Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Tópicos de álgebra homológica sobre anillos conmutativos

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

AUTOR

Enrique Hernan Aviles Mendoza

ASESOR

Dr. Victor Hugo Jorge Perez

JURADO

Dr. Alfredo B. Poirier Schmitz

Dr. Christian H. Valqui Haase

Marzo - 2021

Tópicos de álgebra homológica sobre anillos conmutativos

Enrique Hernan Aviles Mendoza

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Christian H. Valqui Haase (presidente)

Dr. Alfredo B. Poirier Schmitz (miembro)

Dr. Victor Hugo Jorge Perez (Asesor)

Lima - Perú

Marzo - 2021

Resumen

Enrique Hernan Aviles Mendoza
Maestría en Matemática
Tópicos de álgebra homológica sobre anillos conmutativos.

En esta tesis desarrollaremos los funtores extensión $\mathrm{Ext}^i_R(-, M)$ y $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(M, -)$ como los $i-$ésimos funtores derivados derechos de los funtores $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ y $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, respectivamente, y demostraremos que estos dos enfoques producen la misma noción, es decir, Ext^i_R es un bifuntor balanceado. Asimismo, obtendremos el funtor torsión $\mathrm{Tor}^R_i(-, N)$ como el $i-$ésimo funtor derivado izquierdo del funtor $- \oplus_R N$. Construiremos las Ext-sucesiones y Tor-sucesiones exactas largas y por medio de estas sucesiones estableceremos algunos criterios que nos permitirán determinar la inyectividad, proyectividad y planitud de un $R-$módulo dado.

Palabras clave: álgebra homológica, funtor, funtor torsión, funtor extensión, bifuntor.

Dedico este trabajo a mi querida madre.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por todo lo bueno que me da la vida. Quiero agradecer también al Dr. Victor Hugo Jorge Perez por su ayuda en la elaboración de este trabajo, a mis hijos Azumy y Caleb; así como, a mi esposa Evelin. Finalmente, agradezco a mi amigo Abrahan Aslla por su colaboración con el Latex.

Lista de Símbolos

R	anillo conmutativo con identidad
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	conjunto de todos los $R-$homomorfismos $h : M \to N$
f^*	$R-$homomorfismo $\mathrm{Hom}_R(f, N)$
f_*	$R-$homomorfismo $\mathrm{Hom}_R(M, f)$
${}_R\mathbf{M}$	categoría de los $R-$módulos
$\mathfrak{F}$	funtor
$\mathbf{M}_\bullet$	complejo
$\mathbf{M}^\bullet$	co-complejo
$\mathscr{C}_\bullet^R$	categoría de los complejos
$\mathscr{C}_R^\bullet$	categoría de los co-complejos
$H_i(\mathbf{M}_\bullet)$	modulo de homología
$H^i(\mathbf{M}^\bullet)$	modulo de cohomología
$f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$	mapeo de complejos
$f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \to \mathbf{N}^\bullet$	mapeo de co-complejos
$\mathbf{P}_\bullet$	resolución proyectiva
$\mathbf{P}_{\bullet M}$	resolución proyectiva reducida
$\mathbf{I}^\bullet$	resolución inyectiva
$\mathbf{I}^{\bullet M}$	resolución inyectiva reducida
$\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(\bullet)$	$i-$ésimo funtor derivado izquierdo
$\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(\bullet)$	$i-$ésimo funtor derivado derecho
$\mathrm{Ext}_R^i(-, -)$	funtor extensión
$\mathrm{Tor}_i^R(-, -)$	funtor torsión

Índice general

Introducción

En primer lugar, los prerequisitos para la lectura de este trabajo son un conocimiento básico de grupos, anillos conmutativos y módulos.

Se puede considerar que la noción de $R-$módulo proporciona una generalización común de las nociones de espacio vectorial y grupo abeliano. Por lo tanto, si R es un cuerpo, entonces un $R-$módulo es simplemente un espacio vectorial sobre R, mientras que, un homomorfismo de $R-$módulos es una transformación lineal. Asimismo, si R es igual a $\mathbb{Z}$, entonces un $\mathbb{Z}-$módulo es simplemente un grupo abeliano y un homomorfismo de $\mathbb{Z}-$módulos es un homomorfismo de grupos abelianos.

En el capítulo 1 tratamos el lema de la Serpiente, resultado que será necesario para establecer la existencia de las sucesiones exactas largas en homología y cohomología, las cuales corresponden a cada sucesión exacta corta de complejos y co-complejos, respectivamente.

En el capítulo 2 estudiamos los módulos inyectivo, proyectivo, divisible y plano, y observamos que cada módulo está inmerso en un $R-$módulo inyectivo. De igual manera, investigamos brevemente los módulos inyectivos sobre un dominio de ideales principales. Por otro lado, los módulos inyectivos sobre dicho dominio disfrutan de una propiedad de divisibilidad que es equivalente a la inyectividad. Otra propiedad que posee un $R-$módulo inyectivo M es hacer al funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ exacto. Similarmente, una propiedad importante de un $R-$módulo proyectivo M es hacer al funtor covariante $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ un funtor exacto, otra es que cada módulo es la imagen homomórfica de un módulo proyectivo. Adicionalmente, los modulos planos son aquellos para los que el funtor $M \otimes_R -$ es exacto.

En el capítulo 3 tratamos el álgebra homológica que se puede describir acertadamente como el estudio de los funtores derivados de los funtores aditivos, en particular, de los funtores Hom y producto tensorial. Los funtores derivados de funtores aditivos se definen en este capítulo. Para definir estos se necesita la existencia de resoluciones proyectivas e inyectivas para cada módulo y esto también se establece. Asimismo, los funtores derivados del producto tensorial son llamados funtores de torsión; mientras que, aquellos derivados de Hom son llamados funtores de extensión.

Un aspecto importante a resaltar es que no se investigaron el funtor derivado izquierdo de $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ ni tampoco el funtor derivado izquierdo de $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ porque los funtores derivados izquierdos de Hom no están conectados a Hom, como lo están sus funtores derivados derechos. En efecto, si $\mathfrak{F} = \mathrm{Hom}_R(-,X)$ o $\mathfrak{F} = \mathrm{Hom}_R(X,-)$ entonces $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son funtores naturalmente equivalentes, y debido a esto, $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ y $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ están vinculados a las sucesiones exactas largas; sin embargo, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ no son naturalmente equivalentes.

Caracterizamos los módulos proyectivos e inyectivos a través de los funtores $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$ y $\mathrm{Ext}^i_R(X,-)$, respectivamente. Por otra parte, se demuestra con la ayuda de las sucesiones exactas largas en la primera y segunda variable, que los bifuntores Ext^i_R y $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R$ son naturalmente equivalentes. Como resultado de esto se tiene que $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ puede calcularse usando una resolución proyectiva de M o usando una resolución inyectiva de N.

Finalmente, nos enfocamos en los funtores derivados izquierdos que pueden desarrollarse a partir del producto tensorial en su primera y segunda variable y vemos que hay una conexión entre los funtores Tor^R_i y los módulos planos.

Debemos mencionar que los resultados de esta tesis fueron tomados de las referencias mencionadas en la bibliografia.

Capítulo 1

Álgebra homológica

En este capítulo definimos y caracterizamos sucesiones exactas cortas escindidas, definimos complejos, co-complejos, módulos de homología y de cohomología y sus mapeos correspondientes. A continuación definimos funtores de la categoría de $R-$módulos en sí mismo. Demostramos que todo funtor aditivo preserva sucesiones exactas cortas escindidas, complejos y aplicaciones de complejos, también homotopías y equivalencias homotópicas. En la última sección probamos el lema de la serpiente y con la ayuda de ella asociamos a cada sucesión exacta corta de complejos y co-complejos una sucesión exacta larga de módulos de homología y cohomología. Las principales referencias de este capítulo han sido de [3], [1] y [5].

1.1 Sucesiones exactas en ${}_R\mathrm{M}$

Definición 1.1. Se dice que una sucesión $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ de $R-$módulos y de $R-$homomorfismos es *exacta en* M si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Una sucesión de la forma

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

es *exacta* si es exacta en M_i para cada $i \in \mathbb{Z}$.
Mientras tanto, una sucesión $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ que es exacta en M_1, M, y M_2 se llama *sucesión exacta corta*.

Proposición 1.2. Sean $f : N \to M$ y $k : M \to N$ $R-$homomorfismos tales que $k \circ f = id_N$. Entonces $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(k)$.

Demostración. Sea $x \in M$, entonces $k(x) \in N$ y así $f(k(x)) \in M$. Si $z =$

$x - f(k(x))$, entonces tenemos lo siguiente

$$k(z) = k(x) - k(f(k(x))) = k(x) - k(x) = 0,$$

donde la segunda igualdad se deduce de $k \circ f = id_N$. Así, $z \in \mathrm{Ker}(k)$ y $x = f(k(x)) + z \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(k)$. Por lo tanto, $M = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(k)$. Ahora demostramos que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(k) = \{0\}$. De hecho, si $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(k)$, entonces $y = f(x)$, para algún $x \in N$, y así $0 = k(y) = k(f(x)) = x$. Por lo tanto, $y = f(0) = 0$. $\square$

Proposición 1.3. Sean $h : N \to M$ y $l : M \to P$ homomorfismos de $R-$módulos. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $N \overset{h}{\to} M \overset{l}{\to} P \to 0$ es exacta y hay un homomorfismo de $R-$módulos $r : M \to N$ tal que $r \circ h = id_N$;

(ii) $0 \to N \overset{h}{\to} M \overset{l}{\to} P$ es exacta y hay un homomorfismo de $R-$módulos $s : P \to M$ tal que $l \circ s = id_P$;

(iii) $l \circ h = 0$ y hay homomorfismos de $R-$módulos $r : M \to N$ y $s : P \to M$ tal que $r \circ h = id_N$, $l \circ s = id_P$ y $s \circ l + h \circ r = id_M$;

(iv) Hay un diagrama conmutativo con la primera fila exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "h"] & M \arrow[r, "l"] & P \arrow[r] & 0 \\
& N \arrow[u, equal] \arrow[r, "i"] & N \oplus P \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "q"] & P \arrow[u, equal] &
\end{tikzcd}$$

en el cual i y q son los homomorfismos canónicos definidos por $x \longmapsto (x, 0)$ y $(x, y) \longmapsto y$ respectivamente.

Demostración. Probaremos que $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (i)$.
$(i) \Longrightarrow (ii)$. La proposición 1.2 demuestra que $M = \mathrm{Im}(h) \oplus \mathrm{Ker}(r)$. Ahora observemos que para cada $x \in M$ se cumple

$$x - h(r(x)) \in \mathrm{Ker}(r) \tag{1.1}$$

esto se debe a que

$$r(x - h(r(x))) = r(x) - r(h(r(x))) = r(x) - r(x) = 0.$$

A continuación definamos $s : P \to M$ por $s(y) = x - h(r(x))$, donde $x \in M$ es tal que $l(x) = y$. Tal x existe ya que l es un epimorfismo, pero puede haber más de uno. Demostramos que s está bien definida. Supongamos que para $x' \in M$ también se cumple $l(x') = y$. Entonces $x - x' \in \operatorname{Ker}(l) = \operatorname{Im}(h)$, así

$$\begin{aligned}(x - h(r(x))) - (x' - h(r(x'))) &= (x - x') - (h(r(x)) - h(r(x'))) \\ &= (x - x') - h(r(x - x')) \in \operatorname{Im}(h). \end{aligned} \tag{1.2}$$

De esta manera, por (1.1) y (1.2) tenemos

$$(x - h(r(x))) - (x' - h(r(x'))) \in \operatorname{Ker}(r) \cap \operatorname{Im}(h) = \{0\},$$

de esto se sigue que $x - h(r(x)) = x' - h(r(x'))$ y s está bien definida.
Mostremos a continuación que $l \circ s = id_P$. En efecto, si $y \in P$ y $s(y) = x - h(r(x))$, donde $x \in M$ es tal que $l(x) = y$, entonces

$$l(s(y)) = l(x - h(r(x))) = l(x) - l(h(r(x))) = l(x) = y,$$

ya que $l \circ h = 0$.

$$\begin{tikzcd}
& N & & \\
N \arrow[ur, "id_N = r\circ h"] \arrow[r, "h"] & M \arrow[u, "r"] \arrow[r, "l"] & P \arrow[r] & 0 \\
& P \arrow[u, dashed, "s"] \arrow[ur, dashed, "l\circ s = id_P"'] & &
\end{tikzcd}$$

$(ii) \implies (iii)$. Si $m \in M$, entonces $l(m) \in P$ y $m - s(l(m)) \in \operatorname{Ker}(l)$, esto es porque

$$l(m - s(l(m))) = l(m) - l(s(l(m))) = l(m) - l(m) = 0$$

y como $\operatorname{Ker}(l) = \operatorname{Im}(h)$, hay un $n \in N$ con $h(n) = m - s(l(m))$, de donde $m = h(n) + s(l(m))$. Esto demuestra que $M = \operatorname{Im}(h) + \operatorname{Im}(s)$.
Demostramos ahora que $\operatorname{Im}(h) \cap \operatorname{Im}(s) = \{0\}$. En efecto, si $h(n) = x = s(a)$, entonces $l(x) = l(h(n)) = 0$, ya que $l \circ h = 0$; mientras que, $l(x) = l(s(a)) = a$ porque $l \circ s = id_P$. Por lo tanto, $x = s(a) = s(0) = 0$. Se concluye así que $M = \operatorname{Im}(h) \oplus \operatorname{Im}(s)$.

$$\begin{tikzcd}
& & N & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[ur, dashed, "id_N = r\circ h"] \arrow[r, "h"] & M \arrow[u, dashed, "r"'] \arrow[r, "l"] & P \\
& & P \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "l\circ s = id_P"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo demostrado antes, si $m \in M$, entonces hay únicos $n \in N$ y $a \in P$ con $m = h(n) + s(a)$. La función $r : M \to N$ dada por $r(m) = n$ está por lo tanto bien definida. Es claro que r es un homomorfismo. Además, $h(n) = h(n) + s(0)$ implica $r(h(n)) = n$ por lo que $r \circ h = id_N$. Finalmente, si $m \in M$, entonces $m = h(n) + s(a)$ y como $r(m) = n$ y

$$l(m) = \underbrace{l(h(n))}_{=0} + l(s(a)) = id_P(a) = a$$

se tiene $m = h(r(m)) + s(l(m))$ lo que demuestra que $id_M = h \circ r + s \circ l$.
$(iii) \implies (iv)$. En primer lugar, notemos que para $a \in P$ tenemos

$$s(l(s(a))) + h(r(s(a))) = s(a).$$

Ya que $l \circ s = id_P$, lo anterior puede ser escrito como $s(a) + h(r(s(a))) = s(a)$, de donde $h(r(s(a))) = 0$. Puesto que h es uno a uno resulta $r(s(a)) = 0$. Por lo tanto, $r \circ s = 0$. A continuación definamos $\varphi : N \oplus P \to M$ por $\varphi(n, a) = h(n) + s(a)$. Como h y s son $R-$homomorfismos, φ también lo es. Definamos también $\psi : M \to N \oplus P$ mediante la regla $\psi(m) = (r(m), l(m))$. Es claro que ψ es un homomorfismo; además, para cada $m \in M$

$$\varphi(\psi(m)) = \varphi(r(m), l(m)) = h(r(m)) + s(l(m)) = id_M(m) = m,$$

también para cada $(n, a) \in N \oplus P$

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(n, a)) = \psi(h(n) + s(a)) &= (r(h(n) + s(a)), l(h(n) + s(a))) \\ &= (r(h(n)) + r(s(a)), l(h(n)) + l(s(a))) \\ &= (n, a).\end{aligned}$$

Esto demuestra que φ es un isomorfismo.

A continuación comprobemos que la primera línea en el diagrama de (iv) es exacta. Como $l \circ h = 0$ se tiene que $Im(h) \subseteq Ker(l)$. Con el fin de probar la inclusión recíproca supongamos que $l(m) = 0$ para $m \in M$, entonces también tenemos $s(l(m)) = s(0) = 0$, así que

$$m = (s \circ l + h \circ r)(m) = (s \circ l)(m) + (h \circ r)(m) = h(r(m)) \in Im(h).$$

Finalmente, verifiquemos que el diagrama en (iv) conmuta. En efecto,

$$\varphi(i(n)) = \varphi(n, 0) = h(n) + s(0) = h(n),$$

y también

$$l(\varphi(n, a)) = l(h(n) + s(a)) = \underbrace{l(h(n))}_{=0} + l(s(a)) = a = q(n, a).$$

$(iv) \implies (i)$. Sea $r = p \circ \varphi^{-1}$ donde $p : N \oplus P \to N$ es el homomorfismo canónico dado por $p(x, y) = x$. Se cumple $r \circ h = id_N$. En efecto, sea $n \in N$, entonces como $h = \varphi \circ i$ tenemos

$$r \circ h = p \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ i = p \circ i = id_N.$$

$\square$

Definición 1.4. Se dice que una sucesión exacta corta escinde si satisface las condiciones equivalentes del proposición 1.3.

1.2 Complejos y co-complejos

Definición 1.5. Una sucesión $\mathbf{M}_\bullet$ de $R-$módulos y de $R-$homomorfismos denotada por

$$\mathbf{M}_\bullet : \cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

se dice que es un *complejo* si $\alpha_i \circ \alpha_{i+1} = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Cada aplicación α_i se llama un *operador diferencial*. Un complejo $\mathbf{M}_\bullet$ se dice que es exacto en M_i si $\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$. $\mathbf{M}_\bullet$ es un complejo exacto, si es exacto en M_i, para cada $i \in \mathbb{Z}$.
Un complejo de la forma

$$\mathbf{M}_\bullet : \cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_0 \longrightarrow 0 \,,$$

donde los ceros adicionales a la derecha fueron omitidos se llama un *complejo positivo*.

Definición 1.6. Una sucesión $\mathbf{M}^\bullet$ de $R-$módulos y de $R-$homomorfismos denotada por

$$\mathbf{M}^\bullet : \cdots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} M^i \xrightarrow{\alpha^i} M^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice que es un *co-complejo* si $\alpha^i \circ \alpha^{i-1} = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Asimismo, un co-complejo $\mathbf{M}^\bullet$ se dice que es exacto en M^i si $\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha^i)$. Por otro lado, $\mathbf{M}^\bullet$ es un co-complejo exacto, si es exacto en M^i, para cada $i \in \mathbb{Z}$.
Un co-complejo de la forma

$$\mathbf{M}^\bullet : 0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{\alpha^0} M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^i \xrightarrow{\alpha^i} M^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

donde los ceros adicionales a la izquierda fueron omitidos se llama un *co-complejo positivo*.

Definición 1.7. Si $\mathrm{M}_\bullet$ es un complejo de $R-$módulos, entonces

$$H_i(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_i)}{\mathrm{Im}(\alpha_{i+1})}$$

se llama *el $i-$ésimo módulo de homología de* $\mathrm{M}_\bullet$.
Por otra parte, si $\mathrm{M}^\bullet$ es un co-complejo de $R-$módulos, entonces

$$H^i(\mathbf{M}^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha^i)}{\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})}$$

se llama *el $i-$ésimo módulo de cohomología de* $\mathrm{M}^\bullet$.

Ejemplo 1.8. Consideremos la siguiente sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\mathbf{M}_\bullet : \ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{-6}{9}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(3\ 2)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\ .$$

Para mostrar que esta sucesión es un complejo, solo necesitamos verificar que los productos de pares de matrices adyacentes son ceros:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = (0).$$

Calculando los módulos de homología de cada grado, obtenemos

$$H_0(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathbb{Z} \to 0)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(3\ 2)} \mathbb{Z} \right)} = \frac{\mathbb{Z}}{(3,2)\mathbb{Z}^2} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = 0,$$

$$H_1(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(3\ 2)} \mathbb{Z} \right)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{-6}{9}} \mathbb{Z}^2 \right)} = \frac{\binom{-2}{3}\mathbb{Z}}{\binom{-6}{9}\mathbb{Z}} = \frac{\binom{-2}{3}\mathbb{Z}}{3\binom{-2}{3}\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3,$$

$$H_2(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{-6}{9}} \mathbb{Z}^2 \right)}{\mathrm{Im}(0 \to \mathbb{Z})} = \frac{0\mathbb{Z}}{0Z} = 0.$$

Es importante notar que las otras homologías $H_i(\mathbf{M}_\bullet)$ son nulas, por el hecho de que los $M_i = 0$ para todo $i \neq 0, 1, 2.$

A continuación, haremos una generalización de las sucesiones exactas de $R-$módulos a sucesiones exactas de complejos de $R-$módulos, esto es, podemos construir una sucesión exacta del tipo $\mathbf{L}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{N}_\bullet$

Definición 1.9. Sean $\mathbf{M}_\bullet$ y $\mathbf{N}_\bullet$ dos complejos. Una *aplicación de complejos* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ es una familia de $R-$homomorfismos $f_\bullet = \{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & M_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "\beta_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Al respecto, la definición de aplicación de co-complejos es similar.

Definición 1.10. Sean $\mathbf{M}^\bullet$ y $\mathbf{N}^\bullet$ dos co-complejos. Una *aplicación de co-complejos* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \to \mathbf{N}^\bullet$ es una familia de $R-$homomorfismos $f^\bullet = \{f^i : M^i \to N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{i-1} \arrow[r, "\alpha^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & M^i \arrow[r, "\alpha^i"] \arrow[d, "f^i"'] & M^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{i-1} \arrow[r, "\beta^{i-1}"] & N^i \arrow[r, "\beta^i"] & N^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.11. Si $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ es una aplicación de complejos, entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe una aplicación $R-$lineal $H_i(f_\bullet) : H_i(\mathbf{M}_\bullet) \to H_i(\mathbf{N}_\bullet)$ definida por

$$H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) = f_i(x) + \mathrm{Im}(\beta_{i+1})$$

para cada $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$.

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & M_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "\beta_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, entonces

$$\beta_i(f_i(x)) = f_{i-1}(\alpha_i(x)) = 0.$$

Así que $f_i(x) \in \mathrm{Ker}(\beta_i)$. Por consiguiente, $H_i(f_\bullet)$ aplica $\mathrm{Ker}(\alpha_i)/\mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$ en $\mathrm{Ker}(\beta_i)/\mathrm{Im}(\beta_{i+1})$. Además, la aplicación está bien definida. En efecto, si $x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) = x' + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$, donde $x, x' \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, entonces $x - x' \in \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})$, de manera que existe $y \in M_{i+1}$ tal que $x - x' = \alpha_{i+1}(y)$. Al aplicar f_i a esta ecuación se obtiene

$$f_i(x) - f_i(x') = f_i(x - x') = f_i(\alpha_{i+1}(y)) = \beta_{i+1}(f_{i+1}(y)),$$

por lo cual, $f_i(x) - f_i(x') \in \mathrm{Im}(\beta_{i+1})$. Finalmente, $H_i(f_\bullet)$ es $R-$lineal, ya que f_i lo es. $\square$

De un modo análogo, se pueden definir aplicaciones entre cohomologías.

Sean M y N $R-$módulos y $Hom_R(M,N)$ el conjunto de todos los homomorfismos de $R-$módulos $h : M \longrightarrow N$. Este conjunto lleva una estructura natural de $R-$módulo dada para $h, l \in Hom_R(M,N)$ y $a \in R$ por

$$(h+l)(m) := h(m) + l(m) \quad \text{y} \quad (ah)(m) := ah(m)$$

para $m \in M$.

Definición 1.12. Sean R y S anillos. Un *funtor aditivo covariante* de la categoría de $R-$módulos, denotado por ${}_R\mathbf{M}$, a la categoría de $S-$módulos, denotado por ${}_S\mathbf{M}$, es una asignación

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(N))$$

que, a cada $R-$módulo M asigna un $S-$módulo $\mathfrak{F}(M)$ y, a cada homomorfismo $h : M \to N$ de $R-$módulos asigna un homomorfismo de $S-$módulos $\mathfrak{F}(h) : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N)$, tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathfrak{F}(id_M) = id_{\mathfrak{F}(M)}$, para cada $R-$módulo M;
2. $\mathfrak{F}(g \circ h) = \mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{F}(h)$, donde $h : M \to N$ y $g : N \to P$ son homomorfismos de $R-$módulos;
3. $\mathfrak{F}(g+h) = \mathfrak{F}(g) + \mathfrak{F}(h)$, donde $g, h : M \to N$ son homomorfismos de $R-$módulos.

Definición 1.13. Sean R y S anillos. Un *funtor aditivo contravariante* de la categoría de $R-$módulos a la categoría de $S-$módulos es una asignación

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (\mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M))$$

que, a cada $R-$módulo M asigna un $S-$módulo $\mathfrak{F}(M)$ y, a cada homomorfismo $h : M \to N$, de $R-$módulos asigna un homomorfismo de $S-$módulos $\mathfrak{F}(h) : \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(M)$ tal que se cumple lo siguiente:

1. $\mathfrak{F}(id_M) = id_{\mathfrak{F}(M)}$, para cada $R-$módulo M;
2. $\mathfrak{F}(g \circ h) = \mathfrak{F}(h) \circ \mathfrak{F}(g)$, donde $h : M \to N$ y $g : N \to P$ son homomorfismos de $R-$módulos;
3. $\mathfrak{F}(g+h) = \mathfrak{F}(g) + \mathfrak{F}(h)$, donde $g, h : M \to N$ son homomorfismos de $R-$módulos.

Ejemplo 1.14. 1. Sea $S \subseteq R$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. El funtor localización de la categoría de $R-$módulos a la categoría de $S^{-1}R-$módulos es el funtor covariante y aditivo

$$S^{-1} = S^{-1}(\bullet) : (M \xrightarrow{h} N) \rightsquigarrow (S^{-1}M \overset{S^{-1}(h)}{\longrightarrow} S^{-1}N),$$

que, a cada $R-$módulo M le asigna un $S^{-1}R-$módulo $S^{-1}M$ y a cada $R-$homomorfismo $h : M \to N$ le hace corresponder un $S^{-1}R-$homomorfismo $S^{-1}h : S^{-1}M \to S^{-1}N$ de $S^{-1}R-$módulos.

2. Sea X un $R-$módulo fijo. Entonces $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ es un funtor contravariante aditivo de la categoría de $R-$módulos, que denotamos con ${}_R\mathbf{M}$, sobre sí mismo:

$$\mathrm{Hom}_R(-, X) = \mathrm{Hom}_R(\bullet, X) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\mathrm{Hom}_R(N, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, X)),$$

el cual, a cada $R-$módulo M lleva a un $R-$módulo $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ y a cada $R-$homomorfismo $f : M \to N$ lleva a un $R-$homomorfismo

$$\mathrm{Hom}_R(f, X) = f^* : \mathrm{Hom}_R(N, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, X)$$

donde $f^*(h) = h \circ f$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_R(N, X)$.

3. Sea X un $R-$módulo fijo. Entonces $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ es un funtor covariante de la categoría ${}_R\mathbf{M}$ a la categoría ${}_R\mathbf{M}$:

$$\mathrm{Hom}_R(X, -) = \mathrm{Hom}_R(X, \bullet) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\mathrm{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X, N)),$$

que, a cada $R-$módulo M lleva a un $R-$módulo $\mathrm{Hom}_R(X, M)$ y a cada $R-$homomorfismo $f : M \to N$ lleva a un $R-$homomorfismo

$$\mathrm{Hom}_R(X, f) = f_* : \mathrm{Hom}_R(X, M) \to \mathrm{Hom}_R(X, N)$$

donde $f_*(h) = f \circ h$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_R(X, M)$.

Definición 1.15. Sean R y S anillos conmutativos y $\mathfrak{F}$ un funtor covariante de $R-$módulos a $S-$módulos.

(i) El funtor $\mathfrak{F}$ se dice que es exacto a la izquierda si para cada sucesión exacta de $R-$módulos $0 \to N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P$ se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(l)} \mathfrak{F}(P)$$

es una sucesión exacta de $S-$módulos.

(ii) El funtor $\mathfrak{F}$ se dice que es exacto a la derecha si

$$\mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(l)} \mathfrak{F}(P) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $S-$módulos para cada sucesión exacta $N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P \to 0$ de $R-$módulos.

(iii) El funtor $\mathfrak{F}$ es exacto si es exacto a la izquierda y es exacto a la derecha.

Definición 1.16. Sean R y S anilos conmutativos y $\mathfrak{F}$ un funtor contravariante de $R-$módulos a $S-$módulos.

(i) El funtor $\mathfrak{F}$ se dice que es exacto a la izquierda si para cada sucesión exacta de $R-$módulos $N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P \to 0$ se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(P) \xrightarrow{\mathfrak{F}(l)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(N)$$

es una sucesión exacta de $S-$módulos.

(ii) El funtor $\mathfrak{F}$ se dice que es exacto a la derecha si

$$\mathfrak{F}(P) \xrightarrow{\mathfrak{F}(l)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(N) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $S-$módulos, para cada sucesión exacta $0 \to N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{l} P$ de $R-$módulos.

(iii) Si $\mathfrak{F}$ es exacto a la izquierda y a la derecha, entonces $\mathfrak{F}$ es un funtor contravariante exacto.

Teorema 1.17. Para cualquier $R-$módulo X, los funtores contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ y covariante $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ son exactos a la izquierda.

Demostración. Demostraremos que el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ es exacto a la izquierda. Sea $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ una sucesión exacta de $R-$módulos. Vamos a probar que la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_2, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, X).$$

es exacta. En primer lugar demostramos que g^* es inyectiva. En efecto, si $h \in \mathrm{Hom}_R(M_2, X)$ es tal que $g^*(h) = 0$, entonces $h \circ g = 0$. Consideremos ahora $x \in M_2$. Ya que g es sobreyectiva, hay un $m \in M$ tal que $x = g(m)$, de donde resulta que $h(x) = h(g(m)) = 0$. Por tanto, $h(x) = 0$ para todo $x \in M_2$ y $h = 0$, de manera que g^* es inyectiva.

A continuación se verificará la exactitud de la sucesión en $\mathrm{Hom}_R(M, X)$. Si $h \in \mathrm{Im}(g^*)$, entonces hay un $h' \in \mathrm{Hom}_R(M_2, X)$ tal que $h = g^*(h')$. Es por esto que $f^*(h) = f^*(g^*(h')) = h' \circ g \circ f = 0$ ya que $g \circ f = 0$. Por lo tanto, $h \in \mathrm{Ker}(f^*)$ y así $\mathrm{Im}(g^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f^*)$. Sea ahora $h \in \mathrm{Ker}(f^*)$, entonces $h \circ f = f^*(h) = 0$. Dado $y \in M_2$, por la sobreyectividad de g hay un $x \in M$ con $y = g(x)$. Defínase $l : M_2 \to X$ por la regla $l(y) = h(x)$. A continuación, veamos la buena definición de l. Si x' es otro elemento de M para el que también se cumple $y = g(x')$, entonces tenemos $x - x' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, de manera que hay un $w \in M_1$ con $x - x' = f(w)$, pero entonces $h(x) - h(x') = h(f(w)) = 0$, esto es, $h(x) = h(x')$. Por otra parte, es claro que l es un $R-$homomorfismo. Además, $l \circ g(x) = l(g(x)) = h(x)$ para todo $x \in M$, por lo que $g^*(l) = h$ y $h \in \mathrm{Im}(g^*)$. Esto prueba que $\mathrm{Ker}(f^*) \subseteq \mathrm{Im}(g^*)$.

La prueba para el funtor $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ es similar. $\square$

Teorema 1.18. Para cada $R-$módulo X, los funtores covariantes $X \otimes_R -$ y $- \otimes_R X$ son exactos a la derecha.

Demostración. Haremos la prueba para el funtor $- \otimes_R X$. Consideremos la sucesión exacta de $R-$módulos $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$. Queremos demostrar que la sucesión

$$M_1 \otimes_R X \xrightarrow{f \otimes id_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g \otimes id_X} M_2 \otimes_R X \longrightarrow 0$$

es exacta. Primeramente se demuestra que $g \otimes id_X$ es sobreyectiva. En efecto, sea $m_2 \otimes x \in M_2 \otimes X$. Como g es sobreyectiva hay un $m \in M$ tal que $g(m) = m_2$, entonces $m \otimes x \in M \otimes_R X$ y

$$(g \otimes id_X)(m \otimes x) = g(m) \otimes id_X(x) = m_2 \otimes x.$$

Así, $Im(g \otimes id_X)$ contiene a todos los generadores de $M_2 \otimes_R X$, por lo cual $Im(g \otimes id_X) = M_2 \otimes_R X$ y $g \otimes id_X$ es sobreyectiva.

