

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL  
PERÚ**

**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**



**Teorema de Pick**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA LA  
OBTENCIÓN DEL GRADO DE BACHILLER EN  
CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA**

**AUTOR**

José Carlos Manuel Sotomayor Ponte

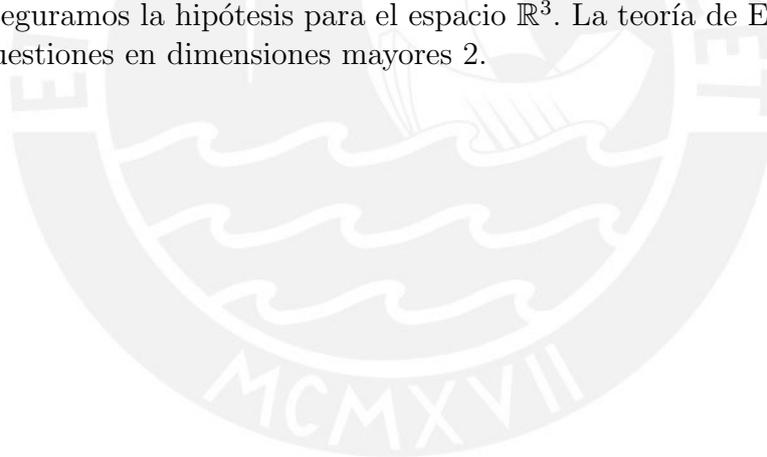
**ASESOR**

Alfredo Bernardo Poirier Schmitz

Lima, octubre 2020

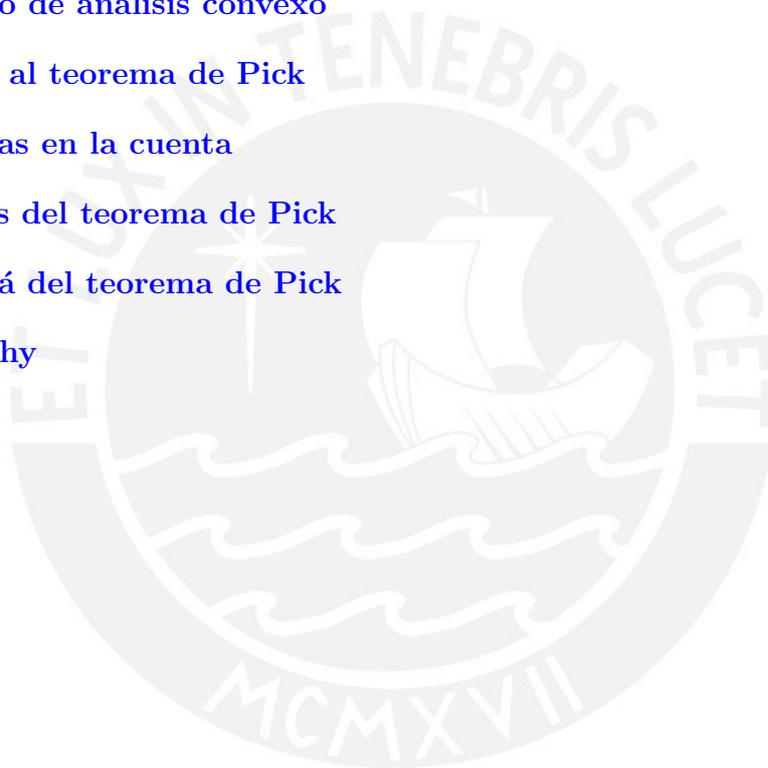
# Resumen

Los polígonos enteros, en particular los politopos enteros en el plano, pueden ser descritos por vértices de puntos enteros. Por supuesto, estos puntos no son necesariamente los únicos con la cualidad de ser enteros dentro del polígono. A cada punto entero dentro de estos cuerpos podemos asignarles un peso, de acuerdo al rol que cumpla en el mismo: vértice, lado o interior. A la suma ponderada de los puntos en el interior del polígono, respecto a sus pesos respectivos, se le atribuye un nombre conocido por todos: es en realidad el área. Podrá ser una forma poco intuitiva de hallar el área, pero gracias a ella también podemos obtener propiedades que también se pueden considerar poco intuitivas, pero no por ello menos importantes. Sin embargo, esta propiedad es única y exclusivamente para polígonos en el plano. Por ejemplo, el tetraedro de Reeve nos muestra una contradicción si aseguramos la hipótesis para el espacio  $\mathbb{R}^3$ . La teoría de Ehrhart ayuda a resolver cuestiones en dimensiones mayores 2.



# Índice general

1. Introducción	1
2. Un poco de análisis convexo	2
3. Rumbo al teorema de Pick	6
4. Simetrías en la cuenta	12
5. Cuentas del teorema de Pick	14
6. Más allá del teorema de Pick	17
Bibliography	20



# Capítulo 1

## Introducción

El deseo latente de entender los objetos que nos rodean lleva a preguntarnos por las diferentes figuras geométricas que observamos. Por tanto, resulta razonable que los problemas más antiguos en matemáticas estén relacionados con cómo hallar áreas de regiones geométricas.

Por supuesto, el cálculo diferencial brinda una solución: “basta” calcular una integral. Pero, ¿qué es más intuitivo, antiderivar funciones o contar puntos? Para ciertos tipos de regiones, podemos pasar por alto las integrales y hallar la correspondiente área por un atajo. Todo esto gracias al teorema de Pick.

Este trabajo (y su continuación a modo de tesis de licenciatura) consistirá en presentar el teorema de Pick y mostrar algunas aplicaciones en problemas de geometría y teoría de números.

Para ello, en el capítulo 2 presentaremos resultados de uso común en lo que a análisis convexo concierne. Posteriormente, en el capítulo 3 presentaremos gran parte de la maquinaria a utilizarse en los capítulos siguientes. Además presentaremos algunos ejemplos rutinarios a manera de motivación. En el capítulo 4 se introducirán conceptos adicionales necesarios para el teorema. En el capítulo 5 se presentará el teorema de Pick propiamente dicho. Cabe resaltar que se enunciará y probará en un lenguaje más amigable que el que se encuentra comúnmente, notación rescatada del capítulo 3. Por último, en el capítulo 6 trataremos con aplicaciones del teorema, así como con obstrucciones que impiden una generalización.

