PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

TRABAJO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TAREAS QUE PROMUEVEN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTORA

Lisseth Chacón Cama

ASESORA:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Junio, 2020

RESUMEN

La presente investigación emerge luego de identificar las dificultades que presentan los alumnos al estudiar la derivada y el énfasis que pone la enseñanza de este objeto matemático en desarrollos formales y algorítmicos, dejando de lado las ideas geométricas. Por ello, nos interesa comprender y estudiar el trabajo matemático personal de los estudiantes de Ingeniería cuando resuelven tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real. Para alcanzar este propósito, utilizamos, como fundamento teórico, la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y, como metodología de investigación, aspectos de la Ingeniería Didáctica. La parte experimental de la investigación se realiza con 15 estudiantes de primer año de la carrera profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua (UNAM), a quienes se les aplicó las tareas propuestas. Para ello, se elabora dos tareas: la tarea exploratoria y la tarea I, diseñadas con la finalidad de identificar las génesis que se activan en el estudiante, así como analizar qué planos logran activar al enfrentarse a las tareas propuestas. Así también, con los recursos del ETM, identificar en qué paradigmas del dominio del Análisis enmarca su trabajo matemático. En base a las acciones de los estudiantes, concluimos que los alumnos evidencian la activación del Plano Semiótico-Instrumental y el Plano Instrumental-Discurso al resolver tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada.

Palabras clave: Derivada; Interpretación Geométrica; Espacio de Trabajo Matemático; Paradigmas.

ABSTRACT

This research emerges after identifying the difficulties that students have when studying the derivative and the emphasis placed on teaching this mathematical object in formal and algorithmic developments, leaving aside geometric ideas. Therefore, we are interested in understanding, studying the personal mathematical work of engineering students when they solve tasks about the geometric interpretation of the derivative of a real function of real variable. To achieve this purpose, we use the Theory of the Mathematical Workspace (MWS) as a theoretical basis and as a research methodology aspect of Didactic Engineering. The experimental part of the research is carried out with fifteen students of the Systems Engineering professional career of the National University of Moquegua to whom the proposed tasks were applied. For this, two tasks are elaborated: exploratory task and task I, designed with the purpose of identifying the genesis that is activated in the student, as well as analyzing what plans they manage to activate when facing the proposed tasks. Similarly, with the resources of the MWS identify in which paradigms of the Analysis domain they frame their mathematical work. Based on the actions of the students, we conclude that the students demonstrate the activation of the Semiotic-Instrumental plane and the Instrumental-Discursive plane when solving tasks on the geometric interpretation of the derivative.

Keywords: Derivative; Geometric Interpretation; Mathematical Working Space; Paradigms.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por la formación que me brindó como estudiante y tesista de magíster. Por su exigencia constante, por ser una gran guía en este proceso, por las sugerencias siempre atinadas en el desarrollo de la presente investigación.

A los miembros del jurado Dra. Verónica Neira y Mg. Magaly Campos por las sugerencias dadas para mejorar la calidad académica de la tesis.

Al grupo de investigadores de la línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) de la maestría, por sus importantes aportes en mi crecimiento profesional y que permitieron la ejecución de este trabajo.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus conocimientos, experiencias y exigencias, las cuales fueron una valiosa contribución en mi formación.

A mis compañeros y amigos de clases de la maestría, por el tiempo, conocimientos y experiencias compartidas en estos dos años de estudio.

Al Mg. Euler Tito Chura, director de la Escuela de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua, por su amistad y su disposición para llevar a cabo la experimentación con sus estudiantes.

A mi familia, por su paciencia infinita, que comprendió mi ausencia y mis malos ratos y nunca dejaron de brindarme palabras de aliento.

A Dios, por sus infinitas bendiciones, a mi hija K. Fabianna, a mi madre, Angélica, y a mi hermana, Nelly, por su sacrificio y apoyo sin condiciones.

ÍNDICE

RESUMEN ii

AGRADECIMIENTOS iii

ÍNDICE iv

LISTA DE FIGURAS v

LISTA DE TABLAS vi

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA 3

1.1 Investigaciones de referencia 3

1.2 Justificación 12

1.3 Aspectos Teóricos: Espacio de Trabajo Matemático 16

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación 23

1.5 Aspectos metodológicos 24

CAPÍTULO II: ESTUDIO DE LA DERIVADA 28

2.1 Aspectos históricos del concepto de la derivada 28

2.2 Análisis didáctico de los textos universitarios 34

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN 42

3.1 Descripción de los sujetos 42

3.2 Descripción de la secuencia de tareas 43

3.3 Tarea exploratoria 44

3.4 Tarea 1 45

3.5 *PRIMERA PARTE DE LA TAREA 1* 47

3.6 *SEGUNDA PARTE DE LA TAREA 1* 56

3.7 *TERCERA PARTE DE LA TAREA 1* 65

3.8 Resultados Finales 78

CONCLUSIONES 80

REFERENCIAS 85

ANEXOS 87

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Algunos Cursos de la malla curricular de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UNAM 14

Figura 2. Algunos Cursos de la malla curricular de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UJCM 15

Figura 3. Planos del Espacio de Trabajo Matemático 17

Figura 4. Planos Verticales del Espacio de Trabajo Matemático 19

Figura 5. Planos Vertical del Espacio de Trabajo Matemático: [Sem–Ins] 21

Figura 6. Solución de Euclides de la proposición XVII 29

Figura 7. Triángulo Característico 32

Figura 8. Triángulo Diferencial 33

Figura 9. Orden de contenidos Capítulo 4 35

Figura 10. Orden de contenidos Capítulo 5 35

Figura 11. Definición de la derivada. 36

Figura 12. Interpretación geométrica de la derivada en Espinoza (2012) 37

Figura 13. Interpretación geométrica de la derivada Mitacc y Toro 39

Figura 14. Ejemplo N°13 sobre la interpretación geométrica 40

Figura 15. Ítems de la primera parte de la Tarea 1 47

Figura 16 Desarrollo esperado al ítem b) 49

Figura 17. Manipulación del artefacto realizado por A1 51

Figura 18. Reproducción de la respuesta de A1 al ítem a) de la tarea 1 51

Figura 19. Manipulación del artefacto realizado por A1 52

Figura 20. Respuesta de A1 al ítem b) de la tarea 1 52

Figura 21. Respuesta de A1 al ítem c) de la tarea 1 53

Figura 22. Manipulación del artefacto realizado por A2 53

Figura 23. Respuesta de A2 al ítem a) de la tarea 1 54

Figura 24. Manipulación del artefacto realizado por A2 54

Figura 25. Respuesta de A2 al ítem b) de la tarea 1 54

Figura 26. Respuesta de A2 al ítem c) de la tarea 1 55
Figura 27 Ítems de la segunda parte de la Tarea 1 56
Figura 28. Respuesta de A1 al ítem a) de la segunda parte 60
Figura 29. Manipulación del artefacto (A1) y Figura 30. Manipulación del artefacto (A1).... 61
Figura 31. Respuesta de A1 al ítem b) de la segunda parte. 61
Figura 32. Respuesta de A1 al ítem c) de la segunda parte 62
Figura 33. Respuesta de A2 al ítem a) de la segunda parte 63
Figura 34. Manipulación del artefacto (A2) y Figura 35.Manipulación del artefacto (A2)...... 63
Figura 36. Respuesta de A2 al ítem b) de la tarea 2 64
Figura 37. Respuesta de A2 al ítem c) de la tarea 2 64
Figura 38 Ítems de la tercera parte de la Tarea 1 65
Figura 39. Manipulación del artefacto realizado por A1 70
Figura 40. Respuesta de A1 al ítem a) de la tercera parte de la Tarea1 71
Figura 41. Respuesta de A1 al ítem b) de tercera parte de la Tarea 1 71
Figura 42. Respuesta de A1 al ítem c) de la tercera parte de la Tarea 1 72
Figura 43. Manipulación del artefacto realizado por A1 72
Figura 44. Respuesta de A1 al ítem d) de la tercera parte de la Tarea 1 73
Figura 45. Respuesta de A1 al ítem e) de la tercera parte de la Tarea 1 73
Figura 46. Manipulación del artefacto del alumno A2 74
Figura 47. Respuesta de A2 al ítem a) de la tercera pate de la Tarea 1 74
Figura 48. Respuesta de A2 al ítem b) de la tercera parte de la Tarea 1 75
Figura 49. Respuesta de A1 al ítem c) de la tarea 3 de la tercera parte de la Tarea 1 75
Figura 50. Manipulación del artefacto realizado por A2 76
Figura 51. Respuesta de A2 al ítem d) de la tercera parte de la Tarea 1 76
Figura 52. Respuesta de A2 al ítem e) de la tercera parte de la Tarea 1 76

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: *Estudio de los Paradigmas del Dominio del Análisis Matemático en la derivada*........ 22
Tabla 2: *Información de los sujetos…* 42
Tabla 3: *Estructura de las tareas propuestas* 43
Tabla 4: *Resumen de informantes y técnicas* 43
Tabla 5: *Resumen de los resultados de la tarea exploratoria* 44
Tabla 6: *Resumen de los resultados de la Tarea* 78

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo diferencial, se inicia en el primer año de universidad en estudiantes de ingeniería. Gracias a innumerables investigaciones, de diferentes líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas, se ha podido evidenciar, las grandes dificultades de aprendizaje que presenta nuestros estudiantes. Además, que una de las causas recae en el excesivo uso de definiciones formales, dejando de lado las ideas geométricas para llegar a la formalización del objeto en estudio.

En este sentido desarrollamos la presente investigación, de corte cualitativo, tiene por objetivo analizar el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de Ingeniería cuando resuelven tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real. Para ello trabajamos con estudiantes de la Facultad de Universidad Nacional de Moquegua, a quienes se les enfrenta a tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada; para estudiar sus acciones y de esta manera, identificar en su trabajo matemático las génesis que activa: la génesis semiótica, instrumental o discursiva , así también estudiamos si ellos logran activar los planos verticales: el plano Semiótico-Instrumental, el plano Instrumental-Discursivo y/o el plano Semiótico-Discursivo. Finalmente analizar en qué paradigmas del análisis estructuró su trabajo matemático. Para poder realizar todo este estudio nos fundamentamos en el marco de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático de Kuzniak.

Para tal fin, estructuramos la investigación en cuatro capítulos: En el capítulo I, presentamos las investigaciones de referencia, investigaciones relacionadas a la derivada de una función real de variable real, en diferentes marcos teóricos, así como investigaciones que utilizan el software GeoGebra para el estudio de este objeto matemático, se justifica el problema de investigación y formulamos la pregunta de investigación y los objetivos respectivos. También presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue como fundamento metodológico de nuestro trabajo de Investigación.

En el capítulo II, presentamos el marco teórico de la investigación; es decir, aspectos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Se enfatiza en el Dominio del Análisis.

En el capítulo III, presentamos brevemente algunos aspectos históricos de la evolución de la noción derivada de una función y la forma didáctica como se aborda la derivada de una función en los textos universitarios referidos.

En el capítulo IV, presentamos la parte experimental de la investigación que comprende la descripción de los sujetos de investigación, la secuencia de dos actividades, así como el análisis de las producciones de dos estudiantes en cada uno de los ítems, así como los resultados de la experimentación.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación en relación con el marco teórico y metodológico, a la pregunta de investigación, al objetivo general y las recomendaciones para futuras investigaciones que surgirán a raíz de nuestra investigación.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentaremos investigaciones de referencia que consideramos importantes relacionadas con el aprendizaje de la derivada en el primer año de universidad que nos ayudaron a construir la problemática del estudio, la justificación que está fundamentada en estas investigaciones y en documentos curriculares, así como la pregunta de investigación y los objetivos de estudio.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta sección, presentamos las investigaciones que nos permitieron evidenciar las dificultades de los alumnos en el estudio de la derivada de una función, en el nivel superior, fundamentadas en diferentes marcos teóricos, así como investigaciones que utilizaron mediación de medios tecnológicos, tales como el GeoGebra. Analizamos sus resultados, alcances, conclusiones, las actividades diseñadas y estructura, lo que nos permitió dar forma a la presente investigación, así como diseñar las actividades propuestas.

En relación a las investigaciones sobre la derivada de funciones reales de variable real, tenemos el estudio de Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), quienes realizan una investigación preocupados por la formación del profesor de Matemática Superior en Argentina, a quienes creen se les debería preparar y brindar herramientas didácticas (técnicas y conceptuales) para que tengan una mejor comprensión de la Matemática, que es aprendida y que luego será enseñada.

Los autores infieren que, después de haber revisado muchos estudios, se interesaron en hacer aportes para reducir la brecha entre la Matemática que se debería enseñar y la que realmente se enseña. Además, pudieron observar que donde más se evidencia esta diferencia es en el tránsito del nivel medio superior al nivel superior.

Señalan que la problemática del aprendizaje, en el nivel superior, se da en el curso del Cálculo, donde los estudiantes deberían aprender los conceptos matemáticos fundamentales de la Matemática Superior, en la que consideran que los temas desarrollados en el curso no deberían ser abordados de manera aislada. Las nociones más importantes del Cálculo deberían ser abordadas desde sus diferentes representaciones, la coordinación de diferentes registros, las imágenes le permitirán a los estudiantes una real comprensión del objeto matemático. En este sentido, el uso de tecnologías de la información jugaría un papel muy importante, no solo en el uso de diferentes representaciones sino también en la parte motivacional del estudiante.

Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011) comentan que, en Argentina, la formación de profesores se da en dos niveles: el Universitario y el Superior no universitario, y, durante el desarrollo de la investigación, presentaba importantes cambios curriculares y frente a ello consideraron relevante recibir recomendaciones de ambos niveles.

Por otro lado, a partir de un programa denominado "*1 a 1*", el Estado les facilita computadoras a docentes y a futuros profesores. Este hecho motiva a los autores a desarrollar una investigación utilizando tecnología, para un mejor proceso de aprendizaje. En virtud a todo ello, los investigadores, fundamentados en las investigaciones en Educación Matemática, proponen criterios que permiten organizar la enseñanza de la Matemática. Además, infieren que proporcionaran herramientas que ayudarán a cada docente a direccionar sus sesiones y así puedan desarrollar su clase utilizando como fundamento teórico aquella teoría que más se adecua a su contexto.

Los criterios considerados por los autores son: a) Plantear preguntas que permitan al estudiante movilizar sus conocimientos en las diferentes áreas de la Matemática; b) Utilización de estrategias didácticas en el proceso de enseñanza y el análisis y evaluación de su aprendizaje; c) Uso de Tecnologías de información para ayudar a interiorizar y garantizar un aprendizaje duradero.

Los autores consideran un ejemplo con el tema de aproximaciones polinómicas. Los investigadores esperan que el estudiante identifique el significado del objeto y si conoce la definición formal, sólo extraerá dicho significado. Resaltan que extraer y asignar significados aportan en el aprendizaje de estas nociones.

Bajo los criterios, es posible el aprendizaje del objeto, desde el punto de vista solicitado por documentos curriculares y los que se propone en la Educación Matemática, buscando enfrentar al estudiante a una situación matemática adecuada, de manera organizada y sin tener siempre la respuesta final. Los autores afirman que será un gran reto para el estudiante, ya que les permitirá realizar conjeturas, demostraciones y generalizaciones.

Del mismo modo, Vega, Carrillo y Soto (2014), después de observar el bajo rendimiento de los estudiantes que ingresan a las Universidades de Chile, se interesan en investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, buscando evidenciar cómo los estudiantes aprenden Matemática, específicamente la derivada de una función real de variable real y sus aplicaciones. Para ello, utilizan, como fundamento teórico, la teoría APOS, la cual les permitirá observar cómo los estudiantes construyen el conocimiento nuevo y determinar qué nivel de aprendizaje alcanza.

Utilizaron dos casos de un estudio anteriormente realizado por ellos, enmarcado en un estudio de casos múltiples. En ese sentido, utilizan los resultados existentes y realizan un seguimiento de aprendizajes de los estudiantes del primer semestre del curso de Matemática I de la facultad de Ingeniería de Alimentos de una universidad chilena, a quienes les aplica una prueba diagnóstico al inicio del curso y después de un mes de haberlos reforzado con los temas que los autores consideraron necesarios para desarrollar el curso, seleccionan estudiantes con altas y bajas calificaciones de manera aleatoria, de los cuales analizan los dos casos mencionados, a quienes denominaron *Daniela* y *Lola*.

Para su propósito, diseñan un entorno que les permitiera interactuar en el proceso de aprendizaje, en la que utilizan módulos de clases, trabajos prácticos y talleres utilizando computadoras.

Los autores utilizan, como instrumento principal de medida, la Prueba de Medición de Estándares (PME), que fue diseñada basada en el modelo APOS, considerando los estándares de aprendizajes de la asignatura de Cálculo y la prueba se realiza ocho meses después de haber sido dictado el curso. Con este modelo cognitivo, se pudo evidenciar en qué etapa de aprendizaje se encontraba. Se pudo observar que existe mucha relación entre los resultados de evaluaciones y la PME.

Vega, Carrillo y Soto (2014) concluyen que, si el concepto de derivada en un punto no es entendido por los estudiantes a nivel de Acción, tendrán dificultades para ampliar las definiciones y así transitar a un nivel superior de comprensión e interpretar el concepto geométricamente. También observan dificultades para identificar proposiciones falsas y verdaderas sobre las propiedades de la derivada relacionadas con la monotonía y la concavidad de una función. Se evidenció además el aprendizaje y la estrategia de enseñanza.

Gómez (2017), en su investigación, propone un método para la enseñanza de la derivada de una función real de variable real en el nivel superior, motivando una nueva forma de aprendizaje fundamentada en un aprendizaje autónomo.

El investigador desarrolla esta propuesta en respuesta a su preocupación por la dificultad que evidencia en los estudiantes del curso de Cálculo, específicamente en el proceso de abstracción de los conceptos, como el concepto de límite y ver que esta dificultad aumenta al verla relacionada con la definición de la derivada.

El autor afirma que, a pesar de existir muchos estudios, las dificultades persisten, ya que considera que puede ser porque existen textos importantes de este curso y que presentan ejercicios resueltos de forma mecánica, aunque resalta que el responsable de la enseñanza es el profesor.

Por ello, Gómez (2017) diseña una propuesta para un aprendizaje de forma autónoma de la noción derivada, la cual es organizada en cuatro fases denominadas: Apropiación del concepto de Derivada; Extensión del concepto; Aplicación teórica de los conceptos y; Transferencia de aprendizaje, donde cada fase desarrolla contenidos, intencionalidad, actividades previas, actividades de desarrollo y actividades de cierre, cada ítem con sus indicaciones descritas con el propósito que el estudiante movilice sus habilidades cognitivas y desarrolle hábitos académicos, utilice la noción derivada en la solución de problemas con un aprendizaje autónomo y la solución de problemas.

Para validar su propuesta, trabaja con dos grupos de estudiantes del primer semestre del curso de Cálculo durante dos semanas, cinco horas cada día. Un grupo de 18 estudiantes, a quienes se les facilita un texto, computadoras y guía y al otro grupo de 42 personas se les facilita el texto y la guía.

El autor afirma que se evidenció en los estudiantes la costumbre a la cátedra del docente, así como también a la resolución de ejercicios por métodos algorítmicos que fueron un obstáculo para el proceso de abstracción de la noción, las demostraciones realizadas y la formalización de las definiciones. Cabe mencionar que, antes de validar el método, se dictó una introducción para alcanzar el aprendizaje autónomo deseado donde se utilizó el método de la clase integral.

El investigador infiere que este método de enseñanza desea facilitar al estudiante una nueva forma de aprendizaje, de manera participativa, significativa y autónoma, para que éste desarrolle habilidades cognitivas y metacognitivas y a la vez conseguir mejores hábitos académicos, pero ello dependerá de su motivación para la ejecución y un compromiso responsable para desarrollar las tareas encargadas, con una idónea orientación del profesor. Luego, la validación realizada, le permitió al autor afirmar que hubo transferencia del aprendizaje, ya que los estudiantes alcanzaron la conceptualización de la derivada considerando la definición del límite y además que el facilitar herramientas computacionales no fue importante en la aprehensión del concepto.

Estudios como los de Vrancken y Engler (2014) y Montoya y Vivier (2015) enfatizan la importancia de analizar las acciones de los estudiantes.

En primer término, Vrancken y Engler (2014) se interesan por el estudio de la derivada de una función real de variable real, resaltando lo fundamental de analizar las acciones que realiza el estudiante en el proceso de aprendizaje, enfocada desde la variación y el cambio, después de observar que el estudio del cálculo universitario, en la actualidad, hace énfasis en la aplicación de métodos tradicionales y procesos algorítmicos, a pesar que desarrollan la capacidad de calcular limites, derivar o integrar haciendo usos de técnicas que están dejando de lado nociones variacionales muy importantes que el estudiante debe interiorizar.

La derivada, como variación y cambio, es un conocimiento que los estudiantes necesitan frente a problemas reales en los diferentes contextos profesionales. Los autores sustentan esta investigación en el Pensamiento y Lenguaje Variacional, relacionando la Matemática desde la variación y cambio y los procesos del pensamiento.

Desde este punto de vista, en un contexto real, la derivada representa la rapidez de cambio. El asignar significados a los elementos de variación permitirán que se desarrolle un pensamiento variacional, además que si coordina al menos dos representaciones del objeto de estudio habrá alcanzado la comprensión del mismo.

Con la intención que el alumno construya ese conocimiento, los autores analizan las nociones que se desprenden de la derivada relacionadas a la variación y al cambio. Para este fin, elaboran una secuencia didáctica con la metodología de la Ingeniería Didáctica considerando sus cuatro fases y para su construcción consideran saberes previos de la velocidad, gráfica de funciones y la razón de cambio como pendiente de una recta.

Vrancken y Engler (2014) implementan la secuencia en el aula del curso de Matemática II de la Carrera de Ingeniería Agronómica de la facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral en Argentina, en la que trabajan con estudiantes con saberes previos necesarios sobre funciones. Esta secuencia se desarrolla en tres clases de cinco horas en las cuales, antes de iniciar, se realiza un repaso de la clase anterior, prácticas compartidas para interactuar y el profesor siempre observando e induciendo a que ellos respondan sus propias interrogantes y sobre todo que desarrollen un pensamiento variacional. La secuencia les permite afirmar que los estudiantes movilizaron diferentes nociones variacionales, lo que permitió emerger el concepto de la derivada, vista desde la cuantificación.

Los resultados obtenidos evidenciaron el uso de diferentes representaciones y estrategias del estudiante. Los autores infieren que este hecho les permitió conjeturar y participar de las discusiones, así como los trabajos grupales que ayudaron en la aprehensión del concepto, lo cual motivó al estudiantado.

Se presentaron algunas dificultades por la falta de conocimientos previos necesarios para el desarrollo del tema, así como el número de sesiones, que fue muy corto para desarrollar la validación e institucionalización. Cabe resaltar que fue muy significativo para los estudiantes, más allá de haber alcanzado las respuestas correctas.

Montoya y Vivier (2015) refieren que algunas nociones del Cálculo, en la mayoría de los países, se desarrolla desde antes de la universidad, pero de manera superficial priorizando los tratamientos calculatorios. Es en la universidad donde se desarrolla a profundidad y es en este tránsito donde los estudiantes presentan mayores dificultades debido al grado de abstracción de algunas nociones que generan en estos, ya que muchos obstáculos, en adelante, impedirán un buen desarrollo de los cursos de Matemática, como la tangente que es enseñada en el colegio como un objeto auxiliar a la circunferencia.

Existen diversas investigaciones analizadas que les permitieron a los autores evidenciar las grandes dificultades en el aprendizaje en el dominio del Análisis, dificultades ligadas a la conceptualización de nociones básicas de este dominio, así como dificultades ligadas a la ruptura del aprendizaje del análisis y la reconstrucción de un objeto matemático en estudio, que es la tangente, noción que conoce empíricamente y sobre la cual se fundamenta una noción importante del Cálculo, como lo es la derivada.

Es por ello que los autores desarrollan una investigación con el propósito de mostrar la concepción de la tangente, desde un punto de vista gráfico, que tienen los estudiantes cuando ingresan a la universidad y tiene un primer roce con el curso de Cálculo o Análisis y el estudio de la derivada, así como el cambio de dominio en sus análisis y los diferentes puntos de vista de sus análisis realizados desde un punto de vista local, global y puntual, según Vandebrouck (2011).

Para alcanzar su propósito, desarrollan un taller con 44 estudiantes de Matemática de una universidad de Chile de segundo semestre del curso de Cálculo II en el año 2014, fundamentando su estudio en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático ETM en el contexto de la Ingeniería Didáctica.

Montoya y Vivier (2015) evidencian que el estudio de la derivada se da desde un enfoque geométrico y su análisis desde una perspectiva local y global del “límite de una secante”, noción que, en su desarrollo, privilegia principalmente en el paradigma del análisis calculatorio AC y sobre todo con una idea intuitiva de la tangente. Esto les permite afirmar que la concepción intuitiva del estudiante no es suficiente para construir la noción del concepto de la derivada, la misma que considera una noción fundamental del Cálculo.

