

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



Evolución del entanglement para subsistemas asociados a un sistema de dos átomos acoplados, cada uno, a N modos del campo electromagnético

Tesis para optar el grado académico de Magíster en Física

AUTOR

Oscar Lennon Miculicich Egoavil

ASESOR

Eduardo Ruben Massoni Kamimoto

Lima, 22 de junio de 2021

*Dedicado a
mi tía Maritza y mis hijos Camila y Luka*



Resumen

Este trabajo describe la dinámica del ‘entanglement’ de un sistema formado por dos átomos de dos niveles acoplados de forma independiente con dos reservorios, cada uno, constituido por un número finito de modos del campo electromagnético. Específicamente, se plantea una solución formal y otra aproximada (por series de Fourier) para la ecuación de Schrödinger que describe la dinámica de interacción de cada átomo con su respectivo reservorio.

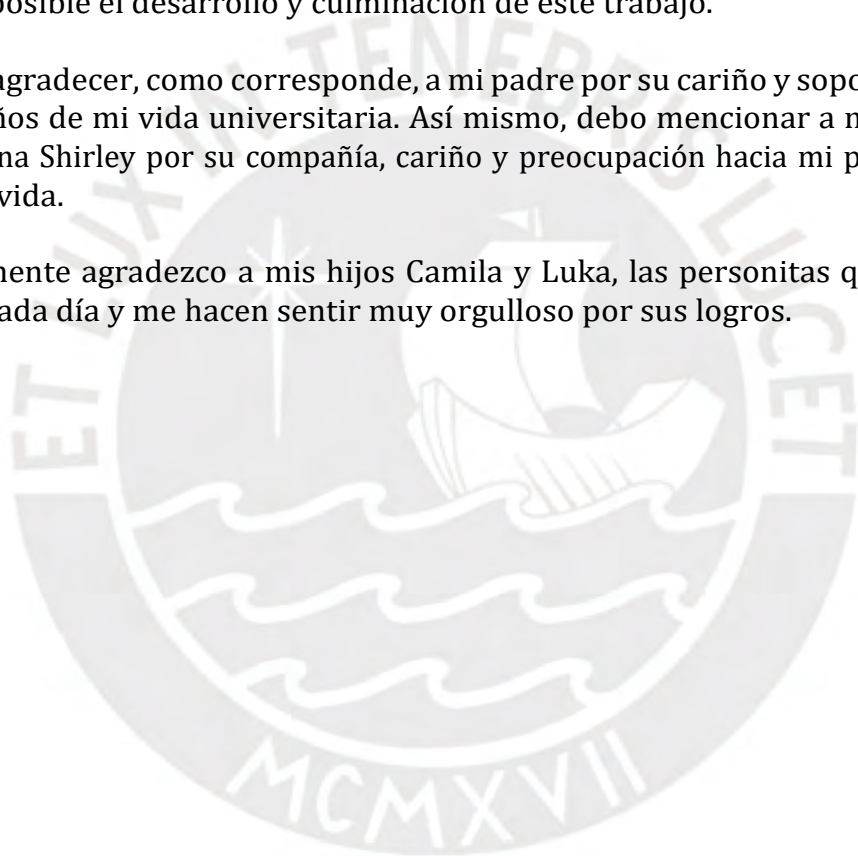
Por otro lado, la evolución del ‘entanglement’ es descrita para distintos subsistemas de dos ‘qubits’. En particular, se compara el comportamiento del ‘entanglement’ tomando en cuenta un estado colectivo para cada reservorio versus el comportamiento descrito a través de los modos individuales de cada reservorio. Se predice fenómenos de entanglement sudden death (ESD) y entanglement sudden birth (ESB) correspondientes al decaimiento inicial de los átomos, así como los debidos a los ‘revivals’ asociados a la dinámica del sistema.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Eduardo Massoni, mi asesor, por su valiosa ayuda y paciencia para hacer posible el desarrollo y culminación de este trabajo.

Debo agradecer, como corresponde, a mi padre por su cariño y soporte durante todos los años de mi vida universitaria. Así mismo, debo mencionar a mi tía Maritza y mi hermana Shirley por su compañía, cariño y preocupación hacia mi persona durante toda una vida.

Finalmente agradezco a mis hijos Camila y Luka, las personitas que me brindan alegrías cada día y me hacen sentir muy orgulloso por sus logros.



Introducción

La dinámica del ‘entanglement’ en sistemas acoplados a su entorno (Cubitt, Verstraete, y Cirac, 2005), así como los fenómenos de ‘entanglement sudden death (ESD)’ (Lastra, Romero, López, França Santos, y Retamal, 2007) y ‘entanglement sudden birth’ han sido estudiados tanto del punto de teórico como experimental (Almeida et al., 2007).

En ese sentido, el trabajo de (López, Romero, Lastra, Solano, y Retamal, 2008) estudia la evolución del ‘entanglement’ para subsistemas de un sistema formado por dos cavidades que interactúan, cada una, con reservorios independientes. En su modelo los reservorios son constituidos por un gran número de modos del campo electromagnético; además, cada cavidad y su respectivo reservorio es descrito como un sistema de dos ‘qubits’, al definir un estado colectivo para el reservorio que alberga un único fotón.

La presente tesis tiene por objetivo evaluar la necesidad de establecer un estado colectivo asociado a cada reservorio y analizar la posibilidad de estudiar la dinámica del ‘entanglement’ en un sistema equivalente al propuesto por (López et al., 2008), tomando en cuenta los modos individuales de cada reservorio. Se realizará una comparación y se buscará una posible correlación en la descripción del ‘entanglement’, por medio del tratamiento colectivo y el tratamiento a nivel de modos de cada reservorio.

Como objetivo adicional se pretende analizar la influencia del número de modos, que constituye cada reservorio, tanto en la evolución de probabilidades del sistema como en la dinámica del ‘entanglement’ de los posibles subsistemas de dos qubits.

Tabla de contenidos

| | |
|---|-----------|
| Resumen | II |
| Agradecimientos | III |
| Introducción | IV |
| Tabla de contenidos | V |
| I. Modelo cuántico de la interacción átomo - campo electromagnético | 1 |
| 1.1. Hamiltoniano de interacción átomo - campo EM | 1 |
| 1.2. Interacción de un átomo de dos niveles con un solo modo del campo EM | 5 |
| 1.2.1. Método de amplitud de probabilidad | 7 |
| 1.2.2. Método del operador de Heisenberg | 10 |
| 1.2.3. Método del operador de evolución | 13 |
| II. Interacción de un átomo de dos niveles con N modos del campo EM | 15 |
| 2.1. Hamiltoniano y solución formal | 15 |
| 2.2. Solución aproximada por series de Fourier | 20 |
| 2.3. Evolución del sistema | 29 |
| III. Medida del 'entangleme'nt': Concurrencia | 33 |
| 3.1. Concurrencia | 33 |
| 3.2. Concurrencia en subsistemas asociados a la interacción de un átomo de dos niveles con N modos del campo EM | 36 |
| IV. Entanglement para subsistemas asociados a un sistema formado por dos átomos de dos niveles con sus respectivos reservorios | 41 |
| 4.1. Concurrencia para los subsistemas | 42 |
| 4.1.1. Subsistema formado por los dos átomos | 43 |
| 4.1.2. Subsistema formado por un átomo y un modo de su correspondiente reservorio | 47 |
| 4.1.3. Subsistema formado por un átomo y su correspondiente reservorio (N modos) | 50 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 4.1.4. | Subsistema formado por un átomo y un modo del reservorio asociado al otro átomo | 53 |
| 4.1.5. | Subsistema formado por un átomo y el reservorio asociado al otro átomo | 57 |
| 4.1.6. | Subsistema formado por un modo de cada reservorio..... | 61 |
| 4.1.7. | Subsistema formado por los dos reservorios | 64 |
| 4.2. | Comparación de la concurrencia entre subsistemas..... | 68 |
| V. | Conclusiones | 73 |
| | Referencias | 76 |



Capítulo I

Modelo cuántico de la interacción átomo - campo electromagnético

En este capítulo se considera al átomo como sistema cuántico que interactúa con el campo electromagnético (EM). El campo EM es modelado como un conjunto de partículas que satisfacen la estadística de Bose-Einstein; es decir, se trabaja con el campo EM cuantizado. Se obtiene el hamiltoniano de interacción, de (Jaynes y Cummings, 1963), a partir del cual se estudiarán las propiedades del sistema átomo - campo EM cuantizado, y se observarán las principales diferencias con el modelo semiclásico.

1.1. Hamiltoniano de interacción átomo - campo EM

La interacción del campo EM cuantizado con un electrón de un átomo, puede ser descrita por el hamiltoniano en la aproximación dipolar:

$$H = H_A + H_C - e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad (1.1)$$

donde H_A corresponde al hamiltoniano atómico, y H_C corresponde al hamiltoniano del campo EM. En el caso del campo EM cuantizado el hamiltoniano H_C está dado por:

$$H_C = \sum_k \hbar \nu_k (a_k^\dagger a_k + 1/2) \quad (1.2)$$

donde ν_k corresponde a la frecuencia del modo k , a_k es el operador de aniquilación y a_k^\dagger el operador de creación del campo EM.

En el caso de H_A y \mathbf{er} resulta conveniente expresarlos en términos de los operadores de transición electrónica:

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j| \quad (1.3)$$

donde $|i\rangle$ representa el conjunto completo de autoestados de energía del átomo; es decir, se cumple:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1 \quad \wedge \quad H_A |i\rangle = \hbar \omega_i |i\rangle \quad \forall i \quad (1.4)$$

con lo cual:

$$H_A = \sum_i \hbar \omega_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \hbar \omega_i \sigma_{ii} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{er} = \sum_{ij} e |i\rangle\langle i| \mathbf{r} |j\rangle\langle j| = \sum_{ij} \mathbf{u}_{ij} \sigma_{ij} \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{u}_{ij} \equiv \langle i| \mathbf{er} |j\rangle$ es un elemento de matriz del momento dipolar eléctrico del átomo.

La componente eléctrica (operador) del campo EM, en la ubicación del átomo, se puede expresar como:

$$\mathbf{E} = \sum_k \epsilon_k \mathbf{E}_k (a_k + a_k^\dagger) \quad (1.7)$$

donde los ϵ_k representan la polarización de cada modo y la amplitud del campo EM

q
 está dada por $E = \frac{\hbar \nu_k}{2\epsilon_0 V}$

Al reemplazar (1.3), (1.5), (1.6) y (1.7) en el hamiltoniano (1.1) se obtiene:

$$H = \sum_k \hbar \nu_k a_k^+ a_k + \sum_i \hbar \omega_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{ij} \sum_k g_k^{ij} \sigma_{ij} (a_k + a_k^+) \quad (1.8)$$

donde $g_k^{ij} \equiv -\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{E}_k}{\hbar}$ se denomina constante de acoplamiento para la interacción con átomo-campo EM. En el hamiltoniano previo la referencia de energía se toma en el vacío del campo EM. El espacio de estados del sistema es constituido por el producto tensorial de los autoestados del átomo libre y del campo EM externo: $|i\rangle \otimes |\{n_k\}\rangle \equiv |i, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$, donde el índice i corresponde a los estados atómicos y n_k corresponde al número de fotones en el k -ésimo modo del campo EM.

Ahora se procede a estudiar el caso del átomo de 2 niveles, considerando que $|e\rangle$ representa al estado excitado y $|g\rangle$ representa al estado base. Además, si se cumple que $u_{eg} = u_{ge}$, entonces $g_k \equiv g_k^{eg} = g_k^{ge}$ y el hamiltoniano (1.8) se reduce a:

$$H = \sum_k \hbar \nu_k a_k^+ a_k + (\hbar \omega_e \sigma_{ee} + \hbar \omega_g \sigma_{gg}) + \hbar \sum_k g_k (\sigma_{eg} + \sigma_{ge}) (a_k + a_k^+) \quad (1.9)$$

Si se definen los operadores:

$$\sigma_z \equiv \sigma_{ee} - \sigma_{gg} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (1.10)$$

$$\sigma_+ \equiv \sigma_{eg} = |e\rangle\langle g| \quad (1.11)$$

$$\sigma_- \equiv \sigma_{ge} = |g\rangle\langle e| \quad (1.12)$$

que satisfacen el álgebra de las matrices de Pauli:

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z \quad (1.13)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_- \quad (1.14)$$

el Hamiltoniano (1.9), se expresa como:

$$H = \sum_k \hbar \nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \hbar \sum_k g_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k + a_k^\dagger) \quad (1.15)$$

donde $\omega \equiv \omega_e - \omega_g$ y se ha redefinido el cero de energía a partir del promedio de energía entre los dos niveles atómicos: $\hbar(\omega_e + \omega_g)/2$.

Al transformar el hamiltoniano (1.15) a la imagen de interacción se observará la contribución de cuatro términos oscilantes con frecuencias: $(-\nu_k + \omega)$, $(\nu_k - \omega)$, $(\nu_k + \omega)$ y $(-\nu_k - \omega)$ asociados a los operadores: $a_k \sigma_+$, $a_k^\dagger \sigma_-$, $a_k^\dagger \sigma_+$ y $a_k \sigma_-$, respectivamente. En este contexto, se distingue dos escalas temporales, una asociada a la desintonización entre el átomo y los modos del campo EM, $\pm(\nu_k - \omega)$, y otra escala de altas frecuencias $\pm(\nu_k + \omega)$. La omisión de los términos que oscilan con altas frecuencias (términos contrarrotantes) corresponde a la aproximación de onda rotante, debido a su contribución insignificante a la dinámica efectiva del sistema en una escala temporal mucho mayor al periodo de las oscilaciones de alta frecuencia, pero mucho menor al periodo asociado a la escala de desintonización. El hamiltoniano simplificado, en la imagen de Schrödinger, resulta:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \sum_k \hbar \nu_k a_k^\dagger a_k + \hbar \sum_k g_k (a_k^\dagger \sigma_- + a_k \sigma_+) \quad (1.16)$$

que representa la interacción de un átomo de dos niveles con un campo EM constituido

por un conjunto de modos.

1.2. Interacción de un átomo de dos niveles con un solo modo del campo EM

En esta sección se estudia la interacción de un átomo con el campo EM de una cavidad optimizada para albergar un único modo. Luego, la frecuencia del modo ν es sintonizada con dos niveles preseleccionados del átomo, de tal forma que, la probabilidad de transición de dichos niveles con el resto de niveles de energía atómicos es insignificante.

De acuerdo a (1.16), el hamiltoniano para este sistema se expresa como:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\nu a^\dagger a + \hbar g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+) \quad (1.17)$$

donde el término $H_0 \equiv \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\nu a^\dagger a$ corresponde a la energía del sistema sin interacción y $H_1 \equiv \hbar g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+)$ representa la energía de interacción entre el átomo y el campo EM monomodo. En este caso, el espacio de estados se reduce al generado por $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle/n = 0, 1, 2, \dots\}$, donde $|e\rangle$ y $|g\rangle$ corresponden a los estados atómicos, y $|n\rangle$ es un autoestado del operador de número, asociado al campo EM monomodo. De acuerdo a la sección anterior, este hamiltoniano es resultado de la aproximación dipolar y la aproximación de onda rotante.

Para estudiar la dinámica de este sistema es conveniente expresar el hamiltoniano en la imagen de interacción:

$$V \equiv e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (1.18)$$

para lo cual se utilizará la identidad:

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (1.19)$$

en la transformación (a la imagen de interacción) de los operadores de transición atómica y los operadores bosónicos:

$$\begin{aligned} e^{i\omega\sigma_z t/2} \sigma_+ e^{-i\omega\sigma_z t/2} &= \sigma_+ + \frac{i\omega t}{2} [\sigma_z, \sigma_+] + \frac{1}{2!} \frac{i\omega t}{2}^2 [\sigma_z, [\sigma_z, \sigma_+]] + \dots \\ &= \sigma_+ + i\omega t \sigma_+ + \frac{1}{2!} (i\omega t)^2 \sigma_+ + \dots \\ &= \sigma_+ e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} e^{i\nu t a^\dagger a} e^{-i\nu t a^\dagger a} &= a + (i\nu t) [a^\dagger a, a] + \frac{1}{2!} (i\nu t) [a^\dagger a, [a^\dagger a, a]] + \dots \\ &= a + (-i\nu t) a + \frac{1}{2!} (-i\nu t)^2 a + \dots \\ &= a e^{-i\nu t} \end{aligned} \quad (1.21)$$

con lo cual, el Hamiltoniano (1.17) se expresa como:

$$\begin{aligned} V &= \hbar g \sigma_+ e^{i\omega t} a e^{-i\nu t} + a^\dagger e^{i\nu t} \sigma_- e^{-i\omega t} \\ V &= \hbar g \sigma_+ a e^{i(\omega-\nu)t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega-\nu)t} \\ V &= \hbar g (\sigma_+ a e^{i\Delta t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\Delta t}) \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde se ha definido la desintonización entre los niveles atómicos y el modo del campo EM, $\Delta \equiv \omega - \nu$. Se observa que en el caso de resonancia, el hamiltoniano en esta imagen es independiente del tiempo, y por tanto solo se resolvería una ecuación de

autovalores.

A continuación se resuelve la ecuación de Schrödinger para el hamiltoniano en la imagen de interacción (1.22) mediante algunos métodos convencionales.

1.2.1. Método de amplitud de probabilidad

En este método se considera una base de estados estacionarios y la dependencia temporal solo corresponde a las amplitudes de probabilidad, de tal forma que la ecuación de Schrödinger se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales. En el caso del sistema del átomo de dos niveles interactuando con un modo del campo EM, se considera como solución una combinación lineal de los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{g,n}(t)|g, n\rangle] \quad (1.23)$$

que al reemplazar en la ecuación de Schrodinger y simplificar, se obtiene:

$$i\hbar \sum_n (\partial_t c_{e,n}(t)|e, n\rangle + \partial_t c_{g,n}(t)|g, n\rangle) = g \sum_n c_{g,n+1} \sqrt{n+1}|e, n\rangle e^{i\Delta t} + g \sum_n c_{e,n-1} \sqrt{n}|g, n\rangle e^{-i\Delta t} \quad (1.24)$$

y debido a la ortogonalidad de la base $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$, las amplitudes de probabilidad deben de satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\partial_t c_{e,n} = -ig \sqrt{n+1} e^{i\Delta t} c_{g,n+1} \quad (1.25)$$

$$\partial_t c_{g,n+1} = -ig \sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} c_{e,n} \quad (1.26)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones previo se puede derivar una de ellas y reem-

plazar la otra donde corresponde, de tal forma que se obtenga una ecuación diferencial homogénea de segundo orden cuya solución es bien conocida. Se obtienen las siguientes soluciones para las amplitudes de probabilidad:

$$c_{e,n}(t) = c_{e,n}(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} - 2ig \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{g,n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} e^{i\Delta t/2} \quad (1.27)$$

$$c_{g,n+1}(t) = c_{g,n+1}(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} - 2ig \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{e,n}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} e^{-i\Delta t/2} \quad (1.28)$$

donde se ha definido la frecuencia de orden n :

$$\Omega_n \equiv (4g^2(n+1) + \Delta^2)^{1/2} \quad (1.29)$$

Para describir el comportamiento del sistema se considera el caso particular de átomo inicialmente en el estado excitado; esto es, $c_{e,n}(0) = c_n(0)$ y $c_{g,n+1}(0) = 0$. En dicho caso, las amplitudes de probabilidad se reducen a:

$$c_{e,n}(t) = c_n(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} e^{i\Delta t/2} \quad (1.30)$$

$$c_{g,n+1}(t) = -c_n(0) \frac{2ig \sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t}{2} e^{-i\Delta t/2} \quad (1.31)$$

La función $|c_{e,n}(t)|^2$ representa la probabilidad de que, en el instante t , en el interior de la cavidad se encuentren n fotones y a la vez el átomo se encuentre en su estado excitado $|e\rangle$. De manera similar, la función $|c_{g,n}(t)|^2$ representa la probabilidad de que,

en el instante t , en la cavidad se encuentren n fotones y el átomo se encuentre en su estado fundamental $|g\rangle$. Luego, es posible calcular la probabilidad de tener n fotones en la cavidad en el instante t :

$$p(n) \equiv |c_{e,n}(t)|^2 + |c_{g,n}(t)|^2 \quad (1.32)$$

$$p(n) = \rho_{nn}(0) \cos^2 \frac{\Omega_n t}{2} - \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} \sin^2 \frac{\Omega_n t}{2} + \frac{4g^2 n}{\Omega_{n+1}^2} \rho_{n-1,n-1}(0) \sin^2 \frac{\Omega_{n-1} t}{2} \quad (1.33)$$

donde $\rho_{nn}(0) \equiv |c_n(0)|^2$ es la probabilidad de tener n fotones en la cavidad en el instante inicial $t = 0$. Un ejemplo de estadística inicial corresponde a un estado coherente:

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \quad (1.34)$$

donde $\langle n \rangle$ es el valor medio del operador $N = a^\dagger a$.

