este aparezca, como un medio para seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar estrategias en la resolución del reto planteado: construcción de tubos “T”.

Con base a los resultados de su investigación, la investigadora señaló que las estrategias variacionales de comparación, predicción, seriación y estimación permitieron resignificar el Teorema de Thales en términos de la precisión que se requiere para construir los tubos con forma de “T”, adquiriendo los estudiantes un conocimiento funcional y no operativo de dicho teorema, mejorando así su visualización y comprensión.

Por otro lado, Briceño y Alamillo (2017) en su investigación propusieron una situación didáctica con el uso del Tangram como material didáctico, para analizar a 16 estudiantes (entre 12 y 13 años) del segundo año de secundaria pertenecientes a la Universidad Autónoma de Zacatecas, México, cómo comprenden la noción de semejanza. La investigación tuvo como base teórica la Teoría de Situaciones Didácticas de manera que, la situación didáctica propuesta por ellos contiene las cuatro situaciones que propone la teoría (acción, formulación, validación e institucionalización). Para aplicar la actividad, a los estudiantes se les organizó en grupos y se les entregó un Tangram, una regla graduada, un transportador y una hoja de respuestas para que plasmen sus soluciones a las preguntas planteadas. Los resultados de la actividad al ser analizados por Briceño y Alamillo (2017) llegaron a concluir que los estudiantes lograron la situación de acción sin mayores problemas, su primer acercamiento hacia la noción de semejanza fue positivo, reconocieron ángulos y lados correspondientes y homólogos respectivamente. En relación a la situación de formulación, los estudiantes construyeron triángulos de distinto e igual tamaño respetando la forma. Con respecto a la situación de validación lograron formar paralelogramos a través de sobreponer figuras más pequeñas, y finalmente, en relación a la situación de formalización no se logró que los estudiantes tengan una idea clara sobre lo que significa la razón de semejanza.

Finalmente, los investigadores señalaron que el implementar el Tangram como recurso didáctico para crear en los estudiantes la noción de semejanza, tuvo un impacto positivo en el desarrollo de las actividades que involucraban medir y comparar magnitudes, sin embargo, creen que se debe buscar otra estrategia para poder tener una institucionalización de la semejanza.

En Colombia, Sanabria (2018) en su trabajo de tesis sobre la enseñanza de los conceptos de semejanza y congruencia propuso una secuencia didáctica en aula, con el objetivo de mejorar los niveles de desempeño en pensamiento geométrico de los conceptos de semejanza y congruencia aplicados a figuras geométricas, especialmente a los triángulos. La investigación se realizó con 27 estudiantes de grado octavo (14-15 años) de la Institución Educativa Santa Inés, en Villavicencio.

El investigador evidenció que los estudiantes de grado octavo tenían diversas dificultades en la formulación y resolución de problemas que involucran relaciones y propiedades de semejanza y congruencia a partir de sus observaciones que realizó en el desarrollo de clases durante los dos últimos años como docente de matemáticas y a través de una prueba diagnóstica previa al desarrollo de la secuencia didáctica. Además, señala la importancia del razonamiento geométrico catalogándolo como una herramienta que fortalece el análisis y la argumentación en matemática y otras ciencias.

Sanabria (2018) propuso una secuencia didáctica de siete actividades con base al modelo de Van Hiele (1957), que contrarrestó las dificultades encontradas para el aprendizaje de la semejanza y congruencia y; en algunas actividades relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la congruencia, se apoyó de una herramienta tecnológica como el GeoGebra.

Como resultado de su investigación, el autor indicó que su estudio cumple con los objetivos propuestos, porque a través del diseño e implementación de actividades, con la metodología de aprendizaje guiado, logró que los estudiantes aprendieran el concepto de semejanza y congruencia. Esto se evidenció, porque los estudiantes alcanzaron los tres primeros niveles de desarrollo de los cinco que indica Van Hiele, esto es, reconocimiento, análisis y clasificación (Abstracción). Además, señala que las aplicaciones de situaciones problemáticas en la vida real son medios que permiten la asimilación de conceptos de semejanza y congruencia a partir de su experimentación directa. Por último, menciona que la apropiación de un concepto no se puede delegar solo al uso de un software, puesto que se necesita que los estudiantes experimenten con sus propios sentidos a través del uso de materiales concretos.

Por otro lado, tenemos investigaciones que señalan la importancia del conocimiento del concepto semejanza de triángulos en los futuros docentes de matemáticas, así tenemos a Oliveira y Chiummo (2017) quienes realizaron una investigación con estudiantes del curso de matemáticas de una Universidad Paulista (16 y 17 años), con el objetivo de hacer un análisis de las respuestas de los estudiantes a una prueba relacionada al concepto semejanza de triángulos. Por medio de esta prueba, se buscó comprender la interacción de los estudiantes con este conocimiento geométrico a través de sus errores, dificultades o conceptos erróneos.

Los investigadores para dar respuesta a la pregunta central de su investigación ¿qué errores, dificultades o conceptos erróneos se puede encontrar en los estudiantes al desarrollar la prueba relacionada al aprendizaje de la semejanza de triángulos?, usaron la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) como marco teórico, con el objetivo de modelar la enseñanza y el aprendizaje del concepto de semejanza de triángulos; además, optaron por hacer un análisis de contenido. El estudio mostró que, detrás del término "dificultad" se develó errores, obstáculos y conceptos erróneos por parte de los estudiantes. Oliveira y Chiummo (2017) luego del análisis de las respuestas de los estudiantes, señalaron que se evidenció que solo algunos de ellos mostraron aprender correctamente el concepto semejanza de triángulos y que un grupo significativo de estudiantes (no indica cuántos) presentó diferentes dificultades, como el no identificar correctamente el criterio de semejanza (AAA, ALA, LLL), que permite justificar la semejanza entre dos triángulos. También encontraron errores conceptuales y de procedimiento, como el no identificar correctamente los elementos homólogos entre los triángulos, conllevando luego, al error de formar una proporción entre razones que no son iguales. Por último, los investigadores señalan que el análisis realizado puede contribuir al aprendizaje de este contenido de geometría plana, el cual tiene una presencia significativa en el currículo matemático de su país y, por lo tanto, es de fundamental importancia para la formación de futuros docentes.

En Turquía, Dündar y Gündüz (2017) realizaron una investigación cuyo objetivo fue examinar el nivel de conocimiento del concepto de semejanza y congruencia de triángulos de los futuros profesores de matemáticas, la asociación de estos conceptos con la vida cotidiana, así como su uso en la resolución y justificación de problemas de geometría. El estudio se realizó con 46 futuros profesores, estudiantes en el departamento de matemáticas de la escuela primaria de la Universidad estatal Abant Izzet Baysal de Turquía. Los estudiantes seleccionados ya tenían un conocimiento suficiente sobre los conceptos de semejanza y congruencia de triángulos, debido a estos habían llevado previamente el curso de Geometría, en donde se impartieron dichos temas. Las herramientas de recolección de datos fueron tres, que son: GJP (Justificación de problemas de Geometría), GCKQ (preguntas de conocimiento conceptual de Geometría) y GQDLE (preguntas de geometría de la vida cotidiana) y fueron analizados mediante la estadística descriptiva. Los resultados de esta investigación señalaron que los futuros profesores tienen éxito en las preguntas de conocimiento conceptual de semejanza y congruencia de triángulos, pero tienen dificultades para justificar con estos conceptos la solución de problemas de Geometría, así como utilizarlos en contextos de la vida cotidiana.

- **Investigaciones relacionadas con la Teoría de Registros de Representación Semiótica para la enseñanza y aprendizaje de la Semejanza de Triángulos y otros conceptos matemáticos.**

En relación con las investigaciones relacionadas a la Teoría de Registros de Representación Semiótica podemos mencionar en primer lugar a Vanegas (2019), cuyo trabajo tuvo como objetivo caracterizar correlaciones que establecen 63 estudiantes del grado séptimo (12 – 13 años) de la Institución Educativa El Tablazo del Municipio de Barbosa de Colombia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de semejanza y congruencia de triángulos. El investigador señala que estos conceptos son muy importantes dentro del currículo matemático colombiano, porque son base para el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos a nivel de educación básica y por ello consideró como marco teórico de su investigación, a la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico de Moreira (2005).

Realizó una prueba diagnóstica, demostrando el bajo nivel que tienen los estudiantes en relación a estos dos conceptos, por ello implementó varias estrategias de intervención en aula como una realizar un taller de indagación de conceptos previos, un trabajo en laboratorio, una presentación de materiales educativos para la construcción del mapa conceptual y la realización de un seminario para mejorar la comprensión de la semejanza y congruencia de triángulos. Luego, el investigador realizó una prueba final, cuyos resultados mostraron el avance de los estudiantes en cuanto al aprendizaje de la semejanza y congruencia de triángulos, ya que son capaces de reconocer la semejanza y congruencia de triángulos a pesar de se encuentren en diferente posición (rotación, traslación y homotecia); y evidencian conocimiento de los criterios de semejanza y congruencia.

Por último, Vanegas (2019) recomienda a los docentes dejar de lado un poco la pizarra y el libro de texto, para no ser el centro de atención del aprendizaje de los estudiantes y propone más bien, que su rol sea más de orientador y propositivo en el que los estudiantes asuman un rol más activo y de descubrimiento. Además, el investigador señala que deben realizarse laboratorios matemáticos, puesto que los experimentos y experiencias de laboratorio permite que los estudiantes se desenvuelvan de forma autónoma y construyan eficazmente su conocimiento por medio de la discusión de ideas, la interacción con materiales y guías adecuadas de enseñanza- aprendizaje.

Scheifer (2017), en su investigación se ocupó de analizar las preguntas de la prueba nacional brasileña a partir de aspectos de la Teoría de los Registros de Representación y su relación con el aprendizaje de la geometría. Por ello la investigadora eligió preguntas para sus actividades que fueron un extracto de lo que aparece en las evaluaciones de Brasil. Las preguntas elegidas correspondieron a diferentes años de enseñanza involucrando diversos temas de geometría, entre ellos la semejanza de triángulos. Para el análisis cognitivo de las preguntas, la autora elaboró un cuadro de categorías que utilizó para apoyar teóricamente la organización de la enseñanza de la Geometría, por lo que su investigación centró su análisis a preguntas específicas de Geometría. Este cuadro de categorías, que involucró aspectos considerados indispensables en el aprendizaje de la Geometría, se organizó y sintetizó para hacer que las propuestas sobre enseñanza y aprendizaje de la Geometría sean más comprensibles y visualmente accesibles desde el punto de vista de la teoría de los registros.

Los resultados de la investigación señalaron que las preguntas planteadas proporcionaron de manera incompleta las aprehensiones que van de la mano con el aprendizaje de la Geometría. La investigadora señaló que incluso aquellas preguntas que aparecieron en mayor número, como son los problemas con figuras geométricas, contemplaron superficialmente la articulación entre aprehensiones perceptivas y discursivas. Señala, además, la diferencia en la frecuencia de las categorías cubiertas en las preguntas de los últimos años de la escuela primaria y en las preguntas de la educación secundaria, es decir, las actividades movilizadas, a menudo se resuelven localmente y de acuerdo con los contenidos sugeridos, pero no se relacionan. Asimismo, indica que es importante que los maestros conozcan y aprendan Geometría, así como también es importante que los maestros enseñen Geometría en clase, ya que existe cierta incertidumbre con respecto a la enseñanza de esta área del conocimiento.

Por su parte Macías (2015), en su trabajo doctoral diseñó y estudió situaciones didácticas que favorecieron la coordinación entre registros semióticos en relación al Teorema de Pitágoras y la Semejanza, por un lado, y sobre la noción de función, sus propiedades y el concepto de función lineal por otro lado. Además, eligió estos dos tipos de contenidos de necesidades semióticas distintas con el fin de poder demostrar que la metodología empleada, basada en la teoría de situaciones didácticas y centradas en la atención a la coordinación entre registros, favorece muy positivamente el aprendizaje y la construcción de conocimiento en los estudiantes. Para la experimentación de su trabajo el investigador formó dos grupos, uno de control y el otro experimental, en donde utilizó una secuencia didáctica donde convergen la teoría de situaciones didácticas y la teoría de registros de representación semiótica, comprobando que sus estudiantes han logrado la adquisición de los conocimientos de una manera más significativa y como consecuencia de una buena conversión de los diferentes registros de representación semiótica.

- **Investigaciones relacionadas con el uso del GeoGebra.**

Como nuestro interés es movilizar el concepto de semejanza de triángulos en la resolución de los problemas planteados en las actividades, hemos visto conveniente usar en algunos de estos problemas el GeoGebra, para encontrar y justificar, por ejemplo, un par de triángulos semejantes. Por ello, presentamos algunas investigaciones que explican la importancia del GeoGebra en la enseñanza de la matemática. En primer lugar, tenemos a Dogan e Icel (2011), quienes realizaron en Turquía, un estudio experimental en el semestre 2009-2010 con estudiantes del octavo grado de una escuela primaria, sobre los posibles efectos del aprendizaje de los triángulos, usando el software GeoGebra y siguiendo el plan de estudios oficiales de Turquía (MEB, 2007). Los investigadores realizaron la investigación en tres etapas, la primera usando un pretest, la segunda, la realización de las actividades para el aprendizaje del triángulo y la tercera usando un post test. Se seleccionaron dos grupos de trabajo; el primero, un grupo denominado experimental conformado por 9 mujeres y 11 hombres y el segundo denominado de control conformado por 7 mujeres y 13 hombres. El grupo experimental usó para su aprendizaje el GeoGebra y el grupo de control siguió con la enseñanza tradicional.

En relación con el pretest, Dogan e Icel (2011) prepararon una prueba de 13 preguntas que cubrían los objetivos del séptimo grado en matemáticas y fue aplicado a todos los estudiantes para determinar su nivel al inicio de las actividades. Los resultados de esta prueba mostraron que no hay mayor diferencia, estadísticamente significativa, entre ambos grupos, es decir, los grupos son homogéneos.

En relación a la aplicación de las actividades, los investigadores tomando como base el plan de estudios oficial de Turquía (MEB, 2007), diseñaron 12 actividades que se concentraron en los siguientes 8 puntos: determinar la posibilidad de la construcción de un triángulo a partir de relación entre sus tres lados, determinar la relación entre los lados de un triángulo y los ángulos que se oponen a dichos lados; dibujar un triángulo, construir líneas notables de triángulos, construir la relación de Pitágoras, explicar los términos de igualdad asociados a dos triángulos, explicar los términos de similitud asociados a dos triángulos y por último determinar las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo.

Como los investigadores prepararon actividades usando el GeoGebra, con la intención de hacer el tema más dinámico, concreto y visual para los estudiantes del grupo experimental, se les hizo un introductorio sobre el uso de las herramientas básicas del GeoGebra. En cuanto al post test, esta prueba fue aplicada al mismo tiempo a ambos grupos y los resultados de éste mostraron una diferencia significativa entre ambos grupos, siendo favorable al grupo experimental.

Los investigadores señalaron que el uso del GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje aumenta notoriamente el nivel de rendimiento de los estudiantes y estimó que entre las principales razones de esta diferencia significativa a favor del grupo experimental es el hecho que los estudiantes de este grupo están bien familiarizados con el uso del GeoGebra, pues les permitió construir, explorar y observar propiedades geométricas. Además, el uso del GeoGebra a través de su dinamismo facilitó el pensamiento de alto nivel de los estudiantes al mostrarles una situación de aprendizaje que va más allá del simple dibujo de formas geométricas. Por último, los investigadores señalan que el uso del GeoGebra tuvo un impacto positivo en los estudiantes, fue motivador y en todo instante los estudiantes mostraban actitud positiva hacia las actividades propuestas.

En Argentina, Hernández (2016) propuso una secuencia didáctica para estudiar el Teorema de Thales y dos de sus aplicaciones: la división de un segmento en partes iguales y triángulos semejantes en estudiantes de 4to año de Secundaria. La investigadora diseñó una secuencia didáctica, compuesta por cuatro situaciones, desarrolladas en dos partes cada una, o sea, ocho en total; y un conjunto de tareas y síntesis, algunas a cargo de los investigadores y otras para que las realicen los estudiantes. Una característica del diseño es que las situaciones involucran tanto respuestas en lápiz y papel, como actividades que requieren del uso de software de geometría dinámica GeoGebra como soporte. Propuso una enseñanza, basada en preguntas, que permita recuperar el sentido y la razón de ser de la geometría sintética y analítica en clases de Matemática en la escuela secundaria.

De acuerdo con los resultados de la investigación, la secuencia didáctica propició que los estudiantes encuentren propiedades del Teorema de Thales utilizando la geometría dinámica como recurso. Los estudiantes encontraron al inicio, una relación de proporcionalidad entre los segmentos correspondientes y la resolución de una operación matemática de forma gráfica aplicando técnicas de geometría sintética. En el marco geométrico los estudiantes lograron analizar muchas de las posibles representaciones gráficas que cumplen con el teorema. Las diferentes representaciones gráficas construidas con lápiz y papel, junto con la resolución de tareas en el software de geometría dinámica en las primeras situaciones, hicieron posible la generalización de las condiciones que debe cumplir la construcción gráfica para que los segmentos correspondientes sean proporcionales. El empleo del software GeoGebra, junto con la aplicación de técnicas de cálculo algebraico fue central para alcanzar estos resultados. Es así que los estudiantes han reconstruido una de las aplicaciones del teorema: la división de un segmento en partes iguales.

En el Perú, Espinoza (2015) analizó cómo los estudiantes de 4º año de secundaria de Educación Básica Regular, cuyas edades fluctuaban entre 14 y 15 años, conjeturan la propiedad de la base media cuando articularon las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica en la que utilizaron el GeoGebra. Se basó en la teoría de Registros de Representación Semiótica y aspectos de la Ingeniería Didáctica y propuso una secuencia didáctica formada por tres actividades, las cuales permitieron que los estudiantes realicen tratamientos y conversiones. La investigadora usó principalmente el registro figural analizando las articulaciones de las aprehensiones: secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva que realizaron los estudiantes. Los resultados de la investigación señalaron que los estudiantes usaron herramientas del GeoGebra para realizar tratamientos en el registro figural, permitiéndoles observar diferentes configuraciones del objeto representado, articular aprehensiones, relacionar conocimientos y establecer conjeturas. Por último, la investigadora señala que, mediante la articulación de las aprehensiones en el registro figural, los estudiantes lograron conjeturar la propiedad de la base media del trapecio.

Por todo lo mencionado líneas atrás, las investigaciones realizadas en estas últimas dos décadas y presentadas por todo el mundo, en diferentes Instituciones de Investigación Matemática, constatan la importancia del aprendizaje de la Semejanza de Triángulos y el Teorema de Thales; asimismo, la importancia del uso de la geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en áreas como Geometría y Álgebra como herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. Sandoval (2009) señala al respecto, que la geometría dinámica ofrece un campo de exploración que no es factible en las representaciones con lápiz y papel, herramientas como el arrastre permite la exploración y la validación de una construcción para producir y validar conjeturas; esta nueva forma de percibir las gráficas, ayuda a los estudiantes a descubrir defectos en sus construcciones con lápiz y papel, iniciando una transformación de sus representaciones estáticas, trabajando así como una herramienta que reorganiza su razonamiento, y en consecuencia facilita la resolución de problemas geométricos.

En la búsqueda de nuevos caminos que permitan el aprendizaje del concepto de semejanza de triángulos y su aplicación en un contexto real, nuestra investigación utilizará el software GeoGebra. En esta investigación, buscamos que los estudiantes usen el GeoGebra para resolver las actividades propuestas, corroborando hipótesis y conjeturas y/o aplicando propiedades de las figuras geométricas por medio de su representación figural, para luego transformarla a la representación gráfica por medio del lápiz y papel y de ahí al registro algebraico; es decir, pretendemos que los estudiantes manejen estos tres diferentes registros de representación.

A continuación, presentamos la justificación de porqué elegimos estudiar a la semejanza de triángulos, así como también la importancia de la geometría dinámica para lograr su aprendizaje.

1.2 Justificación

Las investigaciones de Mabret (2015), Fernandes (2017), Herrera (2018) y Sanabria (2018), señalan las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje del teorema de Thales y la semejanza de triángulos en el nivel secundario en relación a un manejo inadecuado de la proporcionalidad y del teorema de Thales, así como dificultades para diferenciar la semejanza de triángulos de la congruencia. Otras investigaciones que hemos señalado en la sección anterior, proponen situaciones didácticas que pretenden facilitar la enseñanza-aprendizaje del teorema de Thales y la semejanza de triángulos, como las de Ferreira (2016) y Sanabria (2018). La investigación de Briceño y Alamillo (2017) busca estrategias para contrarrestar la forma algorítmica de enseñar el Teorema de Thales y la semejanza de triángulos, por medio de un material concreto como el tangram. Por otro lado, investigaciones de Oliveira y Chiummo (2017) y Dündar y Gündüz (2017) se enfocaron en el conocimiento que deberían tener los futuros profesores de matemática en relación a sus conocimientos sobre los conceptos de semejanza y congruencia de triángulos. Por su parte, Scheifer (2017) y Macías (2015) señalan la importancia de los cambios de registros de representación para la enseñanza de la Geometría y Dogan e Icel (2011), Hernandez (2016) y Espinoza (2015) indican que el uso del GeoGebra en la enseñanza de la Geometría es importante, porque permite a los estudiantes, a través de los deslizadores interactuar con el objeto matemático en estudio y así construir sus propios aprendizajes. Todas estas investigaciones tienen en común el estudio de la semejanza de triángulos, corroborando de esta manera, la importancia de estudiar este concepto a nivel secundario.

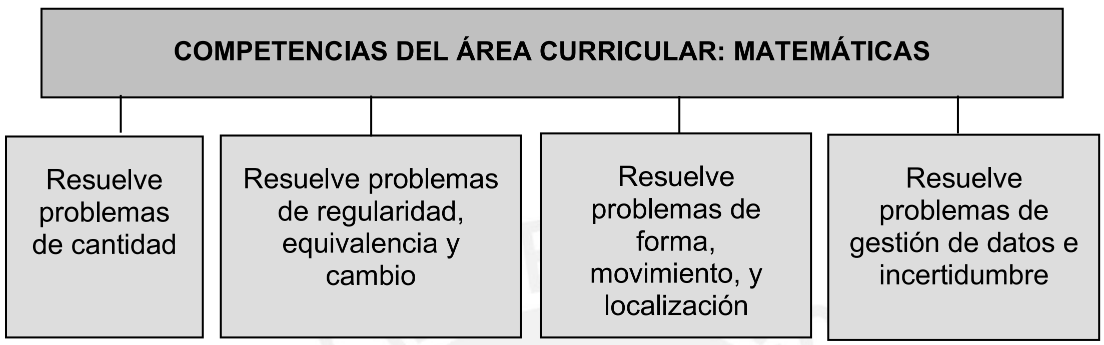
Por otro lado, desde el año 2000, el Ministerio de Educación ha realizado cambios curriculares para mejorar el sistema educativo del país a través de diversos documentos curriculares siendo el actual, el basado en el desarrollo de competencias. En los currículos escolares, el concepto de semejanza constituye uno de los temas de gran relevancia en el ámbito geométrico, tal como lo indica en el Perú, el documento oficial dado por el Ministerio de Educación denominado Currículo Nacional de la Educación Básica 2016. Este documento contiene los aprendizajes que se espera que los estudiantes logren durante su formación básica, en concordancia con los fines y principios de la educación peruana, los objetivos de la educación básica y el proyecto Educativo Nacional. El currículo Nacional define dos conceptos claves para sustentar el perfil de los estudiantes egresados que son: Competencia y capacidades.

El currículo Nacional (2016) señala que la “competencia se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético. Ser competente supone comprender la situación que se debe afrontar y evaluar las posibilidades que se tiene para resolverla” (p.29). En relación a las capacidades el currículo Nacional (2016), señala que las “capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada” (p.30).

Las áreas curriculares son una forma de integración articuladora e integradora de las competencias que se busca desarrollar en los estudiantes y de las experiencias de aprendizaje afines. El área de matemáticas posee cuatro competencias que se muestra en la figura 1.

Figura 1

Competencias del área curricular de Matemáticas



Nota: Elaboración propia basada en el D.C.N. de la Educación Básica Regular (2016)

La educación secundaria pertenece al tercer nivel de la Educación Básica Regular y tiene una duración de 5 años. El nivel de educación secundaria atiende los ciclos VI (estudiantes de primero y segundo grado de Educación secundaria) y VII (estudiantes del tercer, cuarto y quinto grado de Educación secundaria).

El concepto semejanza de triángulos se encuentra en el área de matemáticas y pertenece a la competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, la cual combina cuatro capacidades que son: modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio y argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.

En la propuesta del Currículo Nacional (2016), en relación con el concepto semejanza de triángulos, se estudia desde primero de secundaria hasta quinto de secundaria; sin embargo, su aprendizaje se inicia desde primaria con temas afines como la enseñanza de la proporcionalidad directa, regla de tres simple, razones y proporciones, porcentajes, ampliación y reducción de figuras geométricas planas. También es bueno señalar que el concepto de semejanza de triángulos, forma parte del plan de estudios de los centros preuniversitarios, y de cursos de Geometría de los primeros ciclos que se imparten en facultades de Arquitectura e Ingeniería, puesto que desarrollan temas como: uso de la regla y el compás, la homotecia, las interpolaciones, escalas de planos, etc.

Los estándares de aprendizaje de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” está dado por ciclos y para nuestra investigación, nos enfocaremos a los ciclos VI y VII que corresponden a la educación secundaria. La descripción del nivel esperado de la competencia, en los estudiantes de primero y segundo de secundaria que corresponde al ciclo VI, es la que se muestra en la figura 2.

Figura 2

Competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", ciclo VI

649-2016 -MINEDU

Desempeños por grado

Competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización" CICLO VI
Cuando el estudiante resuelve problemas de forma, movimiento y localización, combina las siguientes capacidades: • Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones. • Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas. • Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.
Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VI Resuelve problemas en los que modela características de objetos mediante prismas, pirámides y polígonos, sus elementos y propiedades, y la semejanza y congruencia de formas geométricas; así como la ubicación y movimiento mediante coordenadas en el plano cartesiano, mapas y planos a escala, y transformaciones. Expresa su comprensión de las formas congruentes y semejantes, la relación entre una forma geométrica y sus diferentes perspectivas; usando dibujos y construcciones. Clasifica prismas, pirámides y polígonos, según sus propiedades. Selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen de formas geométricas en unidades convencionales y para construir formas geométricas a escala. Plantea afirmaciones sobre la semejanza y congruencia de formas, relaciones entre áreas de formas geométricas; las justifica mediante ejemplos y propiedades geométricas.

Nota: Tomado del Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (2016, p.164)

La descripción del nivel esperado de la competencia, en los estudiantes de tercero, cuarto y quinto de secundaria que corresponde al ciclo VII, es la que se muestra en la figura 3.

Figura 3

Competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", ciclo VII

649- 2016 -MINEDU

Competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización" CICLO VII
Cuando el estudiante resuelve problemas de forma, movimiento y localización, combina las siguientes capacidades: • Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones. • Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas. • Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.
Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VII Resuelve problemas en los que modela características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones, la distinción entre trasformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos, y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás. Clasifica polígonos y cuerpos geométricos según sus propiedades, reconociendo la inclusión de una clase en otra. Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas, así como construir mapas a escala, homotecias e isometrías. Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas.

Nota: Tomado del Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (2016, p.164)

El formato presentado en las figuras 9 y 10 pertenecen al formato presentado por MINEDU en febrero del 2016, pero luego para el mes de abril, se cambió el formato en el cual se indica además el nivel de destacado.

También creemos importante revisar el documento *Principles and Standards for School Mathematics 2000,* del National Council of Teacher of Mathematics (NCTM), traducido por la *Sociedad Andaluza de Matemáticas de Educación matemática Thales* (2000). En este documento podemos encontrar las expectativas que deberían desarrollar estudiantes entre la Etapa 6-8 (correspondiente a la ESO de España) relacionadas a la semejanza de figuras y en consecuencia a la semejanza de triángulos, tal como se observa en la tabla 1.

Tabla 1

Expectativas a desarrollar por los estudiantes

Relacionado a	Expectativas a desarrollar por los estudiantes
Analizar características y propiedades de las figuras geométricas y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas	- Comprender las relaciones entre los ángulos, las longitudes de los lados, los perímetros, las áreas y los volúmenes de objetos semejantes. - Comprender y criticar argumentos inductivos y deductivos concernientes a conceptos y relaciones geométricas como la semejanza.
Aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas	- Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones como escalas. - Examinar la semejanza usando transformaciones.
Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización para resolver problemas	- Reconocer y aplicar ideas y relaciones geométricas en campos ajenos a la clase de matemáticas, como el arte, las ciencias y la vida diaria.

Como podemos observar, el concepto de semejanza de triángulos es amplio, ya que no solo involucra conceptos básicos como la proporcionalidad directa, fracciones, porcentajes, regla de tres, etc. sino que además es base para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos como las relaciones métricas en el triángulo rectángulo, en el triángulo oblicuángulo y en la circunferencia, las relaciones de áreas y volúmenes de figuras semejantes, la homotecia y el rectángulo áureo (relacionado a la belleza y el arte). Por lo tanto, por el sinnúmero de aplicaciones que en torno a él se dan en la vida diaria, y aplicaciones como en la escala de planos, pensamos que el aprendizaje de este concepto es fundamental para el desarrollo académico de los estudiantes, debido a que les permite demostrar ciertas habilidades como: interpretar, generalizar y deducir en sus diferentes presentaciones, desarrollando de esta manera su pensamiento lógico.

Por lo anterior, considerando la importancia del aprendizaje del concepto semejanza de triángulos, señalados por diversas investigaciones en la sección anterior y documentos oficiales del Perú y del extranjero, en el presente trabajo de investigación proponemos analizar la movilización del concepto de la semejanza de triángulos en estudiantes de cuarto de secundaria por medio de las representaciones semióticas y en algunos casos con el uso del GeoGebra.

Lo anterior, nos lleva a hacernos nuestra pregunta de investigación y los objetivos que buscamos de la misma, las cuales describimos a continuación.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En esta investigación nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de la semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas?

Para responder esta pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar cómo estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de la semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas.

Con el propósito de lograr este objetivo general, planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los tipos de transformaciones semióticas que realizan estudiantes de cuarto de secundaria, en una secuencia didáctica que moviliza el concepto de semejanza de triángulos.
- Analizar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que realizan estudiantes de cuarto de secundaria al movilizar, en la secuencia didáctica, el concepto de semejanza de triángulos.
- Analizar las modificaciones en la aprehensión operatoria, que sufre una figura cuando los estudiantes movilizan el concepto de la semejanza de triángulos.

Para lograr estos objetivos elaboramos una secuencia de tres actividades tomando como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica la que describimos a continuación.

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En esta parte presentamos como marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y luego mostramos a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), como metodología de nuestra investigación.

2.1 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Esta investigación toma como base la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1995), psicólogo y filósofo de formación y profesor emérito de la Universidad del Litoral Costa de Ópalo en Dunkerque, Francia. Realizó estudios relativos a la Psicología Cognitiva en el Instituto de Investigación Matemática (IREM) de Estrasburgo en Francia entre los años 1970 a 1995. La primera presentación sistemática de su teoría tuvo lugar en su obra: La *semiosis et pensée humaine*.

> Sobre la teoría de Registros de Representación Semiótica, Duval (2004a) señala:
> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica,…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas, pues, estarían subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación (Duval, 2004a, p.14).

Según Duval (2012a), los objetos matemáticos no son accesibles para el ser humano, razón por la cual es necesario hacer uso de diversas representaciones para entenderlos, sin llegar a confundirlos con el objeto matemático en estudio. De acuerdo con el autor existen dos tipos de representaciones:

- Representación mental: Son un conjunto de concepciones o imágenes mentales que tiene un sujeto acerca de un objeto. Son concepciones personales, de carácter interno que no puede ser visualizada por otro individuo.

- Representación semiótica: Son producciones constituidas por el empleo de signos pertenecientes a un sistema de representación. El investigador denomina representación semiótica a aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.) y que son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles a los demás.

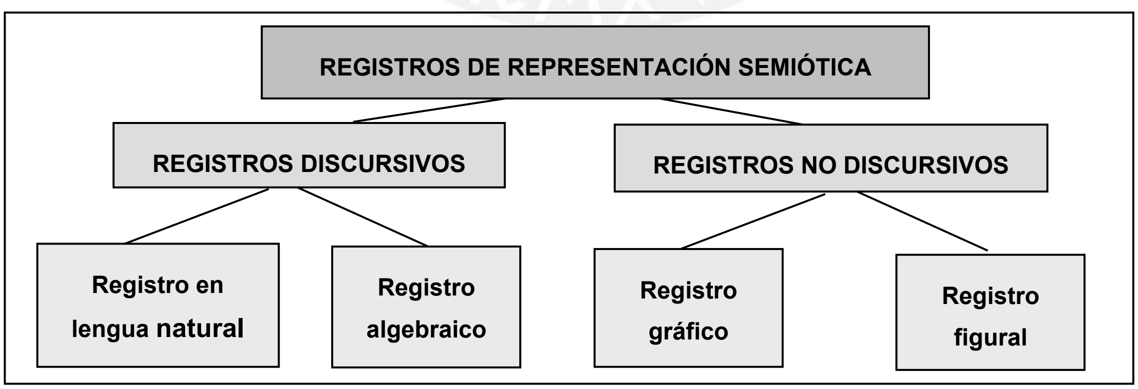
En la teoría de registros de representación semiótica, a la actividad ligada a la producción de una representación de los objetos matemáticos se le llama semiosis, mientras que a la aprehensión conceptual de estos objetos matemáticos se le denota como noesis; y en consecuencia, ambas están estrechamente vinculadas porque no hay noesis sin semiosis.

Registros de Representación Semiótica

Para Duval (2004b) los Registros de Representación Semiótica se clasifican en registros discursivos y no discursivos. Los primeros se presentan en forma verbal y algebraica y los segundos se presentan en forma gráfica y figural. A continuación, en la figura 4, mostramos la clasificación de los principales registros de Representación semiótica.

Figura 4

Clasificación de Registros de Representación Semiótica



Nota: Adaptado de Duval (2004b, p.52)

Duval (2004b) señala que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es fundamental y que cada registro de representación ayuda a entender al objeto matemático de manera parcial, por lo que son necesarias sus diversas representaciones y el saber transitar de una a otra.

Tipos de Registros de Representación Semiótica

Para Duval (2011) existen cuatro tipos de registros, los cuales se agrupan en registros de representación discursiva y no discursiva como ya se señaló líneas atrás. A continuación, presentamos los cuatro tipos de registros.

Registro en lengua natural: Es un tipo de registro discursivo mediante el cual de manera espontánea se comunica de forma textual para enunciar un teorema, una definición, describir, explicar, proponer, designar y argumentar sobre el objeto matemático en estudio. En nuestra investigación se presenta por ejemplo cuando enunciamos los problemas contextualizados sin gráfico.

Registro algebraico: Es un tipo de registro discursivo que hace uso de alguna expresión algebraica a través de símbolos, letras, que señalan características particulares del objeto en estudio, las cuales luego, permitirán realizar generalizaciones y modelizaciones. En nuestra investigación se presenta cuando comparamos elementos homólogos de dos triángulos semejantes a través de una ecuación.

Registro gráfico: Es un tipo de registro no discursivo; que hace uso de un gráfico para representar a un objeto matemático. En nuestra investigación no consideramos a este registro puesto que no haremos uso del plano cartesiano.

Registro figural: es un tipo de registro no discursivo, representan formas, estructuras y organización entre ellas; es decir está estrechamente relacionado con la percepción visual y de un discurso teórico y simbólico. En nuestra investigación utilizaremos la noción de registro figural cuando trazamos figuras geométricas con lápiz y papel o en un ambiente de geometría dinámica como es el GeoGebra.

En cuanto al GeoGebra, su importancia radica en su dinámica, puesto que permite visualizar en tiempo real diferentes posiciones que toma un objeto; tal como lo señala Duval (2004) cuando dice que un software de geometría dinámica permite acelerar tratamientos de una figura, mostrando de forma más rápida y precisa la solución de un problema, debido a que las figuras toman inmediatamente diferentes posiciones, mucho más de lo que podamos obtener a mano alzada.

Debido a la importancia de este registro figural en nuestro trabajo de investigación, realizaremos un estudio más detallado de él, más adelante, describiendo las diferentes aprehensiones de una figura y las diferentes modificaciones que existen dentro de la aprehensión operatoria.

A continuación, mostramos en la figura 5, algunos de los tipos de registros de representación semiótica que usaremos en esta investigación.

Figura 5

Tipos de Registros de Representación Semiótica

Registro en lengua natural

Semejanza de triángulos

Dos triángulos semejantes tienen ángulos iguales y lados homólogos proporcionales. Recíprocamente, si dos triángulos cumplen una de las tres condiciones a seguir entonces ellos son semejantes:

1) Tienen lados proporcionales
2) Tienen ángulos iguales
3) Tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

Registro algebraico

$$\frac{x-1}{8} = \frac{7-x}{4}$$

$$4x - 4 = 56 - 8x$$

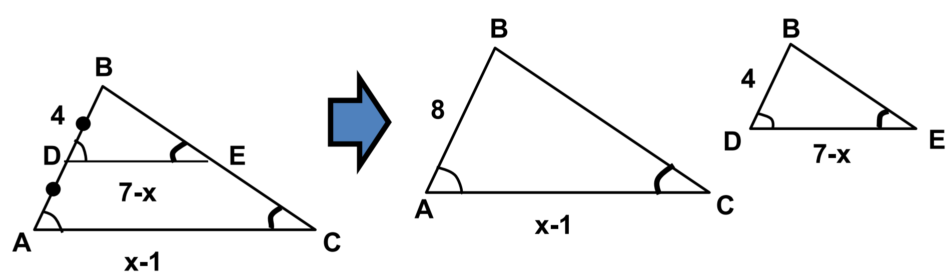
$$4x + 8x = 56 + 4$$

$$12x = 60$$

$$x = \frac{60}{12}$$

$$x = 5$$

Registro figural

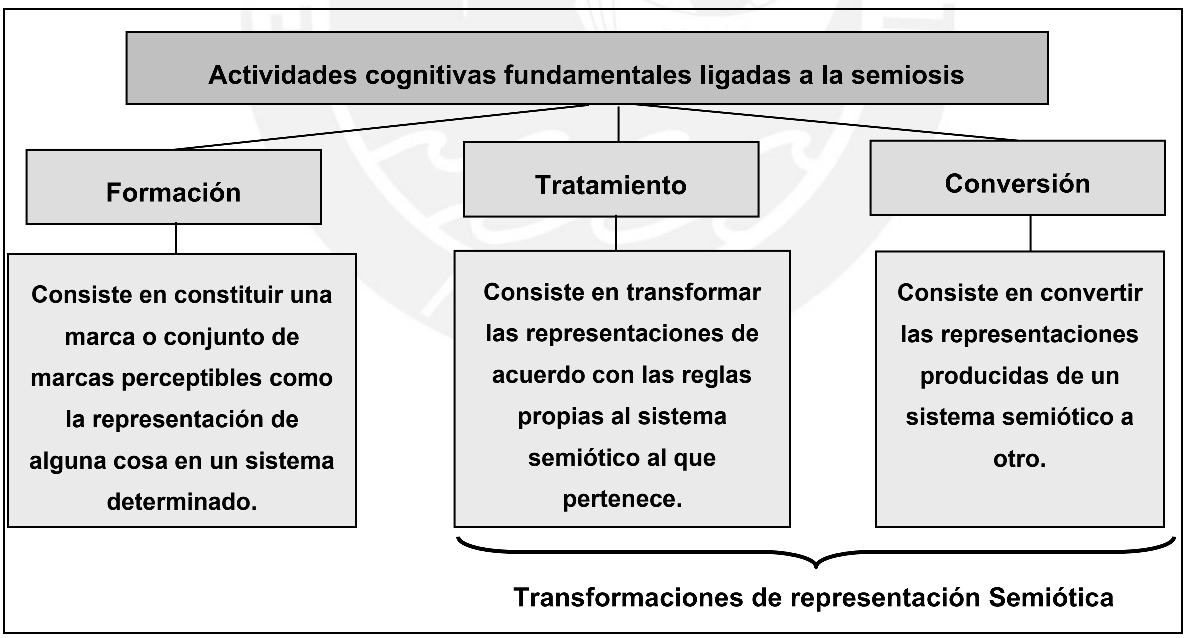


Duval (1995) afirma que en general, la enseñanza de la matemática se efectúa como si el pasaje entre los distintos registros semióticos fuera natural y se debe tener en cuenta que la coordinación de varios registros de representación semiótica resulta primordial para la asimilación conceptual de un objeto (en este caso, figuras geométricas como triángulos) y que el objeto no debe ser confundido con sus representaciones.