Por otro lado, Bustos y Vásquez (2016) resaltan que la dificultad del aprendizaje de la noción derivada se encuentra en el exceso de la notación formal de los conceptos, dejando de lado las ideas geométricas. Por ello, desarrollan una investigación con el propósito de diseñar un conjunto de situaciones a didácticas que aprovechen el potencial del software CaRMetal y den vida a estrategias para la resolución de problemas de optimización, utilizando la noción de derivada y favoreciendo su interpretación geométrica. Asimismo, los autores recalan que el uso del software no es un afán motivacional o de innovación, sino como un medio para que el estudiante construya su conocimiento.

Para alcanzar su propósito, desarrollan actividades direccionadas para que los estudiantes desarrollen ideas geométricas, para ello toman como sustento teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y como metodología de investigación consideran aspectos de la Ingeniería Didáctica. En tal sentido, proponen a los estudiantes dos problemas de optimización y su modelación en el SGD (Software de Geometría Dinámica), de tal manera que interaccionen con el software y les permitan validar sus acciones y así determinar estrategias matemáticas.

El docente sugiere algunas acciones a partir de retroalimentaciones, de tal manera que podrá determinar las acciones que le permitirán resolver el problema, y propone una actividad con objetos físicos para que el estudiante encuentre mayor sentido a la estrategia matemática de encontrar una tangente horizontal que le permita determinar el punto máximo o punto mínimo de una curva y de esta manera se logrará que los estudiantes desarrollen sus propias ideas geométricas. Para ello, proponen dos problemas: el problema del hexágono y el problema de la caja, cada uno con cuatro actividades.

Las autoras logran formalizar el tema sin hacer uso de las definiciones formales de límites y derivadas.

De la misma manera, Ruiz, Córdova y Rendón (2014) desean responder *¿Cómo utilizar GeoGebra para mejorar la comprensión del concepto de derivada en el análisis de los puntos donde una función es derivable o no, a estudiantes de bachillerato?,* ya que su experiencia profesional les permitió identificar dificultades importantes en la comprensión de la noción derivada en sus estudiantes de bachillerato en Colombia.

En tal sentido, realizan una investigación, de corte cualitativo, en la que desean brindar una propuesta de trabajo que permita mejorar la comprensión de esta importante noción del Cálculo, relacionando aspectos visuales y geométricos, ya que uno de los problemas más evidenciados es el análisis de las gráficas, en donde los autores refieren a Salazar (2009). Además, con esta metodología, desean que el estudiante integre los conceptos de la tasa de variación y la derivada, haciendo uso de un software como el GeoGebra.

Los autores infieren que la representación de imágenes dinámicas que nos brinda el GeoGebra facilitará la visualización de los conceptos, así como un mejor entendimiento del infinito y la representación de las funciones, que en muchas ocasiones son difíciles de visualizar a través de gráficas realizadas con ayuda solo de un lápiz y papel. Los autores afirman que el uso de los ordenadores para brindar a los estudiantes el concepto de derivada de una manera más accesible y menos formal, así también que las tecnologías computacionales tienen un fuerte impacto profesional en la práctica de las Matemáticas.

Para alcanzar su objetivo, adaptan categorías teóricas y analíticas que pueden utilizar del marco enseñanza para la comprensión (EpC), alcanzando la construcción de la descomposición de la noción derivada y la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en dos dimensiones definidas: gráfica y analítica.

Utilizan como metodología de la investigación un estudio de casos, dirigido a un grupo de tres a cuatro estudiantes de bachillerato del municipio de Medellín, y utilizan como fuente de información la entrevista semi-estructurada con la finalidad de identificar los conocimientos y las dificultades que tienen los estudiantes acerca de la derivada. Utilizan computadoras y brindan a los estudiantes el concepto de la derivada desde un punto de vista menos formal con la intención que no sea una limitante a la memorización de los mismos y construyen actividades buscando que el estudiante, a través de la observación, construya sus propios conocimientos relacionando la derivada y la tasa de variación media. Luego de la aprehensión de esta relación, se les brinda la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva, logrando con todo ello la posibilidad de asumir una postura racional y crítica del estudiante frente a la tecnología existente que le permite una mejor comprensión de la derivada.

Gonzales, Vigo y Advíncula (2018) diseñan una secuencia didáctica con la intención de lograr en el estudiante la comprensión del concepto de derivada de manera más dinámica haciendo uso del software GeoGebra, en la que refieren múltiples investigaciones de la noción derivada e indican dificultades para los estudiantes, así como su experiencia como docente. En esta investigación, las autoras realizan actividades que permiten la comprensión de la función derivada en el marco de la teoría de Registros de Representación Semiótica, de la cual utilizan aspectos que les permiten identificar el significado de la derivada, su interpretación, representación y cómo la utilizan los estudiantes para dar solución a los problemas, todo mediado con el software GeoGebra.

Para ello, utilizan una metodología cualitativa descriptiva de la que se proponen cuatro actividades diseñadas con la intención de facilitar a los estudiantes la comprensión de la noción de derivada de manera intuitiva, utilizando la tasa de variación media e instantánea. Luego se da institucionalización del objeto matemático, para después proponer otras dos actividades donde se emplea la derivada en la resolución de problemas, utilizando diferentes registros de representación con énfasis en el registro gráfico. Para cada actividad propuesta, se presenta un análisis didáctico.

Las autoras infieren que el uso del software facilitó la comprensión del concepto de la función derivada.

1.2 Justificación

En las últimas décadas se ha desarrollado un número considerable de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con la derivada, entre ellas las investigaciones de Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011); Vega, Carrillo y Soto (2014); Vrancken y Engler (2014) y Gómez (2017), quienes afirman que observaron dificultad en los alumnos al estudiar la derivada de una función real de variable real en su primer año de universidad. Estos hallazgos en sus estudios permitieron a los autores inferir que uno de los motivos es el exceso de definiciones formales en su enseñanza y el uso de algoritmos en la resolución de problemas.

Estas investigaciones aportan al proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción derivada de una función real de variable real en las universidades como una herramienta, ya que los estudiantes tienen la posibilidad de observar en estos estudios las dificultades más comunes que presentan, pero sobre todo encontrarán propuestas para ayudar a superarlas.

Artigue (1998), menciona que los estudiantes encuentran notorias dificultades al inicio de la etapa universitaria en el desarrollo de los cursos de Análisis, relacionadas con la complejidad matemática de los objetos matemáticos básicos de este campo conceptual.

Igualmente, Tall (20011) (citado en Menares. 2016), infiere que estas dificultades se presentan particularmente de la idea que tenemos de tangente en Geometría y su transición a la definición en Cálculo.

En ese sentido, refiere que la concepción de la tangente a un círculo, en Geometría, no es necesariamente la definición en Cálculo cuando nos referimos de tangente a una curva, ya que los estudiantes que inician un curso de Cálculo tienen saberes previos de la recta tangente y para hablar de la derivada definida como la pendiente de la tangente a la curva en un punto. Todo ello genera dificultades, ya que no siempre ambas definiciones concuerdan, lo que genera un obstáculo en el desarrollo de su aprendizaje. Por ello, Vrancken y Engler (2014) y Montoya y Vivier (2015) concuerdan que para construir conceptos y procesos matemáticos es necesario analizar las ejecuciones de los alumnos.

Además de todo ello, en el presente estudio se analiza los documentos que fundamentan la enseñanza de la derivada en la universidad, ya que sabemos que cada institución universitaria desarrolla sus propias mallas y planes de estudio, por lo cual tomaremos en cuenta las mallas y planes de estudio de la carrera profesional de Ingeniería de Sistemas de dos universidades ubicadas en la provincia de Ilo, en el departamento de Moquegua, la Universidad Nacional de Moquegua (UNAM) y la Universidad Privada José Carlos Mariátegui de Moquegua (UJCM), instituciones universitarias que constituyen importantes centros de formación en el departamento referido.

En términos generales, se observa concordancia con los cursos abordados en los primeros semestres denominados *cursos de formación general*.

A pesar de registrar en la malla curricular con nombres diferentes, en la universidad nacional se lleva *Matemática II* y en la universidad privada al curso se le denomina *Cálculo I*. Los contenidos que involucran, entre otros, son los axiomas de cuerpo ordenado y completo para los números reales, las nociones de convergencia de sucesiones, límites, funciones continuas y la derivada de una función real de variable real. Se trabaja además el teorema del valor medio e integral y la convergencia de series, límites y continuidad. También estudian integrales de línea, integrales múltiples e integrales de superficie.

Ambas instituciones universitarias consideran en sus planes de estudio el objeto matemático derivada de una función real de variable real, las propiedades y sus aplicaciones, pero en los planes de estudio no es posible analizar a profundidad el desarrollo de las nociones de nuestro interés, como la derivada de una función.

En cuanto a la definición de derivada, lo abordan en un primer ciclo de estudio en el cual desarrollan el concepto de derivada, justo después del estudio de la continuidad de funciones. En cuanto al enfoque y las propiedades tratadas en torno a las derivadas, declaran dar inicio por las propiedades de diferenciación, llegando a la definición del límite. Luego, desarrollan la interpretación geométrica de la derivada, continuando con algoritmos de cálculo de derivadas, derivadas de orden superior, derivación implícita, aplicaciones de la derivada, aplicaciones en otras áreas, planteo de problemas y cálculo, teoremas o propiedades de las derivadas relacionados con la continuidad, la continuidad de las funciones derivables en un punto, álgebra de derivadas, regla de la cadena y máximos y mínimos de una función. Los teoremas de Rolle y del valor medio.

Con ayuda de las figuras 1 y figura 2, observaremos la necesidad del estudiante de aprender tópicos del curso de Matemática II y Cálculo I para poder desarrollar más adelante cursos específicos de Ingeniería de Sistemas que permitirán que se desenvuelvan en cursos propios de su especialidad.

A continuación, algunos cursos de la malla curricular de la UNAM:

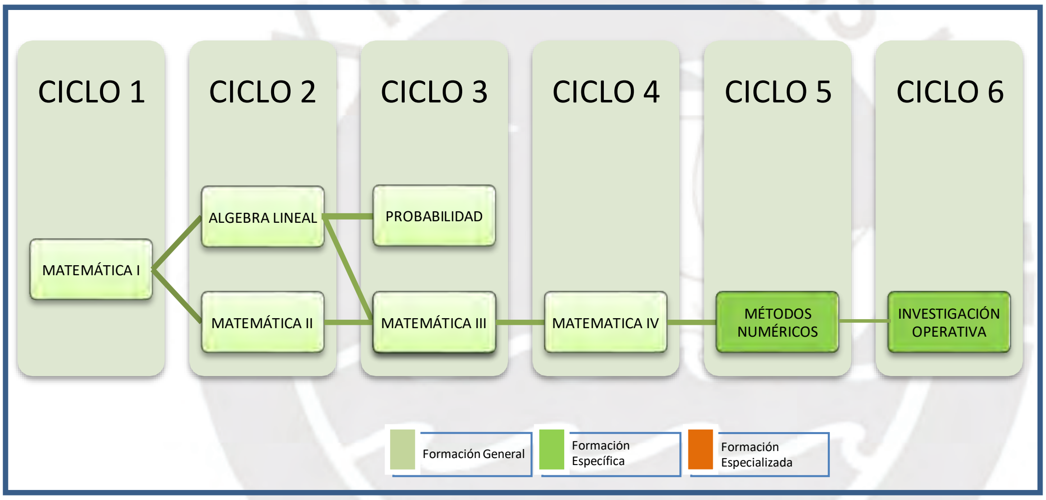


Figura 1. Algunos Cursos de la malla curricular de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UNAM.

Fuente: Elaboración propia en base a la malla curricular de la carrera Ingeniería de Sistemas de la UNAM. https://www.unam.edu.pe/index.php/plan-de-estudios

En la figura 1, aparece parte de la malla curricular de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua (UNAM), donde se puede observar que el curso de Matemática II es un pre requisito de Matemática III del segundo ciclo y este curso es pre requisito de Matemática IV correspondiente al Ciclo 3, que es un pre requisito para desarrollar cursos específicos de Ingeniería de Sistemas del siguiente ciclo que deberán aprobar para llevar cursos de su especialidad.

En la Figura 2, presentamos algunos cursos de la Universidad Privada José Carlos Mariátegui de Moquegua (UJCM):

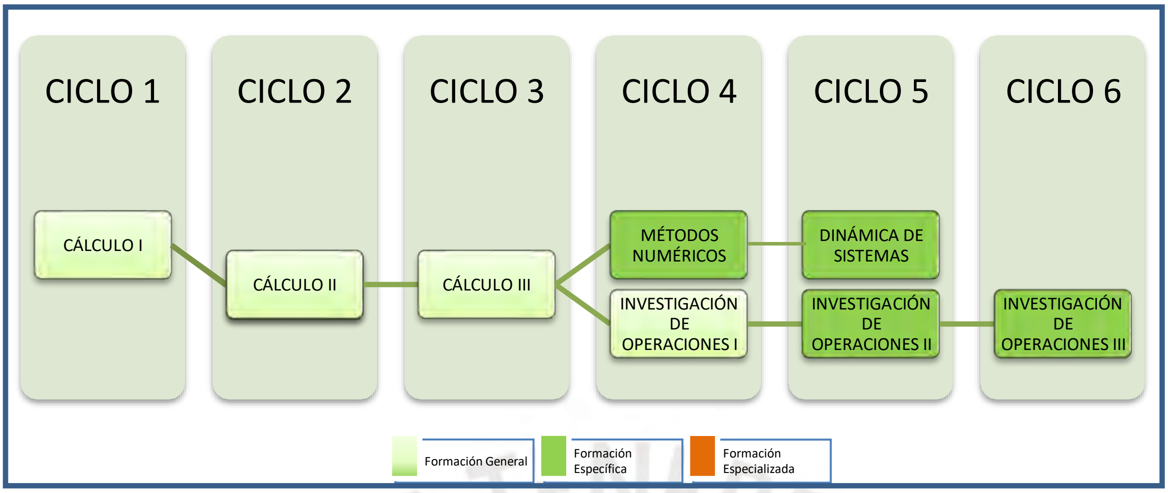


Figura 2. Algunos Cursos de la malla curricular de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la UJCM.

Fuente: Elaboración propia en base a la malla curricular de la carrera Ingeniería de Sistemas de UJCM.https://www.ujcm.edu.pe/sites/default/files/field/transparencia/mallas/pregrado/faing/malla-sistemas.pdf

De igual manera que en la universidad anterior, en la figura 2 se observa que en el curso de Cálculo I se aborda la interpretación geométrica de la derivada que los estudiantes deben conocer para poder desarrollar el siguiente curso de Cálculo II y así los contenidos abordados en el mismo son necesarios para poder llevar el curso de Cálculo III y este a su vez es pre requisito de los cursos específicos de Ingeniería de Sistemas como Métodos Numéricos e Investigación de Operaciones, que deben aprobar para poder desarrollar cursos de su especialidad.

Cabe resaltar que los cursos pertenecen al área curricular de estudios generales. En este sentido, el artículo 41 de la Ley Universitaria (2014) establece que los cursos generales de pregrado son de carácter obligatorio y están orientados a la formación integral de los estudiantes.

Por lo importante que es el estudio de la derivada de una función real de variable real evidenciada en los planes de estudio, estos responden a la necesidad de que los estudiantes de las carreras de Ingeniería tengan conocimiento de los conceptos matemáticos básicos para luego poder desenvolverse en el mundo. En base a las investigaciones de referencia, inferimos investigar ¿Cómo un alumno de la carrera de Ingeniería interpreta geométricamente la derivada de una función real de variable real? ¿Qué conocimientos utiliza? ¿Qué conceptos matemáticos moviliza (utilizando un software) para la construcción de su conocimiento?, fundamentado en el Espacio de Trabajo Matemático, es pertinente.

En función a las investigaciones de referencia y la justificación descrita, proponemos la pregunta y los objetivos para este estudio.

1.3 Aspectos Teóricos: Espacio de Trabajo Matemático

En esta sección, presentaremos algunos aspectos teóricos que utilizaremos para estudiar el Espacio Matemático que desarrollan los estudiantes de Ingeniería cuando resuelven tareas que contribuyen a la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real, así como herramientas para el diseño y análisis de dichas tareas.

El marco teórico que elegimos se denomina Espacio de Trabajo Matemático, desarrollado por Houdement y Kuzniak (2006) (al que denominaremos ETM), inicialmente fue creado para la Geometría y más adelante se amplió a otros dominios matemáticos, según lo que señala Kuzniak (2011).

En la actualidad, la teoría considera que un ETM depende de un dominio matemático (Kuzniak, 2011) como la Geometría, el Álgebra, probabilidades y el Análisis, que es el dominio que a nuestra investigación le interesa. Además, Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) refieren que los paradigmas son la caracterización del ETM en un dominio específico, entonces hablaremos de los paradigmas en el Análisis.

Espacio de Trabajo Matemático-ETM

El Espacio de Trabajo Matemático fue concebido para describir la naturaleza del trabajo matemático del estudiante cuando se enfrenta a un problema, ya que está organizado para tareas matemáticas. Según esta teoría, del estudio inicial en Geometría se conserva el principio de articular dos planos: uno de naturaleza epistemológica, en relación estrecha con los contenidos y contenidos matemáticos del ámbito estudiado y, el otro, de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas. Además de ello, esta articulación permite la activación de diferentes génesis.

El análisis que se realiza en el ETM tiene como propósito estudiar cómo interactúan estos diferentes planos, a fin de dar cuenta de la forma en que un conjunto determinado de tareas o actividades eventualmente dan forma a un trabajo matemático. En nuestra investigación, específicamente, analizaremos el espacio de trabajo matemático del estudiante, que es llamado, ETM personal y que presentaremos más adelante.

Entonces, el trabajo matemático se realiza articulando los dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo, mediante la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva (ver figura 3).

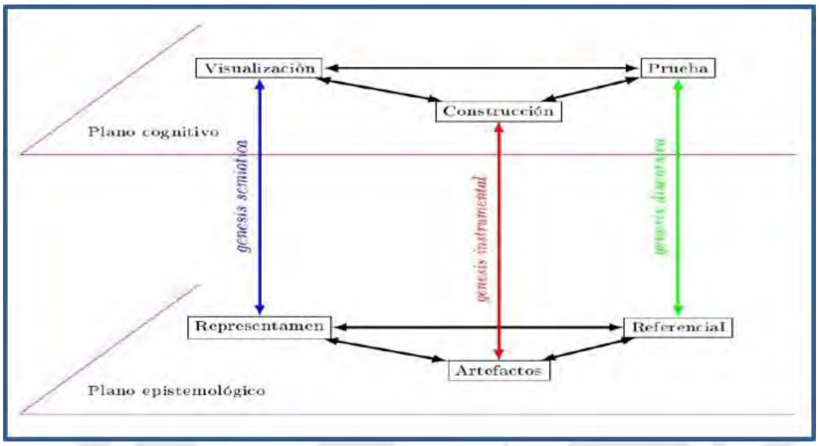


Figura 3. Planos del Espacio de Trabajo Matemático
Fuente: Kuzniak, Delgadillo y Vivier (2016, p.248)

Plano Epistemológico y sus componentes

De acuerdo a Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016), en el plano epistemológico, se encuentran las herramientas que ayudan a desarrollar el trabajo matemático. Estas herramientas son denominadas: representamen, artefactos y el referencial. Además, refiere que en el modelo de los ETM, los objetos matemáticos pueden convertirse en herramientas o viceversa, declara que esto está fundamentado en Douady (1986; 1992).Estas componentes en interacción son características de la actividad en su dimensión puramente matemática: un espacio real y local como soporte material, con un conjunto de objetos concretos y tangibles; un conjunto de artefactos como herramientas o software de dibujo o de cálculo; un sistema teórico de referencia basado en definiciones, teoremas, propiedades y axiomas.

Los autores consideran a noción de signo, de acuerdo con Peirce (1931), el signo o representamen como algo que representa otra cosa y de acuerdo a la investigación el conjunto de representamen puede organizarse en representaciones semióticas, según Duval (1995, 2006), o la interacción entre registros semióticos según (Arzarello, 2006). Así también refiere que la noción de artefacto que utiliza la teoría proviene de

Rabardel (1995) e incluye todo lo que sufre una transformación, por pequeña que sea, de origen humano.

El plano cognitivo y sus componentes

En el plano cognitivo, se encuentran tres procesos que a través de los cuales se observa la actividad del individuo: visualización, construcción y justificación.

Siendo la Matemática una ciencia humana, es importante entender cómo los individuos o grupo de individuos hacen uso de sus conocimientos matemáticos y cómo los ponen en práctica. La visualización relativa a la representación del espacio y al soporte material, la construcción que depende de los instrumentos y técnicas asociadas y la demostración apoyada en el proceso discursivo de validación, basados en el referencial teórico.

Es necesario precisar la visualización en este amplio contexto, ya que el proceso de visualización extendida puede concebirse como un proceso de estructuración de la información proporcionada por los diagramas y los signos, diferente a una simple visión o percepción de objetos.

Génesis del ETM

Los planos epistemológicos y cognitivo se articulan mediante tres génesis:

La génesis semiótica. “Es el proceso asociado con signos y representamen que permite pasar de una perspectiva sintáctica a una perspectiva semántica de objetos matemáticos organizada en la representación semiótica. La génesis semiótica proporciona el estado de los objetos tangibles y sus operaciones. De esta manera, se asegura las relaciones entre la función y estructura en los signos” (Gómez-Chacón et al., 2016, p.9).

Se activa al conectarse el proceso de visualización del plano cognitivo con el representamen en el epistemológico. Esta génesis se puede iniciar por el sujeto que codifica y produce un signo o por el signo de representación representamen que será decodificado mediado por la visualización.

La génesis instrumental, Cuya activación articula el plano cognitivo con el epistemológico conectando el proceso de construcción del plano cognitivo con el artefacto del plano epistemológico. Cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, , según Rabardel (1995) (citado en Gómez-Chacón, Kuzniak, A y Vivier,2016) se considera dos procesos, el procesos de instrumentalización la emergencia y evolución de los esquemas de uso del artefacto y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto y el proceso de instrumentalización que parte del individuo y es relativo a la emergencia y evolución de los esquemas de uso y de las acciones instrumentadas, su constitución, funcionamiento, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos.(p,9)

La génesis Discursiva. Se activa con la conexión del proceso de justificación con las herramientas teóricas del plano epistemológico relacionado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades.

“En la génesis discursiva de la prueba, las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático dan el significado” (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016, p. 10).

Por un lado, un razonamiento discursivo basado en el referencial teórico y, por el otro, identificar definiciones y/o propiedades necesarias que deben ser incluidas en el marco de referencia luego de desarrollar tratamientos instrumentales o semióticos.

La activación de una de las génesis referidas no implica necesariamente que las otras génesis no se activen, ya que en el trabajo matemático a veces se observa un trabajo con dos o tres al mismo tiempo; sin embargo, como veremos en la siguiente sección, muchas veces no es fácil realizar una separación y el trabajo matemático se describe a través de planos verticales.

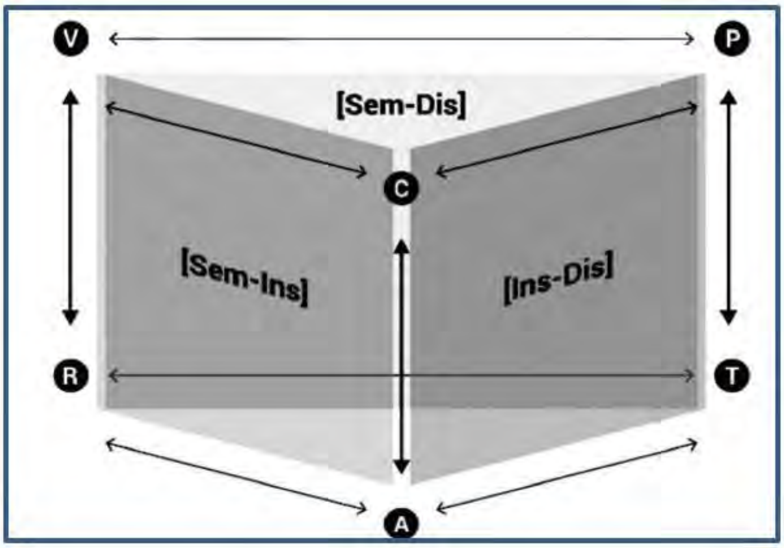


Figura 4. Planos Verticales del Espacio de Trabajo Matemático

Fuente: Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p.726)

En la figura 4 se presenta lo que señala Coutat y Richard (2011) citados en Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016); quienes describen las interacciones de los tres planos verticales que aparecen en el diagrama de los ETMG. Los planos verticales se pueden relacionar con las fases del trabajo matemático implementado en la ejecución de una tarea: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. Además, los autores afirman que es posible caracterizar el trabajo matemático conectando dos génesis mediante algunos de los tres planos verticales: semiótico-instrumental, semiótico discursivo.

El plano semiótico-instrumental [Sem–Ins] está relacionada a la génesis semiótica y a la génesis instrumental y que se puede observar en dos formas de trabajo cuando hay un trabajo de construcción de resultados bajo ciertas condiciones y la interpretación de los datos por medio de los artefactos. Cabe resaltar que ha adquirido mayor importancia debido a la aparición de software digital.