# Capítulo 2

## Un poco de análisis convexo

El presente capítulo servirá para recopilar definiciones y resultados ya conocidos. En particular trataremos de realizar un compendio de la teoría a usarse en el resto del trabajo.

Primero definiremos un objeto recurrente. Dados  $p_0, \dots, p_m$  en  $\mathbb{R}^n$ , definimos su **cápsula convexa** como el conjunto

$$\text{conv}(p_0, \dots, p_m) = \{t_0 p_0 + \dots + t_m p_m : t_0 + \dots + t_m = 1, t_0, \dots, t_m \geq 0\}.$$

En esta misma línea, diremos que  $P$  es **generado** por  $p_0, \dots, p_m$  si cumple

$$P = \text{conv}(p_0, \dots, p_m),$$

y llamaremos a los  $p_i$  los generadores de  $P$ .

Diremos que un subconjunto  $P \in \mathbb{R}^n$  es un **politopo convexo**, o un **politopo**, si es la cápsula convexa de un número finito de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . El hecho de abreviar el nombre es para evitar una redundancia, ya que una propiedad salta a la vista. Los politopos son subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ . De este modo, dados dos puntos  $p_1, p_2$  en el conjunto, el segmento que los une se encuentra íntegro en el conjunto.

**Lema 2.1.** *Todo politopo es un conjunto convexo.*

*Demostración.* Consideremos el politopo  $P = \text{conv}(p_1, \dots, p_m)$ . Tomamos dos elementos

$$x = \sum_{i=1}^m a_i p_i, \quad y = \sum_{i=1}^m b_i p_i,$$

donde los  $a_i, b_i$  son enteros no negativos que cumplen  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_i = 1$ . Para cualquier  $t \in [0, 1]$  se tiene

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^m t a_i p_i + \sum_{i=1}^m (1-t) b_i p_i = \sum_{i=1}^m (t a_i + (1-t) b_i) p_i,$$

donde  $t a_i + (1-t) b_i$  es no negativo por ser suma y producto de números no negativos. Además, se tiene

$$\sum_{i=1}^m (t a_i + (1-t) b_i) = t \sum_{i=1}^m a_i + (1-t) \sum_{i=1}^m b_i = t + 1 - t = 1.$$

Por lo tanto, los puntos de la forma  $tx + (1-t)y$  se encuentran en  $P$ .  $\square$

En general una **combinación convexa** de  $p_0, \dots, p_m$  será una combinación lineal de dichos puntos cuyos coeficientes sean no negativos y sumen 1; bajo esta definición, es tautológico describir la cápsula convexa como el conjunto de las combinaciones convexas de sus generadores.

**Ejemplo 2.2.** Elijamos  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n$ . Un punto en  $\mathbb{R}^n$  es combinación convexa de  $p_0$  y  $p_1$  si se encuentra en el segmento que los une. Es más, dicho segmento es igual a  $\text{conv}(p_0, p_1)$ . De hecho, bajo esta prescripción geométrica, resulta evidente que si  $p$  se encuentra en  $\text{conv}(p_0, p_1)$ , entonces ambos  $\text{conv}(p, p_0), \text{conv}(p, p_1)$  son subconjuntos de  $\text{conv}(p_0, p_1)$ .

Existen tres operaciones elementales para un politopo  $P \in \mathbb{R}^n$ , las mismas que permiten generar nuevos politopos.

La primera de ellas es la **traslación** por  $a \in \mathbb{R}^n$ , conjunto denotado en general por  $P + a$ , que consiste en el traslado por  $a$  de cada punto de  $P$ ; es decir

$$P + a = \{x + a : x \in P\}.$$

La segunda operación es la **dilatación** por un factor positivo, digamos  $t > 0$ , operación denotada comúnmente  $tP$ . Esta consiste en dilatar cada punto de  $P$  por este factor:

$$tP = \{tx : x \in P\}.$$

La última operación es la **reflexión** respecto al origen. En este caso hablamos del conjunto

$$-P = \{-x : x \in P\}.$$

Lo bueno de la construcción de la cápsula convexa es que es cien por ciento compatible con las tres operaciones introducidas hace algunos párrafos: cada una de estas operaciones da como resultado un nuevo politopo. En efecto, cada vez que se tenga  $P = \text{conv}(p_0, \dots, p_m)$ , se tendrá de paso

$$\begin{aligned} a + P &= \text{conv}(p_0 + a, \dots, p_m + a), \\ tP &= \text{conv}(tp_0, \dots, tp_m) \text{ y} \\ -P &= \text{conv}(-p_0, \dots, -p_m). \end{aligned}$$

Observemos que la construcción de la cápsula convexa no depende del orden de los generadores. Notemos que con esta definición, el politopo es un conjunto cerrado, además de ser acotado. Como trabajamos en  $\mathbb{R}^n$ , todo politopo es un conjunto compacto.

**Ejemplo 2.3.** Consideremos los puntos  $\{1, \sqrt{2}, 2\}$  sobre la recta. Observamos que  $\sqrt{2}$  es combinación convexa de los otros dos puntos,  $1(2 - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$ , pues  $2 - \sqrt{2}$  y  $\sqrt{2} - 1$  son no negativos y suman 1. Luego, del ejemplo 2.2., todos los puntos en la cápsula convexa que son generados con ayuda de  $\sqrt{2}$  pueden ser obtenidos si ignoramos dicho elemento. En otras palabras se tiene que  $\text{conv}(1, \sqrt{2}, 2) = [1, 2] = \text{conv}(1, 2)$ .

Como observamos en el ejemplo anterior, la cápsula convexa tiene la mala costumbre de incorporar algunos generadores innecesarios. Para remediar esto, cuando se necesite, utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 2.4.** Sean  $p_0, \dots, p_{m-1}, p_m \in \mathbb{R}^n$ . Si  $p_m$  es combinación convexa de los anteriores, entonces se tiene

$$\text{conv}(p_1, \dots, p_{m-1}, p_m) = \text{conv}(p_1, \dots, p_{m-1}).$$

*Demostración.* En cada suma tipo  $\sum_{i=0}^m t_i p_i$  reemplazamos  $p_m$  por  $p_m = \lambda_1 \cdot p_1 + \dots + \lambda_{m-1} \cdot p_{m-1}$ , tácita en la hipótesis. Tras ello obtenemos

$$\sum_{i=0}^{m-1} (t_i + \lambda_i \cdot t_m) p_i.$$

Es claro que todos los  $t_i + \lambda_i t_m$  son mayores o iguales a 0 y suman 1. □

Para aligerar la escritura, diremos que el punto  $u \in \mathbb{R}^n$  es un **punto entero** si todas sus entradas son enteras; es decir, se tiene  $u \in \mathbb{Z}^n$ . En ese sentido, un politopo es un **politopo entero** si todos sus vértices son puntos enteros.