Para el estudio del cambio de estado se calcula la inversión, como la diferencia de probabilidades de encontrar al átomo en su estado excitado menos la correspondiente al estado base:

$$W(t) = \sum_n [|c_{e,n}(t)|^2 - |c_{g,n}(t)|^2] \quad (1.35)$$

que se reduce a:

$$W(t) = \sum_n \rho_{nn}(0) \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \right] \cos(\Omega_n t) \quad (1.36)$$

lo cual manifiesta la presencia de oscilaciones de Rabi en la dinámica del sistema.

Este último resultado marca una diferencia clara con el modelo semiclásico, donde la radiación es tratada como onda electromagnética y no se esperarían las transiciones atómicas en ausencia del campo EM; sin embargo, el modelo cuántico de la radiación

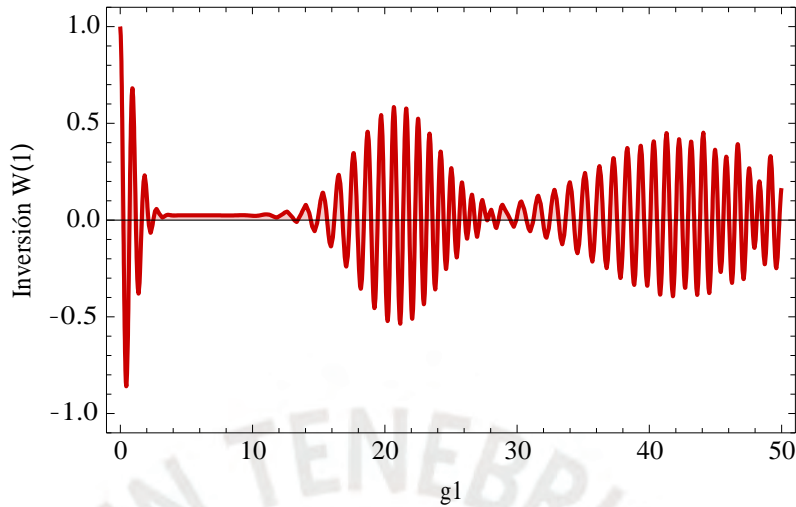


Figura 1.1: Inversión $W(t)$ como función del tiempo. Se observa el fenómeno de “collapse and revival” para un estado inicial coherente en el campo EM.

predice el decaimiento del átomo inclusive en el vacío del campo EM ($\rho_{nn}(0) = \delta_{n_0}$), mostrando así el caso más simple de la emisión espontánea. Otro fenómeno que no es compatible con el modelo semiclásico corresponde al “collapse and revival” de la inversión (ver la figura 1.1), que ocurre solo debido a la estructura discreta del campo EM.

Es posible mostrar de manera formal la equivalencia entre el modelo cuántico y semiclásico de un átomo interactuando con solo un modo del campo EM. (Swain, 1973) mostró que, en la aproximación dipolar, los resultados cuánticos tienden a los correspondientes semiclásicos en el caso que el número de fotones tiende a infinito.

1.2.2. Método del operador de Heisenberg

En este caso se utiliza un método algebraico para resolver la dinámica de la interacción entre un átomo de dos niveles y un modo del campo. Se plantea el problema en la imagen de Heisenberg y se resuelve las ecuaciones para los operadores bosónicos del

campo EM ($a(t)$ y $a^+(t)$) y los operadores atómicos ($\sigma_{\pm}(t)$ y $\sigma_z(t)$):

$$\partial_t a = \frac{1}{i\hbar} [a, H] = -i\nu a - ig\sigma_- \quad (1.37)$$

$$\partial_t \sigma_- = \frac{1}{i\hbar} [\sigma_-, H] = -i\omega\sigma_- + ig\sigma_z a \quad (1.38)$$

$$\partial_t \sigma_z = \frac{1}{i\hbar} [\sigma_z, H] = 2ig(a^+\sigma_- - \sigma_- a) \quad (1.39)$$

Resulta conveniente definir las siguientes constantes de movimiento (operadores):

$$N \equiv a^+ a + \sigma_+ \sigma_- \quad (1.40)$$

$$C \equiv \frac{\Delta}{2} \sigma_z + g(\sigma_+ a + a^+ \sigma_-) \quad (1.41)$$

que satisfacen $[N, H] = [C, H] = 0$.

Al derivar con respecto al tiempo (1.38):

$$\partial_t^2 \sigma_- = -i\omega \partial_t \sigma_- + ig(\partial_t \sigma_z a + \sigma_z \partial_t a)$$

y al reemplazar (1.37) y (1.39), se obtiene:

$$\partial_t^2 \sigma_- = -i\omega \partial_t \sigma_- - 2g^2(a^+ \sigma_- a - \sigma_- a^2) + g\nu \sigma_z a - g^2 \sigma_- \quad (1.42)$$

que puede expresarse en términos del operador C como:

$$\partial_t^2 \sigma_- + 2i(\nu - C)\partial_t \sigma_- + (2\nu C - \nu^2 + g^2)\sigma_- = 0 \quad (1.43)$$

De manera similar, el operador bosónico a cumple:

$$\partial_t^2 a + 2i(\nu - C)\partial_t a + (2\nu C - \nu^2 + g^2)a = 0 \quad (1.44)$$

Ambas ecuaciones son equivalentes y la soluciones para cada caso son:

$$\sigma_-(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} [Ae^{ikt} + Be^{-ikt}] \quad (1.45)$$

$$a(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} [Ee^{ikt} + Fe^{-ikt}] \quad (1.46)$$

donde A, B, E y F son operadores que se determinan al tener en cuenta las "condiciones iniciales" para los operadores σ_- y a . Se verifica que:

$$\sigma_-(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} \left[\cos(\kappa t) + iC \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \right] \sigma_-(0) - ig \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} a(0) \quad (1.47)$$

$$a(t) = e^{-i\nu t} e^{iCt} \left[\cos(\kappa t) + iC \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \right] a(0) - ig \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} \sigma_-(0) \quad (1.48)$$

donde κ es un operador constante, $\kappa = \frac{\hbar}{4} \Delta^2 + g^2(N + 1)^{1/2}$, que satisface $[C, \kappa] = 0$.

A partir de las expresiones (1.47) y (1.48) se pueden obtener las cantidades físicas de interés; por ejemplo, la inversión en el caso que el estado inicial corresponde al átomo excitado $|e\rangle$, y el campo EM en el estado coherente $|\alpha\rangle$ (autoestado del operador a):

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle e, \alpha | \sigma_z(t) | e, \alpha \rangle \\ &= 2 \langle e, \alpha | \sigma_+(t) \sigma_-(t) | e, \alpha \rangle - 1 \\ &= 1 + 2g^2(|\alpha|^2 - 1) \frac{\sin(\kappa_\alpha t)^2}{\kappa_\alpha} \end{aligned}$$

donde se definió la constante: $\kappa_\alpha \equiv \frac{\hbar}{4} \Delta^2 + g^2(|\alpha|^2 + 1)^{1/2}$.

1.2.3. Método del operador de evolución

Es posible resolver la ecuación de Schrödinger de manera formal por medio del operador de evolución. Para mostrar el método se considera el caso resonante ($\Delta = 0$) para el hamiltoniano (1.22), con lo cual el operador de evolución del sistema en la imagen de interacción es:

$$U(t) = \exp(-iVt/\hbar) \quad (1.49)$$

donde:

$$V = \hbar g(\sigma_+ a + a^+ \sigma_-) \quad (1.50)$$

Durante la expansión del operador de evolución será necesario utilizar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^2 &= \sigma_+ a \sigma_+ a + \sigma_+ a a^+ \sigma_- + a^+ \sigma_- \sigma_+ a + a^+ \sigma_- a^+ \sigma_- \\ &= a a^+ \sigma_+ \sigma_- + a^+ a \sigma_- \sigma_+ \\ (\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^2 &= a a^+ |e\rangle\langle e| + a^+ a |g\rangle\langle g| \end{aligned} \quad (1.51)$$

que por inducción implica:

$$(\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^{2k} = (a a^+)^k |e\rangle\langle e| + (a^+ a)^k |g\rangle\langle g| \quad (1.52)$$

$$(\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^{2k+1} = (a a^+)^k a |e\rangle\langle g| + a^+ (a a^+)^k |g\rangle\langle e| \quad (1.53)$$

Con esto, el operador de evolución se expresa como:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} (\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)^{2k+1} \\
 U(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (aa^+)^k |e\rangle\langle e| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} (a^+a)^k |g\rangle\langle g| \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} (aa^+)^k a |e\rangle\langle g| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} a^+ (aa^+)^k |g\rangle\langle e| \\
 U(t) &= \cos(gt \sqrt{a^+a+1}) |e\rangle\langle e| + \cos(gt \sqrt{a^+a}) |g\rangle\langle g| \\
 &- i \frac{\sin(gt \sqrt{a^+a+1})}{\sqrt{a^+a+1}} a |e\rangle\langle g| - ia^+ \frac{\sin(gt \sqrt{a^+a+1})}{\sqrt{a^+a+1}} |g\rangle\langle e|
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

En general, el estado del sistema en el instante t , se calcula como:

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \tag{1.55}$$

Por ejemplo, si $|\psi_I(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)|e, n\rangle$, el estado del sistema en el instante t , es descrito por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) [\cos(gt \sqrt{n+1}) |e, n\rangle - i \sin(gt \sqrt{n+1}) |g, n+1\rangle] \tag{1.56}$$

que equivale a las soluciones (1.30) y (1.31) en el caso resonante ($\Delta = 0$) y con $\Omega_n = 2g \sqrt{n+1}$.

Capítulo II

Interacción de un átomo de dos niveles con N modos del campo EM

En este capítulo se plantea la ecuación de Schrödinger para el sistema formado por un átomo de dos niveles y su correspondiente entorno o reservorio, este último constituido por N modos del campo electromagnético. Se mostrará una solución formal asociada a un proceso de diagonalización y una solución aproximada por series de Fourier. Al final se verifica que la solución aproximada converge a la solución formal conforme se considera un reservorio con un mayor número de modos.

2.1. Hamiltoniano y solución formal

Como se describió en el capítulo anterior, el hamiltoniano asociado a la interacción entre un átomo de dos niveles y un reservorio formado por N modos del campo EM

se expresa como:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \hbar(G_k a_k^\dagger \sigma_- + G_k^* a_k \sigma_+) \quad (2.1)$$

donde:

$\hbar\omega$ = diferencia de energía entre los dos niveles atómicos

$\hbar\nu_k$ = energía asociada al k-ésimo modo del campo EM

además, las constantes de acoplamiento del átomo con cada modo del campo EM cumplen:

$$G_k = \frac{\mathbf{d}_{eg} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\nu_k}{2\epsilon_0 V}} \quad (2.2)$$

Con el objetivo de estudiar la evolución del sistema se resolverá la ecuación de Schrödinger en la imagen de interacción, de tal forma que la dinámica será descrita por el siguiente hamiltoniano:

$$V = \sum_k \hbar(G_k e^{-iD_k t} a_k^\dagger \sigma_- + G_k^* e^{iD_k t} a_k \sigma_+) \quad (2.3)$$

donde las diferencias de frecuencias entre el átomo y cada modo del reservorio son:

$$D_k \equiv \omega - \nu_k.$$

De acuerdo al hamiltoniano previo y considerando que el átomo inicialmente se encuentra en su estado excitado $|e\rangle$ con el reservorio en el estado vacío $|\bar{0}\rangle$ (ausencia de

fotones), el estado del sistema en el instante t se puede expresar como:

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e, \bar{0}\rangle + \sum_k c_{g,k}(t)|g, \bar{1}_k\rangle \quad (2.4)$$

donde el estado $|\bar{1}_k\rangle \equiv |0_1, 0_2, 0_3, \dots, 1_k, \dots, 0_N\rangle$ está asociado a la presencia de solo un fotón en el k -ésimo modo del campo EM. Luego, las amplitudes de probabilidad como funciones del tiempo, $c_e(t)$ y $c_{g,k}(t)$, serán obtenidas al reemplazar el estado (2.4) en la ecuación de Schrödinger con el hamiltoniano (2.3).

De acuerdo a la ecuación de Schrödinger (en la imagen de interacción), las amplitudes de probabilidad satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{c}_e(t) = -i \sum_{k=1} G_k^* e^{iD_k t} c_{g,k}(t) \quad (2.5)$$

$$\dot{c}_{g,k}(t) = -i G_k e^{-iD_k t} c_e(t) \quad (2.6)$$

que pueden expresarse de forma matricial como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_e \\ \bar{c}_g \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \bar{G}^+ \\ -G & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e \\ \bar{c}_g \end{pmatrix} \equiv -iA \begin{pmatrix} c_e \\ \bar{c}_g \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

donde se definieron las matrices columna:

$$\bar{G} \equiv \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_N \end{pmatrix}; \quad \bar{c}_g(t) \equiv e^{iDt} \begin{pmatrix} c_{g,1}(t) \\ c_{g,2}(t) \\ c_{g,3}(t) \\ \vdots \\ c_{g,N}(t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

y una matriz diagonal $N \times N$, definida por:

$$D \equiv \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_N \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

De acuerdo a las condiciones iniciales, la solución formal de (2.7) se expresa como:

$$\begin{pmatrix} c_e \\ \bar{c}_g \end{pmatrix} = e^{-iAt} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{0} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

para lo cual se requiere conocer los autovalores (λ) y autovectores (\bar{u}) de la matriz A , tales que:

$$A \bar{u} = \lambda \bar{u} \equiv \lambda \begin{pmatrix} v_o \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

o de forma equivalente:

$$\bar{G}^+ \bar{v} = \lambda v_o \quad (2.12)$$

$$v_o \bar{G} - D \bar{v} = \lambda \bar{v} \quad (2.13)$$

de donde la ecuación de autovalores se expresa como:

$$\lambda - \bar{G}^+ (\lambda + D)^{-1} \bar{G} = 0 \quad (2.14)$$

cuyas $N + 1$ raíces cumplen:

$$\lambda = \frac{\sum_k |G_k|^2}{\lambda + D_k} \quad (2.15)$$

Así mismo, los $N + 1$ autovectores normalizados cumplen:

$$\bar{u} = v_0 \cdot \frac{1}{(\lambda + D)^{-1} \bar{G}} \quad (2.16)$$

con el parámetro de normalización:

$$|v_0|^2 = \frac{1}{1 + \sum_k \frac{|G_k|^2}{|\lambda + D_k|^2}} \quad (2.17)$$

Para expresar la solución (2.10) en término de los autovalores y autovectores de la matriz A , se construye la matriz de autovectores:

$$U \equiv \bar{u}_0 \ \bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots \ \bar{u}_N \quad (2.18)$$

tal que:

$$\Lambda \equiv U^+ A U = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

con lo cual, (2.10) se expresa como:

$$\begin{pmatrix} c_e \\ \vdots \\ \bar{c}_g \end{pmatrix} = U e^{-i\Lambda t} U^+ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Finalmente se obtiene las amplitudes de probabilidad, del estado (2.4), en términos de las autovalores y autovectores de la matriz A:

$$c_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |U_{k,0}|^2 e^{-i\lambda_k t} \quad (2.21)$$

$$\bar{c}_{g,j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{j,k} U_{k,0}^* e^{-i\lambda_k t} \quad (2.22)$$

Aunque este formalismo permite describir la evolución del sistema, se requiere de un proceso de diagonalización de una matriz (A) del orden del número de modos que constituyen al reservorio.

2.2. Solución aproximada por series de Fourier

En esta sección se pretende mostrar una solución analítica y aproximada para determinar las amplitudes de probabilidad asociadas a la evolución del sistema descrito en la sección previa. Para establecer el método de análisis se tomará en cuenta las características de la ecuación integro-diferencial de la amplitud de probabilidad asociada al estado excitado del átomo.

Para obtener la ecuación integro-diferencial de la amplitud de probabilidad $c_e(t)$

basta integrar la ecuación (2.6) y reemplazarla en (2.5), con lo que se obtiene:

$$\dot{c}_e(t) = - \int_0^t \sum_k |G_k|^2 e^{-iD_k(\tau-t)} c_e(\tau) d\tau \quad (2.23)$$

que es equivalente a:

$$\dot{c}_e(t) = - \int_0^t \bar{G}^+ e^{iD(t-\tau)} G \bar{c}_e(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

de acuerdo a las matrices definidas en (2.8) y (2.9).

Esta ecuación pone en evidencia que la dinámica del sistema depende de su historia, de tal forma que la sumatoria $S(\tau - t) \equiv \sum |G_k|^2 e^{-iD_k(\tau-t)}$ determina la influencia de la historia del sistema en su propia evolución.

Para analizar las características de una solución aproximada de (2.23), se considera que las diferencias de frecuencias entre el átomo y cada uno de los modos del reservorio, satisfacen:

$$D_k = -k\Delta \quad (2.25)$$

donde la diferencia de frecuencia entre los modos consecutivos se considera uniforme:

$$\Delta = x \frac{2\omega}{N} \quad \text{con } 0 < x < 1 \quad (2.26)$$

y los valores de k pueden ser $\{-C_N, -C_N + 1, \dots, C_N - 1, C_N\}$, tal que $C_N = N/2$ para N par y $C_N = (N - 1)/2$ para N impar. Con estas consideraciones, las constantes de

acoplamiento entre el átomo y cada modo del reservorio, se expresan como:

$$G_k = g \sqrt{\frac{S}{\Delta(\omega + k\Delta)}} = g \frac{2x\omega}{N} \frac{1}{\omega + \frac{2kx\omega}{N}} \quad (2.27)$$

donde $g = \frac{\gamma_{eg}}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 c A \hbar}}$, donde γ_{eg} es el momento dipolar atómico, A el área transversal a la dirección de propagación.

Ahora, tomando en cuenta la diferencia de frecuencias entre los modos del reservorio (2.25), la sumatoria (S) de la ecuación (2.23) es periódica (ver figura 2.1).

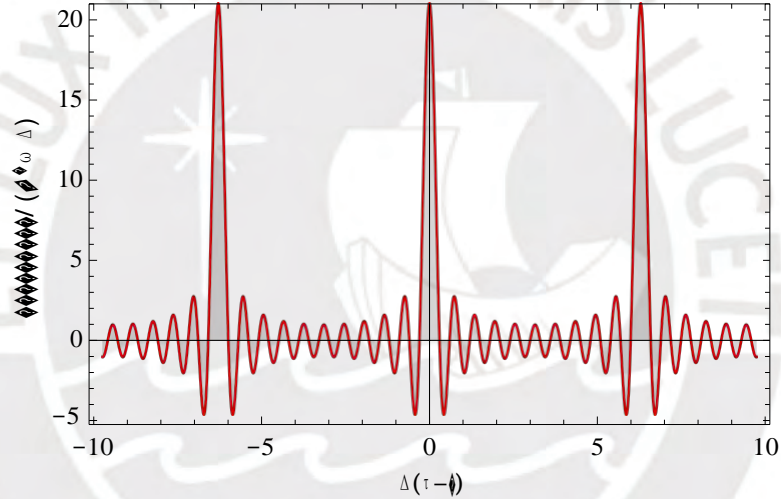


Figura 2.1: Sumatoria tipo núcleo de Dirichlet. Reservorio con $N = 21$ modos y parámetro $x = 0,85$. El máximo en $t = \tau$ es igual a N y en cada periodo se observan N 1 valores nulos.