El plano Semiótico Discursivo [Sem–Dis], relacionado a las génesis semiótica y discursiva (prueba matemática), considera dos enfoques: Del lado semiótico, las transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento perceptivo. Por el contrario, si la atención se centra en una prueba o demostración el razonamiento hipotético y deductivo se basa en propiedades, signos y la visualización desempeña un papel heurístico.

El plano Instrumental Discursiva [Ins–Dis] está relacionado con las génesis discursivas de prueba y la instrumental. Se observa en el proceso de justificación fundamentado en la utilización de herramientas algorítmicas o cuando una construcción se basa en elementos del referente teórico.

En nuestra investigación, nos enfocaremos en analizar la génesis semiótica y la génesis instrumental que activan el plano Semiótico-Instrumental [Sem–Ins] (ver figura 5), utilizando el GeoGebra como herramienta informática a la cual referimos anteriormente.

Figura 5. Planos Vertical del Espacio de Trabajo Matemático: [Sem–Ins]

Fuente: Kuzniak, Delgadillo y Vivier (2016, p.248)

Niveles del Espacio de Trabajo Matemático

Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) declaran que debemos considerar el trabajo matemático desarrollado en un ambiente escolar para distinguir tres ETM. En el ETM está definido paradigma como "orienta y estructura la organización de los componentes que, debido a sus funciones diferentes, participan en la especificidad de los diversos paradigmas en juego. Un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. Al espacio de trabajo paradigmático, tal como es definido por esta comunidad, se le llamará ETM de referencia" (Gomez-Chacón et al., 2016, p. 12).

El ETM idóneo depende de la institución, ya que se define de acuerdo a cómo será enseñada en la institución en relación con su lugar y su función específica dentro del currículo nacional.

Su elección y organización es esencial para poder ser estudiado. Estas elecciones del profesor van a dirigir el trabajo personal del estudiante y se harán en conformidad a las condiciones institucionales y a la adecuación del nivel de los estudiantes.

El ETM personal se relaciona con cada persona, ya que se define cómo el individuo se enfrenta a una tarea matemática, sus conocimientos y capacidades. Por lo tanto, las tareas deben ser elegidas por el docente propiciando así el desarrollo de su ETM; ello se evidenciará en las acciones que estos desplieguen para resolver un problema.

Cabe señalar que la construcción de la tarea debe estar de acuerdo a las competencias del estudiante.

Por todo ello, los autores afirman que en una institución educativa el trabajo matemático se define en base a tres niveles, el espacio correspondiente a la institución (ETM de referencia), el que diseña el docente (ETM idóneo) y el que desarrolla el estudiante o el profesor (ETM personal). En nuestro caso, estudiaremos el ETM Personal de los estudiantes de Ingeniería.

En esta investigación, el objetivo es identificar las génesis activadas por los estudiantes en el desarrollo de una tarea matemática (ETM-personal) para entender el trabajo matemático que desarrolla.

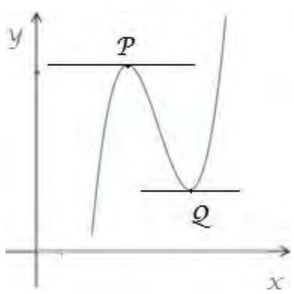
El ETM de referencia del análisis está guiado globalmente por el análisis estándar (Montoya, E., Vivier, L., 2015, p.4), caracterizado con los tres paradigmas:

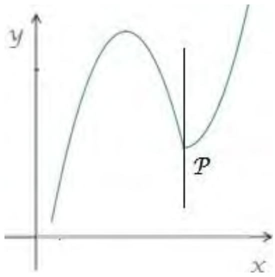
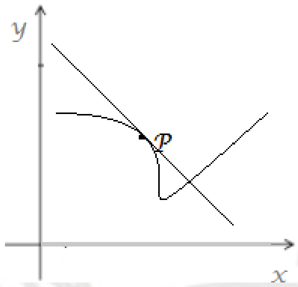
Análisis geométrico/aritmético (AG): permite interpretaciones nacidas de la Geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis calculatorio (AC): donde las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos. Análisis Infinitesimal (AI): es caracterizado por los trabajos que implican aproximación (Gomez-Chacón et al., 2016).

A continuación, presentamos en la tabla 1, una síntesis de los paradigmas que se esperan activar en la presente investigación.

Tabla 1.

Estudio de los Paradigmas del Dominio del Análisis Matemático en la derivada

PARADIGMA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA	DESCRIPCIÓN
		Analizando desde un punto de vista global, consideramos la percepción de la tangente gráficamente. El estudiante relaciona intuitivamente la dirección de la recta tangente con la pendiente de dicha recta. Además, que la recta tangente a la curva en el punto P, se observa es la recta que pasa por el punto P y tiene la misma dirección que la curva alrededor del punto P.

Análisis geométrico/ aritmético (AG)	 	La recta tangente a la curva en un punto puede ser identificada observando el comportamiento de la curva dada. De esta manera, el estudiante visualiza la imagen e identifica características dadas. Hace uso de sus saberes previos o referencial teórico y construye un concepto más amplio de recta tangente a una curva.
Análisis calculatorio (AC)	$m = f'(a)$ $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	Si la derivada existe, relaciona la derivada en un punto con la pendiente de la recta tangente en ese punto P$(a,\ \ f(a))$ (analiza desde una perspectiva puntual). Así también desde el punto de vista global, es la percepción de la tangente como una recta con una ecuación.
Análisis Infinitesimal (AI)	$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	El punto de vista local está más relacionado con el paradigma del Análisis Infinitesimal (AI). Siempre que el límite existe en el dominio de la función f en el intervalo $]a,\ b[$ relaciona a la función derivada como objeto que permite hallar la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de una función f en cualquier punto de abscisa x.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Teniendo en cuenta la problemática planteada con relación a la derivada de una función real de variable real e interesados en observar cómo los estudiantes desarrollan su trabajo personal se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de Ingeniería al resolver tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real?

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, planteamos los siguientes objetivos

Objetivo General

Analizar el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de Ingeniería cuando resuelven tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real.

Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar la activación de las diferentes génesis en el trabajo matemático de los estudiantes.
- Identificar los paradigmas del análisis geométrico/aritmético (AG) y del análisis calculatorio (AC) en el trabajo matemático de los estudiantes al desarrollar la tarea.

1.5 Aspectos metodológicos

Dado que a nuestra investigación le interesa analizar qué conocimientos movilizan los estudiantes en tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real , consideramos que la investigación de tipo cualitativa es la que mejor se adecua a nuestro estudio, ya que Hernández, Fernández y Baptista (2010) infieren que una investigación cualitativa es aquella que estudia, describe situaciones, hechos, interacciones y el comportamiento observado de los sujetos de estudio. Además, afirman que, si en la recolección de datos no se realiza una medición numérica, entonces es del tipo cualitativa.

Dentro de la investigación cualitativa consideraremos aspectos de la Ingeniería Didáctica, definida por Artigue (1995), quien la describe como “un esquema experimental basado en las ‘realizaciones didácticas’ en clase. Es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 36).

La observación y la validación de la secuencia, en este tipo de metodología, es interna luego de confrontar los resultados del análisis a priori y a posteriori y, como mencionamos que nuestro interés es analizar los conocimientos que movilizan los estudiantes en tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada de una función, consideramos que esta metodología es idónea para nuestro estudio.

En ese contexto, presentaremos a continuación las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica que considera la autora: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación relacionados con nuestro estudio.

Análisis Preliminares

Artigue (1995) refiere .

> que la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares, como el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. Los más frecuentes tocan el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva (Artigue,1995, p.38).

En el análisis preliminar de nuestra investigación, estudiaremos las siguientes etapas,

- Desarrollaremos un análisis histórico del objeto matemático “derivada de una función”, considerando los hechos importantes que nos permitan comprender el inicio y la existencia de la derivada, sucesos que nos informen cómo se fue construyendo la derivada a través de la historia, qué hechos provocaron su desarrollo, qué restricciones y dificultades afrontaron los matemáticos desde los inicios de la civilización para definir la derivada. El desarrollo de este análisis se encontrará en el capítulo II.
- Análisis de las concepciones de los estudiantes sobre la derivada de una función real, de las dificultades que emerjan y los obstáculos que determinan su evolución. En esta dimensión, consideramos las investigaciones de referencia que mencionan las dificultades de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de la derivada de una función real.
- Un análisis didáctico, relacionado con la interpretación geométrica de la derivada de una función real y el efecto en la construcción de su conocimiento. Para ello, revisaremos dos textos de Cálculo Diferencial propuestos en el sílabo del curso de Matemática I y analizaremos específicamente cómo se aborda la noción derivada en estos textos y cómo se desarrolla la interpretación

geométrica de la derivada, de acuerdo con los lineamientos de nuestro marco teórico.

Concepción y análisis a priori

En esta fase, Artigue señala que,

> ...el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Nos parece útil, para facilitar el análisis de una ingeniería, distinguir dos tipos de variables de comando: Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la Ingeniería y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la Ingeniería. Es decir, la organización de una secuencia o de una fase (Artigue, 1995, p.42).

En ese sentido, diseñaremos la secuencia de tareas que favorezcan la interpretación geométrica de la derivada de una función de variable real, en la que utilizaremos como medio el software GeoGebra y estas estarán fundamentadas en el ETM de Referencia en el dominio del Análisis Matemático. En estas tareas que serán propuestas a los estudiantes, también desarrollaremos un análisis a priori de las posibles soluciones de parte de estos, las estrategias que podrían utilizar para su resolución, así como prever los errores que puedan tener durante su desarrollo.

Experimentación

En esta fase, realizaremos la aplicación de la secuencia de tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada que fueron diseñadas en la fase anterior. Se aplicará a 15 estudiantes que cursan primer año de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua, en un laboratorio provisto de computadoras para poder hacer uso del software.

Analizaremos las acciones de los estudiantes al enfrentarse a la secuencia de tareas, observaremos de forma exhaustiva el proceso, con una ficha de observación se tomará nota de todo lo que acontece y es en este momento donde se utilizarán los instrumentos para recoger la información como fichas de tareas, archivos de GeoGebra, archivos de video y fichas de observación.

Análisis a posteriori y validación

En esta fase, realizaremos el análisis del trabajo matemático realizado por los estudiantes al resolver las tareas dadas, esto bajo el contexto del ETM y procederemos a la confrontación del análisis a priori y a posteiori para realizar la validación interna de acuerdo con la ingeniera didáctica.

CAPÍTULO II: ESTUDIO DE LA DERIVADA

En nuestra investigación, abordaremos el estudio de la representación geométrica de la derivada de una de una función real de variable real y en este capítulo mostraremos un resumen histórico de la evolución de la derivada de una función real de variable real.

2.1 Aspectos históricos del concepto de la derivada

Según Vázquez y del Rincón (1998), la evolución de la derivada no ha sido de forma lineal, ya que avanzó con muchos cambios en el camino, los cuales se dieron luego de la necesidad de retroceder y de muchas indecisiones que llevaron a los matemáticos a diferentes concepciones que se concibieron.

El concepto de la derivada nace con una serie de actividades matemáticas direccionadas a resolver problemas con el trazado de tangentes, problema de la velocidad, el problema del área bajo una curva y el problema de máximos y mínimos. Estos problemas emergen en la época de los griegos, donde tres grandes matemáticos, como lo son Euclides, Arquímedes y Apolonio, delimitaron el camino de las Matemáticas, en el que desarrollaron grandes obras que permitieron a esa época, entre los años 300 al 200 a.C, ser llamada la edad de Oro de las Matemáticas.

Vera (1970), citado en Pino-Fan (2014), declara que,

> Al parecer, fue Euclides el primer matemático que utilizó la noción de la recta tangente; pues, en su libro III de Euclides, de la gran obra de elementos de Geometría, existen algunas definiciones y proposiciones relacionadas a la tangente. Y considera, algunas de ellas:
>
> > Definición II. Se dice que la recta es tangente al círculo cuando la toca y prolongada no se cortan.
> >
> > Definición IV. Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan
> >
> > Proposición XVI. La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo, entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor.
> >
> > Proposición XVII. Desde un punto dado trazar una recta tangente un círculo dado.
> >
> > Proposición XVIII. Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio el punto de contacto, este radio es perpendicular. (p, 72)

Pino-Fan (2014) refiere que, Euclides en sus libros argumenta de manera sintética las proposiciones propuestas. Utiliza la proposición XVII del libro de Euclides y describe el razonamiento de Euclides y que sintetiza en la Figura 6 que se muestra posteriormente;

> Sea el punto A el punto y BGD el círculo, tomes el centro E de éste y trace el segmento AE; con centro en E y radio EA trace el circulo AZH; desde D trazar DZ perpendicular a AE y una E con Z y con B. Por ser E centro de los círculos BDG y AHZ, las recta EA y EZ son iguales y también ED y EB, luego las dos AE y EB son iguales a ZE y ED y forman el ángulo común en E. Por tanto, DZ y AB son iguales e iguales los triángulos DEZ y EBA y, por consiguiente, el ángulo EDZ será igual al ángulo EBA, y como el ángulo EDZ es recto, el ángulo EBA también será recto y por ser EB perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la AB es tangente al círculo. (Pino-Fan, 2014. p.73)

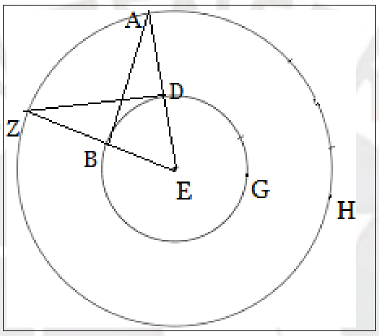


Figura 6. Solución de Euclides de la proposición XVII
Fuente: Pino Fan (2014, p.73)

Estas descripciones ya dejaron de verse en libros posteriores de Euclides; por ejemplo, en su libro IV, el matemático ya utiliza de manera implícita estas nociones

Luego del trabajo e Euclides, uno de los primeros referentes de la definición de derivada en la historia de las Matemáticas aparece en las obras de Apolonio de Pérgamo, el Gran Geómetra de su época (262-190 a.C). Él desarrollo problemas de las tangentes en una de sus obras que se titula *Tangencias*.

Uno de sus problemas más conocido al respecto es conocido como *El Problema de Apolonio*: Dados tres elementos cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados, donde la solución de Apolonio no es exacta, pero con la información brindada por Pappus es posible inferirla.

En el Libro II de *Las Crónicas de Apolonio de Pérgamo*, se puede observar un estudio relacionado a las tangentes de una cónica y en el V un estudio sobre máximos y mínimos y trazados sobre tangentes y normales a una sección cónica. Se puede observar que existe una gran similitud entre las concepciones sobre la tangente que tiene Euclides y Apolonio.

En los años 287,212 a.C, Arquímedes desarrolla sus trabajos utilizando el problema de las tangentes de manera implícita, ya que utiliza la noción de recta tangente y sus propiedades para el trazado de polígonos circunscritos a circunferencias. Además, pudo encontrar la recta tangente a la curva que lleva su nombre: *La espiral de Arquímedes*, que da inicio a los métodos infinitesimales.

Después de estas contribuciones en la edad de oro de la Matemática, no hubo más contribuciones importantes hasta la edad media.

En el siglo XVI, se inicia el estudio del cambio y el movimiento de los filósofos T. Bradwardine y R. Swineshead que estudiaron la latitud de formas, definieron el movimiento uniforme, aceleración uniforme en términos de tiempo y distancia, conocida como la *Regla de Merton*. Este trabajo los llevó al planteamiento de varias series finitas.

Basado en estos trabajos, Oresme presenta cinco nuevas ideas en el área de las Matemáticas: 1) La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; 2) Relación funcional entre variables; 3) Una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de las relaciones funcionales; 4) La constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo; 5) Una sumación continua para calcular la distancia del área bajo el grafico velocidad-tiempo. Vale resaltar que en esos tiempos los resultados fueron determinados con fundamentaciones de manera verbal o geométrica mediante la representación de la forma.

Los matemáticos del siglo XVI retoman los trabajos referentes a los procesos de variación y los plantean desde la mecánica, en la que consideran los avances de Eudoxo y de Arquímedes sobre el método de exhauston para hallar áreas bajo curvas.

En este período, el rigor matemático toma mayor fuerza y buscan nuevas formas de fundamentar los procesos matemáticos, en la que estudian las relaciones del movimiento, áreas bajo curvas, recta tangente y máximos y mínimos como procesos de variación.

Para la época, la intuición y el razonamiento matemático fueron esenciales. Los trabajos de Fermat, Descartes Galileo y Barrow fueron realzados en este tiempo por su rigurosidad, ya que los matemáticos del siglo XVII se preocupan por resolver problemas de cuadraturas y curvaturas.

D' Lorenzo (1971) (citado por Vázquez y del Rincón,1998) menciona que a inicios del siglo XVII la preocupación era encontrar solución a los problemas como: a) Encontrar los límites de los elementos geométricos; b) Medir magnitudes y los elementos "diferenciales", asociados a las curvas superficies; C) Calcular las formas indeterminadas; D) Evaluar el orden de las magnitudes de sumas parciales de series divergente o de restos de series convergentes.

En los años 1601 a 1665, Fermat desarrolla un método para dar solución a problemas de máximos y mínimos, ya que no conocía él la definición de límites debido a que su trabajo se desarrolló de forma paralela al que vemos hoy en los textos. No considera al límite, ya que su razonamiento es netamente algebraico y aquí se evidencia un germen de la noción de límite y derivada. Utilizó su método de valores propios a la variable para determinar la tangente a una curva algebraica de la forma y=f(X).

Según Pino-Fan (2014), en esta época surgen los problemas de diferenciación bajo el estudio del problema de la velocidad, el problema de la recta tangente, problemas de máximos y mínimos. Este trabajo desarrollado los llevaría más adelante a los diferenciales en el momento del cálculo de fluxiones de Newton y el cálculo diferencial de Leibniz.

En los años 1642-1717, Newton desarrolla un análisis cinemático en su libro de cuadratura *Curvarum*. En 1671, Newton desarrolla su método de fluxiones que fue publicado en 1736. Este retraso en hacerlo público fue un motivo para aumentar suspicacias sobre el autor de la invención del Cálculo.

La intención es relacionar las cantidades variables con los cuerpos en movimiento. Considera las variables x e y como cantidades que van fluyendo y que emiten fluxiones p y q o velocidades de variación y las simboliza con $\dot{x}$ e $\dot{y}$ respectivamente y a la fluxión de la fluxión la denotaría con dos puntos.

En un primer momento, los describe como los infinitamente pequeños, luego Newton, cambia las cantidades fluentes por la teoría de Razones primera y última, donde habla de la razón primera de los incrementos nacientes o la razón última de incrementos, los evanescentes, que juegan un papel muy importante en el desarrollo de la historia de la derivada.

Rey Pastor y Babini (1985) (citado en Vázquez y del Rincón, 1998) realizan una descripción, del método de Newton, inician con la presentación del triángulo característico que se observa en la Figura 7; para luego, basado en esta información desarrollar la descripción, como se precisa a continuación:

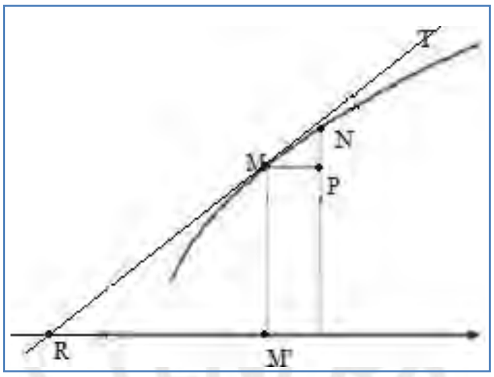


Figura 7. Triángulo Característico
Fuente: Vázquez y del Rincón (1998, p.90)

> Considera el triángulo característico mixtilíneo (ver Figura 7), y, formado por los incrementos MP, PN y el arco MN que compara con los triángulos MPN y MPT. Al coincidir N con M, la cuerda y el arco coinciden con la tangente y el triángulo mixtilíneo y evanescente MPN en su última forma semejante al MPT y sus lados evanescentes MP, PN y MN son proporcionales a los lados del triángulo MPT, donde las fluxiones de la abscisas, la ordenada y el arco son proporcionales a los lados del triángulo MPT, o lo que es lo mismo, a los lados del triángulo MRM', formado por la ordenada, la tangente y la sub-tangente, pero esas fluxiones no son otras cosa que las razones de los incrementos evanescentes (Citado por Vázquez y del Rincón, p 90).

Newton afirma al respecto, que "las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente razones de las cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales las razones de las cantidades decrecientes sin límite se aproximan también y hacia las cuales pueden aproximarse tanto como cualquier valor dado, pero que no pueden pasarlas o alcanzarlas antes de que las cantidades sean disminuidas indefinidamente" (Opera Omnia, citado en Vázquez y del Rincón, 1998, p.90).

Newton estaba interesado en la razón de cantidades, cuando estas tienden a cero se aproximan a un límite. Con su invención del método de fluxiones, nos entrega una noción de la derivada.

Según Bos 1984 (citado por Pino-Fan, 2014), por los años 1646 a 1716, Leibniz desarrolla el cálculo infinitesimal; y se basó en tres ideas: una filosófica relacionada con *charcteristica generalis*. Es decir, la creación de un lenguaje simbólico que garantice la argumentación y el razonamiento; la segunda relacionada con las sucesiones de diferencias y; la tercera y más importante fue el estudio del triángulo de Pascal y el uso del triángulo diferencial para transformar las cuadraturas (ver figura 8).En esta figura , estudia el triángulo $cc'd$, situado en l*a* curva de la figura, donde además observa que es semejante al triángulo formado por la ordenada, la tangente y la sub-tangente ó la ordenada, la normal y la sub normal.

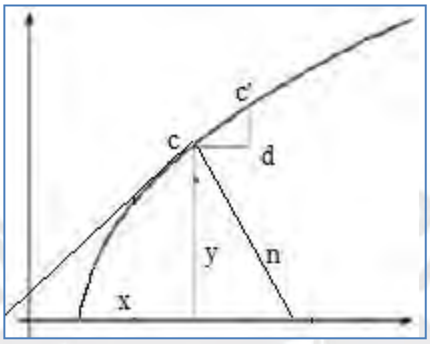


Figura 8. Triángulo Diferencial
Fuente: Pino-Fan (2014, p.97)

En base a todo esto, Leibniz incluye los símbolos $\int$ y ∂. Verifica la relación tiene lados infinitesimales y se verifica la relación $(dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2$. El lado ds sobre el polígono o la curva se debe aproximar a la tangente a la curva en el punto (x, y), se determina que la tangente de la recta estará dada por $\frac{dy}{dx}$, en términos de los diferenciales. Leibniz nunca logró definir la derivada como un límite, ya que se le hizo muy difícil trabajar con cantidades infinitamente pequeñas y por ello no pudo formalizar sus avances.

Newton y Leibniz utilizaron métodos parecidos a los utilizados por sus antecesores a diferencia de Fermat, Descartes y Roverbal, que utilizaron un conjunto de reglas para dar solución a problemas concretos que Newton y Leibniz lo transforman en una regla general para hallar tangentes y cuadraturas de la mano de algoritmos para calcular magnitudes infinitesimales. Mantuvieron el rigor euclídeo a pesar de tener concepciones infinitesimales diferentes, ya que utilizaron cantidades infinitesimales para agilizar sus demostraciones, para luego de ello regresar al rigor geométrico. Utilizando este método fueron los primeros que desarrollaron el concepto de límite, que en el siglo XIX los matemáticos Cauchy y Weierstrass fundamentarán el cálculo infinitesimal.

En 1696, otro gran matemático como es L´Hopital escribe el primer libro de Cálculo titulado *“Analyse des infiniment petit pour l´intelligence des lignes courbes”*, donde define: “Si se prolonga uno de los pequeños lados Mm de la poligonal que compone a una línea curva, éste pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto M o m” y para ello utiliza la curva Leizbiana. En la actualidad, se conoce que este libro es la reproducción de las clases particulares que impartiera L´Hopitala Juan Bernoulli.

La poca claridad con las cantidades evanescentes y el uso de lo infinitamente pequeño crea conmoción entre los matemáticos de la época fue duramente criticado, Berkeley y D’Alembert refieren que era necesario despojar al Cálculo de su metafísica. Luego fue Maclaurin intenta responder escribiendo su libro *Teatrise of fluxions* de manera rigurosa desde un punto de visita geométrico y es ahí donde presenta su más famosa serie. Por su parte, Euler integra el cálculo diferencial y el método de fluxiones, dando origen al campo del Análisis.

Años más tarde, el matemático Cauchy rechaza el planteamiento de LaGrange basado en el desarrollo de series de potencias del Teorema de Taylor y considera importante el límite de D’Alembert, aunque para ser más preciso le dio un enfoque aritmético.