Además, Duval (2004), señala que un sistema semiótico, se comporta con reglas más o menos explícitas, que permiten combinar signos entre sí de tal forma que la asociación formada tenga un sentido. De esta manera, un sistema semiótico pasa a ser un registro de representación semiótica cuando cumple con las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la Semiósis que son: formación, tratamiento y conversión, tal como se muestra en la figura 6.

Figura 6

Actividades cognitivas fundamentales ligadas a la Semiosis



Nota: Adaptado de Duval (2004b, p.53)

Como mencionamos anteriormente, los Registros de Representación Semiótica pueden conllevar a dos tipos de transformación: tratamientos y conversiones. Es así, que la transformación de la representación semiótica dentro del mismo registro donde se ha formado constituye lo que se denomina *tratamiento* y por lo tanto se trata de una transformación interna y la función que cumple es la de ganar información, por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando los estudiantes hacen uso de la geometría dinámica (GeoGebra) para visualizar dentro de él diferentes casos particulares de una semejanza de triángulos, es decir, cuando la constante de proporcionalidad cambia gracias a la herramienta “arrastre” o del deslizador del GeoGebra.

Por otro lado, el investigador afirma que una *conversión* es el cambio de un registro de representación semiótica en otra, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial; pero que, al mismo tiempo, da otras significaciones al objeto representado. Se hace una conversión cuando, por ejemplo, los estudiantes luego de analizar el problema en el registro figural, son capaces de convertirlo en el registro algebraico o cuando de un lenguaje natural (enunciado de un problema) lo convierten en un registro figural; en ambos casos, los estudiantes trabajan ahora, en un registro distinto al que ellos estuvieron trabajando inicialmente.

De acuerdo con Duval (2012) quien afirma que el tránsito entre los diferentes Registros de Representación Semiótica favorece las actividades cognitivas, creemos que, la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de triángulos no se puede limitar al trabajo en uno solo de estos registros, sino que por el contrario se debe de transitar en por lo menos en dos tipos de representación. Por ello, en nuestro trabajo de investigación proponemos una secuencia de tres actividades que serán desarrollados por los estudiantes para lograr movilizar el concepto de semejanza de triángulos por medio de las diferentes representaciones semióticas. De los tres registros que usaremos, queremos resaltar al registro figural que permite visualizar a los problemas de una manera distinta al observar cambios en tiempo real a través del uso de herramientas como el arrastre y el deslizador que posee el GeoGebra.

El Registro Figural

En los últimos años el uso de tecnologías en los procesos educativos ha generado discusión y un replanteamiento de las teorías y estrategias que se deben seguir en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En principio, trae implicaciones en términos del papel que juegan tanto el estudiante como el profesor en el aula. La existencia de la computadora y de los softwares de representaciones dinámicas como el GeoGebra, plantea a los docentes el reto de diseñar actividades que logren un aprendizaje significativo en donde el estudiante sea partícipe activo de su aprendizaje. El registro figural lo obtendremos en esta investigación, cuando usemos un lápiz y lo representemos en un papel o cuando usemos un software de Geometría dinámica como el GeoGebra. A este registro obtenido del GeoGebra lo denominaremos registro figural dinámico, tal como lo señala Salazar (2009), quien afirma que:

> Con base en el registro creado por Duval (1995) y con el surgimiento de la geometría dinámica, el registro figural dinámico debe ser considerado. Entendemos como registro figural dinámico al registro figural utilizando ambientes de geometría dinámica (traducción nuestra. p. 86).

De acuerdo con Duval (1995), el registro figural puede mostrar, de manera más rápida y clara la solución de un problema, actividad, tarea, etc., de ahí la importancia de las figuras geométricas. Para Duval (2004), las figuras poseen un rol importante en la comprensión y resolución de problemas de Geometría, y señala lo siguiente:

> Es común admitir que las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en Geometría; dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten explorar, anticipar…permiten, en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración aquella conducta que Pierce describió bajo el término de “abducción”, consiste en limitar de entrada la clase de hipótesis o de alternativas que han de considerarse (…) (p.161).

Duval (1995), afirma que en la enseñanza de la geometría se debe tener en cuenta las cuatro diferentes aprehensiones cognitivas a las cuales una figura da a lugar; cada una independiente de las otras. Estas aprehensiones cognitivas son las siguientes:

Aprehensión Secuencial: Es la aprehensión que corresponde a la secuencia ordenada de la construcción de una figura geométrica.

Duval (1994) afirma que:

> la aprehensión secuencial se trata del orden con el cual se construye una figura, esta secuencia ordenada no solo depende de las propiedades matemáticas que tiene la figura, sino que además depende de las limitaciones técnicas de los instrumentos utilizados (comandos del menú de software, la regla, etc.) de ahí un tratamiento específico ordenado por este requisito; para tener éxito en la construcción, deben respetarse las asociaciones iniciales entre las propiedades matemáticas y las posibilidades técnicas del instrumento" (p.126, traducción nuestra).

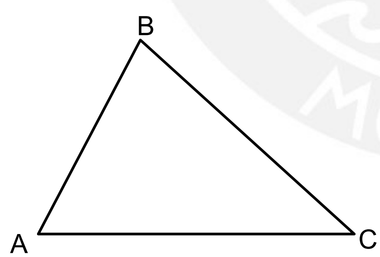
A continuación, se muestra en la figura 7, la representación figural luego de seguir una secuencia constructiva dada por el enunciado.

Figura 7

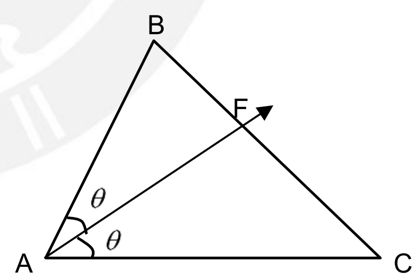
Aprehensión secuencial de la construcción de un registro figural

En un triángulo acutángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ ($F \in \overline{BC}$) y luego por F se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que corta en R al lado $\overline{AB}$. Calcule FR, si $AB = 8cm$ y $AC = 12cm$.

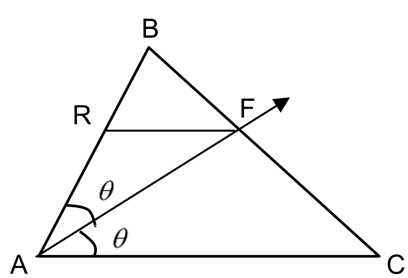
1. En un triángulo acutángulo ABC (triángulo de ángulos agudos)



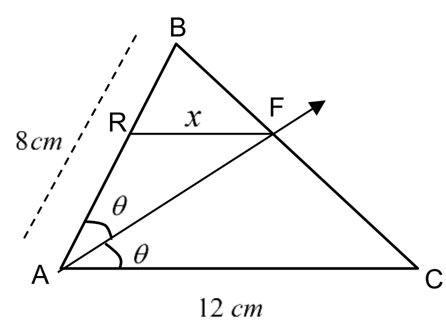
2. Se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ ($F \in \overline{BC}$)



3. Luego por F se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que corta en R al lado $\overline{AB}$



4. Calcule FR, si $AB = 8cm$ y $AC = 12cm$



Aprehensión Perceptiva: Es la aprehensión que da a lugar a la observación de la figura en forma automática e independiente del enunciado.

Duval (1994) afirma que:

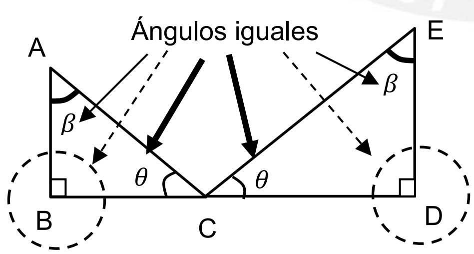
> Hay varias formas de aprehender una figura en el contexto de un enfoque de geometría. La más inmediata es la percepción perceptiva, es decir lo que identifica o reconoce, de inmediato, una forma o un objeto, ya sea en un plano o en el espacio (p.123, traducción nuestra).

Duval (1994) señala también que la percepción perceptiva tiene una función epistemológica de identificar objetos en dos y tres dimensiones y lo realiza mediante tratamientos cognitivos realizados automáticamente y, por lo tanto, inconscientemente. Es por eso que podemos reconocer a primera vista la forma de una figura, o las que la componen.

A continuación, se muestra un ejemplo de percepción de triángulos rectángulos semejantes, a partir del reconocimiento de la igual medida que tienen sus ángulos internos correspondientes, tal como se muestra en la figura 8.

Figura 8

Aprehensión perceptiva de dos triángulos rectángulos semejantes

Objeto matemático representado en un plano	**Percepción**
	Los triángulos rectángulos ABC y EDC son semejantes, porque tienen los ángulos internos de igual medida

Aprehensión Discursiva: Es aquella aprehensión que asocia una figura con una afirmación matemática (definiciones, teoremas, axiomas, etc.). Duval (1994) señala que esta aprehensión está sujeta a las propiedades relacionadas a una hipótesis, por lo tanto, en este caso es parte del discurso teórico.

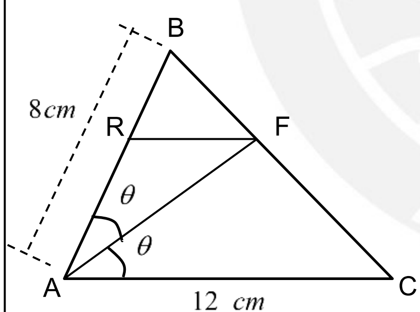
Duval (1994) afirma que:

> La aprehensión discursiva de una figura corresponde a una explicación de las otras propiedades matemáticas de una figura que las indicadas por la leyenda o por las hipótesis. Esta explicación es de naturaleza deductiva. La función epistemológica de la aprehensión discursiva es la demostración. Se notará que los ejercicios elementales de aplicación de temas o definiciones se basan solo en esta aprehensión discursiva. (p.124, traducción nuestra).

A continuación, en la figura 9 se muestra la aprehensión discursiva para la resolución de un problema donde se moviliza el concepto de semejanza de triángulos.

Figura 9

Aprehensión discursiva de un problema de semejanza de triángulos

Objeto matemático	**Discurso**
	• Dado que $\overline{RF}//\overline{AC}$, se cumple: $m\angle BRF = m\angle BAC = 2\theta$ (por ser ángulos correspondientes) $m\angle BFR = m\angle BCA$ (por ser ángulos correspondientes) $m\angle ABC = m\angle RBF$ (por ser ángulos formados por los mismos rayos) • De los triángulos ABC y RBF, observamos que: $m\angle BRF = m\angle BAC,\ m\angle BFR = m\angle BCA$ y $m\angle ABC = m\angle RBF$, en consecuencia: El $\Delta ABC \sim \Delta RBF$ (postulado AAA) • $m\angle RFA = m\angle CAF = \theta$ (por ser ángulos alternos internos) Como $m\angle RFA = m\angle RAF = \theta$, el triángulo ARF es isósceles • Dado que el ΔARF es isósceles, se cumple: $RF = AR = x$ • Como $AB = 8\ y\ AR = RF$, entonces $RB = 8 - RF$

Duval (1995), señala también, que este tipo de aprehensión está muy relacionada a una doble referencia: por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otro lado, a una axiomática local.

Aprehensión Operatoria: Se trata de un tipo de aprehensión centrada en las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras, distinguiéndose tres tipos que son: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional. Al respecto Duval (2004) menciona lo siguiente:

> Toda figura puede modificarse de varias maneras. Se pueden separar las unidades figurales de dimensión 2 que la componen en otras unidades figurales, homogéneas o heterogéneas, también de dimensión 2, y estas pueden recombinarse para modificar el contorno global de la figura. Se puede también agrandar o achicar la figura, desplazarla por traslación o rotación, etc. (p.164).

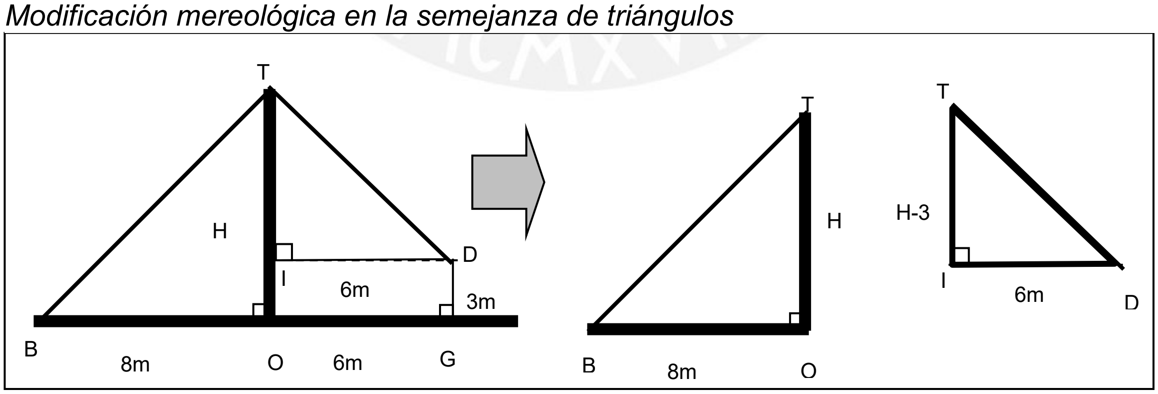
Las distintas formas de modificar una figura son:

- **La modificación mereológica:** Esta se da cuando la figura se puede dividir en varias sub-figuras, estableciendo una relación parte–todo, que al reagruparlas o recombinarlas se obtiene una figura con un contorno global diferente a la inicial. Según Duval (2004), "La reconfiguración es la operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra (…) es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras" (p.165).

La figura 10, nos muestra un tratamiento dentro del registro figural, donde se realiza la modificación mereológica del polígono BTDIO de dimensión dos, para transformarlo en los triángulos rectángulos BOT y TID también de dimensión dos y así poder determinar el par de triángulos semejantes.

Figura 10

Modificación mereológica en la semejanza de triángulos



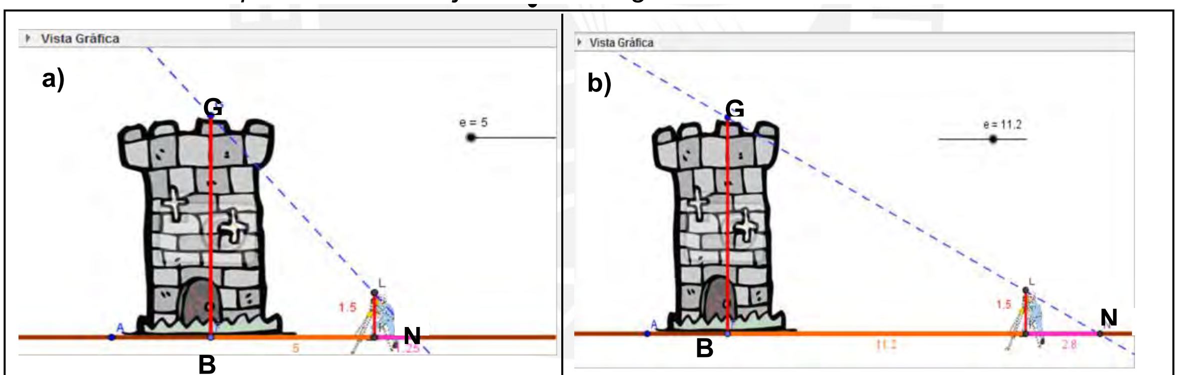
Esta operación es importante porque permite individualizar los triángulos rectángulos semejantes, realizándose una reconfiguración e identificando más fácilmente los ángulos correspondientes y sus elementos homólogos.

- **La modificación óptica:** Esto se da cuando se agranda o disminuye las dimensiones de una figura, o se deforma una figura inicial mediante un juego de lentes y espejos. De acuerdo con Duval (1994) la modificación óptica consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial conservando la forma inicial ***o alterarla***. Duval alude lo anterior al trabajo con lápiz y papel, y no usando un software de geometría dinámica.

En la figura 11, mostramos a través del GeoGebra dos registros figurales que representan a un triángulo rectángulo GBN, pero que son diferentes debido a la inclinación del segmento $\overline{GN}$. El triángulo rectángulo GBN de la parte a), se ha deformado como consecuencia del arrastre del deslizador **e**, convirtiéndolo en el triángulo rectángulo GBN de la parte b), por lo que nosotros consideramos una **modificación óptica usando tecnología.**

Figura 11

Modificación óptica en la semejanza de triángulos



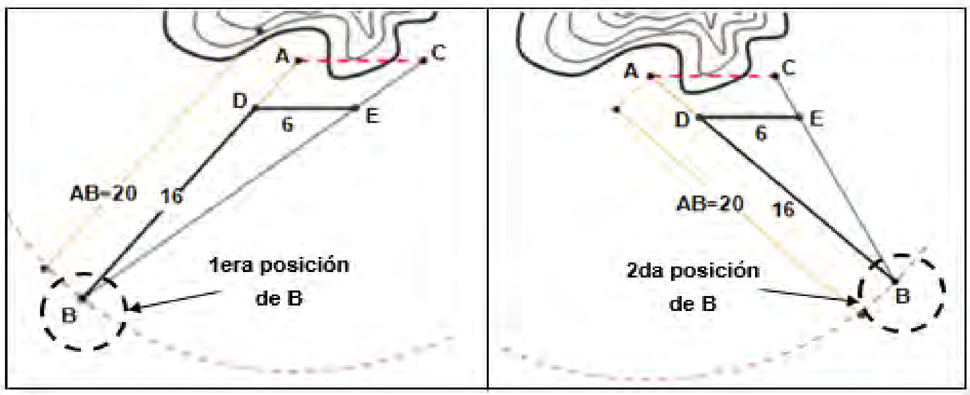
Posición del observador a 5 metros de la base de la torre.	Posición del observador a 11.2 metros de la base de la torre.

- **La modificación posicional:** Según Duval (1995), señala que este tipo de aprehensión operatoria consiste en el desplazamiento de una figura en relación a un elemento referencial, es decir; cuando se realiza movimientos de rotación, traslación y simetría.

En la figura 12, se observa el cambio de posición del punto B (rotación con respecto al punto A), manteniendo las condiciones iniciales de la actividad, como longitudes y paralelismo.

Figura 12

Modificación posicional en la semejanza de triángulos



En nuestra investigación consideramos las diferentes transformaciones de representación semiótica (tratamiento y conversión), así como los diferentes tipos de aprehensión (secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva).

2.2 Metodología y procedimientos metodológicos

Como metodología de nuestra investigación tomaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), que surgió como metodología de investigación dentro de la Didáctica de las matemáticas en Francia, a principios de los años ochenta, como consecuencia de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. Se dice que el nombre surgió de la analogía entre el trabajo didáctico con el trabajo que realiza un ingeniero.

Según Artigue (1995):

> (…) para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar

> prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o puede hacerse cargo (p. 33).

La Ingeniería Didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las resoluciones de situaciones problemáticas en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Asimismo, está basada en la confrontación entre lo que se planificó y lo que realmente sucedió en clase y, consta de cuatro fases que explicaremos a continuación:

1. **Primera fase: Análisis preliminares.**

Se refiere a los conocimientos teóricos didácticos en general sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema de investigación.

Según Artigue (1995):

> En una investigación en Ingeniería Didáctica la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares (p.38).

Artigue (1995), señala que en los análisis preliminares se debe tener en cuenta: el análisis epistemológico, por lo que nosotros tomaremos en cuenta la evolución histórica del concepto matemático semejanza de triángulos, el análisis cognitivo, donde haremos una revisión de los saberes previos que necesita el estudiante dominar para entender la semejanza de triángulos, analizaremos las concepciones de los estudiantes y las dificultades que determinan su evolución y finalmente el análisis didáctico, donde revisaremos todo aquello relacionado con la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de triángulos, es decir, analizaremos la forma como se presenta en aula la enseñanza de la semejanza de triángulos y el tratamiento de este concepto en los textos de cuarto de secundaria.

2. Segunda fase: Concepción y análisis *a priori.*

De acuerdo con la investigadora, esta fase constituye el diseño de la Ingeniería, la cual va actuar sobre un determinado número de variables del sistema: variables macro didácticas o globales o variables micro didácticas o locales (organización y la gestión de la secuencia de clase). En nuestra investigación utilizamos la información obtenida de los análisis preliminares, ya que elaboraremos una secuencia de tres actividades basadas en problemas, que permitan movilizar el concepto de semejanza de triángulos por medio de las representaciones semióticas usando el lápiz, el papel y en algunos casos el GeoGebra.

El análisis *a priori* es el momento donde el diseñador de la situación didáctica, antes de la clase, explicita supuestos referidos a: los procesos de enseñanza aprendizaje que se generarán en la situación y los resultados que desea producir: los probables y los seguros, en nuestro caso es referente a las posibles respuestas de los estudiantes con respecto a las actividades propuestas sobre semejanza de triángulos.

3. Tercera fase: Experimentación.

Según Artigue (1995), la experimentación es el momento en el cual se ejecuta lo planificado en la Ingeniería, en donde el investigador como los sujetos de investigación, interactúan y se aplican los instrumentos diseñados. En esta fase, los estudiantes desarrollan las actividades planificadas y el investigador observa las intervenciones tanto del docente como de los estudiantes, para luego registrarlos y describirlos. En nuestra investigación, el docente también es el investigador y recoge la información a través de fichas donde se encuentran las actividades.

4. Cuarta fase: Análisis a *posteriori* y validación

Esta última fase de la ingeniería didáctica, se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación en donde se observa las secuencias de enseñanza y se analizará lo producido por los estudiantes en las actividades diseñadas y propuestas. Luego, se procede a la validación que consiste en la confrontación de los dos análisis, el a *priori* y a *posteriori.*

En nuestra investigación, esta fase se manifestará cuando realicemos el análisis de lo que hicieron los estudiantes durante la aplicación de actividades para movilizar el concepto de semejanza, a través del contraste entre el análisis a priori y a posteriori.

A continuación, presentamos el capítulo III; en donde se abordan aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y nociones del concepto de semejanza de triángulos.

CAPÍTULO III: LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En esta parte de la investigación se analizará la evolución histórica del concepto semejanza de triángulos, su definición actual y cómo lo desarrollan en los textos de consulta del cuarto año de secundaria para su enseñanza - aprendizaje.

3.1 Evolución histórica

Collette (1986) en su libro Historia de las matemáticas, menciona los primeros indicios de la semejanza, se encuentra en los babilónicos. Los geómetras babilónicos conocen que "los lados correspondientes de dos triángulos rectos semejantes son proporcionales" y que "la perpendicular trazada desde el vértice de un triángulo isósceles divide a la base de este triángulo en dos partes iguales.

Por su parte los egipcios se caracterizan por resolver problemas de geometría haciendo referencia a fórmulas de medición necesarias para evaluar el área de figuras planas y ciertos volúmenes, sin embargo, parece ser que también estaban en condiciones de comprender la semejanza y la proporcionalidad. En el siglo XII a. C., dos figuras similares, aunque de dimensiones diferentes, fueron dibujadas en las paredes de la habitación donde se encuentra la tumba de Seti I. Según Collete (1986), el conocimiento más importante de la geometría egipcia es el que se encuentra en el papiro de Moscú (problema 14):

> Si se os dice: una pirámide truncada de h=6 y de base 4 y 2; debéis tomar el cuadrado de 4 que es 16, después doblar 4 para obtener 8, tomar el cuadrado de 2 que es 4, sumar 16, 8 y 4 para obtener 28; calcular 1/3 de 6 que es 2, multiplicar 28 por 2 que da 56; véis, es 56 (p. 59).

Es evidente que el escritor de dicho papiro conocía la fórmula: $V = \frac{h}{3}[a^2 + b^2 + ab]$, que correspondía al volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada. Se han dado varias explicaciones de qué método emplearon para llegar a dicha fórmula. Los papiros existentes nos proporcionan poca información sobre la geometría y las propiedades matemáticas de la pirámide de base cuadrada, pero si se sabe con certeza que los autores de estos documentos históricos sabían calcular el volumen de una pirámide. Los problemas 56, 57, 58, 59 y 60 de otro papiro denominado de Rhind se refieren al cálculo de la “seqt” de diversas pirámides rectas, palabra que se usaba para designar la razón entre la base horizontal de la pirámide y su altura. El valor de la “seqt” era importante para los constructores de pirámides ya que debían mantener constante la “seqt” de los sucesivos bloques de piedra.

El autor considera que las “seqt” calculadas en los problemas de pirámides contenidos en los papiros de Rhind y Moscú son las cotangentes del ángulo formado por las caras de las pirámides; ante este conocimiento podemos sospechar que tenían un conocimiento de la proporcionalidad y quizás de la semejanza.

Con respecto a los griegos, se sabe que el fundador de la geometría griega fue Tales de Mileto, y Collete (1986) menciona lo siguiente:

> La historia más antigua de las matemáticas griegas fue escrita en el siglo IV a.C. por un discípulo de Aristóteles, Eudemo. Un breve extracto de esta obra perdida aparece en el Comentario sobre el libro I de los Elementos de Euclides, escrito por Proclo en el siglo V d.C. Gracias a él, podemos saber, entre otras cosas, que el fundador de las matemáticas griegas, y más exactamente el fundador de la geometría griega, fue Tales de Mileto […] Eudemo habla de Tales como de alguien quien inventó cosas y mostró a sus sucesores la vía para establecer los principios de algunas de ellas, unas universales y otras referidas a algo concreto (p.66)

Es con los griegos donde se tiene una información más detallada de la semejanza, concepto de estudio en esta investigación y más específicamente con Thales de Mileto. A Thales se le atribuye generalmente la proposición siguiente relacionada a la semejanza: “Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales respectivamente a dos ángulos y un lado de otro, entonces los triángulos son semejantes”.

A Thales también se le atribuye soluciones a problemas como medir la distancia de la orilla a un barco que se encuentra en el mar y hallar la altura de una pirámide con la ayuda de un bastón vertical.

El autor también menciona a Pitágoras que vivió en el siglo VI, como el que transformó, estudiando los principios de Thales de una manera más atractiva y examinando sus teoremas bajo el prisma de la inteligencia, la filosofía (geometría) en una doctrina liberal accesible a todos y se le atribuye la teoría de las proporciones. Esta teoría numérica de las proporciones era aplicable únicamente a magnitudes conmensurables. En el libro VII de los Elementos de Euclides encontramos en la definición 20: “Los números son proporcionales, si el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o en las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto”. Por su parte Nicómaco enumera las diversas razones numéricas: razones múltiples (doble, triple y razones submúltiplo).

Durante el periodo que separa a Pitágoras de Platón (de 500 a.C. a 400 a.C.) se puede distinguir seis problemas importantes tratados por los griegos, entre ellos:

- La de la fundación sistemática de la geometría plana: teoría de las paralelas, suma de los ángulos de un triángulo, áreas poligonales, teorema de Pitágoras, polígonos regulares, teoría pitagórica de las proporciones; y
- El desarrollo de la teoría de números tal y como se expone en el libro VII de los Elementos.

Luego de Platón, es Eudoxio de Cnido (380 a.C.), que, a pesar de no tener fuentes seguras de su aporte en Geometría, se acepta su contribución por los comentaristas. Proclo afirma que Eudoxo aumentó el número de teoremas generales de geometría y que añadió tres proporciones a las tres ayas conocidas y que, aplicando el método analítico multiplicó los teoremas de las secciones. La “sección” se define generalmente como la división de una línea recta en razones extrema y media (sección áurea). Es decir: Sea $\overline{AB}$ el segmento de recta de longitud y, y P un punto de este segmento con $AP = x$; el segmento está dividido en razones extrema y media si se verifica la igualdad: $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$

Otro matemático famoso es Euclides (338 a.C.), quién escribió numerosas obras siendo la más importante Los Elementos en trece libros, que contienen ideas sobre la teoría de números, el algebra elemental y geometría incluyendo las proporciones y la semejanza. En conjunto, los Elementos son el resultado de la recopilación y la ordenación sistemática de los trabajos anteriores en una sucesión lógica de 465 proposiciones, acompañadas de axiomas, postulados y definiciones.

Por último, Collete (1986) menciona algunos aportes de Eratóstenes y Menelao de Alejandría relacionados al uso de la semejanza de triángulos.

La evolución histórica de la semejanza no queda allí con los griegos; según Lemonidis (1990) en su trabajo de investigación, señala que después de la época griega hubo dos periodos más que involucran la evolución histórica de la semejanza, que son:

- El primero correspondiente a los siglos XVI al XVIII en donde los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de la semejanza. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como muy útil en la resolución de problemas.
- El segundo correspondiente a los siglos XIX y XX que es un periodo de la estructuración y algebrización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (1872) y a la evolución del campo numérico. A partir de aquí, Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de *semejanza*, desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella que creemos que deben tenerse presentes cuando se las considera como objeto de enseñanza:

a**) Relación intrafigural.** Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.

b**) Transformación geométrica vista como útil**. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como muy útil en la resolución de problemas gráficos.

c**) Transformación geométrica como objeto matemático.** Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Nosotros pensamos que para nuestro trabajo de investigación los estudiantes deben conocer aquellos personajes de la historia de la humanidad que están detrás de las fórmulas y conceptos matemáticos que involucran a la semejanza de triángulos, qué los motivó a inventarlos, en qué momento de la historia de la humanidad aparecieron y en respuesta a qué necesidad se originaron. La historia nos dice que la semejanza de triángulos se dio en respuesta a dar solución a problemas de la vida diaria, como por ejemplo cuando los egipcios la usaron en la construcción de las pirámides y/o cuando los griegos la usaron para hallar alturas y distancias.

3.2 Aspectos didácticos

Cuando hablamos de semejanza, la primera noción que tenemos de ella está relacionada con la ampliación y reducción de una figura, pero sin alterar sus proporciones. Los libros en general hablan de triángulos semejantes y luego de polígonos, pero son muy pocos quienes lo extienden a cualquier figura. Por ello partiremos de la definición de semejanza para luego definir la semejanza de triángulos que es el objeto matemático en estudio en esta investigación. La evolución histórica del concepto de semejanza mencionada en el punto anterior nos lleva a la propuesta actual sobre el concepto.

De acuerdo con Escudero (2009), la semejanza como objeto matemático, es una transformación geométrica que cumple una serie de propiedades, definidas y explicitadas en tratados de geometría o matemáticas generales para universitarios. A continuación, mostramos una definición matemática común de la semejanza de los últimos 20 años:

Startus (2003), señala que la semejanza es una transformación del conjunto S de los puntos del plano o espacio tal que, si $A, B\ y\ C$ tienen por imágenes a $A´, B´\ y\ C´$, se cumple que: $\frac{A´B´}{AB} = \frac{A´C´}{AC} = \frac{B´C´}{BC} = k$, siendo k la razón de semejanza.

De aquí hacia adelante tomaremos como referencia el libro Geometría Básica de Verástegui (2003), quien en relación al concepto de semejanza señala lo siguiente: dos figuras $F_1\ y\ F_2$ son semejantes ($F_1 \sim F_2$), si existe una función biyectiva $\sigma: F_1 \rightarrow F_2$ tal que para las distancias entre pares de puntos A y B de F_1 son proporcionales a las distancias entre las imágenes correspondientes $\sigma(A) = A´$ y $\sigma(B) = B´$de F_2, esto es, existe una constante $k \neq 0$ en R, tal que $\frac{AB}{A´B´} = k$. En este caso se dice que σ es una semejanza entre $F_1\ y\ F_2$ de razón o constante de semejanza k y que las figuras F_1 y F_2 tienen la misma forma. Señala, además:

a) Si F_1 y F_2 son figuras congruentes, entonces $F_1\ y\ F_2$ son semejantes de razón 1; es decir, $F_1 \sim F_2$ o toda congruencia es una semejanza de razón 1.
b) Dos triángulos equiláteros, dos cuadrados o, en general, dos polígonos regulares de igual número de lados siempre son semejantes. También dos circunferencias siempre son semejantes.

En general: dos triángulos, dos rectángulos o dos polígonos de “n ” lados, no siempre son semejantes.

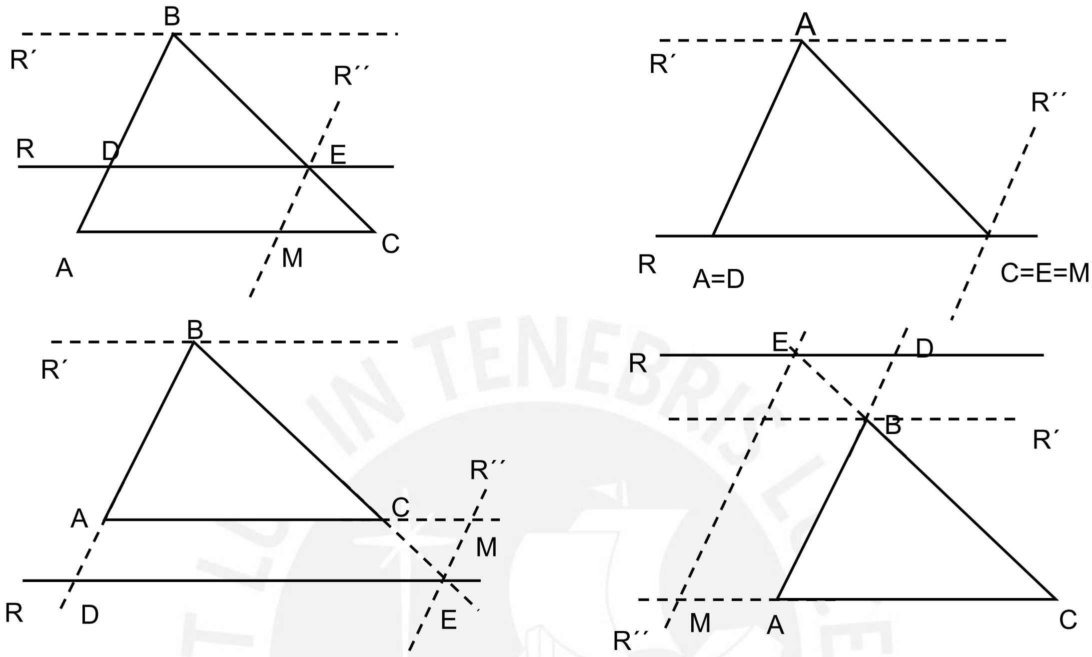
De acuerdo con Verástegui (2003), para establecer la semejanza de triángulos como en los criterios de congruencia de triángulos, es suficiente establecer condiciones para asegurar la semejanza entre los triángulos; las que veremos a continuación:

Teorema Fundamental: Sea R una recta paralela a uno de los lados ($\overline{AC}$) de un triángulo ABC y que intercepta a las rectas que contienen a los otros lados en puntos diferentes, entonces estos puntos y el vértice B determinan un triángulo semejante al triángulo ABC, tal como se puede observar en la figura 13.

Figura 13

Teorema fundamental

Demostración: Gráficamente, se presentan los siguientes casos:



Trazando la recta R' que pasa por B y es paralela a R, por el teorema de Thales, se tiene que: $\frac{DB}{AB}=\frac{EB}{CB}$. También la recta R'' que pasa por E, es paralela al lado $\overline{AB}$ e intercepta al lado $\overline{AC}$ en M, por corolario del teorema de Thales, se cumple $\frac{BE}{BC}=\frac{AM}{AC}$. Pero, siendo $\overline{DE}\cong\overline{AM}$, en la proporción anterior se tiene $\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$, y considerando la primera proporción obtenida resulta $\frac{DB}{AB}=\frac{EB}{CB}=\frac{DE}{AC}$. Además, los ángulos correspondientes para $R//\overline{AC}$ y las transversales $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, en los triángulos ABC y DBE se tiene que $B\hat{A}C \cong B\hat{D}E$, $A\hat{C}B \cong D\hat{E}B$ y $A\hat{B}C \cong D\hat{B}E$. Luego por definición de semejanza de triángulos, resulta que $\Delta ABC \sim \Delta DBE$.

Teniendo la proposición anterior y considerando ciertas condiciones suficientes, Verástegui (2003), presenta tres criterios de semejanza de triángulos, que son análogos a los criterios de congruencia de triángulos y son las siguientes:

i) Criterio AAA: Dos (tres) ángulos de uno de los triángulos son congruentes respectivamente, con los correspondientes ángulos del otro triángulo.

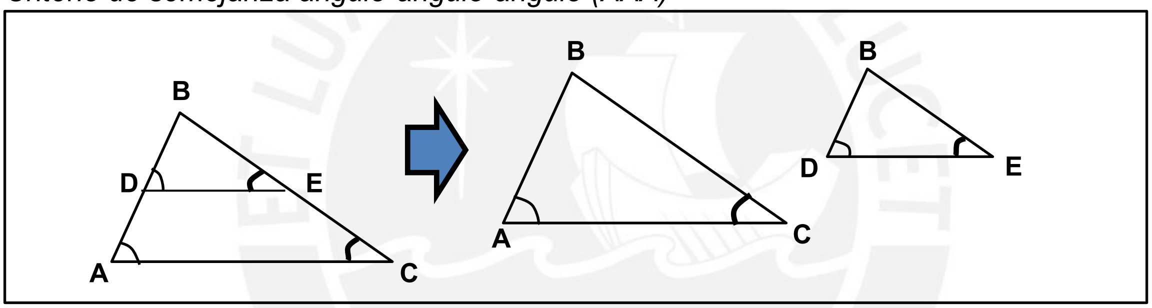
ii) Criterio LLL: Las longitudes de los tres lados de uno de los triángulos son proporcionales a las longitudes de los correspondientes lados del otro triángulo.

iii) Criterio LAL: Las longitudes de dos lados de uno de los triángulos son proporcionales a las longitudes de los correspondientes lados del otro triángulo y los ángulos comprendidos entre dichos lados correspondientes son congruentes.

A continuación, en la figura 14 se muestra el criterio ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Figura 14

Criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA)



Los criterios de semejanza de triángulos aquí presentados, en donde los conceptos de proporcionalidad y de semejanza son inseparables, se consideran para establecer o determinar semejanzas entre polígonos. Para esto, con las diagonales se separan en triángulos semejantes correspondientes, tal como se puede observar para los pentágonos semejantes de la figura 15.