El periodo de la sumatoria S es $\frac{2\pi}{\Delta}$ y se manifiesta un comportamiento tipo delta de Dirac en el intervalo $[-\pi/\Delta; +\pi/\Delta]$; este comportamiento se acentúa al considerar un mayor número de modos en el reservorio. Al tomar en cuenta las características de este núcleo, se definen dos escalas temporales: (1) una escala mayor asociada a la desintonización entre los modos del reservorio ($t_R \approx 2\pi/\Delta$), y (2) una escala menor asociada a la transición entre los niveles atómicos ($t_A \approx 2t_R/N = 2\pi/x\omega$).

Ahora, teniendo en cuenta el comportamiento periódico del núcleo de la ecuación (2.23), se plantea una solución por intervalos en la escala de desintonización entre modos del reservorio:

$$c_e(t) = \begin{cases} c^{(0)}(t) & \text{si } 0 \leq t < \pi/\Delta \\ c^{(1)}(t) & \text{si } \pi/\Delta \leq t < 3\pi/\Delta \\ c^{(2)}(t) & \text{si } 3\pi/\Delta \leq t < 5\pi/\Delta \end{cases} \quad (2.28)$$

donde cada término, $c^{(m)}(t)$, debe cumplir la ecuación (2.23) con sus correspondientes condiciones iniciales.

Para el primer intervalo $[0; \pi/\Delta)$, en el instante t , el integrando de (2.23) solo es significativo en un intervalo de tiempo del orden de t_A (escala atómica); por tanto, a mayor intervalo de tiempo, la integral (2.23) no sufrirá cambios significativos y su límite superior puede ser reemplazado por π/Δ (escala de desintonización entre modos):

$$\dot{c}_e(t) = - \int_0^{\pi/\Delta} \sum_k |G_k|^2 e^{-iD_k(\tau-t)} c_e(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

cuya solución puede expresarse como una suma parcial de una serie de Fourier:

$$c_e(t) = \sum_{-C_N}^{+C_N} a_k e^{iD_k t} \quad (2.30)$$

donde los coeficientes a_k cumplen:

$$a_k = \frac{1}{\pi/\Delta} \int_0^{\pi/\Delta} e^{-iD_k \tau} c_e(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

Luego, al reemplazar (2.27) e identificar el coeficiente (2.31) en la ecuación (2.29), se

obtiene:

$$\dot{c}_e(t) = -\pi g^2 \sum_{-C_N}^{+C_N} \omega a_k e^{iD_k t} + \Delta \sum_{-C_N}^{+C_N} a_k k e^{iD_k t} \quad (2.32)$$

que para un alto número de modos en el reservorio, converge a la ecuación:

$$\dot{c}_e(t) = -\pi g^2 \omega c_e(t) + i c'_e(t) \quad (2.33)$$

cuya solución, en el primer intervalo y de acuerdo a las condiciones iniciales, es:

$$c^{(0)}(t) = e^{-\frac{g^2 \omega t}{1 + i g^2 \pi}} \quad (2.34)$$

de tal forma que el decaimiento del estado excitado es descrito por el cuadrado del módulo de la amplitud de probabilidad $c^{(0)}(t)$:

$$|c^{(0)}(t)|^2 = e^{-\Gamma t} \quad (2.35)$$

donde la constante de decaimiento Γ satisface:

$$\Gamma \equiv \frac{2g^2 \omega \pi}{1 + g^4 \pi^2} \quad (2.36)$$

En este mismo intervalo, la amplitud de probabilidad para el k -ésimo modo del reservorio cumple la ecuación (2.6):

$$\dot{c}_{g,k}^{(0)}(t) = -i G_k e^{-iD_k t} c^{(0)}(t) \quad (2.37)$$

cuya solución, según la condición inicial (vacío del campo EM), se expresa como:

$$c_{g,k}^{(0)}(t) = \frac{iG_k}{iD_k + \gamma} (e^{-(iD_k + \gamma)t} - 1) = \frac{iG_k}{i(D_k - \frac{\Gamma g^2 \pi}{2}) + \frac{\Gamma}{2}} (e^{-(iD_k + \gamma)t} - 1) \quad (2.38)$$

donde: $\gamma \equiv \frac{g^2 \omega \pi}{1 + i g^2 \pi}$. Este resultado muestra cierta semejanza con los resultados de la aproximación Weisskopf-Wigner, excepto por el término adicional en la parte imaginaria del denominador ($-\frac{\Gamma g^2 \pi}{2}$).

Para el segundo intervalo $[\pi/\Delta; 3\pi/\Delta]$, la condición inicial para la amplitud de probabilidad del k -ésimo modo del reservorio, por continuidad, será:

$$c_{g,k}^{(1)} \frac{\pi}{\Delta} \equiv c_{g,k}^{(0)} \frac{\pi}{\Delta} = \frac{iG_k}{iD_k + \gamma} (e^{-(iD_k + \gamma) \frac{\pi}{\Delta}} - 1) \quad (2.39)$$

y con ello, en el intervalo en cuestión, las ecuaciones (2.5) y (2.6) se reducen a:

$$\dot{c}_e(t) = - \int_{\pi/\Delta}^t \sum_k |G_k|^2 e^{-iD_k(\tau-t)} c_e(\tau) d\tau - i \sum_k G_k^* e^{iD_k t} c_{g,k}^{(1)}(\pi/\Delta) \quad (2.40)$$

donde se observa que la solución homogénea, para un alto número de modos, corresponde a la solución de una ecuación equivalente a la ecuación (2.33). Así mismo, la solución singular debe cumplir:

$$\dot{c}_e(t) = - \pi g^2 \omega c_e(t) + i \dot{c}_e(t) - i \sum_k G_k^* e^{iD_k t} c_{g,k}^{(1)}(\pi/\Delta) \quad (2.41)$$

La solución de la ecuación (2.41), en el intervalo en cuestión, también se puede expresar como una serie de Fourier:

$$c_e^{(1)}(t) = \sum_{k=-C_N}^{+C_N} a_k e^{iD_k t} \quad (2.42)$$

cuyos coeficientes $a_k^{(1)}$ satisfacen:

$$a_k^{(1)} = \frac{-iG_k^* c_{g,k}^{(1)}(\pi/\Delta)}{iD_k + \pi g^2 \omega - \pi g^2 D_k} \quad (2.43)$$

Por un procedimiento semejante y tomando en cuenta las nuevas condiciones iniciales, se puede verificar que la solución para el tercer intervalo $[3\pi/\Delta; 5\pi/\Delta]$, cumple:

$$\sum_{k=1}^{+C_N} c_k^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{+C_N} a_k^{(2)} e^{iD_k t} \quad (2.44)$$

cuyos coeficientes $a_k^{(2)}$ satisfacen:

$$a_k^{(2)} = \frac{-iG_k^* c_{g,k}^{(2)}(3\pi/\Delta)}{iD_k + \pi g^2 \omega - \pi g^2 D_k} \quad (2.45)$$

donde:

$$c_{g,k}^{(2)} \frac{3\pi}{\Delta} \equiv c_{g,k}^{(1)} \frac{3\pi}{\Delta} = -iG_k \int_{\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{3\pi}{\Delta}} e^{-iD_k t} c_{g,k}^{(1)}(t) dt + c_{g,k}^{(1)} \frac{\pi}{\Delta} \quad (2.46)$$

Finalmente, por recurrencia es posible conocer la solución (2.28) para un alto número de modos.

En el intervalo $(2j - 1)\pi/\Delta \leq t \leq (2j + 1)\pi/\Delta$, con $j \geq 1$, la amplitud de probabilidad del átomo en su estado excitado, se expresa como:

$$\sum_{k=1}^{+C_N} c_k^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{+C_N} a_k^{(j)} e^{iD_k t} \quad (2.47)$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier, satisfacen:

$$a_k^{(j)} = \frac{-iG^* c^{(j)} (2j-1) \frac{\pi}{\Delta}}{iD_k + \pi g^2 \omega - \pi g^2 D_k} \quad (2.48)$$

además; la amplitud de probabilidad del k -ésimo modo del reservorio se expresa como:

$$c_{g,k}^{(j)}(t) = -iG_k \int_{(2j-1)\frac{\pi}{\Delta}}^t e^{-iD_k \tau} c^{(j)}(\tau) d\tau + c_{g,k}^{(j)} (2j-1) \frac{\pi}{\Delta} \quad (2.49)$$

con las siguientes condiciones iniciales, por continuidad:

$$\begin{aligned} c_{g,k}^{(j)} (2j-1) \frac{\pi}{\Delta} &= c_{g,k}^{(j-1)} (2j-1) \frac{\pi}{\Delta} \\ c_{g,k}^{(0)} \frac{\pi}{\Delta} &= \frac{iG_k}{iD_k + \gamma} (e^{-(iD_k + \gamma) \frac{\pi}{\Delta}} - 1) \end{aligned} \quad (2.50)$$

El procedimiento descrito permite construir las amplitudes de probabilidad asociadas al estado que describe el comportamiento del sistema. Las series propuestas permitirían un análisis en escalas de tiempo del orden de la desintonización entre modos del reservorio y su convergencia dependerá del número de modos del reservorio; es decir, mientras se considere un reservorio con mayor número de modos, la solución propuesta tendrá una mejor aproximación a la solución exacta.

A continuación se muestran las gráficas comparativas, entre la solución analítica (de la sección 2.1) y la aproximación por intervalos (considerando solo los tres primeros intervalos), de la evolución de la probabilidad de encontrar al átomo en su estado excitado (para distintos números de modos del reservorio).

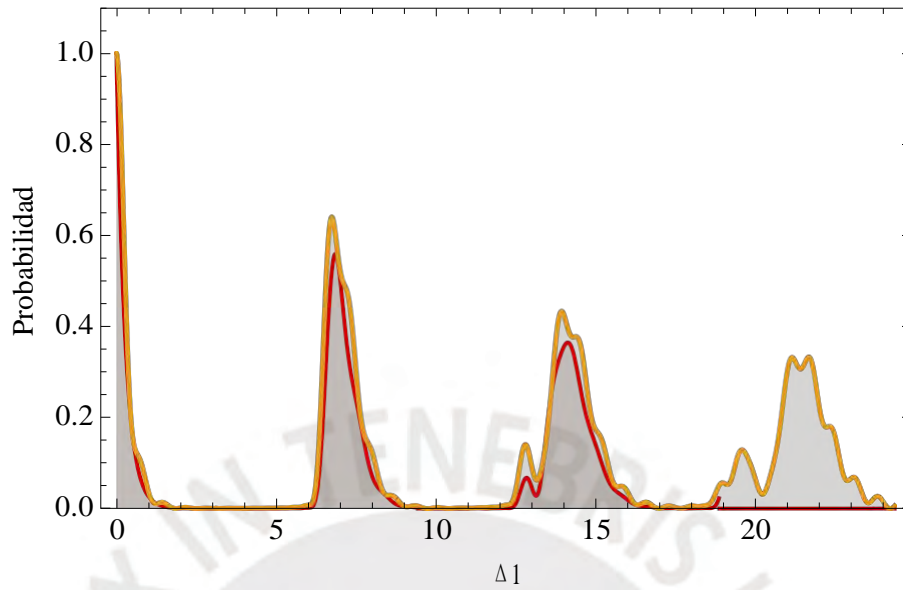


Figura 2.2: Evolución de la probabilidad asociada al estado excitado $|\phi\rangle$ del átomo, según la solución analítica (línea anaranjada) y según la aproximación (línea roja). Reservorio con $N = 15$ modos.

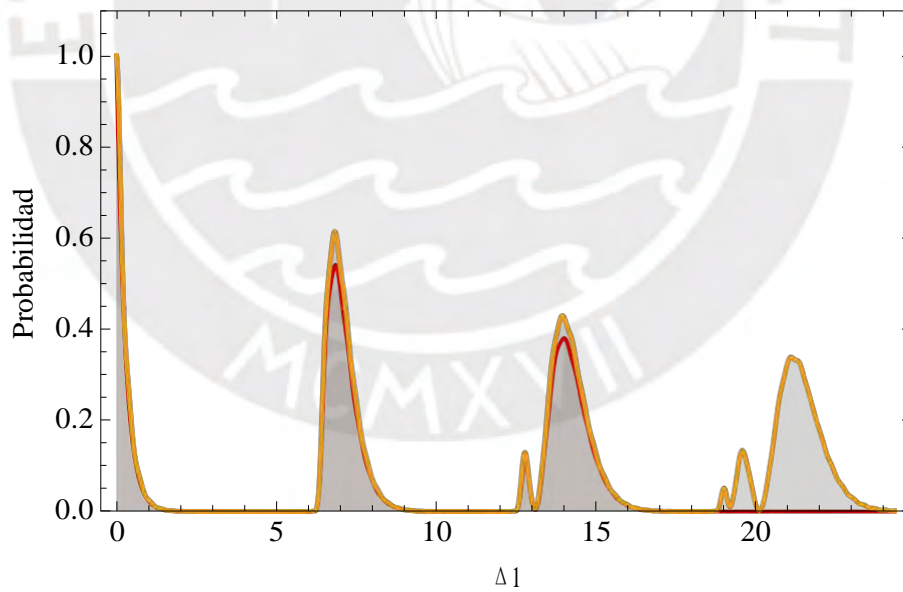


Figura 2.3: Evolución de la probabilidad asociada al estado excitado $|\phi\rangle$ del átomo, según la solución analítica (línea anaranjada) y según la aproximación (línea roja). Reservorio con $N = 35$ modos.

Tanto en la figura (2.2) como en la figura (2.3) se observa un buen acuerdo entre la solución analítica y la solución aproximada por tramos, asociada a los tres primeros intervalos. Se muestra un completo acuerdo tanto en la estructura de “revivals” como en las escalas temporales asociadas a ellos. También se verifica que la aproximación propuesta mejora al considerar un reservorio con un mayor número de modos, lo cual corresponde a la convergencia de las series de Fourier consideradas en la solución. En la figura (2.2) correspondiente a un menor número de modos ($N = 15$) la diferencia entre la solución analítica y la solución aproximada por tramos corresponde a las oscilaciones de menor escala temporal, correspondiente a las transiciones atómicas. Dichas diferencias se reducen de forma significativa con el incremento del número de modos del reservorio, como se observa en la figura 2.3.

2.3. Evolución del sistema

En esta sección se extrae las principales características asociadas a la evolución del sistema, teniendo en cuenta que al inicio el átomo se encuentra en su estado excitado mientras que el reservorio se encuentra en su estado vacío. Estas características se manifestarán a través de las gráficas de evolución de probabilidades, calculadas a partir de las amplitudes de probabilidad descritas en las dos secciones previas.

A continuación se muestran las gráficas de evolución de probabilidad para el átomo, tanto en su estado excitado $|e, \vec{0}\rangle$ como en su estado base $|g, \vec{1}_k\rangle$:

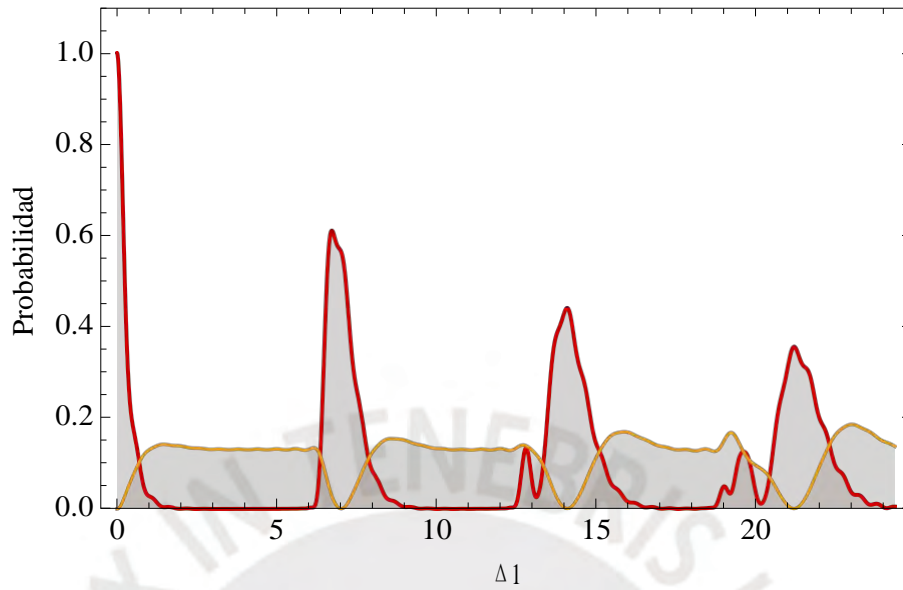


Figura 2.4: Evolución de la probabilidad asociada al estado atómico excitado $|\phi\rangle$ (línea roja) y del estado base $|g\rangle$ en modo resonante del reservorio (línea anaranjada). Reservorio con $N = 21$ modos.

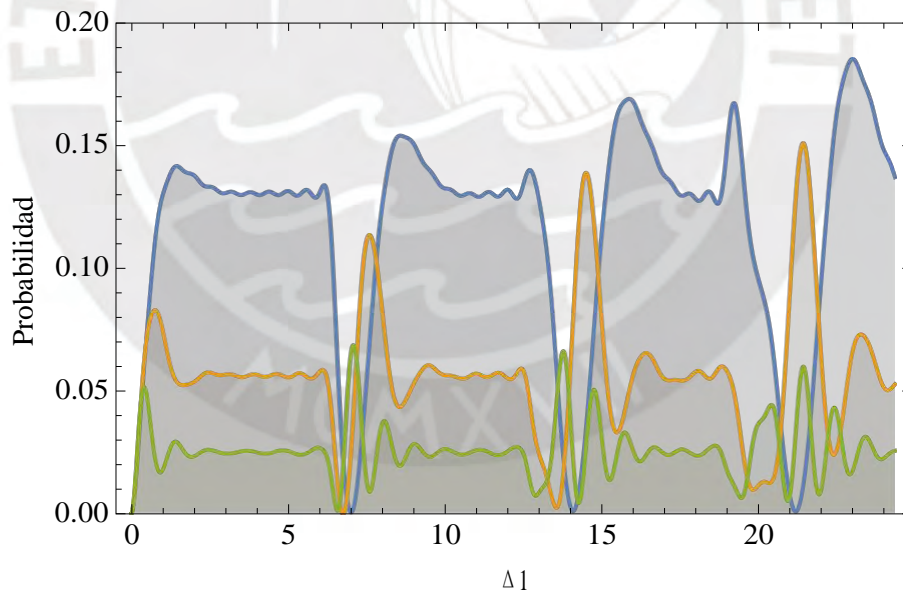


Figura 2.5: Evolución de la probabilidad asociada a algunos modos del reservorio: modo resonante $D = 0$ (línea azul), caso $D = \pm 2\Delta$ (línea anaranjada) y caso $D = \pm 5\Delta$ (línea verde). Reservorio con $N = 21$ modos.

En la figura 2.4 se observa el decaimiento del átomo (línea roja) durante un inter-

valo de tiempo aproximado de $1/\Delta$, mientras que cada ‘revival’ ocurre en un tiempo múltiplo de $2\pi/\Delta$. En la misma figura se verifica que la probabilidad asociada al modo resonante, entre el átomo y el reservorio, se hace nula cuando la probabilidad asociada al estado excitado del átomo es máxima en cada ‘revival’.