Cauchy deja de lado la Geometría, los infinitésimos de las velocidades de cambio y logra definir el límite y, a partir de este concepto, define la derivada. Entonces, para definir la derivada de una función $y = f(x) con\, respecto\, a\, x$, le adiciona un incremento $\Delta x = i$ a la variable x y forma el cociente $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ y al límite cuando $i \to 0$, de esta manera define la derivada de y con respecto a x , como está definida actualmente. Cabe resaltar que la notación $f'(x)\; que\; defuine\; a\; la\; derivada\; f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es una notación propuesta por Lagrange en 1973.

2.2 Análisis didáctico de los textos universitarios

En esta sección de la investigación, desarrollaremos un análisis de dos textos propuestos en el silabo del curso de *Matemática I*, que son usados como libros de consulta en la en la enseñanza de la derivada de una función real de variable real, como son Espinoza (2012) y Mitacc y Toro (2009).

Iniciamos observando el orden de los contenidos en cada texto, donde pudimos ver que ambos abordan la noción derivada como parte del cálculo diferencial. A continuación, presentaremos el orden de los contenidos del capítulo donde aborda la noción derivada el texto de Espinoza (2012).

4. LA DERIVADA

4.1 Definición 495
4.2 Interpretación Geométrica de la Derivada 498
4.3 Definición 499
4.4 Definición 499
4.5 Derivadas Laterales 500
4.6 Derivabilidad y Continuidad 501
4.7 Algunas Reglas de Derivación 503
4.8 Derivadas de una función compuesta (Regla de la Cadena) 508
4.9 Derivación de la Función Exponencial y Logarítmica 510
4.10 Teorema 514
4.11 Derivación de las Funciones Trigonométricas 517
4.12 Teorema (Derivadas de las Funciones Trigonométricas) 520
4.13 Derivación de las Funciones Trigonométricas Inversas 523
4.14 Regla de Derivación para las Funciones Trigonométricas Inversas 528
4.15 Derivación Implícita 530

Figura 9. Orden de contenidos Capítulo 4.
Fuente: Espinoza (2012)

Se puede apreciar en el índice de este texto que en el capítulo cuatro se da inicio al desarrollo de la noción derivada, con una definición de la derivada en la página 495, que asumimos que ha de ser la definición formal de esta noción. Luego, en la página 498, desarrolla la interpretación geométrica de la derivada, aparentemente de manera muy escueta, ya que en la página 499 se refiere a dos definiciones y continúa su estudio con derivadas laterales, derivabilidad y continuidad, para luego abordar las reglas de derivación y otros tópicos que se observan en la imagen.

De manera similar, presentaremos el orden de los contenidos del capítulo donde desarrollan la derivada en el texto de Mitacc y Toro (2009),

CAPITULO 5: DERIVADAS

Derivada de una Función en un Punto........ 197
Interpretación Geométrica de la derivada........ 199
Derivadas Laterales........ 200
Recta Tangente y Recta Normal a una Curva en un Punto........ 204
Reglas de Derivación........ 206
Regla de la Cadena o Derivada de una Función Compuesta........ 209
Derivadas de Orden Superior........ 222
Derivación Implícita........ 227
Diferenciales........ 235

Figura 10. Orden de contenidos Capítulo 5.
Fuente: Mitacc y Toro (2009)

A diferencia del texto anterior, aquí se estudia a la derivada en el capítulo cinco, a partir de la página 196. Se presenta, en la página 197, la definición de la derivada de una función en un punto, donde es más precisa la información sobre la definición que presenta. Luego, desarrolla la interpretación geométrica de la derivada en la página 199, continuando en la página 200 el desarrollo de los límites laterales.

Esto nos hace pensar que se toca la interpretación de manera más escueta que la anterior, pero luego observamos que desarrolla la recta tangente y la recta normal a una curva en un punto desde la página 204 a la 206 y continua con el estudio de reglas de derivación, lo que nos hace pensar que el autor vuelve a enfrentar a los estudiantes con la interpretación geométrica de la derivada o ejemplos relacionados.

Luego de observar los contenidos, analizamos en el extenso de los textos, cómo dan inicio al estudio de noción derivada y el detalle del desarrollo de la interpretación geométrica de la derivada. En la siguiente figura, se puede apreciar cómo abordan la derivada los autores en los textos propuestos.

4.1 DEFINICIÓN .-

Consideremos una función real de variable real uniforme y continua $y = f(x)$, si $x \in D_f$ entonces la derivada de la función f con respecto a x la definiremos por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que dicho límite exista.

El proceso de encontrar la derivada se llama "diferenciación".

5.2 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Definición 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el punto $a \in D_f$. Se dice que f es **derivable en** a si el siguiente límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (1)$$

existe. Si la función f es derivable en a, $f'(a)$ se llama **derivada de** f **en** a. La notación $f'(a)$ se debe a Lagrange.

También se usan las notaciones:

$$D_x f(a)\,,\quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}\,,\quad \dot{f}(a)$$

y éstas se deben a Cauchy, Leibniz y Newton, respectivamente.

Figura 11. Definición de la derivada.
Fuente: Espinoza (2012) y Mitacc y Toro (2009) respectivamente.

Podemos apreciar que en ambos textos se presenta, como primera definición, a la derivada, pero en el texto de Espinoza (2012) está dada de manera general y en el de Mitacc y Toro (2009) se enfoca desde una perspectiva puntual, ya que la define en un punto $(a, f(a))$.

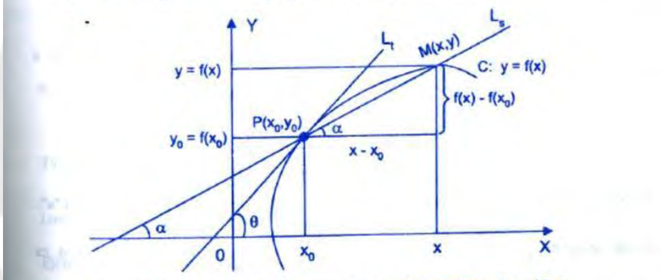
Cabe resaltar que Mitacc y Toro (2009) presentan luego, como segunda definición, a la función derivada y Espinoza (2012), después de desarrollar la interpretación geométrica, considera una observación del análisis en un punto de la función. Podemos observar también en la figura que Mitacc y Toro (2009) les brinda a los estudiantes herramientas importantes que pueden ayudar a enriquecer su referencial respecto a la notación de la derivada, pero quizás no es el momento oportuno, ya que bastante tiene el estudiante con afrontar una nueva noción. En el caso de Espinoza (2012), también brinda estas herramientas más adelante.

En ambos textos, luego de ello, desarrollan la interpretación geométrica de la derivada y pudimos observar que Espinoza (2012) aborda, de manera muy sutil, el tema, ya que presenta su definición en la página 497 y un comentario relacionado a las pendientes de las rectas con la pendiente de la recta vertical en la página 503 y no desarrolla ningún ejemplo al respecto. Da mayor énfasis al desarrollo de aplicaciones y desarrollos algorítmicos.

A continuación, observamos cómo se enfoca la interpretación geométrica de la derivada el libro de Espinoza (2012).

4.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA .-

Consideremos una curva C: $y = f(x)$ y un punto fijo $P_0(x_0, y_0)$ de dicha curva, sea L_s la recta secante que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ y por el punto $M(x, y) \in C$.



La pendiente de la recta secante L_S que pasa por los puntos P_0 y M es:

$$mL_s = tg\,\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0}, \ x \neq x_0$$

Si el punto M(x,y) se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ resulta que la variable x se aproxima a x_0 de tal manera que $\Delta x = x - x_0$ se aproxima a cero, con lo cual se está haciendo uso del concepto de límite.

Por lo tanto, cuando el punto M(x,y) se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ la recta secante L_s se ha transformado en la recta tangente L_t, lo cuál indica que el ángulo α tiende a coincidir con el ángulo θ y $tg\,\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ tiende a convertirse en:

$$tg\,\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\therefore \ f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Luego la derivada de la función f en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $f'(x_0)$ y que representa a la pendiente de la recta tangente en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es decir:

$$mL_t = f'(x_0)$$

Figura 12. Interpretación geométrica de la derivada en Espinoza (2012).
Fuente: Espinoza (2012, p.497)

Analizando la figura 12, podemos inferir que se observa que el texto presenta una imagen impactante para ser el primer contacto con la derivada. Es una imagen cargada de símbolos. El estudiante debe identificar y decodificar los símbolos que aparecen en la gráfica para lograr entender la definición. Necesita hacer uso de un referencial respecto curvas en el plano, rectas tangentes y secantes, pendiente de una reta, pares ordenados, ángulo de inclinación. Según (Gómez-Chacón et al., 2016) la génesis semiótica es el proceso asociado con signos y representamen que permite pasar de una perspectiva sintáctica a una perspectiva semántica de objetos matemáticos organizada en la representación semiótica. La génesis semiótica proporciona el estado de los objetos tangibles y sus operaciones. En ese sentido se espera que el estudiante active una génesis semiótica empleando la representación gráfica para representar a las pendientes de la recta, y una génesis instrumental utilizando la fórmula de pendiente para representar a la pendiente. También se define cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, se considera dos procesos y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto y el proceso de instrumentalización que parte del individuo, entonces también se espera que active una génesis instrumental al hacer uso de la regla representada en las rectas.

Propone al estudiante realizar un análisis de su registro gráfico enmarcado en el paradigma del análisis Geométrico (AG), para construir el nuevo concepto.

Quizás sería más conveniente para el trabajo matemático del estudiante observarlo en gráficas diferentes. También se observa otra representación que, es interesante para el estudiante poder observar otra representación de la pendiente de una recta (como la tangente del ángulo), en su representación geométrica y su representación algebraica ya que esto permitirá movilizar su referencial y activar una génesis discursiva ya tendrá más herramientas para construir y asimilar el nuevo concepto, a través de una génesis instrumental. Luego se observa la presentación rigurosa de la definición de manera muy formal como la existencia del límite de una función; y demostrando en lenguaje algebraico que la derivada de la función representa a la pendiente de la recta lo que permitirá que el estudiante active una génesis discursiva Enmarcado en el paradigma del análisis infinitesimal.

También hemos estudiamos y revisado cómo abordan la interpretación geométrica de la derivada en el texto de Mitacc y Toro (2009) y observamos que presenta una definición en lenguaje algebraico inicialmente y luego en un lenguaje gráfico, tal como veremos a continuación en la figura siguiente.

5.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Consideremos una función f derivable en a, $P(a; f(a))$ el punto de tangencia y $Q_h(a+h; f(a+h))$ otro punto sobre la gráfica de f (Fig. 5.1). La pendiente de la recta secante $\overline{PQ_h}$ es

$$m_h = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

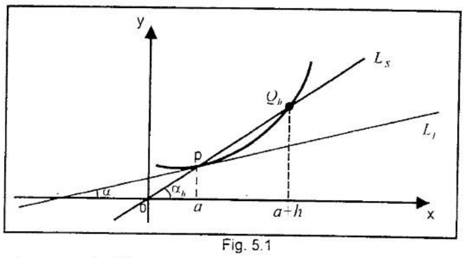


Fig. 5.1

Se observa en el gráfico que cuando $h \to 0$, el punto Q_h varía sobre la gráfica tendiendo hacia P. Esto significa que los ángulos de inclinación α_h se aproximan al ángulo α, donde α es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P. Luego, las pendientes de las rectas secantes $\overline{PQ_h}$ tienden a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto P.

Más concretamente,

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m_T = f'(a)$$

Por tanto, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(a; f(a))$.

Figura 13. Interpretación geométrica de la derivada Mitacc y Toro.
Fuente: Mitacc y Toro (2009, p.199)

Realizando un análisis de la forma de abordar el tema el texto Mitacc (2009), podemos afirmar al igual que el texto anterior presenta una imagen que el alumno debe decodificar haciendo uso de su referente teórico, lo que también se espera es que el estudiante active una génesis semiótica a partir de observar la representación gráfica e identificar los pares ordenados de las rectas y construir la pendiente de la recta. Para ello activara una génesis instrumental utilizando la fórmula de pendiente como herramienta para representarla.

A diferencia del texto anterior Mitacc (2009) presenta una gráfica más limpia, una notación menos cagada de símbolos para el estudiante, luego vuelve a retomar la gráfica para señalar otras características lo que puede evidenciar la activación del plano semiótico Instrumental. Presenta la demostración haciendo uso de una génesis discursiva y en lenguaje natural. Es interesante observar que a diferencia de la anterior aquí se presenta sólo en su representación gráfica a la pendiente de una recta (como la tangente del ángulo), y no en su representación algebraica. Luego se observa la presentación rigurosa de la definición de manera muy formal como la existencia del límite de una función al igual que el caso anterior.

Mitacc y Toro (2009) más adelante vuelven a tocar el tema definiendo a la recta tangente y a la recta normal a la gráfica de la función en un punto. Es en este momento donde desarrollan algunos ejemplos, que seguramente permitirá que el estudiante refuerce lo aprendido hasta el momento.

A continuación, presentaremos el ejemplo n°13 de la página 205.

Ejemplo 13. Sea $f(x) = 2 - x - x^2$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $L: x - y - 4 = 0$.

Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(-1 - 2x - h) = -1 - 2x$$

Como la recta L de pendiente $m_L = 1$ es paralela a la recta tangente, entonces

$m_T = f'(x) = -1 - 2x = m_L = 1$, de donde se obtiene que $x = -1$.

Así, el punto de tangencia es $P(-1; f(-1)) = P(-1; 2)$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es L_T: $x - y + 3 = 0$.

Figura 14. Ejemplo N°13 sobre la interpretación geométrica
Fuente: Mitacc y Toro (2009, p.205)

El autor solicita al estudiante que encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva y le brinda otra recta paralela a ella, en ese sentido el autor espera que el estudiante utilice su referencial respecto a rectas y curvas e interprete los datos dados, así también propone activar su nuevo referencial teórico y activar una génesis instrumental al utiliza la definición para encontrar a la derivada de la función con el propósito de identificar luego la pendiente de la recta tangente cuando x=-1.

CAPÍTULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, describiremos a los sujetos de investigación, la planificación de las tareas, el análisis a priori y el análisis a posteriori desarrollado por los estudiantes.

3.1 Descripción de los sujetos

El docente del curso de *Matemática II* tiene la tarea de propiciar interacciones entre el estudiante, el docente y el saber matemático puesto en juego. En este caso, la interpretación geométrica de la derivada.

En nuestra investigación, la docente actúa de investigadora y observadora al mismo tiempo y es por ello que queda bajo de su responsabilidad el diseño de las dos tareas propuestas.

La investigación se desarrolla con un grupo de quince estudiantes de primer año de universidad de la carrera profesional de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua.

En la presente investigación, se analiza la producción de dos estudiantes. En ese sentido, necesitamos seleccionar dos estudiantes del grupo. Para ello seleccionamos dos estudiantes, de entre los que mostraron interés en participar en la investigación.

Aunque el grupo que participó de las actividades fue de quince estudiantes, como se indicó en el párrafo anterior, se seleccionó a dos de ellos. A quienes, para fines del estudio, se les denominó A1 y A2.

A continuación, en la tabla 2 se muestra la tabla con la información de los sujetos de estudio.

Tabla 2.

Información de los sujetos

Nivel	**Carrera profesional**	**Curso**	**Nro. de estudiantes**
Universitario	Ing. de sistemas	Matemática II	15

3.2 Descripción de la secuencia de tareas

Se propusieron dos tareas para la investigación, a las cuales denominamos, Tarea exploratoria y la Tarea 1.y las organizamos de la siguiente manera ve Tabla 3,

Tabla 3.

Estructura de las tareas propuestas

Tareas propuestas	**Tarea Exploratoria**						**Tarea 1**		
Clasificación De preguntas	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	**P3**
N° de ítems	**1**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**3**	**3**	**5**

Podemos observar que la tarea exploratoria tiene 6 preguntas y cada uno con sus respectivos ítems. De manera similar la Tarea 1, contiene 3 preguntas con sus respectivos ítems; para realizar un mejor análisis, dividimos esta tarea en tres partes: Primera pare, lo que corresponde a P1, segunda parte, lo que corresponde a P2 y tercera parte lo que corresponde a P3.

Estas tareas fueron diseñadas, orientadas a que el alumno realice comparaciones con las rectas, así como, que haga uso de sus diferentes representaciones, utilizando sus ecuaciones, la relacione con la pendiente de la recta tangente a una curva. A continuación, en la tabla 3, se muestra la planificación de las secuencias de tareas y el tiempo utilizado en cada una de ellas.

Tabla 4.

Resumen de informantes y técnicas

Nombre	**Finalidad**	**Tiempo**	**Fecha**
Tarea ***Exploratoria***	Reunir información sobre los conocimientos de los estudiantes participantes en relación a: recta y sus representaciones, recta secante y tangente, pendiente de una curva, existencia del límite de una función.	45 minutos	Del 07-13 de octubre
Tarea 1: ***Interpretación Geométrica***	Conjeturar lo que ocurre con la pendiente de una recta secante a medida que se va reducido el intervalo dado. Diremos que una función es derivable en un punto si gráficamente es localmente indistinguible de una recta. Es decir, si al elegir un punto e ir ampliando sucesivamente, llegase un momento que no pudiéramos distinguirlas.	100 minutos	Del 28 al 31 de octubre

Esta planificación se llevó a cabo en dos encuentros de los estudiantes con el profesor investigador. La tarea exploratoria se aplicó durante la primera semana de octubre del 2019 y la Tarea 1 en la última semana de octubre del 2019.

En el proceso del análisis de sus productos, las respuestas se clasificaron de acuerdo a los paradigmas en los cuales desarrollaron su trabajo los estudiantes al momento de su resolución de las tareas.

Todo este proceso será grabado, fotografiado y la información será recogida con fichas de observación y fichas de registro.

3.3 Tarea exploratoria

Es importante recordar que los estudiantes inician el desarrollo de esta noción con definiciones de diferenciabilidad, como preámbulo a la **interpretación geométrica,** y para mejores logros del sujeto, sería importante refrescar o administrar saberes previos, necesarios para la adquisición de la nueva noción. Es en ese sentido que, para obtener una información más específica sobre los sujetos de estudio y conocer un poco a los estudiantes con los que trabajaremos, les administramos una Tarea exploratoria (ver anexo B).

Las respuestas de los estudiantes a esta tarea fueron muy importantes, ya que esto nos permitió diseñar una Tarea 1 pertinente, lo más ajustada a su realidad y que permita al estudiante propiciar las mayores interacciones. A continuación, en la Tabla 5, presentamos un consolidado de las respuestas dadas por los estudiantes a la "Tarea Exploratoria" referida.

Tabla 5

Resumen de los resultados de la tarea exploratoria

PREGUNTA	CONTESTADAS (Semejante a lo esperado)	CONTESTADAS (Diferente a lo esperado)	TOTAL
Rectas: Tangente y secante.	13	2	15
Pendiente de una recta.	10	5	15
Cálculo de la pendiente de una recta.	14	1	15

Identifican pendientes positivas, negativas o que no existen	13	2	15
Fundamentan la pregunta anterior	1	14	15
Cálculo de límites de una función (algoritmos)	15	0	15
Identifica límite de una curva (algoritmos)	9	6	15
Identifica límite de una función	7	8	15

De estos resultados, podemos observar que la representación gráfica es el más utilizada por los estudiantes, ya que no se observó una definición representada algebraicamente de la recta que identifique a la pendiente como parte importante de ella; sin embargo, los 15 estudiantes conocen la fórmula para determinar el valor de la pendiente de una recta, que en nuestro estudio es importante para poder formalizar la interpretación geométrica de la derivada.

Nuestra intención es explotar el modelo de la recta y sus representaciones a las que están más familiarizados y crearles una idea intuitiva de la interpretación geométrica de la derivada. La tarea exploratoria nos ayudó a diseñar la Tarea 1, enfatizando en el reconocimiento de la pendiente.

3.4 Tarea 1

Trabajemos con la Recta y analicemos la derivabilidad de una función.

Se observa, en el análisis de los textos desarrollados, que, a la hora de introducir la noción de derivada de una función en un punto, se relaciona con el estudio del problema de la recta tangente a la gráfica de dicha función en dicho punto.

También se observa que la manera de introducir la interpretación geométrica de la derivada se da, de tal manera que el estudiante actúa de forma pasiva e incentiva a seguir indicaciones del autor, a retener algunos conceptos y visualizarlos como proponen los textos. Es por ello, que sugerimos recordar aspectos importantes y esenciales de la recta en el plano y sus representaciones, con la finalidad de que esto no sea un obstáculo en la adquisición de nuevos conceptos.

Existen definiciones de objetos como el punto, rectas y tangentes, que son muy intuitivos y tienden a diferir entre la idea del estudiante y la definición formal.

Para nuestro estudio, consideraremos una función cuadrática, a cuya gráfica haremos corresponder un punto $(a,\ f(a))$ que queremos aproximar con una recta en dicho punto de la mejor forma posible. Tomamos un cierto valor $h > 0$ y consideramos el punto de la gráfica $(a+h, f(a+h))$ y luego lo relacionaremos con lo anterior, de tal manera que obtenemos una recta L de pendiente $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, haciendo tender h a 0. Intuitivamente se observará que la gráfica tiende a un solo punto, entonces la pendiente de la recta que buscamos se corresponde con el siguiente límite: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ o utilizando la variable x tendremos equivalentemente: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. De esta manera, definimos a la derivada con la expresión $f'(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y definiremos a una función derivable en un punto, como aquella que gráficamente es localmente indistinguible de una recta. Es decir, si al elegir un punto e ir ampliando sucesivamente, llegase un momento que no pudiéramos distinguirlos.

Para lograr lo detallado, diseñamos la Tarea 1 (ver Anexo D) con la finalidad de evidenciar las acciones de los estudiantes que activen la génesis semiótica, génesis instrumental o génesis discursiva y con ello podamos identificar la activación de los planos verticales, así como los paradigmas del dominio del Análisis en el que resuelven las tareas solicitadas (Montoya y Vivier, 2015). Recodemos que nuestro propósito es estudiar el trabajo matemático personal de los estudiantes de Ingeniería, ya que queremos comprender cómo utilizan su referencial teórico, cómo ellos interactúan, cómo se apropian del nuevo concepto, cómo es la interpretación geométrica de la derivada con ayuda del software GeoGebra.

En este sentido, proponemos a los estudiantes la Tarea 1. Organizada en tres partes como se refirió anteriormente: la primera parte contiene tres ítems; la segunda parte compuesta por tres ítems también; y la tercera parte contiene cinco ítems, diseñada para ser desarrollada por los estudiantes en un tiempo de 100 minutos.

Esta tarea. fue aplicada en el laboratorio de Informática de la UNAM. Se dio inicio a la aplicación, considerando 10 minutos más para las indicaciones, reparto de la ficha de tareas, el lápiz correspondiente, borrador y una regla. Luego de recogido los productos estos fueron analizados.

A continuación, un análisis detallado de los productos de los estudiantes seleccionados, que para fines de nuestro estudio llamaremos A1 a la estudiante seleccionada y A2 al estudiante seleccionado. Luego, describiremos algunas de las respuestas o procedimientos posibles de los estudiantes frente a las preguntas de la Tarea 1 y contrastaremos con los productos seleccionados. Es decir, desarrollaremos un análisis a priori de la Tarea 1 y un análisis a posteriori de la Tarea 1 desarrollada por los alumnos A1 y A2.

3.5 PRIMERA PARTE DE LA TAREA 1

PRIMERA PARTE

- ✓ **Abra el archivo P1 de GeoGebra, realice las indicaciones y responda las siguientes preguntas:**
  a) ¿Qué cambios observa al mover el deslizador?
  b) ¿Qué relación tienen con la recta?
  c) ¿Observa cambios en la ecuación de la recta? Explique qué sucede.

Figura 15. Ítems de la primera parte de la Tarea 1
Fuente: Anexo D y archivo GeoGebra

Nuestro propósito, en esta primera parte, es que el estudiante reconozca elementos matemáticos relacionados a la recta y sus representaciones, lo que permitirá activar sus génesis respectivas en el proceso de construcción de nuevos conocimientos.

Para alcanzar nuestro propósito, la docente da inicio al experimento indicando la ruta para ubicar el archivo P1 y solicita que lo abran. Enseguida, interactúa con la clase preguntando ¿Qué observan? y a continuación solicita a los estudiantes mover el deslizador y observar lo que sucede, para luego responder las preguntas planteadas en la tarea.

Análisis a priori de la primera parte

Las respuestas esperadas y el análisis en el marco de la teoría, correspondiente a la primera parte de la Tarea 1, que consta de tres ítems, la presentamos a continuación, En el **ítem a),** se desea que el estudiante recuerde a la recta construida por un vector. En esta pregunta, se les proporciona un deslizador al cual denominamos λ, para que manipulen y observen cómo varía el vector que formará la recta en el plano.

Esperamos en este ítem que el estudiante tome como representamen el cambio de signo del parámetro y realice un proceso de visualización para identificar infinitos vectores paralelos y para ello debe hacer uso de su referencial teórico referente a vectores paralelos. Para detallar estas observaciones, el estudiante puede utilizar lo que puede detallar en registro de lengua natural.