Figura 15

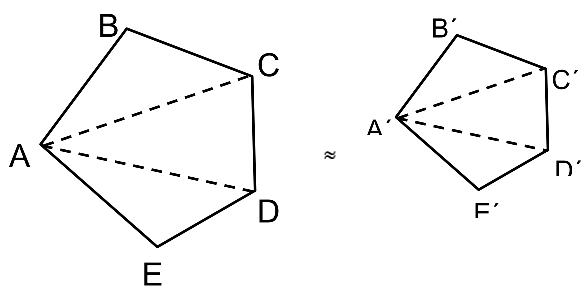
Semejanza de polígonos

$ABCDE \approx A'B'C'D'E' \Leftrightarrow$

$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

$\Delta ACD \approx \Delta A'C'D'$ y

$\Delta ADE \approx \Delta A'D'E'$



3.3 **Semejanza de triángulos, en textos de Educación secundaria**

Creemos que nuestra investigación se enriquece al analizar dos textos de la editorial Santillana de los años 2005 y 2012 y, un cuaderno de trabajo de la misma editorial del año 2020, porque es la editorial, que elabora los textos y cuadernos de trabajo que el Ministerio de Educación les proporciona a los docentes de secundaria a nivel nacional. Desde el año 2005 hasta la actualidad, la organización de la Educación Básica Regular (EBR) del Perú, está dado por niveles y ciclos, tal como se muestra del Diseño Curricular Nacional (2005) en la figura 16.

Figura 16

Organización de la Educación Básica Regular 2005

EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

NIVELES	Inicial		Primaria						Secundaria				
CICLOS	I	II	III		IV		V		VI		VII		
GRADOS	años 0 - 2	años 3 - 5	1º	2º	3º	4º	5º	6º	1º	2º	3º	4º	5º

Nota: Tomado del Diseño Curricular Nacional 2005 (2005, p.7)

Desde el año 2005 hasta el año 2015, en el área de Matemática se desarrollaban las siguientes capacidades: Razonamiento y Demostración, Comunicación Matemática y Resolución de Problemas. Los contenidos básicos del área de Matemática se organizaban en componentes, los cuales se desarrollaban en forma transversal y eran los siguientes: Número, relaciones y funciones; Geometría y medida y; Estadística y Probabilidad. Las capacidades fundamentales que medían los logros de aprendizaje (capacidades) de los estudiantes, eran el pensamiento creativo, el pensamiento crítico, solución de problemas y toma de decisiones.

Para el análisis de los textos del 2005 y del 2012 en relación al concepto de semejanza y su movilización en contextos reales, consideramos lo que el Ministerio de Educación, en ese entonces, sugería para el VII ciclo de EBR, tal como se muestra en la figura 17.

Figura 17

Contenidos para el ciclo VII (2005-2015)

CICLO VII		
TERCER GRADO	**CUARTO GRADO**	**QUINTO GRADO**
Nociones básicas de geometría plana - Punto, recta y plano. - Postulado de la regla (Cantor – Dedekind). Distancia entre dos puntos. - Figuras. Segmento. Rayo. Semirrecta. - Conjuntos convexos. - Separación del plano. Semiplanos. - Ángulos y triángulos. - Medida de ángulos. Clases de ángulos. **Congruencia, perpendicularidad y paralelismo** - Congruencia de segmentos y de ángulos. - Congruencia de triángulos. - Triángulos isósceles y equiláteros. - Rectas perpendiculares. Propiedades. Mediatriz de un segmento. - Rectas paralelas. - Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una recta que las interseca. - Relaciones angulares en un triángulo. - Ángulos formados por las bisectrices de un triángulo.	**Polígono y circunferencia** - Polígonos. Clasificación. - Suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono. Diagonales de un polígono. - Paralelogramos (rectángulo, rombo). Trapecio. - Circunferencia y círculo. Propiedades. - Ángulos en el círculo. - Circunferencia inscrita y circunscrita. **Semejanza de triángulos, área de regiones poligonales y circulares** - Segmentos proporcionales. - Segmentos congruentes determinados por dos rectas que intersecan a dos rectas paralelas. - Teorema de Thales. - Semejanza de triángulos. - Líneas notables en el triángulo. - Relaciones métricas en un triángulo. - Teorema de Pitágoras. - Relaciones métricas en el círculo. - Áreas de regiones poligonales y circulares.	

Nota: Tomado del Diseño Curricular Nacional 2005 (2005, p.169)

De lo anterior podemos observar que el concepto de semejanza de triángulos se desarrollaba en cuarto de secundaria y corresponde a la Componente Geometría y Medida. A partir del año 2016 el Ministerio de Educación realizó unos cambios, los textos fueron cambiados por cuadernos de trabajo los cuales se organizaron siguiendo las pautas del Currículo nacional 2016, que se basan en Competencias y capacidades, para sustentar el perfil de los estudiantes egresados.

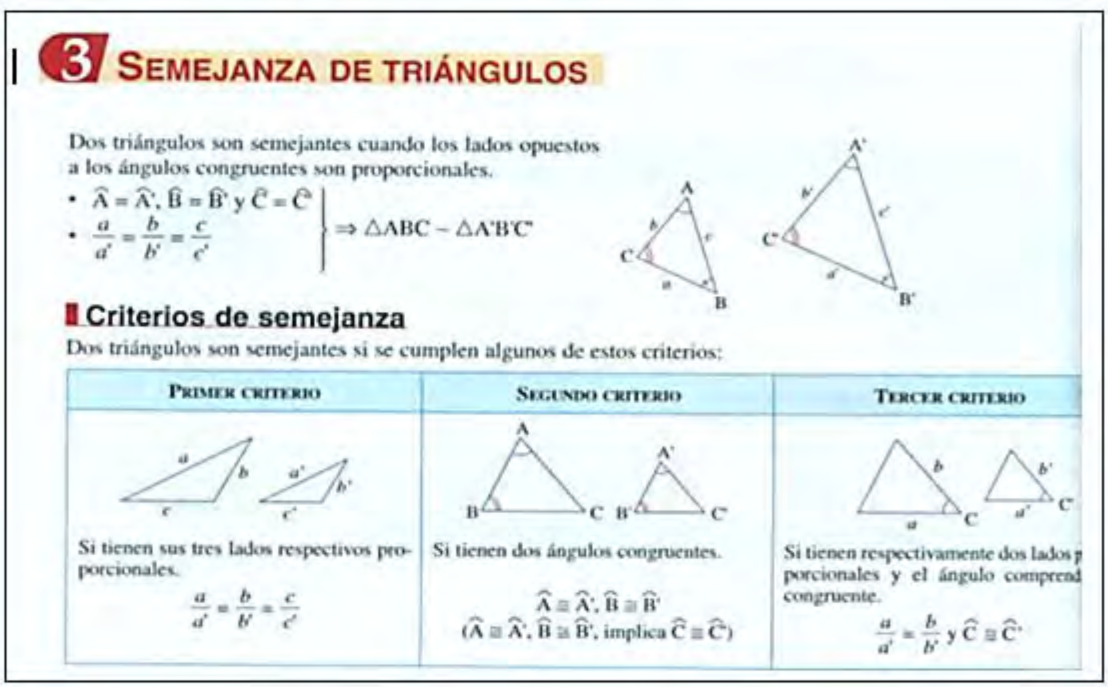
El área de matemáticas posee cuatro competencias que son: Resuelve problemas de cantidad, resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, Resuelve problemas de forma, movimiento, y localización y, por último, Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

El concepto semejanza de triángulos se encuentra en el área de matemáticas y pertenece a la competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, la cual combina cuatro capacidades que son: modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio y argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas. En esta nueva propuesta, los conceptos son estudiados con base a problemas en un contexto real.

Empezaremos analizando el texto de cuarto de secundaria propuesto para el año 2005, Santillana Matemática 4 (2005). El libro primero define la semejanza de triángulos y muestra de manera inmediata los tres criterios de semejanza de triángulos (LLL, AAA, LAL); no se observa ningún ejercicio o problema que sugieran a los estudiantes las condiciones que deben existir entre dos triángulos para que estos sean semejantes, tampoco existen ejemplos que resalten la correspondencia de ángulos y la proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos semejantes. En la definición hace uso de los registros en lengua natural, el algebraico y el figural, pero no se observa entre ellos mayor conexión en su explicación, tal como se puede observar en la figura 18.

Figura 18

Criterios de la semejanza de triángulos



3 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando los lados opuestos a los ángulos congruentes son proporcionales.

- $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Criterios de semejanza

Dos triángulos son semejantes si se cumplen algunos de estos criterios:

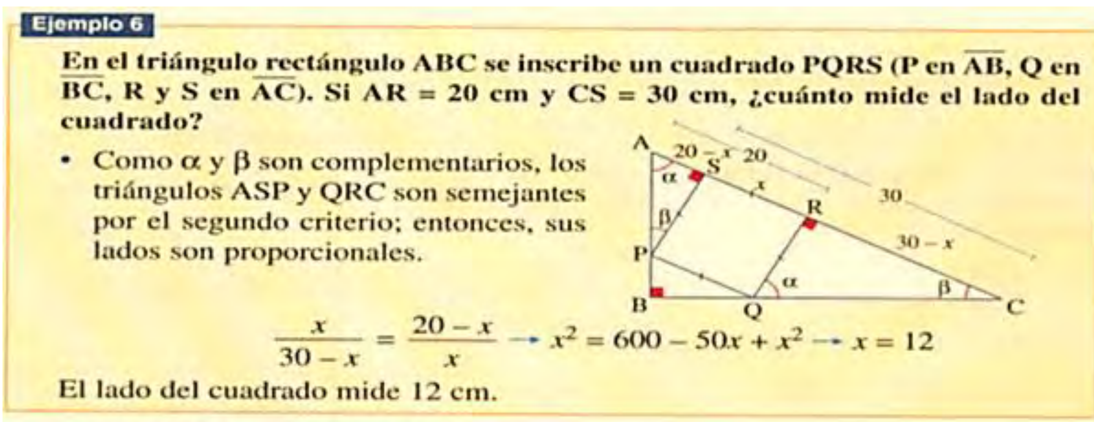
Primer criterio	Segundo criterio	Tercer criterio
Si tienen sus tres lados respectivos proporcionales. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	Si tienen dos ángulos congruentes. $\widehat{A} \cong \widehat{A'}, \widehat{B} \cong \widehat{B'}$ $(\widehat{A} \cong \widehat{A'}, \widehat{B} \cong \widehat{B'}$, implica $\widehat{C} \cong \widehat{C'})$	Si tienen respectivamente dos lados p porcionales y el ángulo comprend congruente. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$

Nota: Tomado del libro de Santillana Matemática 4 (2005, p.70)

En relación a la movilización del concepto semejanza de triángulos el libro propone los ejemplos 6 y 7 que tienen el mismo formato, ninguno de ellos está dentro de un contexto real (aplicado a la vida cotidiana); y en ambos el libro propone la misma forma de resolución por lo que solo analizaremos el ejemplo 6 que se muestra en la figura 19.

Figura 19

Ejemplo 6 - Movilización de la semejanza de triángulos


Ejemplo 6

En el triángulo rectángulo ABC se inscribe un cuadrado PQRS (P en $\overline{AB}$, Q en BC, R y S en $\overline{AC}$). Si AR = 20 cm y CS = 30 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado?

- Como α y β son complementarios, los triángulos ASP y QRC son semejantes por el segundo criterio; entonces, sus lados son proporcionales.

$$\frac{x}{30-x} = \frac{20-x}{x} \rightarrow x^2 = 600 - 50x + x^2 \rightarrow x = 12$$

El lado del cuadrado mide 12 cm.

Nota: Tomado del libro de Santillana Matemática 4 (2005, p.70)

Se puede observar que hace uso de los registros de representación lengua natural, algebraico y figural, pero sin mayor conexión entre ellos.

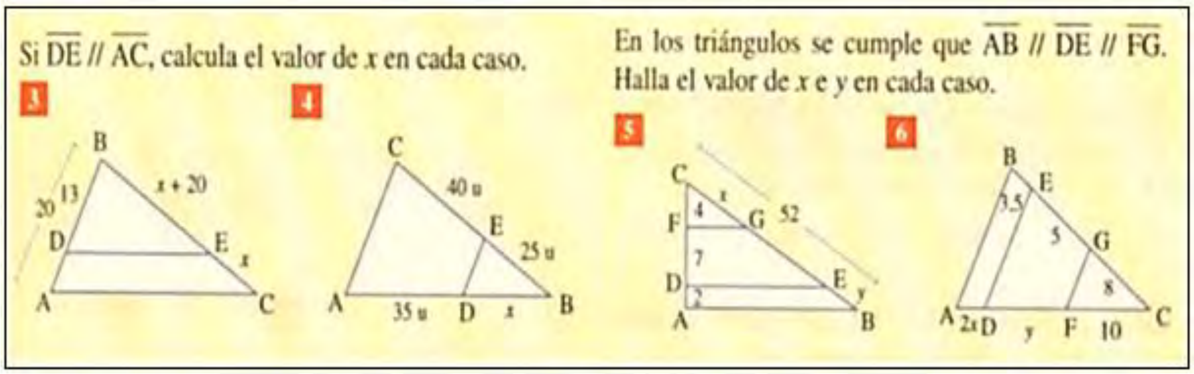
En el ejemplo 6, se muestra un registro figural que representa la descripción del problema y es por medio de este registro que se pretende dar respuesta al problema usando la semejanza de triángulos. No se hace mención de cómo fueron encontradas las longitudes de ciertos segmentos ni porqué se busca dos triángulos semejantes. No es clara su explicación de cómo se llega a encontrar que los triángulos ASP y QRC son semejantes, por lo que creemos que su aprehensión discursiva no es buena. No hace uso de la aprehensión operatoria, no realiza modificación a la figura, siendo lo recomendable la modificación mereológica, que permitiría observar con mejor detalle a los triángulos semejantes. Existe conversión al cambiar del registro figural al algebraico al proponer la proporción de semejanza $\frac{x}{30-x} = \frac{20-x}{x}$, sin dar mayor detalle porque son los elementos adecuados a comparar (elementos homólogos); luego lo resuelve de manera superficial por lo que el tratamiento dentro de este registro es mínimo.

Por lo anterior, creemos que esta forma de presentar los contenidos, afianzada en la enseñanza por medio de procesos algorítmicos para dar solución a los problemas del texto, no ayudan a movilizar el concepto de semejanza de triángulos.

Luego, el libro propone 31 problemas para reforzar lo aprendido, pero que se caracterizan por lo mencionado líneas atrás. En la figura 20, mostramos algunos de los problemas propuestos.

Figura 20.

Ejemplos de reforzamiento



Nota: Tomado del libro de Santillana Matemática 4 (2005, p.71)

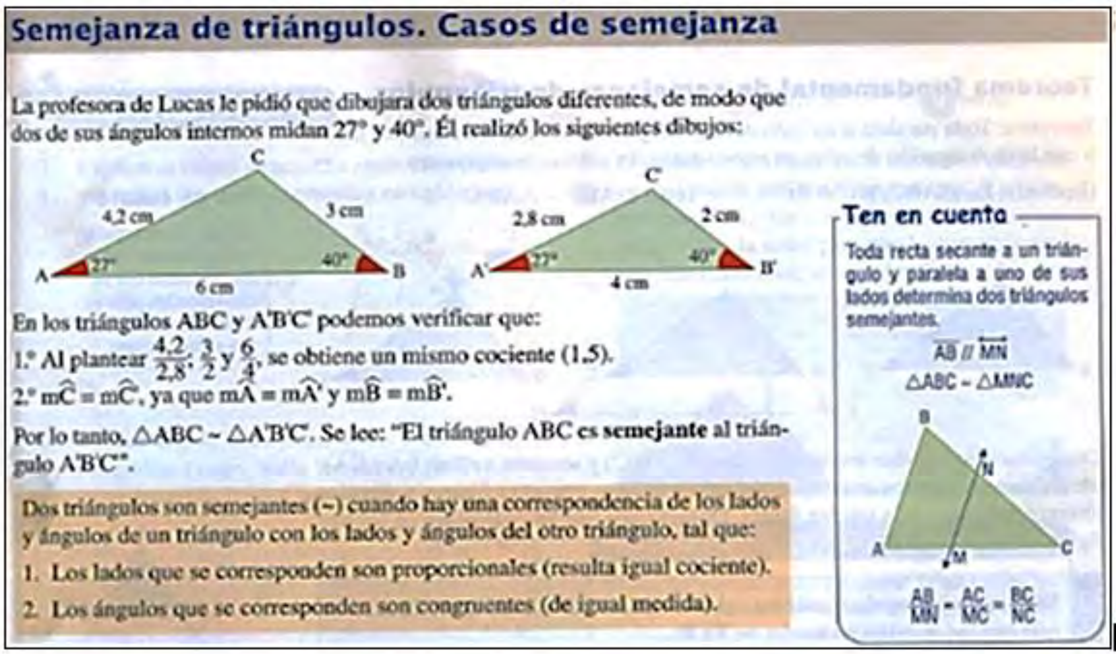
Como se puede observar, todos los problemas propuestos sólo son de corte operativo, es decir no hay ningún problema que relacione el concepto con el contexto real. Podemos mencionar también que, dentro de la misma unidad, el texto desarrolla previamente temas como la proporcionalidad y el teorema de Thales, en donde propone un par de ejemplos con contexto real, pero no están resueltos.

A continuación, presentamos el análisis del texto Santillana 4 Matemática (2012) de cuarto de secundaria. El libro empieza definiendo la semejanza de triángulos a través de un ejemplo en donde participa el alumno Lucas, a quién su profesora le pide que dibuje dos triángulos diferentes donde dos de sus ángulos internos midan 27° y 40°, sin embargo, no le explica cómo, ni con qué herramienta hacerlos; por lo tanto, no se promueve en los estudiantes el desarrollo de la aprehensión secuencial. Luego se señala que se verifica una misma razón (1,5) al comparar las medidas de dos pares de lados de dichos triángulos, sin embargo, no hay motivo que origine dicho procedimiento.

En el texto no se explica cómo la medida del tercer ángulo que falta en ambos triángulos, son iguales, ni porqué los triángulos ABC y A´B´C´ son semejantes y en consecuencia no se promueve en los estudiantes, el desarrollo de la aprehensión discursiva, tal como se puede observar en la figura 21.

Figura 21

Definición de Semejanza y criterios



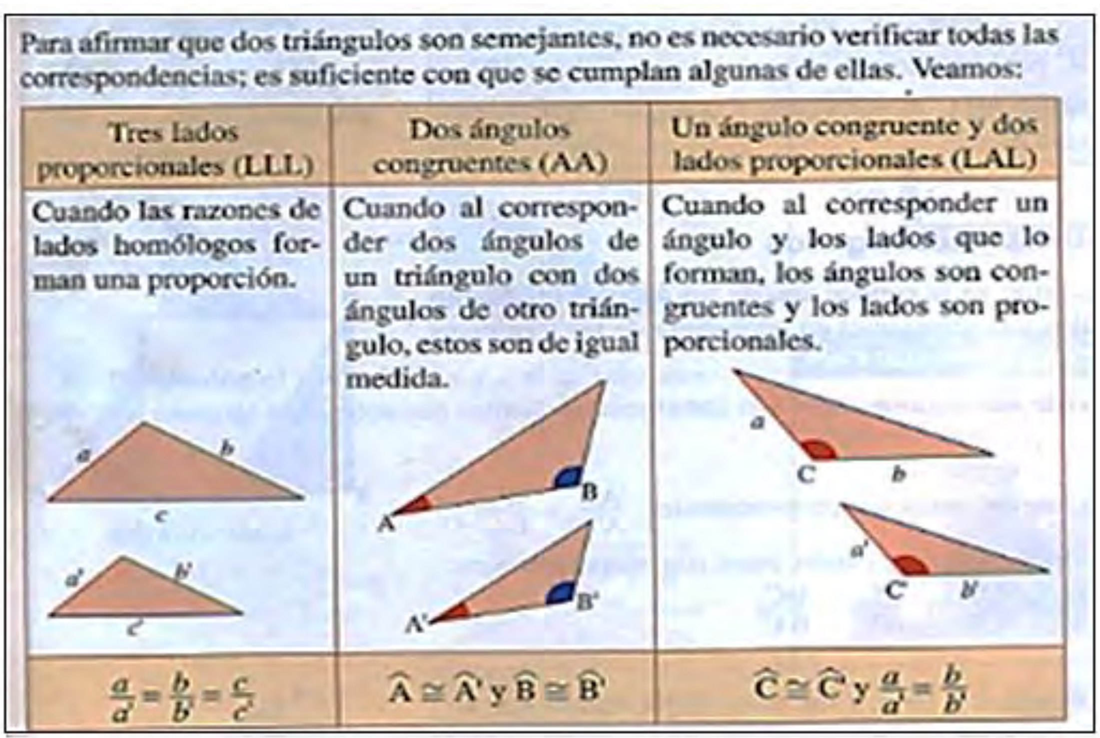
Nota: Tomado del libro de Santillana 4 Matemática (2012, p.133)

También se puede observar que el autor señala que, si en un triángulo cualquiera se traza una recta paralela a un lado y que corta a los otros dos, siempre se forman dos triángulos semejantes, pero no señala porqué lo son.

Para explicar los tres criterios de semejanza de triángulos hace uso de registros figurales para cada uno de ellos con la intención aparentemente de reconocer visualmente los elementos que son necesarios según sea el caso, por lo que se promueve en los estudiantes el desarrollo de la aprehensión perceptiva. Aparte de los registros figurales para cada criterio, señala su equivalencia en el registro de lengua natural, denominando a cada criterio con las siglas LLL, AAA y LAL, señalando que dos triángulos son semejantes, si cumplen uno de estos criterios de semejanza, tal como se muestra en la figura 22.

Figura 22

Criterios de la Semejanza de Triángulos



Para afirmar que dos triángulos son semejantes, no es necesario verificar todas las correspondencias; es suficiente con que se cumplan algunas de ellas. Veamos:

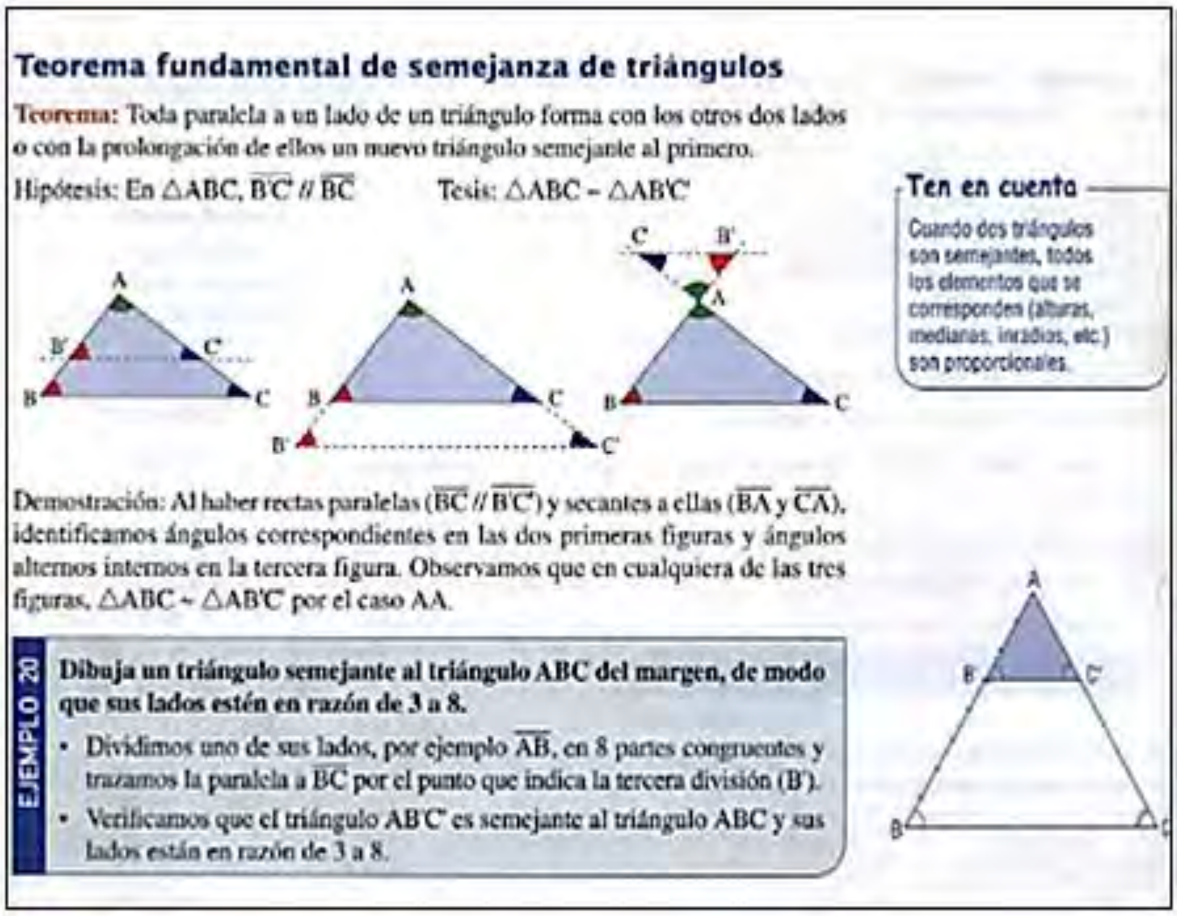
Tres lados proporcionales (LLL)	Dos ángulos congruentes (AA)	Un ángulo congruente y dos lados proporcionales (LAL)
Cuando las razones de lados homólogos forman una proporción.	Cuando al corresponder dos ángulos de un triángulo con dos ángulos de otro triángulo, estos son de igual medida.	Cuando al corresponder un ángulo y los lados que lo forman, los ángulos son congruentes y los lados son proporcionales.
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	$\hat{A} \cong \hat{A}'$ y $\hat{B} \cong \hat{B}'$	$\hat{C} \cong \hat{C}'$ y $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

Nota: Tomado del libro de Santillana 4 Matemática (2012, p.133)

Enseguida, el libro explica el teorema fundamental de la semejanza de triángulos al analizar casos particulares, que resultan de trazar una línea paralela a uno de los lados del triángulo y cortando a los otros dos lados, o al trazar una línea paralela a uno de los lados del triángulo y cortando a la prolongación de los otros dos lados. Creemos que los casos mostrados en el libro, no fundamentan en ningún momento el teorema; solo se trata de casos particulares que a través del criterio ángulo-ángulo-ángulo (AAA), se demuestra que existen dos triángulos semejantes. El autor no señala porqué los ángulos del mismo color son de igual medida, por lo que no se promueve en los estudiantes el desarrollo de la aprehensión discursiva. También propone un ejercicio a los estudiantes para comprobar la semejanza entre dos triángulos, pidiéndoles que dibujen dos triángulos con lados que estén en la relación de 3 a 8, pero no les indica qué herramientas usar. Por último, señala que, si dos triángulos son semejantes, entonces sus elementos correspondientes como alturas, medianas, inradios, etc. son proporcionales tal como se observa en la figura 23.

Figura 23

Teorema Fundamental de Semejanza de Triángulos



Teorema fundamental de semejanza de triángulos

Teorema: Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados o con la prolongación de ellos un nuevo triángulo semejante al primero.

Hipótesis: En $\triangle ABC$, $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ Tesis: $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$

Demostración: Al haber rectas paralelas ($\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$) y secantes a ellas ($\overline{BA}$ y $\overline{CA}$), identificamos ángulos correspondientes en las dos primeras figuras y ángulos alternos internos en la tercera figura. Observamos que en cualquiera de las tres figuras, $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ por el caso AA.

Ten en cuenta

Cuando dos triángulos son semejantes, todos los elementos que se corresponden (alturas, medianas, inradios, etc.) son proporcionales.

EJEMPLO 20

Dibuja un triángulo semejante al triángulo ABC del margen, de modo que sus lados estén en razón de 3 a 8.

- Dividimos uno de sus lados, por ejemplo $\overline{AB}$, en 8 partes congruentes y trazamos la paralela a $\overline{BC}$ por el punto que indica la tercera división (B').
- Verificamos que el triángulo AB'C' es semejante al triángulo ABC y sus lados están en razón de 3 a 8.

Nota: Tomado del libro de Santillana 4 Matemática 4 (2012, p.134)

Para explicar el teorema fundamental también hace uso de registros figurales, con la intención de reconocer visualmente los diferentes casos en los cuales se puede presentar la semejanza de triángulos.

Luego explica un caso particular de semejanza, entre dos triángulos rectángulos, señalando las condiciones que deben de cumplir sus ángulos y lados correspondientes para determinar que estos dos triángulos rectángulos sean semejantes. No se promueve en los estudiantes el desarrollo de la aprehensión discursiva en relación a la demostración de dos triángulos semejantes, solo indica la regla o norma que permite encontrar dos triángulos rectángulos semejantes. Para terminar su explicación, propone un ejercicio de aplicación directa en donde pretende que los estudiantes formen proporciones que comprueben la proporcionalidad de sus lados, tal como se muestra en la figura 24.

Figura 24

Semejanza de Triángulos Rectángulos

Semejanza de triángulos rectángulos

Dado que en un triángulo rectángulo ya se conoce uno de sus ángulos (el ángulo recto), dos triángulos rectángulos son semejantes en cualquiera de las siguientes situaciones:

a) Cuando al corresponder uno de sus ángulos, estos son congruentes:
$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ o $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$

b) Cuando al corresponder los catetos, estos son proporcionales: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

c) Cuando al corresponder la hipotenusa y un cateto, estos son proporcionales:
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ o } \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

EJEMPLO 21

Los lados del ⊿ABC miden 6; 8 y 10 u, y los del ⊿PQR miden 4,5; 6 y 7,5 u. ¿Ambos triángulos son semejantes?

- Graficamos y ubicamos los datos.
- Establecemos las proporciones entre los catetos correspondientes:
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \rightarrow \frac{6}{4,5} = \frac{8}{6} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
- Como los catetos correspondientes son proporcionales (de razón 4 a 3), se comprueba que ⊿ABC ~ ⊿PQR.

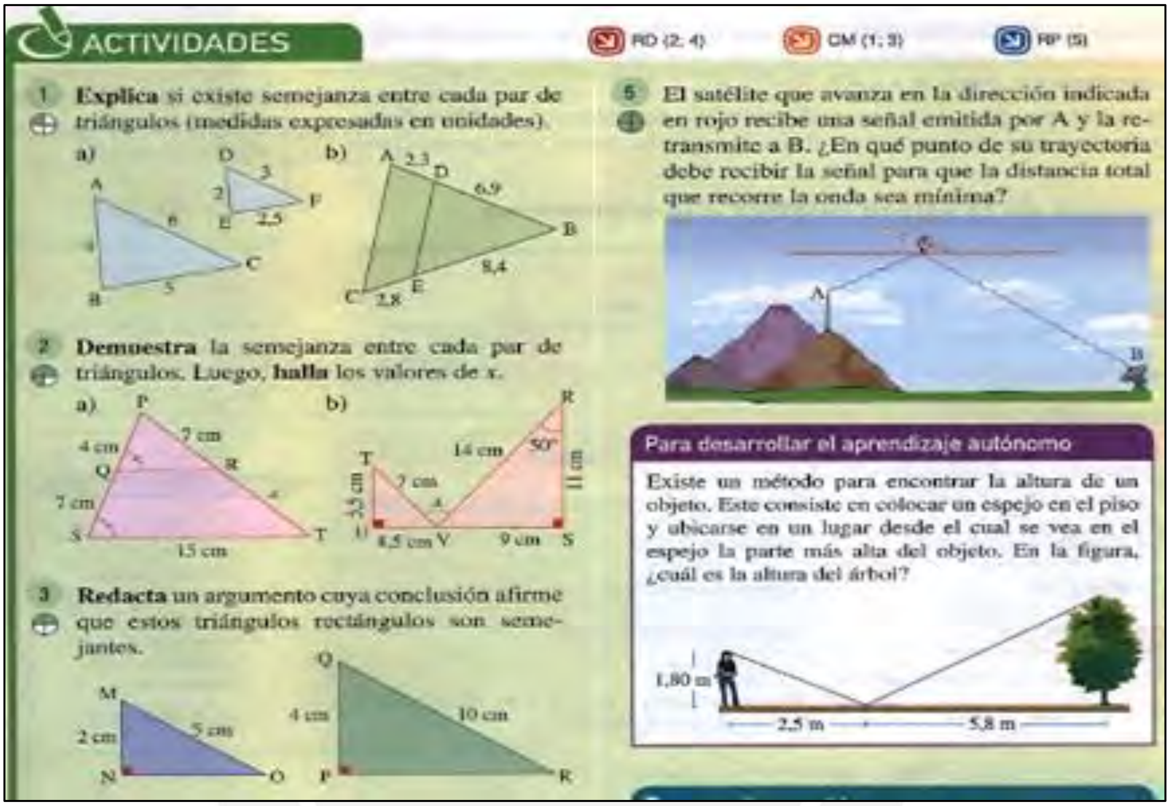
Nota: Tomado del libro de Santillana 4 Matemática 4 (2012, p.134)

Luego, el texto concluye con unas actividades para que los estudiantes practiquen. Resalta en dichas actividades que se han propuesto algunos problemas contextualizados (aplicados a la vida cotidiana), pero que en el desarrollo del tema no hay ningún problema similar desarrollado.

Las actividades propuestas se observan en la figura 25.

Figura 25

Actividades y Evaluación



ACTIVIDADES

RD (2; 4) CM (1; 3) RP (5)

1 **Explica** si existe semejanza entre cada par de triángulos (medidas expresadas en unidades).

a) b)

2 **Demuestra** la semejanza entre cada par de triángulos. Luego, **halla** los valores de x.

a) b)

3 **Redacta** un argumento cuya conclusión afirme que estos triángulos rectángulos son semejantes.

5 El satélite que avanza en la dirección indicada en rojo recibe una señal emitida por A y la retransmite a B. ¿En qué punto de su trayectoria debe recibir la señal para que la distancia total que recorre la onda sea mínima?

Para desarrollar el aprendizaje autónomo

Existe un método para encontrar la altura de un objeto. Este consiste en colocar un espejo en el piso y ubicarse en un lugar desde el cual se vea en el espejo la parte más alta del objeto. En la figura, ¿cuál es la altura del árbol?

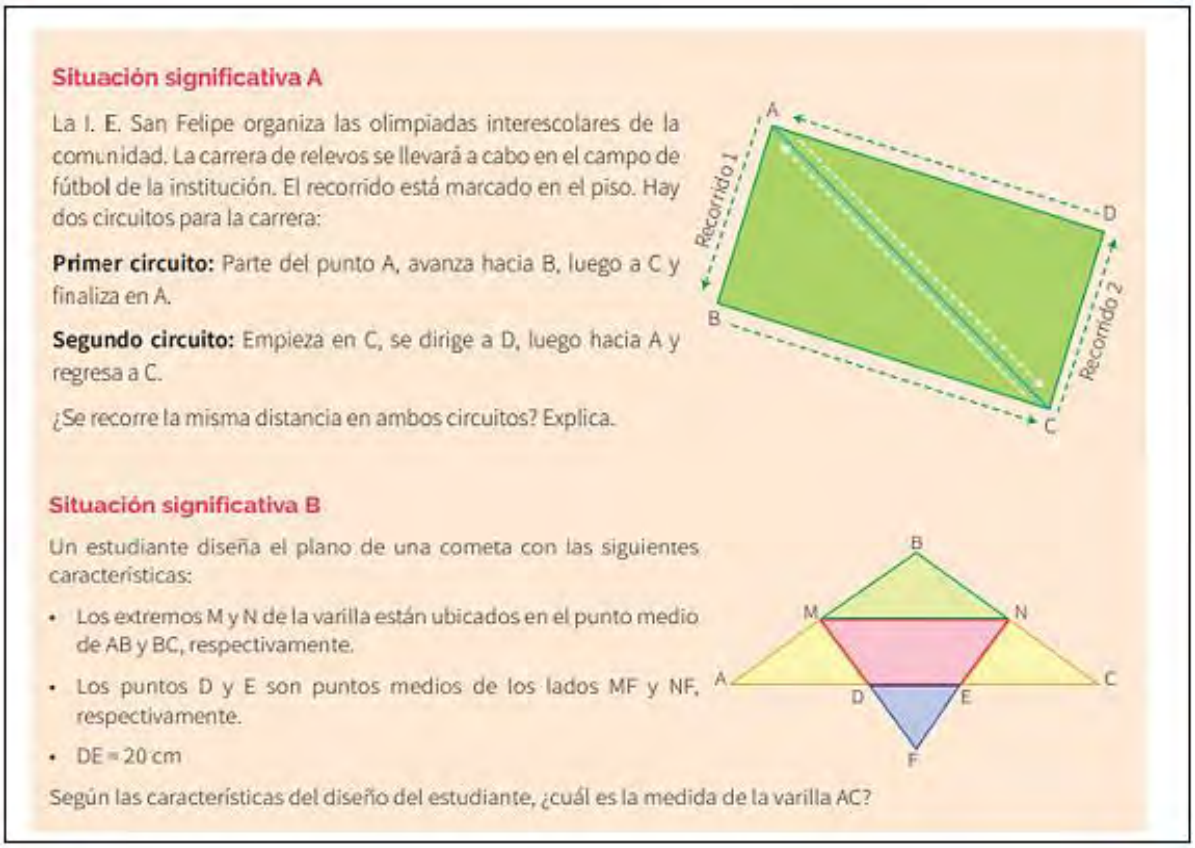
Nota: Tomado del libro de Santillana 4 Matemática 4 (2012, p.135)

Como se puede observar, en esta sección de actividades y evaluación se proponen tres ejemplos de aplicación directa y tres problemas contextualizados todos con registro figural. Pensamos que el autor del texto pretende con los tres primeros problemas, que los estudiantes a partir de los criterios de semejanza comprueben que dos pares de triángulos son semejantes y solo en el segundo problema escribir la proporción de semejanza para obtener x que, de acuerdo con nuestra teoría, existiría un cambio de registro del figural al algebraico. En relación a los tres últimos problemas, pensamos que los estudiantes tendrían dificultades porque no tienen en el texto, problemas desarrollados dentro del mismo contexto.

El DCN (2016) busca desarrollar competencias y capacidades en los estudiantes, para ello propone un cuaderno de trabajo basado en problemas contextualizados. El concepto de semejanza de triángulos forma parte del ciclo VII y corresponde al tercer año de secundaria. A continuación, el análisis del cuaderno de trabajo del tercero de secundaria (2020), el cual se desarrolla en base a fichas, siendo la ficha número 16 la que involucra al concepto de semejanza de triángulos, tal como se muestra en la figura 26.

Figura 26

Situaciones significativas A,B y C



Situación significativa A

La I. E. San Felipe organiza las olimpiadas interescolares de la comunidad. La carrera de relevos se llevará a cabo en el campo de fútbol de la institución. El recorrido está marcado en el piso. Hay dos circuitos para la carrera:

Primer circuito: Parte del punto A, avanza hacia B, luego a C y finaliza en A.

Segundo circuito: Empieza en C, se dirige a D, luego hacia A y regresa a C.

¿Se recorre la misma distancia en ambos circuitos? Explica.

Situación significativa B

Un estudiante diseña el plano de una cometa con las siguientes características:

- Los extremos M y N de la varilla están ubicados en el punto medio de AB y BC, respectivamente.
- Los puntos D y E son puntos medios de los lados MF y NF, respectivamente.
- DE = 20 cm

Según las características del diseño del estudiante, ¿cuál es la medida de la varilla AC?