En la figura 2.5 se observa que los modos del reservorio comienzan a poblarse y alcanzan un máximo de probabilidad, según su sintonía con la frecuencia de oscilación electrónica, siendo evidente la preferencia por el modo resonante. En cada ‘revival’ de la dinámica atómica se manifiesta un reducción significativa en la probabilidad asociada a los distintos modos del reservorio.

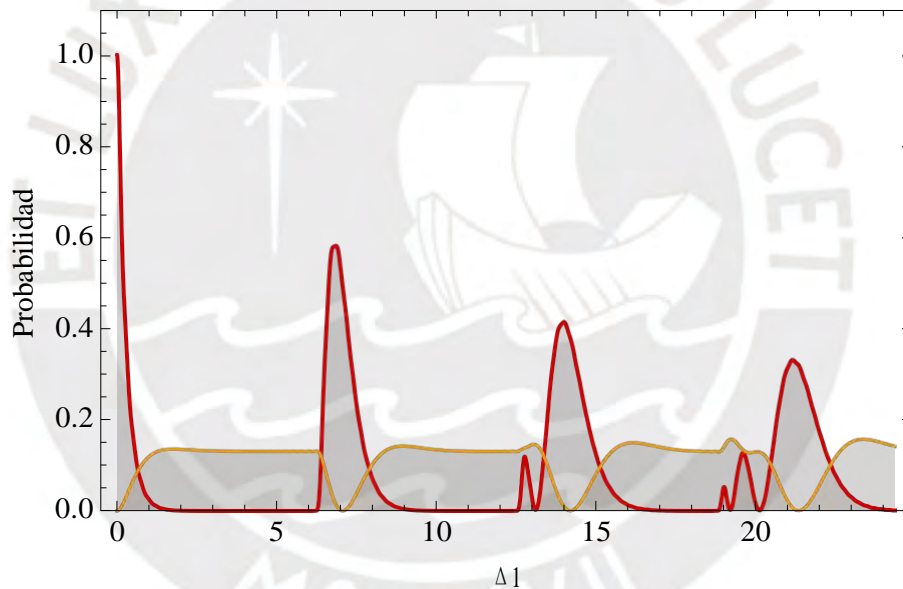


Figura 2.6: Evolución de la probabilidad asociada al estado atómico excitado $|e\rangle$ (línea roja) y del estado base $|g\rangle$ en modo resonante del reservorio (línea anaranjada). Reservorio con $N = 51$ modos.

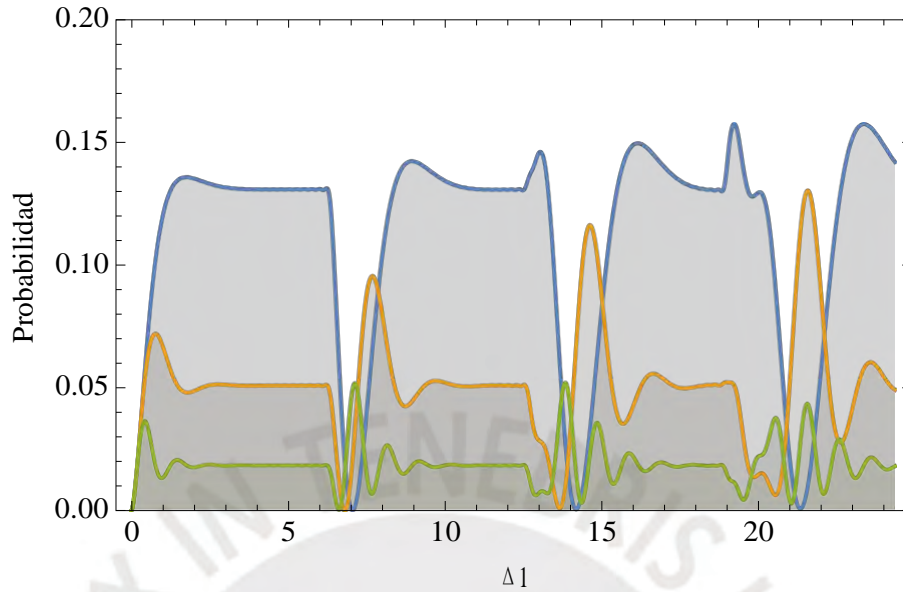


Figura 2.7: Evolución de la probabilidad asociada a algunos modos del reservorio: modo resonante $D = 0$ (línea azul), caso $D \neq 2\Delta$ (línea anaranjada) y caso $D \neq 5\Delta$ (línea verde). Reservorio con $N = 51$ modos.

En las figuras 2.6 y 2.7 se observa los mismos casos anteriores (figuras 2.4 y 2.5) para un mayor número de modos del reservorios. Como es de esperar la amplitud de los ‘revivals’ decrece y el periodo en el cual ocurren aumenta. Así mismo, se observa que la amplitud de las oscilaciones de alta frecuencia (asociadas a las transiciones atómicas) se reducen significativamente.

Finalmente, el fenómeno de ‘revivals’ asociado a la dinámica atómica es consecuencia de la estructura discreta del reservorio. La observación de este fenómeno dependerá estrictamente del número de modos presentes en el reservorio, de tal forma que el periodo de observación está en proporción directa al número de modos. Luego, es evidente que en el caso de un reservorio con infinitos modos del campo EM, solo será posible observar el decaimiento atómico sin opción a registrar el primer ‘revival’ inclusive en un tiempo muy prolongado ($t_{revival} = \frac{2\pi}{\Delta} = \frac{N\pi}{\omega_X}$).

Capítulo III

Medida del ‘entanglement’:

Concurrencia

En este capítulo se utiliza el ‘entanglement de formación’ definido por (Bennett, DiVincenzo, Smolin, y Wootters, 1996) para brindar una medida del ‘entanglement’ asociado a sistemas de dos ‘qubits’. Esta medida, asociada a la entropía de los subsistemas, presenta un comportamiento monótono y creciente respecto de una función de concurrencia (C), como lo describen (Wootters, 1998) y (Hill y Wootters, 1997); por lo cual, la concurrencia en sí representaría una medida apropiada del ‘entanglement’.

3.1. Concurrencia

Se analiza el ‘entanglement’ de un sistema cuántico formado por dos subsistemas A y B , cuya matriz densidad $\rho \equiv \rho_{AB}$ puede expresarse como un arreglo de estados

puros $|\psi_i\rangle$ con probabilidades p_i , de la siguiente forma:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.1)$$

Según (Bennett, Bernstein, Popescu, y Schumacher, 1996), para cada estado puro, el ‘entanglement’ E es definido como la entropía de von Neumann de cada uno de los subsistemas:

$$E(\psi) = -Tr [\rho_A \log \rho_A] = -Tr [\rho_B \log \rho_B] \quad (3.2)$$

donde ρ_A y ρ_B son las matrices reducidas sobre cada subsistema.

Con lo anterior, el ‘entanglement de formación’ para el estado mixto (3.1) es definido como el mínimo, sobre todas las descomposiciones, del promedio del ‘entanglement’ de los estados puros que componen a ρ :

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i) \quad (3.3)$$

Esta medida se basa en cuantificar los recursos necesarios para preparar un estado entrelazado determinado. (Wootters, 1998) muestra que, a partir de (3.3), el ‘entanglement de formación’ se puede expresar como:

$$E(\rho) = E(C(\rho)) \quad (3.4)$$

donde la función E esta dada por:

$$E(C) = - \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2 \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \quad (3.5)$$

en términos de la concurrencia C .

Por ejemplo, para un estado puro de un sistema de dos estados, la concurrencia se define como:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \sigma_y | \psi^* \rangle| \quad (3.6)$$

donde $|\psi^*\rangle$ representa el complejo conjugado de $|\psi\rangle$ y σ_y es la matriz de Pauli, que para un sistema de dos estados intercambia los elementos de la base en la cual se expresa (excepto por una fase).

Para un estado mixto de dos qubits, la concurrencia se define como:

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (3.7)$$

donde los λ_k corresponden a los autovalores, en orden decreciente, de la matriz:

$$R \equiv \rho (\sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}) \rho^* (\sigma_y^{(A)} \otimes \sigma_y^{(B)}) \quad (3.8)$$

con ρ^* el complejo conjugado de ρ .

Por su construcción, el ‘entanglement de formación’ cuantifica los recursos necesarios para generar un estado entrelazado específico. En el caso de la concurrencia, puede interpretarse como una medida de coincidencia entre el estado original y el estado transformado por medio del operador σ_y , de tal forma que toma valores entre 0 (ausencia de ‘entanglement’) y 1 (máximo ‘entanglement’). Por este motivo, en el siguiente capítulo se calculará la concurrencia para subsistemas de dos ‘qubits’ como una medida del ‘entanglement’.

3.2. Concurrencia en subsistemas asociados a la interacción de un átomo de dos niveles con N modos del campo EM

En esta sección se ilustra el procedimiento que se utilizará en el siguiente capítulo para obtener la medida del 'entanglement' en un subsistema de dos 'qubits'. Para ello, analizaremos el sistema estudiado en el capítulo II.

Específicamente, como medida del entanglement se calcula la concurrencia (C) para los subsistemas: átomos y un modo del reservorio y entre dos modos del reservorio.

La matriz densidad del subsistema átomo-modo (A,m) se obtiene al proyectar el estado del sistema sobre los $N - 1$ modos restantes; luego, se define el vector $|\bar{0}^{(m)}\rangle$ que indica el vacío en los $N - 1$ modos restantes y el vector $|\bar{1}_k^{(m)}\rangle$ ($k \neq m$) que indica la presencia de un fotón en uno de los $N - 1$ modos restantes. Estos vectores cumplen:

$$\langle \bar{0}^{(m)} | \bar{0} \rangle = |0_m\rangle \quad (3.9)$$

$$\langle \bar{0}^{(m)} | \bar{1}_k \rangle = \delta_{mk} |1_m\rangle \quad (3.10)$$

$$\langle \bar{1}_k^{(m)} | \bar{0} \rangle = 0 \quad (3.11)$$

$$\langle \bar{1}_k^{(m)} | \bar{1}_j \rangle = \delta_{kj} |0_m\rangle \quad (3.12)$$

Con esto, al proyectar el estado descrito en (2.4) sobre los $N - 1$ modos restantes, se obtiene:

$$\langle \bar{0}^{(m)} | \psi \rangle = c_e |e, 0_m\rangle + c_{g,m} |g, 1_m\rangle \quad (3.13)$$

$$\langle \bar{1}_k^{(m)} | \psi \rangle = c_{g,k} |g, 0_m\rangle \quad (3.14)$$

con lo cual, la matriz de densidad del subsistema átomo-modo (A,m), en la base $\{|e, 1_m\rangle$,

$|e, 0_m\rangle, |g, 1_m\rangle, |g, 0_m\rangle\}$ está dada por:

$$\rho \equiv \text{Tr} | \rangle \langle |_{m,n} [\psi \psi] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_e|^2 & c_e c_{g,m}^* & 0 \\ 0 & c_e^* c_{g,m} & |c_{g,m}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_k |c_{g,k}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

cuya concurrencia cumple:

$$C_{A,m}(t) = 2|c_e(t)c_{g,m}^*(t)| \quad (3.16)$$

En un proceso similar, al proyectar el estado descrito por (2.4) sobre los estados atómicos y los estados correspondientes a $N - 2$ modos, se verifica que la matriz de densidad para el subsistema de dos modos (m, n) del reservorio, en la base $\{|1_m, 1_n\rangle, |1_m, 0_n\rangle, |0_m, 1_n\rangle, |0_m, 0_n\rangle\}$, está dada por:

$$\rho \equiv \text{Tr} | \rangle \langle |_{m,n} [\psi \psi] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_{g,m}|^2 & c_{g,m} c_{g,n}^* & 0 \\ 0 & c_{g,m}^* c_{g,n} & |c_{g,n}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |c_e|^2 + \sum_k |c_{g,k}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

cuya concurrencia se expresa como:

$$C_{m,n}(t) = 2|c_{g,m}(t)c_{g,n}^*(t)| \quad (3.18)$$

Observación: Para una matriz de densidad del tipo:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & z & 0 \\ 0 & z^* & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

los autovalores de la matriz R definida en (3.8) son: $\lambda_1 = (\sqrt{ab} + |z|)^2$, $\lambda_2 = (\sqrt{ab} - |z|)^2$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$; por lo cual, la concurrencia (3.7) se reduce a $C = 2|z|$.

A continuación se muestra las gráficas de la evolución de la concurrencia para los subsistemas descritos:

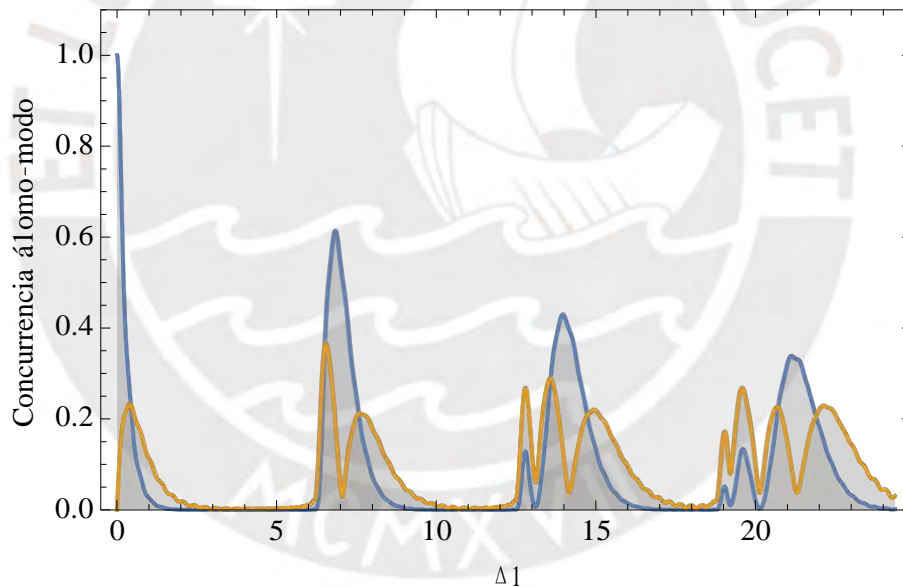


Figura 3.1: Concurrencia átomo-modo resonante (línea anaranjada) y probabilidad asociada al estado excitado del átomo (línea azul). $N = 35$ modos.

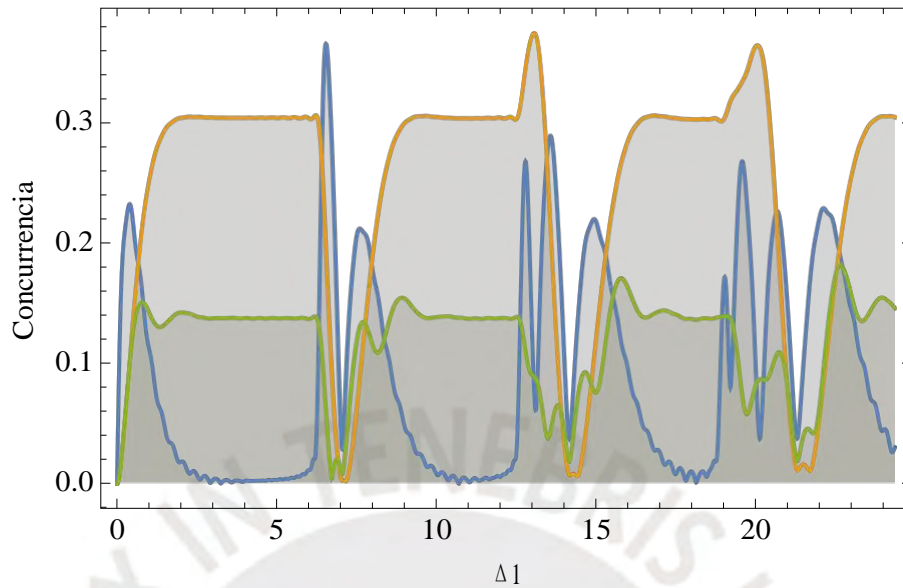


Figura 3.2: Concurrencia del modo resonante con el modo $D = \pm\Delta$ (línea anaranjada), concurrencia del modo resonante con el modo $D = \mp\Delta$ (línea verde) y concurrencia átomo-modo resonante (línea azul). $N = 35$ modos.

En la figura 3.1 se muestra la evolución de la concurrencia entre el átomo y el modo resonante, donde se observa que la tasa de crecimiento inicial es mayor que la tasa con la cual decrece después de alcanzar su máximo valor. Así mismo, la concurrencia átomo-modo es impulsada con cada ‘revival’ de la dinámica atómica.

La evolución de la concurrencia entre un par de modos del reservorio se muestra en la figura 3.2, donde se observa que alcanza un valor estable en un tiempo posterior al cual ocurre el máximo de concurrencia átomo-modo resonante de la figura 3.1. En cada ‘revival’ la concurrencia entre modos decrece significativamente.

Como evidencia del comportamiento monótono entre el ‘entrelazamiento de formación’ y la concurrencia, la siguiente figura muestra la evolución del ‘entrelazamiento’ entre el átomo y el modo resonante.

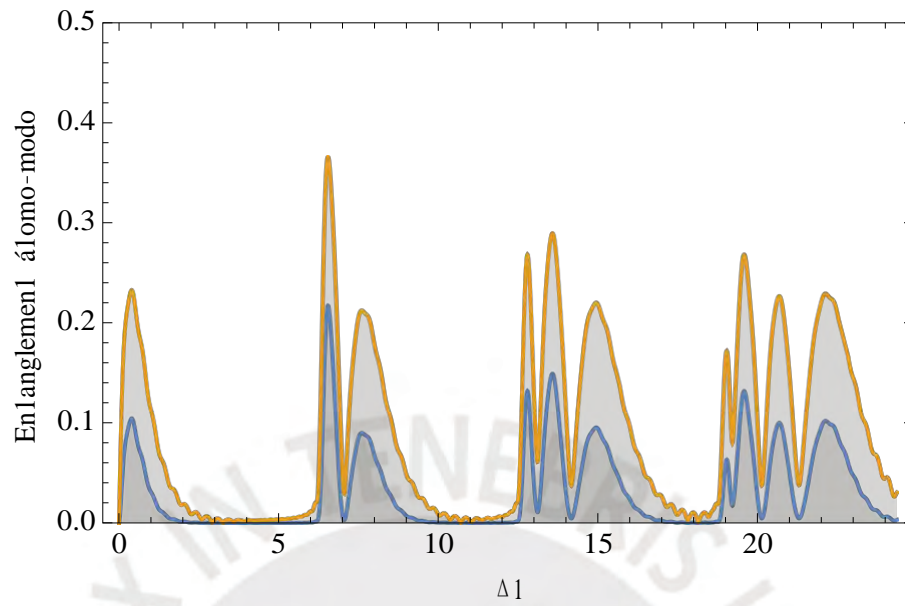


Figura 3.3: Entanglement entre el átomo y el modo resonante (línea anaranjada). Concurrencia para el mismo subsistema (línea azul). $N = 35$ modos.

Capítulo IV

Entanglement para subsistemas asociados a un sistema formado por dos átomos de dos niveles con sus respectivos reservorios

En este capítulo se analiza el comportamiento del 'entanglement' para siete subsistemas de un sistema formado por dos átomos de dos niveles con sus respectivos reservorios. Se estudia la evolución de la concurrencia a partir de un estado inicial que presenta máximo 'entanglement' entre los átomos. Se establecen las condiciones para observar los fenómenos de 'entanglement sudden death' (ESD) y 'entanglement sudden birth' (ESB) en algunos subsistemas de análisis.

4.1. Concurrencia para los subsistemas

El sistema de estudio corresponde a dos átomos de dos niveles y sus respectivos reservorios con un número finito de modos del campo EM. Se considera la evolución debido solo a la interacción de cada átomo con su respectivo reservorio, sin posibilidad de interacción entre los átomos ni entre sus reservorios.