Esperamos también que está exploración con el deslizador le permita al estudiante activar una génesis instrumental al construir diferentes representaciones del vector director, utilizando como artefacto el parámetro λ, que lo ayudara a identificar diferentes direcciones.

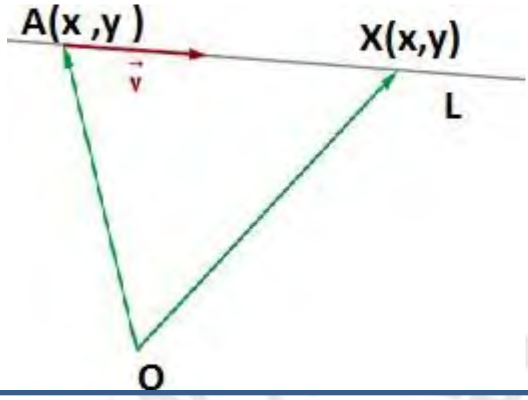
En ese sentido, esperamos como respuesta una representación semiótica de su construcción ayudado de la representación algebraica del vector y que reconozca un vector $\overrightarrow{AX}$ en la misma dirección del vector v, de la forma $\overrightarrow{AX} = \lambda v, \forall \ \lambda \in \mathrm{R}$, además que reconozca que podría formar una recta alineado con el punto A y la dirección del vector v. Con las acciones descritas, esperamos que su trabajo matemático privilegie el paradigma del Análisis Geométrico.

Luego que los estudiantes analizan el ítem a), la docente da indicaciones a los estudiantes para que habiliten en el archivo GeoGebra la representación gráfica de la recta formada con el vector del ítem anterior y solicite a los estudiantes observar e identificar qué relación tiene el parámetro con la recta formada por vectores.

De esta manera, pueden dar respuesta al **ítem b),** en el que esperamos la activación de una génesis semiótica, tomando como representamen los valores del parámetro λ que le permite visualizar la construcción de la recta, tomando su referencial teórico sobre vectores, suma de vectores y la recta para representarla vectorialmente.

Este referencial teórico activará en el estudiante una génesis instrumental al reconocer que un vector se puede expresar como una suma de vectores que puede representar gráficamente a través de una génesis semiótica, utilizando como artefacto la regla del paralelogramo y con tratamientos con vectores le permitirá construir la representación vectorial de la recta.

Además, haciendo uso de sus representaciones semióticas, se espera: una definición del vector: Sea $\overrightarrow{AX}$ un vector en la misma dirección del vector $\boldsymbol{v}$, de la forma $\overrightarrow{AX} = \lambda\boldsymbol{v}, \forall\ \lambda \in \mathrm{R}$, se cumple: (ver figura 16)



$$\overrightarrow{OX} -= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$

$$\lambda\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\boldsymbol{v}$$

Figura 16 Desarrollo esperado al ítem b)

De aquí podemos observar que se prueba que la recta que se construye con el referencial teórico detallado, lo que no permite esperar la activación de una génesis discursiva:

$$\mathrm{L}\colon (x, y) = (x_1, y_1) + \lambda(v, v_2)$$

Se espera que en el registro de lengua natural afirme que $\lambda(v,\ v_2)$ representa al conjunto de vectores directores que forma la recta que en cualquier dirección por los diferentes valores que tome construirá la recta.

Las acciones esperadas de los estudiantes evidencian la activación del Plano Semiótico Instrumental y el Plano Instrumental Discursivo. Este proceso se enmarca en el paradigma del Análisis Geométrico (AG) y Análisis Calculatorio (AC).

Luego que los estudiantes construyeron la ecuación paramétrica de la recta e identificaron la relación con el parámetro λ, la docente indica los pasos para que puedan visualizar la ecuación paramétrica de la recta con ayuda de las propiedades del GeoGebra y finalmente puedan dar respuesta al ítem c).

Del **ítem c),** se espera que el estudiante, al realizar exploraciones con ayuda del mouse, perciba los diferentes vectores que forman a la recta, activando de esta manera una génesis instrumental.

También se espera que utilice la ecuación de la recta obtenida en el ejercicio anterior para fundamentar su repuesta, que utilice como su representamen a la pendiente y active una génesis semiótica al explorar sobre el parámetro λ en la recta y de esta manera pueda afirmar que recta no cambia de dirección.

Esperamos que identifique que $\lambda(v, v_2)$ representa al conjunto de vectores directores, que el vector director está relacionado con la pendiente de la recta. Es decir, la dirección de la recta en el plano denotado por "m" estará representada por $m = \frac{v_2}{v_1}$ y de esta manera que afirme que la pendiente de la recta sigue siendo la misma, a pesar que los valores de vectores directores varían al ser multiplicados por el parámetro λ .

Lo descrito, evidencia la activación del plano [Sem-Ins], además al observar que el trabajo matemático realizado privilegia el paradigma de Análisis Geométrico.

Análisis a posteriori de la primera parte

A continuación, presentamos el análisis de los procedimientos desarrollados por los estudiantes en base a las tareas solicitadas y, de acuerdo con este resultado, se establece qué paradigmas privilegiaron los estudiantes. Cabe resaltar que, para el análisis, además de la hoja de resultados, se consideraron las observaciones del investigador, que actuó como observador.

La tarea planteada en la primera parte se muestra a continuación:

Abra el archivo P1 de GeoGebra, realice las indicaciones y responda las siguientes preguntas:

Análisis de las respuestas de la estudiante A1 a la primera parte

Análisis de ítem a) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem a es la siguiente:

a) ¿Qué cambios observa al mover el deslizador?

Se observó que la estudiante A1 manipuló el deslizadorλ, dándole todos los valores posibles que le permite el artefacto Vale aclarar que primero son los valores positivos y luego los valores negativos, esta acción evidencia la activación de una génesis instrumental y obtiene la siguiente figura.

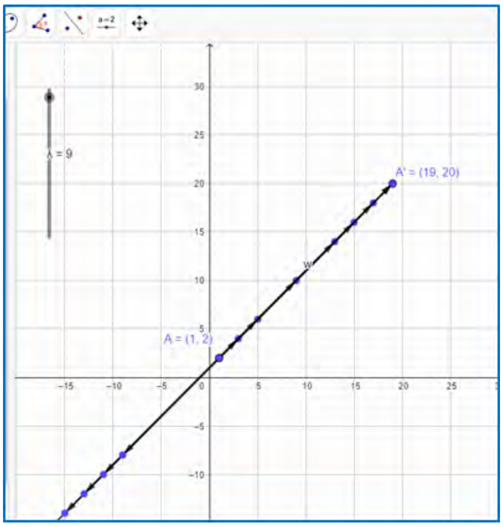


Figura 17. Manipulación del artefacto realizado por A1

Las acciones de la estudiante A1 evidencian la activación de una génesis instrumental con el uso del artefacto y su construcción del conjunto de vectores con ayuda de su referencial de vectores y rectas. Esto le permite conjeturar y validar sus afirmaciones. Esta construcción le permite inferir que, dependiendo del valor del parámetro, cambiará y que se prolonga en el plano, pero no evidencia explícitamente el cambio de signo, pero realiza un proceso de visualización a identificar que la recta se puede construir con los elementos que observa. Estas acciones evidencian la activación de una génesis semiótica; entonces podeos inferir que la estudiante activo el plano Semiótico Instrumental.

Sus afirmaciones explicitas las hace en el registro de lengua natural, tal como se observa a continuación en la figura 18.

Cambia las coordenadas, se prolonga el vector, formando una recta; si el vector crece indefinidamente.

*Figura 18. Reproducción de la r*espuesta de A1 al ítem a) de la tarea 1

Estas acciones permiten evidenciar la activación de una génesis semiótica e instrumental, tal como se esperaba en el análisis a priori. Además, se observa que su desarrollo matemático lo enmarca el paradigma del Análisis Geométrico.

Análisis de ítem b) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta propuesta en el ítem b) es la siguiente:

b) ¿Qué relación tienen con la recta?

La estudiante A1 activa su referencial teórico sobre dirección de la recta, donde infiere que la nueva recta formada por un vector y un punto y que la dirección no cambia, al igual que la anterior, estas acciones nos permiten ver la activación de una génesis semiótica, y con el registro de lengua natural, expresó sus resultados tal como se aprecia a continuación en la figura 19.

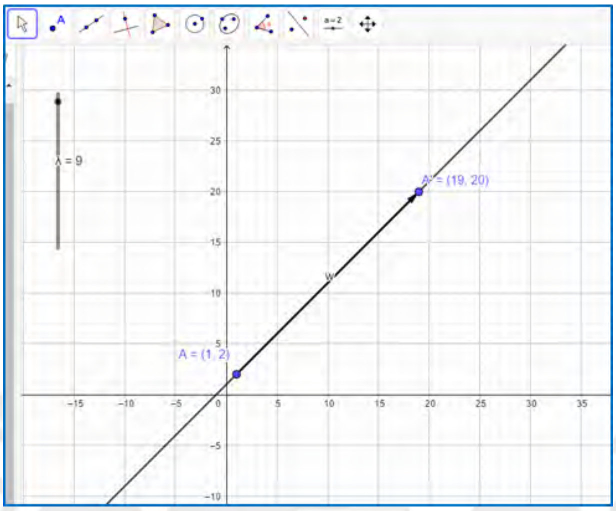


Figura 19. Manipulación del artefacto realizado por A1

La estudiante activa una génesis instrumental al manipular el mouse para visualiza una recta, tanto gráficamente como algebraicamente, pero confunde la ecuación en el punto pendiente de la recta con la ecuación vectorial de la misma. Podemos afirmar entonces la activación de plano semiótico instrumental. A pesar de definir la correctamente la ecuación de la recta en un punto específico, tal como que se observa en su construcción a continuación (ver figura 20).

Una ecuación, la pendiente o ec. vectorial tiene un punto y un vector director de la recta depende del parametro λ; $X = (1,2) + \lambda (18,18)$
no cambia la direción.

Figura 20. Respuesta de A1 al ítem b) de la tarea 1

Es importante rescatar que presenta a la recta en su representación vectorial, lo que nos perite inferir que activa una génesis semiótica.

Análisis de ítem c) desarrollado por la estudiante A1

A continuación, la pregunta correspondiente al ítem c)

c) ¿Observa cambios en la ecuación de la recta de la recta? Explique qué sucede.

La estudiante A1 activa una génesis instrumental para construir la recta como indicó la profesora y luego, mediante la activación de la génesis semiótica, identifica a la recta en su forma algebraica, estas acciones evidencian la activación del plano [Sem-Ins], además ello le permite afirmar en el registro de lengua natural, lo siguiente (ver Figura 21).

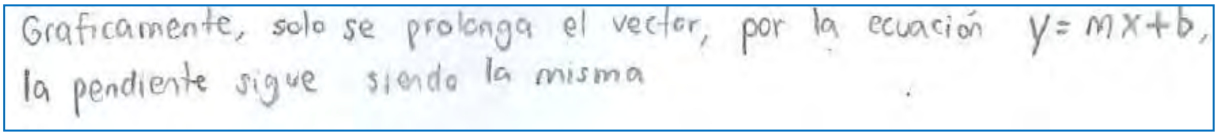

Graficamente, solo se prolonga el vector, por la ecuación $y = mx + b$, la pendiente sigue siendo la misma

Figura 21. Respuesta de A1 al ítem c) de la tarea 1

Análisis de las respuestas del estudiante A2 a la primera parte

Al igual que la estudiante A1, analizamos las respuestas dadas por el estudiante A2.

Análisis de ítem a) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2 activa una génesis instrumental, tal como esperábamos en nuestro análisis a priori, ya que manipula el artefacto y realiza una construcción que le permite percibir las diferentes representaciones de los vectores paralelos, tal como se observa en su construcción (ver Figura 22).

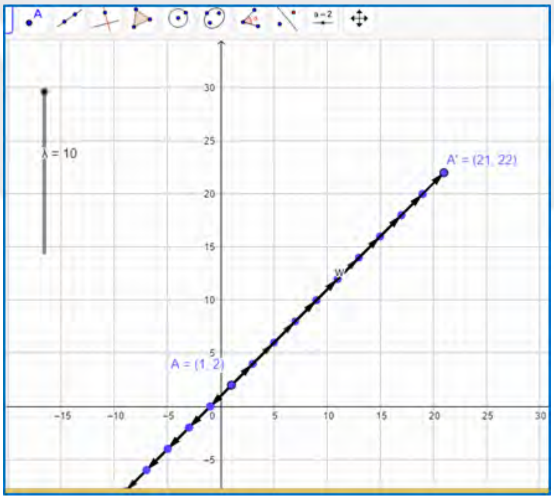


Figura 22. Manipulación del artefacto realizado por A2

Así también activa la génesis semiótica esperada tomando como representamen el signo del parámetro y visualizar vectores paralelos con sentidos opuestos y lo detalla en registro de lengua natural y algebraica, tal como se aprecia en la figura siguiente (ver Figura 23).

Si se aumenta el valor del deslizador la recta se prolonga en sentido positivo, y si se disminuye se prolonga en sentido negativo. $\vec{A}$ en $\vec{A} > 0$ ó $\vec{A} < 0$ $\vec{A} \parallel \lambda$

Figura 23. Respuesta de A2 al ítem a) de la tarea 1

Podemos afirmar que ambos estudiantes activan el plano [Sem-Ins] y privilegian el registro de lengua natural, enmarcando su trabajo matemático en el paradigma del Análisis Geométrico.

Análisis de ítem b) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2 visualiza la recta gráficamente y pregunta si debe expresarla vectorialmente, luego inicia una exploración con ayuda del artefacto λ e infiere que la recta no cambia de dirección. Las acciones descritas permiten afirmar la activación de una génesis instrumental. A continuación, sus construcciones (ver Figura 24).

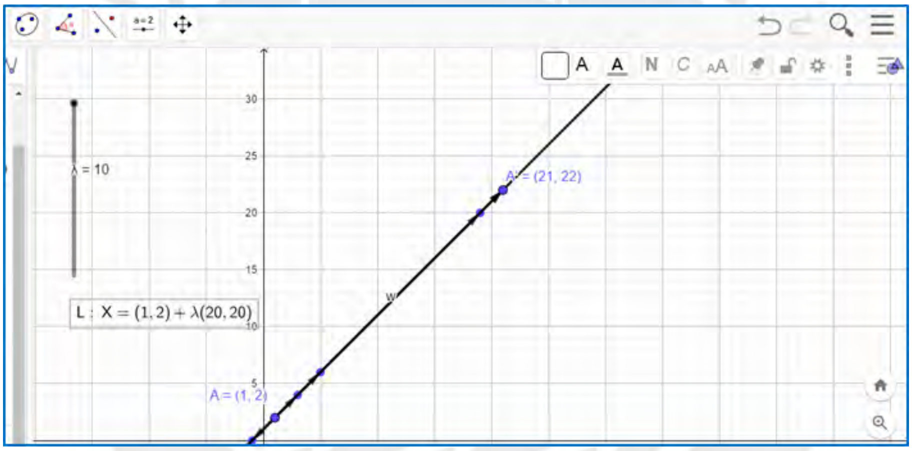


Figura 24. Manipulación del artefacto realizado por A2

Luego, el estudiante activa una génesis semiótica e infiere que la relación que existe entre ellos es de un multiplicador del vector director. Además, afirma que con ese vector se construye la recta y expresa la ecuación vectorial de la recta de forma general, tal como se aprecia a continuación (ver Figura 25).

Es un multiplicador, del vector
$y = P_0 + \lambda v$
Con ese vector se construye la Recta.

Figura 25. Respuesta de A2 al ítem b) de la tarea 1

El estudiante, en este caso, no muestra la construcción de la ecuación, pero la escribe para inferir.

Análisis del ítem c) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2 activa una génesis instrumental al realizar exploraciones con ayuda del mouse e interpreta el comportamiento de los vectores que forman a la recta y con su referencial teórico la ecuación de la recta obtenida en el ítem anterior tome como representamen a la pendiente que intenta visualizar qué sucede en la última expresión obtenida al explorar sobre el parámetro al afirmar la recta no cambia de dirección. Además, identifica la representación de $m = \frac{b}{a}$ sigue siendo la misma y visualiza que la dirección de la recta no varía (ver Figura 26).

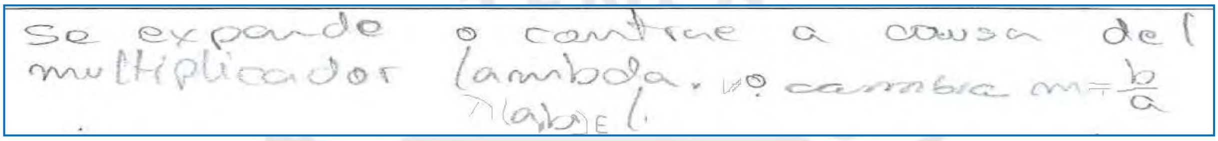

Se expande o contrae a causa del multiplicador lambda. no cambia $m=\frac{b}{a}$

Figura 26. Respuesta de A2 al ítem c) de la tarea 1

Se observa que el estudiante A2 hace uso de representaciones semióticas matemáticas en sus respuestas, a pesar de hacer uso del registro de lengua natural.

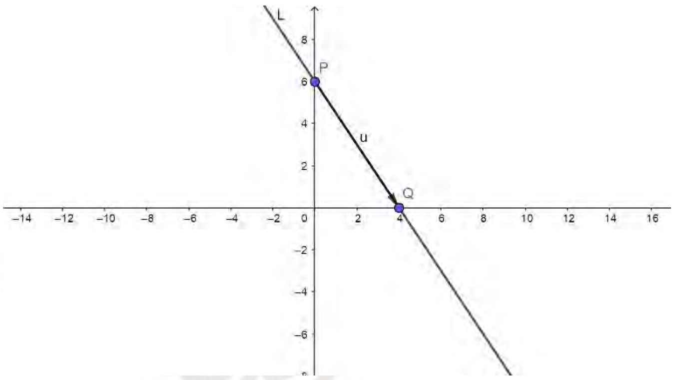
Las acciones evidenciadas y descritas en las respuestas permiten observar la activación del plano [Sem-Ins] en ambos estudiantes. Además, los procedimientos utilizados y las observaciones desarrolladas privilegian el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG). En nuestro análisis a priori, también se consideró este punto de vista, por lo que concluimos que las acciones y desarrollo presentados por los estudiantes A1 y A2 coinciden con el análisis a priori.

El análisis, de los productos de la primera parte del Tarea 1, permite inferir que ambos estudiantes activaron la génesis esperada y el plano [Sem-Ins], privilegiando en su trabajo matemático, el paradigma del análisis geométrico/aritmético (AG).

3.6 *SEGUNDA PARTE DE LA TAREA 1*

SEGUNDA PARTE

✓ **Siga las indicaciones y abra el archivo P2 de GeoGebra. Luego, responda las siguientes preguntas:**



a) Como se observa, puede manipularse lo puntos P y Q sobre la recta y su ecuación varía. ¿A qué se debe eso?

b) Trata de eliminar "y" de la ecuación, fijarse con mover P y Q ¿Te basta con mover uno? Si necesitas precisión, puede utilizar el teclado e ingresar su información.

c) Coloca los puntos en forma vertical ¿Qué podrías afirmar sobre su pendiente?

Figura 27 Ítems de la segunda parte de la Tarea 1
Fuente: Anexo D y archivo GeoGebra

Luego que los estudiantes han visualizado la recta vectorialmente, lo volvemos a presentar esperando que identifiquen sus diferentes representaciones y su relación con la pendiente. Para ello, la docente indica la ruta para ubicar archivo de GeoGebra P2, que contiene la segunda parte y solicita que lo abran. Interactúa con la clase y pregunta ¿Qué observan?, ¿Qué puntos?, ¿Solo se puede expresar gráficamente la recta?, ¿Pueden encontrar su ecuación?, ¿Qué necesitan?, todo ello para que retroalimenten sus saberes previos.

Luego indica explorar qué pasa si, mueven sólo un punto de la recta y si mueve ambos y al final solicita regresar a la posición original para que puedan responder la pregunta planteada.

Análisis a priori de la segunda parte correspondiente al ítem a)

En respuesta al ítem a), se espera que el estudiante active su referencial teórico sobre las representaciones de la recta y su relación con la pendiente para responder. De eta manera estará en la capacidad de observar los cambios en la ecuación, lo que le permitirá activar una génesis semiótica, tomando como representamen la pendiente de la recta que le permitirá visualizar la recta en su forma gráfica con intención de convertirla y representarla en su forma algebraica, para de esta manera poder visualizar los cambios en la ecuación.

Este trabajo está estructurado en el paradigma del Análisis Geométrico de la siguiente manera:

Consideremos la ecuación de recta en su forma más básica:

$$L : y = mx + b$$

Según la información dada, la recta pasa por los puntos P (0,6) y Q (4,0) y para determinar su ecuación de L necesitamos hallar su pendiente y e identificar el punto de intersección con el eje de las ordenadas, de la que sabemos que m está definida por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. En el caso particular de L, tendremos que $m = \frac{0-6}{4-0} = -3/2$ y que b=6, por lo tanto, la representación algebraica de la recta dada será $L : y = -\frac{3}{2}x + 6$. En ese sentido, se espera que el estudiante afirme lo siguiente:

- Si P y Q se mueven sobre la misma recta L, no cambia en la ecuación la pendiente ni el punto de intersección “b”.
- Si P y Q se mueven fuera de la recta dada y forman nuevas rectas, la inclinación de las rectas varían y por ende las pendientes varían.

Este proceso activa una génesis instrumental al manipular la recta para observar y comprobar sus afirmaciones, en donde podemos evidenciar la activación de una génesis discursiva basada en su nuevo referencial y una prueba explorando en la representación gráfica gracias al GeoGebra.

Luego que los estudiantes desarrollaron este trabajo matemático, la docente indica cómo visualizar la ecuación de la recta con ayuda de las propiedades del software y de esta manera pueda corroborar sus resultados. En ese sentido, podremos afirmar que dichas acciones evidenciaran la activación del plano [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis]. Este trabajo matemático se realiza en los paradigmas del Análisis Geométrico y del Análisis Calculatorio (representación algebraica de la recta).

Análisis a priori de la segunda parte correspondiente al ítem b)

Como se indicó en el ítem anterior, los estudiantes adquirieron un conocimiento nuevo que aumentaron a su referencial respecto al software GeoGebra. Esto les permite obtener la representación algebraica de la recta dada en su forma gráfica, lo que facilitará su análisis en esta pregunta.

El ítem b) fue diseñado con la finalidad de que se active una génesis instrumental, considerando al mouse como artefacto que mueve la recta. Moviéndolo en diferentes direcciones alrededor de un punto, se podrán construir infinitas rectas diferentes, cada una con una ecuación diferente, en donde el estudiante explorará con la recta con la intención de conseguir una recta cuya ecuación no tenga a la variable "y".

Estas acciones permiten activar una génesis semiótica en el estudiante al visualizar diferentes direcciones que puede tomar la recta hasta qué sucede cuando no se observa la variable "y". Se espera, mediante la génesis semiótica y el uso de su referencial teórico, las siguientes observaciones:

- Se observa en el plano una recta horizontal con una sola variable (y) de la forma L $L: y = k$ con $m = 0$.
- De la misma manera, se observa el plano una recta vertical con una sola variable (x) de la forma $x = k.\ \ con\ m\ no\ definida$.

Esperamos que los estudiantes afirmen que sólo es necesario mover un punto, así como también se espera la activación de la génesis discursiva al fundamentar sus aseveraciones en su referencial teórico de rectas. De tal manera que podemos evidenciar la activación del [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis]. Este trabajo matemático se realiza en los paradigmas del Análisis Geométrico.

Análisis a priori de la segunda parte correspondiente al ítem c)

En respuesta al ítem c), se espera que el estudiante active una génesis instrumental, al igual que el ítem anterior, pero esta vez solo construirá una recta vertical y así activar una génesis semiótica, tomando como representamen la pendiente de la recta que le inducirá a un proceso de visualización de la recta que la definirá con ayuda de su referencial como $L\ :\ x\ =\ k$. Este trabajo matemático está en el marco del paradigma del Análisis Geométrico.

En la pregunta anterior, ya se observa a la pendiente, entonces para afirmar que no está definida realiza un proceso de prueba en base a su referencial teórico sobre pendiente de una recta y se prueba de la siguiente manera:

a) Sabemos que el valor de la pendiente se puede determinar haciendo uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, en ese sentido activará una génesis instrumental en el estudiante al utilizar la formula como artefacto para construir la prueba y luego esta prueba le permitirá afirmar y fundamentar sobre la pendiente haciendo uso del registro de lengua natural, lo que evidencia la activación de una génesis discursiva.

   Consideremos dos puntos cualesquiera de la recta $L : x = k$ Sean los puntos $P(x_{1,}, y_1)$ y $Q(x_{1,}, y_{2)} \in L$ entonces

   $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{y}{0}$, por ello podemos afirmar que la pendiente es indeterminada.

b) Otra forma de comprobar que su pendiente es indeterminada es haciendo uso de la definición de la pendiente como el ángulo de inclinación. Según su referencial, activará una génesis semiótica e interpretará a la pendiente como el ángulo que forma la recta L con el eje de las abscisas. Es en este momento, al igual que el caso anterior, que se activará la génesis instrumental al utilizar la fórmula de la pendiente para realizar su prueba y su referencial una génesis discursiva para fundamentar su prueba en el registro de lengua natural.