Pasemos a demostrar que $\mathrm{Im}(f \otimes id_X) = \mathrm{Ker}(g \otimes id_X)$. En efecto, observemos que $g \circ f = 0$ implica que

$$(g \otimes id_X) \circ (f \otimes id_X) = (g \circ f) \otimes (id_X \circ id_X) = 0 \otimes id_X = 0.$$

En consecuencia, $\mathrm{Im}(f \otimes id_X) \subseteq \mathrm{Ker}(g \otimes id_X)$. Es por esto que existe una aplicación inducida

$$h : (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes id_X) \to M_2 \otimes_R X$$

tal que el siguiente diagrama conmuta y donde la fila es exacta.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes_R X \arrow[r, "f\otimes id_X"] & M \otimes_R X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g\otimes id_X"'] & (M \otimes_R X)/Im(f \otimes id_X) \arrow[r] \arrow[dl, "h"] & 0 \\
 & M_2 \otimes_R X & &
\end{tikzcd}$$

En particular, $h(y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes id_X)) = g(y) \otimes x$ para cada generador $y \otimes x$ de $M \otimes_R X$.

Consideremos ahora la aplicación $R-$bilineal $\rho' : M_2 \times X \to (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes id_X)$ dada por $\rho'(z, x) = y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes id_X)$, donde $y \in M$ es tal que $g(y) = z$. Será preciso mostrar la buena definición de esta aplicación. Sea y' otro elemento de M tal que $g(y') = z$, entonces $y - y' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, así que es posible obtener un $m_1 \in M_1$ tal que $f(m_1) = y - y'$. Entonces

$$\begin{aligned}
y \otimes x + Im(f \otimes id_X) &= (y' + f(m_1)) \otimes x + Im(f \otimes id_X) \\
&= y' \otimes x + f(m_1) \otimes x + Im(f \otimes id_X) \\
&= y' \otimes x + Im(f \otimes id_X),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce de $f(m_1) \otimes x \in Im(f \otimes id_X)$. Es así que, por la definición del producto tensorial $M_2 \otimes_R X$ existe un homomorfismo

$$\overline{h} : M_2 \otimes_R X \to (M \otimes_R X)/\mathrm{Im}(f \otimes id_X)$$

tal que $\overline{h} \circ \rho = \rho'$, donde ρ es el mapeo bilineal canónico; es decir, $\overline{h}(z \otimes x) = y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes id_X)$ con $g(y) = z$, $y \in M$.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes_R X \arrow[r, "f\otimes id_X"] & M \otimes_R X \arrow[r, "\pi"] & (M \otimes_R X)/Im(f \otimes id_X) \arrow[r] & 0 \\
 & M_2 \otimes_R X \arrow[ur, "\overline{h}"] & M_2 \times X \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "\rho'"'] &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $\overline{h} = h^{-1}$. En efecto,

$$h(\overline{h}(z \otimes x)) = h(y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes id_X)) = g(y) \otimes x = z \otimes x,$$

también,

$$\overline{h}(h(y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes id_X))) = \overline{h}(g(y) \otimes x) = y \otimes x + \mathrm{Im}(f \otimes id_X).$$

Así, pues, h es un isomorfismo. Finalmente, de $g \otimes id_X = h \circ \pi$, donde π es el epimorfismo canónico, se obtiene

$$\mathrm{Ker}(g \otimes id_X) = \mathrm{Ker}(h \circ \pi) = \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(f \otimes id_X).$$

La prueba de que el funtor $X \otimes_R -$ es exacto a la derecha es similar. $\square$

Teorema 1.19. Sean R y S anillos conmutativos, y $\mathfrak{F}$ un funtor aditivo de cualquier varianza de $R-$módulos a $S-$módulos. Si $0 \to N \stackrel{h}{\to} M \stackrel{l}{\to} P \to 0$ es una sucesión exacta de $R-$módulos que escinde, entonces

$$0 \to \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(l)} \mathfrak{F}(P) \to 0$$

es una sucesión exacta de $S-$módulos que escinde.

Demostración. Puesto que la sucesión exacta corta de $R-$módulos

$$0 \to N \stackrel{h}{\to} M \stackrel{l}{\to} P \to 0$$

escinde, por el ítem (iii) de la proposición 1.3 se tiene que $l \circ h = 0$ y hay homomorfismos de $R-$módulos $r : M \to N$ y $s : P \to M$ tal que $r \circ h = id_N$, $l \circ s = id_P$ y $s \circ l + h \circ r = id_M$. De esto podemos derivar, dado que $\mathfrak{F}$ es un funtor covariante y aditivo, que los homomorfismos de $S-$módulos $\mathfrak{F}(r) : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N)$ y $\mathfrak{F}(s) : \mathfrak{F}(P) \to \mathfrak{F}(M)$ satisfacen $\mathfrak{F}(l) \circ \mathfrak{F}(h) = 0$, $\mathfrak{F}(r) \circ \mathfrak{F}(h) = \mathfrak{F}(id_N) = id_{\mathfrak{F}(N)}$, $\mathfrak{F}(l) \circ \mathfrak{F}(s) = \mathfrak{F}(id_P) = id_{\mathfrak{F}(P)}$ y

$$\mathfrak{F}(s) \circ \mathfrak{F}(l) + \mathfrak{F}(h) \circ \mathfrak{F}(r) = \mathfrak{F}(s \circ l + h \circ r) = \mathfrak{F}(id_M) = id_{\mathfrak{F}(M)}.$$

Por tanto, por la proposición 1.3 nuevamente se tiene que

$$0 \to \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(h)} \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(l)} \mathfrak{F}(P) \to 0$$

es una sucesión exacta de $S-$módulos que escinde. □

Teorema 1.20. Los complejos (co-complejos) de $R-$módulos y aplicaciones de complejos (co-complejos) forman una categoría aditiva, que denotaremos por $\mathscr{C}_\bullet^R$ ($\mathscr{C}_R^\bullet$). Además, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $H_i : \mathscr{C}_\bullet^R \to_R\mathbf{M}$ y $H^i : \mathscr{C}_R^\bullet \to_R\mathbf{M}$ son funtores covariantes aditivos llamados el $i-$ésimo funtor de homología y cohomología respectivamente.

Demostración. Si $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$ son aplicaciones de complejos, entonces $f_\bullet + g_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$, donde $f_\bullet + g_\bullet = \{f_i + g_i : L_i \to M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es también una aplicación de complejos, y con esta operación $\mathrm{Mor}(\mathbf{L}_\bullet, \mathbf{M}_\bullet)$ tiene la estructura de un grupo abeliano. Además, la composición en $\mathscr{C}_\bullet^R$ de dos aplicaciones de complejos $f_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$ y $g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ es el complejo $g_\bullet f_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ dado por

$g_\bullet f_\bullet = \{g_i \circ f_i : L_i \to N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[rr, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] \arrow[ddl, "g_{i+1}\circ f_{i+1}"'] & & L_i \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"] \arrow[ddl, "g_i\circ f_i"'] & & L_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] \arrow[ddl, "g_{i-1}\circ f_{i-1}"'] & \cdots \\
 & \cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[rr, "\beta_{i+1}"'] \arrow[dl, "g_{i+1}"] & & M_i \arrow[rr, "\beta_i"'] \arrow[dl, "g_i"] & & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, "g_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[rr, "\gamma_{i+1}"'] & & N_i \arrow[rr, "\gamma_i"'] & & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

A continuación, se demuestra que $H_i : \mathscr{C}_\bullet^R \to \mathbf{M}_R$ es un funtor covariante aditivo. Para ello se debe verificar que:

1. $H_i(id_{\mathbf{M}_\bullet}) = id_{H_i(\mathbf{M}_\bullet)}$;
2. Si $f_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$ y $g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ son aplicaciones de complejos, entonces $H_i(g_\bullet f_\bullet) = H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet)$;
3. $H_i(f_\bullet + g_\bullet) = H_i(f_\bullet) + H_i(g_\bullet)$ para cada par de aplicaciones de complejos $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$.

La comprobación de los ítems 1 y 3 es inmediata, de manera que probamos el ítem 2. En efecto, como $g_\bullet f_\bullet : \mathbf{L}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ tenemos $H_i(g_\bullet f_\bullet) : H_i(\mathbf{L}_\bullet) \to H_i(\mathbf{N}_\bullet)$, de manera que para cada $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
H_i(g_\bullet f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) &= g_i(f_i(x)) + \mathrm{Im}(\gamma_{i+1}) \\
&= H_i(g_\bullet)(f_i(x) + \mathrm{Im}(\beta_{i+1})) \\
&= H_i(g_\bullet)(H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}))) \\
&= (H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet))(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}))
\end{aligned}
$$

□

Definición 1.21. (i) Si $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ son dos aplicaciones de complejos, entonces $\phi_\bullet$ es una *homotopía de $f_\bullet$ a $g_\bullet$*, denotado por $\phi_\bullet : f_\bullet \to g_\bullet$, si es una familia de $R-$homomorfismos $\phi_\bullet = \{\phi_i : M_i \to N_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Si existe una homotopía $\phi_\bullet : f_\bullet \to g_\bullet$ entonces diremos que $f_\bullet$ y $g_\bullet$ son homotópicos y escribimos $f_\bullet \approx g_\bullet$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] & M_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\phi_{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "\beta_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

(ii) Dos complejos $\mathbf{M}_\bullet$ y $\mathbf{N}_\bullet$ se dice que son del mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones de complejos $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ y $g_\bullet : \mathbf{N}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$ tal que $g_\bullet f_\bullet \approx id_{\mathbf{M}_\bullet}$ y $f_\bullet g_\bullet \approx id_{\mathbf{N}_\bullet}$, donde $id_{\mathbf{M}_\bullet}$ y $id_{\mathbf{N}_\bullet}$ son las aplicaciones de complejos identidad en $\mathbf{M}_\bullet$ y $\mathbf{N}_\bullet$ respectivamente.

Teorema 1.22. Si $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ son dos aplicaciones de complejos homotópicos, entonces $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Si $\phi_\bullet = \{\phi_i : M_i \to N_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una homotopía de $f_\bullet$ a $g_\bullet$, entonces $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Sea $x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \in H_i(\mathbf{M}_\bullet)$ donde $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, entonces vemos que

$$f_i(x) - g_i(x) = \beta_{i+1}(\phi_i(x)) + \underbrace{\phi_{i-1}(\alpha_i(x))}_{=0} = \beta_{i+1}(\phi_i(x)) \in \mathrm{Im}(\beta_{i+1})$$

por lo que

$$\begin{aligned} H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) &= f_i(x) + \mathrm{Im}(\beta_{i+1}) \\ &= g_i(x) + \mathrm{Im}(\beta_{i+1}) = H_i(g_\bullet)(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$. □

Teorema 1.23. Sean R y S anillos conmutativos y sea $\mathfrak{F} : {}_R\mathbf{M} \to {}_S\mathbf{M}$ un funtor aditivo.

$a)$ Si $\mathbf{M}_\bullet \in \mathscr{C}_\bullet^R$, entonces $\mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet) \in \mathscr{C}_\bullet^S$.

$b)$ Si $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ es una aplicación de complejos en $\mathscr{C}_\bullet^R$, entonces $\mathfrak{F}(f_\bullet) : \mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet) \to \mathfrak{F}(\mathbf{N}_\bullet)$ es una aplicación de complejos en $\mathscr{C}_\bullet^S$.

$c)$ Si $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ son aplicaciones de complejos homotópicos en $\mathscr{C}_\bullet^R$, entonces $\mathfrak{F}(f_\bullet), \mathfrak{F}(g_\bullet) : \mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet) \to \mathfrak{F}(\mathbf{N}_\bullet)$ son aplicaciones de complejos homotópicos en $\mathscr{C}_\bullet^S$.

$d)$ Si $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$ son aplicaciones de complejos homotópicos en $\mathscr{C}_\bullet^R$, entonces $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet)) \to H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{N}_\bullet))$ en $\mathscr{C}_\bullet^S$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. $a)$ Si $\mathbf{M}_\bullet$ es un complejo, entonces $\alpha_i \circ \alpha_{i+1} = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Al ser un funtor aditivo, $\mathfrak{F}$ debe preservar las aplicaciones nulas, de manera que tenemos $\mathfrak{F}(\alpha_i) \circ \mathfrak{F}(\alpha_{i+1}) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Esto significa que $\mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet)$ es también un complejo.

b) Si $f_\bullet = \{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}_\bullet$ es una aplicación de complejos, de modo que $\beta_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \alpha_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathfrak{F}(\beta_i) \circ \mathfrak{F}(f_i) = \mathfrak{F}(f_{i-1}) \circ \mathfrak{F}(\alpha_i)$. Esto muestra que $\mathfrak{F}(f_\bullet) = \{\mathfrak{F}(f_i) : \mathfrak{F}(M_i) \to \mathfrak{F}(N_i)\}_{i\in\mathbb{Z}} : \mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet) \to \mathfrak{F}(\mathbf{N}_\bullet)$ es una aplicación de complejos.

c) Si $\phi_\bullet = \{\phi_i : M_i \to N_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una homotopía entre las aplicaciones de complejos $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{N}_\bullet$, entonces $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \phi_i + \phi_{i-1} \circ \alpha_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Al aplicar $\mathfrak{F}$ obtenemos

$$\mathfrak{F}(f_i) - \mathfrak{F}(g_i) = \mathfrak{F}(\beta_{i+1}) \circ \mathfrak{F}(\phi_i) + \mathfrak{F}(\phi_{i-1}) \circ \mathfrak{F}(\alpha_i)$$

de manera que $\mathfrak{F}(\phi_\bullet) = \{\mathfrak{F}(\phi_i) : \mathfrak{F}(M_i) \to \mathfrak{F}(N_{i+1})\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una homotopía entre $\mathfrak{F}(f_\bullet), \mathfrak{F}(g_\bullet) : \mathfrak{F}(\mathbf{M}_\bullet) \to \mathfrak{F}(\mathbf{N}_\bullet)$.

d) Es consecuencia de la parte *c*) y el teorema 1.22.

□

Hay una versión dual del teorema 1.23 que se cumple para co-complejos y aplicacones de co-complejos.

1.3 Sucesiones de homología y cohomología

Sucesiones exactas en la categoría $\mathscr{C}_\bullet^R$ y $\mathscr{C}_R^\bullet$.

Definición 1.24. Se dice que una *sucesión* $\mathbf{L}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{N}_\bullet$ *de complejos* es *exacta* si $L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i$ es una sucesión exacta de $R-$módulos para cada $i \in \mathbb{Z}$. De igual manera, una *sucesión de complejos* (similarmente para co-complejos)

$$0 \to \mathbf{L}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{N}_\bullet \to 0$$

es una sucesión *exacta corta* si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"'] & M_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "\beta_{i+1}"'] & N_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{i+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & N_i \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d] & M_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[d] & N_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas de $R-$módulos y de $R-$homomorfismos y las columnas son los complejos $\mathbf{L}_\bullet$, $\mathbf{M}_\bullet$ y $\mathbf{N}_\bullet$, respectivamente.

Lema 1.25. (*El lema de la Serpiente*) Se considera el diagrama conmutativo de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & N_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] & \\
 & L_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & M_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & N_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & M_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "\beta_3"'] & N_3 \arrow[d, "\gamma_3"'] & \\
 & L_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d] & M_4 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d] & N_4 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

donde las dos filas del medio y las columnas son exactas. Entonces existe un homomorfismo $\Phi : N_1 \to L_4$ tal que la sucesión

$$L_1 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{g_1} N_1 \xrightarrow{\Phi} L_4 \xrightarrow{f_4} M_4 \xrightarrow{g_4} N_4$$

es exacta. Si además, $f_2 : L_2 \to M_2$ es un monomorfismo, entonces también lo es $f_1 : L_1 \to M_1$. Y si $g_3 : M_3 \to N_3$ es un epimorfismo, entonces así lo es $g_4 : M_4 \to N_4$.

Demostración. Probamos en primer lugar la exactitud en M_1. Puesto que $0 = g_2 \circ f_2 \circ \alpha_1 = \gamma_1 \circ g_1 \circ f_1$ y γ_1 es un monomorfismo, se sigue que $g_1 \circ f_1 = 0$, de donde $\mathrm{Im}(f_1) \subseteq \mathrm{Ker}(g_1)$. Sea ahora $g_1(y_1) = 0$ donde $y_1 \in M_1$. Entonces $g_2 \circ \beta_1(y_1) = \gamma_1 \circ g_1(y_1) = \gamma_1(g_1(y_1)) = 0$, de modo que $\beta_1(y_1) \in \mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(f_2)$, por lo que $\beta_1(y_1) = f_2(x_2)$ con $x_2 \in L_2$. Pero

$$f_3 \circ \alpha_2(x_2) = \beta_2 \circ f_2(x_2) = \beta_2(f_2(x_2)) = \beta_2(\beta_1(y_1)) = 0,$$

de modo que, por ser f_3 monomorfismo, se tiene $\alpha_2(x_2) = 0$, por tanto $x_2 \in \mathrm{Ker}(\alpha_2) = \mathrm{Im}(\alpha_1)$ y $x_2 = \alpha_1(x_1)$ con $x_1 \in L_1$. Luego

$$\beta_1(y_1) = f_2(x_2) = f_2(\alpha_1(x_1)) = f_2 \circ \alpha_1(x_1) = \beta_1 \circ f_1(x_1) = \beta_1(f_1(x_1))$$

y por ser β_1 monomorfismo, $y_1 = f_1(x_1)$. Esto prueba que $\operatorname{Ker}(g_1) \subseteq \operatorname{Im}(f_1)$.

Seguidamente definimos Φ. Sea $z_1 \in N_1$. Entonces, ya que g_2 es sobreyectiva, hay un $y_2 \in M_2$ tal que $\gamma_1(z_1) = g_2(y_2)$. Además,

$$g_3(\beta_2(y_2)) = \gamma_2(g_2(y_2)) = \gamma_2(\gamma_1(z_1)) = 0,$$

de modo que $\beta_2(y_2) \in \operatorname{Ker}(g_3) = \operatorname{Im}(f_3)$, por lo cual $\beta_2(y_2) = f_3(x_3)$ con $x_3 \in L_3$. Defínase $\Phi(z_1) = \alpha_3(x_3)$. Para demostrar que Φ está bien definida, es preciso demostrar que Φ es independiente de la elección de y_2. Sea $y_2' \in M_2$ otro elemento tal que $g_2(y_2') = \gamma_1(z_1)$. Entonces $y_2' - y_2 \in \operatorname{Ker}(g_2) = \operatorname{Im}(f_2)$, de manera que existe un $x_2 \in L_2$ tal que $y_2' = y_2 + f_2(x_2)$. Luego

$$\beta_2(y_2') = \beta_2(y_2) + \beta_2(f_2(x_2)) = f_3(x_3) + f_3(\alpha_2(x_2)) = f_3(\underbrace{x_3 + \alpha_2(x_2)}_{x_3' :=}).$$

Pero entonces $\alpha_3(x_3') = \alpha_3(x_3) + \alpha_3(\alpha_2(x_2)) = \alpha_3(x_3)$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & N_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \arrow[dddll, red, bend left, "\Phi"] & \\
 & L_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & M_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & N_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & M_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "\beta_3"'] & N_3 \arrow[d, "\gamma_3"'] & \\
 & L_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d] & M_4 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d] & N_4 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

A seguir se demuestra que Φ es un $R-$homomorfismo. En efecto, sean z_{11}, z_{12} elementos de N_1, así como $r, s \in R$. Sean también $y_{21}, y_{22} \in M_2$ y $x_{31}, x_{32} \in L_3$ tales que $\gamma_1(z_{1i}) = g_2(y_{2i})$ y $\beta_2(y_{2i}) = f_3(x_{3i})$ para $i = 1, 2$. Entonces $\Phi(z_{1i}) = \alpha_3(x_{3i})$ para $i = 1, 2$. Así que

$$\gamma_1(rz_{11} + sz_{12}) = r\gamma_1(z_{11}) + s\gamma_1(z_{12}) = rg_2(y_{21}) + sg_2(y_{22}) = g_2(ry_{21} + sy_{22})$$

como también

$$\beta_2(ry_{21} + sy_{22}) = r\beta_2(y_{21}) + s\beta_2(y_{22}) = rf_3(x_{31}) + sf_3(x_{32}) = f_3(rx_{31} + sx_{32}).$$

Por lo tanto,

$$\Phi_1(rz_{11}+sz_{12}) = \alpha_3(rx_{31}+sx_{32}) = r\alpha_3(x_{31}) + s\alpha_3(x_{32}) = r\Phi(z_{11}) + s\Phi(z_{12}).$$

A continuación probamos la exactitud en N_1. Si $z_1 = g_1(y_1)$ con $y_1 \in M_1$, elegimos $y_2 := \beta_1(y_1)$ como el elemento $y_2 \in M_2$, tal que $g_2(y_2) = \gamma_1(z_1)$. Entonces $\beta_2(y_2) = 0 = f_3(0)$, de modo que $\Phi(z_1) = 0$. Por lo tanto, $\Phi \circ g_1 = 0$, de manera que $\mathrm{Im}(g_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\Phi)$. Recíprocamente, sea $\Phi(z_1) = 0$. Entonces $\gamma_1(z_1) = g_2(y_2)$, $\beta_2(y_2) = f_3(x_3)$ y $\alpha_3(x_3) = 0$. Luego $x_3 \in \mathrm{Ker}(\alpha_3) = \mathrm{Im}(\alpha_2)$, por lo que podemos escribir $x_3 = \alpha_2(x_2)$, donde $x_2 \in L_2$. Al sustituir esto en la ecuación $\beta_2(y_2) = f_3(x_3)$ se obtiene $\beta_2(y_2) = f_3(\alpha_2(x_2)) = \beta_2(f_2(x_2))$. Pongamos $y_2' := y_2 - f_2(x_2)$, entonces

$$g_2(y_2') = g_2(y_2) - g_2(f_2(x_2)) = g_2(y_2) = \gamma_1(z_1)$$

así como

$$\beta_2(y_2') = \beta_2(y_2 - f_2(x_2)) = 0.$$

Entonces $y_2' \in \mathrm{Ker}(\beta_2) = \mathrm{Im}(\beta_1)$, de manera que $y_2' = \beta_1(y_1)$ con $y_1 \in M_1$. Reemplazando esta igualdad en la ecuación $g_2(y_2') = \gamma_1(z_1)$ se obtiene $\gamma_1(g_1(y_1)) = g_2(\beta_1(y_1)) = \gamma_1(z_1)$. Como γ_1 es un monomorfismo resulta que $z_1 = g_1(y_1)$ con $y_1 \in M_1$. Por lo tanto, $z_1 \in \mathrm{Im}(g_1)$. Hemos demostrado que $\mathrm{Ker}(\Phi) \subseteq \mathrm{Im}(g_1)$.

La prueba de la exactitud en L_4 es similar a la anterior y será omitida.

Seguidamente probamos la exactitud en M_4. Ya que $0 = \gamma_3 \circ g_3 \circ f_3 = g_4 \circ f_4 \circ \alpha_3$ y α_3 es sobreyectiva, resulta que $g_4 \circ f_4 = 0$, y por lo tanto $\mathrm{Im}(f_4) \subseteq \mathrm{Ker}(g_4)$. Si ahora $g_4(y_4) = 0$ con $y_4 \in M_4$, entonces, como β_3 es sobreyectiva, hay un $y_3 \in M_3$ tal que $y_4 = \beta_3(y_3)$. En vista de que

$$\gamma_3(g_3(y_3)) = \gamma_3 \circ g_3(y_3) = g_4 \circ \beta_3(y_3) = g_4(\beta_3(y_3)) = g_4(y_4) = 0,$$

tenemos $g_3(y_3) \in \mathrm{Ker}(\gamma_3) = \mathrm{Im}(\gamma_2)$, por lo que $g_3(y_3) = \gamma_2(z_2)$ con $z_2 \in N_2$. Por otra parte,

$$g_4(\beta_3(y_3)) = g_4 \circ \beta_3(y_3) = \gamma_3 \circ g_3(y_3) = \gamma_3(g_3(y_3)) = \gamma_3(\gamma_2(z_2)) = 0,$$

es así que $\beta_3(y_3) \in \mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(f_4)$, por esto $y_4 = \beta_3(y_3) = f_4(x_4)$ donde $x_4 \in L_4$. Por lo tanto, $y_4 \in \mathrm{Im}(f_4)$ y $Ker(g_4) \subseteq Im(f_4)$. $\square$

Lema 1.26. Si

$$\mathbf{M}_\bullet : \cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} M_{i-2} \longrightarrow \cdots$$

es un complejo de $R-$módulos y de $R-$homomorfismos, entonces la aplicación $\alpha_i : M_i \to M_{i-1}$ induce un homomorfismo $\overline{\alpha}_i : \mathrm{Coker}(\alpha_{i+1}) \to \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})$ de $R-$módulos. Además, $H_i(\mathbf{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\overline{\alpha}_i)$ y $H_{i-1}(\mathbf{M}_\bullet) = \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}_i)$.

Demostración. Como $\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, podemos definir un homomorfismo sobreyectivo $\psi : M_i/\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \to M_i/\mathrm{Ker}(\alpha_i)$ mediante la regla $\psi(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) = x + \mathrm{Ker}(\alpha_i)$. Por otra parte, por el primer teorema del isomorfismo para módulos tenemos $M_i/\mathrm{Ker}(\alpha_i) \cong \mathrm{Im}(\alpha_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha_{\mathrm{i}-1})$, luego hay un monomorfismo $\beta := i \circ \phi : M_i/\mathrm{Ker}(\alpha_i) \to \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})$, donde $\phi : M_i/\mathrm{Ker}(\alpha_i) \to \mathrm{Im}(\alpha_i)$ es el isomorfismo e $i : \mathrm{Im}(\alpha_i) \to \mathrm{Ker}(\alpha_{\mathrm{i}-1})$ es el mapeo inclusión. Sea $\overline{\alpha}_i := \beta \circ \psi$. Notemos que $\overline{\alpha}_i(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) = \alpha_i(x)$ para cada $x \in M_i$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\overline{\alpha}_i) = \mathrm{Ker}(\psi) &= \{x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) / \psi(x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1})) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)\} \\
&= \{x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) / x + \mathrm{Ker}(\alpha_i) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)\} \\
&= \{x + \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) / x \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)\} \\
&= \mathrm{Ker}(\alpha_i)/\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) = H_i(\mathbf{M}_\bullet).
\end{aligned}$$

Asimismo, como

$$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}_i) = \mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha_i),$$

tenemos

$$\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}_i) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})}{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}_i)} = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_{i-1})}{\mathrm{Im}(\alpha_i)} = H_{i-1}(\mathbf{M}_\bullet).$$

□

Antes de establecer la existencia de la sucesión exacta larga en homología notemos que si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{f}_2"'] & L_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_2"'] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "\beta"] & M_1 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\beta) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos es conmutativo, entonces existen mapeos inducidos

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_2 : \mathrm{Ker}(\alpha) &\longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \\
x &\longmapsto \widehat{f}_2(x) := f_2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}_1 : \mathrm{Coker}(\alpha) &\longrightarrow \mathrm{Coker}(\beta) \\
y + \mathrm{Im}(\alpha) &\longmapsto \overline{f}_1(y + \mathrm{Im}(\alpha)) := f_1(y) + \mathrm{Im}(\beta)
\end{aligned}$$

Notemos que si $x \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, entonces

$$\beta(f_2(x)) = (\beta \circ f_2)(x) = (f_1 \circ \alpha)(x) = f_1(\alpha(x)) = f_1(0) = 0,$$

es por esto que $f_2(x) \in \mathrm{Ker}(\beta)$. De esta manera $\widehat{f_2}$ mapea $\mathrm{Ker}(\alpha)$ en $\mathrm{Ker}(\beta)$. A continuación, veamos la buena definición de $\overline{f}_1$. En efecto, si $y + \mathrm{Im}(\alpha) = y' + \mathrm{Im}(\alpha)$ entonces $y - y' \in \mathrm{Im}(\alpha)$, luego existe $x \in L_2$ tal que $\alpha(x) = y - y'$. Entonces

$$f_1(y) - f_1(y') = f_1(y - y') = f_1(\alpha(x)) = \beta(f_2(x)) \in \mathrm{Im}(\beta)$$

así que $f_1(y) + \mathrm{Im}(\beta) = f_1(y') + \mathrm{Im}(\beta)$. Por último, notemos que $\widehat{f_2}$ y $\overline{f}_1$ son homomorfismos pues f_2 y f_1 lo son.

Teorema 1.27. Se considera la sucesión exacta corta de complejos

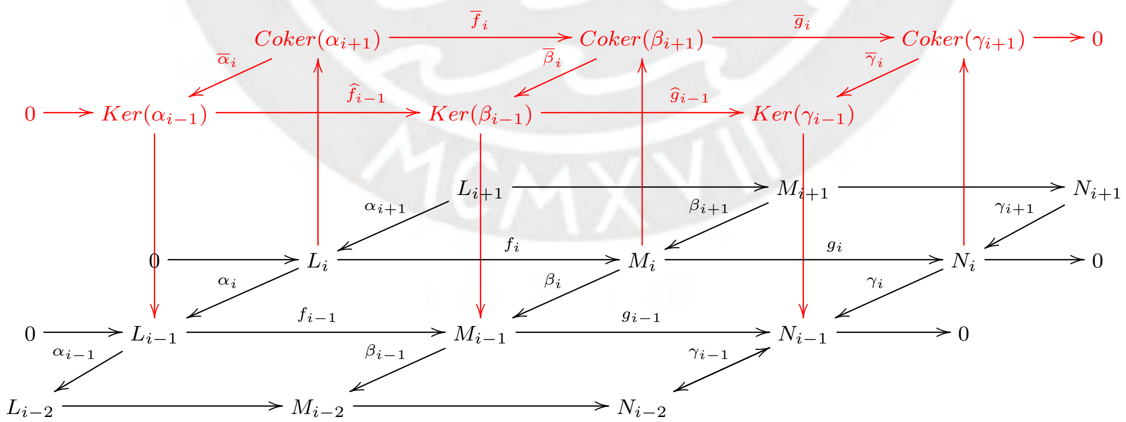
$$0 \to \mathbf{L}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{N}_\bullet \to 0.$$

Entonces, existe una sucesión exacta larga de $R-$módulos de homología

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(\mathbf{N}_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{i+1}} H_i(\mathbf{L}_\bullet) \xrightarrow{H_i(f_\bullet)} H_i(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{H_i(g_\bullet)} H_i(\mathbf{N}_\bullet) \xrightarrow{\Phi_i} H_{i-1}(\mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

La aplicación Φ_i es un $R-$homomorfismo de conexión de $R-$módulos de homología, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama en el que los mapeos con una barra encima son aquellos inducidos por los mapeos sin la barra.