Con el objetivo de estudiar el ‘entanglement’ de ciertos subsistemas, se considera que el estado inicial del sistema corresponde a un caso de ‘entanglement’ inicial solo entre átomos pero no entre sus reservorios:

$$|\psi_0\rangle = (\alpha|g_1\rangle|g_2\rangle + \beta|e_1\rangle|e_2\rangle)|\bar{0}_1\rangle|\bar{0}_2\rangle \quad (4.1)$$

En la imagen de interacción, cada átomo y su correspondiente reservorio evolucionan con el hamiltoniano (2.3) de tal forma que, en el instante t , el estado del sistema es descrito por el vector:

$$|\psi_t\rangle = \alpha|g_1, \bar{0}_1\rangle|g_2, \bar{0}_2\rangle + \beta|\psi(t)_1\rangle|\psi(t)_2\rangle \quad (4.2)$$

donde $|\psi(t)_i\rangle$ corresponde al estado de cada átomo y su correspondiente reservorio según la ecuación (2.4).

De forma explícita, el vector de estado anterior se expresa como:

$$|\psi_t\rangle = \alpha|g_1, \bar{0}_1\rangle|g_2, \bar{0}_2\rangle + \beta \sum_k^h \xi|e_1, \bar{0}_1\rangle + \sum_k^h c_{g,k}(t)|g_1, \bar{1}_{k,1}\rangle \xi|e_2, \bar{0}_2\rangle + \sum_j^i c_{g,j}(t)|g_2, \bar{1}_{j,2}\rangle$$

donde se han considerado las siguientes cantidades:

$$\xi \equiv c_e(t) \quad (4.3)$$

$$\chi \equiv \frac{\sum_k |c_{g,k}(t)|^2}{1 - |\xi|^2} \quad (4.4)$$

A continuación se construirán las matrices de densidad para siete subsistemas distintos, a partir de las cuales se realizará el cálculo de la concurrencia, en un proceso similar al tratado en el capítulo anterior.

4.1.1. Subsistema formado por los dos átomos

La matriz densidad reducida para el subsistema de átomos, en la base $\{|e_1, e_2\rangle, |g_1, g_2\rangle, |g_1, e_2\rangle, |g_1, g_2\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{A_1 A_2} \equiv \text{Tr}_{R_1 R_2} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) \quad (4.5)$$

| | | | | | |
|---|---------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|---|
| · | $ \beta ^2 \xi ^4$ | 0 | 0 | $\alpha^* \beta \xi^2$ | · |
| · | 0 | $ \beta ^2 \xi ^2 \chi ^2$ | 0 | 0 | · |
| · | 0 | 0 | $ \beta ^2 \xi ^2 \chi ^2$ | 0 | · |
| · | $\alpha \beta^* \xi^{*2}$ | 0 | 0 | $ \alpha ^2 + \beta ^2 \chi ^4$ | · |

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{A_1 A_2} = 2|\xi|^2 |\alpha\beta| - |\beta|^2 |\chi|^2 \quad (4.6)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

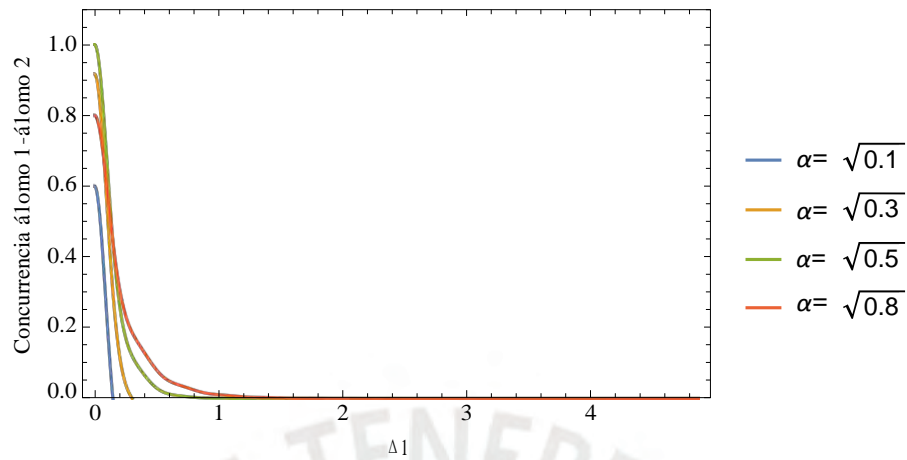


Figura 4.1: Evolución de la concurrencia átomo-átomo para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer 'revival'. Solo se observa el fenómeno de ESD para amplitudes de probabilidad $|\alpha| < \sqrt{0.5}$. Reservorio con $N = 35$ modos.

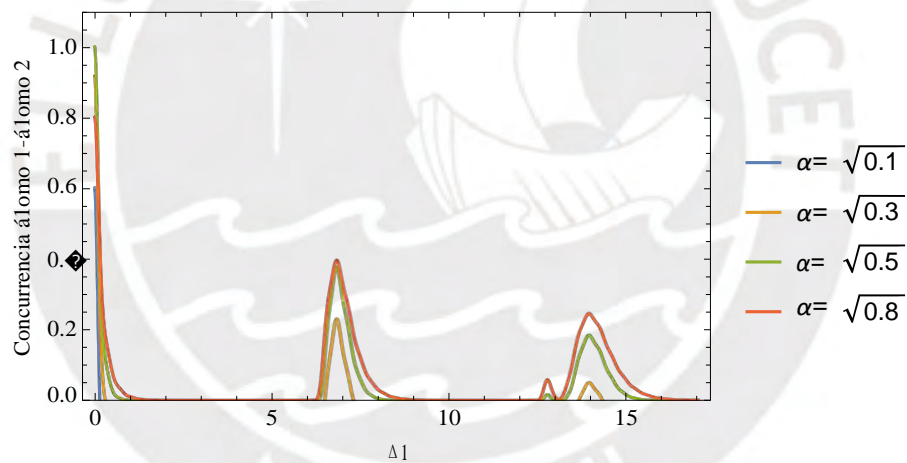


Figura 4.2: Evolución de la concurrencia átomo-átomo para distintos estados iniciales de los átomos, hasta observa el segundo 'revival'. Se observa los fenómenos de ESB y posterior ESD en el caso $|\alpha| = 0.3$. Reservorio con $N = 35$ modos.

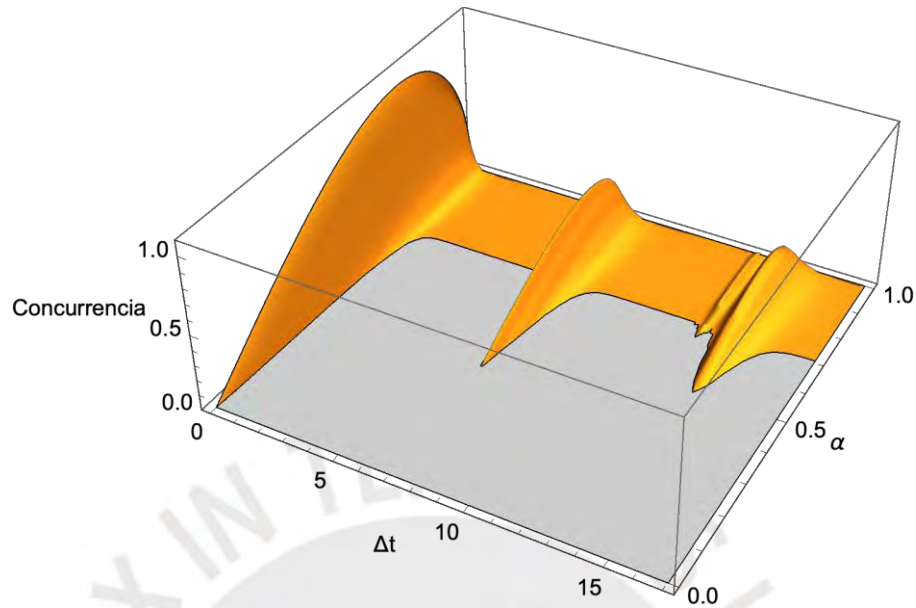


Figura 4.3: Evolución de la concurrencia átomo-átomo según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.1 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema átomo-átomo, donde se observa el fenómeno de ‘Entanglement Sudden Death (ESD)’ siempre que las amplitudes de probabilidad del estado inicial del sistema cumplan $|\alpha| < |\beta|$ (líneas azul y anaranjada). Por el contrario, si $|\alpha| \geq |\beta|$ se observa un decaimiento asintótico de la concurrencia (líneas verde y roja).

La figura 4.2 muestra los mismos casos de la figura 4.1 en un mayor intervalo de tiempo. Para el caso de amplitud de probabilidad $|\alpha| = \sqrt{0.3}$ (línea anaranjada) y durante los ‘revivals’ se observa el fenómeno de ‘Entanglement Sudden Birth (ESB)’ seguido del ESD, donde la concurrencia adquiere un valor máximo decreciente en cada ‘revival’.

La figura 4.3 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Se observa que los fenómenos ESD y ESB, descritos en las figuras anteriores, solo ocurren bajo la condición $|\alpha| < |\beta|$ para las amplitudes de probabilidad

del estado inicial (4.1). En el caso del ESB presente durante los ‘revivals’ de la dinámica atómica, se observa que el intervalo de valores posibles para $|\alpha|$ se va restringiendo hacia vecindades próximas a $|\alpha| = \sqrt{0.5}$, lo cual corresponde al estado con un máximo ‘entanglement’ inicial.

Por otro lado, para este subsistema es posible determinar el instante en el cual ocurre el primer ESD tomando en cuenta la solución aproximada, realizada en la sección 2.2, para la amplitud de probabilidad $c_e^{(0)}(t)$. Al igualar a cero la concurrencia (4.6), se obtiene:

$$|\chi|^2 = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (4.7)$$

o de forma equivalente:

$$|\chi|^2 = 1 - |\xi|^2 = 1 - e^{-\Gamma t} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (4.8)$$

de donde se obtiene el instante en el cual se presenta el primer ESD en términos de las condiciones iniciales del sistema y la constante de decaimiento Γ (obtenida en la sección 2.2):

$$t_{ESD} = -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{|\alpha|}{|\beta|} \right) \quad (4.9)$$

Los resultados descritos para este caso, incluyendo el instante del primer ESD, son compatibles con los mostrados por (López et al., 2008).

4.1.2. Subsistema formado por un átomo y un modo de su correspondiente reservorio

La matriz densidad reducida para el subsistema átomo y un modo de su correspondiente reservorio, en la base $\{|e_1, 1_{m,1}\rangle, |e_1, 0_{m,1}\rangle, |g_1, 1_{m,1}\rangle, |g_1, 0_{m,1}\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{A_1 m_1} \equiv \text{Tr}_{A_2 R_2 R_1^{(m)}} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 |\xi|^2 & |\beta|^2 \xi c_{g,m}^* & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \xi^* c_{g,m} & |\beta|^2 |c_{g,m}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 (|\chi|^2 - |c_{g,m}|^2) (1 - |\chi|^4) \end{pmatrix}$$

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{A_1 m_1} = 2|\beta|^2 |\xi c_{g,m}^*| \quad (4.11)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

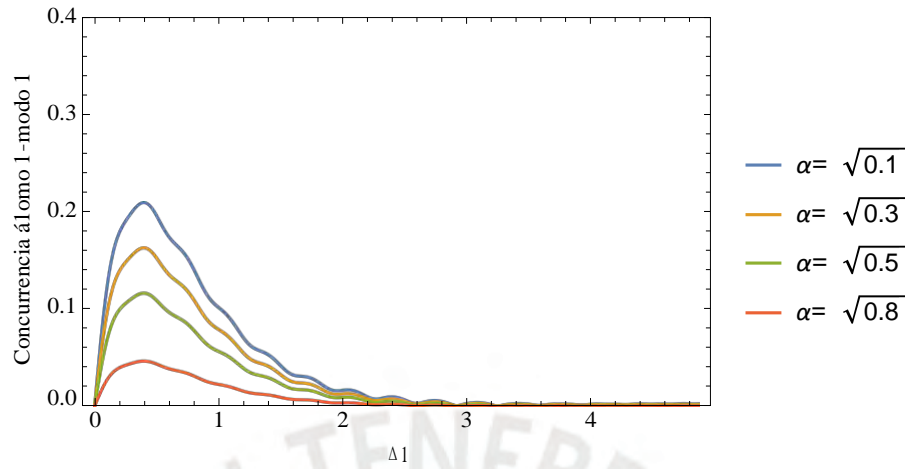


Figura 4.4: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el modo resonante de su correspondiente reservorio para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer 'revival'. Se observa el decrecimiento asintótico de la concurrencia independiente de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Reservorio con $N = 35$ modos.

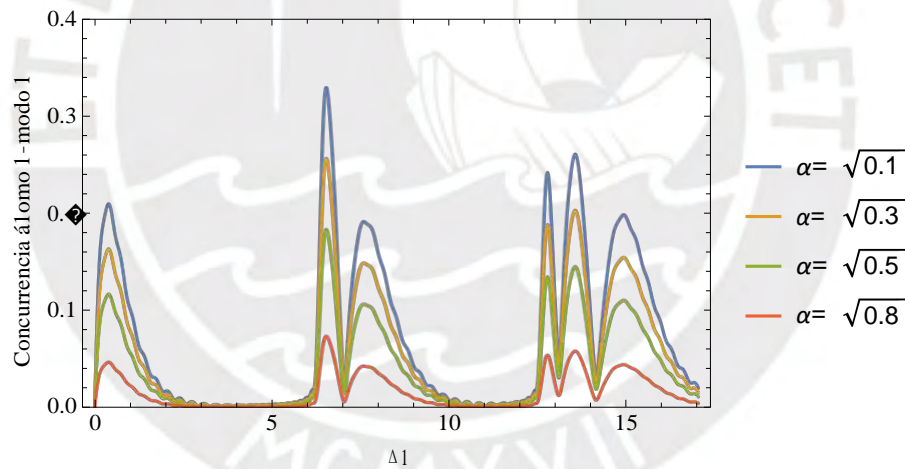


Figura 4.5: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el modo resonante de su correspondiente reservorio para distintos estados iniciales de los átomos, hasta observar el segundo 'revival'. Los máximos de concurrencia son favorecidos para valores menores de amplitudes de probabilidad $|\alpha|$. Reservorio con $N = 35$ modos.

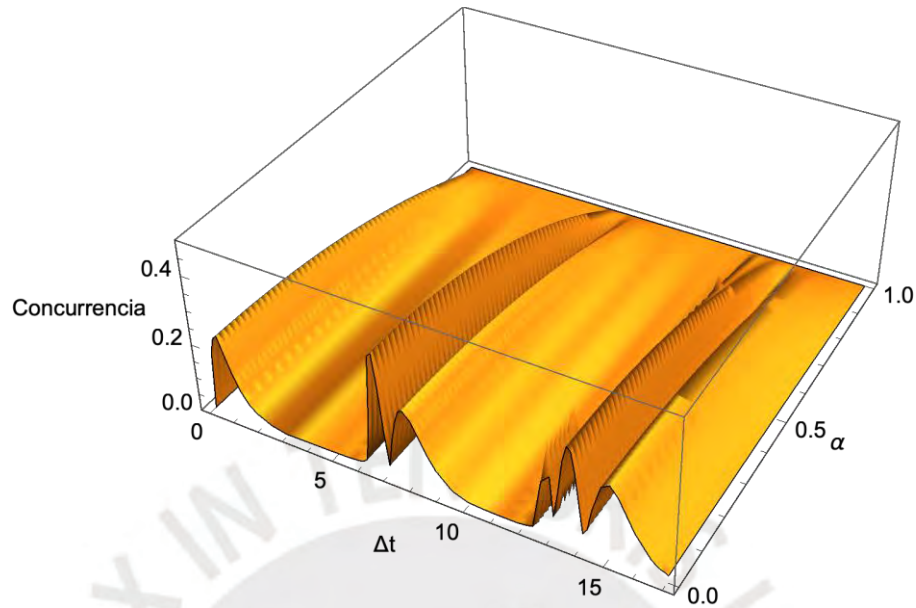


Figura 4.6: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el modo resonante de su correspondiente reservorio, según la amplitud de probabilidad α . Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.4 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema átomo y el modo resonante de su correspondiente reservorio. En este caso se observa que la concurrencia alcanza un máximo para luego reducirse de forma asintótica. El instante en el cual ocurre el máximo de concurrencia es independiente de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$ asociada al estado inicial; además, el valor máximo de concurrencia decrece con el valor de $|\alpha|$.

La figura 4.5 muestra los mismos casos de la figura 4.4 en un mayor intervalo de tiempo. Se observa que en cada 'revival' de la dinámica atómica también se reactiva la concurrencia entre cada átomo y los modos de sus correspondientes reservorios.

La figura 4.6 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. En este caso se observa la ausencia de fenómenos de ESD o ESB y se confirma un decrecimiento de los máximos de concurrencia con el incremento del valor de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$ del estado inicial del sistema.

4.1.3. Subsistema formado por un átomo y su correspondiente reservorio (N modos)

En este caso se define un vector de estado (colectivo) para el reservorio $|\bar{1}\rangle \equiv \frac{1}{\chi(t)} \sum c_{g,k}(t) |\bar{1}_k\rangle$, tal que la matriz densidad reducida para el sistema átomo y su correspondiente reservorio, en la base $\{|e_1, \bar{1}_1\rangle, |e_1, \bar{0}_1\rangle, |g_1, \bar{1}_1\rangle, |g_1, \bar{0}_1\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{A_1 R_1} \equiv \text{Tr}_{A_2 R_2} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) \quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 |\xi|^2 & |\beta|^2 \xi \chi & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \xi^* \chi^* & |\beta|^2 |\chi|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{A_1 R_1} = 2|\beta|^2 |\xi \chi| \quad (4.13)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

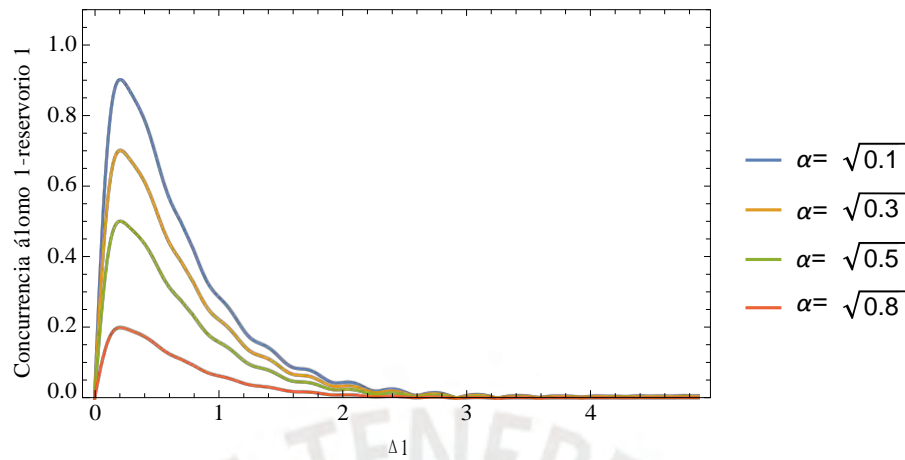


Figura 4.7: Evolución de la concurrencia entre un átomo y su correspondiente reservorio para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer ‘revival’. Se observa el decrecimiento asintótico de la concurrencia después de alcanzar su máximo valor, semejante al caso de la concurrencia átomo-modo. Reservorio con $N = 35$ modos.