   Sea el ángulo de 90°, conocemos que la pendiente también está definida como: $m = \tan \alpha = \tan 90° = \frac{Sen\,90°}{Cos\,90°} = \frac{1}{0}$

   Por lo tanto, podemos afirmar que la pendiente de la recta de la forma de la forma $x = k$ tiene pendiente indeterminada.

Esta prueba que permite su afirmación, se realiza con ayuda de tratamientos algebraicos y esto lo hará en el paradigma del Análisis Calculatorio.

Estas acciones evidencian la activación el plano [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis] y el desarrollo de las tareas se da en el paradigma del Análisis Geométrico (AG) y Análisis Calculatorio (AC).

Análisis a posteriori de la segunda parte

La tarea planteada al estudiante fue la siguiente:

Abra el archivo P2 de GeoGebra, realice las indicaciones dadas y responda las siguientes preguntas:

Análisis de ítem a) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem a) es la siguiente

a) Como se observa, puede manipularse lo puntos P y Q sobre la recta y su ecuación varía. ¿A qué se debe eso?

Se observó la activación del proceso de visualización de la recta y, a través de la génesis semiótica, la estudiante reconoce a la recta con su representación algebraica en su forma general, además que activa una génesis instrumental al mover los puntos P y Q y construir diferentes rectas en el plano. Luego, activa una génesis semiótica al visualizar cómo va cambiando la recta según va cambiando la pendiente. Esto le permite responder en el registro de lengua natural, tal como apreciamos en la figura a continuación (ver Figura 28).

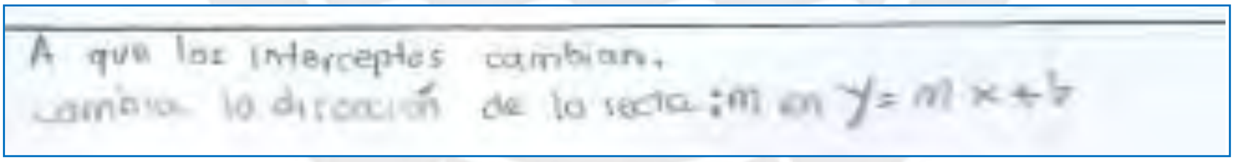

A que los interceptos cambian,
cambia la dirección de la recta ; m en $y = m x + b$

Figura 28. Respuesta de A1 al ítem a) de la segunda parte

Análisis de ítem b) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem b) es la siguiente:

b) Trata de eliminar "y" de la ecuación, fijarse con mover P y Q ¿Te basta con mover uno? Si necesitas precisión, puede utilizar el teclado e ingresar su información.

Se observó que la estudiante A1 activa la génesis instrumental al utilizar el mouse para construir rectas en diferentes posiciones y haciendo uso de un lapicero, simulando ser una recta, comenta con sus compañeros que las rectas hacia arriba positivas y hacia abajo negativas, refiere textualmente "*a veces positiva, a veces negativa*". Esto evidencia el reconocimiento de la pendiente de la recta, lo que evidencia la activación de su referencial teórico que le permitió activar su representamen y activar una génesis semiótica al identificar las diferentes ecuaciones de la recta. Aquí se evidencia la activación del Plano Semiótico Instrumental, a continuación, algunas de sus construcciones (ver Figuras 29 y 30).

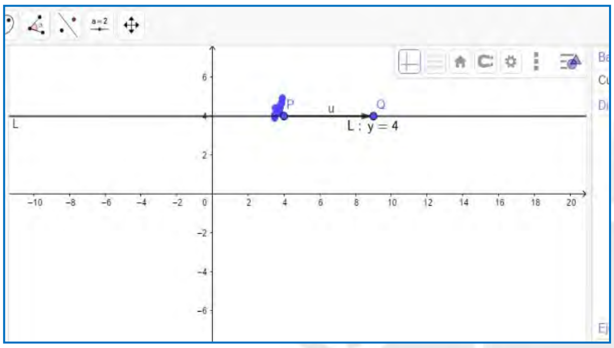


Figura 29. Manipulación del artefacto (A1)

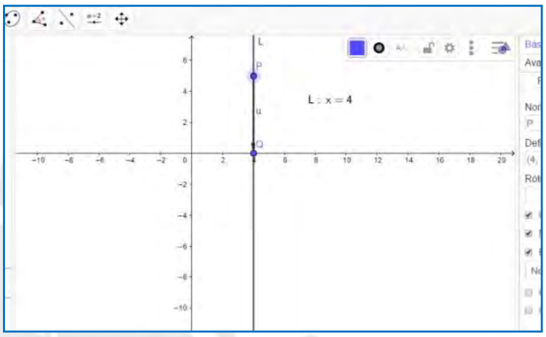
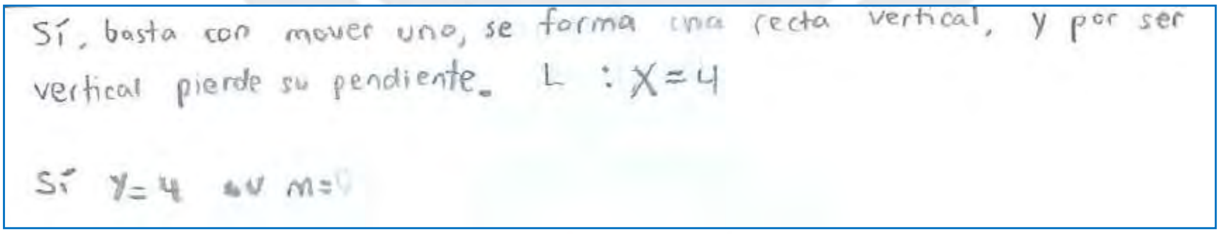


Figura 30. Manipulación del artefacto (A1)

Esta construcción utilizando en mouse que se convirtió en instrumento al permitir a la estudiante construir la recta solicitada, permitió también utilizar la recta como artefacto para que el estudiante pueda fundamentar, que en la recta vertical no se observa la pendiente e interpretar la información utilizando representaciones algebraicas para expresar a la recta obtenida, tal como se observa en su respuesta continuación (ver Figura 31).


Sí, basta con mover uno, se forma una recta vertical, y por ser vertical pierde su pendiente. L : X=4

Sí y=4 su m=0

Figura 31. Respuesta de A1 al ítem b) de la segunda parte.
Fuente: Anexo D y archivo GeoGebra

También podemos observar, que la estudiante activa una génesis semiótica al relacionar las pendientes cero con la ecuación obtenida.

Análisis de ítem c) desarrollado por la estudiante A1

Continuación la pregunta del ítem c)

c) Coloca los puntos en forma vertical ¿Qué podrías afirmar sobre su pendiente?

La estudiante, activa una génesis instrumental al construir la recta vertical solicitada, con ayuda del mouse, quien, en este caso, representa al artefacto que se convirtió en instrumento al permitirle al permitirle la construcción. Entonces la estudiante ya puede visualizarla gráficamente en el plano, y haciendo uso de su referencial sobre rectas, identifica la pendiente de dicha recta y construye algebraicamente a la recta en su representación algebraica L: x=4, lo que evidencia la activación de una génesis semiótica. Estas acciones permiten afirmar la activación del Plano Semítico Instrumental. Luego, la estudiante A1 infiere verbalmente que la pendiente no existe o es indeterminada, lo que le genera una duda, y desarrolla los siguientes cálculos que se muestra a continuaron en la Figura 32.

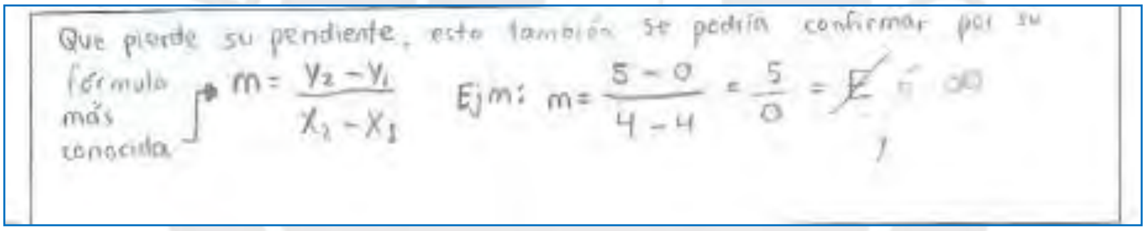


Figura 32. Respuesta de A1 al ítem c) de la segunda parte

Realiza tratamientos algebraicos y algorítmicos para realizar un proceso de prueba, utilizando como instrumento a la fórmula para hallar la pendiente este proceso evidencia la activación de una génesis instrumental, y luego interpreta el resultado utilizando su referencial teórico sobe operaciones aritméticas, afirmando que la pendiente es indeterminada. Estas acciones observar la activación de una génesis discursiva. En ese sentido podemos afirmar que la alumna A1 activo el plano [Sem-Dis].

Análisis de las respuestas del estudiante A2 a la segunda parte

De manera similar, presentamos el análisis de las respuestas de los ítems a), b) y c) del estudiante A2 a la segunda parte.

Análisis de ítem a) desarrollado por el estudiante A2

Al igual que la estudiante A1, A2 activa una génesis semiótica y visualiza a la recta y la expresa en su representación algebraica utilizando su referencial teórico de la ecuación punto pendiente, donde estudia a la pendiente tal como se esperaba y fundamenta que cambia si los puntos cambian, activando con esta acción la génesis semiótica, entonces se observa la activación del plano [Sem-Ins], a continuación, la respuesta detallada (ver Figura 33).

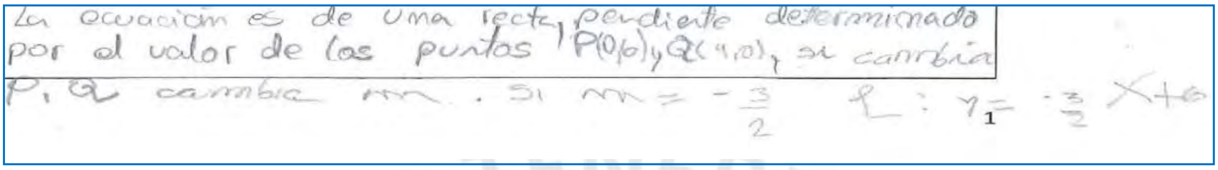
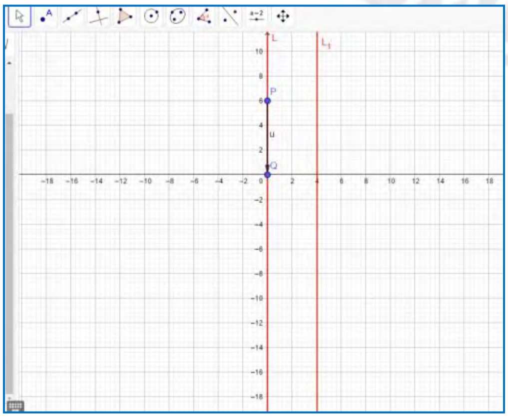


Figura 33. Respuesta de A2 al ítem a) de la segunda parte

También activa una génesis instrumental al mover los puntos P y Q. Consideró a los puntos como el instrumento que le permite verificar en el plano, utilizando su referencial teórico al respecto que le permitió corroborar con su ecuación. Esta acción evidencia la activación de una génesis semiótica. Entonces podemos observar la activación del plano [Sem-Ins].

Análisis de ítem b) desarrollado por el estudiante A2

Al dar inicio a su trabajo, el estudiante lee la pegunta e infiere verbalmente que existe un modelo de ecuación para la recta donde no se observa a la variable “y”, pero que no recordaba cual era. Así que al igual que la estudiante A1, activó una génesis instrumental y construyó diferentes rectas en el plano. A continuación, algunas de sus construcciones (ver Figuras 34 y 35).



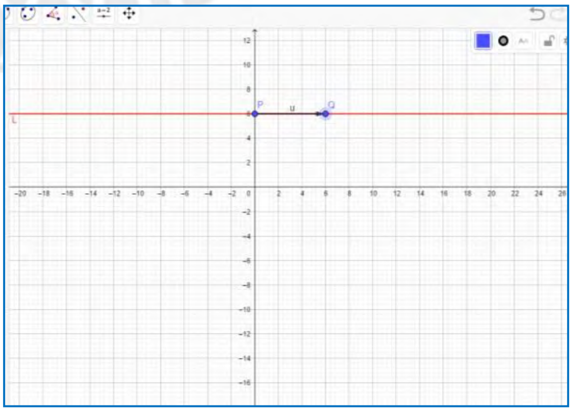


Figura 34. Manipulación del artefacto (A2)

*Figura 35.*Manipulación del artefacto (A2)

Luego de observar su construcción, el estudiante activó su referencial teórico sobre rectas y definió que la recta que no tiene a la variable y está definida en su representación algebraica x=A y además afirma que la pendiente no existe. Aquí se puede observar la activación de una génesis semiótica. En ese sentido activada la génesis instrumental para construir las rectas y una génesis semiótica para interpretar su resultado, podemos afirmar la activación del plano [Sem-Ins]. A continuación, su afirmación en registro de lengua natural (ver Figura 36).

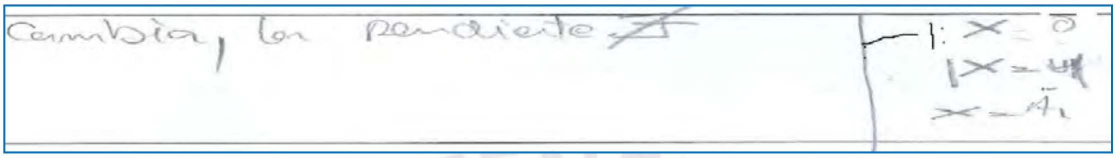


Figura 36. Respuesta de A2 al ítem b) de la tarea 2

Estas acciones también son parte del análisis a priori.

Análisis de ítem c) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2 activa una génesis semiótica tomando como representamen el ángulo de inclinación de la recta y percibe la pendiente de la recta que representó algebraicamente como “x=a”, lo que evidencia la activación de una génesis semiótica. Así también, utiliza su referencial teórico sobre la pendiente de una recta y el valor de las funciones trigonométricas, también utiliza como artefacto la definición de pendiente como la tangente del ángulo y construye la pendiente de la recta vertical que forma un ángulo de 90° con el eje x, estas acciones evidencian la activación de una génesis instrumental; por lo tanto inferimos la activación del plano [Sem-Ins],tal como se observa a continuación (ver Figura 37).

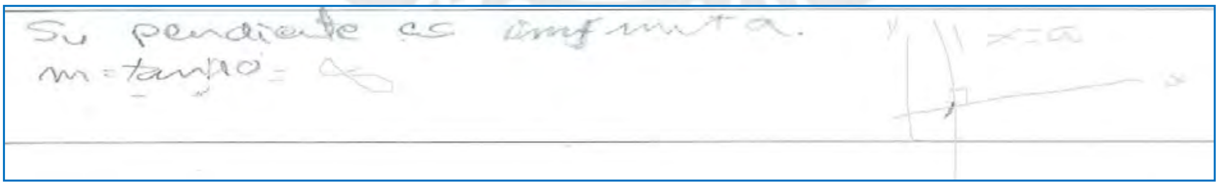


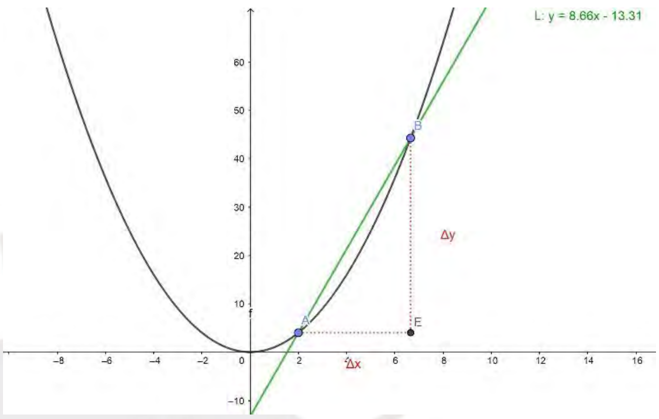
Figura 37. Respuesta de A2 al ítem c) de la tarea 2

Por todas las interpretaciones y cálculo aritméticos expuestos, en el análisis a posteriori de la segunda parte de la Tarea 1; podemos inferir que: el trabajo matemático realizado por los estudiantes A1 y A2, en la segunda parte de la Tarea 1 está estructurado en el paradigma del Análisis Geométrico/Aritméticos.

3.7 *TERCERA PARTE DE LA TAREA 1*

TERCERA PARTE

- ✓ **Abra el archivo P3 de GeoGebra, utilizando la lupa amplíe la imagen y responda las siguientes instrucciones**



a) ¿Puede hallar la pendiente de la recta secante cuando B pasa por x= 10? y ¿Cuál es el incremento en x e y respecto al punto A?

b) ¿Puede hallar la pendiente de la recta
Secante cuando B pasa por x= 5?

c) Acerque el punto B hacia el punto A, ¿Qué cambios observa?

d) ¿Qué sucede con la recta secante cuando se próxima cada vez más el punto B al punto A? Amplíe la imagen y halle la pendiente de la recta cuando el $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta x = h$ en un punto cualquiera. Explique.

e) ¿Podemos afirmar que en ese punto la recta y la curva se confunden?

Figura 38 Ítems de la tercera parte de la Tarea 1
Fuente: Anexo D y archivo GeoGebra

Esta tercera parte de la Tarea 1, también está diseñada en el registro gráfico, fue hecho con la finalidad que los estudiantes activen la génesis semiótica y la génesis instrumental y la génesis discursiva.

Las preguntas propuestas, permiten aproximar al estudiante a la interpretación geométrica de la derivada. Para dar respuestas a estas tareas, la docente indica a los estudiantes la ruta para ubicar el archivo de GeoGebra P3, que contiene la Tarea 3 y solicita abrirlo. Interactúa con los estudiantes y pregunta ¿Qué observan? y da indicaciones sobre la lupa, que ayuda a maximizar o minimizar la imagen.

Análisis a priori de la Tercera parte

Con la tercera pregunta, deseamos que el estudiante utilice el conocimiento adquirido gradualmente en las preguntas previas y analice la recta secante a la función a $f(x)$ e interprete qué sucede con la recta a medida que se aproxima a ser una recta tangente a la función f(x), considerando lo definido anteriormente que ser derivable en un punto es parecerse a una recta localmente. En este caso, la recta a la que se parece pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$.

Análisis a priori de la tercera parte correspondiente al ítem a)

En los ítems a) y b), se espera que los estudiantes activen una génesis semiótica tomando como representamen los puntos dados de la recta e interpreten la información, tomando su referencial teórico sobre pendiente de una recta y su relación con los incrementos y de esta manera construyan la pendiente solicitada.

Para dar una respuesta específica, los estudiantes deben ubicar correctamente el punto B. Por ejemplo, en el caso del ítem a), se debe considerar un incremento en x, que son 8 unidades. Para poder ubicar correctamente el punto, utilizará el mouse que le ayudará a construir su conocimiento lo que activará una génesis instrumental y luego una génesis semiótica al interpretar L: $y = 12x - 20$, e inferir que la pendiente de L es 12. Con estas acciones esperamos la activación del plano [Sem–Ins].

De igual, manera sucederá en el ítem b).

Otra forma de hallar la pendiente es utilizando la fórmula de la pendiente como artefacto. Ello evidencia la activación de la génesis instrumental realizando tratamientos algebraicos y se puede obtener la pendiente de la siguiente manera:

Para el ítem b) tenemos:

Sean los puntos A$(2,4)$ y B$(10, f(10))$

$m = \frac{100-4}{10-2} = \frac{96}{8} = 12$, al visualizar este proceso, el estudiante debe relacionar los incrementos con los valores de la pendiente $\frac{96}{8} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, esta nueva representación que le dará el estudiante permitirá la activación de una génesis semiótica. De tal manera que el estudiante vuelve a activa el plano [Sem-Ins].

Se observa que el trabajo esperado se estructuro en el paradigma del Análisis Geométrico/aritmético.

Análisis a priori de la tercera parte correspondiente al ítem b)

Tenemos:

$m = \frac{25-4}{5-2} = \frac{21}{7} = 3$ Al igual que la pregunta anterior, esperamos que represente la pendiente con los incrementos con los valores de la pendiente $\frac{21}{7} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, esta nueva representación que le dará el estudiante permitirá la activación de una génesis semiótica. De tal manera que el estudiante vuelve a activa el plano {Sem-Ins].

Análisis a priori de la tercera parte correspondiente al ítem c)

En respuesta al ítem c), se espera que el estudiante active una génesis semiótica, considerando como representamen la variación del incremento en x Δx, que utilice la representación semiótica Δx para indicar un incremento infinitesimal de x y a partir del uso de su referencial teórico sobre rectas, límites y aproximaciones interprete lo que sucede con la recta, ello evidencia la activación de una génesis semiótica, luego visualice el acercamiento del punto B hacia el punto A y perciba esa aproximación como incrementos infinitamente pequeños, acción que nos permite afirmar la activación de la génesis instrumental, donde el punto B es utilizado como artefacto para construir diferentes rectas secantes, lo que evidencia la activación de una génesis instrumental. Las acciones descritas evidenciaran la activación el plano [Sem-Ins]. Se espera también que el estudiante afirme que los incrementos se van haciendo infinitamente pequeños y la recta tangente va aproximándose a ser una recta tangente. Puede activar otra génesis semiótica al detallar La respuesta en el registro de lengua natural, además de una solución haciendo uso de signos, definiciones y representaciones para formalizar lo analizado, tal como se muestra a continuación,

Sean f una función continua en $f:]a,b[\to R \ ,consideremos\ un\ x \quad \in I =]a,b[$

Sean A($x_{1,}$ $f(x_1)$) y B($x_{2,}$ $f(x_2)$ los puntos de intersección de la recta secante a la función $f = x^2$, definiremos a los incrementos en x e y están dados por:

$\Delta x = x_{2,} - x_1$, $\Delta y = y_{2,} - y_1$, $\forall \Delta \in R$.

Se observa que, si B toma valores cada vez más próximos al punto A, los incrementos tienden a ser muy muy pequeños. Es decir, tienden a ser cero; $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y tendremos una recta que pase por los puntos nuevos A($x_{1,}, f(x_1)$) y B($x_{1,} + \Delta x$, $f(x_1 + \Delta x)$).

Se observa que, este trabajo se desarrolla en el paradigma del Análisis Geométrico.

Análisis a priori de la tercera parte correspondiente al ítem d)

Para el ítem d), se espera que el estudiante utilice su referencial teórico sobre incrementos y aproximaciones para activar una génesis semiótica, considerando como representamen al incremento de x: Δx y le permita visualizar que los valores de los incrementos son cada vez más pequeños.

También se espera la activación de una génesis instrumental en el proceso de construcción de diferentes rectas con puntos de intersección a la curva C cada vez más cerca, llegando a confundirse. Para ello, es necesario utilizar otro artefacto: la lupa del GeoGebra para ampliar la imagen y le permita construir una recta casi indistinguible de la función f, lo que debe activar su referencial teórico sobre funciones continuas y derivables que define que una recta y la curva son indistinguibles, donde la curva es derivable, lo que le permite afirmar que la función f es derivable. Estas acciones evidencian la activación del plano [Sem-Ins] y [Ins-Dis]

Se espera también que haga uso de tratamientos algebraicos para obtener los valores numéricos de las pendientes solicitadas, lo que lo logrará utilizando a la fórmula como artefacto. Este trabajo desarrollado se enmarca en el paradigma del Análisis Geométrico (AG).

Haciendo uso de su referencial teórico se fundamentará en el registro de lengua natural que cuando el Δx se hace más pequeño la recta secante va pareciendo una recta tangente a la curva f(x).

Después de las acciones anteriormente descritas, el alumno puede identificar

$$m = \frac{(y_{2,} - y_1)}{x_{2,} - x_1} = \frac{\Delta y,}{\Delta x} \quad , \ \forall\ \Delta x, \Delta y \ \in R$$

i. $m1 = \frac{f(2+1)-f(2)}{(2+1)-2} = \frac{5}{1}$

ii. $m3 = \frac{f(2+0.05)-f(2)}{(2+0.05)-2} = \frac{0.2025}{0.05}$

iii. $m4 = \frac{f(2+0.005)-f(2)}{(2+0.005)-2} = \frac{0.020025}{0.005}$

iv. Entonces la pendiente de una recta en un punto cualquiera de $f(x)\ , será$:

Consideremos $A(x_{1,}, f(x_1))$ con $\Delta x = h,$

$$mh = \frac{f(x_{1,}+h)-f(x_{1,})}{(x_{1,}+h)-x_{1,}}$$

$$mh = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{x_1+h-x_1}$$

$$mh = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

La pendiente mh es la pendiente de la recta secante que se confunde con una recta a la curva f(x) en el punto B, cuando B se aproxima al punto A implica que $x_{2,} \rightarrow x_1,$ su incremento en x se va haciendo infinitamente pequeño casi indistinguible. Es decir, si $\Delta x = h,\ h \rightarrow 0$ está relacionado con el límite de una función.