Nota: Tomado del Cuaderno de trabajo de matemática - Santillana (2020, p.214)

Estas situaciones parecen buscar un objetivo específico que no especifica el cuaderno. A continuación, señalamos lo que a nuestro parecer sería el objetivo que el cuaderno de trabajo de matemática de Santillana (2020) busca de cada situación, tal como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Situaciones significativas

Situación significativa	Posible objetivo
A	Que los estudiantes logren encontrar los principios básicos de la congruencia de triángulos.
B	Que los estudiantes logren encontrar la propiedad de la base media. Quizás busca la semejanza de triángulos a partir de la congruencia de triángulos.
C	Que los estudiantes logren encontrar los principios básicos de la semejanza de triángulos.

Finalmente propone 10 preguntas contextualizadas para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, en donde algunas de ellas están relacionadas con la movilización del concepto de la semejanza de triángulos como el que se muestra en la figura 27.

Figura 27

Evaluación del Aprendizaje - pregunta 1

Nota: Tomado del Cuaderno de trabajo de matemática - Santillana (2020, p.216)

También observamos que las situaciones significativas propuestas y las 10 preguntas de su examen contienen registros figurales, facilitando el entendimiento del problema y carece de problemas donde se deba convertir el enunciado de un problema a un registro figural.

De lo anterior, podemos afirmar que los dos textos analizados del 2005 y 2012 el primero carece de problemas contextualizados (aplicados a la vida cotidiana) y el segundo solo lo menciona en sus actividades. En ambos textos se muestra problemas resueltos en donde se puede observar los cambios de registro de representación como del registro de lengua natural al figural y de éste, al algebraico, pero no se resalta en los estudiantes la importancia de los cambios de registro. Los problemas colocados en el registro de lengua natural no permiten su solución por lo que se cambia al figural para un mejor entendimiento y con base al concepto de semejanza de triángulos se realiza otro cambio del registro figural al algebraico para que por este medio se dé solución al problema planteado. Ninguno de los textos, promueven en los estudiantes el desarrollo de las aprehensiones secuenciales, discursivas y operativas. Creemos que existe intentos en la aprehensión discursiva, pero esta no es clara, diríamos más bien que es desordenada e incompleta. Por ejemplo, no se señala cómo los ángulos de ambos triángulos comparados son de igual medida. Por otro lado, creemos que en ambos textos los ejercicios se resuelven con base a procesos algorítmicos. En relación al cuaderno de trabajo solo se observa que proponen problemas contextualizados (aplicados a la vida cotidiana) con registro figural, pero se contrapone a lo que el autor desarrolla al explicar la teoría puesto que ninguno de sus ejercicios resueltos es de este modelo. Los problemas contextualizados permiten que los estudiantes valoren el aprendizaje del concepto, promueven en ellos realizar cambios de registro. Asimismo, permite que los estudiantes desarrollen aprehensiones secuenciales, discursivas y operativas.

Además, podemos señalar que ninguno de los materiales analizados aborda el concepto de semejanza de triángulos relacionándolos con la congruencia de triángulos y con el teorema de Thales. Tampoco pretende que los estudiantes descubran por sí mismos algunos de los criterios de semejanza, al contrario, solo lo menciona como una regla o norma a cumplir. Asimismo, ninguno de los materiales sugiere el uso de algún software de geometría dinámica, para facilitar el aprendizaje del concepto de semejanza y su movilización al resolver problemas.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL

En esta parte de la investigación presentamos la descripción de los sujetos de la investigación, describimos la secuencia de actividades y por último efectuamos el análisis a priori y a posteriori de esta secuencia de actividades.

4.1 Descripción de los sujetos de la Investigación

En esta investigación, el docente es a la vez investigador y observador. Es el encargado de hacer que fluyan las interacciones entre él, los estudiantes y el saber matemático que en nuestro caso es, la semejanza de triángulos. El docente tiene la función de diseñar la secuencia de actividades que permitan en los estudiantes de 4to de secundaria movilizar el concepto de semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas. Finalmente se encargará de analizar el trabajo desarrollado por los estudiantes; es decir, analizar los resultados de su aplicación.

Como nuestra investigación es de corte cualitativo, no necesitamos una muestra muy grande, ya que solo debemos analizar los casos necesarios que permitan responder nuestra pregunta de investigación y por ello, solo seleccionamos a seis estudiantes. Al respecto, Hernández, Fernández y Baptista (2010) señalan lo siguiente:

> En los estudios cualitativos el tamaño de la muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia. Lo que se busca en la indagación cualitativa es profundidad. Nos conciernen casos (participantes, personas, organizaciones, eventos, animales, hechos, etc.) que nos ayuden a entender el fenómeno de estudio y a responder las preguntas de la investigación. (p.394)

En relación a los estudiantes que forman parte de esta investigación, debemos mencionar que en un inicio se hizo la invitación a 30 estudiantes de cuarto de secundaria (14-15 años) que pertenecen a un aula de un colegio particular del cono norte, situada en el distrito de Los Olivos, departamento de Lima, de los cuales solo se consideraron seis estudiantes cuyos promedios en matemática antes del inicio de las actividades eran aprobatorias y menores e iguales a 15. Para no perjudicar a los estudiantes con sus clases en el colegio, decidimos trabajar con ellos por la tarde en el centro de cómputo de una Universidad del cono norte que pertenece a la misma comunidad religiosa que el colegio y se encuentra ubicado muy cerca de él.

Asimismo, queremos señalar que una semana antes del inicio de nuestras actividades, nuestros estudiantes seleccionados habían terminado de desarrollar en el colegio, el Teorema de Thales y los tres criterios de semejanza de triángulos.

Como se mencionó líneas atrás, para el desarrollo de la secuencia de actividades solo consideramos seis estudiantes de cuarto de secundaria, con los cuales formamos dos grupos de tres estudiantes, siendo Alexandra una de las integrantes de uno de dichos grupos, y cuyo nombre se le ha asignado a la estudiante para salvaguardar su identidad. Como ambos grupos están conformados por estudiantes cuyos promedios en matemática son similares, decidimos analizar el desarrollo de actividades realizado por el grupo de Alexandra.

4.2 Descripción de la secuencia de actividades

Organizamos nuestro trabajo experimental en una secuencia de tres actividades, con sus respectivos problemas y estos a su vez, con sus respectivos ítems, que promueven en los estudiantes la movilización del concepto semejanza de triángulos a través el uso de diversos registros de representación semiótica. En algunos problemas se proporciona a los estudiantes archivos en GeoGebra para facilitar el entendimiento del problema a través del registro figural dinámico, esto con la finalidad que luego los estudiantes sean capaces de resolver problemas similares usando lápiz y papel.

En la tabla 3, mostramos la organización de la secuencia de actividades, el tipo de trabajo, su descripción y el tiempo utilizado en cada una de ellas.

Tabla 3

Descripción de la secuencia de actividades

N° de Actividad	Tipo de Trabajo	Descripción	Horas Pedagógicas (45 minutos)
1	Grupal	La actividad cuenta con dos problemas y cada uno de ellos, con un registro figural en su enunciado. El primer problema a través de su registro figural, sugiere un par de triángulos rectángulos semejantes. Uso del criterio de la semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA). Uso de las representaciones semióticas lengua natural, figural, figural dinámica y algebraica. Movilización de las aprehensiones secuenciales, perceptivas, discursivas y operatorias. Uso de archivos de GeoGebra y de lápiz y papel.	3
2	Grupal	La actividad cuenta con un problema sin gráfico en su enunciado. Uso del criterio de la semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA). Uso de las representaciones semióticas lengua natural, figural y algebraica. Movilización de las aprehensiones secuenciales, perceptivas, discursivas y operatorias. Uso de archivos de GeoGebra y de lápiz y papel.	2
3	Grupal	La actividad cuenta con un problema con un par de gráficos en su enunciado (uno de ellos en 3D). El problema a través de su gráfico, no sugiere ningún par de triángulos semejantes. Uso del criterio de la semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA). Uso de las representaciones semióticas lengua natural, figural y algebraica. Movilización de las aprehensiones secuenciales, perceptivas, discursivas y operatorias. No se usa ningún archivo de GeoGebra. Uso exclusivo de lápiz y papel.	2

Al término del desarrollo de cada actividad, se realizó una formalización parcial de los aspectos matemáticos desarrollados a cargo del profesor investigador a partir de las dudas y errores que los estudiantes mostraron durante el desarrollo de cada una de las preguntas de cada actividad, la cual fue expositiva en una pizarra acrílica.

4.3 Análisis de la aplicación de la secuencia de actividades

A continuación, desarrollaremos el análisis de la secuencia de las tres actividades propuestas en esta investigación. Para cada una de las actividades presentaremos sus objetivos y para cada pregunta de las actividades, presentaremos su respectivo análisis a priori y a posteriori (producción realizada por el grupo de Alexandra) y el contraste entre dichos dos análisis con el fin de saber si hemos logrado el objetivo de la pregunta y en consecuencia de la actividad.

La secuencia de actividades fue planeada por el docente e investigador con el fin de movilizar el concepto de semejanza de triángulos, haciendo uso de los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y figural. Asimismo, se busca en los grupos, la movilización de las aprehensiones secuencial, perceptiva, discursiva y operatoria.

También es bueno precisar, que el único criterio de semejanza de triángulos que hemos usado en esta investigación es el de ángulo-ángulo-ángulo (AAA), por ser el criterio más frecuente usado en la solución de los problemas propuestos en los textos de educación secundaria.

De aquí en adelante se presenta el análisis del grupo de Alexandra.

Actividad 1: Problemas con registro figural – Uso del GeoGebra.

La primera actividad tiene por objetivo que los estudiantes movilicen el concepto de semejanza de triángulos al reconocer un par de triángulos semejantes con el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA), realicen la conversión del registro de lengua natural al registro figural y de éste al algebraico, realicen tratamientos en el registro figural y algebraico y por último articulen las aprehensiones secuencial y operatoria en el registro figural.

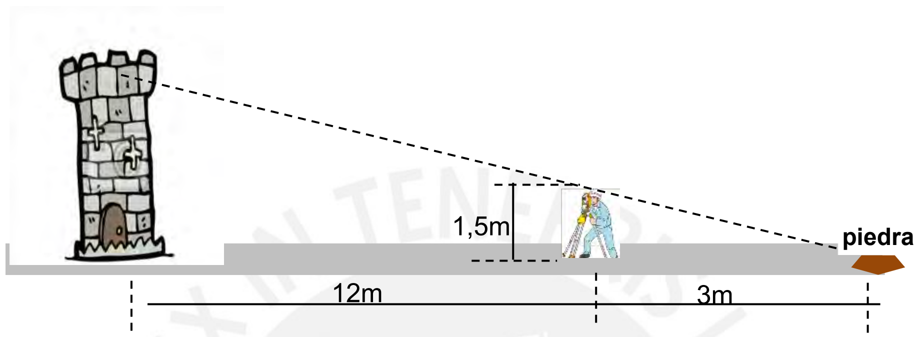
Hicimos uso del GeoGebra para facilitar el entendimiento de los ítems c) y d) del problema 1 y de los ítems b) y c) del problema 2. Debido al movimiento de objetos en tiempo real que se obtiene al manipular el deslizador; y en otros casos para corroborar respuestas halladas con lápiz y papel.

El enunciado de la pregunta 1, de la actividad 1 se encuentra en la figura 28.

Figura 28

Enunciado de la pregunta 1 de la actividad 1

1. Para calcular la altura de una torre, un topógrafo clava en el suelo un teodolito 1,5metros de altura entre una piedra y la torre. Si la visual del lente del teodolito pasa por la parte superior de la torre y la piedra. (ver gráfico). Se pide:



a) Proponer un dibujo usando una o varias figuras geométricas que interpreten la situación real mostrada, con los datos proporcionados. Proponga al menos dos alternativas, donde se observen un par de triángulos semejantes.
b) Con los datos proporcionados y la figura de la parte a), calcule la altura de la torre. Explique su resolución detalladamente. Abra el archivo SEM-ACT1-PREG1 y compruebe su respuesta.
c) Si la piedra la movemos 1m, en línea recta hacia la torre, ¿A qué distancia de la torre se debe instalar el teodolito de manera que siempre la visual de su lente pase por la parte superior de la torre y la piedra? Use la altura de la torre encontrada en la parte a). Movilice el deslizador (e), y compruebe la respuesta.
d) ¿Existe la posibilidad de seguir moviendo a la piedra y el teodolito de manera que éste se encuentre equidistante a la piedra y a la base de la torre? Justifique su respuesta. (tome en cuenta el tamaño de la torre encontrada en la parte a). Movilice el deslizador e y compruebe su respuesta.

El primer problema contiene un registro figural que sugiere rápidamente un par de triángulos semejantes, y que se evidencia por la perpendicularidad de la torre y el teodolito con el piso.

En esta pregunta, en relación a la Teoría de Registros de Representación Semiótica, pensamos que los estudiantes pueden realizar transformaciones semióticas como la conversión al cambiar del registro lengua natural al registro figural y de éste al algebraico; o un tratamiento, al hacer cambios dentro del mismo registro figural o cambios dentro del mismo registro algebraico. Asimismo, dentro del registro figural, podemos analizar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que realizan los estudiantes al resolver el problema planteado.

A continuación, presentamos el respectivo análisis a priori y a posteriori de los ítems de la pregunta 1.

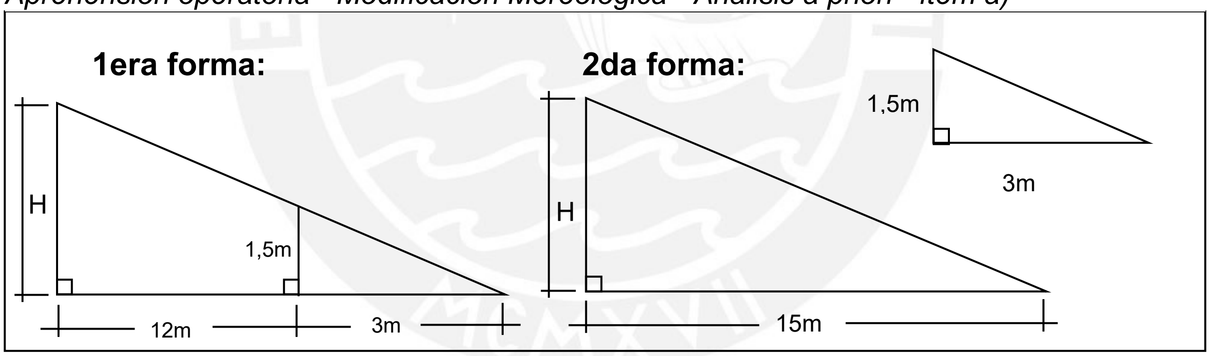
El ítem a) y b) de la pregunta 1 es:
a) Proponer un dibujo usando una o varias figuras geométricas que interpreten la situación real mostrada, con los datos proporcionados. Proponga al menos dos alternativas, donde se observe un par de triángulos semejantes. b) Con los datos proporcionados y la figura de la parte a), calcule la altura de la torre. Explique su resolución detalladamente. Abra el archivo SEM-ACT1-PREG1 y compruebe su respuesta.

Análisis a priori (1-a) y (1-b))

Esperamos que los grupos usen el lápiz y papel y representen por medio de un registro figural, un par de triángulos semejantes de dos formas distintas, tal como se muestra en la figura 29.

Figura 29

Aprehensión operatoria - Modificación Mereológica - Análisis a priori - ítem a)



Los grupos por medio de sus aprehensiones perceptivas, deberían sospechar el par de triángulos rectángulos semejantes a través del reconocimiento en primer lugar de los ángulos rectos que forman la torre y el teodolito con el piso respectivamente; lo que conlleva a un primer tratamiento dentro del registro figural, puesto que los grupos deberían sustituir la torre y el teodolito por dos líneas verticales; evidenciando de esta manera dos triángulos rectángulos probablemente semejantes. Luego, a través de las propiedades de ángulos entre paralelas y de ángulos en el triángulo, deberían comprobar que los otros dos ángulos que quedan de ambos triángulos, guardan una correspondencia de congruencia. De esa manera la sospecha de semejanza de triángulos se convierte en una comprobación.

Pensamos, que la 2da forma de representar a los triángulos semejantes se dará cuando los grupos luego de comprobar la semejanza como se explicó líneas atrás, mediante sus aprehensiones operatorias dividan y separen la figura inicial en dos triángulos rectángulos a través de una modificación mereológica, realizándose una vez más, un tratamiento. Pensamos que los grupos se inclinarán más en trabajar con la primera forma, por el parecido que tiene con algunos ejercicios que han resuelto en clase con su profesor.

Los grupos para comprobar la semejanza de triángulos, deberían movilizar su aprehensión discursiva, tal como se observa en la figura 30.

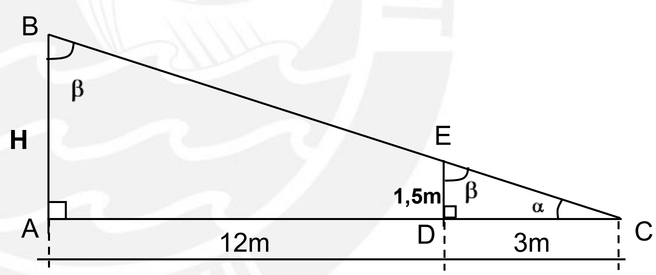
Figura 30

Aprehensión Discursiva de la Semejanza de Triángulos - Análisis a priori - ítem a)

- Del $\Delta\ BAC$, se asume: $m\angle ACB = \alpha$ y $m\angle ABC = \beta$, entonces $\alpha + \beta = 90°$
- Del $\Delta\ EDC$, si $m\angle DCE = \alpha$ y $\alpha + \beta = 90°$, entonces $m\angle DEC = \beta$.

$$\begin{aligned} Si:\ & m\angle ABC = m\angle DEC = \beta \\ & m\angle ACB = m\angle DEC = \alpha \\ & m\angle BAC = m\angle EDC = 90° \end{aligned}$$

$$Entonces: \Delta BAC \sim \Delta EDC$$
$$(criterio\ AAA)$$



Para contestar la parte b), esperamos que los grupos realicen un cambio de registro, del registro figural al registro algebraico (*conversión*), al utilizar la proporción de semejanza $\frac{H}{15} = \frac{1,5}{3}$. En este registro algebraico, los grupos a través de un tratamiento deberían hallar el valor de H, de la siguiente manera:

$$\frac{H}{15} = \frac{1,5}{3}$$

$$H = \frac{(1,5)(15)}{3}$$

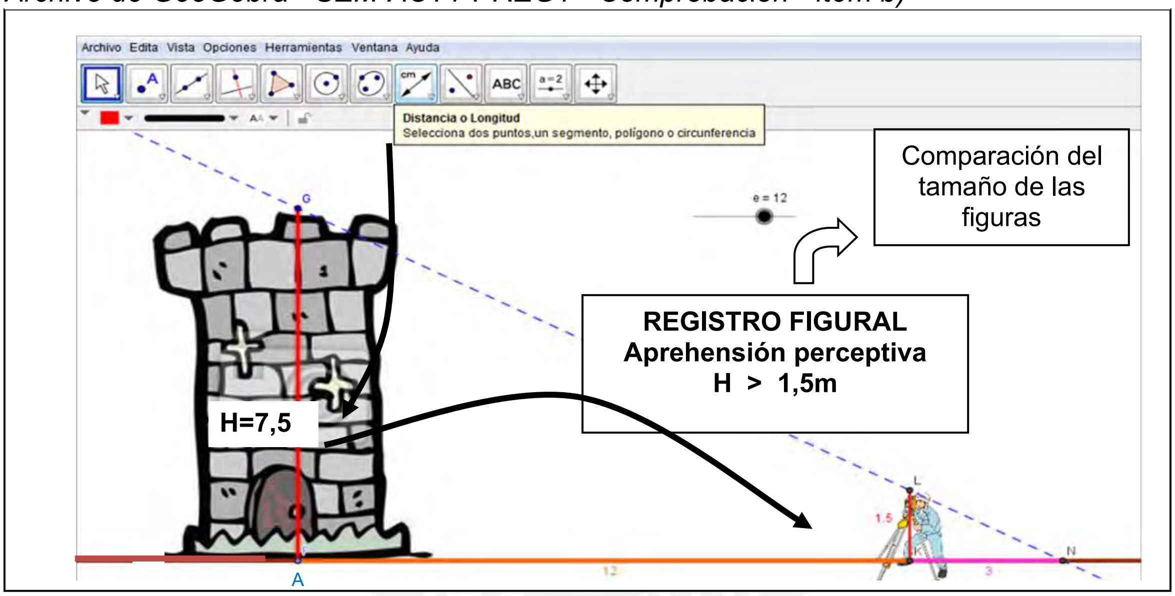
$$H = 7,5m$$

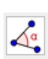
Por lo anterior, se espera que, a través del cambio de registro del figural al algebraico, los grupos hallen la altura de la torre al movilizar el concepto de semejanza de triángulos entre los triángulos ΔBAC y ΔEDC $(\Delta BAC \sim \Delta EDC)$ a través del criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA) y su proporción respectiva; y respondan: que el valor de H es 7,5m.

Luego, por indicación del ítem, deberían abrir el archivo SEM-ACT1-PREG1 encontrando lo que se muestra en la figura 31.

Figura 31

Archivo de GeoGebra - SEM-ACT1-PREG1 - Comprobación - ítem b)



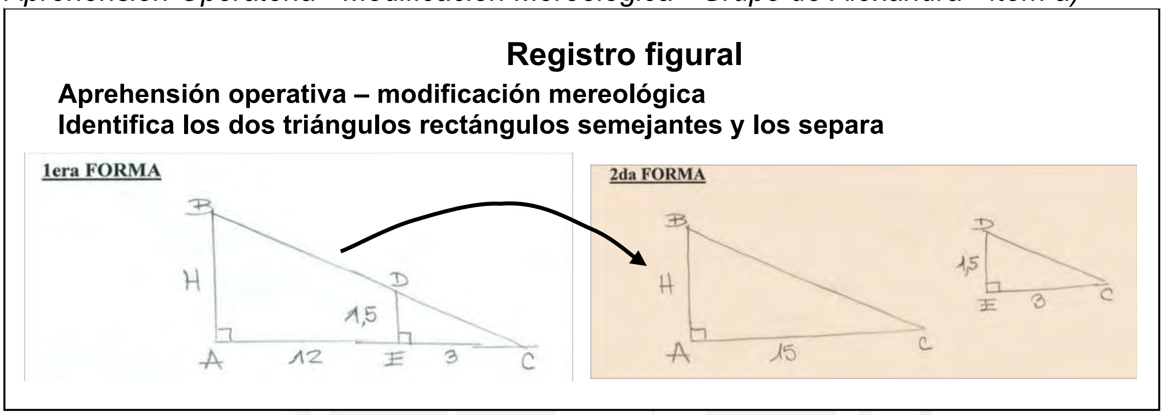
En este ítem, los grupos usarían la herramienta distancia o longitud () del GeoGebra para comprobar que la altura de la torre que le proporciona el software, coincide con lo que encontraron algebraicamente, es decir $H = 7{,}5m$. Asimismo, con la herramienta Ángulos (), podrían comprobar que los ángulos correspondientes de los triángulos rectángulos semejantes, son congruentes.

Análisis a posteriori (1-a) y (1-b)– trabajo del grupo de Alexandra

Para el ítem a), el grupo de Alexandra realizó los dos gráficos pedidos. En la primera forma mantuvo la forma de la gráfica, pero cambiando la torre y el teodolito por líneas verticales y en la segunda forma realizó una descomposición a la figura inicial al trazar dos triángulos rectángulos, realizando así una aprehensión perceptiva y operatoria a través de una modificación mereológica. Además, al trabajar dentro del mismo registro figural realizaron un tratamiento, tal como se puede apreciar en la figura 32.

Figura 32

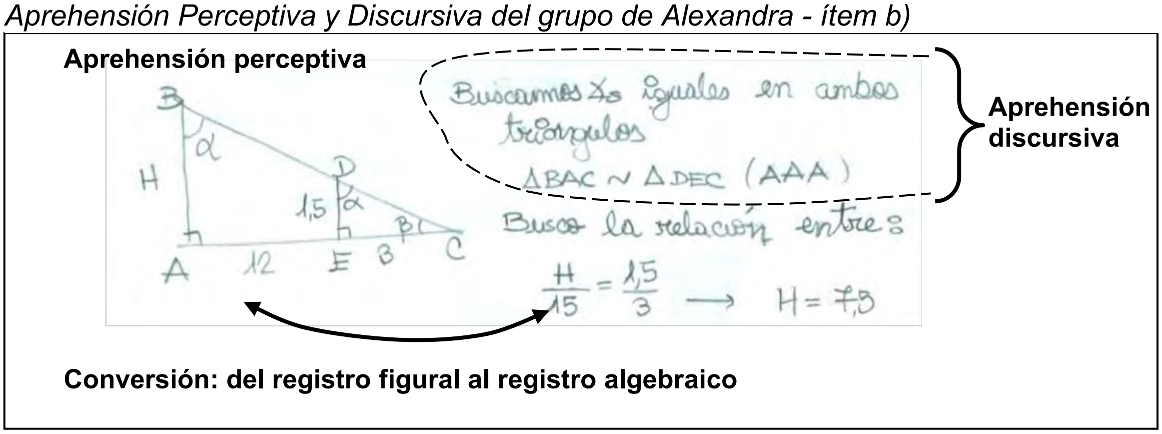
Aprehensión Operatoria - Modificación Mereológica - Grupo de Alexandra - ítem a)



Para la demostración que los triángulos identificados en ambas formas son semejantes y contestar la parte b) el grupo de Alexandra, utilizó la primera forma, tal como se observa en la figura 33.

Figura 33

Aprehensión Perceptiva y Discursiva del grupo de Alexandra - ítem b)



Al observar el trabajo del grupo de Alexandra, podemos darnos cuenta que no explica de dónde se originan los ángulos α y β, debido a que no señala que fueron inventados; tampoco explica porqué la $m\angle ABC = m\angle EDC = \alpha$, puesto que no indica que estos ángulos son iguales por ser ángulos correspondientes entre las paralelas $\overline{AB}\ y\ \overline{ED}$ y la secante $\overline{BC}$ o como se mencionó en el análisis a priori, por ser el complemento del ángulo β . Por lo anterior, podemos señalar que el grupo no realiza una explicación detallada de porque los triángulos BAC y DEC son semejantes, sin embargo, podemos sobreentender que si son conscientes de ello por lo escrito en su desarrollo "*buscamos ángulos iguales en ambos triángulos*" y porque luego señala que los triángulos BAC y DEC son semejantes al identificar ángulos iguales en ambos triángulos, justificándolo con el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Para la parte b) el grupo de Alexandra realiza una conversión del registro figural al algebraico, que se evidencia con la proporción de semejanza $\frac{H}{15} = \frac{1{,}5}{3}$ al comparar de ambos triángulos el cateto vertical con el cateto horizontal (elementos homólogos).

Luego resolvieron la ecuación formada y hallaron el valor de $H = 7{,}5$m. No explican con detalle la resolución de la ecuación, es decir el grupo prácticamente no realiza un tratamiento en el registro algebraico; sin embargo, creemos que realizaron la operación: $H = \frac{(1{,}5)(15)}{3}$. El tratamiento dentro de este registro algebraico no se evidencia porque la resolución de la ecuación es simple.

Luego, el grupo de Alexandra abrió el archivo SEM-ACT1-PREG1 de GeoGebra y con la herramienta medida de distancias  corroboró que la altura de la torre obtenida con lápiz y papel es de 7,5m.

Se puede observar que el grupo de Alexandra movilizó el concepto de semejanza de triángulos a través de las aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, aunque esta última, no ha sido muy detallada.

El ***item c) de la pregunta 1 es:***

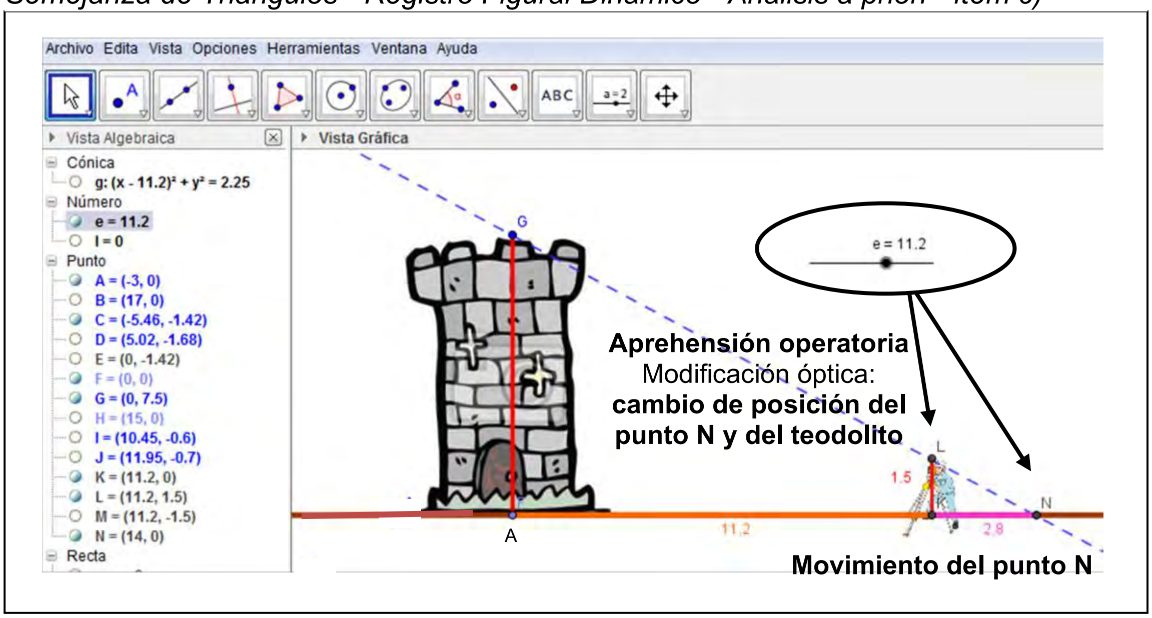
Si la piedra la movemos 1m, en línea recta hacia la torre, ¿A qué distancia de la torre se debe instalar el teodolito, de manera que, siempre la visual de su lente pase por la parte superior de la torre y la piedra? Use la altura de la torre encontrada en la parte a). Movilice el deslizador (e) *y compruebe la respuesta.*

Análisis a priori (1-c)

En este ítem, pensamos que los estudiantes tendrían alguna dificultad para representar el problema a través de un registro figural, debido al movimiento que sufrirá el teodolito como consecuencia del movimiento de la piedra, presentándose probablemente una obstrucción en su planteamiento. Pensamos que el GeoGebra es la herramienta adecuada para que los grupos comprendan mejor el problema gracias al dinamismo que les proporciona el deslizador **e** del archivo del programa. Luego, los grupos deberían abrir el archivo de GeoGebra SEM-ACT1-PREG1 en donde encontrarán un registro figural que contiene un deslizador **e.** Al cambiar de valores del deslizador **e**, deberían lograr que el punto N que representa a la piedra, se movilice una unidad hacia la base de la torre, tal como se observa en la figura 34.

Figura 34

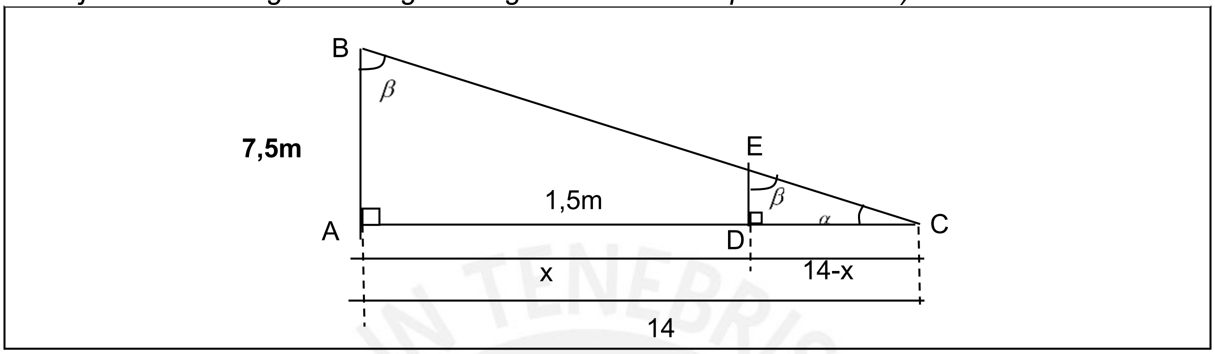
Semejanza de Triángulos - Registro Figural Dinámico - Análisis a priori - ítem c)



Esperamos que los grupos con este registro figural, puedan hacer una aprehensión operatoria, a través de una modificación óptica debido a que al cambiar de posición al punto N, la posición del teodolito también cambia, de esta manera se deforma la figura inicial a pesar de seguir manteniendo triángulos rectángulos. Luego, a partir del registro figural dinámico observado en el GeoGebra, deberían hacer un registro figural usando lápiz y papel tal como se observa en la figura 35.

Figura 35

Semejanza de Triángulos - Registro Figural - Análisis a priori - ítem c)



A partir de este registro figural, los grupos por medio de sus aprehensiones perceptivas y discursivas deberían identificar el par de triángulos semejantes y luego comprobarlos con el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA), tal como lo hicieron en el ítem a), es decir:

- Del ΔBAC, si el grupo asume: $m\angle ACB = \alpha$ y $m\angle ABC = \beta$, entonces $\alpha + \beta = 90°$.
- Del $\Delta\ EDC$, si $m\angle DCE = \alpha$ y $\alpha + \beta = 90°$, entonces $m\angle DEC = \beta$.

$$\begin{aligned} Si:\ & m\angle ABC = m\angle DEC = \beta \\ & m\angle ACB = m\angle DEC = \alpha \\ & m\angle BAC = m\angle EDC = 90° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Entonces: & \Delta BAC \sim \Delta EDC \\ & (criterio\ AAA) \end{aligned}$$

Enseguida esperamos que los grupos formen la proporción de semejanza a partir de relacionar sus lados homólogos: $\frac{14}{7,5} = \frac{14-x}{1,5}$, realizando así una conversión al cambiar del registro figural al algebraico. Luego en este registro, a través de tratamientos, deberían resolver dicha ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{14}{7,5} = \frac{14-x}{1,5}$$

$$21 = 105 - 7{,}5x$$
$$7{,}5x = 84$$
$$x = 11{,}2m$$

Los grupos realizarían entonces, transformaciones de representación semiótica puesto que realizarían tratamientos en el registro figural y en el algebraico. Además, realizarían una conversión al cambiar del registro figural al algebraico.

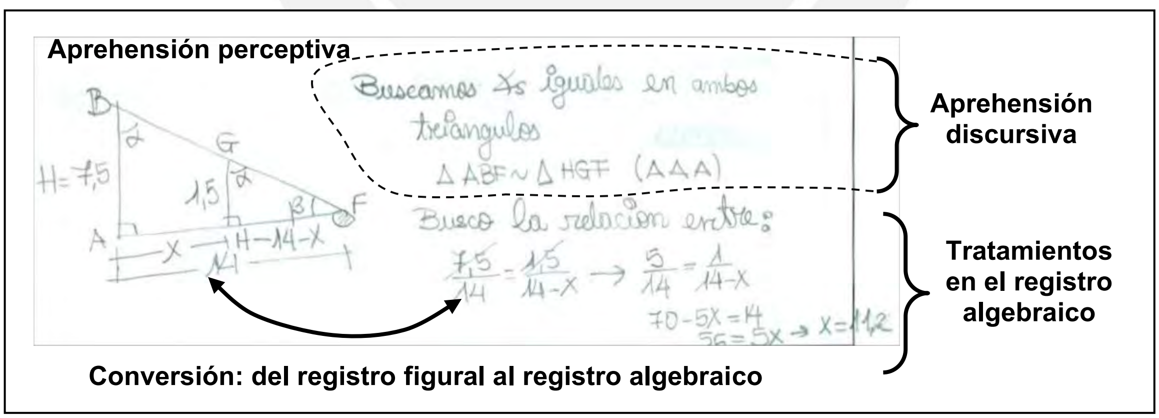
Por lo mencionado líneas atrás se espera que, a través de la coordinación entre los registros figural y algebraico, los grupos hallen la distancia de la torre a la nueva posición del teodolito al movilizar el concepto de semejanza de triángulos entre los triángulos ΔBAC y ΔEDC ($\Delta BAC \sim \Delta EDC$), usando para ello el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA) y su proporción respectiva; y respondan que la distancia entre la torre y el teodolito es 11,2m

Análisis a posteriori (1-c) – trabajo del grupo de Alexandra

A continuación, en la figura 36 el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 36

Cambio del Registro Figural al Algebraico - Trabajo del grupo de Alexandra - ítem c)



El grupo de Alexandra inicialmente tuvo problemas para pasar del registro de lengua natural (enunciado) al registro figural, debido a que no se percataron que al cambiar la posición de la piedra esto también modificaba la posición del teodolito, lo que conllevó a que el grupo realizara un registro figural errado; luego, al manipular el deslizador **e** del archivo del GeoGebra, el grupo pudo tener un nuevo enfoque del problema, observaron el movimiento simultáneo de la piedra y el teodolito logrando que su registro figural sea el adecuado, tal como se muestra en la figura 36.

Al igual que en los ítems anteriores el grupo de Alexandra no señala que los ángulos α y β fueron creados por el grupo; ángulos que son la base, para demostrar luego la semejanza de los triángulos BAF y GHF. El grupo de Alexandra en su desarrollo tampoco explica porqué la $m\angle ABF = m\angle HGF = \alpha$, que como ya se mencionó anteriormente, esto se podría comprobar a través de ángulos complementarios en el triángulo rectángulo. El grupo de Alexandra no realiza una explicación detallada de porqué los triángulos BAF y GHF son semejantes, sin embargo, podemos sobreentender que sí son conscientes de ello por lo escrito en su resolución "*buscamos* $\angle s$ *iguales en ambos triángulos*" y porque luego, el grupo reconoce que los triángulos BAF y GHF son semejantes al identificar ángulos iguales en ambos triángulos, justificándolo con el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Se observa luego, que el grupo realiza una conversión del registro figural al algebraico, que se evidencia con la proporción de semejanza $\frac{14}{7{,}5} = \frac{14-x}{1{,}5}$ al comparar, de ambos triángulos, el cateto horizontal con el cateto vertical (elementos homólogos).

Luego en este registro algebraico, a través de tratamientos, resolvieron la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{14}{7{,}5} = \frac{14-x}{1{,}5}$$

$$21 = 105 - 7{,}5x$$

$$7{,}5x = 84$$

$$x = 11{,}2m$$

No son explícitos en dar la respuesta a la pregunta, pero en su desarrollo se observa que el valor de x es 11,2m.

Observamos que el grupo de Alexandra realizó tratamientos dentro del registro algebraico y realizó conversiones al cambiar del registro figural al algebraico.

El grupo de Alexandra cuando trabajó en el registro figural, realizó una aprehensión operatoria, a través de una modificación óptica debido a que al cambiar de posición al punto N, la posición del teodolito también cambia; de esta manera se deforma la figura inicial a pesar de seguir manteniendo triángulos rectángulos. Asimismo, el grupo logró aprehensiones de tipo perceptivo, operativo y discursivo, que les permitió seguir un proceso deductivo, desembocando estas acciones en la solución del ítem y movilizando así el concepto de semejanza de triángulos.