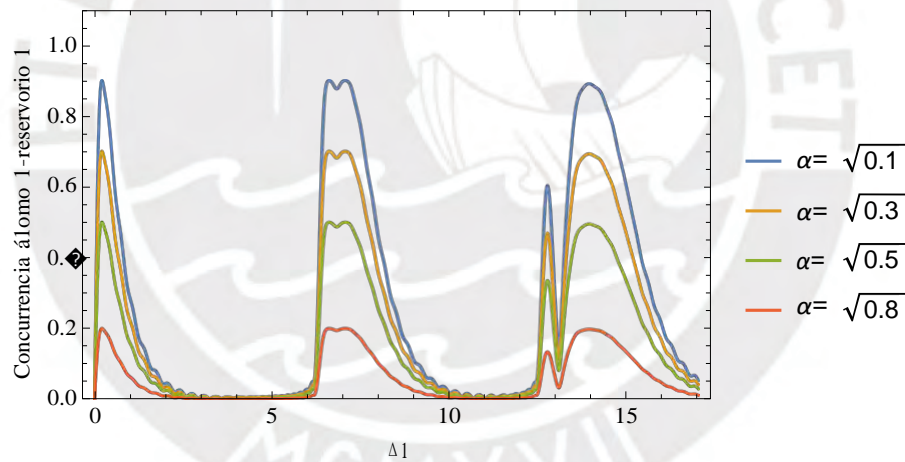


Figura 4.8: Evolución de la concurrencia entre un átomo y su correspondiente reservorio para distintos estados iniciales de los átomos, hasta observar el segundo ‘revival’. Los máximos de concurrencia en cada revival son favorecidos para valores menores de amplitud de probabilidad α , como se observó en el caso de la concurrencia átomo-modo. Reservorio con $N = 35$ modos.

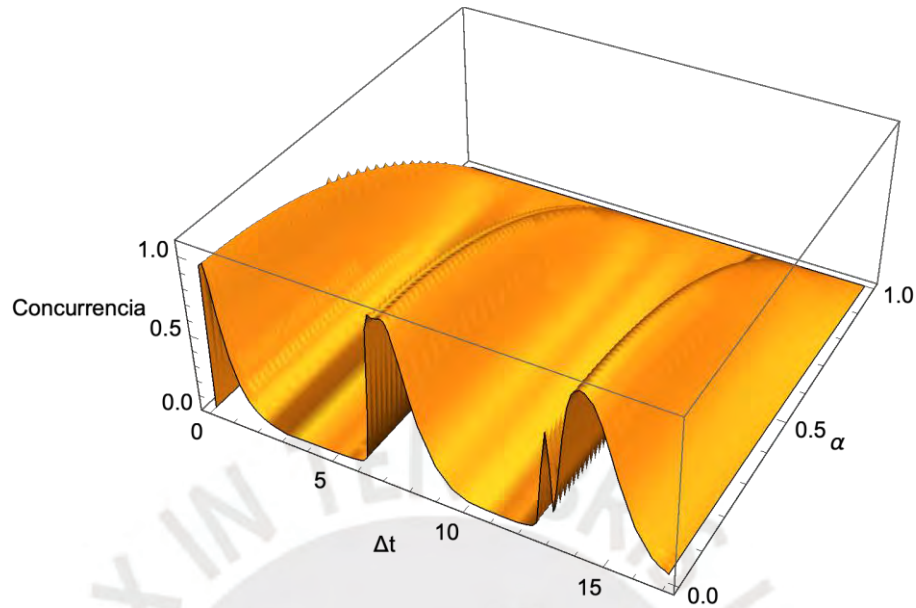


Figura 4.9: Evolución de la concurrencia entre un átomo y su correspondiente reservorio, según la amplitud de probabilidad α . Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.7 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema átomo y su correspondiente reservorio. En este caso se observa que la concurrencia alcanza un máximo para luego reducirse de forma asintótica. Este comportamiento es equivalente al comportamiento de la concurrencia del sistema átomo y modo resonante de su correspondiente reservorio (ver figura 4.4).

La figura 4.8 muestra los mismos casos de la figura 4.7 en un mayor intervalo de tiempo. Se observa que en cada 'revival' de la dinámica atómica también se reactiva la concurrencia entre cada átomo y su correspondiente reservorio.

La figura 4.9 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. En este caso se observa la ausencia de fenómenos de ESD o ESB y se confirma un decrecimiento monótono de los máximos de concurrencia con el incremento del valor de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$ del estado inicial del sistema.

El comportamiento de la concurrencia para este subsistema manifiesta compatibili-

dad con los resultados mostrados por (López et al., 2008) para un sistema equivalente al propuesto. Por otro lado, al comparar este subsistema con el caso de la sección anterior, se observa que el ‘entanglement’ entre un átomo y su correspondiente reservorio es consecuencia del ‘entanglement’ entre el átomo y los modos individuales asociados a su propio reservorio.

4.1.4. Subsistema formado por un átomo y un modo del reservorio asociado al otro átomo

La matriz densidad reducida para el subsistema átomo y un modo del reservorio asociado al otro átomo, en la base $\{|e_1, 1_{m,2}\rangle, |e_1, 0_{m,2}\rangle, |g_1, 1_{m,2}\rangle, |g_1, 0_{m,2}\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{A_1 m_2} \equiv \text{Tr}_{A_2 R_1 R_2^{(m)}} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) \quad (4.14)$$

$$\begin{array}{cccc} |\beta|^2|\xi|^2|c_{g,m}|^2 & 0 & 0 & \alpha^*\beta\xi c_{g,m} \\ 0 & |\beta|^2|\xi|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2|\chi|^2|c_{g,m}|^2 & 0 \\ \alpha\beta^*\xi^*c_{g,m}^* & 0 & 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2|\chi|^2(1 - |c_{g,m}|^2) \end{array}$$

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{A_1 m_2} = 2|\xi||c_{g,m}|[|\alpha\beta| - |\beta|^2|\chi|] \quad (4.15)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

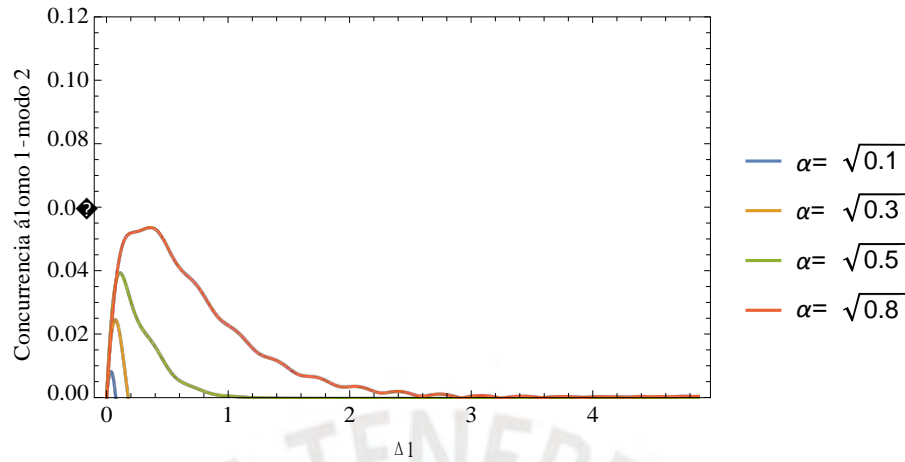


Figura 4.10: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el modo resonante correspondiente al reservorio del otro átomo para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer $\sqrt{\text{revival}}$. Solo se observa el fenómeno de ESD para amplitudes de probabilidad $|\alpha| < 0.5$. Reservorio con $N = 35$ modos.

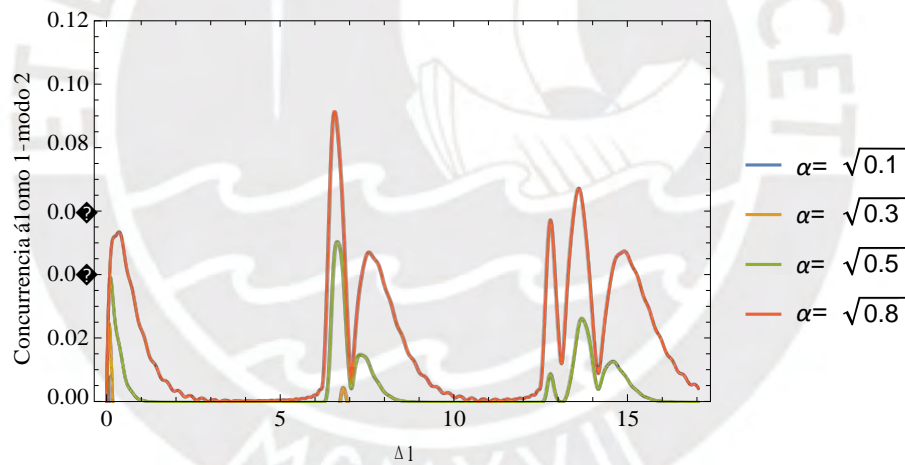


Figura 4.11: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el modo resonante correspondiente al reservorio del otro átomo para distintos estados iniciales de los átomos, hasta el segundo 'revival'. En el caso de amplitud de probabilidad $|\alpha| = \sqrt{0.3}$ se logra observar los fenómenos de ESB y posterior ESB solo durante el primer 'revival'. Reservorio con $N = 35$ modos.

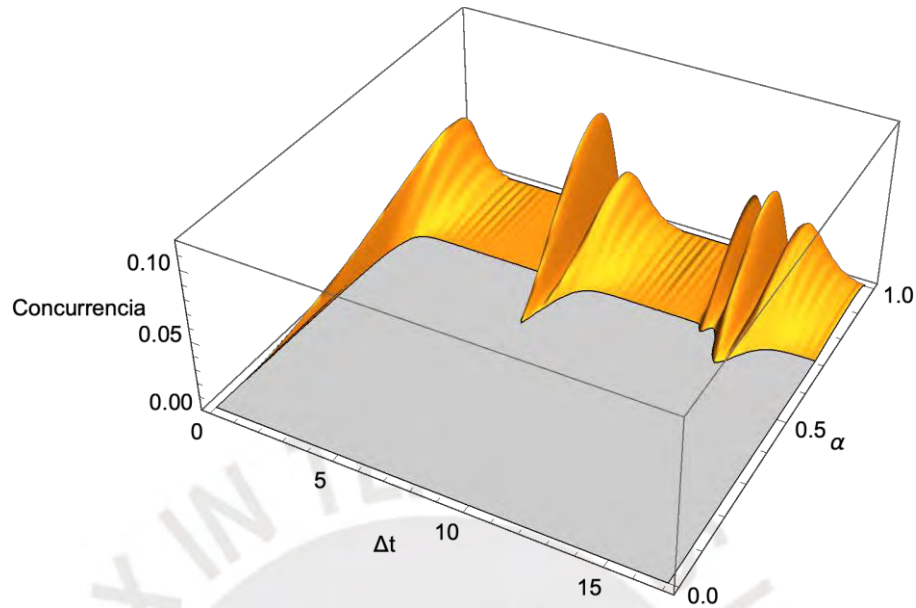


Figura 4.12: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el modo resonante correspondiente al reservorio del otro átomo, según la amplitud de probabilidad α . Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.10 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema átomo y el modo resonante correspondiente al reservorio del otro átomo. En este caso se observa que la concurrencia alcanza un máximo para luego reducirse de forma asintótica, siempre que las amplitudes de probabilidad del estado inicial cumplan que $|\alpha| \geq |\beta|$ (línea verde y línea roja). Si las amplitudes de probabilidad cumplen que $|\alpha| < |\beta|$, entonces se observa el fenómeno de ESD (línea azul y línea anaranjada).

La figura 4.11 muestra los mismos casos de la figura 4.4 en un mayor intervalo de tiempo. Se observa que en cada 'revival' de la dinámica atómica también se reactiva la concurrencia, de forma suave para los casos donde $|\alpha| \geq |\beta|$ (línea verde y línea roja) y por medio de un ESB cuando $|\alpha| < |\beta|$ (línea anaranjada).

La figura 4.12 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Se confirma que cuando las amplitudes de probabilidad del estado inicial cumplen la relación $|\alpha| < |\beta|$, es posible observar fenómenos de ESB y ESD

durante los ‘revivals’ de la dinámica atómica siempre y cuando el estado inicial se encuentre cerca del máximo ‘entanglement’ posible ($|\alpha| = \sqrt{0.5}$).

Por otro lado, para este subsistema es posible determinar el instante en el cual ocurre el primer ESD tomando en cuenta la solución aproximada, realizada en la sección 2.2, para la amplitud de probabilidad $c_{\xi}^{(0)}(t)$. Al igualar a cero la concurrencia (4.15), se obtiene:

$$|\chi|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \quad (4.16)$$

o de forma equivalente:

$$|\chi|^2 = 1 - |\xi|^2 = 1 - e^{-\Gamma t} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \quad (4.17)$$

de donde se obtiene el instante en el cual se presenta el primer ESD en términos de las condiciones iniciales del sistema y la constante de decaimiento Γ (obtenida en la sección 2.2):

$$t_{ESD} = -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \right) \quad (4.18)$$

Los resultados descritos para este caso, tomando en cuenta solo un modo del reservorio del otro átomo, muestran la ausencia de un ESB antes del ‘revival’ asociado a la dinámica atómica. El trabajo de (López et al., 2008), que analiza la concurrencia en un sistema equivalente al nuestro, da cuenta de un ESB (previo al ‘revival’) cuando se considera al reservorio en un estado colectivo compuesto por todos sus modos. Este caso, se presenta en la siguiente sección.

4.1.5. Subsistema formado por un átomo y el reservorio asociado al otro átomo

La matriz densidad reducida para el subsistema átomo y reservorio asociado al otro átomo, en la base $\{|e_1, \bar{1}_2\rangle, |e_1, \bar{0}_2\rangle, |g_1, \bar{1}_2\rangle, |g_1, \bar{0}_2\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{A_1 R_2} \equiv \text{Tr}_{A_2 R_1} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) \quad (4.19)$$

$$\begin{pmatrix} |\beta|^2|\xi|^2|\chi|^2 & 0 & 0 & \alpha^*\beta\xi\chi \\ 0 & |\beta|^2|\xi|^4 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & |\beta|^2|\chi|^4 & 0 \\ \alpha\beta^*\xi^*\chi^* & 0 & 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2|\xi|^2|\chi|^2 \end{pmatrix}$$

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{A_1 R_2} = 2|\xi||\chi| \left| |\alpha\beta| - |\beta|^2|\xi||\chi| \right| \quad (4.20)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

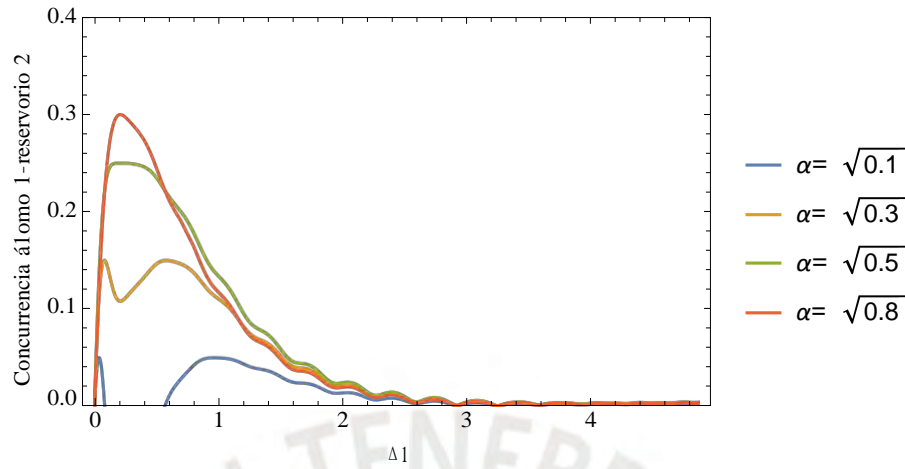


Figura 4.13: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el reservorio del otro átomo para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer ‘revival’. Solo se observa los fenómenos de ESD y posterior ESB para valores menores de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$, en este caso para $|\alpha| = 0.1$. Reservorio con $N = 35$ modos.

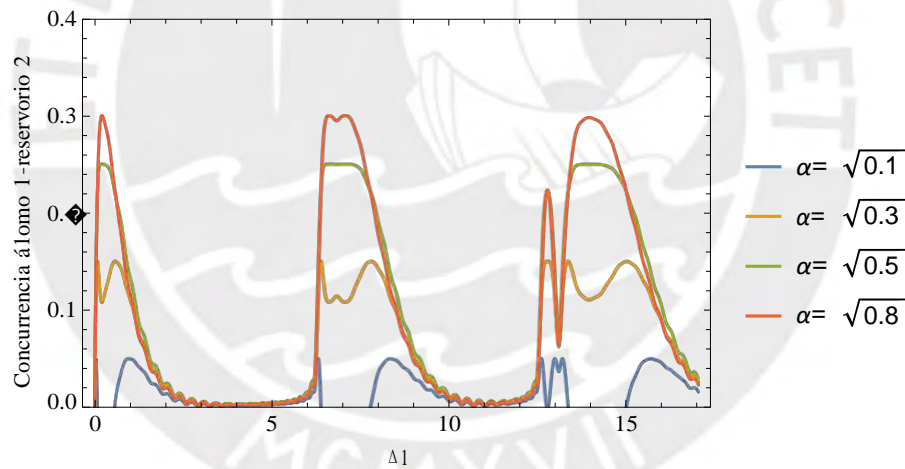


Figura 4.14: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el reservorio del otro átomo para distintos estados iniciales de los átomos, hasta el segundo ‘revival’. En cada ‘revival’ se observa los fenómenos de ESD y posterior ESB para valores menores de amplitud de probabilidad $|\alpha|$, en este caso para $|\alpha| = 0.1$. Reservorio con $N = 35$ modos.

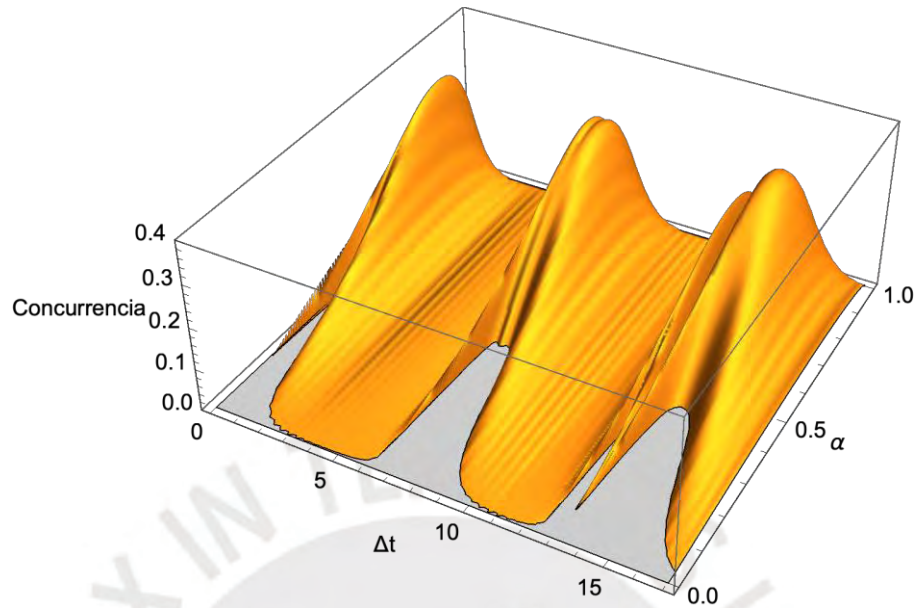


Figura 4.15: Evolución de la concurrencia entre un átomo y el reservorio del otro átomo, según la amplitud de probabilidad α . Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.13 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema átomo y el reservorio correspondiente al otro átomo. Se observa que para los estados iniciales donde las amplitudes de probabilidad cumplen $|\alpha| \geq |\beta|$ la concurrencia alcanza un máximo a partir del cual decrece de forma asintótica (línea verde y línea roja); mientras que para los casos en los cuales se cumple que $|\alpha| < |\beta|$, se observan dos máximos locales (línea anaranjada) e inclusive los fenómenos de ESD y ESB para valores aún menores de la amplitud de probabilidad inicial $|\alpha|$ (línea azul).