Estas acciones evidencian la activación de una génesis semiótica que con ayuda de su referencial teórico respecto pendiente, incrementos y límite de una función realiza tratamientos algebraicos, además se espera la activación de una génesis instrumental en dos acciones: al hacer uso del software para ampliar la imagen y poder visualizar la recta que pasa por dos puntos cada vez más cercanos y al utilizar la fórmula de la pendiente como artefacto para determinar el valor de la pendiente con los diferentes incrementos solicitados.

También esperamos la activación de una génesis discursiva para fundamentar sus respuestas basadas en su referencial teórico, lo que evidencia la activación del plano [Sem-Ins]. Se espera que los estudiantes clasifiquen su trabajo en el paradigma AG.

Análisis a priori de la tercera parte correspondiente al ítem e)

En respuesta al ítem e), esperamos que el estudiante active su referencial teórico adquirido anteriormente y las definiciones de derivabilidad para fundamentar que la pendiente alrededor del punto es la misma la gráfica visualizada en el plano donde la curva es confundida con la recta representa a una función derivable. Esto evidencia la activación de una génesis semiótica.

Análisis a posteriori Tercera Parte

La tarea planteada al estudiante fue la siguiente:

Abra el archivo P3 de GeoGebra, utilizando la lupa amplíe la imagen y responda las

Análisis de ítem a) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem a) fue la siguiente:

a) ¿Puede hallar la pendiente de la recta secante cuando pasa por x= 10? y ¿Cuál es el Cuál es el incremento en x e y respecto al punto A?

Se observó la activación de la génesis instrumental cuando la estudiante manipula el punto buscando que el punto B tome el valor de su abscisa igual a10 y luego construya la recta secante haciendo uso de su referencial respecto a rectas que activará una génesis semiótica para interpretar sus resultados, esto evidencia la activación del plano [Sem-Ins], a continuación, en la Figura 39 observamos trabajo realizado

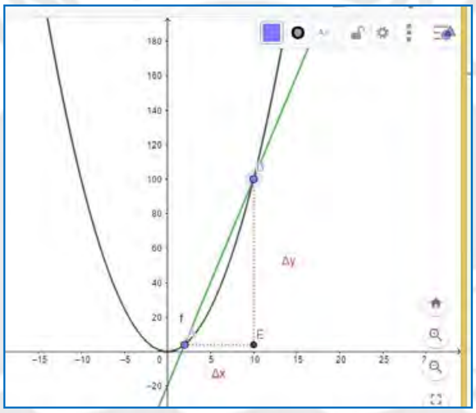


Figura 39. Manipulación del artefacto realizado por A1

En su trabajo también se observa que utiliza la fórmula de la pendiente de la recta para determinar el valor de la pendiente de dicha recta, entonces observamos que utilizo la formula como utilizando como artefacto y activo una génesis instrumental.

La estudiante A1 consultó a la profesora si puede determinar lo solicitado utilizando la función cuadrática, entonces se observa la activación de la génesis semiótica al interpretar la función de la parábola para determinar el punto que pasa por x=10 y luego con tratamientos algebraicos, con ayuda de la fórmula de pendiente de una recta, determina el valor del pendiente de la recta solicita, tal como se aprecia en su trabajo realizado (ver Figura 40).

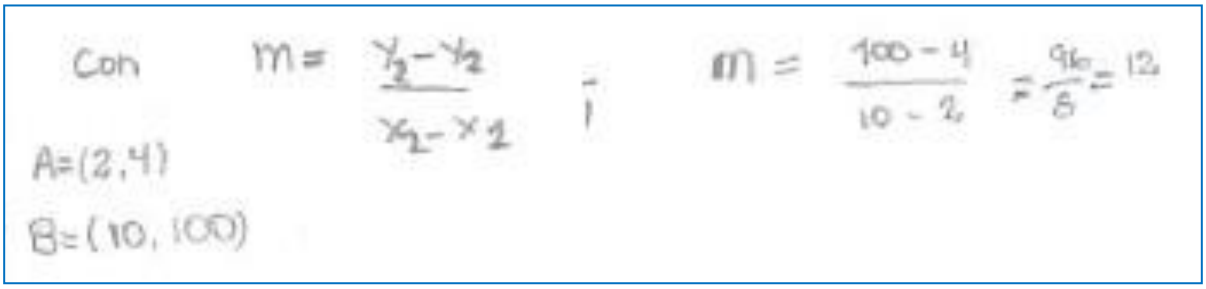


Figura 40. Respuesta de A1 al ítem a) de la tercera parte de la Tarea1

Análisis de ítem b) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem b) planteada es la siguiente:

b) ¿Puede hallar la pendiente de la recta secante cuando pasa por x= 5?

Se puede observar que el procedimiento de la estudiante es el mismo que en la pregunta anterior, tal como lo vemos a continuación (ver Figura 41).

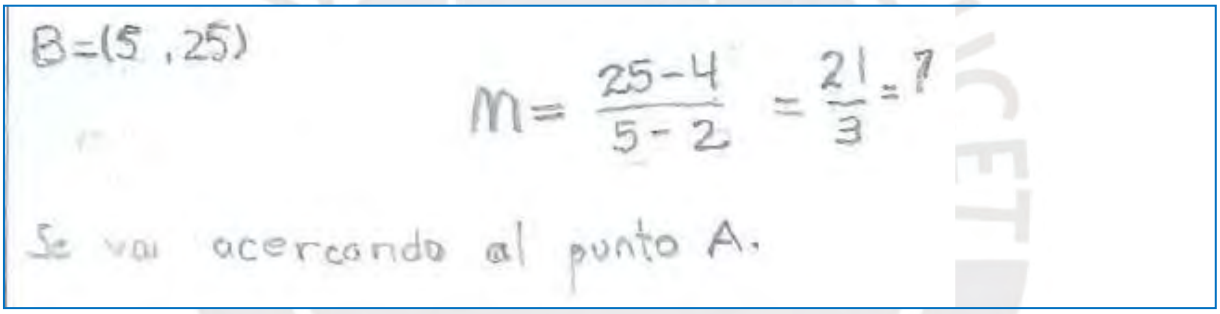


Figura 41. Respuesta de A1 al ítem b) de *tercera parte de la Tarea 1*

En este caso, la alumna utilizó su nuevo referencial adquirido en la pregunta anterior, que le sirvió como un instrumento para obtener la respuesta y la interpretación de sus resultados evidencia la activación de una génesis semiótica. En ese sentido, también se evidencia la activación de del plano [Sem-Ins].

Análisis de ítem c) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem c) es la siguiente:

c) Acerque el punto B hacia el punto A, ¿Qué cambios observa?

La estudiante activa una génesis instrumental al aproximar el punto B hacia el punto A, construyendo diferentes rectas secantes. Infiere en su respuesta que existe una aproximación del punto en este momento, donde la estudiante activa una génesis semiótica al percibir esa aproximación y haciendo uso de registro de lengua natural detalla su respuesta que se aprecia a continuación (ver Figura 42).

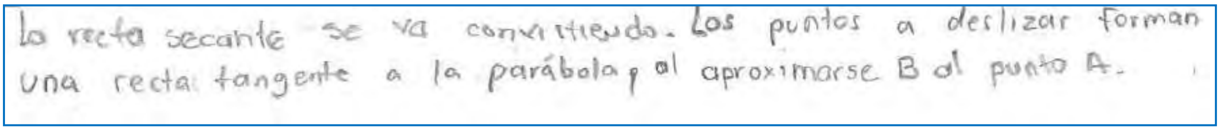

la recta secante se va convirtiendo. Los puntos a deslizar forman una recta tangente a la parábola, al aproximarse B al punto A.

Figura 42. Respuesta de A1 al ítem c) de la *tercera parte de la Tarea 1*

Análisis de ítem d) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta propuesta del ítem d) fue la siguiente:

d) ¿Qué sucede con la recta secante cuando se próxima cada vez más el punto B al punto A? Amplíe la imagen y halle la pendiente de la recta cuando el $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta x = h$ en un punto cualquiera. Explique

La estudiante A1 activa una génesis instrumental manipulando el mouse, de tal manera que acerca el punto B a 0.05 cm de distancia sin perder de vista lo que acontece y construye el grafico siguiente (ver Figura 43).

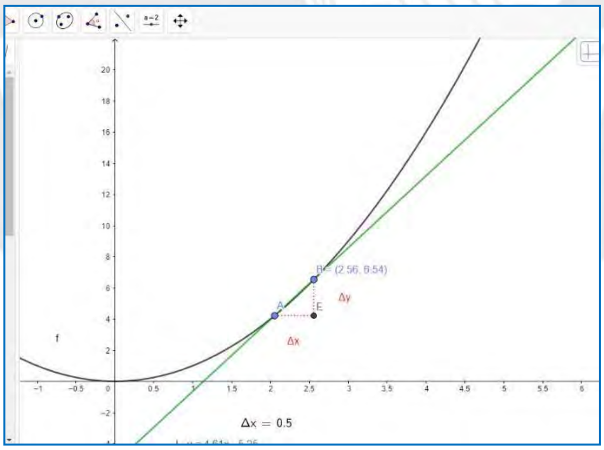
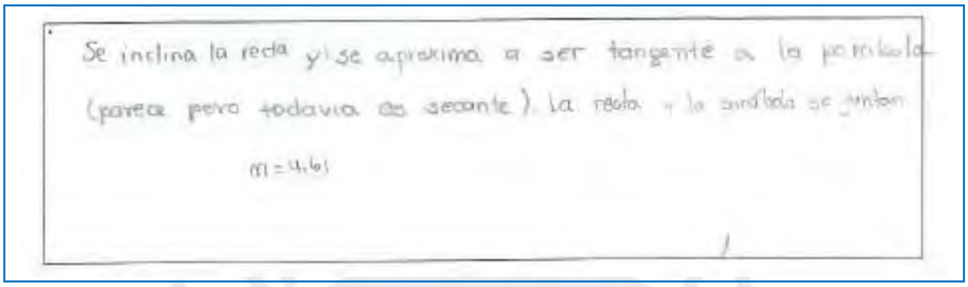


Figura 43. Manipulación del artefacto realizado por A1

Luego, hace llegar una observación al docente referente al hecho que la distancia entre los puntos cada vez es más pequeña. Por ello, aseveramos que activó una génesis semiótica luego de la visualización de esta aproximación e interpretarla. Estas acciones evidencian el plano [Sem- Ins].

La estudiante continúa explorando y utiliza la lupa como artefacto que le permitirá ampliar este pedazo de recta y realizar afirmaciones, en ese instante activa la génesis instrumental. Luego de, un proceso de visualización, donde observa muy entusiasmada que la recta y la curva no se distingue, infiere, utilizando su referencial, que es continua y por lo tanto es derivable, estas acciones señalan la activación del plano [Sem-Ins]. A continuación, se aprecia su respuesta en el registro de lengua natural (ver Figura 44).


Se inclina la recta y se aproxima a ser tangente a la parábola (parece pero todavía es secante). La recta y la parábola se juntan

m=4.61

Figura 44. Respuesta de A1 al ítem d) de la *tercera parte de la Tarea 1*

Análisis de ítem e) desarrollado por la estudiante A1

La pregunta del ítem e) es la siguiente:

e) ¿Podemos afirmar que en ese punto la recta y la curva se confunden?

Se observa que luego del trabajo realizado por la estudiante; para responder a la pregunta anterior, y utilizando su referencial sobre derivabilidad, interpreta sus resultados y los refiere en el registro de lengua natural, tal como se aprecia a continuación (ver Figura 45).

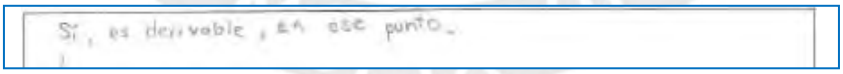

Sí, es derivable, en ese punto.

Figura 45. Respuesta de A1 al ítem e) de la *tercera parte de la Tarea 1*

Podemos afirmar que las acciones descritas en esta pregunta, evidencian la activación de una génesis semiótica.

Análisis de las respuestas del estudiante A2 a la tercera parte

De manera similar que los anteriores, presentamos un análisis de las respuestas de brindadas por el estudiante A2 a la tercera parte de la secuencia de tareas.

Análisis de ítem a) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2 activa su referencial teórico sobre rectas en el plano y activa la génesis instrumental utilizando como artefactos a los puntos con los que explora y construye una recta que pase por x=10, así también activa una génesis semiótica al representar sus resultados, a continuación, se muestra una de sus construcciones (ver Figura 46).

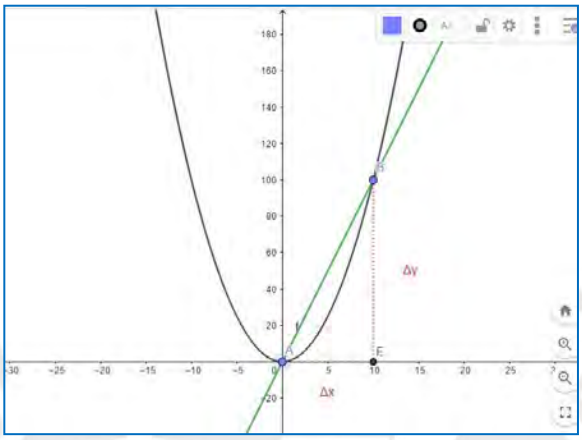


Figura 46. Manipulación del artefacto del alumno A2

Así también activa una génesis semiótica, tomando como representamen los incrementos Δx y Δy lo relaciona con la pendiente de la recta. Todo ello con ayuda de su referencial teórico sobre pendiente de una recta, lo que le permite inferir en el registro de lengua natural lo siguiente (ver Figura 47).

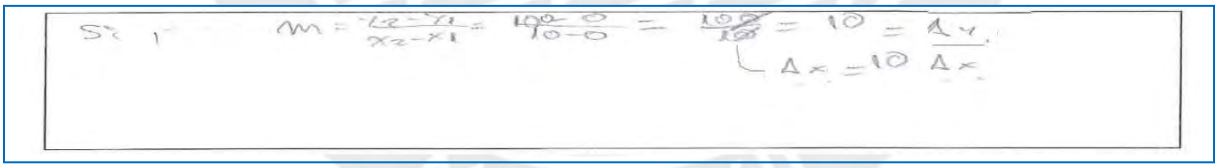


Figura 47. Respuesta de A2 al ítem a) de la tercera parte de la Tarea 1

Análisis de ítem b) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2 realiza las mismas acciones en el desarrollo del ejercicio anterior, como se puede observar a continuación en la Figura 48.

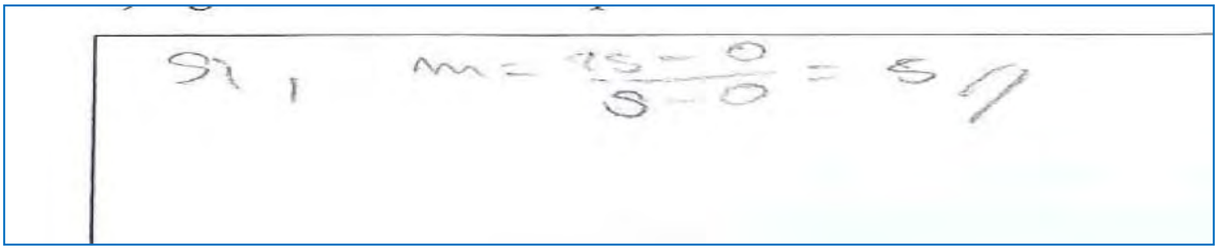


Figura 48. Respuesta de A2 al ítem b) de la tercera parte de la Tarea 1

Podemos afirmar que el estudiante A2, utiliza lo aprendido en la pegunta anterior y lo utiliza como artefacto para dar solución mecánica a esta pregunta. Se evidencia la activación de la génesis semiótica. Podemos afirmar que no se activa ningún plano.

Análisis de ítem c) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante infiere verbalmente que se aproxima tanto que aparentemente cortará en un punto. Además, recalca que siempre existirá distancia entre esos puntos. Activa una génesis instrumental, al igual que la estudiante A1, y una génesis semiótica utilizando como representamen el incremento (ver Figura 49).

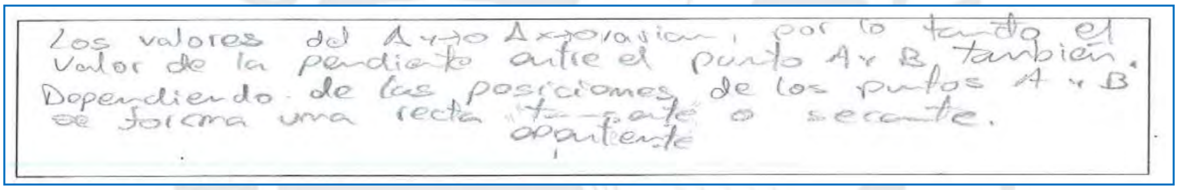


Figura 49. Respuesta de A1 al ítem c) de la tarea 3 de la tercera parte de la Tarea 1

Podemos observar que en el registro de lengua natural expresan sus conocimientos, además que por las acciones descritas se evidencia la activación del plano [Sem-Ins].

El trabajo de los estudiantes está estructurado en el paradigma (AG).

Análisis de ítem d) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2, con ayuda de su referencial teórico sobre aproximaciones, activa las génesis instrumentales esperadas. También activa una génesis semiótica tomando como referencia el incremento en x observando que esas aproximaciones tienden a ser cero, lo que evidencia la activación del plano [Sem-Ins] (ver Figura 50).

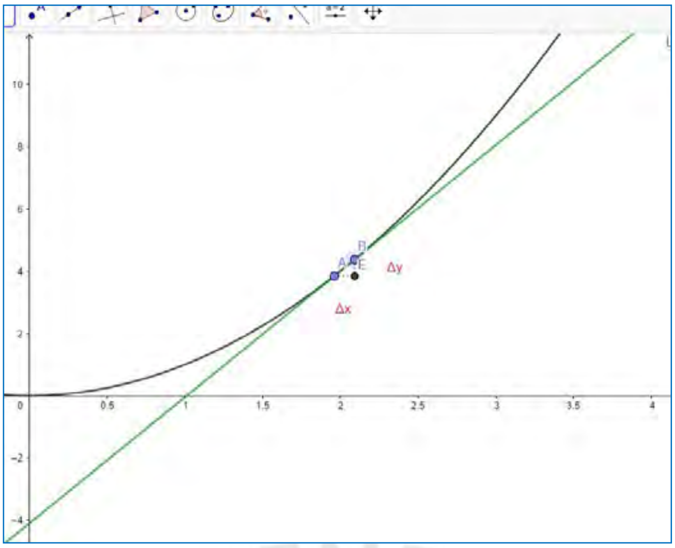


Figura 50. Manipulación del artefacto realizado por A2

Además, desarrolla los tratamientos algebraicos necesarios, ya que activa una génesis instrumental con el artefacto lupa para visualizar la recta activando una génesis semiótica, lo que le permite afirmar que la recta y la función f son casi indistinguibles y afirma que está frente a una función derivable, fundamentado en su referencial teórico de derivabilidad de funciones. Se evidencia entones que activó el plano [Ins-Dis]. A continuación, mostraremos los tratamientos algebraicos realizados que le permiten al estudiante generalizar la pendiente haciendo uso de su referencial teórico (ver Figura 51)

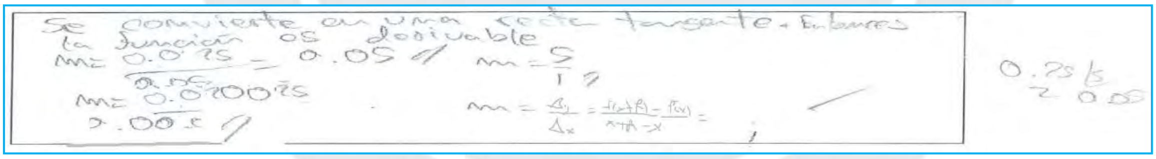


Figura 51. Respuesta de A2 al ítem d) de la tercera parte de la Tarea 1

Análisis de ítem e) desarrollado por el estudiante A2

El estudiante A2, al igual que A1, utiliza lo aprendido en la respuesta anterior referencial teórico sobre definiciones de derivabilidad y los representa haciendo uso del registro de lengua natural, activando una génesis semiótica, (ver Figura 52).

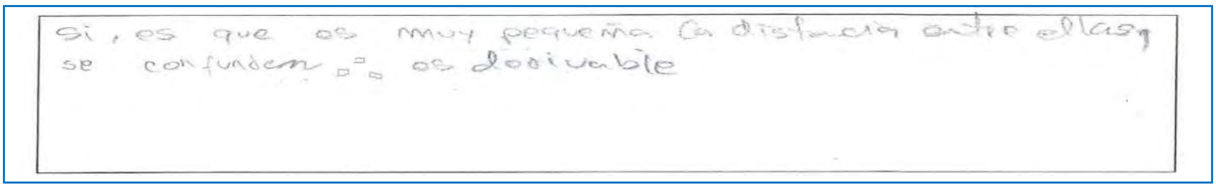


Figura 52. Respuesta de A2 al ítem e) de la tercera parte de la Tarea 1

Con el referencial teórico adquirido, formalizamos la interpretación geométrica de la derivada, tomando como representamen a la pendiente de la recta tangente que pasa por los puntos A$(x_{1,}, f(x_1))$ y B $((x_{1,} + h), f(x_1 + h))$, con h $real$ para que sea una recta tangente tomamos un $h \rightarrow 0$ y visualizamos la pendiente de dicha recta de dos maneras:

- ✓ En su presentación algebraica, *m* está definida por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_{1,} + h) - f(x_{1,})}{(x_{1,} + h) - x_{1,}} = \frac{f(x_{1,} + h) - f(x_{1,})}{h}$$

- ✓ En su representación vectorial, *m* está definida por:

$$m = \frac{v_2}{v_1},$$

donde v, v_2 son coordenadas del vector director de la recta, por lo que el vector director estará representado por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = ((x_{1,} + h), f(x_1 + h)), -((x_{1,}, f(x_1)) = (\mathrm{h}, f(x_1 + h) - f(x_1))$$

Conocidas ya las componentes del vector director, podemos representar a la pendiente como:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{f(x_{1,} + h) - f(x_{1,})}{h},$$

Como $h \rightarrow 0$, entonces podemos representar la pendiente de la recta tangente como:

$$pendiente\ de\ la\ recta\ tangente = m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{1,} + h) - f(x_{1,})}{h}$$

Y nuestro referencial teórico nos permite visualizar a la definición de la derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{1,} + h) - f(x_{1,})}{h} = m_t$$

Por lo tanto, la derivada de una función f representa a la pendiente de la recta tangente a la función f en un punto.

De manera similar a la segunda parte, después de todo lo expuesto, en el análisis a posteriori de la tercera parte de la Tarea 1; podemos afirmar los estudiantes A1 y A2 privilegian el paradigma del Análisis Geométrico/Aritméticos en su trabajo matemático desarrollado en la tercera parte de la Tarea 1.

Así, también pudimos observar que el análisis a posteriori desarrollado concuerda con el análisis a priori esperado.

3.8 Resultados Finales

En la tabla 6 a continuación, se muestra un resumen de las acciones desarrolladas por los 15 estudiantes que fueron sujetos de esta investigación:

Tabla 6.

Resumen de los resultados de la Tarea 1

	Activación de Génesis Semiótica	Activación de Génesis Instrumental	Activación de Génesis Discursiva	**Planos verticales activados**	**Paradigmas privilegiados**	
					Geomé-trico/ Aritmé-tico	Análisis Calculato-rio
PRIMERA PARTE	*8*	*7*	*0*	*[Sem-Ins]*	*3*	*0*
SEGUNDA PARTE	*11*	*8*	*1*	*[Sem-Ins] [Ins-Dis]*	*3*	*0*
TERCERA PARTE	*12*	*9*	*1*	*[Sem-Ins] [Ins-Dis]*	*5*	*0*

En términos generales, podemos inferir que el trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en respuesta a la primera parte de la Tarea1, se identificó ocho acciones de los estudiantes que activaron una génesis semiótica, así como siete acciones activaron una génesis instrumental. Diez acciones evidenciadas, también formaban parte del análisis a priori. En esta parte del trabajo los estudiantes activaron el plano [Sem-Ins], donde además privilegian al paradigma del Análisis Geométrico (AG), que es el paradigma esperado.

De manera similar, podemos afirmar que, en el análisis de la segunda parte de la tarea 1, se identificaron once acciones de los estudiantes que activaron una génesis semiótica, ocho acciones que activaron génesis instrumentales y una acción que activó una génesis Discursiva. En esta parte, los estudiantes consiguen activar el plano [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis]. Se observa que el trabajo de los estudiantes fue estructurado en el paradigma del Análisis Geométrico.

Así también el trabajo matemático de los estudiantes en la tercera parte, de la Tarea 1, fue clasificado en el paradigma del Análisis Geométrico. En este trabajo se pudo identificar doce acciones de los estudiantes que activaron la génesis semiótica, nueve acciones que activaron génesis instrumentales y una acción que activo una génesis Discursiva. Logrando de esta manera activar el plano [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis].