El ítem d) de la pregunta 1 es:

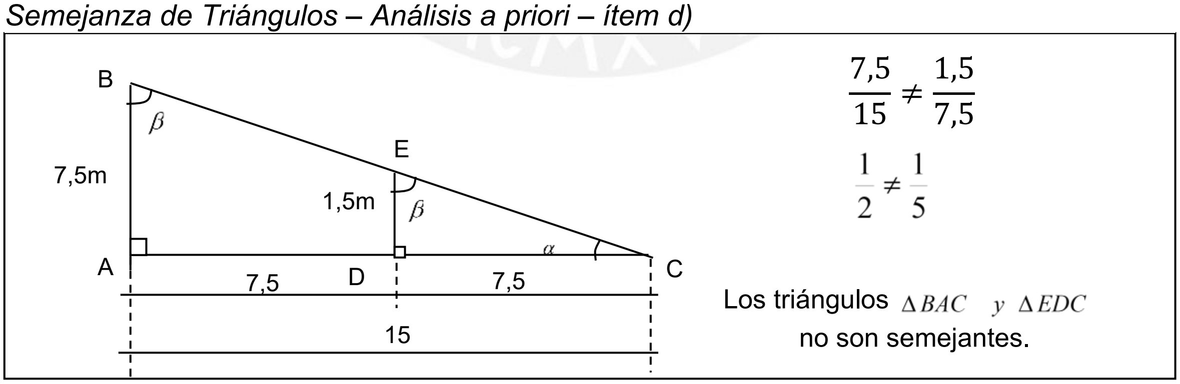
¿Existe la posibilidad de seguir moviendo el teodolito de manera que este se encuentre equidistante a la piedra y a la base de la torre? Justifique su respuesta. (Tome en cuenta el tamaño de la torre encontrada en la parte a). Movilice el deslizador e y compruebe su respuesta.

Análisis a priori (1-d)

Se espera que los grupos realicen un registro figural acorde con el texto, es decir que realicen un cambio de registro de lengua natural al registro figural (conversión), sin embargo, pensamos que probablemente se equivocarán debido al parecido que hay con los ítems anteriores y, por lo tanto, creemos que realizarían un registro figural errado, tal como se muestra en la figura 37.

Figura 37

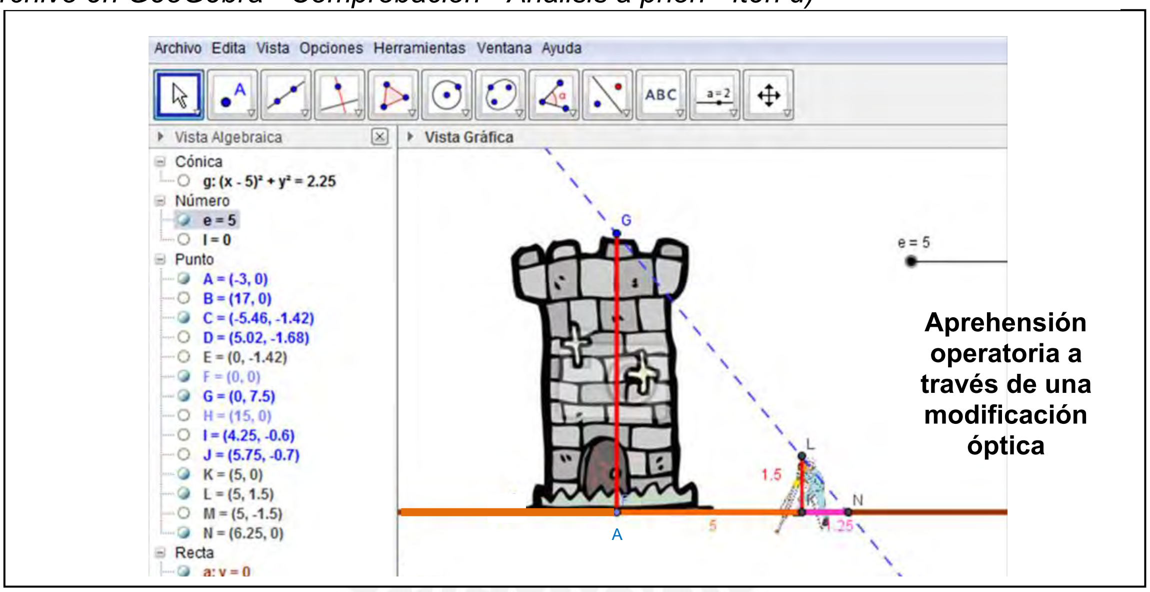
Semejanza de Triángulos – Análisis a priori – ítem d)



Realizado este registro figural aparentemente correcto, esperamos que los grupos planteen la proporción de semejanza al comparar sus catetos (vertical/horizontal), resultándoles la relación incorrecta: $\frac{7,5}{15} = \frac{1,5}{7,5}$ o $\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Buscamos que la proporción de semejanza que compara las longitudes de los catetos y que funcionó en los ítems anteriores, esta vez, no cumpla, para "romper" el proceso algorítmico que se podría estar insertando en los grupos de manera indirecta. Los grupos al ser conscientes que $\frac{7{,}5}{15} \neq \frac{1{,}5}{7{,}5}$, se preguntarán quizás ¿Por qué tenemos esta desigualdad, si en nuestro registro figural parece que sí cumple?; Ante esta situación se les sugerirá que, para despejar sus dudas, usen el archivo de GeoGebra que se les proporcionó y que movilicen el deslizador **e**, tal como se puede apreciar en la figura 38.

Figura 38

Archivo en GeoGebra - Comprobación - Análisis a priori - íten d)

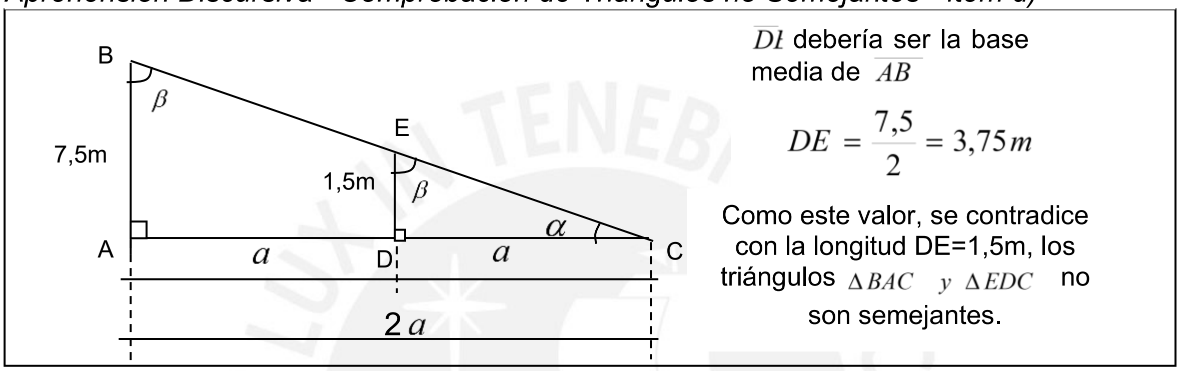


Los grupos, al cambiar de posición al punto N(piedra) y al teodolito a través del deslizador, deberían percatarse que ubicar el teodolito en un punto equidistante entre la piedra y la torre es imposible y por ello esperamos que sean capaces de relacionar el registro figural con el registro algebraico para poder justificar por qué la proporción obtenida anteriormente, es incorrecta. Los grupos realizarían dentro del registro figural dinámico, una aprehensión operatoria a través de una modificación óptica, esto debido a que la figura inicial sufre una deformación a pesar de que aún se observan dos triángulos rectángulos.

En este ítem, los grupos deberían realizar aprehensiones discursivas que fundamenten la imposibilidad de lograr ubicar el teodolito en una posición equidistante entre la torre y la piedra, así por ejemplo usando el criterio de la base media, los grupos observarán que la longitud del teodolito representa una base media, y que debe ser igual a la mitad de la longitud de la torre, tal como se muestra en la figura 39.

Figura 39

Aprehensión Discursiva - Comprobación de Triángulos no Semejantes - ítem d)



Creemos que por medio de este ejemplo los grupos aprenderán que un registro figural dado por el lápiz y el papel no necesariamente refleja la realidad de la pregunta, puede ser construido dando la apariencia de ser correcta tal como se mostró en la figura 37, sin embargo, no lo es, porque la relación numérica obtenida, contradice lo mostrado en dicha figura. Por lo tanto, se debe tener cuidado con la aprehensión perceptiva, para no asumir algo incorrecto como correcto.

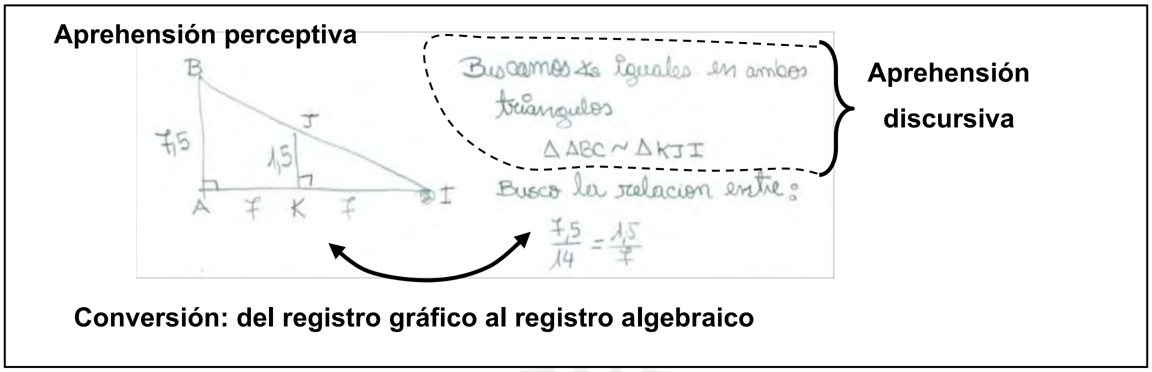
Análisis a posteriori (1-d) – trabajo del grupo de Alexandra

El grupo de Alexandra realizó un registro figural con base al enunciado, pero asumieron que la distancia de la torre a la piedra es de 14m, cuando la distancia inicial en la actividad era de 15m; suponemos que esto sucedió porque tomaron como referencia la distancia encontrada $AI = 14m$ del ítem c). Sin embargo, esto no modifica la respuesta del ítem.

A continuación, en la figura 40, el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 40

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem d)



El grupo de Alexandra tomó como base los planteamientos de los ítems anteriores, por lo que realizó un registro figural donde aparecen dos triángulos rectángulos aparentemente semejantes. Su desarrollo no muestra ángulos que den la idea de tener dos triángulos con ángulos de igual medida, sin embargo, asumen que los triángulos ABC y KJC son semejantes, sin mayor justificación. Cometen un error de percepción y forman la supuesta proporción de semejanza $\frac{7,5}{14} = \frac{1,5}{7}$. Existe en el grupo de Alexandra un conflicto en su razonamiento al observar una contradicción entre lo que le señala el registro figural realizada por ellos y lo que obtienen de la proporción. Luego usaron el archivo del GeoGebra que se les proporcionó, y a través de su aprehensión operatoria de modificación óptica comprendieron que es imposible colocar el teodolito en una posición equidistante entre la piedra y la torre. Esto provocó en el grupo un nuevo conflicto; por un lado, el registro figural dinámico del GeoGebra les ayuda a confirmar que la situación pedida no podría darse jamás, confirmando lo encontrado con la supuesta proporción de semejanza $\frac{7,5}{14} \neq \frac{1,5}{7}$, sin embargo, no saben relacionar dichos resultados para justificar por medio de una proporción que el teodolito no puede equidistar de la torre y de la piedra.

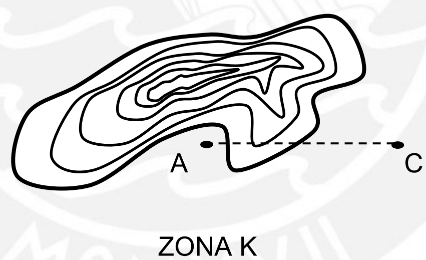
Creemos que el grupo de Alexandra a pesar de no dar respuesta al ítem, aprendieron que un registro figural realizado con lápiz y papel no necesariamente refleja la realidad de la pregunta, es decir que un registro figural puede ser construido dando la apariencia de ser correcta tal como se mostró en la figura 37, sin embargo, no lo es, porque sus datos contradicen lo mostrado en dicha figura. Por lo tanto, el grupo de Alexandra, realizó aprehensiones perceptivas, pero con problemas en la operatoria y discursiva y no fueron capaces de dar respuesta a este ítem, a pesar de comprobar con el GeoGebra la imposibilidad de colocar el teodolito equidistante con la torre y la piedra, por lo que no se pudo movilizar en este caso el concepto de semejanza de triángulos. Además, podemos indicar que el uso del GeoGebra en los ítems c) y d), ha sido importante para que los grupos tengan una mejor comprensión del problema planteado, pero que no basta, si los grupos no tienen claro el concepto de semejanza de triángulos.

El enunciado de la pregunta 2 de la actividad 1 se encuentra en la figura 41.

Figura 41

Enunciado de la pregunta 2 de la Actividad 1

2. Un topógrafo necesita hallar la distancia entre los puntos A y C, pero como no se puede medir directamente porque se encuentran separados por un cerro, entonces un Ingeniero con el teodolito hace alineaciones a partir de su ubicación en B que se encuentra en la ZONA K; de tal manera que sobre el segmento $\overline{AB}$ ubica un punto D y sobre el segmento $\overline{BC}$ ubica un punto E, siendo $\overline{DE}//\overline{AC}$.



Entonces:

a) Ubique los puntos B, D y E en el gráfico mostrado y luego diga ¿Que par de triángulos son semejantes? Justifique su respuesta.

b) Si el topógrafo encontró que $AB = 20m$, $DB = 16m$ y $DE = 6m$, ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AC}$?. Justifique su respuesta.
Luego abre el archivo SEM-ACT1-PREG2 y compruebe su respuesta.

c) ¿Es posible que el Ingeniero tome otro punto B en el terreno, tal que se mantenga los datos de la parte b) y se obtenga la misma medida para el segmento $\overline{AC}$?. En el archivo SEM-ACT1-PREG2 movilice B y conteste la pregunta, justificando su respuesta.

A continuación, presentamos el respectivo análisis de la pregunta 2, para cada ítem.

> ***El ítem a) y b) de la pregunta 2 es:***
>
> a) *Ubique los puntos B, D y E en el gráfico mostrado y luego diga ¿Que par de triángulos son semejantes? Justifique su respuesta.*
>
> b) *Si el topógrafo encontró que* $\mathbf{AB = 20m}$, $\mathbf{DB = 16m}$ **y** $\mathbf{DE = 6m}$, *¿Cuál es la longitud del segmento* $\mathbf{AB = 20m}$ *? Justifique su respuesta.*

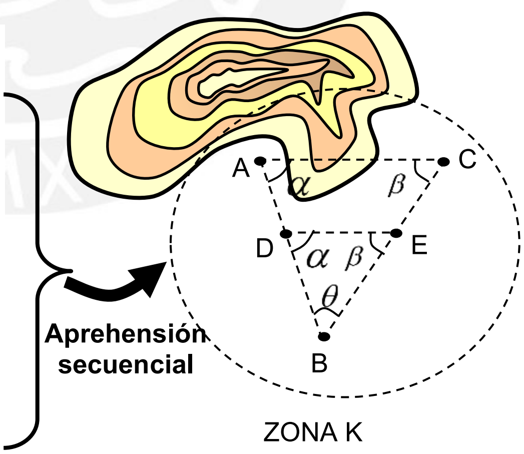
Análisis a priori (2-a y 2-b)

Para la parte a), los grupos no cuentan con ningún archivo de GeoGebra, pero esperamos que puedan realizar conversiones de un registro de lengua natural a un registro figural que cumpla con las condiciones descritas en el problema, para ello en la zona K, deberían ubicar un punto B y luego un punto D, sobre el segmento $\overline{AB}$ y un punto E sobre el segmento $\overline{BC}$, de manera que se cumpla la condición $\overline{DE}//\overline{AC}$. Estas acciones realizadas correctamente, indicarían que los grupos estarían desarrollando una *aprehensión secuencial*, y en consecuencia deberían obtener un registro figural similar al que vemos en la figura 42.

Figura 42

Aprehensión Secuencial - Análisis s priori - ítem a)

Se sigue la siguiente secuencia de construcción:
…a partir de su ubicación en B que se encuentra en la zona K, de tal manera que sobre el segmento $\overline{AB}$ ubica un punto D y sobre el segmento $\overline{BC}$ ubica un punto E, siendo $\overline{DE}$ // $\overline{AC}$.
a) Ubique los puntos B, D y E en el gráfico mostrado y luego diga ¿Qué par de triángulos son semejantes?



Tomando como base el registro figural de la figura 42, los grupos al saber que $\overline{DE}//\overline{AC}$ por dato del problema, deberían reconocer la pareja de ángulos correspondientes a través de aprehensiones discursivas, de la siguiente manera:

En el $\triangle\ ABC$ deberían asumir que $m\angle BAC = \alpha$, $m\angle BCA = \beta$ y $m\angle ABC = \theta$

Como $\overline{DE}//\overline{AC}$, entonces por las propiedades de ángulos entre paralelas y una recta secante, tenemos:

- $m\angle BAC = m\angle BDE = \alpha$ por ser ángulos correspondientes
- $m\angle BCA = m\angle BED = \beta$ por ser ángulos correspondientes
- $m\angle ABC = m\angle DBE = \theta$ por tener los mismos lados y el mismo vértice B.

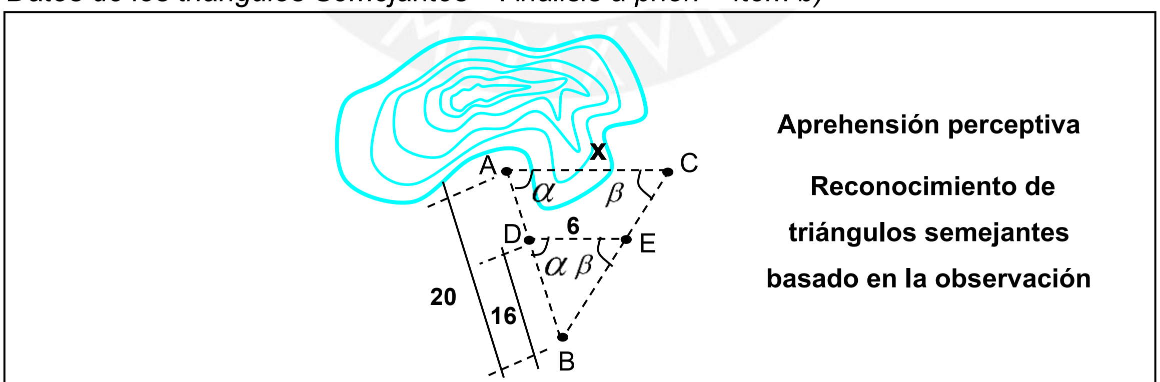
Al ser iguales estas parejas de ángulos, los grupos deberían justificar la semejanza de triángulos $\Delta BAC \sim \Delta BDE$, porque cumple con el primer criterio de la semejanza de triángulos (AAA) y de esta manera contestar el ítem a) de esta pregunta.

Por medio de este ítem, estamos promoviendo una conversión, cuando se cambia del registro de lengua natural al registro figural, es decir, pasar del enunciado a un gráfico que la represente. Asimismo, esperamos que los grupos desarrollen aprehensiones secuenciales, perceptivas y discursivas.

Para la parte b), esperamos que los grupos incorporen en su registro figural los datos: $AB = 20m, DB = 16m\ y\ DE = 6m$, tal como se observa en la figura 43.

Figura 43

Datos de los triángulos Semejantes – Análisis a priori – ítem b)



Como los grupos ya demostraron la semejanza de triángulos $\Delta BAC \sim \Delta BDE$ en el ítem anterior, a continuación, deberían formular la proporción de semejanza: $\frac{x}{20} = \frac{6}{16}$, de esta manera los grupos realizarían una conversión del registro figural al algebraico.

Luego en este registro, a través de tratamientos, deberían resolver dicha ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{x}{20} = \frac{6}{1,6}$$
$$x = \frac{20(6)}{16}$$
$$x = 7,5m$$

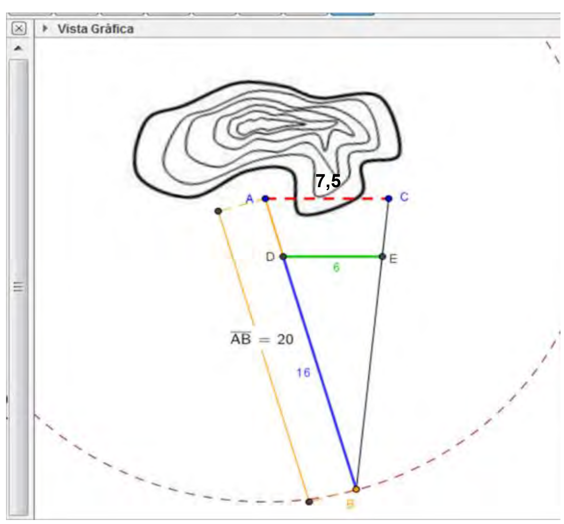
Por consiguiente, se espera que, a través de la coordinación entre los registros figural y algebraico, los grupos hallen la distancia entre los puntos A y C al movilizar el concepto de semejanza de triángulos entre los triángulos $\Delta BAC\ y\ \Delta BDE$ $(\Delta BAC \sim \Delta BDE)$ usando el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA) y su proporción respectiva; y respondan: la distancia entre los puntos A y C es 7,5m

Luego los grupos deberían abrir el archivo **SEM-ACT1-PREG2**, para que con la herramienta 

puedan corroborar la distancia pedida, obteniendo $x = 7,5m$, tal como se observa en la figura 44.

Figura 44

Registro Figural Dinámico - Análisis a priori - ítem b)



Registro figural dinámico para corroborar la longitud de $\overline{AC}$

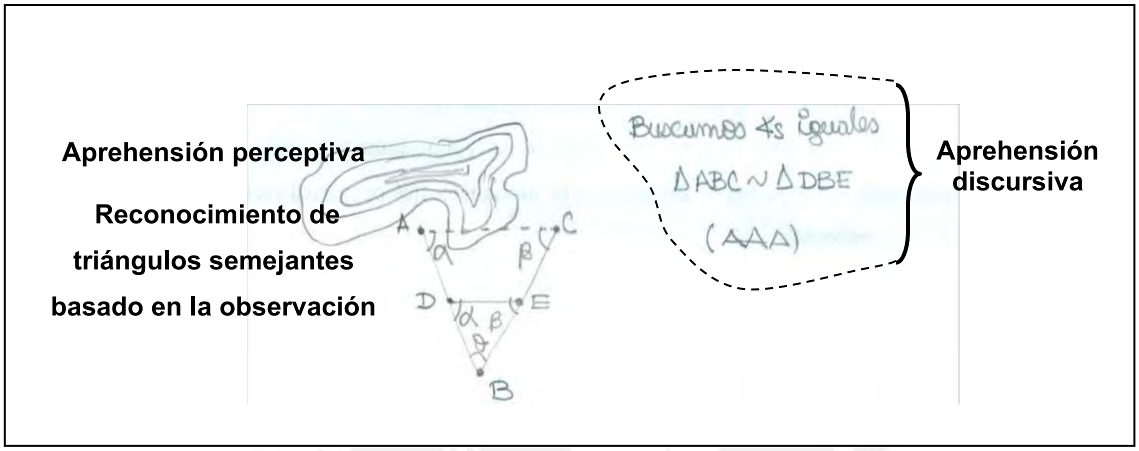
Los grupos realizarían entonces, transformaciones de representación semiótica puesto que realizarían tratamientos en el registro algebraico y conversiones al cambiar del registro figural al algebraico.

Análisis a posteriori (2-a y 2-b) – trabajo del grupo de Alexandra

A continuación, en la figura 45 el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 45

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem a)



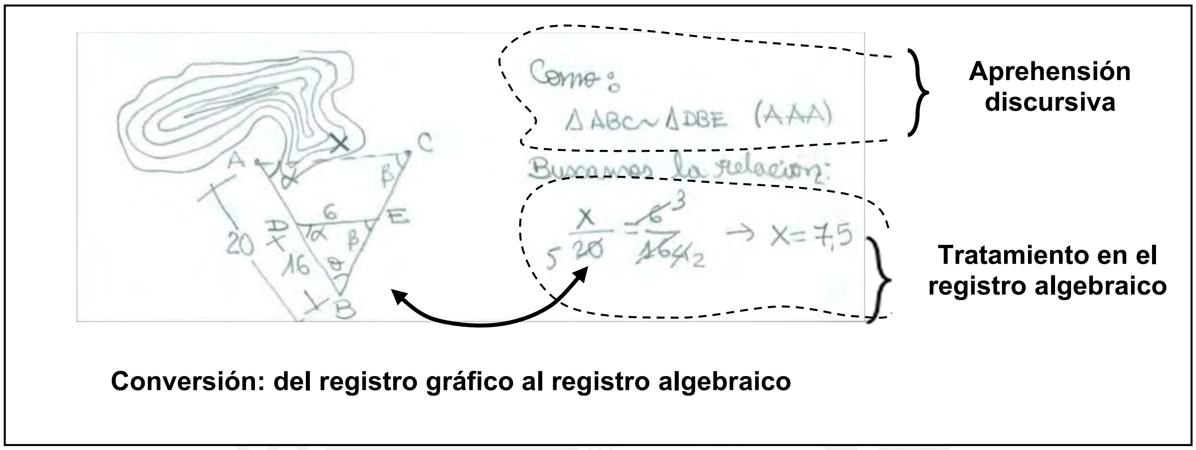
Al inicio, el grupo de Alexandra dudaba de la ubicación correcta del punto B, por lo que se le aconsejó simplemente seguir las instrucciones del enunciado y respete las condiciones pedidas en el ítem. Luego, ubicaron el punto B en la zona K, el punto D sobre el segmento $\overline{AB}$ y el punto E sobre el segmento $\overline{BC}$, de manera que cumplieron la condición: $\overline{DE}//\overline{AC}$, realizando una aprehensión secuencial. Enseguida, el grupo creó los ángulos α y β como ángulos internos de A y C y los replicó en los ángulos $\angle BDE = \alpha\ \ y\ \angle BED = \beta$, pero sin justificarlos; sin embargo, para llegar a esa conclusión, creemos que conocen el concepto de ángulos correspondientes en ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante. Luego, señalaron que los triángulos $\Delta BAC\ y\ \Delta BDE$ son semejantes ($\Delta BAC \sim \Delta BDE$) pero no hacen explícita la justificación, solo mencionan que buscan ángulos iguales, por lo que entendemos que se refieren a tener dos triángulos con ángulos internos iguales. Al final de su desarrollo el grupo señala que los triángulos cumplen con el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Por lo anterior, podemos decir que el conjunto de acciones que realizó el grupo de Alexandra, desembocó en un proceso deductivo logrando así la solución del ítem, a pesar de sus limitaciones en su explicación y movilizando así el concepto de semejanza de triángulos.

A continuación, en la figura 46 mostramos el trabajo realizado por el grupo de Alexandra, para la parte b).

Figura 46

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem b)



En el ítem 2-a) el grupo de Alexandra ya había comprobado la semejanza de triángulos entre: $\Delta BAC \sim \Delta BDE$ (criterio de semejanza de triángulos AAA), por lo que a continuación formaron la proporción de semejanza: $\frac{x}{20} = \frac{6}{16}$, realizando una conversión al cambiar del registro figural al algebraico. Luego dentro de este registro el grupo realizó tratamientos que permitieron encontrar la distancia entre los puntos A y C de la siguiente manera:

$$\frac{x}{20} = \frac{6}{1{,}6}$$

$$x = \frac{20(6)}{16}$$

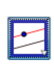
$$x = 7{,}5m$$

Luego, el grupo corroboró la respuesta obtenida algebraicamente utilizando la herramienta distancia () en el archivo de GeoGebra que se les proporcionó, señalando que la distancia entre A y C es de 7,5m.

El grupo de Alexandra aparte de realizar una conversión del registro, del figural al algebraico, registro mediante el cual el grupo dio respuesta al ítem a través de tratamientos; el grupo logró desarrollar aprehensiones de tipo perceptivo y discursivo. Por lo anterior, podemos afirmar que el conjunto de acciones que realizó el grupo de Alexandra, desembocó en la solución del ítem, movilizando así el concepto de semejanza de triángulos.

El ítem c) de la pregunta 2 es:
¿Es posible que el Ingeniero tome otro punto B en el terreno, tal que se mantenga los datos de la parte b) y se obtenga la misma medida para el segmento $\overline{AC}$?. En el archivo SEM-ACT1-PREG2 movilice B y conteste la pregunta, justificando su respuesta.

Análisis a priori (2-c)

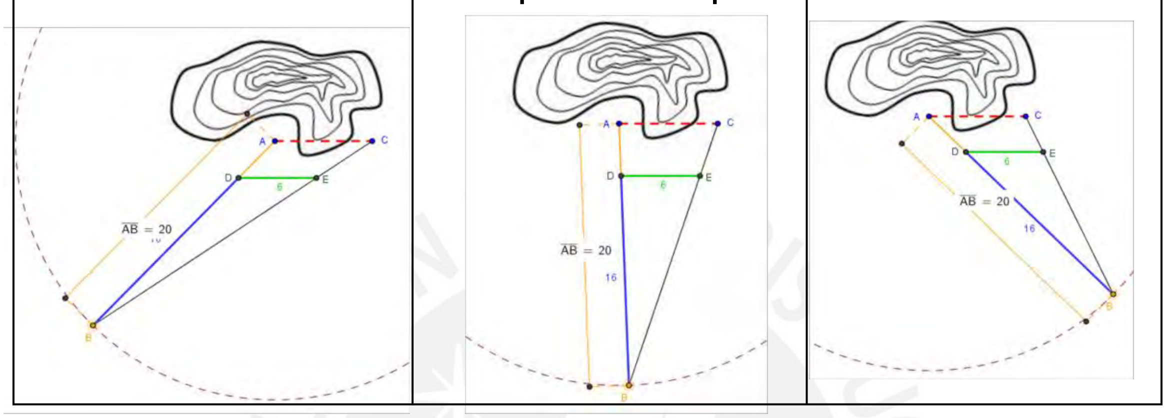
Creemos que cuando los grupos quieran ubicar otra posición para el punto B en la zona K, entrarán en duda porque no están seguros si dentro de esta zona K, exista uno o más puntos B que cumplan con la condición pedida, es decir que se mantenga las siguientes longitudes $AB = 20m,\ DB = 16m,\ DE = 6m$ y que $\overline{DE}//\overline{AC}$. Por ello, en este problema le daremos a los grupos unos 10 minutos sin el uso del GeoGebra para que intenten darle solución al ítem. Pasado este tiempo, se les proporcionará el archivo de GeoGebra denominado **SEM-ACT1-PREG2** de tal manera que los grupos, al manipular con el mouse el punto B, sean capaces en este ambiente dinámico, de dar respuesta a este ítem. Al arrastrar y movilizar el punto B, deberían comprobar que existen infinitos puntos B que se encuentran en la zona K que cumplen con lo pedido y que lo que fundamenta es el uso del lugar geométrico denominado: circunferencia. También deberían comprobar que $\overline{DE}//\overline{AC}$ para cualquier posición del punto B, a través de la herramienta Paralela (). Los estudiantes entonces estarían movilizando una aprehensión operatoria a través de una modificación posicional.

El uso del GeoGebra en esta pregunta, permitirá a los grupos observar diferentes posiciones de B y de los segmentos $\overline{DE}\ y\ \overline{AC}$ en tiempo real, comprobando que las distancias $AB = 20m, DB = 16m,\ \ DE = 6m$ se mantienen siempre y que las propiedades de la circunferencia ayudan a corroborarlo. Este registro permite demostrar lo que un registro figural realizado con lápiz y papel no puede realizar, por ser rígido, tal como se observa en la figura 47.

Figura 47

Aprehensión Operatoria - Modificación Posicional - Análisis a priori - ítem c)

Diferentes posiciones del punto B



Los grupos deberían desarrollar una aprehensión discursiva para justificar la semejanza de los triángulos BAC y BDE a través del criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA), de la siguiente manera:

En el $\Delta\, ABC$ los grupos deberían inventar los ángulos $\alpha, \beta\ y\ \theta$, de tal manera que $m\angle BAC = \alpha, m\angle BCA = \beta\ y\ m\angle ABC = \theta$

Como $\overline{DE}//\,\overline{AC}$, entonces por medio de las propiedades de ángulos formados por líneas paralelas y una secante, deberían encontrar las siguientes relaciones:

- $m\angle BAC = m\angle BDE = \alpha$ por ser ángulos correspondientes
- $m\angle BCA = m\angle BED = \beta$ por ser ángulos correspondientes
- $m\angle ABC = m\angle DBE = \theta$ por tener los mismos lados y el mismo vértice B.

Al ser iguales estas parejas de ángulos, deberían justificar la semejanza de triángulos $\Delta BAC \sim \Delta BDE$, porque cumple con el primer criterio de la semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Luego los grupos deberían realizar un cambio de registro del registro figural al algebraico al escribir la proporción de semejanza: $\frac{x}{20} = \frac{6}{16}$. Luego en este registro deberían realizar tratamientos para encontrar la distancia entre los puntos A y C de la siguiente manera:

$$\frac{x}{20} = \frac{6}{16}$$

$$x = \frac{20(6)}{16}$$

$$x = 7{,}5m$$

Deberían de llegar a la misma respuesta del ítem 1-b.

En este ítem los grupos realizarían tratamientos en el registro figural y algebraico, y una conversión al cambiar del registro figural al registro algebraico. Dentro del registro figural dinámico, los estudiantes deberían realizar aprehensiones operatorias al hacer modificaciones posicionales. Por lo tanto, los grupos deberían desarrollar aprehensiones de tipo perceptivo, operatorio y discursivo, que, al ser acciones correctas por los grupos, éstos llegarían a la solución del ítem, movilizando así el concepto de semejanza de triángulos.

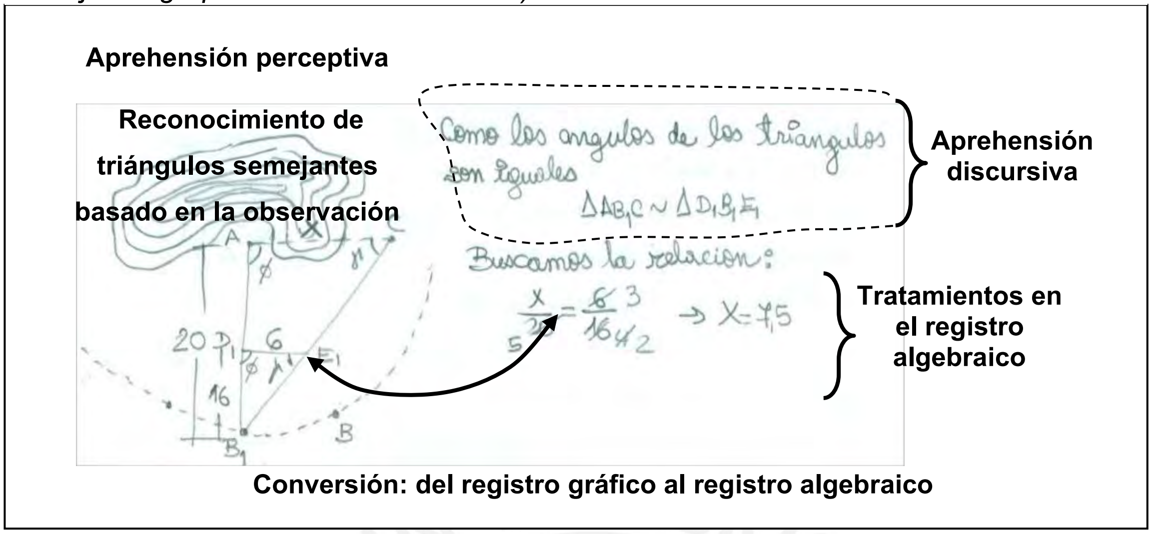
Análisis a posteriori (2-c) – trabajo del grupo de Alexandra

Al comienzo el grupo de Alexandra hizo el registro figural en lápiz y papel, pero manifestó que no había la seguridad de que el dibujo realizado era el correcto, provocando en el grupo un obstáculo para resolver el ítem. Luego abrieron el archivo **SEM-ACT1-PREG2** y empezaron a arrastrar el punto B logrando averiguar que gracias a la circunferencia existen diferentes posiciones de B en la zona K. Averiguaron también que, a diferentes posiciones de B, las longitudes de los segmentos $AB = 20m$, $DB = 16m$ y $DE = 6m$ se mantienen, al igual que la condición $\overline{DE}//\overline{AC}$. Entonces el grupo de Alexandra, desarrolló una aprehensión operatoria al realizar una modificación posicional en el registro figural dinámico que proporcionó el archivo de GeoGebra.

A continuación, en la figura 48 el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 48

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem c)



El grupo de Alexandra realizó una aprehensión discursiva para justificar la semejanza de triángulos $\Delta BAC \sim \Delta BDE$, pero sin ser detallista. No señala de dónde aparecen los ángulos α y β ni porqué los ángulos BAC y BCA son congruentes con los ángulos BDE y BED respectivamente. Además, el grupo encontró que los triángulos BAC y BDE son semejantes por el criterio AAA, porque las medidas de sus ángulos son iguales. Luego realizaron un cambio de registro del registro figural al algebraico, al formular la proporción de semejanza: $\frac{x}{20} = \frac{6}{16}$, registro mediante el cual hallaron el valor de x , a través de tratamientos de la siguiente manera:

$$\frac{x}{20} = \frac{6}{16}$$

$$x = \frac{20(6)}{16}$$

$$x = 7{,}5m$$

El grupo de Alexandra realizó tratamientos dinámicos cuando observó las diferentes posiciones del punto B y del segmento $\overline{DE}$, al movilizar el deslizador e y mantener la misma proporción entre $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$ y el paralelismo entre $\overline{DE}$ y $\overline{AC}$, así como tratamientos en el registro algebraico al resolver la ecuación resultante de la proporción de semejanza. El grupo realizó una conversión del registro figural al algebraico y desarrolló aprehensiones de tipo perceptivo, operatorio y discursivos que, al relacionarlos correctamente, llegaron a la solución del ítem movilizando de esta manera el concepto de la semejanza de triángulos.

Actividad 2: Problema sin registro figural (PSRF)– Uso del GeoGebra

Esta actividad consta de una pregunta y no contiene un registro figural. El propósito de esta actividad es movilizar el concepto de semejanza de triángulos en los grupos, para ello, deben realizar primero un cambio de registro de lengua natural al figural, registro en el cual, deben reconocer un par de triángulos semejantes con el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA) para luego, aplicar la proporción de semejanza. El problema planteado no tiene ningún registro figural que ayude a su interpretación, pero si cuenta con un archivo del GeoGebra, que les proporcionará un registro figural dinámico que les facilitará el entendimiento de los problemas planteados. Además, esperamos que los grupos desarrollen las aprehensiones perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria en el registro figural.

El enunciado de la pregunta 1 de la actividad 2 se encuentra en la figura 49.