La figura 4.14 muestra los mismos casos de la figura 4.13 en un mayor intervalo de tiempo. Se observa que en cada 'revival' de la dinámica atómica también se reactiva la concurrencia de forma suave (línea anaranjada, línea verde y línea roja). Para valores aún menores de la amplitud de probabilidad inicial $|\alpha|$ (línea azul) se observa la presencia de los fenómenos de ESD y posterior ESB, en cada 'revival' de la dinámica atómica.

La figura 4.15 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Se confirma que cuando las amplitudes de probabilidad del estado inicial cumplen la relación $|\alpha| < |\beta|$ se producen mínimos locales de la concurrencia, al inicio de la evolución o en cada ‘revival’ de la dinámica atómica. Así mismo, se verifica que si los valores de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$ son aún menores, es posible observar los fenómenos de ESD y posterior ESB al inicio y en cada ‘revival’ de la dinámica atómica.

Por otro lado, para este subsistema es posible determinar el instante en el cual ocurren los primeros ESD y ESB tomando en cuenta la solución aproximada, realizada en la sección 2.2, para la amplitud de probabilidad $c^{(0)}(t)$. Al igualar a cero la concurrencia (4.20), se obtiene:

$$|\xi\chi|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \quad (4.21)$$

o de forma equivalente:

$$|\xi\chi|^2 = |\xi|^2 (1 - |\xi|^2) = e^{-\Gamma t} (1 - e^{-\Gamma t}) = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \quad (4.22)$$

de donde se obtienen los instantes en los cuales se presentan los primeros ESD y ESB de la concurrencia, en términos de las condiciones iniciales del sistema y la constante de decaimiento Γ (obtenida en la sección 2.2):

$$t_{ESD} = \frac{1}{\Gamma} \ln \cdot \frac{\alpha^2}{1 + \frac{\alpha^2}{1 - 4\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}}} \quad (4.23)$$

$$t_{ESB} = \frac{1}{\Gamma} \ln \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha^2}{1 - 4\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}}} \quad (4.24)$$

A partir de estas últimas expresiones se verifica que solo se observará los fenómenos de ESD y ESB si las amplitudes de probabilidad del estado inicial cumplen la relación: $|\alpha| < \frac{|\beta|}{2}$ o de forma equivalente $|\alpha| < \sqrt{0.2}$, lo cual se también se manifiesta en la figura 4.15.

Los resultados descritos para este caso, incluyendo los instantes de tiempo asociados a los fenómenos de ESD y ESB, son compatibles con los mostrados por (López et al., 2008). Luego, se puede identificar que el fenómeno de ESB, asociado a este caso, no tiene origen en un ‘entanglement’ entre el átomo y los modos individuales del reservorio; sino que manifiesta ‘entanglement’ de naturaleza colectiva, entre el átomo y el conjunto de modos asociados al reservorio.

4.1.6. Subsistema formado por un modo de cada reservorio

La matriz densidad reducida para el subsistema formado por un modo de cada reservorio, en la base $\{|1_m, 1_n\rangle, |1_m, 0_n\rangle, |0_m, 1_n\rangle, |0_m, 0_n\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{m_1 n_2} \equiv \text{Tr}_{A_1 A_2 R_1^{(m)} R_2^{(n)}} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|)$$

| | | | |
|--------------------------------------|---|---|--|
| $ \beta ^2 c_{g,m} ^2 c_{g,n} ^2$ | 0 | 0 | $\alpha^* \beta c_{g,m} c_{g,n}$ |
| 0 | $ \beta ^2 c_{g,m} ^2 [1 - c_{g,n} ^2]$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $ \beta ^2 c_{g,n} ^2 [1 - c_{g,m} ^2]$ | 0 |
| $\alpha \beta^* c_{g,m}^* c_{g,n}^*$ | 0 | 0 | $ \alpha ^2 + \beta ^2 [1 - c_{g,m} ^2] [1 - c_{g,n} ^2]$ |

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{m_1 n_2} = 2 |c_{g,m}| |c_{g,n}| \frac{|\alpha\beta| - |\beta|^2 (1 - |c_{g,m}|^2)(1 - |c_{g,n}|^2)}{|\alpha\beta| - |\beta|^2 (1 - |c_{g,m}|^2)(1 - |c_{g,n}|^2)} \quad (4.25)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

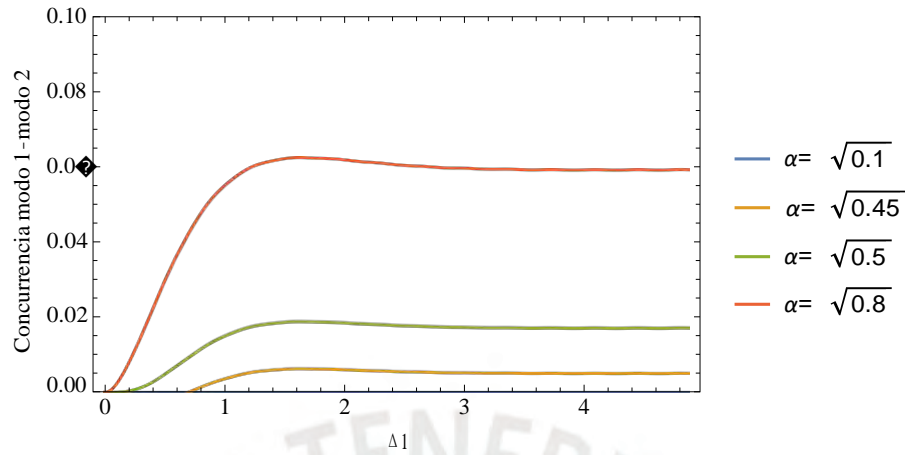


Figura 4.16: Evolución de la concurrencia entre dos modos, uno de cada reservorio, para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer ‘revival’. Solo se observa el fenómeno de ESB para valores de amplitud $|\alpha|$ ligeramente menores que 0.5. Reservorio con $N = 35$ modos.

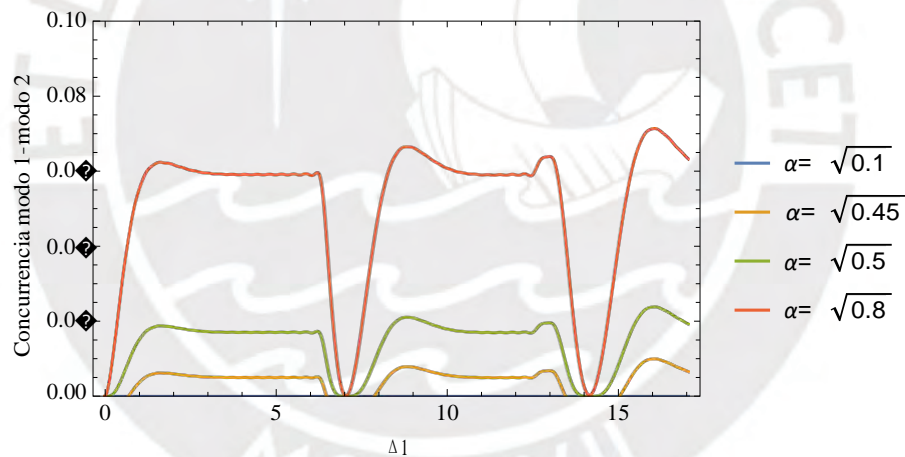


Figura 4.17: Evolución de la concurrencia entre dos modos, uno de cada reservorio, para distintos estados iniciales de los átomos, hasta el segundo ‘revival’. En cada ‘revival’ se observa los fenómenos de ESD y posterior ESB solo para valores de amplitud de probabilidad $|\alpha|$ ligeramente menores que 0.5. Reservorio con $N = 35$ modos.

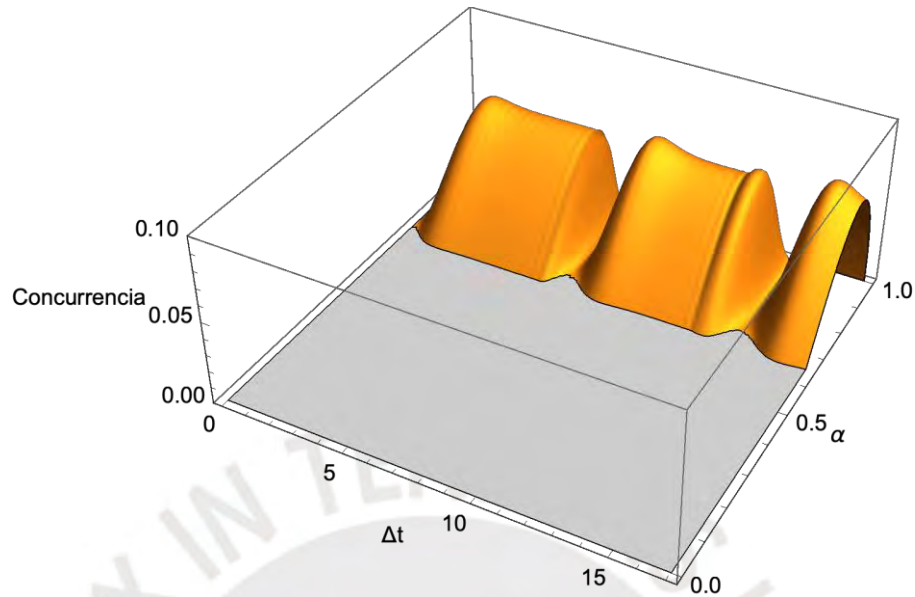


Figura 4.18: Evolución de la concurrencia entre dos modos, uno de cada reservorio, según la amplitud de probabilidad α . Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.16 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema formado por dos modos, cada uno de un reservorio. Se observa que para los estados iniciales donde las amplitudes de probabilidad cumplen $|\alpha| \geq |\beta|$ la concurrencia alcanza un máximo a partir del cual decrece ligeramente hasta estabilizarse y permanecer constante (línea verde y línea roja). En el caso de valores de $|\alpha|$ ligeramente menores a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se manifiesta el fenómeno de ESB (línea anaranjada); mientras que para valores de $|\alpha|$ aún menores la concurrencia es nula (línea azul).

La figura 4.17 muestra los mismos casos de la figura 4.16 en un mayor intervalo de tiempo. Se observa que en cada 'revival' de la dinámica atómica, la concurrencia entre modos de distintos reservorios se reduce significativamente. En el caso de amplitudes de probabilidad inicial que cumplen $|\alpha| \geq |\beta|$ la concurrencia se reduce a cero después de cada 'revival' y nuevamente se reactiva para estabilizarse antes del siguiente 'revival' (línea verde y línea roja). En el caso de valores de $|\alpha|$ ligeramente menores a

$\sqrt{0.5}$ se manifiesta el fenómeno de ESD y posterior ESB en cada ‘revival’ de la dinámica atómica.

La figura 4.18 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Se confirma que cuando las amplitudes de probabilidad del estado inicial cumplen la relación $|\alpha| \geq |\beta|$ la concurrencia tiende a estabilizarse entre cada ‘revival’ y hacerse nula poco después del reinicio de la dinámica atómica. Así mismo, se verifica que si los valores de la amplitud de probabilidad $|\alpha|$ son ligeramente menores a $\sqrt{0.5}$ es posible observar los fenómenos de ESD y posterior ESB, ello en cada ‘revival’ de la dinámica atómica. Para estados iniciales con valores de amplitud de probabilidad $|\alpha|$ aún menores, la concurrencia entre modos será nula.

Para este caso, el fenómeno de ESB observado previo al primer ‘revival’ de la dinámica atómica tiene un comportamiento semejante al caso estudiado por (López et al., 2008), donde se analiza la concurrencia con ambos reservorios descritos por estados colectivos compuestos por todos sus modos. En la siguiente sección se analizará dicha situación.

4.1.7. Subsistema formado por los dos reservorios

La matriz densidad reducida para el subsistema formado por los dos reservorios, en la base $\{|\bar{1}_1, \bar{1}_2\rangle, |\bar{1}_1, \bar{0}_2\rangle, |\bar{0}_1, \bar{1}_2\rangle, |\bar{0}_1, \bar{0}_2\rangle\}$, está dada por:

$$\rho_{R_1 R_2} \equiv \text{Tr}_{A_1 A_2} (|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) \quad (4.26)$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & & & \\ |\beta|^2 |\chi|^4 & 0 & 0 & \alpha^* \beta \chi^{*2} \\ 0 & |\beta|^2 |\xi|^2 |\chi|^2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & |\beta|^2 |\xi|^2 |\chi|^2 & 0 \\ \cdot & \alpha \beta^* \chi^2 & 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 |\xi|^4 \end{array} \cdot$$

de donde la concurrencia cumple:

$$C_{R_1 R_2} = 2|\chi|^2 |\alpha\beta| - |\beta|^2 |\xi|^2 \quad (4.27)$$

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia para este caso:

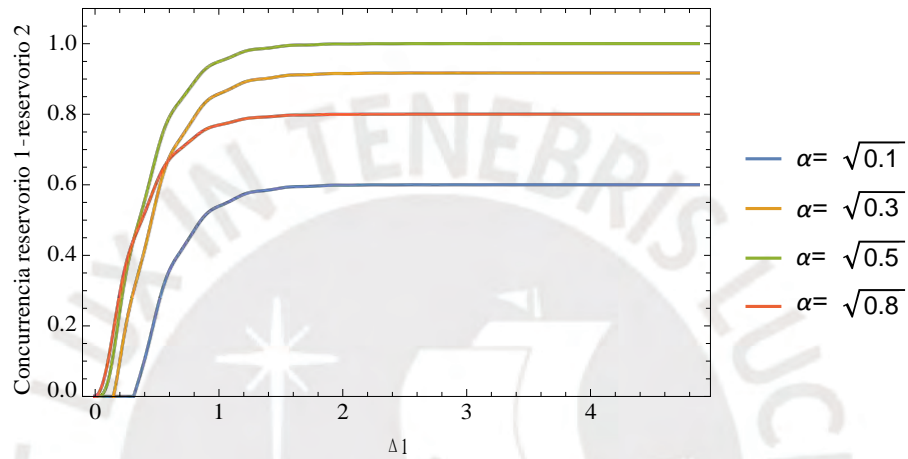


Figura 4.19: Evolución de la concurrencia entre los dos reservorios para distintos estados iniciales de los átomos, previo al primer 'revival'. Solo se observa el fenómeno de ESB para amplitudes de probabilidad $|\alpha| < 0.5$. Reservorio con $N = 35$ modos.

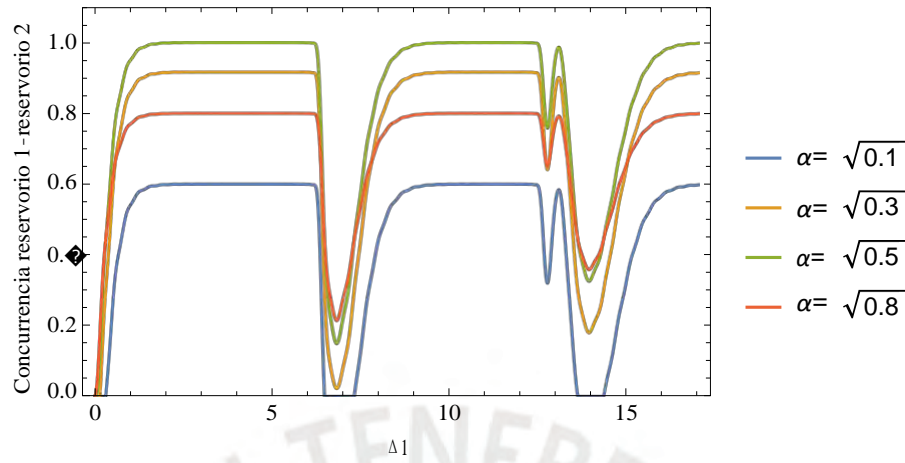


Figura 4.20: Evolución de la concurrencia entre los dos reservorios para distintos estados iniciales de los átomos, hasta el segundo ‘revival’. En cada ‘revival’ es posible observar los fenómenos de ESD y posterior ESB para valores de amplitud de probabilidad $|\alpha|$ relativamente menores, en este caso $\alpha = \sqrt{0.1}$. Reservorio con $N = 35$ modos.

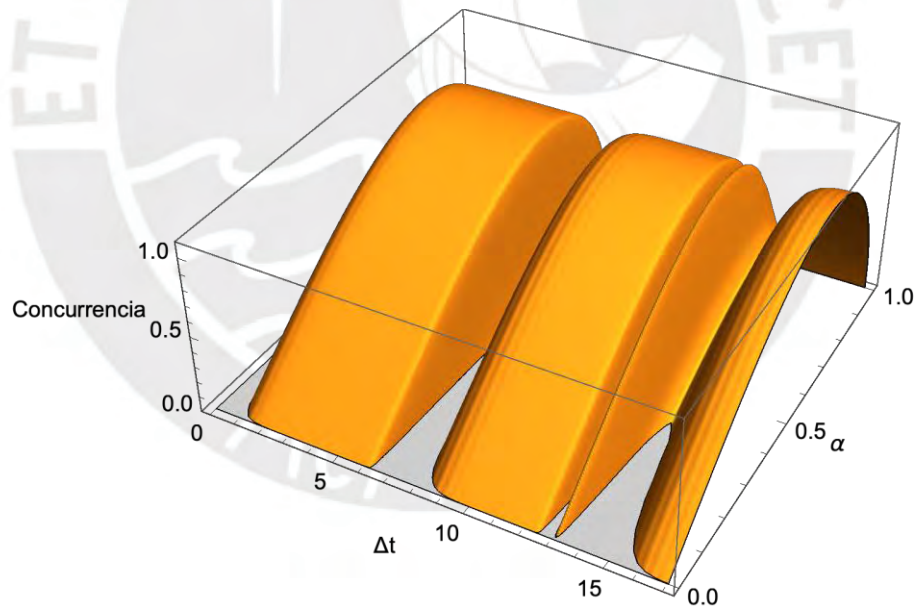


Figura 4.21: Evolución de la concurrencia entre los dos reservorios según la amplitud de probabilidad α . Reservorio con $N = 35$ modos.

La figura 4.19 muestra la evolución de la concurrencia del subsistema formado por los dos reservorios. Se observa que para los estados iniciales donde las amplitudes

de probabilidad cumplen $|\alpha| \geq |\beta|$ la concurrencia manifiesta un crecimiento asintótico a partir del instante que inicia la dinámica atómica (línea verde y línea roja); en particular, para un estado inicial de máximo 'entanglement' (caso de $|\alpha| = \sqrt{0.5}$) la concurrencia entre reservorios también será máxima. En el caso de valores de $|\alpha|$ menores que $|\beta|$ se manifiesta el fenómeno de ESB (línea anaranjada y línea azul) a partir del cual el crecimiento también resulta asintótico.

La figura 4.20 muestra los mismos casos de la figura 4.19 en un mayor intervalo de tiempo. Se observa que en cada 'revival' de la dinámica atómica, la concurrencia entre modos de distintos reservorios se reduce significativamente. En el caso de amplitudes de probabilidad inicial que cumplen $|\alpha| \geq |\beta|$ la concurrencia se reduce sin hacerse nula después de cada 'revival' y nuevamente crece de forma asintótica antes del siguiente 'revival' (línea verde y línea roja). En el caso de valores de $|\alpha|$ menores que $\sqrt{0.5}$ es posible observar el fenómeno de ESD y posterior ESB en cada 'revival' de la dinámica atómica.

La figura 4.21 corresponde a la evolución de la concurrencia según la amplitud de probabilidad $|\alpha|$. Se confirma que la máxima concurrencia entre reservorios ocurrirá cuando el estado inicial tiene un máximo 'entanglement' ($|\alpha| = |\beta| = \sqrt{0.5}$). Los fenómenos de ESB y ESD solo ocurrirán si se cumple $|\alpha| < |\beta|$.