CONCLUSIONES

El estudio del trabajo matemático, de estudiantes de Ingeniería cuando resuelven tareas orientadas a la interpretación geométrica de la derivada, es tema de la presente investigación. Con el afán de desarrollar este estudio, de manera pertinente consideramos como marco teórico la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de Kuzniak (2006), teoría de la cual utilizamos aspectos muy útiles para nuestro análisis, como son las génesis del ETM y la activación de los planos verticales, paradigmas del análisis y los ETM personales. Todos ellos, fueron herramientas que nos permitieron enriquecer el análisis realizado.
Haciendo uso de estos aspectos, logramos identificar las acciones de los estudiantes, que activaron las diferentes génesis del ETM. Así también, que planos verticales lograron ser activados, motivados por las dos tareas propuestas. Para finalmente clasificar el trabajo matemático personal de los estudiantes en el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético.

Otro aspecto importante en esta investigación ,es el software utilizado como herramienta mediadora, llamado GeoGebra; el cual tuvo como propósito que el estudiante interaccione con este y pueda observar, de manera dinámica, la construcción de la recta y sus diferentes representaciones, los cambios de pendientes de las rectas así como la aproximación de la recta secante a una curva, en la que pudieron manipular los objetos matemáticos y observar los cambios buscando crear sus estrategias para identificar a las pendientes de las rectas manipuladas y tomar decisiones que crean convenientes.

Se estudiaron investigaciones referidas que sustentan que el uso de un software facilita en el estudiante la construcción del conocimiento, particularmente Ruiz, Córdova y Rendón (2014) resaltan lo importante que el uso de alguna herramienta tecnológica que ayude al estudiante a entender ciertos conceptos, en nuestra investigación los conceptos de recta, pendiente, recta tangente, recta secante, recta tangente a una curva y comportamientos de la recta secante cuando se aproxima a la recta tangente a la función.

En relación al primer objetivo específico planteado*, **“Identificar los paradigmas del Análisis geométrico/aritmético (AG) y del Análisis calculatorio (AC) en el trabajo matemático de los estudiantes al desarrollar la tarea”***, podemos afirmar que en el grupo de estudiantes con el que se experimentó, conocen, en su mayoría, la definición formal de la derivada. Relacionaron este objeto con la pendiente de la recta tangente a la curva, utilizando su representación algebraica y su representación vectorial. Construyeron la definición de la interpretación geométrica de la derivada al finalizar las tareas propuestas. Es en este desarrollo de las tareas donde se pudo evidenciar como estructuraron su trabajo matemático los sujetos de estudio.

En este sentido, podemos afirmar que ambos estudiantes enmarcaron su trabajo matemático en los paradigmas del Análisis Geométrico (AG) en todas sus respuestas.

En relación al segundo objetivo específico planteado ***“Analizar la activación de las diferentes génesis en el trabajo matemático de los estudiantes*”,** estudiamos las acciones y los productos de los estudiantes, donde pudimos observar los procesos en la que lograron activar la génesis semiótica, así como la instrumental y la discursiva.

A continuación, puntualizaremos las génesis activadas en los estudiantes al desarrollar la tarea propuesta. Cabe resaltar que la tarea propuesta se estructuró en tres partes, las cuales consideraremos para detallar los resultados obtenidos. En la primera parte (Ver páginas 47-55), se obtuvo los siguientes resultados:

En referencia al ítem a: ambos estudiantes activaron el plano [Sem-Ins] y privilegian el registro de lengua natural, enmarcando su trabajo matemático en el paradigma del Análisis Geométrico.

En referencia al ítem b: ambos estudiantes activaron la génesis semiótica y génesis instrumental esperada, activando también plano [Sem-Ins], privilegiando el paradigma del análisis geométrico.

En referencia al ítem c: se pudo observar la activación del plano [Sem-Ins] en ambos estudiantes. Además, los procedimientos utilizados y las observaciones desarrollados privilegian el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Lo correspondiente a la segunda parte del análisis del trabajo matemático personal de los estudiantes A1 y A2, también estructurado en tres ítems podemos inferir lo siguiente (ver páginas 56-64):
En referencia al ítem a: se observó que ambos estudiantes activaron el plano activación plana [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis].

En referencia al ítem b: estas acciones evidenciaron la activación del plano [Sem-Ins] y caracterizan su trabajo en el paradigma del Análisis Geométrico (AG)

En referencia al ítem c: las acciones analizadas de la estudiante A1 nos permiten evidenciar la activación el plano Semiótico Discursivo, a diferencia de las acciones del estudiante A2, que evidencia la activación del plano [Sem-Ins], pero ambos coinciden en su trabajo privilegiando paradigma del Análisis Geométrico (AG).

Lo correspondiente a la tercera y última parte del análisis del trabajo matemático personal de los estudiantes A1 y A2, estructurado en cinco ítems (ver páginas 65-78), se pudo evidenciar lo siguiente:
En referencia al ítem a: el estudiante A2 infiere verbalmente que se aproxima tanto que aparentemente cortará en un punto, donde además recalca que siempre existirá distancia entre esos puntos. Activa una génesis instrumental y una génesis semiótica utilizando como representamen el incremento, al igual que la estudiante A1, lo que nos permite observar la activación del plano [Sem-Ins] y que su trabajo está estructurado en el paradigma (AG).

En referencia al ítem b y c: ambos estudiantes activan una génesis instrumental al manipular el artefacto y luego una génesis semiótica que lo llevan a realizar tratamientos algebraicos, todo ello activa el plano. Las acciones del estudiante activaron el plano [Sem-Ins], asimismo su trabajo matemático privilegia el paradigma (AG). En referencia al ítem d: la estudiante A1 activa una génesis instrumental manipulando el mouse, de tal manera que acerca el punto B, lo que evidencia que activó una génesis semiótica, luego vuelve activar una génesis instrumental al utilizar el artefacto *lupa* y amplía este pedazo de recta y activando el proceso de visualización. Además, utilizando su referencial teórico sobre derivabilidad, infiere que es continua y por lo tanto es derivable. Lo que nos permite afirmar la activación de un de la génesis semiótica Podemos afirmar que, en consecuencia, esta estudiante activó parcialmente el plano [Sem-Ins] a diferencia del estudiante A2, que desarrolla tratamientos algebraicos necesarios y activa una génesis instrumental con el artefacto *lupa* para visualizar la recta y luego activa una génesis semiótica que afirma que la recta y la función f son casi indistinguibles y afirma que esta frente a una función derivable fundamentada en su referencial teórico y se evidencia la activación de su plano [Ins-Dis]. También realiza tratamientos algebraicos que le permite generalizar a la pendiente haciendo uso de su referencial teórico. El trabajo matemático queda enmarcado en el paradigma AG.

En referencia al ítem e: los estudiantes A1 y A2 infieren haciendo uso del registro de lengua natural cuando la recta y la curva se confunden y por ello son derivables, esto fundamentado en su referencial teórico sobe definiciones de derivabilidad. Además, con el nuevo referencial teórico adquirido en el ejercicio anterior, activan una génesis discursiva y formalizan la interpretación geométrica de la derivada

Alcanzados los objetivos específicos del presente estudio, podemos inferir que conseguimos estudiar lo propuesto en nuestro **objetivo general:**

"Analizar el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de Ingeniería cuando resuelven tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real"

El estudio del trabajo matemático personal de los alumnos de Ingeniería se realizó a través del análisis de las respuestas brindadas por cada uno de los estudiantes que fueron parte de nuestra investigación, todo bajo los fundamentos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM). En consecuencia, con estos alcances, podemos dar respuesta a la pregunta de investigación planteada lograr el objetivo general de investigación:

"¿Cuál es el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de Ingeniería al resolver tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real?"

Se observó el espacio de trabajo matemático personal desarrollado por los estudiantes A1 y A2, donde también se identificó que, con ayuda del GeoGebra y su referencial teórico, fue posible la activación de las diferentes génesis y que la relación de estas génesis logró activar algunos los planos verticales, como son el plano [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis].

Comentarios y sugerencias para futuras investigaciones

Según el trabajo realizado, observamos que es parte primordial, para un buen trabajo de investigación, el diseño de tareas adecuadas, muy bien direccionadas para que el estudiante logre activar los planos esperados y esto fue posible con la ayuda de referencial teórico y las herramientas brindadas en dicha investigación. Este diseño estuvo a cargo del docente investigador, que fue influenciado por su ETM personal, pero esperamos que sea lo más idóneo posible. Es bueno destacar que este trabajo es una propuesta y se puede ampliar la investigación y analizar estos diferentes Espacio de Trabajo Matemático referidos, ya que pudimos observar que son aspectos muy importantes que considerar.

El uso del software GeoGebra permitió las interacciones con las rectas, las pendientes y las aproximaciones de la recta secante. El análisis de los estudiantes se desenvuelve alrededor de una función sobre una función cuadrática considerada en la tercera actividad, lo que les permitió construir sus propias estrategias de solución activando las génesis, tal como se detalló anteriormente.

Puede extenderse esta investigación considerando el análisis sobre una función no derivable o haciendo uso del Teorema del valor medio, entre otros, para lo que creemos importante que debería programarse un número mayor de sesiones. También consideramos importante que el docente, en el desarrollo de sus sesiones de clase, promueva el análisis geométrico de las diferentes nociones tocadas, además de brindar al estudiante actividades que le permita al estudiante enmarcar su trabajo matemático los diferentes paradigmas en diferentes paradigmas de un dominio matemático.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*, 40-55. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510104

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/676/

Bustos, L. & Vásquez, J. (2016). *Uso del software CarMetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización*. (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Recuperado de http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2686

Espinoza,E. (2012).Análisis matemático I. Lima, Perú: Edukperu.

Gómez, M. (2017). Una propuesta para la enseñanza de la derivada basada en el aprendizaje autónomo. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, *4*(*8*) ,19-27. Recuperado de http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a28

Gómez-Chacón, M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *BOLEMA Boletín de Educación Matemática, 30*(54), 1-22. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01.

Gonzales, C., Vigo, K., Saravia, N., & Advíncula, E. (2018). Una secuencia didáctica para la comprensión del concepto de derivada mediada por el software GeoGebra. En Sema, Luis; Páges, Daniela (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1352-1358). México, DF. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/13653/1/Gonzalez2018Una.pdf

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación*. Ed. Mc Graw-Hill Interamericana. 5ta ed., p. 9.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. RELIME*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática* (4-1), 5-39. Recuperado de https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Menares, R (2016). Estudio del Espacio de Trabajo del Análisis de Profesores de Matemáticas en Chile: El Caso de las Funciones Continuas (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Mitacc,M. & Toro,L.(2009).Tópicos de cálculo volumen 1. Perú, Lima: Thales.SRL

Montoya, E., & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito grafico Cambios de dominios y de puntos de vista. En T. Gutiérrez (Presidencia). XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM 2015.Conferencia llevada a cabo en Chiapas, México. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/753/325

Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. (Tesis Doctoral).Universidad de Granada, España. https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/29940/22005493.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ruiz, K., Córdova, Y., & Rendón, C. (2014), La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. En: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (12-14, noviembre, 2014: Buenos Aires, Argentina). Recuperado de https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1190.pdf

Rodríguez, M., Pochulu, M., & Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *13*(3), 461-487. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/6970

Vázquez, M., & del Rincón, T. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 87-115. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/117981.pdf

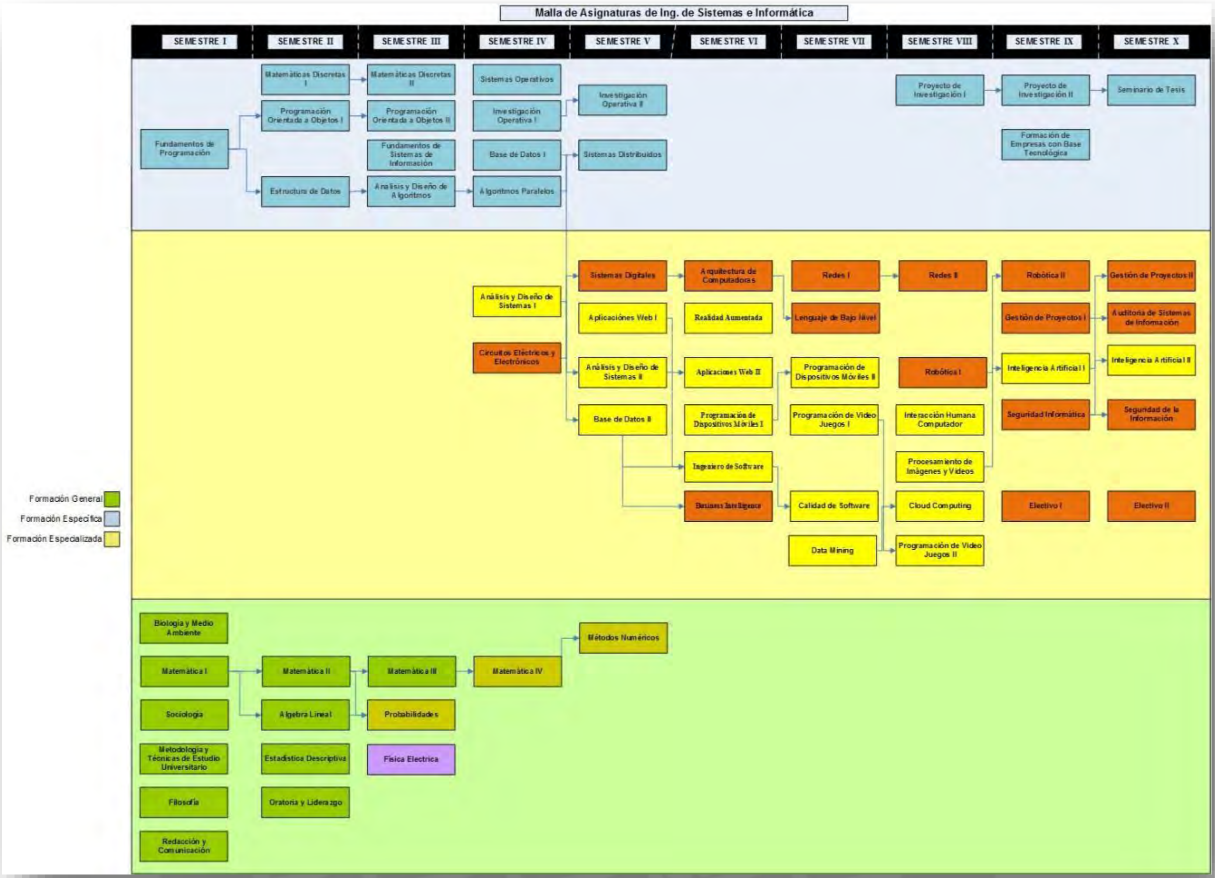
Vega, M., Carrillo, J., & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *BOLEMA Boletín de Educación Matemática,* *28*(48), 403-429. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123021

Vrancken, S., y Engler, A., Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad, *BOLEMA, Boletín de Educación Matemática, 28*(48), 449-468. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123021

ANEXOS

ANEXO A

MALLA CURRICULAR DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS



ANEXO B

Tarea Exploratoria

Apellidos y nombres : ____

Código : ____

1. ¿Qué entiende por recta tangente y recta secante? Explique detalladamente.

Recta tangente	Recta secante

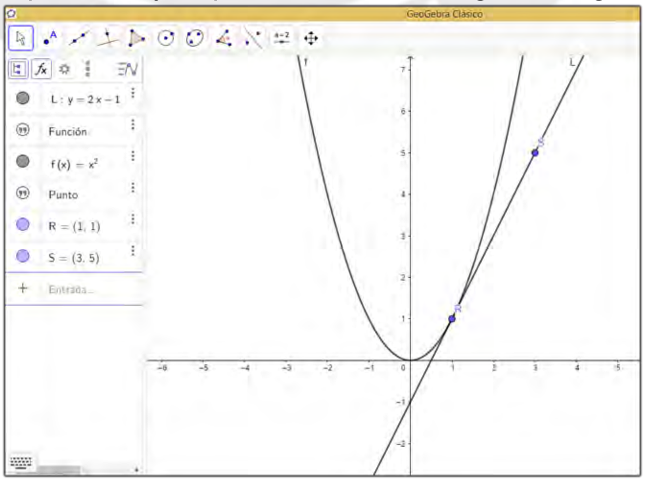
2. ¿Qué entiende por pendiente de una recta? Explique detalladamente.

Pendiente de una recta

3. Con la siguiente información, halle el valor de la pendiente de una recta que pasa por:

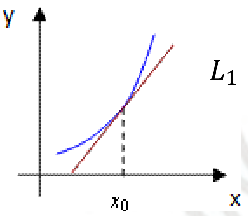
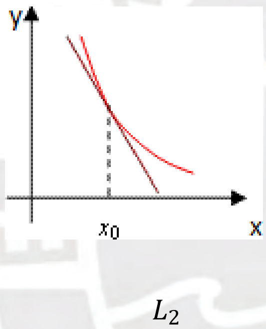
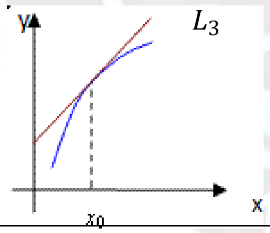
   a) Los puntos P (3,7) y Q (2,0)

   b) Los puntos R y S que se observa en siguiente figura:



   c) En base al ítem b), ¿podría identificar la pendiente de la recta L sin utilizar los puntos dados? Explique.

4. Observe las representaciones gráficas (A), (B) y (C) e indique cómo identifica si la pendiente de la recta es: positiva, negativa, cero o no existe.

Ítem	Representación gráfica	Completar
A		
B		
C		

5. Encuentre los siguientes límites:

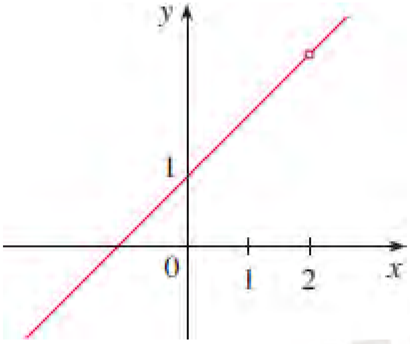
a)

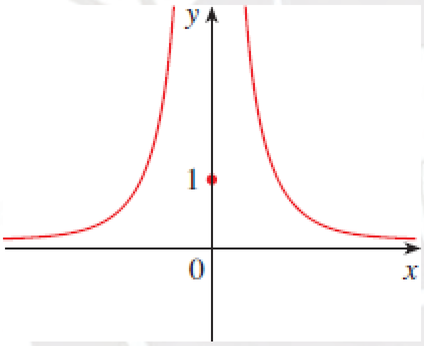
$$\lim_{x \to 0} (x^2 - 2) - \frac{x}{4}$$

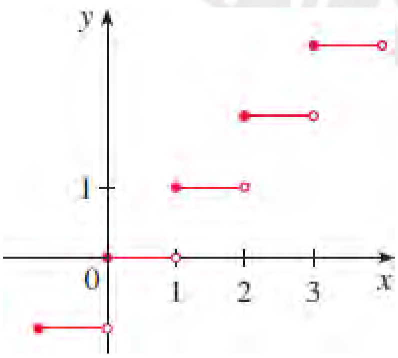
b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

6. Observe las siguientes funciones, analice y determine si existe el límite de la función cuando $x \to 0$. Explique:

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Representación gráfica</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>A</td><td>


$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$
</td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td>


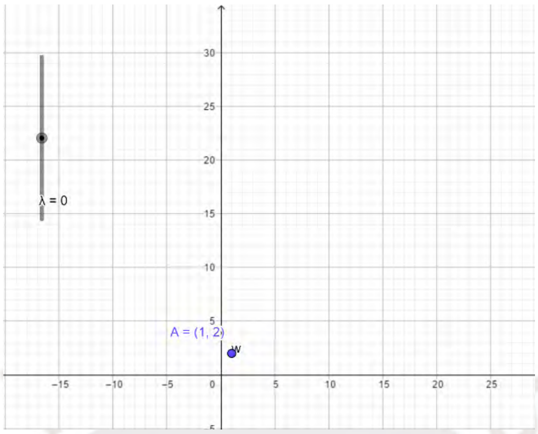
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>


$$f(x) = [\![x]\!]$$
</td><td></td></tr>
</table>

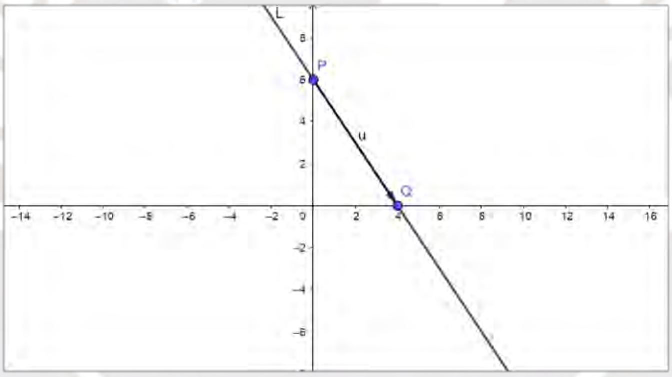
ANEXO C

IMÁGENES DEL ARCHIVO GEOGEBRA

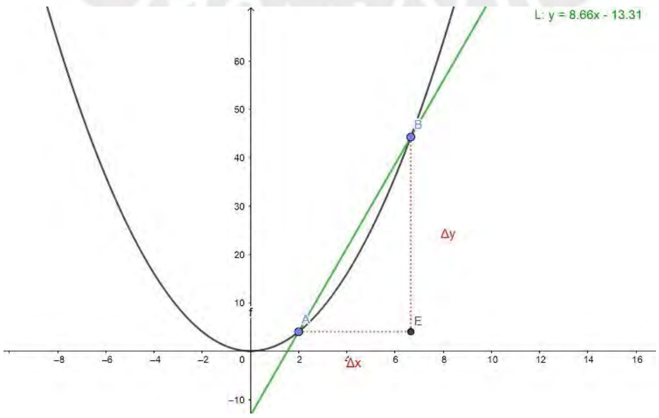
PRIMERA PARTE: **Archivo P1 de GeoGebra.**



SEGUNDA PARTE: **Archivo P2 de GeoGebra.**



TERCERA PARTE: **Archivo P3 de GeoGebra.**



ANEXO D

<u>Tarea 1 : Interpretación Geométrica de la Derivada</u>

Apellidos y nombres : ____

Código : ____

1. **Abra el archivo P1 de GeoGebra, realice las indicaciones que dé la profesora y responda las siguientes preguntas:**

a) ¿Qué cambios observa el mover el deslizador?

b) ¿Qué relación cree Ud. que tiene con la recta?

c) ¿Observa cambios en la ecuación paramétrica de la recta de la recta? Explique qué sucede.

2. **Abra el archivo P2 de GeoGebra, realice las indicaciones dadas y responda las siguientes preguntas:**

a) Como se observa, pueden manipularse los puntos P y Q sobre la recta y su ecuación varía. ¿A qué se debe eso?

b) Trata de eliminar “y” de la ecuación, fijarse con mover P y Q ¿Te basta con mover uno? Si necesitas precisión, puedes utilizar el teclado e ingresar su información.

c) Coloca los puntos en forma vertical. ¿Qué podrías afirmar sobre su pendiente?

3. Abra el archivo P3 de GeoGebra, utilizando la lupa amplié la imagen y responda las siguientes preguntas:

a) Acerque el punto B hacia el punto A, indique qué cambios observa

b) ¿Puede hallar la pendiente de la recta secante cuando B pasa por x= 10? y ¿Cuál es el incremento en x e y respecto al punto A?

c) ¿Puede hallar la pendiente de la recta secante cuando B pasa por x= 5?

d) ¿Qué sucede con la recta secante cuando se próxima cada vez más el punto B al punto A? Amplíe la imagen y halle la pendiente de la recta cuando el $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta x = h$ en un punto cualquiera. Explique.

e) ¿Podemos afirmar que en ese punto la recta y la curva se confunden?

ANEXO E

FICHA DE OBSERVACIÓN

Nombres y apellidos del observador: ________________________________

Tiempo de observación : ________________________________

Fecha : ________________________________

TAREA 1:

Describa las acciones que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la Tarea 1.

ITEM a)	
ITEM b)	
ITEM c)	

Detalla las dificultades observadas en las acciones del estudiante.

ITEM A	
ITEM B	
ITEM C	

Aspectos relevantes de su observación.

TAREA 2:

Describa las acciones que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la Tarea 2.

ITEM a)	
ITEM b)	
ITEM c)	

Detalla las dificultades observadas en las acciones del estudiante.

ITEM a)	
ITEM b)	
ITEM c)	

Aspectos relevantes de su observación.

TAREA 3:

Describa las acciones que realizan los estudiantes durante el desarrollo de la tarea 3

ITEM a)	
ITEM b)	
ITEM c)	
ITEM d)	
ITEM e)	

Detalla las dificultades observadas en las acciones del estudiante.

ITEM a)	
ITEM b)	
ITEM c)	
ITEM d)	
ITEM e)	

Aspectos relevantes de su observación.