Debido a los últimos lemas, tenemos una “única” y canónica forma de presentar politopos enteros. Dados  $p_0, \dots, p_m$  un conjunto de puntos enteros, su cápsula convexa  $\text{conv}(p_0, \dots, p_m)$  es un politopo entero. Este resultado es obvio desde el instante que los vértices pertenecen al conjunto de generadores.

Hay un pequeño detalle en el que debemos reparar en la presentación de un politopo. Para que un politopo sea declarado entero no es necesario que todos los generadores sean enteros pues puede haber redundancias. Ello es lo que acontece en el ejemplo 2.3.

Nosotros requeriremos que los politopos enteros puedan *solo* ser representados como la cápsula convexa de puntos de coordenadas enteras. Para ello, el lema 2.4 indica que debemos revertir a la presentación minimal para decidir este hecho. Observemos que gracias a este lema y a que la cápsula convexa no depende del orden de los generadores, podemos hablar de **generadores minimales**, también llamados **vértices**, de un politopo, es decir, aquellos que no pueden escribirse como combinación convexa de los otros. Notemos que no fomentamos ninguna ambigüedad al llamarlos también vértices, puesto que desempeñan el mismo rol que antes. Lo importante, y lo que queríamos conseguir, es que estos generadores son únicos.

**Teorema 2.5.** *El conjunto de generadores minimales de un politopo es único.*

*Demostración.* Consideremos dos lotes de generadores minimales,  $\{p_0, \dots, p_{m_1}\}$  y  $\{q_0, \dots, q_{m_2}\}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se tiene  $m_1 \leq m_2$ . Consideremos un elemento  $q_\ell$  del segundo lote, el cual por estar en la cápsula convexa puede representarse como combinación convexa cual  $q_\ell = \sum_{i=0}^{m_1} a_i p_i$ . Supongamos ninguno de los  $a_i$  es 1. Entonces, al reescribir  $p_i = \sum_{j=0}^{m_2} b_{ij} q_j$  uno por uno tenemos

$$q_\ell = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_i b_{ij} q_j = \sum_{j=0}^{m_2} \left( \sum_{i=0}^{m_1} a_i b_{ij} \right) q_j.$$

Como  $\sum_{i=0}^{m_1} a_i = 1$ , al ponderar por  $b_{ij} \geq 0$  se obtiene algo estrictamente menor pues  $\sum_{j=0}^{m_2} b_{ij} = 1$ . Así, las expresiones dentro del paréntesis, y por tanto también los  $a_i b_{ij}$ , son todos no negativos y suman 1 al variar  $j$ . Como ya hemos argüido por qué ninguno de ellos vale 1, resulta que  $q_l$  es combinación convexa de elementos del segundo lote, lo que contradice la minimalidad. Por dicho motivo se tendrá  $a_{i_0} = 1$  para cierto  $i_0$ ; es decir, para cada elemento  $q_j$  del segundo grupo, existe un  $p_i$  del primero sujeto a  $q_j = p_i$ .

En particular, los lotes son iguales y se concluye la igualdad  $m_1 = m_2$ .  $\square$

Antes de terminar este capítulo hacemos una acotación. Hemos definido todo lo anterior en espacios arbitrarios aunque en realidad trabajaremos apenas en  $\mathbb{R}^2$ . En este contexto un politopo acotado en  $\mathbb{R}^2$  recibe el nombre de **polígono convexo**. Nos reservamos la palabra **polígono** para cualquier conjunto del plano limitado por segmentos contiguos sin autointersección. Incluso llamaremos polígono a la unión de polígonos básicos siempre y cuando tengan interiores disjuntos. En la misma línea llamaremos **polígono entero** a cualquier polígono que tenga como vértices a puntos enteros, sea convexo o no.



# Capítulo 3

## Rumbo al teorema de Pick

En este capítulo desarrollaremos el trabajo preparatorio para entender el resultado más importante de esta tesis: el teorema de Pick. En particular, se introducirá la terminología para enunciarlo. Este resultado básicamente reduce la tarea de calcular el área de polígonos enteros a la acción de contar (de una manera *sui generis*) los puntos enteros que encierra el polígono.

Para ello es indispensable cierta terminología. Consideremos un polígono entero  $P$ . Recordemos que esto señala a una o más regiones planas disjuntas encerradas por curvas lineales por trozos y cuyos vértices tienen coordenadas enteras. En otras palabras, cada componente conexa de  $P$  está definida por una sucesión cíclica de vértices  $V(P) = v_1, \dots, v_k, v_{k+1} = v_1 \in \mathbb{R}^2$  con lados dados por segmentos  $[v_i, v_{i+1}]$ . No se permite intersecciones más allá de la coincidencia obligada en el último vértice.

Denominaremos como  $I(P)$  al conjunto de los puntos enteros que se encuentran en el interior de  $P$ ; es decir,

$$I(P) = \text{int}(P) \cap \mathbb{Z}^2.$$

De forma análoga, denominaremos como  $B(P)$  al conjunto de los puntos enteros que se encuentran en el borde de  $P$  pero que no son vértices; es decir, tenemos como descripción

$$B(P) = \partial P \cap \mathbb{Z}^2 - V(P).$$

El primer conjunto denota los puntos enteros dentro de  $P$ , y el segundo aquellos que se encuentran en los lados del mismo, pero sin contar los vértices. Por supuesto, por definición los dos conjuntos son disjuntos y su unión con  $V(P)$  conforma el conjunto de todos los puntos enteros encerrados por  $P$ . Si escribimos  $I = \circ(I(P))$ ,  $B = \circ(B(P))$  y  $V = \circ(V(P))$  tenemos la cuenta

$$\circ(P \cap \mathbb{Z}^2) = I + B + V.$$

Curiosamente, esta última cantidad es superflua para nuestros fines. El propósito de presentarlas es asegurarnos de que las definiciones previas han sido entendidas. Las cantidades que sí importan se introducen a continuación.