Figura 49

Enunciado de la pregunta 1 de la Actividad 2

2. Dos árboles se encuentran en las orillas opuestas de un río cuyo ancho es de 24m. Una gaviota que se encuentra en la punta del árbol más pequeño (punto A) de 8m de altura, decide trasladarse a la punta del otro árbol (punto D) de 12m de altura, pero, debe tocar primero un punto P del río que se encuentra en la misma línea que contiene a las bases de los árboles. Abre los archivos Geogebra denominados SEM-ACT2-PREG1-a y SEM-ACT2-PREG1-b y manipula su deslizador, entonces:

a) A que distancia de la base del árbol más pequeño debe encontrarse el punto P, para que ángulo con el que desciende la gaviota al río, sea igual al ángulo con el que asciende del río al otro árbol. Calcule, además, la distancia recorrida por la gaviota.

b) ¿Cuál es la menor distancia que recorre la gaviota que se encuentra en la parte superior del árbol pequeño para ir a la parte superior del árbol grande, pero tocando primero un punto P del río?

c) ¿A qué distancia de la base del árbol más pequeño debe encontrarse dicho punto P, para que la medida del ángulo APB sea de 90°? Calcule, además, la distancia recorrida por la gaviota desde A a B pasando por P. Sugerencia: abrir el archivo SEM-ACT2-PREG1-c

A continuación, presentamos el respectivo análisis de la pregunta 1, para cada ítem.

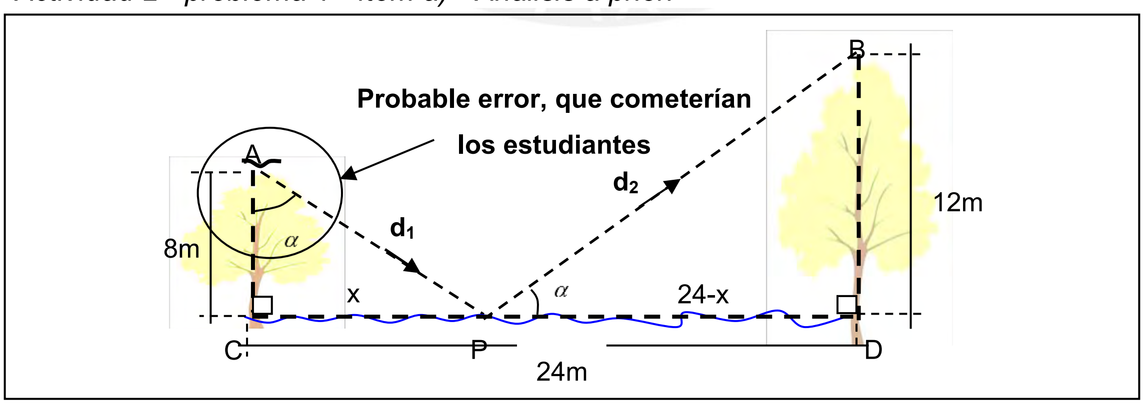
> ***El ítem a) de la pregunta 1 es:***
>
> *A que distancia de la base del árbol más pequeño debe encontrarse el punto P, para que ángulo con el que desciende la gaviota al río, sea igual al ángulo con el que asciende del río al otro árbol. Calcule, además, la distancia recorrida por la gaviota.*

Análisis a priori (1-a)

Con esta pregunta pretendemos que los grupos puedan ser capaces de cambiar del registro lengua natural al registro figural, es decir, interpretar el enunciado del problema y convertirlo en un registro figural; sin embargo, creemos que algún grupo podría tener inconveniente para obtenerlo, al traducir la expresión: “el ángulo con que desciende la gaviota al río, sea igual al ángulo con que asciende del río al otro árbol”, al considerar el ángulo con que desciende la gaviota, es el que forma la trayectoria de la gaviota con la vertical. En relación al ángulo con que asciende, estamos seguros que los grupos considerarán el ángulo formado por la trayectoria de la gaviota con la horizontal, a pesar de no conocer el concepto de ángulo de elevación que se imparte en 5to de secundaria. En la figura 50, se muestra el posible registro figural de los grupos, en caso cometieran el error descrito líneas atrás.

Figura 50

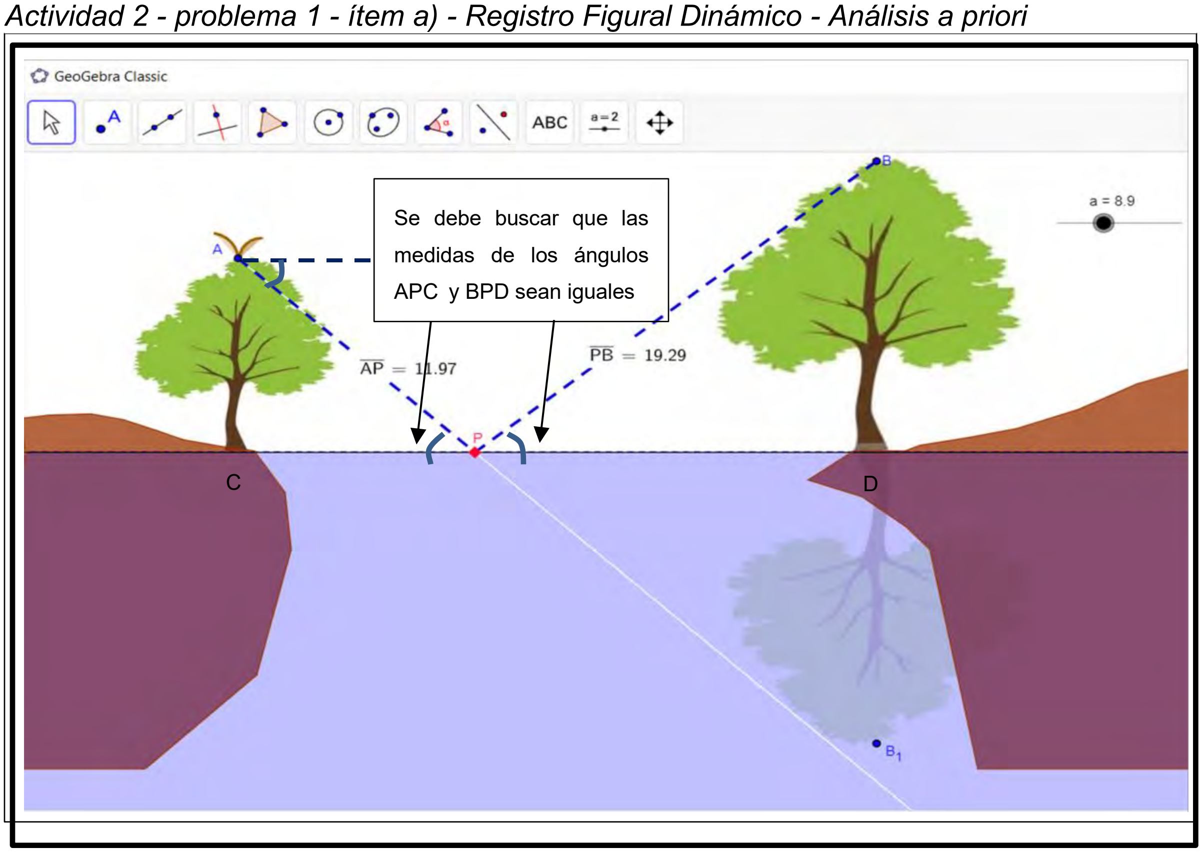
Actividad 2 - problema 1 - ítem a) - Análisis a priori



En relación al texto de la pregunta, creemos que cuando mencionamos que la gaviota asciende con un determinado ángulo, es porque se hace referencia al ángulo formado por la trayectoria de la gaviota y el horizonte; en consecuencia, por analogía creemos que hablar del ángulo con que desciende la gaviota es el ángulo formado por la trayectoria de la gaviota con la horizontal. Estos ángulos que estamos considerando en este problema, son estudiados en 5to de secundaria al desarrollar el tema denominado: ángulos de elevación y depresión. En caso de que los grupos, realicen un registro figural donde el ángulo con que desciende la gaviota al rio, sea el formado por la trayectoria de la gaviota con la vertical, haremos la respectiva aclaración en pizarra, puesto que la pregunta ha sido concebida para que los grupos consideren al ángulo con que desciende al río, la formada por la trayectoria de la gaviota con el horizonte. Luego, los grupos deberían realizar el registro figural adecuado, que será corroborado cuando abran el archivo **SEM-ACT2-PREG1-a ,** el cual, contiene un registro figural dinámico tal como en la figura 51.

Figura 51

Actividad 2 - problema 1 - ítem a) - Registro Figural Dinámico - Análisis a priori

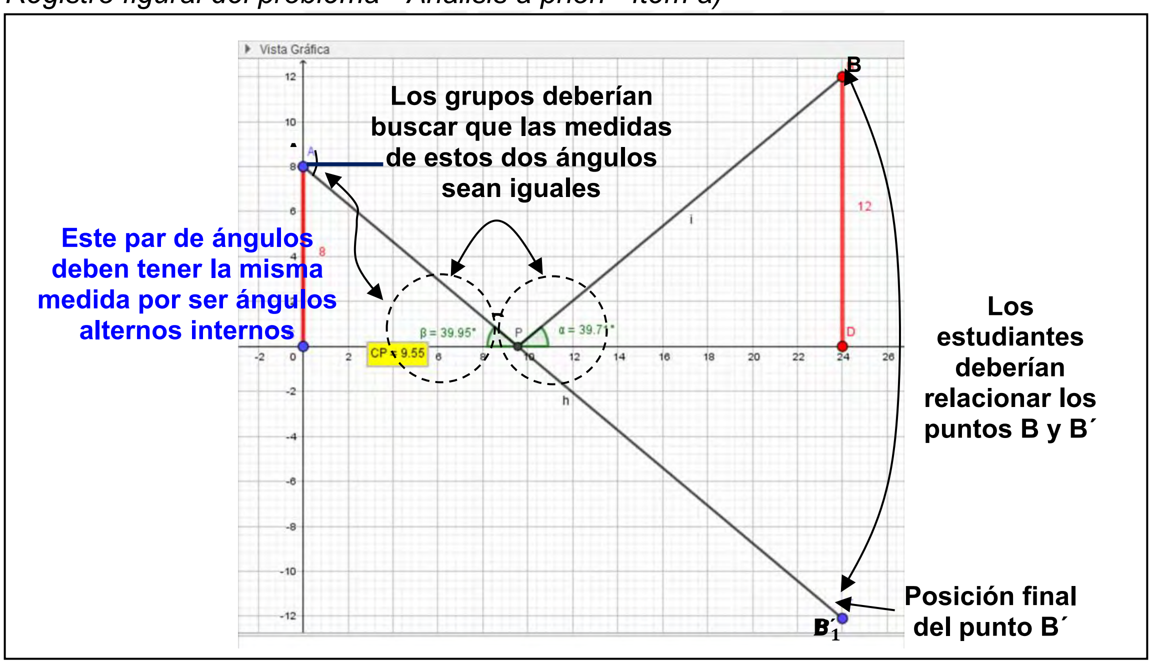


En este archivo, se mostrará un registro figural dinámico, en donde los grupos observarán los puntos A, B y P que señalan las partes superiores de los árboles y el punto de contacto de la gaviota con el río, respectivamente. Asimismo, muestra los segmentos $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ describen la trayectoria de la gaviota para trasladarse de un árbol al otro.

Por otro lado, se muestra el punto $\boldsymbol{B_1}$, que representa el punto simétrico de B con respecto a línea formada por la superficie del río y, un deslizador "a" que, al manipularlo, realiza cambios de posición del punto P. El cambio de posición de este punto P permitirá a los grupos observar el cambio de medida de los ángulos APC y BPD, el cambio de posición de la prolongación de $\overline{AP}$, que se muestra a través de una línea blanca, los cambios de longitudes de $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ y en consecuencia el cambio de valor de la suma $(AP + PB)$, que representa la distancia recorrida por la gaviota. De esta manera, los grupos realizarían tratamientos dinámicos dentro de este registro figural dinámico. Los grupos con la herramienta Ángulo (), deberían obtener la medida de los ángulos $\angle APC\ y\ \angle BPD$ y colocarlos en pantalla, tal como se observa en la figura 52.

Figura 52

Registro figural del problema - Análisis a priori - ítem a)

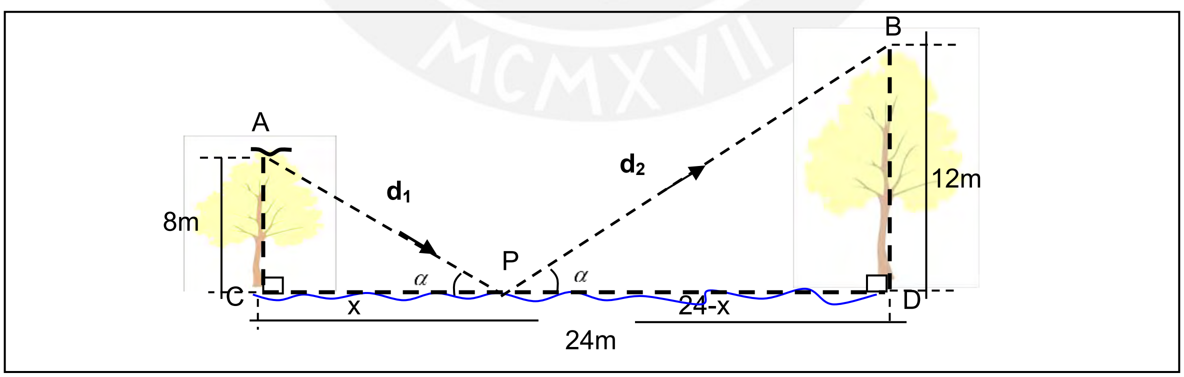


Luego, los grupos deberían cambiar los valores del deslizador a, para lograr cambios de posición del punto P; quien, a su vez provocaría diferentes trayectorias de la gaviota y diferentes valores para los ángulos APC y BPD. Estos cambios del deslizador a se detendrán, cuando las medidas de los ángulos APC y BPD sean iguales, para hacer cumplir la condición angular del problema. En ese instante, los grupos anotarían las longitudes de $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ y obtendrían su suma para determinar la distancia recorrida por la gaviota. Enseguida esperamos que los grupos obtengan como conclusión que la condición del problema se cumplirá cuando la línea blanca (prolongación de $\overline{AP}$) coincida con el punto $\boldsymbol{B_1}$. Por último, con la herramienta Distancia o longitud ( ), deberían hallar la distancia del segmento $\overline{CP}$, encontrando un valor aproximado a 9,6m.

Realizado el trabajo con el GeoGebra, los grupos deberían plasmar lo observado en el registro figural dinámico a un trabajo con lápiz y papel (registro figural). En este registro, los grupos deberían crear un ángulo α para representar a los ángulos iguales $\angle ACB = E\angle CD = \alpha$, tal como se muestra en la figura 53.

Figura 53

Registro Figural del problema - Análisis a priori - ítem a)



Como los triángulos rectángulos ACP y BDP tienen dos ángulos respectivamente iguales $(m\angle APC = m\angle BPD = \alpha\ y\ m\angle ACP = mBDP = 90°)$, los grupos deberían concluir que los ángulos CAP y DBP son de igual medida, por ser ángulos complementarios de α. Como los tres ángulos de los triángulos ACP y BDP son respectivamente de igual medida, por el criterio ángulo-ángulo-ángulo (AAA) deberían justificar la semejanza de triángulos $\Delta ACP \sim \Delta BDP$. Enseguida, deberían hacer un cambio de registro del figural al algebraico a través de la proporción de semejanza: $\frac{x}{8} = \frac{24-x}{12}$ para luego, a través de tratamientos en este registro algebraico, puedan obtener la distancia solicitada, es decir la distancia de la base del árbol más pequeño al punto P, de la siguiente manera:

$$12x = 192 - 8x$$
$$20x = 192$$
$$x = 9{,}6m$$

En relación a la distancia recorrida por la gaviota para trasladarse de un árbol al otro, con las condiciones ya mencionadas anteriormente, los grupos deberían recurrir a otro concepto geométrico importante como el Teorema de Pitágoras. Por medio de él calcularían las longitudes de las hipotenusas d_1 y d_2 de los triángulos ACP y BDP de la siguiente manera:

$$d_1^2 = 8^2 + 9{,}6^2 \qquad d_2^2 = 12^2 + 14{,}4^2$$
$$d_1 = 12{,}49 \qquad \text{y} \qquad d_2 = 18{,}74$$

Por último, los grupos calcularían la distancia d recorrida por la gaviota que se obtiene sumando las distancias d_1 y d_2, de la siguiente manera:

$d = d_1 + d_2 = 12{,}49 + 18{,}74 = 31{,}24m$ (valor aproximado)

Dentro del registro figural los grupos desarrollarían aprehensiones operatorias a través de una modificación posicional al cambiar la posición del punto P y de la prolongación de $\overline{AP}$, aprehensiones discursivas al demostrar la semejanza de triángulos, aprehensiones secuenciales al cambiar del registro lengua natural al registro figural. Asimismo, los grupos realizarían transformaciones, al cambiar del registro figural dinámico al registro figural y del figural al algebraico (***conversión***) y dentro del registro algebraico realizarían cambios dentro de este mismo registro, cuando intenten resolver la ecuación que resulta de la proporción de semejanza (**tratamiento**).Todas las acciones anteriores, al ser relacionadas correctamente generarían en los grupos un proceso deductivo que permita resolver el ítem movilizando de esta manera el concepto de semejanza de triángulos.

Análisis a posteriori (1-a) – trabajo del grupo de Alexandra

El grupo de Alexandra al comienzo tuvo algunos inconvenientes para interpretar el problema y expresarlo en un registro figural, por ello realizó las siguientes preguntas:

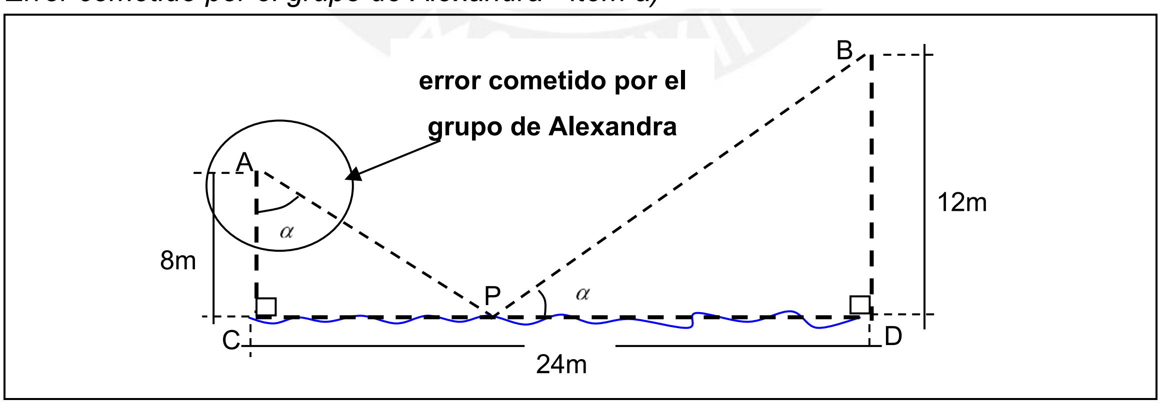
¿A qué se refieren con que la gaviota debe tocar primero un punto P del río que se encuentra en la misma línea que contiene a las bases de los árboles?,

Rpta: Estimados estudiantes miren la pizarra, imagínense que el vértice superior izquierdo de la pizarra es el punto A (parte superior del primer árbol), el vértice superior derecho de la pizarra es B (parte superior del segundo árbol), el lado inferior de la pizarra donde colocamos las tizas representa el río, y que el punto P se encuentra en este lado inferior; ahora imagínense ser la gaviota y moverse de A a P y luego P a B.

El grupo de Alexandra realizó un registro figural cometiendo un error con relación al ángulo con que desciende la gaviota, tal como se muestra en la figura 54.

Figura 54

Error cometido por el grupo de Alexandra - ítem a)



Se les comentó que existía un error en su registro figural en relación al ángulo α, que se encuentra en el vértice A, ante lo cual el grupo preguntó:

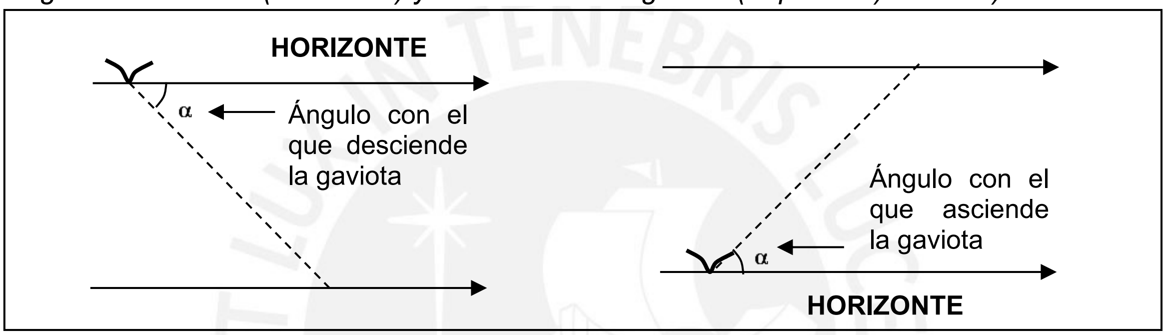
¿A qué ángulos se refieren cuando el enunciado dice: el ángulo con que desciende y asciende la gaviota?

Rpta: Se refiere a los ángulos de depresión y elevación.

Ante este inconveniente, debido a que no conocen los conceptos, se les hizo una explicación en la pizarra, como el que se muestra en la figura 55.

Figura 55

Ángulo de ascenso (elevación) y descenso de la gaviota(depresión) - ítem a)

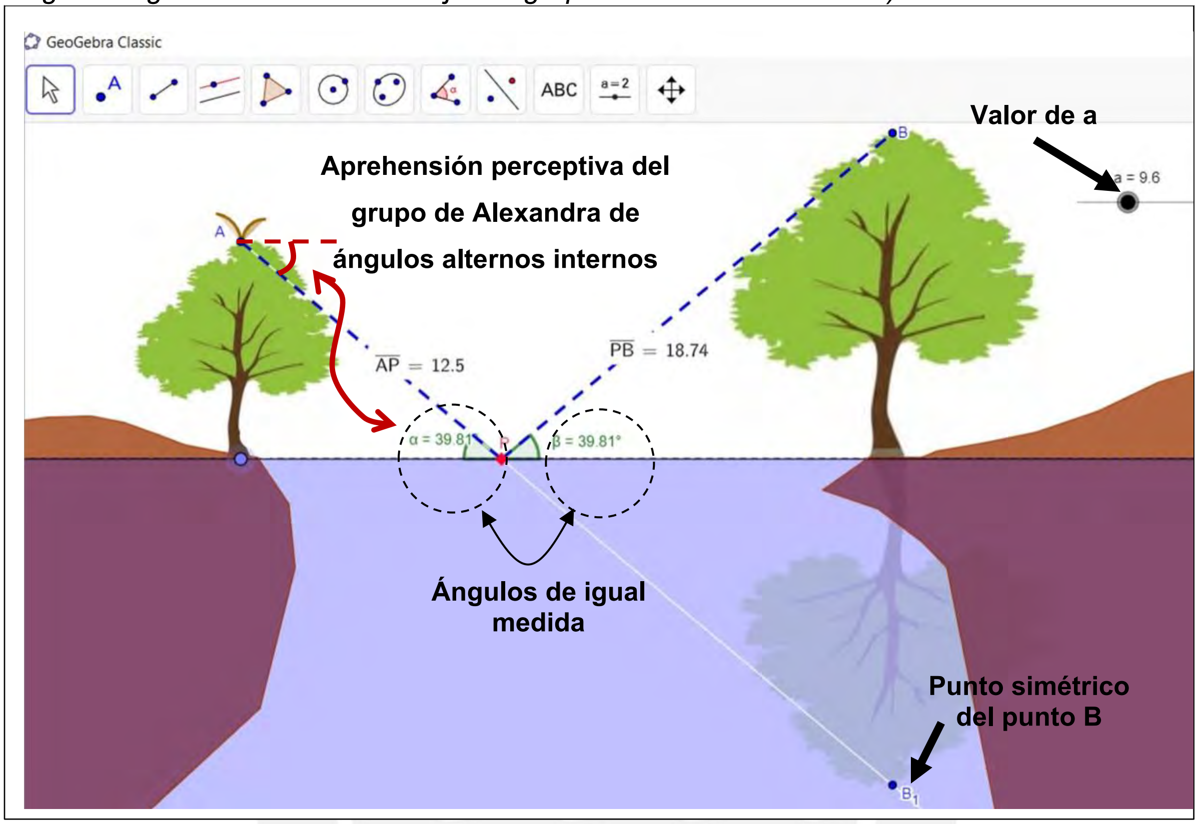


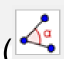
Aclarado en pizarra el inconveniente, el grupo de Alexandra abrió el archivo **SEM-ACT2-PREG1-a** en donde encontraron a los puntos A, B, P y $\mathbf{B_1}$, que señalan las partes superiores de los árboles, el punto de contacto de la gaviota con el río y el punto simétrico de B con respecto a la superficie del rio, respectivamente. Asimismo, los segmentos $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ describen la trayectoria de la gaviota para trasladarse de un árbol al otro, es decir, para ir de A hacia B pasando por P; y, un deslizador "a" para realizar cambios de posición del punto P.

El grupo, desarrolló una aprehensión perceptiva, porque se percató que, en el archivo utilizaron el concepto de ángulos entre dos rectas paralelas y una secante, para determinar que el ángulo con el cual descendió la gaviota es igual al ángulo APC, tal como se muestra en la figura 56.

Figura 56

Registro Figural Dinámico - Trabajo del grupo de Alexandra - ítem a)

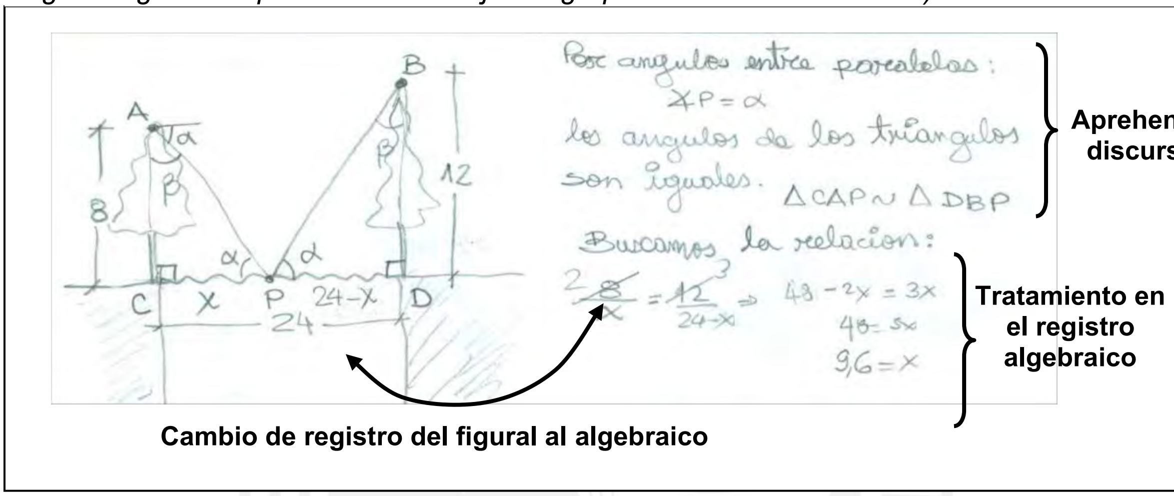


Luego, usó la herramienta Ángulo () obteniendo así la medida de los ángulos $\angle APC\ y\ \angle BPD$ (ángulos que se relacionan con los ángulos de descenso y ascenso de la gaviota), y los etiquetaron para que sus medidas sean observadas en pantalla. Enseguida, el grupo manipuló el deslizador “a" y desarrolló un tratamiento dinámico dentro del registro figural dinámico, puesto que observaron el cambio de posición del punto P, de las longitudes de $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$, así como los cambios de medida de los ángulos APC y BPD, hasta lograr que estos obtengan la misma medida (39,81°); condición básica del problema. Encontraron que dicho valor angular de igual medida se da cuando a es aproximadamente igual a 9,6 y que las longitudes de $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ son aproximadamente 12,5 y 18,74 respectivamente, dando una longitud de toda la trayectoria de la gaviota de 31,24, tal como se puede observar en la figura 56.

Realizado el trabajo con el GeoGebra, el grupo empezó a trabajar con lápiz y papel, realizaron un cambio de registro de lengua natural a el registro figural, plasmando lo que observaron en el registro figural dinámico. El grupo creó un ángulo α para indicar que $m\angle CPA = m\angle DPB = \alpha$, tal como se muestra en la figura 57.

Figura 57

Registro figural del problema - Trabajo del grupo de Alexandra - ítem a)



En su desarrollo el grupo señala en el registro figural que el ángulo de descenso de la gaviota es igual al ángulo APC, por lo que pensamos que tiene claro el concepto de ángulos entre rectas paralelas y una secante (ángulos alternos internos) ya que, en su desarrollo, indica que $\angle P = \alpha$. De la misma forma, se puede apreciar que los triángulos rectángulos ACP y BDP tienen los mismos ángulos interiores, por lo que afirmamos que el grupo conoce la propiedad básica de ángulos internos en el triángulo y la de los ángulos complementarios ($\alpha + \beta = 90°$) . Además, fueron capaces de reconocer los triángulos semejantes aplicando el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA), de esta forma se aprecia que el grupo desarrolló una aprehensión discursiva, a pesar de no ser muy explícita. Luego el grupo formó la proporción de semejanza: $\frac{8}{x} = \frac{12}{24-x}$ donde x representa la distancia de la base del árbol pequeño al punto P. Realizaron una conversión, al cambiar del registro figural al algebraico, obteniendo finalmente que $x = 9{,}6m$; valor que lograron a través de tratamientos dentro del registro algebraico, como se aprecia a continuación:

$$\frac{8}{x} = \frac{12}{24 - x}$$
$$48 - 2x = 3x$$
$$48 = 5x$$
$$9{,}6 = x$$

Para hallar la distancia recorrida por la gaviota, que es la pregunta del ítem; el grupo hizo uso del teorema de Pitágoras; hallaron las longitudes de los segmentos $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$, de la siguiente manera:

$$AP^2 = 8^2 + 9{,}6^2 \qquad PB^2 = 12^2 + 14{,}4^2$$
y
$$AP = 12{,}49 \qquad PB = 18{,}74$$

Y la distancia recorrida por la gaviota: $d = d_1 + d_2 = 12{,}49 + 18{,}74 = 31{,}24m$; pero no lo indicaron en su desarrollo.

El grupo de Alexandra desarrolló aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas las cuales al seguir un proceso deductivo provocaron la solución del ítem movilizando así el concepto de semejanza de triángulos.

El item b) de la pregunta 1 es:

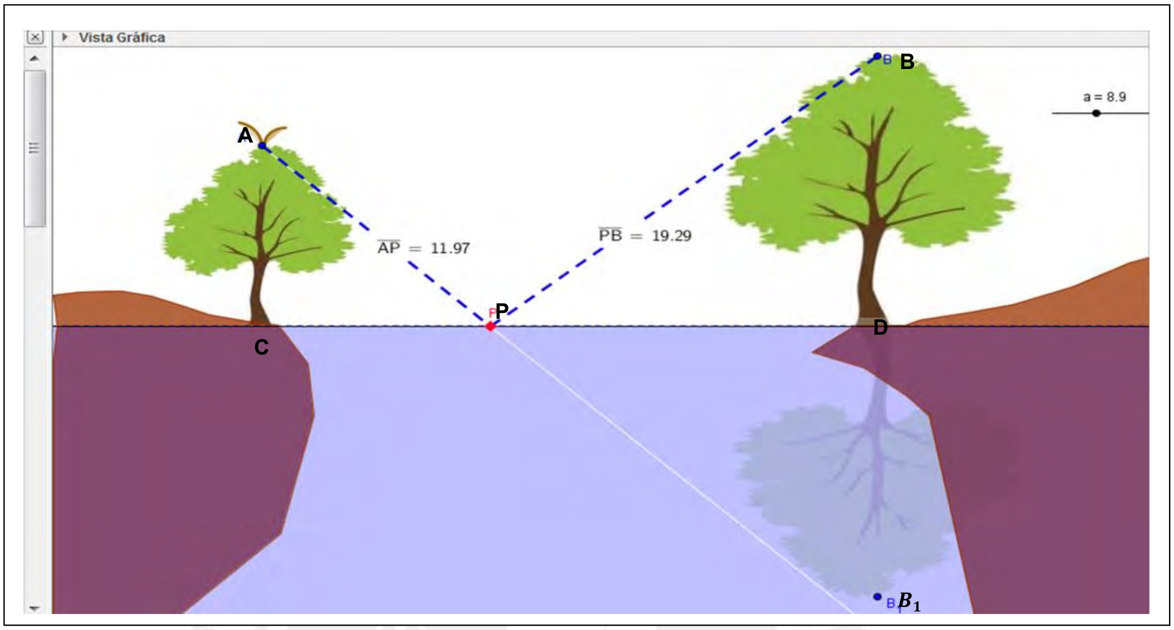
¿Cuál es la menor distancia que recorre la gaviota que se encuentra en la parte superior del árbol pequeño para ir a la parte superior del árbol grande, pero tocando primero un punto P del río?

Análisis a priori (1 – b)

Pretendemos que los grupos durante 10 minutos intenten representar a través de un registro figural el enunciado del problema usando sólo lápiz y papel, y luego solicitarles que abran el archivo **SEM-ACT2-PREG1-b** en donde encontrarán un registro figural dinámico tal como el de la figura 58.

Figura 58

Registro Figural Dinámico - Análisis a priori - ítem b)

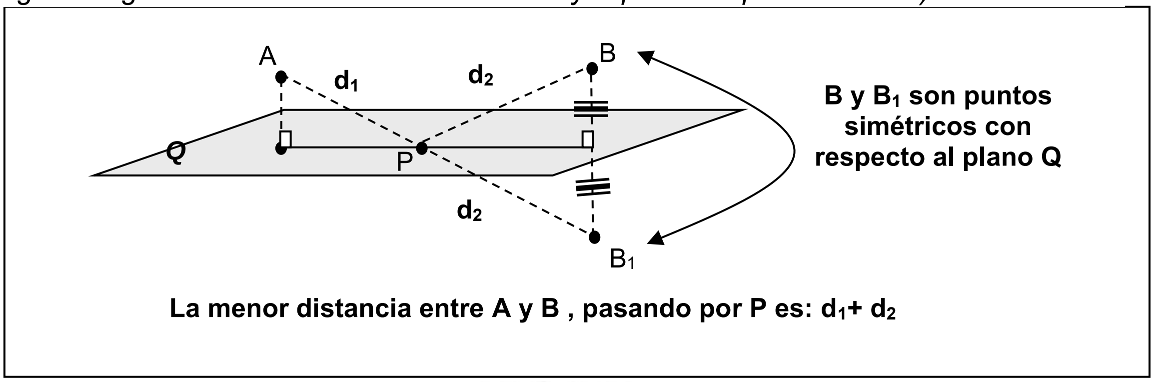


Estando en este registro figural dinámico, los estudiantes con el uso de la herramienta distancia (), deberían medir las longitudes de $\overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ y luego con el mouse modificar los valores del deslizador a; para observar diferentes trayectorias que podría realizar la gaviota; esto provocará en ellos ideas y conjeturas de la posición correcta del punto P. Por lo tanto, pretendemos que los grupos realicen tratamientos dinámicos dentro del registro figural dinámico dado por el archivo de GeoGebra.

Este problema pide la menor distancia recorrida por la gaviota desde el punto A hasta el punto B, pasando previamente por un punto del río denominado P. Sabemos que es el menor recorrido para ir del punto A al punto B (puntos que se encuentran en un mismo plano Q1), es la distancia entre los puntos A y B, es decir la longitud del segmento que une a dichos puntos. Pero, si se pide el menor recorrido para ir del punto A al punto B (puntos que están a un mismo lado de un plano Q) pero que involucra en su recorrido a un punto P del plano Q, por donde tiene que pasar necesariamente, entonces el menor recorrido se halla al medir el segmento que une el punto A con el simétrico del punto B con respecto al plano Q, tal como se puede observar en la figura 59.

Figura 59

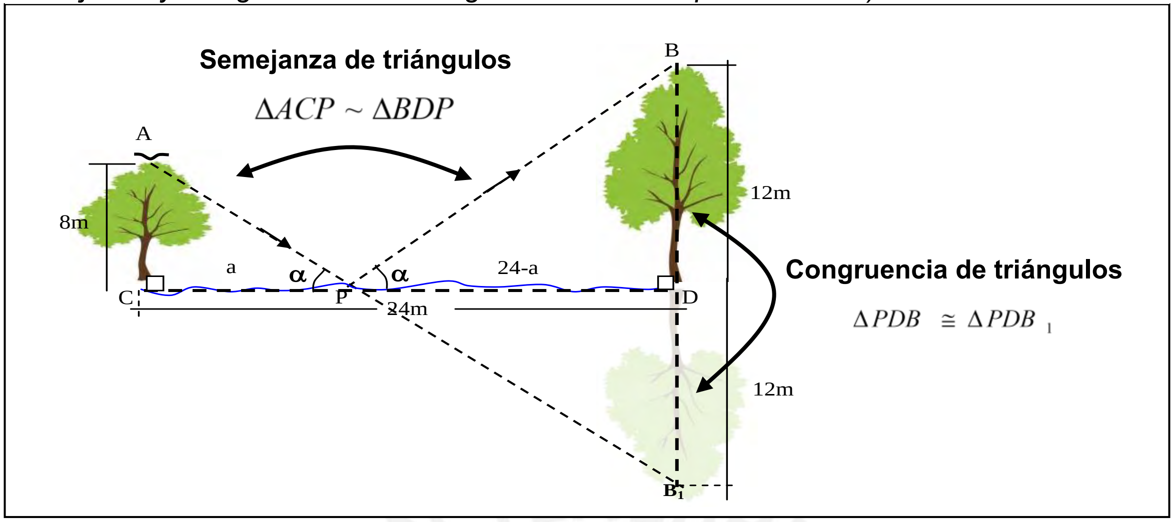
Registro Figural - La menor distancia entre A y B pasando por P - ítem b)



Por lo anterior, esperamos que por medio del GeoGebra y del registro figural dinámico que este provee, los grupos deberían cambiar los valores del deslizador a, para que se den cuenta, que el menor recorrido realizado por la gaviota para moverse de un árbol al otro, se lograría cuando la recta $\overline{AP}$ pase por el punto B_1, que representa el punto simétrico de B (reflejo del árbol). Adicionalmente se les sugerirá que con la herramienta Ángulo ( ) midan los ángulos $\angle APC, \angle B_1PD$ y $\angle BPD$ para que verifiquen que dichos ángulos son de igual medida y con la herramienta distancia ( ), verifiquen que las longitudes de BD y BD_1 son iguales. Estas igualdades permitirán a los grupos determinar que los triángulos BDP y B_1DP son congruentes por el postulado lado-ángulo-lado (LAL) y que los triángulos BDP y ACP son semejantes con base al criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA). Por lo anterior, pensamos que con lo observado en el registro figural dinámico y lo mencionado en pizarra sobre el menor recorrido para ir del punto A al punto B pasando por otro punto P como se señala en la figura 59, son suficientes para que los grupos realicen un registro figural con lápiz y papel que interprete correctamente el problema, es decir que hagan una conversión del registro del lenguaje natural al registro figural, tal como se muestra en la figura 60.