La cara superior del paralelepípedo del diagrama anterior conmuta y por el lema de la Serpiente, sus filas son exactas. Dado que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\overline{\alpha}_i) &= H_i(\mathbf{L}_\bullet) & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}_i) &= H_{i-1}(\mathbf{L}_\bullet) \\ \mathrm{Ker}(\overline{\beta}_i) &= H_i(\mathbf{M}_\bullet) & \mathrm{Coker}(\overline{\beta}_i) &= H_{i-1}(\mathbf{M}_\bullet) \\ \mathrm{Ker}(\overline{\gamma}_i) &= H_i(\mathbf{N}_\bullet) & \mathrm{Coker}(\overline{\gamma}_i) &= H_{i-1}(\mathbf{N}_\bullet) \end{aligned}$$

por el lema 1.26, el lema de la Serpiente produce la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
 & H_i(\mathbf{L}_\bullet) \arrow[r, "H_i(f_\bullet)"] \arrow[d] & H_i(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_i(g_\bullet)"] \arrow[d] & H_i(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\Phi_i"] & \\
 & \mathrm{Coker}(\alpha_{i+1}) \arrow[r, "\overline{f}_i"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_i"] & \mathrm{Coker}(\beta_{i+1}) \arrow[r, "\overline{g}_i"] \arrow[d, "\overline{\beta}_i"] & \mathrm{Coker}(\gamma_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\gamma}_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\alpha_{i-1}) \arrow[r, "\widehat{f}_{i-1}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\beta_{i-1}) \arrow[r, "\widehat{g}_{i-1}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\gamma_{i-1}) \arrow[d] & \\
 & H_{i-1}(\mathbf{L}_\bullet) \arrow[r, "H_{i-1}(f_\bullet)"] & H_{i-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_{i-1}(g_\bullet)"] & H_{i-1}(\mathbf{N}_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 1.28. La sucesión exacta larga de homología es natural, es decir, si tenemos el siguiente diagrama conmutativo de complejos con filas exactas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{L}_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "u_\bullet"] & \mathbf{M}_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"] \arrow[d, "v_\bullet"] & \mathbf{N}_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "w_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{L}'_\bullet \arrow[r, "f'_\bullet"] & \mathbf{M}'_\bullet \arrow[r, "g'_\bullet"] & \mathbf{N}'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces el siguiente diagrama de sucesiones exactas largas conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{i+1}(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[r, "\Phi_{i+1}"] \arrow[d, "H_{i+1}(w_\bullet)"] & H_i(\mathbf{L}_\bullet) \arrow[r, "H_i(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_i(u_\bullet)"] & H_i(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_i(g_\bullet)"] \arrow[d, "H_i(v_\bullet)"] & H_i(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[r, "\Phi_i"] \arrow[d, "H_i(w_\bullet)"] & H_{i-1}(\mathbf{L}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{i-1}(u_\bullet)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{i+1}(\mathbf{N}'_\bullet) \arrow[r, "\Phi'_{i+1}"] & H_i(\mathbf{L}'_\bullet) \arrow[r, "H_i(f'_\bullet)"] & H_i(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_i(g'_\bullet)"] & H_i(\mathbf{N}'_\bullet) \arrow[r, "\Phi'_i"] & H_{i-1}(\mathbf{L}'_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $z \in \mathrm{Ker}(\gamma_i)$, entonces $\Phi_i(z + \mathrm{Im}(\gamma_{i+1})) = x + \mathrm{Im}(\alpha_i)$ para algún $y \in M_i$ con $g_i(y) = z$ y $x \in L_{i-1}$ con $f_{i-1}(x) = \beta_i(y)$. Por lo tanto,

$$H_{i-1}(u_\bullet)(\Phi_i(z + \mathrm{Im}(\gamma_{i+1}))) = u_{i-1}(x) + \mathrm{Im}(\alpha'_i).$$

Por otra parte, tenemos

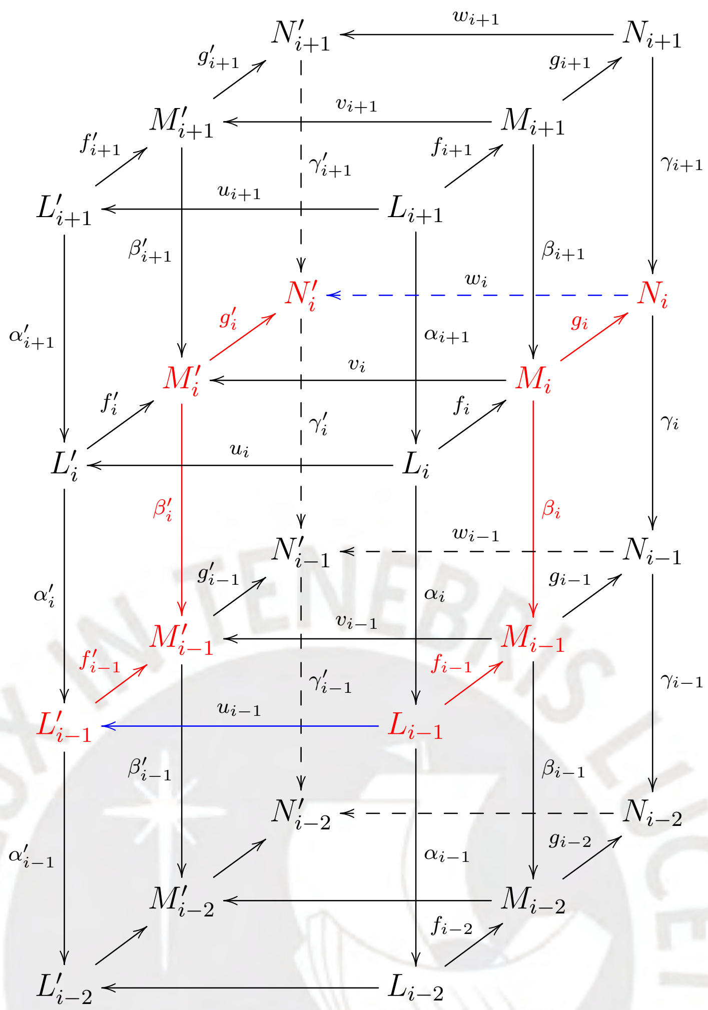
$$f'_{i-1}(u_{i-1}(x)) = v_{i-1}(f_{i-1}(x)) = v_{i-1}(\beta_i(y)) = \beta'_i(v_i(y))$$

y

$$g'_i(v_i(y)) = w_i(g_i(y)) = w_i(z),$$

de donde

$$\Phi'_i(H_i(w_\bullet)(z + \mathrm{Im}(\gamma_{i+1})) = u_{i-1}(x) + \mathrm{Im}(\alpha'_i).$$



□

De manera semejante podemos también obtener una sucesión exacta larga de $R-$módulos de cohomología.

Teorema 1.29. Considere una sucesión exacta corta de co-complejos

$$0 \to \mathbf{L}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{N}^\bullet \to 0$$

entonces, existe una sucesión exacta larga de $R-$módulos de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(\mathbf{N}^\bullet) \xrightarrow{\Phi^{i-1}} H^i(\mathbf{L}^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow{H^i(g^\bullet)} H^i(\mathbf{N}^\bullet) \xrightarrow{\Phi^i} H^{i+1}(\mathbf{L}^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

La aplicación Φ^i es un $R-$homomorfismo de conexión de $R-$módulos de cohomología, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 2

Tipos de módulos

En esta capítulo demostramos que la categoría de los $R-$módulos tiene suficientes inyectivos y proyectivos. Se demuestra también que los funtores $Hom_R(X,-)$, $Hom_R(-,X)$, $X \otimes_R -$ y $- \otimes_R X$ son exactos, es decir, siempre llevan secuencias exactas cortas a secuencias exactas cortas, cuando X es proyectivo, inyectivo y plano, respectivamente. Asimismo, demostramos que cada módulo libre es proyectivo y que cada módulo proyectivo, a su vez, es plano. En la última sección contruimos resoluciones proyectivas e inyectivas de módulos. Las principales referencias de este capítulo son [1], [5] y [2].

2.1 Módulos libres

Definición 2.1. Un $R-$módulo F es libre si es isomorfo a una suma directa de copias del $R-$módulo R, esto es, si hay un conjunto Λ tal que $F \cong R^{(\Lambda)}$.

Proposición 2.2. Cada $R-$módulo M es la imagen homomórfica de un $R-$módulo libre.

Demostración. Sea M un $R-$módulo y supongamos que $\{x_\lambda\}_\Lambda$ es un conjunto de generadores de M. Si $f : R^{(\Lambda)} \longrightarrow M$, donde $R^{(\Lambda)} = \oplus_{\lambda\in\Lambda} R$, se define por $f((a_\lambda)) = \sum a_\lambda x_\lambda$, entonces para todo $(a_\lambda), (b_\lambda) \in R^\Lambda$ y $r \in R$ tenemos

$$\begin{aligned} f((a_\lambda)+(b_\lambda)) &= f((a_\lambda + b_\lambda)) \\ &= \sum (a_\lambda + b_\lambda)x_\lambda = \sum a_\lambda x_\lambda + \sum b_\lambda x_\lambda \\ &= f((a_\lambda)) + f((b_\lambda)) \end{aligned}$$

asimismo,

$$f(r(a_\lambda)) = f((ra_\lambda)) = \sum (ra_\lambda)x_\lambda = r\left(\sum a_\lambda x_\lambda\right) = rf((a_\lambda))$$

Por lo tanto, f es $R-$lineal. Sea $x \in M$, entonces podemos escribir $x = \sum a_\lambda x_\lambda$, donde $a_\lambda = 0$ para casi todo $\lambda \in \Lambda$. Se sigue que $(a_\lambda) \in R^\Lambda$, así $f((a_\lambda)) = \sum x_\lambda a_\lambda = x$ y por tanto f es un epimorfismo. □

2.2 Módulos inyectivos

Si W es un subespacio vectorial de um espacio vectorial V de dimensión finita, entonces W es un sumando directo de V. Esto se sigue del álgebra lineal pues una base de W puede ser extendida a una base de V. Hay R-módulos que poseen esta propiedad de sumando incluso si no tienen una base. Tales módulos, son llamados módulos inyectivos, y estos forman una clase importante de módulos.

Definición 2.3. Un R-módulo M es *inyectivo*, si dada cualquier sucesión exacta a la izquierda $0 \to X \xrightarrow{g} N$ de R-módulos y un R-homomorfismo $f : X \to M$, existe un R-homomorfismo $h : N \to M$, tal que el diagrama de abajo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Una propiedad que posee un R-módulo inyectivo M es que el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ es exacto.

Proposición 2.4. Un R-módulo M es inyectivo si, y solamente si para cada sucesión exacta $0 \to N_1 \xrightarrow{g} N_2$ de R-módulos y R-homomorfismos, la sucesión de $R-$módulos $\mathrm{Hom}_R(N_2, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N_1, M) \to 0$ es exacta.

Demostración. Supongamos que M es inyectivo. Sean $0 \to N_1 \xrightarrow{g} N_2$ una sucesión exacta y $f \in \mathrm{Hom}_R(N_1, M)$. Como M es inyectivo existe una aplicación lineal $h : N_2 \to M$, tal que $f = h \circ g = g^*(h)$. Esto muestra que g^* es sobreyectiva. Por tanto, $\mathrm{Hom}_R(N_2, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N_1, M) \to 0$ es exacta.

Supongamos ahora que se satisface la segunda parte de la proposición. Sean $g : N_1 \to N_2$ un $R-$monomorfismo y $f : N_1 \to M$ un $R-$homomorfismo. Ya que g^* es sobreyectiva, existe un $h \in \mathrm{Hom}_R(N_2, M)$ tal que $h \circ g = g^*(h) = f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, M es inyectivo. □

Corolario 2.5. Un R-módulo M es inyectivo si, y solamente si el funtor contravariante $\operatorname{Hom}_R(-, M)$ es exacto.

Teorema 2.6. *(Criterio de Baer)* Sean R un anillo y E un R-módulo. Entonces E es inyectivo si, y solamente si, para cada ideal I de R, cada mapeo $R-$lineal $j : I \to E$ puede extenderse a un mapeo $R-$lineal $k : R \to E$

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\iota"] & R \arrow[ul, dashed, "k"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que E es un $R-$módulo inyectivo. Sea $j : I \to E$ un $R-$homomorfismo, donde I es un ideal de R. Notemos que I y R son $R-$módulos y que el mapeo inclusión $\iota : I \to R$ es un $R-$homomorfismo. Ya que E es inyectivo, existe un $R-$homomorfismo $k : R \to E$ tal que $j = k \circ \iota$. Así, $j = k|_I$.

Recíprocamente, Supongamos que E tiene la propiedad de extensión indicada. Consideremos el siguiente diagrama de homomorfismos de $R-$módulos con la fila inferior exacta

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Necesitamos hallar un homomorfismo de $R-$módulos $h : N \to E$ de tal forma que el diagrama conmute. Para esto usamos el lema de Zorn. Sea $\mathfrak{S}$ el conjunto de todos los homomorfismos de $R-$módulos $h_C : C \to E$ tales que $\operatorname{Im}(f) \subseteq C \subseteq N$ y $h_C f = g$. El conjunto $\mathfrak{S}$ no es vacío ya que $gf^{-1} : \operatorname{Im}(f) \to E$ es un elemento de $\mathfrak{S}$ dado que f es un monomorfismo. Ordenamos parcialmente $\mathfrak{S}$ de la siguiente manera: $(h_C : C \to E) \leq (h_{C'} : C' \to E)$ si y solo si $C \subseteq C'$ y $h_{C'}|_C = h_C$. Afirmamos que $\mathfrak{S}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn. En efecto, sea $\mathfrak{C}$ una cadena no vacía en $\mathfrak{S}$. Definimos $D = \bigcup_{h_C \in \mathfrak{C}} C$. Ya que $\mathfrak{C}$ es una cadena en $\mathfrak{S}$, se deduce que D es un submódulo de N tal que $\operatorname{Im}(f) \subseteq D$. Definimos $l : D \to E$ como sigue. Para cada $x \in D$, existe $h_C \in \mathfrak{C}$ tal que $x \in C$; pongamos $l(x) := h_C(x)$. Como $\mathfrak{C}$ es una cadena, resulta que $l(x)$ es independiente de la elección de $h_C \in \mathfrak{C}$. Puesto que $\mathfrak{C}$ es una cadena y cada $h_C \in \mathfrak{C}$ es un homomorfismo de $R-$módulos, se sigue que l es un homomorfismo de $R-$módulos y que $lf = g$. Es decir $l : D \to E$ está en $\mathfrak{S}$. Por construcción $(h_C : C \to E) \leq (l : D \to E)$ para cada $h_C \in \mathfrak{C}$, de modo que $l : D \to E$ es una cota superior para $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{S}$.

El lema de Zorn implica que $\mathfrak{S}$ tiene un elemento maximal $h : C \to E$. Usaremos la maximalidad para demostrar que $C = N$. Si $C \neq N$ y $n \in N \backslash C$, entonces $I = \{r \in R/rn \in C\}$ es un ideal de R. El mapeo $I \to E$ dado por $r \longmapsto h(rn)$ es un homomorfismo de $R-$módulos bien definido. Por hipótesis hay un homomorfismo de $R-$módulos $k : R \to E$ tal que $k(r) = h(rn)$ para todo $r \in I$. Sea $a := k(1_R)$ y definimos un mapeo $\overline{h} : C + Rn \to E$ por $c + rn \longmapsto h(c) + ra$. Afirmamos que $\overline{h}$ está bien definida. En efecto, si $c_1 + r_1 n = c_2 + r_2 n \in C + Rn$, entonces $c_1 - c_2 = (r_2 - r_1)n \in C \cap Rn$. Por lo tanto, $r_2 - r_1 \in I$ y

$$h(c_1) - h(c_2) = h(c_1 - c_2) = h((r_2 - r_1)n) = k(r_2 - r_1) = (r_2 - r_1)k(1_R) = (r_2 - r_1)a.$$

De esta manera,

$$\overline{h}(c_1 + r_1 n) = h(c_1) + r_1 a = h(c_2) + r_2 a = \overline{h}(c_2 + r_2 n)$$

y $\overline{h}$ está bien definida. Además, $\overline{h} : C + Rn \to E$ es un homomorfismo de $R-$módulos y un elemento del conjunto $\mathfrak{S}$. Esto contradice la maximalidad de h ya que $n \notin C$ y de aquí que $C \subset C + Rn$. Por lo tanto, $C = N$ y E es inyectivo. $\square$

Proposición 2.7. Si M es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ es un $R-$módulo inyectivo.

Demostración. El $\mathbb{Z}-$módulo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ es un $R-$módulo con la multiplicación escalar

$$\begin{aligned} R \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \\ (a, h) &\longmapsto ah\colon R \longrightarrow M \\ & \qquad\qquad x \longmapsto ah(x) := h(ax) \end{aligned}$$

En efecto, para $x, y \in R$ arbitrarios tenemos

$$(ah)(x + y) = h(a(x + y)) = h(ax + ay) = h(ax) + h(ay) = (ah)(x) + (ah)(y)$$

esto muestra que $ah \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$. Es sencillo comprobar que con esta acción $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ es un $R-$módulo. Sea ahora I un ideal de R y $f : I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ un mapeo $R-$lineal, tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & R \end{tikzcd}$$

y queremos hallar un $R-$homomorfismo $F : R \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ que extienda f a R. Si $a \in I$, entonces $f(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ y para cada $r \in R$, $f(a)(r) \in M$. Se sigue que $g : I \longrightarrow M$ dado por $g(a) = f(a)(1)$ es un mapeo $\mathbb{Z}-$lineal. En efecto, para $a, b \in I$ tenemos

$$g(a+b) = f(a+b)(1) = (f(a) + f(b))(1) = f(a)(1) + f(b)(1) = g(a) + g(b).$$

Como M es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo, hay un mapeo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ que extiende g a R.

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i"] & R \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Sea $F : R \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ definido por $F(r) = rh$ para cada $r \in R$, entonces F es $R-$lineal, ya que para $r, s \in R$ arbitrarios tenemos

$$F(r+s) = (r+s)h = rh + sh = F(r) + F(s)$$

así como

$$F(rs) = (rs)h = r(sh) = rF(s);$$

además, F completa el diagrama conmutativamente. En efecto, para $a \in I$ y $r \in R$ arbitrarios tenemos $(F \circ i)(a) = F(a) = ah$, y

$$(ah)(r) = h(ar) = g(ar) = f(ar)(1) = (rf(a))(1) = f(a)(r1) = f(a)(r)$$

por lo que $ah = f(a)$ y por lo tanto $F \circ i = f$. $\square$

2.3 Módulos divisibles

Definición 2.8. Sea R un dominio de integridad. Un R-módulo M es *divisible*, si $rM = M$ para todo elemento no nulo $r \in R$. En otras palabras, si la aplicación producto $r\cdot : M \to M$ es sobreyectiva para cada $r \in R \backslash \{0\}$.

Observemos que, un R-módulo M es divisible si, y solamente si, dado un $r \in R$ no nulo y un $u \in M$, existe un $v \in M$ tal que $rv = u$.

Ejemplo 2.9. 1. Todo módulo sobre un cuerpo k es divisible, pues cualquier $x \neq 0$ en k es una unidad.

2. $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible. Más generalmente, si R es un dominio, su cuerpo de fracciones $\mathrm{Frac}(R)$ es divisible.

3. Si M es divisible y N es un submódulo de M, entonces $\dfrac{M}{N}$ es divisible.

4. Sumas directas y productos directos de módulos divisibles son divisibles.

5. Cualquier módulo inyectivo es divisible.

   De hecho, sean E un R-módulo inyectivo, $u \in E$ y $x \in R$ no nulo. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[u, "\cdot u"] \arrow[r, "\cdot x"] & R \end{tikzcd}$$

   Entonces, existe $g : R \to E$ tal que

$$u = 1 \cdot u = g(1 \cdot x) = xg(1).$$

   Así, basta tomar $v = g(1) \in E$.

6. Si R es un dominio de ideales principales, entonces un R-módulo E es inyectivo si, y solamente si, E es divisible.

   De hecho, si E es inyectivo, entonces E es divisible según el ejemplo anterior. Recíprocamente, supongamos que E es divisible. Tomemos $x \in R$ no nulo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & (x) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\iota"] & R \end{tikzcd}$$

   donde ι es el mapeo inclusión. Como R es un dominio de ideales principales, para mostrar que E es inyectivo, por medio del criterio de Baer, basta mostrar que existe $g : R \to E$ que hace el diagrama conmutativo, lo que sigue directamente del hecho de que E es divisible. En efecto, si $u := f(x)$, entonces hay un $v \in E$, tal que $f(x) = u = xv$, luego basta tomar $g = \cdot v$. Por lo tanto, el resultado sigue.

7. Sean M un R-módulo y N un submódulo de M. Si N y M/N son divisibles, entonces M es divisible.

   En efecto, si $x \in R$ es no nulo y $u \in M$, entonces como M/N es divisible hay un cierto $v+N \in M/N$ tal que $u+N = x(v+N) = xv+N$, esto es, $u-xv \in N$. Por otro lado, ya que N es divisible podemos escribir $u - xv = xw$, para algún $w \in N$. Entonces $u = x(v + w)$, donde $v + w \in M$.

Lema 2.10. Cada $\mathbb{Z}-$módulo está inmerso en un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo.

Demostración. Sea M un $\mathbb{Z}-$módulo. Por la proposición 2.2 hay un epimorfismo $f : \mathbb{Z}^{(\Lambda)} \to M$. Entonces por el primer teorema del isomorfismo para módulos

$$M \cong \frac{\mathbb{Z}^{(\Lambda)}}{\mathrm{Ker}(f)} \hookrightarrow \frac{\mathbb{Q}^{(\Lambda)}}{\mathrm{Ker}(f)} =: E.$$

Por otra parte, por el ítem 2 del ejemplo 2.9, $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Z}-$divisible, luego E es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible, por los ítems 4 y 3 del ejemplo 2.9. Finalmente, E es inyectivo por el ítem 6 del ejemplo 2.9, pues $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales. $\square$

Proposición 2.11. Hay una inmersión $R-$lineal de un $R-$módulo M en un $R-$módulo inyectivo.

Demostración. Puesto que M es un grupo abeliano aditivo, por el lema 2.10, existe un $\mathbb{Z}-$monomorfismo $f : M \to D$, donde D es cierto $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo. Defínase ahora el mapeo g entre los $R-$módulos M y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ mediante la regla

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \\ m &\longmapsto g(m) : R \longrightarrow D \\ &\qquad\qquad\qquad x \longmapsto g(m)(x) := f(xm) \end{aligned}$$

y obsérvese que $g(m) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$. Notemos que para cada $m, m' \in M$, $g(m + m') = g(m) + g(m')$ pues para cada $x \in R$ tenemos

$$\begin{aligned} g(m + m')(x) &= f(x(m + m')) = f(xm + xm') = f(xm) + f(xm') \\ &= g(m)(x) + g(m')(x) = (g(m) + g(m'))(x). \end{aligned}$$

También, observemos que para cada $m \in M$ y $r \in R$, se tiene $g(rm) = rg(m)$, ya que para cada $x \in R$,

$$g(rm)(x) = f(x(rm)) = f((xr)m) = g(m)(xr) = g(m)(rx) = rg(m)(x).$$

Por lo tanto, g es un $R-$homomorfismo. Finalmente, demostramos que g es uno a uno. Sea $m \in \mathrm{Ker}(g)$. Entonces

$$0 = g(m)(1) = f(1m) = f(m)$$

de manera que $m \in \mathrm{Ker}(f)$. Como f es un $\mathbb{Z}-$monomorfismo resulta que $m = 0$. Por consiguiente, g es un $R-$monomorfismo. De aquí, dado que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es inyectivo por la proposición 2.7, M está inmerso en un $R-$módulo inyectivo. $\square$

2.4 Módulos proyectivos

Un R-módulo proyectivo puede considerarse como el dual de un R-módulo inyectivo. Para obtener la definición de un R-módulo proyectivo simplemente podemos invertir las líneas del diagrama dado en la definición de R-módulos inyectivos. Más precisamente, definimos a continuación cuando un R-módulo es proyectivo.

Definición 2.12. Un R-módulo P es *proyectivo*, si se cumple la siguiente condición. Dada cualquier sucesión exacta a la derecha $M \xrightarrow{g} N \to 0$ de R-módulos y un R-homomorfismo $f : P \to N$, existe una aplicación $h : P \to M$, la cual es un R-homomorfismo, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposición 2.13. Un R-módulo P es proyectivo si, y solamente si, para cada sucesión exacta $N_1 \xrightarrow{g} N_2 \longrightarrow 0$ de R-módulos y R-homomorfismos, la sucesión

$$\mathrm{Hom}_R(P, N_1) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, N_2) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Hom}_R(P, N_2)$ y consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ N_1 \arrow[r, "g"] & N_2 \arrow[r] & 0 \text{ (exacta)} \end{tikzcd}$$

entonces como P es proyectivo existe $h \in \mathrm{Hom}_R(P, N_1)$, tal que $f = g \circ h = g_*(h)$. Esto demuestra que g_* es sobreyectiva y, por tanto, la siguiente sucesión es exacta

$$\mathrm{Hom}_R(P, N_1) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, N_2) \longrightarrow 0 \, .$$

Recíprocamente, consideremos el siguiente diagrama de fila exacta de $R-$módulos y de $R-$homomorfismos

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces por hipótesis la sucesión

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(P,M) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Hom}_R(P,N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es exacta y por tanto g_* es sobreyectiva. Así, para $f \in \mathrm{Hom}_R(P,N)$ existe $h \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$, tal que $g \circ h = g_*(h) = f$. Por lo tanto, P es proyectivo. □

Corolario 2.14. Un R-módulo P es proyectivo si, y solamente si, el funtor covariante $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ es exacto.

Proposición 2.15. Sea $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $R-$módulos y sea $P := \oplus_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$. El módulo P es proyectivo si y sólo si P_λ es proyectivo para cada $\lambda \in \Lambda$.

Demostración. Supongamos que cada P_λ, $\lambda \in \Lambda$, es proyectivo. Sean f y g $R-$homomorfismos y consideremos el siguiente diagrama de fila exacta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Queremos hallar un $R-$homomorfismo $h : P \to N$, de forma tal que el diagrama anterior conmute. Definamos $f_\lambda := f \circ \iota_\lambda : P_\lambda \to M$, donde los ι_λ son las inyecciones canónicas. Puesto que P_λ es proyectivo existe $h_\lambda : P_\lambda \to N$, tal que $g \circ h_\lambda = f_\lambda$.

$$\begin{tikzcd} P_\lambda \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[d, "h_\lambda"'] \arrow[dr, "f_\lambda"] & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & \\ N \arrow[r, "g"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma directa existe $h : P \to N$, tal que $h\circ\iota_\lambda = h_\lambda$. Por tanto, se deduce que $(g \circ h) \circ \iota_\lambda = g \circ h_\lambda = f_\lambda$. Como también se cumple que $f\circ\iota_\lambda = f_\lambda$, por la unicidad de la propiedad universal de la suma directa concluimos que $g \circ h = f$.

Supongamos ahora que P es proyectivo. Sean $g : N \to M$ una suryección y $f_\beta : P_\beta \to M$ un $R-$homomorfismo, de manera que tenemos el siguiente diagrama de fila exacta

$$\begin{tikzcd} & P_\beta \arrow[d, "f_\beta"] & \\ N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Elijamos $f_\lambda : P_\lambda \to M$ como $f_\lambda = 0$ para $\lambda \in \Lambda\backslash\{\beta\}$. Por la propiedad universal de la suma directa obtenemos un $R-$homomorfismo $f : P \to M$, tal que $f \circ \iota_\beta = f_\beta$.

Ya que P es proyectivo existe $h : P \to N$, tal que $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & P_\beta \arrow[l, "\iota_\beta"'] \arrow[d, "f_\beta"] & \\
N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $g \circ (h \circ \iota_\beta) = f \circ \iota_\beta = f_\beta$. Por lo tanto, P_β es proyectivo. $\square$

De la proposición anterior se sigue que un sumando directo de un módulo proyectivo es proyectivo.

Lema 2.16. Un anillo R es un R-módulo proyectivo

Demostración. Necesitamos demostrar que el siguiente diagrama de fila exacta

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "h"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

puede completarse conmutativamente por un R-homomorfismo $g : R \to N$. Sea $y := f(1)$ y $x \in N$, tal que $h(x) = y$. Definamos $g : R \to N$ por la regla $g(r) = rx$. Así, g es un homomorfismo y $f = h \circ g$, esto último porque para cada $r \in R$ se tiene

$$h(g(r)) = h(rx) = rh(x) = ry = rf(1) = f(r1) = f(r).$$

$\square$

Proposición 2.17. Cualquier R-módulo libre es proyectivo.

Demostración. Si F es un R-módulo libre, entonces, por definición existe un conjunto de índices Λ tal que $R^{(\Lambda)} \cong F$. Ahora bien, como $R^{(\Lambda)} = \oplus_{\lambda \in \Lambda} R$, por el lema 2.16 y la proposición 2.15, $R^{(\Lambda)}$ es proyectivo, luego F también lo es dado que $R^{(\Lambda)}$ y F son isomorfos. $\square$

Corolario 2.18. Cualquier R-módulo es la imagen homomorfa de un R-módulo proyectivo.

Demostración. Por la proposición 2.2 tenemos que cualquier R-módulo es la imagen homomorfa de un R-módulo libre y un R-módulo libre es, por la proposición 2.17, proyectivo. $\square$

Proposición 2.19. Si $f : N \to M$ es un R-homomorfismo sobreyectivo y M es un R-módulo proyectivo, entonces M es isomorfo a un sumando directo de N.

Demostración. Como la fila en el siguiente diagrama es exacta y M es proyectivo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \\ N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

este puede completarse conmutativamente por un R-homomorfismo g, tal que $f \circ g = id_M$. Por la proposición 1.2, tenemos que $N = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Así, el resultado sigue pues $\mathrm{Im}(g) \cong M$. □

Proposición 2.20. Un R-módulo M es proyectivo si, y solamente si es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo libre.

Demostración. Supongamos que M es un R-módulo proyectivo. Por la proposición 2.2 hay un R-módulo libre F y un homomorfismo sobreyectivo $f : F \to M$. Ahora aplicando la proposición 2.19 obtenemos que M es isomorfo a un sumando directo de F.

Recíprocamente, supongamos que F es un módulo libre y que $M \cong N$, donde N es un sumando directo de F. Por la proposición 2.17, F es proyectivo y como un sumando directo de un módulo proyectivo es proyectivo, según la proposición 2.15, se tiene que N es proyectivo y por tanto también lo es M. □

2.5 Módulos planos

Definición 2.21. Un R-módulo M es *plano*, si la sucesión de R-módulos

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N_1 \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R N_2$$

es exacta, siempre que $0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2$ sea una sucesión exacta de R-módulos, es decir, M es un R-módulo plano si el funtor $M \otimes_R -$ es exacto a la izquierda.

Proposición 2.22. Si dos $R-$módulos son isomorfos y uno de los módulos es plano, entonces el otro módulo es plano también.

Demostración. En primer lugar, demostramos que si $M \cong M'$ y $N \cong N'$ entonces $M \otimes_R N \cong M' \otimes_R N'$. En efecto, si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son $R-$isomorfismos, entonces tenemos que $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ es un $R-$isomorfismo con inverso $f^{-1} \otimes g^{-1} : M' \otimes_R N' \to M \otimes_R N$, ya que

$$(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) = (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) = id_M \otimes id_N = id_{M \otimes_R N}.$$

Similarmente, $(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = id_{M' \otimes_R N'}$.
Supongamos ahora que $g : M \to M'$ es un isomorfismo y que M es plano. Si $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2$ es una sucesión exacta de $R-$módulos, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N_1 \arrow[r, "id_M \otimes f"] \arrow[d, "g \otimes id_{N_1}"'] & M \otimes_R N_2 \arrow[d, "g \otimes id_{N_2}"] \\ M' \otimes_R N_1 \arrow[r, "id_{M'} \otimes f"] & M' \otimes_R N_2 \end{tikzcd}$$

Como $g \otimes id_{N_1}$ y $g \otimes id_{N_2}$ son isomorfismos, según lo demostrado líneas arriba, se deduce que M' es plano. $\square$

Proposición 2.23. Cada anillo conmutativo R es plano como $R-$módulo.

Demostración. En primer lugar, se demuestra que si N es un $R-$módulo, entonces $R \otimes_R N \cong N$. En efecto, si $\rho' : R \times N \to N$ se define por $\rho'(a, x) = ax$, entonces ρ' es una aplicación $R-$bilineal. Así, por la definición del producto tensorial, hay un único mapeo $R-$lineal $f : R \otimes_R N \to N$, tal que $f \circ \rho = \rho'$, donde ρ es la aplicación $R-$bilineal canónica.

$$\begin{tikzcd} R \times N \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\rho"'] & N \\ R \otimes_R N \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De aquí, vemos que $f(a \otimes x) = ax$ para cada generador $a \otimes x$ de $R \otimes_R N$. Ahora definamos $f' : N \to R \otimes_R N$ por $f'(x) = 1 \otimes x$. Entonces f' está bien definida y es aditiva. Además,

$$f'(ax) = 1 \otimes ax = a \otimes x = a(1 \otimes x) = af'(x)$$

así, f' es $R-$lineal. Puesto que $f' \circ f(a \otimes x) = f'(f(a \otimes x)) = f'(ax) = 1 \otimes ax = a \otimes x$ para cada generador $a \otimes x$ de $R \otimes_R N$, vemos que $f' \circ f = id_{R \otimes_R N}$. Similarmente, $f \circ f' = id_N$. Por lo tanto, f es un isomorfismo.

Debido a lo anterior, estamos en condiciones de demostrar la proposición. Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N$ una sucesión exacta de $R-$módulos, entonces el diagrama que sigue es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[d, "h'"] \\ R \otimes_R M \arrow[r, "id_R \otimes f"] & R \otimes_R N \end{tikzcd}$$

y en este caso g' y h' son isomorfismos y están definidos como en la discusión anterior. Por lo tanto, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow R \otimes_R M \xrightarrow{id_R \otimes f} R \otimes_R N$$

es exacta y R es un $R-$módulo plano. $\square$

Definición 2.24. Sea M un R-módulo, el R-módulo $M^+ = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, donde $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es el grupo de los números racionales módulo 1, se llama *el módulo traza* de M. La R-estructura de M^+ es dada por

$$\begin{aligned} R \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ (a, f) &\longmapsto af \colon M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ &\qquad\qquad x \longmapsto (af)(x) \coloneqq f(ax) \end{aligned}$$

Proposición 2.25. Sean M y N $R-$módulos, entonces existe un isomorfismo

$$\eta_{N,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_R(N, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

Además, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[d, "f"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\eta_{N_2,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "(id_M \otimes f)^*"] & \operatorname{Hom}_R(N_2, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[d, "f^*"] \\ N_2 & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\eta_{N_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] & \operatorname{Hom}_R(N_1, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \end{tikzcd}$$

donde $f : N_1 \to N_2$ es un $R-$homomorfismo.