Procedamos entonces a asignar a cada tipo de punto entero un peso. Los puntos en el interior  $I(P)$  recibirán peso  $\pi_i = 1$ . En contraste, los otros recibirán

una ponderación parcial. Aquellos en  $B(P)$ , netamente en los lados, recibirán de peso  $\pi_b = 1/2$ , debido al carácter de estar con “medio pie dentro y medio pie fuera”. En cuanto a un vértice  $v$ , consideremos el ángulo interno  $\theta_v$  del polígono en dicho vértice: midamos como midamos el ángulo, el peso asignado será la fracción de vuelta que este representa; por ejemplo, en grados sexagesimales se tendrá  $\pi_v = \theta/360$ ; en radianes u otras formas de medir, por su puesto, el numerador y denominador cambian acorde.

Si gustan, los pesos asignados a puntos en  $B(P)$  pueden considerarse un caso especializado muy particular de los pesos en vértices  $V(P)$ . En efecto, por una parte, degradar un punto frontera a vértice modifica la presentación minimal del polígono, más no altera ninguna característica analítica, geométrica o topológica del objeto; mientras por otra, interpretado como vértice se abre  $180^\circ$  hacia el interior, es decir, debe asignársele un peso  $\pi_p = 1/2$  correspondiente a un ángulo plano. Incluso, estirando un poco el argumento, podemos considerar a un punto interno como un vértice con ángulo interno de  $360^\circ$ , o como un punto frontera con dos frentes, lo que resulta inevitablemente en peso  $\pi_p = 1$ .

La conveniencia de unificar estos conjuntos o no es retórica. Veremos en breve que es más ordenado trabajar con paquetes separados.

La magnitud a la que le echamos el ojo es precisamente la suma así ponderada de los puntos enteros en  $P \cap \mathbb{Z}$ ; es decir la cantidad

$$A(P) = \sum_{p \in P \cap \mathbb{Z}} \pi_p = \sum_{i \in I(P)} \pi_i + \sum_{b \in B(P)} \pi_b + \sum_{v \in V(P)} \pi_v.$$

Así separada la suma en tres partes, en la práctica la cuenta final se reduce a tomar nota de cuántos elementos intervienen. En resumen, para polígonos enteros queda asignado el valor  $A(P)$  dado por

$$A(P) = I + \frac{B}{2} + \frac{\text{suma de angulos internos en grados}}{360^\circ}.$$

Esta fórmula nos facilitará algunos cálculos.

Procedamos a calcular el número  $A(P)$  en algunos ejemplos. Hallaremos el número mágico para ciertas figuras geométricas básicas y manejables.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $T_1$  el triángulo generado por  $(2, 3), (4, 3), (3, 5)$ . Este politopo contiene un solo punto entero interior,  $I(T_1) = \{(3, 4)\}$ . Además aparece un punto entero en el segmento que une  $(2, 3)$  con  $(4, 3)$ , en otras palabras  $B(T_1) = \{(3, 3)\}$ . Los otros tres puntos son los vértices. A final tenemos la cuenta

$$A(T_1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{180^\circ}{360^\circ} = 2,$$

donde hemos usado el hecho de que la suma de ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ .

**Ejemplo 3.2.** Ahora consideremos el triángulo rectángulo  $T_2$  generado por los vértices  $(0, 3), (2, 2), (2, 3)$ . Además de los vértices, este politopo contiene un punto

en uno de sus lados, específicamente  $B(T_1) = \{(1, 3)\}$ . Sin más, tenemos la cuenta

$$A(T_2) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{180^\circ}{360^\circ} = 1.$$

Podemos considerar incluso al triángulo  $T'_2$  generado por  $(4, 2), (6, 3), (4, 3)$  como una “variación” de  $T_2$  (es la reflexión sobre la recta  $x = 3$ ). En efecto, también posee un único punto entero que se encuentra sobre un lado:  $B(T_2) = \{(5, 3)\}$ . La cuenta es exactamente la misma que la anterior, con lo que concluimos

$$A(T'_2) = 1.$$

Luego de practicar con triángulos, procederemos a analizar algunas figuras ya no tan simples. Continuaremos los ejemplos con algunos cuadriláteros, ya no solo para practicar, si no también para destapar una característica especial que posee este número.

**Ejemplo 3.3.** Sea  $R_1$  el rectángulo generado por  $(0, 2), (2, 2), (2, 3), (0, 3)$ . Podemos inmediatamente observar que no hay puntos enteros en  $I(R_1)$ , hay solo dos puntos enteros en  $B(R_1)$  y los vértices son los generadores. Luego tenemos

$$A(R_1) = 0 + \frac{2}{2} + \frac{360^\circ}{360^\circ} = 2.$$

Este ejemplo es una cruda repetición de lo que hicimos en los ejemplos anteriores. Sin embargo, notemos algo interesante al contrastarlo con el ejemplo 3.2. Sea el triángulo rectángulo  $T''_2$  generado por  $(0, 2), (2, 2), (0, 3)$ . Al igual que  $T'_2$ , este nuevo triángulo es otra “variación” del triángulo  $T_2$ . Producto de ello, obtenemos  $A(T''_2) = 1$ . Además, notemos la descomposición  $R_1 = T_2 \cup T''_2$ . Hasta este momento no hay mucha magia; sin embargo, analicemos qué ha ocurrido con los puntos enteros. En primer lugar, los ángulos de los vértices  $(0, 3), (2, 2)$  de cada triángulo son de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , respectivamente. Estos se complementan para formar ángulos de  $90^\circ$  alrededor de dichos vértices del rectángulo. Luego, cada porción de ángulo en la fórmula del  $A(P)$  es el resultado de la suma de cada porción en su respectivo vértice. Los otros dos vértices no se ven afectados por la unión. Por otro lado, los puntos que se encontraban en los lados de los triángulos ahora también pertenecen a los lados del rectángulo, sosteniendo su peso de  $1/2$ . De esta forma, podemos hallar  $A(R_1)$  como la unión de dos triángulos de la forma  $T_2$ ; es decir,

$$A(R_1) = 2A(T_2) = 2(1) = 2,$$

que es exactamente la cantidad que habíamos hallado anteriormente.