Figura 60

Semejanza y Congruencia de Triángulos - Análisis a priori - ítem b)



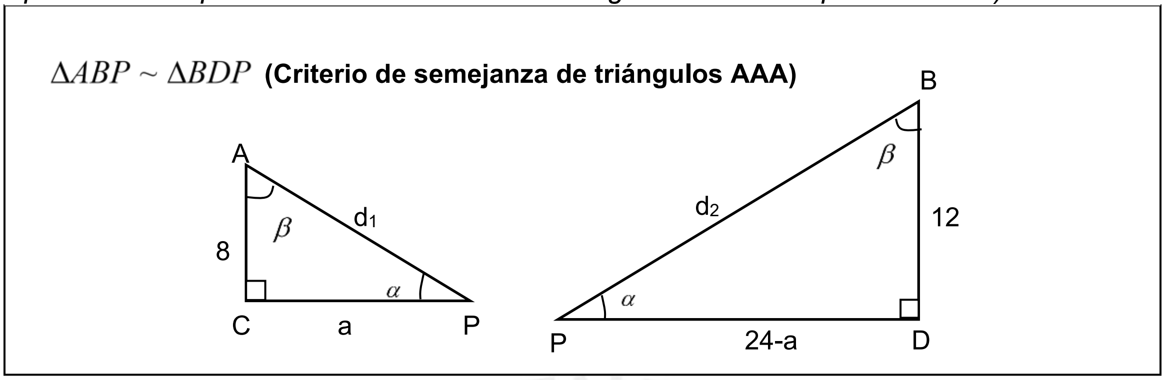
Dentro de este registro figural, los grupos deberían crear un ángulo α, de tal forma que $m\angle APC = \alpha$. Con la medida de este ángulo podrían hallar la medida del ángulo B_1PD, y determinar que su medida es igual a α , porque los ángulos APC y B_1PD son opuestos por el vértice; asimismo, por ángulos complementarios podrían encontrar que las medidas de los ángulos CAP y DB_1P son de igual medida. De esta manera, podrían concluir que los triángulos ACP y B_1DP son semejantes porque cumplen con el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Por otro lado, al observar a los triángulos rectángulos BDP y B_1DP, los grupos deberían ser capaces de reconocer que ambos triángulos tienen un par de lados de igual medida, porque tienen un cateto común $(\overline{PD})$ y los catetos $\overline{BD}$ y $\overline{B_1D}$ de los triángulos rectángulos BDP y B_1DP respectivamente, son de igual medida. Enseguida, los grupos concluirían que los triángulos BDP y B_1DP son congruentes por el postulado de congruencia lado-ángulo-lado (LAL). Como los triángulos ACP y BDP son semejantes y los triángulos BDP y B_1DP son congruentes, los grupos llegarían a la conclusión que los triángulos ACP y BDP son semejantes por el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA).

Pensamos también que los grupos desarrollarán aprehensiones de tipo operatorio a través de una modificación mereológica, que les permitirán verificar la semejanza de los triángulos ACP y BPD, tal como se observa en la figura 61.

Figura 61

Aprehensión Operativa - Modificación Mereológica - Análisis a priori - ítem b)



A partir de esta semejanza de triángulos, los grupos deberían realizar una conversión al cambiar del registro figural al algebraico por medio de la proporción de semejanza: $\frac{a}{8}=\frac{24-a}{12}$. Esta ecuación, debería ser resuelta a través de tratamientos en el registro algebraico, dando como solución $a = 9{,}6m$, tal como se muestra a continuación:

$$12a = 192 - 8a$$
$$20a = 192$$
$$a = 9{,}6\,m$$

Enseguida por Pitágoras, deberían hallar las longitudes d_1 y d_2.

$$d_1{}^2 = 8^2 + 9{,}6^2 \qquad d_2{}^2 = 12^2 + 14{,}4^2$$
$$d_1 = 12{,}49 \qquad d_2 = 18{,}74$$

Finalmente, con estas distancias deberían obtener la menor distancia recorrida que sería aproximadamente: $d = d_1 + d_2 = 12{,}49 + 18{,}74 = 31{,}24m$

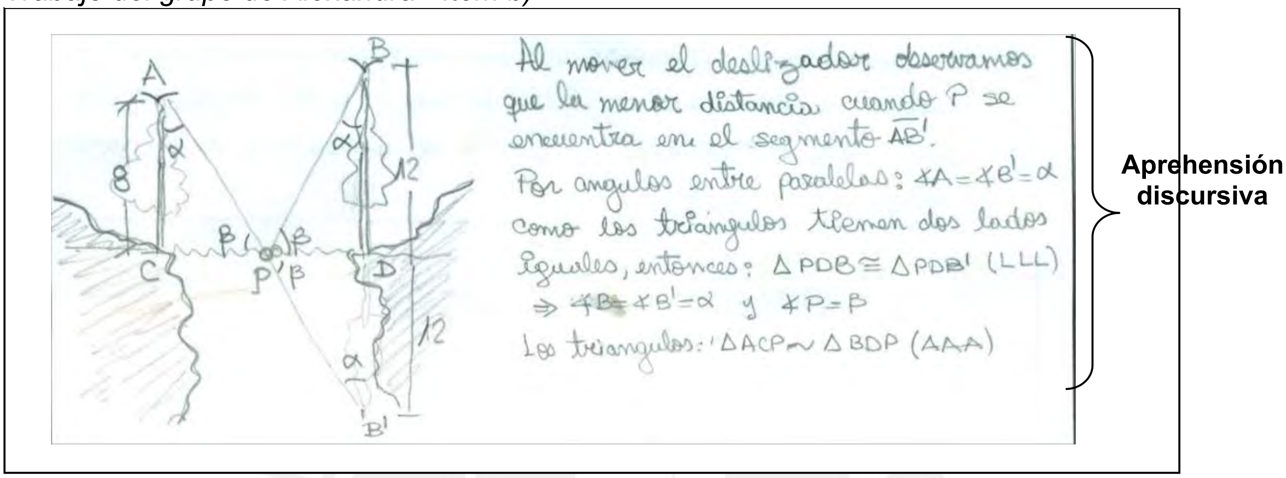
Dentro del registro figural dinámico los grupos realizarían tratamientos dinámicos al realizar operaciones de reconfiguración de una figura de forma acelerada a través del deslizador a . Las acciones descritas anteriormente, al ser relacionadas correctamente generarían en los grupos un proceso deductivo que permita resolver el ítem movilizando de esta manera el concepto de semejanza de triángulos.

Análisis a posteriori – (1 – b) - trabajo del grupo de Alexandra

A continuación, en la figura 62 el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 62

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem b)

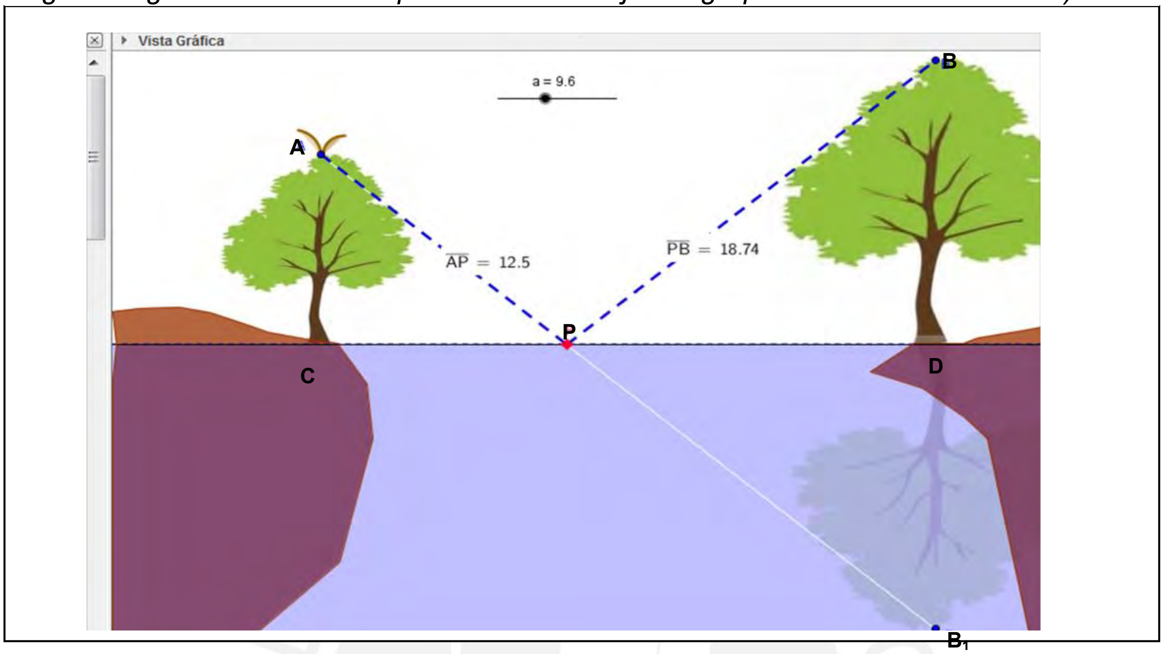


Al inicio de la resolución de esta pregunta, el grupo de Alexandra realizó un registro figural, pero sin ángulos, y dieron la misma respuesta que la del ítem a) pero sin justificar. Les comentamos que deberían justificar su respuesta y que lean bien el enunciado del ítem. Luego de ello, el grupo preguntó por el significado de la frase: *la menor distancia recorrida para ir del punto A al punto B, pasando por el punto P*, y se les hizo una aclaración en pizarra como el que se describió en el análisis a priori en la figura 59.

Aclarada la duda, el grupo abrió el archivo en GeoGebra denominado **SEM-ACT2-PREG1-b** y a través del mouse cambiaron de valor al deslizador a, y observaron que el menor recorrido realizado por la gaviota para moverse de la punta del árbol más pequeño (punto A) a la punta del otro árbol (punto B) pasando por un punto del río (punto P), se logró cuando la recta $\overline{AP}$ pasó por el punto B_1, que representa el punto simétrico de B (reflejo del árbol), de esta manera el grupo realizó tratamientos dinámicos tal como se observa en la figura 63.

Figura 63

Registro Figural Dinámico del problema - Trabajo del grupo de Alexandra - ítem b)



Con la herramienta Ángulo ( ) midieron los ángulos APC, B_1PD y BPD verificando que dichas medidas son iguales ($m\angle APC = m\ \angle B_1PD = m\ \angle BPD$) y con la herramienta distancia ( ), verificaron que las longitudes de BD y BD_1 son iguales. De esta manera, determinaron que los triángulos BDP y B_1DP son congruentes por el postulado lado-ángulo-lado (LAL) y que los triángulos B_1DP y ABP son semejantes con base al criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo-ángulo (AAA). Enseguida, el grupo de Alexandra realizó un registro figural con lápiz y papel que interpretó correctamente el problema, realizando una conversión del registro de lengua natural al registro figural.

De la resolución dada por el grupo de Alexandra mostrada en la figura 61, podemos señalar que el grupo desarrolló una aprehensión discursiva, puesto que identificaron los triángulos congruentes $\Delta BPD \cong \Delta B'PD$ por medio del postulado lado-lado-lado (LLL) difiriendo de lo que habíamos señalado en el análisis a priori y también al explicar que los triángulos semejantes $\Delta ACP \sim \Delta BDP$ por el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA); sin embargo, no llegaron a proponer la proporción de semejanza y tampoco contestaron la pregunta; por lo tanto no existió tratamientos en el registro algebraico como nosotros habíamos supuesto. Creemos que no lo hicieron porque encontraron los mismos triángulos semejantes del ítem anterior y en consecuencia sabían que la respuesta era la misma.

En este ítem no tenemos la seguridad de que exista una movilización del concepto de semejanza de triángulos para su resolución, por lo tanto, tenemos que afirmar que no se logró por completo el objetivo.

El item c) de la pregunta 1 es: *¿A qué distancia de la base del árbol más pequeño debe encontrarse dicho punto P, para que la medida del ángulo APB sea de 90°? Además, calcule la distancia recorrida por la gaviota desde A a B pasando por P. Abra el archivo de GeoGebra* SEM-ACT2-PREG1-c

Análisis a priori (1-c)

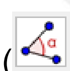
Debido al parecido de este ítem con los otros dos anteriores, es probable que los grupos den la misma respuesta que los ítems anteriores. En caso de ser así, les indicaremos que la respuesta no es correcta y para que se puedan guiar en la solución al ítem, les sugeriremos que abran el archivo en GeoGebra SEM**-ACT2-PREG1-c.** en donde encontrarán los segmentos $\overline{AC}\ y\ \overline{BD}$ que representan el tamaño de los árboles, el punto P que representa el punto de la superficie del rio donde hace contacto la gaviota y un deslizador a , que les permitirán hacer cambios de posiciones del punto P. Con la herramienta Ángulo (), deberían hallar la medida del ángulo $\angle APC$, luego con el mouse realizar cambios en el deslizador a, hasta encontrar que $m\angle APC = 90°$ y con la herramienta distancia () deberían medir las longitudes de los segmentos $\overline{CP}, \overline{PD}, \overline{AP}\ y\ \overline{PB}$, para que puedan hallar la distancia recorrida por la gaviota. Los grupos al movilizar el deslizador a, encontraran dos posibles puntos P, que cumplen con la condición del problema, y que se muestran a continuación en las figuras 64 y 65.

Figura 64

Registro Figural Dinámico del problema - 1era posibilidad - Análisis a priori

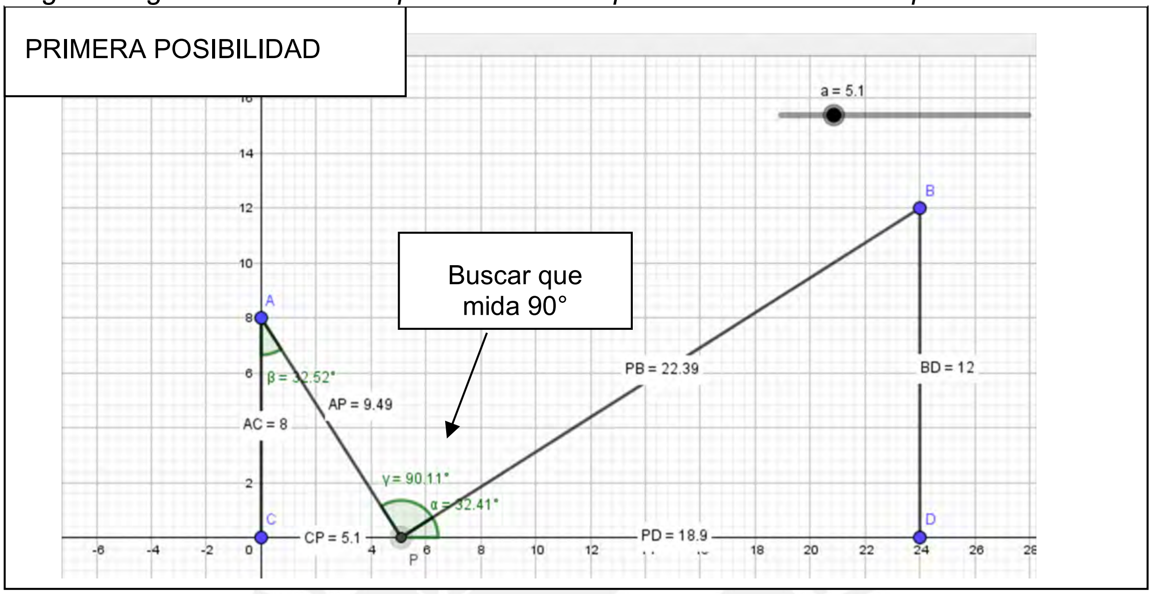
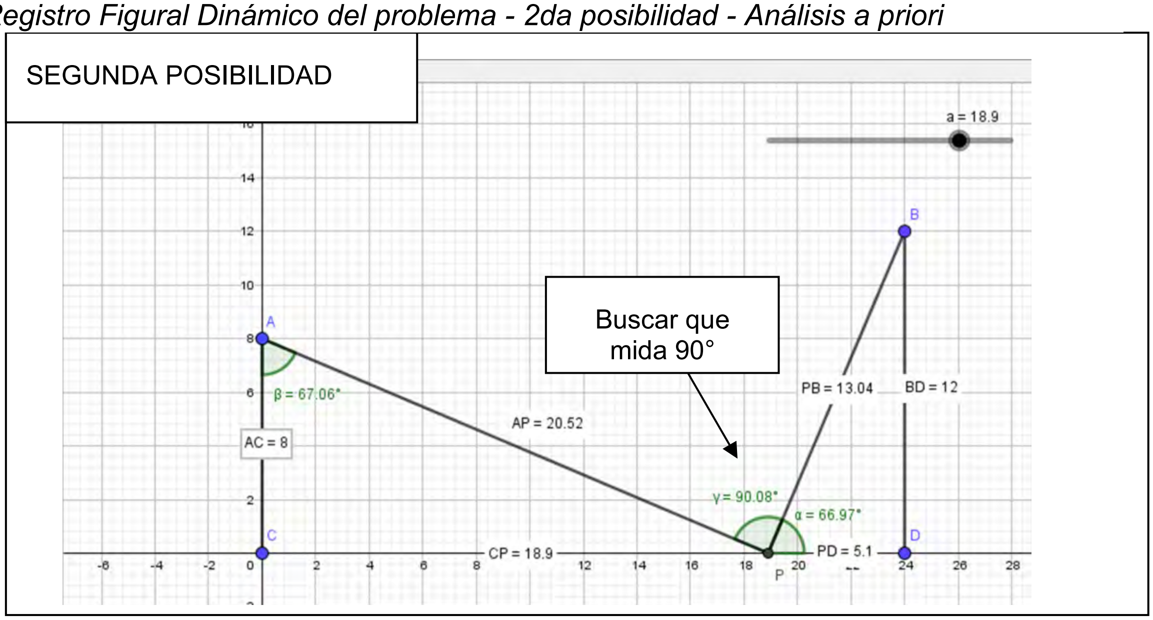


Figura 65

Registro Figural Dinámico del problema - 2da posibilidad - Análisis a priori



Para la primera posibilidad, deberían encontrar los siguientes valores aproximados: $CP = 5{,}1, ; PD = 18{,}9; AP = 9{,}49 y PB = 22{,}39$, de tal manera que la distancia recorrida por la gaviota sería aproximadamente igual a: $d = AP + PB = 9{,}49 + 22{,}39 = 31{,}88m$

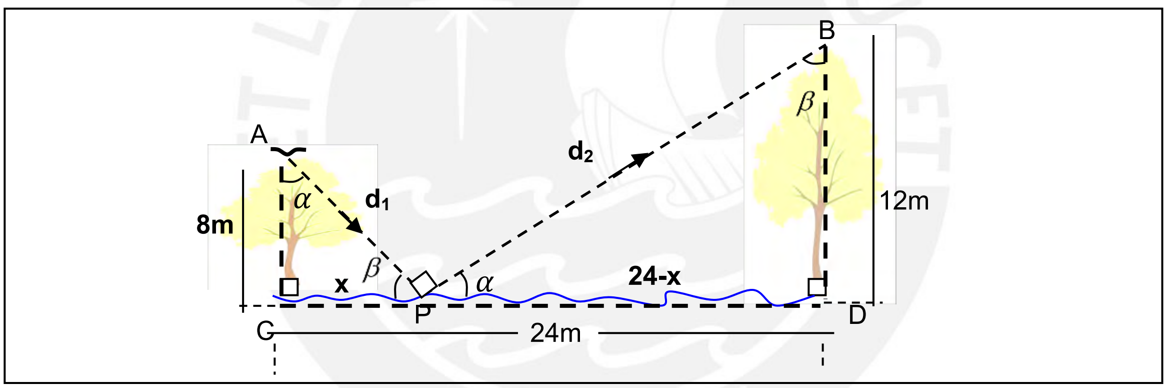
Para la segunda posibilidad, deberían encontrar los siguientes valores aproximados: $CP = 18{,}9; PD = 5{,}1; AP = 20{,}52 y PB = 13{,}04$, de tal manera que la distancia recorrida por la gaviota sería aproximadamente igual a: $d = AP + PB = 20{,}52 + 13{,}04 = 33{,}56m$.

De ambos resultados, la menor distancia sería aproximadamente igual a $31{,}88m$. De esta manera, desarrollaremos en los grupos la aprehensión operativa a través de la modificación óptica, debido a la deformación que sufre la figura.

Con base a lo observado en el registro figural dinámico proporcionado por el GeoGebra, los grupos usando lápiz y papel deberían realizar un registro figural similar al que se muestra en la figura 66.

Figura 66

Registro Figural del problema - Análisis a priori - ítem c)



Por lo tanto, esperamos que los grupos realicen una conversión al cambiar del registro de lengua natural al registro figural. En este registro figural, deberían crear los ángulos $\alpha\ y\ \beta$ de tal manera que $m\angle BPD = \alpha\ y\ m\angle CPA = \beta$, para determinar por ángulos complementarios que las medidas de los ángulos CAP y PBD son $\alpha\ y\ \beta$ respectivamente y de esta manera lograr que los ángulos interiores de los triángulos DPB y PDB tengan la misma medida. A partir de esta información los grupos deberían encontrar la semejanza de triángulos entre los triángulos ACP y BDP ($\Delta ACP \sim \Delta BDP$) por medio del criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA), desarrollando en ellos una aprehensión discursiva. Enseguida, deberían realizar una conversión al cambiar del registro figural al algebraico a través de la proporción de semejanza:

$\frac{x}{8} = \frac{12}{24-x}$, y es en este registro que a través de tratamientos deberían obtener el valor de x , que toma dos valores, tal como lo mostramos a continuación:

$$\frac{x}{8} = \frac{12}{24-x}$$

$$24x - x^2 = 96$$

$$x^2 - 24x + 96 = 0.$$

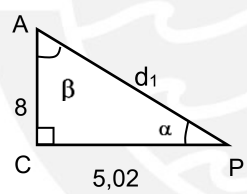
Esta ecuación deberían resolverla usando la fórmula general, de esta manera:

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(1)(96)}}{2(1)} = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{24 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{2}$$

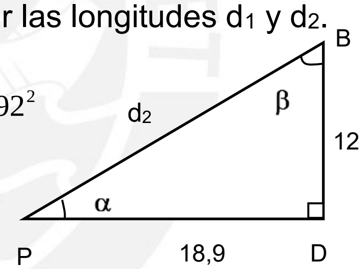
Los valores aproximados de x que deberían encontrar serían: $x_1 = 5{,}02$ y $x_2 = 18{,}92$

Para $x_1 = 5{,}02$, aplicando Pitágoras, deberían hallar las longitudes d_1 y d_2.

$d_1^{\,2} = 8^2 + 5{,}02^2$
$d_1 = 9{,}44$



$d_2^{\,2} = 12^2 + 18{,}92^2$
$d_2 = 22{,}40$

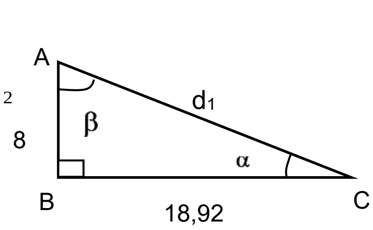


Con estas distancias, deberían obtener la distancia recorrida por la gaviota:

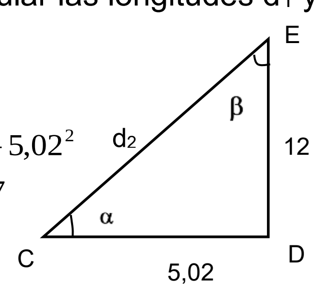
$$d = d_1 + d_2 = 9{,}44 + 22{,}40 = 31{,}84m$$

Para $x_1 = 18{,}92$ y aplicando Pitágoras, deberían calcular las longitudes d_1 y d_2.

$d_1^{\,2} = 8^2 + 18{,}92^2$
$d_1 = 20{,}54$



$d_2^{\,2} = 12^2 + 5{,}02^2$
$d_2 = 13{,}007$



Con estas distancias, deberían obtener la distancia recorrida por la gaviota:

$$d = d_1 + d_2 = 20{,}54 + 13{,}007 = 33{,}54m$$

De ambos resultados, los grupos deberían indicar que la menor distancia sería aproximadamente igual a $31{,}8m$.

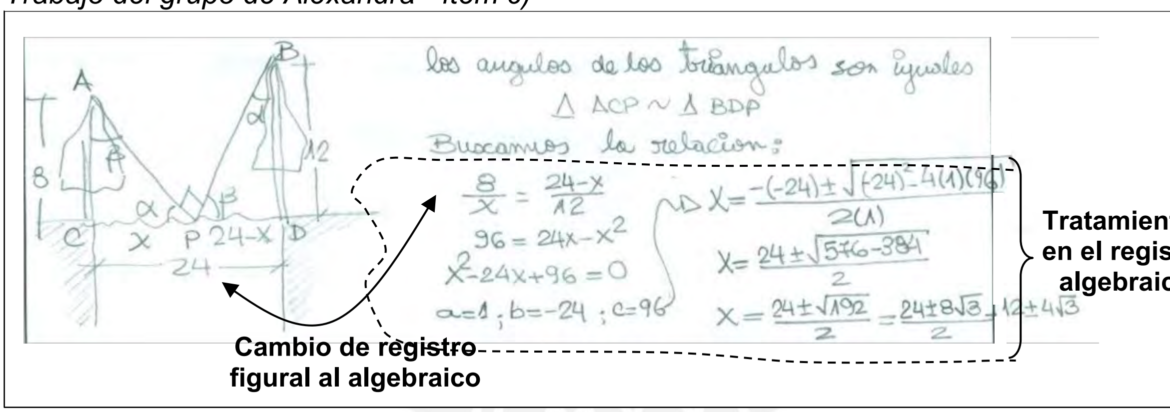
De lo anterior pensamos que los grupos deberían realizar conversiones al cambiar del registro de lengua natural al figural y del registro figural al algebraico y también desarrollar aprehensiones perceptivas, secuenciales, operatorias y discursivas, las cuales, al relacionarse correctamente deberían llevarlos a la respuesta del ítem, movilizando de esta manera el concepto de semejanza de triángulos.

Análisis a posteriori (1-c) – trabajo del grupo de Alexandra

A continuación, en la figura 67 el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 67

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem c)



Al principio, el grupo de Alexandra dio como respuesta la misma que encontró en los ítems a) y b), ante lo cual nosotros intervenimos preguntándoles, ¿Por qué piensan eso?, y el grupo nos respondió. es que son parecidos a los ítems a) y b). Inmediatamente le comentamos que no hay nada que justifique que los ángulos con que desciende y asciende la gaviota son iguales y les sugerimos usar ángulos alrededor del punto P. Para un mejor entendimiento del problema planteado, a sugerencia nuestra, abrieron el archivo de GeoGebra SEM-ACT2-PREG1-c y encontraron los puntos A, B, C, D, P, los segmentos $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{AP}\ y\ \overline{PB}$ y el deslizador a y con la herramienta Ángulo ( ), midieron el ángulo $\angle APC$ y con el mouse cambiaron de valor en el deslizador α, hasta encontrar que $m\angle APC = 90°$, hallando dos posibles puntos P que cumplen con dicha condición. En esa posición con la herramienta distancia (), midieron las longitudes de los segmentos $\overline{CP}, \overline{PD}, \overline{AP}\ y\ \overline{PB}$, encontrando los mismos valores que señalamos en nuestro análisis a priori. De esta manera, el grupo de Alexandra en el registro figural dinámico realizó tratamientos dinámicos ya que realizaron una reconfiguración de la figura inicial de una forma acelerada y precisa.

El grupo de Alexandra desarrolló de manera básica la aprehensión discursiva, debido a que señala que los triángulos rectángulos ACP y PDB son semejantes porque sus ángulos internos son iguales (criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo); pero no explica de dónde salieron los ángulos $\alpha\ y\ \beta$, ni como halló las medidas de los otros ángulos de los triángulos rectángulos, que sirven de base para su justificación. Luego, realizaron una conversión al cambiar de registro del figural al algebraico a través de la formulación de la proporción de semejanza: $\frac{x}{8} = \frac{12}{24-x}$ Es en este registro algebraico que realizaron tratamientos, obteniendo una ecuación de segundo grado con variable x, que la resolvieron usando la fórmula general de la siguiente manera:

$$\frac{x}{8} = \frac{12}{24-x}$$

$$24x - x^2 = 96$$

$$x^2 - 24x + 96 = 0.$$

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(1)(96)}}{2(1)} = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{24 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{2}$$

A pesar de haber encontrado los valores de la variable x, no lograron contestar la pregunta. Por lo anterior, el grupo de Alexandra a lo largo de esta actividad realizó aprehensiones de tipo perceptivo, operatorio y discursivo, así como también los cambios de registro del figural al algebraico y a pesar de no dar respuesta a la pregunta, si creemos que movilizaron el concepto de semejanza de triángulos.

Actividad 3: Problemas con registro figural y sin uso del GeoGebra.

Esta actividad consta de una pregunta que no usa ningún archivo de GeoGebra y tiene por objetivo que los grupos movilicen el concepto de semejanza de triángulos a través de cambios de registro de lengua natural al figural y luego del figural al algebraico (***conversiones***), para que, por medio de él, se dé respuesta a la actividad utilizando dentro de este registro tratamientos. Además, se busca que los grupos desarrollen aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas a lo largo de la actividad.

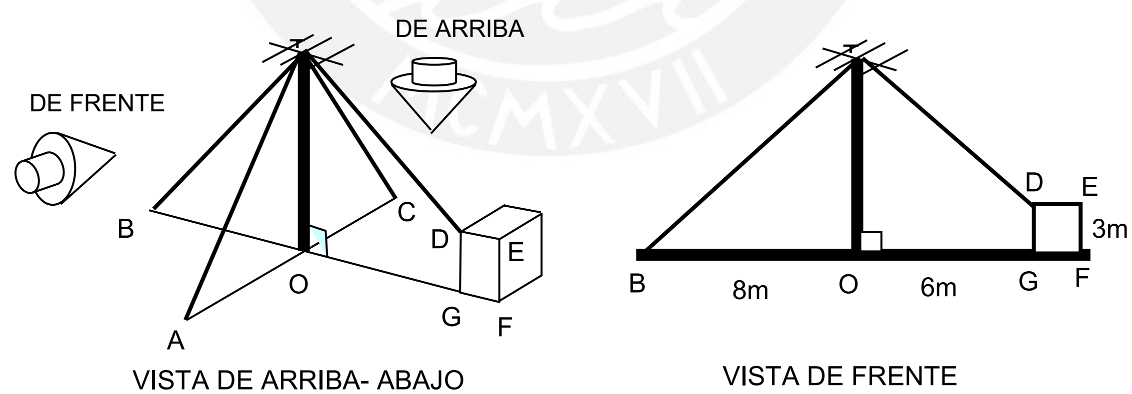
Esta actividad a diferencia de las actividades 1 y 2, cuenta con un registro figural en 3D, lo que conlleva a que no se puede visualizar de manera directa el par de triángulos semejantes. Asimismo, la actividad no cuenta con ningún archivo de GeoGebra que les permita observar y analizar mejor el problema.

El enunciado de la pregunta 1 de la actividad 3 se encuentra en la figura 68.

Figura 68

Enunciado de la pregunta 1 de la actividad 3

1. **Una antena de comunicaciones se sostiene mediante cuatro cables que tienen la misma inclinación. Tres de los cables están amarrados al suelo, y el cuarto, al techo de una caseta como indica la figura.**



Se pide:

a) **Proponer un dibujo usando una o varias figuras geométricas que interpreten la situación real mostrada, con los datos proporcionados. Proponga dos alternativas.**
b) **Con los datos proporcionados y la figura de la parte a), calcule la altura de la antena. Explique su resolución detalladamente.**
c) **Si el dato que dice $\mathbf{OB = 8m}$, se cambiara por $\mathbf{OC = 8m}$ ¿la altura de la antena sería la misma? Justifique su respuesta.**

A continuación, presentamos el respectivo análisis de la pregunta 1 para cada ítem.

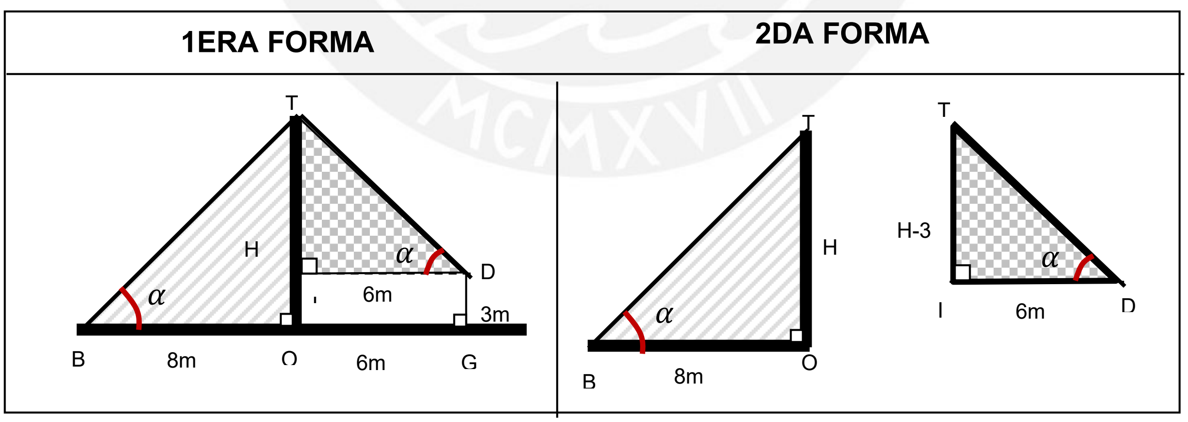
El item a) de la pregunta 1 es: *Proponer un dibujo usando una o varias figuras geométricas que interpreten la situación real mostrada, con los datos proporcionados. Proponga dos alternativas.*

Análisis a priori (1-a)

Pensamos que los grupos podrían tener algún inconveniente para encontrar el par de triángulos semejantes debido a que tienen que hacer un trazo auxiliar para encontrar a uno de ellos, y porque además deberían darse cuenta que si los cables tienen la misma inclinación con el piso, es porque todos forman un mismo ángulo con él. Por ello, pensamos indicarles a los grupos que tengan muy presente los dos aspectos anteriormente mencionados y en consecuencia realizarían una trasformación dentro del mismo registro figural (tratamiento) desarrollando en ellos aprehensiones de tipo operatorio a través de realizar modificaciones mereológicas, tal como se muestra en la figura 69.

Figura 69

Aprehensión Operatoria - Modificación Mereológica - Análisis a priori - ítem a)



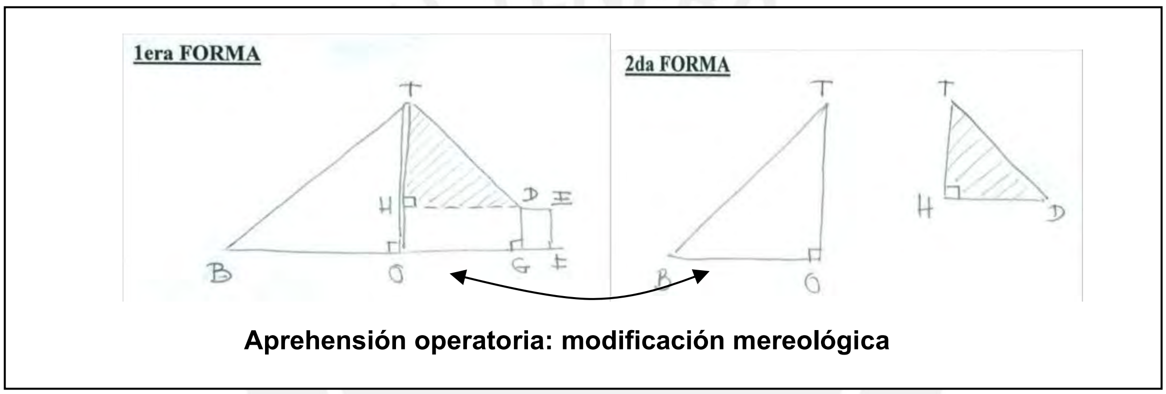
En la primera forma, los grupos deberían hacer un trazo auxiliar para determinar uno de los triángulos semejantes y tomar como otro triángulo el formado por uno de los cables con el suelo pero que se encuentren en un mismo plano. Para la segunda forma los grupos deberían desarrollar aprehensiones operatorias a través de una modificación mereológica, al separar la figura en dos sub-figuras (triángulos rectángulos).

Análisis a posteriori (1-a) – trabajo del grupo de Alexandra

A continuación, en la figura 70 se muestra el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 70

Aprehensión Operatoria - Modificación Mereológica - Trabajo del grupo de Alexandra - ítem a)



Al inicio de este ítem, los grupos no entendían lo que se les pedía, pensaron que se tenían que replicar el registro figural que se les ha proporcionado en la actividad. Este problema se debió porque hemos propuesto mal el enunciado para el ítem, ya que lo que deseábamos era que encuentren un par de triángulos semejantes y lo representen de dos maneras distintas. Ante esta dificultad nos vimos obligados a explicarles verbalmente lo que queríamos, y aclarada la situación, el grupo de Alexandra tuvo dificultades ahora en encontrar el par de triángulos semejantes, porque no sabían que tenían que hacer un trazo auxiliar adicional y además porque no se percataron que decir que los cables tienen la misma inclinación es porque los cables con el piso siempre forman el mismo ángulo. Se les sugirió entonces a los grupos, realizar trazos auxiliares y que pensaran en el significado matemático de “los cables tienen la misma inclinación”, debido a que los cables pertenecen a planos diferentes.

Finalmente, el grupo de Alexandra realizó los gráficos pedidos, puesto que para la primera forma realizó un trazo auxiliar en el trapecio rectángulo TOGD por el punto D y paralelo a $\overline{OG}$ determinando uno de los triángulos semejantes y luego consideró el triángulo TOB que se encuentra en el mismo plano que el trapecio rectángulo TOGD. Para la segunda forma el grupo desarrollo aprehensiones de tipo operatorio porque realizaron modificaciones mereológicos al dividir la figura en sub-figuras. Sin embargo, no colocaron ángulos que fundamenten que los triángulos obtenidos en ambas formas sean semejantes, tal como se señala en la figura 69.

El ítem b) de la pregunta 1 es:

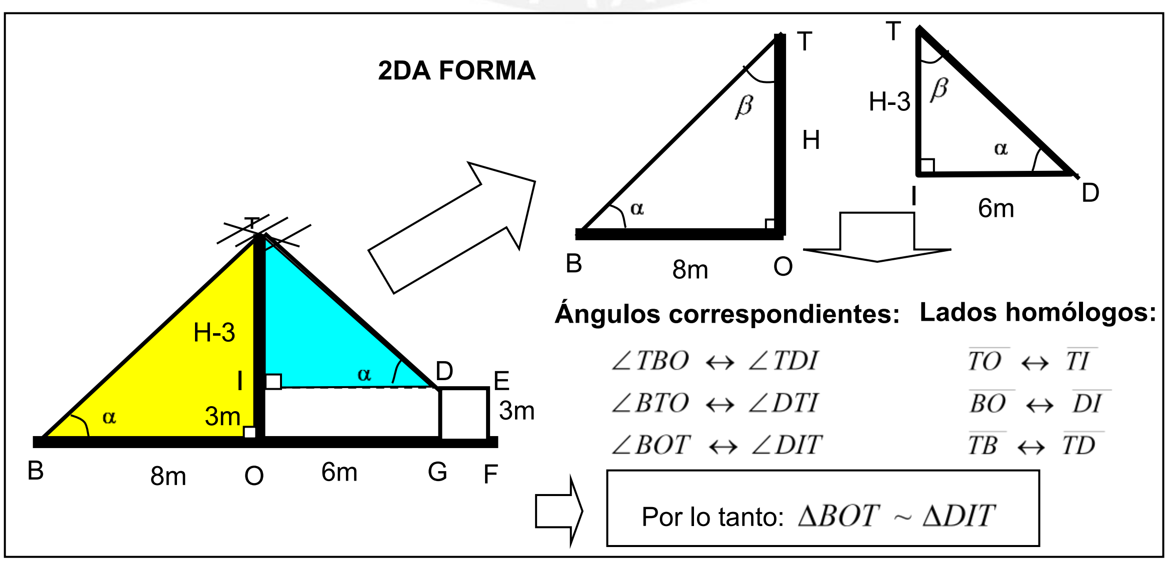
Con los datos proporcionados y la figura de la parte a), calcule la altura de la antena. Explique su resolución detalladamente.