Demostración. Defínase $\eta = \eta_{N,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ por

$$\begin{aligned} \eta : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ f &\longmapsto \eta(f) : N \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\qquad\qquad x \longmapsto \eta(f)(x) = f_x : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad m \longmapsto f_x(m) = f(m \otimes x) \end{aligned}$$

Demostramos que $f_x \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. En efecto, para $m, m' \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(m + m') = f((m + m') \otimes x) &= f(m \otimes x + m' \otimes x) \\ &= f(m \otimes x) + f(m' \otimes x) = f_x(m) + f_x(m') \end{aligned}$$

A continuación, se demuestra que $\eta(f) \in \operatorname{Hom}_R(N, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$. En primer lugar observemos que para $x, x' \in N$, $a \in R$ y $m \in M$ se cumple

$$f_{x+x'}(m) = f(m \otimes (x + x')) = f(m \otimes x + m \otimes x')$$

$$= f(m \otimes x) + f(m \otimes x') = f_x(m) + f_{x'}(m),$$

asimismo,

$$(af_x)(m) = f_x(am) = f(am \otimes x) = f(m \otimes ax) = f_{ax}(m).$$

Esto demuestra que $f_{x+x'} = f_x + f_{x'}$ y $f_{ax} = af_x$.
En consecuencia,

$$\eta(f)(x + x') = f_{x+x'} = f_x + f_{x'} = \eta(f)(x) + \eta(f)(x')$$

y $\eta(f)(ax) = f_{ax} = af_x = a\eta(f)(x)$. Por lo tanto, $\eta(f)$ es $R-$lineal.

Ahora veamos que η es $R-$lineal. En efecto, sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $a \in R$ y $x \in N$; entonces, para $m \in M$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}(f_x + g_x)(m) = f_x(m) + g_x(m) &= f(m \otimes x) + g(m \otimes x) \\ &= (f + g)(m \otimes x) = (f + g)_x(m)\end{aligned}$$

también

$$(af)_x(m) = (af)(m \otimes x) = f(a(m \otimes x)) = f(am \otimes x) = f_x(am) = (af_x)(m)$$

por consiguiente, para cada $x \in N$

$$\eta(f + g)(x) = (f + g)_x = f_x + g_x = \eta(f)(x) + \eta(g)(x)$$

y

$$\eta(af)(x) = (af)_x = af_x = a\eta(f)(x);$$

así, $\eta(f + g) = \eta(f) + \eta(g)$ y $\eta(af) = a\eta(f)$.

Para demostrar que η es un isomorfismo basta mostrar que η tiene un inverso. En efecto, sea $g \in \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M.\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ y definamos $\overline{g} : M \times N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por la fórmula $\overline{g}(m, x) = g(x)(m)$. Entonces $\overline{g}$ es $R-$bilineal. En efecto, para $m, m' \in M$ y $a \in R$ tenemos que

$$\overline{g}(m + m', x) = g(x)(m + m') = g(x)(m) + g(x)(m') = \overline{g}(m, x) + \overline{g}(m', x),$$

también para $x, x' \in N$ se tiene

$$\begin{aligned}\overline{g}(m, x + x') = g(x + x')(m) &= (g(x) + g(x'))(m) \\ &= g(x)(m) + g(x')(m) = \overline{g}(m, x) + \overline{g}(m, x'),\end{aligned}$$

asimismo

$$\overline{g}(am, x) = g(x)(am) = ag(x)(m) = a\overline{g}(m, x)$$

y

$$\overline{g}(m, ax) = g(ax)(m) = ag(x)(m) = a\overline{g}(m, x)$$

Por la definición del producto tensorial, hay un único homomorfismo de grupos $h : M \otimes_R N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que completa el siguiente diagrama conmutativamente

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ M \otimes_R N \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

de donde $h(m \otimes x) = g(x)(m)$ para cada $(m, x) \in M \times N$. Definimos

$$\eta^{-1} : \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

por $\eta^{-1}(g) = h$. Así, $\eta^{-1}(g)(m \otimes x) = h(m \otimes x) = g(x)(m)$, para cada generador $m \otimes x$ de $M \otimes_R N$. La aplicación η^{-1} es la inversa de η, ya que

$$(\eta^{-1} \circ \eta)(f)(m \otimes x) = \eta^{-1}(\eta(f))(m \otimes x) = \eta(f)(x)(m) = f_x(m) = f(m \otimes x),$$

por lo que $\eta^{-1} \circ \eta = id_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$. En forma similar se comprueba que $\eta \circ \eta^{-1} = id_{\mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))}$.

Finalmente verifiquemos que el diagrama conmuta. Tenemos por una parte para $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ y $x \in N_1$ que

$$(f^* \circ \eta_2)(g)(x) = f^*(\eta_2(g))(x) = (\eta_2(g) \circ f)(x) = \eta_2(g)(f(x)) = g_{f(x)}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (\eta_1 \circ (id_M \otimes_R f)^*)(g)(x) &= \eta_1((id_M \otimes_R f)^*(g))(x) \\ &= \eta_1(g \circ id_M \otimes_R f)(x) = (g \circ id_M \otimes_R f)_x = g_{f(x)} \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale porque para $m \in M$ arbitrario tenemos lo siguiente

$$(g \circ id_M \otimes_R f)_x(m) = (g \circ id_M \otimes_R f)(m \otimes x) = g(m \otimes f(x)) = g_{f(x)}(m).$$

$\square$

Lema 2.26. Si $G \neq 0$ es un grupo abeliano entonces para cada $0 \neq x \in G$ hay un $\mathbb{Z}-$homomorfismo $g : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $g(x) \neq 0$.

Demostración. Sea $\mathbb{Z}x \subseteq G$ el $\mathbb{Z}-$submódulo de G generado por x, y $Ann_{\mathbb{Z}}(x) = \{n \in \mathbb{Z}/nx = 0\}$. Es claro que $Ann_{\mathbb{Z}}(x)$ es un ideal de Z. En realidad, $Ann_{\mathbb{Z}}(x)$ es el núcleo del epimorfismo $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}x$ dado por $\tau(n) = nx$. Sea $\overline{\tau} : \mathbb{Z}/Ann_{\mathbb{Z}}(x) \to \mathbb{Z}x$ el isomorfismo inducido, definido por $\overline{\tau}(n + Ann_{\mathbb{Z}}(x)) = nx$. Ya que $x \neq 0$, tenemos $Ann_{\mathbb{Z}}(x) \subset \mathbb{Z}$, esto es, $Ann_{\mathbb{Z}}(x)$ es un ideal propio de $\mathbb{Z}$. Entonces hay un número primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que $Ann_{\mathbb{Z}}(x) \subseteq p\mathbb{Z}$. Consideremos el monomorfismo de $\mathbb{Z}-$módulos $\alpha : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dado por $\alpha(n+p\mathbb{Z}) = n/p+\mathbb{Z}$ y sea $\phi : \mathbb{Z}x \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la composición de los siguientes mapeos

$$\mathbb{Z}x \xrightarrow{\overline{\tau}^{-1}} \mathbb{Z}/Ann_{\mathbb{Z}}(x) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

donde $\pi : \mathbb{Z}/Ann_{\mathbb{Z}}(x) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es la suryección dada por $\pi(z+Ann_{\mathbb{Z}}(x)) = z+p\mathbb{Z}$. Por definición tenemos

$$\phi(x) = \alpha \circ \pi \circ \overline{\tau}^{-1}(x) = \alpha \circ \pi(1 + Ann_{\mathbb{Z}}(x)) = \alpha(1 + p\mathbb{Z}) = 1/p + \mathbb{Z} \neq 0.$$

Ya que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, ϕ puede extenderse a un $\mathbb{Z}-$homomorfismo $g : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}x \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

esto es, $g \circ \iota = \phi$; en particular, $g(x) = g \circ \iota(x) = \phi(x) \neq 0$. $\square$

Proposición 2.27. una sucesión de $R-$módulos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta si y solo si la sucesión de módulos traza $C^+ \xrightarrow{g^*} B^+ \xrightarrow{f^*} A^+$ es exacta.

Demostración. Si la sucesión original es exacta, entonces también lo es la sucesión de los módulos traza, pues el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es exacto, porque $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo.

Recíprocamente, demostramos que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. En efecto, si $x \in A$ y $f(x) \notin \mathrm{Ker}(g)$, entonces $g(f(x)) \neq 0$. Por el lema 2.26 anterior, hay un homomorfismo $h : C \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $h(g(f(x))) \neq 0$. Así, $h \in C^+$ y $h \circ g \circ f \neq 0$, lo que contradice la hipotesis de que $f^* \circ g^* = 0$. A continuación se demuestra la otra inclusión $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Si $y \in \mathrm{Ker}(g)$ y $y \notin \mathrm{Im}(f)$, entonces $y + \mathrm{Im}(f)$ es un elemento distinto de cero de $B/\mathrm{Im}(f)$. Por lo tanto, hay un homomorfismo $l : B/\mathrm{Im}(f) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $l(y+\mathrm{Im}(f)) \neq 0$, según el lema 2.26. Si $\nu : B \to B/\mathrm{Im}(f)$ es la suryección natural, definimos $l' = l \circ \nu \in B^+$; notemos que $l'(y) \neq 0$, pues $l'(y) = l \circ \nu(y) = l(y + \mathrm{Im}(f))$. Por otra parte, $l'(f(x)) = l(f(x) + \mathrm{Im}(f)) = 0$

para cada $x \in A$, de manera que $0 = l' \circ f = f^*(l')$ y $l' \in \mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(g^*)$. Así, $l' = g^*(h)$ para algún $h \in C^+$, esto es, $l' = h \circ g$. Por consiguiente, $l'(y) = h \circ g(y) = h(g(y)) = 0$, pues $y \in \mathrm{Ker}(g)$, lo que es una contradicción, pues $l'(y) \neq 0$. □

Proposición 2.28. Un R-módulo M es plano si, y solamente si, M^+ es un R-módulo inyectivo.

Demostración. Supongamos que M es un R-módulo plano. Para demostrar que M^+ es R-módulo inyectivo, según la proposición 2.4, basta demostrar que el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, M^+)$ es exacto a la derecha. Con este fin tomemos un homomorfismo inyectivo de $R-$módulos $f : N_1 \to N_2$. Vamos a demostrar que la sucesión

$$\mathrm{Hom}_R(N_2, M^+) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(N_1, M^+) \longrightarrow 0$$

es exacta. En efecto, como M es un R-módulo plano, el funtor covariante $M \otimes_R -$ es exacto a la izquierda, y por tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N_1 \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R N_2$$

es exacta. Asimismo, ya que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es exacto a la derecha, por lo que $(id_M \otimes f)^*$ es un homomorfismo sobreyectivo. Por otra parte, por la proposición 2.25 el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[d, "(id_M \otimes f)^*"'] & \mathrm{Hom}_R(N_2, M^+) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\eta_1"] & \mathrm{Hom}_R(N_1, M^+)
\end{tikzcd}$$

donde η_1 y η_2 son isomorfismos. De todo esto resulta que f^* es también sobreyectivo, y M^+ es un R-módulo inyectivo.

Recíprocamente, supongamos que M^+ es un $R-$módulo inyectivo y $f : N_1 \to N_2$ es un monomorfismo entre los $R-$módulos N_1 y N_2. Por la proposición 2.25, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "(id_M \otimes f)^*"] \arrow[d, "\eta_2"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_1"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_R(N_2, M^+) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_R(N_1, M^+) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en este diagrama los mapeos verticales η_1 y η_2 son isomorfismos. Como M^+ es inyectivo, por la proposición 2.4 la fila inferior es exacta. Entonces la fila superior también lo es, y por la proposición 2.27 la sucesión $0 \longrightarrow M \otimes_R N_1 \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R N_2$ es exacta. Por lo tanto, M es plano. $\square$

Corolario 2.29. Si $(M_\lambda)_\Lambda$ es una familia de $R-$módulos, entonces $\oplus_\Lambda M_\lambda$ es plano si y sólo si cada M_λ es plano.

Demostración. La suma directa $\oplus_\Lambda M_\lambda$ es un $R-$módulo plano si y solo si $(\oplus_\Lambda M_\lambda)^+$ es inyectivo, según la proposición 2.28. Ahora,

$$(\oplus_\Lambda M_\lambda)^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\oplus_\Lambda M_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \prod_\Lambda \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \prod_\Lambda M_\lambda^+.$$

Demostremos esta afirmación. Sea

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\oplus_\Lambda M_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \prod_\Lambda \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

definida por $\varphi(f) = (f \circ \iota_\lambda)$, donde $\iota_\lambda : M_\lambda \to \oplus_\Lambda M_\lambda$ es la inyección canónica. Entonces φ es un homomorfismo de $R-$módulos. En efecto, para f, g en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\oplus_\Lambda M_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ y $r \in R$ tenemos que

$$\varphi(f+g) = ((f+g) \circ i_\lambda) = (f \circ i_\lambda + g \circ i_\lambda) = (f \circ i_\lambda) + (g \circ i_\lambda) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

también

$$\varphi(rf) = ((rf) \circ i_\lambda) = (r(f \circ i_\lambda)) = r(f \circ i_\lambda) = r\varphi(f).$$

Sea ahora $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, entonces $(f \circ i_\lambda) = \varphi(f) = 0$, de donde $f \circ \iota_\lambda = 0$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Asimismno, si $(x_\lambda) \in \oplus_\Lambda M_\lambda$, entonces como $(x_\lambda) = \sum_\Lambda \iota_\lambda(x_\lambda)$ tenemos $f((x_\lambda)) = f\left(\sum_\Lambda \iota_\lambda(x_\lambda)\right) = \sum_\Lambda f(\iota_\lambda(x_\lambda)) = 0$. Así, $f = 0$ y φ es inyectiva.

A continuación, se demuestra que φ es sobreyectiva. Sea $(g_\lambda) \in \prod_\Lambda \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_\lambda, \mathbb{Z}/\mathbb{Z})$, definimos $g : \oplus_\Lambda M_\lambda \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $g((x_\lambda)) = \sum_\Lambda g_\lambda(x_\lambda)$ para cada $(x_\lambda) \in \oplus_\Lambda M_\lambda$. Como para cada (x_λ), (y_λ) en $\oplus_\Lambda M_\lambda$ y $r \in R$ se cumple que

$$g((x_\lambda) + (y_\lambda)) = \sum_\Lambda g_\lambda(x_\lambda + y_\lambda) = \sum_\Lambda g_\lambda(x_\lambda) + \sum_\Lambda g_\lambda(y_\lambda) = g((x_\lambda)) + g((y_\lambda))$$

y

$$g(r(x_\lambda)) = g((rx_\lambda)) = \sum_\Lambda g_\lambda(rx_\lambda) = \sum_\Lambda rg_\lambda(x_\lambda) = r\sum_\Lambda g_\lambda(x_\lambda) = rg((x_\lambda))$$

resulta que $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\oplus_\Lambda M_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, y $\varphi(g) = (g \circ i_\lambda) = (g_\lambda)$.

Debido al isomorfismo anterior basta demostrar que $\prod_\Lambda M_\lambda^+$ es inyectivo. Ahora bien, $\prod_\Lambda M_\lambda^+$ es inyectivo si y solo si cada M_λ^+ es inyectivo y cada M_λ^+ es inyectivo si solo si M_λ es plano. $\square$

Teorema 2.30. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un $R-$módulo M.

$a)$ M es un $R-$módulo plano.

$b)$ La sucesión $0 \to M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ es exacta para cada ideal I del anillo conmutativo R.

$c)$ La sucesión $0 \to M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ es exacta para cada ideal finitamente generado I del anillo R.

Demostración. Las implicaciones $a) \Longrightarrow b)$ y $b) \Longrightarrow c)$ son inmediatas.

$c) \Longrightarrow b)$. Si J es un ideal de R y $\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes a_i) \in M \otimes_R J$, entonces $I = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \subseteq J$. Además, por hipótesis, la composición de los mapeos $M \otimes_R I \to M \otimes_R J \to M \otimes_R R$ es un monomorfismo. Por consiguiente, si $\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes a_i) \in M \otimes_R J$ es cero en $M \otimes_R R$, entonces $\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes a_i) \in M \otimes_R J$ es cero en $M \otimes_R I$ y así debe ser cero en $M \otimes_R J$. Por lo tanto, $M \otimes_R J \to M \otimes_R R$ es un monomorfismo.

$b) \Longrightarrow a)$. Si I es un ideal de R, entonces la sucesión $0 \to M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ es exacta. Ya que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo, esto nos proporciona una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0.$$

Por la proposición 2.25 hay isomorfismos $\eta_{I,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ y $\eta_{R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{I,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) &
\end{tikzcd}$$

de manera que la sucesión $\mathrm{Hom}_R(R, M^+) \to \mathrm{Hom}_R(I, M^+) \to 0$ es exacta. Así pues, si $f : A \to M^+$ es un mapeo $R-$lineal, entonces hay un $g \in \mathrm{Hom}_R(R, M^+)$ que extiende f a R. De esta forma, el criterio de Baer demuestra que M^+ es un $R-$módulo inyectivo, así M es, por la proposición 2.28, un $R-$módulo plano.

□

Proposición 2.31. Cada $R-$módulo libre es plano.

Demostración. Por el definición cada $R-$módulo libre es isomorfo a $R^{(\Lambda)}$ para cierto conjunto Λ. Ya que $R^{(\Lambda)}$ es una suma directa de $R-$módulos planos, $R^{(\Lambda)}$ es plano, debido al corolario 2.29 anterior. $\square$

Corolario 2.32. Cada $R-$módulo proyectivo es plano.

Demostración. La proposición 2.20 afirma que cada módulo proyectivo M es isomorfo a un sumando directo de un $R-$módulo libre F. Por tanto, se sigue de la proposición 2.31 y el corolario 2.29 que el sumando directo es plano y por la proposición 2.22 que sigue a la definición de módulo plano, M es plano. $\square$

2.6 Resoluciones proyectiva e inyectiva

Sabemos que cada módulo es la imagen homomórfica de un módulo proyectivo, y que cada módulo está inmerso en un módulo inyectivo. Estas observaciones nos proporcionan las herramientas necesarias para construir resoluciones proyectivas e inyectivas, que desempeñan un papel central en el álgebra homológica y en la teoría de los funtores derivados. Para este fin, haremos una introducción sobre los conceptos de resolución inyectiva y resolución proyectiva de un R-módulo dado.

Definición 2.33. Si M es un R-módulo cualquiera, una sucesión exacta de la forma

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

se denomina una *resolución proyectiva* de M si P_i es un R-módulo proyectivo para cada $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Observemos que si en la definición 2.33 se retira el R-módulo M, obtenemos el siguiente complejo

$$\mathbf{P}_{\bullet,M} : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Nos vamos a referir a este complejo como la *resolución proyectiva reducida* del R-módulo M.

La resolución inyectiva de un $R-$módulo M se define de forma semejante.

Definición 2.34. Sea M un R-módulo cualquiera, la sucesión exacta de la forma

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \ldots$$

se llama una *resolución inyectiva* de M, si I^i es un R-módulo inyectivo para cada $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

De forma análoga a lo expuesto anteriormente, si removemos el R-módulo M de la sucesión $\mathbf{I}^\bullet$, obtenemos el co-complejo

$$\mathbf{I}^{\bullet, M} : \; 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \cdots$$

y este co-complejo se llama una *resolución inyectiva reducida* del R-módulo M.

El siguiente lema es muy importante, pues nos garantiza la existencia de resoluciones inyectivas y proyectivas de cualquier R-módulo M.

Lema 2.35. Todo R-módulo M posee una resolución inyectiva y proyectiva.

Demostración. Si M es un R-módulo, entonces por el corolario 2.18, sabemos que existe un módulo proyectivo P_0 y un epimorfismo $\beta_0 : P_0 \to M$. Por tanto, tenemos una sucesión exacta $0 \to K_0 \xrightarrow{\iota_0} P_0 \xrightarrow{\beta_0} M \to 0$ donde $K_0 = \mathrm{Ker}(\beta_0)$ y ι_0 es el mapeo inclusión. Continuando con este proceso, existirán sucesiones exactas cortas de R-módulos y $R-$homomorfismos de $R-$módulos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & P_0 \arrow[r, "\beta_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & K_0 \arrow[ur, "\iota_0"] & P_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & & \\
0 \arrow[ur] & K_1 \arrow[ur, "\iota_1"] & P_2 \arrow[dr, "\beta_2"] & K_0 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & K_2 \arrow[ur, "\iota_2"] & \vdots & K_1 \arrow[dr] & 0 \\
0 \arrow[ur] & & P_i \arrow[dr, "\beta_i"] & & 0 \\
 & K_i \arrow[ur, "\iota_i"] & \vdots & K_{i-1} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

donde P_i es proyectivo, $K_i = \mathrm{Ker}(\beta_i)$ y ι_i es el correspondiente mapeo inclusión, para $i = 0, 1, 2, \ldots$. Al superponer estas sucesiones exactas cortas de forma tal que los $R-$módulos K_i coincidan, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & P_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & K_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[dr] & & K_1 \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr] & & K_0 \arrow[ur, "\iota_0"] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha_0 := \beta_0$ y $\alpha_i := \iota_{i-1} \circ \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, entonces, como β_{i+1} es epimorfismo y ι_{i-1} es monomorfismo, tenemos que

$$\mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) = \mathrm{Im}(l_i) = \mathrm{Ker}(\beta_i) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, y

$$\mathbf{P}_\bullet : \ \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de M.

Por otra parte, sabemos por la proposición 2.11 que existe un R-módulo inyectivo I^0 y un homomorfismo inyectivo $l^0 : M \to I^0$. De aquí, tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow M \overset{l^0}{\longrightarrow} I^0 \overset{p^0}{\longrightarrow} C^0 \longrightarrow 0$, donde $C^0 = \mathrm{Coker}(l^0)$ y p^0 es la aplicación cociente. Continuando de esta manera obtendremos sucesiones exactas cortas de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "l^0"] & I_0 \arrow[dr, "p^0"] & & \\
 & & I^1 \arrow[dr, "p^1"] & C^0 \arrow[dr] & \\
 & C^0 \arrow[ur, "l^1"] & I^2 \arrow[dr, "p^2"] & C^1 \arrow[dr] & 0 \\
0 \arrow[ur] & C^1 \arrow[ur, "l^2"] & \vdots & C^2 \arrow[dr] & 0 \\
0 \arrow[ur] & & I^i \arrow[dr, "p^i"] & & 0 \\
 & C^{i-1} \arrow[ur, "l^i"] & \vdots & C^i \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

donde I^i es inyectivo, $C^i = \mathrm{Coker}(l^i)$ y p^i es la aplicación cociente, para $i = 0, 1, 2, ...$ Cuando estas sucesiones exactas cortas se empalman se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d^{-1}"] & I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, "p^0"'] & & I^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, "p^1"'] & & I^2 \arrow[rr] \arrow[dr, "p^2"'] & & \cdots \\
 & & & C^0 \arrow[ur, "l^1"'] \arrow[dr] & & C^1 \arrow[ur, "l^2"'] \arrow[dr] & & C^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

donde $d^{-1} := l^0$ y $d^i := l^{i+1} \circ p^i$ para $i = 0, 1, 2, ...$ Asimismo, en este diagrama la fila es exacta, es decir,

$$\mathrm{Ker}(d^i) = \mathrm{Ker}(p^i) = \mathrm{Im}(l^i) = \mathrm{Im}(d^{i-1}).$$

para $i = 0, 1, 2, ...$, debido en parte a que l^{i+1} es un monomorfismo y p^{i-1} un epimorfismo. Todo esto nos da la sucesión exacta

$$\mathbf{I}^\bullet : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \longrightarrow \ldots$$

$\square$

Al respecto, observamos que, si

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de M, entonces la resolución proyectiva reducida de M es

$$\mathbf{P}_{\bullet M} : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \longrightarrow 0$$

y el módulo de homología de grado 0 de $\mathbf{P}_{\bullet M}$ es

$$H_0(\mathbf{P}_{\bullet M}) = \mathrm{Ker}(P_0 \to 0)/\mathrm{Im}(\alpha_1) = P_0/\mathrm{Ker}(\alpha_0) \cong M.$$

Similarmente, si

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \dots$$

es una resolución inyectiva de M, entonces la resolución inyectiva reducida de M es

$$\mathbf{I}^{\bullet M} : 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \dots$$

y el módulo de cohomología de dimensión 0 de $\mathbf{I}^{\bullet M}$ es

$$H^0(\mathbf{I}^{\bullet M}) = \mathrm{Ker}(\alpha_0)/\mathrm{Im}(0 \to I^0) = \mathrm{Im}(\alpha^{-1})/0 \cong \mathrm{Im}(\alpha^{-1}) \cong M.$$

Todo esto significa que incluso calculando homologías o cohomologías, no perdemos ninguna información de M, salvo isomorfismos, cuando retiramos M de las resoluciones.

Ejemplo 2.36. En este ejemplo haremos un procedimiento para calcular una resolución proyectiva del $R-$módulo R/I, donde $R = k[x, y, z]$ e I es el ideal (x, y, z). Ya que R es un módulo proyectivo, podemos empezar con

$$R \to R/I \to 0.$$

Observemos ahora lo siguiente. Como $I = (x, y, z)$, existe un mapeo sobreyectivo $\beta_1 : R^3 \to I$ definido por

$$(a, b, c) \longmapsto ax + by + cz.$$

Por lo tanto, podemos construir la sucesión exacta

$$0 \to K_1 \xrightarrow{\iota_1} R^3 \xrightarrow{\beta_1} I \to 0,$$

donde $K_1 = \mathrm{Ker}(\beta_1)$. Para poder continuar primero debemos calcular $\mathrm{Ker}(\beta_1)$. Ya que el núcleo de $\alpha_1 := \iota_0 \circ \beta_1$, donde ι_0 es mapeo inclusión, es igual al núcleo de β_1 y la representación matricial de α_1 es $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ podemos calcular el núcleo de esta aplicación. Observemos que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = 0,$$

y, en realidad, estos elementos generan K_1, entonces tenemos

$$K_1 = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Al igual que antes, tenemos un mapeo sobreyectivo $\beta_2 : R^3 \to K_1$ definido por $(a, b, c) \longmapsto av_1 + bv_2 + cv_3$. Con esto podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
R^3 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & R^3 \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & R \arrow[r, "\beta_0"] & R/I \arrow[r] & 0 \\
& K_1 \arrow[ur, "\iota_1"'] \arrow[dr] & & I \arrow[ur, "\iota_0"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde ι_1 es la aplicaçión inclusión y $\alpha_2 = \iota_1 \circ \beta_2$. Observemos que la fila del diagrama anterior es exacta pues $\mathrm{Ker}(\alpha_1) = \mathrm{Im}(\alpha_2)$.

Como antes, vamos a calcular el núcleo de β_2. Dado que el diagrama conmuta, tenemos que el núcleo de α_2 es igual al núcleo de β_2, esto es, $K_2 := \mathrm{Ker}(\beta_2) = \mathrm{Ker}(\alpha_2)$ y como la forma matricial de α_2 es

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} y & z & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}$$

podemos calcular el núcleo de esta aplicación, y vemos que

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} = 0.$$

Este elemento genera K_2 por lo que $K_1 = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w_1 \rangle$. Como siempre definamos $\beta_3 : R \to K_2$, $\beta_3(a) = aw_1$. Se obtiene así el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R \arrow[rr, "\alpha_3"] \arrow[dr, "\beta_3"'] & & R^3 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & R^3 \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & R \arrow[r, "\beta_0"] & R/I \arrow[r] & 0 \\
& & K_2 \arrow[ur, "\iota_2"'] \arrow[dr] & & K_1 \arrow[ur, "\iota_1"'] \arrow[dr] & & I \arrow[ur, "\iota_0"'] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde ι_2 es la inclusión y $\alpha_3 = \iota_2 \circ \beta_3$. Como de costumbre, calculemos el núcleo de β_3. Ya que el diagrama de encima conmuta, el núcleo de α_3 es igual al núcleo de β_3 y como la forma matricial de α_3 es

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

se tiene que el núcleo de α_3 es cero. Así, obtenemos la resolución

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & z & 0 \\ -x & 0 & z \\ 0 & -x & -y \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{(x\ y\ z)} R \longrightarrow R/I \to 0.$$

El siguiente ejemplo muestra que pueden existir resoluciones proyectivas infinitas.

Ejemplo 2.37. Sea $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es un $R-$módulo con la acción dada por

$$\begin{aligned} R \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (a + 4\mathbb{Z}, b + 2\mathbb{Z}) &\longmapsto (a + 4\mathbb{Z})(b + 2\mathbb{Z}) = ab + 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sea la sucesión de $R-$módulos,

$$\mathbf{P}_\bullet : \ \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0\,,$$

donde $\alpha_i(a + 4\mathbb{Z}) = 2a + 4\mathbb{Z}$ para cada $i \geq 1$ y $\alpha_0(a + 4\mathbb{Z}) = a + 2\mathbb{Z}$. Podemos ver fácilmente que esta sucesión es una resolución proyectiva infinita de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

A continuación se mostrará que dos resoluciones proyectivas reducidas cualesquiera de un módulo son del mismo tipo de homotopía. Para eso, precisamos de los dos lemas siguientes.

Lema 2.38. (*Teorema de comparación) Sea*

$$\mathbf{P}_\bullet : \ \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M y supongamos que

$$\mathbf{Q}_\bullet : \ \cdots \longrightarrow N_i \xrightarrow{\beta_i} N_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\beta_1} N_0 \xrightarrow{\beta_0} N \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces para cualquier homomorfismo $f : M \to N$ de R-módulos existe una aplicación de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet N}$ tal que $\beta_0 \circ f_0 = f \circ \alpha_0$. En este caso, $f_\bullet$ se llama una aplicación de complejos generada por f.

Demostración. Ya que $\mathbf{Q}_\bullet$ es exacta, la sucesión $N_0 \overset{\beta_0}{\to} N \to 0$ también lo es. Asimismo, debido a la proyectividad de P_0 existe un R-homomorfismo $f_0 : P_0 \to N_0$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
N_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta. Supongamos ahora que los R-homomorfismos $f_0, f_1, \ldots, f_{i-1}$ han sido hallados tal que el diagrama que sigue es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, dashed, "f_i"'] & P_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & P_{i-2} \arrow[r, "\alpha_{i-2}"] \arrow[d, "f_{i-2}"'] & \cdots \arrow[r, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & N_i \arrow[r, "\beta_i"] & N_{i-1} \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & N_{i-2} \arrow[r, "\beta_{i-2}"] & \cdots \arrow[r, "\beta_1"] & N_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A partir de esto hallaremos un $R-$homomorfismo $f_i : P_i \to N_i$ tal que $\beta_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \alpha_i$. En efecto, por el proceso de inducción y de la última celda del diagrama anterior tenemos, $\beta_{i-1} \circ f_{i-1} = f_{i-2} \circ \alpha_{i-1}$, entonces

$$\beta_{i-1} \circ f_{i-1} \circ \alpha_i = f_{i-2} \circ \alpha_{i-1} \circ \alpha_i = 0$$

de donde $\mathrm{Im}(f_{i-1} \circ \alpha_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_{i-1}) = \mathrm{Im}(\beta_i)$. Sea $\gamma_i := f_{i-1} \circ \alpha_i$ y sean los mapeos inducidos $\overline{\gamma_i} : P_i \to \mathrm{Im}(\beta_i)$ y $\overline{\beta}_i : N_i \to \mathrm{Im}(\beta_i)$, luego $\gamma_i = \iota \circ \overline{\gamma}_i$ y $\beta_i = \iota \circ \overline{\beta}_i$, donde $\iota : \mathrm{Im}(\beta_i) \to N_{i-1}$ es el mapeo inclusión. Como P_i es proyectivo, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_i \arrow[dl, dashed, "f_i"'] \arrow[d, "\overline{\gamma}_i"] & \\
N_i \arrow[r, "\overline{\beta}_i"] & \mathrm{Im}(\beta_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

puede completarse conmutativamente por el R-homomorfismo $f_i : P_i \to N_i$. Entonces tenemos lo siguiente

$$\beta_i \circ f_i = \iota \circ \overline{\beta}_i \circ f_i = \iota \circ \overline{\gamma}_i = \gamma_i = f_{i-1} \circ \alpha_i,$$

lo cual completa la construcción inductiva de $f_\bullet$. $\square$

El lema anterior no asegura que tal aplicación de complejos sea única. Sin embargo, tenemos el siguiente lema.

Lema 2.39. Sean $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{Q}_\bullet$ como en el lema anterior. Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos, entonces cualquier par de aplicaciones de complejos $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet N}$ generadas por f son homotópicos.