Hay muchos casos que permiten ser analizados como en el ejemplo anterior. De hecho, en breve procederemos al análisis de las distintas alternativas. Antes de ello, presentaremos otro ejemplo que muestra el comportamiento que se obtiene de arrumar polígonos enteros.

**Ejemplo 3.4.** Sea  $C_1$  el cuadrado básico, generado por  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ . Directo conseguimos

$$A(C_1) = 0 + \frac{0}{2} + \frac{360^\circ}{360^\circ} = 1.$$

Ahora, en esta misma línea, consideremos la dilatación  $C_2 = 2C_1$ . Aquí sí necesitamos detenernos y pensar.

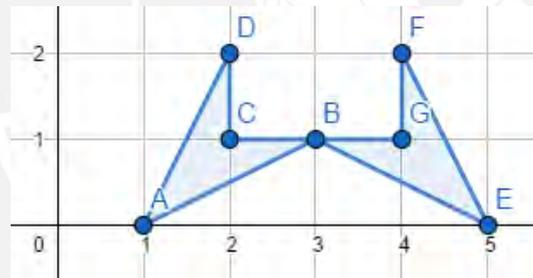
Por inspección logramos  $I(C_2) = \{(1, 1)\}$ ,  $B(P) = \{(1, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 1)\}$ , con  $V(P)$  compuesto por los generadores. De acá pasamos a

$$A(P) = 1 + \frac{4}{2} + \frac{360^\circ}{360^\circ} = 4.$$

Curiosamente, los  $C_2$  se pueden construir adjuntando traslaciones disjuntas de  $C_1$ . De los 16 vértices apenas 4 deben ser considerados vértices de  $C_2$  (de peso  $1/4$ ) pues cuatro dan génesis a un punto interior (de peso  $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$ ) y cuatro parejas a sendos puntos enteros que descansan en los lados (cada uno de peso  $1/4 + 1/4$ ). Operemos como operemos, la cuenta final siempre será 4.

Antes de enunciar la propiedad que estamos insinuando de a pocos trabajaremos con un polígono entero no convexo.

**Ejemplo 3.5.** Consideremos el cuadrilátero  $C_3 = C_3(ABCD)$  en la parte izquierda de la figura y  $C_4 = C_4(B, E, F, G)$  a la derecha.



Rápidamente vemos que  $I(C_3)$  y  $B(C_4)$  son ambos vacíos, y los vértices son los puntos  $(1, 0), (3, 1), (2, 1), (2, 2)$ , cuyos ángulos internos suman 1. Con ello logramos

$$A(C_3) = 0 + 0 + \frac{360^\circ}{360^\circ} = 1.$$

Con los mismos puntos podemos considerar los politopos  $T, T'$  generados por  $A, C, B$  y  $A, D, C$ . Sin mucho esfuerzo obtenemos que los correspondientes  $A(P)$  para cada uno es  $1/2$ . Luego se cumple la igualdad  $A(C_3) = A(T) + A(T') = 1$ .

Por otro lado, al considerar  $C_4$  el cuadrilátero de la derecha, tendremos la misma cuenta y por lo tanto

$$A(C_4) = 1.$$

Lo que sigue es el resumen de todo el análisis que hemos efectuado. La única razón por la que definimos el número  $A(P)$  como lo hicimos es para que sea obvia su aditividad. Enunciamos el siguiente teorema, que suponemos razonable con lo elaborado.

**Teorema 3.6.** Para  $P_1, P_2$  polígonos enteros con interiores disjuntos se cumple

$$A(P_1 \cup P_2) = A(P_1) + A(P_2).$$

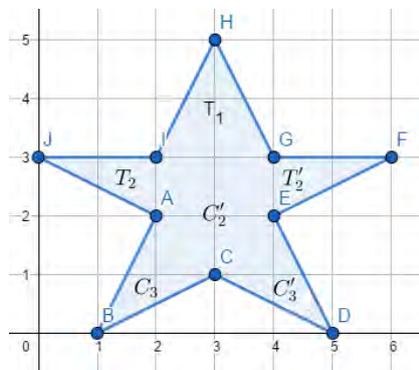
*Demostración.* La prueba se reduce a observar de dónde provienen los puntos en la intersección, pues los demás puntos mantendrán la misma categoría: vértice, lado (en esta prueba no incluimos a los vértices como puntos en los lados) e interior. Si  $P_1, P_2$  son disjuntos, entonces la identidad se cumple directamente. Por otro lado, si la intersección es no vacía, entonces esta o es un punto o es un segmento. Entonces consideremos lo siguiente.

- Si solo se intersectan en un punto, entonces podemos observar que dicho punto es un vértice. Además, puede provenir de la intersección de un lado con un vértice, o de un vértice con un vértice. Recordemos que el peso asignado a un vértice es su porción relativa de vuelta. De esta forma, en el primer caso la porción relativa de vuelta es la suma de media vuelta con la porción que tenía anteriormente como vértice, lo cual se cumple desde que asignamos peso de  $1/2$  a puntos en los lados. En el segundo caso tenemos un análisis similar: las porciones de vuelta se suman, y desde que la intersección es convexa, las porciones no se intersectan, por lo que en efecto es la suma de las porciones que tenían anteriormente como vértices en sus respectivos polígonos.
- Si se intersectan en un segmento, los vértices pueden perder su estatus y aparecer sobre un lado. Incluso algunos puntos en los lados pueden ganar estatus de vértices. En ambos casos la identidad se cumple desde el momento en que los puntos en  $B(P)$  pueden imaginarse como vértices, con una porción de  $180^\circ$ . Por otro lado, también puede ocurrir que los vértices y puntos en los lados reaparezcan en el interior. Sin tomar mucha atención, esto pasa desapercibido si desde un principio reinterpretamos los puntos internos como vertices a los que se asigna  $360^\circ$  como ángulo.

Esto termina la prueba. □

Gracias a este teorema, y a todas la observaciones que hemos hecho en este capítulo, podemos armar nuestro propio “Frankenstein” con pedazos de los ejemplos analizados.