Por otro lado, para este subsistema es posible determinar el instante en el cual ocurre el primer ESB tomando en cuenta la solución aproximada, realizada en la sección 2.2, para la amplitud de probabilidad $c_e^{(0)}(t)$. Al igualar a cero la concurrencia (4.27), se obtiene:

$$|\xi|^2 = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (4.28)$$

o de forma equivalente:

$$|\xi|^2 = e^{-\Gamma t} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (4.29)$$

de donde se obtiene el instante en el cual se presenta el primer ESB en términos de las condiciones iniciales del sistema y la constante de decaimiento Γ (obtenida en la sección 2.2):

$$t_{ESB} = -\frac{1}{\Gamma} \ln \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (4.30)$$

Los resultados descritos para este caso, incluyendo el instante del primer ESB, son compatibles con los mostrados por (López et al., 2008). Por otro lado, los resultados para este subsistema (reservorios descritos por estados colectivos) manifiestan características similares a los resultados de la sección anterior, donde se consideró el subsistema formado por un modo de cada reservorio, lo cual significaría que el origen del ‘entanglement’ entre reservorios corresponde al ‘entanglement’ entre sus respectivos modos.

4.2. Comparación de la concurrencia entre subsistemas

En esta sección se analiza de forma comparativa la evolución del ‘entanglement’ por medio de la concurrencia de cada uno de los subsistemas analizados en la sección previa.

A continuación se muestran las gráficas de concurrencia divididas en dos casos de amplitud de probabilidad inicial α , los cuales permiten distinguir dos comportamientos bien definidos en la evolución de la concurrencia.

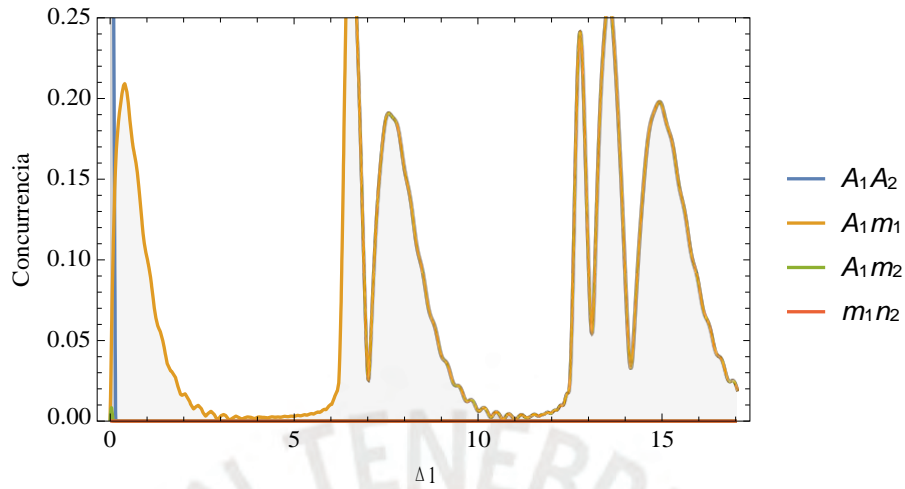


Figura 4.22: Evolución de la concurrencia de distintos subsistemas de dos qubits, tomando un modo representativo para cada reservorio y una amplitud de probabilidad inicial $\alpha = 0.1$. En este caso, se observa concurrencia nula para el subsistema m_1n_2 y el fenómeno de ESD para los subsistemas A_1A_2 y A_1m_2 . Reservorio con $N = 35$ modos.

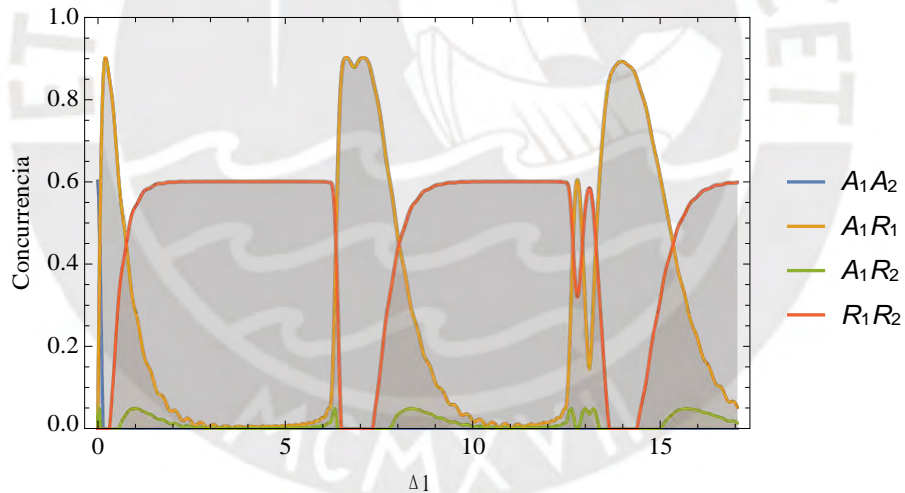


Figura 4.23: Evolución de la concurrencia de distintos subsistemas de dos qubits, tomando un estado colectivo para los reservorios y una amplitud de probabilidad inicial $\alpha = 0.1$. En cada 'revival' se observan los fenómenos de ESD y posterior ESB solo para los subsistemas A_1R_2 y R_1R_2 . Reservorio con $N = 35$ modos.

Las figuras 4.22 y 4.23 muestran la evolución de la concurrencia entre subsistemas cuando la amplitud de probabilidad inicial α cumple que $|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se observa que

el ‘entanglement’ del subsistema de dos átomos presenta el fenómeno de ESD (línea azul en ambas figuras), a partir del cual la concurrencia es nula a pesar de los posteriores ‘revivals’ en la dinámica atómica. Así mismo, en las dos figuras se observa que la reducción del ‘entanglement’ entre átomos trae como consecuencia inmediata el crecimiento del ‘entanglement’ entre cada átomo y su correspondiente reservorio, tanto a nivel de modos (línea anaranjada A_1m_1 : subsistema átomo y un modo de su correspondiente reservorio) como a nivel colectivo (línea anaranjada A_1R_1 : subsistema átomo y su correspondiente reservorio).

Por otro lado, en este caso, $|\alpha| < \sqrt{0.2}$, se verifica que el ‘entanglement’ entre los reservorios a nivel colectivo (línea roja R_1R_2 de la figura 4.23) no tiene origen en un ‘entanglement’ entre los modos de cada reservorio, el cual es nulo para todo tiempo (línea roja m_1n_2 de la figura 4.22).

Teniendo en cuenta los párrafos previos, asociados a las figuras 4.22 y 4.23, se puede afirmar que la pérdida inicial de ‘entanglement’ entre los átomos se traduce en un transferencia inmediata de ‘entanglement’ hacia el subsistema átomo con su propio reservorio y una transferencia retardada, por medio del fenómeno de ESB, hacia el subsistema de los dos reservorios (a nivel colectivo). Así mismo, se observa que en cada ‘revival’ de la dinámica atómica, la reactivación del ‘entanglement’ del subsistema átomo y su respectivo reservorio trae como consecuencia la reducción del ‘entanglement’ entre los reservorios, ello a pesar de la ausencia de reactivación del ‘entanglement’ entre átomos. Se observa que entre los fenómenos de ESD y ESB del subsistema de reservorios (a nivel colectivo) el ‘entanglement’ del subsistema átomo y su respectivo reservorio alcanza su máxima medida.

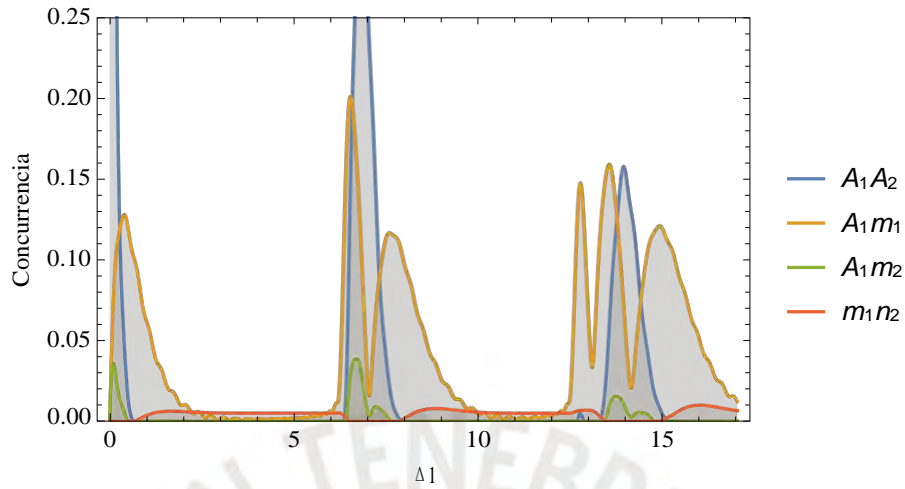


Figura 4.24: Evolución de la concurrencia de distintos subsistemas de dos qubits, tomando un modo representativo para cada reservorio y una amplitud de probabilidad inicial $\alpha = 0.45$. Se observa en cada ESD de los subsistemas A_1A_2 y A_1m_2 ocurre un ESB en el subsistema m_1n_2 ; así mismo, en cada ESD del subsistema m_1n_2 se observa un ESB en los subsistemas A_1A_2 y A_1m_2 . Reservorio con $N = 35$ modos.

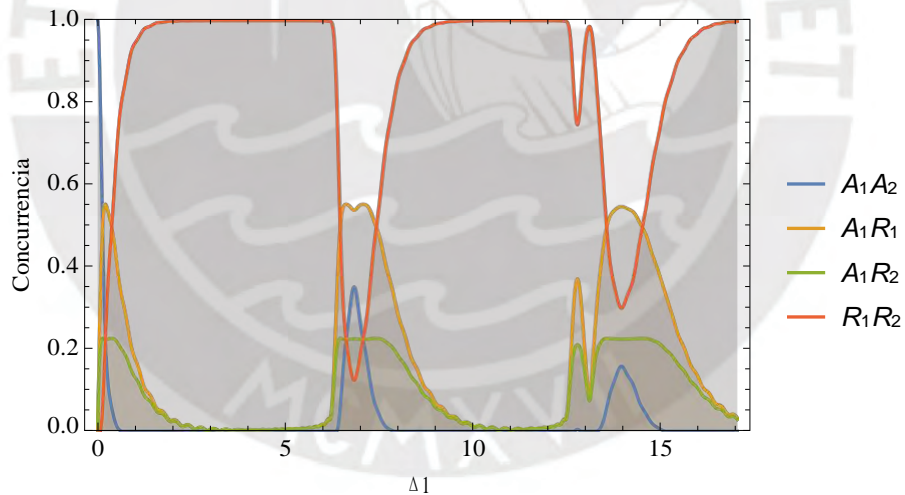


Figura 4.25: Evolución de la concurrencia de distintos subsistemas de dos qubits, tomando un estado colectivo para los reservorios y una amplitud de probabilidad inicial $\alpha = 0.45$. Solo se observa los fenómenos de ESB y posterior ESD en cada 'revival' para el subsistema A_1A_2 . Reservorio con $N = 35$ modos.

Las figuras 4.24 y 4.25 muestran la evolución de la concurrencia entre subsistemas cuando la amplitud de probabilidad inicial α corresponde a una medida ligeramen-

te menor que $\sqrt{0.5}$ (asociado al máximo ‘entanglement’ inicial). A diferencia del caso anterior, $|\alpha| < \sqrt{0.2}$, en este caso el ‘entanglement’ asociado al subsistema de átomos presenta fenómenos de ESB y ESD en cada ‘revival’ de la dinámica atómica (línea azul en ambas figuras). Así mismo, a diferencia del caso previo, ahora se observa ‘entanglement’ para el subsistema formado por un modo de cada reservorio (línea roja m_1n_2 de la figura 4.24) en un comportamiento semejante al ‘entanglement’ del subsistema formado por ambos reservorios a nivel colectivo (línea roja R_1R_2 de la figura 4.25). Esto último indicaría que, para el presente caso, el ‘entanglement’ entre los reservorios al nivel colectivo tiene su origen en el ‘entanglement’ de los mismos a nivel de los modos correspondientes.

La figura 4.25 muestra también que cuando el estado inicial es muy cercano al máximo ‘entanglement’ entre átomos, el subsistema de reservorios a nivel colectivo alcanza su máximo ‘entanglement’ entre cada ‘revival’ de la dinámica atómica. Se observa que el crecimiento asintótico del ‘entanglement’ entre los reservorios (a nivel colectivo) se inicia en el momento en el cual el ‘entanglement’ entre los átomos comienza a decrecer después de cada ‘revival’ de la dinámica atómica. Así mismo, el ‘entanglement’ entre los modos de cada reservorio tiene valores finitos en los intervalos de tiempo en los cuales el ‘entanglement’ entre los átomos es nulo, como se muestra en la figura 4.24. Estos hechos sugieren que, en este caso, después de una transferencia inicial de ‘entanglement’ del subsistema de átomos al subsistema de reservorios y otros subsistemas en menor proporción, son los reservorios (a nivel colectivo) que retornan parcialmente el ‘entanglement’ al subsistema de átomos con cada ‘revival’ de la dinámica atómica.

Capítulo V

Conclusiones

En el marco de la presente tesis se identificó como objetivos principales la solución de la ecuación de Schrödinger para describir la dinámica de un átomo de dos niveles interactuando con un número finito de modos del campo electromagnético (reservorio) y el posterior análisis de la evolución del 'entanglement' para un conjunto de subsistemas establecidos en la dinámica de dos átomos de dos niveles con sus respectivos reservorios. Teniendo en cuenta que ambos objetivos fueron cumplidos, a continuación se brindan las principales conclusiones de este trabajo.

De acuerdo al capítulo II, primero se estableció un mecanismo formal para obtener la solución de la ecuación de Schrödinger asociada a la evolución de un átomo de dos niveles, inicialmente en su estado excitado, interactuando con N modos del campo electromagnético. Se mostró que, en la imagen de interacción, la determinación de las amplitudes de probabilidad, del vector que describe la evolución del sistema, equivale a al problema de autovalores de la matriz A definida en (2.7). Este mecanismo permitió obtener los resultados numéricos para su posterior análisis.

El segundo mecanismo para resolver la ecuación descrita en el párrafo anterior consistió en obtener una solución aproximada mediante series de Fourier, lo cual se basó

en el comportamiento periódico del núcleo de la ecuación integro-diferencial (2.24) de la amplitud de probabilidad asociada al estado excitado del átomo. El carácter periódico permitió a la vez establecer una solución aproximada por tramos (2.28) y recurrente de acuerdo a los resultados (2.47 a 2.50). En este caso, se logró determinar la constante de decaimiento del átomo (2.36), la cual es independiente del número de modos del campo electromagnético dentro de la aproximación por series de Fourier. La expresión obtenida para la constante de decaimiento difiere de la correspondiente al modelo de Weisskopf-Wigner, debido a que en esta propuesta se mantiene el carácter discreto de la distribución de modos del reservorio.

Se verificó que la aproximación por series de Fourier describe correctamente la dinámica del sistema, reduciendo el margen de error para los casos de interacción del átomo con un mayor número de modos del campo electromagnético. Las figuras (2.2) y (2.3) dan cuenta de la coincidencia entre la solución formal y la solución aproximada.

Por análisis de la solución aproximada fue posible identificar la escala de tiempo en la cual se esperan los 'revivals' de la dinámica atómica. Estos 'revivals' se inician cada periodo equivalente a $2\pi/\Delta$ que es proporcional al número de modos del campo electromagnético, según la aproximación propuesta. Este resultado evidencia el caso del decaimiento asintótico del átomo; es decir, cuando el campo electromagnético es constituido por una infinidad de modos, no se esperaría un primer 'revival' de la dinámica atómica en un tiempo de observación finito.

En el capítulo IV se estudió el 'entanglement' entre dos 'qubits' constituidos como subsistemas asociados a un sistema formado por dos átomos de dos niveles con sus respectivos reservorios. En cada uno de los siete subsistemas posibles se analizó la concurrencia como medida del 'entanglement', utilizando el procedimiento descrito en el capítulo III. En todos los casos se analizó el comportamiento temporal de la concu-

rrencia así como su dependencia con las condiciones iniciales del sistema (amplitudes de probabilidad iniciales).

La comparación de la evolución de la concurrencia entre los distintos subsistemas, detallado en la sección 4.2, muestra en todos los casos la transferencia inicial del ‘entanglement’ desde el subsistema de átomos hacia el subsistema de reservorios (en modo colectivo). Un aspecto relevante en este fenómeno corresponde al caso de una amplitud de probabilidad inicial α relativamente pequeña, donde el ‘entanglement’ entre los reservorios se presenta con ausencia de ‘entanglement’ entre los modos de cada reservorio; mientras que, para valores de α cercanos o superiores a $\sqrt{0.5}$ el ‘entanglement’ entre reservorios (a nivel colectivo) esta asociado a la presencia del ‘entanglement’ entre sus respectivos modos.

De igual forma, otro aspecto relevante que quedaría pendiente de investigación corresponde nuevamente al caso de valores de α relativamente pequeños, donde el ‘entanglement’ del subsistema átomo y reservorio del otro átomo (a nivel colectivo) se manifiesta en ausencia de ‘entanglement’ del subsistema átomo y modo asociado al reservorio del otro átomo.

Por otro lado, en cuanto a los fenómenos de ESD o ESB, se verifica que, con excepción de los subsistemas correspondientes a la interacción de un átomo con su respectivo reservorio (tanto a nivel de modos como a nivel colectivo), el resto de subsistemas analizados pueden manifestar estos fenómenos bajo ciertas condiciones para las amplitudes de probabilidad del estado inicial del sistema (descritas en la sección 4.1). Tomando en cuenta la solución aproximada desarrollada en la sección 2.2 fue posible determinar los instantes de tiempo en los cuales se observarían los fenómenos de ESD o ESB para algunos de los subsistemas analizados.

Referencias

- Almeida, M. P., de Melo, F., Hor-Meyll, M. O., Salles, A., Walborn, S. P., Ribeiro, P. H. S., y Davidovich, L. (2007, Jun). Experimental observation of environment-induced sudden death of entanglement. *Noise and Fluctuations in Photonics, Quantum Optics, and Communications*. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1117/12.724472> doi: 10.1117/12.724472
- Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S., y Schumacher, B. (1996, Apr). Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53, 2046–2052. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.2046> doi: 10.1103/PhysRevA.53.2046
- Bennett, C. H., DiVincenzo, D. P., Smolin, J. A., y Wootters, W. K. (1996, Nov). Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, 54(5), 3824–3851. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.54.3824> doi: 10.1103/physreva.54.3824
- Cubitt, T. S., Verstraete, F., y Cirac, J. I. (2005, May). Entanglement flow in multipartite systems. *Physical Review A*, 71(5). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.71.052308> doi: 10.1103/physreva.71.052308

- Hill, S., y Wootters, W. K. (1997, Jun). Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78, 5022–5025. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5022> doi: 10.1103/PhysRevLett.78.5022
- Jaynes, E. T., y Cummings, F. W. (1963). Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1), 89-109. doi: 10.1109/PROC.1963.1664
- Lastra, F., Romero, G., López, C. E., França Santos, M., y Retamal, J. C. (2007, Jun). Abrupt changes in the dynamics of quantum disentanglement. *Physical Review A*, 75(6). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.75.062324> doi: 10.1103/physreva.75.062324
- López, C. E., Romero, G., Lastra, F., Solano, E., y Retamal, J. C. (2008, Aug). Sudden birth versus sudden death of entanglement in multipartite systems. *Physical Review Letters*, 101(8). Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.080503> doi: 10.1103/physrevlett.101.080503
- Swain, S. (1973, dec). On the quantum and semi-classical theories of a two-level atom interacting with a single-field mode. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, 6(12), L169–L173. Descargado de <https://doi.org/10.1088/0305-4470/6/12/003> doi: 10.1088/0305-4470/6/12/003
- Wootters, W. K. (1998, Mar). Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80(10), 2245–2248. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245> doi:

10.1103/physrevlett.80.2245