Demostración. Supongamos que $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \longrightarrow \mathbf{Q}_{\bullet N}$ son aplicaciones de complejos generadas por f, necesitamos exhibir una familia $\varphi = \{\varphi_i : P_i \to N_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos, tal que $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \varphi_i + \varphi_{i-1} \circ \alpha_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Ya que $\mathbf{P}_{\bullet M}$ es positivo, $\varphi_i = 0$ para todo $i < 0$. Así, en el nivel 0 necesitamos hallar $\varphi_0 : P_0 \to N_1$, tal que $f_0 - g_0 = \beta_1 \circ \varphi_0$. Para esto consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \arrow[dl, dashed, "\varphi_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & N_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ya que $\beta_0 \circ (f_0 - g_0) = f \circ (\alpha_0 - \alpha_0) = 0$, tenemos

$$\mathrm{Im}(f_0 - g_0) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_0) = \mathrm{Im}(\beta_1).$$

Entonces, a partir de la proyectividad de P_0 se obtiene un homomorfismo $\varphi_0 : P_0 \to N_1$ tal que $f_0 - g_0 = \beta_1 \circ \varphi_0$.

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[d, "f_0-g_0"] & \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"] & \mathrm{Im}(\beta_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Supongamos ahora que los homomorfismos $\varphi_k : P_k \to N_{k+1}$ han sido hallados tal que $f_k - g_k = \beta_{k+1} \circ \varphi_k + \varphi_{k-1} \circ \alpha_k$, para $k = 0, 1, 2, ..., i-1$, y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] & P_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "\varphi_i"'] & P_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] \arrow[dl, "\varphi_{i-1}"'] & P_{i-2} \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi_{i-2}"'] & \cdots \\
N_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "\beta_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & N_{i-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ya que $f_{i-1} - g_{i-1} - \beta_i \circ \varphi_{i-1} = \varphi_{i-2} \circ \alpha_{i-1}$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\beta_i \circ (f_i - g_i - \varphi_{i-1} \circ \alpha_i) &= \beta_i \circ f_i - \beta_i \circ g_i - \beta_i \circ \varphi_{i-1} \circ \alpha_i \\
&= f_{i-1} \circ \alpha_i - g_{i-1} \circ \alpha_i - \beta_i \circ \varphi_{i-1} \circ \alpha_i \\
&= (f_{i-1} - g_{i-1} - \beta_i \circ \varphi_{i-1}) \circ \alpha_i \\
&= \varphi_{i-2} \circ \alpha_{i-1} \circ \alpha_i = 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\mathrm{Im}(f_i - g_i - \varphi_{i-1} \circ \alpha_i) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_i) = \mathrm{Im}(\beta_{i+1})$. Ya que P_i es proyectivo, hay un homomorfismo $\varphi_i : P_i \to N_{i+1}$ que completa el diagrama conmutativamente

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[d, "f_i - g_i - \varphi_{i-1}\circ\alpha_i"] & \\
N_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & \mathrm{Im}(\beta_{i+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $f_i - g_i = \beta_{i+1} \circ \varphi_i + \varphi_{i-1} \circ \alpha_i$. □

Proposición 2.40. Si $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{Q}_\bullet$ son dos resoluciones proyectivas de M, entonces $\mathbf{P}_{\bullet M}$ y $\mathbf{Q}_{\bullet M}$ son del mismo tipo de homotopía.

Demostración. Por el teorema de comparación el mapeo identidad $id_M : M \to M$ genera mapeos de cadenas $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet M}$ y $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet M} \to \mathbf{P}_{\bullet M}$. Entonces $g_\bullet f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{P}_{\bullet M}$ y $f_\bullet g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet M}$ son aplicaciones de complejos generados por id_M. También $id_{\mathbf{P}_{\bullet M}} : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{P}_{\bullet M}$ y $id_{\mathbf{Q}_{\bullet M}} : \mathbf{Q}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet M}$ son aplicaciones de complejos generados por id_M. Por el lema 2.39 anterior resulta que $g_\bullet f_\bullet \approx id_{\mathbf{P}_{\bullet M}}$ y $f_\bullet g_\bullet \approx id_{\mathbf{Q}_{\bullet M}}$. Así, $\mathbf{P}_{\bullet M}$ y $\mathbf{Q}_{\bullet M}$ son del mismo tipo de homotopía.

□

Hay versiones duales de los últimos tres resultados.

Capítulo 3

Los funtores Ext^i y Tor_i

En este capítulo vamos a definir a través del lema 2.35 y el teorema de comparación los funtores derivados derechos e izquierdos de un funtor aditivo, en particular los funtores extensión y torsión serán derivados de los funtores aditivos Hom y producto tensorial; después por medio del lema de la Herradura construiremos las Ext-sucesiones y Tor-sucesiones exactas largas. Posteriormente se demostrará que los funtores extensión y torsión son balanceados. Finalmente, se establece una conexión entre los módulos proyectivos e inyectivo y los funtores extensión, así como entre módulos planos y los funtores torsión. Las principales referencias de este capítulo son [4], [8], [7] [6].

3.1 Funtores derivados

En el álgebra conmutativa o en el álgebra homológica, ciertos funtores pueden ser obtenidos o derivados a partir de otros que están estrictamente relacionados con los funtores originales. A continuación, haremos una descripción de los funtores derivados a la izquierda y de los funtores derivados a la derecha.

El Funtor $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(\bullet) : {}_R\mathbf{M} \to {}_S\mathbf{M}$.
Sea $\mathfrak{F} : {}_R\mathbf{M} \to {}_S\mathbf{M}$ un funtor covariante de R-módulos a S-módulos, y M un $R-$módulo. Como se sabe M tiene una resolución proyectiva, digamos

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 .$$

Al aplicar el funtor $\mathfrak{F}$ a la resolución proyectiva reducida $\mathbf{P}_{\bullet M}$ del $R-$módulo M obtenemos la sucesión

$$\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(P_i) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_i)} \mathfrak{F}(P_{i-1}) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_0)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0 .$$

Si $\mathfrak{F}$ es además aditivo, entonces tenemos

$$\mathfrak{F}(\alpha_i) \circ \mathfrak{F}(\alpha_{i+1}) = 0,$$

y por consiguiente $\mathfrak{F}(\mathbf{P}_\bullet)$ es un complejo de S-módulos.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F} :_R \mathbf{Mod} \longrightarrow_S \mathbf{Mod}$ como sigue.

1. Si M es un objeto de ${}_R\mathbf{Mod}$,

$$\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) := H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M})) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_i))/\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\alpha_{i+1}))$$

2. Sea $f : M \to N$ un morfismo en ${}_R\mathbf{Mod}$. Si $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{Q}_\bullet$ son resoluciones projectivas de M y N, respectivamente, entonces por el teorema de comparación, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}_\bullet : \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & P_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & P_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
\mathbf{Q}_\bullet : \cdots \arrow[r] & Q_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & Q_i \arrow[r, "\beta_i"] & Q_{i-1} \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & \cdots \arrow[r, "\beta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $f_\bullet = \{f_i : P_i \to Q_i\}_{i \geq 0} : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet N}$ es una aplicación de complejos generada por f. Así, como $\mathfrak{F}$ es un funtor covariante aditivo de R-módulos a S-módulos obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M}) : \cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}(P_{i+1}) \arrow[r, "\mathfrak{F}(\alpha_{i+1})"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f_{i+1})"'] & \mathfrak{F}(P_i) \arrow[r, "\mathfrak{F}(\alpha_i)"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f_i)"'] & \mathfrak{F}(P_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f_{i-1})"'] & \cdots \arrow[r, "\mathfrak{F}(\alpha_1)"] & \mathfrak{F}(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f_0)"'] & 0 \\
\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet N}) : \cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}(Q_{i+1}) \arrow[r, "\mathfrak{F}(\beta_{i+1})"] & \mathfrak{F}(Q_i) \arrow[r, "\mathfrak{F}(\beta_i)"] & \mathfrak{F}(Q_{i-1}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\mathfrak{F}(\beta_1)"] & \mathfrak{F}(Q_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas del diagrama son complejos. Por lo tanto, por el teorema 1.11, existe una familia de homomorfismos

$$\begin{aligned} H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M})) &\longrightarrow H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet N})) \\ x + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\alpha_{i+1})) &\longmapsto \mathfrak{F}(f_i)(x) + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\beta_{i+1})) \end{aligned}$$

Si denotamos $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f) := H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$, entonces tenemos

$$\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(N).$$

Por tanto, hemos definido, para cada funtor covariante aditivo $\mathfrak{F}$, una sucesión de funtores aditivos y covariantes $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$, donde $i = 0, 1, 2, ...$, también de la categoría de $R-$módulos en la categoría de $S-$módulos.

El siguiente resultado asegura que los módulos de homología (o cohomología) son únicos salvo isomorfismos. Asimismo, afirma que $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet))$ depende solamente de f y no de la aplicación de complejos (o co-complejos) $f_\bullet$ generada por f.

Proposición 3.1. Sea $\mathfrak{F}$ un funtor aditivo covariante de R-módulos a S-módulos.

a) Si $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{Q}_\bullet$ son dos resoluciones proyectivas del R-módulo M, entonces $H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \cong H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,M}))$, para todo $i \geq 0$. Además, si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos y $\mathbf{P}_\bullet$, así como, $\mathbf{Q}_\bullet$ son resoluciones proyectivas de M y N respectivamente, entonces $\mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \to \mathrm{H}_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,N}))$, para todo $i \geq 0$, es independiente de la elección de la aplicación de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ generada por f.

b) Si $\mathbf{I}^\bullet$ e $\mathbf{J}^\bullet$ son dos resoluciones inyectivas del mismo R-módulo M, entonces $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M})) \cong \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{J}^{\bullet,M}))$, para todo $i \geq 0$. Además, si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos y $\mathbf{I}^\bullet$, así como, $\mathbf{J}^\bullet$ son resoluciones inyectivas de M y N respectivamente, entonces $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f^\bullet)) : \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,M})) \to \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet,N}))$, para todo $i \geq 0$, es independiente de la elección de la aplicación de co-complejos $f^\bullet : \mathbf{I}^{\bullet,M} \to \mathbf{J}^{\bullet,N}$ generada por f.

Demostración. Si $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{Q}_\bullet$ son dos resoluciones proyectivas del $R-$módulo M, entonces por la proposición 2.40, $\mathbf{P}_{\bullet,M}$ y $\mathbf{Q}_{\bullet,M}$ son del mismo tipo de homotopía, esto es, hay aplicaciones de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,M}$ y $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet,M} \to \mathbf{P}_{\bullet,M}$, tal que $f_\bullet g_\bullet$ y $g_\bullet f_\bullet$ son homotópicos a las aplicaciones identidad de complejos $id_{\mathbf{Q}_{\bullet,M}}$ y $id_{\mathbf{P}_{\bullet,M}}$, respectivamente. Por el ítem (d) del teorema 1.23, tenemos

$$H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(id_{\mathbf{P}_{\bullet,M}})) = H_i(id_{\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})}),$$

luego

$$\begin{aligned} H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) \circ H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) &= H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)\mathfrak{F}(f_\bullet)) \\ &= H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet f_\bullet)) \\ &= H_i(id_{\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})}) \\ &= id_{H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M}))} \end{aligned}$$

Similarmente, $H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) \circ H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) = id_{H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,M}))}$. Por lo tanto,

$$H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \to H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,M}))$$

es un isomorfismo.

Para concluir, supongamos que $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ son dos aplicaciones de complejos generados por $f : M \to N$. Entonces $f_\bullet$ y $g_\bullet$ son homotópicos según el lema 2.39. Así que por el ítem $d)$ del teorema 1.23 obtenemos lo siguiente:

$$H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) : H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \to H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet,M})).$$

La parte (b) se prueba de forma similar usando las versiones duales del lema 2.39 y de la proposición 2.40. $\square$

Teorema 3.2. Si $\mathfrak{F} :_R \mathbf{M} \longrightarrow_S \mathbf{M}$ es un funtor covariante y aditivo, entonces $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F} :_R \mathbf{M} \longrightarrow_S \mathbf{M}$ también lo es.

Demostración. 1. Ya que $\mathfrak{F}(id_{\mathbf{P}_{\bullet M}}) = id_{\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M})}$ y dado que $id_{\mathbf{P}_{\bullet M}}$ es una aplicación de complejos generada por id_M, tenemos

$$\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(id_M) = H_i(\mathfrak{F}(id_{\mathbf{P}_{\bullet M}})) = H_i(id_{\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M})})) = id_{H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M}))} = id_{\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M)}.$$

2. Sea $\mathbf{R}_\bullet$ una resolución proyectiva de L, así como $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet N} \to \mathbf{R}_{\bullet L}$ una aplicación de complejos generada por $g : N \to L$. Entonces $g_\bullet f_\bullet$ es generada por $g \circ f$ y tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(g \circ f) &= H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet f_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)\mathfrak{F}(f_\bullet)) \\ &= H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) \circ H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) = \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f).\end{aligned}$$

3. Si ahora $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet N}$ son aplicaciones de complejos generadas por $f, g : M \to N$, entonces $f_\bullet + g_\bullet$ es generada por $f + g$ y tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f + g) &= H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet + g_\bullet)) = H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet) + \mathfrak{F}(g_\bullet)) \\ &= H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet)) + H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet)) = \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f) + \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(g).\end{aligned}$$

$\square$

El Funtor $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}\,(\bullet) : {}_R\mathbf{M} \to {}_S\mathbf{M}$.

Escogemos una resolución inyectiva del R-módulo M:

$$\mathbf{I}^\bullet :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I^i \longrightarrow \cdots$$

y despues de aplicar el funtor $\mathfrak{F}$ a la resolución $\mathbf{I}^\bullet$ obtenemos

$$\mathfrak{F}(\mathbf{I}^\bullet) :\ 0 \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha^{-1})} \mathfrak{F}(I^0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{F}(I^{i-1}) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha^{i-1})} \mathfrak{F}(I^i) \longrightarrow \cdots$$

que es un co-complejo de R-módulos. Con este resultado, definimos los módulos de cohomología $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet M}))$, y denotamos esto como

$$\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) := \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet M})).$$

Además, para cada R-homomorfismo $f : M \to N$ tenemos una aplicación de S-módulos de cohomología en el nivel i:

$$\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f^\bullet)) : \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{I}^{\bullet M})) \to \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(\mathbf{J}^{\bullet N}))$$

donde $\mathbf{J}^{\bullet}$ es una resolución inyectiva del R-módulo N y $f^{\bullet} : \mathbf{I}^{\bullet M} \to \mathbf{J}^{\bullet N}$ es una aplicación de co-complejos generada por f. Por el ítem $b)$ de la proposición 3.1, tenemos que $\mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f^{\bullet}))$ depende solamente de f y no de la aplicación $f^{\bullet}$ de co-complejos generada por f, como ya se ha explicado anteriormente. Al denotar $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f) := \mathrm{H}^i(\mathfrak{F}(f^{\bullet}))$, tenemos que

$$\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(N).$$

De esta manera, se obtiene para cada funtor covariante aditivo $\mathfrak{F}$, una sucesión de funtores $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$ aditivos y covariantes, para $i = 0, 1, 2, ...$, también de la categoría ${}_R\mathbf{M}$ en la categoría ${}_S\mathbf{M}$.

Definición 3.3. Si $\mathfrak{F}$ es un funtor aditivo y covariante de R-módulos a S-módulos, entonces $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$ son llamados *el i-ésimo funtor derivado a la izquierda* de $\mathfrak{F}$ y *el i-ésimo funtor derivado a la derecha* de $\mathfrak{F}$, respectivamente, para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Observemos que, si $\mathfrak{F}$ es un funtor aditivo y contravariante de R-módulos a S-módulos, también existen los funtores $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$. En este caso, para construir el funtor $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}$ es suficiente escoger una resolución inyectiva, y para construir $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$ es suficiente escoger una resolución proyectiva.

Un resultado útil y general es el siguiente: si $\mathfrak{F}$ es un funtor aditivo y exacto a la derecha, entonces $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son naturalmente equivalentes. De manera similar, si $\mathfrak{F}$ es un funtor aditivo y exacto a la izquierda, entonces $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son naturalmente equivalentes. Antes de ver esto vamos a definir un tipo de equivalencia de dos funtores.

Definición 3.4. Sean $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : {}_R\mathbf{M} \to {}_S\mathbf{M}$ dos funtores.

(i) Supongamos que para cada $M \in {}_R\mathbf{M}$ existe un homomorfismo $\eta_M : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{G}(M)$ em ${}_S\mathbf{M}$, tal que para cada R-homomorfismo $f : M \to N$ en ${}_R\mathbf{M}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{F}(M) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"'] & \mathfrak{G}(M) \arrow[d, "\mathfrak{G}(f)"] \\ N & \mathfrak{F}(N) \arrow[r, "\eta_N"] & \mathfrak{G}(N) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. La clase de homomorfismos $\eta = \{\eta_M : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{G}(M)\}$ indexado sobre los objetos de ${}_R\mathbf{M}$ se llama una *transformación natural* de $\mathfrak{F}$ hacia $\mathfrak{G}$.

(ii) Si η_M es un isomorfismo en ${}_S\mathbf{M}$ para cada $M \in {}_R\mathbf{M}$, entonces η lleva el nombre de *isomorfismo natural* y $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ se dice que son *funtores naturalmente equivalentes*. En este caso, denotamos $\mathfrak{F} \approx \mathfrak{G}$.

Proposición 3.5. Sea $\mathfrak{F} : {}_R\mathbf{M} \to {}_S\mathbf{M}$ un funtor covariante aditivo. Entonces:

$a)$ Si $\mathfrak{F}$ es exacto a la derecha, entonces $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada R-módulo M. Además, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ son funtores naturalmente equivalentes. Si M es un R-módulo proyectivo, entonces $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots$.

$b)$ Si $\mathfrak{F}$ es exacto a la izquierda, entonces $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada R-módulo M. Además, $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son funtores naturalmente equivalentes. Si M es un R-módulo inyectivo, entonces $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots$.

Demostración. Probaremos solamente el ítem $a)$; la demostración del ítem $b)$ es análoga.

Si $\mathbf{P}_\bullet$ es una resolución proyectiva del R-módulo M, entonces el siguiente pedazo de la sucesión $\mathbf{P}_\bullet$ es exacta,

$$P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0,$$

Como $\mathfrak{F}$ es exacto a la derecha, tenemos que

$$\mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_0)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Ahora, consideramos la sucesión

$$\mathfrak{F}(P_1) \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha_1)} \mathfrak{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

y calculamos la homología de $\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet M})$ en el nivel 0:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) &= \mathrm{H}_0(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M})) \\
&= \tfrac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(P_0)\to 0)}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\alpha_1))} \\
&= \tfrac{\mathfrak{F}(P_0)}{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_0))} \\
&\cong \mathrm{Im}(\mathfrak{F}(\alpha_0)) = \mathfrak{F}(M)
\end{aligned}$$

Como observamos, existe un isomorfismo de S-módulos $\eta_M : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ definido por $\eta_M(x + \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_0))) = \mathfrak{F}(\alpha_0)(x)$. Siendo así, podemos afirmar que la familia $\{\eta_M : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)\}$ constituida por estos R-isomorfismos naturales nos proporcionan un isomorfismo natural $\eta : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. De hecho, sea $f : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos y $\mathbf{Q}_\bullet$ una resolución proyectiva del R-módulo

N. Por el teorema de comparación hay una aplicación de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet,M} \to \mathbf{Q}_{\bullet,N}$ generada por f,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}_\bullet : \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & P_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & P_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
\mathbf{Q}_\bullet : \cdots \arrow[r] & Q_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & Q_i \arrow[r, "\beta_i"] & Q_{i-1} \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & \cdots \arrow[r, "\beta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\beta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(f)"'] & \mathfrak{F}(M) \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"] \\
N & \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(N) \arrow[r, "\eta_N"] & \mathfrak{F}(N)
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo de $R-$módulos $\eta_N : \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(N)$ está definido por $\eta_N(x + \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\beta_0))) = \mathfrak{F}(\beta_0)(x)$.
En efecto, por una parte tenemos,

$$\mathfrak{F}(f) \circ \eta_M(x + \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_0))) = \mathfrak{F}(f)(\mathfrak{F}(\alpha_0)(x)) = \mathfrak{F}(f \circ \alpha_0)(x)$$

mientras que, por otra parte

$$\begin{aligned}
\eta_N \circ \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(f)(x + \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\alpha_0))) &= \eta_N(\mathfrak{F}(f_0)(x) + \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(\beta_0))) \\
&= \mathfrak{F}(\beta_0)(\mathfrak{F}(f_0)(x)) = \mathfrak{F}(\beta_0 \circ f_0)(x)
\end{aligned}$$

Así, $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son funtores naturalmente equivalentes.

Asimismo, M es un R-módulo proyectivo, entonces

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id_M} M \longrightarrow 0\ ,$$

es una resolución proyectiva de M (observemos que como M es un R-módulo proyectivo, todos los R-módulos colocados detrás de M en la resolución anterior pueden ser considerados como los R-módulos nulos). Con esto, obtenemos el complejo:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet,M}) :\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathfrak{F}(M) \longrightarrow 0,$$

y conseguimos, por tanto, que $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$. $\square$

La demostración de la siguiente proposición es análoga a la de la proposición 3.5. Por eso, solo vamos a enunciar el siguiente resultado sin su prueba.

Proposición 3.6. Sea $\mathfrak{F}$ un funtor aditivo y contravariante de R-módulos, entonces tenemos lo siguiente:

$a)$ Si $\mathfrak{F}$ es exacto a la izquierda, entonces $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada R-módulo M, de modo que $\mathfrak{R}^0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son funtores naturalmente equivalentes. Si M es un R-módulo proyectivo, entonces $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots$.

$b)$ Si $\mathfrak{F}$ es exacto a la derecha, entonces $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(M)$, para cada R-módulo M, de modo que $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ son funtores naturalmente equivalentes. Si M es un R-módulo inyectivo, entonces $\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots$.

3.2 Los funtores derivados derechos del funtor $\mathrm{Hom}_R(-, X)$

Sea X un R-módulo fijo y

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_i \overset{\alpha_i}{\to} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} M \to 0$$

una resolución proyectiva del R-módulo M. Como $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ es un funtor aditivo, contravariante en la categoría de R-módulos y R-homomorfismos, al aplicar este funtor a la resolución proyectiva reducida $\mathbf{P}_{\bullet\mathbf{M}}$ se obtiene el co-complejo

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M}, X) : \; 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, X) \xrightarrow{\alpha_1^*} \cdots \xrightarrow{\alpha_i^*} \mathrm{Hom}_R(P_i, X) \xrightarrow{\alpha_{i+1}^*} \cdots$$

Ahora podemos calcular la i-ésima cohomología del co-complejo anterior y obtener el R-módulo

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, X) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M}, X)).$$

Además, si consideramos un homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$ y una resolución proyectiva $\mathbf{Q}_\bullet$ del $R-$módulo N, entonces tenemos

$$\mathrm{Ext}^i_R(f, X) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, X)),$$

donde $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet N}$ es una aplicación de complejos generada por f. Por tanto, tenemos

$$\mathrm{Ext}^i_R(f, X) : \; \mathrm{Ext}^i_R(N, X) \to \mathrm{Ext}^i_R(M, X).$$

De esta manera para cada $i \geq 0$ tenemos un funtor aditivo y contravariante

$$\mathrm{Ext}^i_R(-, X) : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}.$$

Observemos que, por construcción, $\operatorname{Ext}^i_R(-,X) = \mathfrak{R}^i\operatorname{Hom}_R(-,X)$ es el $i-$ésimo funtor derivado a la derecha del funtor aditivo contravariante $\operatorname{Hom}_R(-,X)$, de esto también se sigue que $\operatorname{Ext}^i_R(-,X)$ es un funtor aditivo pues $\operatorname{Hom}_R(-,X)$ y H^i son aditivos.

Asimismo, notemos que el R-módulo $\operatorname{Ext}^i_R(M,X)$ depende solamente de los R-módulos M y X, y no depende de la elección de la resolución proyectiva para M.

Definición 3.7. El funtor contravariante $\operatorname{Ext}^i_R(-,X)$, se llama *el* $i-$*ésimo funtor extensión de* $\operatorname{Hom}_R(-,X)$, o simplemente el funtor contravariante Ext, para todo $i = 0,1,2,\ldots$.

Ejemplo 3.8. Sea N un R-módulo. Supongamos que $x \in R$ no es un divisor de cero de R y N. Entonces hay isomorfismos de R-módulos

$$\operatorname{Ext}^i_R(R/xR,N) = \begin{cases} N/xN, & \text{si} \quad i=1 \\ 0, & \text{si} \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Dado que x no es un divisor de cero de R, hay una sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R \xrightarrow{\pi} R/xR \longrightarrow 0$$

Esto proporciona una resolución libre de R/xR que puede usarse para calcular $\operatorname{Ext}^i_R(R/xR,N)$ como cohomología del co-complejo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R,N) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Hom}_R(R,N) \longrightarrow 0$$

Finalmente, como $\operatorname{Hom}_R(R,N) \cong N$ tenemos el complejo

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot x} N \longrightarrow 0$$

Por tanto, la afirmación se sigue de este complejo. Ahora $\operatorname{Ext}^0_R(R/xR,N) = \operatorname{Hom}_R(R/xR,N)$ se sigue de la proposición 3.6.

Ejemplo 3.9. Para cada entero $m,n \geq 2$, calcularemos $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n,N)$ para ciertos módulos N. Considérese la resolución proyectiva y la resolución proyectiva reducida de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{Z}_{mn}$, respectivamente

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0,$$

$$\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n} : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow 0.$$

Al aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(-, N)$ al complejo reducido $\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}$ obtenemos el siguiente co-complejo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \xrightarrow{\cdot n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \xrightarrow{\cdot m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \longrightarrow \cdots .$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_{mn}, N) \cong N$, entonces el co-complejo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$ se transforma en

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot n} N \xrightarrow{\cdot m} N \longrightarrow \cdots .$$

Calculemos $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, N)$ cuando $N = \mathbb{Z}_{mn}$. El co-complejo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbf{P}_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$ es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_{mn} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \cdots .$$

Se observa que esta sucesión es exacta excepto en el nivel $i = 0$, en este caso tenemos

$$\frac{\mathrm{Ker}(\mathbb{Z}_{mn} \overset{\cdot n}{\to} \mathbb{Z}_{mn})}{(0 \overset{0}{\to} \mathbb{Z}_{mn})} = m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{mn}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & \text{si} \quad i = 0 \\ 0, & \text{si} \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Calculemos $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, N)$ cuando $N = \mathbb{Z}_m$; el co-complejo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{mn}}(P_{\bullet,\mathbb{Z}_n}, N)$ es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot m = 0} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot m = 0} \cdots .$$

A continuación, calculamos la imagen y el núcleo de estas aplicaciones. Sea $d = \mathrm{mdc}(m, n)$ y observe que $n/d \in \mathbb{Z}$, luego

$$\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}_m \overset{\cdot n}{\to} \mathbb{Z}_m\right) = (n)\mathbb{Z}_m = (m, n)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

El núcleo se calcula como antes y

$$\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \overset{\cdot n}{\to} \mathbb{Z}_m\right) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Po lo que tenemos,

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \overset{\cdot n}{\to} \mathbb{Z}_m\right) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \overset{0}{\to} \mathbb{Z}_m\right)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}_m \overset{\cdot n}{\to} \mathbb{Z}_m\right)} = \frac{\mathbb{Z}_m}{d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_d.$$

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \frac{\mathrm{Ker}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}_m\right)}{\mathrm{Im}\left(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_m\right)} = \frac{\mathbb{Z}_d}{0} = \mathbb{Z}_d.$$

De manera semejante, se calcula

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$$

para todo $i \geq 3$.

Para cada sucesión exacta corta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ de R-módulos y de R-homomorfismos existe una sucesión exacta larga para el funtor contravariante $\mathrm{Ext}^i_R(-, X)$. Para obtener esta sucesión, precisamos del siguiente lema llamado lema de la Herradura.

Lema 3.10. (*lema de la Herradura para proyectivos*) Consideremos el diagrama, constituido por R-módulos y por R-homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_2"'] & & \vdots \arrow[d, "\gamma_2"] & \\
 & P_1 \arrow[d, "\alpha_1"'] & & R_1 \arrow[d, "\gamma_1"] & \\
 & P_0 \arrow[d, "\alpha_0"'] & & R_0 \arrow[d, "\gamma_0"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es exacta y $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{R}_\bullet$ son resoluciones proyectivas de L y N, respectivamente. Entonces, existe una resolución proyectiva $\mathbf{Q}_\bullet$ de M y aplicaciones de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet L} \to \mathbf{Q}_{\bullet M}$ y $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet M} \to \mathbf{R}_{\bullet N}$ tal que el diagrama que sigue es conmutativo con filas exactas.

Además, $Q_i = P_i \oplus R_i$, para cada $i = 0, 1, 2, ...$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\alpha_2"'] & \vdots \arrow[d, "\beta_2"'] & \vdots \arrow[d, "\gamma_2"] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Q_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & R_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & Q_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Probaremos por inducción. Para cada $i = 0, 1, 2, 3, ...$, tomemos $Q_i = P_i \oplus R_i$ y definamos $f_i : P_i \to Q_i$, $g_i : Q_i \to R_i$ por la formulas $f_i(x) = (x, 0)$ y $g_i(x, y) = y$, $x \in P_i$, $y \in R_i$. Entonces Q_i es un $R-$módulo proyectivo, f_i, g_i son $R-$homomorfismos y la sucesión $0 \to P_i \xrightarrow{f_i} Q_i \xrightarrow{g_i} R_i \to 0$ es exacta.

Como R_0 es proyectivo, existe un R-homomorfismo $h_0 : R_0 \to M$ tal que $gh_0 = \gamma_0$. Sea $\beta_0 : Q_0 \to M$ un homomorfismo definido por $\beta_0(x, y) = f(\alpha_0(x)) + h_0(y)$. Es claro que $\beta_0 f_0 = f\alpha_0$ y $g\beta_0 = \gamma_0 g_0$. Afirmamos que β_0 es sobreyectiva. De hecho, sea $z \in M$, entonces $g(z) \in N$, luego existe un $y \in R_0$ tal que $\gamma_0(y) = g(z)$. Ahora como

$$g(z - h_0(y)) = g(z) - (gh_0)(y) = g(z) - \gamma_0(y) = 0$$

tenemos que $z - h_0(y) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Se sigue que existe un $x \in P_0$ tal que $f(\alpha_0(x)) = z - h_0(y)$. Así, $\beta_0(x, y) = z$.

Sean K_0^α, K_0^β, K_0^γ los nucleos de α_0, β_0, γ_0 y ι_1^α, ι_1^β, ι_1^γ mapeos inclusión:

$$
\begin{aligned}
K_0^\alpha &= \mathrm{Ker}(\alpha_0) \qquad & \iota_1^\alpha &: K_0^\alpha \to P_0 \\
K_0^\beta &= \mathrm{Ker}(\beta_0) \qquad & \iota_1^\beta &: K_0^\beta \to Q_0 \\
K_0^\gamma &= \mathrm{Ker}(\gamma_0) \qquad & \iota_!^\gamma &: K_0^\gamma \to R_0.
\end{aligned}
$$

Restricciones de f_0 y g_0 a K_0^α y K_0^β inducen homomorfismos $\overline{f}_0 : K_0^\alpha \to K_0^\beta$, $\overline{g}_0 : K_0^\beta \to K_0^\gamma$ tales que $\overline{f}_0$ es un monomorfismo y $\overline{g}_0 \overline{f}_0 = 0$ de donde $\mathrm{Im}(\overline{f}_0) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{g}_0)$. Con el fin de demostrar la inclusión recíproca consideramos $(x, y) \in K_0^\beta = \mathrm{Ker}(\beta_0)$. Entonces $y = g_0(x, y) = \overline{g}_0(x, y) = 0$, además

$$f(\alpha_0(x)) = f(\alpha_0(x)) + h_0(y) = \beta_0(x, y) = 0.$$

Ya que el homomorfismo f es uno a uno se tiene que $\alpha_0(x) = 0$, es decir, $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_0) = K_0^\alpha$ y $(x, y) = (x, 0) = \overline{f}_0(x)$. Esto prueba que $\mathrm{Ker}(\overline{g}_0) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{f}_0)$

y por lo tanto, $\mathrm{Ker}(\overline{g}_0) = \mathrm{Im}(\overline{f}_0)$. Sea ahora $y \in K_0^\gamma = \mathrm{Ker}(\gamma_0)$. Entonces $g(h_0(y)) = \gamma_0(y) = 0$, de donde resulta que $h_0(y) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, y dado que α_0 es sobre hay un $x \in P_0$ tal que $h_0(y) = f(\alpha_0(x))$, de esto se obtiene

$$\beta_0(-x, y) = f(\alpha_0(-x)) + h_0(y) = -f(\alpha_0(x)) + h_0(y) = 0.$$

Así, $(-x, y) \in K_0^\beta = \mathrm{Ker}(\beta_0)$ y $\overline{g}_0(-x, y) = y$ lo que prueba que $\overline{g}_0$ es un epimorfismo. Hemos demostrado que la fila de línea discontinua del diagrama de abajo es exacta.