**Ejemplo 3.7.** Consideremos el polígono entero  $\zeta$  de la figura.

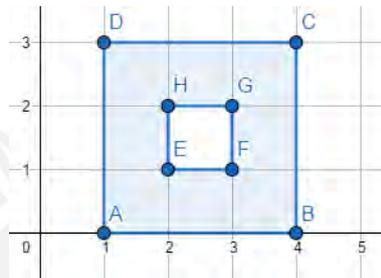


Como pueden apreciar, la estrella está ensamblada como unión de polígonos enteros descritos antes es esta mismo capítulo. Debido al teorema, para calcular  $A(\zeta)$  basta sumar

$$A(\zeta) = A(T_1) + 2A(T_2) + A(C_2) + 2A(C_3) = 10.$$

Antes de concluir el capítulo ilustremos una suerte de *sustracción* basada en una astuta estrategia.

**Ejemplo 3.8.** Deseamos calcular el área del polígono  $P$  que se muestra en la siguiente imagen.



Para ello, consideremos el cuadrado  $C_4$  generado por  $(1, 0)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(1, 4)$  y al cuadrado  $C_2'$ , resultado de trasladar  $C_2$  del ejemplo 3.4 por  $(2, 1)$ , es decir,  $C_2' = C_2 + (2, 1)$ . Observamos que  $P = C_4 - C_2'$ . Podemos contar los puntos enteros:  $I = 0$ ,  $B = 16$ ,  $V = 8$ . Así, tenemos

$$A(P) = 0 + 8 + \frac{4(90^\circ) + 4(270^\circ)}{360^\circ} = 12.$$

Por otro lado, observamos que se cumple  $C_4 = C_2 \cup P$ , con  $\text{int}(C_2) \cap \text{int}(P) = \emptyset$ . Por lo tanto, del teorema 3.6 obtenemos

$$A(P) = A(C_4) - A(C_2) = 16 - 4 = 12.$$

En muchos de los ejemplos hemos tanteado una propiedad que intuitivamente se cumple: las traslaciones y reflexiones preservan el número  $A(P)$ . En el siguiente capítulo formalizaremos esta propiedad.

# Capítulo 4

## Simetrías en la cuenta

Sea  $P$  un polígono entero. Introducimos la respectiva reflexión sobre los ejes  $X$  e  $Y$  cual

$$P_x = \{(a, -b) : (a, b) \in P\}$$
$$P_y = \{(-a, b) : (a, b) \in P\}$$

Con esta notación, formalizaremos una idea dejada suelta en el capítulo anterior.

**Teorema 4.1.** *Sea  $P$  un polígono entero. El valor  $A(P)$  es invariante por traslación por puntos enteros y por reflexión sobre cualquier eje. En otras palabras, para cualquier  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ , se tiene*

$$A(P + (m, n)) = A(P),$$

y además

$$A(P_x) = A(P_y) = A(P).$$

*Demostración.* La prueba es inmediata. Dado un entero  $a$  su negativo  $-a$  también es entero; además, cuando le sumamos  $b$ , entero también, la respuesta  $a + b$  sigue siendo un entero. En consecuencia cada coordenada de los puntos enteros en  $P$  serán llevadas a otras coordenadas enteras, y la cantidad de puntos enteros será preservada. Como estas translaciones y reflexiones son movimientos rígidos, los puntos en la frontera y en el interior se mantienen como tales tras efectuar las operaciones.  $\square$

De hecho, enunciamos un par de propiedades adicionales, corolarios directos del teorema anterior.

**Lema 4.2.** *Sea  $P$  un polígono entero. Entonces el valor  $A(P)$  es invariante por reflexión respecto al origen; es decir, satisface*

$$A(-P) = A(P)$$

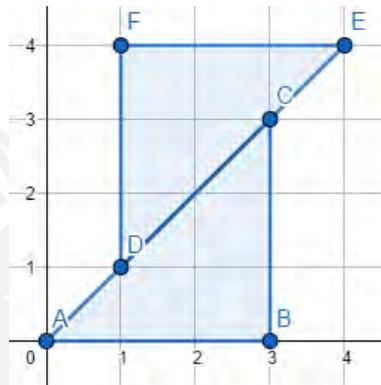
*Demostración.* Este resultado es evidente al cumplirse  $-P = (P_x)_y$ .  $\square$

**Lema 4.3.** *El número  $A(P)$  es invariante por reflexión sobre rectas horizontales o verticales enteras (i.e., de la forma  $x = x_0$  o  $y = y_0$ , con  $x_0, y_0$  enteros).*

*Demostración.* Digamos que deseamos reflejar respecto la recta vertical  $x = x_0$ . Esta acción equivale a reflejar  $P - x_0$  respecto al eje de las abscisas y luego trasladarlo  $x_0$  unidades. El resto corre por cuenta del teorema. El caso horizontal,  $y = y_0$ , es totalmente análogo.  $\square$

En el capítulo anterior presentamos varios ejemplos que ilustran los teoremas acá enunciados, aunque de una forma más intuitiva. A continuación analizamos un ejemplo donde se puede apreciar en acción esta nueva arma.

**Ejemplo 4.4.** Consideremos triángulos  $P_1$  y  $P_2$  generados por  $(0, 0), (3, 0), (3, 3)$  y  $(1, 1), (4, 4), (1, 4)$ , respectivamente.



El comportamiento de ambos triángulos se representa en la imagen anterior. Al cumplirse  $P_2 = -P_1 + (4, 4)$ , del teorema 4.1 obtenemos  $A(P_1) = A(P_2)$ . Del teorema 3.6 se logra entonces  $A(P_1 \cup P_2) = A(P_1) + A(P_2) = 2A(P_1) = 2 \cdot 4,5 = 9$ , acá  $A(P_1) = 4,5$  es hallado de modo directo por inspección.

Hemos visto que el número  $A(P)$  es aditivo, además de ser compatible con la traslación y reflexión de polígonos enteros. Veamos qué ocurre con la dilatación de polígonos enteros en el plano.