Análisis a priori (1-b)

Pensamos que los grupos escogerán el segundo registro figural obtenida del ítem 1-a), porque al tener los triángulos separados les sería más fácil comprobar los ángulos correspondientes y lados homólogos de los triángulos BOT y DIT, comprobando así la semejanza de los triángulos BOT y DIT, a través del criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA), tal como se observa en la figura 71.

Figura 71

Registro Figural - Análisis a priori - ítem b)



Recordemos que en análisis a priori del ítem a), se señaló que los grupos deberían trazar el segmento $\overline{DI}$ paralelo a $\overline{OG}$ ($\overline{DI}//\overline{OG}$) para luego indicar que los ángulos TBO y TDI son de igual medida ($m\angle TBO = \alpha$ y $m\angle TDI = \alpha$), porque el enunciado del problema menciona que los cables que se encuentran amarradas al piso tienen la misma inclinación. Enseguida, los grupos deberían adicionar el ángulo β, como complemento de los ángulos TBO y TDI que pertenecen a los triángulos TOB y TID respectivamente. De esta manera, se lograría que los ángulos internos de los triángulos TOB y TID sean iguales y por lo tanto a través del criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA) se determinaría que dichos triángulos, son semejantes. Por medio de este ítem, se desarrollaría en los grupos la aprehensión discursiva, tal como se muestra en la figura 72.

Figura 72

Aprehensión Discursiva de la Semejanza de Triángulos - Análisis a priori - ítem b)

En el triángulo BTO:

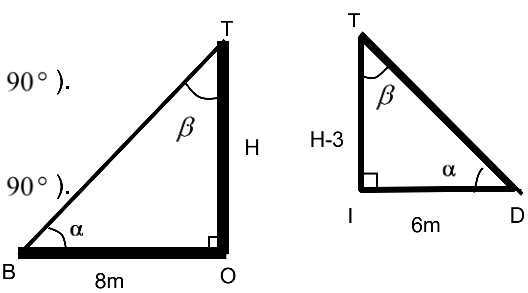
Si $m\angle TBO = \alpha$, entonces $m\angle BTO = \beta$ ($\alpha + \beta = 90°$).

En el triángulo DTI:

Si $m\angle TDI = \alpha$, entonces $m\angle DTI = \beta$ ($\alpha + \beta = 90°$).

Como los ángulos internos de los triángulos rectángulos BOT y DIT son iguales, entonces:

$\Delta BTO \sim \Delta DTI$ …. Criterio de semejanza (AAA)



Luego, los grupos deberían hacer una conversión al cambiar del registro figural al algebraico al formar la proporción de semejanza: $\frac{H}{8} = \frac{H-3}{6}$, para luego a través de tratamientos en el registro algebraico, resolverla de la siguiente manera:

$$\frac{H}{8} = \frac{H-3}{6}$$
$$6H = 8H - 24$$
$$24 = 2H$$
$$12 = H$$

Obteniendo que la altura de la antena es de 12m.

Es importante señalar que los grupos al trabajar en el registro figural deberían desarrollar aprehensiones de tipo perceptivo, al reconocer que en la figura existen triángulos semejantes, aprehensiones de tipo operatorio a través de una modificación mereológica y aprehensiones de tipo discursivo al explicar porque los triángulos son semejantes.

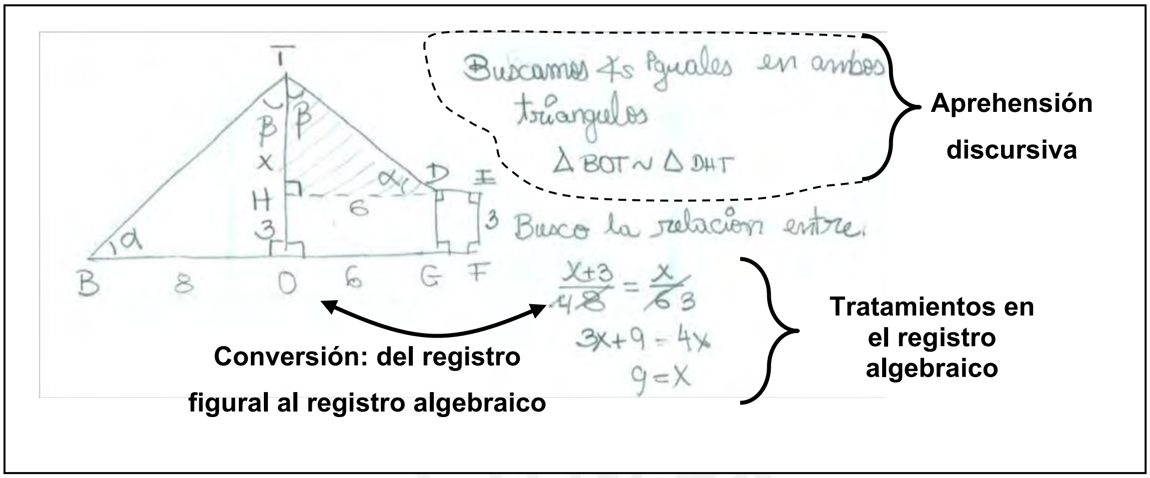
Además, realizarían conversiones del registro de lengua natural al figural y del figural al algebraico, registro mediante el cual, se resolvería la ecuación que resultó de la proporción de semejanza. Por lo anterior, esperamos que los grupos relacionando convenientemente los diversos registros mencionados, movilicen el concepto de semejanza de triángulos al resolver el ítem planteado.

Análisis a posteriori (3-b) – trabajo del grupo de Alexandra

Para el desarrollo de este ítem, el grupo de Alexandra tomó como base su primer registro figural del ítem a), registro en donde no justificó la semejanza de los triángulos BOT y DHT, solo los sugirió. El grupo agregó a este registro figural las longitudes de los lados, sin embargo, no explica con detalle como obtuvo las longitudes HO=3 y HD=6, ni porque los triángulos BOT y DHT son semejantes. En su desarrollo hace mención de las medidas angulares α y β *,* pero no indica su origen; es decir no indicaron por ejemplo que los ángulos TBO y TDH miden α porque los cables forman con el piso siempre un mismo ángulo debido a que tienen la misma inclinación y que la medida de β, para los ángulos BTO y DTH representa su complemento. En relación a la semejanza de triángulos $\Delta BOT \sim \Delta DHT$, tampoco existe una explicación detallada, no indica que criterio de semejanza de triángulos determina que dichos triángulos son semejantes; sin embargo, por lo resuelto en las actividades anteriores creemos que conocen el criterio ángulo-ángulo-ángulo (AAA) y porque en su desarrollo, el grupo señala que buscan ángulos iguales en ambos triángulos. De lo anterior podemos afirmar que el grupo no logró en este ítem un desarrollo completo de su aprehensión discursiva, debido a lo resumido de su explicación, tal como se observa en la figura 73.

Figura 73

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem b)



Luego, el grupo realizó una conversión al cambiar del registro figural al algebraico, cuando planteó la proporción de semejanza de triángulos $\frac{x+3}{8}=\frac{x}{6}$, ecuación que fue resuelta en este registro algebraico a través de tratamientos obteniendo el valor de x igual a 9. Verbalmente el grupo de Alexandra, mencionó que la altura de la antena es de 9m, cometiendo un error, debido a que no se percataron que, según su notación, la variable x no representa a la altura de la antena, solo es una parte de ella, pues falta agregarle 3m.

Es importante señalar que el grupo de Alexandra no fue muy explícito en el desarrollo del ítem; sin embargo, creemos que, a pesar de este detalle desarrolló aprehensiones de tipo perceptivo, operatorio y discursivo, relacionándolos a través de un proceso deductivo, provocando la solución del ítem a pesar de indicar un valor incorrecto para la altura, movilizando de esta manera, el concepto de semejanza de triángulos.

El ítem c) de la pregunta 1 es:

Si el dato que dice $\mathbf{OB = 8m}$ *, se cambiara por* $\mathbf{OC = 8m}$ *¿la altura de la antena sería la misma? Justifique su respuesta.*

Análisis a priori (1-c)

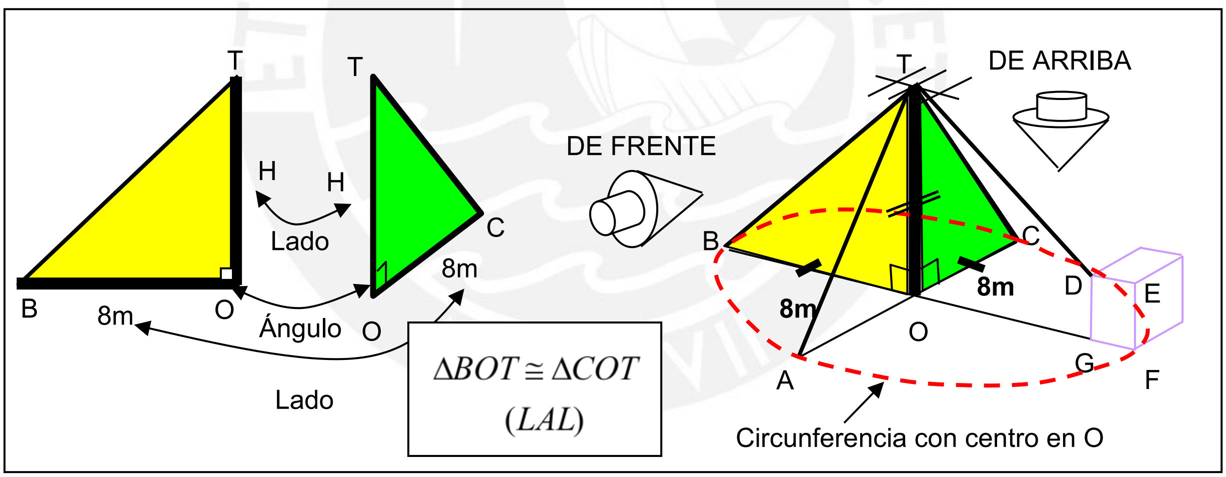
Esperamos que los grupos analicen el registro figural proporcionado en la pregunta, así como la información que dice: “Una antena de comunicaciones se sostiene mediante

cuatro cables que tienen la misma inclinación..." ; para que de allí, deduzcan que los cables forman con el piso la misma medida angular.

Esperamos que los grupos al cambiar de dato OC=8m en vez de OB=8m, se den cuenta que este cambio no influye en el cálculo de la altura de la antena, debido a que el triángulo COT es congruente con el triángulo BOT por el postulado lado-ángulo-lado (LAL), aunque no descartamos que algún grupo les cueste entender que el triángulo COT es congruente con el triángulo BOT, a pesar de pertenecer a planos distintos y perpendiculares. El conocimiento por parte de los grupos sobre el lugar geométrico denominado circunferencia, será muy importante para resolver este ítem, porque mentalmente deberían realizar un giro de los planos alrededor de la antena $\overline{TO}$, tal como se puede apreciar en la figura 74.

Figura 74

Planos distintos y perpendiculares - Análisis a priori - ítem c)



Los grupos deberían darse cuenta, que ambos triángulos $TOB\ y\ TOC$ poseen un ángulo de 90° que lo forma la antena con el piso ($m\angle TOB = m\angle TOC = 90°$), y que además comparten un lado igual, correspondiente a la altura de la antena, es decir, $TO = H$.

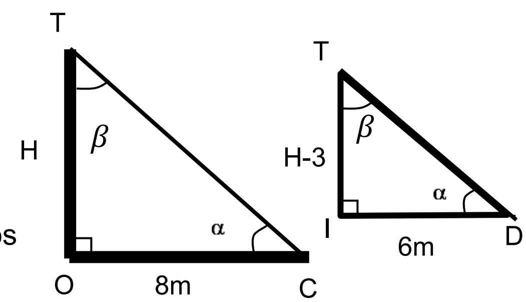
Los grupos como saben por dato del problema, que los segmentos $\overline{OB}\ y\ \overline{OC}$ son de igual medida ($OB = OC = 8m$) y que los cables tienen una misma inclinación con el piso, datos que les permitirán determinar que los triángulos rectángulos TOB y TOC son congruentes ($\Delta BOT \cong \Delta COT$) por el postulado lado-ángulo-lado (LAL). Enseguida, deberían demostrar la semejanza de triángulos entre los triángulos TOC y TID.

A partir del análisis a priori del ítem b), en donde se demostró que el triángulo TOB es semejante con el triángulo TID, los grupos deben considerar ahora que el triángulo TOC es congruente con el triángulo TOB. Tomando en cuenta estas dos afirmaciones los grupos deberían deducir que el triángulo TOC es semejante con el triángulo TID ($\Delta BOT \sim \Delta DIT$), y por lo tanto para hallar la altura de la antena se debería seguir el mismo procedimiento indicado en el análisis a priori del ítem b), tal como se aprecia en la figura 75.

Figura 75

Aprehensión Discursiva de los Triángulos Semejantes - Análisis a priori - ítem c)

En el triángulo COT:
Si $m\angle TCO = \alpha$, entonces $m\angle CTO = \beta$
En el triángulo DIT:
Si $m\angle TDI = \alpha$, entonces $m\angle DTI = \beta$
Como los ángulos interiores de los triángulos rectángulos TOC y TID son iguales, entonces: $\Delta CTO \sim \Delta DIT$



Lo anterior, evidenciaría que los grupos desarrollan aprehensiones operatorias a través de la modificación mereológica, ya que para dar solución al problema tendrían que modificar la figura original al dividir esta, en dos triángulos rectángulos. Enseguida, los grupos deberían hacer una conversión al cambiar del registro figural al algebraico a través de la formulación de la proporción de semejanza, obteniendo lo siguiente: $\frac{H}{8} = \frac{H-3}{6}$.

Dentro de este registro algebraico, a través de tratamientos los grupos resolverían la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{H}{8} = \frac{H-3}{6}$$

$$6H = 8H - 24$$
$$24 = 2H$$
$$12 = H$$

Por lo tanto, los grupos indicarían que la altura de la antena es de 12m.

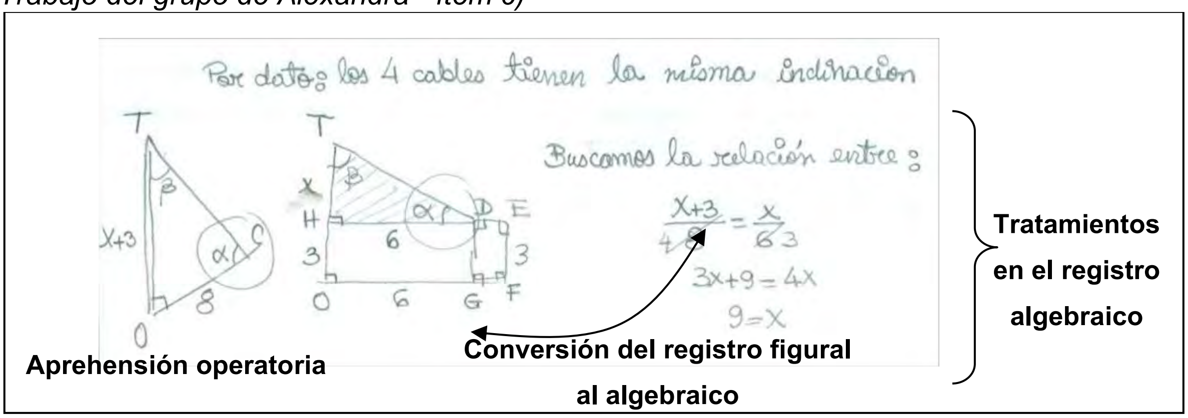
Esperamos que los grupos desarrollen aprehensiones de tipo perceptivo, operatorio y discursivo; asimismo, que realicen cambios de registro de lengua natural al figural y del figural al algebraico y que relacionados por un proceso deductivo deberían lograr solucionar el ítem, movilizando de esta manera el concepto de semejanza de triángulos.

Análisis a posteriori (3-c) – trabajo del grupo de Alexandra

En la figura 76 mostramos el trabajo realizado por el grupo de Alexandra.

Figura 76

Trabajo del grupo de Alexandra - ítem c)



El grupo de Alexandra realizó una conversión del registro de lengua natural al figural, por lo que desarrolló la aprehensión operatoria a través de una modificación mereológica que se evidencia al dividir la figura original y obtener dos triángulos rectángulos, una de ellas expresada en grafico en verdadera dimensión (ΔTHD) y la otra que está en 3D (ΔTOC). En dicho registro figural el grupo indica las longitudes de los lados, pero no explica detalladamente como obtuvieron las longitudes de $\overline{HO}$ (HO=3) y de $\overline{HD}$ (HD=6). Sin embargo, en su desarrollo se observa que hicieron uso del rectángulo HDGO y usaron la propiedad de que lados opuestos poseen la misma longitud.

En relación a la semejanza entre los triángulos TOC y THD, no existe ninguna explicación al respecto; sin embargo, observamos en su desarrollo que el grupo los considera semejantes debido a que realizan una conversión al cambiar de registro del figural al algebraico por medio de una proporción de semejanza de triángulos. Pensamos que la similitud de este ítem con el anterior, provocó que el grupo no crea conveniente señalar por qué, los triángulos mencionados son semejantes. Su registro figural señala el uso ángulos como α y β dentro de dichos triángulos, por lo que podemos inducir que conocen y emplean el criterio de ángulos complementarios.

Dentro del registro algebraico, el grupo realiza tratamientos para resolver la ecuación planteada, determinando finalmente x=9m, pero no se percatan que según su notación este no corresponde a la altura de la antena, pues falta agregarle 3m. Su respuesta a este ítem, es similar al ítem 3-b), y por lo tanto cometieron el mismo error.

De lo anterior, podemos señalar que el grupo de Alexandra realiza cambios de registros, como del lenguaje natural al registro figural y de este al algebraico (conversiones), siendo este último registro el medio por el cual se resuelve el ítem a través de tratamientos. También desarrolló aprehensiones de tipo perceptivo, operatorio y discursivo, relacionándolos correctamente y provocando la solución de la actividad, logrando movilizar el concepto de semejanza de triángulos, a pesar de que su respuesta no es la correcta.

CONCLUSIONES

Con respecto a los antecedentes que tomamos como referencia y la justificación

Tomando como base los antecedentes y los documentos presentados en la justificación, podemos afirmar que los estudiantes de cuarto grado de educación secundaria tienen algunas dificultades para resolver problemas de contexto real (aplicados a lo cotidiano) usando la semejanza de triángulos. Cuando los problemas propuestos vienen acompañados de un registro figural, como los que hemos propuesto en nuestra primera actividad, los estudiantes reconocen generalmente el par de triángulos semejantes, por el parecido que tienen ambos triángulos en el registro figural dado, reconocen además los ángulos correspondientes, los pares de lados homólogos y el criterio de semejanza a aplicar: ángulo-ángulo-ángulo (AAA). Sin embargo, observamos que algunos estudiantes en el desarrollo de la actividad dudaron, al momento de reconocer el par de lados homólogos.

También podemos señalar que los problemas aplicados a la realidad involucran por lo general, otros conceptos geométricos como el teorema de Pitágoras o ángulos entre dos rectas paralelas y una secante o propiedades básicas de los triángulos, etc. que a veces dificultan el planteamiento y solución de los problemas propuestos cuando los estudiantes los han olvidado o no tienen bien aprendidos estos conceptos. Esta información nos permite conocer la importancia de realizar esta investigación con estudiantes de cuarto grado de educación secundaria, para señalar que los conceptos en geometría no son independientes, sino por el contrario se relacionan y el no conocimiento de uno de ellos perjudica el planteamiento de los problemas y en consecuencia dificulta su solución.

Los antecedentes que hemos tomado de referencia hacen mención que el concepto de semejanza de triángulos se desarrolla en aula de manera superficial, con poco tiempo para desarrollarlos, sin aplicaciones en la realidad (problemas no contextualizados), de manera algorítmica y repetitiva; lo que dificulta su aprendizaje. En esta investigación, con base a la aplicación de las actividades y los resultados obtenidos, la movilización de la semejanza de triángulos se da, pero con la intervención del docente en la aclaración de otros conceptos geométricos que se usan en los problemas planteados, empleando un tiempo mucho mayor que el que se asigna en una clase de colegio y con herramientas adicionales como el GeoGebra. En ese sentido, esperamos que nuestra investigación sea un aporte para la enseñanza de la Geometría, específicamente para aplicar la semejanza de triángulos en situaciones similares a la realidad, es decir, en problemas contextualizados.

Con respecto al marco teórico y metodológico

Creemos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica es la base que permite explicar el proceso de razonamiento que siguen los estudiantes cuando resuelven los problemas planteados en las actividades. Es a través de los cambios de registros como el cambio del registro de lengua natural al figural, o del registro figural al algebraico o incluso del registro figural dinámico al figural los que permiten en los estudiantes una mejor comprensión del concepto semejanza de triángulos. Asimismo, los estudiantes desarrollaron las aprehensiones perceptiva, secuencial, operatoria, y discursiva, que engarzadas correctamente llevaron a los estudiantes a un proceso deductivo que desembocó finalmente en la solución de los problemas planteados en las tres actividades, movilizando de esta manera el concepto de Semejanza de triángulos.

En relación al uso del registro figural dinámico a través del GeoGebra, podemos señalar que fue un gran aporte, porque los estudiantes a través de él, pudieron sospechar, conjeturar y luego verificar; promoviendo estrategias de solución para los problemas planteados en las dos primeras actividades. De esta manera, se fortalecieron competencias geométricas como la argumentación y que se hizo evidente en la tercera actividad, en donde no se tuvo ningún archivo de GeoGebra y solo se trabajó con lápiz y papel.

Consideramos que la Ingeniería Didáctica como metodología para nuestra investigación fue la más idónea porque esta metodología mediante sus cuatro fases análisis preliminar, la concepción y análisis a priori, la experimentación y, análisis a posteriori y la validación; nos permitieron analizar los procesos que realizaron los estudiantes al resolver los problemas planteados en las actividades movilizando el concepto de la semejanza de triángulos. El análisis preliminar nos permitió comprender más la Teoría de Registros de Representación Semiótica, el objeto matemático semejanza de triángulos y los aspectos que debíamos considerar para la creación de las actividades. El análisis histórico nos permitió entender cómo surgió el estudio del concepto semejanza de triángulos y la importancia que tiene como elemento motivador en los estudiantes. El análisis cognitivo nos permitió conocer cuáles eran las concepciones que tenían los estudiantes y docentes con respecto a la semejanza de triángulos y cuáles eran sus dificultades. El análisis didáctico nos permitió comprender el enfoque de la semejanza de triángulos que deberíamos considerar y cómo este concepto llega a los estudiantes a través del currículo peruano y los textos educativos.

Con respecto a la pregunta de investigación y el objetivo general

Con respecto a la pregunta de investigación: ¿Cómo estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de la semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas? podemos afirmar lo siguiente: Los estudiantes lograron movilizar la semejanza de triángulos en las actividades propuestas, a pesar que al inicio en algunos problemas planteados en las actividades tuvieron algún obstáculo en su razonamiento, ya sea por una mala comprensión del texto o por desconocimiento de algún concepto matemático adicional. Los estudiantes al realizar diversos cambios de registro de representación semiótica y desarrollar los diferentes tipos de aprehensiones como la perceptiva, secuencial, operativa y discursiva, les permitió resolver las 3 actividades propuestas movilizando así, la semejanza de triángulos. Asimismo, es bueno resaltar el aporte que han tenido el empleo de los archivos del GeoGebra para las dos primeras actividades, pues ellos permitieron que los estudiantes puedan observar, analizar, conjeturar, concluir y para establecer luego estrategias de solución a los problemas planteados en las actividades.

En cuanto al cumplimiento de nuestro objetivo general: Analizar cómo estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de la semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas, podemos afirmar que se logró alcanzar el objetivo general. Recordemos que esta investigación consta de tres actividades, todas ellas contienen problemas contextualizados. La primera actividad contiene dos problemas, el primer problema se apoya en el registro figural que le da el enunciado y del registro figural dinámico que le da el GeoGebra; es así, que el reconocimiento de los triángulos semejantes es muy evidente; porque el registro figural contiene solo dos triángulos y estos son a su vez rectángulos y típicos en los problemas no contextualizados ya estudiados por los estudiantes. El segundo problema se apoya más en el registro figural dinámico que le da el GeoGebra, quien a través de su deslizador permite a los estudiantes observar en tiempo real, diferentes posiciones para un mismo objeto, es decir se realizaron tratamientos dinámicos. La segunda actividad contiene un problema que no tiene ningún registro figural, solo se apoya en el registro figural dinámico del GeoGebra. Este registro figural dinámico, ayudó a los estudiantes a comprender mejor el problema de la actividad, determinaron el par de triángulos semejantes y escribieron la proporcionalidad de semejanza. En ambas actividades los estudiantes lograron realizar tratamientos dentro del registro figural y algebraico y conversiones del registro de lengua natural al registro figural, del figural al registro algebraico, y en algunos casos del registro figural dinámico al figural. Además, los estudiantes realizaron aprehensiones de tipo perceptivo, secuencial, operatorio y discursivo que los llevaron a un proceso deductivo para dar respuesta a los problemas planteados movilizando así, el concepto de la semejanza de triángulos. En estas dos primeras actividades el proceso de su razonamiento fue el siguiente: registro de lengua natural - registro figural dinámico- registro figural (lápiz y papel) - registro algebraico - solución al problema. La tercera y última actividad contiene un problema con registro figural, pero a diferencia del primero, los triángulos semejantes no son evidentes y carece del registro figural dinámico del GeoGebra. Al carecer del GeoGebra los estudiantes realizaron la conversión del registro de lengua natural al figural desarrollando la aprehensión operatoria a través de la modificación mereológica, al dividir la figura en sub-figuras; asimismo, realizaron una conversión del registro figural al algebraico para dar solución a los problemas planteados. Los estudiantes desarrollaron sus aprehensiones perceptivas, para reconocer visualmente un par de triángulos semejantes, la aprehensión operatoria a través de la modificación mereológica para dividir la figura original en dos figuras, la aprehensión secuencial al cambiar del registro de lengua natural al figural y la discursiva para demostrar porqué los triángulos analizados son un par de triángulos semejantes, todo este razonamiento seguido en cada actividad permitió que los estudiantes dieran solución a los problemas presentados en las actividades.

Finalmente se pudo observar cómo influye el factor perceptivo visual al trabajar con el registro figural dinámico del GeoGebra debido a que pueden observar en tiempo real diferentes situaciones alrededor de un mismo problema.

Con respecto a la parte experimental

El GeoGebra es un recurso que permitió percibir los problemas planteados en las actividades de otra manera. Los estudiantes al usar el arrastre o el deslizador, pudieron observar en tiempo real diferentes posiciones de uno o varios objetos, permitiéndoles conjeturar, suponer, sospechar y confirmar según el problema planteado. Este registro figural dinámico y los diversos registros de representación semiótica facilitaron la movilización del concepto de semejanza de triángulos. El registro figural dinámico facilitó que los estudiantes comprendieran que hay situaciones que no se pueden dar en la vida real, puesto que los valores que participan en el problema no justifican la teoría utilizada (contradicción) tal como se observó en la actividad 1, problema 1, ítem d), es decir, permitió que los estudiantes se den cuenta que a veces un registro figural no representa una realidad. También el registro figural dinámico ha permitido realizar medidas de distancia mínima entre dos puntos que previamente pasan por un tercer punto, y que se da, a partir del reflejo de uno de los puntos extremos. Los estudiantes manifestaron comprender las actividades propuestas y lograron dar solución correcta a casi todos los problemas propuestos, puesto que en algunos se olvidaron de escribir la respuesta o porque en otros dieron una respuesta errónea por un error de notación al considerar su variable, como la respuesta. La experimentación también arrojó que, en algunos problemas, los estudiantes tuvieron inconvenientes para plantearlos en un inicio, pero que gracias al registro figural dinámico pudieron entenderlo y resolverlo. El

GeoGebra a través de su registro figural dinámico ha permitido la transición por tres registros: el registro de lengua natural, el registro figural y el registro algebraico, permitiendo así que los estudiantes desarrollen aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas que enlazadas adecuadamente provocaron un proceso deductivo que permitió la solución de los problemas propuestos y movilizando de esta manera el concepto de la semejanza de triángulos.

En la pregunta 1 de la actividad 1, la aprehensión perceptiva de los estudiantes les permitió identificar al par de triángulos semejantes, principalmente porque se trataban de triángulos rectángulos que estaban dibujados de la misma forma y en el mismo sentido. A través de la aprehensión operatoria fueron capaces de mostrar el par de triángulos semejantes por separado usando una modificación mereológica, luego a través de la aprehensión discursiva fueron capaces de justificar porque dichos triángulos son semejantes, formular la proporción de semejanza y desarrollarla dentro del registro algebraico, logrando dar respuesta a casi la totalidad de los ítems de la pregunta 1.

En la pregunta 2 de la actividad 1, realizaron una aprehensión secuencial, para representar gráficamente el problema planteado. Obtenido el registro figural, la aprehensión perceptiva de los estudiantes les permitió identificar al par de triángulos semejantes, principalmente porque se trataban de triángulos acutángulos que estaban dibujados de la misma forma y en el mismo sentido. A través de la aprehensión operatoria fueron capaces de mostrar el par de triángulos semejantes por separado usando una modificación posicional, luego a través de la aprehensión discursiva fueron capaces de justificar porqué dichos triángulos son semejantes, formular la proporción de semejanza y desarrollarla dentro del registro algebraico, logrando dar respuesta a los ítems de la pregunta 2.

En la pregunta 1 de la actividad 2, la aprehensión perceptiva de los estudiantes a través del registro figural dinámico que le proporciona el GeoGebra les permitió identificar al par de triángulos semejantes, para luego hacer la conversión al registro gráfico. En esta pregunta la utilidad del GeoGebra se muestra en toda su plenitud, pues permite que los alumnos conjeturen y den respuesta a esa conjetura. Ya en el registro figural dado por el lápiz y papel, a través de la aprehensión operatoria fueron capaces de reconocer el par de triángulos semejantes, luego a través de la aprehensión discursiva fueron capaces de justificar porqué dichos triángulos son semejantes, formular la proporción de semejanza y desarrollarla dentro del registro algebraico, logrando dar respuesta a casi la totalidad de los ítems de la pregunta 1.

En la pregunta 1 de la actividad 3, los estudiantes no cuentan con el registro figural dinámico que le proporciona el GeoGebra, y el registro figural que viene en el enunciado no permite que ellos reconozcan el par de triángulos semejantes de manera directa. Aprendieron a realizar un trazo auxiliar para lograr modificar el registro figural y obtener el par de triángulos semejantes que dan solución al problema de la actividad. En esta actividad se buscó perfeccionar la aprehensión perceptiva de los estudiantes para que sean capaces de realizar luego un tratamiento dentro del registro figural. Ya en el registro figural y habiendo reconocido el par de triángulos semejantes, relacionaron a través de una secuencia deductiva las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva, logrando dar respuesta al problema planteado en la actividad.

Confrontamos los análisis a priori y a posteriori de las actividades planteadas, y podemos afirmar que los estudiantes conformados en dos grupos de tres lograron en su desarrollo de las actividades realizar lo que habíamos supuesto en el análisis a priori, para resolver los problemas planteados en las tres actividades.

Perspectivas futuras

El presente estudio se realizó con estudiantes de cuarto grado de secundaria pues se esperaba que ellos, al estar finalizando el VII ciclo de la Educación Básica Regular, sepan utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas contextualizados; no obstante, en la revisión de antecedentes de investigación y nuestra propia experiencia, hemos verificado que aún les es difícil resolver problemas de contexto real. Creemos que la secuencia con la que se aborda el concepto de semejanza de triángulos, el poco tiempo que le brindan para desarrollarlo, el texto de consulta que no promueve el desarrollo de competencias en los estudiantes y el uso de otros conceptos de geometría dificultan su aprendizaje y en consecuencia su movilización para resolver problemas de la vida cotidiana, se limita notablemente. Por lo anterior sugerimos que se planteen actividades en donde se tomen en cuenta las investigaciones que sobre el concepto de semejanza existen, en relación a las dificultades de los estudiantes, así como las diversas estrategias que hay por parte de los docentes para enseñarlo.

En los problemas de las actividades de esta investigación, se utilizó únicamente el criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA), por lo que sugerimos continuar esta investigación planteando problemas donde se usen los otros dos criterios de semejanza de triángulos. Pensamos que el presente estudio podría también ser realizado con estudiantes de grados inferiores a cuarto grado de secundaria y con enunciados más simples que solo involucren el concepto de semejanza de triángulos reforzando el concepto de ángulos congruentes y elementos homólogos. Proponerles además problemas con y sin registro figural, para fomentar en los estudiantes el cambio de registro del lenguaje natural al registro figural y de ahí al algebraico. De manera prospectiva, sería interesante analizar la comprensión de los estudiantes universitarios en construcciones con regla y compás y en la homotecia.

También creemos que se podría realizar un estudio dirigido a docentes de matemática de nivel primario y secundario que enseñan las nociones relacionadas a la proporción y semejanza, sobre las diferentes metodologías que emplean para la enseñanza-aprendizaje de estos conceptos, con el propósito de mejorar nuestras estrategias de enseñanza en el aula. Pensamos además, que deberían realizarse investigaciones que propongan una secuencia de actividades sobre el concepto de semejanza de triángulos a través de los problemas resueltos en la antigüedad por Thales de Mileto, como la altura de la pirámide y la distancia de la orilla a un barco, para analizar si estos problemas de la historia de la matemática promueven la enseñanza del concepto. Investigar el uso de otros recursos que propicien la semejanza de figuras, por ejemplo, el geoplano o una malla cuadriculada sería interesante para ver las diversas formas en que se puede abordar el concepto dependiendo del nivel educativo del estudiante. Tampoco dejar de lado estudios sobre conversión de unidades que involucran de manera indirecta el teorema de Thales que sería un buen inicio para el aprendizaje y movilización de la semejanza de triángulos, como tampoco dejar de lado investigaciones relacionadas de la forma como el GeoGebra a través de su registro figural dinámico facilitan el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por último, consideramos que es necesario realizar réplicas de esta investigación en otros contextos con estudiantes de la educación básica regular, pues la aplicación de la semejanza de triángulos en un contexto real, afianza su aprendizaje y es motivador para los estudiantes, porque ven su aplicación.

REFERENCIAS

Artigue, R., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Briceño, E., & Alamillo, L. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. IE *Revista de Investigación Educativa de la REDIECH,* 8(15), 111-131.

Collette, J.-P. (1986). *Historia de las matemáticas I.* México: Siglo veintiuno editores.

Dogan, M., & Icel, R. (2011). The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles. *International Journal of Human Sciences, 8*(1), 1441-1458.

Dündar, S., & Gündüz, N. (2017). Justification for the Subject of Congruence and Similarity in the Context of Daily Life and Conceptual Knowledge. Journal on Mathematics Education, 8(1), 35-54.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM, 17*, 121-138.

Duval, R. (1995)*. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. .* Berna: Francia: Editorial Peter Lang.

Duval, R., Douady, R. M., & Pedro, G. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. .* Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. (Myriam Vega, trad.).* Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004a). *Semiosis y pensamiento humano.* Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004b). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores del desarrrollo cognitivo.* Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2011). Ver y ensinar a matematica de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representaçõe semióticas. *Sau Paulo, Brasil: Proem editora.*

Duval, R. (2012). Registros de representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Revista Electrónica de Educación Matemática. REVEMAT, 7*(2), 266-297.

Duval, R. (2012a). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT, 7*(2), 266-297.

Escudero, I. (2009). *La semejanza como objeto de enseñanza y aprendizaje en la relaciónentre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica.* Departamento de Didáctica de las MatemáticasUniversidad de Sevilla.

Espinoza, B. (2015). *Base Media del Trapecio y Aprehensiones en el registro figural: Una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra con estudiantes del nivel secundario.* (Tesis de maestría en la enseñanza de la matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima: Perú).

Fernandes, R. (2017). *Teorema de Tales e Semelhança de triângulos na educação de jovens e adultos: Uma aprendizagem significativa.* (Tese de Mestrado em Matemática. Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes: Brasil). Obtenido de http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/

14/2018/05/04122017Rogerio-Mauricio-Fernandes-Pessanha.pdf

Ferreira, M. (2016). *Uma Sequência Didática para o ensino de Semelhança de Figuras Planas.* Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM)., Curitiba.

Gualdrón, E., & Gutierrez, Á. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. *Memoria del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* , (pp. 63-82). España: SEIEM.

Hernández, A. (2016). *Diseño, implementación y análisis de una secuencia didáctica para estudiar el Teorema de Thales y sus aplicaciones en la Escuela Secundaria.* (Tesis de Licenciatura en Educación Matemática. Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires UNCPBA, Buenos Aires: Argentina).

Hernández, R., Fernández C., &Baptista L. (2010). *Metodología de la Investigación (5ª ed.).* McGRAW-HILL.

Herrera, D. (2018). *Un estudio acerca del aprendizaje del teorema de Thales en secundaria.* (Tesis doctoral, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis de Potosí, México). Obtenido de http://www.fc.uaslp.mx/licmateeducativa/produccionacademica/TesisLME/TESISUNESTUDIOACERCADELAPRENDIZAJEDELTEOREMADETHALESENSECUNDARIA.pdf

Macías, J. (2015). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos.* (Tesis para optar el grado de Doctor. Facultad de Educación Centro de Formación del Profesorado. Universidad Complutense de Madrid, Madrid: España).

Mrabet, S. (2010). *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien: conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants. (Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot).*

Mrabet, S. (2015). Les environnements mathématiques et les démonstrations du théorème de Thalès dans l'histoire. *Actes du colloque EMF2015 – GT4*, (pp. 411-423). París: Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla.*

Oliveira, E., & Chiummo, A. (2017). Análise da Aprendizagem da Semelhança de Triângulos por alunos de Graduação em Matemática. *VIDYA, 35*(2), 179-195. Obtenido de https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/597

Perú, Ministerio de Educación. (2016). *Diseño Curricular Nacional de la educación Básica Regular. Lima.*

Salazar, J. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço.* (Tesis de Doctorado en Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo: Brasil).

Sanabria, A. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos de semejanza y congruencia, dirigida a estudiantes de grado octavo.* (Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia: Colombia).

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática, 21*(1), 5-27.

Santillana. (2005). *Matemática 4.* Santillana.

Santillana. (2012). *Santillana 4 Matemática.* Santillana.

Santillana. (2020). *Cuaderno de trabajo del tercero de secundaria.* Santillana.

Scheiffer, C. (2017). *Design metodológico para análise da atividades de Geometría segundo a Teoría dos registros de representacao semiótica.* (Tesis de maestría en Educación, en la línea de investigación de enseñanza y aprendizaje. Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa: Brasil).

Startús, R. (2003). *Apuntes de Geometría y Trigonometría.* Universidad de Piura.

Vanegas, J. C. (2019). Propuesta para la enseñanza-aprendizaje de las relaciones de semejanza y Congruencia de Triángulos. (Tesis para optar el grado de magister en Enseñanza de las ciencias exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia: Colombia)

Verástegui, T. (2003). *Geometría Básica. Curso 1.* Moshera