Sean $p_1^\alpha : P_1 \to K_0^\alpha$, $p_1^\gamma : R_1 \to K_0^\gamma$ los epimorfismos inducidos por α_1 y γ_1, respectivamente, de manera que $\alpha_1 = \iota_1^\alpha p_1^\alpha$, $\gamma_1 = \iota_1^\gamma p_1^\gamma$. Como R_1 es proyectivo existe un homomorfismo $h_1 : R_1 \to K_0^\beta$ tal que $\overline{g}_0 h_1 = p_1^\gamma$. Definamos un mapeo $p_1^\beta : Q_1 \to K_0^\beta$ por $p_1^\beta(x, y) = \overline{f}_0 p_1^\alpha(x) + h_1(y)$, $(x, y) \in Q_1$. El mapeo p_1^β es un $R-$homomorfismo, $p_1^\beta f_1 = \overline{f}_0 p_1^\alpha$, $p_1^\gamma g_1 = \overline{g}_0 p_1^\beta$ y como en el caso de β_0 se demuestra que p_1^β es un epimorfismo. Pongamos $\beta_1 = \iota_1^\beta p_1^\beta$. Entonces

$$\beta_1 f_1 = \iota_1^\beta p_1^\beta f_1 = \iota_1^\beta \overline{f}_0 p_1^\alpha = f_0 \iota_1^\alpha p_1^\alpha = f_0 \alpha_1$$

y, similarmente, $\gamma_1 g_1 = g_0 \beta_1$. Además, ya que ι_1^β es el mapeo inclusión se tiene

$$\mathrm{Im}(\beta_1) = \mathrm{Im}(\iota_1^\beta p_1^\beta) = \mathrm{Im}(p_1^\beta) = K_0^\beta = \mathrm{Ker}(\beta_0).$$

Hemos probado que el diagrama de líneas continuas siguiente es conmutativo y tiene filas y columnas exactas.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dl, dashed, "p_1^\alpha"'] \arrow[dd, "\alpha_1"] & & Q_1 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dl, dashed, "p_1^\beta"'] \arrow[dd, "\beta_1"] & & R_1 \arrow[r] \arrow[dlll, dashed, "h_1"'] \arrow[dl, dashed, "p_1^\gamma"] \arrow[dd, "\gamma_1"] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & K_0^\alpha \arrow[rr, dashed, "\overline{f}_0"] \arrow[dr, dashed, "\iota_1^\alpha"'] & & K_0^\beta \arrow[rr, dashed, "\overline{g}_0"] \arrow[dr, dashed, "\iota_1^\beta"'] & & K_0^\gamma \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed, "\iota_1^\gamma"'] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[rr, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & & Q_0 \arrow[rr, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] \arrow[dll, dashed, "h_0"'] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[d] & & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que las primeras n componentes

$$Q_{n-1} = P_{n-1} \oplus R_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \cdots \longrightarrow Q_0 = P_0 \oplus R_0 \xrightarrow{\beta_0} M \longrightarrow 0$$

de una resolución proyectiva $\mathbf{Q}_\bullet$ de M han sido halladas de tal manera que el diagrama formado al completar la columna central y las filas del diagrama original con estas componentes da como resultado un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & P_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dl, dashed, "p_n^\alpha"'] \arrow[dd, "\alpha_n"] & & Q_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dl, dashed, "p_n^\beta"'] \arrow[dd, dashed, "\beta_n"] & & R_n \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "p_n^\gamma"] \arrow[dlll, dashed, "h_n"'] \arrow[dd, "\gamma_n"] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & K_{n-1}^\alpha \arrow[rr, dashed, "\bar{f}_{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\iota_{n-1}^\alpha"'] & & K_{n-1}^\beta \arrow[rr, dashed, "\bar{g}_{n-1}"] \arrow[dr, dashed, "\iota_{n-1}^\beta"'] & & K_{n-1}^\gamma \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed, "\iota_{n-1}^\gamma"'] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & & Q_{n-1} \arrow[rr, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & P_{n-2} \arrow[rr, "f_{n-2}"] \arrow[d] & & Q_{n-2} \arrow[rr, "g_{n-2}"] \arrow[d] & & R_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[d] & & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Sean K_{n-1}^α, K_{n-1}^β, K_{n-1}^γ los núcleos de los homomorfismos α_{n-1}, β_{n-1} y γ_{n-1}, respectivamente, y $\iota_{n-1}^\alpha : K_{n-1}^\alpha \to P_{n-1}$, $\iota_{n-1}^\beta : K_{n-1}^\beta \to Q_{n-1}$, $\iota_{n-1}^\gamma : K_{n-1}^\gamma \to R_{n-1}$ los mapeos inclusión. Afirmamos que $f_{n-1}(K_{n-1}^\alpha) \subseteq K_{n-1}^\beta$. En efecto, sea $x \in K_{n-1}^\alpha$, entonces $\alpha_{n-1}(x) = 0$ al aplicar f_{n-2} obtenemos

$$\beta_{n-1} \circ f_{n-1}(x) = f_{n-2} \circ \alpha_{n-1}(x) = f_{n-2}(0) = 0$$

de donde $f_{n-1}(x) \in K_{n-1}^\beta$. De una forma similar se demuestra que $g_{n-1}(K_{n-1}^\beta) \subseteq K_{n-1}^\gamma$. Por tanto, restricciones de f_{n-1} y g_{n-1} a K_{n-1}^α y K_{n-1}^β inducen homomorfismos $\overline{f}_{n-1} : K_{n-1}^\alpha \to K_{n-1}^\beta$ y $\overline{g}_{n-1} : K_{n-1}^\beta \to K_{n-1}^\gamma$ tales que $\overline{f}_{n-1}$ es un monomorfismo y $\overline{g}_{n-1}\overline{f}_{n-1} = 0$. Como en el caso $n = 1$ se demuestra que la fila de línea discontinua del diagrama anterior es exacta. Sean $p_n^\alpha : P_n \to K_{n-1}^\alpha$, $p_n^\gamma : R_n \to K_{n-1}^\gamma$ los epimorfismos inducidos por α_n y γ_n, respectivamente, de manera que $\alpha_n = \iota_{n-1}^\alpha p_n^\alpha$ y $\gamma_n = \iota_{n-1}^\gamma p_n^\gamma$. Ya que $\overline{g}_{n-1}$ es un epimorfismo y R_n es proyectivo, existe un homomorfismo $h_n : R_n \to K_{n-1}^\beta$ tal que $\overline{g}_{n-1} h_n = p_n^\gamma$. Definimos $p_n^\beta : Q_n \to K_{n-1}^\beta$ por $p_n^\beta(x, y) = \overline{f}_{n-1} p_n^\alpha(x) + h_n(y)$, donde $(x, y) \in Q_n$. Como en el caso de p_1^β se demuestra que p_n^β es un epimorfismo, así como $\overline{g}_{n-1} p_n^\beta = p_n^\gamma g_n$ y $\overline{f}_{n-1} p_n^\alpha = p_n^\beta f_n$. Tomemos $\beta_n = \iota_{n-1}^\beta p_n^\beta$ de modo que β_n es un homomorfismo con $\beta_n f_n = f_{n-1}\alpha_n$ y $g_{n-1}\beta_n = \gamma_n g_n$, asimismo

$$\mathrm{Im}(\beta_n) = \mathrm{Im}(\iota_{n-1}^\beta p_n^\beta) = \mathrm{Im}(p_n^\beta) = K_{n-1}^\beta = \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}).$$

Esto completa la inducción. $\square$

Existe una versión dual del lema de la Herradura para resoluciones inyectivas como veremos más adelante.

A continuación, construiremos mediante el resultado anterior, la sucesión exacta larga de Ext en la primera variable.

Proposición 3.11. Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión exacta corta de R-módulos y de R-homomorfismos, entonces para cualquier R-módulo X, existe una sucesión exacta larga de R-módulos de cohomología:

$$
\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(L,X) \xrightarrow{\Phi^0} \\
\xrightarrow{\Phi^0} \mathrm{Ext}^1_R(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(g,X)} \mathrm{Ext}^1_R(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(f,X)} \mathrm{Ext}^1_R(L,X) \xrightarrow{\Phi^1} \cdots \\
\cdots \xrightarrow{\Phi^{i-1}} \mathrm{Ext}^i_R(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(g,X)} \mathrm{Ext}^i_R(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(f,X)} \mathrm{Ext}^i_R(L,X) \xrightarrow{\Phi^i} \ldots
\end{array}
$$

donde Φ^i es un R-homomorfismo de conexión para cada $i = 0, 1, 2, ...$

Demostración. Si $\mathbf{P}_\bullet$ and $\mathbf{R}_\bullet$ son resoluciones proyectivas de los R-módulos L y N respectivamente, entonces por el lema de la Herradura podemos asegurar que existe una resolución proyectiva $\mathbf{Q}_\bullet$ del R-módulo M y aplicaciones de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet L} \to \mathbf{Q}_{\bullet M}$ y $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet M} \to \mathbf{R}_{\bullet N}$ tal que

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet L} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{Q}_{\bullet M} \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{R}_{\bullet N} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos. Asimismo, el complejo $\mathbf{Q}_\bullet$ ha sido construido en el lema de la Herradura de forma tal que

$$0 \longrightarrow P_i \xrightarrow{f_i} Q_i \xrightarrow{g_i} R_i \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que escinde, con $Q_i = P_i \oplus R_i$ para cada $i = 0, 1, 2, ...$ Ya que por el teorema 1.19 $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ preserva sucesiones exactas que escinden se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R_0,X) \arrow[r, "\gamma_1^*"] \arrow[d, "g_0^*"] & \mathrm{Hom}_R(R_1,X) \arrow[r, "\gamma_2^*"] \arrow[d, "g_1^*"] & \mathrm{Hom}_R(R_2,X) \arrow[r] \arrow[d, "g_2^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0 \oplus R_0,X) \arrow[r, "\beta_1^*"] \arrow[d, "f_0^*"] & \mathrm{Hom}_R(P_1 \oplus R_1,X) \arrow[r, "\beta_2^*"] \arrow[d, "f_1^*"] & \mathrm{Hom}_R(P_2 \oplus R_2,X) \arrow[r] \arrow[d, "f_2^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0,X) \arrow[r, "\alpha_1^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_1,X) \arrow[r, "\alpha_2^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_2,X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

donde las columnas son exactas y las filas son co-complejos de las cuales se obtienen $\operatorname{Ext}_R^i(N,X)$, $\operatorname{Ext}_R^i(M,X)$ y $\operatorname{Ext}_R^i(L,X)$, para cada entero $i \geq 0$. Dado que el diagrama anterior conmuta, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de co-complejos:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}_{\bullet N}, X) \xrightarrow{g_\bullet^*} \operatorname{Hom}_R(\mathbf{Q}_{\bullet M}, X) \xrightarrow{f_\bullet^*} \operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet L}, X) \longrightarrow \mathbf{0}$$

donde, $g_\bullet^* = \operatorname{Hom}_R(g_\bullet, X)$ y $f_\bullet^* = \operatorname{Hom}_R(f_\bullet, X)$. Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}_R^i(N,X) &= H^i(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}_{\bullet N}, X)) & \operatorname{Ext}_R^i(g,X) &= H^i(\operatorname{Hom}_R(g_\bullet, X)) = H^i(g_\bullet^*)\\
\operatorname{Ext}_R^i(M,X) &= H^i(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{Q}_{\bullet M}, X)) & \operatorname{Ext}_R^i(f,X) &= H^i(\operatorname{Hom}_R(f_\bullet, X)) = H^i(f_\bullet^*)\\
\operatorname{Ext}_R^i(L,X) &= H^i(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet L}, X)) & &
\end{aligned}$$

por el teorema 1.29 se tiene la siguiente sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}_R^0(N,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^0(g,X)"] & \operatorname{Ext}_R^0(M,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^0(f,X)"] & \operatorname{Ext}_R^0(L,X) \arrow[dll, rounded corners, "\Phi^0" description] & \\
& \operatorname{Ext}_R^1(N,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^1(g,X)"] & \operatorname{Ext}_R^1(M,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^1(f,X)"] & \operatorname{Ext}_R^1(L,X) \arrow[dll, rounded corners, "\Phi^1" description] & \\
& \operatorname{Ext}_R^2(N,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^2(g,X)"] & \operatorname{Ext}_R^2(M,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^2(f,X)"] & \operatorname{Ext}_R^2(L,X) \arrow[dll, dashed, rounded corners, "\Phi^{i-1}" description] & \\
& \operatorname{Ext}_R^i(N,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^i(g,X)"] & \operatorname{Ext}_R^i(M,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^i(f,X)"] & \operatorname{Ext}_R^i(L,X) \arrow[r, "\Phi^i"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Puesto que el funtor contravariante $\operatorname{Hom}_R(-,X)$ es aditivo y exacto a la izquierda, por la proposición 3.6 $a)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}_R^0(N,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^0(g,X)"] \arrow[d, "\eta_N"] & \operatorname{Ext}_R^0(M,X) \arrow[r, "\operatorname{Ext}_R^0(f,X)"] \arrow[d, "\eta_M"] & \operatorname{Ext}_R^0(L,X) \arrow[r, "\Phi^0"] \arrow[d, "\eta_L"] & \operatorname{Ext}_R^1(N,X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(N,X) \arrow[r, "g^*"] & \operatorname{Hom}_R(M,X) \arrow[r, "f^*"] & \operatorname{Hom}_R(L,X) \arrow[r, "\Phi^0 \circ \eta_L^{-1}"] & \operatorname{Ext}_R^1(N,X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde η_N, η_M y η_L son isomorfismos. $\square$

La siguiente proposición demuestra que, no puede darse el caso de que $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ sean naturalmente equivalentes cuando $\mathfrak{F} = \operatorname{Hom}_R(X,-)$, ya que $\operatorname{Hom}_R(X,-)$ generalmente no es exacto a la derecha.

Proposición 3.12. Si $\mathfrak{F}$ es un funtor covariante y aditivo, entonces el funtor $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ es exacto a la derecha.

Demostración. Sea $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos. Si $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{R}_\bullet$ son resoluciones proyectivas de L y N, respectivamente, entonces por el lema de la Herradura para proyectivos, hay una resolución proyectiva $\mathbf{Q}_\bullet$ de M y mapeos de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet L} \to \mathbf{Q}_{\bullet M}$ y $g_\bullet : \mathbf{Q}_{\bullet M} \to \mathbf{R}_{\bullet N}$ tal que

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet L} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{Q}_{\bullet M} \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{R}_{\bullet N} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos, donde $Q_i = P_i \oplus R_i$ para cada $i \geq 0$. Además, por la manera en la que $\mathbf{Q}_\bullet$ fue construido en el lema de la Herradura, la sucesión exacta corta $0 \to P_i \xrightarrow{f_i} Q_i \xrightarrow{g_i} R_i \to 0$ escinde. Por el el teorema 1.19 el funtor $\mathfrak{F}$ preserva sucesiones exactas cortas que escinden, y en consecuencia la sucesión $0 \longrightarrow \mathfrak{F}(P_i) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f_i)} \mathfrak{F}(Q_i) \xrightarrow{\mathfrak{F}(g_i)} \mathfrak{F}(R_i) \longrightarrow 0$ es exacta. Tenemos así una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet L}) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f_\bullet)} \mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet M}) \xrightarrow{\mathfrak{F}(g_\bullet)} \mathfrak{F}(\mathbf{R}_{\bullet N}) \longrightarrow 0.$$

Por el teorema 1.27, existe una sucesión exacta larga de $R-$módulos de homología y mapeos de homología

$$\cdots \longrightarrow H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{P}_{\bullet L})) \xrightarrow{H_i(\mathfrak{F}(f_\bullet))} H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{Q}_{\bullet M})) \xrightarrow{H_i(\mathfrak{F}(g_\bullet))} H_i(\mathfrak{F}(\mathbf{R}_{\bullet N})) \longrightarrow \cdots$$

de donde por la definición de funtor derivado izquierdo tenemos

$$\cdots \longrightarrow \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(L) \xrightarrow{\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\Phi_i} \mathfrak{L}_{i-1}\mathfrak{F}(L) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\Phi_1} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(L) \xrightarrow{\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(N) \longrightarrow 0$$

y en particular, la sucesión

$$\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(L) \xrightarrow{\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(f)} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(M) \xrightarrow{\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(g)} \mathfrak{L}_0\mathfrak{F}(N) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto $\mathfrak{L}_0\mathfrak{F}$ cumple la definición 1.15. □

3.3 Los funtores $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(X, -)$

Proposición 3.13. Sea $\tau : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ una transformación natural entre los funtores contravariantes y aditivos $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$. Entonces τ induce una transformación natural de los funtores derivados derechos $\eta^i_A : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}A \to \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}A$, $i = 0, 1, 2, ...$

Demostración. Para una resolución proyectiva del $R-$módulo A

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} P_i \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \longrightarrow 0$$

obtenemos un mapeo de co-complejos $\tau_{P_{\bullet A}} : \mathfrak{F}(P_{\bullet A}) \to \mathfrak{G}(P_{\bullet A})$ definido por $(\tau_{P_{\bullet A}})_i = \tau_{P_i} : \mathfrak{F}(P_i) \to \mathfrak{G}(P_i)$, donde $i = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}P_{\bullet A} : 0 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{P_{\bullet A}}"'] & \mathfrak{F}P_0 \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_1"] \arrow[d, "\tau_{P_0}"'] & \mathfrak{F}P_1 \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_2"] \arrow[d, "\tau_{P_1}"'] & \cdots \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_i"] & \mathfrak{F}P_i \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "\tau_{P_i}"'] & \mathfrak{F}P_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{P_{i+1}}"'] & \cdots \\
\mathfrak{G}P_{\bullet A} : 0 \arrow[r] & \mathfrak{G}P_0 \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_1"] & \mathfrak{G}P_1 \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_2"] & \cdots \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_i"] & \mathfrak{G}P_i \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_{i+1}"] & \mathfrak{G}P_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Entonces $\tau_{P_{\bullet A}}$ induce para cada $i \in \mathbb{Z}$ un $i-$ésimo mapeo de cohomología definido por

$$\begin{aligned}
\eta_A^i := H^i(\tau_{P_{\bullet A}}) : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(A) = H^i(\mathfrak{F}(P_{\bullet A})) &\longrightarrow \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(A) = H^i(\mathfrak{G}(P_{\bullet A})) \\
x + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\alpha_i) &\longmapsto \tau_{P_i}(x) + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\alpha_i)
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\eta^i : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F} \to \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}$, es una transformación natural entre los funtores derivados derechos $\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{R}^i\mathfrak{G}$

Debemos demostrar que si $f : A' \to A$ un $R-$homomorfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(A) \arrow[r, "\eta_A^i"] \arrow[d, "\mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f)"'] & \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(A) \arrow[d, "\mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(f)"] \\
A & \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(A') \arrow[r, "\eta_{A'}^i"] & \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(A')
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Con la finalidad de probar esta afirmación sea $Q_\bullet$ una resolución proyectiva del $R-$módulo A'

$$Q_\bullet : \cdots \longrightarrow Q_{i+1} \xrightarrow{\beta_{i+1}} Q_i \xrightarrow{\beta_i} \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\beta_1} Q_0 \xrightarrow{\beta_0} A' \longrightarrow 0$$

De un modo similar a lo que hicimos líneas arriba, para la resolución proyectiva $Q_\bullet$ obtenemos la aplicación de co-complejos $\tau_{Q_{\bullet A'}} : \mathfrak{F}(Q_{\bullet A'}) \to \mathfrak{G}(Q_{\bullet A'})$ definida por $(\tau_{Q_{\bullet A'}})_i = \tau_{Q_i} : \mathfrak{F}(Q_i) \to \mathfrak{G}(Q_i)$, donde $i = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}Q_{\bullet A'} : 0 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{Q_{\bullet A'}}"'] & \mathfrak{F}Q_0 \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_1"] \arrow[d, "\tau_{Q_0}"'] & \mathfrak{F}Q_1 \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_2"] \arrow[d, "\tau_{Q_1}"'] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}Q_i \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_{i+1}"] \arrow[d, "\tau_{Q_i}"'] & \mathfrak{F}Q_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{Q_{i+1}}"'] & \cdots \\
\mathfrak{G}Q_{\bullet A'} : 0 \arrow[r] & \mathfrak{G}Q_0 \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_1"] & \mathfrak{G}Q_1 \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_2"] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{G}Q_i \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_{i+1}"] & \mathfrak{G}Q_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Entonces $\tau_{Q_{\bullet A'}}$ induce, para cada $i \in \mathbb{Z}$, un $R-$homomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \eta^i_{A'} : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}A' &\longrightarrow \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}A' \\ w + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\beta_i) &\longmapsto \tau_{Q_i}(w) + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\beta_i) \end{aligned}$$

Por otra parte, por el teorema de comparación hay una aplicación de complejos $f_\bullet$ generada por el mapeo f:

$$\begin{tikzcd} Q_\bullet : \cdots \arrow[r] \arrow[d, "f_\bullet"'] & Q_{i+1} \arrow[r, "\beta_{i+1}"] \arrow[d, "f_i"'] & Q_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Q_0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "f_0"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\ P_\bullet : \cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "\alpha_{i+1}"] & P_i \arrow[r, "\alpha_i"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\alpha_0"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de donde obtenemos después de aplicar el funtor contravariante $\mathfrak{F}$ el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}P_\bullet : 0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}f_\bullet"'] & \mathfrak{F}A \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_0"] \arrow[d, "\mathfrak{F}f"'] & \mathfrak{F}P_0 \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_1"] \arrow[d, "\mathfrak{F}f_0"'] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}P_{i-1} \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_i"] \arrow[d, "\mathfrak{F}f_{i-1}"'] & \mathfrak{F}P_i \arrow[r, "\mathfrak{F}\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "\mathfrak{F}f_i"'] & \mathfrak{F}P_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{F}f_{i+1}"'] & \cdots \\ \mathfrak{F}Q_\bullet : 0 \arrow[r] & \mathfrak{F}A' \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_0"] & \mathfrak{F}Q_0 \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_1"] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{F}Q_{i-1} \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_i"] & \mathfrak{F}Q_i \arrow[r, "\mathfrak{F}\beta_{i+1}"] & \mathfrak{F}Q_{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(A) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}\alpha_{i+1})}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}\alpha_i)} &\longrightarrow \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(A') = \frac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{F}\beta_{i+1})}{\mathrm{Im}(\mathfrak{F}\beta_i)} \\ x + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\alpha_i) &\longmapsto \mathfrak{F}f_i(x) + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\beta_i) \end{aligned}$$

Al aplicar ahora el funtor contravariante $\mathfrak{G}$ a la aplicación de complejos $f_\bullet$ generada por f obtenemos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}P_\bullet : 0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{G}f_\bullet"'] & \mathfrak{G}A \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_0"] \arrow[d, "\mathfrak{G}f"'] & \mathfrak{G}P_0 \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_1"] \arrow[d, "\mathfrak{G}f_0"'] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{G}P_{i-1} \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_i"] \arrow[d, "\mathfrak{G}f_{i-1}"'] & \mathfrak{G}P_i \arrow[r, "\mathfrak{G}\alpha_{i+1}"] \arrow[d, "\mathfrak{G}f_i"'] & \mathfrak{G}P_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{G}f_{i+1}"'] & \cdots \\ \mathfrak{G}Q_\bullet : 0 \arrow[r] & \mathfrak{G}A' \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_0"] & \mathfrak{G}Q_0 \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_1"] & \cdots \arrow[r] & \mathfrak{G}Q_{i-1} \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_i"] & \mathfrak{G}Q_i \arrow[r, "\mathfrak{G}\beta_{i+1}"] & \mathfrak{G}Q_{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(f) : \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(A) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{G}\alpha_{i+1})}{\mathrm{Im}(\mathfrak{G}\alpha_i)} &\longrightarrow \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(A') = \frac{\mathrm{Ker}(\mathfrak{G}\beta_{i+1})}{\mathrm{Im}(\mathfrak{G}\beta_i)} \\ u + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\alpha_i) &\longmapsto \mathfrak{G}f_i(u) + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\beta_i) \end{aligned}$$

A continuación se demuestra que el diagrama (3.1) conmuta. En efecto, por una parte tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(f) \circ \eta^i_A(x + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\alpha_i)) &= \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}(f)(\tau_{P_i}(x) + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\alpha_i)) \\ &= \mathfrak{G}f_i(\tau_{P_i}(x)) + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\beta_i) \end{aligned}$$

mientras que por otra se tiene

$$\begin{aligned}\eta^i_{A'} \circ \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}(f)(x + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\alpha_i)) &= \eta^i_{A'}(\mathfrak{F}f_i(x) + \mathrm{Im}(\mathfrak{F}\beta_i) \\ &= \tau_{Q_i}(\mathfrak{F}f_i(x)) + \mathrm{Im}(\mathfrak{G}\beta_i).\end{aligned}$$

Los resultados anteriores coinciden debido a que el siguiente diagrama conmuta, porque τ es una transformación natural

$$\begin{tikzcd} Q_i \arrow[d, "f_i"'] & \mathfrak{F}(P_i) \arrow[r, "\tau_{P_i}"] \arrow[d, "\mathfrak{F}f_i"'] & \mathfrak{G}(P_i) \arrow[d, "\mathfrak{G}f_i"] \\ P_i & \mathfrak{F}(Q_i) \arrow[r, "\tau_{Q_i}"] & \mathfrak{G}(Q_i) \end{tikzcd}$$

□

Sean M un $R-$módulo, X un $R-$módulo fijo y $\mathbf{P}_\bullet$ una resolución proyectiva de X:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_i \overset{\alpha_i}{\to} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} X \to 0.$$

Al aplicar el funtor contravariante y aditivo $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ a la resolución proyectiva reducida $\mathbf{P}_{\bullet X}$ obtenemos el co-complejo

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, M) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, M) \overset{\alpha_1^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_1, M) \overset{\alpha_2^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_2, M) \to \cdots$$

Así, podemos calcular la $i-$ésima cohomología del co-complejo $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, M)$ y obtener el $R-$módulo

$$\mathrm{Ext}^i_R(X, M) := H^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, M)).$$

A continuación, consideremos un homomorfismo de $R-$módulos $f : M \to N$. Este mapeo $R-$lineal f induce una transformación natural definida por

$$\begin{aligned} f_* : \mathrm{Hom}_R(A, M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, N) \\ h &\longmapsto f_*(h) := f \circ h \end{aligned}$$

entre los funtores contravariantes y aditivos $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ y $\mathrm{Hom}_R(-, N)$. Esta transformación natural da lugar, según la proposición 3.13, al mapeo de co-complejos $\mathbf{f}_* : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, M) \to \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, N)$, entonces el $i-$ésimo mapeo de cohomología inducido por esta aplicación de co-complejos es

$$H^i(\mathbf{f}_*) : \mathrm{Ext}^i_R(X, M) \to \mathrm{Ext}^i_R(X, N).$$

Definimos $\mathrm{Ext}^i_R(X, f) = H^i(\mathbf{f}_*)$.

Proposición 3.14. Para cada entero $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_R(X,-) :_R \mathbf{M} \to_R \mathbf{M}$ es un funtor covariante y aditivo.

Proposición 3.15. Para cada $R-$módulo M, $\mathrm{Ext}^0_R(X,M) \cong \mathrm{Hom}_R(X,M)$ de manera que $\mathrm{Ext}^0_R(X,-)$ y $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ son funtores naturalmente equivalentes.

Demostración. Sea $\mathbf{P}_\bullet$ una resolución proyectiva del $R-$módulo X:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_i \overset{\alpha_i}{\to} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} X \to 0$$

entonces $P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} X \to 0$ es exacta. Ya que el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ es exacto a la izquierda se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{\alpha_0^*} \mathrm{Hom}_R(P_0,M) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathrm{Hom}_R(P_1,M)$$

es una sucesión exacta. Además, considerando

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0,M) \xrightarrow{\alpha_1^*} \mathrm{Hom}_R(P_1,M)$$

vemos que

$$\mathrm{Ext}^0_R(X,M) = H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X},M)) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha_1^*)}{\mathrm{Im}(0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0,M))} \cong \mathrm{Ker}(\alpha_1^*).$$

Por ello, $\mathrm{Ext}^0_R(X,M) \cong \mathrm{Ker}(\alpha_1^*)$. Asimismo, como α_0^* es inyectivo tenemos

$$\mathrm{Hom}_R(X,M) \cong \mathrm{Im}(\alpha_0^*) = \mathrm{Ker}(\alpha_1^*),$$

de manera que $\mathrm{Hom}_R(X,M) \cong \mathrm{Ext}^0_R(X,M)$. Por lo tanto, existe un isomorfismo

$$\begin{aligned} \eta_M : \mathrm{Hom}_R(X,M) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(X,M) \\ h &\longmapsto \alpha_0^*(h) + 0 \end{aligned}$$

En tal sentido, afirmamos que la familia $\{\eta_M : \mathrm{Hom}_R(X,M) \to \mathrm{Ext}^0_R(X,M)\}$ de estos isomorfismos produce un isomorfismo natural $\eta : \mathrm{Hom}_R(X,-) \to \mathrm{Ext}^0_R(X,-)$. Con el fin de comprobar esta afirmación tomemos un mapeo $R-$lineal $f : M \to N$ y verifiquemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_R(X,M) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Ext}^0_R(X,M) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^0_R(X,f)"] \\ N & \mathrm{Hom}_R(X,N) \arrow[r, "\eta_N"] & \mathrm{Ext}^0_R(X,N) \end{tikzcd}$$

En efecto, para $h \in \mathrm{Hom}_R(X,M)$ arbitrario, tenemos por una parte que

$$(\mathrm{Ext}^0_R(X,f) \circ \eta_M)(h) = \mathrm{Ext}^0_R(\alpha_0^*(h) + 0) = f_*(\alpha_0^*(h)) + 0 = f \circ (h \circ \alpha_0) + 0,$$

mientras que por otra parte,

$$(\eta_N \circ f_*)(h) = \eta_N(f_*(h)) = \alpha_0^*(f_*(h)) + 0 = (f \circ h) \circ \alpha_0 + 0.$$

$\square$

La sucesión dada en la proposición 3.11 se llama Ext-sucesión exacta larga en la primera variable. De igual manera, existe también una Ext-sucesión exacta larga en la segunda variable. Para obtener esta última sucesión supongamos que

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos y R-homomorfismos. Estos homomorfismos f y g dan origen a la transformaciones naturales definidas por

$$\begin{aligned} f_* : Hom_R(A, L) &\longrightarrow Hom_R(A, M) & g_* : Hom_R(A, M) &\longrightarrow Hom_R(A, N) \\ h &\longmapsto f_*(h) := f \circ h & l &\longmapsto g_*(l) := g \circ l \end{aligned}$$

Sea ahora $\mathbf{P}_\bullet$ una resolución proyectiva del $R-$módulo X:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} X \to 0$$

entonces obtenemos los mapeos de co-complejos

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
Hom_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, L) : \arrow[d, "\mathbf{f}_*"'] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0, L) \arrow[r, "\alpha_1^*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_R(P_1, L) \arrow[r, "\alpha_2^*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_R(P_2, L) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\
Hom_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, M) : \arrow[d, "\mathbf{g}_*"'] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0, M) \arrow[r, "\alpha_1^*"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_R(P_1, M) \arrow[r, "\alpha_2^*"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_R(P_2, M) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"'] & \cdots \\
Hom_R(\mathbf{P}_{\bullet X}, N) : & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \arrow[r, "\alpha_1^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_1, N) \arrow[r, "\alpha_2^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_2, N) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior conmuta porque tanto f_* como g_* son transformaciones naturales y las columnas son exactas porque siendo P un R-módulo proyectivo, $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ preserva sucesiones exactas cortas, es decir, es un funtor exacto, según el corolario 2.14. Por lo tanto se tiene una sucesión exacta corta de co-complejos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X} L) \xrightarrow{\mathbf{f}_*} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X} M) \xrightarrow{\mathbf{g}_*} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet X} N) \longrightarrow 0$$

Al tomar cohomología en esta sucesión y utilizar las proposiciones 1.29 y 3.15, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.16. Si $0 \to L \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} N \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos y R-homomorfismos, entonces para cualquier R-módulo dado X, existe una sucesión exacta larga de R-módulos de cohomología,

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(X,N) \xrightarrow{\Phi^0} \\
&\xrightarrow{\Phi^0} \mathrm{Ext}^1_R(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X,f)} \mathrm{Ext}^1_R(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(X,g)} \mathrm{Ext}^1_R(X,N) \xrightarrow{\Phi^1} \cdots \\
&\cdots \xrightarrow{\Phi^{i-1}} \mathrm{Ext}^i_R(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(X,f)} \mathrm{Ext}^i_R(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_R(X,g)} \mathrm{Ext}^i_R(X,N) \xrightarrow{\Phi^i} \cdots
\end{aligned}
$$

donde Φ^i es un R-homomorfismo de conexión para cada entero $i \geq 0$.