**Ejemplo 4.5.** Sea  $P_0$  el triángulo generado por  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ . Rápidamente obtenemos  $A(P_0) = 0,5$ . Ahora es lícito preguntarnos qué sucede si dilatamos  $P_0$ . Consideremos  $P_1$  del ejemplo anterior. Tenemos entonces  $P_1 = 3P_0$ , pero  $A(P_1) = A(3P_0) = 4,5 \neq 3 \cdot 0,5 = 3A(P_0)$ . Si tratamos con el triángulo generado por  $(0, 0), (10, 0), (10, 10)$ , nuevamente fracasamos pues  $A(10P_0) = 50 \neq 10 \cdot 0,5 = 10A(P_0)$ . En conclusión, no existe compatibilidad inmediata al dilatar polígonos.

A pesar de no obtener lo que buscamos, se puede encontrar una relación entre  $A(P)$  y  $A(tP)$  para  $t$  entero. Pero para objetivos más generales se precisa la teoría de Ehrhart, a la que aludiremos brevemente en el último capítulo.

# Capítulo 5

## Cuentas del teorema de Pick

Para simplificar la notación del capítulo, llamaremos **triángulo primitivo** a todo triángulo entero que no contenga más puntos enteros que sus vértices.

En el siguiente lema se engloba el trabajo duro de este capítulo.

**Lema 5.1.** *El área de todo triángulo primitivo es  $1/2$ .*

*Demostración.* Por definición de área, si el triángulo se traslada por puntos enteros o se refleja por rectas enteras paralelas a los ejes (o una combinación de éstas), entonces el área se mantiene. Primero movemos el vértice de menor ordenada al origen; el triángulo se ubica ahora en la unión del primer y segundo cuadrante. Si los vértices se encontraran todos en uno de ellos, siempre podemos reflejarlo de ser necesario y asumir que todos los vértices se alojan en el primer cuadrante. De este modo, queda por estudiar el caso de vértices con una abscisa estrictamente positiva y una estrictamente negativa. Entre estos dos, elijamos el que tenga mayor ordenada (de ser iguales, tomamos cualquiera de los dos) y lo reubicamos en el origen. Claramente el triángulo resultante está íntegro en un cuadrante. De donde podemos por reflexiones llevarlo al primero.

De esta forma, podemos considerar sin pérdida de generalidad que nuestro triángulo primitivo  $T_0$  tiene todas sus coordenadas no negativas y que uno de sus vértices, digamos  $A$ , es el origen. Llamemos al resto  $B = (a, b)$  y  $C = (c, d)$ . Por geometría analítica básica su área es calculada mediante la fórmula

$$S(T_0) = \frac{|bc - ad|}{2}.$$

En resumidas cuentas, nuestro trabajo se reduce a probar que  $|bc - ad|$  vale 1.

Probaremos ahora que el triángulo  $T_0$  no contiene otros puntos enteros salvo sus vértices si y solo si los vectores  $v = (a, b)$  y  $w = (c, d)$  generan  $\mathbb{Z}^2$ . El subgrupo por ellos generado, llamémoslo  $G \subset \mathbb{Z}^2$ , es caracterizado por traslaciones del rombo fundamental  $\{0, v, w, v + w\}$ . Luego, se tendrá  $G = \mathbb{Z}^2$  si y solo si el rombo fundamental no contiene puntos enteros en su interior. Descomponemos este rombo como la unión de  $T_0 = \{0, v, w\}$  y  $T'_0 = \{v, w, v + w\} = -T_0 + v + w$ . Como éste es el mismo triángulo nombrado dos veces, la equivalencia queda asegurada en tanto no haya puntos enteros en  $T_0$ .

En una dirección, exigir que los vectores  $v$  y  $w$  generen  $\mathbb{Z}^2$  equivale a pedir que todo vector  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  pueda ser expresado como una combinación  $\mathbb{Z}$ -lineal  $v$  y  $w$ ; es decir, deberán existir  $m, n \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}.$$

Como  $\mathbb{Z}^2$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre, sobreyectividad implica inyectividad y los valores de  $m, n$  son únicos; es decir, la aplicación  $(m, n) \mapsto (x, y)$  es invertible, y por tanto la matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

es invertible y su inversa representa la transformación  $\mathbb{Z}$ -lineal  $(x, y) \mapsto (m, n)$ . Esto implica que la matriz

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

tiene todas sus entradas enteras, lo cual ocurre si y solo si  $\det M = ad - bc$  es una unidad de  $\mathbb{Z}$ ; es decir,  $ad - bc = \pm 1$ .

La recíproca se infiere de manera trivial de este análisis.  $\square$

De este resultado se derivan dos corolarios directos, presentados en forma de lema.

**Lema 5.2.** *El área de todo triángulo primitivo  $T_0$  es igual a  $A(T_0)$ .*

*Demostración.* Ambas cantidades son  $1/2$ .  $\square$

Ahora fácilmente extendemos nuestro resultado a triángulos enteros.

**Lema 5.3.** *Para un triángulo entero  $T$  el área vale  $A(T)$ .*

*Demostración.* Por el teorema 5.1, el lema 5.2 y la aditividad basta probar que todo triángulo entero se puede desglosar como la unión disjunta de triángulos enteros primitivos (casi realmente, en el sentido de tener interiores disjuntos).

Para ello, primero observaremos que si existen puntos enteros recostados sobre un lado —que no son vértices—, desde el vértice opuesto trazamos segmentos y el triángulo original queda subdividido en dos o más triángulos enteros, cada uno de los cuales tiene menos puntos enteros que el original. Si  $B(P)$  es vacío (es decir, si no hay ya puntos enteros sobre los lados), nos fijamos en puntos enteros interiores. De no haberlos es un triángulo primitivo. De haberlos tomamos uno de ellos y trazamos segmentos hacia los tres vértices. Nuevamente el triángulo ha quedado subdividido y cada pieza tiene menos puntos enteros que su ancestro. En consonancia, inductivamente es posible realizar una descomposición en triángulos con menos vértices hasta llegar a los primitivos.  $\square$

Sin más, procedemos a enunciar y demostrar el teorema central de este trabajo.

**Teorema 5.4 (Pick).** *Sea  $P$  un polígono entero. Entonces el área de  $P$  es  $A(P)$*

*Demostración.* Todo polígono puede descomponerse en triángulos que se intersecan a lo más en una cara. Debido al último lema y a la aditividad el resultado se torna trivial.  $\square$

Como nota aparte, en las referencias de los libros el teorema de Pick nos ofrece una fórmula un tanto distinta. Al considerar  $b = B + V$ , el área se calcula vía

$$A(P) = I + \frac{b}{2} - 1.$$

Sin embargo, se puede observar fácilmente que las definiciones son equivalentes. Para ello basta recordar que si  $V$  es el número de vértices de un polígono, la suma de ángulos internos arroja  $180^\circ(V - 2)$ . La ventaja de nuestra fórmula reside simplemente en el hecho de tornar trivial la aditividad.