Así, conforme con las proposiciones que fueron dadas arriba tenemos un funtor contravariante $\mathrm{Ext}^i_R(-,X)$ y un funtor covariante $\mathrm{Ext}^i_R(X,-)$ de R-módulos a R-módulos, para cada entero $i \geq 0$.

Al respecto, el siguiente resultado nos proporciona algunas propiedades para el funtor Ext.

Proposición 3.17. Si M es un $R-$módulo, las condiciones siguientes son equivalentes:

$a)$ M es proyectivo;

$b)$ $\mathrm{Ext}^i_R(M,X) = 0$, para todo entero $i \geqslant 1$ y para cualquier R-módulo X;

$c)$ $\mathrm{Ext}^1_R(M,X) = 0$, para cualquier R-módulo X.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Sea M un R-módulo proyectivo, ya que $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ es un funtor aditivo contravariante y exacto a la izquierda, se sigue a partir del ítem $a)$ de la proposición 3.6 que $\mathrm{Ext}^i_R(M,X) = \mathfrak{R}^i\mathrm{Hom}_R(M,X) = 0$ para $i \geq 1$.
$(b) \Rightarrow (c)$. Se sigue de forma inmediata.
$(c) \Rightarrow (a)$. Considere la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

de R-módulos. Según la proposición 3.16, existe una sucesión exacta larga de la forma:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N^{'}) \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N^{''}) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N^{'}) \to \cdots .$$

Ya que por hipótesis $\mathrm{Ext}^1_R(M,X) = 0$ para cualquier R-módulo X, la siguiente parte de la sucesión anterior es exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N^{'}) \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N^{''}) \to 0.$$

Por lo tanto, por el corolario 2.14, se tiene que M es un R-módulo proyectivo. $\square$

Al respecto, tenemos más propiedades suministradas por la siguiente proposición.

Proposición 3.18. Si M es un $R-$módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:

$a)$ M es inyectivo;

$b)$ $\operatorname{Ext}_R^i(X,M)=0$, para todo entero $i\geqslant 1$, y cualquier R-módulo X;

$c)$ $\operatorname{Ext}_R^1(X,M)=0$, para cualquier R-módulo X;

$d)$ $\operatorname{Ext}_R^1(X,M)=0$, para cualquier R-módulo cíclico X;

$e)$ $\operatorname{Ext}_R^1(R/I,M)=0$, para cualquier ideal I de R.

Demostración. $a)\Rightarrow b)$: Sean M un R-módulo inyectivo, y

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} P_n \xrightarrow{\alpha_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\alpha_0} X \to 0$$

una resolución proyectiva del R-módulo arbitrario X. Como M es inyectivo, por el corolario 2.5, el funtor $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ es un funtor exacto. Entonces, se sigue que el co-complejo $\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X},M)$ es una sucesión exacta, excepto en $\operatorname{Hom}_R(P_0,M)$. Por lo tanto, tenemos para todo entero $i\geq 1$,

$$\operatorname{Ext}_R^i(X,M)=H^i(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,X},M))=0.$$

Las implicaciones $(b)\Rightarrow(c)$ y $(c)\Rightarrow(d)$ son inmediatas.
$(d)\Rightarrow(e)$: R/I es cíclico generado por $1+I$.
$(e)\Rightarrow(a)$: Consideremos la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow I\xrightarrow{i} R\xrightarrow{\pi} R/I\longrightarrow 0$$

de R-módulos. Entonces por la proposición 3.11, sabemos que existe una sucesión exacta larga en la primera variable

$$0\to \operatorname{Hom}_R(R/I,M)\to \operatorname{Hom}_R(R,M)\to \operatorname{Hom}_R(I,M)\to \operatorname{Ext}_R^1(R/I,M)\to\cdots$$

Como por hipótesis $\operatorname{Ext}_R^1(R/I,M)=0$ para cualquier ideal I de R, se deduce que el R-homomorfismo

$$\operatorname{Hom}_R(R,M)\xrightarrow{i^*}\operatorname{Hom}_R(I,M)$$

es sobreyectivo. Por lo tanto, por el criterio de Baer (cualquier homomorfismo se extiende a R) logramos probar que M es un R-módulo inyectivo. $\square$

3.4 Los funtores derivados derechos del funtor $\mathrm{Hom}_R(X, -)$

Sean X y M $R-$módulos y sea $\mathbf{D}^\bullet$ una resolución inyectiva de M:

$$\mathbf{D}^\bullet : 0 \to M \overset{\alpha^{-1}}{\to} D^0 \overset{\alpha^0}{\to} D^1 \to \cdots \to D^{i-1} \overset{\alpha^{i-1}}{\to} D^i \overset{\alpha^i}{\to} D^{i+1} \to \cdots$$

Como el funtor $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ es covariante tenemos el co-complejo:

$$\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet M}) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(X, D^0) \overset{\alpha_*^0}{\to} \mathrm{Hom}_R(X, D^1) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(X, D^i) \overset{\alpha_*^i}{\to} \cdots$$

Denotamos al $i-$ésimo módulo de cohomología de $\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet M})$ por

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, M) := H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet M})).$$

Sean ahora $f : M \to N$ un mapeo $R-$lineal y $\mathbf{E}^\bullet$ una resolución inyectiva de N, entonces hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}^\bullet : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "f"'] & D^0 \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d, "f^0"'] & \cdots \arrow[r] & D^{i-1} \arrow[r, "\alpha^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & D^i \arrow[r, "\alpha^i"] \arrow[d, "f^i"'] & D^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\
\mathbf{E}^\bullet : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta^{-1}"] & E^0 \arrow[r, "\beta^0"] & \cdots \arrow[r] & E^{i-1} \arrow[r, "\beta^{i-1}"] & E^i \arrow[r, "\beta^i"] & E^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

en el que $f^\bullet = \{f^i : D^i \to E^i\}_{i \geq 0} : \mathbf{D}^{\bullet M} \to \mathbf{E}^{\bullet N}$ es un mapeo de co-complejos generado por f. Dado que $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ es un funtor aditivo y covariante obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, D^0) \arrow[r, "\alpha_*^0"] \arrow[d, "f_*^0"'] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, D^i) \arrow[r, "\alpha_*^i"] \arrow[d, "f_*^i"'] & \mathrm{Hom}_R(X, D^{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, "f_*^{i+1}"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, E^0) \arrow[r, "\beta_*^0"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, E^i) \arrow[r, "\beta_*^i"] & \mathrm{Hom}_R(X, E^{i+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde las filas superior e inferior son co-complejos. Así,

$$f_*^\bullet := \mathrm{Hom}_R(X, f^\bullet) : \mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet M}) \to \mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{E}^{\bullet N}),$$

donde $f_*^\bullet = \{f_*^i : \mathrm{Hom}_R(X, D^i) \to \mathrm{Hom}_R(X, E^i)\}_{i \geq 0}$ es un mapeo de co-complejos. Por lo tanto, para $i = 0, 1, 2, \cdots$, hay una aplicación entre cohomologías $H^i(f_*^\bullet)$ que mapea el $i-$ésimo módulo de cohomología de $\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet M})$ al $i-$ésimo módulo de cohomología de $\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{E}^{\bullet N})$:

$$H^i(f_*^\bullet) : H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet M})) \to H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{E}^{\bullet N})).$$

Si ponemos $\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, f) := H^i(f_*^\bullet)$, entonces

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, f) : \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, M) \to \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, N).$$

Así, $\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, -) : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$ es un funtor derivado derecho de $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ que es aditivo y covariante.

Definición 3.19. El funtor covariante $\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X,-)\ :\ {}_R\mathbf{M}\ \to\ {}_R\mathbf{M}$ es también llamado *el $i-$ésimo funtor extensión de* $\mathrm{Hom}_R(X,-)$, para $i=0,1,2,\cdots$.

La prueba de la siguiente proposición es análoga a la prueba del lema 3.10.

Proposición 3.20 (*El lema de Herradura para inyectivos)*. Si $0\to L\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} N\to 0$ es una sucesión exacta corta de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos y $\mathbf{D}^\bullet$ y $\mathbf{F}^\bullet$ son resoluciones inyectivas de L y N, respectivamente, entonces hay una resolución inyectiva $\mathbf{E}^\bullet$ de M y aplicaciones de co-complejos $f^\bullet:\mathbf{D}^{\bullet L}\to\mathbf{E}^{\bullet M}$ y $g^\bullet:\mathbf{E}^{\bullet M}\to\mathbf{F}^{\bullet N}$ tal que

$$\mathbf{0}\to\mathbf{D}^\bullet\xrightarrow{f^\bullet}\mathbf{E}^\bullet\xrightarrow{g^\bullet}\mathbf{F}^\bullet\to\mathbf{0}$$

es una sucesión exacta corta de co-complejos, donde $E^i=D^i\oplus F^i$ para cada $i\geq 0$.

Proposición 3.21. Correspondiente a cada sucesión exacta corta $0\to L\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} N\to 0$ de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos, hay una sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{array}{l}0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(X,L)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}_R(X,M)\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_R(X,N)\xrightarrow{\overline{\Phi}^0}\\ \xrightarrow{\overline{\Phi}^0}\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(X,L)\xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(X,f)}\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(X,M)\xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(X,g)}\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(X,N)\xrightarrow{\overline{\Phi}^1}\cdots\\ \cdots\xrightarrow{\overline{\Phi}^{i-1}}\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X,L)\xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X,f)}\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X,M)\xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X,g)}\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X,N)\xrightarrow{\overline{\Phi}^i}\cdots\end{array}$$

donde $\overline{\Phi}^i$ es un homomorfismo de conexión para cada $i\geq 0$.

Demostración. Sean $\mathbf{D}^\bullet$ y $\mathbf{F}^\bullet$ resoluciones inyectivas de L y N, respectivamente, entonces el lema de la Herradura para inyectivos prueba que hay una resolución inyectiva $\mathbf{E}^\bullet$ de M y aplicaciones de co-complejos $f^\bullet:\mathbf{D}^{\bullet L}\to\mathbf{E}^{\bullet M}$ y $g^\bullet:\mathbf{E}^{\bullet M}\to\mathbf{F}^{\bullet N}$ tal que

$$\mathbf{0}\to\mathbf{D}^\bullet\xrightarrow{f^\bullet}\mathbf{E}^\bullet\xrightarrow{g^\bullet}\mathbf{F}^\bullet\to\mathbf{0}$$

es una sucesión exacta de co-complejos. Por la forma en la que $\mathbf{E}^\bullet$ se construye en la prueba de la proposición 3.20

$$0\to D^i\xrightarrow{f^i}E^i\xrightarrow{g^i}F^i\to 0$$

es una sucesión exacta corta que escinde con $E^i=D^i\oplus F^i$ para cada $i\geq 0$. Como $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ preserva sucesiones exactas cortas que escinden, según el teorema 1.19 tenemos un diagrama conmutativo con columnas exactas y las filas son los co-complejos $\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet L})$, $\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{E}^{\bullet M})$ y $\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{F}^{\bullet N})$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, D^0) \arrow[r, "\alpha_*^0"] \arrow[d, "f_*^0"'] & \mathrm{Hom}_R(X, D^1) \arrow[r, "\alpha_*^1"] \arrow[d, "f_*^1"'] & \mathrm{Hom}_R(X, D^2) \arrow[r] \arrow[d, "f_*^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, E^0) \arrow[r, "\beta_*^0"] \arrow[d, "g_*^0"'] & \mathrm{Hom}_R(X, E^1) \arrow[r, "\beta_*^1"] \arrow[d, "g_*^1"'] & \mathrm{Hom}_R(X, E^2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, F^0) \arrow[r, "\gamma_*^0"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(X, F^1) \arrow[r, "\gamma_*^1"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(X, F^2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Aquí las columnas se obtuvieron al aplicar $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ a la sucesión exacta corta anterior, mientras que las filas resultan de aplicar $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ a las resoluciones proyectivas reducidas $\mathbf{D}^{\bullet L}$, $\mathbf{E}^{\bullet M}$ y $\mathbf{F}^{\bullet N}$. Por tanto,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet L}) \xrightarrow{f_*^\bullet} \mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{E}^{\bullet M}) \xrightarrow{g_*^\bullet} \mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{F}^{\bullet N}) \to 0$$

es una sucesión exacta corta de co-complejos donde $f_*^\bullet = \mathrm{Hom}_R(X, f^\bullet)$ y $g_*^\bullet = \mathrm{Hom}_R(X, g^\bullet)$. Ya que

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, L) = H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{D}^{\bullet L}))$$
$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, M) = H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{E}^{\bullet M}))$$
$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, N) = H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \mathbf{F}^{\bullet N}))$$

y

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, f) = H^i(\mathrm{Hom}_R(X, f^\bullet)) = H^i(f_*^\bullet)$$
$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(X, g) = H^i(\mathrm{Hom}_R(X, g^\bullet)) = H^i(g_*^\bullet)$$

por el teorema 1.29 obtenemos el resultado.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,L) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,f)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,M) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,g)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,N) \arrow[dll, "\overline{\Phi}^0"] \\
 & \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,L) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,f)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,M) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,g)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,N) \arrow[dll, "\overline{\Phi}^1"] \\
 & \overline{\mathrm{Ext}}^2_R(X,L) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^2_R(X,f)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^2_R(X,M) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^2_R(X,g)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^2_R(X,N) \arrow[dll, dashed, "\overline{\Phi}^{i-1}"] \\
 & \overline{\mathrm{Ext}}^i_R(X,L) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(X,f)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^i_R(X,M) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(X,g)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^i_R(X,N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Puesto que el funtor $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ es aditivo y exacto a la izquierda por el ítem $b)$ de la proposición 3.5 obtenemos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X,L) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta_L"] & \mathrm{Hom}_R(X,M) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_M"] & \mathrm{Hom}_R(X,N) \arrow[r, "\overline{\Phi}^0\eta_N"] \arrow[d, "\eta_N"] & \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,L) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,f)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,M) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,g)"] & \overline{\mathrm{Ext}}^0_R(X,N) \arrow[r, "\overline{\Phi}^0"] & \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(X,L) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

donde η_N, η_M y η_L son isomorfismos. $\square$

3.5 Los funtores $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(-,X)$

Proposición 3.22. Sea $\tau : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ una transformación natural entre los funtores covariantes y aditivos $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$. Entonces τ induce una transformación natural de los funtores derivados derechos $\eta^i_A : \mathfrak{R}^i\mathfrak{F}A \to \mathfrak{R}^i\mathfrak{G}A$, $i = 0, 1, 2, ...$

Demostración. Es similar a la prueba del teorema 3.13. $\square$

Sea M un $R-$módulo, recordemos que $\mathrm{Hom}_R(M,-) : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$ es un funtor covariante, aditivo y exacto a la izquierda. Si X es un $R-$módulo fijo y $\mathbf{E}^\bullet$ una resolución inyectiva de X:

$$\mathbf{E}^\bullet : 0 \to X \overset{\alpha^{-1}}{\to} E^0 \overset{\alpha^0}{\to} E^1 \to \cdots \to E^{i-1} \overset{\alpha^{i-1}}{\to} E^i \to \cdots$$

entonces al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ a la resolución reducida $\mathbf{E}^{\bullet X}$ se obtiene el co-complejo

$$\mathrm{Hom}_R(M,\mathbf{E}^{\bullet X}) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(M,E^0) \overset{\alpha^0_*}{\to} \mathrm{Hom}_R(M,E^1) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(M,E^i) \overset{\alpha^i_*}{\to} \cdots$$

tomamos ahora cohomología, esto es, formamos los módulos de cohomología en $\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{E}^{\bullet X})$ y definimos

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(M, X) := H^i(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{E}^{\bullet X})).$$

Consideremos ahora un homomorfismo de $R-$módulos $f : M \to N$. Como antes este mapeo induce una transformación natural dada por

$$\begin{aligned} f^* : \mathrm{Hom}_R(N, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, B) \\ h &\longmapsto f^*(h) := h \circ f \end{aligned}$$

entre los funtores covariantes y aditivos $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ y $\mathrm{Hom}_R(M, -)$. Según la proposición 3.22, esta transformación produce una aplicación de co-complejos $\mathbf{f}^* : \mathrm{Hom}_R(N, \mathbf{E}^{\bullet X}) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{E}^{\bullet X})$ y esta a su vez un $R-$homomorfismo

$$\eta_X^i : \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(N, X) \to \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(M, X).$$

Definimos $\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(f, X) = \eta_X^i := H^i(\mathbf{f}_*)$.

Proposición 3.23. $\mathrm{Ext}_R^i(-, X) : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$ es un funtor contravariante y aditivo, para cada $i \geq 0$.

Hay también una $\overline{\mathrm{Ext}}-$sucesión exacta larga en la primera variable correspondiente a cada sucesión exacta corta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos.

Proposición 3.24. Para cada sucesión exacta corta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos, existe una sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(L, X) \xrightarrow{\overline{\Phi}^0} \\ &\xrightarrow{\overline{\Phi}^0} \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(N, X) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(g,X)} \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(M, X) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(f,X)} \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(L, X) \xrightarrow{\overline{\Phi}^1} \cdots \\ &\cdots \xrightarrow{\overline{\Phi}^{i-1}} \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(N, X) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(g,X)} \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(M, X) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(f,X)} \overline{\mathrm{Ext}}_R^i(L, X) \xrightarrow{\overline{\Phi}^i} \dots \end{aligned}$$

donde $\overline{\Phi}^i$ es un homomorfismo de conexión para cada $i \geq 0$.

Hay resultados similares a los de las proposiciones 3.17 y 3.18. Las pruebas de las siguientes proposiciones son omitidas ya que ellas son análogas a las pruebas de las proposiciones antes mencionadas.

Proposición 3.25. Sea M un $R-$módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) M es inyectivo.

(b) $\overline{\operatorname{Ext}}^i_R(X, M) = 0$ para cada $R-$módulo X y cada $i \geq 1$.

(c) $\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(X, M) = 0$ para cada $R-$módulo X.

(d) $\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(X, M) = 0$ para cada $R-$módulo cíclico X.

(e) $\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(R/I, M) = 0$ para cada ideal I.

Proposición 3.26. Sea M un $R-$módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) M es proyectivo.

(b) $\overline{\operatorname{Ext}}^i_R(M, X) = 0$ para cada $R-$módulo X y cada $i \geq 1$.

(c) $\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(M, X) = 0$ para cada $R-$módulo X.

Definición 3.27. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ y $\mathscr{E}$ categorías y supongamos que $\mathscr{F} : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ es un funtor. Llamaremos a este funtor $\mathscr{F}$ de dos variables un *bifuntor*.

Teorema 3.28 (*Teorema fundamental de los bifuntores)*. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ categorías y supongamos que tenemos un conjunto parametrizado de funtores $\mathscr{F}_A : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ y $\mathscr{G}_B : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$, donde A es un objeto en $\mathscr{C}$ y B es un objeto en $\mathscr{D}$, tal que $\mathscr{F}_A(B) = \mathscr{G}_B(A)$ para todo A, B. Entonces existe un bifuntor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ tal que $\mathscr{F}(A, \bullet) = \mathscr{F}_A$ y $\mathscr{F}(\bullet, B) = \mathscr{G}_B$ si y solo si para cada par de morfismos $f : A \to A'$ en $\mathscr{C}$ y $g : B \to B'$ en $\mathscr{D}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} A'$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "g"'] & \mathscr{F}_A(B) = \mathscr{G}_B(A) \arrow[r, "\mathscr{G}_B(f)"] \arrow[d, "\mathscr{F}_A(g)"'] & \mathscr{G}_B(A') = \mathscr{F}_{A'}(B) \arrow[d, "\mathscr{F}_{A'}(g)"] \\
B' & \mathscr{F}_A(B') = \mathscr{G}_{B'}(A) \arrow[r, "\mathscr{G}_{B'}(f)"] & \mathscr{G}_{B'}(A') = \mathscr{F}_{A'}(B')
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $A \xrightarrow{f} A'$ y $B \xrightarrow{g} B'$ morfismos en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, respectivamente, entonces

$$\begin{array}{ll}
(f, id_B) : (A, B) \to (A', B) & (id_A, g) : (A, B) \to (A, B') \\
(id_{A'}, g) : (A', B) \to (A', B') & (f, id_{B'}) : (A, B') \to (A', B')
\end{array}$$

son morfismos en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$. Como

$$(id_{A'}, g)(f, id_B) = (id_{A'} f, g id_B) = (f, g) = (f id_A, id_{B'} g) = (f, id_{B'})(id_A, g)$$

al aplicar el bifuntor $\mathscr{F}$ a esta ecuación resulta

$$\mathscr{F}(id_{A'}, g)\mathscr{F}(f, id_B) = \mathscr{F}(f, id_{B'})\mathscr{F}(id_A, g)$$

como un diagrama conmutativo esta condición es

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(A,B) \arrow[r, "\mathscr{F}(f,id_B)"] \arrow[d, "\mathscr{F}(id_A,g)"'] & \mathscr{F}(A',B) \arrow[d, "\mathscr{F}(id_{A'},g)"] \\
\mathscr{F}(A,B') \arrow[r, "\mathscr{F}(f,id_{B'})"'] & \mathscr{F}(A',B')
\end{tikzcd}$$

Ya que $\mathscr{F}(A,B) = \mathscr{F}_A(B) = \mathscr{G}_B(A)$ para todo objeto A en $\mathscr{C}$ y B en $\mathscr{D}$ y

$$\mathscr{F}(f, id_B) = \mathscr{G}_B(f) \qquad \mathscr{F}(id_A, g) = \mathscr{F}_A(g)$$
$$\mathscr{F}(id_{A'}, g) = \mathscr{F}_{A'}(g) \qquad \mathscr{F}(f, id_{B'}) = \mathscr{G}_{B'}(f)$$

obtenemos el diagrama conmutativo del enunciado.

Recíprocamente, definimos el funtor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ que asigna a cada objeto (A,B) en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ el objeto $\mathscr{F}(A,B) = \mathscr{F}_A(B) = \mathscr{G}_B(A)$ en $\mathscr{E}$, y a cada morfismo $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$ en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ el morfismo $\mathscr{F}(f,g) = \mathscr{F}_{A'}(g)\mathscr{G}_B(f) = \mathscr{G}_{B'}(f)\mathscr{F}_A(g)$ en $\mathscr{E}$. A continuación se verificarán las propiedades requeridas para que $\mathscr{F}$ sea un funtor.

(1) Ya que $id_{(A,B)} = (id_A, id_B) : (A,B) \to (A,B)$ es el morfismo identidad en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(id_{(A,B)}) = \mathscr{F}(id_A, id_B) &= \mathscr{F}_A(id_B)\mathscr{G}_B(id_A) \\ &= id_{\mathscr{F}_A(B)} id_{\mathscr{G}_B(A)} = id_{\mathscr{F}_A(B)} = id_{\mathscr{F}(A,B)}\end{aligned}$$

para cada objeto (A,B) en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$.

(2) Sean $(A,B) \xrightarrow{(f,g)} (A',B')$ y $(A',B') \xrightarrow{(h,l)} (A'',B'')$ morfismos en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{F}((h,l)(f,g)) = \mathscr{F}(hf, lg) &= \mathscr{F}_{A''}(lg)\mathscr{G}_B(hf) \\ &= \mathscr{F}_{A''}(l)\mathscr{F}_{A''}(g)\mathscr{G}_B(h)\mathscr{G}_B(f) \\ &= \mathscr{F}_{A''}(l)\mathscr{G}_{B'}(h)\mathscr{F}_{A'}(g)\mathscr{G}_B(f) \\ &= \mathscr{F}(h,l)\mathscr{F}(f,g).\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad vale debido a que por hipótesis para los morfismos $h : A' \to A''$ en $\mathscr{C}$ y $g : B \to B'$ en $\mathscr{D}$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& A' \arrow[rr, "h"] & & A'' \\
B \arrow[d, "g"'] & \mathscr{F}_{A'}(B) = \mathscr{G}_B(A') \arrow[rr, "\mathscr{G}_B(h)"] \arrow[d, "\mathscr{F}_{A'}(g)"'] & & \mathscr{G}_B(A'') = \mathscr{F}_{A''}(B) \arrow[d, "\mathscr{F}_{A''}(g)"] \\
B' & \mathscr{F}_{A'}(B') = \mathscr{G}_{B'}(A') \arrow[rr, "\mathscr{G}_{B'}(h)"] & & \mathscr{G}_{B'}(A'') = \mathscr{F}_{A''}(B')
\end{tikzcd}$$

$\square$

Teorema 3.29. Para cada entero $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_R(-,-) : {}_R\mathbf{M}^{op} \times {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$ es un bifuntor covariante en la segunda variable y contravariante en la primera.

Demostración. Sean $A, A', B, B' \in {}_R\mathbf{M}$ y $f : A' \to A$, $g : B \to B'$ $R-$homomorfismos. Por el teorema anterior, basta demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i_R(A,B) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^i_R(f,B)"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^i_R(A,g)"'] & \mathrm{Ext}^i_R(A',B) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^i_R(A',g)"] \\
\mathrm{Ext}^i_R(A,B') \arrow[r, "\mathrm{Ext}^i_R(f,B')"'] & \mathrm{Ext}^i_R(A',B')
\end{tikzcd}$$

pero esto es consecuencia de la proposición 3.13. $\square$

Teorema 3.30. Para cada entero $i \geq 0$, $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(-,-) : {}_R\mathbf{M}^{op} \times {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$ es un bifuntor.

Teorema 3.31. La asignación de morfismos $\eta_{A,B} : \mathscr{F}(A,B) \to \mathscr{G}(A,B)$ es una transformación natural $\eta : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ para los bifuntores $\mathscr{F}, \mathscr{G} : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ si y solo si la asignación de mapeos $\eta_{A,\bullet}$ y $\eta_{\bullet,B}$ definen transformaciones naturales $\eta_{A,\bullet} : \mathscr{F}(A,\bullet) \to \mathscr{G}(A,\bullet)$ y $\eta_{\bullet,B} : \mathscr{F}(\bullet,B) \to \mathscr{G}(\bullet,B)$ para todos los objetos $A \in \mathscr{C}$ y $B \in \mathscr{D}$. Además, η es un isomorfismo natural si y solo si $\eta_{A,\bullet}$ y $\eta_{\bullet,B}$ lo son.

Demostración. Supongamos primero que $\eta_{A,\bullet}$ y $\eta_{\bullet,B}$ son transformaciones naturales para cada par de objetos A y B en sus respectivas categorías. Lo que necesitamos demostrar es que dado un morfismo $(A,B) \xrightarrow{(f,g)} (A',B')$ en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(A,B) \arrow[d, "(f,g)"'] & \mathscr{F}(A,B) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f,g)"'] & \mathscr{G}(A,B) \arrow[d, "\mathscr{G}(f,g)"] \\
(A',B') & \mathscr{F}(A',B') \arrow[r, "\eta_{A',B'}"] & \mathscr{G}(A',B')
\end{tikzcd}$$

esto es, $\mathscr{G}(f,g)\eta_{A,B} = \eta_{A',B'}\mathscr{F}(f,g)$. En efecto, como $(A,B) \xrightarrow{(f,g)} (A',B')$ es un morfismo en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ se tiene que $A \xrightarrow{f} A'$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ y $B \xrightarrow{g} B'$ es un morfismo en $\mathscr{D}$. Ya que $\eta_{A,\bullet} : \mathscr{F}(A,\bullet) \to \mathscr{G}(A,\bullet)$ y $\eta_{\bullet,B'} : \mathscr{F}(\bullet,B') \to \mathscr{G}(\bullet,B')$ son transformaciones naturales los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"'] & \mathscr{F}(A,B) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "\mathscr{F}(id_A,g)"'] & \mathscr{G}(A,B) \arrow[d, "\mathscr{G}(id_A,g)"] & \mathscr{F}(A,B') \arrow[r, "\eta_{A,B'}"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f,id_{B'})"'] & \mathscr{G}(A,B') \arrow[d, "\mathscr{G}(f,id_{B'})"] & A \arrow[d, "f"] \\ B' & \mathscr{F}(A,B') \arrow[r, "\eta_{A,B'}"] & \mathscr{G}(A,B') & \mathscr{F}(A',B') \arrow[r, "\eta_{A',B'}"] & \mathscr{G}(A',B') & A' \end{tikzcd}$$

esto es,

$$\mathscr{G}(f,id_{B'})\eta_{A,B'} = \eta_{A',B'}\mathscr{F}(f,id_{B'})$$

y

$$\mathscr{G}(id_A,g)\eta_{A,B} = \eta_{A,B'}\mathscr{F}(id_A,g).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \eta_{A',B'}\mathscr{F}(f,g) &= \eta_{A',B'}\mathscr{F}(f,id_{B'})\mathscr{F}(id_A,g) \\ &= \mathscr{G}(f,id_{B'})\eta_{A,B'}\mathscr{F}(id_A,g) \\ &= \mathscr{G}(f,id_{B'})\mathscr{G}(id_A,g)\eta_{A,B} \\ &= \mathscr{G}(f,g)\eta_{A,B}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $g : B \to B'$ un morfismo en $\mathscr{D}$. Ya que $id_A : A \to A$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ se tiene que $(id_A,g) : (A,B) \to (A,B')$ es un morfismo de $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$. Puesto que $\eta : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es una transformación natural tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} (A,B) \arrow[d, "(id_A,g)"'] & \mathscr{F}(A,B) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "\mathscr{F}(id_A,g)"'] & \mathscr{G}(A,B) \arrow[d, "\mathscr{G}(id_A,g)"] \\ (A,B') & \mathscr{F}(A,B') \arrow[r, "\eta_{A,B'}"] & \mathscr{G}(A,B') \end{tikzcd}$$

esto es, $\mathscr{G}(id_A,g)\eta_{A,B} = \eta_{A,B'}\mathscr{F}(id_A,g)$. Así, $\eta_{A,\bullet} : \mathscr{F}(A,\bullet) \to \mathscr{G}(A,\bullet)$ es una transformación natural.

De un modo similar se prueba que $\eta_{\bullet,B} : \mathscr{F}(\bullet,B) \to \mathscr{G}(\bullet,B)$ es también una transformación natural. $\square$

Lema 3.32. Considere el siguiente cubo

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & M_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & M_2 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
M_3 \arrow[rr] \arrow[dd] & & M_4 \arrow[dd] & \\
 & M_5 \arrow[rr] \arrow[dl] & & M_6 \arrow[dl] \\
M_7 \arrow[rr] & & M_8 &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas indican homomorfismos de $R-$módulos $f_{ij} : M_i \to M_j$. Supongamos que el cuadrado superior y todos los cuadrados que forman los lados del cubo son diagramas conmutativos. Si la función $f_{15} : M_1 \to M_5$ es un mapeo sobreyectivo, entonces el cuadrado inferior es un diagrama conmutativo.

Demostración. Observemos que $f_{78} \circ f_{57} \circ f_{15} = f_{68} \circ f_{56} \circ f_{15}$ ya que

$$\begin{aligned}
f_{78} \circ f_{57} \circ f_{15} &= f_{78} \circ f_{37} \circ f_{13} && \text{conmutatividad de la cara izquierda} \\
&= f_{48} \circ f_{34} \circ f_{13} && \text{conmutatividad de la cara frontal} \\
&= f_{48} \circ f_{24} \circ f_{12} && \text{conmutatividad de la cara superior} \\
&= f_{68} \circ f_{26} \circ f_{12} && \text{conmutatividad de la cara derecha} \\
&= f_{68} \circ f_{56} \circ f_{15} && \text{conmutatividad de la cara posterior}
\end{aligned}$$

Como f_{15} es sobreyectiva, es cancelable por la derecha, se sigue entonces de la igualdad que acabamos de demostrar que $f_{78} \circ f_{57} = f_{68} \circ f_{56}$. □

Lema 3.33. Supongamos que el diagrama de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & E' \arrow[r, "p'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces el siguiente diagrama también conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^i_R(M,u)"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i_R(M,E) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^i_R(M,p)"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i_R(M,C) \arrow[r, "\Phi^i"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Ext}^i_R(M,u')"] & \mathrm{Ext}^i_R(M,E') \arrow[r, "\mathrm{Ext}^i_R(M,p')"] & \mathrm{Ext}^i_R(M,C') \arrow[r, "\Phi'^i"] & \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,N') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(-,N) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_R(-,E) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}_R(-,C) \arrow[d, "g_*"'] \\
\mathrm{Hom}_R(-,N') \arrow[r, "u'_*"] & \mathrm{Hom}_R(-,E') \arrow[r, "p'_*"] & \mathrm{Hom}_R(-,C')
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de funtores contravariantes y transformaciones naturales como puede verificarse fácilmente. Sea ahora $\mathbf{P}_\bullet$ una resolución proyectiva de un $R-$módulo fijo M:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_{i+1} \overset{\alpha_{i+1}}{\to} P_i \to \cdots \to P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} M \to 0.$$

Entonces tenemos un diagrama conmutativo de co-complejos de $R-$módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M},N) \arrow[r, "\mathbf{u}_*"] \arrow[d, "\mathbf{f}_*"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M},E) \arrow[r, "\mathbf{p}_*"] \arrow[d, "\mathbf{h}_*"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M},C) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{g}_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M},N') \arrow[r, "\mathbf{u}'_*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M},E') \arrow[r, "\mathbf{p}'_*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet M},C') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El resultado es ahora consecuencia del dual del corolario 1.28. □

Proposición 3.34. Los bifuntores Ext^i_R y $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R$ son naturalmente equivalentes para $i \geq 0$.

Demostración. La prueba es por inducción. Sea M un $R-$módulo fijo e $i = 0$. Los funtores $\mathrm{Ext}^0_R(M,-)$ y $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ son naturalmente equivalentes, como también lo son los funtores $\overline{\mathrm{Ext}}^0_R(M,-)$ y $\mathrm{Hom}_R(M,-)$. Ya que la equivalencia natural es una relación de equivalencia resulta que $\mathrm{Ext}^0_R(M,-)$ y $\overline{\mathrm{Ext}}^0_R(M,-)$ son naturalmente equivalentes.

Supongamos que la sucesión exacta corta $0 \to N \overset{u}{\to} E \overset{p}{\to} C \to 0$ representa una inmersión de N en un $R-$módulo inyectivo E. Entonces la proposición 3.16 produce la Ext-sucesión exacta larga

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \overset{u_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M,E) \overset{p_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M,C) \overset{\Phi^0}{\longrightarrow} \\
&\overset{\Phi^0}{\longrightarrow} \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \overset{\mathrm{Ext}^1_R(M,u)}{\longrightarrow} \mathrm{Ext}^1_R(M,E) \overset{\mathrm{Ext}^1_R(M,p)}{\longrightarrow} \mathrm{Ext}^1_R(M,C) \overset{\Phi^1}{\longrightarrow} \cdots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

y de la proposición 3.21 obtenemos la $\overline{\mathrm{Ext}}-$sucesión exacta larga

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \overset{u_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M,E) \overset{p_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M,C) \overset{\overline{\Phi}^0}{\longrightarrow} \\
&\overset{\overline{\Phi}^0}{\longrightarrow} \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N) \overset{\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,u)}{\longrightarrow} \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,E) \overset{\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,p)}{\longrightarrow} \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,C) \overset{\overline{\Phi}^1}{\longrightarrow} \cdots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por las proposiciones 3.18 y 3.25, tenemos $\mathrm{Ext}_R^i(M,E)=0$ y $\overline{\mathrm{Ext}}_R^i(M,E)=0$ para $i=1,2,3,\cdots$, así tenemos el siguiente diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M,E) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(M,C) \arrow[r, "\Phi^0"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\eta^1_{MN}"'] & \mathrm{Ext}_R^1(M,E)=0 \\
\mathrm{Hom}_R(M,E) \arrow[r, "p_*"] & \mathrm{Hom}_R(M,C) \arrow[r, "\overline{\Phi}^0"] & \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(M,N) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(M,E)=0
\end{tikzcd}$$

donde $\eta^1_{MN}:\mathrm{Ext}_R^1(M,N)\to\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(M,N)$ se define como sigue. Sea $\beta\in\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$. Como Φ^0 es sobre hay un $\alpha\in\mathrm{Hom}_R(M,C)$ tal que $\Phi^0(\alpha)=\beta$. Definimos $\eta^1_{MN}(\beta)=\overline{\Phi}^0(\alpha)$. Debemos demostrar que η^1_{MN} es independiente de la elección de α. Sea $\alpha'\in\mathrm{Hom}_R(M,C)$ otro elemento tal que $\Phi^0(\alpha')=\beta=\Phi^0(\alpha)$, entonces $\alpha'-\alpha\in\mathrm{Ker}(\Phi^0)$. Como las filas superior e inferior del diagrama anterior son exactas tenemos $\mathrm{Ker}(\Phi^0)=\mathrm{Im}(p_*)=\mathrm{Ker}(\overline{\Phi}^0)$, de manera que $\alpha'-\alpha\in\mathrm{Ker}(\overline{\Phi}^0)$ y por tanto $\overline{\Phi}^0(\alpha')=\overline{\Phi}^0(\alpha)$.
Es claro que η^1_{MN} es un homomorfismo y que el diagrama de arriba es conmutativo, se sigue entonces que η^1_{MN} es en realidad un isomorfismo.

Sean ahora N' un $R-$módulo , $f:N\to N'$ un mapeo $R-$lineal y supongamos que la sucesión exacta corta $0\to N'\overset{u'}{\to}E'\overset{p'}{\to}C'\to 0$ es una inmersión del $R-$módulo N' en el $R-$módulo inyectivo E', entonces por repetición del proceso anterior obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M,E') \arrow[r, "p'_*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(M,C') \arrow[r, "\Phi'^0"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}_R^1(M,N') \arrow[r] \arrow[d, "\eta^1_{MN'}"'] & \mathrm{Ext}_R^1(M,E')=0 \\
\mathrm{Hom}_R(M,E') \arrow[r, "p'_*"] & \mathrm{Hom}_R(M,C') \arrow[r, "\overline{\Phi}'^0"] & \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(M,N') \arrow[r] & \overline{\mathrm{Ext}}_R^1(M,E')=0
\end{tikzcd}$$

Además, usando la inyectividad del $R-$módulo E' podemos ver que hay un mapeo inducido $g:C\to C'$. En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "u'\circ f"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "h"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & E' \arrow[r, "p'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ya que E' es inyectivo, hay un mapeo $R-$lineal $h:E\to E'$ tal que $h\circ u=u'\circ f$. Definamos el mapeo $g:C\to C'$ de la siguiente manera. Sea $y\in C$. Como p es sobre existe un $x\in E$ tal que $p(x)=y$, entonces $p'(h(x))\in C'$. Definimos $g(y)=p'(h(x))$. Debemos demostrar que g está bien definida. Sea $x'\in E$ con $p(x')=y=p(x)$, entonces $x'-x\in\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Im}(u)$, luego $x'-x=u(z)$ para cierto $z\in N$. Al aplicar h a esta última igualdad se obtiene $h(x'-x)=h(u(z))=u'(f(z))$.

Se sigue que $h(x'-x) \in \operatorname{Im}(u') = \operatorname{Ker}(p')$, pero entonces $p'(h(x')) = p'(h(x))$.

Estamos en condiciones de demostrar que $\eta^1_{M\bullet}$ es una transformación natural. La discusión hasta este punto da como resultado el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_R(M,C) \arrow[rr, "g_*"] \arrow[dl, "(id_M)^*"'] \arrow[dd, "\Phi^0"] & & \operatorname{Hom}_R(M,C') \arrow[dl, "(id_M)^*"'] \arrow[dd, "\Phi'^0"] \\
\operatorname{Hom}_R(M,C) \arrow[rr, "g_*"] \arrow[dd, "\overline{\Phi}^0"'] & & \operatorname{Hom}_R(M,C') \arrow[dd, "\overline{\Phi'}^0"] & \\
 & \operatorname{Ext}^1_R(M,N) \arrow[rr, "\operatorname{Ext}^1_R(M,f)"] \arrow[dl, "\eta^1_{MN}"'] & & \operatorname{Ext}^1_R(M,N') \arrow[dl, "\eta^1_{MN'}"] \\
\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(M,N) \arrow[rr, "\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(M,f)"] & & \overline{\operatorname{Ext}}^1_R(M,N') &
\end{tikzcd}
$$

Afirmamos que este diagrama es conmutativo. En efecto, el cuadrado posterior es conmutativo por la naturalidad de la Ext-sucesión exacta larga, conforme al lema 3.33, el cuadrado frontal por razones análogas para $\overline{\operatorname{Ext}}$. El cuadrado de la izquierda es conmutativo por la definición de η^1_{MN}, el cuadrado de la derecha por la definición de $\eta^1_{MN'}$, y la conmutatividad del cuadrado superior es obvia. Por el lema 3.32 se deduce que el cuadrado inferior es también conmutativo, ya que el mapeo Φ^0 es sobreyectivo. Por lo tanto, $\eta^1_{M\bullet}$ es un isomorfismo natural, de esta manera los funtores $\operatorname{Ext}^1_R(M,-)$ y $\overline{\operatorname{Ext}}^1_R(M,-)$ son naturalmente equivalentes.

Para finalizar, supongamos que se han hallado isomorfismos naturales $\eta^0_{M\bullet}$, $\eta^1_{M\bullet}$, $\cdots$, $\eta^{i-1}_{M\bullet}$ que se ajustan a los requirimientos de la proposición. Considerando las sucesiones (3.2) y (3.3) nuevamente, vemos que hay un diagrama conmuattivo con filas exactas

$$
\begin{tikzcd}
0 = \operatorname{Ext}^{i-1}_R(M,E) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^{i-1}_R(M,C) \arrow[r, "\Phi^i"] \arrow[d, "\eta^{i-1}_{MC}"'] & \operatorname{Ext}^i_R(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\eta^i_{MN}"'] & \operatorname{Ext}^i_R(M,E) = 0 \\
0 = \overline{\operatorname{Ext}}^{i-1}_R(M,E) \arrow[r] & \overline{\operatorname{Ext}}^{i-1}_R(M,C) \arrow[r, "\overline{\Phi}^i"] & \overline{\operatorname{Ext}}^i_R(M,N) \arrow[r] & \overline{\operatorname{Ext}}^i_R(M,E) = 0
\end{tikzcd}
$$

Un argumento paralelo al dado para $\eta^1_{M\bullet}$ demuestra que $\eta^i_{M\bullet}$ es un isomorfismo natural, así se deduce por inducción que $\operatorname{Ext}^i_R(M,-)$ y $\overline{\operatorname{Ext}}^i_R(M,-)$ son funtores naturalmente equivalentes para cada $i \geq 0$.

Mediante un argumento similar se demuestra que $\operatorname{Ext}^i_R(-,N)$ y $\overline{\operatorname{Ext}}^i_R(-,N)$ son funtores contravariantes naturalmente equivalentes para cada $i \geq 0$. En consecuencia, por el teorema 3.31, los bifuntores Ext^i_R y $\overline{\operatorname{Ext}}^i_R$ son naturalmente equivalentes para cada $i \geq 0$. $\square$

3.6 Los funtores derivados izquierdos del funtor $-\otimes_R X$

En esta sección, desarrollaremos el funtor derivado a la izquierda del funtor producto tensorial $-\otimes_R X$. Recordando siempre que R es un anillo conmutativo con identidad no nula.
Sea X un R-módulo dado, y supongamos que

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_i \overset{\alpha_i}{\to} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} M \to 0$$

es una resolución proyectiva del R-módulo M. Si aplicamos el funtor covariante $-\otimes_R X$ al complejo reducido $\mathbf{P}_{\bullet M}$, obtenemos el complejo $\mathbf{P}_{\bullet M} \otimes_R X$:

$$\ldots \to P_i \otimes_R X \overset{\alpha_i \otimes id_X}{\longrightarrow} P_{i-1} \otimes_R X \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \otimes_R X \overset{\alpha_1 \otimes id_X}{\longrightarrow} P_0 \otimes_R X \to 0.$$

Definamos para cada $i \geq 0$,

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, X) := \mathrm{H}_i(\mathbf{P}_{\bullet M} \otimes_R X).$$

Sea N otro R-módulo y supongamos que $\mathbf{Q}_\bullet$ es una resolución proyectiva de N. Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos entonces, a través del lema 2.38 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_i \otimes_R X \arrow[r, "\alpha_i \otimes_R id_X"] \arrow[d, "f_i \otimes_R id_X"'] & P_{i-1} \otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1} \otimes_R id_X"'] & \cdots P_1 \otimes_R X \arrow[r, "\alpha_1 \otimes id_X"] \arrow[d, "f_1 \otimes id_X"'] & P_0 \otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "f_0 \otimes id_X"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_i \otimes_R X \arrow[r, "\beta_i \otimes_R id_X"] & Q_{i-1} \otimes_R X \arrow[r] & \cdots Q_1 \otimes_R X \arrow[r, "\beta_1 \otimes id_X"] & Q_0 \otimes_R X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $f_\bullet : \mathbf{P}_{\bullet M} \to \mathbf{Q}_{\bullet N}$ es una aplicación de complejos generada por f. Entonces

$$\mathrm{Tor}_i^R(f, X) := \mathrm{H}_i(f_\bullet \otimes_R X) : \mathrm{H}_i(\mathbf{P}_{\bullet,M} \otimes_R X) \to \mathrm{H}_i(\mathbf{P}_{\bullet,N} \otimes_R X),$$

De esta manera se obtiene un funtor aditivo y covariante

$$\mathrm{Tor}_i^R(f, X) : \mathrm{Tor}_i^R(M, X) \to \mathrm{Tor}_i^R(N, X).$$

tal que $\mathrm{Tor}_0^R(-, X) = -\otimes_R X$ según la proposición 3.5.

Definición 3.35. El funtor covariante $\mathrm{Tor}_i^R(-, X)$, se llama el *i-ésimo funtor torsión de* $-\otimes_R X$, o simplemente funtor covariante Tor, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Ejemplo 3.36. Consideremos el $\mathbb{Z}_4$-módulo $\mathbb{Z}_2$ y la siguiente resolución proyectiva de $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0\,,$$

donde $\alpha_i(\overline{a}) = \overline{2a}$ para cada $i \geq 1$ y $\alpha_0(\overline{a}) = \overline{a}$. Tensorizando por $\mathbb{Z}_2$ la resolución reducida de $\mathbb{Z}_2$ como un $\mathbb{Z}_4$-módulo, obtenemos el complejo $\mathbf{P}_{\bullet\mathbb{Z}_2} \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2$:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_i \otimes id_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \cdots \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_1 \otimes id_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 .$$

Obsérvese que para $i \geq 1$, las aplicaciones $\alpha_i \otimes id_{\mathbb{Z}_2} = 0$ se anulan, de manera que la sucesión anterior toma la forma

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 .$$

A continuación calculemos los módulos $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ para $i \geq 0$. Por el ítem (a) de la proposición 3.5 se tiene que $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2$. Además, la última sucesión exacta larga puede sustituirse por

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

de donde, por cálculo directo, tenemos que $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ para $i \geq 1$.

La sucesión dada en la siguiente proposición se llama la Tor-sucesión exacta larga en la primera variable.

Proposición 3.37. Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión exacta corta de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos, entonces para cualquier $R-$módulo X, hay una sucesión de homología exacta larga

$$\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(L, X) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_i^R(f,X)} \operatorname{Tor}_i^R(M, X) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_i^R(g,X)} \operatorname{Tor}_i^R(N, X) \xrightarrow{\Phi_i} \\
&\ldots \xrightarrow{\Phi_2} \operatorname{Tor}_1^R(L, X) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_1^R(f,X)} \operatorname{Tor}_1^R(M, X) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_1^R(g,X)} \operatorname{Tor}_1^R(N, X) \xrightarrow{\Phi_1} \\
&L \otimes_R X \xrightarrow{f \otimes id_X} M \otimes_R X \xrightarrow{g \otimes id_X} N \otimes_R X \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

donde Φ_i es un homomorfismo de conexión para cada $i \geq 1$.

Demostración. Sean $\mathbf{P}_\bullet$ y $\mathbf{R}_\bullet$ resoluciones proyectivas de los $R-$módulos L y N respectivamente, entonces, por el lema de la Herradura hay una resolución proyectiva $\mathbf{Q}_\bullet$ de M y aplicaciones de complejos $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \to \mathbf{Q}_\bullet$ y $g_\bullet : \mathbf{Q}_\bullet \to \mathbf{R}_\bullet$ tal que

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet,L} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{Q}_{\bullet,M} \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{R}_{\bullet,N} \longrightarrow 0 ,$$

es una sucesión exacta corta de complejos.
En la demostración del lema de la Herradura, $\mathbf{Q}_\bullet$ fue construido de forma tal que

$$0 \to P_i \xrightarrow{f_i} Q_i = P_i \oplus R_i \xrightarrow{g_i} R_i \to 0$$

es una sucesión exacta corta que escinde, para cada $i \geq 0$. Aplicando $- \otimes_R X$ a esta sucesión exacta corta y teniendo en cuenta que $-\otimes_R X$ preserva sucesiones exactas cortas que escinden, según el teorema 1.19, obtenemos las columnas exactas del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \otimes_R X \arrow[r, "\alpha_2 \otimes id_X"] \arrow[d, "f_2 \otimes id_X"'] & P_1 \otimes_R X \arrow[r, "\alpha_1 \otimes id_X"] \arrow[d, "f_1 \otimes id_X"'] & P_0 \otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "f_0 \otimes id_X"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \otimes_R X \arrow[r, "\beta_2 \otimes id_X"] \arrow[d, "g_2 \otimes id_X"'] & Q_1 \otimes_R X \arrow[r, "\beta_1 \otimes id_X"] \arrow[d, "g_1 \otimes id_X"'] & Q_0 \otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "g_0 \otimes id_X"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R_2 \otimes_R X \arrow[r, "\gamma_2 \otimes id_X"] \arrow[d] & R_1 \otimes_R X \arrow[r, "\gamma_1 \otimes id_X"] \arrow[d] & R_0 \otimes_R X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Las filas de este diagrama son obtenidas al aplicar $- \otimes_R X$ a las resoluciones proyectivas reducidas $\mathbf{P}_{\bullet L}$, $\mathbf{Q}_{\bullet M}$ y $\mathbf{R}_{\bullet N}$. Hemos construido así, una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to \mathbf{P}_{\bullet,L} \otimes_R X \overset{f_\bullet \otimes id_X}{\longrightarrow} \mathbf{Q}_{\bullet,M} \otimes_R X \overset{g_\bullet \otimes id_X}{\longrightarrow} \mathbf{R}_{\bullet,N} \otimes_R X \to 0.$$

Ahora, tomando homología en la sucesión exacta corta de complejos anterior y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_i^R(L, X) &= \mathfrak{L}_i L \otimes_R X = H_i(\mathbf{P}_{\bullet L} \otimes_R X) \\
\mathrm{Tor}_i^R(M, X) &= \mathfrak{L}_i M \otimes_R X = H_i(\mathbf{Q}_{\bullet M} \otimes_R X) \\
\mathrm{Tor}_i^R(N, X) &= \mathfrak{L}_i N \otimes_R X = H_i(\mathbf{R}_{\bullet N} \otimes_R X)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_i^R(f, X) &= \mathfrak{L}_i f \otimes_R X = H_i(f_\bullet \otimes id_X) \\
\mathrm{Tor}_i^R(g, X) &= \mathfrak{L}_i g \otimes_R X = H_i(g_\bullet \otimes id_X)
\end{aligned}$$

obtenemos, por la proposición 1.27 la sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_i^R(L,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_i^R(f,X)"] & \mathrm{Tor}_i^R(M,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_i^R(g,X)"] & \mathrm{Tor}_i^R(N,X) \arrow[dll, dashed, "\Phi_i"'] \\
 & \mathrm{Tor}_2^R(L,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_2^R(f,X)"] & \mathrm{Tor}_2^R(M,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_2^R(g,X)"] & \mathrm{Tor}_2^R(N,X) \arrow[dll, "\Phi_2"'] \\
 & \mathrm{Tor}_1^R(L,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(f,X)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(g,X)"] & \mathrm{Tor}_i^R(N,X) \arrow[dll, "\Phi_1"'] \\
 & L \otimes_R X \arrow[r, "f\otimes id_X"] & M \otimes_R X \arrow[r, "g\otimes id_X"] & N \otimes_R X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ya que el funtor covariante $-\otimes_R X$ es exacto a la derecha y aditivo, por el ítem $a)$ de la proposición 3.5 tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(N,X) \arrow[r, "\Phi_1\circ\eta_L^{-1}"] \arrow[d, equal] & L\otimes_R X \arrow[r, "f\otimes id_X"] \arrow[d, "\eta_L"'] & M\otimes_R X \arrow[r, "g\otimes id_X"] \arrow[d, "\eta_M"'] & N\otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(N,X) \arrow[r, "\Phi_1"] & \mathrm{Tor}_0^R(L,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_0^R(f,X)"] & \mathrm{Tor}_0^R(M,X) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_0^R(g,X)"] & \mathrm{Tor}_0^R(N,X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde η_L, η_N y η_M son isomorfismos. Como la fila inferior es exacta se sigue que la fila superior también lo es. □

3.7 Los funtores $\mathrm{Tor}_i^R(X,-)$

Proposición 3.38. Sea $\tau : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ una transformación natural entre los funtores covariantes y aditivos $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : {}_R\mathbf{M} \to {}_R\mathbf{M}$. Entonces τ induce una transformación natural de los funtores derivados izquierdos $\eta_A^i : \mathfrak{L}_i\mathfrak{F}A \to \mathfrak{L}_i\mathfrak{G}A$, $i = 0, 1, 2, ...$

Demostración. Es análoga a la prueba del teorema 3.13. □

Sea M un $R-$módulo. Como sabemos, $-\otimes_R M$ es un funtor covariante, aditivo y exacto a la derecha en la categoría de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos.
Sean X un $R-$módulo fijo y $\mathbf{P}_\bullet$ una resolución proyectiva de X:

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_i \overset{\alpha_i}{\to} P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \overset{\alpha_1}{\to} P_0 \overset{\alpha_0}{\to} X \to 0$$

Al tensorizar por M la resolución reducida $\mathbf{P}_{\bullet X}$ se obtiene el complejo $\mathbf{P}_{\bullet X} \otimes_R M$:

$$\cdots \to P_i \otimes_R M \overset{\alpha_i\otimes id_M}{\to} P_{i-1} \otimes_R M \to \cdots \to P_1 \otimes_R M \overset{\alpha_1\otimes id_M}{\to} P_0 \otimes_R M \to 0$$

de manera que podemos calcular el $i-$ésimo módulo de homología del complejo $\mathbf{P}_{\bullet X} \otimes_R M$ y obtener

$$\mathrm{Tor}_i^R(X, M) := H_i(\mathbf{P}_{\bullet X} \otimes_R M).$$

Consideremos ahora un homomorfismo de $R-$módulos $f : M \to N$. Este mapeo produce una transformación natural definida por

$$id_A \otimes f =: \tau_A : A \otimes_R M \to A \otimes_R N$$

entre los funtores covariantes y aditivos $- \otimes_R M$ y $- \otimes_R N$. Entonces por la proposición 3.38, para cada $i \in \mathbb{Z}$, hay un $R-$homomorfismo

$$\eta_X^i : \mathrm{Tor}_i^R(X, M) \to \mathrm{Tor}_i^R(X, N).$$

Definimos $\mathrm{Tor}_i^R(X, f) = \eta_X^i = H_i(\tau_{\mathbf{P}_{\bullet X}})$.

Proposición 3.39. Para cada $i \geq 0$, $\mathrm{Tor}_i^R(X, -)$ es un funtor covariante y aditivo.

La prueba de la siguiente proposición es análoga a la de la proposición 3.5.

Proposición 3.40. Para cada $R-$módulo M, $\mathrm{Tor}_0^R(X, M) \cong X \otimes_R M$ de manera que $\mathrm{Tor}_0^R(X, -)$ y $X \otimes_R -$ son funtores naturalmente equivalentes.

Existe tambiém una Tor-sucesión exacta larga en la segunda variable.

Proposición 3.41. Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión exacta corta de $R-$módulos y de homomorfismos de $R-$módulos, entonces para cualquier $R-$módulo X, hay una sucesión de homología exacta larga

$$\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(X, L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(X, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(X, N) \longrightarrow \\
&\ldots \xrightarrow{\Phi_2} \mathrm{Tor}_1^R(X, L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(X, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(X, N) \xrightarrow{\Phi_1} \\
&X \otimes_R L \longrightarrow X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R N \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

donde Φ_i es un homomorfismo de conexión para cada $i \geq 1$.

Demostración. Los homomorfismos f y g dan lugar a la transformaciones naturales definidas por

$$id_A \otimes f =: \tau_A : A \otimes_R L \to A \otimes_R M \qquad id_A \otimes g =: \rho_A : A \otimes_R M \to A \otimes_R N$$

Sea $\mathbf{P}_\bullet$ una resolución proyectiva del $R-$módulo X. Entonces se obtienen los mapeos de complejos

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathbf{P}_{\bullet X} \otimes_R L : \arrow[d, "\tau_{\mathbf{P}_{\bullet X}}"'] & \cdots \arrow[r] & P_2 \otimes_R L \arrow[r, "\alpha_2 \otimes id_L"] \arrow[d, "id_{P_2} \otimes f"'] & P_1 \otimes_R L \arrow[r, "\alpha_1 \otimes id_L"] \arrow[d, "id_{P_1} \otimes f"'] & P_0 \otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "id_{P_0} \otimes f"] & 0 \\
\mathbf{P}_{\bullet X} \otimes_R M : \arrow[d, "\rho_{\mathbf{P}_{\bullet X}}"'] & \cdots \arrow[r] & P_2 \otimes_R M \arrow[r, "\alpha_2 \otimes id_M"] \arrow[d, "id_{P_2} \otimes g"'] & P_1 \otimes_R M \arrow[r, "\alpha_1 \otimes id_M"] \arrow[d, "id_{P_1} \otimes g"'] & P_0 \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "id_{P_0} \otimes g"] & 0 \\
\mathbf{P}_{\bullet X} \otimes_R N : & \cdots \arrow[r] & P_2 \otimes_R N \arrow[r, "\alpha_2 \otimes id_N"] \arrow[d] & P_1 \otimes_R N \arrow[r, "\alpha_1 \otimes id_N"] \arrow[d] & P_0 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior conmuta porque tanto τ como ρ son transformaciones naturales y las columnas son exactas porque como P_i es un $R-$módulo proyectivo, por el corolario 2.32, P_i es plano, de esto y de la teorema 1.18 se deduce que el funtor $P_i \otimes_R -$ es exacto y por tanto preserva sucesiones exactas cortas. De esta forma, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet,X} \otimes_R L \xrightarrow{\tau_{\mathbf{P}_{\bullet X}}} \mathbf{P}_{\bullet,X} \otimes_R M \xrightarrow{\rho_{\mathbf{P}_{\bullet X}}} \mathbf{P}_{\bullet,X} \otimes_R N \longrightarrow 0$$

Tomando ahora homología y empleando las proposiciones 1.27 y 3.40 obtendremos la Tor-sucesión exacta larga en la segunda variable. $\square$

Por lo tanto, tenemos dos funtores covariantes y aditivos

$$\mathrm{Tor}_i^R(-, X) : M_R \to M_R \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Tor}_i^R(X, -) : M_R \to M_R$$

para cada $i \geq 0$.

En forma similar a como se hizo en el caso del funtor extensión podemos hallar los funtores derivados izquierdos $\overline{\mathrm{Tor}}_i^R(X, -)$ del funtor covariante $X \otimes_R -$ así como los funtores $\overline{\mathrm{Tor}}_i^R(-, X)$ para luego demostrar que los bifuntores $\overline{\mathrm{Tor}}_i^R$ y Tor_i^R son naturalmente equivalentes.

Así, para M y N $R-$módulos cualesquiera $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ puede obtenerse como el valor del $i-$ésimo funtor derivado izquierdo de $-\otimes_R N$ en M o el valor de $i-$ésimo funtor derivado izquierdo de $M \otimes_R -$ en N. A un funtor con esta propiedad se le llama bifuntor balanceado o equilibrado.

Lema 3.42. Si P es un R-módulo proyectivo, entonces $\mathrm{Tor}_i^R(N, P) = 0$, para cualquier R-módulo N y para todo $i \geq 1$.

Demostración. Como el functor $\operatorname{Tor}_i^R(N,-)$ es un funtor derivado a la izquerda de $N\otimes_R -$, esto es, $\mathfrak{L}_i(N\otimes_R -)=\operatorname{Tor}_i^R(N,-)$, la demostración de este lema se sigue de la proposición 3.5, ítem a). □

A continuación, tenemos una conexión que relaciona R-módulos planos con el funtor Tor.

Teorema 3.43. Para cualquier R-módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) M es plano;

(2) $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)=0$, para cualquier R-módulo N y para todo $i\geq 1$;

(3) $\operatorname{Tor}_1^R(M,N)=0$, para cualquier R-módulo N;

(4) $\operatorname{Tor}_1^R(M,N)=0$, para todo R-módulo N finitamente generado;

(5) $\operatorname{Tor}_1^R(M,R/I)=0$, para todo ideal finitamente generado $I\subset R$.

Demostración. $(1)\Rightarrow(2)$. Vamos a probar por inducción sobre i. Sea P un R-módulo plano y sea N un R-módulo cualquiera. Entonces, por el corolario 2.18, existe una sucesión exacta corta

$$0\to K\to P_1\to N\to 0$$

de R-módulos, donde P_1 un R-módulo proyectivo. Para $i=1$, tenemos la sucesión exacta de la forma:

$$0=\operatorname{Tor}_1^R(P,P_1)\longrightarrow\operatorname{Tor}_1^R(P,N)\longrightarrow P\otimes_R K\longrightarrow P\otimes_R P_1$$

donde $\operatorname{Tor}_1^R(P,P_1)=0$ por el lema 3.42. Sin embargo, como P es un R-módulo plano tenemos que $P\otimes_R K\longrightarrow P\otimes_R P_1$ es una aplicación inyectiva. Se sigue entonces que $\operatorname{Tor}_1^R(P,N)=0$ ya que

$$\operatorname{Tor}_1^R(P,N)\cong\operatorname{Im}(\operatorname{Tor}_1^R(P,N)\longrightarrow P\otimes_R K)=\operatorname{Ker}(P\otimes_R K\longrightarrow P\otimes_R P_1)=0.$$

Ahora asumiendo la hipótesis de inducción, de la sucesión exacta corta anterior obtenemos la sucesión exacta larga:

$$\cdots\longrightarrow\operatorname{Tor}_i^R(P,P_1)\longrightarrow\operatorname{Tor}_i^R(P,N)\longrightarrow\operatorname{Tor}_{i-1}^R(P,K)\longrightarrow\cdots\ .$$

Al usar el lema 3.42, vemos que $\operatorname{Tor}_i^R(P,P_1)=0$ y por hipótesis de inducción tenemos que $\operatorname{Tor}_{i-1}^R(P,K)=0$. Se sigue $\operatorname{Tor}_i^R(P,N)=0$ esto pues

$$0=\operatorname{Im}(\operatorname{Tor}_i^R(P,P_1)\to\operatorname{Tor}_i^R(P,N))=\operatorname{Ker}(\operatorname{Tor}_i^R(P,N)\to\operatorname{Tor}_{i-1}^R(P,K))$$

$$= \mathrm{Tor}_i^R(P, N).$$

Las implicaciones $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$ son directas.

$(5) \implies (1)$. Sea I un ideal finitamente generado del anillo R, entonces la sucesión exacta corta $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ da lugar a la Tor-sucesión exacta larga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(P, R/I) \to P \otimes_R I \to P \otimes_R R \to P \otimes_R R/I \to 0.$$

Por hipótesis, $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$, de manera que la sucesión $0 \to M \otimes_R I \to M \otimes_R R$ es exacta; así, el teorema 2.30 demuestra que M es plano. $\square$

Proposición 3.44. Sea M'' un R-módulo las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) M'' es plano;

(2) Para cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

y cualquier R-módulo N la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta y supongamos que M'' es plano. Entonces, por la proposición 3.43, $\mathrm{Tor}_1^R(M'', N) = 0$ para cualquier R-módulo N y la sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M'', N) \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

demuestra que (1) implica (2).

Recíprocamente, asuma que vale (2) y considere una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de modo que M sea proyectivo. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

es exacta para cualquier R-módulo arbitrario N por hipótesis. Por el lema 3.42, $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(N, M) = 0$ pues M es proyectivo y la sucesión exacta larga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \to \mathrm{Tor}_1^R(M'', N) \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$$

demuestra que $\operatorname{Tor}_1^R(M'', N) = 0$, esto porque

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor}_1^R(M'', N) \cong \operatorname{Im}(\operatorname{Tor}_1^R(M'', N) \to M' \otimes_R N) &= \operatorname{Ker}(M' \otimes_R N \to M \otimes_R N)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora por la proposición 3.43, (2) implica (1). $\square$

Bibliografía

[1] Bland, Paul E. (2011): *Rings and their modules*. , Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/New York.

[2] Blyth, T. S. (1977): *Module theory*. , Oxford University Press.

[3] Brodman, M. (2005): *Four Lectures on local cohomology*. , University of Zurich.

[4] Hilton, P.J. / Stammbach, U. (1971): *A Course in Homological Algebra*. , Springer-Verlag, New York.

[5] Hungerford, Thomas W. (1974): *Algebra*. , Springer-Verlag New York, Inc.

[6] Pareigis, Bodo (1970): *Categories and functors*. , Academic Press, Inc.

[7] Rotman, Joseph J. (2009): *An introduction to homological algebra*. , Springer Science+Business Media, LLC.

[8] Vermani, L. R. (2003): *An elementary approach to homological algebra*. , CHAPMAN & HALL/CRC.