# Capítulo 6

## Más allá del teorema de Pick

En este capítulo presentaremos algunas aplicaciones y resultados que se desprenden del teorema de Pick.

Un resultado inmediato, que tendrá el grado de teorema por su importancia, es la naturaleza racional del área de un polígono entero.

**Teorema 6.1.** *El área de cualquier polígono entero o es un entero o la mitad de un entero.*

*Demostración.* Del teorema de Pick observamos que tanto  $I$  como  $B + V$  son enteros. Luego, el área de un polígono es entero si  $B + V$  es par y es la mitad de un entero si  $B + V$  es impar.  $\square$

A continuación desarrollaremos una cuestión que nos servirá a modo de aplicación del teorema.

**Pregunta 6.2.** *¿Se puede dibujar un triángulo equilátero en el plano con vértices enteros?*

La respuesta es negativa. Supongamos que existe un triángulo equilátero en el plano de lado  $l$ , con vértices enteros. No conocemos  $l$ , pero sí podemos observar la naturaleza entera de  $l^2$ . En efecto, tomemos dos vértices  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  del triángulo. Del teorema de Pitágoras obtenemos  $l^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$ . Por ser  $a_1, a_2, b_1, b_2$  enteros, concluimos que  $l^2$  es entero. Por otro lado, el área de un triángulo equilátero es  $\sqrt{3}/4 l^2$ , que resulta irracional. Esto contradice el teorema anterior. Por lo tanto, resulta impensable dibujar tal triángulo.

Estamos a punto de enunciar un teorema realmente importante: ¡nos otorga una fórmula para hallar áreas de dilataciones de polígonos! En parte este teorema ata un cabo suelto dejado en el capítulo 4.

**Teorema 6.3.** *Sea  $P$  un polígono entero y  $t$  un entero positivo. Entonces se cumple*

$$A(tP) = t^2 A(P).$$

*Demostración.* Por la aditividad del área, podemos reducir el problema a probar el teorema apenas para triángulos enteros. Por el mismo argumento usado en el lema

5.1, podemos suponer que un triángulo entero  $T$  arbitrario tiene una coordenada en el origen y sus otros vértices tienen coordenadas no negativas. De esta forma, si los vértices son  $O = (0, 0)$ ,  $B = (x, y)$ ,  $C = (m, n)$  entonces el área será

$$A(T) = \frac{|my - nx|}{2}.$$

De esta forma, los vértices de  $A(T)$  serán  $O = (0, 0)$ ,  $B = (tx, ty)$ ,  $C = (tm, tn)$ , y así se logra

$$A(tT) = \frac{|t^2my - t^2nx|}{2} = t^2 \frac{|my - nx|}{2} = t^2 A(T).$$

□

Para culminar, es válido preguntarse a estas alturas si el teorema de Pick se puede generalizar a otras dimensiones. La respuesta es negativa como se desprende del análisis siguiente.

**Pregunta 6.4.** Sea  $\xi_r$  el tetraedro Reeve, generado por

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, r) \in \mathbb{R}^3,$$

donde  $r$  es entero positivo. Nos preguntamos dos cuestiones sencillas: ¿cuál es el volumen de este poliedro?, y ¿cuántos puntos enteros encierra?

Podemos tomar prestado cualquier texto escolar para dar rápidamente con la respuesta a la primera pregunta:

$$V_{\xi_r} = \frac{1}{3} A_b h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r = \frac{r}{6},$$

donde  $V$ ,  $A_b$  y  $h$  representan el volumen, área de la base y la altura del poliedro, respectivamente.

Responder la segunda cuestión tampoco es complicado: los puntos que se encuentran en  $\xi_r$  deben ser combinación convexa de los generadores. En forma de ecuaciones, escribimos

$$a(0, 0, 0) + b(1, 0, 0) + c(0, 1, 0) + d(1, 1, r) = (b + d, c + d, dr),$$

donde  $a, b, c, d$  son no negativos y suman 1. En particular, cada punto en  $\xi_r$  tiene las dos primeras coordenadas acotadas por 0 y 1. Si la primera coordenada es 0, entonces estamos hablando del caso en que  $b$  y  $d$  son 0 a la vez, por lo que podemos formar dos puntos enteros,  $(0, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ . Obtenemos un resultado similar en el caso en que la segunda coordenada sea 0, pues ahí se tiene  $c = d = 0$  y logramos hallar un nuevo punto entero:  $(1, 0, 0)$ . Por otro lado, si la primera o segunda coordenada fuese 1, y como queremos obtener puntos enteros, estamos obligados a hacer  $d = 1$  y  $b = c = 0$ . De esta forma, encontramos el punto  $(1, 1, r)$ . En resumen, podemos encontrar los tres puntos de la base, y apenas un punto fuera de ella, el  $(1, 1, r)$ ; es decir, los generadores de  $\xi_r$ .

Este resultado estropea cualquier generalización: acabamos de encontrar un politopo en  $\mathbb{R}^3$  con exactamente cuatro puntos enteros cuyo volumen es arbitrariamente grande.

A pesar de esto, existe la motivación de estudiar los puntos enteros contenidos en dilataciones enteras de poliedros. De ello se encarga la teoría de Ehrhart, que fue introducida en el capítulo 4 y que nosotros desarrollaremos en la tesis de licenciatura.



# Bibliografía

- [1] DURAN, J., (2014). *Polinomios y series de Ehrhart*, trabajo de fin de grado, Universidad de Barcelona.
- [2] GARBET, J. (2010). *Pick's Theorem*, en *Lattice Point Geometry: Pick's Theorem and Minkowski's Theorem*, pp. 16-28.
- [3] SOTOMAYOR, J.C., (2020). *Polinomios de Ehrhart*, tesis de licenciatura, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- [4] WEBSTER, R. (1994). *Convex Polytopes*, en *Convexity*, pp. 105-144. New York Press Inc.

